Algumas atividades dinâmicas aplicadas ao segundo e terceiro ano do Ensino Médio em uma Escola Estadual

Lucas Decaro dos Santos da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dra. Silvia Nagib Elian

São Paulo, Agosto de 2022

Algumas atividades dinâmicas aplicadas ao segundo e terceiro ano do Ensino Médio em uma Escola Estadual

Esta é a versão final da dissertação elaborada pelo candidado Lucas Decaro dos Santos da Silva, tal como submetida à Comissão Julgadora

Resumo

Silva, L. D. S. Algumas atividades dinâmicas aplicadas ao segundo e terceiro ano do Ensino Médio em uma Escola Estadual. 2022. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 2022.

Este trabalho tem como objetivo estudar as aplicações de atividades dinâmicas, desenhadas no PowerPoint, sobre os seguintes temas: Triângulo de Pascal e Binômio de Newton, para o segundo ano, e medidas de tendência central e dispersão, para o terceiro ano do Ensino Médio. “O entendimento do Triângulo de Pascal e suas propriedades serve como ferramenta para a compreensão de outros tópicos importantes na formação dos estudantes, como o Binômio de Newton e o cálculo de probabilidades, daí o interesse de encontrar meios e ferramentas para o ensino deste conteúdo.” (Silva 2020) A compreensão das medidas de tendência central é importante, pois existem diversas informações no cotidiano que são resumidas em um único dado. Já na parte das medidas de dispersão, além de indicar se os dados são homogêneos, também, mostra se a medida de tendência central escolhida representa bem os conjuntos de dados que estão sendo trabalhados. As atividades foram aplicadas para cento e quinze estudantes, de quatro turmas do segundo ano, e, noventa estudantes, de três turmas do terceiro ano, ambas do Ensino Médio proveniente de uma escola estadual do município de Osasco. “Apresentamos um estudo estatístico descritivo dos resultados e aplicamos o método de “clusters”, que nos permitem avaliar e identificar as principais dificuldades dos estudantes.”(Silva 2020)

Palavras-chave: Atividades dinâmicas; “clusters”; tecnologia; triângulo de Pascal; binômio de Newton; estatística descritiva.

Abstract

This work aims to study the applications of dynamic activities, designed in PowerPoint, on the following topics: Pascal's Triangle and Newton's Binomial, for the second year, and measures of central tendency and dispersion, for the third year of high school. The understanding of Pascal's Triangle and its properties serves as a tool for the understanding of other important topics in the training of students, such as Newton's Binomial and the calculation of probabilities, hence the interest in finding means and tools for teaching this content. Their standing of the measures of central tendency is important because there are several pieces of information in everyday life that are summarized in a single data. Already in the part of the measures of dispersion in addition to indicating whether the seisf data are homogeneous, also shows whether the measure of central tendency chosen represents well the sets of data being worked. The activities were applied to one hundred and fifteen students from four classes of the second year, and ninety students from three classes of the third year, both of high school coming from a state school in the city of Osasco. We present a descriptive statistical study of the results and apply the cluster method that allows us to evaluate and identify the main difficulties of the students.

keyword: Dynamic activities; cluster; technology; Pascal's triangle; Newton's binomial; Descriptive statistics.

Sumário

1. Introdução 7

2. O ensino remoto como estratégia nos desafios atuais 12

2.1 Uso da Tecnologia na Educação 12

2.2 Desafios atuais nas escolas estaduais durante o ensino remoto. 13

2.3 Levantamento de pesquisas na área 16

3. Teoria Matemática 19

3.1 Estatística 19

3.2 Educação Estatística 20

3.3 Noções de Estatística abordadas neste trabalho 22

3.3.1 Média Aritmética $\overline{x}$ 22

3.3.2 Moda $\boldsymbol{Mo}$ 22

3.3.2 Mediana $\boldsymbol{Me}$ 23

3.3.4 Medidas de Dispersão: 24

- Desvio Médio (DM) 25
- Variância (V) 25
- Desvio-Padrão (DP) 26

3.4 Triângulo de Pascal 27

3.4.1 Um pouco sobre a história 27

3.4.2 Algumas Propriedades do Triângulo de Pascal 36

3.4.3 Binômios de Newton 43

4. Fudamentação Metodológica 46

4.1 Introdução 46

4.2 Procedimentos 49

5. Aplicação das atividades dinâmicas 55

5.1 Atividades dinâmicas sobre o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton 55

5.1.1 Relação de Stifel 55

5.1.2 Propriedade das Linhas 58

5.1.3 Propriedade das Colunas 59

5.1.4 Propriedade das Diagonais 62

5.1.5 Sequência de Fibonacci 65

5.1.6 Binômio de Newton 68

5.2 Atividades dinâmicas sobre Estatística 69

5.2.1 Média Aritmética 69

5.2.2 Mediana 71

5.2.3 Moda 75

5.2.4 Amplitude e Desvio Médio 77

5.2.5 Variância 80

5.2.6 Desvio Padrão 84

6. Análise de Resultados 87
6.1 Segundo ano 87
6.2 Terceiro ano 95
7 Considerações finais 99
Referências bibliográficas 102
Apêndices 110
Termos de consentimento livre e esclarecido 110
Resumos apresentados em congressos 116

1. Introdução

A motivação para esta pesquisa surgiu das dificuldades enfrentadas pelos estudantes no Ensino Médio e Superior em Estatística Descritiva e Análise Combinatória, em particular no Triângulo de Pascal e sua aplicação no Binômio de Newton, dado que sua aprendizagem é muito importante, desde a vida cotidiana até a vida profissional. Além disso existe a necessidade de utilização do ensino remoto, principalmente na situação atual.

A professora Lisbeth Kaiserlian Cordani (CORDANI, 2001) afirma que ”historicamente os alunos não se mostram motivados pela Estatística, quer seja pela dificuldade alegada do seu conteúdo, quer seja pelo pouco uso que dela fazem as disciplinas que a seguem na graduação em algumas das unidades de origem.”

Ao encontro dessa ideia, SILVA MALARA, (2008) “considera que as dificuldades enfrentadas pelos professores que trabalham com a disciplina de Estatística são:

• falta de motivação dos estudantes;

• dificuldade na manipulação de conceitos abstratos com base matemática;

• o não entendimento da linguagem estatística, aliado a um raciocínio extremamente determinístico da parte dos alunos.”

Desta maneira, Garfileld e Ahlgren (1988) alegam que “os alunos veem a Estatística à imagem da Matemática, significando que procuram encontrar nas situações estatísticas uma solução única e definitivamente correta ou errada, isenta de qualquer ambiguidade ou erro, o que para estes autores constitui uma fonte de dificuldades.” Moore (1992) “considera a Estatística como a ciência dos números em contexto, vai mais longe ao argumentar que a Estatística é uma ciência matemática, mas não é um ramo da matemática, tendo emergido como disciplina de direito próprio, com modos característicos de pensamento, que são mais importantes do que os métodos específicos ou a teoria matemática.”

Diante das dificuldades dos alunos na aprendizagem de Estatística, Melo (2010) “procura analisar como o conceito de média aritmética é compreendido por estudantes dos anos iniciais considerando diferentes variantes, significados e representações.” A autora, que observou os alunos, percebeu que uma das dificuldades é relativa ao conceito de média, o que justifica a necessidade de um trabalho sistematizado sobre o conceito de média aritmética na sala de aula. Da

mesma forma, Sirnik e Kmetic (2010) “realizaram um estudo com estudantes do último ano do ensino da Educação Básica e observaram que ainda nesse nível de ensino existem alunos que apresentam incompreensões sobre as medidas de tendência central.” Concomitantemente, Leite (2010) “realizou uma intervenção pautada na significação e cálculos de medidas de tendência central com estudantes do 3º ano do Ensino Médio e observou a pertinência da mesma.” Nesse sentido, Mandarino (2010) “argumenta sobre a necessidade dos alunos se apropriarem de conceitos estatísticos e do conhecimento sobre os elementos constitutivos de gráfico e tabela.”

Complementando as ideias anteriores, Reading e Shaughnessy (2004) “relatam que existem outras dificuldades enfrentadas pelos alunos, e os autores afirmam que a complexidade dos cálculos do desvio-padrão é um obstáculo para o professor motivar os alunos para o tal entendimento da medida, pois a mesma exige que o estudante utilize diversos conceitos como média, desvio, potência, raiz quadrada e fração. Por ser de natureza complexa, a compreensão desta medida não é imediata, sendo difícil interpretá-la, apesar de ser a medida de variabilidade mais comumente utilizada”.

“A pesquisa de Meletiou (2000) também confirma está constatação, pois dentre as medidas de dispersão trabalhadas pela autora, foi no desvio-padrão que os alunos apresentaram maior dificuldade. Da mesma forma, Ben-Zvi e Garfield (2008) afirmam que, normalmente, os alunos aprendem a definição do desvio-padrão e como ele é calculado, mas raramente entendem de modo claro o significado desta medida e como interpretá-la.” (Silva, 2020)

Alguns teóricos, como Gnanadesikan, Scheaffer, Watkins e Witmer (1997), afirmam que, “para que os estudantes possam adquirir um entendimento conceitual de Estatística Básica, o ensino dessa disciplina deve deixar de ser através de aulas expositivas, passando para o engajamento dos alunos em atividades diferenciadas de ensino.”

Já na parte de Análise Combinatória, Souza (2019) afirma que há necessidade de desmistificar a ideia de que os temas Binômio de Newton e Triângulo de Pascal podem ser excluídos do currículo escolar por ser considerados, por muitos educadores, desconexos de outras áreas do conhecimento. Outro fato importante é argumentado por Morgado (2006), que menciona que o desenvolvimento do binômio $(1 + z)^n$ está entre os primeiros problemas ligados à Análise Combinatória.

De acordo com Milies e Coelho (2006), para uma melhor compreensão do

coeficiente binomial, devemos introduzir primeiro os números cálculos combinatórios, já que eles irão desempenhar um papel fundamental no Teorema Binomial.

Para Hanke (2008), a maior dificuldade apresentada pelos os alunos diante do Triângulo de Pascal é no momento de escreverem a generalização para a relação de Stiffel e para os binomiais complementares. Segundo a autora, os alunos também mostram uma deficiência com relação ao desenvolvimento de alguns processos matemáticos (generalização, abstração, formalização).

Diante disso, Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) alegam que “a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significado social e lógico, enfatizando, simplesmente, a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões.”

Na atual conjuntura, é perceptível que os jovens estão cada vez mais mergulhados em um mundo tecnológico, onde usar celulares, tablets, notebooks entre outros recursos é tão comum que se tornou uma necessidade na sociedade moderna, tanto para se comunicar quanto para buscar se manter informado sobre o mundo. Com isso, a tecnologia afeta o modo como vivemos em sociedade, seja de como consumimos, exercemos tarefas diárias comuns e até a maneira como aprendemos.

“Entende-se por tecnologia, primeiramente como a compreensão de dispositivos (aparelhos) que utilizam os avanços tecnológicos para oferecer uma maior funcionalidade. Em segundo lugar, entende-se a tecnologia como algo imaterial, mas que se materializa como conhecimento através de aparelhos que aproveitam e estendem este conhecimento.” (Silva 2020)

Como os alunos neste século são inseridos ao nascer em uma sociedade cada vez mais tecnológica, é preciso que a aprendizagem desses alunos acompanhe a realidade vivenciada por crianças e jovens. Neste sentido, Smole e Diniz (2005) afirmam que “não é mais possível pensar em um ensino de Matemática que desconsidere o uso de tecnologias de informação e comunicação tanto para aumentar a eficácia do ensino quanto para desenvolver no aluno o senso crítico, o pensamento hipotético e dedutivo, a capacidade de observação, de pesquisa e estratégias de comunicação”.

Dessa maneira, Kenski (2001) “justifica que as ferramentas computacionais podem ser vistas como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem, devidamente articuladas com uma estratégia pedagógica que oportunize a construção crítica do conhecimento. Contudo, não substituem o papel

do professor, nem resolvem todos os problemas de dimensões escolares, mas podem, no contexto de sala de aula e para além dele, oportunizar a dinâmica da experimentação."

"O objetivo da utilização de novas tecnologias no ensino de Matemática é visar uma aprendizagem eficaz e conduzir os alunos a transformarem as informações obtidas por meio de recursos ou ferramentas tecnológicas em conhecimentos que favoreçam o desenvolvimento desses alunos na disciplina." (Silva 2020) Nesse sentido é perceptível as vantagens do uso do computador no ensino da Matemática:

- participação ativa do aluno na construção de sua própria aprendizagem;
- interação entre o aluno e a máquina;
- a possibilidade de dar atenção individual ao aluno;
- a possibilidade de criar micromundos que permitem explorar e conjecturar;
- permite o desenvolvimento cognitivo do aluno;
- controle do tempo e sequência de aprendizado do aluno;
- através de feedback imediato e eficaz, o aluno pode aprender com seus erros.

Diante disso, Beatriz D'Ambrosio (1989) relata que o uso de computadores nas aulas vai além disso, pois "a metodologia de trabalho com uso deles tem o poder de dar ao aluno a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer Matemática, fazendo com que ela deixe de ser um conjunto de conhecimentos prontos e simplesmente transmitidos aos alunos, passando a ser algo em que o aluno é parte integrante no processo de construção de seus conceitos."

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), "as novas tecnologias não são apenas uma ferramenta útil para o trabalho em Estatística ela constituem mesmo um elemento indispensável na prática desse campo".

A presente pesquisa envolverá atividades dinâmicas remotas que colocarão o educando como principal agente do seu desenvolvimento. Com isso, formularemos a seguinte pergunta de pesquisa: Como os recursos presentes nas atividades dinâmicas com animações podem contribuir para a compreensão dos alunos em Estatística, especificamente nas medidas de centralidade e dispersão, no Triângulo de Pascal e suas aplicações no Binômio de Newton no ensino remoto?

O objetivo geral desta pesquisa é utilizar atividades dinâmicas de forma remota para a aprendizagem dos alunos do Ensino Médio sobre Estatística, em particular as medidas de tendência central (média, moda e mediana) e medidas de dispersão (variância e desvio médio e padrão) e no Triângulo de Pascal e suas aplicações nos

Binômios de Newton. Após essa aplicação, serão avaliadas sua influência no processo de aprendizagem.

Objetivos específicos:

• Construir atividades dinâmicas, sendo uma dedicada ao tópico de medidas de centralidade e dispersão e as demais com foco no Triângulo Pascal e suas aplicações no Binômio de Newton.

• Estudar como as atividades dinâmicas influem na compreensão desses tópicos.

• Encontrar padrões nas respostas dos estudantes a fim de relacionar as dificuldades referentes ao tópico.

Para o segundo capítulo abordaremos o uso da tecnologia na educação e os desafios atuais nas escolas estaduais durante o ensino remoto em meio à pandemia.

O terceiro capítulo, denominado Teoria Matemática, apresentará uma análise em torno dos tópicos principais desta pesquisa, sendo abordado um embasamento da literatura já publicada sobre os temas.

No quarto capítulo será delineado todo o caminho a ser seguido no projeto. Neste projeto será utilizado "Design-Based Research"como metodologia. Após essa abordagem, será apresentado o procedimento, que discorrerá como a intervenção pedagógica foi realizada, e de que forma serão coletados os dados do projeto.

Constarão, no quinto capítulo, as atividades que foram aplicadas na pesquisa e seus comentários.

No sexto capítulo apresentaremos a análise dos resultados, utilizando medidas de Estatística Descritiva e Análises de "Clusters".

2. O ensino remoto como estratégia nos desafios atuais

2.1 Uso da Tecnologia na Educação

O termo “tecnologia” vem do grego tekhne que significa “técnica, arte, ofício”, juntamente com a palavra logos, também grega, que refere-se ao “conjunto dos saberes”.

“Vivemos hoje em um cenário dominado pelos modernos meios tecnológicos, liderados pela Internet, que imprimiu agilidade e acesso instantâneo à informação. Segundo Pretto (2002), a velocidade com que o mundo está se transformando exerce uma influência direta no conjunto de valores da sociedade contemporânea. Para Cursino (2017), quando a sociedade evolui em decorrência de transformações tecnológicas, culturais e morais, consequentemente, a Educação deve acompanhar e adequar-se às novas concepções vividas pelos vários segmentos da sociedade, a fim de preparar seus alunos para uma visão de mundo ilimitada, integrando meios tecnológicos ao processo de ensino-aprendizagem.” (Silva 2020)

Valente (1998) “define o ensino tradicional como base da transmissão de conhecimento. Nele, o professor apresenta-se como proprietário do saber e o aluno é um recipiente que deve ser preenchido. O resultado dessa abordagem é o aluno passivo, sem capacidade crítica e com uma visão de mundo limitada. Segundo o autor, esse aluno, quando formado, terá pouca chance de sobreviver na sociedade atual.”

Com isso, os autores Laburú, Arruda e Nardi (2003) “questionam o ensino tradicional quando este advoga ou prescreve o domínio de um ensino mecânico, ritualista, de observação, de audição, centrado tão somente no professor.”

Pretto (2002) questiona diferentes fatos, afirmando que a instituição escolar não pode caminhar em sentido oposto ao que ocorre do lado de fora dos seus muros, ou seja, “uma escola fundamentada apenas no discurso oral e na escrita, centrada em procedimentos dedutivos e lineares”, praticamente desconhecendo as novas linguagens e ferramentas a disposição da aprendizagem. Com isso, Valente (1998) alega que o enfoque da informática educativa não é o computador como objeto de estudo, mas como meio para adquirir conhecimentos.

Nessa conjuntura, um dos inúmeros recursos disponíveis são os softwares

educativos, que trouxeram novas perspectivas para o uso da informática no ensino. Entende-se por software educativo todo software que pode ser usado para fins educacionais. Vale ressaltar que mesmo que o software não tenha sido criado para fins educacionais, pode ser utilizado como software educativo, como por exemplo as planilhas eletrônicas, como EXCEL e CALC (é um software de planilha eletrônica multiplataforma de código aberto), que podem ser usadas para construção de gráficos, operações com matrizes e diversos outros assuntos em Matemática.

Em relação ao uso de softwares educativos no ensino da Matemática, Gravina (1998) afirma que no “contexto da Matemática, a aprendizagem depende de ações que caracterizam o “fazer matemática”: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento.”

Mesmo tendo esse vasto campo de softwares educacionais na internet, Tajra (2001) menciona que “o professor precisa conhecer os recursos disponíveis dos programas escolhidos para suas atividades de ensino, somente assim estará apto a realizar uma aula dinâmica, criativa e segura.”

2.2 Desafios atuais nas escolas estaduais durante o ensino remoto.

Com a chegada do coronavírus ao Brasil, as aulas da educação básica foram suspensas de acordo com o decreto estadual número 64.864 de 16 de março de 2020. Esse decreto menciona que "como medida de segurança, as aulas na rede estadual de São Paulo começaram a ser suspensas desde o dia 19 de março. A partir do dia 23 de março, 100 % das atividades presenciais ficaram suspensas”. (SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO)

Diante desse decreto, a escola onde foi realizada a atividade de pesquisa entrou em recesso para organização do processo trabalho pedagógico realizado pela instituição.

Após algumas reuniões on-line com membros da secretaria de educação, chegou-se à decisão de transferir o ensino presencial para o ensino remoto durante a pandemia. Vale mencionar que o MEC (Ministério da Educação) reconhece duas modalidades de ensino, que são o ensino presencial e o ensino à distância. Como medida de evitar a propagação do vírus no Brasil, o MEC autorizou o uso do “ensino

remoto emergencial” ou “regime remoto” no país.

Para Behar (2020) “o termo remoto significa distante no espaço e se refere a um distanciamento geográfico, e o ensino é considerado remoto porque os professores e alunos estão impedidos por decreto de frequentarem instituições educacionais para evitar a disseminação do vírus. É emergencial porque, do dia para a noite, o planejamento pedagógico para o ano letivo de 2020 teve que ser engavetado. Concomitantemente, Moreira e Schlemmer (2020, p. 08) argumenta que:

> o modelo de educação, chamado de “ensino remoto ou aula remota” é definido como “uma modalidade de ensino ou aula que pressupõe o distanciamento geográfico de professores e estudantes [...]”, busca suprir a emergência de falta de aulas presenciais, atendendo à necessidade do aluno, a fim de que se possa estudar e se manter ativo, mesmo estando o professor e o aluno cada um na sua casa.”

Uma caraterística importante a ressaltar sobre o ensino remoto é que ele não se diferencia em termos metodológicos do ensino presencial, tendo também o processo interação aluno-professor presente nesta adaptação em aulas síncronas, acontecendo no mesmo horário das aulas presenciais. Ao encontro dessa ideia, Moreira e Schlemmer (2020, p. 07) alegam que a modalidade de ensino em questão demandou que professores e alunos migrassem “para a realidade on-line, transferindo e transpondo metodologias e práticas pedagógicas típicas dos territórios físicos de aprendizagem”.

Outro fato também importante a ser citado é que o ensino remoto não é igual à educação a à distância (EAD), e sua principal diferença é que, na educação à distância, temos a presença de um tutor que faz a comunicação entre professor da disciplina e os alunos do curso por meio de ambientes virtuais de aprendizagem (AVA). Já, no ensino remoto, a comunicação entre professor e aluno é automática, sem interferência de um terceiro membro.

Temos que lembrar que o ensino remoto foi uma medida extraordinária, ou seja, os alunos continuariam na modalidade de ensino presencial, lembrando que voltariam para a modalidade de ensino presencial assim que fossem minimizados os efeitos da pandemia no país.

Mais um ponto que precisou ser acertado foi a adaptação da grade curricular dos conteúdos, visto que, no ano de 2019, nem todos os professores conseguiam ministrar aula de forma on-line. A lista de conteúdos a serem trabalhados na pandemia

foi uma adaptação dos conteúdos principais do ano anterior juntamente com o do ano atual (2020). Com essa alteração, alguns conteúdos foram excluídos, como por exemplo, o Triângulo de Pascal e Binômio de Newton, que eram parte do ensino no terceiro bimestre do 2º ano. Outro conteúdo que foi cortado é a medida de dispersão em Estatística, geralmente, tal conteúdo era ensinado no último bimestre do 3º ano do ensino médio.

Para auxiliar o trabalho do professor, o Estado de São Paulo criou o CMSP (Centro de Mídias do Estado de São Paulo), onde os alunos conseguem ter acesso às aulas de forma síncrona e assíncrona com os dados patrocinados (sem utilizar dados móveis) em qualquer operadora telefônica, desde que possuam acesso à internet. Além disso, para os alunos que tinham equipamento tecnológico e não disponibilizavam de internet em sua residência, foi realizado a entrega de chips com internet solicitados pelos pais ou responsáveis e distribuídos pelas escolas. Aqueles que não tinham nenhum equipamento disponível poderiam ir à escola assistir as aulas de forma assíncrona e fazerem suas atividades com hora marcada na sala de informática de sua unidade escolar.

Outro fato a ser comentado nesta adaptação é a duração do tempo de aula semanal da disciplina de Matemática comparando o momento antes da pandemia e o momento atual. Antes, na modalidade de ensino presencial do Ensino Médio, os alunos tinham cinco aulas com duração de 45 minutos cada aula, totalizando 225 minutos semanais, e atualmente eles têm três aulas de 25 minutos, totalizando 75 minutos semanais através da CMSP.

Ficava a critério do professor decidir o que trabalhar com a turma nessa diferença de tempo, alguns ministraram aulas através do Google Meet, outros aplicaram atividades para complementar as aulas do CMSP. Lembrando que essas opções dependem de cada escola e professor, não havendo um parâmetro a ser seguido.

Muitos professores tiveram que se aprimorar tecnologicamente para conseguir ministrar aulas nesse novo formato. O Estado tem contrato ativo com a Google, que permite realizar aulas pelo Meet e criar diversas atividades com as ferramentas Google for Educacion e também disponibiliza acesso aos programas da Microsoft como Teams. De acordo com site da própria empresa, está é uma plataforma unificada de comunicação e colaboração que combina bate-papo, videoconferências, armazenamento de arquivos e integração de aplicativos no local de trabalho.

2.3 Levantamento de pesquisas na área

“Buscou-se nesta seção a identificação de trabalhos que tivessem como objetivo o ensino e aprendizagem de Matemática, especificamente nos conteúdos de Estatística (Medidas de centralidade e dispersão) e Análise Combinatória (Triângulo de Pascal e Binômio de Newton) no Ensino Médio com a utilização de alguma tecnologia de informação e comunicação. A partir das estratégias de busca empregadas, destacaram-se algumas pesquisas nesta área, nas quais se verificaram a metodologia, o embasamento teórico e aferiram-se resultados, no intuito de colaborar com o desenvolvimento do presente estudo.” (Silva 2020)

Para tanto, “adotou-se a revisão integrativa da literatura, uma vez que a mesma contribui para o processo de sistematização e análise dos resultados, visando a compreensão de um determinado tema, a partir de outros estudos independentes” (GALVÃO; SAWADA; ROSSI, 2002).

Para Ercole el at (2014) a “revisão integrativa de literatura é um método que tem como finalidade sintetizar resultados obtidos em pesquisas sobre um tema ou questão, de maneira sistemática, ordenada e abrangente”. Desse modo, o pesquisador pode elaborar uma revisão mais integral, incluindo a definição de conceitos, revisão de teorias ou análise metodológica dos estudos incluídos de um tópico particular entre outros.

“O levantamento bibliográfico foi realizado no mês de fevereiro de 2020, mediante o acesso virtual às bases de dados da Scientific Electronic Library Online (SciELO) e Google Scholar, por meio da utilização de descritores e palavras-chave, que foram estabelecidos através de leituras prévias sobre o tópico de interesse. Para assegurar busca ampla, os descritores e palavras-chave foram combinados de diferentes formas. Foram selecionados como descritores e palavras-chave: Educação no Ensino Médio, Ensino de Estatística, Ensino do Triângulo de Pascal, Ensino do Binômio de Newton, Tecnologia de Informação e Comunicação, Aplicativo, Software e Matemática.” (Silva 2020)

Dentre os artigos sobre o ensino de Estatística com uso de tecnologias para a educação básica, Souza e Lopes (2011) “objetivaram investigar as contribuições que a inserção da tecnologia pode trazer à educação estocástica. O termo “estocástica”

tem sido utilizado para referir-se à inter-relação dos conceitos de combinatória, probabilidade e estatística. A pesquisa realizada foi de natureza qualitativa, com análise interpretativa a partir de categorias emergentes da parte empírica: simulação, interação e resolução de problemas. Para tal, foi proposto a quatro alunas (de 12 e 13 anos) que desenvolvessem atividades sobre probabilidade utilizando o software Fathom. Observou-se que o programa Fathom permitiu simulações de várias amostras, economizando tempo de aula e ajudando as alunas a praticar na máquina aquilo que seria impossível fazer manualmente. Com isso, concluiu-se que a ferramenta computacional foi grande aliada na aquisição e construção dos novos conhecimentos. Porém, é fundamental que o professor saiba propor situações que levem os alunos a utilizarem as ferramentas do software para a aprendizagem, pois ele por si não é autoinstrutivo."

Para Borba et al. (2015), o software Fathom apresenta grande potencial para o ensino de Estatística e Probabilidade. O uso desse tipo de ferramenta aumenta a amplitude e a precisão dos conhecimentos construídos, mas, por outro lado, exige que o professor tenha domínio mais amplo do conteúdo que está ensinando. Outro elemento, que também se destaca, é a importância da simulação e do processo de interação na educação estocástica.

No estudo realizado por Coutinho, Almouloud e Silva (2012), "também sobre o ensino da Estatística, objetivou-se a construção de um tutorial para professores do ensino fundamental e médio para construção de gráficos estatísticos com uso do programa GeoGebra. Participaram da pesquisa cinco professores de Matemática, interessados pelos problemas do ensino-aprendizagem da Estatística e que participavam do grupo de pesquisa como colaboradores. Destes, três haviam concluído o mestrado no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). A partir dos resultados observados nesse projeto, no que tange à formação de professor, pôde-se constatar que uma parte dos objetivos propostos no projeto foi alcançada, particularmente no que se refere ao uso de ambiente computacional para desenvolvimento do letramento estatístico.

O GeoGebra é um software gratuito, com interface amigável, que disponibiliza simultaneamente as representações algébrica e geométrica, além de possuir recursos

de dinamicidade e movimentação (GONÇALVES; REIS, 2013). É um software de geometria dinâmica, desenvolvido por pesquisadores da Universidade americana Florida Atlantic University, que vem sendo utilizado no Ensino da Matemática nas instituições da educação básica e superior. Possui uma infinidade de ferramentas capazes de influenciar no referido ensino. Verifica-se que a mediação de softwares educativos, como o GeoGebra, no processo ensino-aprendizagem de Matemática, pode exercer papel fundamental na relação dos alunos com esta ciência (REIS JÚNIOR; HENRIQUES, 2014)".

Na parte de Análise Combinatória (Triângulo de Pascal e Binômio de Newton), não foi encontrada nenhuma dissertação que usasse tecnologia. Porém ao procurar em livros didáticos, na página 142 do livro Matemática, Interação e Tecnologia, vol. 2 de Rodrigo Balestri, referente ao PNLD 2018, é mencionado o software wxMaxima, que é uma interface gráfica criada para o Maxima, um sistema de computação algébrica derivado do sistema Macsyma, desenvolvido pelo MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts) entre os anos de 1968 e 1982, como parte do projeto MAC. O MAC (Computador de Acesso Múltiplo) foi um projeto que teve relevância em pesquisas inovadoras em sistemas operacionais, inteligência artificial e teoria da computação.

No próximo capítulo, abordaremos a Teoria Matemática que consta na dissertação. Mencionaremos conceitos sobre Educação Estatística, um breve resumo da história do Triângulo de Pascal e sua relação com o Binômio de Newton.

3. Teoria Matemática

3.1 Estatística

O objetivo do presente capítulo é descrever as noções de Matemática, Estatística e Triângulo de Pascal abordadas neste trabalho.

"A palavra Estatística provém da expressão em latim "statisticum collegium", que significa um conselho de estado e do latim "statista" (estadista ou político). A gênese etmológica vem do latim "status" que significa estado e originalmente significava uma coleção de informações de interesse do estado sobre população e economia, e foi introduzida em meados do século XVIII por Gottfried Achnwall, como cita Martin (2001) "[...] o universitário Gottfried Achenwall difundiu o termo estatística no qual via a ciência da constituição do Estado, isto é, a ciência dos recenseamentos de todos os constituintes de um Estado".

Achmwall introduziu o conceito de Estatística Descritiva ou morfológica após elaborar os princípios de organização e síntese de dados.

Segundo Castro (1970), "podemos distinguir três grandes etapas na história da Estatística, que são:

> 1º período: é considerado como período de preparação dos fatos, caracteriza-se pela organização dos registros sistemáticos de informações e cadastros do interesse do Estado, com a finalidade guerreira ou fiscal. Esse período vem desde do Regime Feudal até meados do século XVII.
>
> 2ºperíodo: também chamado de período das preparações das teorias, iniciou-se em meados do século XVII até a metade do século XIX e, no sentido de instituir a estatística como disciplina autônoma, teve como precursores o alemão Conring (1660), os ingleses John Graunt (1662), William Petty (1682) e Halley (1694).
>
> 3º período: chamado de período do aperfeiçoamento, iniciou-se em 1853 com a Reunião do Primeiro Congresso de Estatística e se estendeu até a atualidade, quando o método estatístico foi sendo cada vez mais aplicado em diversos campos, levando a um aperfeiçoamento dessa ciência e tendo como características desse período um grande intercâmbio de informações e ideias, reunião de congressos e unificação de pontos de vista. Além disso, houve um extraordinário desenvolvimento da concepção da ciência como método destinado a pesquisar as relações de causa e efeito dos fenômenos,

> possibilitando assim a previsão desses acontecimentos dentro de uma razoável margem de erro.” (Castro 1970)

3.2 Educação Estatística

De acordo com Vieira (2012), a Estatística é a “ciência que fornece os princípios e a metodologia para coleta, organização, apresentação, resumo, análise e interpretação de dados”. Já Gonzáles (2008) a denomina de “ciência da interpretação de fatos numéricos”. Com isso notamos que a Estatística usa métodos científicos para planejar levantamento de dados e analisar experimentos.

Para Pereira (2013), quando a Estatística busca apresentar estratégias de ensino e aprendizagem, através de seus conceitos, nos meios escolares, é denominada de Educação Estatística. A Educação Estatística surgiu na década de 1970, da necessidade de se desenvolver pesquisas que viessem a sanar dificuldades apresentadas por professores que ensinavam conceitos e procedimentos estatísticos em cursos do ensino superior e intensificou-se com a inserção dos conteúdos de Estatística na educação básica (Cazorla; Kataoka; Silva, 2010). Diante disso, Lopes (2008) menciona que o seu objetivo é auxiliar os estudantes a desenvolverem o pensamento estatístico, contribuindo para que um indivíduo possa analisar e relacionar de forma crítica os dados apresentados, questionando e até mesmo ponderando a veracidade desses dados.

A Educação Estatística está baseada em três competências de aprendizagem: letramento, pensamento e raciocínio estatísticos.

Ao encontro dessa ideia, Gal (2002) menciona que o letramento estatístico está baseado na capacidade que um indivíduo tem de ler informações textuais, gráficos e tabelas. Inclusive afirma que para obter o domínio da leitura de informações é necessário conhecer também princípios básicos de Estatística, dominar alguns procedimentos matemáticos, para desenvolver habilidades e competências, a fim de compreender as informações apresentadas.

Além disso, Gal (2002) observa que praticamente todas as mensagens estatísticas são transmitidas através de texto escrito ou oral ou exigindo que os leitores naveguem através de informação fornecida em tabelas e gráficos. Sendo assim, é necessário que o aluno seja competente para “ler, escrever, demonstrar e trocar informações, interpretar gráficos e tabelas e entender as informações

estatísticas dadas nos jornais e outras mídias, sendo capaz de pensar criticamente sobre elas" (CAMPOS; WODEWOTZKI; JACOBINI, 2011).

Para Snee (1990), o Pensamento Estatístico é constituído por processos de pensamento que reconhecem a presença da variação em tudo o que fazemos. Segundo Moore (1997), a onipresença da variabilidade e sua modelagem são elementos do Pensamento Estatístico que devem ser enfatizados no ensino. Logo o Pensamento Estatístico para Ben- Zvi e Garfield (2007) inclui o conhecimento de como e porquê se usa um determinado método, medida ou modelo; a compreensão profunda das teorias subjacentes aos processos e métodos estatísticos, bem como de suas limitações; reconhecimento de quando, como e porquê os instrumentos de inferência existentes podem ser usados; a capacidade de compreender e utilizar o contexto de um problema para planejar, avaliar e tirar conclusões sobre as investigações.

Ao encontro dessa ideia, Wild e Pfannkuch (1999) descrevem cinco tipos de pensamento que, segundo eles, têm importância significativa para o ensino de Estatística:

> a) Reconhecimento de dados: muitas situações reais não podem ser examinadas sem a obtenção e a análise de dados recolhidos apropriadamente. A obtenção adequada dos dados é um requisito básico para um julgamento correto sobre situações reais.
> b) Transnumeração: é a mudança de registros de representação para possibilitar o entendimento do problema. Esse tipo de pensamento ocorre quando são encontradas medidas que designam qualidades ou características de uma situação real, cujos dados brutos são transformados em gráficos e tabelas, e os significados e os julgamentos são comunicados de modo a serem corretamente compreendidos por outros.
> c) Consideração de variação: observar a variabilidade dos dados em uma situação real, de modo a influenciar as estratégias utilizadas para estudá-los. Isso inclui tomar decisões que tenham como objetivo a redução da variabilidade, tais como ignorar ou não valores discrepantes ("outliers") ou controlar as fontes de variação e corrigir possíveis erros de medidas.
> d) Raciocínio com modelos estatísticos: refere-se a um pensamento sobre o comportamento global dos dados. Pode ser acessado por meio de um estudo de série temporal, por uma regressão, ou simplesmente por uma análise de um gráfico que represente os dados reais.
> e) Integração contextual da Estatística: é identificada como um elemento fundamental do pensamento estatístico. Os resultados precisam ser

analisados dentro do contexto do problema e são validados de acordo com os conhecimentos relacionados a esse contexto.

Já o raciocínio estatístico para Makar, Bakker, Ben-Zvi (2011) é definido como o modo de os indivíduos raciocinarem com ideias estatísticas e darem sentido à informação estatística, tem subjacente a compreensão conceitual de importantes ideias, como variação, distribuição, centro, dispersão, associação e amostragem ou a combinação de ideias sobre dados e incerteza que conduz à realização de inferências.

3.3 Noções de Estatística abordadas neste trabalho

As medidas-resumo abordadas nesse trabalho foram divididas em medidas de centralidade e de dispersão.

As medidas-resumo de posição ou centralidade são assim chamadas pois podem ser posicionadas literalmente no eixo que representa o conjunto de dados. Dentre elas, destacamos a média, a moda e a mediana.

3.3.1 Média Aritmética $(\bar{x})$

Segundo Bianchini e Paccola (2004),"O quociente da soma de dois ou mais valores pela quantidade de valores observados é chamado de média aritmética [...]", sendo assim um “ponto de equilíbrio” entre eles.

Quando se deseja conhecer a média de dados não agrupados, determina-se a média aritmética simples, que será utilizada neste trabalho. Visando diminuir a quantidade de informações, pode-se representar a média aritmética pelo símbolo $\bar{x}$ e cada elemento do conjunto de dados trabalhados por x_i; a quantidade de elementos por N e, para representar uma soma desses elementos, o sinal do somatório (∑). Com isso, a representação da fórmula para a média aritmética fica:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

3.3.2 Moda (M_o)

De acordo com Tiboni (2010), a "moda é o valor que ocorre com maior

frequência nos dados obtidos numa coleta", resultado esse conhecido como valor modal. Para esse mesmo autor, de acordo com a ocorrência dos valores modais, a série pode ser classificada de cinco maneiras, sendo: amodal, quando não possuir valor modal; unimodal, para um único valor modal; bimodal, para dois valores modais; trimodal, para três valores modais e polimodal, para quatro ou mais valores modais. Para calcular a moda, basta buscar o valor de maior incidência em um conjunto de dados. A moda é a medida de centralidade de maior facilidade de compreenção pelos estudante. Para Watson e Moritz (1999) e Carvalho (2001), é a medida de posição mais utilizada pelos alunos quando precisam escolher entre média, moda e mediana. Para estes autores, a moda deveria ser o primeiro conceito a ser trabalhado com os alunos, por sua baixa complexidade cognitiva. Por outro lado é a medida mais rudimentar dentre as três, sendo útil como um indicador preliminar.

3.3.2 Mediana (M_e)

Para falar de mediana, antes é preciso entender dois conceitos, que são os dados brutos e rol. Dados brutos ou primários são dados que não foram organizados. Por outro lado, recebe o nome de rol o conjunto de dados numéricos que estão organizados de forma crescente ou descrescente. Esses dois conceitos iniciais são de suma importância para a definição de mediana.

Diante disso, Bianchini e Paccola (2004) definem mediana como o valor que divide em duas partes com a mesma quantidade de termos um grupo de valores ordenados. Portanto, “para identificar a posição central, primeiro devemos ordenar os dados e, depois, verificar se a quantidade de elementos do conjunto de dados é ímpar ou par. Se for ímpar, existirá um elemento que dividirá o conjunto em duas partes iguais que representará a mediana”. (Silva 2020)

“Se a quantidade de elementos for par, a mediana será a média dos dois elementos centrais, ou seja, $\frac{x_1+x_2}{2}$ sendo x_1 e x_2 os dois elementos centrais.

A vantagem da mediana em relação à média é a sua robustez, isto é, ela não é influenciável por valores extremos, diferente do que acontece com a média. Além disso, é útil em distribuições assimétricas.” (Silva 2020)

Ainda que seja fácil a compreensão da mediana como termo central, Batanero (2000) afirma que “seu cálculo não é tão simples assim para o aluno, pois seu algoritmo é diferente quando a quantidade de elementos é par ou ímpar. Além disso,

existem diferentes algoritmos que apresentam resultados distintos. Esta situação pode ser um complicador para os alunos que estão acostumados a métodos e resultados únicos em problemas de Matemática.”

Diante disso, Carvalho (1988) apud Batanero (2000) “apresenta alguns erros comuns no cálculo da mediana: obter o termo central sem ordenar os dados e calcular a moda em vez da mediana. A dificuldade dos alunos em ordenar os dados está relacionada com a falta de entendimento de que a mediana é uma medida estatística que se refere essencialmente a um conjunto de dados ordenados, razão pela qual é chamada de estatística de ordem.”

Em resumo, segue um quadro apresentando as vantagens e desvantagens das medidas de centralidade:

Tabela 1 – Tabela Resumo

Medidas de Posição	Vantages	Desvantages
Média	Cada valor do conjunto de dados é importante e considerado.	É influenciada por valores discrepantes.
Moda	Sabe-se que há maior quantidade de valores concentrados nesse ponto.	Não é decisiva para análise estatística de dados.
Mediana	Medida robusta - não sofre influência de valores discrepantes.	Mais difícil de ser determinada quando há muitos dados.

Fonte: Autoria própria.

3.3.4 Medidas de Dispersão

”Quando resumimos dados com medidas de tendência central, sempre perdemos informações sobre o conjunto completo. Para contornar tal perda, precisamos considerar as medidas de dispersão. Segundo Ben-Zvi e Garfield (2008), é difícil imaginar o resumo de um conjunto de dados usando apenas uma medida de centro ou usando apenas uma medida de dispersão. Assim, não faz sentido abordar uma e ignorar a outra. Os autores propõem que no processo de construção do

conceito de média, por exemplo, já se aborde esta medida como um ponto de equilíbrio na distribuição dos dados, permitindo que o aluno perceba a variação dos valores em torno dela. Dois conjuntos de dados podem ter a mesma média e a variabilidade totalmente diferente. A ideia de desvio em torno da média já prepara o estudante para a compreensão das medidas de variação como desvio-padrão, por exemplo, o que será explicado a seguir.” (Silva 2020)

- **Desvio Médio (DM)**

O desvio-médio é uma medida de dispersão obtida pela média dos valores absolutos dos desvios de cada valor em relação à média de todos os valores;

$$DM = \frac{\sum_i |x_i - \bar{x}|}{N}$$

sendo:

x_i: o valor do i-ésimo elemento, i=1,2,...,N;

$\bar{x}$: a média aritmética;

N: o número de valores;

$\sum$: é a somatória.

“A vantagem do desvio-médio em relação à amplitude, máximo menos mínimo, é que seu cálculo leva em conta todos os dados que estão sendo analisados, sendo, portanto, uma medida mais abrangente. Quando comparada ao desvio padrão, tem o benefício de ser mais intuitivo, pois é a média dos desvios absolutos, ou seja, toma estes desvios $|x_i - \bar{x}|$ no sentido de distância euclidiana, já trabalhada com os alunos nas aulas de Geometria. Mas, tem a desvantagem de utilizar a função módulo que, por suas características matemáticas, torna mais difícil o estudo de suas propriedades” (Magalhães e Lima, 2004).

- **Variância (V)**

A variância é uma medida de dispersão obtida pela média dos quadrados dos desvios de cada valor de um conjunto de dados em relação à média dos próprios valores.

$$V = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

“Um inconveniente para a atribuição de significado à variância vem do fato dela ser representada por uma unidade de medida diferente dos dados originais, dificultando assim sua interpretação. Por exemplo, se os dados são expressos em centímetros, a variância será dada em centímetros quadrados. Resolve-se este problema cognitivo extraindo a raiz quadrada da variância, que é denominada desvio-padrão.” (Silva 2020)

- **Desvio-Padrão (DP)**

O Desvio-padrão é a raiz quadrada positiva da variância.

$$DP = \sqrt{V}$$

As contribuições de Reading e Shaughnessy (2004) “nos levam a perceber que a complexidade dos cálculos do desvio-padrão é um obstáculo, para que o professor possa motivar os alunos para tal medida, pois ela exige que o estudante agrupe diversos conceitos como média, desvio, potência, raiz quadrada e fração. A compreensão desta medida não é intuitiva, e é difícil interpretá-la, pois é de natureza complexa, apesar de ser a medida de variabilidade mais comumente utilizada.”

A pesquisa de Meletion (2000) também confirma esta constatação, pois “dentre as medidas de dispersão trabalhadas pela autora, o desvio-padrão foi a que os alunos apresentaram maior dificuldade”. Da mesma forma, Ben-Zvi e Garfield (2008) afirmam que, “normalmente, o alunos aprendem a definição do desvio padrão e como ele é calculado, mas raramente entendem de modo claro o significado desta medida e como interpretá-la”.

Quando se pretende construir um conceito, é preciso ir além das fórmulas, dos cálculos e dos exercícios de aplicação de procedimentos, sendo indispensável dar ênfase ao significado do conceito visado. Para tal compreensão, Demas e Liu (2005) “conjecturam ser necessária a coordenação de outros conceitos estatísticos subjacentes, a partir dos quais o desvio padrão é construído, ou seja, é preciso mobilizar a noção de distribuição, de média e de desvio em torno da média”.

O conceito de distribuição requer a mobilização dos valores assumidos pela variável e de suas frequências. Portanto, a visualização gráfica facilita a compreensão da distribuição. É importante entender a média como um ponto de equilíbrio entre os dados e, finalmente, perceber os desvios de cada dado em relação à essa medida. Desta forma, notamos a importância de se trabalhar a visualização dos dados em

representações gráficas e a exploração do significado da média, para a abordagem do desvio padrão.

Conforme relata Meletion (2000), “muitos alunos associam variabilidade com variedade, com multiplicidade de valores, com diferença entre os dados, etc.” Silva (2007) “pesquisou livros didáticos e identificou que quase todos os analisados sugerem a interpretação do desvio padrão como uma medida de homogeneidade do grupo”. Segundo Loosen, Lioen e Lacante (1985) apud Silva, (2007), “os livros didáticos enfatizam a heterogeneidade entre as observações e não a heterogeneidade em relação à tendência central”.

“A média é essencial na definição do desvio padrão e quando abordamos a variabilidade, estamos preocupados em estudar uma determinada medida de dispersão em torno da qual existe ou não variação. Portanto, interpretar desvio-padrão como homogeneidade/heterogeneidade, concentração/dispersão, sem se referir ao valor em torno do qual ocorre a variação, pode levar os alunos a interpretações equivocadas das medidas de variabilidade.” (Silva 2020)

3.4 Triângulo de Pascal

3.4.1 Um pouco sobre a história

No decorrer da História, o Triângulo Aritmético ficou conhecido por vários nomes, como exemplo, na China o chamavam de Yang Hui, na Itália de triângulo de Tartaglia, em outras regiões de Tartaglia-Pascal e de triângulo combinatório. Porém, a denominação mais famosa pela qual o Triângulo Aritmético ficou conhecido foi dada pelos franceses, sendo chamado de Triângulo de Pascal. Homenagem justa ao homem que dedicou muito tempo e esforço para conhecer e demonstrar as propriedades desse triângulo. Na maioria dos livros didáticos no Brasil e é conhecido com Triângulo de Pascal.

Segundo Affonso (2014), “dois mil anos antes de Pascal trabalhar no Triângulo Aritmético, este já era objeto de estudo na Índia. Os indianos estudavam vários temas matemáticos, dentre eles, destacava-se o estudo de combinatória.

Logo mais tarde foram lançados os primeiros livros com técnicas combinatórias, mas é só com o sábio Pingala (200 a.C.), quase 2000 anos antes de Pascal, em sua obra "Chandra Sutra", que aparece, pela primeira vez, o Triângulo Aritmético. Aqui vale ressaltar que Silva (2015) descreve que os primeiros registros do triângulo aritmético são concedidos ao Matemático indiano Pingala, que viveu por

volta de 200 a.C., o que nos induz a dizer que esse assunto já era instrumento de análise na Índia, dois mil anos antes de Pascal trabalhar no Triângulo Aritmético.

Para Affonso (2014), os indianos estudavam vários temas matemáticos, dentre eles, ressaltava-se o estudo de combinatória, assunto este que teve suas técnicas justapostas a vários outros estudos.”

Desta maneira, Silveira (2001) menciona que “Pingala, ao estudar as métricas musicais na versificação, observou que a expansão das métricas, sucessivamente, de uma, duas, três, ou várias silabas, podia ser disposta na forma de um triângulo. A técnica usada por Pingala para construir o triângulo é descrita por ele a seguir:

> Desenhe um quadrado; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que juntem-se no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. Vamos enumerar os quadrados começando pelo primeiro que foi contruído e nos da segunda linha com o número um. Na terceira linha escreva 1 nos quadrados dos extremos, e no do meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda fornece as combinações com uma sílaba, a terceira fornece as combinações com duas sílabas e assim por diante (Silveira, 2001).”

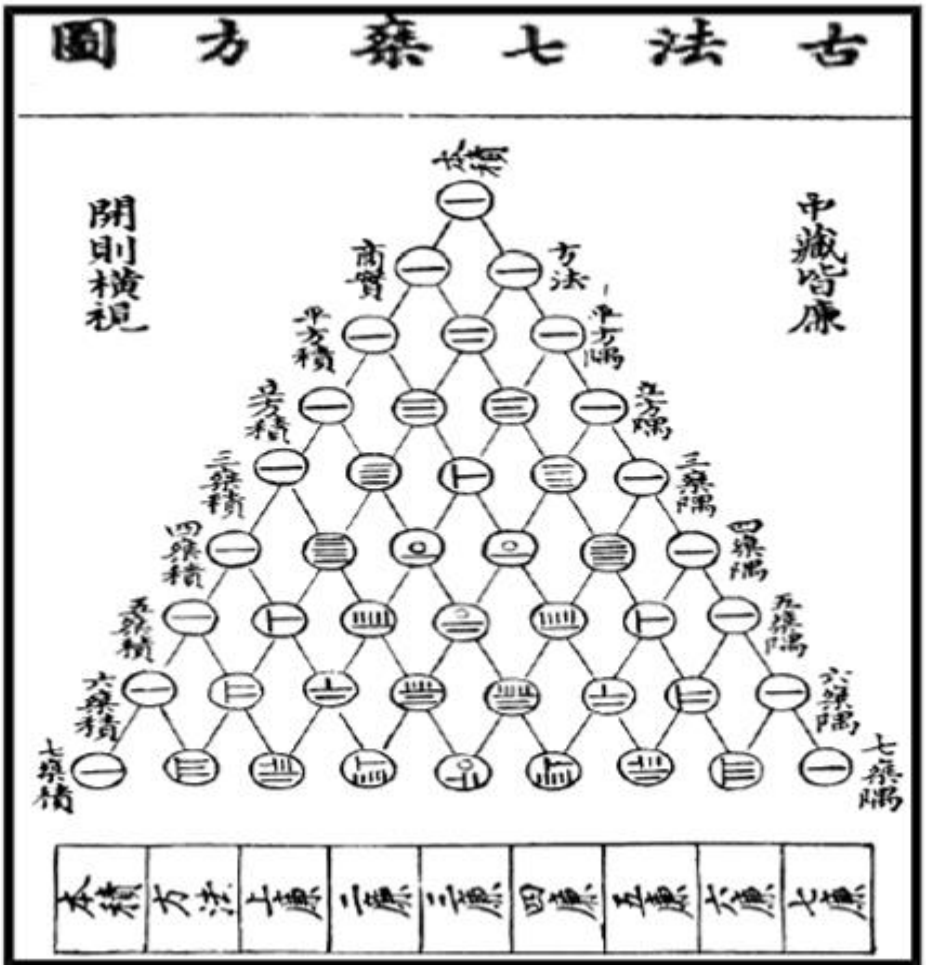
Figura 1 – Triângulo Aritmético de Pingala

*Fonte: Site Archive (*https//archive.org/details/ChhandraSutra-Pinga)

Também vale mencionar que o matemático chinês mais famoso por estudar o

Triângulo Aritmético foi Yang Hui (1238-1298), que escreveu dois livros nos quais buscava compreender as propriedades do Triângulo Aritmético, chegando inclusive a ilustrar o belíssimo Triângulo a seguir, que foi usado pelo matemático Zhu Shijie (1260-1330) em 1330 no seu livro "Precioso espelho dos quatros elementos".

Figura 2 – Triângulo Aritmético de Yang Hui.



*Fonte: Wikipedia (*https//en.wikipedia.org/wiki/File:Yanghuitriangle)

Ainda sobre os primórdios do Triângulo Aritmético, Affonso (2014) descreve que no universo islâmico, o Triângulo Aritmético teve sua origem decorrente de uma junção de livros indianos.

Segundo Affonso (2014), “o mais famoso matemático islâmico a estudar o Triângulo Aritmético foi al Samaw'al (1130-1180), que escreveu o tratado "A deslumbrante Álgebra", onde corrigiu e aperfeiçoou o trabalho de seus antecessores sobre o Triângulo Aritmético e o Binômio de Newton.

Nesta obra, al Samaw'al atribui o Triângulo Aritmético a Al-Karaji (953-1029), que em 1007, em suas obras sobre álgebra "O al Fakhri" e "O al Badi" utilizou o

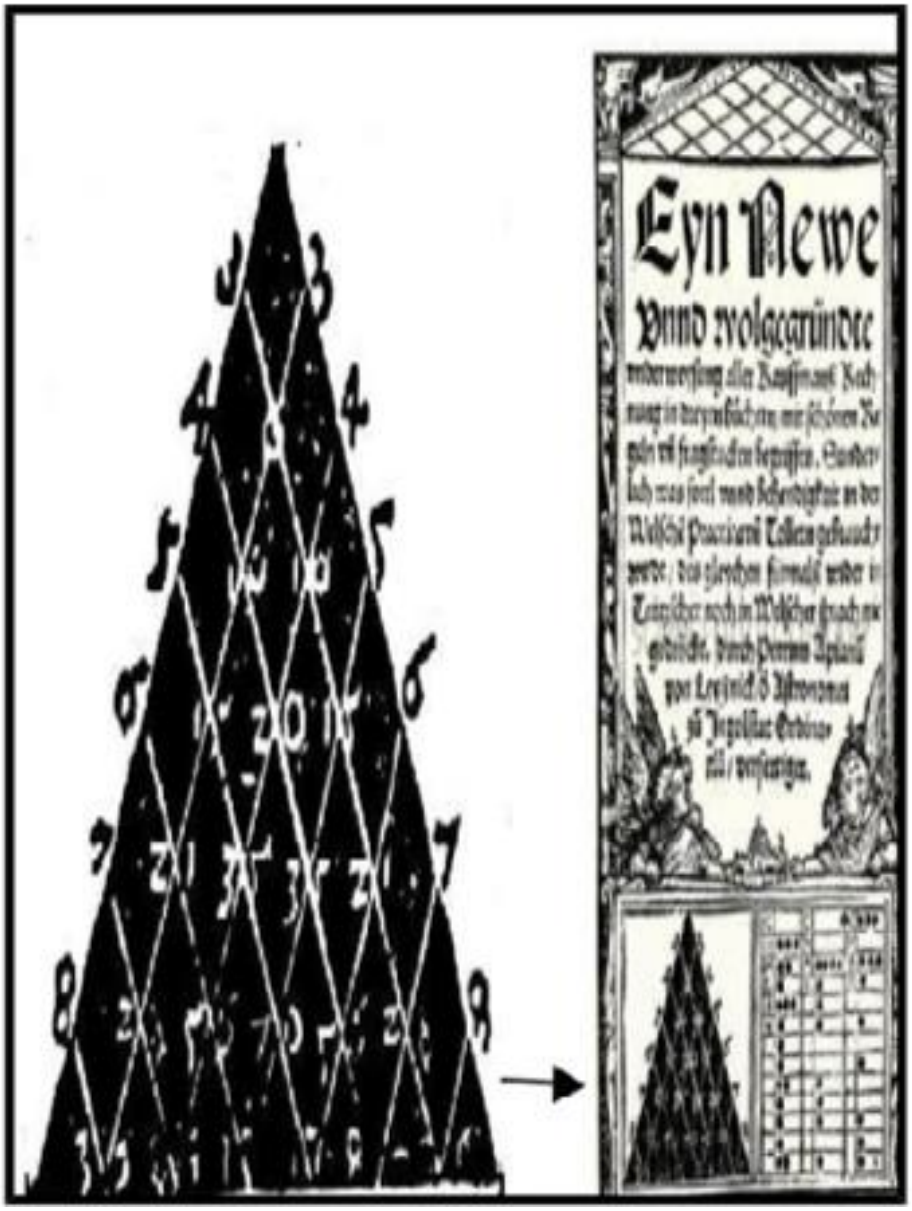
Triângulo Aritmético para conseguir o desenvolvimento de potências quádricas, cúbica e quárticas de binômios. O autor também demonstrou por indução matemática a validade do Binômio de Newton e desenvolveu o Triângulo Aritmético” até a décima segunda linha, a seguir:

Figura 3 – Triângulo Aritmético de al Samaw’al.

Fonte: Culturemath (http://matematica-na-veia.blogspot.com/2010/02/historia-do-triangulo-aritmeticoparte.html)

Em 1527, foi publicado o livro intitulado "Kauffmanns Rechnung”, pelo matemático alemão Apianus (1495-1551), que se tratava de uma obra de aritmética comercial. Nesta obra, o Triângulo Aritmético aparece no canto inferior esquerdo de uma das páginas. Segundo Boyer (1996, pg. 205), é a primeira impressão do Triângulo Aritmético na Europa.

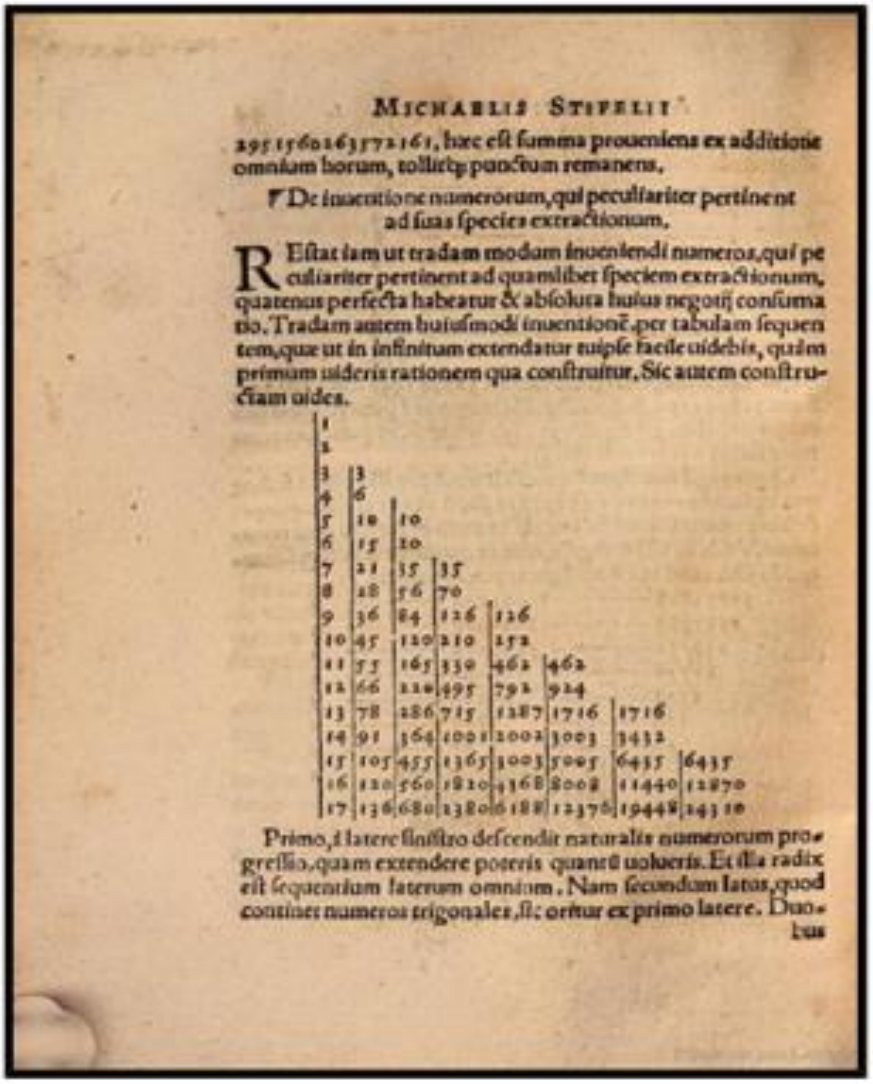
Figura 4 – Triângulo Aritmético de Apianus.



Fonte: Digitale (https://download.digitale-sammlungen.de/pdf/1392744022bsb11110160.pdf)

Mas o proclamador do Triângulo Aritmético na Europa foi o matemático Michel Stifel (1487-1567), que explorou algumas propriedades deste triângulo e as pleiteou em sua obra "Arithmetica Integra", de 1544 (Affonso, 2014).

Figura 5 – Triângulo Aritmético de Stifel.



MICHAELIS STIFELII

295156016357216 1, hæc eſt ſumma proueniens ex additione omnium horum, tollitq; punctum remanens.

De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad ſuas ſpecies extractionum.

REſtat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet ſpeciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & abſoluta huius negotij conſumma tio. Tradam autem huiuſmodi inuentionē per tabulam ſequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuiplē facile uidebis, quām primum uideris rationem qua conſtruitur. Sic autem conſtructam uides.

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

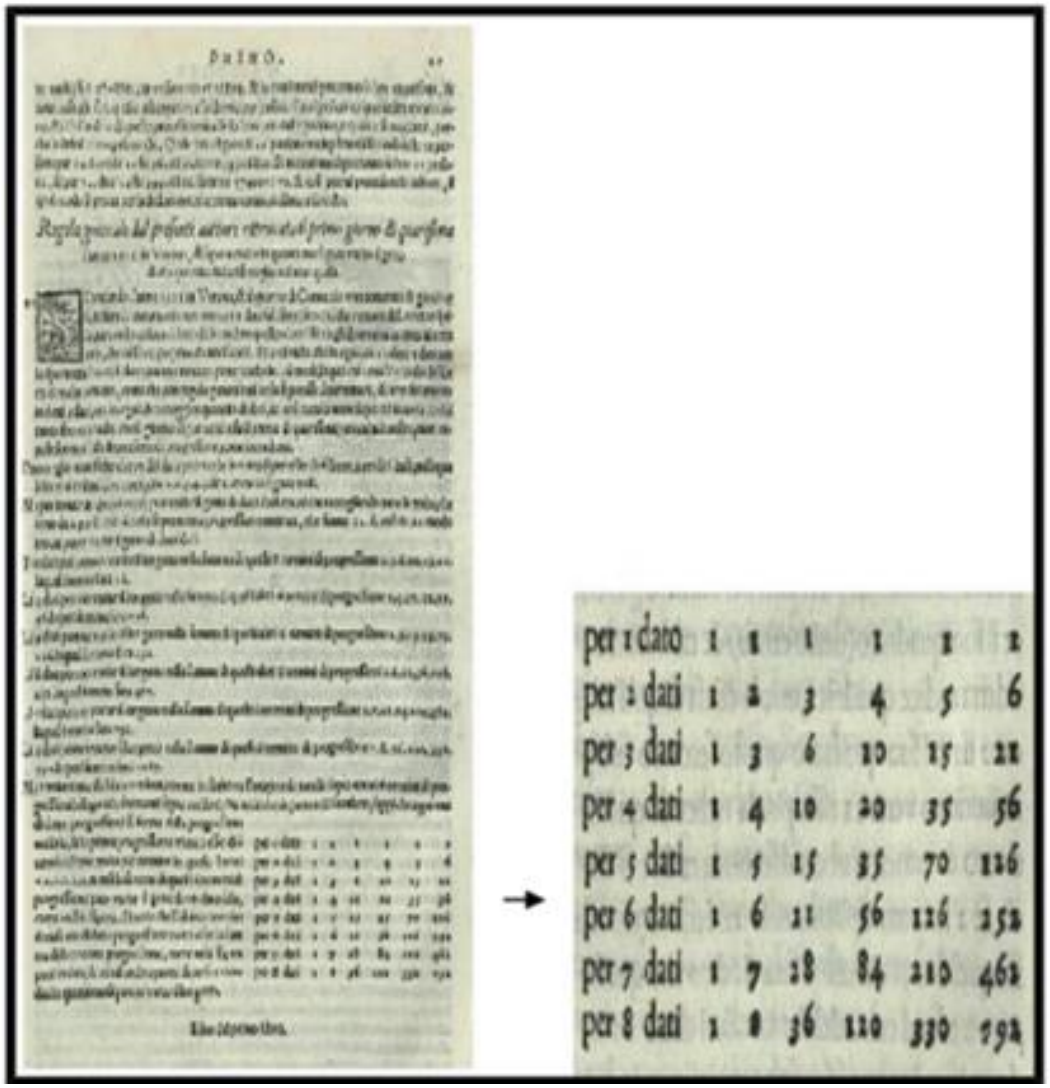
Primo, à latere ſiniſtro deſcendit naturalis numerorum progreſſio, quam extendere poteris quantū uoluerīs. Et illa radix eſt ſequentium laterum omnium. Nam ſecundum latus, quod continet numeros trigonales, ſic oritur ex primo latere. Duo-

lus

Fonte: E-rara (www.e-rara.ch/zut/wihibe/content/pageview/3042371)

Segundo Affonso (2014), “na Itália, o matemático mais influente a dedicar-se a compreender e divulgar o Triângulo foi Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1559), que apresentou suas descobertas em sua obra "General Trattato di numeri et misure", de 1556. Tartaglia reivindicou para si a invenção do Triângulo Aritmético. Como consequência, alguns países europeus conhecem o Triângulo Aritmético como Triângulo de Tartaglia".

Figura 6 – Triângulo Aritmético de Tartaglia.



Fonte: bvpb (http://bvpb.mcu.es/es/consulta/resultadosbusqueda.cmd?posicion=6&forma=ficha&id=2245)

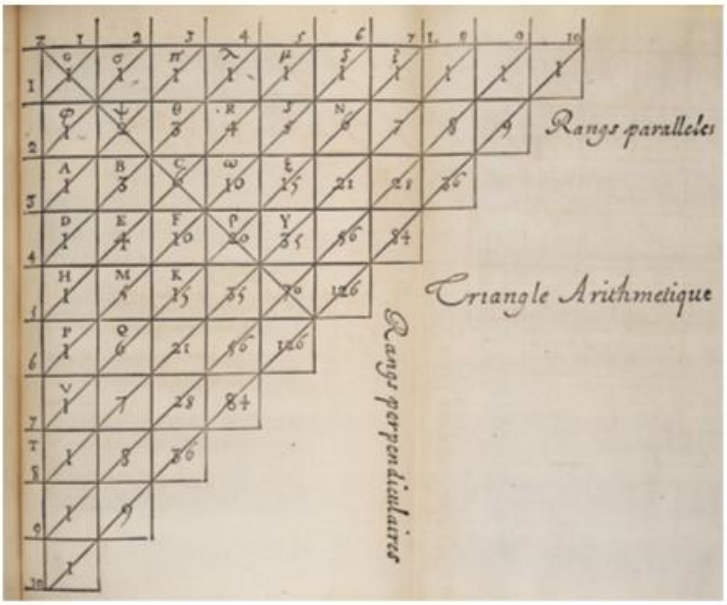
Para Silva (2015), “o Triângulo de Pascal adquiriu esse nome graças ao matemático, físico, filósofo e escritor francês Blaise Pascal (1623-1662), que apresentou significativas aplicações matemáticas ao Triângulo Aritmético. Sua dedicação resultou na obra "Traité di Triangle Arithmétique", publicada postumamente em 1665.”

Figura 7 – Traité di Triangle Arithmétique, obra de Pascal

Fonte: Matemática na veia (http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/02/historia-do-Triângulo-aritmeticoparte.html.)

Em "Traité di Triangle Arithmétique", Pascal chamou de Triângulo Aritmético uma figura que se constrói da seguinte maneira. De um ponto G, qualquer, desenho duas retas GV e GS, uma perpendicular à outra, e, sobre cada uma dessas, tomo tantas partes próximas iguais que se queira, começando em G, nomeando-as 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente; esses números são os expoentes das divisões da reta.

Figura 8 – Construção do Triângulo, segundo Pascal.

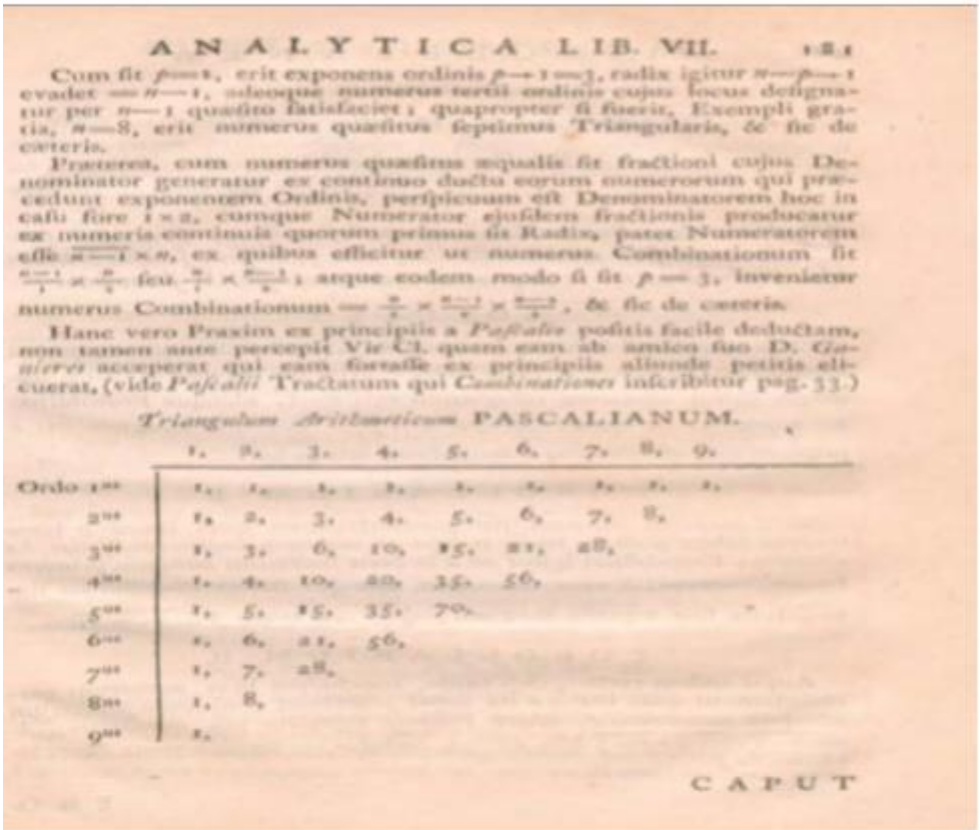


Fonte: Matemática na veia (http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/02/historia-do-Triângulo-aritmeticoparte.html.)

Affonso (2014) “finaliza descrevendo que após inúmeras observações e demonstrações, Pascal publica os seguintes títulos "Às ordens numéricas", "As combinações", "Para determinar as partes que cada jogador deve receber quando dois jogadores fazem várias partidas" e "Para achar as potências de binômios e de apótomos" (diferença entre duas razões incomensuráveis).

A validação da titulação "Triângulo de Pascal" realiza-se em 1730, ano em que Abrahan de Moivre (1667-1754), em sua marcante e influente obra "Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis (1730)," usou a titulação "Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM" para dar referência ao Triângulo Aritmético. A datar-se dessa obra, o Triângulo Aritmético fica famoso com a denominação "Triângulo de Pascal”.

Figura 9 – Declaracao de De Moivre "Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM


ANALYTICA LIB. VII. 181

Cum sit $p=1$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p-1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus designatur per $n-1$ quæsito satisfaciet; quapropter si fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæsitus septimus Triangularis, & sic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæsitus æqualis sit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perspicuum est Denominatorem hoc in casu fore 1×2, cumque Numerator ejusdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus sit Radix, patet Numeratorem esse $\overline{n-1} \times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum sit $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$ seu $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$; atque eodem modo si sit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $= \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, & sic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Pascalio* positis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico suo D. *Gaviero* acceperat qui eam forsan ex principiis aliunde petitis elicuerat, (vide *Pascalii* Tractatum qui *Combinationes* inscribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Ordo 1mus	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
2dus	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
3tius	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.		
4tus	1.	4.	10.	20.	35.	56.			
5tus	1.	5.	15.	35.	70.				
6tus	1.	6.	21.	56.					
7mus	1.	7.	28.						
8vus	1.	8.							
9nus	1.								

CAPUT

Fonte: E-rara (http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1256109.)

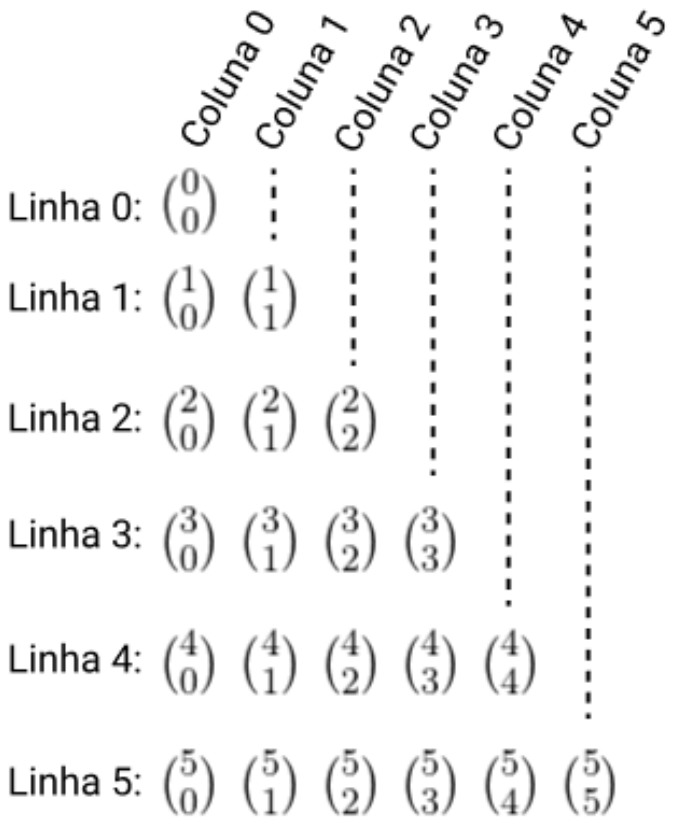
De acordo com Rosadas (2016), “o grande Blaise Pascal exibe uma obra científica desmembrada e infelizmente incompleta, mostrando exuberantemente seu genialismo. Seus substitutos, se tal termo pode ser usado, como por exemplo Leibniz, exploravam essas obras fascinados. Pascal foi, sem hesitar, o grandioso da história

matemática e um dos vínculos valorosos no progresso da Matemática, descreve Ruiz (2010).”

3.4.2 Algumas Propriedades do Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números relacionados entre si. Ele dispõe os números binomiais em uma tabela, onde os coeficientes binomiais de mesmo numerador ocupam a mesma linha e, os de mesmo denominador ocupam a mesma coluna. Assim, a linha representa todos os coeficientes desde $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$. A seguir representamos o Triângulo Aritmético de Pascal com os respectivos coeficientes binomiais:

Figura 10 – Construção do Triângulo de Pascal



Fonte: Matemática Básica (https://matematicabasica.net/triangulo-de-pascal)

Diante disso, veremos as propriedades do Triângulo de Pascal que facilitam sua construção e determinamos os números binomiais sem a necessidade de calcular todos eles.

Giovanni (2015) “destaca cinco propriedades no Triângulo de Pascal:

1ª Propriedade: Todos os elementos da 1ª coluna são iguais a 1, pois $\binom{n}{0} = 1$.

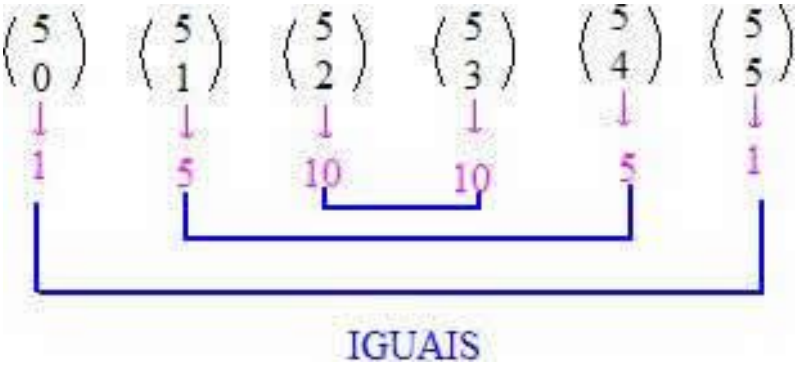
$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\ (n-0)!} = \frac{n!}{0!\ n!} = 1, pois\ 0! = 1$$

2ª Propriedade: O último elemento de cada linha é igual a 1, $\binom{n}{n} = 1$.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\ (n-n)!} = \frac{n!}{n!\ 0!} = 1, pois\ 0! = 1$$

3ª Propriedade: Em uma linha qualquer, dois termos binomiais, equidistantes dos extremos, são iguais. Observe a imagem a seguir:

Figura 11: coeficientes complementares

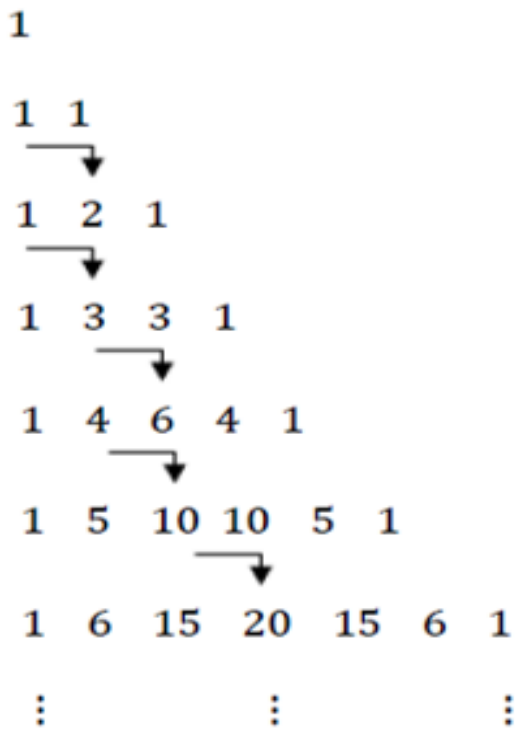


Fonte: Brasil Escola (https://brasilescola.uol.com.br/matematica/propriedades-Triângulo-pascal.htm)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\ [n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}$$

4ª Propriedade: A partir da segunda linha, e com exceção do primeiro e do último elemento de cada linha, cada elemento do triângulo de Pascal é igual à soma do elemento imediatamente superior a ele com o elemento anterior a este, como mostra a figura a seguir. Esta é a relação de Stifel.

Figura 12: Relação de Stifiel



Fonte: Brasil (https://brasilescola.uol.com.br/matematica/propriedades-Triângulo-pascal.htm)

De modo geral: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, para n ≥ 2, relação de Stifel.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

5ª Propriedade: A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2, cujo expoente é igual ao numerador desses números binomiais.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

A demonstração será feita por indução.

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Se n = 0 temos $S_0 = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$.

Para n = 1 temos $S_1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1$.

Suponhamos então que o resultado é válido para todo n = 1,...,k. Vamos mostrar que o mesmo é válido para n = k + 1, ou seja, mostraremos que:

$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \ldots \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}$.

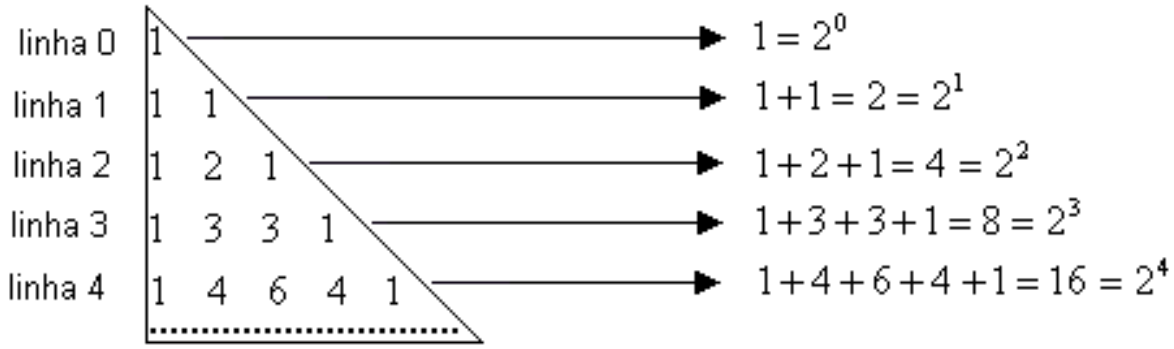
Temos que $\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \ldots \binom{k+1}{k+1}$. Aplicando a relação de Stifel, nas parcelas da soma que estão entre a primeira e a última parcela, e utilizando o fato de que $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$, tem se

$$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} + \binom{k}{k}.$$

Reescrevendo, $S_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k}$.
Ou seja, $S_{k+1} = 2S_k$ e como por hipótese de indução vale que $s_k = 2^k S_k$ concluímos que $S_{k+1} = 2\ x\ 2^k = 2^{k+1}$. Assim a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$." (Giovanni 2015)

Esquema demostrativo:

Figura 13: Teorema das linhas



Fonte: Só Matemática (https://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio3.php)

Rosadas (2016) destacas outras propriedades além das citadas, como:

"6ª Propriedade: A soma dos elementos de qualquer coluna, a partir do 1º elemento até um qualquer é igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha imediatamente abaixo, ou seja, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\forall p \in \mathbb{N}$, é possível afirmar que:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \ldots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Aplicamos a relação de Stifel aos elementos da coluna p + 1, a partir da linha p + 2. Temos:

$$\binom{p+2}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p}$$
$$\binom{p+3}{p+1} = \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p}$$
$$\binom{p+4}{p+1} = \binom{p+3}{p+1} + \binom{p+3}{p}$$

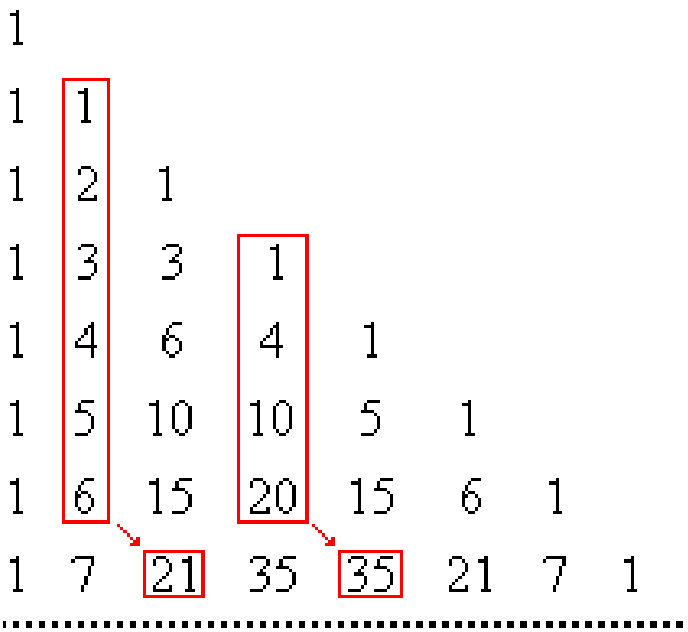
Então $\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p+n}{p+1} + \binom{p+n}{p}$.

Fazendo a soma de todas as relações escritas acima e simplificando as parcelas iguais que aparecem em lados opostos da igualdade temos que

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \ldots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

Esquema demonstrativo:

Figura 14: Propriedade das Colunas



Fonte: Só Matemática (https://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio3.php)

7ª Propriedade: A soma dos elementos localizados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até o de uma qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo deste último, ou seja, $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$.

Demonstração.

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n};\ \binom{n+1}{1}=\binom{n+1}{n};\ \binom{n+2}{2}=\binom{n+2}{n},\ldots,\binom{n+p}{p}=\binom{n+p}{n}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n},\ldots,\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}$$

Pelo teorema das colunas, 6ª. Propriedade, sabemos que:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

E, pelo teorema dos binomiais complementares, temos:

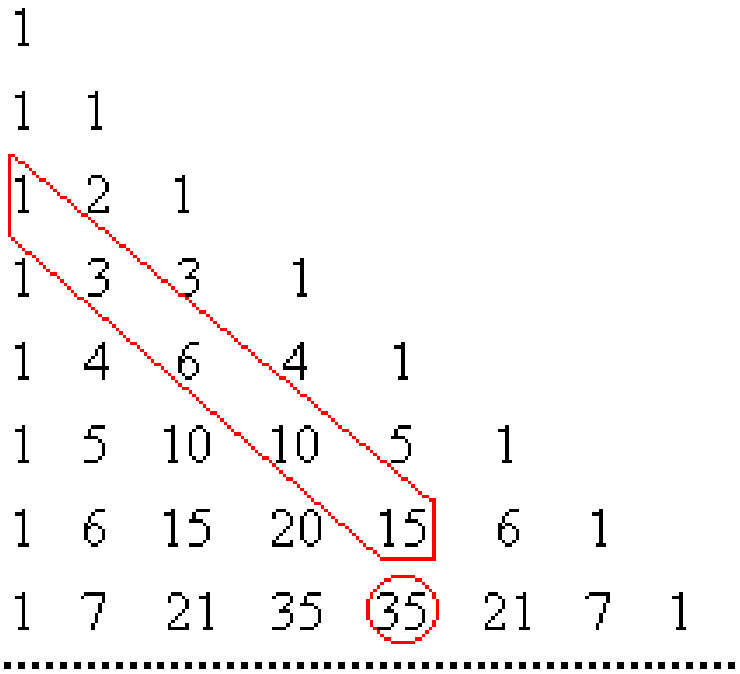
$$\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p}$$

Assim, comcluímos que:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p}$$

Esquema Demonstrativo:

Figura 15: Propriedade das diagonais

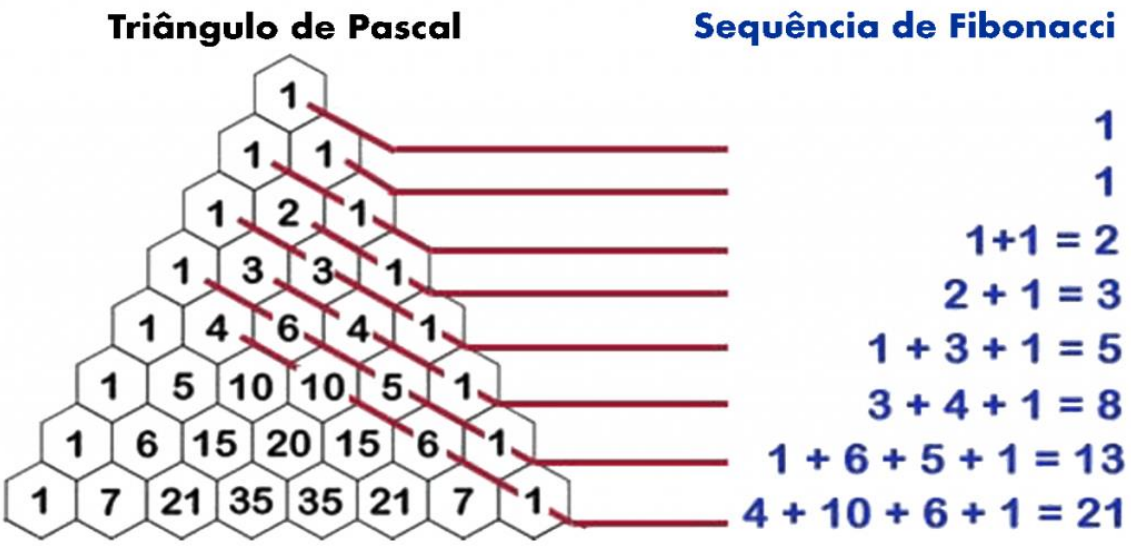


Fonte: Só Matemática (https://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio3.php)

> 8ª Propriedade: A sequência de Fibonacci é uma sequência de números inteiros que começa no número 1, e cada termo subsequente equivale à soma dos dois termos anteriores. Tal sequência pode ser escrita de forma recursiva: $\mathrm{F_{n+2,}} = \mathrm{F_{n+1}} + \mathrm{F_n}$ que gera a sequência $F_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$". (Rosadas 2016)

Segundo Morgado (2006), "o número de Fibonacci F_n também aparece no Triângulo de Pascal, que pode ser observada quando se somam os elementos da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal."

Figura 16: Sequência de Fibonacci



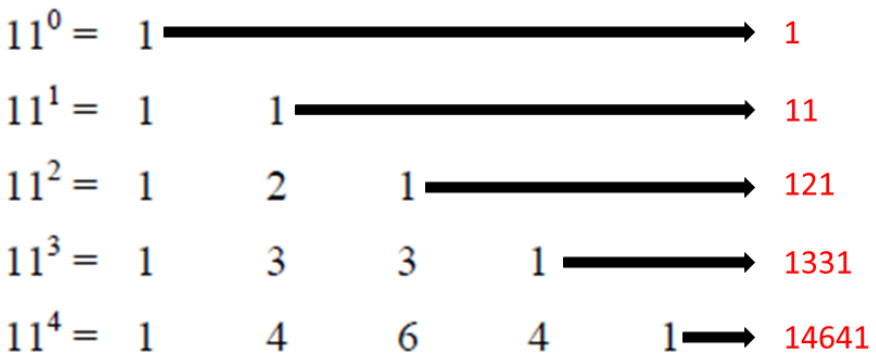
Fonte: Azup (https://matematicazup.com.br/sequencia-de-fibonacci/)

9ª Propriedade: A relação de Fermat, $\binom{n}{k}.\frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k+1}$, cuja demonstração encontra-se a seguir, permite o cálculo de cada elemento da linha do Triângulo de Pascal com base no elemento anterior. Também permite o cálculo dos coeficientes do desenvolvimento do tipo $(x+a)^n$, onde cada coeficiente tem uma relação direta com o coeficiente anterior.

$$\binom{n}{p}.\frac{n-p}{n+p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.\frac{n-p}{p+1} = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \binom{n}{p+1}.$$

10ª Propriedade: “No estudo de potências, alguns números apresentam propriedades específicas. No nosso estudo, apresentaremos uma particularidade que está intimamente ligada ao Triângulo de Pascal. É possível obter as potências de base 11 neste triângulo.

Figura 17: Potência de 11.



Fonte: Autoria própria

Observamos que por exemplo, o número 7251 pode ser escrito como:

$$7251 = 1.10^0 + 5.10^1 + 2.10^2 + 7.10^3$$

A n-ésima linha do Triângulo de Pascal pode ser escrita como:

$$\psi = \binom{k-1}{0}\binom{k-1}{1}\binom{k-2}{2}\cdots\binom{k-1}{k-2}\binom{k-1}{k-1}$$

O número ψ pode ser escrito como foi feito anteriormente (7251).

$$\psi = \binom{k-1}{k-1} x\ 10^0 + \binom{k-1}{k-2} x\ 10^1 + \ldots + \binom{k-2}{2} x\ 10^{k-3} + \binom{k-1}{1} x\ 10^{k-2} + \binom{k-1}{0} x\ 10^{k-1}.$$

Utilizando Binômios de Newton, que serão apresentados na próxima seção, temos

$$(10+1)^{k-1} = \binom{k-1}{0}.10^{k-1}.1^0 + \binom{k-1}{1}.10^{k-2}.1^1 + \binom{k-1}{2}.10^{k-3}.1^2 + \ldots + \binom{k-1}{k-2}.10^1.1^{k-2} + \binom{k-1}{k-1}.10^0.1^{k-1}$$ que é igual a ψ."(Silva 2020)

3.4.3 Binômio de Newton

Segundo Miranda (2016), “o binômio foi definido por Newton e trata- se de um estudo que veio para complementar o estudo de produto notável.

O estudo de Binômio de Newton engloba:

- Coeficientes Binomiais e suas propriedades;
- Triângulo de Pascal e suas propriedades;
- Fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton.”

Para Boyer (1991), “o teorema binomial, aperfeiçoado em 1664 ou 1665, foi descrito em duas cartas de 1676 de Newton a Henry Oldenburg, então secretário da

Royal Society, e publicado por Wallis (dando crédito a Newton).”

De acordo com Travello (2013), “a grande relação que existe entre Álgebra e Análise Combinatória é que no desenvolvimento dos chamados binômios, $(a+b)^n$, onde a, b são números reais e n um número natural, os binômios aparecem naturalmente como coeficientes multiplicadores nesta expansão, de forma que:”

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^{n-k} b^k$$

Tognato II (2013) considera que “o Binômio de Newton é um dos temas mais elegantes da História da Matemática. Sabe-se que esta ferramenta envolve grande dificuldade na aprendizagem proposta no ensino básico, porém a sua importância e utilidade são claras e notórias nos ramos fundamentais da Matemática Moderna.

Ainda segundo o autor, na realidade, o Binômio era conhecido como Teorema Binomial e tratava-se de um desenvolvimento algébrico que teve seu início muito antes da época de Newton, mas somente ele conseguiu tomar plena posse desta ferramenta e de toda sua abundante elegância e potencialidade.

O autor destaca ainda, que é necessário lembrar que a Matemática ao longo da história nunca se formatou de forma instantânea, e sim sempre foi moldada aos pedaços, com diversas colaborações de grandes matemáticos. Assim, foi com as Equações Algébricas, Geometria Analítica, o Cálculo e outros. No caso do Binômio de Newton, foi objeto de estudo por vários matemáticos como Chu Shi-Kié, em 1303 e Blaise Pascal em 1623, os quais foram notáveis percussores e com esse estudo permitiram que Newton pudesse desenvolver seu Binômio.

Para Tognato II (2013), o Triângulo de Pascal é um agrupamento de números escritos em formato triangular, no qual a n-ésima linha representa os coeficientes binomiais da expansão binomial algébrica de $(a+b)^n$, onde n é um número natural qualquer. A fama do nome Triângulo de Pascal deve-se ao fato de que Blaise Pascal foi o primeiro que montou o triângulo de forma explícita, em função dos binomiais, com arranjos bem claros do verdadeiro significado do Triângulo Aritmético.”

Segundo Silva (2009), “no Ensino Fundamental a álgebra é trabalhada de forma sistemática, procurando demonstrar todos os conceitos e propriedades existentes como o quadrado da soma indicada, quadrado da diferença indicada, cubo da soma indicada, cubo da diferença indicada, os quais são abordados de forma abrangente. Segundo o autor, há necessidade de conhecimentos prévios do Ensino Fundamental, que são decisivos e importantes para os estudos do binômio no

segundo ano do Ensino Médio, sendo o referido assunto necessário para vestibulares.”

Utilizando os produtos notáveis estudados no ensino fundamental, temos:

$(x+a)^0 = 1$,

$(x+a)^1 = 1x + 1a$,

$(x+a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2$,

$(x+a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$.

Observando os coeficientes dos desenvolvimentos, percebemos que eles formam as primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

Figura 18: Coeficiente Binomial.

$(x+a)^0 = 1$	$B_{0;0} = 1$
$(x+a)^1 = 1x + 1a$	$B_{1;0} = 1$ $B_{1;1} = 1$
$(x+a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2$	$B_{2;0} = 1$ $B_{2;1} = 2$ $B_{2;2} = 1$
$(x+a)^3 = 1x^3 + 3a^2x + 3ax^2 + 1a^3$	$B_{3;0} = 1$ $B_{3;1} = 3$ $B_{3;2} = 3$ $B_{3;3} = 1$

Fonte: Autoria própria.

As seguintes proposições se usam para determinar os coeficientes do Binômio de Newton $(a+b)^n$ através dos elementos $B_{n;p}$.

Qualquer coeficiente do desenvolvimento do Binômio de Newton $(x+a)^{n+1}$ do tipo $B_{n+1;p+1}$ pode ser determinado através da soma $B_{n;p+1} + B_{n;p}$, ou seja, $B_{n+1;p+1} = B_{n;p+1} + B_{n;p}$:

Demonstração.

Ao determinar o desenvolvimento do binômio $(x+a)^{n+1}$, sem perda de generalidade, usaremos $a = 1$. Pela propriedade distributiva, temos $(x+a)^{n+1} = (x+a)\,.\,(x+a)^n$.

Como a soma de cada diagonal nos oferece um coeficiente do binômio, temos que a soma de $B_{n;p}$ e $B_{n;p+1}$ será o coeficiente de $x^{(p+1)}$ no binômio $(x+1)^{n+1}$, ou seja, $B_{n+1;p+1}$ por definição. Logo, temos que:

$$B_{n+1;p+1} = B_{n;p+1} + B_{n;p}$$

Como consequência, podemos determinar a relação entre os elementos do

Triângulo de Pascal e os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton.

4. Fudamentação Metodológica do Projeto

4.1 Introdução

A aplicação do presente projeto foi realizada com alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio do período matutino de um escola estadual do município de Osasco. Um dos motivos da escolha da referida escola foi o plano de aula da disciplina Matemática, que contribuí para a pesquisa, além disso, a unidade de ensino já produz alguns projetos, como Iniciação Cientifica, Mostra de cinema, entre outros.

“Este estudo foi pautado em uma estratégia de pesquisa qualitativa, de caráter exploratório, através das atividades que foram aplicadas em etapas para os estudantes da educação básica por meio de animações, de própria autoria. Para Bogdan e Biklen (1994), “na pesquisa qualitativa, a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal”. Nesse sentido, uma das intenções desse trabalho consiste em fazer com que o professor investigador realize a pesquisa no ambiente em que os alunos se encontram inseridos naturalmente, através de três etapas de atividades a serem realizadas em turmas regulares do ensino médio. Segundo os autores, “as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência”. O investigador, por sua vez, desempenha um papel importante nesse processo, visto que ele é responsável pelo questionamento com os alunos, buscando maior percepção do raciocínio dos mesmos. Ou seja, mais importante do que o resultado e produto final, essa pesquisa preocupa-se em analisar o processo de aprendizagem dos estudantes frente aos conceitos abordados, através das atividades propostas com as animações de própria autoria.” (Silva 2020) Desse modo, “as abstrações vão sendo construídas a partir dos dados e as experiências obtidas ao longo da investigação, ou seja, os dados, são analisados de forma indutiva (Bogdan; Biklen, 1994).”

“Como a atividade de pesquisa é empreendida no intuito de descobrir e construir novos conhecimentos, para tal é necessário desenhar ou projetar o caminho a ser seguido, uma vez que cada caminho poderá levar o investigador a alcançar diferentes resultados, devendo assim avaliar as restrições e oportunidades colocadas pelo contexto dentro do qual pretende trabalhar.” (Silva 2020)

“Desing de pesquisa é o mapa, o caminho e seus respectivos contornos, que, a partir de uma questão ou foco, norteará a investigação e o alcance dos objetivos traçados previamente” (Merriam, 1998; Godoy, 1995).

O termo Design-Based Research foi utilizado nos anos 90 pelos pesquisadores Ann Brown (1992) e Alan Collins (1992) “para referirem-se a uma metodologia de pesquisa em Educação que se predispõe a:

- resolver problemas complexos em contextos reais, em colaboração com os professores;
- realizar investigação rigorosa e reflexiva para testar e aperfeiçoar ambientes de aprendizagem inovadores.”

“Os projetos de pesquisa que têm o "Design-Based Research" como metodologia visam aumentar radicalmente a relevância da pesquisa para a prática, envolvendo os sujeitos de pesquisa em diferentes papéis durante todo o processo de investigação.” (Silva 2020) Para Kelly e Lesh (2020), “estudantes, professores, cursos, currículos, materiais didáticos e mentes são sistemas complexos, que não devem ser observados isoladamente, pois quando isso ocorre, a observação corre o risco de deixar o conjunto – “ecologia de aprendizagem” – defasado.” Esse conjunto citado por Lesh (2003) “é dinâmico, interativo, auto regulável e permanece em adaptação contínua durante todo o processo, pois cada feedback produz efeitos que direcionam as próximas intervenções.” Segundo Cobb et al. (2003), “são cinco as características do "Design-Based Research":

> - desenvolve teorias tanto sobre o processo de aprendizagem quanto sobre os materiais que são utilizados para dar suporte à aprendizagem;
> - considera a existência de uma natureza intervencionista que objetiva investigar possibilidades de novas formas de aprendizagem visando mudanças educacionais;
> - envolve a revisão contínua do "design" do projeto que se mostra flexível, uma vez que há um conjunto de tentativas iniciais que são revistas em função do seu sucesso na prática, ou seja, essa metodologia tem dois aspectos: o prospectivo e o reflexivo. Assim, o pesquisador interage no sistema continuamente dotando-o de um movimento cíclico. Como consequência, no "Design-Based Research" existem momentos de "redesign";
> - quebra a visão tradicional em que pesquisador, professores e alunos desempenham papéis fixos no processo;
> - é pragmático, pois as teorias que envolvem as atividades estão relacionadas a um domínio específico.”

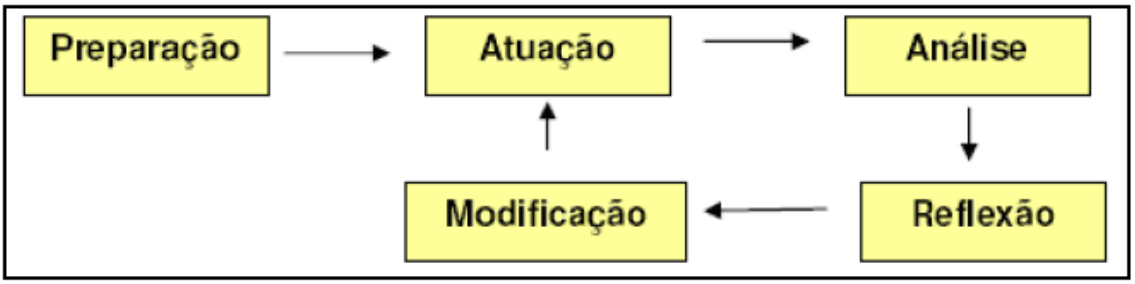
“No Design-Based Research, os registros não necessitam ser feitos de uma única forma, ao contrário, podem ser registros escritos, gravados, fotografados, filmados e, no caso de uma pesquisa em ambiente computacional, também se aceitam arquivos salvos dos episódios de ensino. Na presente pesquisa, são

utilizados todos esses métodos, inclusive os registros em vídeo que, como destacam Steffe e Thompson (2000), são muito importantes para visualizar as expressões dos sujeitos durante as atividades do processo de formação, principalmente nos trabalhos em que o pesquisador assume um duplo papel: o de professor e pesquisador.” (Silva 2020)

De acordo com os autores Steffe e Thompson (2000), “observações cuidadosas dos vídeos oferecem aos pesquisadores a oportunidade de ativar os arquivos das experiências passadas com os estudantes e trazê-los à consciência. Quando os pesquisadores reconhecem a interação como tendo sido vivenciada antes, interpretações passadas das atividades dos estudantes, que foram feitas de forma superficial, podem ocorrer novamente ao professor e pesquisador.”

Como bem esquematizou Signorelli (2007), na Figura 19, o "Design-Based Research" apresenta ciclos de “redesign”.

Figura 19: Ciclo de Redesign.



Fonte: Signorelli, 2007, p.51.

Tendo em vista as considerações metodológicas iniciais, esta pesquisa foi realizada conforme os seguintes procedimentos: inicialmente, para melhor aprofundamento do tema a ser pesquisado, foi realizado um mapeamento bibliográfico (revisão de literatura), no Banco de Teses e Dissertações da Capes, acerca dos estudos que envolvem o uso de recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem de Estatística no Ensino Médio.

O projeto foi realizado de acordo com as seguintes Fases:

A 1ª Fase, tratou da análise do problema educativo, planejamento, delineamento e estruturação da pesquisa. A 2ª Fase referia-se ao desenvolvimento do artefato pedagógico, que tanto se faz necessário para uma teoria norteadora. A 3ª Fase constou de intervenção pedagógica, para compreender e avaliar o artefato pedagógico, que na nossa pesquisa consiste nas atividades dinâmicas através de animações. A 4º Fase, por sua vez, fez uma reflexão de tudo que foi desenvolvido e aperfeiçoou as características do produto educacional com vista prática.

Para Parrilla e Daniels (2004), as atividades realizadas em grupo permitem a socialização, adaptação às normas, troca de experiências e de aprendizagem. Como a intervenção pedagógica ocorreu de forma online, separamos os alunos em trios, de forma que pelo menos um aluno do grupo possuísse o programa PowerPoint em seu computador. Os outros dois alunos foram sorteados de forma aleatória, de acordo com número de cada aluno que consta no diário de classe. Ressalta-se que a atividade ocorreu no hórario de aula, respeitando o turno dos alunos mesmo de forma remota.

A opção de realizar as atividades em grupo permitiria que os alunos se comunicassem e compartilhassem suas ideias sobre as animações e atividades, e também pelo fato de permitir que mais alunos participassem da pesquisa, visto que nem todos disponibilizavam de equipamentos tecnológicos para realização da atividade.

4.2 Procedimentos

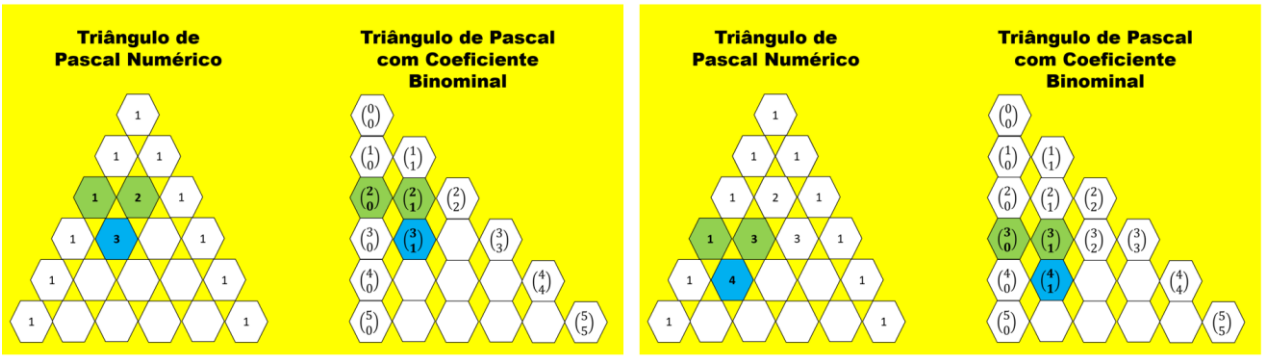
"Para as construções das atividades dinâmicas com animações foram feitas pesquisas na internet e nas dissertações que abordassem o assunto. No caso do conteúdo de Triângulo de Pascal, foi encontrada uma dissertação e uma página web da Universidade Federal Fluminense (UFF). Na dissertação de Hanke (2008), a atividade proposta teve o objetivo de "por meio de observações na formação do Triângulo de Pascal, formulassem e testassem conjecturas acerca das propriedades principais abordadas no conteúdo", sendo realizado de maneira tradicional, sem interferência de tecnologia. Na página web de conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística da UFF, foram encontradas algumas animações referentes ao Triângulo de Pascal, que mostravam as propriedades aos alunos sem que eles tivessem a chance de descobrir os padrões nela apresentados. Inspirados tanto nessas animações quanto na dissertação, construímos as animações de forma que os alunos buscassem as propriedades por meio de observações e incluímos atividades e resoluções, que a página web não apresentou.

Diante dessas observações, fomos pesquisar que plataforma poderia ser utilizada para criar as animações e as atividades, e como resultado obtivemos o PowerPoint, que é de fácil acesso e manuseio pelos alunos e professores, não necessitando de um conhecimento específico para utilizá-lo. Vale ressaltar que a realização desta atividade tem como requisitos prévios o conhecimento do conteúdo

de Análise Combinatória (arranjo, permutação e combinação). Lembramos que, de acordo com Currículo Estadual de São Paulo, logo após essa etapa, o próximo conteúdo deste bloco é o Triângulo de Pascal.

Nessa construção, desejava-se uma animação visual que desse sentido a cada propriedade, fazendo com o que o aluno, ao visualizar a animação, conseguisse descobrir a propriedade proposta. Além disso, de acordo com Borba e Penteado (2003), devemos escolher propostas pedagógicas que enfatizem a experimentação, visualização, simulação e comunicação entre o artefato eletrônico e os alunos. A Figura 20 exibe um recorte da animação produzida.” (Silva 2020)

Figura 20: Captura de tela PowerPoint da Relação de Stifel.

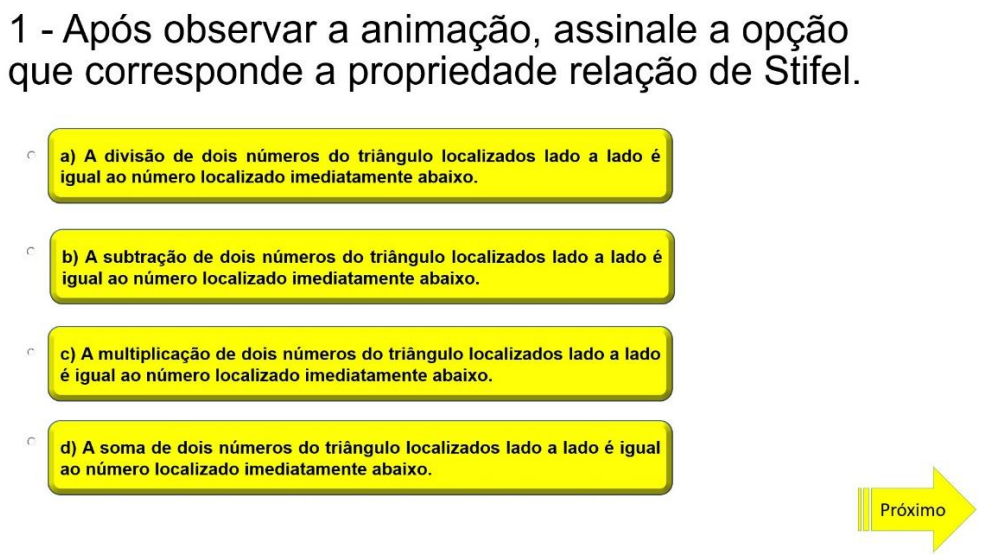


Fonte: Autoria própria.

“Para auxiliar o entendimento de cada propriedade, as atividades foram construídas em dois níveis, sendo que o primeiro era relativo ao caráter teórico da propriedade e o segundo visava sua aplicação. Neste trabalho chamamos de atividades práticas todas que necessariamente exigem cálculos para se encontrar a resposta. Já as atividades teóricas são aquelas que utilizam o raciocínio lógico e a principal ideia da animação, sem a necessidade de realizar algum tipo de cálculo. Outro fato a destacar é o caráter objetivo das atividades. Após a confirmação da resposta selecionada, no próximo slide aparecia a opção correta e a resolução, fornecendo ao aluno um “feedback” automático, independentemente de sua resposta estar correta ou não. O objetivo nesse caso era corrigir os possíveis erros e também aprimorar o conhecimento sobre o conteúdo. Esse processo fazia com que o aluno só passasse para próxima atividade após ter visto a resolução da atividade em questão, fornecendo para o aluno que errou, a oportunidade de se aprimorar e evitar futuros erros, em particular nas atividades práticas.” (Silva 2020)

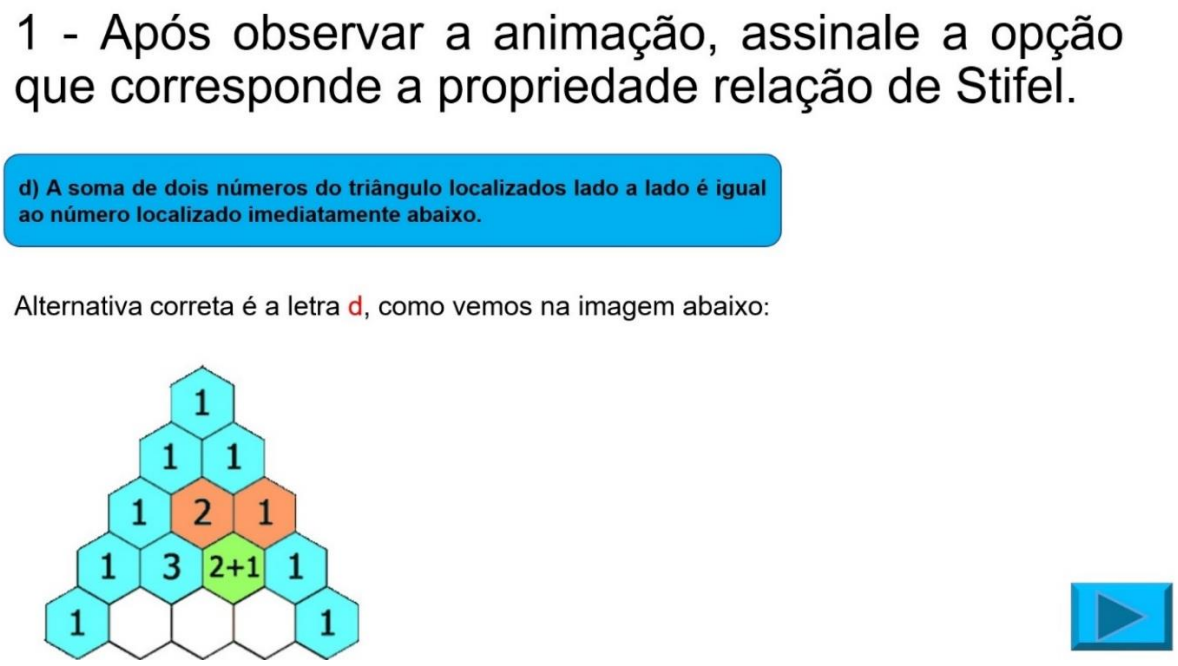
Os procedimentos utilizados estão descritos nas Figuras 21 e 22.

Figura 21: Captura de tela PowerPoint da Relação de Stifel.



Fonte: Autoria própria.

Figura 22: Captura de tela do resulação da Atividade.



Fonte: Autoria própria.

As atividades foram distribuídas da seguinte maneira:

1ª Intervenção – Revisão de Potência.

2ª Intervenção – Relação de Stifel, Propriedade das linhas e colunas.

3ª Intervenção – Propriedade das diagonais, Sequência de Fibonacci e Binômio de Newton. Como Curiosidade, a animação Potência de 11.

Para a construção das atividades dinâmicas em Estatística para os alunos do terceiro ano, foram feitas pesquisas bibliográficas sobre o assunto. Encontramos diversos trabalhos que usaram tecnologia, entre eles o software R, Excel (pacote Microsoft) e Fathom entre outros. Na pesquisa, observou-se que todos os pacotes não explicavam cada medida, ou seja, bastava ter os dados e o sistema calculava o resultado, ocultando o procedimento. Por esse motivo, escolhemos uma abordagem que explicasse cada cálculo das medidas de centralidade usando animações em situações cotidianas. Para aprofundar o conteúdo, foram colocadas situações em que fosse possível explorar as propriedades das medidas, como por exemplo, os valores discrepantes que influenciam a média aritmética e a comparação entre média e mediana.

Nessa construção, desejava-se uma animação visual que desse sentido a cada medida de centralidade e dispersão, fazendo com o que os alunos, ao visualizar a animação produzida pelos softwares Animaker e PowToon, conseguissem entendê-las e aprimorar o aprendizado de seus conteúdos através de situações.

Vale ressaltar que a realização destas atividades tinha como requisitos prévios os conhecimentos de população e amostra, tipos de dados, entre outros, que são importantes para esses tópicos.

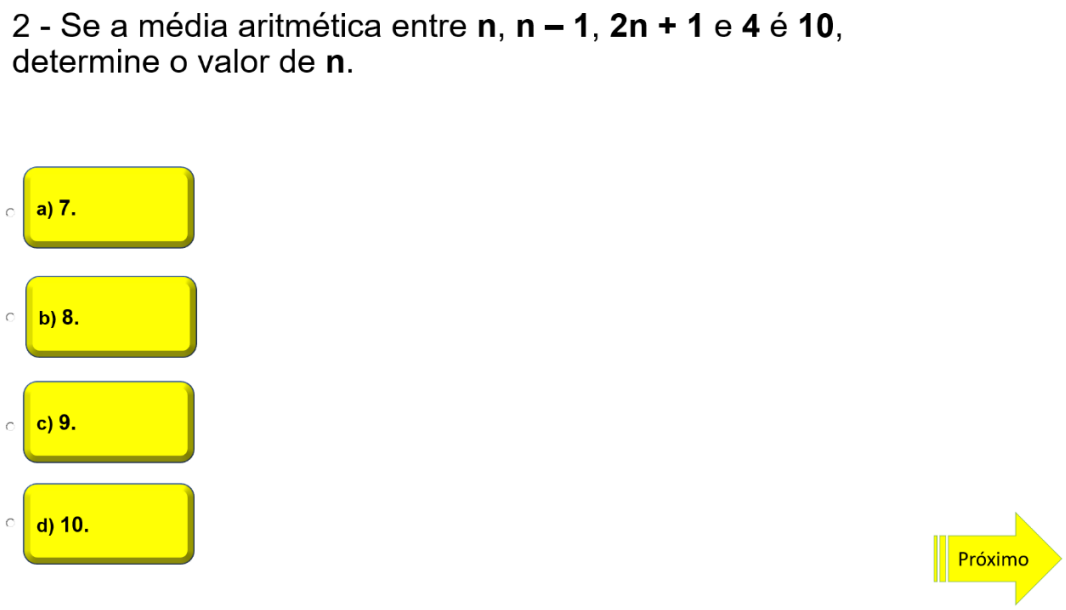
Figura 23: Captura de tela do PowerPoint com a animação

Fonte: Autoria própria.

As atividades de aplicação (nível 2) foram extraídas de vestibulares e provas do Enen, questões que contextualizavam o conteúdo com o cotidiano, e as atividades teóricas (nível 1) foram elaboradas de acordo com cada animação. Outro fato a ser comentado, e que justifica a escolha das atividades selecionadas para a pesquisa é a BNCC (2017, pg. 529), “que menciona a habilidade de resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvam cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).” (Silva 2020)

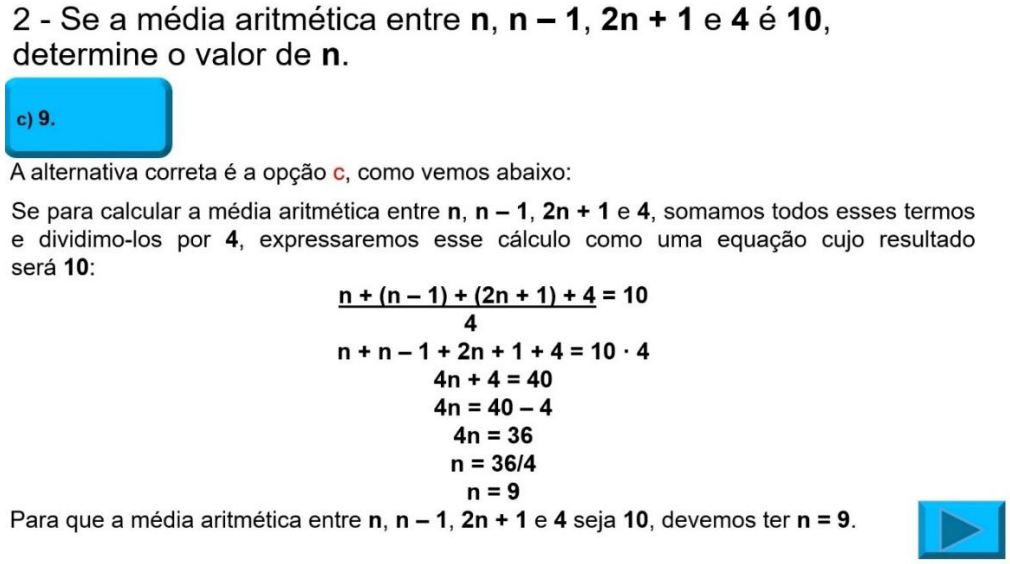
As Figuras 24 e 25 mostram um exemplo de como apareceram as atividades dinâmicas e como eram feitas a seleção das respostas.

Figura 24: Captura de tela PowerPoint da Atividade de Média



Fonte: Autoria própria

Figura 25: Captura de tela do resolução da Atividade



Fonte: Autoria própria

As atividades foram distribuídas da seguinte maneira:

1ª Intervenção – Revisão de ordenação e operações com números decimais.

2ª Intervenção – Medidas de Tendência Central (Média, Mediana e Moda).

3ª Intervenção – Medidas de Dispersão (Desvio Médio, Amplitude, Variância e Desvio Padrão).

Como as atividades foram aplicadas em sete turmas, sendo quatro turmas do segundo ano e três turmas do terceiro ano, foi preciso da ajuda do professor da turma e mais um professor de Matemática da escola. A aplicação ocorreu de forma individual para cada grupo, sendo trinta e sete grupos no segundo ano e vinte e nove no terceiro ano. A aplicação ocorreu entre os dias vinte e oito de junho à dez de agosto 2021, no horário da aula de Matemática.

Seguem os passos realizados para a aplicação:

1. Antes da aplicação das atividades, me reuni com os professores para informar os procedimentos durante as atividades de forma presencial na escola escolhida.

2. Foi comentado na reunião que em nenhum momento o professor pôde influenciar ou opinar nas respostas dos alunos e no entendimento da animação.

No próximo capítulo, apresentaremos as atividades dinâmicas que foram aplicadas, juntamente com as animações projetadas para aulas remotas.

5. Aplicação das atividades dinâmicas

Neste capítulo apresentamos as atividades dinâmicas que foram aplicadas e alguns comentários, juntamente com as animações no PowerPoint. As atividades da segunda interação, na parte de Estatística e Triângulo de Pascal foram aplicadas em turmas respectivamente do segundo e terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo, no formato remoto.

5.1 Atividades dinâmicas sobre o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton

5.1.1 Relação de Stifel

1 .Após observar a animação, assinale a opção que corresponde à propriedade relação de Stifel.

a) A divisão de dois números do Triângulo de Pascal localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo à direita.

b) A subtração de dois números do Triângulo de Pascal localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo à direita.

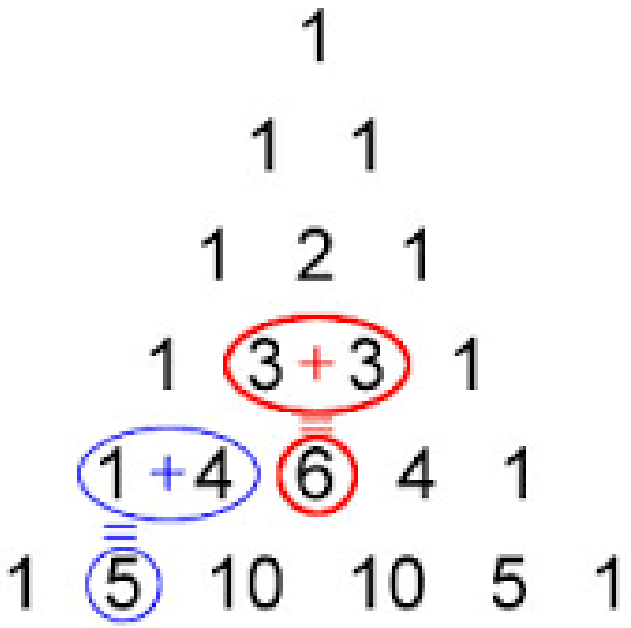
c) A multiplicação de dois números do Triângulo de Pascal localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo à direita.

d) A soma de dois números do Triângulo de Pascal localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo à direita.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra d, como vemos na imagem a seguir:

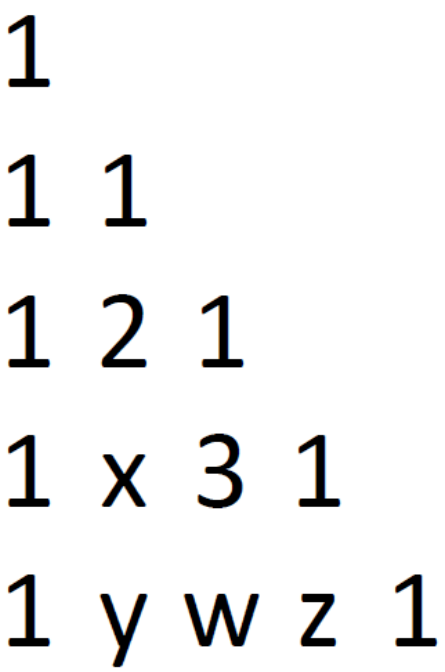
Figura 26: Imagem da resolução da atividade 1



Fonte: Infoescola (https://www.infoescola.com/combinatoria/triangulo-de-pascal/)

2. Observe a figura e marque a opção correta para os valores respectivamente de x, y, w e z.

Figura 27: Imagem da atividade 2 da Relação de Stifel



Fonte: Autoria própria

a) 3, 4, 4, 6.

b) 3, 4, 6, 6.

c) 3, 4, 6, 4.

d) 3, 6, 4, 6.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra c, como mostra o esquema a seguir:

Para X

X = 1 + 2

logo X = 3

Para Z

Z = 3 + 1,

logo z = 4.

Para Y

Y = 1 + X

Y = 1 + 3

logo Y = 4

Para W

W = x + 3

W = 3 + 3

logo W = 6

Com isso, observamos que a resposta corresponde aos valores 3, 4, 6, 4.

5.1.2 Propriedade das Linhas

1. Após observar a animação, assinale a opção que corresponde à propriedade das linhas no Triângulo de Pascal.

a) Na linha n do Triângulo de Pascal a subtração dos números é igual a 2^{-n}.

b) Na linha n do Triângulo de Pascal a multiplicação dos números é igual a n^2.

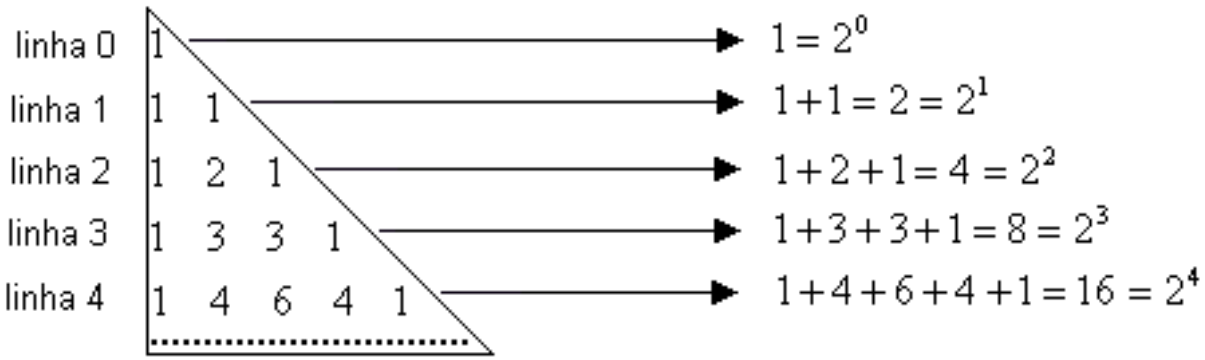
c) Na linha n do Triângulo de Pascal a soma dos números é igual a 2^n.

d) Na linha n do Triângulo de Pascal a multiplicação dos números é igual a 2^{2n}.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra c, como vemos na imagem a seguir

Figura 28: Teorema das Linhas



Fonte: Só Matemática (https://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio3.php)

Podemos notar que temos como base o número 2, e que o número da linha do Triângulo de Pascal representa o expoente. Resolvendo essa potência, chegamos na soma de todos os números que estão naquela linha.

2. (UFPE - adaptada) Suponha que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 8192$. O valor de n será:

a) 12.

b) 13.

c) 14.

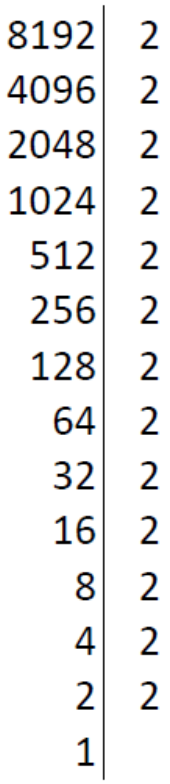
d) 15.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra b, como vemos no esquema a seguir:

Basta decompor o número 8192.

Figura 29: Imagem da resolução da atividade 2 da propriedade das linhas



Fonte: Autoria própria

Notamos que o número 2 aparece 13 vezes, ou seja, $8192 = 2^{13}$.

5.1.3 Propriedade das Colunas

1. “Após observar a animação, assinale a opção que corresponde à propriedade das colunas no Triângulo de Pascal.

a) A subtração dos elementos de qualquer coluna, do 1º elemento até um qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da coluna considerada e na linha imediatamente abaixo.

b) A soma dos elementos de qualquer coluna, do 1º elemento até um qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da coluna considerada e na linha imediatamente abaixo.

c) A multiplicação dos elementos de qualquer coluna, do 1º elemento até um

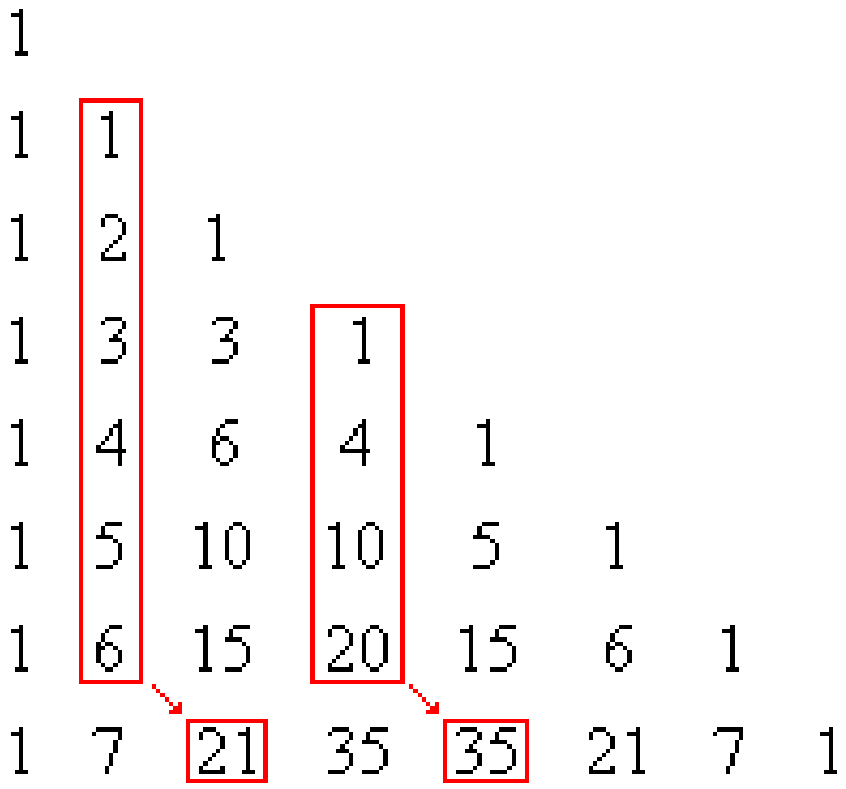
qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da coluna considerada e na linha imediatamente abaixo.

d) A soma dos elementos de qualquer coluna, do 2º elemento até um qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da coluna considerada e na linha imediatamente abaixo.” (Silva 2020)

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra b, como vemos na imagem a seguir:

Figura 30: Imagem da resolução da atividade 1 da propriedade das colunas

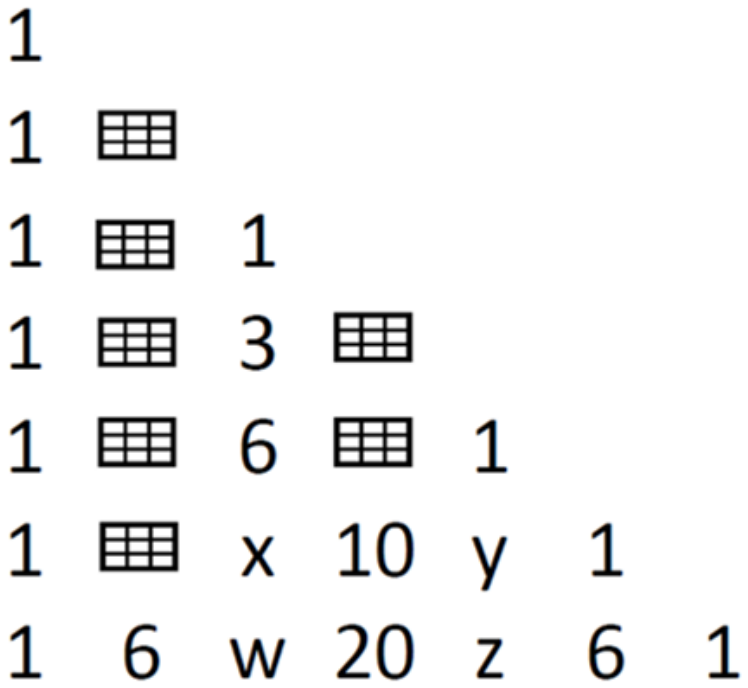


Fonte: Só Matemática (https://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio3.php)

“Podemos notar que a soma dos elementos de qualquer coluna, do 1º elemento até um qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da coluna considerada e na linha imediatamente abaixo.” (Silva 2020)

2. Observe a figura e marque a opção correta para os valores respectivamente de x, y, w e z.

Figura 31: Imagem da atividade 2 da propriedade das colunas



Fonte: Autoria própria

a) 10, 5, 15, 15.

b) 15, 10, 5, 15.

c) 10, 15, 15, 10.

d) 15, 5, 10, 15.

Resolução da questão:

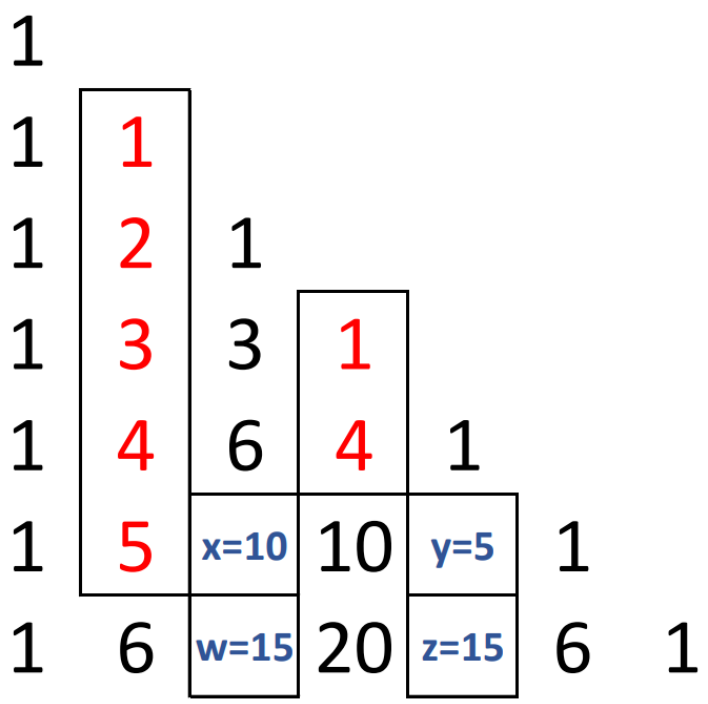
Alternativa correta é a letra a, como vemos na explicação e na imagem abaixo: Primeiro passo é encontrar os valores desconhecidos. Pela a relação de Stifel, podemos encontrar quase todos os elementos da primeira coluna e um elemento da segunda coluna. Temos também que cada linha do Triângulo de Pascal começa e termina com 1. Logo chegamos à conclusão que os elementos da primeira coluna são: 1, 2, 3, 4 e 5.

Basta somar todos esses números da coluna e encontramos w, então, w = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Depois disso, podemos encontrar o valor de x, somando 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Para a coluna 4, o primeiro valor desconhecido é igual a 1, pois como vimos anteriormente, o primeiro e último elemento de cada linha do Triangulo de Pascal são iguais a 1. Pela relação de Stifel, encontramos o segundo valor desconhecido dessa coluna, somando 3 e 1 (elemento acima) e encontramos 4.

Somando os elementos dessa coluna (1 + 4) encontramos 5, que é o valor de y.

Usando novamente a relação de Stifel podemos encontrar o valor de z que é a soma de 10 + 5, logo z = 15.

Figura 32: Imagem da resolução da atividade 2 da propriedade das colunas



Fonte: Autoria própria

Então, pela ordem temos os seguintes valores: x = 10; y = 5; w = 15 e z = 15.

Propriedade das Diagonais

1. “Após observar a animação, assinale a opção que corresponde à propriedade das diagonais no Triângulo de Pascal.

a) A soma dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até um elemento qualquer é igual ao valor ao lado direito na linha imediatamente abaixo.

b) A multiplicação dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até um elemento qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo dele.

c) A subtração dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até o de um elemento qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo dele.

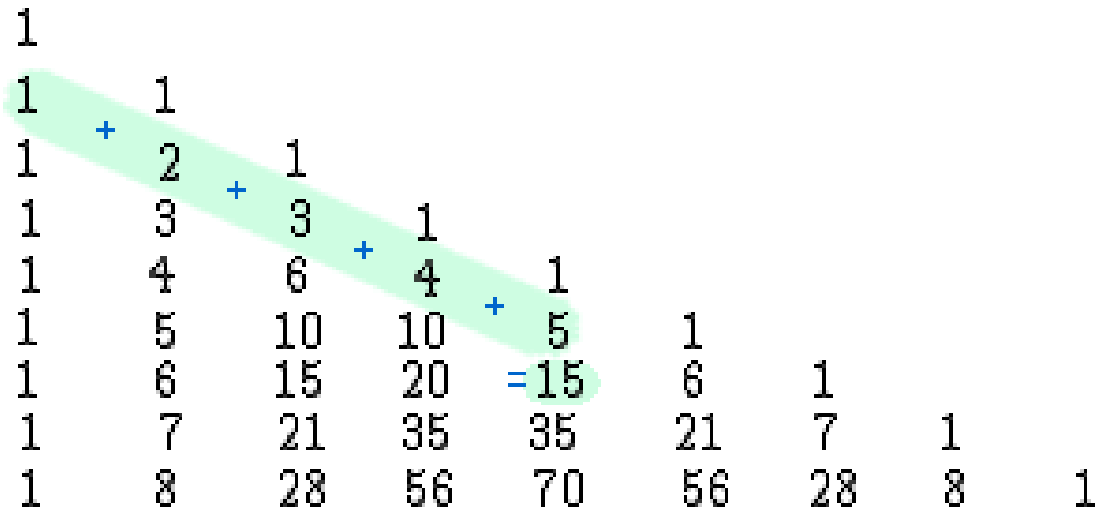
d) A soma dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da

1ª coluna até o de um elemento qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo dele.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra d, como vemos na imagem a seguir:

Figura 33: Propriedade das diagonais

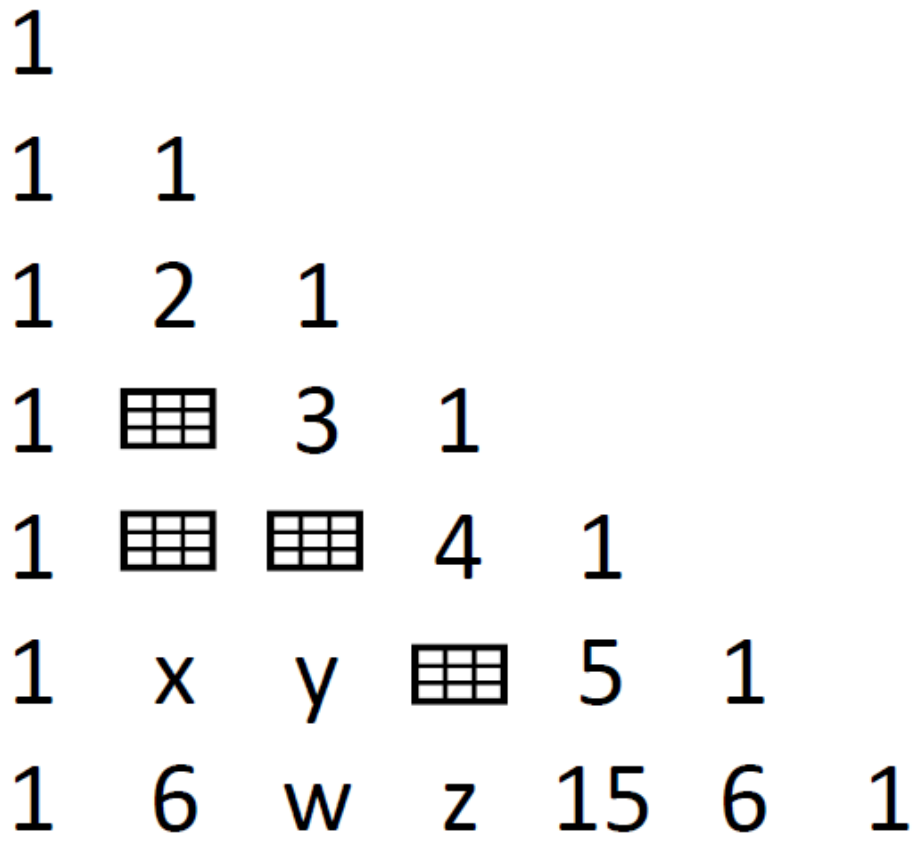


Fonte: Matemática Didática (http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx)

Podemos notar que a soma dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1º coluna até um elemento qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo dele.

2. Observe a figura a seguir e marque a opção correta perante a expressão $\frac{w}{x} - \frac{z}{y}$, sabendo que os valores de x, y, w e z se encontram no Triângulo de Pascal a seguir.” (Silva 2020)

Figura 34: Imagem da atividade 2 da propriedade das diagonais



Fonte: Autoria própria

a) 1.

b) 2.

c) 3.

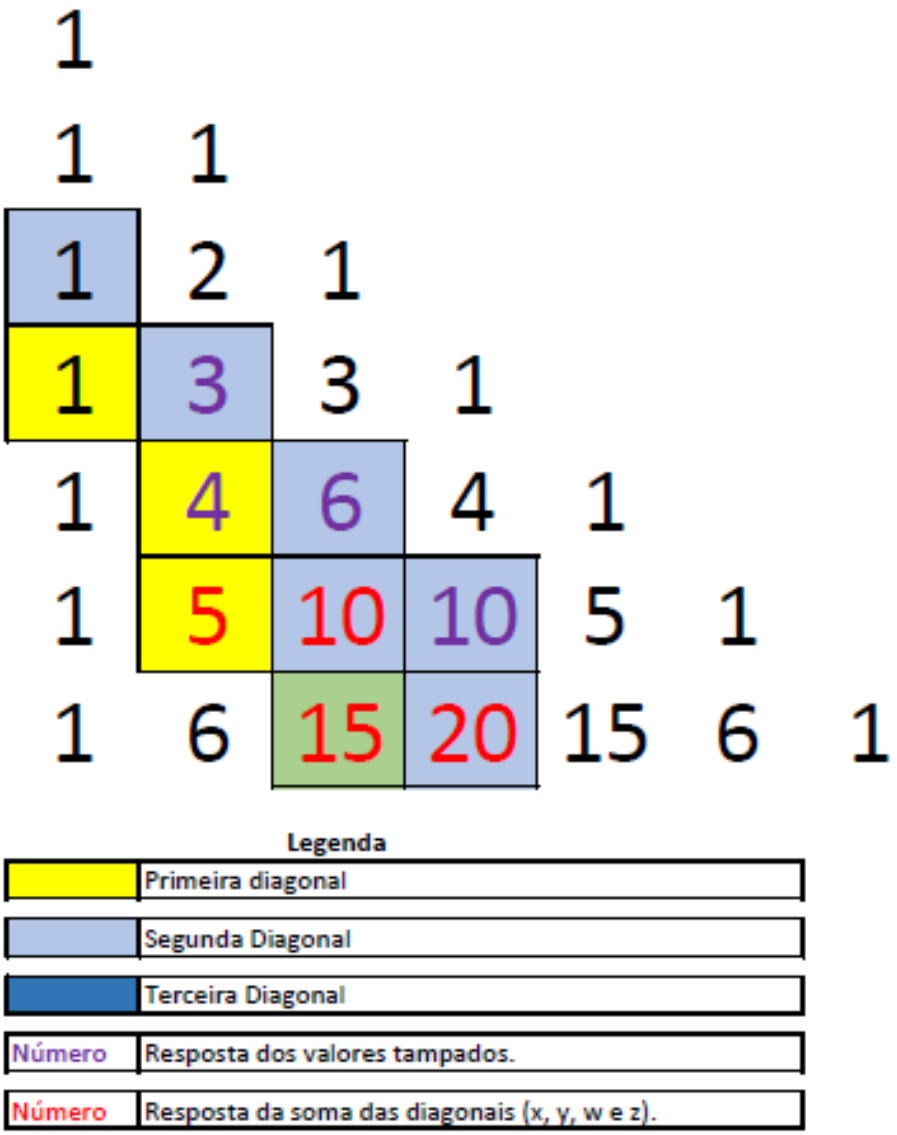
d) 4.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra a, como veremos a seguir:

O primeiro passo é encontrar os valores desconhecidos, que podem ser determinados pela relação de Stifel. Após isso, é possível encontrar os valores de x, y, w, e z pela propriedade da diagonal. Segue a seguir o esquema da resolução.

Figura 35: Imagem da resolução da atividade 2 da propriedade das diagonais



Fonte: Autoria própria

Após encontrar os valores, basta resolver a expressão $\frac{w}{x} - \frac{z}{y}$.

Substituindo os valores, encontraremos $\frac{15}{5} - \frac{20}{10}$.

Resolvendo, teremos que $\frac{15}{5} = 3$ e $\frac{20}{10} = 2$, logo 3 - 2 = 1.

5.1.5 Sequência de Fibonacci

1. Após observar a sequência de Fibonacci, é correto afirmar que:

a) A partir do primeiro termo, cada número é obtido a partir da soma dos dois

números anteriores.

b) A partir do terceiro termo, cada número é obtido a partir da soma dos dois números anteriores.

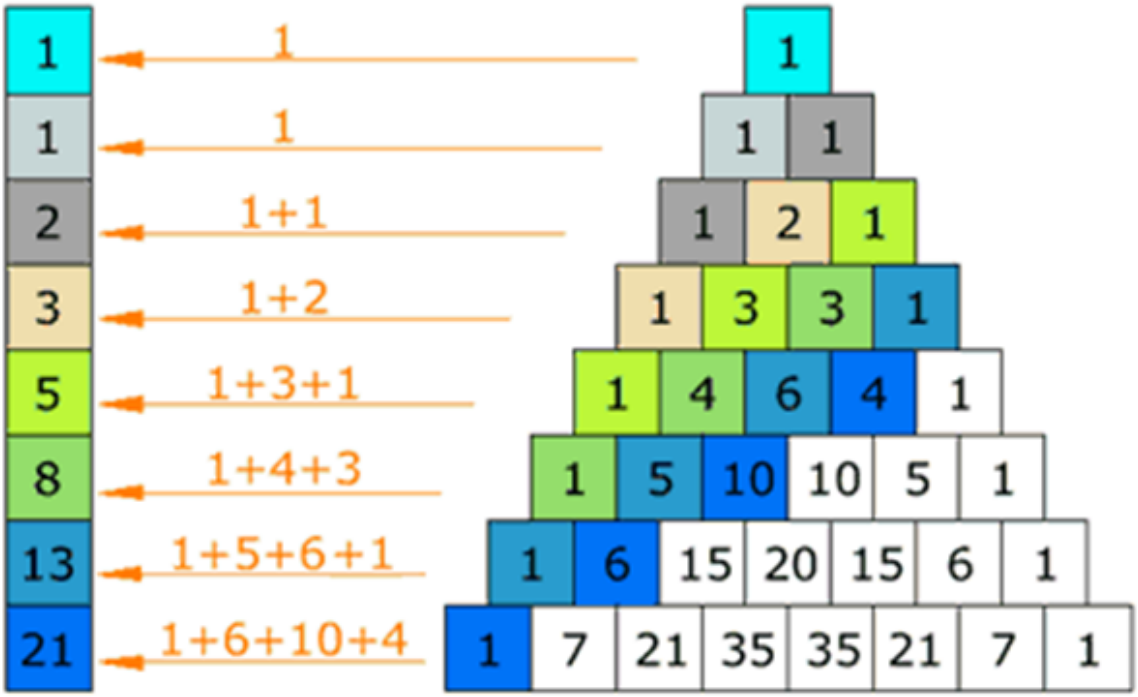
c) A partir do terceiro termo, cada número é obtido a partir da multiplicação dos dois números anteriores.

d) A partir do primeiro termo, cada número é obtido a partir da multiplicação dos dois números anteriores.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra b, como vemos na imagem a seguir:

Figura 36: Imagem da resolução da atividade 1 da sequência de Fibonacci



Fonte: Pinterest (https://br.pinterest.com/pin/372391462922729454/)

Notamos que a partir do terceiro termo, cada número é obtido a partir da soma dos dois elementos anteriores.

2. Leonardo ganhou um casal de coelhos recém-nascidos. Imagine que os coelhos chegam à idade de acasalar no segundo mês de idade e que as fêmeas demoram um mês para parir, gerando apenas outro casal. Quantos casais de coelhos haverá depois de um ano?

a) 89.

b) 121.

c) 233.

d) 377.

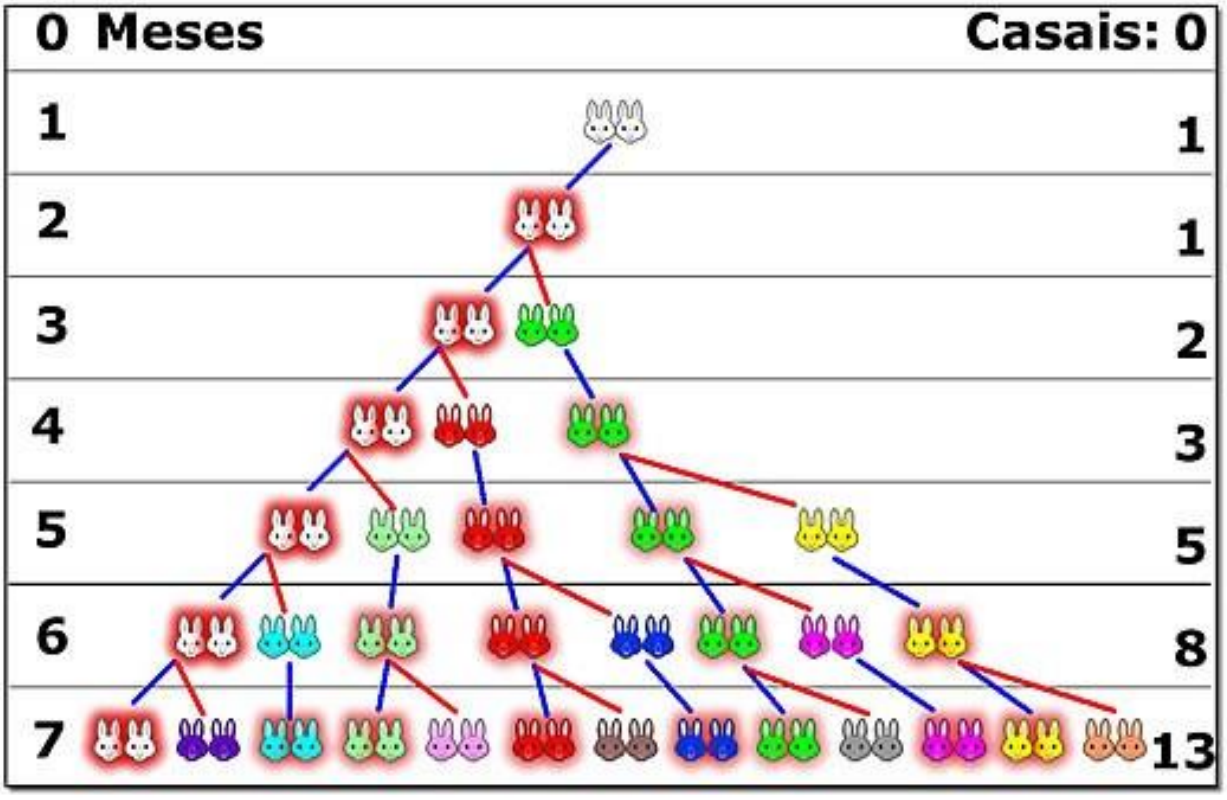
Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra c, como veremos a seguir:

“No 1º mês há apenas 1 casal de coelhos. Como a maturidade sexual dos coelhos dá-se somente a partir do segundo mês de vida, no mês seguinte continua havendo apenas 1 casal. No 3º mês teremos o nascimento de mais um casal, totalizando 2 casais. No 4º mês, com o nascimento de mais um casal, gerado pelo casal inicial, (visto que o segundo ainda não amadureceu sexualmente) teremos 3 casais. No mês seguinte (5º), com nascimento de dois novos casais gerados pelo casal 1 e pelo casal 2, totalizam-se 5 casais e assim por diante.” (Brasil Escola)

Segue o esquema demostrando o que foi mencionado.

Figura 37: Imagem da resolução da atividade 2 da sequência de Fibonacci



Fonte: Escola educação (https://escolaeducacao.com.br/sequencia-de-fibonacci/)

Seguindo essa lógica e as condições estabelecidas previamente por Fibonacci, temos a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ⋯ Logo, podemos perceber que no final de um ano restarão 233 casais de coelhos.

5.1.6 Binômio de Newton.

1. Observe as sentenças a seguir:

I – Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ são números da ~~linhas de~~ n-ésima linha do Triângulo de Pascal.

II – Os expoentes de a decrescem de 1 em 1, de n até 0, enquanto os expoentes de b crescem de 1 em 1, de 0 até n.

De acordo com a animação, podemos dizer que as sentenças:

a) Apenas a sentença II é verdadeira.

b) Apenas a sentença I é verdadeira.

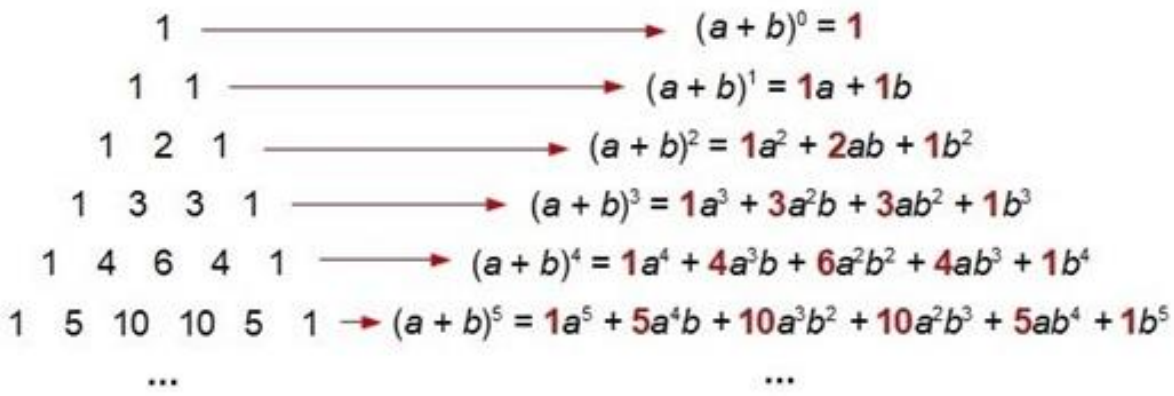
c) Todas as sentenças são verdadeiras.

d) Todas as sentenças são falsas.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra c, como mostra a imagem a seguir:

Figura 38: Imagem da resolução da atividade 1 do Binômio de Newton



Fonte: Gestão Educacional (https://www.gestaoeducacional.com.br/binomio-de-newton-o-que-e/)

Notamos que as duas sentenças são verdadeiras.

2. Após observar a animação, assinale a opção que corresponde ao desenvolvimento do binômio $(a+b)^4$.

a) $b^5 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^5$.

b) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

c) $a^1 + 4a^2b + 6a^3b^2 + 4ab^4b + b^5$.

d) $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3b$.

Resolução da questão:

Alternativa correta é a letra b, como veremos a seguir:

Como o expoente do binômio é igual a 4, iremos utilizar os números relativos à linha de número 4 (quinta linha) do triângulo de Pascal para os coeficientes dessa expansão. Assim, temos: 5ª linha do triângulo de Pascal: 1 − 4 − 6 − 4 – 1.

Esses números serão os coeficientes do desenvolvimento do binômio. Depois disso, basta distribuir os expoentes, como vemos a seguir:

$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$,

de modo que

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

5.2 Atividades dinâmicas sobre Estatística

5.2.1 Média Aritmética

1. Após observar a animação, assinale a opção que corresponde à média aritmética:

a) subtração dos números dividida pela quantidade de números somados.

b) somatório dos números multiplicado pela quantidade de números somados.

c) Subtração dos números multiplicado pela quantidade de números somados.

d) somatório dos números divida pela quantidade de números somados.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra d, como vemos na fórmula a seguir:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_N}{N}$$

Então a média é calculada somando-se todos os valores do conjunto de dados e dividindo-se pelo número de elementos deste conjunto.

2. Se a média aritmética entre **n**, **n – 1**, **2n + 1** e **4** é **10**, determine o valor de **n**.

a) 7.

b) 8.

c) 9.

d) 10.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a opção c, como vemos abaixo:

Se para calcular a média aritmética entre n, n – 1, 2n + 1 e 4, somamos todos esses termos e dividimo-los por 4, expressaremos esse cálculo como uma equação cujo resultado será 10:

$$\frac{n + (n-1) + (2n+1) + 4}{4} = 10$$

$$n + n - 1 + 2n + 1 + 4 = 10 \,.\, 4$$

$$4n + 4 = 40$$

$$4n = 36$$

$$n = \frac{36}{4}$$

$$n = 9$$

Para que a média aritmética entre n, n – 1, 2n + 1 e 4 seja 10, devemos ter n = 9.

3. (UFC) A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:

a) 7,0

b) 7,2

c) 7,4

d) 7,6

Resolução da questão:

Primeiramente, vamos identificar a soma das notas dos meninos por x e a nota das notas das meninas por y. Se a turma tem 5 meninos e a média aritmética de suas notas é igual a 6, então a soma das notas dos meninos (x) dividida pela quantidade de meninos (5) deve ser igual a 6, isto é:

$$\frac{x}{5} = 6$$

$$x = 6 \,.\, 5$$

$$x = 30$$

Do mesmo modo, se a turma tem 25 meninas e Me é a média aritmética de suas notas, o quociente da soma das notas das meninas (y) e a quantidade de

meninas (25) deve ser igual a Me, isto é:

$$\frac{y}{25} = Me$$
$$y = 25\ .\ Me$$

Para calcular a média da turma, devemos somar as notas dos meninos (30) às notas das meninas (y) e dividir pela quantidade de alunos (25 + 5 = 30). O resultado deverá ser 7. Sendo assim, temos:

$$\frac{x + y}{25 + 5} = 7$$
$$\frac{30 + 25.Me}{30} = 7$$
$$30 + 25Me = 30\ .7$$
$$25Me = 210\ -\ 30$$
$$25Me = 180$$
$$Me = \frac{180}{25}$$
$$Me = 7{,}2.$$

Portanto, a média aritmética das notas das meninas é 7,2.
A alternativa correta é a letra b.

5.2.2 Mediana

1. Após observar a animação, assinale a opção que corresponde à mediana:

a) Chamamos de mediana o elemento que está entre a média e a moda de um conjunto de dados.

b) A mediana é uma medida de tendência central usada para encontrar mais de um valor que representa todos os valores de um conjunto não ordenados.

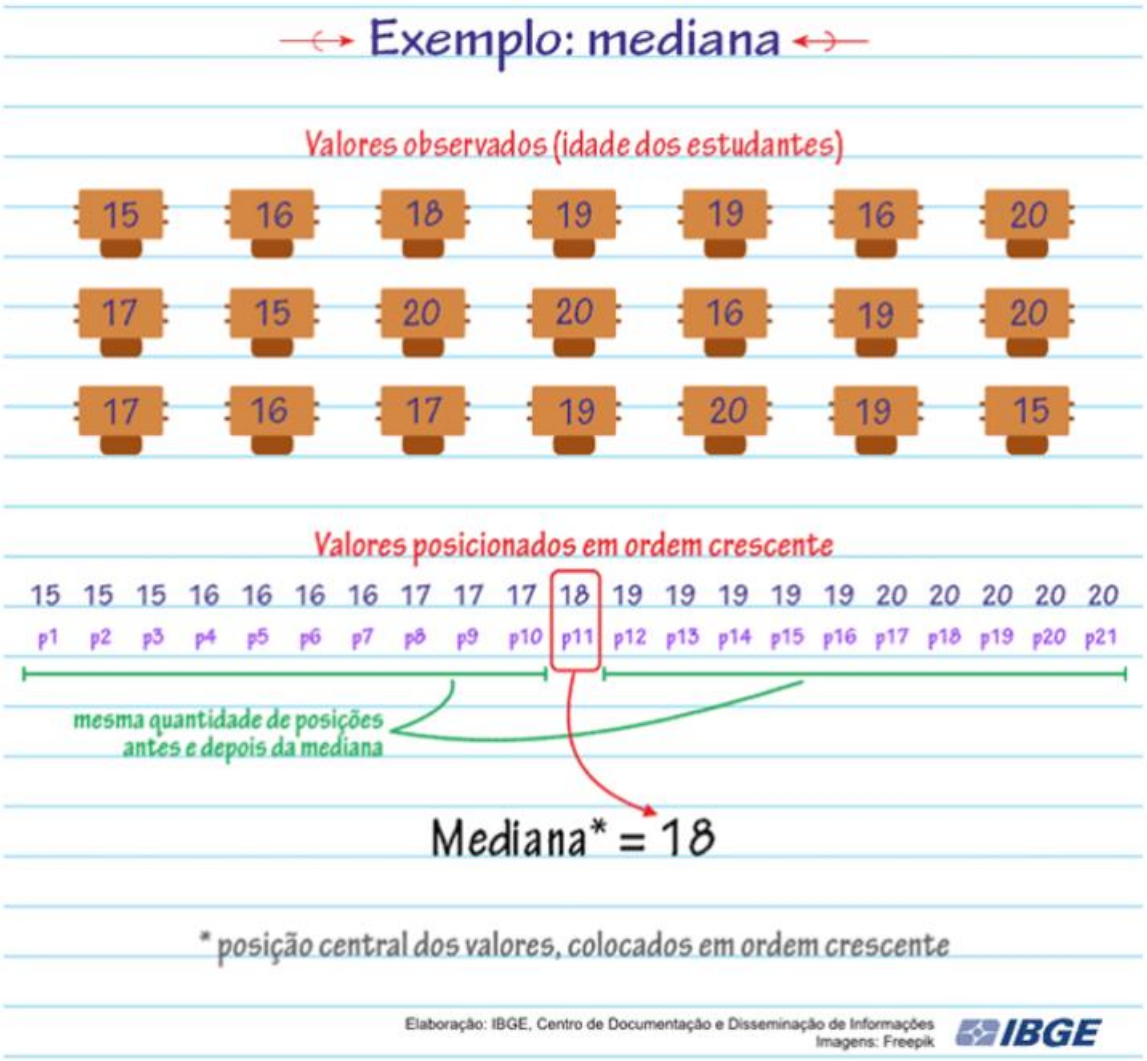
c) A mediana representa o valor com maior frequência em um conjunto de dados.

d) A mediana é o número que ocupa a posição central de um conjunto de dados ordenado.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra d, como vemos na imagem a seguir:

Figura 39: Imagem da resolução da atividade 1 sobre a mediana



Fonte:: IBGE *(*https://educa.ibge.gov.br/professores/educa-recursos/17870-a-mediana.html*)*

Através desta imagem notamos que a mediana divide o conjunto de dados ordenados em dois conjuntos com a mesma quantidade de elementos.

2. (Enem 2015) “Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Figura 40: Imagem da atividade 2 sobre a mediana

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempos (segundos)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

Fonte: EMEN 2015

A mediana dos tempos apresentados no quadro é:

a) 20,77.

b) 20,80.

c) 20,85.

d) 20,90.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra c, como observamos a seguir:

Inicialmente, vamos colocar todos os valores em ordem crescente: 20,50 20,60 20,60 20,80 20,90 20,90 20,90 20,96. Observe que existe um número par de valores (8 tempos), assim, a mediana será a média aritmética entre o valor que está na 4ª posição e na 5ª posição:

$$Mediana = \frac{20{,}80 + 20{,}90}{2}$$

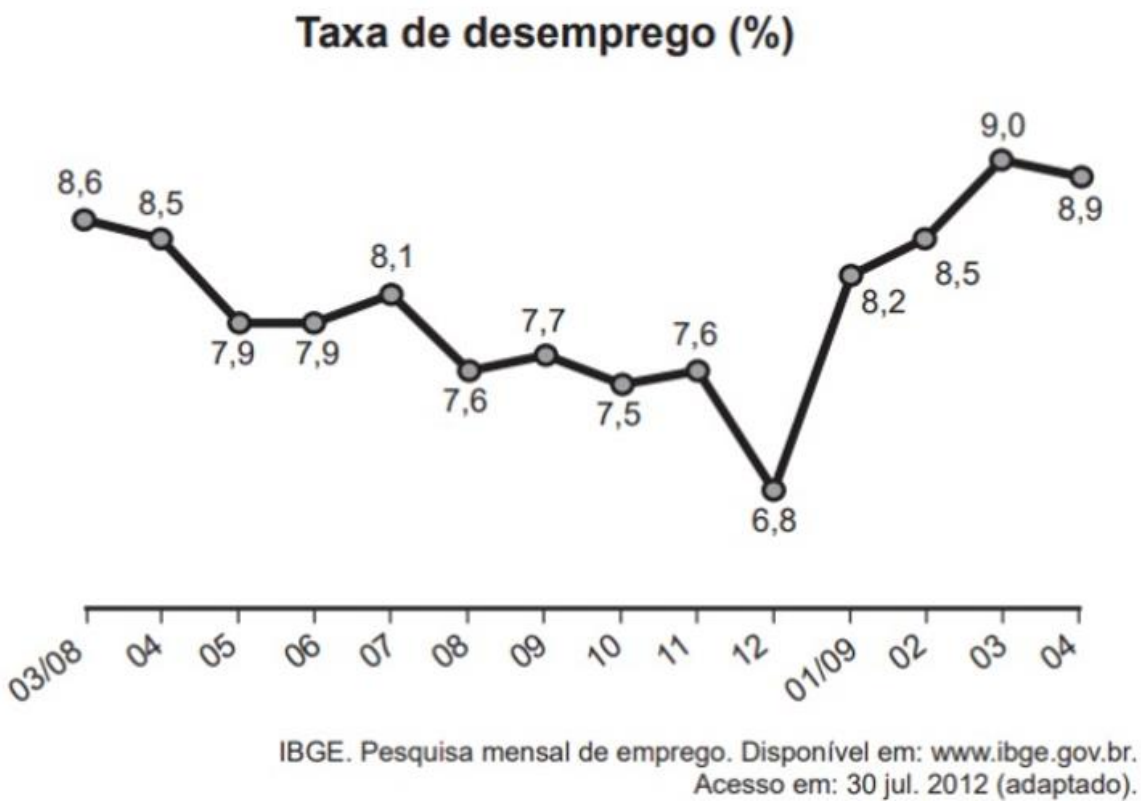
$$Mediana = \frac{41{,}70}{2}$$

$$Mediana = 20{,}85$$

Então a mediana dos tempos apresentados no quadro dos atletas da olimpíada é de 20,85 segundos para 100 metros livre de natação.” (Enem 2015)

3. (Enem 2017) “O gráfico a seguir apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Figura 41: Imagem da atividade 2 sobre a mediana



Fonte:: EMEN 2017

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de:

a) 8,1%

b) 8,0%

c) 7,9%

d) 7,7%

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra b, como observamos a seguir:

Para encontrar o valor da mediana, devemos começar oedenando os valores. Em seguida, identificamos a posição que divide o intervalo em dois com a mesma quantidade de elementos. Quando o número de valores é ímpar, a mediana será o número que está exatamente no meio do intervalo. Quando é par, a mediana será igual a média aritmética dos dois valores centrais. Observando o gráfico, identificamos que existem 14 valores relativos à taxa de desemprego. Como 14 é um número par, a mediana será igual à média aritmética entre o 7º valor e o 8º valor. Desta forma, podemos colocar os números em ordem crescente até chegar a essas posições, conforme apresentado a seguir: 6,8 7,5 7,6 7,6 7,7 7,9 7,9 − 8,1. Calculando a

média entre os valores 7,9 e o 8,1, temos:

$$Me = \frac{7{,}9 + 8{,}1}{2}$$

$$Me = \frac{16{,}0}{2}$$

$$Mediana = 8{,}0$$

Portanto, a mediana da taxa de desemprego neste período é de 8,0%.”(Enem 2017)

5.2.3 Moda

1. Após observar a animação, assinale a opção que corresponde à moda:

a) A moda é o número que ocupa a posição central de um conjunto de dados.

b) Chamamos de moda o elemento que está entre a média e a mediana de um conjuntos de dados.

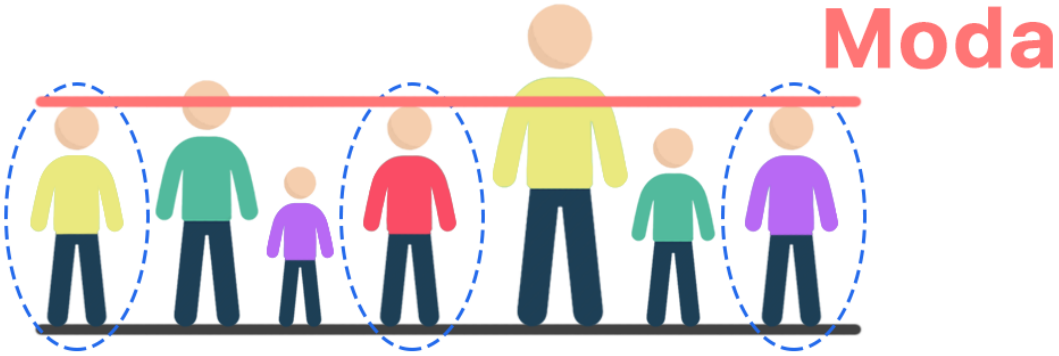
c) A moda é uma medida de tendência central usada para encontrar um único valor que representa todos os valores de um conjunto de dados.

d) A moda é o dado mais frequente em um conjunto de dados.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra d, como vemos a seguir:

Figura 42: Imagem da resolução da atividade 1 sobre a moda

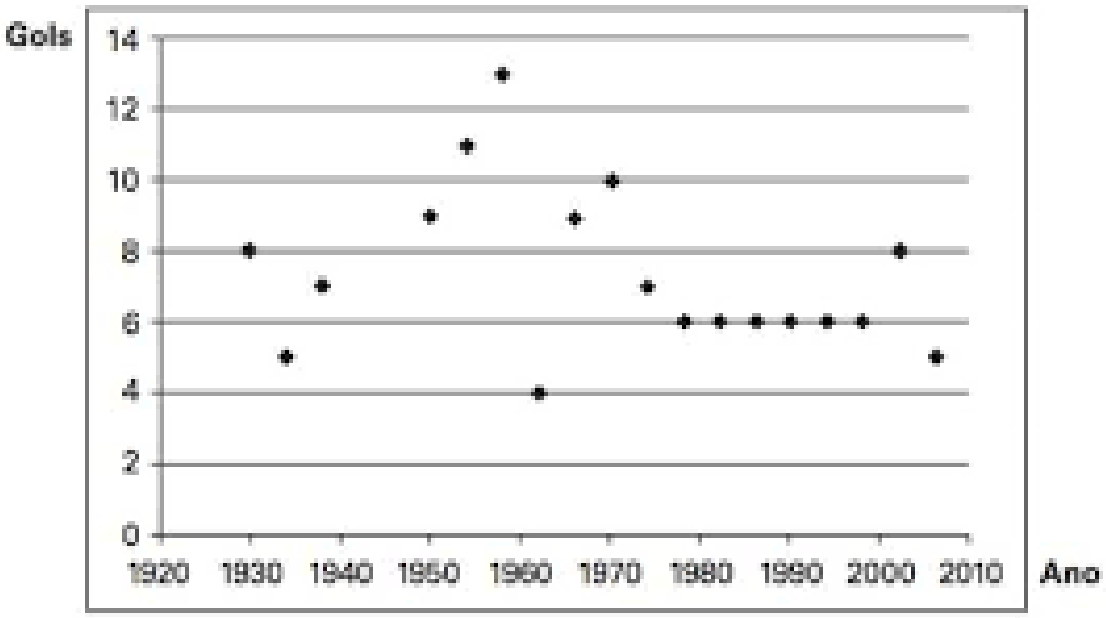


Fonte:: Professor Ferreto (https://blog.professorferretto.com.br/moda-media-e-mediana-medidas-de-tendencia-central)

2. (ENEM 2010) “O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006. A partir dos dados apresentados, qual é a moda das quantidades de gols marcados pelos

artilheiros das Copas do Mundo?

Figura 43: Quantidades de Gols dos Artilheiros das Copas do Mundo



Fonte: ENEM 2010

a) 6 gols.

b) 6,5 gols.

c) 7 gols.

d) 7,3 gols.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra a, como vemos a seguir: Basta observar no gráfico o número de gols que mais se repete. A distribuição dos dados é: 8, 5, 7, 9, 11, 13, 4, 9, 10, 7, 6, 6, 6, 6, 6, 8 e 5. Como podemos ver o valor 6 se repete 6 vezes, e por isso ele é a moda do gráfico de gols. Este fato também pode ser observado diretamente no gráfico." (ENEM 2010)

3. (ENEM 2016) "Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida a partir do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, até o quinto andar do edifício.

Tabela 2: Imagem da atividade 3 sobre a moda

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Fonte:: ENEM 2016

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2

b) 4

c) 5

d) 6

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra c, como observamos a seguir:

Térreo = 4 Primeiro andar → 8 − 3 = 5

Segundo andar → 5 + 1 − 1 = 5

Terceiro andar → 5 + 2 − 2 = 5

Quarto andar → 5 + 2 − 0 = 7

Quinto andar → 7 + 2 − 6 = 3

Logo a moda é 5.” (ENEM 2016)

5.2.4 Amplitude e Desvio Médio:

1. A respeito das medidas estatísticas denominadas amplitude e desvio médio, assinale a alternativa correta:

a) Em estatística, não existem diferenças entre desvio médio e o desvio padrão, exceto pelo nome.

b) O desvio médio é um número relacionado à dispersão total de um conjunto de valores.

c) A amplitude é uma medida de dispersão calculada sobre cada um dos valores de um conjunto de informações.

d) O desvio médio é uma medida de dispersão calculada para cada um dos valores de um conjunto de informações.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra b, como vemos a seguir:

a) Incorreta! O desvio médio é a medida relacionada à dispersão de cada um dos valores de um conjunto. O desvio padrão é uma medida relacionada à dispersão geral de um conjunto.

b) Correta! O desvio médio é uma medida de dispersão relacionada a cada um dos valores de um conjunto e não à sua dispersão total.

c) Incorreta! A amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor de um conjunto. Portanto, ela não é calculada sobre todos os valores do conjunto.

d) Incorreta! O desvio médio é uma medida de dispersão global.

2. Um professor fez uma pesquisa de idades em uma turma do ensino médio, composta por 15 alunos, e obteve os seguintes resultados:15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 14, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18. Qual é a amplitude das idades dos alunos dessa sala de aula?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra d, como vemos a seguir:

Para encontrar a amplitude de um conjunto, basta calcular a diferença entre o maior e o menor valor da lista: 18 − 14 = 4.

Então, as idades dos alunos dessa turma têm uma amplitude de 4 anos.

3. No último mês, Erick fez apenas 10 ligações de seu telefone celular cujas durações, em minutos, estão apresentadas no rol a seguir. 12, 8, 6, 11, 13, 10, 4, 7,

1 e 3. O valor aproximado do desvio médio desse conjunto de tempos, em minutos, é:

a) 3,20

b) 3,25

c) 3,30

d) 3,35

Resolução da questão:

A alternativa correta é a c, como vemos a seguir:

Inicialmente, é necessário econtrar a média dos dados.

$$\bar{x} = \frac{12 + 8 + 6 + 11 + 12 + 10 + 4 + 7 + 1 + 3}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{75}{10}$$

$$\bar{x} = 7{,}5$$

Após obter a média, é so calcular os desvios:

1º desvio = $|12 - 7,5| = 4,5$;

2º desvio = $|8 - 7,5| = 0,5$;

3º desvio = $|6 - 7,5| = 1,5$;

4º desvio = $|11 - 7,5| = 3,5$;

5º desvio = $|13 - 7,5| = 5,5$;

6º desvio = $|10 - 7,5| = 2,5$;

7º desvio = $|4 - 7,5| = 3,5$;

8º desvio = $|7 - 7,5| = 0,5$;

9º desvio = $|1 - 7,5| = 6,5$;

10º desvio = $|3 - 7,5| = 4,5$.

Finalizando, basta somar os desvios e dividir pela quantidade de dados:

$$DAM = \frac{4{,}5 + 0{,}5 + 1{,}5 + 3{,}5 + 5{,}5 + 2{,}5 + 3{,}5 + 0{,}5 + 6{,}5 + 4{,}5}{10}$$

$$DAM = \frac{33}{10}$$

$$DAM = 3{,}30$$

O desvio médio das durações das ligações de Erick no último mês é 3,30 segundos.

5.2.5 Variância

1. Observe as sentenças abaixo:

I Dado um conjunto de dados, a variância é uma medida de dispersão que mostra o quão distante os valores desse conjunto estão do valor central (médio);

II Quanto menor a variância, mais distante os valores estão da média. Da mesma forma, quanto maior ela é, mais os valores estão distantes da média.

É correto afirmar que:

a) I e II são verdadeiras.

b) I e II são falsas.

c) Apenas I é verdadeira.

d) Apenas II é verdadeira.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra c, como vemos a seguir:

I (verdadeira) Dado um conjunto de dados, a variância é uma medida de dispersão que mostra o quão distante os valores desse conjunto estão do valor central (médio);

II (Falso) Quanto menor a variância, mais perto os valores estão da média e não distante.

2. (UPE – 2014) “Numa competição esportiva, cinco atletas estão disputando as três primeiras colocações da prova de salto em distância. A classificação será pela ordem decrescente da média aritmética de pontos obtidos por eles, após três saltos consecutivos na prova. Em caso de empate, o critério adotado será a ordem crescente do valor da variância. A pontuação de cada atleta está apresentada na tabela a seguir:

Tabela 3: Imagem da atividade 2 sobre a variância

Atleta	Pontuação - 1º salto	Pontuação - 2º salto	Pontuação - 3º salto
A	6	6	6
B	7	3	8
C	5	7	6
D	4	6	8
E	5	8	5

Fonte: Universidade de Pernanbuco

Com base nas informações apresentadas, o primeiro, o segundo e o terceiro lugares dessa prova foram ocupados, respectivamente, pelos atletas:

a) A; C; E

b) B; D; E

c) E; D; B

d) B; D; C

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra a, como vemos a seguir: Vamos começar calculando a média aritmética dos pontos de cada atleta:" (UPE – 2014)

Atleta A:

$$\bar{x} = \frac{6+6+6}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{3}$$

$$\bar{x} = 6$$

Atleta B:

$$\bar{x} = \frac{7+3+8}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{3}$$

$$\bar{x} = 6$$

Atleta C:

$$\bar{x} = \frac{5+7+6}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{3}$$

$$\bar{x} = 6$$

Atleta D:

$$\bar{x} = \frac{4+6+8}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{3}$$

$$\bar{x} = 6$$

Atleta E:

$$\bar{x} = \frac{5+8+5}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{3}$$

$$\bar{x} = 6$$

Como todos estão empatados, iremos calcular a variância dos pontos de cada atleta:

Atleta A:

$$V = \frac{(6-6)^2 + (6-6)^2 + (6-6)^2}{3}$$

$$V = \frac{0}{3}$$

$$V = 0$$

Atleta B:

$$V = \frac{(7-6)^2 + (3-6)^2 + (8-6)^2}{3}$$

$$V = \frac{14}{3}$$

$$V = 4{,}666\ldots$$

Atleta C:

$$V = \frac{(5 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (6 - 6)^2}{3}$$

$$V = \frac{2}{3}$$

$$V = 0{,}666\ldots$$

Atleta D:

$$V = \frac{(4 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (8 - 6)^2}{3}$$

$$V = \frac{8}{3}$$

$$V = 2{,}666\ldots$$

Atleta E:

$$V = \frac{(5 - 6)^2 + (8 - 6)^2 + (5 - 6)^2}{3}$$

$$V = \frac{6}{3}$$

$$V = 3$$

Como a classificação é feita pela ordem decrescente da variância, então o primeiro colocado será o atleta A, seguido dos atletas C e E.

3. (ENEM 2012) “Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras infrmações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de sua propriedade. Os talhões têm a mesma área de 30000 m^2 e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10000m^2). A variância das produções dos talhões expressa em $(sacas/hectare)^2$ é:

a) 4,50

b) 0,71

c) 0,50

d) 0,25.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra d, como vemos a seguir:

Como a variância deve estar em $(sacas/hectare)^2$, precisamos transformar as unidades de medidas. Cada talhão tem 30.000m^2 e cada hectare tem 10.000m^2, assim devemos dividir o desvio padrão por 3. Encontramos o valor de 30 kg/hectare. Como a variância é dada em sacas de 60 kg por hectare então temos que o desvio padrão será de 0,5 sacas/hectare. A variância será igual a 0,5² (sacas/hectare)².” (ENEM 2012)

5.2.6 Desvio Padrão

1. Após observar a animação, assinale a opção que corresponde ao desvio padrão:

a) O desvio padrão indica a dispersão dos dados com relação à mediana, dentro de uma amostra.

b) O desvio padrão indica a dispersão dos dados com relação à moda, dentro de uma amostra.

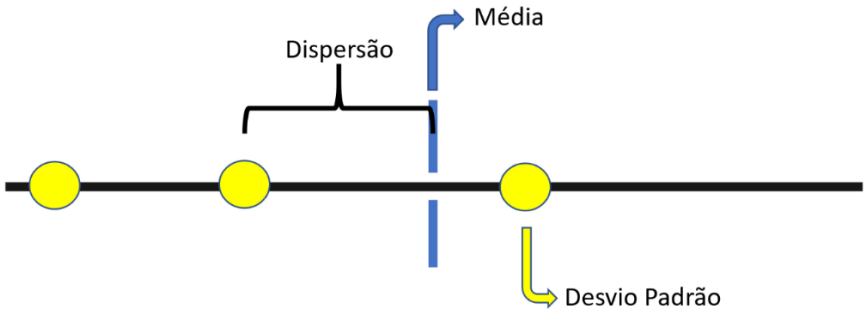
c) O desvio padrão indica a dispersão dos dados com relação à média e a mediana, dentro de uma amostra.

d) O desvio padrão indica a dispersão dos dados com relação à média, dentro de uma amostra.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra d, como vemos a seguir:

Figura 44: Imagem da resolução da atividade um do desvio padrão



Fonte: Autoria própria

Observamos que o desvio padrão é uma medida que expressa o grau de

dispersão de um conjunto de dados, ou seja, ele indica o quanto um conjunto de dados é homogêneo.

2. (ENEM 2016) “O Procedimento de perda rápida de "peso"é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens"antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Tabela 4: Imagem da atividade dois do desvio padrão

Atleta	1ª pesagem (kG)	2ª pesagem (kG)	3ª pesagem (kG)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Fonte: ENEM 2016

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. A primeira luta foi entre os atletas:

a) I e III.

b) I e IV.

c) II e III.

d) II e IV.

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra c, como vemos a seguir:

Para encontrar os atletas mais regulares usaremos o desvio padrão, pois essa medida indica a variabilidade das medidas em torno da média. O atleta III é o que apresenta o menor desvio padrão (4,08 kg), logo esse atleta é o mais regular. O atleta II é o menos regular, com maior desvio padrão (8,49 kg).” (ENEM 2016)

3. (Cesgranrio 2010 - IBGE) No último mês, Alípio fez apenas 8 ligações de seu telefone celular cujas durações, em minutos, estão apresentadas no rol a seguir:

5 − 2 − 11 − 8 − 3 − 8 − 7 − 4. O valor aproximado do desvio padrão desse conjunto de tempos, em minutos, é:

a) 3,1

b) 2,8

c) 2,5

d) 2,2

Resolução da questão:

A alternativa correta é a letra b, como vemos a seguir:

O primeiro passo é encontrar a média.

$$\bar{x} = \frac{5 + 2 + 11 + 8 + 3 + 8 + 7 + 4}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{48}{8}$$

$$\bar{x} = 6.$$

Posteriormente, calculamos a variância.

$$v = \frac{(5-6)^2 + (2-6)^2 + (11-6)^2 + (8-6)^2 + (3-6)^2 + (8-6)^2 + (7-6)^2 + (4-6)^2}{8}$$

$$V = \frac{64}{8}$$

$$V = 8.$$

Por último, basta calcular o desvio padrão.

$$DP = \sqrt{V}$$

$$DP = \sqrt{8}$$

$$DP \cong 2{,}8.$$

Portanto, no mês, o desvio padrão da duração das ligações feitas por Alípio foi de 2,8 minutos.

Com isso, apresentamos todas as atividades e resoluções que constam nesse projeto com as atividades dinâmicas.

O próximo capítulo contém os resultados da aplicação das atividades dinâmicas relativas à estatística descritiva e análise de “Clusters”.

6. Análise de Resultados

Nesta seção serão apresentados os resultados das atividades dimâmicas realizadas com os alunos do segundo e terceiro anos do ensino médio de uma escola estadual da cidade de Osasco.

6.1 Segundo ano

Para iniciar a aplicação das atividades, foi criado um Google formulário, que está na seção do apêndice, para verificar a participação dos alunos. Tal formulário incluia o termo de livre esclarecido, que é um documento que informa amplo esclarecimento da pesquisa, permitindo que o participante tome sua decisão de forma justa e sem constrangimentos, ou seja, efetivamente livre e consciente. Outro objetivo importante deste formulário era verificar quem poderia realizar a tarefa em casa, por possuir dispositivos (celular, tablets, computadores ou notebooks) com acesso à internet. Para os que não possuiam, foram marcados horários no laboratório de informática da escola. O motivo para realizar essas atividades em grupo é a possibilidade de interações durante as atividades, pois os alunos trocam ideias argumentando suas opiniões sobre o tema, entram em contato com formas de pensamento diferentes e podem chegar a conclusões diferentes do que realizando as atividades individuais. As formações dos grupos foi realizada de forma aleatória através de sorteio pelo número de chamada de cada turma. Os grupos foram formados em três componentes, sendo que, se o número de elementos da turma não fosse múltiplo de três, poderiam ser formados uma dupla ou quarteto. As formações dos grupos ficaram da seguinte maneira:

Tabela 5 - Turmas do 2º ano (38 grupos)

Turma	Alunos presentes	Total de alunos da turma	Números de trios	Números de duplas	Números de quartetos	Porcentagem de participação (%)
A	32	38	10	1	-	84,2
B	27	39	9	-	-	69,2
C	25	39	7	-	1	64,1
D	31	40	9	-	1	77,5
Total	115	156	35	1	2	73,7

Fonte: Autoria própria

Tabela 6 - Turmas do 3º ano (29 grupos)

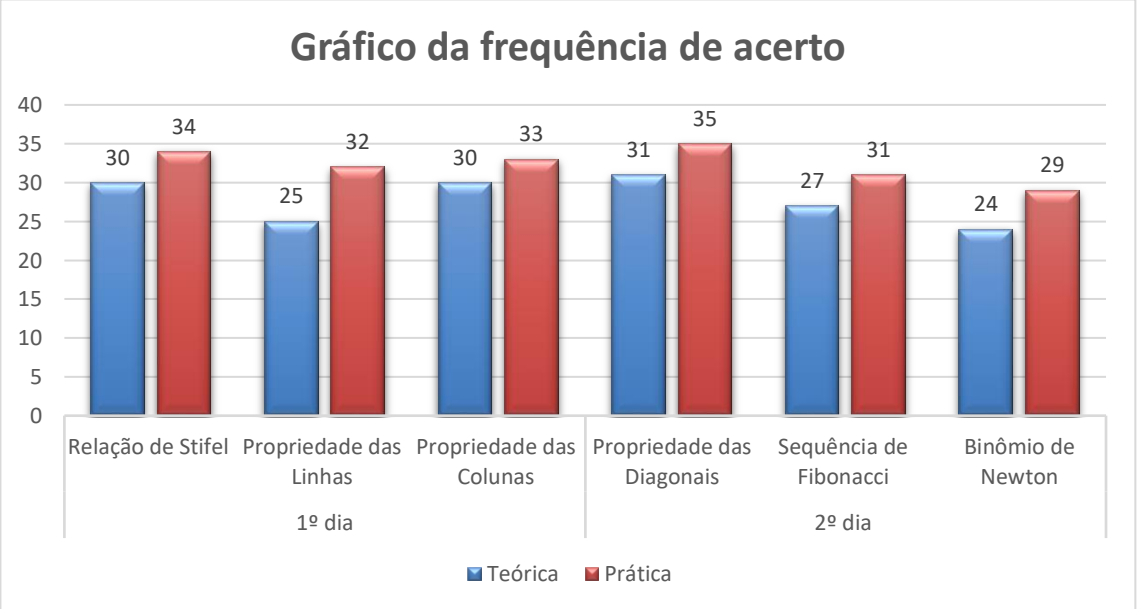
Turma	Alunos presentes	Total de alunos da turma	Números de trios	Números de duplas	Números de quartetos	Porcentagem de participação
A	31	42	9	-	1	73,8
B	34	41	10	-	1	82,9
C	25	42	7	-	1	59,5
Total	90	125	26	-	3	72,0

Fonte: Autoria própria

De modo geral, conseguimos mais de 70% de participação dos alunos do segundo e terceiro ano. Levando em conta o momento em que vivíamos, podemos afirmar que tivemos uma boa participação. Cada grupo foi atendido por um dos três professores de Matemática da escola durante a realização das atividades. O passo a passo do procedimento será mencionado no penúltimo parágrafo, na seção de metodologia.

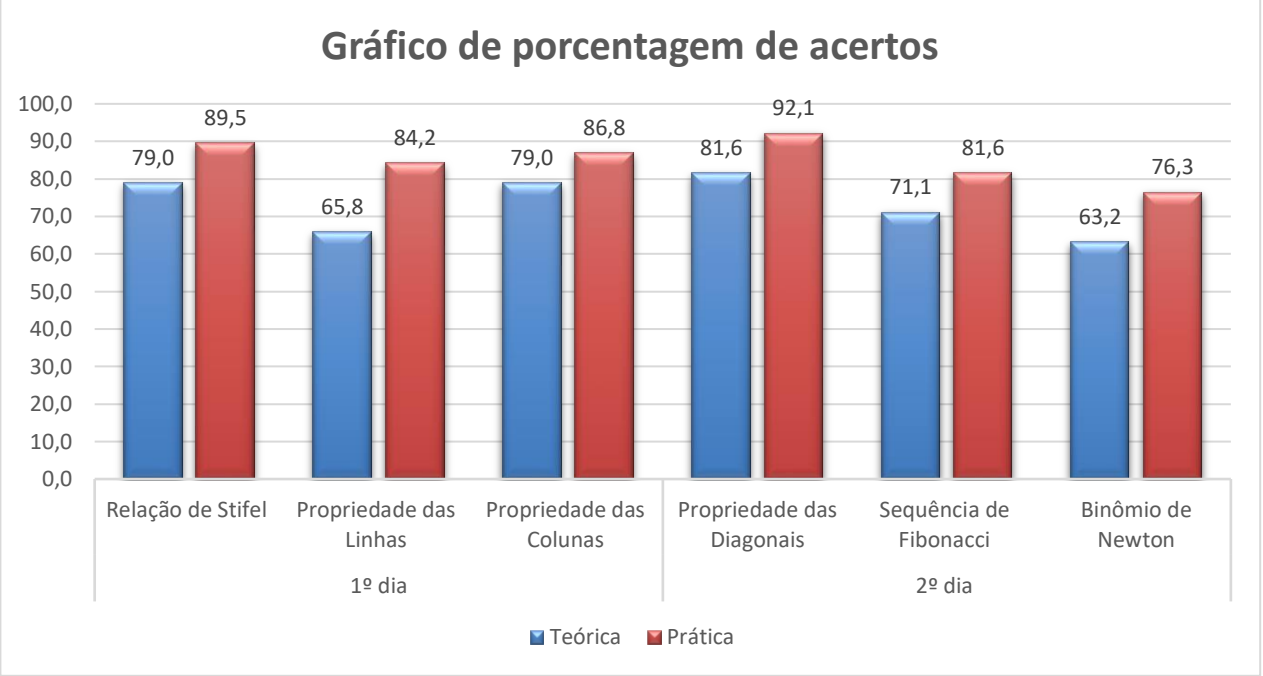
“Para a interpretação dos resultados foram aplicadas técnicas estatísticas: cálculo de frequências absolutas e relativas das quantidades de acertos das questões e construção de diagramas de barras. Com o objetivo de estudar se existe similaridades e padrões entre as pontuações obtidas nas atividades, foi realizada uma análise de “Clusters””. (Silva 2020)

Figura 45: Gráfico de frequência de acertos do segundo ano



Fonte: Autória própria

Figura 46: Gráfico de porcentagem de acertos do segundo ano



Fonte: Autória própria

Lembramos que neste trabalho chamamos de atividades práticas todas que necessariamente exigem cálculos para se encontrar a resposta. Já as atividades teóricas são aquelas que utilizam o raciocínio lógico e a principal ideia da animação, sem a necessidade de realizar algum tipo de cálculo.

Com respeito às atividades teóricas, os piores resultados ocorreram nas questões relacionadas as propriedades das linhas, no primeiro dia, e no Binômio de Newton no segundo dia, com respectivamente 65,8% e 63,2% de aprovação, que correspondem a 25 e 24 grupos responderam corretamente as perguntas, do total de 38. As demais perguntas de perfil teórico tiveram uma porcentagem de acerto superior a 70%.

Quanto às atividades práticas, observou-se que a porcentagem de aprovação de 76,3% na pergunta 12, associada ao Binômio de Newton. Assim, os resultados na parte prática foram positivos, levando-se em conta que o pior resultado em geral foi na atividade teórica desta propriedade.

O melhor resultado foi de 92,1 de acerto no geral, alcançado na propriedade das Diagonais, (que é a soma dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1º coluna até o de um elemento qualquer é igual elemento imediatamente abaixo dele desnecessário). O pior resultado foi de 69,7% de acerto no geral que abordaram os Binômios de Newton. Observa-se que neste caso, a característica

fundamental é que os coeficientes do desenvolvimento de um binômio de Newton podem ser definidos utilizando o triângulo de Pascal, de forma que os expoentes de base a (primeiro termo) são decrescentes de 1 em 1, de n até 0, enquanto os de base b (segundo termo) crescem de 1 em 1, de 0 até n.

"Ficou evidenciado que se os estudantes entendem corretamente a parte teórica antes da aplicação, a porcentagem de erro é reduzida. Isto pode ser notado pelas perguntas 3 e 4 do primeiro dia, que são respectivamente a teórica com 65,4% de acerto e a prática com 84,2% de acerto na propriedade das linhas, com aumento de 18,4%. Isso se deve ao "design" das atividades, pois o estudante só passa para atividade seguinte após ver a resolução da anterior e também podem esclarecer algumas dúvidas com o professor aplicador, reduzindo a chance de erro na atividade prática de cada propriedade.

Antes de responder à aplicação, os alunos receberam a resolução correta da parte teórica e podiam perguntar ao professor aplicador qualquer dúvida sobre a atividade teórica, e assim, foram evitados erros na parte aplicada. Essa melhora ocorreu nos seis tipos de atividades. Outro fato que podemos analisar é relativo aos erros dos estudantes nas atividades. Esses erros foram classificados da seguinte maneira: os alunos entenderam o conteúdo, porém cometeram erros nas operações básicas, que representou 7,4% dos erros e os que não entenderam o conceito, aproximadamente 13,4%.

Em geral, a atividade dinâmica alcançou 79,2% de aprovação, juntando todas as atividades desenvolvidas na parte de Triângulo de Pascal e Binômios de Newton.

Para a análise de "clusters", as variáveis avaliadas são binárias, sendo que o valor 1 é associado às respostas corretas e 0 representa respostas incorretas ou respostas em branco.

Para avaliar se existe similaridade entre as pontuações obtidas nas atividades, utilizamos uma análise de cluster, através do programa IBM SPSS Statistics versão 22.0, do ano 2013. O objetivo era buscar algum padrão de modo que fosse possível agrupar as atividades (variáveis) com base nas distâncias, apresentadas na matriz de proximidade a seguir. Essa matriz forneceu os valores de todas as distâncias euclidianas ao quadrado para as pontuações de todos os pares de atividades. Foi realizada uma análise de "clusters" para classificar as perguntas em grupos, de forma que perguntas dentro de um mesmo cluster sejam muito parecidos, e as perguntas em diferentes "clusters" sejam distintos entre si. Usamos um método hierárquico pois

ele gera vários agrupamentos possíveis, onde um cluster pode ser mesclado a outro em determinado passo do algoritmo.” (Silva 2020) Ademais, esses métodos não exigem que já se tenha um número inicial de “clusters” e são considerados inflexíveis uma vez que não se pode trocar um elemento de grupo. Esta mesma metodologia foi utilizada na dissertação de Quintal, em 2006, sob o título “Análise de “clusters” aplicada ao Sucesso/Insucesso em Matemática” para obtenção do mestrado em Ensino de Matemática na Universidade da Madeira em Portugal.

Para Bufon e Landim (2020) a partir de uma matriz inicial de dados obtém-se uma matriz simétrica de similaridades e inicia-se a detecção de pares de casos em função do coeficiente de similaridade escolhido. Para essa combinação, escolhe-se, segundo níveis hierárquicos de similaridade, entre os diversos procedimentos aglomerativos de tal modo que cada ciclo de agrupamento obedeça a uma ordem sucessiva no sentido do decréscimo de similaridade.

Partindo de uma matriz inicial de dados [n x p], sendo que *n são os* objetos e *p são os* atributos, feitas as comparações entre linhas, obtém-se uma matriz inicial de coeficientes de similaridade [n x n]. Se a comparação for entre colunas, obtém-se uma matriz inicial de coeficientes de similaridade inicial [p x p]. Diversas medidas de proximidade têm sido propostas, somente duas são geralmente usadas: o coeficiente de correlação de Pearson e a medida de distância euclidiana. Se as variáveis forem padronizadas a partir da matriz inicial de dados, dando o mesmo peso a cada uma delas, qualquer um desses coeficientes poderá ser diretamente transformado no outro.

Na matriz de coeficientes de similaridade, estes representam o grau de semelhança entre pares de objetos e os mesmos deverão ser arranjados de acordo com os respectivos graus de similaridade de modo a ficarem agrupados segundo uma disposição hierárquica. Os resultados quando organizados em gráfico, do tipo dendrograma, mostram os agrupamentos realizados.

Utilizamos o procedimento hierárquico, com a distância euclidiana ao quadrado, pelo método do vizinho mais próximo, ou seja, mímina distância entre as variáveis, que prioriza elementos mais próximos e deixa os mais distantes em segundo plano. Essas medidas de distância estão apresentadas na matriz da Tabela 7.

Tabela 7 – Matriz de proximidade das pontuações do segundo ano

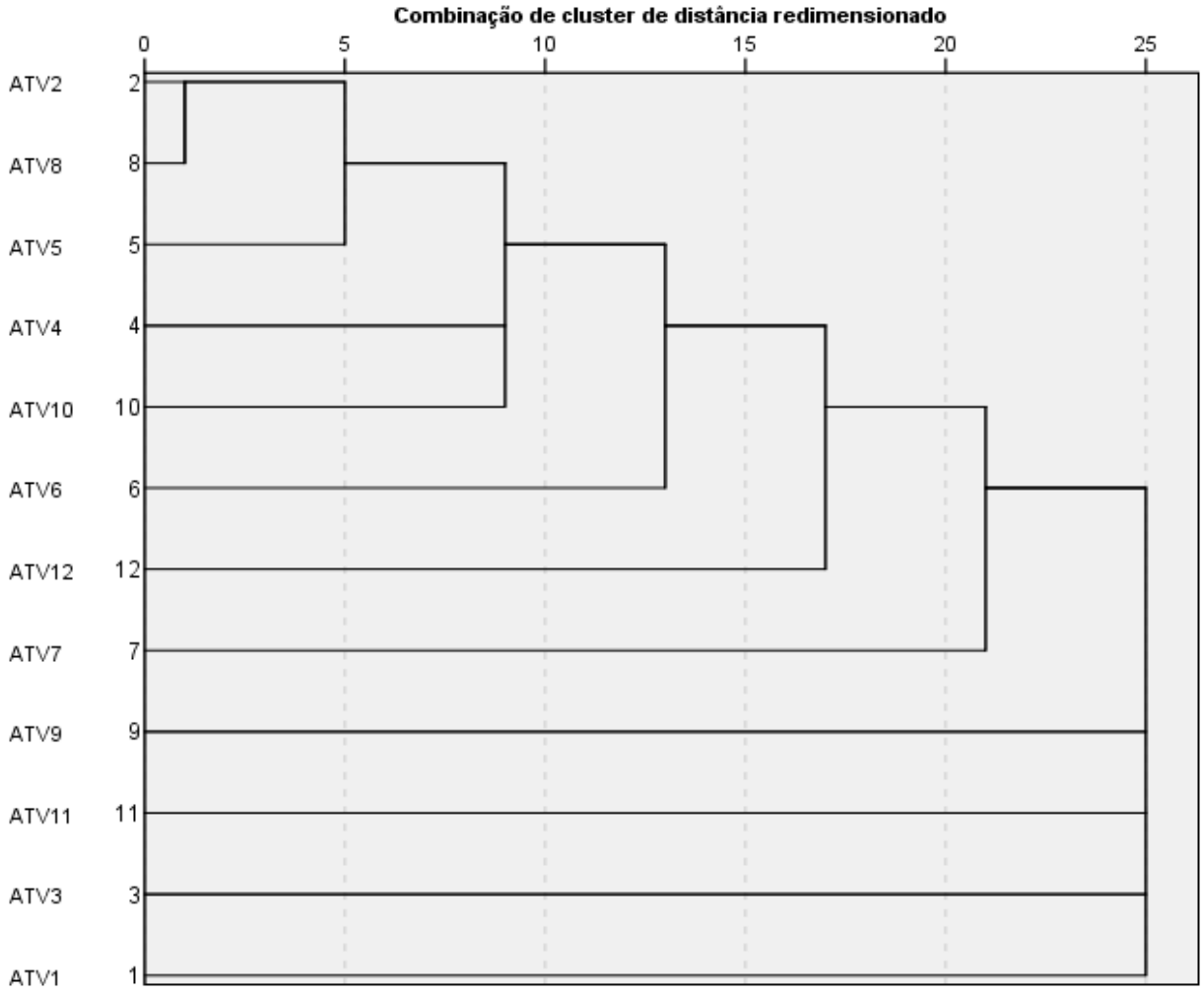
Caso	Entrada de arquivo de matriz											
	ATV1	ATV2	ATV3	ATV4	ATV5	ATV6	ATV7	ATV8	ATV9	ATV10	ATV11	ATV12
ATV1	0	10	15	12	14	11	11	9	13	11	16	13
ATV2	10	0	9	8	4	7	9	3	9	9	10	7
ATV3	15	9	0	15	11	12	14	12	12	18	13	16
ATV4	12	8	15	0	12	7	11	5	11	5	14	9
ATV5	14	4	11	12	0	11	11	7	11	13	10	9
ATV6	11	7	12	7	11	0	10	6	10	8	17	10
ATV7	11	9	14	11	11	10	0	8	12	10	15	12
ATV8	9	3	12	5	7	6	8	0	10	6	13	8
ATV9	13	9	12	11	11	10	12	10	0	10	9	10
ATV10	11	9	18	5	13	8	10	6	10	0	13	12
ATV11	16	10	13	14	10	17	15	13	9	13	0	15
ATV12	13	7	16	9	9	10	12	8	10	12	15	0

Fonte: Autoria própria

Tanto os dados da tabela de proximidade quanto o dendrograma utilizaram como variáveis as respostas dos estudantes com valores binários, 0 e 1.

“Utilizando informações da matriz de proximidade, observa-se que a menor distância ocorreu entre as variáveis associadas às atividades 2 e 8 (distância igual a 3). Ambas são correspondentes à pontuações em perguntas de perfil prática, sendo a primeira correspondente a Relação Stifel e a segunda a Propriedade das Diagonais, nas quais foram obtidos os melhores resultados. Por outro lado, a maior distância ocorreu entre as variáveis 3 e 10 (distância igual a 18), sendo a primeira variável relacionada à Propriedade das Linhas parte teórica e a segunda à Frequência de Fibonacci parte prática.” (Silva 2020)

Figura 47: Dendrograma usando ligação única do segundo ano



Fonte: Autoria própria

O dendrograma da Figura 47 forneceu um grupo compostos pelas atividade e 2, 8, 5, 4, 10, 6 e 12, e as cinco variáveis demais não foram agrupadas, utilizando-se o nível de similaridade de 20. Observa-se que as variáveis 7, 9, 11, 3 e 1 ficaram fora do grupo, correspondendo justamente às atividades teóricas, com exceção da atividade 5, que está relacionada à Propriedade das Colunas. O único grupo do Dendrograma é integrado pelas atividades 2, 8, 5, 4, 1, 6 e 12, sendo todas as práticas com a inclusão da teórica sobre a Propriedade das Colunas.

Utilizamos o software citado anteriormente para analisar as variáveis. Recordamos que as variáveis citadas são as respostas dos estudantes a atividade, de forma binários, de modo que 1 equivale a cada atividade respondida de maneira correta e 0 a cada atividade respondida incorretamente. A matriz de correlação é uma tabela quadrada que mostra os coeficientes de correlação de Pearson entre diferentes variáveis em um conjunto de dados. O coeficiente de correlação de Pearson é uma

medida da associação linear entre duas variáveis. Assume um valor entre -1 e 1 onde:

a) -1 indica uma correlação linear perfeitamente negativa entre duas variáveis;
b) 0 indica nenhuma correlação linear entre duas variáveis;
c) 1 indica uma correlação linear perfeitamente positiva entre duas variáveis.

Quanto mais distante o coeficiente de correlação estiver de zero, mais forte será a relação entre as duas variáveis.

A matriz de similaridade é o conceito oposto ao da matriz de distância. Os elementos de uma matriz de similaridade medem as similaridades dos objetos em pares, quanto maior a similaridade de dois objetos, maior o valor da medida.

Primeiramente, obtivemos a Matriz de Correlação, contendo os coeficientes de correlação linear de Pearson entre todos os pares de variáveis a seguir:

Tabela 8: Matriz de correlação referente ao segundo ano

	ATV1	ATV2	ATV3	ATV4	ATV5	ATV6	ATV7	ATV8	ATV9	ATV10	ATV11	ATV12
ATV1	1,000	,033	,036	-,047	-,108	-,010	,088	,088	,097	,088	,007	,016
ATV2	,033	1,000	,476	,087	,664	,120	,058	,536	,348	,058	,449	,414
ATV3	,036	,476	1,000	-,008	,308	,212	,087	,200	,274	-,200	,254	-,010
ATV4	-,047	,087	-,008	1,000	-,047	,258	-,020	,408	,201	,539	,118	,268
ATV5	-,108	,664	,308	-,047	1,000	-,010	,088	,328	,240	-,079	,408	,320
ATV6	-,010	,120	,212	,258	-,010	1,000	,016	,175	,267	,217	-,136	,149
ATV7	,088	,058	,087	-,020	,088	,016	1,000	,113	,146	,124	,059	,055
ATV8	,088	,536	,200	,408	,328	,175	,113	1,000	,243	,364	,181	,296
ATV9	,097	,348	,274	,201	,240	,267	,146	,243	1,000	,295	,475	,327
ATV10	,088	,058	-,200	,539	-,079	,217	,124	,364	,295	1,000	,200	,055
ATV11	,007	,449	,254	,118	,408	-,136	,059	,181	,475	,200	1,000	,088
ATV12	,016	,414	-,010	,268	,320	,149	,055	,296	,327	,055	,088	1,000

Fonte: Autoria própria

Com base nessa matriz, observamos que a maior correlação ocorre entre as pontuações das atividades 2 e 5, 0,664, relacionadas às atividades de prática da relação de Stifel e a teórica da propriedade das colunas. Também temos as correlações dos pares das atividades 2 e 8 e 4 e 10, que foram maiores que 0,5.

Por outro lado, identificamos a menor correlação entre as pontuações das atividades 3 e 10, com valor -0,200. Conjuntamente tivemos outras correlações negativas, como mostra a Tabela 9.

Tabela 9: Tabela de correlação,referente ao segundo ano

ATV		Tipos de atividades
1	4	Teórica da relação de Stifel e prática da propriedade de linhas
1	5	Teóricas da relação de Stifel e da propriedade de colunas
1	6	Teórica da relação de Stifel e prática da propriedade de colunas
3	4	Teórica da propriedade das linhas e prática da propriedade de linhas
3	10	Teórica da propriedade das linhas e prática da sequência de Fibonacci
3	12	Teórica da propriedade das linhas e prática de Binômio de Newton
4	5	Prática da propriedade de linhas e teórica da propriedade das colunas
4	7	Prática da propriedade de linhas e teórica da propriedade das diagonais
5	6	Teórica e prática da propriedade das colunas
5	10	Teórica da propriedade das colunas e prática da sequência de Fibonacci
6	11	Prática da propriedade de colunas e teórica de Binômio Newton

Fonte: Autoria própria

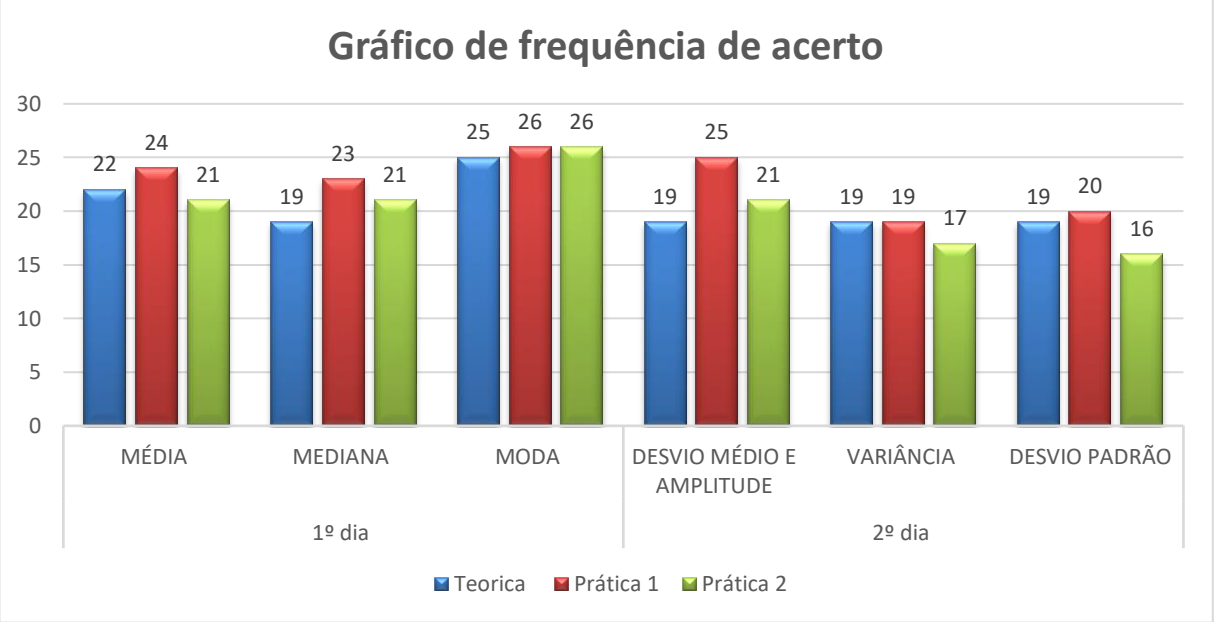
Todas essas atividades citadas na tabela anterior mostram que os resultados não estão correlacionados significamente. As demais atividades não citadas estão com correlacionadas de forma muito baixa.

Outro dado a ser analisado é o determinante da matriz de correlação entre essas variáveis. Esse deteminante varia entre 0 e 1 e quando seu valor é muito elevado, as variáveis são, de modo geral, pouco correlacionadas. Por outro lado,valores do determinante próximos de 0 ou iguais a 0 são indicativos de que há correlações cada vez mais altas dentro dessa matriz. Nesse estudo o valor do determinante foi de 0,026, indicando forte relação entre as pontuações das diversas atividades.

6.2 Terceiro ano

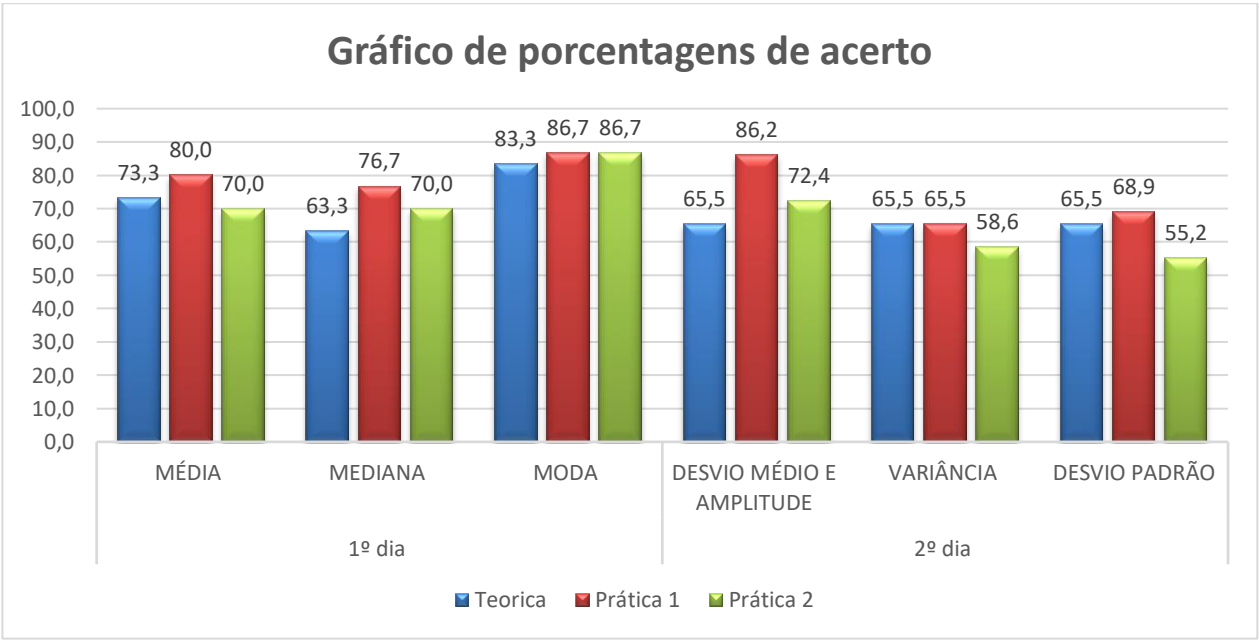
Para as atividades de Estatística foi feita a mesma análise, primeiramente passando pelo cálculo de frequências absolutas e relativas das quantidades de acertos das questões e posteriormente pela Análise de “clusters”.

Figura 48: Gráfico de frequência de acertos.



Fonte: Autoria própria

Figura 49: Gráfico de porcentagem de acertos.



Fonte: Autoria própria

"Com respeito às atividades teóricas, o pior resultado ocorreu na questão relacionada à mediana, com 63,3% de acerto, sendo que 19 grupos de estudantes responderam corretamente. As demais perguntas teóricas apresentaram uma porcentagem de acerto superior a 65%, sendo que o maior valor alcançado foi na atividade que envolvia a medida de tendência central moda, com 83,3% de acerto, que corresponde a 25 grupos de estudantes do total de 29." (Silva 2020) Analisando

globalmente, os resultados na parte teórica e a prática, observa-se uma média das porcentagens de acerto de 69,4% e 73,1% respectivamente. O pior resultado foi para a atividade prática 2 do desvio padrão, alcançando apenas 55,2% de acerto. Observa-se que neste caso, a característica fundamental é que o estudante utilizasse diversos conceitos como média, desvio, potência, raiz quadrada e fração.

Os melhores resultados foram alcançados para a moda, em que uma análise geral alcançou 85,6% de aprovação. Outro fato que podemos analisar são os erros dos estudantes nas atividades. Esses erros foram classificados da seguinte maneira: os alunos entenderam o conteúdo, porém cometeram erros nas operações básicas, que representou 17% e os que não entenderam o conceito aproximadamente 11,1%.

Em geral, juntando todas as atividades desenvolvidas na parte de Estatística, a atividade dinâmica alcançou 71,9% de aprovação.

Da mesma maneira que para as atividadesdo Triângulo de Pascal, construímos a matriz de proximidade e posteriormente o Dendrograma para as pontuações obtidas nas atividades, utilizando o mesmo passo a passo: procedimento hierárquico, método do vizinho mais próximo e distância euclidiana ao quadrado.

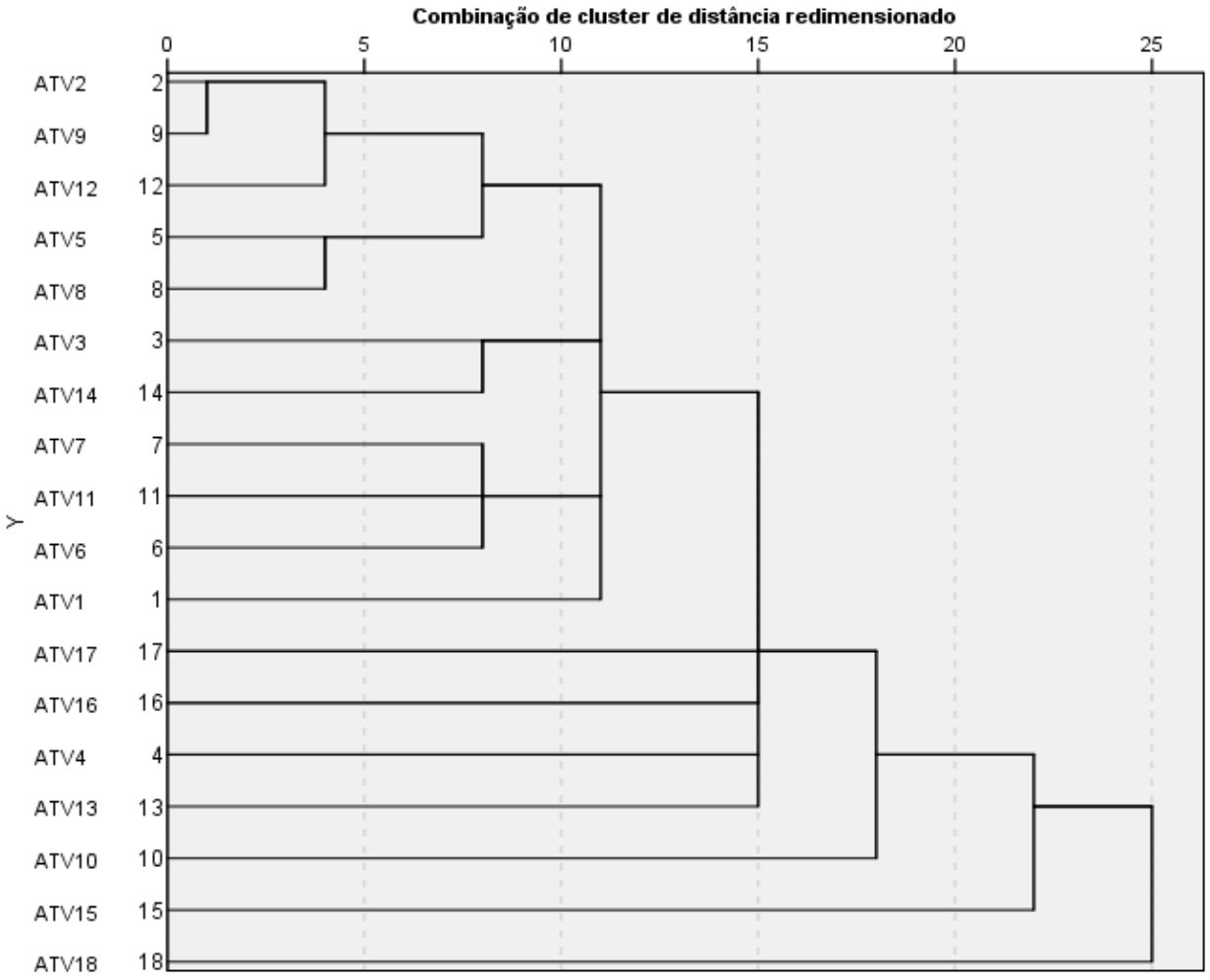
Tabela 10: Matriz de proximidade referente ao terceiro ano

	Entrada de arquivo de matriz																	
Caso	ATV1	ATV2	ATV3	ATV4	ATV5	ATV6	ATV7	ATV8	ATV9	ATV10	ATV11	ATV12	ATV13	ATV14	ATV15	ATV16	ATV17	ATV18
ATV1	0	10	13	15	13	7	7	10	10	11	7	15	15	13	11	13	8	14
ATV2	10	0	13	11	11	13	7	8	4	9	9	7	9	15	15	13	8	12
ATV3	13	13	0	12	10	12	10	7	9	10	12	10	12	6	16	8	15	15
ATV4	15	11	12	0	12	16	10	11	11	20	12	12	8	16	20	8	13	17
ATV5	13	11	10	12	0	12	10	5	9	16	8	10	12	14	12	12	11	15
ATV6	7	13	12	16	12	0	10	7	11	14	6	12	16	10	10	12	13	13
ATV7	7	7	10	10	10	10	0	7	7	12	6	12	14	12	14	8	13	15
ATV8	10	8	7	11	5	7	7	0	6	13	7	9	9	9	13	11	12	14
ATV9	10	4	9	11	9	11	7	6	0	9	7	5	9	11	15	11	10	14
ATV10	11	9	10	20	16	14	12	13	9	0	14	12	16	10	12	14	13	11
ATV11	7	9	12	12	8	6	6	7	7	14	0	10	14	14	10	10	9	15
ATV12	15	7	10	12	10	12	12	9	5	12	10	0	12	12	16	14	13	13
ATV13	15	9	12	8	12	16	14	9	9	16	14	12	0	12	20	12	13	13
ATV14	13	15	6	16	14	10	12	9	11	10	14	12	12	0	16	12	15	15
ATV15	11	15	16	20	12	10	14	13	15	12	10	16	20	16	0	18	11	15
ATV16	13	13	8	8	12	12	8	11	11	14	10	14	12	12	18	0	17	19
ATV17	8	8	15	13	11	13	13	12	10	13	9	13	13	15	11	17	0	16
ATV18	14	12	15	17	15	13	15	14	14	11	15	13	13	15	15	19	16	0

Fonte: Autoria própria

“Utilizando informações da matriz de proximidade, observa-se que a menor distância ocorreu entre as variáveis 2 e 9 (distância igual a 4). Ambas são correspondentes a pontuações em perguntas de prática 1 e 2, sendo a primeira correspondente à média e a segunda à moda.” (Silva 2020)

Figura 50: Dendrograma das atividades do terceiro ano



Fonte: Autoria própria

O dendrograma da Figura 50 forneceu um grupo e três variáveis independentes para o nível de similaridade de 16. Observa-se que as variáveis 10, 15 e 18 ficaram independentes, sendo todas essas atividades aplicadas no segundo dia. Outro fato é que as variáveis 15 e 18 são relacionadas às atividades práticas 2 das medidas de dispersão (variância e desvio padrão), que tiveram os menores índices de acerto, as duas únicas atividades com porcentagem de acerto abaixo de 60%. Já, todas as demais atividades que estão em um único grupo obtiveram aprovação maior que 63%. Também percebemos que todas as atividades do primeiro dia estão inclusas neste grupo, que estão relacionadas com as medidas de tendência central.

Usamos o software citado anteriormente, analisaremos a Matriz de Correlação na Tabela 11.

Tabela 11: Matriz de correlação das atividades do terceiro ano

	ATV1	ATV2	ATV3	ATV4	ATV5	ATV6	ATV7	ATV8	ATV9	ATV10	ATV11	ATV12	ATV13	ATV14	ATV15	ATV16	ATV17	ATV18
ATV1	1,000	-,044	-,168	-,240	-,288	,373	,242	-,192	-,192	,099	,242	-,348	-,240	-,070	,181	-,070	,318	-,022
ATV2	-,044	1,000	-,282	,053	-,233	-,282	,082	-,155	,444	,245	-,183	,331	,245	-,331	-,198	-,139	,286	,139
ATV3	-,168	-,282	1,000	,039	,066	-,036	-,023	,297	,044	,201	-,247	,137	,039	,526	-,205	,364	-,247	-,091
ATV4	-,240	,053	,039	1,000	-,012	-,285	,131	-,008	-,008	-,526	-,080	,039	,389	-,221	-,462	,389	-,016	-,216
ATV5	-,288	-,233	,066	-,012	1,000	-,125	-,204	,386	-,173	-,371	,043	,066	-,012	-,191	,089	-,012	,025	-,118
ATV6	,373	-,282	-,036	-,285	-,125	1,000	-,023	,297	-,210	-,123	,424	-,036	-,285	,201	,265	,039	-,081	,064
ATV7	,242	,082	-,023	,131	-,204	-,023	1,000	-,136	-,136	-,080	,130	-,247	-,290	-,080	-,133	,341	-,268	-,159
ATV8	-,192	-,155	,297	-,008	,386	,297	-,136	1,000	-,115	-,246	-,136	,044	,230	,230	-,055	-,008	-,228	-,079
ATV9	-,192	,444	,044	-,008	-,173	-,210	-,136	-,115	1,000	,230	-,136	,550	,230	-,008	-,285	-,008	,017	-,079
ATV10	,099	,245	,201	-,526	-,371	-,123	-,080	-,246	,230	1,000	-,290	,039	-,221	,237	,127	-,068	-,016	,221
ATV11	,242	-,183	-,247	-,080	,043	,424	,130	-,136	-,136	-,290	1,000	-,023	-,290	-,290	,273	,131	,164	-,159
ATV12	-,348	,331	,137	,039	,066	-,036	-,247	,044	,550	,039	-,023	1,000	,039	,039	-,205	-,123	-,081	,064
ATV13	-,240	,245	,039	,389	-,012	-,285	-,290	,230	,230	-,221	-,290	,039	1,000	,084	-,462	,084	-,016	,075
ATV14	-,070	-,331	,526	-,221	-,191	,201	-,080	,230	-,008	,237	-,290	,039	,084	1,000	-,168	,084	-,173	-,070
ATV15	,181	-,198	-,205	-,462	,089	,265	-,133	-,055	-,285	,127	,273	-,205	-,462	-,168	1,000	-,315	,193	-,053
ATV16	-,070	-,139	,364	,389	-,012	,039	,341	-,008	-,008	-,068	,131	-,123	,084	,084	-,315	1,000	-,330	-,362
ATV17	,318	,286	-,247	-,016	,025	-,081	-,268	-,228	,017	-,016	,164	-,081	-,016	-,173	,193	-,330	1,000	-,155
ATV18	-,022	,139	-,091	-,216	-,118	,064	-,159	-,079	-,079	,221	-,159	,064	,075	-,070	-,053	-,362	-,155	1,000

Fonte: Autoria própria

Com base nessa matriz, observamos que a maior correlação ocorre entre as pontuações das atividades 9 e 12, com valor de 0,550, relacionadas às atividades de prática 2 de desvio médio e amplitude e à atividade prática e da moda. Também temos a correlação do par das atividades 3 e 14, 0,526, que mostra uma relação moderada entre essas variáveis. Por outro lado, identificamos a menor correlação entre as atividades 4 e 10, com valor -0,526, relacionadas as atividades teóricas da mediana e desvio médio respectivamente. Esse valor negativo do coeficiente de correlação é indicativo que, quanto maior a pontuação em uma atividade, menor a pontuação na outra. Outro fato a ser mencionado é que nesse estudo, o valor do determinante da matriz de correlação foi de 0,000. O software utilizado calcula o determinante com três casas decimais. O valor obtido mostra que as variáveis tem uma forte relação linear.

7 Considerações finais

Neste trabalho, desenvolvemos um estudo sobre alguns tópicos de Estatística, Triângulo de Pascal e Binômios de Newton. Exploramos as principais referências sobre esses tópicos, através de busca na literatura, a fim de embasar esta pesquisa. Como o intuito deste projeto é criar um recurso educacional baseado nas tecnologias e encontrar padrões nas atividades dinâmicas, usamos como parâmetro metodologica o Design Based Research, de acordo com Barab e Squire (2004 pg. 2) é “uma série de procedimentos de investigação aplicados para o desenvolvimento de teorias, artefatos e práticas pedagógicas que sejam de potencial aplicação e utilidade em processos ensino-aprendizagem existentes.”

Nosso objetivo de pesquisa era usar a tecnologia para propor as atividades que explorassem a parte do raciocínio lógico, generalização das propriedades ou medidas em um ambiente que permitisse a socialização dos estudantes, nesse momento de pandemia, no qual tivemos que reaprender e superar novos obstáculos a fim de conseguir alcançar, motivar e levar a aprendizagem a eles.

No primeiro teste, que ocorreu no ano de 2020, obtivemos resultados que demonstraram o potencial das atividades dinâmicas com animações que, além de fazer parte de nossa pesquisa, forneceu um norte sobre possíveis modificações para a aplicação do projeto em 2021. Destacamos que os resultados parciais deste primeiro teste foram divulgados em dois congressos de Educação Matemática. A primeira na Jornada Nacional de Educação Matemática (JEM), e o segundo no Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM), como será detalhado na seção do apêndices, na página 112 desta dissertação.

Acreditamos que a aplicação do primeiro teste foi uma das etapas mais importantes para a segunda aplicação, pois a partir dele, conseguimos melhorar e adaptar as atividades, para que mais estudantes participassem e se sentissem motivados a aprender nesse tempo de pandemia. Tivemos a chance de analisar e aprimorar nossas atividades, colocando uma intervenção a mais, com o objetivo de reduzir os erros dos estudantes com conteúdo defasados, como operações com números decimais para Estatísticas e o cálculo de potências para o triângulo de Pascal.

O uso das animações, realizados de forma remota, permitiu o desenvolvimento do raciocínio lógico e estimulou o pensamento e a criatividade.

Como as atividades estão em um formato similar a de um jogo de quiz, assim como o conteúdo com o design de animações coloridas, e por se tratar de uma aula com

uso de tecnologia, acreditamos que esse fato aumentou a motivação dos estudantes a realizarem as atividades. Por outro lado, com a formação de grupos de trabalho, houve uma troca de conhecimento, que estimulou a socialização entre os estudantes, em um momento em que não era possível comparecer às aulas presenciais, devido à pandemia. Observamos ainda que os estudantes desenvolveram a organização, a concentração e o raciocino lógico e o senso cooperativo com o objetivo de executarem as atividades de forma correta.

Essas animações com atividades dinâmicas foram uma ferramenta tecnológica de apoio ao aprendizado que permitiu explorar o conceito e os cálculos de medidas de tendência central e dispersão. Vale ressaltar que esse modelo de atividade foi criado para que os alunos conseguissem ser mais autônomos na busca de conhecimentos, deixando o professor com um papel de mediador com o apoio da tecnologia.

Na parte de Triângulo de Pascal e Distribuição Binomial, percebemos que os estudantes se saíram melhor nas atividades de aplicação das propriedades do que nas atividades conceituais associadas. Esse fator se deve ao design das atividades, pois após a responder as atividades teóricas, os estudantes passavam pela resposta comentada e posteriomente, executavam as atividades de aplicação.

A aplicação final nos mostrou que o menor índice de acerto foi na parte da Binômio de Newton, como mencionado na análise dos resultados. Para uma nova aplicação, recomendamos que o professor destine mais tempo para esse tópico e que a animação seja executada mais vezes, para que os estudantes percebam o padrão e generalizem para todos os demais casos.

Já, na parte de Estatística, notamos que os estudantes se saíram melhor nas atividades relacionadas às medidas de tendência central que nas de dispersão. Percebemos que, na parte de dispersão, há uma maior dificuldade por envolver vários cálculos utilizando as medidas de centralidade, potência e radiciação. No primeiro dia de trabalho, fizemos uma revisão de operações com números decimais, e com isso, obtivemos melhores resultados na parte das medidas de centralidade. Lembramos que no teste piloto só aplicamos as atividades relativas às medidas de tendência central.

Recomendamos que, antes de aplicar a segunda parte, relacionada às medidas de dispersão, o professor faça uma revisão de potência e radiciação para que os estudantes tenham melhor aproveitamento nessas atividades, visto que são conteúdos base para efetuar os cálculos da medida de dispersão.

No final das atividades tivemos a oportunidade de conversar com os estudantes,

a fim de buscar feedback sobre as atividades aplicadas.

1. O grupo 18b (turma B) do segundo ano mencionou que a forma como foi colocada a animação ajudou muito para o entendimento de cada propriedade, e que gostou da interação com os colegas de aula em uma atividade.

2. O grupo 9a (turma A) do terceiro ano alegou que as animações são divertidas e que tornaram o entendimento sobre o conteúdo mais fácil.

3. A maioria dos grupos (cerca de 46 grupos de um total de 67) relatou que a resolução das atividades teóricas ajudou muito para resolver as atividades práticas.

4. Uma professora que assistiu a uma aplicação do segundo ano no primeiro dia comentou que as animações produzidas ajudou muito na aprendizagem dos alunos, e que as cores escolhidas chamavam muita atenção, o que também facilitou que os alunos ficassem “vidrados” no que estava acontecendo.

5. Uma aluna do segundo ano escreveu no chat o seguinte depoimento: - Eu gostei para ser sincera, de tudo. Principalmente porque quando chegou na segunda parte das atividades você percebe que seu olho está “treinado” para ver a animação e conseguir encontrar os padrões.

Pretendo continuar aprimorando essa ferramenta para uma página web, junto com um tutorial, para que possa auxiliar professores a utilizarem essa ferramenta pedagógica e criar um campo para que os professores expressem novas ideias e assim, aprimorar as animações e criar novas atividades. Outro fato também a ser aprimorado são as interações dos estudantes com as atividades dinâmicas com animações. Para divulgar essas animações, pretendo participar de encontros de divulgação científica, disponibilizá-las em grupos de WhatsApp de professores do estado, além de divulgar em páginas de influenciadores da área de educação matemática através das redes sociais.

Proporemos para futuros trabalhos a expansão desse tipo de ferramentas a mais tópicos, com a colaboração de outros professores, a fim de aprimorar esse tipo de ferramenta.

Referências bibliográficas

AFFONSO, A. O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton. PROFMAT. UFF, Niterói, 2014;

ANDRÉ, M.; LÜDKE, M..Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2013. BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. UNO, n. 25, pg.41-58, 2000. Disponível em . Acesso em: 16 nov. 2019.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. v. 3., pg. 62-77, UFSC, 2008.

BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-based research: putting a stake in the ground. Journal of the Learning Sciences, v. 13, n. 1, p. 2, 2004.

BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. UNO, n. 25, pg.41-58, 2000. Disponível em . Acesso em: 16 nov. 2019.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. Matemática. 1a ed. São Paulo, SP: Moderna, 2004. v. 3.

BEHAR, P. A. O Ensino Remoto Emergencial e a Educação a Distância**.** 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/coronavirus/base/artigo-o-ensino-remoto-emergencial-e-a-educacao-a-distancia/>. Acessado em 17/01/2021

BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. B. How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. International Statistical Review, v. 75, n. 3, pg. 372-396, dez. 2007. Disponível em: < http://www3.interscience.wiley.com/journal/118698329/issue>. Acesso em: 10 Nov 2019.

BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. B. Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice. New York: Springer, 2008.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Tecnologias digitais e a relação entre teoria e prática: uma análise da produção em trinta anos de BOLEMA. Bolema, v. 29, n. 53, Rio Claro, Dec. 2015.

BOYER, C. B. História da Matemática. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1991. pg.496.

BROWN, A. L. Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. The Journal of The Learning Sciences, 2(2), pg.141–178, 1992.

BUFON, A. G. M.; LANDIM, P. M. B. Análise da Qualidade da Água por Metodologia Estatística Multivariada na Represa Velha. (CEPTA/IBAMA/PIRASSUNUNGA/SP). **Holos Environment**, *[S. l.]*, v. 7, n. 1, p. 42–59, DOI: 10.14295/holos.v7i1.972. Disponível em: https://www.cea-unesp.org.br/holos/article/view/972. Acesso em: 3 out. 2022.

CAMPOS, CR; JACOBINI; OU; WODEWOTZKI, M. LL; FERREIRA, dhl Educação

Estatística não contexto da educação Crítica. No: Boletim de educação matemática (BOLEMA). V. 24, n. 39, pp. 473-494. Rio Claro/SP: UNESP-IGCE, 2011.

CARVALHO, C. Interações entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade. 2001. 628f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa.

CASTRO, L. S. V. Pontos de Estatística. 15a ed. Rio de Janeiro, RJ: Científica, 1970 pg. 13-15.

CAZORLA, I.; KATAOKA, V. Y.; SILVA, C. B. da. Trajetórias e perspectivas da educação estatística no Brasil: um olhar a partir do GT 12. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. de Q. e S.; ALMOULOUD, S. A. (Org.) Estudos e reflexões em educação estatística. Campinas: Mercado de Letras, 2010.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in education research. Educational Researcher, v.32, n.1, pg. 9-13, 2003.
COLLINS, A. Towards a design science of education. In E. Scanlon and T. O'Shea (Eds.), New directions in educational technology (pg. 15-22), 1992. Berlin: Springer.

CONCEITO. Tecnologia - Conceito, o que é, Significado. Disponível em: < https://conceitos.com/tecnologia/>

CORDANI, L. K. O ensino de estatística na universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência. 2001. Tese (Doutorado em Educação) –Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001, pg. 10.

COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do Geogebra: um estudo com professores de matemática. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 07, n. 2, pg. 246-265, 2012.

CURSINO, A. G. Contribuições das tecnologias para uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento de projetos no Ensino Fundamental I. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Engenharia de Lorena - Universidade de São Paulo, Lorena, 2017.
D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. Pg. 15-19. Disponível em: http://200.189.113.123/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf. Acesso em: 04 Nov. 2019.

DEMAS, R.; LIU, Y. (2005). Exploring students' conceptions of the standard deviation. Statistics Education Reseach Journal, v.4, n.1, pg. 55-82, mai 2005. Disponível em: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4(1). Acessado em 31 nov. 2019.

ERCOLE F. F.; MELO L. S.; ALCOFORADO C. L. G. C.. Revisão integrativa versus revisão sistemática. REME (Revista Mineira de Enfermagem). 2014. Voluma 8. Disponível em . Acessado em: 10/03/2021.
FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. Contribuição para um Pepensar... a Educação Algébrica Elementar. Campinas, UNICAMP. Pro-posições, 1993 V4 pg. 79

GAL, I. International Statistical Estatístico Review, V. 70, n. 1, pg. 1-25, 2002.

GALVÃO C. M.; SAWADA N. O.; ROSSI, L. A. A Prática Baseada em Evidências: Considerações Teóricas Para sua Implementação na Enfermagem Perioperatória. Rev Latino-am Enfermagem, Set./Out. v. 10, n. 5, pg. 690-695, 2002.

GARFIELD, J.; AHLGREN, A. Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. Journal for Research in Mathematics Education, Reston, v. 19, n. 1, pg. 44-63, Jan. 1988.

GIOVANNI, J. R. 360º Matemática Fundamental: uma nova abordagem. 2. ed. São Paulo: FTD, 2015. (Coleção, volume 2).

GNANADESIKAN, M.; SCHEAFFER, R. L.; WATKINS, A. E.; WITMER, J. A. An Activity -Based Statistics Course. Journal of Statistics Education, v. 5, n. 2, Minnesota, 1997.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. Revista de Administração de Empresas. São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, mar./abr., 1995a.

_____. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-9, maio/jun., 1995b.

GONÇALVES, D. C.; REIS, F. S. Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. Bolema, v. 27 n. 46, Rio Claro Aug. 2013.

GONZÁLES, N. Estatística Básica. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008.

GRAVINA M. A., Santarosa L. M. C. (1998) A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. Informática na Educação: Teoria e Prática. Vol. 1, n. 1. Porto Alegre: UFRGS – Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação.

HANKE T. A. F.. Padrões de Regularidades: Uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico. PUC, Belo Horizonte, 2008, pg.15 (Dissertação de mestrado).

Kelly, A. E.; Lesh R. A. Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. Routledge; 1ª edição. 2000.

KENSKI, V. M. Comunidades de aprendizagem: em direção a uma nova sociabilidade na educação. Revista de Educação e Informática Acesso, SEED/SP, n. 15, dez. 2001.

LABURÚ, C. A.; ARRUDA, S. M.; NARDI, R. Pluralismo metodológico no ensino de Ciências. Ciência e Educação. Bauru, v. 9, n. 2, pg. 247-260, 2003.

LEITE, A. P. Estimativa de Medidas de Tendência Central: uma intervenção de ensino. São Paulo, 2010. pg.161 Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2010.

LINDEN R. Técnicas de Agrupamento. Revista de Sistemas de Informação da FSMA n. 4 (2009) pp. 18-36

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. Caderno Cedes, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: htp://www.scielo.br/pdf/ccedes/ v28n74/v28n74a05.pdf. Acesso em: 11 out. 2021.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. Noções de probabilidade e estatística. 6. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004.

MAKAR, K., BAKKER, A., e BEN-ZVI, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. Mathematical Thinking and Learning, 13(1), pg. 152-173.

MALARA, M. B. S. Os Saberes Docentes do Professor Universitário do curso Introdutório de Estatística Expressos no discurso dos Formadores. Tese (doutorado em matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008 pg. 134.

MANDARINO, M. Tratamento da Informação. In: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. (Org.). Matemática: Ensino Fundamental / Coleção Explorando o Ensino. 1ed.Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação 9Básica, 2010, v. 17, pg. 201-240.

MARTIN, O. Da estatística política à sociologia estatística. Desenvolvimento e transformações da análise estatística da sociedade (séculos xvii-xix). Revista Brasileira de História, n. 41, pg. 13–34, 2001.

MELETION, M. M. Developing student's conceptions of variation: na untapped well in statistical reasoning. 2000. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade do Texas Austin, 2000.

MELO, M. Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos inicias do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação Matemática e Tecnológica, 2010 pg. 7.

MERRIAM, S. B. Qualitative research and case study applications in education. São Francisco (CA): Jossey-Bass, 1998.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. Números: uma introdução a Matemática. 3. Ed. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo, 2006 pg. 36.

MIRANDA, D. Binômio de Newton. Disponível em: Acesso em: 30 dez. 2019.

MOREIRA, J. A.; SCHLEMMER, E. Por um novo conceito e paradigma de educação digital online. Revista UFG, v. 20, 2020.

MOORE, D.S. Teaching statistics as a respectable subject. In F. e S. Gordon (Eds.), Statistics for the twenty-first Century. Washington, DC: The Mathematical Association of America, pg. 14-25, 1992.

MORGADO, A. C. et al. Análise combinatória e probabilidade. Coleção Professores de Matemática, Ed. SBM; 9a Edição. Rio de Janeiro, 2006 pg. 2.

PARRILLA, A.; DANIELS, H. *Criação e desenvolvimento de grupos de apoio para professores*. São Paulo: Loyola, 2004.

PEREIRA, L. B. C. Ensino De Estatística Na Escola Do Campo: Uma Proposta Para Um 6º Ano Do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2013.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PRETTO, N. L. Uma escola sem/com futuro. 4 ed.Campinas: Papirus, 2002.

QUINTAL, G. M. C. C. Análise de “clusters” aplicada ao Sucesso/Insucesso em Matemática. Universidade da Madeira. Madeira. 2006. (Dissertação de Mestrado)

READING, C,: SHAUGHNESSY, M.. Reasoning about Variation. In: BEM-ZVI, D. e GARFIELD, J. The challenge of developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking. Netherlands: Kluwer, 2004, pg. 201-226.

REEVES, T. C. Enhancing the worth of instructional technology research trough “design experiments” and other developmental research strategies. In: Annual meeting of the American Educational Research Association (AERA), 10, New Orleans, LA, 2000. Proceedings…. New Orleans, LA: American Educational Research Association, 2000. p. 1-15.

REIS JÚNIO R. O.; HENRIQUES A. Modelagem trigonométrica de cálculo de distâncias usando GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237- 9657, v. 3, n. 2, pg. 80-103, 2014.

ROSADAS, V. D. S. Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica. PUC-RJ 2016 Dissertação.

RUIZ, R. L. et al. Blaise Pascal: O homem e a ciência. Ver Ética e Filosofia Política; no 12, Vol. 1, 2010, pg. 43.

SIGNORELLI, S. F. Um ambiente virtual para o ensino semipresencial de funções de uma variável real: design e análise, 2007, 183p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, C. B. da. Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de matemática. 2007.354f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

SILVA, M. O. Do Triângulo à Pirâmide de Pascal. PROFMAT. UESC, Bahia, 2015. pg. 53. [56] SILVA, R. H. A. Monografia. Modelagem matemática aplicada ao ensino de análise combinatória. 2009. 36 f. Faculdade Pedro II, Belo Horizonte. Disponível em: http://www.fape2.edu.br/mono$_$2.pdf Acesso em: 30 dez. 2019.

SILVA, R. H. A. Monografia. Modelagem matemática aplicada ao ensino de análise combinatória. 2009. 36 f. Faculdade Pedro II, Belo Horizonte. Disponível em: http://www.fape2.edu.br/mono$_$2.pdf Acesso em: 30 dez. 2019.

SILVEIRA, J. F. P da. O Triângulo de Pascal é de Pascal? Disponível em: www.mat.ufgrs.br. Acesso em : 20 de dezembro de 2020.

SIRNIK, M.; KMETIC, S. Understanding Of Arithmetic Mean. ICOTS8 Contributed Paper. (2010). Disponível em:< www.stat.auckland.ac.nz/ iase/> Acessado em: 15 out .2019.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. de S. V. Matemática: ensino médio: livro do professor: Manual do professor com orientações didáticas. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

SNEE, R. D. Statistical Thinking and its Contribution to Quality. The American Statistician, v.44, n. 2, pg. 116-121, 1990.

SOUZA, C. R. Os Livros Didáticos de Matemática, A Variedade de Problemas Propostos e o Binômio de Newton. UFPR, Pato Branco, 2019, pg. 73, (Dissertação de Mestrado).

SOUZA, E. G. Probabilidade no Ensino Médio: Metodologias Ativas como suporte. UFAL, Maceió, Dissertação de Mestrado (PROFMAT).

SOUZA, L. O.; LOPES, C. E. O Uso de Simuladores e a Tecnologia no Ensino da Estocástica. Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, n. 40, pg. 659-677, Dez. 2011.

STEFFE, L.P. and THOMPSON, P.W. Teaching Experiment Methodology : Underlying Principles and Essential Elements R. Lesh and A.E. Kelly Recherch, Research design in mathematics and Science education (pg. 267-307) Hillsdale, NJ. Erlbaum., 2000.

TAJRA, S. F. Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade. Sanmya Feitosa Tajra. 3.ed. rev. atual e ampl. – São Paulo: Érica, 2001.

TIBONI, C. G. R. Estatística Básica: para os cursos de administração, ciências contábeis, tecnológicos e de gestão. 1a ed. São Paulo, SP: Atlas, 2010 pg. 139. [66] TOGNATO II, J. O. O Binômio de Newton. 2013. 16 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

TOGNATO II, J. O.; O Binômio de Newton. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Paraná. 2013.

TRAVELLO, V. Um triângulo aritmético, Encontro de Ensino, Pesquisa e Extensão. Presidente Prudente, 21 a 24 de outubro de 2013. Disponível em: <www.unoeste.br/br/site/enepe/2013/suplementos/area/Exactarum/Matematica/UM TRIANGULO.

VALENTE, J. A. Diferentes usos do Computador na Educação. Artigo Publicado em 1998 http://www.nuted.edu.ufrgs.br/biblioteca/artigos/uso comp educacao.html Acesso em: 1 jan. 2020.

VIEIRA, S. Estatística básica. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

WATSON, JM; MORITZ, JB Os desenvolvimentos dos conceitos de média. Focar em Problemas de Aprendizagem em Matemática, v. 21, n.4, p. 15 a 39, 1999.

WILD, C; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. International Statiscal

Review, v. 67, n. 3, pg. 223-265, 1999

Apêndices

Termos de consentimento Livre e esclarecido

Modelo 1.

Para a escola.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu compreendo os direitos dos participantes da pesquisa intitulada “Algumas atividades dinâmicas aplicadas ao segundo e terceiro so Ensino Médio em uma escola estadual”, orientada pela Dra. Silvia Nagib Ellain e que tem como pesquisador responsável Lucas Decaro dos Santos da Silva, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, a qual pode ser contatada pelo e -mail lucdec@ime.usp.br ou telefone (11) 99318 -0666. Na qualidade de responsável pela Escola _____ , autorizo aparticipação dos estudantes do 2 º e 3º ano do Ensino Médio na mencionada pesquisa e compreendo como e por que esse estudo está sendo realizado. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

São Paulo, _____ de _____ de 2021.

Nome: _____

Assinatura: _____

Cargo: _____

Modelo 2.

Para sujeitos participantes da pesquisa.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário/a, da pesquisa intitulada “Algumas atividades dinâmicas aplicadas ao segundo e terceiro so Ensino Médio em uma escola estadual”, que tem como pesquisador responsável Lucas Decaro dos Santos da Silva, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientada pela Dra. Silvia Nagib Elian, as quais podem ser contatadas pelo e-mail lucdec@ime.usp.br ou telefone (11) 99318-0666. O presente trabalho tem por objetivo investigar o uso de atividades dinâmicas sobre os temas de Estatística, Triângulo de Pascal e Binômio de Newton com estudantes do segundo e terceiro ano do Ensino Médio. Minha participação consistirá em ajudar na aplicação das atividades propostas de forma remota e colher dados dessa aplicação. Compreendo que esse estudo possui a finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimentoquando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

São Paulo, _____ de _____ de 2021.

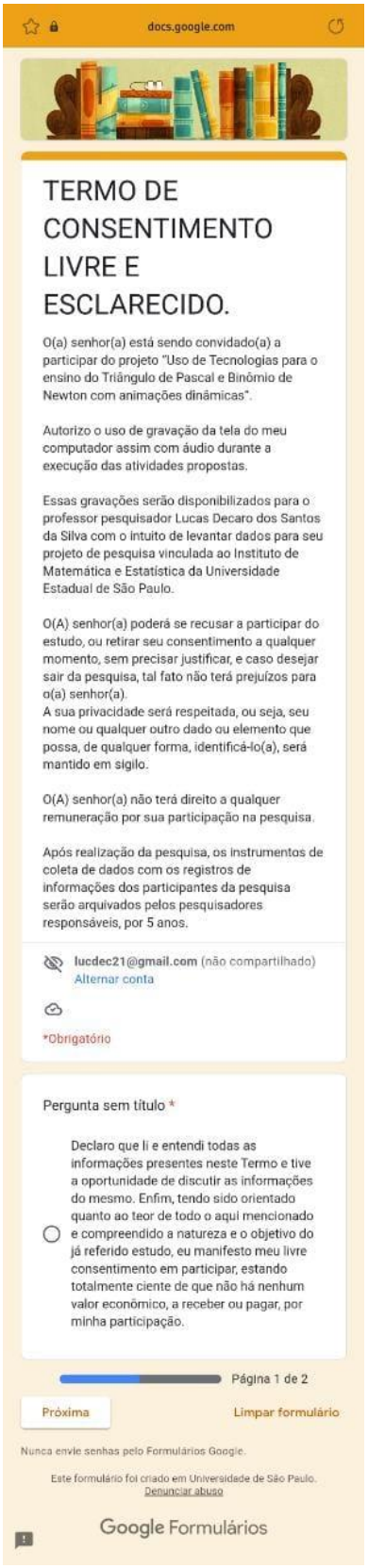
Nome do estudante:_____

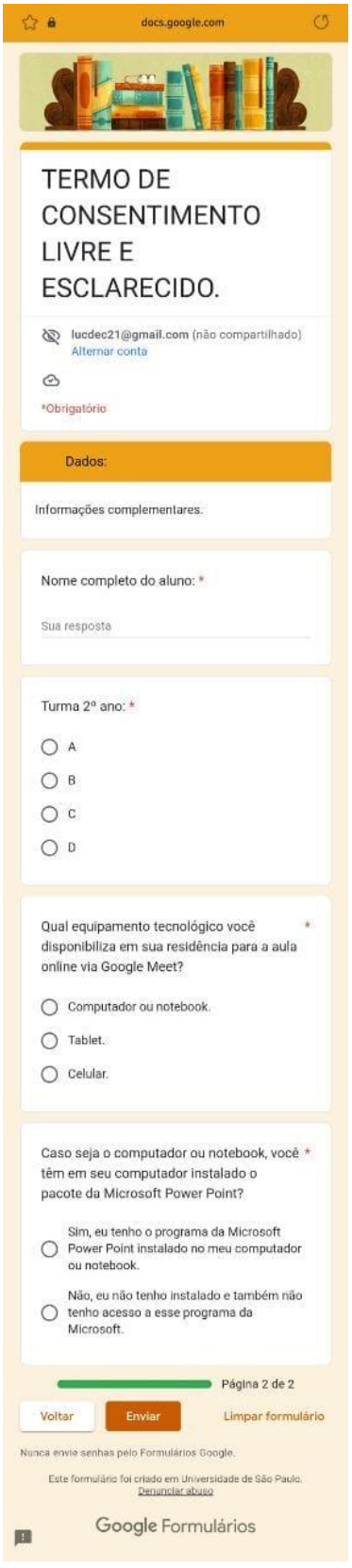
Nome do Responsável: _____

Assinatura: _____

Modelo 3

Usado no Google Formulário.





Resumos apresentados em congressos

Antes de apresentar o trabalho para o exame de qualificação do mestrado, apresentamos dois resumos, aceitos para dois congressos, referentes aos resultados da aplicação das atividades dinâmicas, que tinham o objetivo de testar essas atividades com os estudantes e forneciam uma análise parcial para aperfeiçoar o artefato pedagógico.

O primeiro resumo foi submetido à VIII Jornada Nacional de Educação Matemática, organizada pela Universidade de Passo Fundo, com o título “Aprendendo as Propriedades do Triângulo de Pascal através de atividades dinâmicas”.

O evento ocorreu de forma on-line, entre os dias 30 de setembro e 2 de outubro de 2020. O objetivo do evento era criar “um espaço de reflexão, trocas de experiências pedagógicas referentes à educação matemática entre grupos de pesquisadores, docentes e acadêmicos”. (JEM)

A apresentação do trabalho nesse congresso gerou um artigo, conforme o link a seguir.

https://www.upf.br//_uploads/Conteudo/jem/2020/Anais%202020%20-%20eixo%203/JEM2020_paper_74.pdf

O segundo trabalho foi apresentado no XXIV EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática), organizado pela UNIOESTE (Universidade Estadual do Oeste do Paraná), com o título de “Aprendendo as Medidas de Tendência Central através de atividades dinâmicas”. O evento ocorreu de forma on-line nos dias 25, 26 e 27 de novembro.

O EBRAPEM “constitui-se em um espaço para discussões, trocas de experiências e saberes envolvidos nos processos de elaboração de projetos de pesquisa, delineamento teórico metodológico, sustentação e aprofundamento teórico, bem como de crítica e amadurecimento de análise de dados construídos nas investigações desenvolvidas nos cursos de mestrado e doutorado no âmbito da Educação Matemática dos Programas de Educação/Ensino do Brasil.” (EBRAPEM)

A apresentação do trabalho nesse congresso gerou um artigo, conforme o link a seguir.

https://docs.google.com/document/d/1dYvdlf0gP65quVClU_LMYSiViguhVvRt/edit