Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

Entre o formal e o intuitivo: atitudes dos estudantes em atividades de investigação matemática sobre pontos notáveis de triângulos.

Arlis dos Santos Amorim
Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi

São Paulo

Setembro/2022

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

Entre o formal e o intuitivo: atitudes dos estudantes em atividades de investigação matemática sobre pontos notáveis de triângulos.

VERSÃO CORRIGIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi.

São Paulo

Setembro/2022

Entre o formal e o intuitivo: atitudes dos estudantes em atividades de investigação matemática sobre pontos notáveis de triângulos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi.

Banca examinadora

Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi (IME-USP)

Orientador

Profª. Drª. Cristina Dalva Van Berghem Motta (FEDUC)

Prof. Dr. Vinício de Macedo (FE-USP)

Agradecimentos

Aos meus pais Arnaldo (*in memorian*) e Luzia, a meus irmãos e à minha companheira de vida, Debora, por todo o apoio e paciência nos momentos de ausência ao longo da escrita deste projeto.

Ao professor Dr. Antonio Carlos Brolezzi por todas as trocas, aprendizado e paciência em me auxiliar no desenvolvimento do meu trabalho.

Aos membros da banca, professora doutora Cristina Motta e professor doutor Vinício de Macedo por todas as sugestões feitas.

Aos meus colegas e professores da graduação e do mestrado, que tanto contribuíram com a minha formação.

Aos meus colegas de trabalho, em especial o Antônio Corte, pela amizade, confiança e todos os ensinamentos.

Resumo

AMORIM, A. S. **Entre o formal e o intuitivo: atitudes dos estudantes em atividades de investigação matemática sobre pontos notáveis de triângulos**. Dissertação de mestrado – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2022.

Esta pesquisa tem como objetivo central analisar as consequências pedagógicas do uso do Geogebra no processo de ensino e aprendizagem dos pontos notáveis de um triângulo em atividades de investigação matemática.. A partir de uma abordagem qualitativa, utilizando uma pesquisa bibliográfica e uma análise de sequência de atividades, buscamos responder “Quais são os impactos que uma sequência didática, constituída a partir dos pressupostos do processo investigativo, provoca nas atitudes dos estudantes em relação à matemática?”. A sequência didática foi aplicada em três turmas de nono ano de uma escola da rede privada da zona sul de São Paulo. Cada turma era composta por 34 alunos, em média, e a pesquisa de campo foi realizada no período de 13 de outubro a 03 de novembro de 2021, percorrendo 6 aulas de 70 minutos. A partir da análise das construções, inferências feitas pelos discentes e das observações realizadas pelo pesquisador, foi possível concluir que a utilização do programa geogebra a uma sequência didática pautada em pressupostos investigativos, gerou um engajamento na construção dos conceitos acerca dos pontos notáveis dos triângulos e, além disso, percebemos indícios relacionados às mudanças na concepção/atitudes em relação ao ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Geogebra, Atitudes, Pontos notáveis de um triângulo, Geometria, Investigação matemática, formal, intuitivo.

Abstract

AMORIM, A. S. **Between the formal and intuitive: The student's attitudes in activities of mathematical investigations about notable points of triangle**. Master Thesis – Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, 2022.

The main objective of this research is to analyze pedagogical consequences of the use of Geogebra in teaching and learning process towards notable points of a triangle. Based on a qualitative perspective, with the use of bibliographic research and sequence of activities analysis, we seek to answer the following question: "What impacts does a didactic sequence, based on investigative process assumptions, cause on student attitudes towards mathematics?". A specific didactic sequence was applied in three ninth grade groups of a private school in the south region of Sao Paulo. Each class consisted of 34 students, on average, and the field research was carried out from October 13 to November 3, 2021, covering 6 classes of 70 minutes each. Through the analysis of students' constructions, inferences made by them and observations made by the researcher, it was possible to conclude that the use of *Geogebra* program in a didactic sequence based on investigative assumptions generated engagement in the construction of concepts about notable points of triangles. In addition, we noticed evidence related to changes in conception/attitudes regarding teaching and learning process.
Keywords: Geogebra, Attitudes, Notable points of triangle, geometry, Mathematical investigation, Formal learning, Intuitive learning.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de abreviações

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação

PCN – Parâmetros curriculares nacionais

Sumário

INTRODUÇÃO

Desde a minha infância fui apaixonado pelos estudos, em especial pela matemática. Lembro-me ainda dos meus primeiros momentos com a educação, indo à casa de um amigo, o Bruno, para estudar junto a ele – ainda no ensino fundamental 1. Na época, ele apresentava dificuldades na disciplina, e eu compreendia facilmente o que a professora explicava. Essa admiração pela matemática me acompanhou ao longo de todo o percurso escolar, junto de uma ansiedade em saber sempre o que viria após cada um dos conteúdos que se iniciava ao longo das aulas desta disciplina.

Comecei a minha vida profissional aos 16 anos, após passar por um processo seletivo do governo do estado de São Paulo para um estágio de ensino médio, cuja função era ser monitor da sala de informática. O auxílio aos professores e professoras na utilização da sala de informática para a aplicação das tecnologias nas aulas fez com que crescesse aquele meu sonho de ser professor, escrito em uma das atividades do portfólio de língua portuguesa, proposto pela professora Deborah, enquanto eu estava na sexta série do ensino fundamental 2.

A conclusão do ensino médio se deu em 2010 e, no ano seguinte, ocorreu meu ingresso na universidade. Estava completamente feliz no curso até perceber que, por mais que eu fosse um estudante acima da média na escola, isso não se estenderia automaticamente à graduação. Depois de uma conversa com a professora Claudia Cueva, ao fim do primeiro semestre, que sensivelmente mostrou que a minha dificuldade nas disciplinas estava atrelada à falta de conteúdos da educação básica, fui atrás do prejuízo, retomei alguns livros do ensino médio e consegui superar as dificuldades que persistiam durante aquele período.

A aproximação com o tema de geometria aconteceu ao longo dos segundo e terceiro anos da graduação, quando tive acesso às disciplinas de desenho geométrico. Fiquei encantando com os conteúdos desenvolvidos ao longo do curso de Desenho Geométrico II e as lousas impecáveis do professor Sérgio Alves. Diga-se de passagem, que foi o primeiro momento na vida em que utilizei instrumentos de construção geométrica, como o compasso e o transferidor. Chama a atenção na formação dos estudantes, não só na minha, o fato de não ter tido acesso aos instrumentos citados ao longo da educação básica, uma vez que a utilização destes materiais está prevista no currículo do estado de São Paulo e, além disso, a manipulação deles auxilia na construção dos conceitos geométricos.

No quarto ano da graduação, tive a oportunidade de cursar um semestre da faculdade no exterior. Frequentei, durante o primeiro semestre, a faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Ao longo desse período, cursei três disciplinas, sendo que apenas uma delas estava relacionada ao currículo da licenciatura em Matemática (Álgebra II) e as outras duas fiz com o objetivo de ampliar as minhas vivências em outras áreas (Economia e Computação), as quais foram utilizadas como créditos livres na conclusão do meu curso. Foi um período muito importante para o desenvolvimento pessoal e intelectual, mas também bastante desafiador, principalmente pelas características do processo avaliativo da universidade, a qual oferecia apenas uma prova ao final do período letivo com os conteúdos desenvolvidos ao longo de todo o semestre. Vale ressaltar que tudo ocorreu da melhor forma e obtive 100% de aproveitamento.

No segundo semestre do mesmo ano, passei a estagiar em uma escola particular de classe média alta na zona sul de São Paulo, que possui o curso de desenho geométrico no currículo do 9º ano do ensino fundamental. Ao longo do meu período como estagiário, tive a oportunidade de ser assistente da professora que lecionava esta disciplina e a minha paixão pelos conteúdos ali tratados só aumentou. Em 2017, me tornei professor desta disciplina na mesma instituição de ensino e, após fazer várias reflexões acerca das possibilidades de pesquisa no curso de mestrado, cheguei à ideia de investigar a própria prática a partir de atividades mediadas por um programa de *geometria dinâmica*, cuja característica principal é a possibilidade de movimentar as construções geométricas com o cursor do mouse, ao mesmo tempo em que as medidas, características e propriedades são atualizadas, ligadas a uma metodologia investigativa. Essa metodologia traz, como pressuposto, um processo orientado de condução dos estudantes na construção do conhecimento de forma autônoma, cuja figura do professor é vista como a de facilitador do conhecimento, não o transmissor.

Sendo assim, adaptei uma sequência didática já existente para os moldes exploratórios/investigativos com o intuito de fazer com que os(as) estudantes conseguissem levantar hipóteses relacionadas às propriedades dos *pontos notáveis dos triângulos*. Os pontos notáveis dos triângulos são obtidos por meio das intersecções das cevianas – segmentos de reta que unem um vértice a um dos lados do triângulo, e das mediatrizes dos lados dessa figura. Após a construção dos pontos notáveis, os estudantes levantaram hipóteses e, em seguida, fizeram testes por meio da movimentação das construções, com o objetivo de comprová-las ou refutá-las. Propõe-se, então, uma mudança ao que entendemos por ensino tradicional, a qual refere-se à apresentação de ideias e procedimentos matemáticos precedidos à resolução de exercícios.

O nosso trabalho utiliza-se de uma sequência de atividades investigativas para analisar as relações entre aspectos: *intuitivo* – quando há a utilização da intuição na conclusão de um fato; *algorítmico* – ao se utilizar de procedimentos; e, *formal* – quando há o emprego de uma linguagem estruturada na construção do conhecimento e como essas características influenciam nas *atitudes dos estudantes.* Na educação matemática, denomina-se por atitudes dos estudantes a forma como os alunos concebem o ensino e a aprendizagem desta disciplina.

A partir do que foi citado anteriormente e de um levantamento bibliográfico, propõe-se uma análise do ensino dos pontos notáveis do triângulo com base nos pressupostos investigativos mediados por um programa de geometria dinâmica, além de uma reflexão acerca de como essa metodologia pode fomentar a construção do conhecimento relacionado ao tema citado.

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo tem como objetivo a apresentação das considerações preliminares acerca do ensino do desenho geométrico que justificam a opção do autor pelo tema de pesquisa.

No segundo capítulo, apresentamos um levantamento das ideias acerca das atitudes em relação à matemática sob os olhares de Brito (1996) e Marmit (2009). Em um segundo momento, discutimos as concepções relativas aos aspectos intuitivo, formal e algorítmico defendidas por Fischbein (1994) para compreender como esses eixos se relacionam para a consolidação dos conteúdos matemáticos. Trouxemos também as principais ideias do ensino investigativo de matemática, a partir dos olhares de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (2015), uma vez que a sequência didática proposta neste objeto de pesquisa está relacionada a esta metodologia. Além disso, discorremos sobre as indicações e/ou recomendações para o trabalho com os pontos notáveis, construções geométricas, tecnologia e investigação tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) quanto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No terceiro capítulo, apresentamos o software *Geogebra*, suas potencialidades, características e as principais ferramentas que foram utilizadas pelos estudantes durante a aplicação da sequência didática proposta neste estudo.

O capítulo 4 foi destinado à metodologia de pesquisa empregada na pesquisa, assim como uma breve a descrição da sequência didática. A análise da aplicação das atividades foi feita no capítulo 5.

A seção seguinte trará breves aspectos históricos acerca do lugar ocupado pela disciplina de desenho geométrico nos últimos anos, assim como dois exemplos de abordagem de conteúdos relacionados a este campo de conhecimento.

1. CONSIDERAÇÕES ACERCA DO ENSINO DO DESENHO GEOMÉTRICO

O ensino do desenho geométrico esteve presente no currículo escolar brasileiro entre 1931 e 1971, segundo Oliveira (2015), quando foi promulgada a lei 5.692 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) que dividia as disciplinas do currículo em dois núcleos: obrigatório e optativo.

Zuin (2001) cita que, com a implantação desta lei, o curso de desenho geométrico foi abandonado radicalmente em algumas instituições de ensino, gradativamente em outras, ou ainda constava na grade curricular, mas o programa não era cumprido. Segundo a autora, esse fato ocorreu por causa da mudança de exigências nos exames de vestibulares dos cursos de Arquitetura e Engenharias. Técnicas de construções geométricas deixaram de ser exigidas nestas avaliações, e isso fez com que a disciplina passasse a compor uma cadeira optativa da parte diversificada do segundo grau, o que conhecemos hoje por ensino médio.

Mesmo não sendo uma disciplina que compõe o currículo escolar brasileiro, algumas escolas optaram pela manutenção do ensino do desenho geométrico em seus programas. Houve escolas que diluíram os conteúdos relacionados às construções geométricas nas aulas de matemática e, em outras, ela aparece como uma disciplina separada, como é o caso do colégio selecionado para a aplicação desta pesquisa. A permanência do Desenho Geométrico como disciplina separada esteve relacionada às opções dos gestores e ao projeto político pedagógico de cada uma das instituições (ZUIN, 2001).

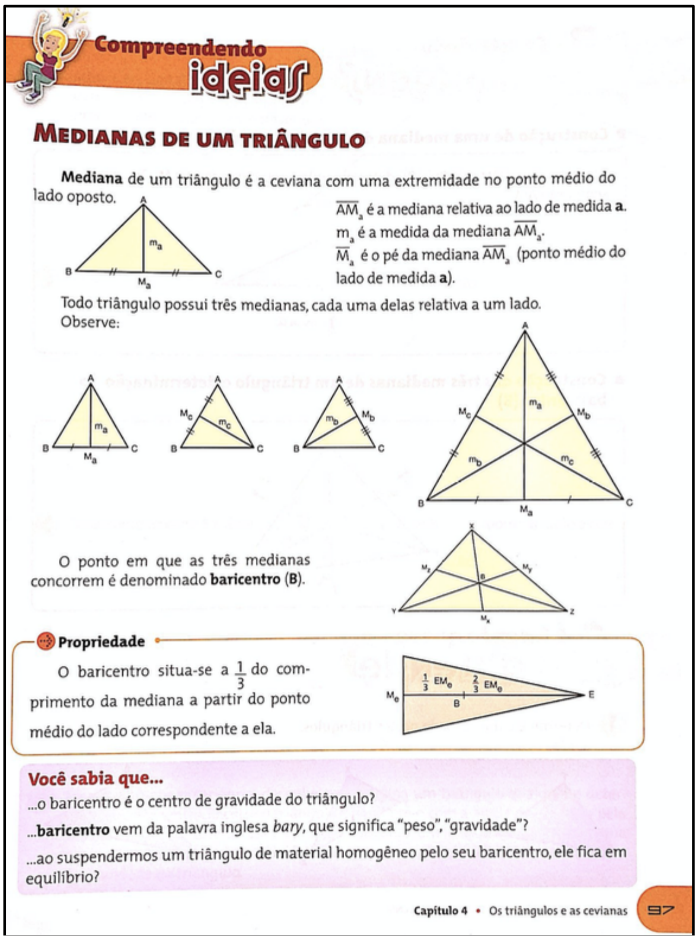
Houve também escolas que transferiram os conteúdos do desenho geométrico para a disciplina de artes, o que pode ter mudado completamente a característica e o viés da Cadeira. Um professor de Artes pode não ter a formação em uma geometria dedutiva, o que muito provavelmente o professor de Matemática teria. Este é um exemplo em que o curso teve uma mudança no foco, uma vez que os docentes das Artes visam a construção do desenho para o uso em trabalhos artísticos, já os professores de Matemática podem ter como objetivo a justificativa conceitual da construção geométrica (SEERBAN, 2018).

Uma outra questão que pode ser destacada é o fato de as construções geométricas serem realizadas a partir de um conjunto de algoritmos, ou seja, uma sequência de passos que pode ser memorizada sem que os estudantes se preocupem com o motivo pelo qual tais construções são possíveis.

Nota-se que esse movimento de retirada do curso de desenho geométrico da grade curricular comum, diante da falta de interesse das construções com régua e compasso nos vestibulares, fez com que alguns problemas relacionados ao rigor matemático nas construções geométricas surgissem, como, por exemplo, a explicitação de propriedades matemáticas sem mostrar de onde – e como – vieram, ou ainda, a apresentação de um roteiro pronto, que pode levar os estudantes a refletirem pouco sobre os motivos pelos quais tais passos geram a construção pedida.

Fischbein, em seu trabalho de 1994, defende o papel do algoritmo na aprendizagem dos conceitos matemáticos, mas explicita que eles devem estar relacionados aos aspectos formais e intuitivos para que os estudantes sejam capazes de produzir as ideias matemáticas, argumentar, construir provas e avaliar a validade das produções, fundamentos da investigação matemática no ensino. Na seção 2.2 discorreremos sobre as principais ideias deste autor.

Ilustraremos, a seguir, dois exemplos de situações propostas nos livros “Desenho Geométrico, ideias e imagens” de Sonia Jorge e "Desenho Geométrico – Volume 3", de Isaías Marchesi Júnior. A primeira imagem traz a definição das medianas e a propriedade do baricentro sem explicitar o motivo pelo qual tal afirmação é válida.



Compreendendo ideias

MEDIANAS DE UM TRIÂNGULO

Mediana de um triângulo é a ceviana com uma extremidade no ponto médio do lado oposto.

$\overline{AM_a}$ é a mediana relativa ao lado de medida **a**.
m_a é a medida da mediana $\overline{AM_a}$.
$\overline{M_a}$ é o pé da mediana $\overline{AM_a}$ (ponto médio do lado de medida **a**).

Todo triângulo possui três medianas, cada uma delas relativa a um lado. Observe:

O ponto em que as três medianas concorrem é denominado **baricentro** (**B**).

Propriedade

O baricentro situa-se a $\frac{1}{3}$ do comprimento da mediana a partir do ponto médio do lado correspondente a ela.

Você sabia que...

...o baricentro é o centro de gravidade do triângulo?

...**baricentro** vem da palavra inglesa *bary*, que significa "peso", "gravidade"?

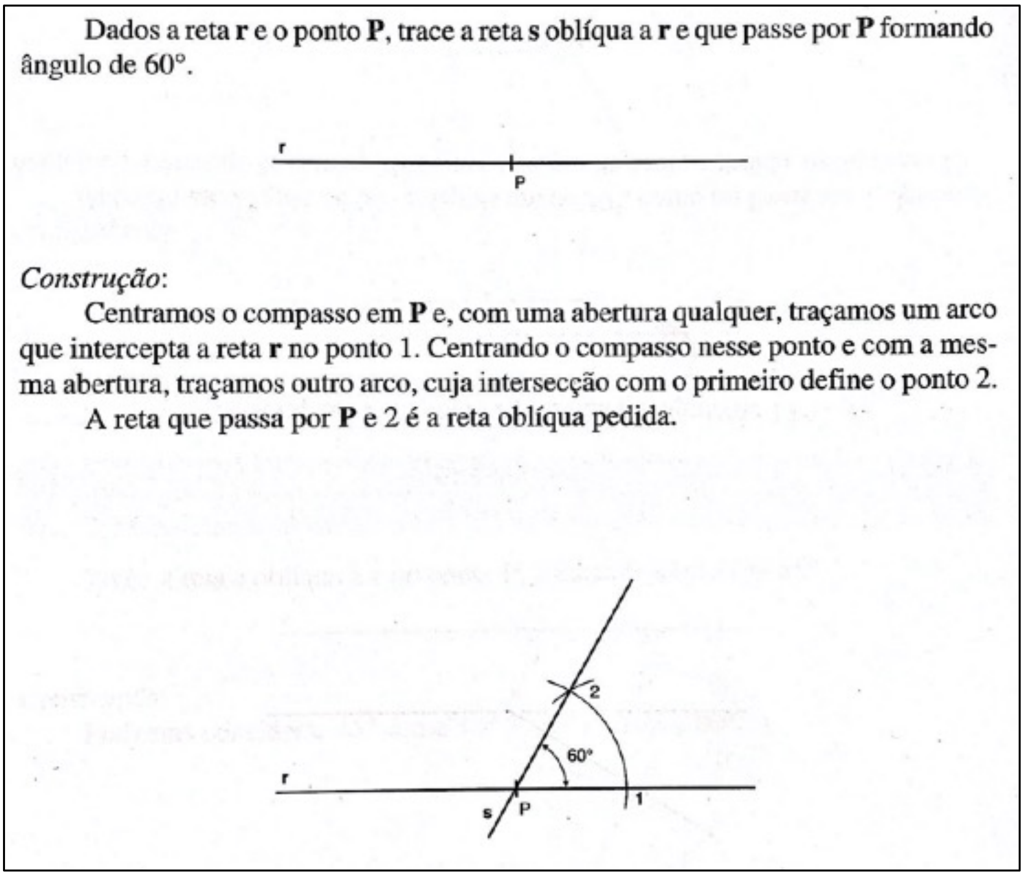
...ao suspendermos um triângulo de material homogêneo pelo seu baricentro, ele fica em equilíbrio?

Capítulo 4 • Os triângulos e as cevianas 97

Figura 1 - Propriedade do baricentro
Fonte: Desenho Geométrico - Ideias e imagens – volume 3 – Sonia Jorge, 2008, p. 97

A escolha dos livros esteve atrelada à busca por exemplos de situações que apreciam os roteiros de construção ou da apresentação de conceitos sem dar indícios dos motivos pelos quais eles são válidos. Esses tipos de situação, a nosso ver, estão relacionadas ao método tradicional de ensino. Powell e Bairral (2006) falam que o método de ensino tradicional na matemática se dá por meio de experiências, as quais apresentam a matemática de uma forma preconcebida, atomizada, em que predominam as regras. Consequentemente, a aprendizagem torna-se, em grande medida, uma atividade intelectual passiva na qual a necessidade de construção de significado é minimizada.

Faz-se necessário estreitar as relações entre experiência e reflexão, uma vez que “o conhecimento não se situa apenas na experiência, mas também nos atos mentais que são experimentados” (POWELL; BAIRRAL, 2006). Diante do exposto, compreendemos que, ao realizar essas conexões, os estudantes podem ampliar a percepção acerca dos conteúdos e que a experiência, por si só, pode não gerar os resultados pretendidos. Vejamos agora um exemplo de uma construção que valoriza o aspecto algorítmico.


Dados a reta **r** e o ponto **P**, trace a reta **s** oblíqua a **r** e que passe por **P** formando ângulo de 60°.

Construção:

Centramos o compasso em **P** e, com uma abertura qualquer, traçamos um arco que intercepta a reta **r** no ponto 1. Centrando o compasso nesse ponto e com a mesma abertura, traçamos outro arco, cuja intersecção com o primeiro define o ponto 2.

A reta que passa por **P** e 2 é a reta oblíqua pedida.

Figura 2 - Roteiro de construção de uma reta oblíqua formando um ângulo de 60º
Fonte: Desenho Geométrico. Isaías Marchesi Junior – volume 4, p. 17

Diante do exemplo exposto na figura 2, pensamos:

- Será que os estudantes percebem que há a intersecção entre duas circunferências de mesmo raio?
- Será que os alunos e alunas percebem que a intersecção das circunferências construídas determina três pontos equidistantes?
- Será que os educandos percebem que os três pontos equidistantes, quando conectados, geram um triângulo equilátero e, por consequência, os ângulos de 60º?

Certamente existem estudantes que responderiam de forma positiva a todas as indagações. Mas, uma das hipóteses levantadas é que este tipo de abordagem pode excluir o raciocínio, ou seja, a identificação ou descoberta de fatos que os alunos e alunas poderiam ter feito para chegar à construção pedida. Destacamos, portanto, situações que privilegiam a abordagem algorítmica e repetitiva.

Sirotic e Zazkis (2007) sustentam que aspectos algorítmicos possuem papéis importantes na concepção da aprendizagem, mas que, idealmente, as três dimensões do conhecimento (intuição, formalismo e algoritmo) devem se relacionar para que haja uma consolidação dos conceitos. Tais dimensões serão descritas com mais detalhamento na seção 2.2, a partir das definições levantadas por Fischbein (1994).

Defendemos a ideia de que é importante utilizarmos diferentes estratégias para o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes e, para isso, os professores e professoras devem incluir atividades que os levem a justificar os procedimentos realizados para que haja tomada de consciência do processo, a fazer constatações e, possivelmente, demonstrações.

Nota-se que as abordagens citadas nos levam a perceber que temos um modelo de aula que está mais centrado na exposição dos conteúdos, valorizando a memorização e reprodução de procedimentos, do que numa construção de raciocínio por meio da dedução, da investigação e da modelagem matemática (SEERBAN, 2018). Propomos, portanto, neste trabalho, uma sequência que esteja ligada aos pressupostos investigativos, ou seja, que valorize o levantamento de hipóteses, a reflexão, os testes para validação ou refutação de ideias identificadas ao longo do processo, completamente oposto ao que tradicionalmente acontece nas aulas de matemática.

A sequência didática que será apresentada nas próximas seções tem como objetivo as construções dos pontos notáveis em triângulos e as constatações das propriedades atreladas a eles, a partir da utilização do *software* de geometria dinâmica *Geogebra* e dos pressupostos do ensino de matemática por investigação, trazidos por João Pedro da Ponte, Joana

Brocardo e Hélia Oliveira (2015). No próximo tópico, discorreremos acerca deste conceito e sobre as ideias relacionadas às atitudes de um estudante à visão da educação matemática e as relações entre os aspectos algorítmico, intuitivo e formal.

2. O REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 As atitudes em relação à matemática

Neste trabalho, buscamos compreender a mudança das atitudes que podem ser desencadeadas por parte dos estudantes a partir da escolha metodológica feita pelos docentes. Sendo assim, iniciaremos a discussão a partir da definição proposta por Brito (1996, p. 11), que diz que atitude poderia ser definida por uma

> disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor.

A autora coloca, no trabalho citado anteriormente, que a utilização desse termo foi sendo alterado ao longo dos anos, saindo de uma concepção que estava mais ligada ao somático, ou seja, atrelada ao corpo, para um lugar relacionado aos aspectos cognitivos e afetivos. Em vista disso, percebemos que a atitude não pode ser empregada como sinônimo de comportamento e que não é algo imutável.

Marmit (2009) relaciona atitudes a concepções, evidenciando que a primeira é uma importante informadora da segunda. Concepção está sendo empregada em relação às visões em torno da matemática e de seu ensino/aprendizagem. A autora defende que as concepções são constituídas, em sua grande maioria, na escola pelos professores de Matemática, e que elas são responsáveis pela dedicação e a motivação empregada a esta disciplina.

A autora define a atitude como uma “posição pessoal diante de situações que estimulem alguma reação” (2009, p. 20) e defende que os educadores que possuem atitudes positivas em relação à matemática acabam estimulando os(as) estudantes a diversas tomadas de atitudes positivas, assim como à criação de concepções positivas. Mas o caminho pode ser contrário caso os(as) professores apresentem atitudes negativas em relação à Matemática. Tortora, Sander e Pirola (2013) apontam que existem outras influências para a aprendizagem de atitudes em relação à Matemática, seja positiva ou negativamente, como a influência da família e da confiança. Os autores colocam ainda que quando as atitudes dos educadores são positivas, estimulam o desenvolvimento da autonomia na construção de um saber crítico e reflexivo.

As concepções dos educadores em relação à Matemática podem definir a forma como a disciplina é exposta aos estudantes. De acordo com as ideias de Chacón (2003) citadas por Marmit (2009), há professores que observam a Matemática como uma ferramenta e que, consequentemente, a veem como uma disciplina que engloba apenas fórmulas e procedimentos e que não necessita estar dentro de um contexto. Outros enxergam a Matemática como um conhecimento estático, de modo que ela não possa ser criada e tampouco repensada e que prioriza a lógica e os procedimentos. Por fim, há aqueles que a observam como uma área dinâmica que está sempre em expansão, que está aberta a novos resultados e procedimentos.

De acordo com a proposta desta pesquisa, nos observamos como educadores que enxergam a matemática de uma forma dinâmica, dado que nosso papel está atrelado a uma orientação da aprendizagem, uma vez que o objetivo é fazer com que os estudantes possam construir o conhecimento de forma autônoma. Essa proposta busca modificar as concepções que a maioria dos estudantes possuem em relação ao ensino e aprendizagem.

Para o desenvolvimento destas atitudes positivas em relação à Matemática e a mudança na concepção de aprendizagem, buscamos utilizar as ideias relacionadas aos aspectos intuitivo, algorítmico e formal defendidas por Fischbein (1994), que serão apresentadas na próxima seção.

2.2 O formal, o algorítmico e o intuitivo

O ensino de matemática, muitas vezes, está pautado na definição de conceitos e na compreensão de aspectos essenciais na resolução de exercícios ou problemas. Sendo assim, não é incomum situações nas quais professores e professoras que lecionam esta disciplina se valem do caráter formal e rigoroso do saber matemático e impõem determinadas verdades universais e inquestionáveis em sala de aula. A proposta desta seção é compreender outros aspectos essenciais, defendidos por Fischbein (1994) para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. O autor diz, em seu trabalho,

> Queremos que eles aprendam não apenas a sequência formal dedutiva de afirmações que conduzem a um teorema, mas também se tornem capazes de produzir, por si mesmos, afirmações matemáticas, construir as respectivas provas, avaliar não apenas formalmente, mas também intuitivamente, a validade das afirmações matemáticas (FISCHBEIN, 1994, p. 231, tradução nossa).

Um dos objetivos deste trabalho é fazer com que os estudantes sejam capazes de produzir conhecimentos relacionados aos pontos notáveis de um triângulo, o que faz jus à ideia trazida na citação anterior. Os alunos e alunas serão levados a produzirem conjecturas por meio de atividades investigativas criadas em um ambiente de geometria dinâmica. Este ambiente permite, de forma ágil, a avaliação da validade ou invalidade das hipóteses que serão levantadas ao longo da investigação.

Fischbein (1994) considera que o desenvolvimento do conhecimento matemático decorre da integração de três componentes, sendo eles o intuitivo, algorítmico e formal.

1. **O componente intuitivo** faz referência ao que o estudante considera natural e que o faz aceitar uma ideia sem questionar ou sem sentir uma necessidade de uma justificativa que legitime tais ideias. As intuições podem desempenhar um papel facilitador no processo de instrução, mas, eventualmente, contradições podem aparecer ao longo do percurso, segundo Fischbein (1994).
2. **O formal** tange às definições, axiomas, teoremas e provas, que devem ser consolidados, organizados e aplicados pelos alunos e alunas. O autor cita que a compreensão do rigor matemático não faz parte das aquisições espontâneas por parte dos estudantes e que apenas um processo de instrução adequado é capaz de moldar e se transformar em realidades mentais.
3. **O algorítmico** está relacionado às aplicações de técnicas e procedimentos padronizadas na resolução de problemas. Fischbein (1994) explicita a ideia de que é pura ilusão acreditar que somente conhecer os axiomas, teoremas, provas e definições torna os estudantes capazes de resolver os problemas matemáticos.

Segundo Fischbein (1994) *apud* Corbo e Pietropaolo (2019), a exploração da íntima relação entre o aspecto algorítmico e o formal constitui-se em condição básica para o desenvolvimento de um raciocínio matemático eficiente. Corbo e Pietropaolo (2019, p. 210) dizem que

> o conhecimento de componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas e, por outro lado, o domínio de técnicas, isento do conhecimento de argumentos que justificam essas técnicas, pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão.

Vale ressaltar que a proposta da sequência didática utilizada neste objeto de pesquisa tem como base o eixo intuitivo, uma vez que os estudantes serão levados a investigarem propriedades dos pontos notáveis dos triângulos em construções geométricas feitas em um *software* de geometria dinâmica. Nesta etapa, os estudantes vão em busca de percepções de padrões e regularidades e da avaliação da validade das proposições por meio dos testes em diferentes tipos de triângulos. Esses testes ocorrem pela movimentação dos vértices do polígono, por meio da variação das classificações dos triângulos.

A parte formal é feita posteriormente a partir de discussões coletivas. Neste momento, os estudantes estarão com os registros que serão feitos ao longo do desenvolvimento da investigação e, a partir de uma conversa, os alunos e alunas serão convidados a compartilharem suas percepções. É interessante dizer que o pesquisador vai validando ou invalidando a partir de testes em construções feitas pelos estudantes e que foram previamente selecionadas, mas que não ocorre a demonstração dos resultados.

Após o momento da formalização dos conceitos, os estudantes passam a aplicar os padrões observados em exercícios que exigem a utilização da régua e compasso, empregando o aspecto algorítmico de cada uma das construções necessárias – o que já é previamente conhecido pelos alunos e alunas. Essas etapas exploram a relação entre os três eixos. Veremos, a seguir, os aspectos importantes do ensino de Matemática por investigação, o qual foi o suporte para a adequação das atividades.

2.3 O ensino de matemática por investigação

O ensino de Matemática por investigação constitui um modelo diferenciado bastante poderoso no processo de construção do conhecimento com o objetivo de descobrir as relações entre os objetos matemáticos e de identificar as respectivas propriedades. Entendemos que o trabalho com este tipo de ensino não está ligado somente à utilização de problemas muito difíceis ou problemas que se encontram no limite do conhecimento, muito pelo contrário. O ensino investigativo tem o intuito de trabalhar com questões que são confusas no início, para as quais ainda não se tem a resposta certa, mas que a resposta é buscada de um modo fundamentado, para organizar o conhecimento e clarear as ideias, levando à formulação de conjecturas, que são testadas e provadas, se for o caso.

Vamos analisar o quadro comparativo abaixo, proposto por Trindade (2008), para que possamos perceber as diferenças entre um problema matemático e uma investigação matemática:

PROBLEMA MATEMÁTICO	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
"Uma situação na qual um indivíduo ou um grupo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não há algoritmo imediatamente acessível que determine completamente o método de solução" (Ernest). "Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado" (Pólya).	É um termo genérico que designa a atividade dos matemáticos profissionais no desenvolvimento do novo conhecimento. É a procura, a ação de investigar, o exame sistemático, a inquirição.
O verbo mais usado é "resolver".	O verbo mais usado é "investigar".
É uma atividade convergente.	É uma atividade divergente.
Tem objetivo conhecido.	É um problema aberto.
Procura um método.	Procura um objetivo.
Permite procurar um caminho que o leve à solução.	Permite explorar caminhos de forma criativa e independente sem o compromisso de chegar ao fim.
Processos: • ter uma questão para resolver; • querer encontrar uma resposta;	Processos: • exploração de possibilidades; • formulação de conjecturas;

• não tê-la de antemão; • ter como conseqüência a construção de uma resposta (Vianna); “ É bom trabalhar em qualquer problema desde que ele gere Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolver até o fim” (Andrew Wiles).	• procura de argumentos que validem as descobertas realizadas (Ernest). “Uma investigação é como que uma viagem ao desconhecido, a estrada é o objetivo e não a chegada”.

Tabela 1 - Quadro comparativo entre Problema Matemático e Investigação Matemática
Fonte: TRINDADE (2008, p. 154-155)

A partir da análise da tabela, notamos que as características mais visíveis – e associadas ao aspecto investigativo em nosso trabalho – estão ligadas aos processos. Uma vez que, ao longo das tarefas, os estudantes vão explorar uma série de triângulos, das mais variadas classificações, para que possam formular conjecturas acerca das construções dos pontos notáveis. Esse trabalho é feito ao longo de problemas que foram divididos em cinco atividades. Vale ressaltar que o problema a ser resolvido está sempre ligado à construção de um triângulo inicial e um ponto notável, a partir do emprego das ferramentas de construção geométrica disponibilizadas no programa de geometria dinâmica.

A resolução de problemas pode ser considerada como suporte para o ensino investigativo em Matemática, pois, diante de um problema, temos a necessidade de identificar claramente o que precisamos resolver e quais ferramentas necessitamos acionar para obtermos a solução. Ponte, Brocado e Oliveira (2015, p. 16) dizem que

> Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigações.

A utilização de problemas como elementos disparadores de uma investigação é bastante rica pelo fato de que, além da solução ou da tentativa de ser obter a mesma, os estudantes podem fazer outras descobertas que podem ser previstas ou não e que, por vezes, passam a ser muito mais importantes que a solução em si. Ian Stewart, matemático inglês citado por Ponte et al. (2015), fala que bons problemas são aqueles cujas soluções, além de conduzir a um beco sem saída, abrem horizontes inteiramente novos, Andrew Wiles concorda, dizendo que "é bom trabalhar em qualquer problema contanto que ele dê origem a uma Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolvermos no final" (apud PONTE et al., 2015, p. 17).

Pólya (1981), citado por Ponte et al. (2015, p. 19, corrobora com a ideia de que o ensino investigativo é um poderoso processo de ensino dizendo que "os alunos podem ter um sabor da matemática em construção do trabalho criativo e independente". Isso pode fazer com que os estudantes sejam capazes de generalizar um fato, ou seja, criar uma conjectura a partir da observação de alguns casos.

As ideias colocadas por Pólya vão ao encontro do objeto desta pesquisa, que é justamente fazer com que os estudantes possam analisar casos particulares dos pontos notáveis de um triângulo e, a partir da observação desses casos, generalizar as propriedades dos pontos notáveis de um triângulo. Utilizaremos, para esta investigação, o software de geometria dinâmica *Geogebra* como suporte facilitador na obtenção das conjecturas.

Uma investigação matemática é desenvolvida em quatro fases. A primeira fase contempla a exploração da situação para a formulação de questões. A segunda fase consiste na observação do processo e formulação das conjecturas. Já na terceira fase estão contidos os testes e, eventualmente, um refinamento das conjecturas. Por fim, na última fase, o trabalho com a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho executado. Muitas vezes, esses momentos podem surgir simultaneamente, como a formulação das questões e uma conjectura inicial ou ainda a conjectura inicial e seu teste etc. Cada uma das fases descritas acima pode incluir diversas atividades como se indica na tabela 2.

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões

Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio

Tabela 2 - Fases de uma investigação matemática:
Fonte: Ponte; Brocardo; Oliveira (2015, p. 21)

A fase de *exploração e formulação de questões*, na nossa pesquisa, será feita por meio da análise da situação problema proposta, da construção do triângulo e do ponto notável pedido. Em seguida, os alunos e alunas terão que arrastar os vértices para que comecem a segunda fase – as *conjecturas*. Os educandos passam a inferir as localizações e propriedades dos pontos notáveis nos variados tipos de triângulo a partir das visualizações dos diferentes acontecimentos nas movimentações dos vértices.

Schmitt (2015, p. 26) diz que as tarefas e os problemas abertos podem instigar os alunos e alunas a descobrirem teoremas que envolvem a geometria. Diz ainda que não há a necessidade de explicar ou demonstrar os teoremas para que os estudantes os compreendam. Uma vez que os alunos e alunas obtiveram as conjecturas, precisam fazer os *testes* – terceira fase da metodologia –, para que eles e elas verifiquem a validade ou não da hipótese anteriormente levantada e para que façam os refinamentos, se necessário.

A última fase *Justificação e avaliação* é feita a partir de discussões coletivas após a finalização de todas as atividades previstas. São selecionados bons registros e construções para servirem de modelo. Como Schmitt (2015) defende, discutimos apenas as definições e generalizações sem fazer a demonstração, dado que o intuito é garantir a compreensão de uma ideia – inicialmente pautada na intuição. Durante a conversa relacionamos as ideias tratadas anteriormente, buscando uma aproximação com o aspecto algorítmico, dado que é esperado que os(as) estudantes possam transferir tais conhecimentos em construções com régua, compasso e papel.

2.3.1 Tarefas matemáticas – O início de uma investigação

O ensino investigativo em Matemática tem uma ligação bastante forte com a resolução de problemas, pois, a partir da utilização dessa metodologia, podem-se desencadear diversas questões. É importantíssimo saber a distinção entre exercícios e problemas para analisar os diferentes tipos de tarefas em Matemática e utilizá-los de acordo com o interesse educativo. Enquanto um problema é uma questão na qual o estudante não dispõe de um método que permita sua resolução imediata, um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um algoritmo já conhecido. Tanto um exercício simples quanto um problema trazem, no enunciado, os dados relevantes e o comando, mas, no ensino investigativo, a ideia é que seja um pouco diferente. Espera-se que sejam trabalhadas questões mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo ao investigador o papel de defini-la. É importante que o professor saiba que os pontos de chegada podem ser diferentes. Menezes (2016, p. 12), diz que

> As atividades investigativas se diferenciam da resolução de problemas no que diz respeito ao seu caráter aberto, na resolução de problemas o aluno precisa chegar em um resultado específico, já nas atividades de investigação os alunos além de chegarem a resultados que nem sempre são pré-determinados, podem também criar outras questões.

Colocar os alunos e alunas como indivíduos ativos no processo de aprendizagem, por meio da manipulação da situação proposta no *Geogebra* pode facilitar a percepção das conjecturas. Cabe a eles a apresentação das inferências. A ideia é que a formalização venha depois que os alunos e alunas concluírem, individualmente ou em grupo, as situações de aprendizagem propostas.

Carneiro (2013) diz, em seu trabalho, que o êxito de uma investigação depende também do local de aprendizagem que se cria para o desenvolvimento da proposta. Levando isso em consideração, acreditamos que o laboratório de informática traria as potencialidades necessárias, uma vez que as atividades investigativas propostas neste trabalho foram desenvolvidas com base nas facilidades trazidas pela utilização de um software de geometria dinâmica. Esta utilização satisfaz, também, o que é colocado como uma das competências gerais da educação básica, como o uso de diferentes tipos de linguagem e a tecnologia como formas de flexibilização de uma aprendizagem mais reflexiva e significativa.

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

E, além disso, vai ao encontro do que é esperado nas competências específicas de Matemática para o ensino fundamental, na qual espera-se “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2018, p.267).

2.3.2 A aula de investigação

Este tópico traz aspectos pragmáticos de uma aula de investigação. Trataremos da organização do trabalho, das etapas a percorrer, do que se pode esperar no desempenho dos estudantes e do papel do professor neste tipo de metodologia.

As aulas de investigação podem ser iniciadas por uma atividade comum aos alunos e alunas, em que sabemos o início, mas podemos não saber como ela terminará, visto que a maior característica é o trabalho com questões abertas. Geralmente, as atividades de investigação passam por três fases, sendo a primeira a introdução da tarefa, em que o professor apresenta a proposta aos estudantes; a segunda fase permeia a investigação, seja individualmente, aos pares, pequenos grupos, ou até com a turma toda; já a terceira fase contempla a discussão coletiva dos resultados, em que os alunos e alunas relatam aos colegas o trabalho realizado.

Na primeira fase, o professor deve garantir que todos os estudantes entendam o que é esperado no percurso da atividade. Como os alunos, geralmente, não estão acostumados com este tipo de experiência, o educador precisa ser bastante cuidadoso ao explicar todas as etapas a serem percorridas e, dependendo do público, uma leitura conjunta pode ser imprescindível para a compreensão da proposta. Contudo, é necessário garantir que os alunos entendam o significado de investigar, de trabalhos por investigação, e entendam a natureza deste tipo de tarefa, pois pode se afastar do que é comum no dia a dia.

Corre-se o risco de o professor fazer uma introdução bastante minuciosa, o que pode condicionar a investigação feita pelos alunos. Nada impede de dar algumas dicas, mas é necessário saber dosar. Há casos em que as dicas são imprescindíveis, visto que se não forem dadas, o trabalho não progride. Silva (2019, p. 14), corrobora, dizendo que

> No primeiro momento, é importante que o docente garanta que os alunos entendam o objetivo da tarefa. Esta pode ser fornecida escrita ou de maneira oral. E no caso de escrita, o professor pode ler junto com os alunos, mas deverá tomar cuidado para não os condicionar quanto à maneira de explorar o problema.

Um dos fatores para o sucesso do trabalho com investigação é o ambiente que se cria na sala de aula. Os alunos precisam se sentir à vontade para colocar questões, pensamentos e aflições, além de sentirem que as ideias deles são valorizadas, para que eles possam discutir os obstáculos com os colegas, em vez de necessitar da validação do professor a todo o momento. Os alunos precisam saber que a atividade depende da própria iniciativa deles, mas que podem contar com o apoio do professor.

Na segunda fase, os alunos já compreendem a atividade, processo feito na introdução ao trabalho, e o professor passa a desempenhar um papel mais de retaguarda, prestando o apoio necessário e compreendendo como o trabalho vai sendo processado. Espera-se que o(a) estudante utilize os processos que caracterizam uma atividade investigativa como a exploração, formulação de questões e conjecturas, que faça testes e, se necessário, reformule a conjectura, sem renunciar às justificativas e avaliação do trabalho.

A exploração inicial é uma etapa na qual, muitas vezes, os alunos precisam gastar algum tempo. Pode parecer, aos olhos do professor, que os alunos estão com dificuldades e que nada está caminhando, mas essa etapa é crucial para que eles possam formular as questões e conjecturas. É nessa etapa que os alunos se apropriam totalmente da tarefa. O trabalho aos pares ou pequenos grupos é bastante rico, uma vez que haverá um maior surgimento de alternativas relativas à exploração da tarefa, isso pode gerar um problema de autogestão do grupo, que pode se revolver brevemente.

No decorrer da segunda fase, os alunos geram dados, além dos que eles já possuem, organizam-nos e, somente após este procedimento, começam a formular questões e conjecturas. No caso desta pesquisa, os estudantes estarão ligados apenas à formulação das conjecturas. Ao formular as presunções, vem a necessidade de fazer os testes facilitados pela utilização do software de geometria dinâmica, que podem corroborar ou refutar a ideia inicial.

É comum que os alunos procurem regularidades ao trabalhar com o conjunto de dados, após o surgimento das primeiras questões. Esse tipo de raciocínio é desejável em qualquer tarefa, sendo que, em um momento de impasse em algum grupo, o professor pode sugerir essa dica até mesmo para o enriquecimento da investigação.

A formulação de conjecturas pode surgir de várias maneiras, seja pela manipulação dos dados ou analogia a outras conjecturas, mas esse trabalho indutivo tende a ficar apenas no pensamento do aluno ou é parcialmente verbalizado. Sendo assim, consideramos de extrema importância o trabalho com o registro escrito das atividades de investigação desenvolvidas. Segundo Powell (2006, p. 26)

> A escrita força os interlocutores a refletir, diferentemente, sobre sua experiência matemática. Enquanto examinamos nossas produções, desenvolvemos nosso senso crítico. A escrita suporta atos de cognição e metacognição.

É bastante comum que os alunos e alunas pensem que os(as) colegas conseguem obter as mesmas ideias ou percepções apenas com a análise de um conjunto de dados ou situação de aprendizagem. No entanto, somente após a discussão coletiva, que evidencia os registros feitos no decorrer da investigação, é que os(as) estudantes entram em confronto com outras possíveis hipóteses.

O teste das conjecturas levantadas faz parte do processo investigativo e, em geral, segundo Ponte et al. (2015), os alunos interiorizam com bastante facilidade. A manipulação dos dados recolhidos começa a dar à luz a uma conjectura que se mostrará correta ou que será refutada. O que acontece bastante é que os alunos se satisfazem quando testam em um número reduzido de casos. Este tipo de problema pode ser abordado pelo professor, seja durante os apoios aos grupos ou durante a fase de discussão, em que os alunos podem ser levados a buscar contraexemplos. Cabe ao professor a atenção durante todo o processo de formulação e teste de conjecturas, para que ele garanta a evolução na realização da investigação.

Comumente, os alunos e alunas chamam as conjecturas de conclusões, muitas vezes porque o próprio professor, ao se aproximar do grupo, pergunta: “O que vocês concluíram?”, fazendo com que os alunos transformem suas conjecturas em conclusões sem passarem por um processo de justificação.

A justificativa ou prova faz parte do trabalho investigativo que, por muitas vezes, é esquecida ou deixada para o segundo plano, principalmente nos níveis mais elementares. É imprescindível que os alunos saibam a diferença entre testar e provar. A realização dos testes é interessante no sentido de que tal conjectura seja mais aceita pelos alunos, mas que deve ficar claro que só a realização de testes não garante a conclusão dos resultados.

O processo de prova pode ser feito de maneira gradual, visto que não faz parte da cultura das aulas, aumentado aos poucos as exigências e rigor matemático. Ponte et al. (2015, p. 38) dizem que:

> À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas.

As atividades propostas na sequência didática precisam ser cuidadosamente escolhidas para que, de fato, os alunos possam ter uma real experiência de aprendizagem, de tal maneira que possibilite as percepções de fatos a partir do processo de realização do trabalho proposto, denotando uma situação investigativa de aprendizagem. Sendo assim, “investigar envolve formular questões, propor conjecturas, realizar testes para validar ou rejeitar essas conjecturas [...]" (ROCHA; PONTE, 2009, p. 31).

Segundo Rocha e Ponte (2009), a realização de atividades de cunho investigativo pode colaborar com o desenvolvimento na aprendizagem do que são e como se fazem investigações; na aprendizagem de conceitos, ideias e procedimentos matemáticos; na aprendizagem de objetivos curriculares transversais como a capacidade de comunicação e o trabalho em grupo; e na formação de novas concepções e atitudes em relação à matemática.

Ao elaborar as atividades investigativas o professor deve tomar o cuidado em utilizar os conhecimentos prévios dos alunos, dando a chance de os alunos e as alunas reverem e/ou consolidarem tais conhecimentos matemáticos, para que realizem novas aprendizagens.

O trabalho com a metodologia de ensino investigativo altera o que é de costume, o que Paulo Freire (2005) caracteriza como educação bancária, uma aula em que os educadores são figuras centrais, em que as falas ficam centralizadas a eles e os alunos desempenham apenas o papel de receptores.

> A concepção bancária de educação nega o diálogo, à medida que na prática pedagógica prevalecem poucas palavras, já que "o educador é o que diz a palavra; os educandos, os que a escutam docilmente; o educador é o que disciplina; os educandos, os disciplinados" (FREIRE, 2005, p. 68).

Essa metodologia faz com que os alunos e alunas assumam uma nova perspectiva sobre o ensino e a aprendizagem, pois coloca o professor em um papel de mediador e os estudantes como agentes ativos no processo de construção do conhecimento, uma vez que o ensino por investigação pressupõe o protagonismo do estudante e, portanto, eles e elas são levados a utilizar o empirismo para a obtenção de conhecimento e, com isso, cria-se um ambiente que possivelmente estimula o aprendizado. Neste sentido, Ponte et al. (2015) dizem que não se espera que a dinâmica da sala de aula se limite à realização de tarefas investigativas e defendem que há lugar para os outros tipos de tarefas.

2.3.3 A geometria por meio do ensino investigativo

Dentre os temas que permeiam a matemática, a aprendizagem da geometria é, de longe, a mais propicia à execução de atividades de cunho investigativo, dado que é uma temática rica em problemas que envolvem representações, visualizações, construções, lugares geométricos, dentre outros. Abrantes (1999) destaca, em seu artigo "*Investigações em geometria na sala de aula",* até que ponto essa afirmação que soa quase como evidente, podia ser documentada e justificada e percebe que precisa, necessariamente, tocar no significado de geometria e refletir sobre o seu papel na aprendizagem da matemática. Decorre ainda que:

> Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares (ABRANTES, 1999, p. 4).

Diante das inúmeras situações em que se encontra a geometria, podemos conduzi-la de uma maneira investigativa, seguindo os mesmos aspectos que foram descritos anteriormente, que estão ligados à formulação e resolução de problemas, à elaboração de conjecturas, aos testes, às validades e às refutações. Abrantes (1999) defende que as explorações e investigações em geometria podem ser feitas em qualquer nível de escolaridade. Concordamos com essa colocação, dado que podemos adaptar as atividades para torná-las um objeto de investigação adequado a cada etapa da vida escolar dos estudantes.

O ensino de geometria é fundamental para que possamos compreender o espaço em que nos movemos. Isso realça a importância em estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental, pois motiva os alunos e alunas, ainda mais se forem situações que envolvem contextos da vida real. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além

> disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998 p. 39).

A utilização de *softwares* de geometria dinâmica pode ser um forte aliado a este tipo de metodologia de ensino, pois, por meio do programa escolhido, os estudantes conseguem manipular as construções, mudar as formas das figuras e perceber possíveis padrões atrelados a elas. As ações mencionadas podem facilitar a elaboração e o teste das conjecturas e, além disso, proporcionar um momento de organização das conjecturas levantadas por eles e elas, bastante diferente do que se tem corriqueiramente, em que são apresentados os aspectos globais da geometria.

2.3.4 A avaliação do trabalho investigativo

O ensino de Matemática por investigação trabalha com situações de aprendizagem e, como todas as outras atividades, precisamos fazer uma avaliação para que o professor verifique se os alunos estão progredindo de acordo com as suas expectativas, se é necessário parar para rever os conceitos ou até mesmo o método escolhido. Os objetivos da utilização deste método de ensino são a pretensão do desenvolvimento da capacidade dos alunos realizarem investigações e a utilização dos conhecimentos matemáticos adquiridos no processo para a resolução de problemas. Os objetivos citados servem como instrumentos de avaliação desse processo.

Dentre as modalidades de avaliação que Ponte et al. (2015) colocam, e que julgamos interessante para este tipo de processo, tem-se o relatório, cujo objetivo é a escrita, por parte dos alunos e alunas, visando apresentar o trabalho desenvolvido. O relatório ficará mais interessante se contiver os processos e as conclusões que forem feitos no decorrer do trabalho. Ao longo do desenvolvimento da proposta, os(as) estudantes farão registros em uma ficha que conterá as questões a serem investigadas. Haverá campos para o registro das ideias intermediárias que serão utilizadas para a elaboração da conjectura.

Segundo Ponte et al. (2015), os alunos da escola básica não estão acostumados a fazer relatórios e isso faz com que eles fiquem bastante confusos no início. O professor precisa dar algumas diretrizes, fornecendo um conjunto de ações a serem tomadas ao ser construído o relatório.

No decorrer do trabalho, também podemos ter outros meios de avaliações, até mesmo menos formais, a partir da observação dos alunos e alunas durante a realização das tarefas ou em um momento de discussão coletiva. A partir da observação informal dos estudantes, os professores são capazes de recolher inúmeras informações a respeito deles, sejam elas da ordem atitudinal ou até mesmo sobre como os alunos e alunas mobilizam e articulam os saberes matemáticos prévios.

A observação dos educandos enquanto trabalham é essencial, pois a partir dela o professor pode auxiliar estudantes que estão com dificuldades de um modo bastante ativo, fazendo perguntas com o intuito de perceber qual o caminho eles e elas estão seguindo, qual a forma como estão pensando, para que possa dar uma direção.

As discussões coletivas ou apresentações orais fazem parte do processo investigativo e, por isso, é essencial que sejam avaliadas. Essa apresentação constitui um tipo de avaliação, mas também de aprendizagem, uma vez que as capacidades de comunicação e argumentação podem ser desenvolvidas.

2.3.5 O processo investigativo na gestão do currículo

Este tipo de documento tem como intuito organizar e guiar a prática docente. É um documento sintetizado que caracteriza o currículo, porém, cabe ao professor as decisões relativas à proposição de tarefas e trabalhos aos alunos. As aulas contam com atividades investigativas, mas é importante que o professor promova outras atividades que não estejam envolvidas com este caráter metodológico, como já foi dito anteriormente.

Ponte et al. (2015) colocam que o processo investigativo pode ser desencadeado de diversas maneiras, seja ela com uma atividade pronta que o professor trouxe, ou a partir de uma questão problematizadora trazida pelos próprios alunos e alunas, o que pode causar uma eventualidade na direção em que a investigação pode tomar, porém, este fato pode ser bastante rico na aprendizagem, visto que os estudantes trazem questões autênticas, que são frutos dos caminhos percorridos por eles e elas.

Quando se programa uma atividade que envolva investigação, o professor deve-se preocupar com a ligação entre os temas do currículo, pois este fato pode facilitar a consolidação dos conceitos matemáticos por parte dos alunos e alunas. Além disso, pode também simplificar as conexões entre os temas matemáticos, aspecto que, na prática, muitas vezes, é deixado de lado diante das dificuldades na concretização.

O tempo é um fator bastante importante neste método de ensino. No começo, os estudantes demoram para realizar as atividades, pois não faz parte da natureza deles este tipo de aula. Mas este tempo "perdido" pode ser recuperado no decorrer das próximas atividades, já que eles passarão a ter uma experiência com este tipo de tarefa, além do que

> O trabalho efetuado no âmbito de uma investigação, em torno de determinado conteúdo programático, pode revelar-se de tal forma produtivo que o professor já não vê a necessidade de voltar a trabalhá-lo, ganhando assim tempo para dedicar a outro assunto (PONTE et al., 2015, p. 142).

A realização deste tipo de atividade pode contribuir para uma aprendizagem considerável dos conteúdos matemáticos, em especial no que se refere aos pontos notáveis de um triângulo, pois de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2015, p. 23), atividades como essas podem contribuir de modo significativo para a aprendizagem dos alunos e alunas, bem como desenvolver o gosto pela disciplina de matemática, uma vez que, "o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem". Silva (2019, p. 15) também concorda, dizendo que

> Diante do exposto, ressalta-se a importância de se trabalhar com atividades investigativas em sala de aula pois, a partir do momento em que o aluno assume um papel ativo na construção do conhecimento, a matemática torna-se mais significativa e o processo ensino aprendizagem atinge resultados positivos. Dessa forma, infere-se que a investigação geométrica pode ser um bom caminho para melhoria do ensino-aprendizagem de matemática.

Utilizar esse tipo de metodologia viabiliza também o que é esperado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, dado que

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. Portanto, atividades com investigações devem fazer parte das opções que o professor dispõe para planejamento de suas aulas, uma vez que essas possuem uma relevância em termos de aprendizagem para os alunos (BRASIL, 1998, p.117).

2.4 Os pontos notáveis e as investigações nos documentos oficiais

Faremos, neste espaço, uma análise dos documentos oficiais que regem o ensino da Matemática, com o intuito de verificar como são abordados ou quais são as indicações de abordagem dos conteúdos necessários para o desenvolvimento de uma sequência didática que envolve os pontos notáveis dos triângulos, verificar quais são as indicações relacionadas ao uso das tecnologias no ensino da Matemática, assim como analisar o papel das investigações no currículo escolar brasileiro.

Iniciaremos pela análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) e, em seguida, analisaremos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

2.4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

As atividades de investigação aparecem como referência nos Parâmetros Curriculares Nacionais numa perspectiva de contexto de trabalho e também relativas a outros temas transversais. Publicado em 1998, os PCN atrelam fortemente o ensino investigativo com resolução de problemas, tangenciando vários objetivos como o desenvolvimento do espírito de investigação, da capacidade de resolver problemas e de argumentar sobre as conjecturas observadas. Utilizamos os PCN para o ensino de quinta a oitava séries do ensino fundamental II, conhecidos, na ocasião, como terceiro e quarto ciclos, o qual, atualmente, denomina-se 6º a 9º anos.

Os PCN trazem diversos objetivos para o ensino fundamental II, fazendo menção às habilidades esperadas aos alunos que concluem o 4º ciclo deste segmento de ensino. Entre tais habilidades, afirma que os estudantes terão que saber utilizar as diferentes linguagens – verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meios para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação. Destaco que o desenho geométrico está totalmente ligado ao desenvolvimento da linguagem gráfica. Destaco também, como objetivo aparente, o saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos, pois vai diretamente ao encontro do que é proposto neste estudo – a construção de um conhecimento a partir de pressupostos investigativos e da utilização de um software de geometria dinâmica, o *Geogebra*.

O documento tange os procedimentos empíricos, evidenciando a importância deles, ao afirmar que:

> Embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos (BRASIL, 1998, p. 87).

Na citação acima, aparece a preocupação com a continuidade da utilização de procedimentos empíricos no processo de ensino e aprendizagem. Salientamos que esta pesquisa traz como preocupação a análise das figuras a partir da observação das variações delas – apoiada nas movimentações que podem ser feitas numa construção inicial, a partir da utilização do programa anteriormente citado. Espera-se que os estudantes sejam capazes de elaborar conjecturas e identificar as propriedades dos pontos notáveis de um triângulo.

Na seção *Orientações didáticas para terceiro e quarto ciclos,* o documento apresenta reflexões sobre como ensinar de acordo com aspectos que constituem conhecimentos matemáticos, a partir dos modos pelos quais os conceitos e procedimentos se relacionam entre si e as formas das quais os alunos constroem tais ideias. Claramente, o documento não aborda todos os conteúdos matemáticos e sugere que o complemento venha a partir da leitura de outros documentos que discutam os conteúdos que fazem parte do currículo do ensino fundamental.

2.4.2 - Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino fundamental II, traz diversas competências gerais (BRASIL, 2018, p. 9-10) a serem trabalhadas no ensino fundamental II. Destacam-se aquelas que trazem uma maior relevância para o presente estudo, das quais fazem menção para que os alunos sejam capazes de:

- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
- Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

O documento traz, logo no início, uma indicação para que os professores criem atividades que possam despertar a curiosidade e o senso de investigação, a fim de que os alunos e alunas sejam capazes de formular hipóteses, testá-las, conjecturá-las e, possivelmente prová-las, utilizando diferentes tipos de linguagem e a tecnologia como forma de flexibilização de uma aprendizagem mais reflexiva e significativa. Decorre da BNCC (2018) que a matemática, por meio da articulação de seus diversos campos precisa

> [...] garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 263).

A BNCC divide a matemática em cinco unidades temáticas, correlacionadas, sendo elas *Números*, *Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística*, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização. Nos atentaremos a analisar, na presente pesquisa, apenas as unidades Geometria e Grandezas e medidas.

Os conteúdos essenciais para a construção e discussão dos pontos notáveis, como a mediatriz e a bissetriz, estão prescritas no documento, mas não encontramos citações relacionadas a mediana e altura. O documento diz que outras unidades temáticas podem ser organizadas a partir da necessidade das escolas ou sistemas de ensino, reunindo tanto as habilidades contidas na BNCC quanto outras que forem necessárias, desde que as ideias básicas, quanto à articulação entre os vários campos da matemática sejam preservadas. Percebemos também que o documento tem uma preocupação na utilização da tecnologia, em especial, a utilização de *softwares* de geometria dinâmica para o desenvolvimento de certos conteúdos, como podemos ver nas habilidades destacadas abaixo:

- (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares de geometria dinâmica* e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

- (EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares de geometria dinâmica*.
- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares de geometria dinâmica*, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares de geometria dinâmica.*
- (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares de geometria dinâmica*.

O estudo do desenho geométrico está, atualmente, dissolvido nas aulas de matemática e tem, como um dos objetivos, ser um fator motivador e facilitador na compreensão dos conteúdos relativos à geometria, uma vez que a construção, a partir da utilização da linguagem gráfica é predominante nessa temática. Decorre dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que

> […] espaço e forma pressupõem que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p. 51).

Ao analisar a BNCC (BRASIL, 2018) do ensino médio, notamos que uma das competências específicas do ensino de Matemática está relacionada com a investigação e o estabelecimento de conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas com o emprego de recursos como, por exemplo, a observação de padrões, experimentações e utilização de tecnologias digitais. Além desta competência, identificamos também uma habilidade que tangencia o desenvolvimento deste trabalho,

> (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos (BRASIL, 2018, p. 533).

Ao longo deste trabalho, os alunos e alunas serão levados a utilizar os recursos descritos nesta seção, uma vez que deverão, a partir da utilização do *Geogebra*, construir triângulos, alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes e analisar os padrões e regularidades que podem ser conjecturados a partir dos testes que serão feitos por meio dos arrastes das figuras/pontos construídos. Este *software* será um forte aliado na execução deste trabalho por investigação. Discorreremos, na próxima seção, sobre o seu funcionamento e suas potencialidades.

3. O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

3.1 O que é o *Geogebra*?

O *Geogebra*, que faz menção à geometria e álgebra, é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, gráficos, estatística e cálculo numa aplicação fácil de utilizar e, segundo Ribeiro (2016), é usado, predominantemente, para a construção e exploração de propriedades e resolução de problemas em geometria. Seu uso é facilitado pelo fato de ser um *software* livre, ou seja, possui código aberto e pode ser baixado de maneira gratuita pelo próprio site dele. O site oferece também a opção de trabalho online com uma plataforma completa, igual ao programa.

Este *software* tornou-se líder no fornecimento de um programa de geometria dinâmica, apoiando a ciência, tecnologia, engenharia, educação matemática e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. Foi desenvolvido para fins educacionais e possibilita que os usuários vejam representações gráficas e representações algébricas, de uma mesma produção, de forma simultânea. O software possui uma interface fácil de usar, além de diversas ferramentas/comandos e o menu de ajuda. Os usuários podem criar materiais de aprendizagem interativos como páginas da web, e o *software* está disponível em vários idiomas para milhões de usuários em volta do mundo.

Segundo Azevedo (2016), por ser um programa que reúne diversas áreas da matemática, suas contribuições têm sido verificadas em todos os níveis de ensino. Azevedo (2016) também faz uma análise de quatro outras pesquisas referentes ao *Geogebra* e diz que a maior vantagem apontada é o fato de o *software* estar disponível gratuitamente na internet em mais de sessenta línguas.

O site do *Geogebra* proporciona o *download* do programa, diversos exemplos para a sua utilização, como indicações de construção de gráficos de funções, mais de um milhão de atividades gratuitas, acesso ao fórum, simulações, exercícios, jogos para matemática e informações sobre eventos ligados ao *Geogebra*.

3.2 Por que usá-lo?

As tecnologias aplicadas à educação possibilitam formas diferenciadas de explicitar conhecimentos e elas podem ser vistas como aparatos de extensão à prática docente usual, como o lápis e papel, giz e lousa, calculadoras, instrumentos de construção geométrica etc. O uso de *softwares* de geometria dinâmica – o *Geogebra*, neste caso – traz uma série de contribuições pedagógicas, das quais destaco a visualização e a percepção de propriedades e não propriedades relacionadas às construções geométricas. As contribuições destacadas são desenvolvidas por meio do dinamismo que há no *software*, que se opõe à ideia de uma construção estática, dado que o ambiente possui ferramentas que possibilitam a visualização de diferentes modos para uma única figura construída.

Ao construir um determinado triângulo, por exemplo, os alunos poderão arrastar os vértices e, com isso, conseguirão visualizar as mudanças atreladas aos lados e ângulos. Esta ação acaba trazendo um caráter experimental e investigativo para a aula, aspectos defendidos pelos documentos oficiais do currículo brasileiro. Os PCN trazem a ideia de que as verificações empíricas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos, assim como Ponte et al. (2015, p. 83), enfatiza:

> Comecemos pela utilização de programas de Geometria Dinâmica, uma opção curricular atualmente bastante enfatizada. Esse suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal. Vários estudos empíricos destacam também que, na realização de investigações, a utilização dessas ferramentas facilita a recolha de dados e o teste de conjecturas, apoiando, desse modo, explorações mais organizadas e completas e permitindo que os alunos se concentrem nas decisões em termos do processo.

Na citação anterior, Ponte et al. (2015) mostram algumas maneiras significativas do ensino e aprendizagem da geometria, mas destacaremos a exploração de conjecturas e a investigação de relações, uma vez que o nosso trabalho está pautado em atividades que versam sobre a análise dos pontos notáveis de um triângulo, com ênfase na percepção de suas propriedades e localizações a partir de atividades que abordam o princípio investigativo. Ribeiro (2016, p. 42) afirma que a utilização do *software* ajuda o aluno na elaboração das conjecturas por meio da experimentação dado que

> Os ambientes de geometria dinâmica ainda oferecem a vantagem de arrastar ou mover figuras e objetos geométricos com o cursor, possibilitando assim a percepção de características que foram alteradas ou mantidas após esse mover.

A utilização do *software Geogebra* agiliza os processos de investigação, uma vez que dispomos da ferramenta “mover”, como foi defendido anteriormente por Ribeiro (2016). O uso deste artefato possibilita observar o que acontece com uma figura construída depois de arrastá-la n vezes, o que seria muito mais trabalhoso caso este mesmo trabalho de observação fosse feito a partir das construções com régua e compasso à mão. Para Pereira (2012), os *softwares* de geometria dinâmica favorecem a agilidade na investigação, pois construções geométricas que tomariam certo tempo para serem realizadas no papel são obtidas em segundos na tela do computador. A interatividade oferecida por esses *softwares* torna real a possibilidade de privilegiar as propriedades geométricas de uma figura.

Ribeiro (2016, p. 138) também traz contribuições em relação as potencialidades do software, dizendo que

> Com o Geogebra, é possível criar páginas interativas na *web* com *applets* agregados – também chamadas páginas dinâmicas de trabalho – as quais podem ser acessadas com qualquer navegador de *Internet* que suporta o Java. Essas páginas de trabalho são totalmente independentes do programa, isto é, o *software Geogebra* não precisa estar instalado para o uso da página.

Sendo assim, há inúmeros pontos positivos na utilização deste *software* na condução desta pesquisa. No próximo tópico, apresentaremos as principais ferramentas que poderão ser utilizadas nas atividades propostas na sequência didática.

3.3 Ferramentas de construção no Geogebra

O *Geogebra* disponibiliza suas ferramentas na tela inicial, e isso facilita a utilização do programa, trazendo um aspecto bastante intuitivo ao seu uso.

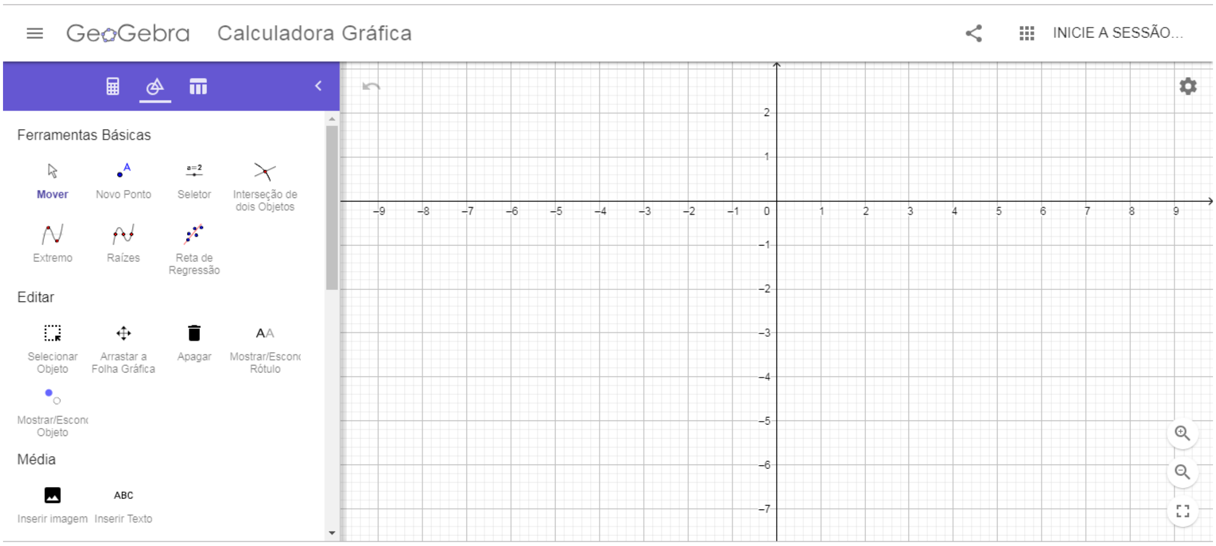


Figura 3 - Tela Principal do Geogebra
Fonte: Autor

Ao clicar em qualquer botão da barra de ferramentas, abre-se uma janela na parte inferior esquerda da tela, explicando como se utiliza a ferramenta selecionada.

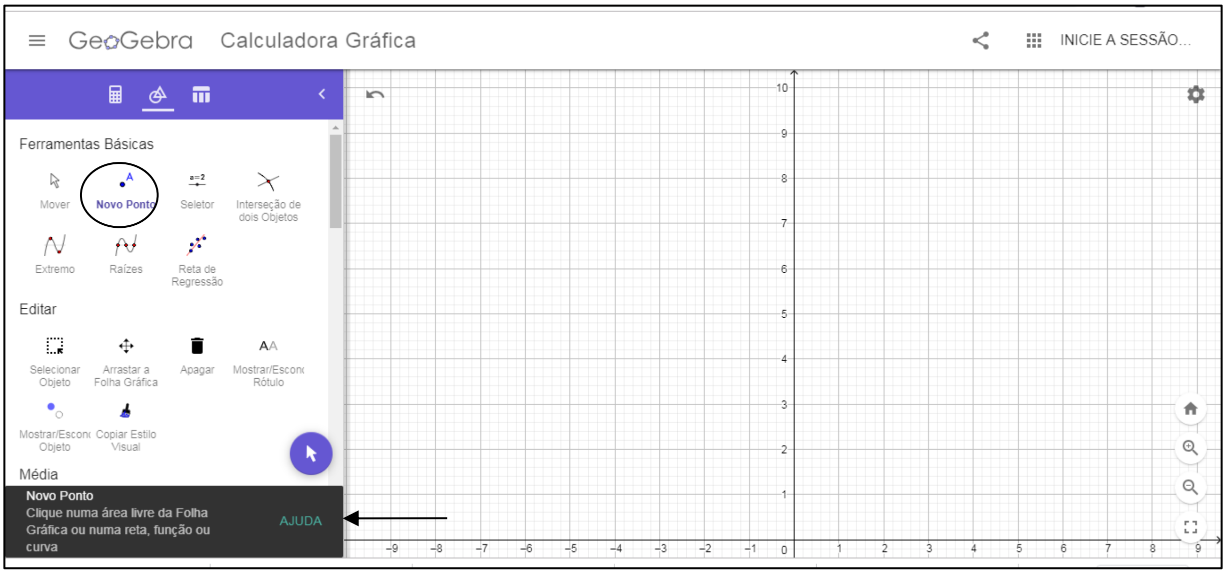


Figura 4 - Tela principal do geogebra ao clicar no botão novo ponto
Fonte: Autor

A seguir, apresentaremos as ferramentas que podem ser utilizadas para a realização das atividades propostas na sequência didática apresentada neste trabalho.

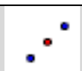
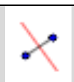
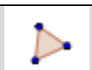
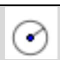
	Mover, arrastar e marcar objetos
	Criar pontos
	Marcar a intersecção entre dois objetos
	Apagar
ABC	Inserir texto
	Medir ou construir ângulos
	Obter distância ou comprimento
	Criar ponto médio
	Construir uma reta perpendicular a uma reta dada
	Construir a mediatriz de um segmento
	Construir a bissetriz de um ângulo
	Construir um segmento de reta
	Construir uma semirreta
	Construir um polígono
	Criar circunferência a partir de seu centro
	Criar circunferência a partir dados centro e raio

Tabela 3 - Ferramentas importantes para a realização das atividades propostas na sequência didática
Fonte: Autor.

O software *Geogebra* disponibiliza todas as condições para realizarmos os procedimentos necessários para a obtenção dos pontos notáveis de um triângulo, como se estivéssemos trabalhando com uma régua não graduada e compasso. Mas, para a otimização do tempo, optamos por utilizar ferramentas como as retas perpendiculares, mediatriz de um segmento e bissetriz de um ângulo. Veremos, na próxima seção, todo o detalhamento da metodologia empregada nesta pesquisa.

4. METODOLOGIA DA PESQUISA

4.1 A Pesquisa qualitativa

Neste capítulo, apresentaremos as principais características deste tipo de pesquisa na educação matemática, assim como as impressões pessoais acerca das leituras feitas para a compreensão do tema. A pesquisa qualitativa tem ganhado cada vez mais espaço nas investigações em Educação Matemática, segundo Borba (2004). O autor afirma que muitos cientistas da área da educação estão empregando, praticamente, esta modalidade de pesquisa em suas análises. Lüdke e André (2013, p. 12-14) caracterizam uma pesquisa qualitativa como aquela que tem as seguintes características:

> (i) ter o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento; (ii) coletar dados predominantemente descritivos; (iii) ter maior atenção ao processo que com o produto; (iv) o processo de análise tende a ser indutivo, sendo que os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. As abstrações formam-se ou se consolidam, basicamente, a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima.

As características citadas anteriormente mostram que as pesquisas qualitativas descrevem as relações entre os objetos de estudo e os resultados que não podem ser interpretadas por meios numéricos e evidenciam a subjetividade de todo o processo. Sendo assim, percebemos que o foco principal é a observação da trajetória e não o produto, dado que o olhar é destinado à qualidade e não à quantidade. Posto isto, nota-se também que não é natural o processo de comprovação ou refutação de uma hipótese inicial neste tipo de análise. Corroborando com a ideia, Godoy (1995, p. 21) afirma que “a pesquisa qualitativa ocupa um reconhecido lugar entre as várias possibilidades de se estudar os fenômenos que envolvem os seres humanos e suas intrincadas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes”.

A partir das colocações anteriores percebemos que o principal objetivo de uma metodologia qualitativa é tornar visível o pensamento dos participantes da pesquisa, ou seja, entendermos como os sujeitos pensam no decorrer das atividades propostas. Para tornar visível o pensamento dos participantes da pesquisa, é essencial que haja uma descrição pormenorizada dos procedimentos, característica irrevogável desta metodologia, uma vez que as conclusões extraídas nesta modalidade são sempre passíveis de mudança, dado que a especificidade do grupo admite interferências subjetivas, ou seja, o que é tido como verdadeiro em um determinado grupo, nem sempre o será em outro. A descrição das atividades contará as etapas que foram realizadas em cada aula, os questionamentos que foram feitos ao longo das atividades, além do levantamento das dificuldades e facilidades.

Este trabalho tem como objetivo mostrar aos educandos uma outra perspectiva no processo de ensino e aprendizagem, a partir da construção de uma sequência didática pautada nos pressupostos da investigação matemática, com base na utilização do *Geogebra*. A sequência didática foi pensada para que os alunos e alunas sejam capazes de resolver, de forma autônoma, tudo o que foi proposto. A principal ideia é que os(as) estudantes consigam perceber as propriedades dos pontos notáveis nos triângulos por meio do auxílio da geometria dinâmica.

O grupo estudado nesta pesquisa é composto por três turmas de alunos e alunas do 9º ano do ensino fundamental de uma escola privada de classe média alta, localizada em Moema, da zona sul de São Paulo. A escola possui uma boa infraestrutura, e a internet funciona muito bem – instrumento essencial para o desenvolvimento da pesquisa. A aplicação das atividades ocorreu em um momento de flexibilização das medidas de prevenção contra a Covid-19, mas havia um protocolo a ser seguido. A escolha do público-alvo esteve atrelada ao fato de que há, no currículo desta escola, no 9º ano do ensino fundamental 2, a disciplina de Desenho Geométrico, o que facilitou bastante a aplicação do projeto.

A disciplina de desenho geométrico conta com duas aulas por semana, de 70 minutos cada, uma no período da manhã e outra no período da tarde. As aulas da manhã eram presenciais, mas as da tarde eram à distância, por meio de videoconferência. Para as aulas da manhã foi solicitado aos estudantes que trouxessem os computadores pessoais, uma vez que não havia a oferta, por parte da instituição, de um computador por estudante. Era possível conseguir, por meio de agendamento prévio, uma quantidade limitada de computadores, dado que toda a escola precisava desse dispositivo com o contexto das aulas híbridas. Cinco estudantes por turma, em média, não tinham a possibilidade de trazerem o dispositivo para a escola, seja por não o terem ou pela falta da permissão dos responsáveis para trazê-lo e, para isso, contávamos com o empréstimo dos equipamentos da escola.

Nessa pesquisa, fizemos diversas observações durante a aplicação e discussão das atividades. Todas as atividades foram construídas na plataforma *Geogebra,* e as conclusões intermediárias foram escritas nas fichas entregues ao longo do desenvolvimento da sequência didática.

4.2 A sequência didática

As atividades elaboradas nesta pesquisa tiveram como objetivo trabalhar com a construção, propriedades e localização dos pontos notáveis de um triângulo a partir da aplicação de situações de aprendizagem elaboradas com base nos pressupostos da investigação matemática e buscou responder à nossa questão norteadora: “Quais são os impactos que uma sequência didática, constituída a partir dos pressupostos do processo investigativo, provoca nas atitudes dos estudantes em relação à Matemática?”.

Vale ressaltar que as atividades propostas levaram em consideração as leituras feitas para a elaboração deste trabalho, as quais foram descritas nos capítulos anteriores, além das características do sujeito da pesquisa como infraestrutura da escola, tempo de cada aula e conhecimentos prévios acerca dos tipos de triângulo, cevianas notáveis e construções no *software Geogebra* por parte dos alunos e alunas. A aplicação da sequência didática foi desenvolvida ao longo de 6 aulas de 70 minutos cada e foram distribuídas em um intervalo de um pouco mais de 20 dias, dado que o curso de desenho geométrico possui apenas duas aulas por semana, conforme fora citado em parágrafos anteriores.

Nas aulas presenciais eram distribuídas as fichas de trabalho impressas, já nas aulas virtuais – que ocorreram por meio de videoconferências – os arquivos eram disponibilizados no ambiente virtual de aprendizagem da escola. Sugeríamos a impressão do material pelos estudantes quando estávamos no ambiente digital, no entanto, quem não pudesse fazê-la, deveria registrar as respostas numa folha à parte e, ao finalizar a atividade, solicitávamos o envio de uma ou mais fotos do registro na plataforma de aprendizagem. Feito isso, orientávamos os estudantes a guardarem essa atividade na pasta de arquivos da disciplina, uma vez que essas anotações seriam importantes para a ampliação do conhecimento que estava sendo construído.

Ao longo das atividades, os participantes foram levados a construírem triângulos, as cevianas e os pontos notáveis que poderiam ser vistos por diferentes naturezas e formas, uma vez que contamos com o auxílio da geometria dinâmica. A partir da movimentação dos vértices, os alunos e alunas exploraram, testaram e elaboraram conjecturas acerca da localização destes pontos tal qual a constatação de propriedades a partir da percepção de padrões e regularidades. Na próxima seção, serão descritas e analisadas as atividades desenvolvidas neste objeto de estudo.

5. ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

5.1 Impressões iniciais

Após a apresentação do projeto de investigação e antes da aplicação da sequência didática, foi proposta uma atividade para compreender as sensações dos estudantes acerca do desafio que seria proposto nos próximos dias por meio de uma nuvem de palavras. Vale ressaltar que esta ferramenta organiza as palavras de acordo com a frequência: quanto maior a ocorrência das palavras, mais destacadas elas ficam. Além disso, a plataforma não trabalha com a flexão de gêneros, portanto, palavras no masculino e no feminino são vistas como distintas.

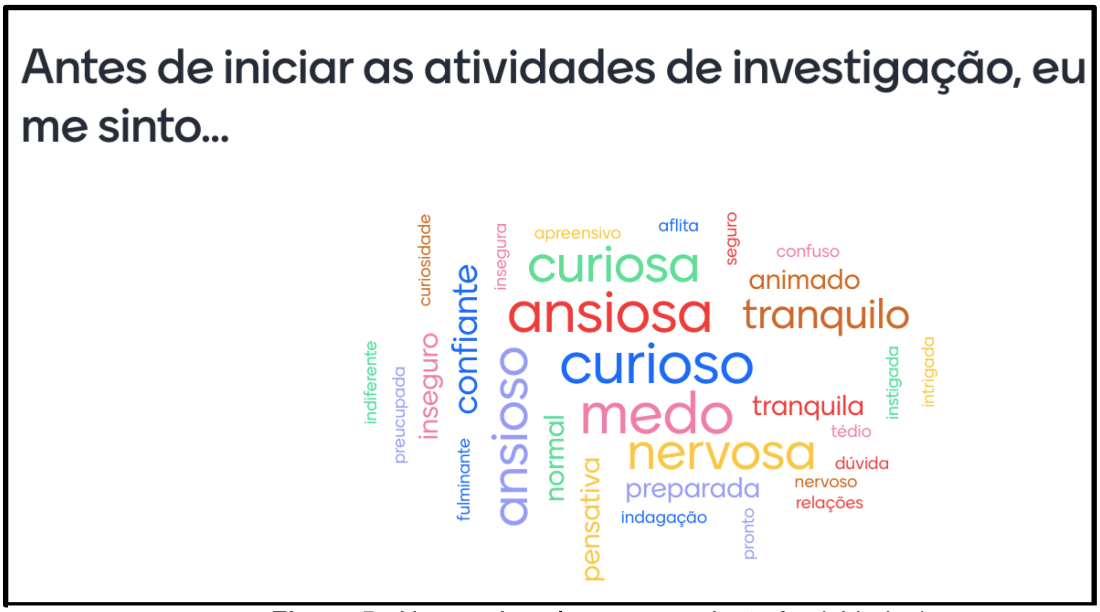


Figura 5 - Nuvem de palavras precedente à atividade 1.
Fonte: Autor

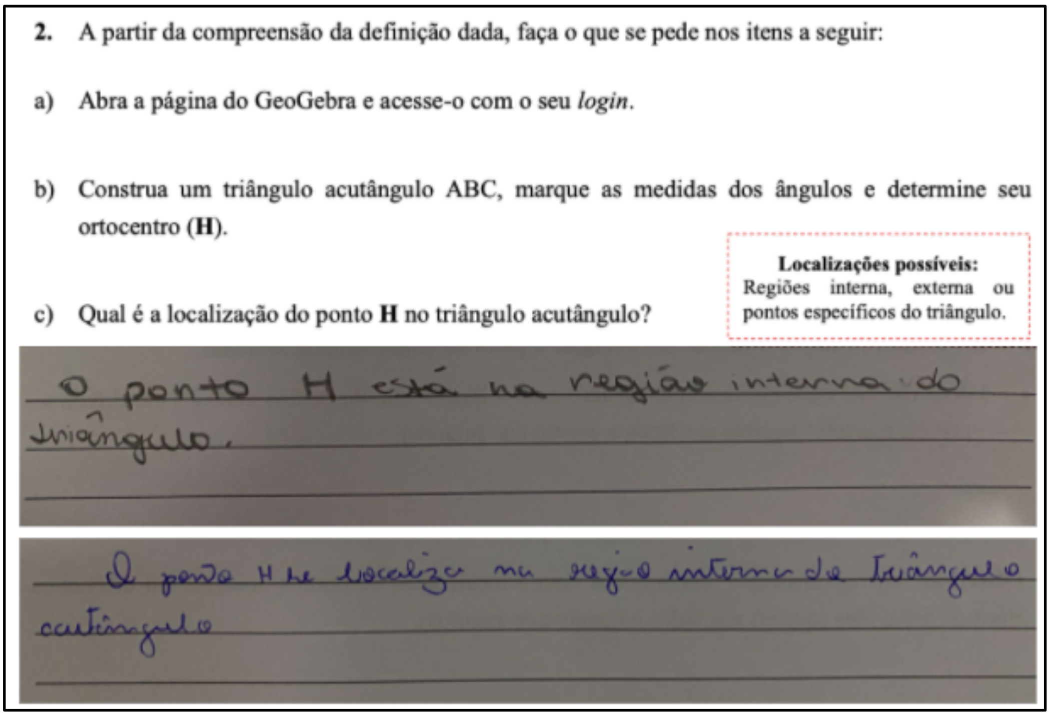
A nuvem de palavras apresentada na figura 5 foi composta por 93 respostas e, a partir da análise desta imagem, podemos perceber que houve uma incidência razoável de alunos e alunas que se sentiram ansiosos(as) e curiosos(as) com a proposta. Outras palavras como medo, insegurança, apreensão também apareceram e essas questões, segundo Morais (2019), costumam despontar quando as atividades diferem da lógica da aula tradicional.

5.2 Estudo das propriedades do ortocentro

A primeira atividade esteve atrelada ao estudo das propriedades do ortocentro de um triângulo. Em um primeiro momento foram distribuídos os computadores portáteis para aqueles e aquelas que não levaram os dispositivos pessoais à aula, conforme solicitado em um encontro anterior. Foi pedido para os estudantes fazerem o *login* na plataforma *Geogebra*, dado que o compartilhamento das construções só é possível quando estão conectados com o usuário e senha. Além dos computadores, foram distribuídas as atividades propostas por meio de uma ficha. A ideia era que eles e elas fizessem as construções requeridas de maneira autônoma e que conseguissem chegar às conjecturas esperadas. Vale ressaltar que os estudantes já possuem bastante familiaridade com a plataforma, dado que em diversos momentos ao longo do ano fizeram atividades de construção geométrica neste programa.

A ficha de trabalho que deveria ser seguida pelos(as) alunos(as) trazia questões que tinham como objetivo a localização do ortocentro nos diferentes triângulos em termos da classificação quanto aos ângulos. Era esperado que eles e elas construíssem, por meio da ferramenta *polígono*, um triângulo qualquer, marcassem as medidas dos ângulos internos da figura e que fossem arrastando os vértices para obterem os triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo e as localizações do ortocentro atrelados a eles.

Havia, na atividade, espaços para a escrita do levantamento das conjecturas intermediárias para que, então, fizessem uma resposta que englobasse todas as percepções dos padrões e das regularidades que ocorreram no desenvolvimento, conforme apresentado nas imagens a seguir:



2. A partir da compreensão da definição dada, faça o que se pede nos itens a seguir:

a) Abra a página do GeoGebra e acesse-o com o seu *login*.

b) Construa um triângulo acutângulo ABC, marque as medidas dos ângulos e determine seu ortocentro (**H**).

c) Qual é a localização do ponto **H** no triângulo acutângulo?

Localizações possíveis:
Regiões interna, externa ou pontos específicos do triângulo.

O ponto H está na região interna do triângulo.

O ponto H se localiza na região interna de triângulo acutângulo

Figura 6 - Respostas de estudantes 1 e 2 na questão da localização do ortocentro no triângulo acutângulo.
Fonte: Autor.

As respostas apresentadas na figura 6 foram:

Aluno 1: O ponto H está na região interna do triângulo.
Aluno 2: O ponto H se localiza na região interna de um triângulo acutângulo.

As respostas apresentadas pelos alunos A e B representam a maioria dos textos produzidos pelos estudantes nesta questão. A partir dessas colocações, é possível notar que não houve dificuldades nas construções solicitadas e que a maioria conseguiu chegar à conjectura esperada. Para deixar ainda mais evidente essa conclusão, foi proposto, após a atividade de investigação, um questionário de múltipla escolha, disponibilizado no ambiente virtual de aprendizagem da escola, acerca das percepções que foram obtidas ao longo da tarefa. A figura 7 apresenta uma síntese dos resultados.

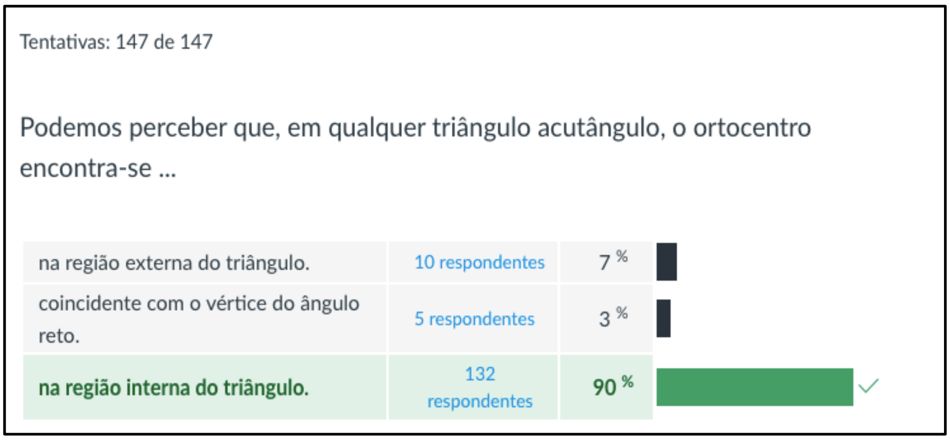


Figura 7 - Incidência das respostas em relação ao ortocentro no triângulo acutângulo.
Fonte: Autor.

A partir da análise da figura 7, nota-se que 90% dos estudantes que responderam ao teste conseguiram chegar à conjectura esperada. A quantidade de pessoas que responderam a este *quiz* é superior à quantidade de pessoas que participaram desta pesquisa, pois o pesquisador acompanhou apenas três, das cinco turmas de nono ano da instituição de ensino. E o professor dos outros dois nonos anos aproveitou todos os materiais desta pesquisa ao longo das aulas, uma vez que essa já era uma atividade prevista no panorama do curso de desenho geométrico da escola.

Em diversos momentos ao longo da aplicação da atividade, foi solicitado aos estudantes que fizessem variados testes em diferentes triângulos acutângulos para que as conjecturas não estivessem ligadas a casos particulares. Ainda assim, alguns estudantes apresentaram respostas que estão ligadas a particularidades, conforme mostrado na imagem a seguir (figura 8):

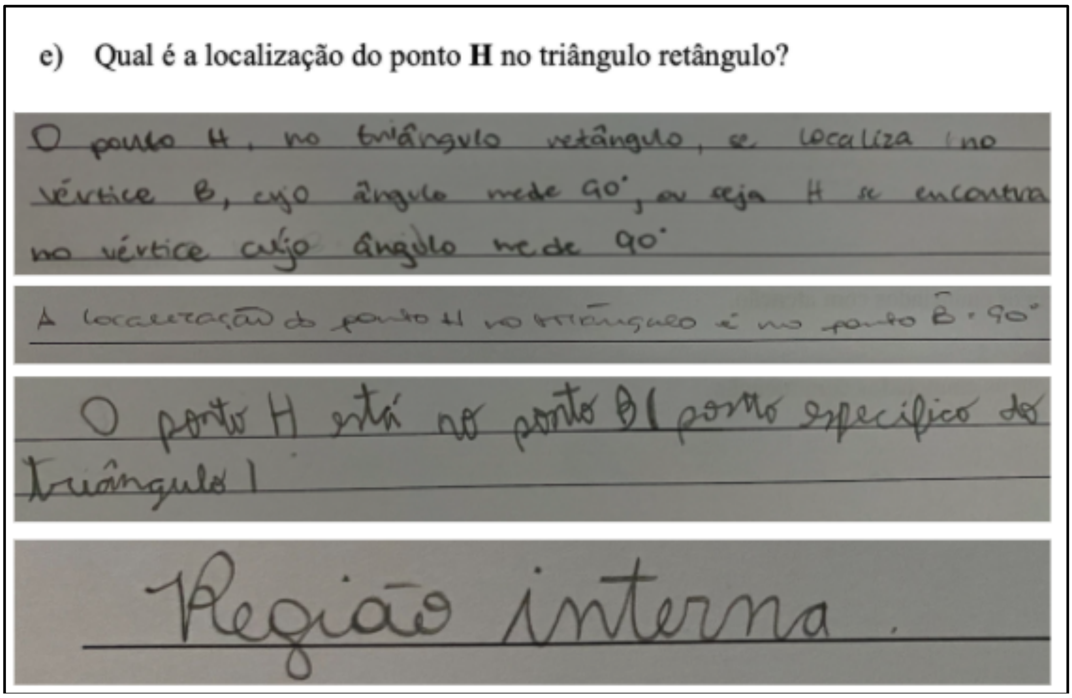


Figura 8 - Respostas de estudantes 3, 4, 5 e 6 na questão da localização do ortocentro no triângulo retângulo.

Fonte: Autor.

Aluno 3: O ponto H, no triângulo retângulo, se localiza no vértice B, cujo ângulo mede 90º, ou seja, H se encontra no vértice do ângulo que mede 90º.
Aluno 4: A localização do ponto H no triângulo é no ponto $\hat{B}$ = 90º.
Aluno 5: O ponto H está no ponto B (ponto específico do triângulo).
Aluno 6: Região interna.

A resposta apresentada pelo aluno 3 representa a maioria das percepções dos estudantes e, com isso, nota-se que os alunos e alunas conseguiram levar em consideração as falas do pesquisador acerca da construção de respostas completas, apresentando a generalização percebida.

As respostas apresentadas pelos alunos 4 e 5 mostram que, por mais que os estudantes percebam a localização correta do ortocentro no triângulo retângulo, tiveram dificuldades em se desprender do caso particular, dado que fizeram referência a apenas um dos vértices (vértice B) e, a partir da dinamicidade do *software*, nem sempre o vértice B será o que contém o ângulo reto. Outra possibilidade de interpretação é que os estudantes fizeram apenas uma tentativa e não verificaram se o que fora observado é carregado e válido para qualquer triângulo retângulo.

O aluno 6 não chegou à resposta esperada, e isso pode ter acontecido por meio de um erro na construção do ortocentro ou por não ter transformado o triângulo – que outrora foi acutângulo, em retângulo.

Ao longo da atividade, alguns estudantes perguntaram se havia algum problema se a análise fosse feita em um triângulo cuja medida do maior ângulo fosse próxima dos 90º, como 89,9º ou 90,1º. O aplicador disse que o ideal seria analisar o caso com a medida solicitada e sugeriu a utilização da malha do *Geogebra* para facilitar a obtenção do ângulo reto, mas ainda assim algumas pessoas utilizaram a aproximação citada. Todas as pessoas que relataram a dificuldade estavam sem o *mouse*. Após a atividade de investigação, os(as) estudantes responderam a um questionário com as percepções que foram obtidas ao longo da tarefa e o resultado foi o seguinte:

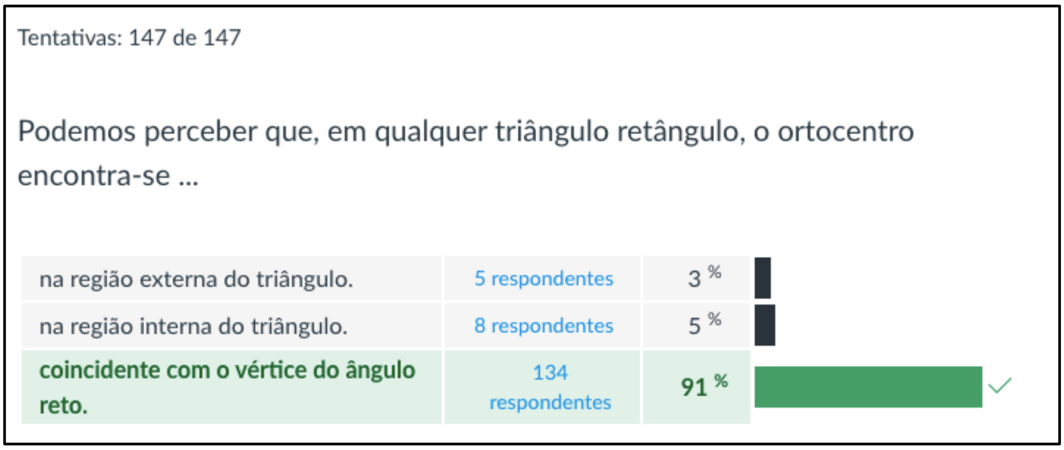
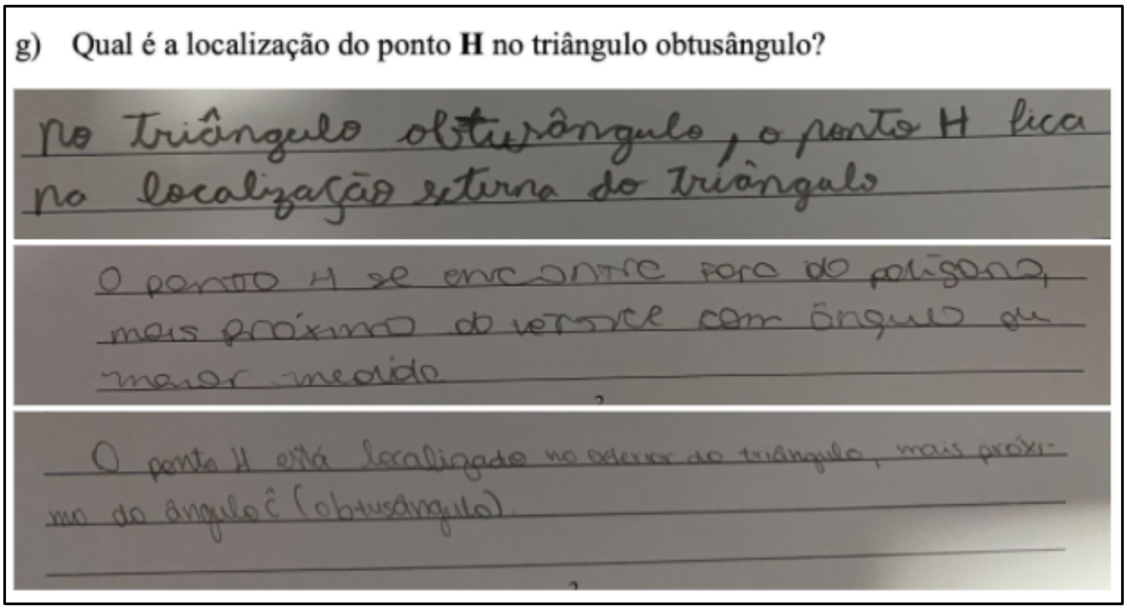


Figura 9 - Incidência das respostas em relação ao ortocentro no triângulo retângulo.
Fonte: Autor.

Verifica-se que 91% dos estudantes que responderam ao teste perceberam que o ortocentro de um triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto. O restante dos alunos teve percepções equivocadas justamente pela imprecisão que foi citada anteriormente – a dificuldade de se obter o ângulo reto sem o auxílio do mouse. Vale solicitar, em uma futura aplicação dessas atividades, que os estudantes estejam portando este objeto. Seguindo com a aplicação, partimos para a análise da localização do ortocentro no triângulo obtusângulo.



g) **Qual é a localização do ponto H no triângulo obtusângulo?**

No triângulo obtusângulo, o ponto H fica no localização externa do triângulo

O ponto H se encontra fora do polígono, mais próximo do vértice com ângulo de maior medida

O ponto H está localizado no exterior do triângulo, mais próximo do ângulo Ĉ (obtusângulo).

Figura 10 - Respostas de estudantes 7, 8 e 9 na questão da localização do ortocentro no triângulo obtusângulo.
Fonte: Autor.

> **Aluno 7:** No triângulo obtusângulo, o ponto H fica na localização externa do triângulo.
> **Aluno 8:** O ponto H se encontra fora do polígono, mais próximo do vértice com ângulo de maior medida.
> **Aluno 9:** O ponto H está localizado no exterior do triângulo, mais próximo do ângulo C (obtusângulo).

Era esperado que os estudantes chegassem ao fato de que, nos triângulos obtusângulos, o ortocentro estaria sempre na região externa da figura, assim como apresentado na resposta do aluno 7.

Nota-se que alguns estudantes foram além do que era esperado na investigação, dado que o objetivo era perceber a localização (interna, externa ou um ponto específico da área ou perímetro do triângulo), mas ainda notaram que o ortocentro está mais próximo do ângulo obtuso em relação aos outros, conforme apresentado nos textos dos alunos 8 e 9. Estes casos ilustram o fato de que podemos programar o modo que começamos uma investigação, mas nem sempre saberemos como ela acabará (BROCARDO; OLIVEIRA; PONTE, 2015). Isso mostra como uma atividade de investigação pode ser envolvente e infindável, uma vez que os estudantes estarão sempre em busca de padrões.

Após a atividade de investigação, os(as) estudantes responderam a um questionário com as percepções que foram obtidas ao longo da tarefa e o resultado foi o seguinte:

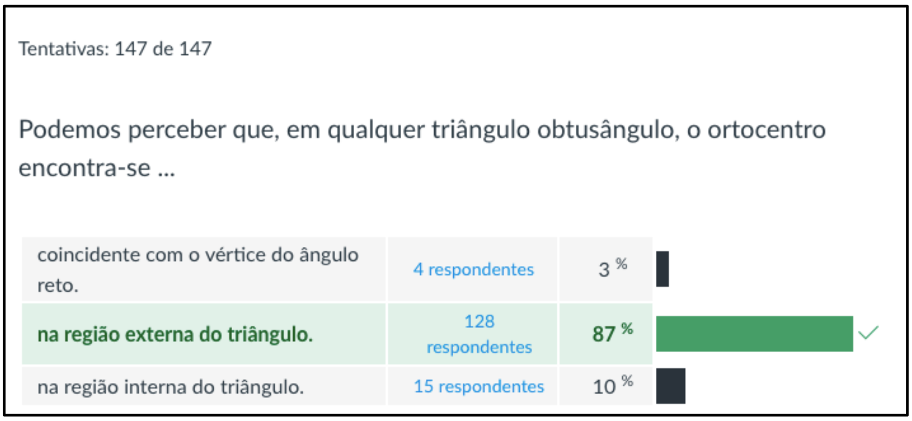
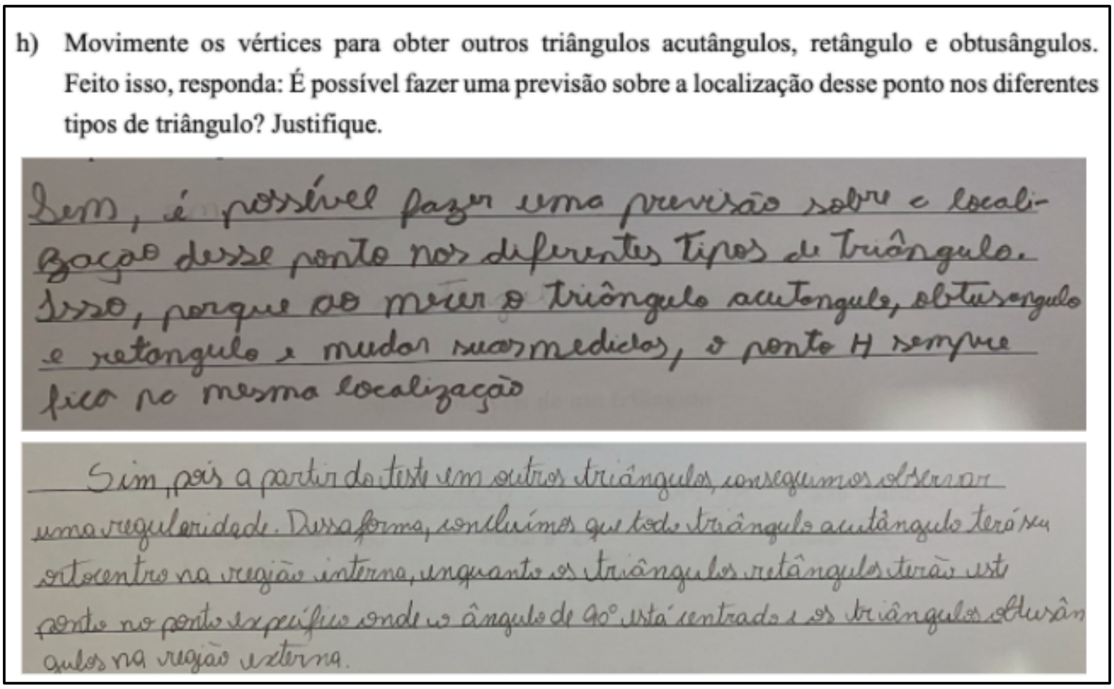


Figura 11 - Incidência das respostas em relação ao ortocentro no triângulo obtusângulo.
Fonte: Autor.

Durante a aplicação do questionário, foi solicitado aos estudantes que considerassem a primeira opção desta questão como “coincidente com o vértice do ângulo que possui a maior medida” em vez de “coincidente com o vértice do ângulo reto”, conforme apresentado na figura 8, dado que alguns estudantes já haviam respondido o questionário e, portanto, não era possível fazer a alteração do texto sem que eles tivessem de refazê-lo. Nota-se, novamente, que a maioria percebeu o que era esperado, o fato de o ortocentro pertencer à região externa da figura.

Uma das atividades colocadas nesta ficha de trabalho foi a reflexão acerca da previsão deste ponto notável nos diferentes tipos de triângulo, seguida de uma justificativa. Essa questão tinha o objetivo de fazer com que os estudantes refletissem acerca dos motivos pelos quais era possível chegar às conjecturas, levando em consideração o aspecto intuitivo. Selecionamos duas respostas: a primeira estava muito aquém do esperado, pois houve uma confusão na escrita; e, a segunda, apresentou exatamente o que era previsto. As respostas estão apresentadas a seguir, na figura 12.



h) Movimente os vértices para obter outros triângulos acutângulos, retângulo e obtusângulos. Feito isso, responda: É possível fazer uma previsão sobre a localização desse ponto nos diferentes tipos de triângulo? Justifique.

Sem, é possível fazer uma previsão sobre a locali-zação desse ponto nos diferentes tipos de triângulo. Isso, porque ao mexer o triângulo acutangulo, obtusangulo e retangulo e mudar suas medidas, o ponto H sempre fica no mesma localização

Sim, pois a partir do teste em outros triângulos, conseguimos observar uma regularidade. Dessa forma, concluímos que todo triângulo acutângulo terá seu ortocentro na região interna, enquanto os triângulos retângulos terão este ponto no ponto específico onde o ângulo de 90º está centrado e os triângulos obtusângulos na região externa.

Figura 12 - Respostas de estudantes 10 e 11 na questão da localização do ortocentro nos triângulos acerca da reflexão em relação aos padrões e regularidades encontrados.
Fonte: Autor.

> **Aluno 10:** Sim, é possível fazer uma previsão sobre a localização desse ponto nos diferentes tipos de triângulo. Isso, porque ao mexer no triângulo acutângulo, obtusângulo e retângulo e mudar suas medidas, o ponto H sempre fica na mesma posição.
>
> **Aluno 11:** Sim, pois a partir do teste em outros triângulos, conseguimos observar uma regularidade. Dessa forma, concluímos que todo triângulo acutângulo terá seu ortocentro na região interna, enquanto os triângulos retângulos terão este ponto no ponto específico onde o ângulo de 90º está centrado e os triângulos obtusângulos na região externa.

Com a resposta apresentada pelo aluno 10, verificamos que houve uma confusão na escrita. Ponte et al. (2015) citam que é normal que isso aconteça, uma vez que os estudantes não estão acostumados a lidarem com esse tipo de registro. Da forma como foi apresentada, conclui-se que o estudante conjecturou que, independente do triângulo, o ortocentro se encontra na mesma localização – o que é equivocado. Já o aluno 11, descreveu perfeitamente as localizações do ponto notável nos diferentes tipos de triângulo e o motivo pelo qual, intuitivamente, chegou às conjecturas.

A validação das conjecturas encontradas estava ligada à análise dos casos que foram obtidos ao longo das movimentações das figuras que iam sendo construídas. Como foi dito anteriormente, em diversos momentos, foi colocada a necessidade de se observar uma variedade de triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos para que as percepções não estivessem ligadas a casos particulares. Ou seja, não bastava analisar a localização do ortocentro em um único triângulo acutângulo, era necessário arrastar os vértices para obter diversos triângulos que possuíssem medidas de ângulos internos menores do que noventa graus para verificar se existia ou não um padrão a se conjecturar. Essa fala esteve sempre presente ao longo da aplicação das atividades.

A última questão da ficha de investigação pedia que as conjecturas intermediárias fossem escritas ao lado da construção que foi feita no *Geogebra* para que, em seguida, fosse compartilhada no ambiente virtual de aprendizagem da instituição. A correção da atividade foi feita por meio de uma rubrica que continha três critérios: a construção do triângulo, a construção do ortocentro e uma conclusão textual que iluminasse os padrões e regularidades encontrados ao longo da atividade.

O critério que avaliava a construção do triângulo verificava se ele passava no teste do “arrastar” – que nada mais é do que perceber se, ao movimentar os vértices do triângulo, a figura era mantida, ou seja, os lados e os ângulos se modificavam, mas a figura ainda permanecia em forma de um triângulo. O segundo critério estava relacionado à construção do ortocentro, isto é, analisávamos se os estudantes utilizaram corretamente as ferramentas necessárias para se construir as alturas do triângulo, em outras palavras, se construíram a perpendicular a um dos lados que passa pelo vértice oposto. Já o terceiro critério, solicitava uma conclusão textual acerca da localização do ortocentro nos diferentes tipos de triângulo. Segue abaixo, na figura 13, um exemplo de resposta que representa a maioria das concepções trazidas pelos estudantes.

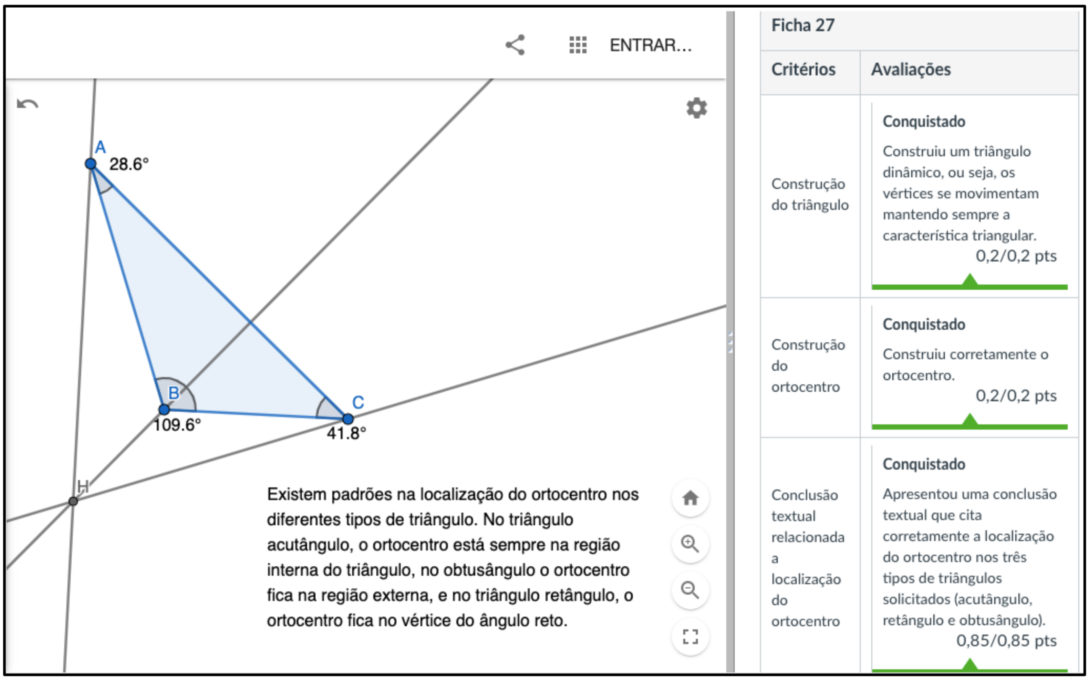


Figura 13 - Resposta final da atividade do ortocentro com a construção no *Geogebra*.
Fonte: Autor.

Na figura 13, observa-se que o estudante obteve, a partir da noção intuitiva e dos testes do arrastar, mediados pelo programa de geometria dinâmica, a resposta que era esperada. Além da conclusão textual, há a imagem que ilustra a construção final do triângulo, após ter sido movimentado e modificado diante das classificações quanto aos ângulos. Houve perguntas do tipo: “Que tipo de triângulo você espera que fique na construção final?”, e respondemos que poderia deixar a última variação feita, dado que isso não alteraria em nada os critérios de correção estabelecidos na rubrica, que foram descritos anteriormente.

A partir da análise das respostas dos estudantes, foi possível perceber que há indícios de uma boa compreensão e percepção das propriedades do ortocentro nos diferentes tipos de triângulos a partir desta atividade que teve como pressuposto a investigação por meio de um *software* de geometria dinâmica.

Esta primeira atividade foi muito importante para que os alunos e alunas pudessem se desprender de sentimentos aparentemente não tão positivos em relação à metodologia de aprendizagem empregada. Antes dela ser aplicada, verificamos que muitos e muitas estudantes sentiam-se ansiosos, nervosos e com medo do que estava por vir, de acordo com a nuvem de palavras apresentada na figura 5. Veremos, no tópico a seguir, como os estudantes se sentiram após terem feito a primeira etapa da investigação acerca dos pontos notáveis.

5.3 Os sentimentos após a primeira atividade de investigação

Após a aplicação da primeira atividade da sequência didática, foi proposta uma nova nuvem de palavras. O objetivo desta atividade era comparar as possíveis diferenças que a experiência de ter passado por uma tarefa de investigação, algo que era visto como novidade pelo público-alvo, pode ter gerado nos sentimentos dos estudantes. O resultado será apresentado na imagem a seguir (figura 14):

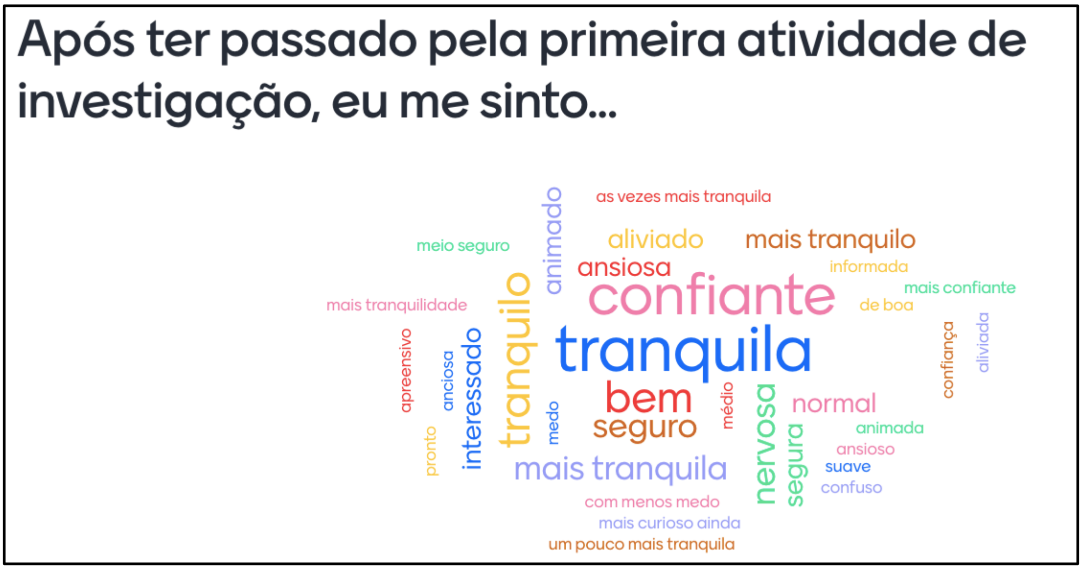


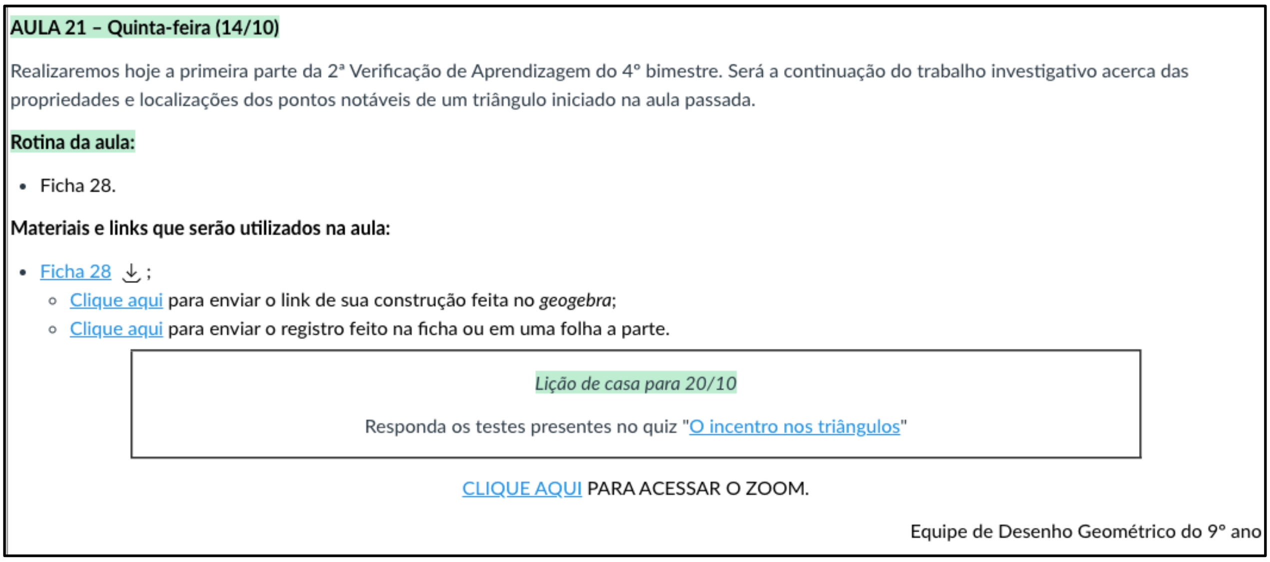
Figura 14 - Nuvem de palavras posterior à atividade 1.
Fonte: Autor.

Ao compararmos a nuvem de palavras que antecedeu a tarefa de investigação (figura 5) com a que foi feita após à atividade 1 (figura 14), notamos que houve uma mudança nos sentimentos dos estudantes para com a proposta da aula.

Inicialmente, palavras como ansiedade e medo eram muito frequentes e, após terem participado de uma tarefa desta natureza, esses termos deram lugares a outras expressões que remetem à tranquilidade, confiança e segurança no que há por vir. De acordo com a definição proposta por Eguía (2003, p. 34), “podemos definir, então, as atitudes como tendências ou disposições adquiridas e relativamente duradouras para avaliar de um modo determinado um objeto, pessoa, acontecimento ou situação e a atuar de acordo com essa avaliação”. Portanto, foi possível notar que houve uma mudança nas atitudes/concepções dos estudantes em relação a essa situação investigativa e, possivelmente, os estudantes estarão mais engajados na busca por padrões e regularidades. Continuamos, no próximo tópico, a descrição e análise da aplicação da sequência didática a partir do encontro das localizações do incentro.

5.4 Estudo das propriedades do incentro

A segunda atividade esteve atrelada ao estudo das propriedades do incentro e na construção de uma circunferência inscrita a um triângulo. Nesta atividade, os alunos e alunas estavam em casa, dado que ela foi desenvolvida na aula da tarde, o que, na ocasião, ocorreu à distância diante do protocolo sanitário adotado pela unidade escolar. Em um primeiro momento foi pedido para que os(as) estudantes fizessem o *login* na plataforma *Geogebra*, dado que o compartilhamento das construções só seria possível quando estivessem conectados com o usuário e senha. A atividade foi disponibilizada no ambiente virtual de aprendizagem conforme mostrado na figura 15. Na página da aula havia uma breve descrição da atividade e os links para a ficha de trabalho, para o envio da construção feita no *Geogebra* e para o encaminhamento dos registros que foram feitos na ficha ou em uma folha à parte, dado que nem todos os alunos e alunas optavam por imprimi-la.


AULA 21 – Quinta-feira (14/10)

Realizaremos hoje a primeira parte da 2ª Verificação de Aprendizagem do 4º bimestre. Será a continuação do trabalho investigativo acerca das propriedades e localizações dos pontos notáveis de um triângulo iniciado na aula passada.

Rotina da aula:

- Ficha 28.

Materiais e links que serão utilizados na aula:

- Ficha 28 ;
  - Clique aqui para enviar o link de sua construção feita no *geogebra*;
  - Clique aqui para enviar o registro feito na ficha ou em uma folha a parte.

Lição de casa para 20/10

Responda os testes presentes no quiz "O incentro nos triângulos"

CLIQUE AQUI PARA ACESSAR O ZOOM.

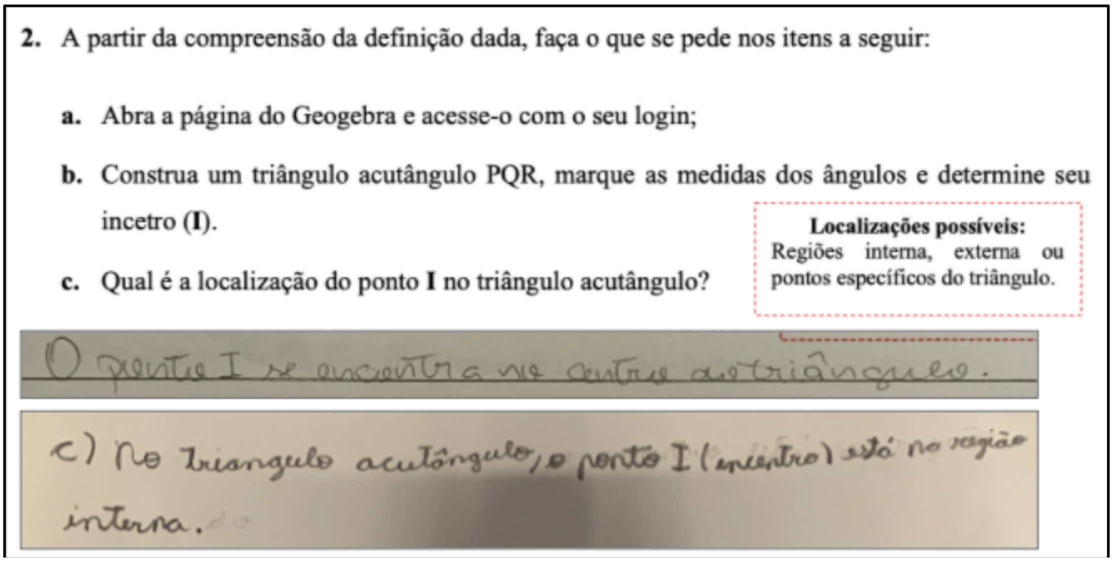
Equipe de Desenho Geométrico do 9º ano

Figura 15 - Descrição da aula destinada ao incentro disponibilizada no ambiente virtual de aprendizagem.
Fonte: Autor.

Ainda na descrição da aula, colocamos um teste de múltipla escolha como lição de casa, cuja ideia era verificar, de forma objetiva, as percepções/conclusões dos estudantes acerca da atividade proposta, assim como descrito na seção 5.2. Mas, como a atividade não levou todo o tempo da aula, os estudantes já o responderam ao longo do encontro, assim que terminavam a proposta da ficha.

A ficha de trabalho que devia ser seguida pelos(as) alunos(as) trazia questões que tinham como objetivo a localização do incentro nos diferentes triângulos em termos da classificação quanto aos ângulos e também à construção da circunferência inscrita neles. O objetivo era que eles e elas construíssem, por meio da ferramenta *polígono*, um triângulo qualquer, marcassem as medidas dos ângulos internos da figura e que fossem arrastando os vértices para obterem os triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo e as localizações do incentro atrelados a eles.

Havia, na atividade, espaços para a escrita do levantamento das conjecturas intermediárias para que, então, fizessem uma resposta que englobasse todas as percepções dos padrões e das regularidades que ocorreram no desenvolvimento, conforme apresentado nas imagens a seguir:


2. A partir da compreensão da definição dada, faça o que se pede nos itens a seguir:

a. Abra a página do Geogebra e acesse-o com o seu login;

b. Construa um triângulo acutângulo PQR, marque as medidas dos ângulos e determine seu incetro (**I**).

c. Qual é a localização do ponto **I** no triângulo acutângulo?

Localizações possíveis:
Regiões interna, externa ou pontos específicos do triângulo.

O ponto I se encontra no centro do triângulo.

c) No triangulo acutângulo, o ponto I (incentro) está no região interna.

Figura 16 - Respostas de estudantes 12 e 13 na questão da localização do incentro no triângulo acutângulo.
Fonte: Autor.

Aluno 12: O ponto I se encontro no centro do triângulo.
Aluno 13: No triângulo acutângulo, o ponto I (Incentro) está na região interna.

As duas respostas acima representam a variação dos textos produzidos pelos estudantes nesta questão. Poucas pessoas escreveram como fora apresentado pelo estudante 12. A hipótese levantada para tal erro está atrelada ao fato de que a pessoa pode ter realizado os testes necessários para a obtenção da conjectura apenas em triângulos equiláteros, uma vez que, nesta natureza, os pontos notáveis se coincidem e, portanto, o incentro pode ser visto como o centro de gravidade. Outra hipótese está relacionada ao fato de os estudantes se apegaram apenas ao nome dado a este ponto, por fazer referência à palavra centro na composição deste termo. Após a atividade de investigação, os(as) alunos(as) responderam a um questionário com as percepções que foram obtidas ao longo da tarefa e o resultado será apresentado na figura 17, a seguir:

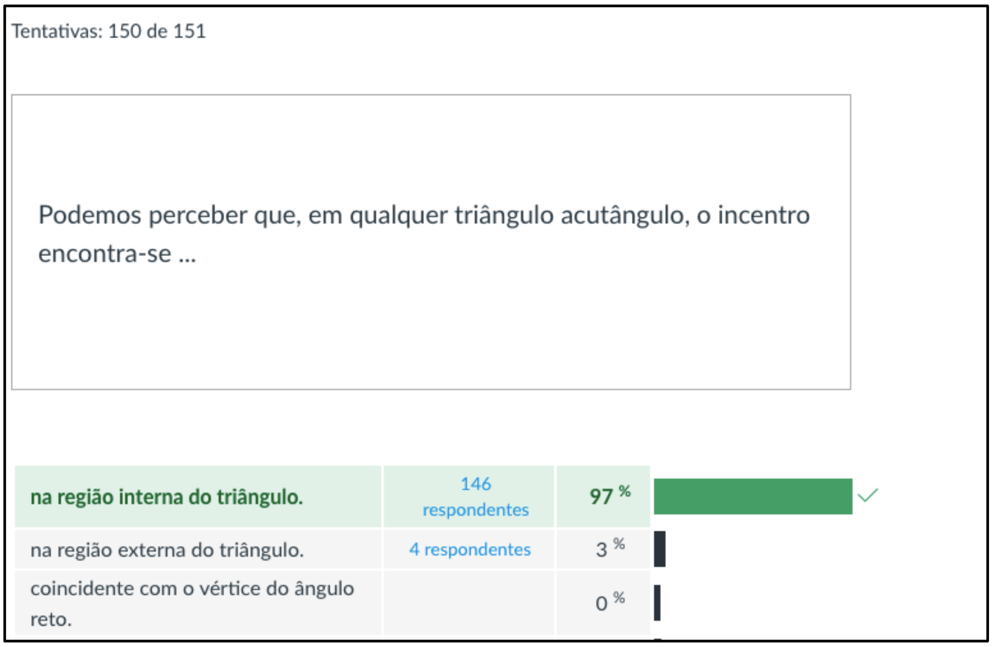
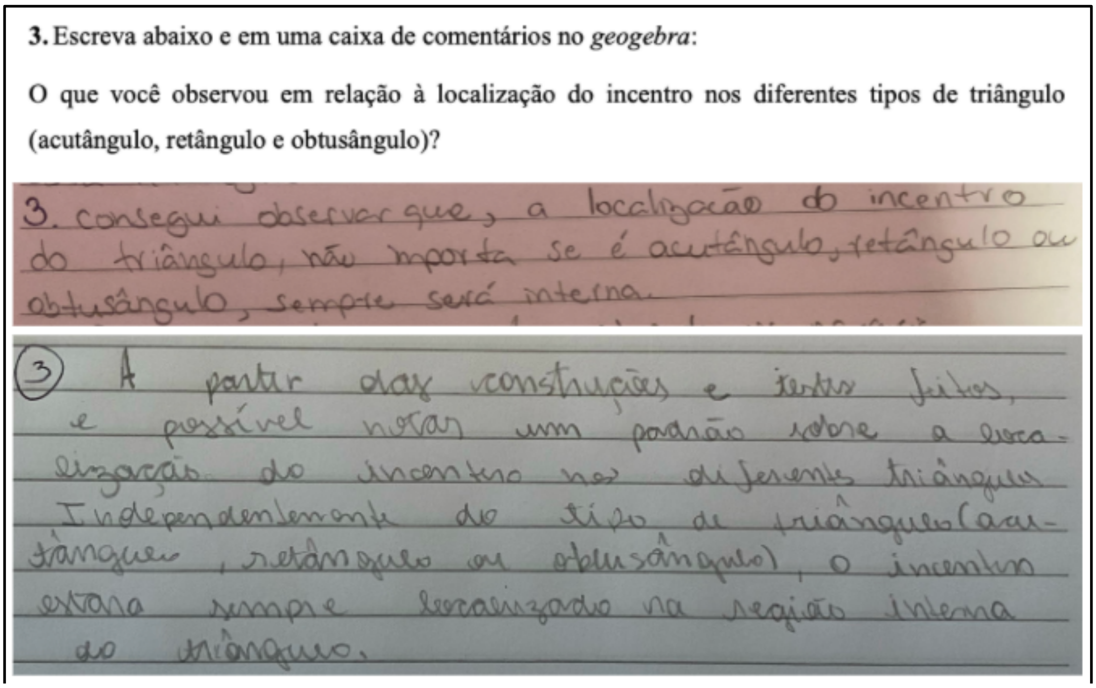


Figura 17 - Incidência das respostas em relação ao incentro no triângulo acutângulo.
Fonte: Autor.

Com a aplicação deste questionário, notou-se que houve uma aprendizagem significativa a partir da atividade investigativa proposta, dado que 97% dos(as) estudantes perceberam que o incentro de um triângulo acutângulo está sempre na região interna. Pensamos que seria interessante se tivéssemos colocado a opção “centro do triângulo” como resposta possível neste formulário para que pudéssemos analisar a incidência de respostas atreladas a esta opção, uma vez que se os estudantes não se atentarem à conjectura observada, podem ser levados a concluir – erroneamente – que o ponto estará sempre no centro da figura, ou seja, equidistante dos vértices e lados.

Nesta atividade, os(as) estudantes tiveram de fazer os mesmos testes para os triângulos retângulos e obtusângulos e perceberam que, independentemente da natureza do triângulo, o incentro sempre estará localizado na região interna do polígono. Como as respostas não foram diferentes daquelas que foram mostradas na Figura 16, não disponibilizaremos as imagens dos resultados parciais, mas colocaremos a seguir – na figura 18 – exemplos de respostas que contemplam as conjecturas levantadas pelos alunos e alunas de uma forma geral.


3. Escreva abaixo e em uma caixa de comentários no *geogebra*:

O que você observou em relação à localização do incentro nos diferentes tipos de triângulo (acutângulo, retângulo e obtusângulo)?

3. Consegui observar que, a localização do incentro do triângulo, não importa se é acutângulo, retângulo ou obtusângulo, sempre será interna.

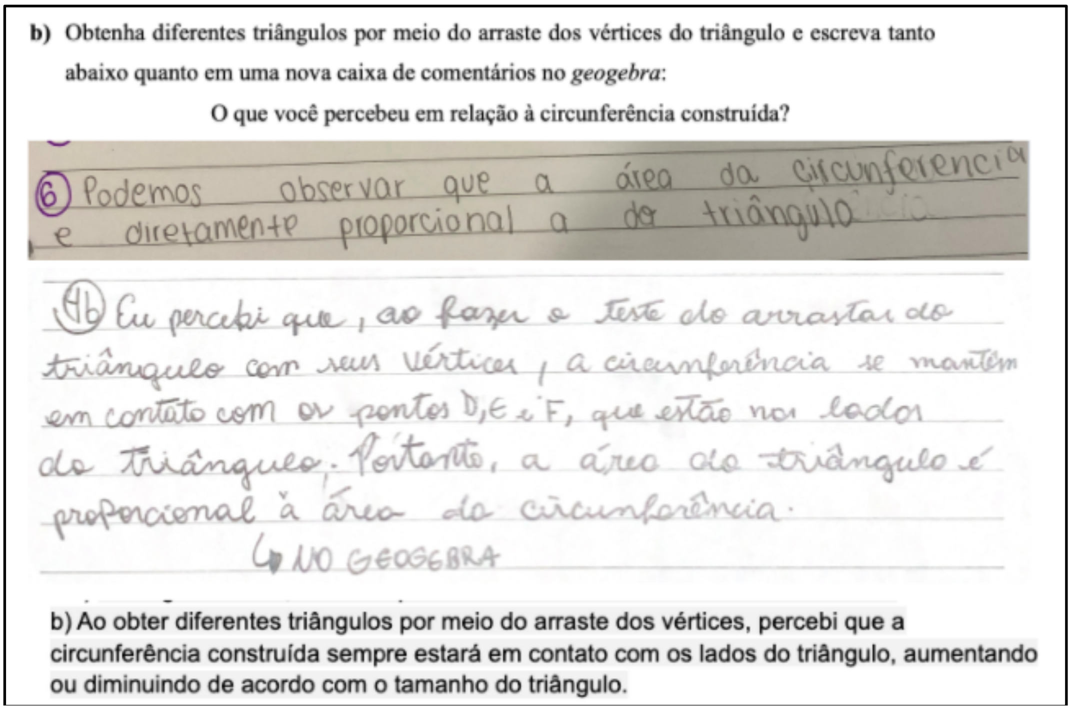
3 A partir das construções e testes feitos, é possível notar um padrão sobre a localização do incentro nos diferentes triângulos. Independentemente do tipo de triângulo (acutângulo, retângulo ou obtusângulo), o incentro estará sempre localizado na região interna do triângulo.

Figura 18 - Respostas de estudantes 14 e 15 na questão da localização do incentro nos triângulos acerca da reflexão em relação aos padrões e regularidades encontrados.
Fonte: Autor.

> **Aluno 14:** Consegui observar que, a localização do incentro no triângulo, não importa se é acutângulo, retângulo ou obtusângulo, sempre será interna.
> **Aluno 15:** A parte das construções e testes feitos é possível notar que um padrão sobre a localização do incentro nos diferentes triângulos, independente do tipo do triângulo (acutângulo, retângulo ou obtusângulo), o incentro estará sempre localizado na região interna do triângulo.

É visível, nas resoluções apresentadas pelos dois estudantes (alunos 14 e 15), que houve clareza na obtenção das conjecturas. Além disso, em muitas respostas apareceu a ideia de que essas conjecturas observadas estavam ligadas aos testes feitos pela movimentação dos vértices do triângulo dinâmico, conforme descrito na resposta do aluno 15.

Além de verificarem as localizações dos pontos notáveis nos triângulos, os(as) estudantes também tinham de perceber que, independentemente do triângulo construído, há uma circunferência que tangencia todos os seus lados. Para que os estudantes chegassem à conjectura esperada, foi solicitado, em uma das questões, que os(as) alunos(as) construíssem uma reta perpendicular a qualquer um dos lados do triângulo que passasse pelo incentro, nomeassem a intersecção desta construção com o lado do triângulo por D e que, em seguida, criassem a circunferência que tivesse como centro o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo, cujo raio tivesse a medida da distância do incentro ao ponto D. Após terem feito as construções solicitadas, os(as) estudantes tiveram que refletir sobre as características dos segmentos ID, IE, e IF do triângulo DEF, levando em consideração que o ponto I era o incentro da circunferência e, por unanimidade, todos(as) responderam que se tratavam de raios da circunferência construída.


b) Obtenha diferentes triângulos por meio do arraste dos vértices do triângulo e escreva tanto abaixo quanto em uma nova caixa de comentários no *geogebra*:

O que você percebeu em relação à circunferência construída?

6 Podemos observar que a área da circunferência e diretamente proporcional a do triângulo

4b Eu percebi que, ao fazer o teste do arrastar do triângulo com seus vértices, a circunferência se mantém em contato com os pontos D, E e F, que estão nos lados do triângulo. Portanto, a área do triângulo é proporcional à área da circunferência.

↳ NO GEOGEBRA

b) Ao obter diferentes triângulos por meio do arraste dos vértices, percebi que a circunferência construída sempre estará em contato com os lados do triângulo, aumentando ou diminuindo de acordo com o tamanho do triângulo.

Figura 19 - Respostas de estudantes 16, 17 e 18 na questão da construção da circunferência inscrita.

Fonte: Autor.

Aluno 16: Podemos observar que a área da circunferência é diretamente proporcional a do triângulo.

Aluno 17: Eu percebi que, ao fazer o teste do arrastar do triângulo com seus vértices, a circunferência se mantém em contato com os pontos D, E e F, que estão nos lados do triângulo. Portanto, a área do triângulo é proporcional à área da circunferência.

> **Aluno 18:** b) Ao obter diferentes triângulos por meio do arraste dos vértices, percebi que a circunferência construída sempre estará em contato com os lados do triângulo, aumentando ou diminuindo de acordo com o tamanho do triângulo.

A maioria dos(as) estudantes responderam a esta questão de uma maneira bastante similar à apresentada pelo aluno 18. Notamos também que houve uma quantidade razoável de pessoas que perceberam apenas que a circunferência construída possui uma área diretamente proporcional à área do triângulo. Esta percepção está imprecisa e, além disso, fugiu do que era esperado, o que faz parte da característica de um processo investigativo, dado que nem sempre saberemos como atividades desta natureza terminarão pela natureza de questões abertas, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2015).

Verificamos, neste caso, que a intuição levou os estudantes a uma conjectura equivocada. Para chegar a essa ideia, os estudantes perceberam que quando uma figura aumenta, a outra aumenta também assim como, ao diminuir a área de um polígono, a área do outro também diminui. Para que os estudantes pudessem chegar a uma conjectura relacionada à proporcionalidade entre as áreas deveriam analisar se o fator de crescimento ou decrescimento é o mesmo, o que não é verdade, mas esse procedimento também não ocorreu.

Fica, como sugestão para um próximo trabalho, o acréscimo da utilização da ferramenta "área" para que os estudantes possam analisar as relações entre as regiões do triângulo e circunferência e verificar que o que foi observado como propriedade é, na realidade, uma não propriedade. A utilização da ferramenta citada caracteriza o emprego do componente formal associado ao componente intuitivo na construção da resposta, dado que o estudante valerá do seu conhecimento acerca das áreas e proporcionalidade e tentará buscar os possíveis padrões ao variar os triângulos a partir da movimentação dos vértices. Vale ressaltar a necessidade de acrescentar o arredondamento de uma casa decimal, pelo menos, uma vez que, caso isso não seja feito, os estudantes podem chegar a conclusões que apresentam erros conceituais.

A imagem a seguir (figura 20) traz um exemplo de produção da construção e da elaboração das conjecturas que foi entregue no ambiente virtual de aprendizagem da instituição de ensino.

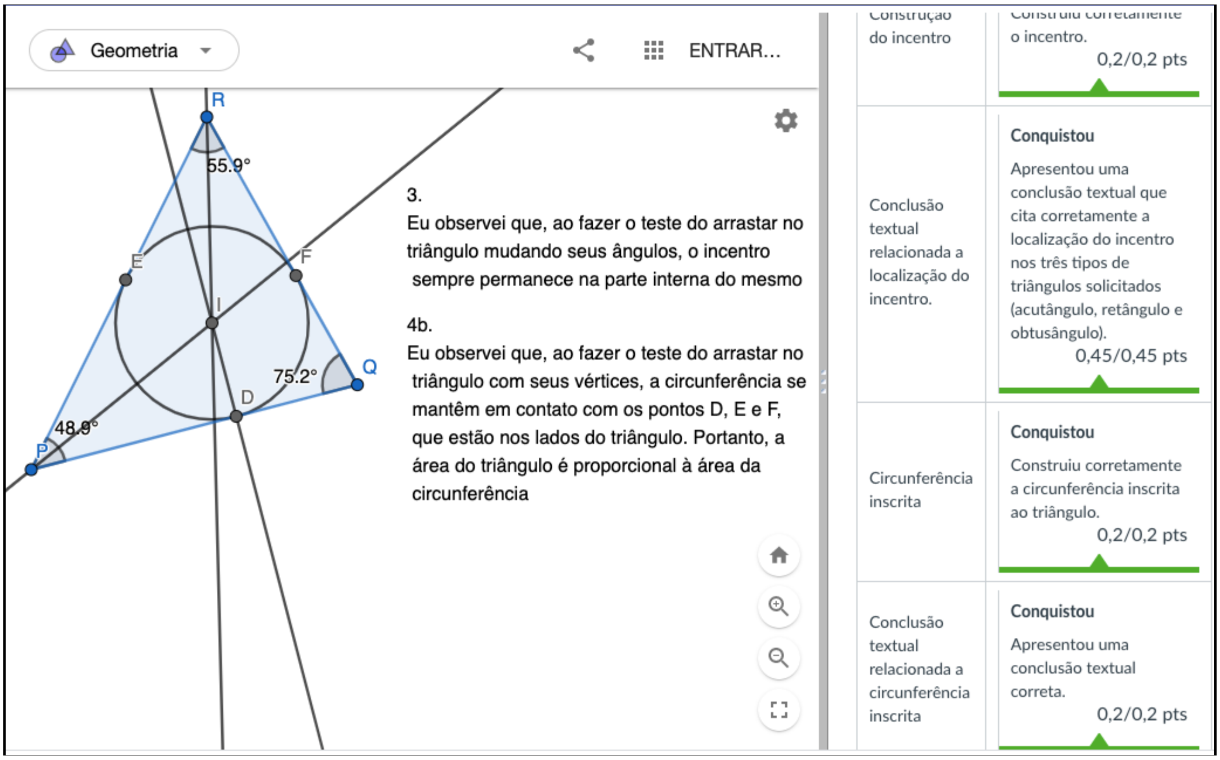


Figura 20 - Resposta final do aluno 19 da atividade do incentro com a construção no *Geogebra*.
Fonte: Autor.

Aluno 19: 3.
Eu observei que, ao fazer o teste do arrastar no triângulo, mudando seus ângulos, o incentro sempre permanece na parte interna do mesmo.
4b.
Eu observei que, ao fazer o teste do arrastar no triângulo com seus vértices, a circunferência se mantém em contato com os pontos D, E e F, que estão nos lados do tri6angulo. Portanto, a área do triângulo é proporcional à área da circunferência.

Foi feita a correção individualizada das produções de todos os alunos e alunas. Esta correção estava atrelada a uma rubrica, que tinha uma série de critérios, como a construção do triângulo, do incentro e da circunferência inscrita, assim como as conclusões textuais que englobam a percepção dos padrões e regularidades acerca deste ponto notável. Para corrigir a parte da conclusão textual vinculada à circunferência inscrita, levamos em consideração se o estudante identificou que a circunferência tangencia os lados do triângulo, independentemente de sua classificação e não houve desconto pela imprecisão relacionada à identificação equivocada da relação de proporcionalidade das áreas. Diante disso, a pontuação média dos estudantes foi 1,06 de 1,25. Portanto, conclui-se, a partir desta análise, que há indícios de uma boa compreensão e percepção das propriedades do incentro nos diferentes tipos de triângulos.

5.5 Estudo das propriedades do circuncentro

A terceira atividade desta sequência didática tinha como objetivo o estudo das propriedades do circuncentro de um triângulo. Em um primeiro momento, foram distribuídos os computadores portáteis para aqueles e aquelas que não levaram os dispositivos pessoais à aula, conforme solicitado em um encontro anterior. Foi pedido aos estudantes que fizessem o *login* na plataforma *geogebra*, dado que o compartilhamento das construções só seria possível quando estivessem conectados com o usuário e senha. Além dos computadores, foram distribuídas as atividades propostas por meio de uma ficha. A ideia é que eles e elas fizessem as construções requeridas para que conseguissem chegar às conjecturas esperadas.

A ficha de trabalho que deveria ser seguida pelos(as) alunos(as) trazia questões que tinham como objetivo a localização do circuncentro nos diferentes triângulos em termos da classificação quanto aos ângulos, além da obtenção da circunferência circunscrita a eles. Para isso, os estudantes deveriam construir, por meio da ferramenta *polígono*, um triângulo qualquer, marcar as medidas dos ângulos internos da figura e arrastar os vértices para obterem os triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo e as respectivas localizações do ortocentro atrelados à cada um deles.

Havia, na atividade, espaços para a escrita do levantamento das conjecturas intermediárias para que, então, fizessem uma resposta que englobasse todas as percepções dos padrões e das regularidades que ocorreram ao longo do desenvolvimento da atividade, conforme apresentado nas imagens a seguir (figura 21):

2. A partir da compreensão da definição dada, faça o que se pede nos itens a seguir:

a) Abra a página do GeoGebra e acesse-o com o seu *login*.

b) Construa um triângulo DEF, marque as medidas dos seus ângulos, transforme-o em acutângulo e determine o circuncentro (**O**).

c) Qual é a localização do ponto **O** no triângulo acutângulo?

Localizações possíveis:
Regiões interna, externa ou pontos específicos do triângulo.

O ponto O se localiza, no triângulo acutângulo, na região interna do triângulo

Figura 21 - Respostas do estudante 20 na questão da localização do circuncentro no triângulo acutângulo.
Fonte: Autor.

Aluno 20: O ponto O se localiza, no triângulo acutângulo, na região interna do triângulo.

A resposta apresentada pelo aluno 20 representa todas as respostas identificadas nas produções dos(as) estudantes, portanto, não houve variação no conteúdo dos textos apresentados.

e) Qual é a localização do ponto **O** no triângulo retângulo?

Na triângulo retângulo a ponto "O" se encontra na intersecção entre a mediatriz da hipotenusa e a hipotenusa. Ou seja, a ponto "O" divide a hipotenusa em duas partes iguais.

A localização do ponto O no triângulo retângulo está em um ponto específico, está localizado no ponto médio do segmento do lado oposto ao ângulo reto.

No triângulo retângulo o ponto O se encontra na mediatriz do vértice oposto ao ângulo reto.

Tendo $\hat{F} = 90°$, temos o ponto O no lado DE do triân-gulo retângulo.

Figura 22 - Respostas de estudantes 21 a 24 na questão da localização do circuncentro no triângulo retângulo.
Fonte: Autor.

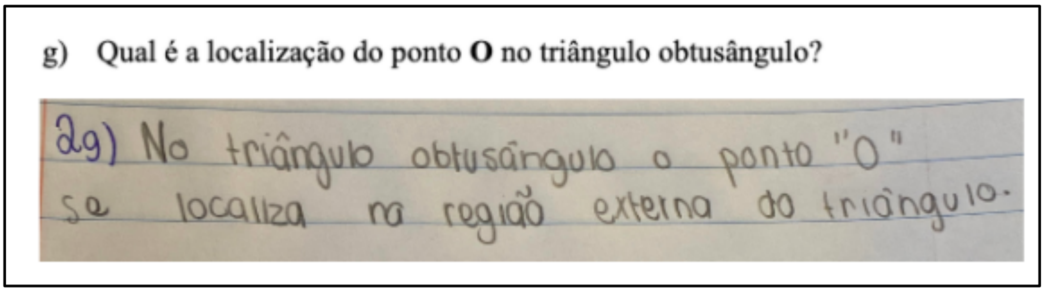
Aluno 21: No triângulo retângulo o ponto "O" se encontra na intersecção entre a mediatriz da hipotenusa e a hipotenusa, ou seja, o ponto "O" divide a hipotenusa em duas partes iguais.

Aluno 22: A localização do ponto O no triângulo retângulo está em um ponto específico, está localizado no ponto médio do segmento do lado oposto ao ângulo reto.
Aluno 23: No triângulo retângulo, o ponto O se encontra na mediatriz do vértice oposto ao ângulo reto.
Aluno 24: Tendo F = 90º, temos o ponto O no lado do triângulo retângulo.

Na imagem anterior (Figura 22), foram colocadas quatro respostas que ilustram os textos apresentados pelos estudantes nesta atividade. As duas primeiras, relacionadas aos alunos 21 e 22, foram consideradas completamente corretas e são similares, dado que há pouca divergência na escolha das palavras utilizadas para representar a mesma localização do circuncentro no triângulo retângulo. A terceira resposta (aluno 23) apresenta um erro conceitual, dado que, no lugar da palavra vértice, deveria ter aparecido a palavra lado. A última resposta (aluno 24) nos mostra que o(a) estudante percebeu que o ponto notável está em um dos lados, mas que não foi tão específico(a) na resposta.

Independente da variedade de textos que foram apresentados pelos(as) estudantes na questão solicitada, nota-se que houve o encontro da conjectura prevista, mas que, um estudante ou outro, não redigiu a resposta da maneira que era esperada. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2015, p. 35), “O registro escrito, que se pede numa investigação como essa, constitui um desafio adicional para os alunos desse nível de escolaridade, porque exigem um tipo de representação que nunca utilizaram”.

Além disso, podem ocorrer confusões que envolvem os elementos presentes na construção, como apresentado na resposta do aluno 23: “No triângulo retângulo, o ponto O se encontra na mediatriz do vértice oposto ao ângulo reto”. Neste caso, o equívoco na escolha da palavra “vértice” em vez de “lado”. Veremos a seguir uma resposta que representa a maioria das conclusões dos estudantes relacionadas à localização do circuncentro (ponto O) nos triângulos obtusângulos.


g) Qual é a localização do ponto **O** no triângulo obtusângulo?

2g) No triângulo obtusângulo o ponto "O" se localiza na região externa do triângulo.

Figura 23 – Resposta do estudante 24 na questão da localização do circuncentro no triângulo obtusângulo.
Fonte: Autor.

Aluno 25: No triângulo obtusângulo, o ponto "O" se localiza na região externa do triângulo.

A resposta apresentada anteriormente representa a totalidade dos textos que foram entregues na forma manuscrita. Todos(as) os(as) estudantes chegaram à mesma percepção em relação à localização do circuncentro do triângulo obtusângulo. Ao observar as construções e registros feitos no *Geogebra*, percebemos que algumas pessoas foram além do esperado, dizendo que o circuncentro neste tipo de triângulo fica na região externa da figura, mas numa localização mais próxima do lado oposto ao maior ângulo, conforme apresentado na imagem a seguir (figura 24):

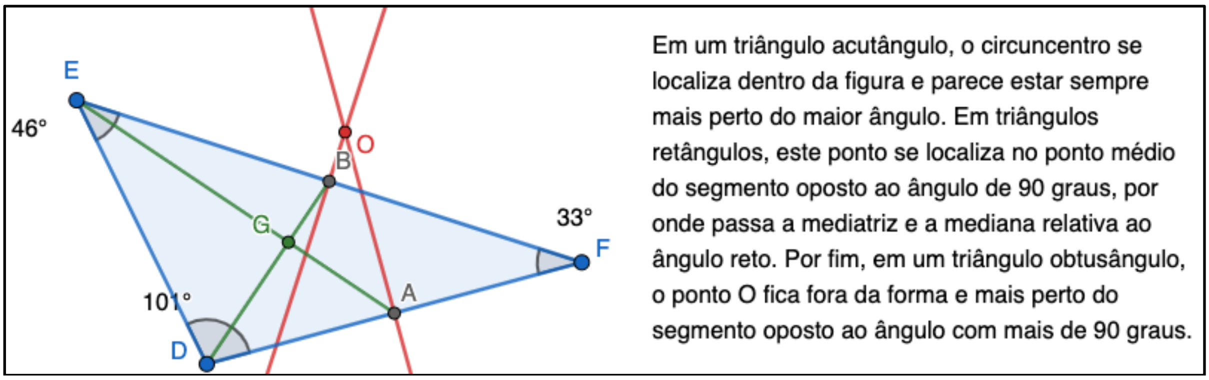
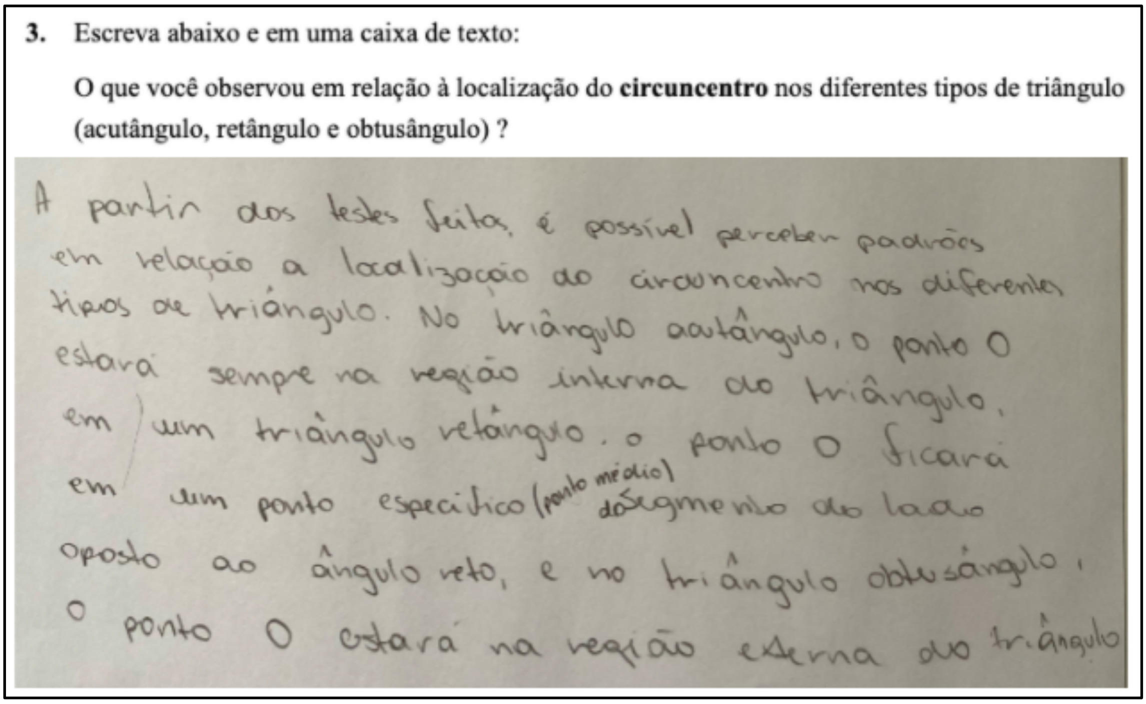


Figura 24 - Modelo de resposta do estudante 26 acerca da atividade do circuncentro escrita no geogebra.
Fonte: Autor.

Aluno 26: Em um triângulo acutângulo, o circuncentro se localiza dentro da área da figura e parece estar sempre mais perto do maior ângulo. Em triângulos retângulos, este ponto se localiza no ponto médio do segmento oposto ao ângulo de 90 graus, por onde passa a mediatriz e a mediana relativa ao ângulo reto. Por fim, em um triângulo obtusângulo o ponto O fica fora da forma e mais perto do segmento oposto ao ângulo com mais de 90 graus.


3. Escreva abaixo e em uma caixa de texto:

O que você observou em relação à localização do **circuncentro** nos diferentes tipos de triângulo (acutângulo, retângulo e obtusângulo) ?

A partir dos testes feita, é possível perceber padrões em relação a localização do circuncentro nos diferentes tipos de triângulo. No triângulo acutângulo, o ponto O estará sempre na região interna do triângulo, em um triângulo retângulo, o ponto O ficará em um ponto especifico (ponto médio) do segmento do lado oposto ao ângulo reto, e no triângulo obtusângulo, o ponto O estará na região externa do triângulo

Figura 25 - Resposta do estudante 27 na questão da localização do circuncentro nos triângulos acerca da reflexão em relação aos padrões e regularidades encontrados.
Fonte: Autor.

Aluno 27: A partir dos testes feitos é possível perceber padrões em relação à localização do circuncentro nos diferentes tipos de triângulo. No triângulo acutângulo, o ponto O estará sempre na região interna do triângulo, em um triângulo retângulo, o ponto O ficará em um ponto específico, ponto médio do segmento do lado oposto ao ângulo reto e, no triângulo obtusângulo, o ponto O estará na região externa do triângulo.

Nos chamou a atenção o fato de que em muitas respostas apareceu a ideia de que essas conjecturas levantadas estavam ligadas aos testes feitos pela movimentação dos vértices do triângulo dinâmico. Este fato nos permite concluir que muitos estudantes estavam preocupados em fazer os testes em diferentes configurações dos triângulos perante as classificações descritas nas questões.

Além de verificarem as localizações dos pontos notáveis no triângulo, os(as) estudantes também tinham de perceber que, independentemente do triângulo construído, há uma circunferência que passa por todos os vértices a partir de uma sequência de atividades que foram propostas. Foi solicitado, em uma das questões, que os(as) alunos(as) construíssem uma circunferência por meio da ferramenta "Círculo dado o centro e um de seus pontos" clicando no ponto **O** (circuncentro) e em qualquer um dos seus vértices.

Após terem feito as construções solicitadas, os(as) estudantes tiveram que refletir sobre o que os segmentos OD, OE e OF e o ponto O representavam na circunferência construída, e a maioria apresentou uma resposta completa, explicitando que o ponto O caracteriza o centro e os segmentos OD, OE e OF representam os raios da circunferência obtida. Algumas pessoas, porém, identificaram apenas que a área da circunferência é proporcional à área do triângulo – o que é um equívoco.

4. Clique na ferramenta Circunferência, dados o centro e um de seus pontos, e, em seguida, clique no ponto **O** e em qualquer um dos seus vértices. Responda abaixo e em uma nova caixa de texto no GeoGebra:

a) O que o **ponto O** e os segmentos **OD**, **OE** e **OF** representam na circunferência construída?

b) Arraste os vértices do triângulo e escreva o que você percebeu em relação à circunferência construída.

4a) O ponto O representa o centro da circunferência e os segmentos $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$ representam o raio da circunferência

4b) É possível perceber que independentemente do tipo ou tamanho do triângulo, a circunferência pode mudar seu tamanho e raio, mas sempre passará pelos 3 vértices do triângulo, e estará sempre na região externa desse

Arrastando os vértices do triângulo pude perceber que na medida em que aumentávamos o triângulo ao mover o vértice, o tamanho da circunferência aumentava na mesma proporção, tendo uma relação diretamente proporcional, mesmo aumentando seu tamanho e raio, a medida da distância do centro O para os pontos D, E e F permonesceram as mesmas.

Figura 26 - Respostas de estudantes 28 e 29 na questão da construção da circunferência circunscrita.

Fonte: Autor.

Aluno 28: 4a) O ponto O representa o centro da circunferência e os segmentos OD, OE e OF representam o raio da circunferência.

4b) É possível perceber que, independentemente do tipo ou tamanho do triângulo, a circunferência pode mudar seu tamanho e raio, mas sempre passará pelos três vértices do triângulo e estará sempre na região externa desse.

Aluno 29: Arrastando os vértices do triângulo pude perceber que a medida em que aumentávamos o triângulo ao mover o vértice, o tamanho da circunferência aumentava na mesma proporção, tendo uma relação diretamente proporcional.

> Mesmo aumentando seu tamanho e raio, a medida da distância do centro O para os pontos D, E e F permaneceu a mesma.

Mais uma vez, apareceram respostas que identificaram uma relação de proporcionalidade entre as áreas do triângulo e da circunferência circunscritas, conforme ilustrado pelo aluno 29, sem ao menos fazerem uma análise do fator de crescimento e decrescimento das figuras. Isto exemplifica novamente que a intuição pode levar os estudantes a uma percepção equivocada. Após verificar que o mesmo erro ocorreu neste momento, pensamos que se tivéssemos feito uma discussão da investigação da localização do incentro e da circunferência inscrita ao triângulo após a realização desta tarefa, o problema em questão não teria se repetido. Fica a proposta para as próximas vezes em que esta sequência didática for aplicada.

Após a correção das questões apresentadas nesta atividade, pode-se concluir que há indícios de que o objetivo foi cumprido e que a maioria das pessoas conseguiu compreender e perceber as propriedades do circuncentro nos diferentes tipos de triângulo, dado que a pontuação média dos(as) estudantes foi de aproximadamente 1,13 de 1,25. Vale ressaltar que, mais uma vez, assim como na atividade do incentro, não houve descontos nos casos em que o estudante verificou corretamente a relação dos vértices do triângulo com a circunferência, mas que complementou com o equívoco na relação das áreas do triângulo e circunferência circunscrita.

Segue abaixo, na figura 27, um exemplo de construção com resposta final feita pelo estudante 30.

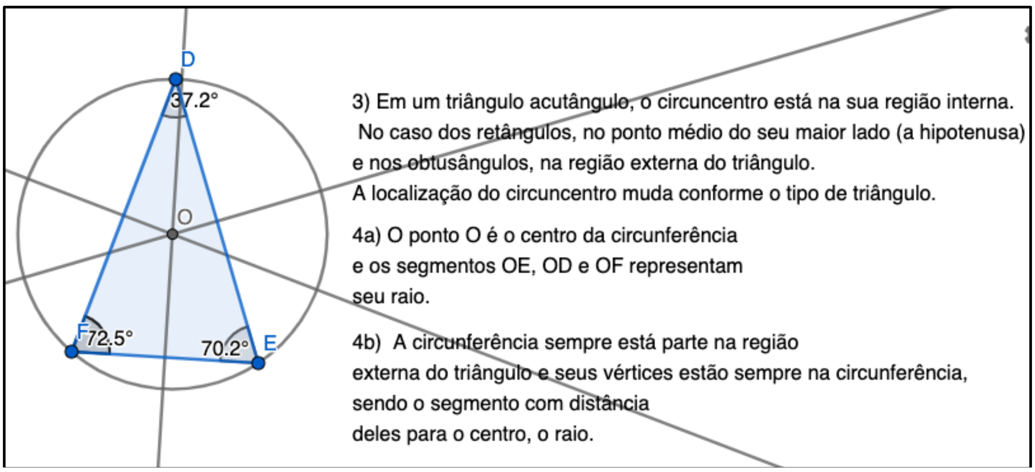


Figura 27 – Resposta do aluno 30 na atividade do circuncentro com a construção no geogebra.
Fonte: Autor.

Aluno 30: 3) Em um triângulo acutângulo, o circuncentro está na sua região interna. No caso dos retângulos, no ponto médio do seu maior lado (a hipotenusa) e, nos obtusângulos, na região externa do triângulo. A localização do circuncentro muda conforme o tipo de triângulo.

4ª) O ponto O é o centro da circunferência e os segmentos OE, OD e OF representam seus raios.

4b) A circunferência sempre está região externa do tri6angulo e seus vértices estão sempre na circunferência.

Consideramos a resposta apresentada como resposta modelo, pois está de acordo com o que era esperado para esta atividade.

5.6 Estudo das propriedades do baricentro

A quarta atividade esteve relacionada ao estudo das propriedades do baricentro. Nesta atividade os alunos e alunas estavam em casa, dado que ela foi desenvolvida na aula da tarde, o que, na ocasião, ocorreu por meio de uma conferência, diante do protocolo de saúde adotado pela unidade escolar. Em um primeiro momento, foi pedido aos estudantes que fizesse o *login* na plataforma *Geogebra*, uma vez que o compartilhamento das construções só seria possível se eles e elas estivessem conectados com o usuário e senha. A atividade foi disponibilizada no ambiente virtual de aprendizagem conforme mostrado na imagem a seguir:

AULA 23 – Quinta-feira (21/10)

Realizaremos hoje a terceira parte da 2ª Verificação de Aprendizagem do 4° bimestre. Será a continuação do trabalho investigativo acerca das propriedades e localizações dos pontos notáveis de um triângulo iniciado na aula passada.

Rotina da aula:

- Ficha 30.

Materiais e links que serão utilizados na aula:

- Ficha 30.
  - Clique aqui para enviar o link de sua construção feita no *geogebra*;
  - Clique aqui para enviar o registro feito na ficha ou em uma folha a parte.

Lição de casa para 27/10

- Responda os testes presentes no quiz "O baricentro nos triângulos";
- Envie as fotos da sua verificação de aprendizagem 1 por meio ***deste link.***

CLIQUE AQUI PARA ACESSAR O ZOOM.

Figura 28 - Descrição da aula destinada ao baricentro disponibilizada no ambiente virtual de aprendizagem.
Fonte: Autor.

Ainda na descrição da aula, colocamos um teste de múltipla escolha como lição de casa, cuja ideia era verificar, de forma objetiva, as percepções/conclusões dos estudantes acerca da atividade proposta, assim como descrito na seção 5.2, mas como a atividade não levou todo o tempo da aula, os estudantes já o responderam ao longo do encontro, assim que terminavam a proposta da ficha.

A ficha de trabalho que deveria ser seguida pelos(as) alunos(as) trazia questões que tinham como objetivo a investigação das propriedades do baricentro nos diferentes triângulos em termos da classificação quanto aos ângulos. Assim como nas outras atividades, foi solicitado a eles e elas que construíssem, por meio da ferramenta *polígono*, um triângulo qualquer, marcassem as medidas dos ângulos internos da figura e que fossem arrastando os vértices a fim de obterem os triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo e as localizações do baricentro atrelados a cada um deles.

Havia, como em todas as outras atividades, espaços para a escrita do levantamento das conjecturas intermediárias para que, então, elaborassem um texto que englobasse todas as percepções dos padrões e das regularidades que foram observados ao longo do desenvolvimento da tarefa, conforme apresentado na imagem a seguir (figura 29):

3. Escreva a seguir e em uma caixa de texto no *geogebra*:

O que você observou em relação à localização do **baricentro** nos diferentes tipos de triângulo (acutângulo, retângulo e obtusângulo)?

3) Fazendo diferentes movimentações ~~perceb~~ conclui que em todos os triângulos, acutângulo, obtusângulo e retângulo o baricentro está dentro da figura.

Em todos os tipos de triângulo, o baricentro se localiza na região interna do triângulo.

Figura 29 - Respostas de estudantes 31 e 32 na questão da localização do baricentro nos triângulos acerca da reflexão em relação aos padrões e regularidades encontrados.
Fonte: Autor.

> **Aluno 31:** Fazendo diferentes movimentações conclui que em todos os triângulos, acutângulo, obtusângulo e retângulo, o baricentro está dentro da figura.
> **Aluno 32:** Em todos os tipos de triângulo, o baricentro se localiza na região interna do triângulo.

Não houve dificuldades para o encontro das localizações, tampouco na escrita das respostas, as quais foram representadas pelos alunos 31 e 32. Mais uma vez, nota-se que alguns estudantes tiveram a preocupação em colocar que a percepção se deu a partir da movimentação dos vértices, o que nos traz a ideia de que o estilo dinâmico do programa adotado para esta sequência didática viabiliza a assimilação de padrões e regularidades.

Além de investigarem a localização do baricentro, os(as) estudantes também tinham de perceber que, independentemente do triângulo construído, este ponto notável divide a mediana em uma razão de 2 para 1. Isto é, a parte da mediana que contém o vértice possui o dobro da medida da parte que contém o ponto médio do lado oposto. Para esta investigação, foi solicitado aos alunos(as) que medissem as distâncias de cada vértice ao baricentro e do baricentro aos respectivos pontos médios dos lados do triângulo por meio da utilização da ferramenta "*distância e comprimento*" para que, a partir da observação das medidas, pudessem ter condições de exprimirem o padrão esperado.

4. Configure o *geogebra* para que haja uma aproximação de duas casas decimais e meça cada um dos segmentos abaixo. Em seguida, escreva as relações que há entre:

a) Os segmentos AG e GD: a) O segmento AG é o dobro do segmento GD

b) Os segmentos BG e GE: b) O segmento BG é o dobro do segmento GE

c) Os segmentos CG e GF: c) O segmento CG é o dobro do segmento FG

d) Essas relações são mantidas em qualquer tipo triângulo? Justifique.

d) Essas relações são mantidas em qualquer tipo de triângulo. Isso acontece pois, o baricentro (G) divide as medianas de um modo que fique um terço (GD, GE e GF) e dois terços (AG, BG e CG). Assim, por mais que mudemos o triângulo essa relação se mantem.

Figura 30 - Percepção do estudante 33 acerca propriedade do baricentro.
Fonte: Autor.

Aluno 33: a) O segmento AG é o dobro do segmento GD.
b) O segmento BG é o dobro do segmento GE.
c) O segmento CG é o dobro do segmento FG.
d) Essas relações são mantidas em qualquer tipo de triângulo. Isso acontece, pois, o baricentro (G) divide as medianas de um modo que fique um terço (GD, GE e GF) e dois terços (AG, BG e CG). Assim, por mais que mudemos o triângulo, essa relação se mantém.

A resposta do aluno 33, apresentada na figura 30, representa a resolução apontada pela maioria dos(as) estudantes, portanto, nota-se que o objetivo foi atingido e boa parte deles e delas alcançaram a conjectura esperada. Outras pessoas chegaram à conclusão de que os segmentos medidos (distância do vértice ao baricentro e do baricentro ao ponto médio do lado oposto) apresentavam uma medida próxima do dobro um do outro, conforme a ilustração a seguir (figura 31):

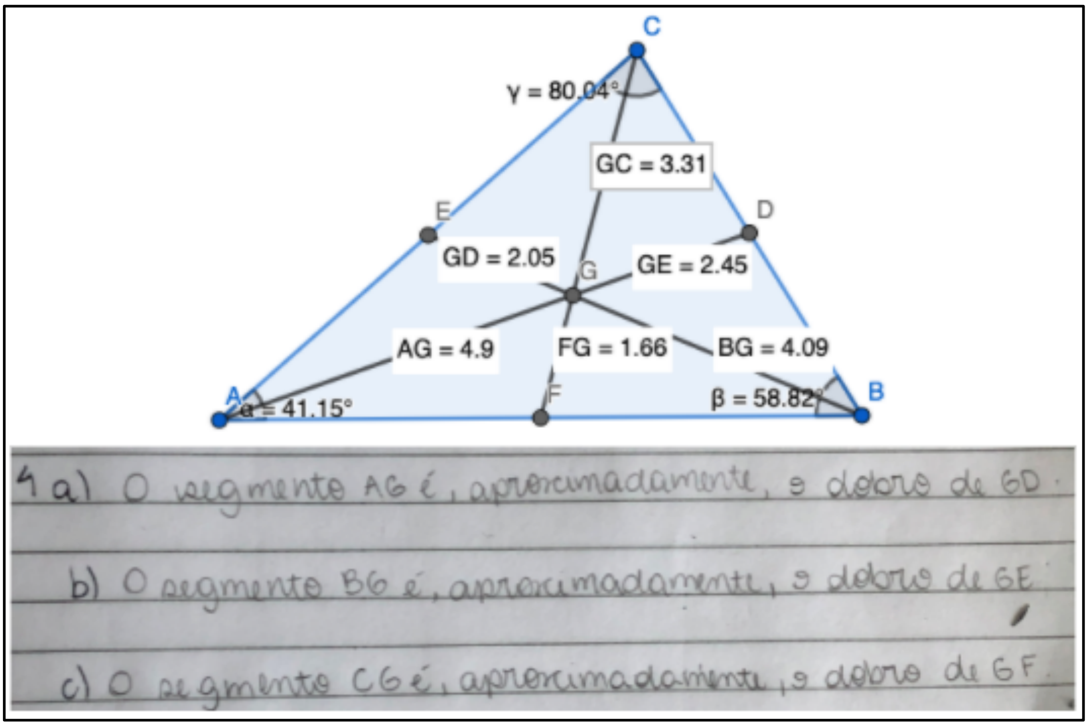


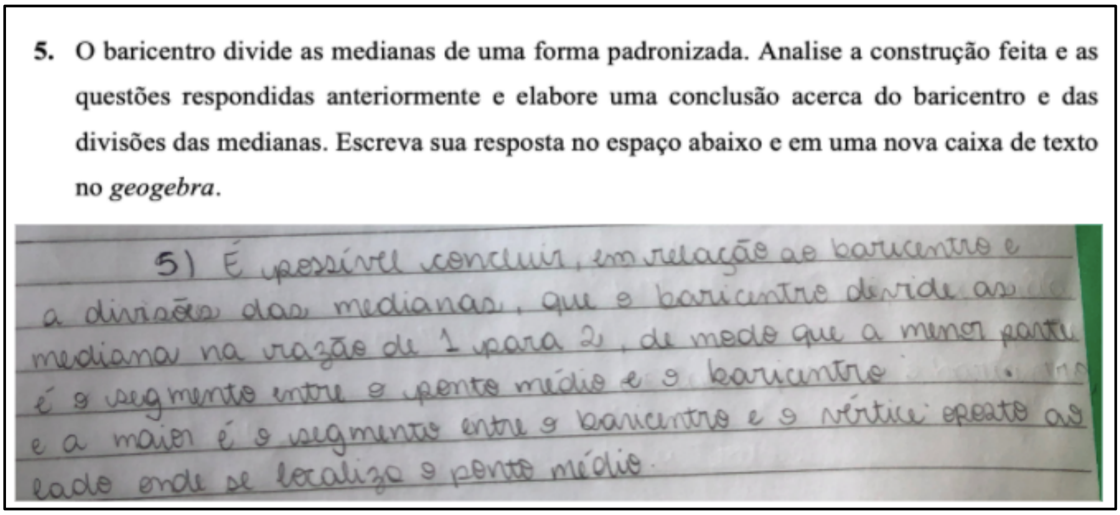
Figura 31 - Percepção do estudante 34 acerca da propriedade do baricentro com a construção feita no Geogebra.
Fonte: Autor.

Aluno 34: a) O segmento AG é, aproximadamente, o dobro do segmento GD.
b) O segmento BG é, aproximadamente, o dobro do segmento GE.
c) O segmento CG é, aproximadamente, o dobro do segmento FG.

O texto apresentado pelo aluno 34 se dá ao fato de que, pela aproximação das casas decimais feita na plataforma do *software* de geometria dinâmica (de duas casas decimais), nem todos os segmentos apresentaram efetivamente a relação de dobro e metade. Na imagem, percebemos que AG possui 4,9 unidades de medida e GE possui 2,45 unidades de medida, mantendo a razão de 2 para 1, mas ao compararmos BG com GD e CG com GF, nota-se a relação aproximada.

Além do equívoco apresentado, foi relatado pelo mesmo estudante que o sistema não estava considerando o nome dado ao segmento. Perceba que a medida GE era, na realidade, a medida de GD e, a medida de GE estava sendo descrita como GD, o que foi compreendido como um erro de programação do *software Geogebra*. Quando nos foi relatado tal problema, solicitamos que fosse feita uma legenda ao lado da construção e, neste caso, foi pedido que "considere GE como medida do segmento GD e GE como medida do segmento GD", o que não foi feito no exemplo destacado na imagem.

Ao percorrermos a sala percebermos que algumas pessoas ainda mantinham a ideia de aproximação, sendo assim, sugerimos que tentassem outras formas dos triângulos para ver se a aproximação de fato era mantida ou se haveria alguma mudança. Com isso, foi possível perceber que muitos estudantes notaram mudanças no levantamento da conjectura, ou seja, desgarraram-se da ideia de aproximação. Veja a seguir, a resposta à última questão da ficha de investigação da mesma pessoa que havia escrito, como conclusão intermediária, a ideia de aproximação do dobro e metade.



5. O baricentro divide as medianas de uma forma padronizada. Analise a construção feita e as questões respondidas anteriormente e elabore uma conclusão acerca do baricentro e das divisões das medianas. Escreva sua resposta no espaço abaixo e em uma nova caixa de texto no *geogebra*.

5) É possível concluir, em relação ao baricentro e a divisão das medianas, que o baricentro divide as mediana na razão de 1 para 2, de modo que a menor parte é o segmento entre o ponto médio e o baricentro e a maior é o segmento entre o baricentro e o vértice oposto ao lado onde se localiza o ponto médio.

Figura 32 - Percepção do estudante 35 acerca da propriedade do baricentro.
Fonte: Autor.

Aluno 35: É possível concluir, em relação ao baricentro e a divisão das medianas, que o baricentro divide a mediana na razão de 1 para 2, de modo

> que a menor parte é o segmento entre o ponto médio e o baricentro e a maior é o segmento entre o baricentro e o vértice oposto ao lado onde se localiza o ponto médio.

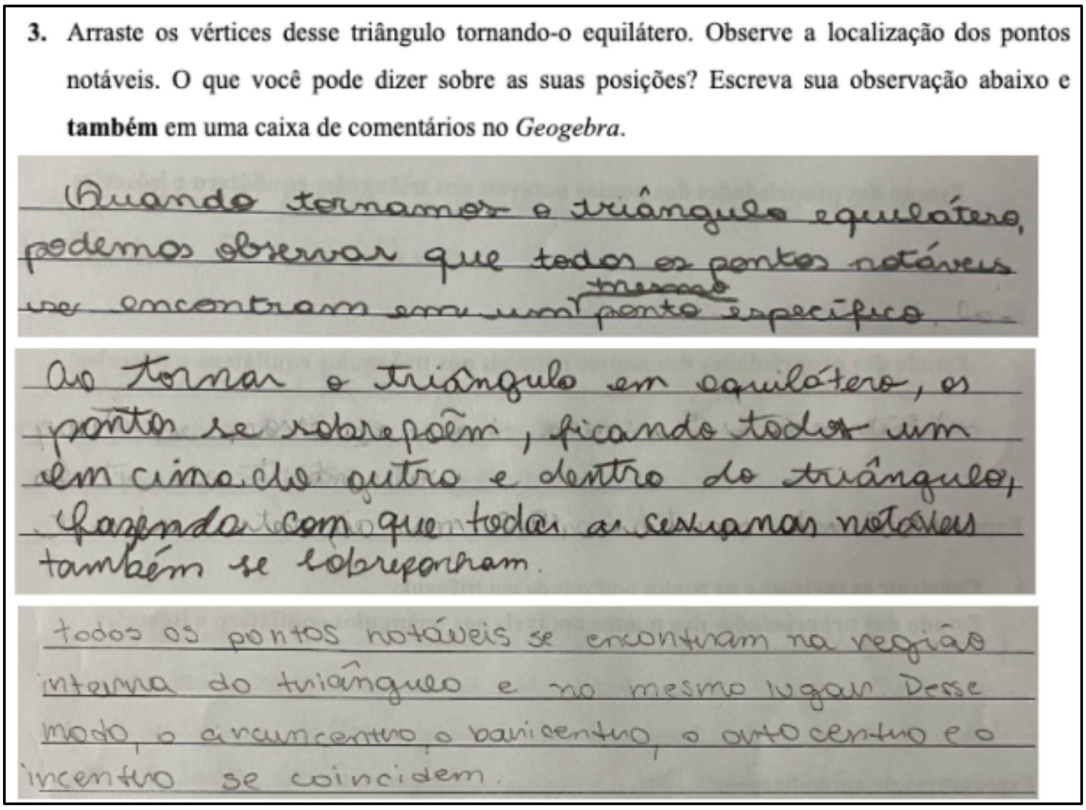
A resposta obtida pelo aluno 35 apresenta uma boa articulação das ideias relacionadas às propriedades do baricentro. Nos chamou a atenção o fato de que, além de ter observado tudo o que era esperado, o estudante identificou que a maior parte da mediana era aquela que contém o vértice e, a menor, a que contém o ponto médio do lado oposto ao vértice citado. Ao corrigirmos as atividades, pôde-se concluir que há indícios de que o objetivo foi cumprido e que a maioria das pessoas conseguiram compreender e perceber as propriedades do baricentro nos diferentes tipos de triângulo, dado que a pontuação média dos(as) estudantes foi de aproximadamente 1,13 de 1,25.

5.7 Estudo das propriedades dos pontos notáveis nos triângulos equilátero e isósceles

Esta foi quinta e última atividade do ciclo de investigação acerca das propriedades dos pontos notáveis dos triângulos. Da mesma forma que foram feitas nos encontros outros presenciais, distribuímos um computador portátil para cada estudante que não levou o dispositivo pessoal. Como de costume, foi solicitado inicialmente aos alunos e alunas que fizessem o *login* na plataforma *Geogebra*, dado que o compartilhamento das construções só seria possível se os estudantes estivessem conectados com o usuário e senha.

Além dos computadores, foram distribuídas as atividades propostas por meio de uma ficha, e a ideia era que eles e elas fizessem as construções requeridas para que conseguissem chegar às conjecturas esperadas. Uma novidade desta ficha, se comparada com as outras, era que ela solicitava a troca de cores de algumas construções para que facilitasse a visualização e elaboração de conjecturas, dado que seria necessário construir, ao menos, duas mediatrizes, duas medianas, duas bissetrizes e duas alturas para que fossem obtidos os pontos notáveis. A troca de cores das construções foi explicada antes do início da atividade, uma vez que essa ferramenta não havia aparecido em outro momento.

A ficha de trabalho que devia ser seguida pelos(as) alunos(as) trazia questões que tinham como objetivo a localização dos pontos notáveis nos triângulos equilátero e isósceles. A primeira parte da investigação esteve atrelada à localização dos pontos notáveis no triângulo equilátero. Vale ressaltar que, da mesma forma que foi realizado nas outras atividades, o pesquisador solicitou que a análise da construção fosse feita em diversas configurações de triângulos equiláteros o que, neste caso, variaria apenas as medidas dos lados do polígono. Ao percorrermos a sala de aula, verificamos que esta solicitação foi levada em consideração pela maioria dos estudantes. Veremos abaixo, na figura 33, algumas respostas que representam a maioria dos textos apresentados nesta etapa.



3. Arraste os vértices desse triângulo tornando-o equilátero. Observe a localização dos pontos notáveis. O que você pode dizer sobre as suas posições? Escreva sua observação abaixo e **também** em uma caixa de comentários no *Geogebra*.

Quando tornamos o triângulo equilátero, podemos observar que todos os pontos notáveis se encontram em um mesmo ponto específico.

Ao tornar o triângulo em equilátero, os pontos se sobrepõem, ficando todos um em cima do outro e dentro do triângulo, fazendo com que todas as cevianas notáveis também se sobreponham.

todos os pontos notáveis se encontram na região interna do triângulo e no mesmo lugar. Desse modo, o circuncentro, o baricentro, o ortocentro e o incentro se coincidem.

Figura 33 - Respostas de estudantes 36, 37 e 38 na questão da localização dos pontos notáveis no triângulo equilátero.
Fonte: Autor.

Aluno 36: Quando tornamos o triângulo equilátero, podemos observar que todos os pontos notáveis se encontram em um mesmo ponto específico.
Aluno 37: Ao tornar o triângulo em equilátero, os pontos se sobrepõem, ficando todos um em cima do outro e dentro do triângulo, fazendo com que todas as cevianas notáveis também se sobreponham.

Aluno 38: Todos os pontos notáveis e encontram na região interna do triângulo e no mesmo lugar. Desse modo, o circuncentro, o baricentro, o ortocentro e o incentro se coincidem.

Em diversos momentos, o pesquisador pediu aos estudantes que fizessem uma resposta completa, indicando todos os elementos relacionados à construção que os estudantes julgassem importantes e essenciais para a obtenção da conjectura, como estar na região interna ou externa, estar numa localização específica tanto do triângulo quanto das cevianas ou mediatrizes. A resposta apresentada pelo aluno 36 mostra que ele notou o padrão esperado, mas que não foi tão específico na escrita da conjectura observada, ou seja, não levou em consideração às solicitações do pesquisador ou não julgou importante elucidar outras características do ponto encontrado. Já as respostas dos estudantes 37 e 38 foram bastante completas, da forma como esperávamos, pois trouxeram elementos importantes como a sobreposição/coincidência tanto das cevianas quanto dos pontos notáveis, além de exprimirem a região em que o ponto solicitado se encontra.

No decorrer da atividade, muitos estudantes apresentaram dificuldades na obtenção do triângulo equilátero por meio da movimentação dos vértices. O pesquisador, neste caso, solicitou aos alunos e alunas que tentassem chegar o mais próximo dos 60º na medida dos ângulos internos para que as percepções fossem nada ou quase nada prejudicadas. Alguns estudantes utilizaram a malha quadriculada do *Geogebra* como suporte, outros o mouse para facilitar a obtenção da construção do triângulo, o que, de fato, amenizou a dificuldade. Fica como sugestão, para uma atividade que poderá ser derivada desta, a solitação de mouses para o auxílio nesta atividade.

A segunda etapa da atividade teve como objetivo a análise dos pontos notáveis no triângulo isósceles. Nesta etapa, solicitamos aos estudantes que variassem tanto as medidas dos ângulos quanto a medida dos lados do triângulo, ou seja, que não mantivessem figuras semelhantes para verificarem se existia algum padrão associado à classificação descrita. Veremos a seguir, na figura 34, algumas respostas que representam a variação dos textos apresentados nesta atividade.

4. Agora, arraste os vértices do triângulo XYZ construído, tornando-o um triângulo isósceles. (Para observar melhor, varie o par de lados que tornou congruentes.) Observe a localização dos pontos notáveis. O que você pode dizer sobre suas posições? Escreva sua observação abaixo e **também** em uma caixa de comentários no *Geogebra*.

Ao tornar o triângulo em um isósceles vemos que todos os pontos notáveis se localizam na mediatriz do segmento que não é congruente.

Podemos observar que em um triângulo isósceles, todos os pontos notáveis se localizam na bissetriz do ângulo não congruente.

Ao tornarmos o triângulo XYZ em um triângulo isósceles, os pontos notáveis ficam todos localizados na parte interna do triângulo, alinhados em seu centro, mais especificamente, na mediana entre o lado não congruente e o vértice oposto, coincidindo também com a altura relativa desse mesmo vértice.

No triângulo isósceles, os pontos notáveis passam a pertencer a uma mesma reta, porém se distribuem por ela.

Figura 34 - Respostas de estudantes 39 a 42 na questão da localização dos pontos notáveis no triângulo isósceles.
Fonte: Autor.

Aluno 39: Ao tornar o triângulo em isósceles, vemos que todos os pontos notáveis se localizam na mediatriz do segmento que não é congruente.
Aluno 40: Podemos observar que, em um triângulo isósceles, todos os pontos notáveis se localizam na bissetriz do ângulo não congruente.
Aluno 41: Ao tornarmos o triângulo XYZ em um triângulo isósceles, os pontos notáveis ficam todos localizados na parte interna do triângulo, alinhados em seu centro, mais especificamente, na mediana entre o lado não congruente e o vértice oposto, coincidindo também com a altura relativa desse mesmo vértice.
Aluno 42: No triângulo isósceles, os pontos notáveis passam a pertencer a uma mesma reta, porém se distribuem por ela.

A partir da leitura das respostas apresentadas pelos estudantes 39 e 40 verificamos que não houve um padrão na escolha da ceviana a qual continha os pontos notáveis construídos. Isso foi interessante, principalmente na discussão feita após a finalização das atividades. Os estudantes acharam interessante o fato de ter mais de uma forma de se escrever uma resposta considerada correta para esta questão, embora todas elas sejam iguais dado que as cevianas se coincidem neste tipo de triângulo. Assim, enquanto alguns estudantes disseram que os pontos notáveis pertenciam à mediatriz do lado não congruente, outros concluíram que eles estavam na mediana relativa ao lado não congruente. Ainda tivemos respostas que evidenciaram que tais pontos estavam alinhados na bissetriz do ângulo cuja medida é diferente dos demais (aluno 40).

A resposta apresentada pelo aluno 41 apresenta um erro conceitual. Esse erro certamente foi causado pela falta de testes em diferentes tipos de triângulos isósceles. Além disso, quando o estudante coloca que "[...] *os pontos notáveis ficam todos localizados na parte interna do triângulo* [...]" deixa de relacionar com percepções já vistas anteriormente, na atividade descrita na seção 5.2. Nela, verificou-se que, em triângulos acutângulos, o ortocentro se localiza na região interna do polígono, mas quando o transformamos em obtusângulo, este ponto se localiza no exterior da figura.

A resposta apresentada pelo estudante 42 foi um pouco mais suscinta, uma vez que ela não traz os elementos que julgamos essenciais na elaboração do texto. Nota-se que há uma percepção de que todos os pontos são colineares, mas não identifica a reta que os contém. Esse tipo de resposta teve uma frequência muito baixa se comparada aos textos que foram exibidos pelos alunos 39 e 40.

Assim como nas outras atividades, os estudantes enviaram as construções e as conclusões textuais acerca das propriedades dos pontos notáveis nos triângulos equiláteros e isósceles por meio de uma tarefa que suporta a construção feita no *Geogebra* no ambiente virtual de aprendizagem. A rubrica de correção contava com critérios relacionados às construções do triângulo e pontos notáveis, além de uma conclusão textual para as percepções relacionadas a cada um dos triângulos (equilátero e isósceles). Ao corrigirmos as atividades, pôde-se concluir que há indícios de que o objetivo foi cumprido e que a maioria das pessoas conseguiu compreender e perceber as propriedades que eram propostas, dado que a pontuação média dos(as) estudantes foi de aproximadamente 1,1 de 1,25.

Encerra-se aqui a descrição e análise das respostas apresentadas pelos estudantes. Na seção a seguir, faremos as considerações da aula de devolutiva das atividades propostas, após a finalização da aplicação da sequência didática.

5.8 A discussão das atividades de investigação

A sexta aula do projeto de investigação foi utilizada para a realização da devolutiva das atividades, ou seja, a discussão dos resultados encontrados na resolução dos exercícios que foram propostos ao longo da aplicação da sequência didática, o que levou, em média, dez minutos para cada atividade. Nesta aula, nos aproximamos dos componentes formal e algorítmico, ideias defendidas por Fischbein (1994), apresentada na seção 2.2.

A aproximação ao componente formal foi feita por meio da validação ou refutação das conjecturas encontradas, a partir da percepção dos padrões e regularidades observados com a movimentação dos vértices dos triângulos. Já a aproximação ao componente algorítmico se deu na aplicação dessas conjecturas na resolução de situações inéditas. Vale ressaltar que os alunos e alunas desta instituição de ensino possuíam técnicas e procedimentos de construção geométrica com régua e compasso já consolidadas.

Para a devolutiva solicitamos aos estudantes que estivessem com as fichas de trabalho ou os registros que foram feitos em uma folha à parte em mãos para que pudessem fazer as devidas correções, se necessário. Lembramos que as aulas de aplicação deste projeto aconteceram tanto de forma presencial quanto virtual, diante do protocolo de saúde adotado pela unidade escolar.

Foram selecionados modelos de resolução dentre os que foram apresentados pelos estudantes em cada uma das atividades propostas na sequência didática. A dinâmica utilizada nesta aula colocou os(as) estudantes em ação, dado que foi solicitada a participação deles e delas no compartilhamento dos registros que foram feitos nas fichas de trabalho. Neste momento, buscávamos avaliar o raciocínio e a conclusão registrados. Esta é a quarta etapa de uma investigação matemática segundo as ideias de Ponte et al. (2015), conforme apresentado na tabela 2.

Iniciamos a discussão com a análise do ortocentro. Solicitamos aos estudantes que lessem o que foi colocado na questão 3 da ficha relacionada a este ponto notável, na qual era necessário descrever a observação das localizações deste ponto nos triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo. Um estudante respondeu "*é possível observar que quando o triangulo é acutângulo, o ortocentro se localiza na região interna do polígono, quando o triângulo é retângulo, o ortocentro se localiza no ponto que possui 90 graus e quando é obtusângulo, ele se localiza na região externa do triângulo*." Após a leitura da resposta, projetamos a construção do triângulo e do ortocentro e fizemos as movimentações dos vértices, analisando as variações deste polígono com o objetivo de verificar se os padrões observados eram de fato verídicos.

A conclusão coletiva foi de que a resposta estava correta. Neste momento, o pesquisador colocou a seguinte questão: Será que testar para alguns, mesmo que sejam vários, é o mesmo que provar a validade para todos os triângulos? Houve um momento reflexivo, de silêncio e após alguns segundos, ouvimos respostas negativas à proposição colocada. O pesquisador explicou que de fato, testar para alguns não é o mesmo que provar para todos e que a intuição pode, em alguns momentos, nos trazer conclusões equivocadas. Foi compartilhado também que provar algo que não é verdadeiro é muito mais simples do que provar algo verídico.

Quanto à resposta do estudante, fizemos apenas uma pequena sugestão de correção para "*vértice do ângulo reto*" onde foi colocado "*ponto que possui 90 graus*" e solicitamos que fossem feitas as devidas alterações quando os alunos e alunas notassem que suas respostas não estivessem de acordo com a que fora discutida. Como a correção também foi feita de forma individualizada, via rubrica, notamos que a maioria dos estudantes escreveram textos corretos, similares a este.

Partimos então para a análise do incentro e da circunferência inscrita no triângulo. Novamente solicitamos a participação dos estudantes e a resposta dada foi que, independentemente da classificação do triângulo, o incentro estará na região interna do polígono. Outro estudante colocou que, além de estar na região interna, o ponto notável fica sempre mais próximo do ângulo que possui a maior medida. Sendo assim, projetamos a construção do triângulo e do incentro, ocultando a construção da circunferência inscrita para facilitar a visualização e fomos testando o que foi dito pelos estudantes. Para avaliar as distâncias do incentro aos vértices, aplicamos a ferramenta “distância e comprimento”. A partir da variação dos triângulos, por meio da movimentação dos vértices, verificamos que a proposição de fato acontecia, mas que o que estávamos fazendo não era uma prova da validade para todos os casos.

Em seguida, fomos para a análise da circunferência inscrita. Nesta etapa, era necessário identificar alguns elementos da circunferência e a sua relação com o triângulo. O primeiro estudante disse que notou que a área da circunferência é diretamente proporcional à área do triângulo, já o segundo, complementou dizendo que, além da proporcionalidade entre as áreas, notou que a circunferência sempre toca os lados do triângulo nos pontos que foram marcados (D, E e F). Um terceiro estudante disse apenas que a circunferência construída sempre estará em contato com os lados do triângulo, aumentando ou diminuindo de acordo com o tamanho do polígono de três lados.

Novamente fomos aos testes. Ao movimentar os vértices, verificamos que a circunferência sempre toca os lados do triângulo e ampliamos as ideias relacionada a este conceito a partir da apresentação da palavra tangência. Dissemos que a circunferência inscrita sempre será tangente aos lados do triângulo, ou seja, tocam em apenas um ponto de cada um dos lados.

Além disso, foi verificado que as figuras podem aumentar ou diminuir, dependendo da movimentação dos vértices, mas que só isso não garante a proporcionalidade entre as áreas. Portanto, acionamos a ferramenta “área” e clicamos tanto no triângulo quanto na circunferência. Recordamos que para que as áreas fossem diretamente proporcionais, os fatores de redução e/ou aumento deveriam ser iguais. Ao passar por alguns casos, notamos que há figuras em que o fator de aumento ou de redução não é o mesmo, sendo assim, concluímos que as áreas das figuras em questão não são diretamente proporcionais e que esta é uma prova de que a afirmação não é verdadeira.

O caso citado acima ilustra uma falha que pode ocorrer a partir da utilização apenas do componente intuitivo na construção do conhecimento. Caso ele estivesse associado ao componente formal, ou seja, a análise da área, neste caso, provavelmente a elaboração da conjectura teria sido diferente.

Seguindo a proposta, partimos para análise do circuncentro e da circunferência circunscrita. Novamente passamos a palavra para os estudantes dizerem o que tinha obtido como conjectura e as contribuições apresentadas tiveram ideias similares a: “No triângulo acutângulo o circuncentro sempre estará na região interna da figura, enquanto no retângulo, o ponto notável coincide com o ponto médio do lado oposto ao maior ângulo. Já no triângulo obtusângulo, o circuncentro se localiza a região externa do polígono”. Abrimos novamente a construção, ocultando a circunferência circunscrita para facilitar a visualização e fomos fazendo os testes, obtendo variações de cada uma das classificações dos triângulos quanto aos ângulos e validando as observações feitas pelos estudantes.

Quando fomos analisar as relações entre a circunferência circunscrita e o triângulo, apareceu, na fala, apenas o fato de que a circunferência sempre tocará os vértices do triângulo independente de sua classificação – o que foi verificado a partir dos testes feitos pelo pesquisador na projeção da construção na lousa. Isso foi interessante, pois concluímos que os estudantes fizeram transferências das aprendizagens obtidas com a circunferência inscrita. Dizemos isso, pois algumas pessoas haviam apresentado o mesmo erro acerca da proporcionalidade direta entre áreas do triângulo e da circunferência, ou seja, escreveram que as áreas das duas figuras eram proporcionais, mas, na verdade, apenas aumentavam ou diminuam sem seguirem a mesma proporção.

A quarta atividade tinha como objetivo a análise das propriedades do baricentro. Solicitamos aos estudantes que compartilhassem o que haviam escrito sobre a localização deste ponto notável nos diferentes tipos de triângulo e, ao ler a sua resposta, um aluno disse que “*em todos os tipos de triângulo, o baricentro se localiza na região interna do polígono*”. Ao perguntarmos se alguém tinha feito algo diferente, ninguém se manifestou. Projetamos a construção e testamos as variações dos triângulos, validando assim, as observações feitas pelos estudantes.

Esta mesma ficha de trabalho solicitava a análise da relação entre o baricentro e as medianas. A questão que orientava a busca por este padrão pedia primeiro que fossem identificadas as relações entre os segmentos que eram construídos em uma mediana, considerando as extremidades do primeiro segmento um dos vértices do triângulo e o baricentro e, do segundo, o baricentro e o ponto médio do lado oposto ao vértice inicial. Exemplo: Se AD for uma mediana e G o baricentro, tínhamos os segmentos AG e GD.

Com a projeção aberta, perguntamos qual foi a relação encontrada entre esses segmentos, e o que nos foi compartilhado é que um segmento tem o dobro da medida do outro. Concluímos com a turma que o baricentro divide a mediana em duas partes, na razão de 2 para 1. Mostramos que o maior segmento é aquele que contém o vértice e, consequentemente, o menor é o que possui o ponto médio do lado oposto ao vértice. Vale ressaltar que a maioria dos estudantes já tinha conseguido chegar a este padrão, e boa parte deles apresentou respostas semelhantes ao que foi apresentado pelo aluno 35, na figura 32.

Por fim, discutimos as propriedades dos pontos notáveis nos triângulos equilátero e isósceles. Os estudantes compartilharam que, ao tornarem o triângulo inicial em equilátero, verificaram que os pontos se concentraram todos em um mesmo lugar e, ao tornarem em isósceles, todos eles ficaram alinhados. A projeção estava aberta, e o triângulo inicial era escaleno. Ao fazer os testes, tanto para equilátero quanto para isósceles, validamos o que foi exposto em ambos os casos, mas comentamos as possíveis variações na elaboração da resposta acerca dos pontos notáveis no triângulo isósceles, uma vez que as cevianas e a mediatriz relacionadas ao lado não congruentes são coincidentes neste tipo de triângulo, o que foi apresentado na figura 34.

Tendo passado por todas as propriedades relacionadas a esses pontos notáveis, apresentamos novas situações nas quais elas deveriam ser empregadas, trazendo, portanto, o aspecto algorítmico ao nosso trabalho. Essas novas situações não comporão a parte analisada desta pesquisa, mas uma delas será exposta a seguir, junto de um comentário acerca das propriedades dos pontos notáveis necessárias a serem empregadas, assim como as técnicas e os procedimentos a serem realizados na resolução dela.

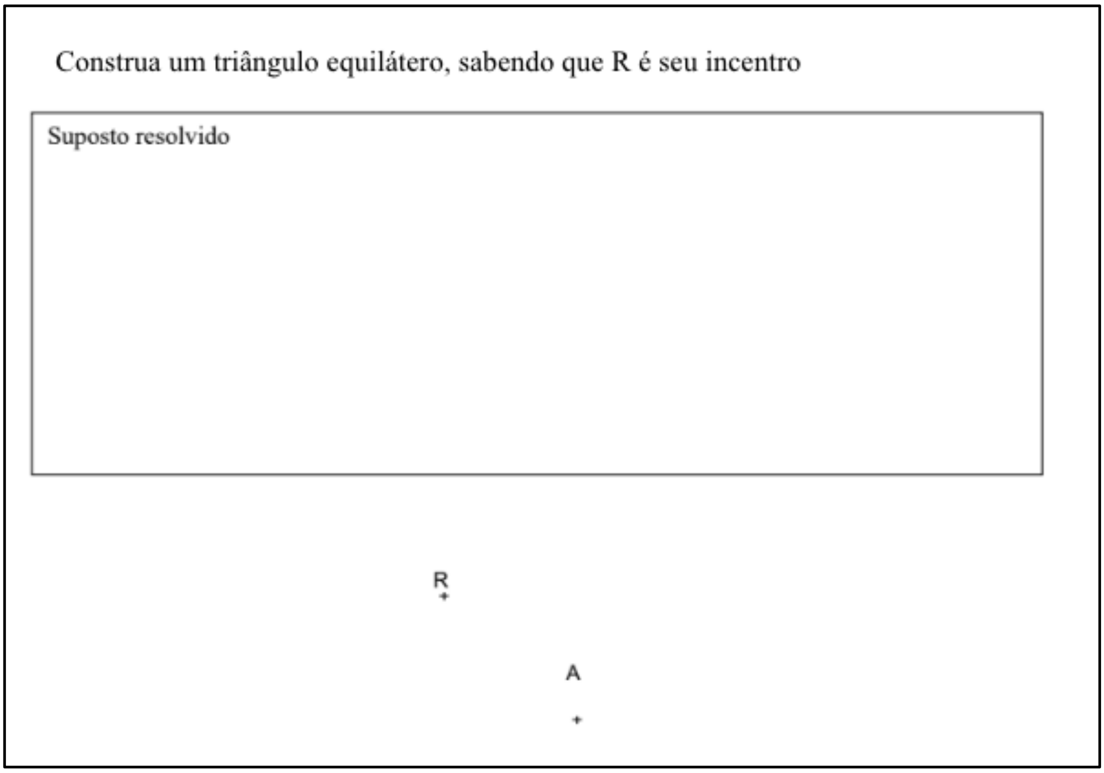


Figura 35 - Exercício de aplicação dos pontos notáveis no triângulo equilátero.
Fonte: Autor.

Para resolver este exercício, é necessário que o estudante perceba que todos os pontos notáveis são coincidentes no triângulo equilátero e, portanto, ao ligar os pontos R e A obtemos a bissetriz do ângulo Â, se considerarmos o R como incentro. Deste modo, podemos construir dois ângulos de trinta graus, um em cada lado de RA, considerando o A como vértice. Basta tomarmos agora o ponto R como circuncentro e aplicarmos a propriedade deste ponto notável, considerando que ele é o centro de uma circunferência circunscrita, cujo raio é a distância dele aos vértices do triângulo. Sendo assim, ao centrar o compasso em R, com abertura RA e, em seguida, traçar a circunferência com o raio citado, haverá duas interseções com os lados dos ângulos de trinta graus que foram construídos. Essas intersecções correspondem aos vértices que faltavam e, portanto, basta ligá-los para finalizar a construção.

Na seção a seguir, discorremos sobre a avaliação do projeto por parte dos estudantes que participaram das atividades propostas.

5.9 Avaliação do projeto

Após a realização de todas as atividades de investigação, foi aplicado um questionário por meio do *Google Forms* que teve como objetivo perceber como os alunos e as alunas avaliavam a construção do conhecimento por meio de uma metodologia que envolvia procedimentos investigativos atrelados ao uso da geometria dinâmica. No questionário havia questões relacionadas à:

- dinamização do processo de construção;
- possibilidade de uma compreensão mais significativa de um novo conteúdo;
- mudança na concepção de aprendizagem;
- relevância na utilização do *software Geogebra* para a obtenção das propriedades dos pontos notáveis de um triângulo.

Na primeira proposição do questionário, identificamos que apenas quatro pessoas não acreditavam que o *Geogebra* promove uma dinamização/rapidez no encontro das propriedades dos pontos notáveis. Este número representa apenas 4,8% das pessoas que responderam a este inquérito.

Alguns estudantes disseram que seria um trabalho gigantesco caso quiséssemos seguir o mesmo raciocínio feito no *Geogebra* em construções no papel a partir da utilização da régua e compasso, conforme exemplificado abaixo pelas respostas dos alunos 45 e 46. Outros argumentos foram levantados e serão apresentados nas justificativas a seguir. De fato, esse suporte tecnológico viabiliza a manipulação dos elementos geométricos e a construção de objetos geométricos de forma bastante simples, rápida e intuitiva.

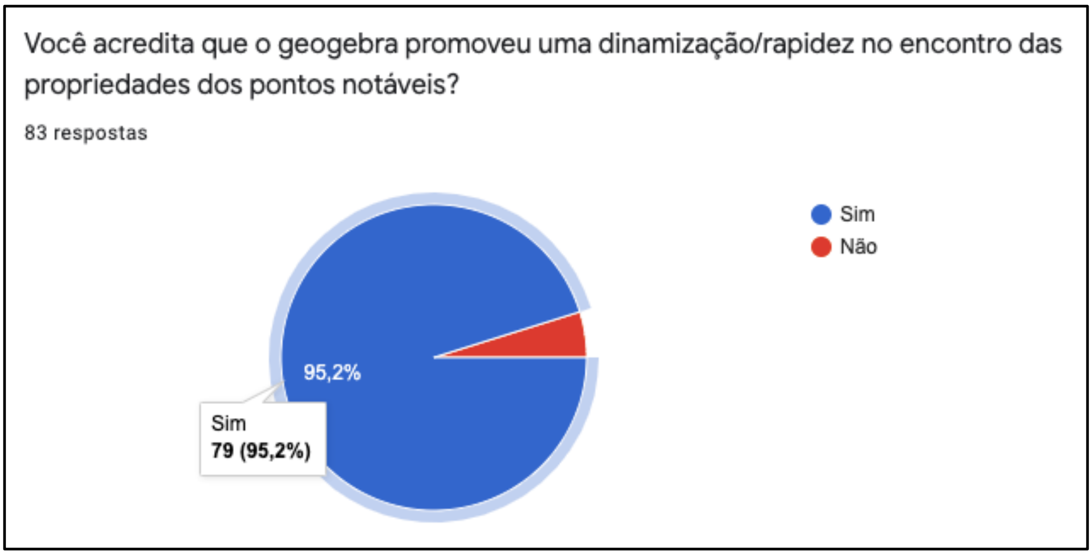


Figura 36 – Respostas quantitativas da questão 1.

Fonte: Autor.

Selecionamos abaixo algumas justificativas que representam os diferentes argumentos relacionados àquelas pessoas que responderam positivamente à questão do gráfico apresentado na figura 35.

> **Aluno 43:** Eu acredito que foram necessárias muitas aulas para compreender cada propriedade, por isso não acredito que foi tão prático. Porém, achei necessário o tempo que foi levado, visto que assim pudemos compreender de forma mais detalhada suas propriedades, sem que houvesse uma aula prática onde fossem ditas as propriedades sem explicação. Por isso, acredito que essa foi a melhor forma de explicar as propriedades dos pontos notáveis, muito eficiente e interessante de trabalhar.
>
> **Aluno 44:** Com o geogebra não precisa fazer construções que demoram um certo tempo, com apenas um botão já podemos fazer isso.
> **Aluno 45:** Eu acredito que o geogebra promoveu uma dinamização no encontro das propriedades dos pontos notáveis, pois eu pude identificar com maior rapidez o que era pedido em cada questão e com a possiblidade de movimentar a construção ficava mais fácil perceber as similaridades e diferenças das propriedades entre triângulos.
> **Aluno 46:** Acho que usar o geogebra agilizou o processo, já que são disponibilizadas todas as ferramentas que normalmente construímos com o compasso no papel. Além de podermos transformar um tipo de triangulo em outro tipo, o que no papel, teríamos que fazer vários triângulos diferentes para perceber os padrões de cada ponto notável.
> **Aluno 47:** Eu acredito que o geogebra promoveu uma dinamização no encontro das propriedades dos pontos notáveis, pois eu pude identificar com maior rapidez o que era pedido em cada questão e com a possiblidade de movimentar a construção ficava mais fácil perceber as similaridades e diferenças das propriedades entre triângulos.

Aluno 48: Pois não acontece imprecisões e erros quanto a realização de retas importantes, como por exemplo mediatrizes. Além disso ele possibilita os testes com todos os tipos de triângulo de forma mais prática, já que não é preciso a construção de novos, apenas arrastar seus vértices.

Ao analisar as respostas apresentadas acima, é possível observar que os estudantes se apegaram, na justificativa, a aspectos como: i) a possibilidade de utilizar ferramentas que geram as construções prontas, dado que ao obtê-las no papel é necessário uma série de procedimentos; ii) a facilidade na obtenção de diversos tipos de triângulos pela movimentação dos vértices da figura inicial, uma vez que se esta investigação fosse feita com papel, régua e compasso, seriam necessárias muitas construções para se chegar às conjecturas desejadas; iii) a obtenção de construções precisas, posto que imprecisões podem ocorrer no emprego dos materiais de construções geométricas.

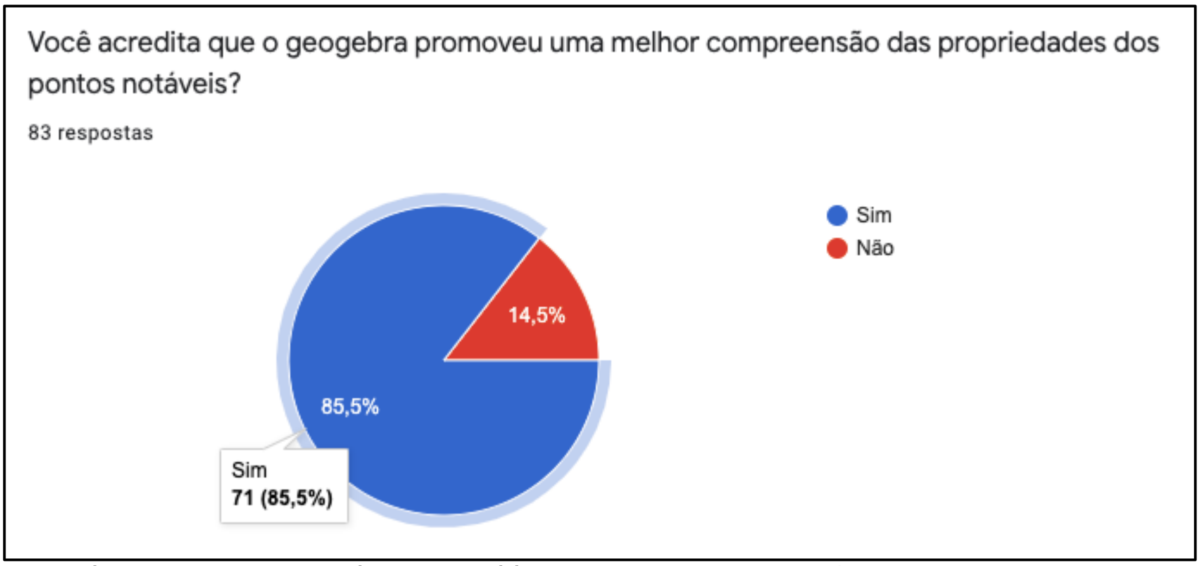
Os resultados apresentados acima vão ao encontro do que Ponte et al. (2015, p. 83) enfatizam, uma vez que a utilização do *software* de geometria dinâmica "facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal". Além disso, os autores destacam que que, "na realização de investigações, a utilização dessas ferramentas facilita a recolha de dados e o teste de conjecturas, apoiando, desse modo, explorações mais organizadas e completas [...]" (PONTE et al., 2015, p. 83).

Os quatro estudantes que responderam negativamente a esta questão trouxeram críticas relacionadas à estrutura da escola, conexão fraca, quantidade limitada de computadores e ao método de ensino. Vale ressaltar que estávamos em um período pandêmico, e a utilização de dispositivos eletrônicos e internet eram essenciais para conectar quem estava no presencial com quem estava à distância, o que certamente afetou a utilização da rede, dado que ela ficou sobrecarregada.

A instabilidade da conexão de fato ocorreu em alguns (poucos) momentos e esse problema fez com que a página do *Geogebra* demorasse um tempo maior que o normal para ser carregada. Além disso, a quantidade de computadores estava limitada, por mais que a instituição contasse com uma quantidade razoável de dispositivos, não havia a disponibilidade de um computador por estudante. Durante as aulas presenciais, em que eram necessários os computadores pessoais, o professor tinha sempre em mãos de cinco a dez dispositivos, o que quase sempre foi suficiente e, quando não era, havia empréstimos de outros professores. Quanto ao método de ensino, o estudante que fez a crítica trouxe, em sua resposta, o fato de não ter tido aula expositiva sobre o tema.

Na segunda questão proposta no questionário, buscávamos compreender como os estudantes enxergavam o emprego do software *Geogebra* como uma ferramenta que poderia viabilizar a compreensão das propriedades dos pontos notáveis dos triângulos. Verificamos que 85,5% dos alunos e alunas responderam positivamente a esta proposição, ou seja, 71 de 83 pessoas consideram que a utilização do programa de geometria dinâmica é um facilitador do processo de obtenção das propriedades dos pontos notáveis de um triângulo.

Selecionamos a seguir, uma série de justificativas que foram trazidas por



estudantes que responderam positivamente a esta questão.

Figura 37 – Respostas quantitativas da questão 2.
Fonte: Autor.

Aluno 49: O geogebra permite que façamos vários movimentos que não seriam possíveis em um papel, como a movimentação de vértices etc.

Aluno 50: Creio que eu compreendo melhor fazendo no papel, mas o geogebra foi bem prático e promoveu a compreensão.

Aluno 51: Acredito que sim, pois um dos obstáculos que pelo menos eu tenho quando faço as construções no papel, é fazer tudo muito mais rápido para acabar a tempo a prova, mas no geogebra, me senti mais segura e pude ter uma melhor compreensão das propriedades dos pontos notáveis.

Aluno 52: Eu acredito que o geogebra foi bastante importante para a compreensão das propriedades dos pontos notáveis. Isso porque ele permitiu uma melhor visualização de suas propriedades de forma dinâmica e bastante prática. Gostei bastante da ferramenta e achei super necessária.

Aluno 53: Acredito que a compreensão foi melhor pelo mesmo motivo da questão anterior, o aplicativo proporciona mais precisão e traz uma maior organização também, além de trazer a possibilidade de movimentação da figura o que ajudou bastante na compreensão

Aluno 54: Eu acredito que o geogebra promoveu uma melhor compreensão das propriedades dos pontos notáveis, pois eu pude observar e identificar o que era necessário para realizar cada propriedade e pude notar os padrões que eram formados.

Aluno 55: Acredito que o geogebra promoveu uma melhor compreensão das propriedades dos pontos notáveis uma vez que conseguimos testar os pontos em diferentes tipos de triangulo sem nenhuma dificuldade ou sem precisar fazer uma nova construção.

Aluno 56: O geogebra faz com que seja mais fácil observar padrões, pois conseguimos mudar o tipo de triângulo (de acutângulo, para retângulo, para obtusângulo) facilmente e tirar conclusões sobre estas movimentações.

A partir da análise das respostas, nota-se que os motivos mais aparentes pelos quais os estudantes apontaram que foram responsáveis pela melhor compreensão do tema em questão foi a facilidade na construção dos pontos notáveis por meio de ferramentas disponíveis no *software* e a agilidade na obtenção dos diferentes tipos de triângulos por meio da movimentação dos vértices, para que as conjecturas fossem levantadas a partir da percepção dos padrões e regularidades. Houve pessoas que elencaram que, se as construções fossem feitas no papel, a compreensão seria facilitada, o que nos parece até contraditório, mas não indicaram explicitamente o motivo para tal escolha.

Quanto às pessoas que responderam negativamente a essa questão, não tivemos grandes justificativas. O argumento mais recorrente foi o fato de que esses estudantes preferem fazer construções no papel com régua e compasso e que, portanto, a utilização do *software* não motivou nem para mais, nem para menos, a aula. A justificativa mais distante das demais esteve atrelada a questões técnicas como a instabilidade de conexão, a qual já foi descrita anteriormente. Além disso, o estudante disse que procurar as ferramentas necessárias a serem utilizadas na construção foi um fator desmotivador para ele.

A terceira questão presente no questionário teve como objetivo investigar se os alunos e alunas consideraram se houve alguma mudança na concepção de aprendizagem a partir da metodologia que foi utilizada nesta pesquisa, e 74,7% das pessoas, ou seja, 62 de 83 estudantes, consideraram que a utilização do *Geogebra* proporcionou um novo olhar para a aquisição do conhecimento. Podemos relacionar esse resultado a uma mudança nas atitudes dos estudantes para com a Matemática, em outros termos, houve uma mudança na posição pessoal diante da situação proposta.

Inicialmente, a partir dos dados coletados na primeira nuvem de palavras (figura 5), concluímos que os alunos e alunas apresentavam receio, ansiedade e outros sentimentos não tão positivos em relação à imersão numa atividade de investigação, em que o professor não seria o transmissor do conhecimento. Na segunda nuvem de palavras (figura 14) já percebemos que houve uma mudança neste olhar, dado que outros sentimentos passaram a ser mais recorrentes, como tranquilidade, curiosidade e confiança.

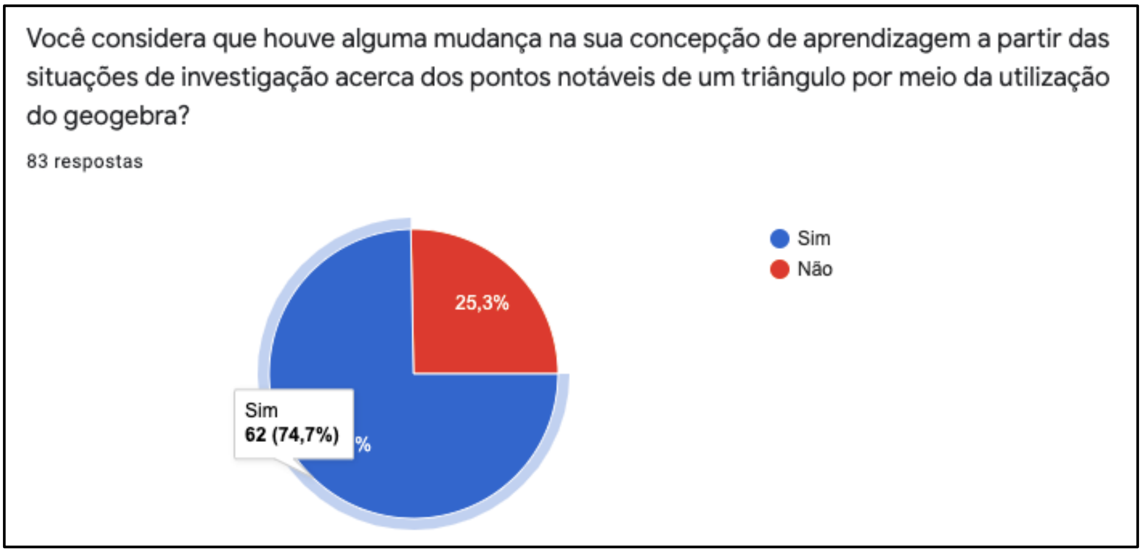


Figura 38 - Respostas quantitativas da questão 3.
Fonte: Autor.

Selecionamos a seguir uma série de justificativas que ilustram a variação de argumentos trazidos por estudantes que responderam positivamente a esta questão.

> **Aluno 57:** Acho que prejudicou a aprendizagem, já que caso não chegássemos a uma conclusão sozinhos, na próxima aula de resolução de exercícios sua compreensão ficará debilitada.

> **Aluno 58:** Creio que sim, pois tenho mais dificuldade em geral de fazer construções no papel, assim, no aplicativo, foi mais fácil, motivador e compreensível.

Aluno 59: Sim, houve mudanças, pois pude aprender e investigar por conta própria. Assim, absorvi o conteúdo mais facilmente.

Aluno 60: Acredito que a situação de investigação acerca dos pontos notáveis de um triângulo mudou a minha concepção de aprendizagem, pois pude ver que existem várias formas de se aprender um conteúdo, sendo a partir da prática ou até mesmo teoria.

Aluno 61: Eu acredito que houve uma mudança na minha concepção de aprendizagem, pois a utilização do geogebra mostrou que é capaz de aprender as propriedades de outra forma, além da convencional de responder exercícios no papel.

Aluno 62: Eu acho que trouxe uma visão diferente da geometria que antes era algo mais de saber como fazer que passou a ser entender padrões por trás desse fazer.

Aluno 63: Eu acredito que houve uma mudança nas minhas aprendizagens. As investigações foram ótimas para exercitar meu pensamento lógico e técnicas de observação e identificação de padrões. Sinto que o modo como foram apresentadas as aprendizagens foi muito bom.

Verificamos, a partir das justificativas apresentadas, que a mudança na concepção de aprendizagem pode ter sido tanto positiva quanto negativa. Ao analisarmos a resposta do estudante 57, consideramos que houve uma mudança negativa no olhar desse aluno, uma vez que ele se pautou, de uma forma ou de outra, na diferença entre uma aula expositiva e a estratégia utilizada para a aquisição do conhecimento na aplicação das atividades propostas neste projeto. Este fato, claramente, lhe passou insegurança, dado que, no momento da atividade, não conseguia ter uma certeza da validade ou não das conjecturas levantadas. Fato é que a devolutiva das atividades de investigação aconteceu depois da aplicação deste questionário, ou seja, eventuais correções dos padrões observados seriam feitas antes mesmo da aplicação desses conhecimentos levantados em outras situações.

Dentre as justificativas apresentadas, gostaríamos de destacar as que foram escritas pelos estudantes 61, 62 e 63. Nelas, os estudantes expuseram as mudanças de suas visões e os motivos pelos quais elas ocorreram, como a percepção de que há diversas maneiras de se aprender um conteúdo, o exercício do raciocínio lógico, as técnicas de observação e identificação de padrões e a possibilidade de se chegar a conclusões de uma maneira autônoma a partir de uma atividade investigativa, justamente o que era esperado pelo pesquisador.

Já as pessoas que responderam negativamente a esta questão, disseram já saber que existiam outras formas de se aprender além da tradicional ou que a resolução das atividades desta sequência didática investigativa não fez diferença alguma. Vale ressaltar que o ensino de Matemática na instituição de ensino de aplicação valoriza a construção do conhecimento a partir da metodologia de resolução de problemas, ou seja, já foge, sempre que possível, de aulas tradicionais e isso é visível pelos estudantes, razão pela qual este argumento apareceu.

De acordo com o Seerban (2018, p. 88), “se uma sequência ajudou a desmistificar e colocar de forma mais tangível temas da geometria por uma via construtiva, a sequência tem sua razão de ser justificada”. Brito (1998) apud Marmit (2009, p.23) complementa: “se a metodologia estimula o aluno a descobrir-se como aprendiz e consequentemente tenha motivação para continuar produzindo aprendizagens, o sucesso escolar se faz presente [...]". Diante das análises que foram feitas ao longo desta seção, notamos que houve um apontamento de mudança nas atitudes ou concepção no olhar da maioria dos estudantes para com as possibilidades de aprendizagem de um novo conteúdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo entender os impactos que uma sequência didática, constituída a partir dos pressupostos do processo investigativo, provoca nas atitudes dos estudantes em relação à Matemática. Para chegar a uma resposta a este questionamento, inicialmente procuramos entender como o desenho geométrico se desenvolveu a partir das ideias levantadas por Zuin (2011) e Seerban (2018). A hipótese era de que tais atividades pudessem promover uma mudança na concepção de aprendizagem, de modo que os estudantes pudessem perceber que o conhecimento pode ser construído de maneiras diferentes das quais eles e elas estão acostumados.

Além disso, apresentamos algumas situações associadas ao ensino que privilegia uma abordagem algorítmica, a partir dos olhares de Powell e Barral (2006) e Sirotic e Zazkis (2007), que defendem que o algoritmo possui um papel essencial na construção do conhecimento. Buscamos também os assuntos que tangenciam esta pesquisa nos documentos oficiais PCN e BNCC, como o papel da investigação no ensino e aprendizagem, a utilização da tecnologia na construção do conhecimento e o trabalho com os pontos notáveis no ensino básico e verificamos, a partir destas análises, que a metodologia de ensino investigativo está bastante presente nos documentos oficiais brasileiros e que essa estrutura de aprendizagem é potencialmente rica para o desenvolvimento das competências fundamentais presentes nos documentos citados.

Como se trata de um trabalho que envolve os pressupostos investigativos, as relações entre o formal, intuitivo e algorítmico e a utilização de um *software* de geometria dinâmica, buscamos nos apoiar em Fischbein (1994); Brocado, Oliveira e Ponte (2015), Ribeiro (2016) e Azevedo (2016).

A pesquisa foi realizada numa escola particular de classe média alta no bairro de Moema, zona sul de São Paulo, em três salas do nono ano do ensino fundamental 2. A escola possui uma excelente infraestrutura, dado que oferece uma internet potente e há muitos computadores portáteis disponíveis. Além disso, vale lembrar que *Geogebra* já era um *software* bastante conhecido pelos alunos e alunas, dado que ao longo de todo o ano ele foi utilizado nas aulas regulares.

A aplicação deste trabalho foi feita ao longo de 6 aulas de 70 minutos. Em cada uma das aulas, os estudantes trabalharam com a construção e a obtenção das propriedades de cada um dos pontos notáveis dos triângulos, sendo que na última foi feita uma devolutiva geral – completamente dialogada, com o intuito de validar as ideias apresentadas pelos estudantes. Essa validação ou formalização se deu pelos testes de atividades previamente selecionadas, e que foram feitas pelos estudantes.

Além disso, esta etapa foi um importante momento em que discutimos que a noção intuitiva pode levar ao erro se não estiver associada ao componente formal, uma vez que alguns estudantes escreveram que as circunferências inscrita e circunscrita possuíam áreas diretamente proporcionais às áreas dos triângulos, o que dificilmente ocorreria se eles e elas tivessem utilizado a ferramenta “área de polígonos” e verificado a existência ou não de uma constante de proporcionalidade entre as áreas da circunferência e triângulo.

Antes da realização da primeira atividade da sequência didática proposta nesta pesquisa, foi feita uma nuvem de palavras cujo objetivo era analisar as sensações dos alunos e alunas anteriormente à aplicação das atividades investigativas, o que nos trouxe a ideia de que ansiedade e curiosidade foram as que estiveram em evidência, conforme apresentado na figura 5. Tais sensações costumam despontar quando as atividades diferem da lógica da aula tradicional, segundo Morais (2019).

Foi disponibilizado, ao final de cada atividade, um questionário com questões objetivas relacionadas ao trabalho que foi desenvolvido em cada uma das aulas, cujo objetivo foi perceber quão apropriados eles e elas estiveram das conjecturas esperadas. Os resultados apontam que este tipo de atividade trouxe a consolidação desses conhecimentos. Vale ressaltar que, ao longo da aplicação, os estudantes mostraram-se bastante motivados a realizar as tarefas que foram indicadas nas fichas de trabalho.

Ao longo da aplicação das atividades alguns problemas apareceram, como a precisão dos ângulos, no caso de obter, por meio da movimentação dos vértices, um triângulo equilátero. Isso poderia ter sido parcialmente resolvido ao utilizar a ferramenta polígono regular com três lados, dado que seria analisado apenas um triângulo equilátero, e os estudantes não veriam se a medida dos lados influencia ou não na obtenção das conjecturas. Sabemos que não há diferenças, mas como os estudantes estavam utilizando a estratégia de arrastar os vértices para obterem as figuras solicitadas, a saída foi pedir que eles e elas tentassem chegar o mais próximo possível dos ângulos de 60º.

O segundo problema estava relacionado “aparentemente” a uma falha na programação do *software*, dado que ele não lia as mudanças dos pontos, quando a ferramenta “distância e comprimento” era utilizada. Já o terceiro problema percebido esteve atrelado à internet que apresentou instabilidades e isso gerou certa ansiedade e nervosismo em alguns estudantes.

Após a aplicação da sequência didática e da análise dos dados obtidos, notou-se que a utilização do *software* de geometria dinâmica *Geogebra* foi um forte aliado nas descobertas das propriedades dos pontos notáveis dos triângulos, uma vez que ele otimiza os processos de construção geométrica, fato este que foi, nitidamente, percebido pela maioria dos(as) estudantes, conforme mostrado na figura 38.

Além disso, notamos que atividades de investigação contribuíram com uma possível mudança nas atitudes e concepções dos alunos e alunas para com a Matemática, dado que boa parte dos estudantes percebeu que a aprendizagem não decorre apenas da passagem de conteúdos pelo professor e que o conhecimento pode ser obtido de forma mediada, colocando-os como agentes ativos no processo, contrapondo a lógica das aulas tradicionais.

Por fim, diversos alunos e alunas relataram que as investigações foram ótimas para exercitar o raciocínio lógico, técnicas de observação e identificação dos padrões e regularidades e que a compreensão do conteúdo se deu de uma maneira mais ágil e fácil.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P. Investigações em geometria na sala de aula. In: ABRANTES, P. et al. (Org.) **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf >. Acesso em: abr. 2019.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. A contribuição de Efrain Fischbein para a educação matemática e a formação do professor. **Revista conexões – ciência e tecnologia**, Fortaleza, v.5, n.1, p.38-54, mar. 2011. Disponível em: < http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/47763 >. Acesso em: ago. 2021.

ARAÚJO, P. B. **Situações de aprendizagem**: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra. Dissertação (mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), São Paulo, 2010.

ARAÚJO, O. R. de. **Contribuições Pedagógicas do ensino de Pontos Notáveis de um triângulo por meio do Origami**. Dissertação (mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF), Campos dos Goytacazes, RJ, 2015.

AZEVEDO, H. W**. Investigação Matemática na formação inicial e continuada de professores de matemática**: reflexões por retas e Geogebra. Dissertação (mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Base Nacional Comum Curricular, 221 - 271. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: jun. 2017.

BRASIL. Ministério da educação e desporto. **Matemática.** Parâmetros Curriculares Nacionais. Acesso em outubro de 2018. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf >. Acesso em: jan. 2021.

BORBA, M. C. **A Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2004. Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf >. Acesso em: jul. 2021.

BRITO, M. R. F. de. **Um estudo sobre as atitudes em relação a matemática em estudantes de 1 e 2 graus**. 1996. 383f. Tese (livre-docência) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1587700>. Acesso em: 28 fev. 2022.

CARNEIRO, G. S. **Atividades investigativas com o Geogebra**: Contribuições de uma proposta para o ensino de matemática. Disponível em < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161645>. Acesso em: mar. 2019.

CORBO, O.; PIETROPAOLO, R. C.; AMORIM-MATEUS, M. É. A Interação Entre os Componentes Intuitivo, Algorítmico e Formal no Ensino dos Números Irracionais na Educação Básica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, n. 3, p. 210-219, 2018. Disponível em: < https://jieem.pgsskroton.com.br/article/view/7055 >. Acesso em: set. 2021

COSTA, E. A. S. **Analisando algumas potencialidades pedagógicas da história da matemática no ensino e aprendizagem da disciplina desenho geométrico por meio da teoria fundamentada**. 242 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, MG, 2013.

CUNHA, S. E. S. P; DEUS, A. M. de; MACIEL, E. M. **Estudo de caso na pesquisa qualitativa em educação**: Uma metodologia. Disponível em: < http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT.1/GT_01_14.pdf>. Acesso em: dez. 2017.

EGUÍA, F. G. **As atitudes de alunos do Ensino Básico em relação à Matemática e o papel do professor**. 2003. 205p. Dissertação (Mestrado). UCDB, Campo Grande, 2003. Disponível em: < http://www.fernandoeguia.com/uploads/6/4/0/5/6405834/dissertao_mestrado.pdf > Acesso em: set. 2021.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GODOY, A. S. **Pesquisa qualitativa** - tipos fundamentais. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n3/a04v35n3.pdf >. Acesso em: jun. 2019.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 19, n. 2, 2012. DOI: 10.20396/zet.v19i36.8646625. Disponível em: < https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646625. > Acesso em: fev. 2022.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. D. **Pesquisa em Educação** - Abordagens Qualitativas. 2ª edição. Grupo GEN, 2013. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2306-9/>. Acesso em: out. 2021.

MACHADO, R. B. **Entre vida e morte**: cenas de um ensino de desenho. 254 fls. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2012. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96462/300009.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em: jun. 2017.

MARMIT, V. R. **Concepções e atitudes em relação à matemática**: maneiras de identificá-las e possibilidades de modificá-las. 2009. 189 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: < http://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3354 > Acesso em: fev. 2022.

MENEZES, P. V. S. **Métodos de contagem**: uma abordagem investigativa. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170700296>. Acesso em: abr. 2019.

MORAIS, T. P. **Criação de vídeo digital no ensino-aprendizagem de Probabilidade**. 2019. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 2019. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-07072020-225332/publico/Dissertacao_Thiago_Picos_Morais_Original.pdf >. Acesso em: set. 2021.

NASCIMENTO, E. G. A. do. **Avaliação do uso do software Geogebra no ensino da geometria**: Reflexão da prática na escola. Disponível em: < http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1370724062/67.pdf>. Acesso em: fev. 2019.

OLIVEIRA, L. M. da S. **Ensinando geometria com régua e compasso, uma proposta para o 8º ano**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2015. Disponível em: < https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/27112015Lucas-Maken-da-Silva-Oliveira.pdf >. Acesso em: jan. 2021.

PEREIRA, T. de L. M. ***O uso do software Geogebra em uma escola pública*: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. Disponível em: < http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/DISSERTA%C3%87%C3%83O-Thales-de-Lelis-N.pdf >. Acesso em: mar. 2019.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 3ª Ed. rev. ampl. 1ª reimp . Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

POWELL, A. **A escrita e o pensamento matemático**: Interações e potencialidades. Campinas, SP; Papirus, 2006. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

RIBEIRO, M. A. DA S. **Transformações Geométricas Planas**: um Estudo experimental e Dinâmico. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2016.

ROCHA, A.; PONTE, J. P. da. Aprender matemática investigando. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 14, n. 2, p. 29–54, 2009. DOI: 10.20396/zet.v14i26.8647004. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647004>. Acesso em: ago. 2021.

SCHMITT, F. E. **Abordando geometria por meio da investigação matemática:** um comparativo entre o 5º e 9º anos do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado). – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas, Centro Universitário Univates, Lajeado, 2015.

SEERBAN, R. S. **Construções dos Elementos na Educação Básica**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2018. Disponível em: < https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-04062019-160325/publico/dissertacao_Ricardo_Seerban_Corrigida.pdf >. Acesso em: jun. 2021.

SILVA, G. P. S. **Ensino de geometria espacial**: Uma abordagem investigativa. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2019. Disponível em: <

https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170700296>. Acesso em: abr. 2019.

SILVA, C. I. D. N. **Proposta de aprendizagem sobre a importância do desenho geométrico e da geometria descritiva.** 102 fls. 2006. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, PR, 2006.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. **Geometria dinâmica na sala de aula**: o desenvolvimento do futuro professor de matemática diante da imprevisibilidade. Bauru, SP, 2013. Disponível em: < https://www.scielo.br/pdf/ciedu/v19n2/a04v19n2.pdf >. Acesso em: jul. 2020.

TRINDADE, Â. F. P. **Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas** - Que fronteiras?. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) — Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2008. Disponível em: <http://www.ppge.ufpr.br/teses/M08_trindade.PDF>. Acesso em: jul. 2019.

TORTORA, E.; SANDER, G. P.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre as atitudes em relação à matemática com os alunos do curso de pedagogia. XI Encontro Nacional de Educação Matemática (2013), Curitiba. **Anais**... Disponível em: < http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2462_1708_ID.pdf>. Acesso em: fev. 2022.

VALENTE; W. R. **Uma História da Matemática escolar no Brasil, 1730 – 1930.** 2ª edição. São Paulo: FAPESP, 2007. Disponível em: < https://books.google.com.br/books?id=rfsqnQod21wC&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false >. Acesso em: jun. 2017.

VASCONCELOS, M. C. de. **Um estudo sobre o incentivo e desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, através da estratégia de resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) — Universidade Federal de Santa Catarina. 2002. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/82419/195597.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: maio 2019.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG,, 2001. Disponível em < http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/FAEC-85DGQB/zuin_elenice_disserta_nopw.pdf?sequence=1 >. Acesso em: jun. 2017.

Anexos

Atividade 1 – Estudo das propriedades do ortocentro

Expectativas de aprendizagem:

- **Identificar** pontos notáveis de um triângulo a partir da construção de cevianas;
- **Observar** fatos geométricos relacionados com a localização de pontos notáveis em diferentes tipos de triângulos (quanto aos lados e quanto aos ângulos).

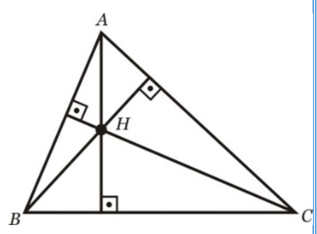
Procedimentos:

- Faça as construções de acordo com as solicitações;
- Complete, na tela de trabalho do geogebra e na ficha, as observações realizadas;
- Leia os enunciados com atenção.

1. Considere a seguinte definição:

<u>Ortocentro de um triângulo</u>

O ortocentro é dado pela **intersecção das retas suportes das alturas de um triângulo**, ou seja, é dado pelo encontro do prolongamento das alturas de um triângulo qualquer. No exemplo, o ponto H é o ortocentro do triângulo ABC.



2. A partir da compreensão da definição dada, faça o que se pede nos itens a seguir:

   a. Abra a página do Geogebra e acesse-o com o seu login;

   b. Construa um triângulo acutângulo ABC, marque as medidas dos ângulos e determine seu ortocentro (**H**).

Localizações possíveis:
Regiões interna, externa ou pontos específicos do triângulo.

c. Qual é a localização do ponto **H** no triângulo acutângulo?

d. Arraste um dos vértices do triângulo ABC e transforme-o em um triângulo retângulo. (Varie o vértice que está com o ângulo reto.)

e. Qual é a localização do ponto **H** no triângulo retângulo?

f. Arraste novamente um dos vértices do triângulo ABC e transforme-o em um triângulo obtusângulo.

g. Qual é a localização do ponto **H** no triângulo obtusângulo?

h. Movimente os vértices para obter outros triângulos acutângulos, retângulo e obutsângulos. Feito isso, responda: É possível fazer uma previsão sobre a localização deste ponto nos diferentes tipos de triângulo? Justifique.

3. Escreva abaixo e em uma caixa de comentários na tela do *Geogebra* o que você observou sobre a localização do ortocentro em cada um dos diferentes tipos de triângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo).

Ao terminar, grave a sua construção no modo público e compartilhe na tarefa destinada a ela.

Atividade 2: Estudo das propriedades do incentro

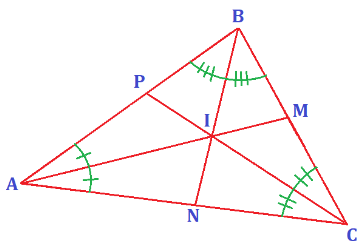
Expectativas de aprendizagem:

- Determinar as bissetrizes de um triângulo por meio da aplicação da ferramenta *bissetriz*;
- Perceber que a localização do encontro das bissetrizes depende da classificação do triângulo;
- Estudar a relação entre uma circunferência inscrita a um triângulo e suas bissetrizes;
- Construir uma circunferência inscrita em um triângulo.

1. Considere a seguinte definição:

Incentro de um triângulo

O incentro é dado pela **intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo**, ou seja, é dado pelo encontro das semirretas que dividem cada um dos ângulos internos em duas partes congruentes.



2. A partir da compreensão da definição dada, faça o que se pede nos itens a seguir:

a. Abra a página do Geogebra e acesse-o com o seu login;

b. Construa um triângulo acutângulo PQR, marque as medidas dos ângulos e determine seu incetro (**I**).

c. Qual é a localização do ponto **I** no triângulo acutângulo?

Localizações possíveis:
Regiões interna, externa ou pontos específicos do triângulo.

____

____

d. Arraste um dos vértices do triângulo PQR e transforme-o em um triângulo retângulo.
e. Qual é a localização do ponto **I** no triângulo retângulo?

f. Arraste novamente um dos vértices do triângulo PQR e transforme-o em um triângulo obtusângulo.
g. Qual é a localização do ponto **I** no triângulo obtusângulo?

3. Escreva abaixo e em uma caixa de comentários, o que você observou em relação à localização do incentro nos diferentes tipos de triângulo (acutângulo, retângulo e obtusângulo).

4. Determine os pontos médios de cada um dos lados do triângulo e chame-os de pontos D, E e F.
5. Construa uma reta perpendicular a qualquer um dos lados do triângulo que passe pelo incentro e nomeie por G o ponto de intersecção da reta construída com o lado do triângulo.
6. Clique na ferramenta Circunferência dados o centro e um de seus pontos e, em seguida, clique nos pontos I e G.
7. Clique na ferramenta *intersecção entre objetos* para obter os outros dois pontos que estão nos lados do triângulo e estão na circunferência. Chame os de H e J.

Agora responda:

a. Arraste os vértices do triângulo e escreva o que você percebeu em relação à circunferência construída.

____

____

____

____

____

____.

b. O que os segmentos $\overline{IG}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{IH}$ são da circunferência?

____.

c. É possível os pontos G, J e H serem coincidentes com os pontos D, E e F? Justifique.

____

____

____

____

____

____

8. Escreva abaixo e em uma caixa de comentários: O que podemos concluir sobre a distância do ponto I aos lados do triângulo? Utilize as questões anteriores e os seus conhecimentos sobre lugares geométricos para responder esta questão.

____

____

____

____

____

____

____.

Ao terminar, grave a sua construção no modo público e compartilhe na tarefa destinada a ela.

Atividade 3: Estudo das propriedades do circuncentro

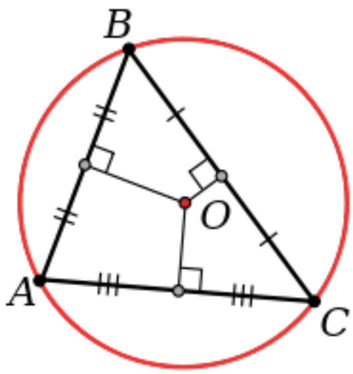
Expectativas de aprendizagem:

- Determinar as mediatrizes dos lados de um triângulo;
- Perceber que a localização do circuncentro depende da classificação do triângulo.
- Estudar a relação entre uma circunferência circunscrita em um triângulo e suas mediatrizes;
- Construir uma circunferência circunscrita a um triângulo.

1. Considere as seguintes definições:

<u>Definição 1: Circuncentro de um triângulo</u>

O circuncentro é dado pela **intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo.** No exemplo, o ponto **O** é o ortocentro do triângulo ABC.



2. A partir da compreensão da definição dada, faça o que se pede nos itens a seguir:

a. Abra a página do Geogebra e acesse-o com o seu login;

b. Construa um triângulo DEF, marque as medidas dos seus ângulos, transforme-o em acutângulo e determine o circuncentro (**O**).

c. Qual é a localização do ponto **O** no triângulo acutângulo?

Localizações possíveis:
Regiões interna, externa ou pontos específicos do triângulo.

d. Arraste um dos vértices do triângulo DEF e transforme-o em um triângulo retângulo.

e. Qual é a localização do ponto **O** no triângulo retângulo?

f. Arraste novamente um dos vértices do triângulo DEF e transforme-o em um triângulo obtusângulo.

g. Qual é a localização do ponto **O** no triângulo obtusângulo?

3. Escreva abaixo e em uma caixa de comentários:

O que você observou em relação à localização do **circuncentro** nos diferentes tipos de triângulo (acutângulo, retângulo e obtusângulo)?

4. Clique na ferramenta Circunferência dados o centro e um de seus pontos e, em seguida, clique no ponto **O** e em qualquer um dos seus vértices. Responda abaixo e em uma caixa de texto no *Geogebra*:

a. O que os segmentos CD, CE e CF representam na circunferência construída?

b. Arraste os vértices do triângulo e escreva o que você percebeu em relação à circunferência construída.

____

____

____

____

Ao terminar, grave a sua construção no modo público e compartilhe na tarefa destinada a ela.

Atividade 4: Estudo das propriedades do baricentro

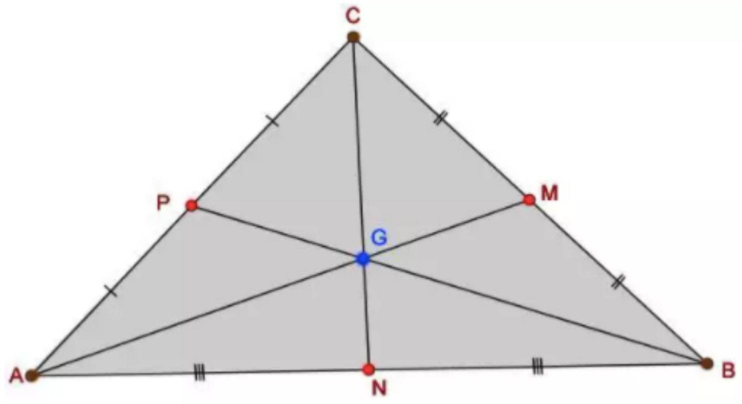
Expectativas de aprendizagem:

- Determinar as medianas de um triângulo;
- Perceber que a localização do encontro das medianas depende da classificação do triângulo; e,
- Obter a propriedade do baricentro;

1. Considere a seguinte definição:

Definição 2: Baricentro de um triângulo

O baricentro é dado pela **intersecção das medianas de um triângulo.** No exemplo, o ponto **G** é o baricentro do triângulo ABC.



2. A partir da compreensão da definição dada, faça o que se pede nos itens a seguir:

a. Abra a página do *Geogebra* e acesse-o com o seu login;

b. Construa um triângulo ABC, marque as medidas dos seus ângulos, transforme-o em acutângulo e determine o baricentro (**G**).

c. Qual é a localização do ponto **G** no triângulo acutângulo?

Localizações possíveis: Regiões interna, externa ou pontos específicos do

____

____

____

b. Arraste um dos vértices do triângulo ABC e transforme-o em um triângulo retângulo.
c. Qual é a localização do ponto **G** no triângulo retângulo?

____

____

____

d. Arraste novamente um dos vértices do triângulo ABC e transforme-o em um triângulo obtusângulo.
e. Qual é a localização do ponto **G** no triângulo obtusângulo?

____

____

3. Escreva abaixo e em uma caixa de comentários:

O que você observou em relação à localização do **baricentro** nos diferentes tipos de triângulo (acutângulo, retângulo e obtusângulo).

____

____

____

____

____

____

4. Nomeie os pontos médios de AB, BC e CA por D, E e F, respectivamente e, em seguida, construa os segmentos AG, GD, BG, GE, CG, GF.

5. Meça cada um destes segmentos e escreva as relações que há entre:

a) Os segmentos AG e GD:
______________________________________.

b) Os segmentos BG e GE:
______________________________________.

c) Os segmentos CG e GF:
______________________________________.

d) Essas relações são mantidas em qualquer tipo triângulo? Justifique.

6. Escreva abaixo e em uma caixa de texto no *geogebra*:

O baricentro divide as medianas de uma forma padronizada. Analise a construção feita e as questões respondidas anteriormente e elabore uma conclusão acerca do baricentro e das divisões das medianas.

Ao terminar, grave a sua construção no modo público e compartilhe na tarefa destinada a ela.

Atividade 5: Estudo das propriedades dos pontos notáveis nos triângulos equiláteros e isósceles.

Expectativas de aprendizagem:

- Construir as cevianas notáveis de um triângulo e;
- Perceber os padrões existentes na localização dos pontos notáveis nos triângulos equilátero e isósceles.

Para realizar a atividade, percorra os seguintes passos e responda as perguntas:

1. Abra a página do *Geogebra* e acesse-o com o seu login;
2. Construa um triângulo XYZ, marque as medidas dos ângulos internos, transforme-o em escaleno e obtusângulo e determine o circuncentro (**O**), o baricentro (**G**), o ortocentro (**H**) e o incentro (**I**). Use cores diferentes para cada tipo de **ceviana notável e mediatrizes** (**vermelho** para as mediatrizes, **verde** para as medianas, **amarelo** para as bissetrizes e **azul** para as alturas).
3. Arraste os vértices desse triângulo tornando-o equilátero. Observe a localização dos pontos notáveis. O que você pode dizer sobre as suas posições? Escreva sua observação abaixo e **também** em uma caixa de comentários no *Geogebra*.

____

____

____

____

4. Agora, arraste os vértices do triângulo XYZ construído, tornando-o um triângulo isósceles. (Para observar melhor, varie o par de lados que tornou congruentes.) Observe a localização dos pontos notáveis. O que você pode dizer sobre suas posições? Escreva sua observação abaixo e **também** em uma caixa de comentários no *Geogebra*.

____

____

Ao terminar, grave a sua construção no modo público e compartilhe na tarefa destinada a ela.