Análise de atividades desenvolvidas com 6 º ano do Ensino Fundamental sob a inspiração da Educação Matemática Realística

Camilla de Sylos Moreno Medeiros

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO NO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
ENSINO DE MATEMÁTICA

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Iole de Freitas Druck

São Paulo, maio de 2023

Análise de atividades desenvolvidas com 6 º ano do Ensino Fundamental sob a inspiração da Educação Matemática Realística

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Esta versão contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante defesa pública ocorrida em 12/05/2023.

AGRADECIMENTOS

Deixo registrado aqui minha gratidão às pessoas que me ajudaram a tornar este sonho possível.

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha orientadora e amiga, Profa. Dra. Iole de Freitas Druck, que me motivou, incentivou e acreditou no meu potencial. Sua paciência e compreensão foram muito importantes para a continuidade deste trabalho. Obrigada pela colaboração, por toda sabedoria compartilhada e pela amizade.

À instituição escolar Stance Dual School, por nos oferecer formação em diferentes linhas de ensino que nos enriquece profissionalmente e nos dá liberdade para desenvolver, criar e oferecer aos alunos e alunas experiências didáticas diversas, como as aplicações das atividades descritas nesta dissertação.

Aos meus amigos Arlis Amorim e Gustavo Soares que estavam na mesma fase do mestrado, sendo muito necessários no compartilhamento de ideias e sentimentos.

Ao meu amigo Raphael Do Prado e à minha irmã Carol Sylos por cederem gentilmente suas casas para que eu pudesse ter um espaço tranquilo para estudar.

Às minhas amigas Mariana Edaes e Flávia Odenheimer por me ajudarem na revisão do abstract.

À minha mãe Rosana por sempre acreditar em mim e cuidar da minha filha, sempre que possível, para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

Ao meu marido Natã Medeiros e minha filha Clarice por serem o raio de sol e a alegria da minha vida.

RESUMO

Medeiros, C. S. M. **Análise de atividades desenvolvidas com 6 º ano do Ensino Fundamental sob a inspiração da Educação Matemática Realística**. 2023. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

Esta dissertação tem por objetivo principal investigar metodologias e abordagens de ensino de matemática visando favorecer a aprendizagem significativa dos estudantes, por meio de situações didáticas que oportunizem sua participação ativa no próprio processo de aprendizagem. O embasamento teórico aqui adotado foi a Educação Matemática Realística (RME), abordagem de ensino idealizada pelo pesquisador matemático Hans Freudenthal, com ênfase nos constructos: fenomenologia didática; reinvenção guiada; e matematização. Por considerar que a Matemática é uma atividade humana, o autor propôs que o ensino de matemática proporcionasse situações didáticas nas quais os(as) estudantes questionem, investiguem, criem hipóteses e reinventem resultados ou conceitos matemáticos, ao invés de serem meros(as) receptores(as) de conhecimento. Coerentemente com isso, formulou-se as seguintes questões de investigação: "Como favorecer a formação de estudantes capazes de refletir, criar e resolver problemas com autonomia, utilizando abordagens coerentes com a RME?"; e "Quais mudanças na ação do professor podem proporcionar espaços para que RME aconteça?". Na busca de investigar estas questões, como pesquisa de campo desenvolveu-se e aplicou-se seis experimentos didáticos sob a inspiração da RME. Tais experimentos foram realizados, sob a responsabilidade da autora desta dissertação, com turmas de sexto ano do Ensino Fundamental, em uma escola particular da cidade de São Paulo de orientação pedagógica socioconstrutivista. Os resultados foram analisados com base: nos Princípios da RME, desenvolvidos por Marja Van Den Heuvel-Panhuizen; na observação da qualidade da participação dos(as) estudantes; e nos conhecimentos por eles(as) desenvolvidos. Nas considerações finais é feito um balanço dos resultados obtidos sobre o quanto e o como a utilização dos Princípios da RME nas atividades de sala de aula possibilitou o avanço na obtenção de respostas às questões de investigação, na direção do objetivo principal pretendido.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística (RME), Fenomenologia Didática, Reinvenção Guiada, Matematização.

ABSTRACT

MEDEIROS, C. S. M. **Analysis of activities developed with the 6th grade of Elementary School under the inspiration of Realistic Mathematics Education**. 2023. Dissertation (master's degree) – Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo

The main objective of this dissertation is to investigate methodologies and approaches for teaching mathematics as to favor students' meaningful learning, through didactic situations that provide opportunities for their active participation in the learning process itself. The theoretical basis adopted here is Realistic Mathematics Education (RME), a teaching approach idealized by the mathematical researcher Hans Freudenthal, with emphasis on the following constructs: didactic phenomenology; guided reinvention; and mathematization. Considering that Mathematics is a human activity, the author proposed that the teaching of Mathematics provide didactic situations in which students question, investigate, create hypotheses and reinvent mathematical results or concepts, instead of being mere knowledge receivers. Coherently with this, the following research questions were formulated: "How to encourage the formation of students capable of reflecting, creating and solving problems with autonomy, using approaches consistent with RME?"; and "What changes in the teacher's action can provide spaces for RME to happen?". To investigate these issues, six didactic experiments, inspirate on RME, were developed and applied as field research. Such experiments were carried out, in sixth grade Elementary School's classes, under the dissertation author's responsibility in a São Paulo's private school with a socio-constructivist pedagogical orientation. The results were analyzed based: on the RME principles, developed by Marja Van Den Heuvel-Panhuizen; in observing the quality of student participation and on their's developed knowledge. In the final considerations, a balance is made of the results obtained on how much and how the use of RME principles in classroom activities enabled progress in obtaining answers to the research questions, towards the main intended objective.

Keywords: Realistic Mathematics Education, Didactical Phenomenology, Guided Reinvention and Mathematising.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FOTOGRAFIAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Meus primeiros trabalhos com ensino de matemática foram ministrando aulas particulares e como professora assistente em uma escola. Assim, meu principal público foi de estudantes que apresentavam vários tipos de dificuldades, o que despertou meu interesse em ajudá-los(as) tanto na aprendizagem como também na concepção que tinham de matemática. Ao ingressar no mestrado minha maior motivação era a de aprimorar minha prática docente, de modo a motivar os(as) estudantes para a aprendizagem significativa de matemática.[1]

Inicialmente pensamos[2] em pesquisar diferentes metodologias de ensino alternativas ao “ensino tradicional” e que ajudassem os alunos e alunas a de fato entender e apreciar a matemática. A expressão “ensino tradicional” referimo-nos à dinâmica de sala de aula na qual o(a) professor(a), detentor(a) de todo conhecimento, expõe os conteúdos e aos(às) estudantes cabe o papel de receptores passivos. No entanto, percebemos que este tipo de abordagem de ensino não oportuniza o aprendizado a todos(as) os(as) estudantes, já que alunos(as) com alguma dificuldade se sentem desmotivados(as) e inaptos(as) a aprender matemática. São frequentemente relatadas falas como: “matemática não é para mim” ou “eu nunca vou entender isso”. Tal desmotivação provocou o desejo de desenvolver esta pesquisa visando aprimorar nossa prática docente no sentido de criar oportunidades aos(às) estudantes de participarem ativamente dos próprios processos de aprendizagem. Surge assim, a primeira questão de investigação: quais metodologias oportunizam uma maior motivação e um sentimento de aptidão dos(as) estudantes frente ao aprendizado de matemática?

Em 2014 comecei a trabalhar em uma escola privada que adota uma visão pedagógica socioconstrutivista, ou seja, onde os docentes são incentivados a utilizar, em sua prática, abordagens de ensino não tradicionais e que promovam a autonomia dos estudantes. Lá tive a oportunidade de vivenciar diferentes metodologias de ensino de matemática praticadas pelos professores, o que despertou em mim o interesse em estudar mais sobre metodologias ativas como, projetos e resolução de problemas.

---

[1] Os relatos de experiências didáticas próprias são aqui descritos em primeira pessoa do singular.
[2] Já a primeira pessoa do plural é utilizada na apresentação de ideias discutidas e desenvolvidas em conjunto com minha orientadora.

Em 2017 tornei-me professora titular das turmas do sexto ano e tentei aplicar em minhas salas de aula o que havia aprendido. No entanto percebi que apenas as metodologias estudadas não estavam sendo suficientes para criar um ambiente socioconstrutivista nas aulas e possibilitar o tratamento de todo conteúdo programático.

Ao seguir buscando outras possibilidades, deparamo-nos com a abordagem de ensino denominada Educação Matemática Realística (RME), desenvolvida sob a liderança de Hans Freudenthal a partir de suas indagações e reflexões sobre o processo de ensino de matemática na Holanda, na década de 1960. O autor compara o papel de estudante ao papel de pesquisador(a) matemático(a) que, em seu trabalho, cria e expande conceitos, propriedades e procedimentos. Por isso, critica o ensino da Matemática pronta e acabada, propondo abordagens que tornem os(as) alunos(as) ativos em seus próprios processos de aprendizagem, aproximando sua ação à dos(as) matemáticos(as) profissionais. Defende o processo de ensino/aprendizagem de matemática como uma relação entre estudantes e professor(a), em que o(a) professor(a) age como guia e oferece oportunidades aos(às) estudantes para que (re)criem e desenvolvam conceitos, propriedades e procedimentos que façam sentido para eles(as), incorporando-os às suas realidades.

O estudo da RME expandiu nossas ideias sobre a Educação Matemática e metodologias de ensino. Com isso, pudemos visualizar a oportunidade de pensar estratégias que tornassem mais eficaz nossa prática docente. Com a convicção de que as ideias sobre o ensino e aprendizagem da RME respondem à primeira pergunta, relativamente à promoção de uma maior motivação de estudantes e de um sentimento de aptidão para o aprendizado de matemática, decidimos utilizar a RME como o principal embasamento teórico desta pesquisa.

As **questões de investigação** foram reformuladas e aprofundadas como segue abaixo:

- Como favorecer a formação de estudantes capazes de refletir, criar e resolver problemas com autonomia, utilizando abordagens coerentes com a RME?
- Quais mudanças na ação de professores(as) podem ser feitas de maneira que os Princípios da RME sejam contemplados?

Objetivo geral:

- Aprimorar minha própria prática docente de modo a favorecer a aprendizagem significativa de estudantes, criando oportunidades para sua participação ativa no próprio processo de aprendizagem.

Objetivos específicos:

- Realizar um estudo aprofundado da Educação Matemática Realística.
- Elaborar planejamentos de experimentos didáticos condizentes com a abordagem da RME que oportunizem a ação de alunos e alunas no próprio processo de aprendizagem.
- Analisar os resultados obtidos a partir dos experimentos didáticos realizados com base nos Princípios da RME.

Diante das questões e dos objetivos definidos, a metodologia de pesquisa para o desenvolvimento desta dissertação foi realizar experimentos didáticos, em salas de aula de sexto do Ensino Fundamental sob nossa responsabilidade, que oportunizassem a ação criativa em matemática de alunos e alunas por meio de abordagens compatíveis com a RME. Deste modo, selecionamos três experimentos didáticos aplicados anteriormente, que consideramos satisfazerem a perspectiva escolhida. Além disso, planejamos e aplicamos outros três experimentos visando ampliar e aprofundar a presença dos princípios da RME em suas abordagens. Utilizamos como recursos de análise metodológica dos resultados obtidos, tanto a presença dos princípios da RME nas atividades desenvolvidas, como os instrumentos de avaliação aplicados aos estudantes e as observações e registros realizados durante o período.

Seguem descrições sucintas do que foi tratado em cada capítulo.

No capítulo 1, composto por 4 tópicos, discorremos sobre o embasamento teórico – Educação Matemática Realística. Relatamos a história de Hans Freudenthal idealizador das ideias da RME em “Um pouco da história”. Os três tópicos seguintes – “Fenomenologia da Matemática”, “Reinvenção Guiada” e “Principios da Educação Matemática Realística” – foram inspirados nas ideias constantes da última obra de Freudenthal, Revisiting Mathematics Education (2002). No tópico “Fenomenologia da Matemática” discorremos sobre algumas das noções basilares da RME: matemática como atividade humana; *inversão anti-didática*; *matematização*; e *fenomenologia* *didática*. Além disso, inserimos exemplos práticos de situações relacionadas às ideias desenvolvidas. No tópico seguinte apresentamos o constructo da *reinvenção guiada*, abordagem de ensino que oportuniza o processo de ensino/aprendizagem em que o aluno ou aluna reinventa e o professor ou professora os(as) guia para a atividade, baseado nas noções anteriores. Em “Princípios da Educação Matemática Realística” descrevemos uma visão geral da RME por meios dos princípios desenvolvidos por outros autores a partir das ideias de Freudenthal. Consideramos os seis princípios descritos por Van Den Heuvel-Panhuizen (2001): *Princípio da Atividade*; *Princípio da Realidade*; *Princípio dos Níveis*; *Princípio do Entrelaçamento*; *Princípio da Interatividade*; e *Princípio da Orientação*.

No capítulo 2 relatamos a pesquisa de campo realizada. Dele constam as descrições dos seis experimentos didáticos sobre quatro temáticas diferentes. Os experimentos I e II são relacionados ao tema prismas e pirâmides. No experimento III é tratada a temática de frações. Nos experimentos IV e V o tema desenvolvido é o dos números primos. Por fim, no experimento VI são abordados muitos temas matemáticos em atividades sobre o consumo consciente de água envolvendo medidas, proporções e representação gráfica de dados estatísticos.

Nas considerações finais é feita uma reflexão sobre o quanto e o como a utilização da RME em sala de aula possibilitou avançarmos na obtenção de respostas às questões motivadoras da dissertação e na direção do objetivo geral pretendido.

CAPÍTULO 1

1. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA (RME)

Hans Freudenthal dedicou o final de sua carreira a escrever o livro “Revisiting Mathematics Education”. A primeira edição da obra foi publicada postumamente em 1991, depois de revisada por um conselho editorial formado por pesquisadores da Educação Matemática mundial, tendo Alan J. Bishop como seu editor chefe, que descreve o percurso da criação da obra no prefácio, de onde retiramos o trecho a seguir.

> Se você já leu Freudenthal antes, saberá algo sobre o que esperar – os insights, as reflexões, os exemplos encantadores e apropriados, as contundentes críticas, os apartes divertidos, a sabedoria – estão todos aqui. Se você não leu qualquer um de seus escritos antes, então eu tenho apenas um conselho – não tente leitura superficial, ou rápida. Você precisa se envolver com suas palavras, a fim de relacionar com suas ideias. Se você conseguir fazer isso, tenho certeza que você, como todas as outras pessoas que se envolveram com ele, nunca mais será a mesma pessoa. Que é, creio eu, o que ele teria desejado (FREUDENTHAL, 2002, p. iv, tradução nossa[3]).

1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA

Não é necessário mais uma pesquisa para dizer que a matemática ensinada sem utilidade ou sem propósitos não desperta interesse dos estudantes. Mesmo que esse tema seja constantemente discutido, ainda é um fato recorrente que, histórica e culturalmente, a matemática continua sendo uma disciplina escolar “difícil”, inacessível e de utilidade duvidosa. O matemático alemão Hans Freudenthal (1905 – 1990) dedicou parte da sua vida às reflexões sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, buscando compreender as razões de tais práticas ineficazes e propor abordagens ao ensino que pudessem superá-las. Suas ideias foram organizadas em uma concepção de abordagem ao ensino de matemática conhecida como Educação Matemática Realística (RME), que objetivava uma aprendizagem motivadora e efetiva por parte dos(as) estudantes.

---

[3] If you have read Freudenthal before, you will know something of what to expect -- the insights, the reflections, the charming and apposite examples, the scathing criticisms, the amusing asides, the wisdom -- they are all here. If you haven’t read any of his writings before, then I have only one piece of advice -- don’t try to skim-read, or to read too quickly. You need to engage with his words, in order to relate to his ideas. If you can manage to do that, I am sure that you, like everyone else who has engaged with them, will never be quite the same person again. That is, I believe, what he would have wanted.

Hans Freudenthal nasceu na cidade de Luckenwalde na Alemanha e foi estudar matemática em Berlim em 1923. Depois de terminar o Doutorado na área de topologia algébrica, em 1930 mudou-se para a Holanda, convidado por Luitzen Egbertus Jan Brouwer para pesquisar e discutir ideias sobre o intuicionismo[4]. Em 1940, devido à perseguição nazista na Segunda Guerra Mundial, Freudenthal precisou afastar-se de suas atividades. Retornou à Holanda em 1946 e tornou-se professor titular da Universidade de Utrecht. Foi um exímio matemático, realizou contribuições substanciais nas áreas de topologia, geometria e grupos de Lie. Mas foi como educador matemático que se destacou internacionalmente, como se pode verificar no seguinte trecho retirado da biografia do autor constante da página oficial do ICMI (*Internacional Commission on Mathematical Instruction*), no *site* da IMU (*International Mathematical Union*[5]).

> A abrangência de sua cultura não teve limites e sempre ele lutou contra o obscurantismo (em diferentes idiomas). Seus pensamentos e trabalhos foram direcionados a várias áreas complementares: matemática, história da matemática, educação matemática, filosofia. [...] Trabalhou para tornar acessível a todos a aprendizagem da matemática, sem nunca abrir mão dos requisitos intelectuais de um grande pensador científico. Mas era também um homem de ação e exerceu uma grande influência para o desenvolvimento da pesquisa em educação matemática, não apenas na Holanda, como também em todo o mundo. [...]
>
> Ele deixou muitas contribuições para a educação matemática na forma de livros, artigos e aulas ou palestras sobre “a aprendizagem da matemática” e sobre “o desenvolvimento do ensino de matemática”. Opôs-se fortemente às ideias que fundamentaram a introdução da “matemática moderna”(O’CONNOR, ROBERTSON, 2000, tradução nossa).

---

[4] O intuicionismo de Brouwer foi uma corrente dos fundamentos da matemática do início do século XX que se opunha ao Logicismo de Bertrand Russell e ao Formalismo de David Hilbert. Para Brouwer a Matemática é antes uma atividade do que uma doutrina, considerando que a origem dos paradoxos discutidos na Teoria dos Conjuntos de Cantor era o uso da Lógica Clássica. Assim propunha métodos mais construtivos, “intuitivos”, para as demonstrações em matemática, abolindo, por exemplo, a validade de provas por redução ao absurdo e o uso da lei do terceiro excluído. Também deu origem ao desenvolvimento da lógica Intuicionista. Para maiores informações consultar o livro Introdução aos Fundamentos da Matemática, de Newton. C. A. da Costa (DA COSTA, 1977).

[5] A União Matemática Internacional é responsável por promover o congresso internacional quadrienal de Matemática mais importante - o ICM. Já o ICMI, uma comissão permanente do IMU, promove o congresso internacional, também quadrienal, mais prestigiado na área da Educação Matemática - o ICME.

Freudenthal se tornou presidente da Comissão Internacional de Educação Matemática (ICMI) de 1967 a 1970. Ao deixar a Comissão, em 1971, criou o IOWO (Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs – Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática), hoje fundido no Instituto Freudenthal de Educação em Ciências e Matemática (FI) da Universidade de Utrecht (FERREIRA; BURIASCO, 2016). Freudenthal era contrário às ideias sobre ensino da matemática que estavam sendo disseminadas pela Matemática Moderna. Foi um dos pioneiros e influenciadores da reforma do ensino de matemática que ocorreu na Holanda no final da década de 60 do século XX. Assim, se reuniu com colegas para discutir ideias sobre o ensino de matemática que se opusessem às concepções de ensino vigentes na época (Mecanicista[6], Empirista[7] e Estruturalista[8]), impulsionando um movimento, que mais tarde originou a "Educação Matemática Realística" (FERREIRA, 2016).

> O termo "realistic" tem origem no verbo neerlandês "zich REALISE-ren" e foi traduzido, para o português, [...], para "realístico" ao invés de "realista", porque parece estar mais relacionado ao significado de "imaginar", "realizar", "fazer ideia", "tomar consciência de" e, por sua vez, à possibilidade de "tornar real" na mente dos estudantes, o que sugere que os contextos ou situações nos quais os alunos se envolvem não precisam ser "autenticamente reais", mas precisam ser imagináveis, realizáveis, concebíveis (FERREIRA, 2016, p. 242)

1.2 FENOMENOLOGIA DA MATEMÁTICA

A Educação Matemática Realística (RME) é uma concepção de abordagem ao ensino de matemática que se opõe à visão de ensino como transmissão de um

[6] O foco dessa abordagem é em cálculos e pouco em aplicações. Alunos aprendem procedimentos mostrados passo a passo pelo professor. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).
[7] Nessa abordagem os alunos são estimulados a investigações e deixados livres para realizarem suas descobertas. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).
[8] A abordagem estruturalista refere-se ao movimento da Matemática Moderna que, baseado nos conceitos sistematizados nas Teorias Axiomáticas dos Conjuntos desenvolvidas no início do Século XX para bem fundamentar as estruturas matemáticas avançadas, defendia a introdução de tais conceitos abstratos já na educação infantil, como base para a introdução das noções básicas de aritmética e geometria.

conhecimento pronto e acabado. Ela surge da análise do processo de produção da matemática ao longo da história até os tempos atuais. A partir de Freudenthal, em sua obra Perspectivas da Matemática (1975, p. 5), e corroborado por Bonini et ali, em Direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento na Educação Básica: subsídios ao currículo nacional (2018, p. 141), podemos afirmar que historicamente o conhecimento matemático surgiu da necessidade de resolver problemas concretos relativos a comércio, impostos, medições de terras, confecção de calendários, construções de grande porte e agricultura. Assim, há milênios civilizações já tinham uma matemática desenvolvida e avançada, que incorporou objetos de estudos abstratos, ao longo do tempo histórico. Estudiosos inventaram conceitos, estruturas para organizar fenômenos da vida real ou da própria matemática. Várias das ideias matemáticas desenvolvidas acabaram por não se restringir apenas ao seu contexto originário, tendo sido aplicadas também a outras situações.

Abordagens de ensino de matemática coerentes com a RME proporcionam aos estudantes oportunidades semelhantes às vividas ao longo da história da Matemática e à maneira como os matemáticos profissionais desenvolvem esta Ciência (FREUDENTHAL, 1983). Freudenthal propõe que o ensino de matemática seja tratado como uma ***atividade humana*** na qual os estudantes saem da zona de receptores de conhecimento e passam a ser participantes ativos do próprio processo de aprendizagem, onde questionam, pensam, investigam e criam hipóteses. Nesse processo de ação os aprendizes desenvolvem conhecimentos matemáticos.

Quando um resultado matemático é publicado, não se divulga todo o processo de investigação sobre sua validade, mas apenas as técnicas, conceitos e conexões que o comprovam. Assim, quando consolidados e tornados objetos de ensino, os resultados finais são usualmente apresentados sem que se leve em conta o processo de sua criação e, muitas vezes, sem qualquer comprovação. Como citado a seguir:

> Nenhuma ideia matemática foi alguma vez publicada da maneira como foi descoberta. A solução de um problema é encontrada, em geral, por procedimentos não lineares. Para sua publicação, técnicas são desenvolvidas e utilizadas para descrever o procedimento da solução 'de cabeça pra baixo', ou, ao se tratar de um grande e complexo conjunto de proposições e teorias, para transformar definições em proposições e proposições em definições. Ou seja, a 'invenção quente' é transformada em 'beleza gelada'. Assim, é uma inversão *didática* transpor tal 'beleza gelada' para o ensino, o que, quando acontece, pode ser a*ntididático*. Ao invés de comportar-se "antididaticamente", deve-se reconhecer que o jovem aluno tem o direito de recapitular, de alguma maneira, o processo de aprendizagem da humanidade (FREUDENTHAL, 1983, p.ix, tradução nossa[9]).

Em um processo de ensino é comum que o(a) professor(a) (ou o livro didático) repita a 'inversão didática' presente nas publicações, ou seja, ele(a) fornece aos(às) estudantes o resultado a ser estudado e eventualmente suas comprovações, sem colocar situações que impulsionaram a formulação do mesmo. Freudenthal critica o tipo de abordagem didática que ignora a forma como um conceito foi criado historicamente e apresenta aos estudantes apenas a conclusão sistematizada. O autor considera que, nestes casos, tanto a matemática é tratada como uma ciência pronta e acabada como os alunos e alunas são considerados(as) meros(as) receptores(as) de conhecimento e não construtores(as). Com isso, afirma ainda ser *anti-didática* esta inversão da ordem da criação de conceitos, pois sonega aos estudantes a oportunidade de vivenciarem o 'fazer matemática' como atividade humana.

A fim de oportunizar a ação dos alunos e alunas, Freudenthal defende que a aprendizagem matemática deve partir de situações significativas ou de fenômenos que façam sentido aos(às) estudantes de modo que estes(as) consigam criar, reinventar, ***matematizar*** (FERREIRA, BURIASCO, 2015). A esse respeito Freudenthal escreveu em seu livro Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas):

> Nossos conceitos matemáticos, estruturas e ideias foram inventados como ferramentas para organizar os fenômenos do mundo físico, social e mental. A fenomenologia de um conceito, estrutura ou ideia matemática significa descrevê-lo em relação aos fenômenos para os quais ele foi criado e para os quais foi expandido no processo de aprendizagem da humanidade, e, na medida em que esta descrição se torna uma preocupação no processo de aprendizagem da geração jovem, é uma fenomenologia didática, uma forma de mostrar ao professor os lugares onde o aluno pode passar no processo de aprendizagem da humanidade. Não em sua história, mas em seu processo de aprendizado que ainda continua, o que significa que becos sem saída devem ser eliminados e raízes poupadas e reforçadas (FREUDENTHAL, 1983, p.ix, tradução nossa[9]).

Para introduzir um conceito ou ideia matemática é fundamental que o professor tenha conhecimento da fenomenologia do mesmo, ou seja, que tenha ciência tanto dos problemas ou fenômenos que lhe deram origem, sentido e aplicabilidade, como

---

[9] Do inglês "Our mathematical concepts, structures, ideas have been invented as too ls to organise the phenomena of the physical, social and mental world. Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind, and, as far as this description is concerned with the learning process of the young generation, it is didactical phenomenology, a way to show the teacher the places where the learner might step into the learning process of mankind. Not in its history but in its learning process that still continues, which means dead ends must be cut and living roots spared and reinforced."

também das tentativas de resolvê-los por meio de estratégias matemáticas. Aos processos de resolução dos problemas bem-sucedidos ao longo da História, Freudenthal se refere como *raízes poupadas e reforçadas*; aos processos que historicamente não subsistiram como boas soluções, o autor se refere a *becos sem saída que devem ser evitados*. Assim, a partir do conhecimento sobre qual seja a fenomenologia do objeto matemático a ser trabalhado em sala de aula, o(a) professor(a) tem condições de fazer escolhas para organizar a abordagem dos conteúdos, de modo a evitar *inversões antididáticas* e favorecer o fazer matemática de seus(uas) alunos(as). Essa organização da abordagem de ensino, é denominada pelo autor de ***fenomenologia didática***. A ideia é que, por meio de uma fenomenologia didática, o(a) professor(a) oportunize situações nas quais os(as) estudantes investiguem e desenvolvam atividades mentais próprias, de maneira que o seu processo de aprendizagem possa favorecer: a formação de conceitos; a formação de modelos; a aplicação dos conceitos na realidade; e o exercício de habilidades específicas em situações aplicadas (OLIVEIRA, 2014, p. 25).

A importância dos conceitos é indiscutível, Freudenthal chega a dizer que são “a espinha dorsal das nossas estruturas cognitivas” (FREUDENTHAL, 1983, p. x), mas a *obtenção de conceitos* supõe previamente a criação de ***objetos mentais*** pelos estudantes. Embora crianças aprendendo a falar mostrem saber e nomear o que seja uma cadeira, não sabem formular o conceito de cadeira. O mesmo ocorre na matemática, as crianças ainda pequenas aprendem o que é um triângulo, um círculo e até mesmo a somar números naturais, tudo como objetos mentais, e conseguem executar atividades mentais. Porém, como as definições dos conceitos desses objetos possuem mais precisão e clareza do que sua ideia mental, elas acabam sendo “ensinadas” pelos(as) professores(as) e isso, para Freudenthal é um outro exemplo de prática *antididática* (FREUDENTHAL, 1983, p. x). Por que não explorar com os alunos e alunas suas ideias mentais e desenvolvê-las a partir disso?

A seguir, a título de exemplo, relatamos experiências vividas com turmas de sétimo ano do ensino fundamental II, em anos consecutivos, que se relacionam com as ideias de Freudenthal sobre *inversão antididática* e *fenomenologia didática*. No meu primeiro ano como regente de classe de um sétimo ano, ciente da minha inexperiência docente com este nível e insegura quanto ao modo de abordar a introdução à álgebra, deixei meu planejamento flexível a fim de perceber qual seria o ritmo de aprendizagem de alunos e alunas, por não saber do que eram capazes.

Assim, propus aos(às) estudantes brincadeiras para adivinharem regularidades de sequências e situações exploratórias com balanças de dois pratos. Incitei questionamentos e os(as) incentivei a registrarem generalizações encontradas, seguidas de discussões coletivas para sistematizar os conceitos e procedimentos. Ao final do processo o resultado foi de sucesso: os(as) estudantes se mostraram ativos(as), participativos(as), confiantes e, em diferentes avaliações, demonstraram domínio do conhecimento. Agora, percebo que intuitivamente promovi uma fenomenologia didática na abordagem feita com esta turma. No ano seguinte, mais segura em relação ao trabalho com os conteúdos de sétimo ano, já sabendo sobre o potencial de aprendizagem de alunos e alunas dessa faixa etária, confiante pelo sucesso do ano anterior e com a ambição de conseguir aprofundar mais conteúdos do que anteriormente, tornei meu planejamento mais detalhado, consequentemente mais rígido. Assim, em aulas expositivas, resolvi iniciar pela introdução de conceitos, como por exemplo os conceitos de incógnita e variável, ao invés de oportunizar situações para que as ideias algébricas se tornassem objetos mentais. Com isso, sem me dar conta, fiz uma inversão didática em relação ao ano anterior, com o intuito de abordar o conteúdo em menos tempo. O resultado não foi de sucesso. Os(as) estudantes apresentaram dificuldades e tivemos que retomar o conteúdo diversas vezes, o que acabou demandando mais tempo do que o esperado. Ou seja, a inversão feita, que considerei ser mais apropriada, na verdade mostrou-se *anti-didática.*

"A cognição não começa com conceitos, mas sim o contrário: conceitos são o resultado de processos cognitivos" (FREUDENTHAL, 2002, p. 18). De acordo com o autor, o conceito de um objeto matemático é a maneira como a pessoa concebe este objeto a partir de alguma perspectiva, que pode ser exploratória, reflexiva, analítica ou alguma outra. Porém, muitas vezes o ensino do conceito pode parecer mais significativo ao(à) professor(a) (como foi o meu caso no exemplo citado acima), pois cria a ilusão de que, ao explicitá-lo, isso trará mais compreensão sobre o objeto que está sendo ensinado. O grande motivo do fracasso da Matemática Moderna na Educação Básica foi o fato de nela ser enfatizada a formalização dos conceitos básicos em detrimento das suas ideias intuitivas (FREUDENTHAL, 2002).

Muitos estudiosos da Educação Matemática entendem que, no processo de ensino, os conceitos devem ser precedidos por algo menos formal. Então inicia-se o ensino de forma mais intuitiva, com exemplos ou ideias simplificadas, visando obter as definições dos conceitos, que são consideradas os objetivos principais da aprendizagem. Já Freudenthal não concorda com esse ponto de vista, para ele o objetivo final da aprendizagem são os *objetos mentais* do conceito, até porque este termo pode ser extrapolado para *operações mentais*, expressão que descreve como esses objetos são manipulados mentalmente (FREUDENTHAL, 2002). Logo, o objetivo principal da aprendizagem é o desenvolvimento de operações mentais no processo vivido pelos estudantes, de modo a construir, desenvolver, criar objetos mentais e possivelmente conceitos. Por exemplo:

> Número inteiro, a reta numérica (mesmo desenhada na lousa), figuras geométricas (mesmo materializadas): todas são objetos mentais, na medida em que compreendemos (e isso é compreendido) que imagens visuais são representações grosseiras de objetos mentais. Como os objetos mentais se desenvolvem para se tornarem conceitos e quais critérios revelam se isso aconteceu de fato? (FREUDENTHAL, 2002, p. 19, tradução nossa[10]).

O autor afirma que, na maioria das vezes, se um(a) aluno(a) consegue falar sobre e registrar adequadamente pode ser um indicativo de que assimilou um conceito. Mas é preciso analisar as situações e as peculiaridades dos conteúdos e dos(as) estudantes, como comentado no trecho a seguir:

> A distância entre o objeto mental e o conceito dependerá do assunto em questão, mas ainda mais do indivíduo e de sua situação particular. Esta é a razão pela qual as diferenças devem ser respeitadas no processo de ensino. Quando tratamos do processo de ensino-aprendizagem o questionamento “Conceitos ou objetos mentais?” deve ser confrontado pela seguinte questão didática: “Obtenção de conceito ou constituição de objetos mentais (por meio de operações mentais)?” (FREUDENTHAL, 2002, p. 19, tradução nossa[11]).

Logo, Freudenthal quer salientar que, ao tratar de *conceito* e *objeto mental*, é importante que o(a) professor(a) tenha consciência de dois aspectos relevantes: o conteúdo em questão e a individualidade de cada estudante. Para trabalhar alguns conteúdos, o(a) professor(a) pode propor atividades que estimulem estratégias mentais, visando a construção de objetos mentais que favoreçam o(a) estudante a obter a definição do conceito. Para outros conteúdos, pode ser mais significativo propor atividades a partir de casos particulares de um conceito para que alunos e

[10] Whole number, the number line (even if drawn on the blackboard), geometrical shapes (even if materialised): all are mental objects, so far as it is understood (and it is understood) that visual images are rough representations of mental objects. How do mental objects develop to become concepts, and what criteria reveal whether this has indeed happened?

[11] The distance between mental object and concept will depend on the subject matter, but even more on the individual and his particular situation. This is the reason why it must be respected in instruction. When we deal with the teaching/learning process the question “Concepts or mental objects?” will be parallelled by the didactical one: “Concept attainment or constitution of mental objects (by mental operations)?”

alunas desenvolvam o objeto mental do conceito. Não há uma regra, cada caso deve ser analisado pelo(a) professor(a). Sobre as individualidades dos(as) estudantes, é importante que o(a) professor(a) conheça seus alunos e alunas e, ao planejar as aulas, leve em consideração as suas peculiaridades. Alguns(umas) estudantes conseguirão facilmente desenvolver objetos mentais e definições. Porém, outros(as) apresentarão dificuldade em apropriar-se da definição do conceito. Nestes casos, é importante que o(a) professor(a) busque diferentes estratégias para propiciar, pelo menos, um bom desenvolvimento do objeto mental. A seguir, descrevemos dois exemplos de atividades didáticas realizadas com estudantes do sexto ano do ensino fundamental II, que ilustram as reflexões deste parágrafo.

Para introduzir a noção de circunferência, propus aos(às) estudantes uma atividade de caça ao tesouro em um mapa. Nas pistas fornecidas era dito que o tesouro se encontrava a 2 cm de um determinado ponto. Assim, ao marcar vários pontos com essa característica, os(as) estudantes perceberam ter desenhado um esboço de um “círculo”. Nesta atividade, sem a explicitação da definição do conceito de circunferência, a motivação lúdica propiciou uma vivência que resultou na construção do objeto mental de uma circunferência de raio 2 cm.

No segundo exemplo, para a apresentação do conteúdo números primos, desenvolvi duas estratégias de ensino em momentos diferentes. Em um primeiro momento sugeri aos(às) alunos(as) a construção do “Crivo de Eratóstenes”[12]. Contudo, eles(as) não demonstraram interesse, engajamento, nem compreensão sobre o assunto. Percebi assim, que tal atividade não contribuiu para o desenvolvimento de *objetos mentais* adequados ao *conceito* e considerei que a experiência didática não foi bem-sucedida. Buscando melhorar o resultado da aprendizagem dos(as) alunos(as), no ano seguinte propus uma nova atividade introdutória ao conceito de números primos. Disponibilizei aos(às) estudantes pequenos quadrados (de EVA) para que com eles, construíssem retângulos. Por exemplo, com dois quadradinhos é possível construir um único retângulo: de lados

[12] O **Crivo de Eratóstenes** é um método simples e prático para encontrar números primos até um certo valor limite. Segundo a tradição, foi criado pelo matemático grego Eratóstenes (a.c. 285-194 a.C.). (retirado de wikipédia.com em 21/04/2021 às 12:22). O método consiste em escrever números naturais de 2 até um dado número, por exemplo 100. Em seguida circula-se o primeiro número (2) e risca-se (elimina) todos os números múltiplos do número circulado, chegando ao fim da lista, retorna ao início e circula o próximo número disponível, exemplo: circula o 2 e elimina todos os números pares, circula o 3 e elimina todos os múltiplos de 3. O próximo seria o 4, porém este foi “riscado” por causa do 2, então passa-se para o 5 e esse processo é repetido até circular ou riscar todos os números. No final, os números circulados são todos os primos no intervalo dado.

dois e um quadradinhos (2 por 1); já com seis quadradinhos é possível construir um retângulo 3 por 2 e outro 6 por 1. Dessa forma, os(as) alunos(as) investigaram quantos e quais retângulos é possível construir com diferentes quantidades de quadradinhos (a partir de dois). Além disso, solicitei que registrassem no caderno todos os números correspondentes às quantidades de quadradinhos com as quais é possível construir apenas um retângulo. Este exemplo mostra um caso da importância de o(a) professor(a) ter conhecimento dos “becos sem saída que devem ser evitados”. Neste caso o número 1, por não ser primo, foi retirado da atividade para prevenir equívocos sobre a definição de números primos. A descrição desta atividade está detalhada no próximo capítulo junto à atividade similar, aprimorada sob a perspectiva da RME, realizada no ano seguinte. Voltando ao exemplo de modo sucinto, sem esforço os alunos e as alunas escreveram em seus cadernos os números primos até 97 (foi pedido retângulos com até 100 quadradinhos), muitos desenvolveram estratégias mentais que levaram à obtenção do conceito de número primo. Assim, os(as) estudantes realizaram *operações mentais*, construíram *objetos mentais* e por último obtiveram a definição do *conceito*. O caso excepcional do número 1 foi discutido posteriormente com eles(as).

Nesse tipo de abordagem de ensino proposta por Freudenthal (RME) o processo de ensino-aprendizagem ocorre de modo mais eficaz se aos(às) estudantes forem oferecidas situações para que eles(as) investiguem e criem estratégias mentais. Dessa forma, o aluno ou a aluna se torna autor(a) do seu processo de aprendizagem e a matemática é vista como uma atividade, não como um sistema fechado de ideias. Esse processo de construção do conhecimento, de criação de objetos mentais, de “fazer matemática” é denominado ***matematização***. “O que os seres humanos têm de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, um processo de matematização da realidade e, se possível ainda, da matematização da Matemática” (FREUDENTHAL, 1968, p. 7, apud OLIVEIRA, 2014, p. 13).

Em seu livro *Revisiting Mathematics Education,* para escrever sobre **matematização**, Freudenthal primeiro apresenta as ideias sobre axiomatização, formalização e esquematização, pois essas ideias isoladas são frequentemente confundidas com sua ideia de matematização. Axiomatização é a primeira dessas ideias relacionadas exclusivamente à matemática – “os axiomas surgem de paradigmas ou conjuntos de paradigmas e axiomatização significa generalizar paradigmas experimentados” (FREUDENTHAL, 2002, p. 31, tradução nossa[13]). Já as fórmulas, que são características matemáticas tão antigas quanto os axiomas e expressam ideias por meio de símbolos, são processos que vêm sendo cada vez mais aprimorados – “este processo de aparar, ajustar e transformar a linguagem é chamado de formalização” (FREUDENTHAL, 2002, p. 31, tradução nossa[14]). Em contrapartida da axiomatização e da formalização tem-se a esquematização, processo que trata de criar esquemas matemáticos para tentar retratar a realidade – “é um velho hábito humano tornar suas experiências e ações paradigmáticas, generalizá-las, abstraindo-as em leis e regras, para criar esquemas que se ajustem à realidade” (FREUDENTHAL, 2002, p. 31, tradução nossa[15]). Para Freudenthal, a matematização é a atividade de organização da produção matemática do indivíduo, que leva em consideração a linguagem, o cotidiano e as experiências por ele vividas, contemplando, além disso, as três ideias descritas anteriormente (FREUDENTHAL, 2002).

A matematização pode ocorrer em diferentes níveis, relacionados aos vários **níveis de compreensão** que os(as) estudantes desenvolvem nos seus particulares processos de aprendizagem. Assim eles(as), na medida em que vão ampliando sua compreensão sobre uma situação proposta, podem inventar soluções informais baseadas no concreto, formular esquemas matemáticos ou perceber generalizações e expressá-las formalmente. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

> A análise da matemática como matéria pronta apresenta um sistema dedutivo em que todas as etapas são equivalentes. A análise da matemática como uma atividade, no entanto, mostra uma estrutura em camadas. Essa característica é explicada pela teoria dos níveis dos Van Hiele. As etapas pelas quais o processo de aprendizagem passa de um nível para o próximo, são de interesse pedagógico [...]. A relação entre um nível e o seguinte, no entanto, é preponderantemente lógica. Para descobri-lo, podemos usar a análise lógica. O que caracteriza a estrutura de níveis pode ser expresso em poucas palavras dizendo que a questão operacional de nível inferior pode se tornar assunto em um nível superior. Se, em certo nível, a indução completa foi uma atividade significativa, essa atividade pode se tornar uma questão de consideração consciente e, finalmente, de formulação no próximo nível (FREUDENTHAL, 2002, página 97, tradução nossa).

---

[13] Axioms arise from paradigms or sets of paradigms, and axiomatising means generalising experienced paradigms.
[14] This process of trimming, adjusting, and transforming language is called formalising.
[15] It is an old human habit to make one’s experiences and actions paradigmatical, to generalise them by abstracting them into laws and rules, to create schemes to fit reality.

Quando os alunos ou as alunas desenvolvem objetos e operações mentais, estes se tornam rotina em sua prática diária. Em algum momento os(as) estudantes podem sentir necessidade ou interesse em organizar, esquematizar, estruturar atalhos para tornar as resoluções mais simples. Porém, chegar a níveis de compreensão mais avançados, requer domínio linguístico mais sofisticado, sendo necessário avançar também na formalização.

Um importante aspecto da matematização é possibilitar que o(a) aluno(a) faça uma reflexão sobre a própria produção (FREUDENTHAL, 2002). “A condição para chegar ao próximo nível de compreensão é a capacidade de **refletir** sobre as atividades realizadas. Esta reflexão pode ser estimulada pela interação com os pares e pelas próprias produções dos alunos e das alunas” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 13, tradução e destaque nossos)[16]. Assim, para Van Den Heuvel-Panhuizen (1996), no processo de matematização os(as) estudantes são capazes de analisar e organizar situações problema usando ferramentas matemáticas, que de certa forma, foram desenvolvidas por eles(as) mesmos(as) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

De acordo com Oliveira (2014), Treffers em 1987[17] conceituou a matematização em duas componentes – horizontal e vertical. A **matematização horizontal** está ligada a uma atividade de esquematização, na qual resolve-se um problema ligado à realidade por meios matemáticos; e na **matematização vertical** um problema ou situação da matemática é tratado estritamente por meios matemáticos, tais como generalização e formalização. Ainda baseado em Oliveira (2014), Freudenthal fez uma grande ressalva de sobre as definições criadas por Treffers – a de serem duas componentes igualmente importantes e fortemente relacionadas, não havendo um limite nítido entre as matematizações horizontal e vertical, como o próprio Freudenthal comenta na citação a seguir:

> [...] A matematização horizontal conduz o mundo da vida para o mundo dos símbolos. No mundo da vida se vive, age (e sofre); no outro mundo

[16] The condition for arriving at the next level is the ability to reflect on the activities conducted. This reflection can be elicited by interaction and by the students’ ‘own productions’

[17] TREFFERS, A. **Three dimensions:** A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987. Citado em OLIVEIRA, 2014, p 34.

> os símbolos são moldados, remodelados e manipulados de forma mecânica e compreensiva; essa é a matematização vertical. O mundo da vida é aquilo experienciado como realidade (no sentido em que usei anteriormente), assim como é o mundo dos símbolos relativamente às suas abstrações. Para ser preciso, as fronteiras desses mundos são marcadas vagamente. Os mundos podem se expandir e encolher – também às custas uns dos outros. Algo pode pertencer em uma instância ao mundo da vida e em outra ao mundo dos símbolos (sistemas viários, mapas geográficos, figuras geométricas, contas, tabelas, formulários a serem preenchidos e assim por diante). Números naturais podem já pertencer ao mundo da vida, enquanto a adição abstrata ainda requer esquemas simbólicos. A adição abstrata pode ter sido incorporada ao mundo da vida, enquanto a cognição de sua comutatividade (ou multiplicação a partir dela) ainda precisa de modelos que se processam e cuja equivalência é compreendida no mundo dos símbolos. Para o matemático experiente, os objetos matemáticos podem fazer parte de sua vida de uma maneira bastante diferente de um novato. A distinção entre matematização horizontal e vertical depende da situação específica, da pessoa envolvida e de seu ambiente (FREUDENTHAL, 2002, páginas 41 e 42, tradução nossa[18]).

A ideia é propor atividades que propiciem autonomia e oportunidades aos(às) estudantes para criarem objetos mentais, isso se dá, inicialmente dentro da matematização horizontal. A apropriação desses objetos, a aplicabilidade dentro de algum contexto e a reflexão sobre tudo isso podem gerar a obtenção do conceito e propiciar condições para que os(as) estudantes avancem nos níveis de compreensão. Esses avanços podem ocorrer ao organizarem fatos, ao criarem ferramentas ou atalhos, ao formalizarem. Assim, alunos e alunas passam a matematizar verticalmente. Freudenthal (2002) defende que as duas componentes têm a mesma importância e por isso alunos e alunas devem matematizar horizontal e verticalmente, porém a diferença entre elas nem sempre é clara. Saber qual matematização o aluno ou a aluna está produzindo depende muito da situação, do problema ou do nível de compreensão que ele(a) domine. Um exemplo dado por Freudenthal

[18] [...] Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. The world of life is what is experienced as reality (in the sense I used the word before), as is symbol world with regard to its abstraction. To be sure, the frontiers of these worlds are rather vaguely marked. The worlds can expand and shrink -- also at one another’s expense. Something may belong in one instance to the world of life and in another to the world of symbols (road-systems, geographical maps, geometrical figures, bills, tables, forms to be filled out, and so on). Natural number can already belong to the world of life, while abstract addition still requires symbolic schemes. Abstract addition may have been incorporated into the world of life, while the cognition of its commutativity (or multiplication based on it) still need models which are processed and the equivalence of which is understood in the world of symbols. For the expert mathematician, mathematical objects can be part of his life in quite a different way but for the novice. The distinction between horizontal and vertical mathematising depends on the specific situation, the person involved and his environment.

(FREUDENTHAL, 2002) para mostrar essa diferença tênue entre as duas componentes é o da multiplicação de oito por cinco (8x5). Se o(a) estudante calcular por contagem utilizando um esquema retangular ou o desenho de oito conjuntos com cinco objetos cada um, matematizará horizontalmente; se encontrar o produto pela sequência 8, 16, 24, 32, 40 então matematizará verticalmente. É um exemplo simples, mas ilustra como as duas componentes podem estar presentes em uma mesma situação a depender de como o(a) estudante lide com ela. Em alguns casos será necessário que o(a) professor(a) oriente e guie os(as) estudantes para que avancem nos níveis de compreensão e tenham condições de matematizar das duas maneiras.

1.3 REINVENÇÃO GUIADA

Semelhanças entre objetos, dimensões das coisas, noções espaciais como passar por debaixo de uma mesa, são alguns exemplos de como a matemática surge na vida das crianças logo nos anos iniciais de vida. Um outro exemplo, que daremos ênfase agora é o surgimento dos números naturais. Os números se tornam objetos mentais para as crianças, desde muito novas, e são associados a gestos (como os dedos) e diferentes construções linguísticas: oral, simbólica e posteriormente escrita. Essas associações dão oportunidades para que as crianças reinventem a sequência de números e por vezes, relações aritméticas entre eles. Freudenthal (2002) chama de promissora essa primeira relação das crianças com a matemática e faz uma reflexão sobre as oportunidades que são dadas posteriormente na escola.

> Será que, com algum apoio, toda criança normal pode ser capaz de reinventar a matemática necessária na vida diária futura? De fato, isso não ocorre, e é difícil averiguar se seria possível ou não acontecer porque, em geral, após um início promissor, não é dada à criança a oportunidade de reinventar absolutamente nada, pelo menos na aprendizagem institucionalizada. Em vez disso, conhecimento e procedimentos são mais ou menos impostos, como é a maioria do conhecimento que a criança assimila pelo ensino (FREUDENTHAL, 2002, página 47, tradução nossa[19]).

Aplicar abordagens de ensino diferenciadas, em geral, pode representar dificuldades para os(as) professores(as). Um grande desafio a ser enfrentado é

[19] With some support, every normal child might be able to reinvent as much mathematics as needed in one’s future daily life? This does not in fact happen and it is difficult to ascertain whether it would be possible or not, because in general, after a promising start, the child is not given the opportunity to reinvent anything whatsoever, at least in institutionalised learning. Instead, knowledge and action patterns are more or less imposed, as is most of the knowledge the child acquires by instruction.

quebrar o paradigma: ‘ensinar como nos ensinaram’. A metodologia de ensino na qual o(a) docente é detentor(a) do conhecimento e os(as) alunos(as) são meros receptores foi vivenciada por muitos(as) professores(as) como estudantes, constituindo-se assim, em forte repertório de referências para os(as) mesmos(as). Mudar esse ciclo é difícil, requer muito estudo e vontade, pois repetir o que sempre foi feito é um caminho fácil. Além disso, algumas instituições de ensino não dão a liberdade para os(as) professores(as) seguirem autonomamente, muitas vezes lhe sendo fornecido materiais obrigatórios para serem seguidos, inclusive aula por aula.

Qual é o problema de “ensinar” assim? Se o objetivo do ensino for formar estudantes com muita técnica, aptos a passar em provas externas, talvez essa metodologia possa ser eficaz. Mas se o objetivo for formar cidadãos aptos a pensar, conseguir resolver problemas de diferentes formas, desenvolver autonomia de raciocínio e criticidade, então a mudança se faz necessária. Além do que, tal ensino não é inclusivo, pelo contrário, ele serve para selecionar. Alunos ou alunas com maiores dificuldades acabam não tendo as mesmas oportunidades e, em consequência disso, geramos neles(as) desmotivação e desvalorização da matemática, que acaba sendo inalcançável para muitos(as).

Assim, muitos estudos e metodologias de ensino de Matemática surgem para inovar e propor mudanças, algumas acabam sendo superficiais se não forem bem estudadas, refletidas e aplicadas. Como por exemplo a metodologia da Resolução de Problemas, na qual é defendida a importância da proposição de problemas desafiadores aos estudantes. É uma metodologia muito boa, mas com alguma frequência, os problemas são confundidos com exercícios formulados por meio de um texto, que rapidamente são decodificados e servem como meras aplicações diretas de fórmulas ou técnicas previamente ensinadas. Freudenthal tenta combater estudos rasos de Educação Matemática e por isso, em seus trabalhos, faz discussões profundas e complexas. Para falar sobre o ensino de matemática e tentar mudar esse cenário, Freudenthal apresenta, no trecho abaixo, a escolha dos termos usados para nomear a nova prática didática que propôs, chamando-a de ***reinvenção guiada***.

> Relativamente à necessidade de organizar conteúdos a serem tratados, preferi usar o termo “descoberta”; no entanto, no contexto do ensino minha escolha, há bastante tempo, foi “invenção”, termo que abarca conteúdo e forma, descoberta estimulante e organização. Invenções, como entendidas aqui, são etapas no processo de aprendizagem - o que é apontado pelo “re” em reinvenção - enquanto o ambiente de ensino do processo de aprendizagem é indicado pelo adjetivo “guiada”. No primeiro capítulo analisei a matemática como

> uma atividade. De fato, a matemática começa desta forma nas vidas dos indivíduos. Mas será que o aprendiz tem permissão para continuar desta mesma forma? Crianças curiosas não pedem autorização; os indiferentes e os preguiçosos preferem ser guiados. Assim, para explicar como imaginei que a matemática seria aprendida, há muito tempo escolhi o termo “reinvenção guiada". (FREUDENTHAL, 2002, página 46, tradução nossa[20]).

Freudenthal defende a autonomia dos alunos e das alunas, para que sejam autores(as) dos seus processos de aprendizagem, e que o(a) professor(a) cumpra o papel indispensável de guia, orientador(a) e mediador(a). Na *reinvenção guiada* alunos e alunas criam, inventam e constroem o conhecimento sob a orientação do(a) professor(a). A este(a) cabe oferecer atividades envolvendo situações, relativas aos conteúdos previstos, que façam sentido aos(às) estudantes, para que a aprendizagem os(as) estimule a recriar esquemas matemáticos – por isso “reinvenções".

No processo de reinvenção guiada, o(a) professor(a) orienta os(as) estudantes no desenvolvimento de seus conhecimentos e cria oportunidades para que eles(as) sintam a necessidade de organização, notação e sistematização do conteúdo abordado no processo de ensino. A organização e o uso de notação possibilitam a comunicação do(a) aluno(a) com ele(a) mesmo(a), com os(as) colegas, com o(a) professor(a) e até com o mundo. É importante que a sistematização seja apresentada, com as notações oficiais, somente após a percepção de que os(as) estudantes atingiram níveis suficientes de compreensão dos conceitos. O conhecimento sobre as notações ganha significados quando ocorre pela necessidade dos(as) estudantes e não por imposição do(a) professor(a).

De certo modo, o processo individual de aprendizado copia o processo histórico da criação dos conceitos. Na *fenomenologia didática* é destacada a importância de o(a) professor(a) conhecer os obstáculos epistemológicos presentes na concepção de certos conceitos matemáticos, ou seja, os pontos de maiores dificuldades enfrentados pela humanidade no desenvolvimento histórico desta ciência. Assim, o(a) professor(a)

[20] With regard to the subject matter to be organised I preferred the term “discovery”; in the context of teaching, however, my choice of long ago was “invention”, which embraces both content and form, fresh discovery and organisation. Inventions, as understood here, are steps in learning processes, which is accounted for by the “re” in reinvention, while the instructional environment of the learning process is pointed to by the adjective “guided”. In the first chapter I analysed mathematics as an activity. Indeed, mathematics in individual lives starts in this way. But is the learner allowed to continue like this? Curious children will not ask for permission; indifferent and lazy ones prefer to be guided. So in order to explain how I imagined mathematics would be learned I long ago chose the term “guided reinvention”

pode oferecer oportunidades aos(às) estudantes para uma reinvenção do conhecimento matemático, porém não exatamente como de fato ocorreu na História, e sim reforçando as “raízes” (ver página 21) historicamente férteis e evitando os “becos sem saída”. O trecho abaixo aprofunda essas ideias:

> A orientação tanto de professores quanto de livros didáticos não só é necessária para garantir que a matemática que os alunos inventam tenha correspondência com a Matemática convencional, mas também para que reduza substancialmente o processo de invenção. Os estudantes não podem simplesmente reinventar a matemática que os mais brilhantes matemáticos demoraram muito tempo para desenvolver. Os professores precisam ajudar os estudantes constantemente, enquanto tentam se certificar que os estudantes experienciem seu aprendizado como um processo de 'invenção' (GRAVEMEIJER, 2008, p. 285, apud TREVISAN, BURIASCO, 2015, p. 171).

O(A) professor(a) tem um papel essencial no processo da *reinvenção guiada*, precisa ter consciência do desafio, se dispor a enfrentá-lo e preparar alunos e alunas para serem guiados (FREUDENTHAL, 2002). Neste ponto acreditamos que a melhor forma de aprender a ser guia é *guiando*, assim como, para a RME, a melhor forma do(a) aluno(a) aprender matemática é *matematizando*. A experiência de guiar, a escuta ativa e o bom senso ajudarão o(a) professor(a) a identificar dificuldades na prática da reinvenção guiada, e a pavimentar uma base para soluções e superações.

> Não será uma resposta simples, pois orientar a reinvenção significa atingir um equilíbrio entre a liberdade de inventar e a força de guiar, entre permitir que o aprendiz agrade a si mesmo e pedir-lhe que agrade ao professor. Além disso, a livre escolha do aluno já é restringida pelo “re” da “reinvenção”. O aluno deve inventar algo que seja novo para ele, mas bem conhecido para o guia (FREUDENTHAL, 2002, página 48, tradução nossa[21]).

Acreditamos que uma possível preparação do(a) professor(a) para assumir uma reinvenção guiada deve passar pela busca de conhecimentos sobre os obstáculos epistemológicos ocorridos no desenvolvimento histórico do objeto matemático a ser trabalhado e se dispor a ouvir e interpretar positivamente as ideias propostas por alunos ou alunas. O(a) professor(a) também irá criar espaços desafiadores de liberdade de expressão para que os(as) estudantes se sintam motivados(as) a expor suas ideias e debater com os(as) colegas, na tentativa de obterem consensos em suas argumentações e progredirem nos níveis de

[21] It will not be a simple answer since guiding reinvention means striking a subtle balance between the freedom of inventing and the force of guiding, between allowing the learner to please himself and asking him to please the teacher. Moreover, the learner’s free choice is already restricted by the “re” of “reinvention”. The learner shall invent something that is new to him but well-known to the guide.

compreensão do objeto de conhecimento enfocado. Quando os(as) estudantes argumentam e contra-argumentam entre si, se tornam coautores(as) e corresponsáveis pelo desenvolvimento do próprio processo de construção do conhecimento. A argumentação e a comunicação permitem ativar processos metacognitivos, pois tanto exigem compreender situações problemas e ter clareza sobre as conexões entre elas e os conhecimentos prévios dos(as) estudantes, como também, raciocinar a partir de um ponto de vista do outro e refletir em torno dos próprios atos (LOPES, 2016).

De acordo com Freudenthal (2002) a matemática surgiu e ainda surge na realidade do senso comum. Se “os estudantes vivenciam o processo de reinventar a matemática como uma expansão do senso comum, então não sentirão dicotomia alguma entre suas experiências de vida cotidiana e matemática, ambos farão parte da mesma realidade” (Gravemeijer e Doorman, 1999, p. 127, apud FERREIRA, 2013, p. 44). Propor problemas e atividades com **contextos ricos** é uma importante ação para impulsionar alunos e alunas a matematizarem. Para Freudenthal (2002, página 75, com tradução nossa[22]) “contextos foram definidos como domínios da realidade revelados ao aprendiz para serem matematizados”. A situação proposta deve gerar nos(as) estudantes um *conflito cognitivo*, é isso que vai ajudá-lo(a) a avançar em níveis de compreensão e reinventar a matemática. Porém, o conflito cognitivo só ocorre diante de uma *realidade conflitante*. Caso a situação não seja vinculada com a realidade do(a) estudante o conflito não ocorrerá (FREUDENTHAL, 2002). “Em outras palavras, não devem ser apresentados problemas em que tudo já esteja preparado e a única coisa que um(a) aluno(a) precise fazer seja encontrar – ou melhor, pescar – a única solução correta. Em vez disso, os problemas propostos aos(às) alunos(as) devem oferecer-lhes um contexto rico que possa ser organizado, analisado e elaborado por meio de ferramentas matemáticas” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 30, tradução nossa[23]).

O(A) professor(a) não irá guiar o aprendiz para um conteúdo, nem para uma habilidade específica, ele(a) irá guiar para uma atividade. Freudenthal acredita que os conhecimentos e as habilidades desenvolvidas pelos(as) estudantes durante uma

[22] Contexts were defined as domains of reality disclosed to the learner in order to be mathematised.

[23] In other words, they should not be presented problems in which everything is already prepared and the only thing a student has to do is finding — or rather fishing for — the one and only correct solution. Instead, the problems handed out to the students should offer them a rich context that can be organized, analyzed, and elaborated by means of mathematical tools.

atividade desse tipo serão mais consolidados do que se forem impostos. A participação autônoma é que fará com que o aluno ou a aluna se aproprie do conteúdo e desenvolva habilidades importantes. Se o(a) estudante for de fato guiado(a) a reinventar, então terá maior facilidade em apropriar-se dos conhecimentos com atribuição de significados. O(a) professor(a) tem o papel de selecionar situações apropriadas à realidade dos alunos e das alunas, de modo a proporcionar a criação de objetos mentais pertinentes aos objetos de ensino. Esse processo permite a atribuição de significados e favorece aos(às) estudantes sentirem-se motivados(as) e impulsionados(as) a matematizarem em diferentes níveis. Cada aluno(a) merece ter a oportunidade de explorar os caminhos dentro de seus, níveis de compreensão, e de alcançar o objetivo pré-estabelecido pelo(a) professor(a), com a orientação necessária em cada caso particular – que pode ser inclusive nenhuma.

> Matemática surgiu e continua surgindo por meio da matematização. Este fato fenomenológico, em situações didáticas, é explicado pelo princípio da reinvenção guiada. Matematizar é matematizar algo - algo não matemático ou algo ainda não suficientemente matemático, que necessita de uma matematização maior, melhor, mais refinada ou mais perspicaz. Matematizar é matematizar a realidade, pedaços de realidade. Mas a realidade não é única; ela é tantas coisas quantas são as pessoas e, para cada pessoa ela pode ser tantas coisas quantos são os estados de compreensão interna e as circunstâncias externas. De qualquer forma, como a matematização se traduz didaticamente em reinvenção, a realidade a ser matematizada é aquela do aprendiz, a realidade à qual o aprendiz foi guiado, e matematizar é a atividade própria do aprendiz (FREUDENTHAL, 2002, páginas 66 e 67, tradução nossa[24]).

1.4 PRINCÍPIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2000) a RME, como uma concepção de abordagem de ensino de matemática está em constante renovação. Tal concepção, baseia-se no entendimento da Matemática como uma atividade humana e, nesta perspectiva, a RME não pode ser considerada como uma teoria fixa ou acabada de educação matemática. “A RME é vista como uma ‘obra em

[24] Mathematics has arisen and arises through mathematising. This phenomenological fact is didactically accounted for by the principle of guided reinvention. Mathematising is mathematising something – something non-mathematical or something not yet mathematical enough, which needs more, better, more refined, more perspicuous mathematising. Mathematising is mathematising reality, pieces of reality. But reality is not just one thing; it is as many things as there are people, and to one people it may be as many things as there are states of internal understanding and external circumstances. Anyway, as soon as mathematising is didactically translated into reinventing, the reality to be mathematised is that of the learner, the reality into which the learner has been guided, and mathematising is the learner’s own activity.

andamento'" (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998- apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 3, tradução nossa[25]).

O movimento da RME iniciou-se no final da década de 60, mas só no final da década de 70 o termo *Realistic Mathematic Education*[26] passou a ser utilizado (FERREIRA, 2013).

Mais tarde, Treffers (1978, 1987- apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001) formulou as componentes horizontal e vertical da matematização (ver páginas 28 e 29). Por mais que Freudenthal tenha resistido a essas ideias no início, como comenta em seu livro *Revisiting Mathematics Education* (2002), tais componentes tornaram-se de grande valor para o desenvolvimento e compreensão da RME, por parte de vários pesquisadores. De modo sucinto, na matematização horizontal os alunos e as alunas utilizam ferramentas que os(as) possibilitem resolver um problema contextualizado na vida real. Já na matematização vertical resolve-se problemas da própria matemática estabelecendo conexões entre conceitos, estratégias e procedimentos na busca de uma boa solução (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Freudenthal afirma: "matematização horizontal envolve ir do mundo da vida para o mundo dos símbolos, enquanto matematização vertical significa mover-se dentro do mundo dos símbolos" (FREUDENTHAL,2002- apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, página 3, tradução nossa[27]). Segundo o autor, a diferença entre os dois "mundos" é tênue, não há uma linha clara que separe um do outro. Ambos têm a mesma importância e, no processo de ensino-aprendizagem, devem ser levados em consideração para que alunos e alunas consigam circular entre os dois "mundos", mesmo que em níveis de compreensão diferentes. A presença das duas componentes da matematização no processo de ensino-aprendizagem é um dos diferenciais entre uma abordagem *realística* e outras abordagens de ensino.

As três principais abordagens referentes ao ensino de matemática que existiam na década de 60 eram: mecanicista, empirista e estruturalista. Para contrapor a RME a tais abordagens de ensino de matemática, Treffers (1987- apud VAN DEN HEUVEL -PANHUIZEN, 2010) organizou, em um quadro, a presença das componentes da matematização nestas abordagens.

---

[25] RME is seen as 'work in progress' (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998).
[26] Educação Matemática Realística
[27] "Horizontal mathematization involves going from the world of life into the world of symbols, while vertical mathematization means moving within the world of symbols."

Quadro 1: Componentes da matematização em diferentes abordagens

Abordagem	Matematização	
	Horizontal	Vertical
Mecanicista	–	–
Empirista	+	–
Estruturalista	–	+
Realística	+	+

Fonte: Treffers, 1987- apud Van Den Heuvel-panhuizen, 2010

Assim, notamos que a abordagem realística é a única que contempla as duas componentes. Importa comentar que há uma confusão recorrente quanto às ideias da RME, por enfatizarem a importância de abordagens que contemplem situações realísticas que façam sentido para os estudantes, muitos entendem que seu foco seja apenas a matematização horizontal. Porém, a matematização vertical também é uma vertente importante da RME, na medida em que, nela, o fazer matemática é considerado uma atividade humana que, adequadamente guiada, pode ser desenvolvida e incorporada à realidade do(a) aluno(a).

Treffers (1987- apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001) interpretou a RME em cinco princípios que guiaram o que chamou de “matematização progressiva”[28]. Posteriormente, Van den Heuvel-Panhuizen acrescentou um princípio aos desenvolvidos por Treffers, totalizando assim, seis princípios balizadores da RME, alguns mais ligados ao ensino e outros à aprendizagem.

- **O Princípio da Atividade** refere-se à ideia recorrente sobre a aprendizagem da matemática como atividade humana. A matemática não deve ser tratada como uma ciência pronta e finalizada, muito menos quando abordada em sala de aula. Freudenthal afirma que ao apresentar conceitos matemáticos de forma pronta, é feita uma inversão anti-didática, pois é retirada de alunos e alunas a oportunidade de (re)criarem matemática, de matematizarem. Por isso, no Princípio da Atividade é destacada a importância de colocar alunos e alunas

[28] Segundo Ferreira (2013) a matematização progressiva é um processo em que a matemática é construída a partir de sucessivas construções mentais. Também se entende construções mentais como construções humanas, daí o termo matemática como atividade humana.

como produtores de conhecimentos matemáticos, em um processo de aprendizagem desenvolvido a partir de atividades estimulantes, que façam sentido para eles(as). Acreditamos que a aprendizagem da matemática se dá por meio do processo de matematização, "aprender é uma atividade construtiva" (NES, 2009- apud FERREIRA, 2013, página 37). Este princípio, por ter foco no(a) estudante, é mais ligado ao processo de aprendizagem.

- **No Princípio da Realidade** é enfatizado que o ensino de matemática deve acontecer a partir de situações reais, com contextos ricos que possibilitem o processo de matematização. "Assim como a matemática surge da matematização da realidade, o aprendizado da matemática também deve se originar ao matematizar a realidade" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p.5, tradução nossa[29]). A realidade é uma importante fonte para aprender matemática. "O objetivo geral da educação matemática é que alunos e alunas sejam capazes de usar sua compreensão e ferramentas matemática para resolver problemas. Isso implica que eles devem aprender 'matemática para ser útil'" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 5, tradução nossa[30]). Um grande desafio para o(a) professor(a) é pensar e oferecer situações com contextos ricos, favorecendo ao(à) aluno(a) a criação de objetos mentais e exigindo tanto organização como o desenvolvimento de ferramentas matemáticas. Ou seja, oferecer atividades que proporcionem aos(às) estudantes a oportunidade de construir o conhecimento matemático ao matematizarem. Acreditamos que há mais envolvimento dos(as) estudantes se a eles(as) forem oferecidas situações com contextos vinculados às suas realidades, tornando o conhecimento a ser construído, ou reinventado, mais significativo do que um conhecimento simplesmente apresentado. Nota-se que este princípio está atrelado ao trabalho do(a) professor(a), logo seu foco é no processo de ensino.

[29] Just as mathematics arose from the mathematization of reality, so must learning mathematics also originate in mathematizing reality.
[30] The overall goal of mathematics education is that students must be able to use their mathematical understanding and tools to solve problems. This implies that they must learn 'mathematics so as to be useful' (see Freudenthal, 1968)

- **O Princípio de Níveis** é inspirado na teoria dos níveis de Van Hiele. O processo de aprendizagem ocorre em diferentes níveis de compreensão, como afirma Van den Heuvel-Panhuizen (2000) a seguir:

> Aprender matemática significa que os alunos passam por vários níveis de compreensão: da habilidade de inventar soluções informais relacionadas a contextos, à criação de vários níveis de atalhos e esquematizações, à obtenção de *insight* sobre os princípios subjacentes e do discernimento de relações ainda mais amplas. A condição para chegar ao próximo nível é a habilidade de refletir sobre as atividades realizadas. Essa reflexão pode ser estimulada por interação. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 5, tradução nossa[31]).

Para Freudenthal (2002) o pensamento reflexivo é um poderoso motor para a invenção matemática, é esse pensamento, mesmo que intuitivo, que irá fazer com que o(a) aluno(a) avance de nível. Acredita-se que a alunos e alunas deve-se oferecer atividades que possam ser realizadas em diferentes níveis de compreensão, tendo a possibilidade de começar por níveis inferiores e avançar para níveis superiores por meio de reflexões. Freudenthal (2002) considera que atividades realizadas em níveis inferiores se tornarão objeto de análise em níveis superiores. No entanto, alerta sobre a possível confusão que possa existir entre os componentes da matematização e os níveis de aprendizagem (FREUDENTHAL, 2002). Não necessariamente, os níveis inferiores estão relacionados à matematização horizontal e os níveis superiores à matematização vertical.

Além disso, Freudenthal (2002) afirma que o ensino é um processo de longo prazo e que a aprendizagem é um processo descontínuo, o que é revelado pelo princípio de níveis. Ver o processo de ensino-aprendizado avançar por níveis de compreensão é uma característica importante da RME que a diferencia de outras abordagens de ensino. O autor salienta esse diferencial ao apontar: “os métodos tradicionais, no entanto, muitas vezes mostram a tendência oposta: descer dos níveis mais altos para os mais baixos, em vez de subir do nível mais baixo para os mais altos” (FREUDENTHAL, 2002, p. 97, tradução nossa).

---

[31] Learning mathematics means that students pass through various levels of understanding: from the ability to invent informal context-related solutions, to the creation of various levels of short cuts and schematizations, to the acquisition of insight into the underlying principles and the discernment of even broader relationships. The condition for arriving at the next level is the ability to reflect on the activities conducted. This reflection can be elicited by interaction.

> A força do princípio de níveis é que ele guia o crescimento na compreensão da matemática e dá ao currículo uma coerência longitudinal. Essa perspectiva de longo prazo é característica da matemática realística. Há um forte foco na relação entre o que foi aprendido anteriormente e o que será aprendido mais tarde." (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 7, tradução nossa[32])

Desse modo, investir em níveis de compreensão inferiores permite que os(as) estudantes se desenvolvam em seu tempo, o que permite que, a longo prazo, os(as) alunos(as) alcancem os conhecimentos de forma mais completa e significativa. Diferentemente de quando o processo é invertido, começar um tema em nível superior constantemente torna necessário retomá-lo em níveis inferiores, como no exemplo sobre introdução à álgebra comentado no item 1.2 desta dissertação. Tendo foco no(a) aluno(a), o princípio dos níveis está relacionado ao processo de aprendizagem.

- **No Princípio do Entrelaçamento** propõe-se integrar conteúdos da matemática entre si, e com outros componentes curriculares, não apenas apresentar tópicos matemáticos como conteúdos isolados. Neste princípio trabalha-se integrações entre: conteúdos de uma mesma área matemática (Por exemplo, dentro da aritmética pode-se trabalhar senso numérico, aritmética mental, estimativa, algoritmos); diferentes áreas da matemática (Como geometria, aritmética, medidas, estatística); e conteúdos matemáticos com conteúdos de outros componentes curriculares (como geográfica, ciências, artes, língua portuguesa, história). Acreditamos que se o processo de matematização ocorre a partir de situações com contextos ricos, os conhecimentos podem ser desenvolvidos e entrelaçados. Construções mentais, realizadas para uma determinada atividade pode ser reutilizadas e implementadas em outras de temas diferentes. Assim, é importante propiciar a alunos e alunas oportunidades de vivenciar a matemática em sua essência, de forma que seu caráter, como uma atividade humana, fique mais claro do que com a mera apresentação desta ciência dividida em temas isolados. Desse modo, o Princípio do Entrelaçamento está ligado ao processo de ensino, pois

[32] The strength of the level principle is that it guides growth in mathematical understanding and that it gives the curriculum a longitudinal coherency. This long-term perspective is characteristic of RME. There is a strong focus on the relation between what has been learned earlier and what will be learned later.

cabe ao(à) professor(a) o desafio de propor aos(às) estudantes, situações com contexto rico, que possam ser matematizadas em diferentes níveis e que permitam a integração entre diferentes áreas da matemática e de outras áreas do conhecimento.

- **O Princípio da interatividade** diz respeito ao aprendizado de matemática como uma atividade social. Na RME acredita-se que além de ser oferecido a alunos e alunas situações com contextos ricos, em que possam matematizar em diferentes níveis de compreensão, também é importante oportunizar a interação entre os(as) estudantes. Essas interações tornam-se uma ferramenta significativa para o processo de aprendizagem pois, ao compartilharem suas descobertas com os(as) colegas, alunos e alunas podem desenvolver novas ideias e aprimorar suas próprias estratégias (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, 2010). “Além disso, a interação pode estimular a reflexão, o que habilita os estudantes a alcançarem um nível mais elevado de compreensão” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 9, tradução nossa[33]). Por mais que a interação entre os(as) alunos(as) seja relevante para o processo de aprendizagem, não se pode descartar a individualidade de cada um(a) e considerar que todos(as) irão avançar em nível de compreensão ao mesmo tempo. Por isso, a escolha do contexto é tão importante, diante da relevância de oferecer aos(às) estudantes situações que favoreçam o desenvolvimento da matemática em diferentes níveis (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). “A interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e colaboração oportunizam a reflexão sobre o trabalho” (WIDJAJA; HECK, 2003 - apud FERREIRA, 2013, p. 38). O princípio da interatividade refere-se ao processo de aprendizagem.

- **O Princípio de orientação** refere-se à ideia de que o processo de aprendizagem ocorre por meio da reinvenção guiada. Freudenthal defende que seja dado aos(às) estudantes a oportunidade “guiada” de “reinventar” a matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

> Se o pensamento reflexivo é, de fato, um motor poderoso da invenção matemática, é natural colocá-lo em bom uso em um planejamento

[33] Moreover, the interaction can evoke reflection, which enables the students to reach a higher level of understanding.

> educacional que seja baseado no princípio de aprendizagem por reinvenção - por reinvenção guiada, o que significa que o guia deve provocar o pensamento reflexivo. (FREUDENTHAL, 2002, p. 100, tradução nossa[34])

Neste princípio o(a) professor(a) tem um papel fundamental no aprendizado dos(as) estudantes. Ao considerar o processo de ensino-aprendizagem a longo prazo e conhecer a fenomenologia dos conceitos a serem explorados, é importante que o(a) professor(a) considere os diferentes níveis de aprendizagem adequados à sua turma e estabeleça um nível mínimo a ser atingido por todos(as), para poder organizar sua proposta didática por meio de uma fenomenologia didática. A partir disso, irá guiar alunos ou alunas com mais dificuldades para atingirem o nível mínimo e incentivar estudantes mais adiantados a atingirem níveis mais avançados, sempre atento(a) a que os objetos mentais, por ele(as) desenvolvidos sejam compatíveis com a fenomenologia dos conceitos enfocados.

> Isso implica que, na RME, tanto os professores como os programas educacionais têm um papel crucial na forma como os alunos assimilam conhecimento. Eles orientam o processo de aprendizagem, mas não de forma fixa, por meio de demonstrações daquilo que os estudantes devem aprender. Isso estaria em conflito com o princípio da atividade e levaria a uma pseudo compreensão. Em vez disso, os estudantes necessitam de espaço para construir *insights* matemáticos e ferramentas por conta própria. Para atingir esse estado desejado, os professores devem fornecer aos estudantes um ambiente de aprendizagem em que o processo de construção possa emergir. Um requisito é que os professores devem ser capazes de prever onde e como podem antecipar os entendimentos e habilidades dos estudantes que percebem estar surgindo (ver também Streefland, 1985). Os programas educacionais devem conter cenários que tenham o potencial de funcionar como uma alavanca na mudança da compreensão dos estudantes. É importante que esses cenários sempre mantenham a perspectiva da trajetória de ensino/aprendizagem de longo prazo com base nos objetivos desejados. Sem essa perspectiva, não é possível guiar a aprendizagem dos estudantes. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p.9, tradução nossa)

[34] If reflective thought is, indeed, a forceful motor of mathematical invention, it is only natural to put it to good use in such educational design as is based on the principle of learning by reinvention - by guided reinvention, which means that the guide should provoke reflective thinking.

Explanamos aqui os seis princípios que fundamentam a RME. Nos princípios são considerados seus aspectos gerais: a matemática como atividade humana; matematização horizontal e vertical; níveis de compreensão; e processo reflexivo. Além disso, em muitos momentos os princípios se entrelaçam de tal modo que se torna difícil diferenciá-los. A seguir descrevemos um esquema genérico de processo de ensino-aprendizagem baseado na RME e nos seus Princípios.

Ao oferecer uma tarefa aos(às) estudantes, com contexto rico (Princípio da Realidade), o(a) professor(a) possibilita aos(às) alunos(as) construírem o conhecimento por meio da matematização (Princípio da Atividade). Cada aluno(a) desenvolve seus objetos mentais, cria suas estratégias, reflete sobre elas e avança respeitando o seu nível de compreensão (Princípio de Níveis). Ao compartilhar estratégias com os(as) colegas ou com o(a) professor(a), o(a) aluno(a) tem a possibilidade de expandir suas ideias e atingir um novo nível de compreensão (Princípio da Interatividade). A atividade oferecida pode abordar conteúdos de mais de um tema matemático – inclusive de temas de outros componentes curriculares– ou as estratégias desenvolvidas em uma determinada atividade pode ser reutilizada em outra atividade sobre tema(s) diverso(s) (princípio do entrelaçamento). Por fim, durante toda a atividade o(a) professor(a) estará presente, atento(a) e ativo(a), para ajudar os(as) estudantes e guiá-los(as) como necessário para conseguirem avançar nos níveis de aprendizagem (Princípio da Orientação).

O quadro a seguir organiza os Princípios com foco no processo de ensino ou de aprendizagem e apresenta um breve resumo sobre cada um dos princípios da RME.

Quadro 2: Princípios da RME

<table>
<tr><td rowspan="4">FOCO NO PROCESSO DE</td><td>PRINCÍPIO DA REALIDADE</td><td rowspan="4">FOCO NO PROCESSO DE</td><td>PRINCÍPIO DA ATIVIDADE</td></tr>
<tr><td>O(a) professor(a) fornece situações realísticas, com contextos ricos que oportunizem o processo de matematização dos(as) estudantes.</td><td>Alunos e alunas produzem, com autonomia, conhecimentos matemáticos em de atividades estimulantes, que façam sentido para eles(as).</td></tr>
<tr><td>PRINCÍPIO DO ENTRELAÇAMENTO</td><td>PRINCÍPIO DOS NÍVEIS</td></tr>
<tr><td>O(a) professor(a) propõe situações, com contexto rico, que permitam a integração entre</td><td>Cada aluno(a) segue o seu processo de aprendizagem respeitando o seu nível,</td></tr>
</table>

ENSINO	diferentes áreas da matemática e de outras áreas do conhecimento.	APRENDIZAGE	desenvolvendo estratégias mentais próprias para realizar as tarefas e avançar de nível de compreensão.
	PRINCÍPIO DA ORIENTAÇÃO		**PRINCÍPIO DA INTERATIVIDADE**
	Ao longo de uma atividade o(a) professor(a) está atento(a) para guiar os(as) estudantes, quando necessário, na reinvenção dos conceitos e no progresso entre níveis de compreensão.		Alunos e alunas compartilham suas estratégias, esse compartilhamento os ajuda a ampliar seus repertórios e a avançar nos níveis de compreensão.

		M	

Fonte: Autora

CAPÍTULO 2

2. EXPERIMENTOS DIDÁTICOS DESENVOLVIDOS

A partir dos estudos realizados no capítulo anterior selecionamos alguns temas, referentes ao currículo do sexto ano do Ensino Fundamental II, para refletir e analisar o potencial de exploração em sala de aula por meio de abordagens didáticas na perspectiva da RME. Assim, escolhemos atividades aplicadas anteriormente sobre os temas escolhidos para analisá-las ou replanejá-las sob a ótica dos princípios da RME. Nosso objetivo foi propiciar experiências didáticas significativas aos(às) estudantes embasadas nas ideias desenvolvidas por Freudenthal, de modo a favorecer motivação, autonomia e interação. Segue os temas selecionados e os experimentos didáticos desenvolvidos.

Quadro 3: Temas e Experimentos didáticos

Tema	**Experimentos didáticos**
Figuras geométricas espaciais e construções geométricas	I - Projeto de construção coletiva de um “quebra-cabeça” da foto da turma feito com prismas hexagonais. II - Projeto de construção de maquetes feitas a partir de planificações de prismas e pirâmides.
Frações	III - Planejamento da compra dos materiais necessários para a realização de uma quantidade de receitas de *cookies* suficientes para todos(as) estudantes. Preparo, por alunos e alunas, da massa dos *cookies*, colocação em formas para serem assados e degustados.
Números primos	IV - Identificação de números primos pela investigação de padrões na composição de retângulos com n quadrados congruentes onde n é um número natural maior ou igual a 2. V - A partir da composição de retângulos com n quadrados ($n \in N,\ \ n \geq 2$) congruentes, observar padrões, identificar “números especiais” e conjecturar definições para eles(as).
Consumo consciente de água envolvendo medidas, proporções e representação gráfica	VI - Projeto sobre o consumo de água, envolvendo a coleta de dados sobre o consumo domiciliar de alunos e alunas e realizando comparação com dados científicos sobre o consumo ideal e consciente de água em ações cotidianas.

Fonte: Autora

2.1 FIGURAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS: PRISMAS E PIRÂMIDES

Objetivos de conteúdo

- Identificar e descrever características de prismas e pirâmides;
- Reconhecer e nomear seus elementos;
- Explorar relações entre o número de vértices, arestas e faces em prismas e pirâmides;
- Explorar planificações;
- Desenhar planificações com auxílio de ferramentas geométricas: régua, compasso e transferidor.
- Construir figuras geométricas espaciais com planificações.

I - EXPERIMENTO DIDÁTICO: Construção de um quebra-cabeça

Quadro 4: Etapas e Objetivos do Experimento didático I

Etapas	Objetivos
Atividade diagnóstica	Identificar quais conhecimentos alunos e alunas têm sobre prismas e pirâmides e suas regularidades.
Apresentação da proposta de contribuição da disciplina de matemática na Mostra Cultural anual da escola	Apresentar a temática da Mostra Cultural e a proposta de construção de um quebra-cabeça coletivo.
Construção de representações por planificações de prismas ou pirâmides	Replicar os modelos concretos fornecidos, por meio de planificações, utilizando papel e material de desenho geométrico.
Experimentação de diferentes combinações de prismas (excetuando os de base retangular) e pirâmides para a construção do quebra-cabeça coletivo e socialização das soluções encontradas	Definir as possíveis opções de figuras geométricas espaciais como futuras peças do quebra-cabeça e definir coletivamente qual o formato e dimensões das peças.
Construção individual das figuras geométricas espaciais que irão compor o quebra-cabeça. Cada aluno(a) constrói uma "peça"	Construir uma planificação, com as dimensões definidas, decorar as faces e montar a figura geométrica espacial escolhida.
Avaliação por meio dos instrumentos avaliativos: observação nas discussões e anotações da professora; precisão dos objetos construídos; e atividades individuais escritas	Avaliar o processo de aprendizagem de cada aluno(a) quanto a: conceitos trabalhados; argumentação oral e escrita; e habilidades motoras desenvolvidas na construção geométrica.

Fonte: Autora

Atividade diagnóstica

Alunos e alunas foram organizados(as) em círculo e no centro foram disponibilizadas algumas figuras geométricas espaciais de diferentes formatos e cores (prismas, pirâmides, cones e cilindros). A proposta feita aos(às) estudantes foi que criassem classificações, ou seja, que formassem grupos de objetos segundo critérios estabelecidos por eles(as) e os explicitassem.

Houve muita discussão entre os(as) estudantes, alguns(umas) observaram propriedades e compartilharam-nas com os(as) colegas, argumentaram sobre a formação de agrupamentos dos objetos. Em ambas as salas surgiram agrupamentos de prismas e de pirâmides, foco principal do nosso estudo, mostrando um conhecimento prévio destes conteúdos.

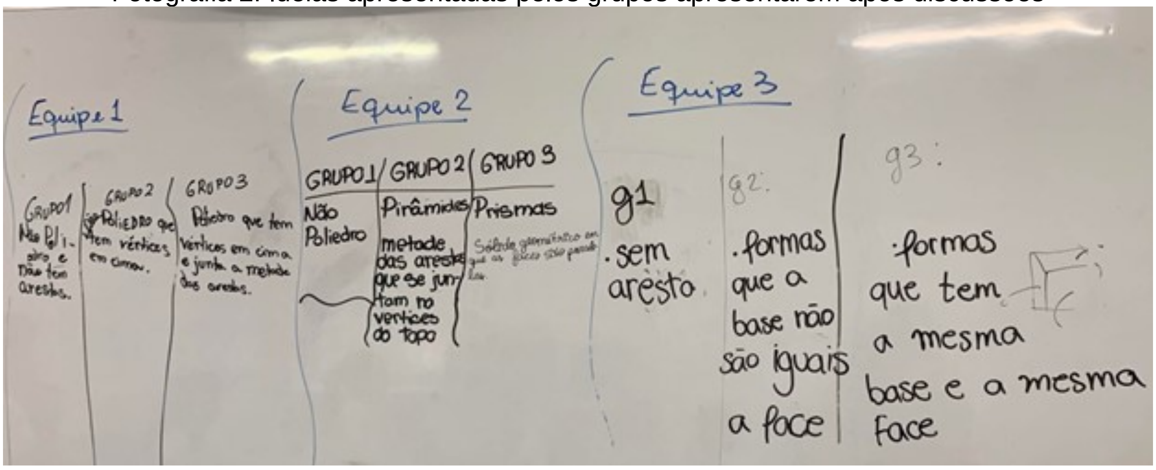
Em uma das salas, discutiram sobre o prisma de base triangular. Alguns(umas) estudantes quiseram inseri-lo no agrupamento das pirâmides e outros(as) no agrupamento dos prismas, até que um dos alunos segurou o sólido e disse: “esse é um prisma triangular, dá para ver um triângulo aqui e mais outra base”, mostrando que seguia o mesmo padrão dos outros primas. Essa atividade oportunizou que alunos e alunas saíssem da zona de receptores e fossem ativos no próprio processo de aprendizagem, ao criarem hipóteses e argumentarem eles(as) matematizaram, sendo contemplado os Princípios da Atividade e Interatividade.

Fotografia 1: Alunos e alunas discutindo possíveis agrupamentos dos objetos geométricos.

Fonte: Autora

No quadro 5 são transcritas as informações da fotografia 2, onde os(as) alunos(as) mostram suas conclusões a respeito da atividade desenvolvida.

Fotografia 2: Ideias apresentadas pelos grupos apresentarem após discussões



Fonte: autora

Quadro 5: Transcrição da fotografia 2

Equipe 1			Equipe 2			Equipe 3		
Grupo1	Grupo2	Grupo3	Grupo1	Grupo2	Grupo3	G1	G2	G3
Não poliedro e não tem aresta	Poliedro que não tem vértices em cima	Poliedro que tem vértice em cima que junta metade das arestas	Não poliedro	Pirâmide metade das arestas que se juntam no vértice do topo	Prismas: Sólido geométrico em que as faces são paralelas	sem aresta	formas que a base não são iguais a face	formas que tem a mesma base e a mesma face

Fonte: autora

Pode-se observar domínio dos(as) estudantes quanto às nomenclaturas: poliedro, aresta, vértice, face e base e objetos mentais desenvolvidos acerca dos conceitos propostos.

<u>Apresentação da proposta do quebra-cabeça para a Mostra Cultural</u>

Muitas discussões foram feitas, não só em Matemática, mas também em outras disciplinas, para atender a demanda da Mostra cultural, sobre o tema da empatia e a **relação do eu e do nós**. Assim, propusemos aos alunos que, em matemática, levássemos à Mostra um “quebra-cabeça” da foto da turma toda para representar o “nós” e que cada aluno construísse uma figura geométrica espacial para representar o “eu”. A ideia foi que as figuras geométricas individuais se encaixassem de modo a que, ao serem colocadas juntas, compusessem a fotografia completa da turma. Tal apresentação, buscou desenhar uma situação realística para os(as) estudantes na medida em que envolvia uma fotografia de todos(as) e a construção de um jogo muito conhecido. De fato, os(as) alunos(as) aceitaram com entusiasmo o desafio de investigar figuras geométricas espaciais que possibilitassem a construção desse quebra-cabeça. No entanto, mesmo tal apresentação despertando interesse dos(as) estudantes, não há nenhum princípio da RME contemplado, pois nesta etapa não há ação dos alunos.

Construção de planificações

Em grupos, os(as) alunos(as) receberam prismas ou pirâmides com diferentes bases e folhas em branco. Foi solicitado que planificassem os poliedros recebidos nas folhas fornecidas. Cada grupo teve a liberdade de criar sua estratégia de planificação e a seguir recortaram e montaram as réplicas dos poliedros. Nessa etapa surgiram discussões sobre o uso de fita adesiva ou a criação de “abas” para colar uma face na outra.

Fotografia 3: Alunas planificando um prisma de base triangular.

Fonte: autora

Nesta atividade os(as) estudantes tiveram a oportunidade de matematizar, interagir e aprender juntos(as). Assim, os Princípios da Realidade, Atividade e Interatividade da RME foram contemplados.

Experimentação e socialização das soluções

Nessa etapa, os(as) alunos(as) discutiram sobre as figuras espaciais que poderiam ser usadas para a confecção do quebra-cabeça. Assim, dividiram-se em grupos de acordo com a preferência de investigação: prisma de base pentagonal, de base hexagonal ou de base triangular (foi solicitado que não fizessem primas de base retangular por ser mais simples). Quando algum(a) estudante pensava em pirâmide, outros(as) logo justificavam o motivo de não ser adequado para essa atividade.

Cada componente do grupo construiu um prisma da cor e do tamanho desejado e juntos(as) experimentaram um possível quebra-cabeça. Em seguida, houve um espaço de debate para que cada grupo defendesse o uso do seu prisma na construção do quebra-cabeça. O grupo que ficou com o prisma de base pentagonal logo percebeu que os pentágonos não se encaixavam e que isso não permitia a composição da foto. Após os dois outros grupos defenderem o uso dos seus prismas, houve uma votação com toda a turma, na qual o prisma de base hexagonal venceu. Esta etapa contemplou os princípios da Realidade, Atividade, Interatividade e dos Níveis. Alguns(umas) alunos(as) em níveis de compreensão mais avançada, notaram a impossibilidade da utilização das pirâmides para o projeto e ajudaram outros colegas a avançarem em nível de compreensão, de forma concreta.

Construção e finalização do quebra-cabeça

Com o uso de régua e compasso alunos e alunas construíram um hexágono regular. A partir disso definimos em conjunto as seguintes medidas para os prismas: raio da circunferência e medida do lado dos hexágonos de 6 cm e altura do prisma de 8 cm. Foram fornecidos papéis coloridos com gramatura adequada, em papel cartão, para a confecção dos prismas.

Em língua portuguesa os alunos e as alunas haviam escrito contos e o professor pediu que cada um(a) desenhasse a capa do seu conto na forma do hexágono regular de modo que essa ilustração compusesse a outra base do prisma. Quanto às faces retangulares, houve uma discussão entre os(as) estudantes sobre os trabalhos que estavam fazendo e decidiram o que fariam em cada uma das faces: duas para o trabalho de inglês; uma para o de teatro; uma para o de português (além da base); e duas livres. Para montar o quebra-cabeça, alguns(umas) alunos(as) que estavam mais adiantados(as) utilizaram a foto já impressa e sobrepuseram os poliedros construídos fazendo marcações hexagonais na foto, para em seguida cortarem as faces do tamanho estabelecido.

Ao final, cada aluno(a) teve o seu prisma pronto para a apresentação. Eles ficaram expostos em uma mesa compondo o quebra-cabeça interativo que, montado, exibia a foto coletiva de todo sexto ano e, individualmente, o trabalho de cada aluno(a) (ver a seguir fotografia 4).

Fotografia 4: Quebra-cabeça montado com a foto da turma, formado por prismas hexagonais

Fonte: autora

Os princípios da RME contemplados nesta etapa foram: da Atividade, da Realidade, da Interatividade, dos Níveis e da Orientação e do Entrelaçamento. Os Princípios da Atividade e da Realidade estiveram presentes, pois os(as) alunos(as) trabalharam com muito engajamento e autonomia na produção do quebra-cabeça. No entanto, alguns(umas) precisaram da orientação da professora ou de colegas em níveis de compreensão mais avançados, o que mobilizou os Princípios dos Níveis, da Orientação e da Interatividade. Esta atividade também contemplou o Princípio do Entrelaçamento de matemática com artes, pela construção do quebra-cabeça da foto da turma e das capas dos contos de cada estudante em formato de hexágono regular para compor a outra base do seu prisma. Além disso, quebra-cabeça deu visibilidade às produções de disciplinas como inglês, língua portuguesa, e teatro, disponibilizando um espaço de sistematização dos trabalhos nelas realizados, tornando o prisma em um livro objeto.

Avaliação e resultados

A avaliação foi feita ao longo do processo. Todos os poliedros planificados e montados foram avaliados quanto à precisão, tanto do desenho, como do recorte e da junção das faces. Além disso, também foram realizadas três atividades avaliativas escritas: uma lição de casa e duas provas. Consideramos uma atividade avaliativa escrita como uma oportunidade de estudantes refletir, estabelecer relações e registrar suas compreensões sobre os temas estudados, inclusive para que tomem consciência dos seus próprios aprendizados.

A lição de casa estimula a autonomia dos(as) estudantes, pois é um momento em que o(a) aluno(a) precisa refletir sobre as questões apresentadas e, se necessário, buscar ajuda. A primeira prova ocorreu logo após a finalização do quebra-cabeça, de modo que os conteúdos trabalhados estavam ‘frescos’ nas mentes dos(as) estudantes. Por outro lado, a segunda prova (trimestral) ocorreu no final do trimestre, de modo que outros conteúdos também foram abordados. Esta avaliação constituiu-se em uma boa oportunidade para verificar as concepções que alunos e alunas de fato desenvolveram sobre a temática.

Consideramos positivos os resultados deste experimento didático. Alguns(umas) alunos(as) apresentaram dificuldades em planificar prismas de base hexagonal com medidas exatas, que foram sanadas pelas interações entre os(as) colegas. Esta dinâmica favoreceu aos(às) estudantes com dificuldades o avanço da cognição sobre as relações entre primas e suas planificações e o aprimoramento de habilidades motoras. Nas atividades avaliativas escritas, discussões orais e construções elaboradas. Todos(as) demonstraram ter atingido os objetivos de aprendizado propostos: identificar e descrever características de prismas e pirâmides; reconhecer e nomear seus elementos; explorar relações entre o número de vértices, arestas e faces em prismas e pirâmides; classificar poliedros; explorar planificações; e desenhar planificações com auxílio de ferramentas geométricas – régua, compasso e transferidor. Não houve nenhum caso de recuperação neste tema, todos mostraram domínio satisfatório sobre o assunto.

I- Sistematização dos princípios da RME presentes na atividade aplicada

Quadro 6: Sistematização dos princípios da RME presentes na aplicação da atividade I

Tema: Prismas e Pirâmides **ATIVIDADE: Construindo um quebra-cabeça**	
ETAPAS	**PRINCÍPIOS DA RME CONTEMPLADOS**
Atividade diagnóstica	- Princípio da Atividade - Princípio da Interatividade
Apresentação da proposta do quebra-cabeça	Não há
Construções de planificações	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio da Interatividade
Experimentação e socialização	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio da Interatividade - Princípio dos Níveis
Construção e finalização	- Princípio da Atividade - Princípio da Orientação - Princípio dos Níveis - Princípio da Realidade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio da Interatividade

Fonte: autora

II - EXPERIMENTO DIDÁTICO: Projeto de construções geométricas

Quadro 7: Etapas e objetivos do experimento didático II.

Etapas	**Objetivo**
Situação problema realística em que os alunos e alunas interpretam o papel de designers e criam um modelo de embalagem.	Motivar alunos e alunas para a discussão sobre prismas e pirâmides e, eventualmente, diagnosticar seus conhecimentos prévios.
Classificação de figuras geométricas espaciais a partir de modelos concretos fornecidos.	Incitar reflexões e discussões sobre propriedades e regularidades de prismas e pirâmides pela observação dos modelos concretos.
Construção de prismas e pirâmides a partir de planificações dadas.	Propiciar o desenvolvimento motor e a observação de regularidades em planificações, prismas e pirâmides.
Apresentação da proposta de elaboração de projetos de construção de figuras geométricas espaciais.	Compartilhar os objetivos da proposta de elaboração dos projetos e fornecer sugestões de possíveis contextos.
Construção de prismas e pirâmides a partir de planificações elaboradas por alunos e alunas.	Utilizar os conhecimentos desenvolvidos para desenhar planificações e aprimorar habilidades motoras na montagem dos objetos geométricos.
Definição de um projeto específico, individual ou em grupo, e construção do produto final.	Planejar e executar o projeto.
Avaliação, por meio dos instrumentos avaliativos: observação e registro sobre a precisão dos objetos construídos; atividades individuais escritas; atividades individuais orais; e observação do desenvolvimento do projeto.	Avaliar o processo de aprendizagem de cada aluno(a) quanto a: conceitos trabalhados; argumentação oral e escrita; e habilidades motoras desenvolvidas na construção geométrica.

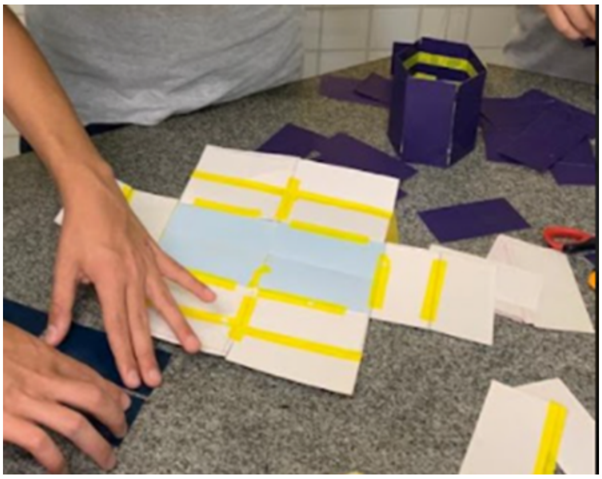
Fonte: autora

<u>Situação Problema Realística</u>

Os alunos e as alunas foram convidados a se tornarem designers por um dia. Cada aluno(a) recebeu um crachá escrito “Equipe de desenvolvimento de produto”. A professora se vestiu com trajes do ramo corporativo (calça e blazer) e atuou como uma executiva, com um contrato em mãos. Introduziu a seguinte fala: “Uma empresa quer nos contratar para desenvolvermos embalagens de madeira de diversos tamanhos. Para tanto ela compra grandes placas retangulares de madeira e as cortam em placas retangulares congruentes, de modo a não desperdiçar material. Então é preciso que as equipes se reúnam e criem embalagens para diversas situações usando o material solicitado”.

Assim, a atividade foi introduzida de uma forma lúdica, alunos e alunas tiveram que criar embalagens utilizando retângulos de papel congruentes (10cm x 3cm) fornecidos pela professora que representassem o material original de madeira. Podiam usar quantos retângulos quisessem, fita adesiva ou cola quente, mas não podiam cortá-los ou dobrá-los, já que se tratava de uma representação de madeira.

Fotografia 5: Estudantes desenvolvendo embalagens para a atividade.



Fonte: autora

A aula aconteceu no laboratório de ciências onde o espaço propicia o desenvolvimento da atividade, pois possui mesas amplas em que alunos e alunas podem se agrupar e trabalhar juntos(as), diferentemente da sala de aula onde as mesas são individuais. Os(as) estudantes ficaram motivados(as) e empolgados(as) com a proposta, interagindo e formulando soluções conjuntamente para o problema. Percebemos assim que a situação realística proposta, fez sentido para eles(as). Ao circular pelos grupos, dialogando, orientando e questionando com a utilização dos termos geométricos apropriados (como arestas, faces, prismas), notamos falta de conhecimento sobre estes conceitos. A princípio seria uma atividade disparadora do conteúdo via resolução de problemas, mas acabou se tornando em uma importante atividade diagnóstica, tendo sido possível identificar defasagens do grupo em relação a tais conceitos. Mesmo assim, esta atividade contemplou os Princípios da Realidade, da Atividade, da Interatividade e da Orientação.

Em anos anteriores a atividade diagnóstica, sobre figuras geométricas espaciais, ocorreu como descrita na aplicação anterior. Tal atividade consistiu em disponibilizar aos(às) estudantes objetos geométricos para que eles(as) os classificassem, a partir de seus conhecimentos prévios. Ao considerar que, historicamente, o conhecimento que os(as) estudantes traziam para o sexto ano sobre geometria espacial era suficiente e o tempo didático disponível era curto para a realização deste conteúdo, a atividade diagnóstica referida, no presente parágrafo, foi considerada dispensável e “substituída” pela atividade disparadora, via resolução de problemas, descrita anteriormente. Porém, os(as) estudantes não demonstraram conhecimento suficiente de geometria e a atividade de classificação foi reconsiderada e aplicada como vem descrito a seguir. Uma das hipóteses levantadas a respeito da defasagem conceitual observada é o fato deste grupo ter cursado o quinto ano remotamente, em função da pandemia.

Classificação de figuras geométricas espaciais

A professora disponibilizou modelos de figuras geométricas espaciais para a aula (entre eles prismas, pirâmides, cilindros, cones) e propôs aos(às) estudantes que explorassem os objetos. A partir disso, a professora orientou discussões e foi registrando na lousa as propriedades e regularidades dos prismas e das pirâmides que iam sendo observadas por alunos e alunas. Assim, surgiram objetos mentais como vértices, arestas, faces, bases, (alguns) polígonos e também justificativas para o fato de cones e cilindros não se enquadrarem na classificação de poliedros. Os alunos e as alunas registraram no caderno os conceitos discutidos.

Percebemos agora que a atividade, segundo Freudenthal, constituiu-se em uma inversão anti-didática, pela forma como foi conduzida. A princípio a atividade de classificação foi pensada para que alunos e alunas criassem, explorassem, investigassem, sugerissem possibilidades, discutissem entre si, como de fato foi feito na aplicação do experimento I. Porém, o tempo didático estava menor do que nos anos anteriores, restavam poucas semanas para o final do ano letivo. Na tentativa de “fazer caber” todo conteúdo previsto no curto tempo, conduzir as discussões, registrar na lousa, induzir os(as) estudantes a reconhecerem propriedades, pareceu-me ser a conduta mais prática e ágil. No entanto, ao fazer isso me afastei de princípios da Matemática Realística, já que não foi proporcionado a alunos e alunas a oportunidade de fazer matemática, criar e matematizar como havia acontecido em anos anteriores.

Construção de figuras geométricas com planificação

Com o objetivo de oportunizar o desenvolvimento motor e a observação de regularidades presentes em planificações, em prismas e pirâmides, foram entregues, para os(as) estudantes, planificações desenhadas para que recortassem e montassem o prisma ou a pirâmide correspondente. Nesta etapa alguns(umas) alunos(as) perceberam a congruência dos lados que se unem para formar uma aresta e também a finalidade das abas presentes em planificações. Estudantes em níveis de compreensão mais avançados conseguiram definir qual figura geométrica espacial a planificação representava – por exemplo, uma planificação com 5 retângulos e dois pentágonos é uma representação de um prisma de base pentagonal. Nesta etapa, foram contemplados os Princípios da Atividades e dos Níveis.

Apresentação do projeto

A professora apresentou a ideia do projeto por meio de slides. O primeiro slide continha o nome - "Projeto de construção de figuras geométricas espaciais" - transmitindo informações sobre o conteúdo do projeto. A seguir foram apresentados os seguintes objetivos do projeto: promover o processo de ensino e aprendizagem sobre os conteúdos de prismas e pirâmides e suas relações; desenvolver habilidades motoras finas; e desenvolver o trabalho coletivo e colaborativo. Por fim, a professora apresentou possibilidades de projetos como meras sugestões indicadas por ilustrações em slides (reproduzidos a seguir): quebra-cabeça; cidade; castelo; igreja; e outras ideias. Enfatizou que as escolhas eram livres e o foco do trabalho estava nas construções geométricas de prismas e pirâmides para a construção do projeto final decidido pelo grupo.

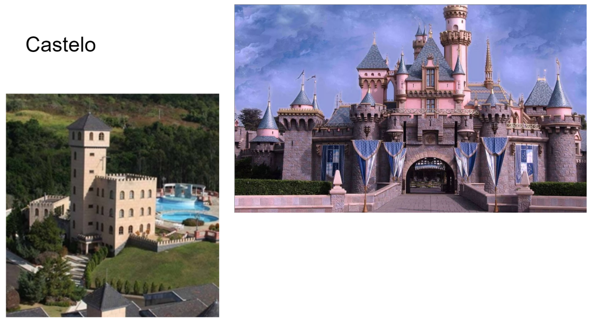
Figura 1: Slide com ideias de quebra-cabeça

Fonte: Slides utilizados em sala de aula pela autora

Figura 2: Slide com ideias de cidades

Fonte: Slides utilizados em sala de aula pela autora

Figura 3: Slide com ideias de castelos



Fonte: Slides utilizados em sala de aula pela autora

Mesmo tendo sido apresentadas situações realísticas potenciais, nenhum Princípio da RME foi contemplado.

<u>Construção de figuras geométricas sem planificações fornecidas</u>

Nesta etapa o objetivo foi a construção de planificações e o aprimoramento de habilidades motoras de estudantes, utilizando os conhecimentos desenvolvidos sobre prismas e pirâmides. Assim, alunos e alunas receberam folhas em branco para construir a planificação de um prisma ou pirâmide, à sua escolha. Ao introduzir o uso do compasso, a professora ensinou o passo a passo das construções de um hexágono regular e da planificação de um tetraedro regular. Foi solicitado a alunos e alunas que construíssem a planificação e a montagem de um prisma e de uma pirâmide para serem avaliados. Alguns(umas) estudantes conseguiram realizar a tarefa de maneira plenamente satisfatória e formaram grupos para definir e dar início aos seus projetos. Outros(as), ficaram fascinados(as) com o estudo da geometria e buscaram construir figuras mais complexas com régua e compasso, impossibilitando que avançassem no projeto, mas possibilitando que fizessem matemática.

Acreditamos que dar essa oportunidade aos(às) estudantes de desenvolvimento cognitivo em diferentes níveis e seguindo seus interesses, faz parte do processo de reinvenção guiada, em que alunos e alunas se tornam protagonistas do seu aprendizado e o(a) professor(a) cumpre o papel de guia e mediador(a). Ainda, alguns(umas) estudantes não estavam prontos(as) para a etapa de construir autonomamente uma planificação e assim, orientados(as) pela professora, continuaram no processo anterior de montar planificações já desenhadas até desenvolverem as habilidades mínimas necessárias para a realização autônoma. Dessa forma tivemos contemplado os Princípios da Atividade, dos Níveis e da Orientação.

<u>Construção do produto final do projeto</u>

O tempo didático não favoreceu a realização completa do projeto por todos os grupos, pois a sua realização ocorreu apenas na última semana de aulas do ano letivo, não tendo sido realizada uma avaliação oficial. Além disso, alguns(umas) estudantes que não haviam atingido o nível mínimo de compreensão sobre as relações e construções de planificações de prismas e pirâmides, puderam refazer etapas anteriores e desenvolver sua cognição e habilidades motoras, superando tal defasagem.

O fato de o projeto não ser avaliativo permitiu flexibilidade para que cada aluno(a) o explorasse dentro do seu interesse ou necessidade. A maioria dos(as) estudantes se dedicou ao projeto final. Alguns(umas) alunos(as) se uniram, utilizaram suas construções geométricas anteriores e construíram juntos mais alguns objetos geométricos, utilizaram cola quente para a construção final se tornar um castelo, veja a imagem a seguir:

Fotografia 6: Projeto final de castelo sendo finalizado por uma estudante

Fonte: autora

Outros grupos também construíram castelos, veja o exemplo na fotografia 7 a seguir.

Fotografia 7: Castelo construído por alunos como projeto final

Fonte: autora

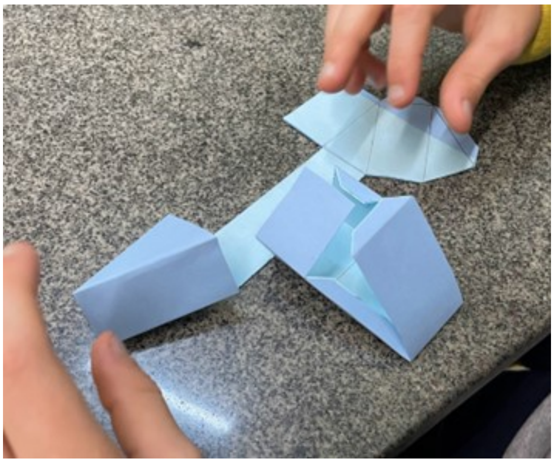
Um outro grupo de estudantes se uniu para construir uma cidade. Utilizaram construções realizadas anteriormente e uma base de madeira reciclada.

Fotografia 8: Projeto final da cidade

Fonte: autora

Um aluno tentou criar uma nave espacial. O tempo didático não o favoreceu e ele não conseguiu finalizar sua construção.

Fotografia 9: Aluno tentando construir uma nave espacial como projeto final



Fonte: autora

Por fim, um aluno decidiu que seu projeto seria a construção de uma "vaca". Fez o planejamento em desenho, convencendo outras colegas a embarcarem no projeto também. Seguem algumas fotos destas construções.

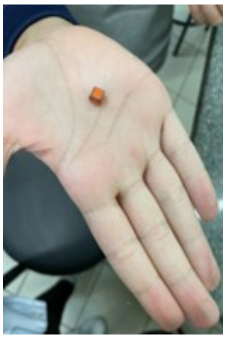
Fotografia 10: Planejamento do projeto

Fonte: autora

Fotografia 11: Projeto em construção

Fonte: autora

Fotografia 12: Pequeno cubo para representar a orelha da vaca



Fonte: autora

Fotografia 13: Diferentes projetos em construção

Fonte: autora

Fotografia 14: Corpo montado e pernas para serem montadas

Fonte: autora

Fotografia 15: Um dos projetos finalizados

Fonte: autora

Nesta etapa, foram contemplados os Princípios da Atividade, da Realidade, dos Níveis e da Interatividade.

Avaliação e resultados

Acreditamos que a avaliação contínua do processo é mais adequada do que uma única avaliação ao final do mesmo. Deste modo, foram aplicados diferentes instrumentos avaliativos, focados principalmente em dois indicadores de aprendizagem: "Construir figuras geométricas com régua e compasso" e "Identificar propriedades e relações entre os vértices, arestas, faces e planificação de prismas e pirâmides". As construções geométricas foram avaliadas ao longo do processo: todas as construções de planificações e montagens foram examinadas quanto à precisão do traçado com régua, do recorte e da colagem das faces. Também, foram avaliadas as construções de hexágonos regulares, triângulos equiláteros e tetraedros regulares. As relações encontradas entre os vértices, arestas, faces dos prismas e pirâmides foram avaliadas nas construções das planificações, em duas atividades escritas e em uma avaliação oral.

Esta atividade ocorreu durante a pandemia, quando o ensino presencial seguia protocolos sanitários rigorosos de distanciamento social, uso de máscaras e higienização das mãos, após os alunos e as alunas terem passado um ano e meio em ensino remoto. Em comparação ao experimento didático anterior (I), este experimento não alcançou o mesmo sucesso, pois nele uma quantidade menor de alunos e alunas atingiram níveis avançados de compreensão, além de ter havido dois casos de recuperação. Mais ainda, o período de afastamento escolar acarretou casos de defasagens cognitivas ou motoras e de saúde mental abalada. Percebemos também que o planejamento e o tempo didático não favoreceram a realização completa do projeto.

A proposta de trabalho não favoreceu a interação entre os estudantes. Uma das razões foi não incluir um produto final unificado, para que alunos e alunas pudessem criar seus projetos sozinhos ou em grupos por eles(as) escolhidos. No primeiro experimento didático a relação entre os(as) estudantes foi essencial para que avançassem em níveis de aprendizagem, já no segundo experimento não foi oportunizada a interação entre estudantes em diferentes níveis de compreensão.

Por um lado, foi valioso ver alguns(umas) alunos e alunas avançarem com autonomia dentro do próprio interesse, desenvolvendo cognição e habilidades motoras, como foi o caso do grupo que construiu “vacas”. Por outro lado, a "liberdade" de escolha dos grupos formados não favoreceu os(as) estudantes em níveis de compreensão menos avançados. Se houvesse mais tempo didático, talvez os(as) estudantes tivessem melhores oportunidades de alcançar um nível de compreensão suficiente para desenvolver um projeto à sua escolha ou integrar-se a algum grupo. Dessa forma, caso surja a oportunidade da aplicação deste projeto novamente, ele deverá ser melhor planejado quanto ao tempo didático e etapas que favoreçam as interações entre os(as) estudantes.

Comparando os dois experimentos didáticos, temos o primeiro com produto final coletivo e o segundo com liberdade para alunos e alunas criarem dentro do próprio interesse. O produto final coletivo oportunizou a interação entre os(as) estudantes, elemento rico no processo de aprendizagem (Princípio da Interatividade da RME), já na segunda proposta houve uma motivação individual genuína para criação de algo do próprio interesse (Princípios da Atividade e da Realidade). Desse modo, o primeiro experimento foi mais rico do que o segundo, na perspectiva da RME, já que a realização do segundo ficou prejudicada pelo curto tempo didático disponível.

II- Sistematização dos Princípios da RME presentes na atividade aplicada

Quadro 8: Sistematização dos Princípios da RME presentes na aplicação da atividade II

Tema: Prismas e Pirâmides	
Etapas	**Princípio da RME**
Situação problema realística em que os alunos e alunas interpretam o papel de designers e criam um modelo de embalagem.	- Princípio da Realidade - Princípio da Atividade - Princípio da Interatividade - Princípio da Orientação
Classificação de figuras geométricas espaciais a partir de modelos concretos fornecidos.	Não há
Construção de prismas e pirâmides a partir de planificações dadas.	- Princípio da Atividade - Princípio dos Níveis - Princípio da Orientação
Apresentação da proposta de elaboração de projetos de construção de figuras geométricas espaciais.	Não há
Construção de prismas e pirâmides a partir de planificações elaboradas pelos alunos e alunas.	- Princípio da Atividade - Princípio dos Níveis - Princípio da Orientação
Definição do projeto específico, individual ou em grupo, e construção do produto final.	- Princípio da Realidade - Princípio da Atividade - Princípio dos Níveis - Princípio da Interatividade

Fonte: autora

2.2 FRAÇÃO

Objetivos de conteúdo

- Reconhecer uma fração como parte de um todo.
- Calcular fração de uma quantidade.
- Reconhecer diferentes representações: número misto; fração imprópria; número decimal; e percentual.
- Frações equivalente e irredutível.
- Comparação e ordenação de frações.
- Adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

III- EXPERIMENTO DIDÁTICO: ASSANDO *COOKIES*

Quadro 9: Etapas e objetivos do experimento III

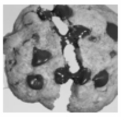
Etapas	Objetivos
Alunos e alunas compartilharam experiências culinárias.	- Aproximar a realidade dos alunos e alunas à atividade a ser desenvolvida. - Motivá-los(as) a realizarem uma atividade culinária pelo compartilhamento das experiências pessoais vividas. - Identificar habilidades culinárias individuais.
Apresentação da proposta e organização dos grupos	- Apresentar as etapas da atividade: elaborar uma lista de compras com as quantidades de cada ingrediente necessário para a realização de receitas de *cookies*; criar um orçamento para a lista de compras; realizar as receitas. - Identificar habilidades necessárias para o desenvolvimento de cada etapa. - Organizar grupos de modo, que em cada um, haja participantes com diferentes habilidades.
Elaboração da lista de compras	- Determinar a quantidade necessária de cada ingrediente em unidades padrões de massa (g, kg) de cada receita. - Criar uma lista de compras contendo a quantidade de ingredientes necessários para a realização de tantas receitas quanto forem os grupos formados.
Elaboração de um orçamento	- Pesquisar em sites online de mercados sobre embalagens e preços dos produtos. - Criar o orçamento utilizando planilhas.
Mão na massa: ida à cozinha da escola para realização da receita	Cada grupo vai receber diferentes medidores para com eles seguir a receita.
Avaliação e Autoavaliação	Avaliar o processo de aprendizagem de cada aluno quanto aos objetivos propostos.

Fonte: autora

O objetivo geral desta atividade foi de propiciar uma situação realística aos(às) estudantes que oportunizasse a vivência prática das ideias de fração como parte de um todo e como operador. A atividade foi organizada em etapas de modo que o produto final foi a confecção de *cookies* por alunos e pelas alunas, assados na cozinha da escola. Foi entregue aos(às) estudantes a receita do *cookie*, a partir da qual foram solicitados a criarem uma lista de compras dos ingredientes necessários para que a escola pudesse providenciar os materiais. Ao observar a receita (figura 4), vê-se que ela é repleta de frações e que foi adaptada para que alunos e alunas conseguissem fazer as associações necessárias. Esperava-se que os(as) estudantes soubessem que as quantidades dos produtos vendidos em supermercados não são indicadas por frações e sim por gramas ou quilogramas e assim que chegassem a relacionar as frações com as quantidades em gramas apresentadas nos parênteses da receita.

Figura 4: Receita utilizada pelos(as) estudantes para o experimento.

COOKIE AMERICANO



INGREDIENTES

- 125g de manteiga sem sal em temperatura ambiente ou 3 colheres de sopa generosas
- $\frac{3}{4}$ xícara de açúcar refinado ($\frac{1}{2}$ xícara equivale a 100g)
- $\frac{1}{2}$ xícara de açúcar mascavo (1 xícara equivale a 200g)
- 2 ovos
- 1 e 3/4 xícara de farinha de trigo (1 xícara equivale a 150g)
- 1 colher (chá) de sal
- 1 colher (chá) de fermento em pó
- para fazer cookie de chocolate acrescentar 1/4 xícara de chocolate em pó

Fonte: Tudo gostoso adaptado pela autora

<u>Compartilhamento de experiências culinárias</u>

Os(as) estudantes foram organizados(as) em roda e questionados(as) sobre suas produções culinárias. Cada aluno(a) compartilhou sua experiência, e diversas respostas apareceram como: *créme brulée,* miojo, ovo mexido, arroz, feijão, etc. Na aula seguinte apresentamos a alunos e alunas o planejamento da atividade e o produto final - a realização de *cookies*. Os(as) estudantes mostraram muita empolgação ao saberem que iriam poder comer os *cookies* que produzissem, demonstrando assim um grande interesse pelo projeto, o que caracterizou uma potencial situação com contexto rico a ser explorada.

Montagem dos grupos

Discutimos coletivamente sobre as habilidades necessárias para a realização deste processo e selecionamos as três principais para montar os grupos, contemplando todas as habilidades em cada grupo. As habilidades escolhidas foram: habilidade culinária para medir os ingredientes; habilidades em matemática para fazer os cálculos; e habilidade de trabalhar em grupo para ajudar na convivência e nos conflitos. Assim, elencamos as habilidades e alunos e alunas foram inserindo seus nomes, podendo ter mais de uma habilidade, com isso, montamos os grupos do modo previsto.

Desenvolvimento da lista de compras e orçamento

A partir da receita do *cookie* fornecida, cada grupo desenvolveu uma lista de compras com as quantidades de ingredientes necessários para que todos os grupos dos sextos anos pudessem concretizar a realização desta receita. Na construção desta lista de compras os alunos e as alunas precisaram transformar as medidas, trazidas na receita em fração de xícara, em unidades de medidas disponíveis nos supermercados, como quilogramas.

A partir da lista de compras alunos e alunas desenvolveram orçamentos em computadores com a utilização de programas de planilhas. Cada grupo acessou sites de supermercados e pesquisou os preços dos produtos relacionando-os às quantidades. Assim, puderam explorar o programa de planilhas e a criação de fórmulas para a obtenção do valor total da compra. Além disso, como alguns produtos são ofertados em diferentes quantidades e preços, sentiram a necessidade de refletir e decidir sobre como escolher tais produtos, como por exemplo, preço baixo, quantidade exata de produto, marca conhecida etc. Segue abaixo um orçamento realizado por um grupo de estudantes.

Tabela 1: Exemplo de orçamento.

Produto	Marca	Preço	Quantidade	Total
Farinha de trigo	Qualitá 1kg	R$ 2,16	3	R$ 6,48
Manteiga sem sal	Vigor 500g	R$ 3,99	3	R$ 11,97
Açúcar Refinado	União 500g	R$ 4,59	3	R$ 13,77
Açúcar Mascavo	Lowçúcar 500g	R$ 6,89	3	R$ 20,67
Fermento em pó	Dr.Oetker 100g	R$ 1,99	1	R$ 1,99
Chocolate em pó	flei. 200	R$ 7,49	1	R$ 7,49
Ovos	Bandeja 20 uni	R$ 13,84	1	R$ 13,84
				R$ 76,21

Fonte: Estudantes de sexto ano

Assim, a atividade proposta contemplou os Princípios da Atividade, Realidade e Entrelaçamento. A professora acompanhou o desenvolvimento das discussões e auxiliou os grupos que apresentaram maior dificuldades nessas transformações. Sendo contemplado também os Princípios dos Níveis, Interatividade e Orientação.

Mão na massa

Esta etapa consistiu em produzir os *cookies* na cozinha da escola: preparar a massa; colocar e tirar do forno; e comer. A atividade de produção de *cookies* foi realizada mais de uma vez e esta última etapa sofreu pequenos ajustes ao longo dos anos. Inicialmente os grupos usaram um copo medidor que indicava diferentes frações de xícara, não havendo grandes dificuldades ou estimulação mental na preparação da receita. Percebendo que era possível estimular mais os(as) estudantes com conceitos relacionados às frações, trocamos o copo medidor por um medidor de ¼ xícara e com isso foi possível levantar discussões como: “Se eu tenho um medidor de ¼ de xícara para se obter a quantidade de 1 e ¾ de xícara de farinha de trigo da receita dos *cookies* quantas medidas são necessárias?” Esta questão problematiza a ideia de fração como parte/todo e estimula, no concreto, o desenvolvimento de objetos mentais relacionados a número misto e a fração imprópria como sendo representações diferentes de uma mesma quantidade.

Fotografia 16: Alunas utilizando o medidor de ¼ de xícara.

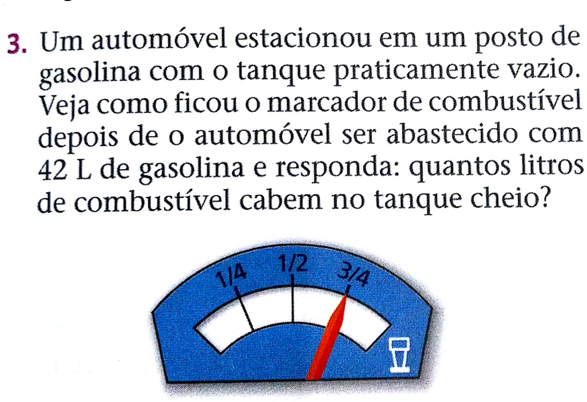
Fonte: autora

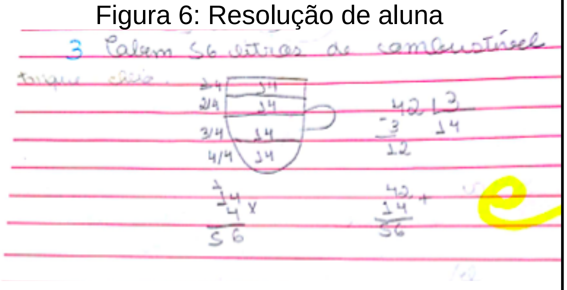
A produção dos *cookies* na cozinha da escola por alunos e alunos em seus respectivos grupos, favoreceu que os Princípios da Atividade e da Realidade ocorressem. Para a realização da receita, os(as) estudantes realizaram diferentes cálculos envolvendo as quantidades necessárias de cada ingrediente, entrelaçando conhecimentos sobre frações com grandezas e medidas. Assim, o Princípio do Entrelaçamento também foi contemplado. A professora circulou pelos grupos ao longo da atividade, ajudando na distribuição dos ingredientes, questionando e orientando sobre alguns raciocínios necessários para a produção da receita. Foi possível notar muita interação entre os(as) estudantes ao discutirem as ideias incentivadas pela professora. Dessa forma, os Princípios da Orientação e da Interatividade foram igualmente contemplados.

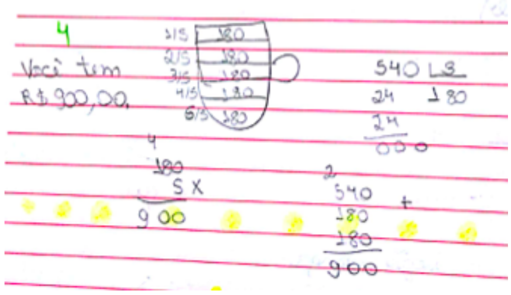
Avaliação e resultados

Após a finalização do projeto de assar *cookies*, foi solicitado aos(às) estudantes que fizessem exercícios do livro sobre o assunto, sem explicações da professora. A seguir são apresentados os enunciados de dois exercícios do livro “MATEMÁTICA: Imenes & Lellis” (IMENES L.M., LELLIS, M,; 2010, p. 127) e a solução de uma estudante, ver quadro 10.

Quadro 10: Exercícios do livro didático e resolução de aluna.

<table>
<tr><th>Enunciado do livro</th><th>Imagem da solução da aluna</th></tr>
<tr><td>Figura 5: Enunciado do exercício do livro

3. Um automóvel estacionou em um posto de gasolina com o tanque praticamente vazio. Veja como ficou o marcador de combustível depois de o automóvel ser abastecido com 42 L de gasolina e responda: quantos litros de combustível cabem no tanque cheio?

Fonte: Livro didático Imenes e Lelis- 6 ano</td><td>Figura 6: Resolução de aluna


Fonte: aluna</td></tr>
<tr><td>4. Três quintos do meu dinheiro correspondem a R$ 540,00. Quanto eu tenho?</td><td>Figura 7: Resolução 2 de aluna


Fonte: aluna</td></tr>
</table>

Fonte: autora

Podemos observar que os dois exercícios não tratam de xícaras, como foi proposto na atividade do *cookie*. Mesmo assim, na resolução da aluna há xícaras desenhadas. Ela perguntou se podia resolver os exercícios por meio de esquemas com xícara, afirmando que de tal forma compreendia melhor. A aluna não prosseguiu ao longo do ano fazendo desenhos de xícaras, mas neste momento, utilizou o objeto mental de frações de xícaras para transpor a outros contextos, mostrando ter desenvolvido uma imagem mental rica e coerente com o conceito de fração na ideia de parte/todo.

A partir deste projeto foi possível discutir diferentes temas relacionados a frações: fração de quantidades de algum ingrediente; número misto e fração imprópria como representações diferentes de uma mesma quantidade. Após a realização do experimento didático em questão, os conteúdos abordados foram sistematizados. A seguir foram trabalhados os tópicos de: frações equivalentes e irredutíveis; adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Como reflexo da atividade dos *cookies*, observamos ter havido um bom entendimento dos conteúdos subsequentes. Entendemos que este efeito decorreu da atribuição adequada de significados, pelos(as) estudantes, do conceito de fração na ideia de parte/todo, tanto em modelos contínuos como discretos.

As avaliações foram realizadas ao longo do processo. Era esperado que nelas alunos e alunas demonstrassem conhecimento sobre os objetivos de conteúdos listados na página 63. Para tanto, além da atividade do *cookie*, foram realizadas uma lição de casa e três provas escritas, sendo uma delas individual, outra em grupos e a prova trimestral individual. A lição de casa incluiu uma autoavaliação (ver figura 8) visando provocar a reflexão do(a) aluno(a) sobre o próprio processo de aprendizagem e estimular o desenvolvimento de sua autonomia.

A autoavaliação constituiu-se em um rico componente do processo. Por meio dela os(as) estudantes tiveram a oportunidade de conscientização sobre suas maiores fragilidades e de se empenharem em superá-las. A prova em grupo permitiu a integração entre eles(as) e a discussão de ideias aprofundadas sobre frações. Alunos e alunas em níveis de compreensão mais avançados ajudaram aqueles(as) com maior dificuldade, o que permitiu que todos(as) se equiparassem em níveis cognitivos.

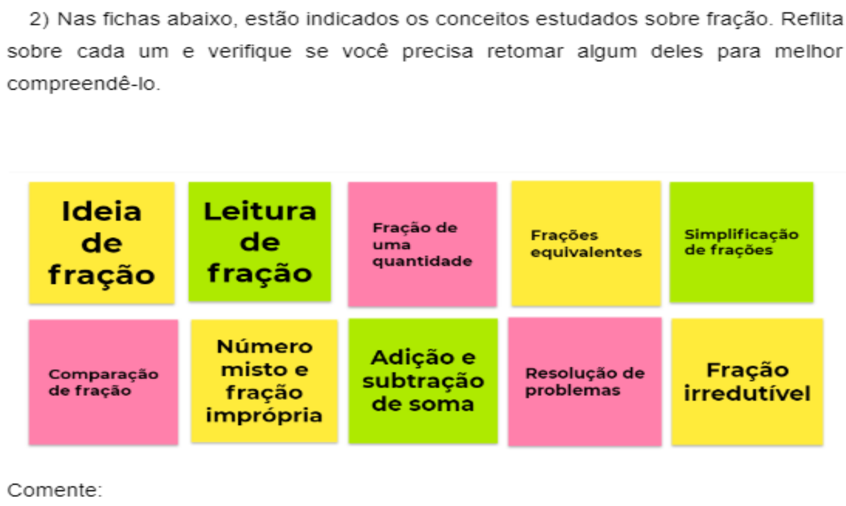
Figura 8: Autoavaliação

Autoavaliação

1) Leia com atenção cada pergunta a seguir e faça uma reflexão sobre suas ações.
   a) Ouvi as explicações da professora?
   b) Pedi ajuda quando tive dúvidas?
   c) Fiz todas as atividades propostas na sala de aula?
   d) Fiz todas as tarefas de casa?
   e) Respeitei meus colegas durante as aulas?
   f) Ajudei meus colegas, quando eles tiveram dúvidas?
   g) Levei para sala de aula os materiais necessários?

Fonte: autora

Figura 9: Autoavaliação


2) Nas fichas abaixo, estão indicados os conceitos estudados sobre fração. Reflita sobre cada um e verifique se você precisa retomar algum deles para melhor compreendê-lo.

Comente:

Fonte: autora

Consideramos que a realização do experimento didático foi positiva. Na atividade dos *cookies* foi apresentada uma situação de realidade significativa para os alunos e as alunas. Ela representou um exemplo de contexto rico, que possibilitou aos(às) estudantes construírem o conhecimento por meio da matematização.

III - Sistematização dos Princípios da RME presentes na atividade aplicada

Quadro 11: Sistematização dos Princípios da RME presentes na aplicação da atividade III

Tema: Frações Atividade: Assando *cookies*	
Etapas	**Princípio da RME**
Alunos e alunas compartilharam experiências culinárias.	Não há
Apresentação da proposta e Organização dos grupos	Não há
Elaboração da lista de compras e de um orçamento	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio dos Níveis - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio da Orientação
Mão na massa: ida à cozinha da escola para realização da receita	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio da Orientação

2.3 NÚMEROS PRIMOS

Objetivos de conteúdo

- Reconhecer números compostos e primos.
- Identificar múltiplos e divisores de um número.
- Aplicar os critérios de divisibilidade

Em um primeiro momento, para introduzir o conteúdo de números primos, foi proposto aos(às) alunos(as) que criassem o “Crivo de Eratóstenes”, como foi brevemente descrito no capítulo anterior (página 25). O Crivo de Eratóstenes é um método para encontrar números primos. O método consiste em escrever números naturais de 2 até um certo número, por exemplo 100. Em seguida, circula-se (destaca-se) o primeiro número (2) e risca-se (elimina-se) todos os números múltiplos do número circulado. Chegando ao final da lista, retorna-se ao início e circula-se o próximo número disponível, ou seja, circula o 2 e elimina todos os números pares, circula o 3 e elimina todos os múltiplos de 3. O próximo seria o 4, porém este já foi “eliminado”, então passa-se para o 5 e este processo é repetido até circular-se ou riscar-se todos os números. No final, os números circulados são todos os números primos no intervalo determinado. A princípio, pareceu ser uma atividade promissora, por envolver a história da matemática e possibilitar a discussão dos conceitos de múltiplos, de divisores e de alguns critérios de divisibilidade.

Assim, foi proposto aos(às) estudantes que escrevessem no caderno uma lista de números de 2 a 100. Eles(as) demonstraram desânimo nesta etapa de escrita, reclamando da tarefa proposta. A seguir, foi solicitado que procedessem à construção do Crivo de Eratóstenes, ou seja, que fossem destacando os números primos e eliminando os seus múltiplos. Assim procederam até não haver mais números para serem eliminados, sobrando apenas os números destacados. Com isso, os alunos e as alunas, com os números destacados, construíram uma lista dos números primos menores do que 100.

Constatamos, no entanto, que a atividade proposta não foi bem-sucedida, pois não houve engajamento dos(as) estudantes. Percebemos que não aconteceu a esperada construção do conceito e nem dos respectivos objetos mentais. O conceito precisou ser apresentado de forma “pronta” pela professora que fez uma associação da definição com a lista de números obtida no caderno, na tentativa de que os(as) alunos(as) percebessem que os números destacados possuíam apenas dois divisores, ele mesmo e um, ao contrário dos eliminados que também eram múltiplos de algum número destacado. Dessa forma, a atividade proposta não seguiu Princípios básicos da RME, por não ter oportunizado a reinvenção guiada da propriedade característica dos números primos.

Uma das ideias basilares constantes da RME é a de ser a Matemática uma atividade humana. Nesse sentido o ensino de Matemática deve buscar colocar o(a) estudante em uma posição de autor(a) de conhecimentos matemáticos e não apenas de mero(a) receptor(a) de conhecimentos já prontos. Freudenthal acredita que o(a) aluno(a) é motivado(a) ao “fazer matemática”, ou seja, que ao questionar, investigar, criar hipóteses, o seu conhecimento matemático se desenvolve de forma orgânica.

Percebendo que a atividade proposta não foi significativa, criamos uma nova proposta para o ano seguinte com potencial de estar sob a ótica da RME.

IV- EXPERIMENTO DIDÁTICO: Planejamento da Atividade “montando retângulos”

Quadro 12: Etapas e objetivos do experimento IV

Etapas	Objetivos
Montar retângulos a partir de diferentes quantidades inteiras (de 2 a 100) de quadradinhos de EVA, observar e registrar os números correspondentes às quantidades com as quais só é possível montar um único retângulo.	- Estimular o desenvolvimento de objetos mentais sobre números primos e padrões matemáticos. - Registrar números primos no caderno de forma autônoma e lúdica.
Discussão coletiva sobre os números encontrados, detectando eventuais equívocos, e compartilhando as estratégias de resolução utilizadas. Criação dos conceitos de números primos e números compostos.	- Desenvolver objetos mentais associados aos números primos e aos números compostos. - Determinar as propriedades características dos números encontrados. - Obter as definições de números primos e compostos.

Fonte: autora

Esta atividade foi pensada de maneira a colocar o(a) aluno(a) como protagonista do próprio processo de aprendizagem e dar oportunidades para que ele(a), ao realizar a tarefa, possa desenvolver estratégias mentais e de resoluções que favoreçam a construção de objetos mentais e a obtenção da definição do conceito. Acreditamos que a atividade, ao seguir Princípios da RME, se torna mais atraente e os alunos e as alunas se sentem motivados(as) a construir conhecimento, construir matemática – em fazer matemática.

Retomando o que foi brevemente descrito no capítulo anterior (página 26), a proposta foi que os(as) alunos(as) analisassem cada quantidade de quadradinhos de EVA para perceber a quantidade de retângulos que é possível formar com eles, por exemplo – com dois quadradinhos só é possível formar o retângulo 2x1, que é o mesmo de 1x2, ou seja, só é possível formar um retângulo. Com três quadradinhos também só é possível montar um retângulo (3x1), com quatro, já é possível montar os retângulos 4x1 e 2x2. Assim, a tarefa proposta foi registrar no caderno os números correspondentes às quantidades de quadradinhos com as quais só é possível construir um retângulo, a partir do 2, 3 e 4 feitos no exemplo para ajudá-los(las) a entender o exercício. O 1 foi propositalmente ignorado para ser retomado quando o conceito de números primos estivesse bem estabelecido. A aplicação feita desta atividade foi, inicialmente, pensada para que alunos e alunas trabalhassem individualmente, mas, por não haver material suficiente, ela foi desenvolvida em grupos. Como previsto, todos(as) mostraram engajamento e as parcerias foram positivas, pois juntos(as) construíram e articularam pensamentos, avançando na tarefa.

Vale observar que o conteúdo de quadriláteros é recente para o sexto ano, então alguns(umas) alunos(as) podem achar que o retângulo 2x2 é apenas um quadrado, considerando assim o 4 na sua lista de primos. Freudenthal fala sobre a relevância do(a) professor(a) conhecer a fenomenologia dos conceitos e de reforçar as "raízes" para que alunos e alunas não caiam em becos sem saída. É importante o(a) professor(a) reconhecer que, nesta fase, os(as) alunos(as) podem ainda não ter assimilado a inclusão de classes de figuras (no caso, que todo quadrado é um retângulo). Assim, é recomendável a retomada das definições destas duas figuras, o que também evitará que o experimento de montar retângulos e descobrir os números primos entre em um "beco sem saída", caso os quadrados sejam ignorados.

Montar retângulo

Os alunos e as alunas foram organizados(as) em grupos e receberam quadradinhos feitos de EVA para montar retângulos e registrar no caderno todos os valores numéricos das quantidades com as quais é possível montar apenas um retângulo. Foi dado tempo suficiente para que todos os grupos entendessem a tarefa e avançassem nas estratégias, registrando os números até 100, que satisfizessem a propriedade proposta. Alguns(umas) estudantes rapidamente perceberam que não era necessário montar os retângulos concretamente, mas que bastava pensar, dado um número que ele podia ser o produto de mais de uma multiplicação. Assim, conseguiram alcançar números maiores do que 100, como 127. À medida que os grupos iam acabando, começaram a discutir seus resultados com os(as) demais colegas. Alguns(umas) estudantes, com mais dificuldades, não conseguiram chegar até 97 (último número esperado da lista), mas conseguiram avançar nas estratégias e relacionar a ideia de montar retângulos, ideia concreta, com a ideia dos possíveis produtos, que representam as áreas dos retângulos.

Consideramos a situação proposta como realística, pois os quadradinhos e as áreas dos retângulos fizeram sentido para os(as) estudantes, como modelos concretos de multiplicações. Isto possibilitou o entrelaçamento entre conteúdos de geometria e aritmética, viabilizando a matematização. Os(as) alunos(as) trabalharam de forma autônoma e conjunta com grande envolvimento, avançando em níveis de compreensão em seus próprios ritmos, em alguns momentos com a orientação de algum(a) colega ou da professora. Dessa forma, foram contemplados todos os Princípios da RME.

Discussão coletiva

A correção das respostas foi realizada coletivamente, listando-se na lousa os números obtidos. Houve muita animação e participação de alunos e alunas ao explicarem, uns aos outros, qual razão algumas quantidades estavam na lista e outras não – por exemplo, o 35 não está na lista pois é possível montar o retângulo 5 por 7. Nas duas salas o 51 apareceu na lista como único retângulo, neste caso foi necessário intervir até que percebessem que era possível fazer 3x17. Ao longo da correção a nomenclatura foi mudando. No início falávamos de retângulos possíveis, o que logo transformou-se em multiplicações, como na fala de alguns(umas) alunos(as), que passou de “com 15 é possível construir os retângulos 3 por 5 e 1 por 15” para “com 39 é possível fazer 3x13 e 1x39”. Assim, percebemos que alunos e alunas criaram objetos mentais para os números que estavam sendo listados, relacionando-os a produtos, como denota a seguinte fala: “o 53 está na lista, pois só é possível escrevê-lo da forma 1x53”.

Houve grupos, com níveis de compreensão avançados que registraram valores maiores do que 101 e esses valores foram validados pela professora. Na lousa listamos coletivamente até o 101 e, a seguir, foi apresentado o nome oficial destes números: **números primos**.

Dando continuidade à discussão, o seguinte questionamento foi feito: “O que vocês acham que são os números primos?” e “Como podemos escrever uma definição para eles?”. Apareceram respostas muito boas e precisas, como: “Número primo é o número que só pode ser escrito como uma multiplicação dele mesmo com 1”; “Número primo é um número que só pode ser dividido por ele mesmo e por 1”; e “Número primo é um número que só aparece na própria tabuada”. As definições que surgiram, e que estavam corretas, foram registradas na lousa, consideradas alternativas equivalentes e nenhuma foi priorizada, deixando aos(às) estudantes a liberdade de escolha. Fizemos ainda discussões sobre o número 1 (e a razão pela qual ele não é considerado como primo) e sobre os números compostos. Por fim, realizamos exercícios do livro didático sobre o tema.

Nesta etapa, os Princípios da Atividade, dos Níveis, da Interatividade e da Orientação foram contemplados.

Avaliação e resultados

Foi possível perceber que essa organização didática favoreceu a motivação e oportunizou a reinvenção do conceito de números primos. Porém, ao analisarmos essa atividade dentro da proposta de Freudenthal, por mais que ela siga os Princípios da RME, percebemos que a formulação da tarefa foi muito diretiva, ao ser solicitado que observassem apenas os números aos quais correspondiam um único retângulo. E se não direcionássemos? E se deixássemos os alunos e as alunas construírem retângulos livremente, será que explorariam possibilidades, criariam hipóteses e descobririam os números primos sozinhos? Dessa forma, repensamos a atividade, para ser aplicada no ano seguinte.

IV - Sistematização dos Princípios da RME presentes na atividade aplicada

Quadro 13: Sistematização os Princípios da RME presentes na aplicação da atividade IV

Tema: Números primos Atividade: montando retângulos	
Etapas	**Princípios da RME**
Montar retângulos a partir de diferentes quantidades inteiras (de 2 a 100) de quadradinhos de EVA, observar e registrar os números correspondentes às quantidades com as quais só é possível montar um único retângulo.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio dos Níveis - Princípio da Orientação
Discussão coletiva sobre os números encontrados, detectando eventuais equívocos, e compartilhando as estratégias de resolução utilizadas. Criação dos conceitos de números primos e números compostos.	- Princípio da Atividade - Princípio da Interatividade - Princípio dos Níveis - Princípio da Orientação

Fonte: autora

V- EXPERIMENTO DIDÁTICO 4: Planejamento da Atividade “Criando números especiais”

Quadro 14: Etapas e Objetivos do experimento V

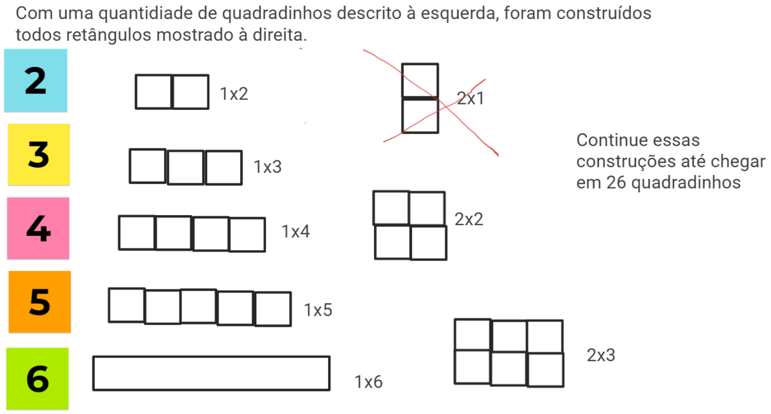
Etapas	Objetivos
Montar todos os retângulos possíveis a partir de diferentes quantidades inteiras (de 2 a 100) de quadradinhos de EVA.	- Estimular o desenvolvimento de objetos mentais relacionados à construção de retângulos e multiplicações com números inteiros.
Criação de hipóteses sobre números especiais, compartilhamento sobre as hipóteses criadas e conclusões.	- Estimular a autonomia e liberdade de criação, para desenvolver uma hipótese sobre números especiais contendo características e propriedades. - Estimular o desenvolvimento de objetos mentais - Oferecer um espaço para as ideias serem compartilhadas e desenvolvidas. - Sistematizar com os(as) alunos(as) as conclusões obtidas.
Refazer a atividade de montar retângulos para registrar os números correspondentes às quantidades com as quais só é possível montar um único retângulo (números primos).	- Estimular o desenvolvimento de objetos mentais sobre números primos e padrões matemáticos. - Registrar números primos (até 101) no caderno de forma autônoma e lúdica.
Discussão coletiva sobre os números encontrados, detectando eventuais equívocos com compartilhando as estratégias de resolução utilizadas e criação dos conceitos de números primos e números compostos, a partir das propriedades observadas na criação da lista.	- Corrigir, individualmente, a lista de números primos escrita em cada caderno. - Orientar o compartilhamento das ideias mentais desenvolvidas para construir a definição dos conceitos de número primo e composto.

Fonte: autora

“Montando retângulos”

A princípio esta atividade seria proposta presencialmente, mas, em função da pandemia, ela foi reestruturada para ser desenvolvida online. Alunos e alunas receberam a atividade na plataforma virtual para a construção de retângulos com uma determinada quantidade de quadradinhos. Inicialmente foi proposto que construíssem todos os retângulos possíveis com até 100 quadradinhos, mas, diante das dificuldades apresentadas no processo online, a exigência foi reduzida para que construíssem todos os retângulos possíveis com até 26 quadradinhos. A figura 9 a seguir mostra os possíveis retângulos de 2 a 6 quadradinhos construídos pela professora, junto com os(as) estudantes, para explicar a proposta da atividade.

Figura 10: Exemplo dado pela professora durante aula remota

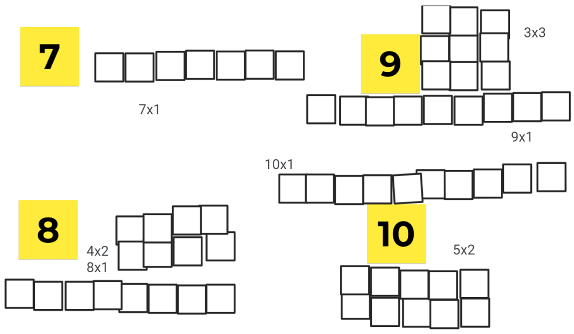


Fonte: autora

Alguns comentários foram explorados neste momento: os retângulos 1x2 e 2x1 são o mesmo retângulo, apenas em posições diferentes; e todo quadrado é retângulo – com 4 quadradinhos é possível montar 2 retângulos 2x2 e 4x1. Os alunos e as alunas apresentaram muitas dúvidas sobre este último comentário, aparentando não terem o conhecimento da inclusão da classe dos quadrados na classe dos retângulos, então foi necessário abrir uma discussão sobre essas duas figuras geométricas e suas definições, antes de dar continuidade à atividade.

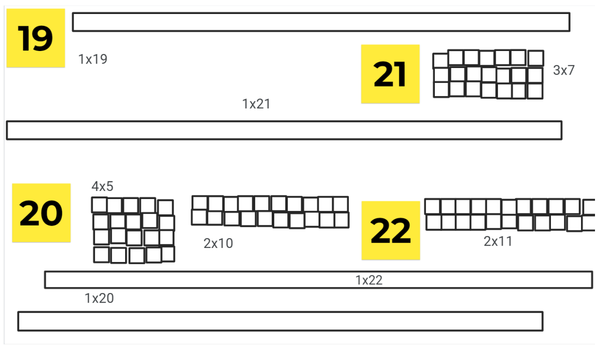
As páginas seguintes do documento compartilhado com os(as) alunos(as) foram organizadas com os números de 7 a 26, e oferecidos alguns quadradinhos modelos, para que realizassem todas as construções possíveis de retângulos utilizando o recurso digital “copiar e colar” para gerar a quantidade suficiente de quadradinhos e movê-los, formando os retângulos. Nesta etapa, cada aluno(a) trabalhou sozinho(a) em seu documento. Usando o *google classroom* a professora teve acesso a todos os documentos compartilhados e pode acompanhar em tempo real a realização da atividade. Os(as) alunos(as) desenvolveram diferentes estratégias para construírem os retângulos remotamente, algumas estratégias foram organizadas a seguir.

Figura 11: Estratégia 1



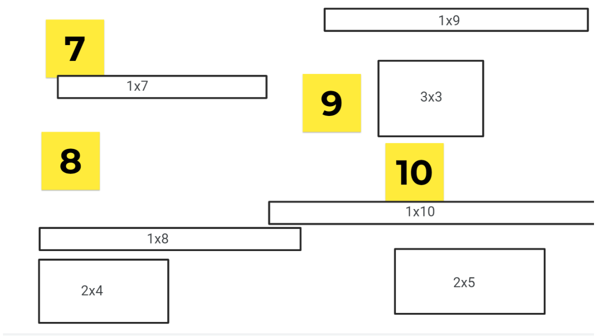
Fonte: autora

Figura 12: Estratégia 2



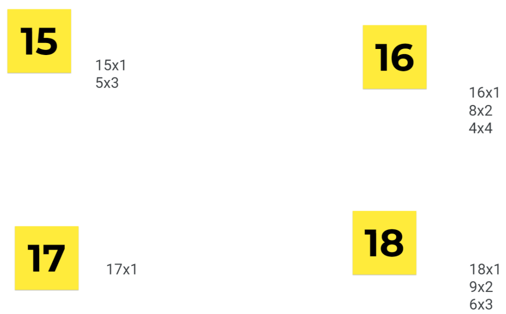
Fonte: autora

Figura 13: Estratégia 3



Fonte: autora

Figura 14: Estratégia 4



Fonte: autora

Na estratégia 1 o aluno construiu todas as representações de retângulos utilizando os quadradinhos, na estratégia 2 a aluna construiu retângulos com os quadradinhos, mas os retângulos de lado 1 desenhou um único retângulo, com o lado maior similar a quantidade total de quadradinhos. Na estratégia 3, a aluna desenhou apenas as representações dos retângulos e o aluno da estratégia 4 só escreveu as multiplicações que representassem os retângulos possíveis.

As estratégias desenvolvidas pelos(as) alunos(as) mostram diferentes níveis de compreensão. O quadro anterior foi organizado de modo a colocar as estratégias em níveis crescentes de complexidade na compreensão. Ou seja, a estratégia 1 indica o nível menos complexo de compreensão e a estratégia 4 o nível mais complexo. Pode-se observar que na estratégia 1 o aluno apresenta um nível de compreensão concreto, já que utiliza todos os quadradinhos para construir os retângulos possíveis e perceber seus formatos. A aluna que utilizou a estratégia 2 denota a percepção de que com todos os números é possível construir o retângulo de lado 1, o que representa um avanço no nível de abstração, ao desenhar tais retângulos sem a decomposição em quadradinhos. No entanto, para os demais retângulos possíveis, ainda utiliza a construção concreta para perceber seus formatos. Na estratégia 3 percebe-se um maior avanço da aluna no nível de abstração, pois utiliza diretamente as representações dos retângulos sem a decomposição em quadradinhos, explicitando as dimensões dos lados. Finalmente, na estratégia 4, sem nenhum desenho auxiliar, o aluno apenas indica as dimensões dos lados dos retângulos possíveis por meio de dois fatores cujo produto é o número total de quadradinhos, indicando que fez um entrelaçamento entre o eixo da geometria com o eixo dos números. Assim, consideramos que este aluno atingiu um nível de compreensão de avançada complexidade.

Todos(as) os(as) alunos(as) utilizaram as estratégias apresentadas. No entanto, houve diversas combinações entre estratégias: alguns(umas) estudantes circularam por todas elas; poucos(as) alunos(as) utilizaram uma única durante toda a atividade; e um único aluno utilizou apenas a estratégia 4. Os(as) alunos(as) que terminavam se juntavam a outros(as) colegas para discutir as soluções. No desfecho desta etapa, mesmo alguns(umas) alunos(as) não conseguindo finalizar a proposta até o número 26 (conseguiram até 18, 19), houve o momento de correção e discussão. Neste momento, os(as) alunos(as) compartilharam suas estratégias e pode-se notar muito interesse daqueles(as) menos avançados nas estratégias mais avançadas dos(as) colegas, pois inclusive finalizaram suas atividades utilizando uma das estratégias compartilhadas. Pudemos notar a riqueza de oferecer oportunidades para que os(as) alunos(as) compartilhem suas estratégias, como defende a RME no Princípio da Interatividade. Assim, nesta etapa garantimos que todos(as) atingissem o nível de aprendizagem, relacionando a criação de retângulos possíveis com n quadradinhos com as possíveis decomposições de “n” em dois fatores.

Consideramos que esta etapa da atividade favoreceu o processo de matematização dos(as) estudantes, pois trabalharam em diferentes níveis de compreensão, formularam estratégias e ampliaram suas compreensões sobre a situação proposta. Sendo contemplado todos os Princípios da RME.

Criação de hipóteses, compartilhamento de soluções e conclusões

Na continuidade da atividade, ainda de modo remoto os(as) alunos(as) criaram hipóteses, individualmente, sobre “números especiais” no documento, na sequência das construções dos retângulos. Em seguida, a professora organizou os(as) alunos(as) em pequenos grupos, levando em consideração as hipóteses criadas por eles(as). Por exemplo, se um(a) aluno(a) tivesse levantado a hipótese de números compostos, ele(a) não seria colocado(a) no mesmo grupo que um(a) aluno(a) que levantasse a hipótese de número primo. Mais uma vez, vemos aqui a importância do(a) professor(a) estar atento(a) e evitar que os(as) estudantes entrem em becos sem saída. Em grupos, os(as) alunos(as) discutiram suas hipóteses e chegaram a uma conclusão conjunta. O quadro abaixo, apresenta algumas respostas formuladas pelos(as) alunos(as) à pergunta constante do documento: Com o que você construiu até agora, quais você considera que possam ser os "números especiais"? Por quê?

Quadro 15: Hipóteses formulados por estudantes

Com o que você construiu até agora, quais você considera que possam ser os "números especiais"? Por quê?	
Resposta A: "*Eu acho que fizemos isso porque estamos para* [sic] *estudar geometria. Eu acho que os numeros* [sic] *especiais é quando um numero* [sic] *tem mais de um retangulo* [sic]" *exemplos: 4-6-8-9-10-12-14-15-16-18-20-21-22-24-25-26...*	**Resposta B**: *Eu acho que os "números especiais" são os números que só tem um jeito de se formar um retangulo* [sic] *como 2,3,5,7,9,11,13, 17, 19, 23 ,29 ,31 ,33 ,37 etc.*
Resposta C: *Eu acho que números especiais são todos os números que tem* [sic] *retângulos quadrados*	**Resposta D**: *12, 16, 20, 24 pois são os que dão para fazer mais retângulos*

Fonte: Estudantes

É interessante observar que em todas as salas surgiram várias ideias pertinentes sobre "números especiais", entre elas as ideias de números primos, números compostos, quadrados perfeitos. Outras ideias não caracterizaram bem uma classe específica de números, como a da resposta D.

Neste momento, as aulas retornaram ao presencial, então presencialmente cada grupo compartilhou sua hipótese com a turma, que debatia a pertinência da ideia apresentada, enquanto a professora organizava o que era dito e registrava na lousa o resumo das ideias consideradas adequadas. Neste processo, poucas hipóteses foram descartadas por não apresentarem uma regularidade clara. A professora enfatizou que não havia uma única resposta certa, todas apresentavam ideias pertinentes, mas algumas teriam maior destaque por corresponderem efetivamente a conceitos matemáticos, referentes ao próximo objeto de estudo. Finalmente foram indicadas na lousa as nomenclaturas matemáticas oficiais dos conceitos relacionados às ideias por eles levantadas: números primos, números compostos e quadrados perfeitos.

Nesta etapa, todos os Princípios da RME foram contemplados.

Refazer atividade de montar retângulos

Na aula seguinte, focamos na ideia de números especiais como sendo aqueles que representam uma quantidade de quadradinhos com os quais só é possível construir um retângulo – esses números são chamados de números primos. Não foi discutida nenhuma definição para o conceito, apenas nomeado. Assim, os(as) alunos(as) foram organizados(as) em grupos e foram disponibilizados quadradinhos de *EVA* para realizarem a tarefa de registrar no caderno todos os números que satisfazem a ideia de números especiais como números que só montam um retângulo, ou seja, registrar os números primos até 101.

A maioria dos(as) alunos(as) não precisou da utilização dos quadradinhos de *EVA* disponíveis, mostrando que já haviam criado objetos mentais do conceito e prescindiam do apoio do concreto. No entanto, houve alguns(umas) que precisaram da construção concreta dos retângulos (agora de forma presencial) para chegarem aos números primos. Mesmo assim, a partir do número 20 sentiram a necessidade de algo menos trabalhoso do que construir todos os retângulos e, conseguiram perceber que os números que não são primos permitem a construção de retângulos com lados de medidas variadas (2 por 10 ou 2x10, 4 por 5 ou 4x5 e 1 por 20 1x20, no caso do 20). Talvez se possa dizer que tenham intuído que a possível decomposição de um número em fatores diferentes do 1 fosse suficiente para que ele não seja primo, o que representa um avanço no nível de compreensão ao – associarem intuitivamente os retângulos (campo da geometria), com o produto dos seus lados (campo da aritmética). Contudo, ainda apresentaram dificuldades com as operações mentais de encontrar as possíveis fatorações por não dominarem a tabuada da multiplicação. Esta etapa da atividade permitiu que os(as) alunos(as) *matematizassem* em diferentes níveis de compreensão, cada um(a) pôde explorar caminhos dentro do seu nível e chegar ao objetivo proposto, conseguiram construir objetos mentais relacionados ao conceito de números primos.[35]

[35]Como visto anteriormente: “A condição para chegar ao próximo nível de compreensão é a capacidade de refletir sobre as atividades realizadas. Esta reflexão pode ser estimulada pela interação com os pares e pelas próprias produções dos alunos” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 13, tradução nossa); O professor tem o papel de selecionar situações pertinentes à realidade do aluno, de modo a

Nesta etapa todos os Princípios da RME foram contemplados, já que a situação proposta fez sentido para os estudantes, que se engajaram e matematizaram individualmente e coletivamente dentro dos seus níveis de compreensão, em alguns casos com a orientação da professora, entrelaçando ideias de geometria com aritmética.

Correção e criação do conceito de número primo

Os grupos se uniram em uma roda para corrigirem a lista criada de forma coletiva. Nem todos os grupos construíram a lista até o 101, como solicitado, mas todos chegaram até números primos maiores que 50, de modo que foi o suficiente para desenvolverem objetos mentais e participarem produtivamente da discussão. A correção foi feita pelos(as) próprios(as) alunos(as), sendo que a professora solicitou a todos(as) que agissem com paciência e respeito para com os eventuais erros dos(as) colegas. Cada turma criou sua própria estratégia de correção. Em uma delas organizaram a correção de modo que cada um(a) falasse um número primo da sua lista seguindo a ordem crescente e a disposição da roda, já na outra turma organizaram a correção por dezenas, discutindo todos os números primos que havia em cada dezena. Nesta etapa, os(as) alunos(as) mostraram empolgação e comprometimento, além de autonomia e interação – ajudaram-se mutuamente e discutiram casos que geraram dúvidas. Poucas foram as respostas erradas por todos(as), e nestes casos houve intervenção da professora ao indicar o equívoco sem apontar a razão, o que provocou o empenho dos(as) estudantes na descoberta do erro. Por exemplo 51 foi considerado um número primo por todo mundo, mas só foi preciso um estímulo para que investigassem mais a fundo e descobrissem que 17x3 = 51. Essa correção aconteceu até o número 101, garantindo que todos(as) os(as) alunos(as) tivessem o registro no caderno dos números primos até 101. Estudantes que não tinham feito tudo, copiaram os valores faltantes no decorrer da correção. Alguns(umas) alunos(as) encontraram números primos maiores que 101, nestes casos a professora corrigiu individualmente.

proporcionar atribuição de significado e a permitir que o estudante se sinta impulsionado a matematizá-la em diferentes níveis. Cada aluno deve ter a oportunidade de explorar os caminhos dentro de seus níveis de compreensão e chegar ao objetivo, pré-estabelecido pelo professor, com a orientação necessária a cada caso particular, que pode ser inclusive nenhuma.

Ainda na mesma roda, os(as) alunos(as) foram instigados(as) a buscar uma definição de número primo a partir das ideias que surgiram ao longo da construção da lista e das discussões coletivas. Surgiu a seguinte definição: “Um número que não está em outra tabuada além da própria e da do 1”. Em seguida, foi proposto que pensassem sobre os divisores destes números e após uma breve discussão os(as) alunos(as) chegaram a outra possível definição: “São todos os números que possuem apenas 2 divisores”, também foi discutida a ideia de número composto e a particularidade do número 1, cada aluno(a) registrava no caderno as discussões realizadas autonomamente. Depois disso vieram as férias (de julho) e no retorno apresentaram bastante segurança quanto aos conteúdos de números primos e compostos. Contemplando os Princípios da Atividade, da Realidade, dos Níveis, da Interatividade e da Orientação.

Podemos considerar que de fato houve uma construção do conceito. Consideramos que essa atividade apresentou um contexto rico, pois possibilitou que os(as) alunos(as) construíssem o conhecimento por meio da matematização e que fossem bem-sucedidos em tarefas subsequentes, o que comprovou um bom domínio dos conteúdos estudados. Assim, a atividade “Criando números especiais” contemplou vários Princípios da RME, que estão descritos com mais detalhes a seguir.

V - Sistematização dos Princípios da RME presentes na atividade aplicada

Quadro 16: Sistematização os Princípios da RME presentes na aplicação da atividade V

Tema: Números primos **Atividade: Criando números especiais**	
Etapas	**Princípio da RME**
Montar todos os retângulos possíveis a partir de diferentes quantidades inteiras (de 2 a 100) de quadradinhos de EVA.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio dos Níveis - Princípio da Orientação
Criação de hipóteses sobre números especiais, compartilhamento sobre as hipóteses criadas e conclusões.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio dos Níveis - Princípio da Orientação
Refazer a atividade de montar retângulos para registrar os números correspondentes às quantidades com as quais só é possível montar um único retângulo (números primos).	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio dos Níveis - Princípio da Orientação
Discussão coletiva sobre os números encontrados, detectando eventuais equívocos com compartilhando as estratégias de resolução utilizadas e criação dos conceitos de números primos e números compostos, a partir das propriedades observadas na criação da lista.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio da Interatividade - Princípio dos Níveis - Princípio da Orientação

Fonte: autora

2.4 CONSUMO CONSCIENTE DE ÁGUA ENVOLVENDO MEDIDAS, PROPORÇÕES E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.

Objetivos de conteúdo

- Compreender grandezas de comprimento, área, capacidade e volume.
- Relacionar diferentes grandezas e unidades de medidas com situações da vida real.
- Realizar transformações de medidas de uma mesma grandeza.
- Coletar dados.
- Construir tabelas e gráficos de colunas.
- Interpretar os dados coletados associando a dados de pesquisas científicas sobre o tema.
- Utilizar proporcionalidade em situações problema.
- Realizar cálculo de média aritmética.

VI - EXPERIMENTO DIDÁTICO: Projeto sobre o consumo de água

Quadro 17: Etapas e Objetivos do experimento VI

Etapas	Objetivo
Ler e discutir trechos de notícias sobre abastecimento de água envolvendo diferentes grandezas e suas medidas. Criar perguntas contextualizadas durante a visita de campo.	- Contextualizar as grandezas e medidas no quotidiano: comprimento; área; volume; capacidade; e vazão. - Instrumentalizar os alunos para visita à Sabesp com a professora de ciências.
Construir cubos de 1*cm* de lado ou de 1*dm* de lado por planificação, em papel plastificado para experimentar quantos litros ou mililitros de água cabem nos cubos construídos.	- Perceber por meio da experimentação, que $1cm^3$ equivale a $1m\text{l}$ e que $1dm^3$ equivale a 1 l.
Coletar a água que sai do chuveiro durante um minuto e medir a capacidade de água coletada (em litros). Coletar dados sobre o tempo de duração dos banhos de cada aluno no período de uma semana.	- Calcular a vazão do chuveiro em litros por minuto. - Registrar os dados coletados para posteriormente calcular a quantidade de litros de água consumida em cada banho.
Interpretar e analisar dados encontrados em diferentes sites[36] sobre o consumo de água e criar problemas matemáticos relacionados a eles.	- Refletir sobre o consumo de água em diferentes países relacionando com diferentes aspectos sociais. - Simular situações do cotidiano

[36] - Site aguaqsp (São dados de 2013, mas que trazem uma rica reflexão.) <http://www.aguaqsp.com.br/agua-e-consumo.php> Acesso em 13/10/2022 às 10:44.
- Site G1 com simulação do gasto total < https://especiais.g1.globo.com/economia/crise-da-agua/calculadora-do-consumo/> Acesso em 13/10/2022 às 10:46.
- Simulador de consumo de água da sabesp <http://simuladordeconsumo.sabesp.com.br/> Acesso em 13/10/2022 às 10:46.

	relacionadas ao consumo de água e comparar com o valor recomendado pela OMS. - Criar situações problemas envolvendo as discussões realizadas e a matemática.
Realizar o roteiro de estudos sobre o consumo doméstico de água envolvendo os dados coletados e as pesquisas feitas nos sites indicados.	- Sistematizar os dados coletados em tabela e gráfico; - Transformar unidades de tempo segundos para minutos; - Calcular a estimativa de litros de água gastos por banho; - Calcular a média aritmética dos consumos estimados de água em banhos; - Estimar o consumo mensal de água da família em banhos; - Estimar o consumo diário de água a partir do valor encontrado e de dados retirados do site da Sabesp sobre outras ações domésticas de consumo de água; - Comparar o consumo estimado com o recomendado pela ONU; - Sugerir ações para o consumo consciente de água. - Aplicar ações para reduzir o consumo de água.
Construir coletivamente um gráfico tridimensional de colunas contendo as médias semanais do consumo diário de água por banho de cada aluno. Escrever dicas para economizar água ou mudanças nas próprias ações sobre o consumo de água.	- Determinar a altura da sua própria coluna relacionando à seguinte proporção: 500 litros equivalem a 20 cm de altura. - Construir a própria coluna com exatidão e encapar com papéis de cores pré-estabelecidas por faixas de consumo.
Apresentar os gráficos tridimensionais e as dicas elaboradas na Mostra Cultural da escola.	- Compartilhar com a comunidade o experimento e as reflexões realizadas.
Avaliação	- Avaliar o processo de aprendizagem de cada aluno quanto aos objetivos de aprendizagem propostos.

Fonte: autora

Preparo dos estudantes para a visita à SABESP

Os(as) estudantes receberam um texto, para colar no caderno, contendo trechos de notícias relacionadas ao consumo, abastecimento e armazenamento de água (ver Apêndice). Em leitura coletiva a professora registrou na lousa as medidas constantes do texto. No último trecho, diante da informação, por exemplo, de que em 2021 o volume total de água armazenada nos reservatórios que abastecem a região metropolitana de São Paulo era de 1.158,04 hm³, foi necessário explicitar a leitura da unidade de medida desconhecida “hm³ - hectômetro cúbico”. Diante dos valores elevados constantes na lousa (como os 982 bilhões de litros de volume útil da Cantareira) os(as) alunos(as) manifestaram empolgação e interesse em entender os significados das medidas e poder compreender as informações do texto. Assim, a professora explorou as grandezas de comprimento (metro), área (metro quadrado) e volume (metro cúbico) e suas unidades de medida.

Poucos dias depois os(as) alunos(as) fizeram uma visita à Estação de Tratamento de Água de Vargem Grande Paulista da Sabesp como atividade da disciplina de ciências. Então, aproveitando a integração disciplinar, solicitamos que durante a visita os(as) estudantes tentassem relacionar as informações apresentadas pelos monitores com os conteúdos vistos em matemática e elaborassem perguntas. Seguem algumas das perguntas formuladas pelos(as) alunos(as) durante a visita.

- Quantos litros de água seria o ideal para cada pessoa gastar por dia? R: De 100 a 150 litros.
- Quantos km^2 tem essa unidade da Sabesp? (sem registro de resposta)
- Quantos metros cúbicos de água já tratada vocês conseguem armazenar, no máximo, nas caixas d'água, por dia? R: 40.000 m^3.
- Qual a capacidade de água do maior reservatório desta unidade? R: 75 milhões de litros.
- Quantos litros de água são tratados por segundo? R: Nessa unidade 6.400 litros por segundo, em todas as estações de tratamento são 88.000 litros por segundo.
- Quantos litros de água a piscina de emergência suporta? R: 35 a 45 milhões de litros.
- Qual a velocidade da água nos canos? (sem registro de resposta)
- Como é a forma de cobrar pelo consumo de água? (sem registro de resposta)

Muitas das perguntas criadas se relacionaram à capacidade de água em litros, no entanto alguns(umas) estudantes conseguiram perguntar sobre outras grandezas como velocidade, vazão, área e volume. Algumas dessas perguntas não vieram acompanhadas de registro de respostas, o que tornou impossível saber se o(a) aluno(a) não realizou efetivamente a pergunta, se o(a) aluno(a) não registrou a resposta ou se o monitor não a respondeu. Ainda assim, fica evidente que os(as) alunos(as) conseguiram aplicar no trabalho de campo as discussões realizadas nas aulas de matemática. Podemos observar que os trechos de notícias sobre a distribuição de água e a apresentação das diferentes grandezas e medidas foram peças importantes na preparação para a visita à Sabesp. Esta visita integrou os conteúdos vistos em matemática com os conteúdos da disciplina de ciências e despertou nos(as) estudantes interesse e motivação, logo tratou-se de uma atividade com contexto rico, segundo Freudenthal.

Podemos apontar muitos Princípios da RME presentes nesta atividade. O Princípio do Entrelaçamento esteve presente na integração entre disciplinas de Matemática e Ciências e entre os conteúdos de grandezas e medidas. O Princípio da Realidade percorreu toda a atividade, pois elas foram contextualizadas em situações concretas em sala de aula e no trabalho de campo. Além disso, foram contemplados os Princípios da Atividade e dos Níveis durante a realização da visita à Sabesp, ao elaborarem perguntas com autonomia, cada aluno(a), dentro do seu nível de compreensão.

Experimento no laboratório de ciências

Foi solicitado aos(às) alunos(as) que construíssem um cubo de 1*cm* de lado ou um cubo de 1*dm* de lado. Cada aluno(a) construiu uma planificação do cubo e, antes de montá-lo, plastificou as faces internas com papel *contact* ou fita adesiva transparente. Na montagem do cubo, foi solicitado que deixassem uma das faces abertas, de modo que o cubo virasse um reservatório. Alguns(umas) alunos(as) apresentaram dificuldades na construção do cubo. Foram ajudados em alguns casos pela professora e em outros pelos próprios colegas. Com os cubos finalizados, estudantes e professora se dirigiram ao laboratório de ciências para a realização do experimento.

Os(as) estudantes que construíram o cubo de 1cm de lado utilizaram pipetas para medir a capacidade de água dos pequenos cubos construídos. Já os(as) alunos(as) que construíram o cubo de 1*dm* de lado utilizaram *beckers*[37] para medir a capacidade do cubo em litros. Os(as) estudantes ficaram bastante empolgados, o laboratório ficou um pouco mais molhado do que o planejado, mas o experimento funcionou bem. Eles(as) se mostraram impressionados com a verificação de que no pequeno cubo cabe exatamente 1*m* l de água e no cubo maior 1 litro. Ao retornarem à sala de aula, registraram no caderno as conclusões encontradas: 1cm^3 equivale a 1*m* l e 1dm^3 equivale a 1 l. Vemos agora, que teria sido uma boa oportunidade para ajudá-los a construir objetos mentais adequados sobre a distinção entre volume e

[37] Cilindros de vidro graduado utilizados para experimentos científicos.

capacidade, salientando que todo cubo de 1cm^3 de volume tem capacidade de 1m l e todo cubo de volume de 1dm^3 tem capacidade de 1 l. Porém infelizmente, no momento do planejamento da aula esta possibilidade nos passou despercebida. Fica aqui a ideia para aplicações futuras de atividades semelhantes.

Neste experimento, os(as) alunos(as) puderam vivenciar a matemática como uma atividade humana, foi uma oportunidade de deixarem de ser meros receptores para se tornarem autores de conhecimentos, no próprio processo de aprendizado. Nesta ação, eles(as) criaram suas hipóteses, investigaram e construíram conhecimentos matemáticos. Consideramos contemplados os Princípios da Realidade, da Atividade e do Entrelaçamento, por se tratar de uma atividade concreta, de construção, onde os(as) estudantes entrelaçaram diferentes conteúdos de matemática (geometria e medidas) de modo autônomo. Os Princípios dos Níveis, da Orientação e da Interatividade foram contemplados, já que alguns(umas) estudantes apresentaram dificuldades na construção dos cubos, tendo sido auxiliados(as) por outros(as) colegas ou orientados(as) pela professora – consideramos que os(as) alunos(as) estavam em diferentes níveis de compreensão. Além disso, os(as) estudantes construíram cubos de tamanhos diferentes, de modo que foi necessária a interação entre eles(as) para perceberem as duas relações existentes – mais um momento em que o Princípio da Interatividade foi contemplado, tornando o experimento ainda mais valioso.

Coleta de dados

Foi solicitado aos(às) estudantes que realizassem uma coleta de dados sobre o tempo despendido em seus banhos durante uma semana. Este registro foi feito em uma filipeta entregue (ver figura 14). Também foi solicitado que calculassem a vazão do chuveiro, coletando água em um recipiente por um minuto, com o chuveiro na intensidade em que costumam tomar banho, e assim se calcular a vazão de litros por minuto ao medir quantos litros foram coletados no recipiente.

Figura 15: Modelo da atividade entregue aos estudantes para coleta de dados

Projeto do consumo de água - parte 2

Coleta de dados
Em sua casa, meça o tempo do seu banho (quando liga o chuveiro até quando desligar o chuveiro) por um período de 7 dias e registre na tabela abaixo:

Vazão do chuveiro:__________

Dia	Tempo

Fonte: autora

Muitas dúvidas surgiram neste momento, algumas por falta de atenção na hora da explicação e outras pertinentes. Em todas as salas surgiu a pergunta: “Como vou medir a água que está no recipiente?”. Foi sinalizado aos(às) estudantes que não há uma única resposta certa para esta pergunta. Pode-se utilizar algum utensílio doméstico com medida conhecida ou sinalizada, como um copo medidor, ou uma jarra. Outra pergunta feita que surgiu em três das quatro salas foi: “Se a água transbordar do meu recipiente antes de passar um minuto?”. Em duas delas os(as) próprios(as) alunos(as) responderam: “você pode medir por menos tempo e depois multiplicar, por exemplo: você pode medir por 30 segundos e depois multiplicar por 2”. Na outra sala a professora deu a mesma resposta, dando os devidos créditos. Na quarta turma a professora comentou sobre a pergunta surgida nas outras salas, fornecendo a solução dos(as) estudantes. Ficou estabelecido o prazo de 8 a 10 dias para a realização da coleta de dados. No decorrer da semana os(as) alunos(as) compartilharam soluções e tiraram dúvidas que surgiram ao longo do processo.

Mesmo esta sendo apenas uma pequena etapa da atividade como um todo, podemos perceber a presença dos Princípios da Realidade e da Atividade, pois os(as) alunos(as) partem de uma situação realística, de tomar banho e autonomamente realizam a tarefa proposta. Cada aluno(a) utilizou a sua própria estratégia, assim também, podemos considerar a presença do Princípios dos Níveis.

Análise e comparação de dados sobre consumo de água em diferentes contextos

Do site *aguaqsp*[38] consta a relação da média de consumo de água diário per capita em vários países, dessa forma foi possível discutir com os(as) alunos(as) diferentes aspectos sociais e econômicos que influenciam esse consumo. Alguns exemplos de tais médias são: Estados Unidos – 575l; Etiópia – 15 l; Dinamarca – 107l. Esses valores foram comparados com o valor de 110 l, considerado pela OMS como ideal para uma pessoa viver confortavelmente. A partir disso, os(as) alunos(as) foram organizados(as) em grupos e, além das informações discutidas, acessaram simuladores de consumo de água da sabesp[39] e do site do G1[40]. Discutiram as informações encontradas e criaram problemas matemáticos relacionados ao tema. Seguem abaixo alguns problemas desenvolvidos pelos(as) alunos(as):

- *Use a tabela abaixo para responder algumas das próximas questões:*

Tabela 2: Consumo de água em diferentes países

País	***Média de litros consumidos de água por dia per capita***
Brasil	*187*
China	*85*
Dinamarca	*107*
U.S.A	*575*
Etiópia	*15*
Ìndia	*135*
México	*365*
Nigéria	*35*
Portugal	*220*
Reino Unido	*150*

Fonte: aguaqsp

[38] http://www.aguaqsp.com.br/agua-e-consumo.php (acesso em 05.09.2022 às 11h13)
[39] http://simuladordeconsumo.sabesp.com.br/ (acesso em 07.11.2022 às 16h18)
[40] Site do G1 com simulação do gasto total (acesso em 07.11.2022 às 16h18)

- *Se a pia do banheiro gasta 15 litros por minuto, uma família com 4 pessoas usa a pia e cada um utiliza por 10 minutos e 15 segundos por dia, quantos litros eles vão gastar em 14 dias? E se cada litro de água é 0,005 reais, quantos reais eles precisam para pagar o consumo gasto com água da pia?*
- *Mickey tinha 180 litros de água na caixa d'água. Ele e o seu companheiro Pluto decidiram tomar banho. Se Mickey demorar 7 minutos para tomar banho e o Pluto 9 minutos. O chuveiro do Mickey sai 12 litros por minuto. Os dois irão conseguir completar os banhos? Se não por quê?*
- *Há 20 anos a Dinamarca consumia 35% mais litros de água por pessoa. Considerando que hoje cada dinamarquês consome 107* l *de água, quanto consumiam há duas décadas?*
- *Ana Clara, seu pai e sua mãe, moram nos EUA foram passar suas férias no México, quantos litros ela e sua família terão que deixar de gastar para ficar no padrão de gastos do país?*
- *Cada pessoa dos Estados Unidos usa 575 litros de água por dia e há 329,5 milhões de habitantes. Quantos m³ de água os Estados Unidos gastam em média no total por dia?*

A análise dos dados acerca do consumo de água em diferentes países e as reflexões decorrentes desse assunto proporcionam a manifestação do Princípio do Entrelaçamento. Ao criar problemas matemáticos que relacionam conhecimentos prévios às reflexões realizadas, além de entrelaçar conceitos matemáticos, também se abrem oportunidades para que os níveis de compreensão de cada estudante sejam respeitados e considerados. Contemplando assim, os Princípios da Realidade, da Atividade, do Entrelaçamento e dos Níveis.

Roteiro de estudo sobre os dados coletados e as informações trabalhadas

Um roteiro de estudos impresso foi entregue para cada aluno(a) (no apêndice), visando a organização, desenvolvimento das tarefas realizadas e aprofundamento sobre o consumo consciente de água. Na primeira questão, foi solicitada a organização dos dados previamente coletados (vazão em litros por minuto e tempo total de cada banho) e o cômputo dos litros de água gastos por banho. A princípio pensou-se ser uma etapa simples de cálculos de proporcionalidade e multiplicação, no entanto, grande parte dos tempos registrados por alunos e alunas consistiram, minutos e segundos, alguns(umas) até em frações de hora, o que representou uma dificuldade inesperada. Assim, foi acrescentada uma etapa de conversão de segundos para minutos. Abaixo encontra-se a questão na forma original, já no apêndice está atualizada com a nova etapa.

Não foi permitido o uso de calculadoras, assim os(as) estudantes tiveram a oportunidade de avançar nas habilidades de cálculos em situações realísticas. Na questão dois os(as) estudantes construíram um gráfico de barras para os dados da tabela preenchida, já era esperado que tivessem conhecimento sobre gráfico de barras. No entanto, muitos erros básicos surgiram, os mais comuns foram: falta de proporcionalidade e colunas que não começavam no zero. Esse exercício representou uma oportunidade de discussão de características importantes deste tipo de gráfico. O trabalho dos(as) alunos(as) transcorreu naturalmente, não tendo sido necessário explicações coletivas. Os(as) estudantes conversavam entre si enquanto realizavam a atividade, quando necessário solicitavam algum auxílio a professora que explicava para um grupo pequeno, que por sua vez explicava para outros colegas, disseminando o conhecimento entre eles(as).

As questões seguintes relacionaram-se à média aritmética do consumo de água por banho. Por se tratar de um conteúdo novo, foram divididas em duas questões sobre: a soma dos valores encontrados e a divisão pelo total de dias para determinar o valor da média aritmética. Consideramos bem-sucedida esta separação, no entanto na questão 4 também foi solicitado que cada aluno(a) comparasse sua média com a média da turma, o que não foi realizado por todos(as) os(as) alunos(as). O Princípio dos Níveis da RME esteve presente, assim cada aluno(a) seguiu o próprio ritmo de aprendizagem, e as médias não foram calculadas ao mesmo tempo. No final da atividade foi possível encontrar a média da turma, porém apenas os(as) alunos(as) mais interessados(as) voltaram a esta questão e realizaram a comparação de forma autônoma. Para uma aplicação futura, a questão presente no apêndice foi atualizada com o acréscimo da solicitação de que a média individual obtida fosse compartilhada e a comparação entre as médias individuais com a média da turma fosse realizada posteriormente.

Na questão 5 os(as) alunos(as) estimaram, a partir da própria média de consumo, a quantidade de litros de água gastos no mês em banhos de toda a família. A partir de dados retirados do site da Sabesp sobre algumas ações domésticas como escovar os dentes, lavar o rosto e dar descarga no vaso sanitário, na questão 6 os(as) estudantes estimaram quantos litros de água gastavam com essas ações e fizeram uma estimativa do consumo de água diário com elas. No exercício não ficou claro que o valor encontrado para banhos, nas questões anteriores também deveria ser considerado, então foi necessário pedir verbalmente para os(as) estudantes. Este ajuste já foi realizado na atividade do apêndice.

A questão 7 teve o seguinte enunciado:

> 7) "De acordo com a Organização das Nações Unidas, cada pessoa necessita de 3,3 mil litros de água por mês (cerca de 110 litros de água por dia para atender às necessidades de consumo e higiene). No entanto, no Brasil, o consumo por pessoa pode chegar a mais de 200 litros/dia." (Sabesp, 2021)
>
> A quantidade de água que você consome diariamente está dentro do recomendado pela ONU?
>
> - Se sim, detalhe suas ações.
> - Se não, o que você poderia fazer para aproximar o seu consumo do consumo recomendado?

Ao refletirem sobre o próprio consumo comparado com o recomendado pela ONU, os alunos descreveram ações que os ajudassem a reduzir o consumo ou descrever ações que já realizam para manterem-se dentro das recomendações da ONU. Vejamos alguns exemplos:

Aluna A – média de 119,5 litros: "A ONU recomenda cerca de 110 litros, e com a minha estimativa deu 119,5 ou seja, eu gasto 9,5 a mais. Eu poderia diminuir meu tempo de gasto de água, desligando a torneira quando estiver enxaguando ou colocando o sabonete."

Aluno B – média de 253,7 litros: "Não. Eu poderia reduzir a minha vazão ou tomar banho com a água mais fraca."

Aluna C – média de 224,7 litros: "Não, eu poderia (comecei a fazer) desligar a água enquanto passo shampoo, condicionador e sabão."

Aluna D – média de 334,28 litros: "Não, eu deveria diminuir meu tempo no banho e ficar focada quando estou com a água solta."

Aluna E – média de 157,56 litros: "A minha média diária não é recomendada, e para melhorar poderia ter banhos mais rápidos e economizar mais."

Aluno F – média de 97,05 litros: "Sim, porque a vazão do meu chuveiro é baixa (4,4L por minuto) e isso economiza bastante"

Aluno G – média de 832,75 litros: "Posso tentar me controlar para não desenhar no vidro, cantar e dançar."

Pudemos perceber que todos os Princípios da RME foram contemplados durante o desenvolvimento deste roteiro. Os Princípios da Atividade, da Realidade e do Entrelaçamento estiveram presentes, pois foram oportunizadas reflexões sobre situações em contextos ricos aos(às) estudantes, entrelaçadas com outros temas além da matemática. O Princípio da Interatividade foi contemplado já que, durante a realização do roteiro de estudos, os(as) alunos(as) trocaram experiências, compararam criticamente os diversos valores numéricos encontrados, compartilharam ações cotidianas para o consumo consciente de água e intercambiaram explicações sobre conteúdos matemáticos envolvidos. Como cada estudante seguiu seu ritmo de aprendizagem e a professora orientou apenas quando necessário, os Princípios dos Níveis e da Orientação foram favorecidos ao longo de toda realização do roteiro. Mesmo tendo sido disponibilizadas cerca de 6 aulas para a realização deste trabalho, muitos(as) alunos(as) não conseguiram finalizá-lo. Alguns(umas) solicitaram que pudessem finalizar em casa e outros(as) foram convidados(as) a participar de aulas extras de reforço para a finalização.

Construção do Gráfico 3D e produção de "Dicas" de economia de água.

Para a realização desta etapa foram utilizadas embalagens vazias com formato de paralelepípedos congruentes. A primeira turma que começou o experimento definiu que a embalagem inteira, com 20cm de altura, corresponderia a 500 litros de água gasta em banhos a partir de uma rica discussão entre os(as) alunos(as). Um dos estudantes se dirigiu à lousa e representou a embalagem por um retângulo, enquanto outro aluno media a altura da caixa. O primeiro realizou simulações mentais e explicou para a turma “se a caixa inteira representar 1000 litros, a pessoa que tiver um consumo de 25 litros por banho precisará de uma altura de 0,5 cm”. Outro estudante comentou que era uma altura muito baixa, talvez o valor de 500 litros representasse proporções mais adequadas. Assim, os(as) alunos(as) concordaram que 20cm representar 500 litros seria melhor. Dando continuidade ao experimento cada aluno(a) recebeu uma embalagem vazia para representar a própria média de consumo de água em banhos. Foram atribuídas as seguintes cores para três categorias de médias: entre 0 a 100 litros – azul; de 101 a 200 litros – amarela; e mais de 200 litros – vermelha. Com a ideia trazida pelos alunos (se 20 cm corresponde a 500 litros, então 1cm corresponde a 25 a litros), a professora pode discutir ideias de proporção e sugerir cálculos para que encontrassem a altura da própria coluna $\left(\frac{Média \times 20}{500} = \frac{Média}{25}\right)$. Com as ideias discutidas e as embalagens em mãos, os(as) alunos(as) calcularam as alturas necessárias, mediram nas embalagens, cortaram e cobriram sua coluna com papel colorido da cor correspondente.

Alguns(umas) estudantes, principalmente os(as) que estavam na faixa vermelha, quiseram refazer o experimento do consumo de água para tentar mudar de faixa. Dois casos muito discrepantes da média da turma se destacaram, com o consumo maior que 800 litros por banho. Os dois estudantes se sensibilizaram e propuseram mudanças. Um deles, que tomava banhos demorados propôs se concentrar apenas no banho e ser mais rápido, reduzindo de uma média de 1 hora 20 minutos para 15 minutos. O outro aluno, percebeu que a vazão do seu chuveiro era muito alta, 60 litros por minuto, como solução ele e sua família instalaram um redutor de vazão que limitou a 24 litros por minuto. Do lado direito da fotografia 17 temos todos(as) os(as) alunos(as) do sexto ano, exceto os dois particularmente citados, cujos gráficos estão ao lado esquerdo – um representando o consumo anterior e o outro posterior à nova coleta de dados. Nota-se que as ações de conscientização tiveram um resultado positivo.

Fotografia 17: Gráfico construído por estudantes sobre a média de litros de água gastos em banhos.

Fonte: autora

O primeiro experimento de consumo de água por banhos dos dois alunos em destaque (base rosa- gráficos vermelhos) destoam do coletivo.

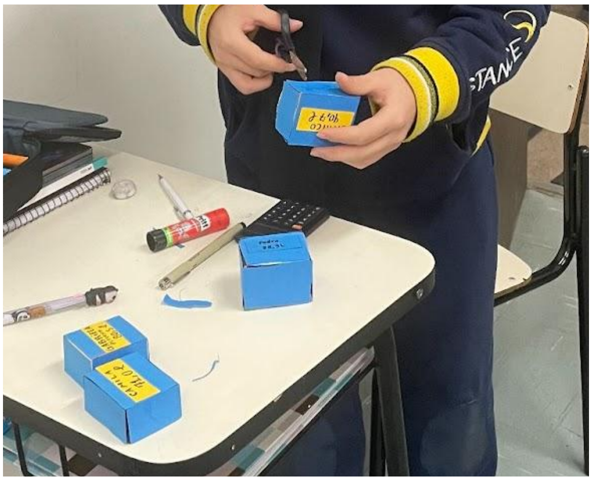
Além da construção do gráfico, cada estudante escreveu sugestões de como economizar água e alguns(umas) relataram ações que passaram a fazer após esse trabalho. As sugestões foram organizadas em um painel para ser exposto na Mostra

Cultural da escola. As dicas de ações para consumir água de forma adequada foram inspiradas na questão 7 do roteiro de estudos. Seguem alguns exemplos:

- “Para diminuir o seu consumo de água e ajudar o meio ambiente, você pode diminuir a vazão do seu chuveiro e diminuir o seu tempo no banho. Também pode fechar a torneira ao escovar os dentes. Reduzindo meu tempo, eu consegui economizar quase 80 litros [por banho].”
- “Para economizar água, podemos diminuir a vazão do chuveiro ou não enrolar no banho. Quando escovamos os dentes ou lavamos a louça podemos fechar a torneira como o adesivo que ganhamos da Sabesp avisa. Também, conseguimos pegar água da chuva, por exemplo, e usar para ajudar na descarga, que usa muita água.”
- “Ao escovar os dentes, podemos desligar a torneira, e só abri-la ao terminar para lavar a escova. - Se a vazão do seu chuveiro é muito grande, é recomendado comprar um redutor de vazão, pois ele abaixa sua vazão, e quando você for tomar banho, vai sair menos água.
- Feche o chuveiro sempre que possível, por exemplo, quando você estiver se ensaboando, feche o chuveiro e depois abra para tirar o sabão. - Tente tomar banhos mais curtos. Você pode fazer isso ficando mais focado no banho, sem ficar ouvindo música, ou evitar coisas que te distraem.”
- “Para ajudar a pessoa a reduzir o consumo de água você pode tentar se controlar para não brincar durante o banho, desenhar no vidro, cantar e muitas outras coisas legais, pois acontece que você gasta muito mais água do que o adequado fazendo coisas que não tem necessidade.”
- “Uma dica para economizar água: quando você escovar os dentes, fechar a torneira e colocar água no copo para fazer bochecho. Você também pode cronometrar o seu tempo no banho e tentar cada dia tomar um banho mais rápido até chegar em um tempo razoável.”
- “Fazendo a vazão do meu chuveiro ficar mais baixa, eu passei a gastar menos água por dia, fui de 213L gastos em média por banho, para uma média de 112L gastos em um banho. Antes de me conscientizar eu abria muito meu chuveiro, fazendo minha vazão de 21L por minuto, agora eu abro menos o chuveiro e tenho uma vazão de 14L por minuto.”
- “Evitar deixar a torneira ligada ao escovar os dentes, eu não fazia isso, mas quando me dei conta que eu não estava economizando água, decidi mudar. Fazendo isso eu pude economizar quase 10 litros de água”.

É possível perceber que a etapa de construção do gráfico e dicas envolveu todos os Princípios da RME. Os Princípios da Realidade e da Atividades estiveram presentes em todas as etapas da atividade, já que os(as) alunos(as) trabalharam de forma autônoma no desenvolvimento das tarefas propostas. A discussão inicial entre os(as) estudantes para definir a proporção das colunas do gráfico partiu dos(as) próprios(as) estudantes, que juntos(as) agregaram ideias e as aprimoraram – o que envolveu os Princípios da Interatividade e dos Níveis. Alguns(umas) alunos(as) apresentaram dificuldade em entender a discussão realizada, calcular a altura correspondente ao seu consumo e medir a embalagem na altura correta. Para isso, contaram com a ajuda de outros(as) colegas ou da professora, o que tornou presente os Princípios da Interatividade e da Orientação. Alguns gráficos não ficaram muito precisos, o que pode ser observado ao serem comparados com outros: mesmo a diferença sendo milimétrica, foi visto que havia colunas referentes a um consumo maior com uma altura menor do que outros. Assim, alunos e alunas com níveis de compreensão mais avançados ficaram responsáveis por ajustar essas medidas, como podemos ver a fotografia 18 na qual um aluno ajusta algumas colunas para que fiquem adequadas. Esta tarefa envolveu conceitos de medidas, proporcionalidade, gráfico de colunas e média aritmética, sendo, portanto, contemplado também o Princípio do Entrelaçamento. Além disso, ao escreverem dicas e sugestões de como reduzir o consumo de água, os(as) alunos(as) integraram conteúdos e conhecimentos mais abrangentes do que apenas os matemáticos.

Fotografia 18: Aluno ajustando a precisão das alturas das colunas do gráfico dos colegas.



Fonte: autora

<u>Apresentação dos gráficos e dicas na Mostra Cultural</u>

Na Mostra Cultural da escola, evento anual que acontece para toda a comunidade escolar, os(as) alunos(as) do sexto ano expuseram vários trabalhos desenvolvidos ao longo do ano, inclusive o gráfico em 3D e o painel de dicas para reduzir o consumo de água. Alguns(umas) estudantes ficaram responsáveis pela explicação de toda a atividade desenvolvida, para contar aos(às) visitantes o processo de construção do gráfico e destacar algumas das dicas expostas.

O compartilhamento deste trabalho de matemática com a comunidade foi realizado por alguns(umas) estudantes, os(as) demais apresentaram outros trabalhos da Mostra Cultural. Consideramos que o Princípio da Atividade esteve presente para os(as) alunos(as) escalados(as) para a apresentação deste projeto, por compartilharem a experiência com os(as) visitantes de forma autônoma. Na interação com o público, em sua grande maioria pais de alunos(as) que demonstraram muito interesse no projeto e fizeram muitas perguntas, por vezes foi necessário que os(as) apresentadores(as) refizessem alguns cálculos para fornecerem respostas apropriadas. Isso representou um aprofundamento e uma consolidação dos conteúdos trabalhados nos experimentos realizados. Além disso, os(as) estudantes também trocaram informações entre si, como por exemplo quando foi solicitado que descrevessem como haviam calculado a vazão do chuveiro – neste compartilhamento um dos alunos se surpreendeu ao constatar que o colega havia realizado o experimento de outra maneira. Por tudo isso consideramos que os Princípios da Atividade, da Interatividade e do Entrelaçamento estiveram presentes.

Avaliação de estudantes no projeto

A avaliação de alunos e alunas ocorreu durante todo o projeto. O roteiro de estudos foi um instrumento importante de avaliação. Nele foi possível avaliá-los(as) quanto às operações aritméticas, resolução de problemas e construção de gráficos de colunas. A elaboração dos gráficos de colunas tridimensionais foi uma oportunidade para os(as) estudantes desenvolverem habilidades motoras e mais uma oportunidade de avaliação da construção de gráficos de colunas. Nas quatro turmas de sexto ano, os(as) alunos(as) apresentaram excelente rendimento nestas avaliações, mostrando muito avanço na aprendizagem dos conceitos abordados.

VI - Sistematização dos Princípios da RME presentes na atividade aplicada

Quadro 18: Sistematização os Princípios da RME presentes na aplicação da atividade VI

Tema: Consumo consciente de água envolvendo medidas, proporções e representação gráfica	
Etapas	PRINCÍPIOS DA RME CONTEMPLADOS
Ler e discutir trechos de notícias sobre	- Princípio da Atividade

abastecimento de água envolvendo diferentes grandezas e suas medidas.	- Princípio da Realidade - Princípio dos Níveis - Princípio do Entrelaçamento
Experimento no laboratório para experimentar quantos litros ou mililitros de água cabem nos cubos construídos.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio dos Níveis - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio da Orientação
Coletar a água que sai do chuveiro durante um minuto e medir a capacidade de água coletada (em litros). Coletar dados sobre o tempo de duração dos banhos de cada aluno no período de uma semana.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio dos Níveis
Interpretar e analisar dados encontrados em diferentes sites[41] sobre o consumo de água e criar problemas matemáticos relacionados a eles.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio dos Níveis - Princípio do Entrelaçamento
Realizar o roteiro de estudos sobre o consumo doméstico de água envolvendo os dados coletados e as pesquisas feitas nos sites indicados.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio dos Níveis - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio da Orientação
Construir coletivamente um gráfico tridimensional de colunas contendo as médias semanais do consumo diário de água por banho de cada aluno. Escrever dicas para economizar água ou mudanças nas próprias ações sobre o consumo de água.	- Princípio da Atividade - Princípio da Realidade - Princípio dos Níveis - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento - Princípio da Orientação
Apresentar os gráficos tridimensionais e as dicas elaboradas na Mostra Cultural da escola.	- Princípio da Atividade - Princípio da Interatividade - Princípio do Entrelaçamento

Fonte: autora

[41] - Site aguaqsp (São dados de 2013, mas que trazem uma rica reflexão.) <http://www.aguaqsp.com.br/agua-e-consumo.php> Acesso em 13/10/2022 às 10:44.
- Site G1 com simulação do gasto total < https://especiais.g1.globo.com/economia/crise-da-agua/calculadora-do-consumo/> Acesso em 13/10/2022 às 10:46.
- Simulador de consumo de água da sabesp <http://simuladordeconsumo.sabesp.com.br/> Acesso em 13/10/2022 às 10:46.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de analisar a evolução do processo de ensino/aprendizagem desenvolvido à luz dos Princípios da RME, no quadro a seguir estabelecemos relações entre as sistematizações sobre a presença de tais Princípios nas atividades aplicadas. Nele encontram-se todas as atividades aplicadas como pesquisa de campo deste trabalho relacionadas aos Princípios contemplados em cada uma de suas etapas.

Quadro 19: Presença dos Princípios da RME nas etapas das atividades desenvolvidas

Atividades desenvolvidas sob a luz da RME						
Experimentos didáticos aplicados	PRINCÍPIOS DA RME CONTEMPLADOS					
	Princípio da Atividade (ATI)	Princípio da Realidade (REA)	Princípio dos Níveis (NIV)	Princípio da Interatividade (INT)	Princípio do Entrelaçamento (ENT)	Princípio da Orientação (ORI)
Experimento I- Prismas e pirâmides						
Etapa 1: Atividade diagnóstica	ATI			INT		
Etapa 2: Apresentação da proposta						
Etapa 3: Planificação e apropriação	ATI	REA		INT		
Etapa 4: Experimentação e socialização	ATI	REA	NIV	INT		
Etapa 5: Construção e finalização	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Experimento II- Prismas e pirâmides						
Etapa 1: Situação problema	ATI	REA		INT		ORI
Etapa 2: Classificação						
Etapa 3: Construção com planificação dadas	ATI		NIV			ORI
Etapa 4: Apresentação de proposta						
Etapa 5: Construção sem planificações fornecidas	ATI		NIV			ORI

Etapa 6: Produto final	ATI	REA	NIV	INT		
Experimento III- Fração: assando *cookies*						
Etapa 1: Compartilhamento de experiências						
Etapa 2: Apresentação e organização de grupos						
Etapa 3: Elaboração da lista de compras	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Etapa 4: Mão na massa	ATI	REA		INT	ENT	ORI
Experimento IV- Números primos						
Etapa 1: Montar retângulos	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Etapa 2: Discussão e construção do conceito	ATI		NIV	INT		ORI
Experimento V- Números primos						
Etapa 1: Montar retângulos	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Etapa 2: Criar hipóteses, compartilhar e concluir	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Etapa 3: Refazer a atividade de montar retângulos	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Etapa 4: Construção do conceito	ATI	REA	NIV	INT		ORI
Experimento VI - Consumo de água						
Etapa 1: Ler e discutir notícias	ATI	REA	NIV		ENT	
Etapa 2: Experimento no laboratório	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Etapa 3: Coleta de dados	ATI	REA	NIV			
Etapa 4: Análise de dados externos	ATI	REA	NIV		ENT	
Etapa 5: Roteiro de estudos	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Etapa 6: Construção de gráficos e dicas	ATI	REA	NIV	INT	ENT	ORI
Etapa 7: Apresentação para a comunidade	ATI			INT	ENT	

Fonte: autora

Consideramos ser a presença dos Princípios da RME um bom parâmetro do quanto as abordagens adotadas nos experimentos didáticos são compatíveis com as ideias da RME. No quadro vê-se claramente que o Princípio da Atividade foi contemplado em, praticamente, todas as etapas. Tal fato é coerente tanto com a linha pedagógica da escola, campo desta pesquisa, que busca promover e desenvolver a autonomia dos(as) estudantes, como as minhas próprias convicções prévias. No entanto, desenvolver uma prática que siga as ideias da Educação Matemática Realística é mais complexo do que isso.

Voltando ao quadro, é possível notar a progressão em que os Princípios foram aparecendo. Nos dois primeiros experimentos, pensamos estar embasadas nas ideias da RME, pois a atividade contemplava os Princípios da Realidade e da Atividade. No entanto, ao aprofundar os estudos e analisar as atividades, percebemos que o Princípio do Entrelaçamento praticamente não foi contemplado naqueles experimentos. No segundo experimento o Princípio da Interatividade não foi muito contemplado em suas etapas, por razões detalhadas na página 62. Consideramos, assim, que as atividades sobre o tema de prismas e pirâmides merecem ser repensadas e aprimoradas.

O experimento III, sobre o tema de frações, teve uma das etapas com todos os Princípios contemplados. De fato, tratou-se de uma atividade estimulante, pois os estudantes mostraram muito interesse e envolvimento durante sua realização. Certa vez uma aluna, que havia passado pelo sexto ano há um tempo, comentou – “Lembra quando a gente fez *cookies* para estudar frações, eu não lembro exatamente o que de fração, mas lembro que foi muito legal”. Mesmo a aluna não lembrando exatamente qual conteúdo matemático estudou, ela mostrou ter uma doce lembrança do momento, comprovando que a atividade a ajudara a criar uma boa relação com a matemática. Assim, o experimento III contemplou com todos os Princípios da RME e constituiu-se em uma atividade pertinente e estimulante, podendo ser aplicada novamente.

Os experimentos IV e V, sobre números primos, são parecidos. No entanto, no experimento V aprimoramos as etapas para contemplar mais Princípios da RME. Os dois anos em que o experimento V foi aplicado, foram anos de pandemia e as atividades foram realizadas de forma remota. Os Princípios da Interatividade e Orientação são muito importantes para este experimento e no remoto eles ficaram prejudicados. Mesmo assim, nos dois anos os(as) alunos(as) construíram o conceito de número primo de forma significativa. Ao final do ano letivo os(as) estudantes sabiam falar sobre números primos com segurança e, no ano seguinte, demonstraram domínio sobre o tema. Muitas vezes o tempo didático é um obstáculo e nos dá insegurança em estendê-lo na realização de alguma atividade diferenciada, por considerar que pode prejudicar o tratamento de temas posteriores. No entanto, o que constatamos nesse experimento é que ao trabalharmos um conceito de forma significativa, não é necessário retomá-lo posteriormente, liberando tempo didático para temas que os necessitem como pré-requisitos.

O último experimento VI, sobre o consumo de água, foi trabalhado por meio de um projeto. Como os estudos desenvolvidos sobre RME para esta dissertação já estavam finalizados, pudemos pensar e aplicar seus Princípios em todo experimento. Além do Princípio da Atividade, o Princípio do Entrelaçamento também esteve presente em todas as etapas. O projeto foi trabalhado de forma interdisciplinar e transversal na matemática, abrangendo as áreas de medidas, aritmética, estatística e geometria. Este projeto utilizou um tempo didático um pouco mais longo, mesmo assim consideramos positivo, pois vários conteúdos matemáticos foram abordados de forma integrada, além de ter contribuído para a formação socioambiental dos(as) estudantes. Nos termos da RME, tratou-se de uma atividade realística com contexto rico.

A falta de motivação dos(as) alunos(as) frente à matemática escolar incentivou Freudenthal a refletir sobre abordagens de ensino e a desenvolver as ideias sistematizadas na RME. Acreditamos que as abordagens coerentes com a RME, quando bem aplicada e internalizada por professores(as), pode ajudar estudantes a verem a matemática de forma mais acessível e interessante. Nosso objetivo foi levar a prática embasada na RME para a sala de aula de modo a motivar as crianças a tornassem-se empenhadas, autônomas e criativas no próprio processo de aprendizagem da matemática. Neste sentido, algumas atividades aplicadas no sexto ano do Ensino Fundamental foram selecionadas por estarem embasadas em ideias da RME. Nossos estudos e compreensão sobre o tema se aprofundaram ao longo das aplicações de atividades, que foram organizadas aqui por temas e cronologia. Assim, somente no último experimento didático aplicado conseguimos contemplar todos os Princípios da RME na maioria das etapas desenvolvidas. Pudemos ainda perceber que nem todos os Princípios são necessariamente pertinentes aos objetivos de aprendizagem de cada etapa. Concluímos que nosso processo de apropriação das ideias de abordagens didáticas da RME, nos possibilitou propor atividades em contextos ricos, no sentido de Freudenthal.

> Contextos foram definidos como domínios da realidade revelados ao aprendiz para serem matematizados. Nos casos de localização, estória, projeto e tema, tais domínios são propositalmente - e às vezes artificialmente - delimitados pelo professor ou desenvolvedor, que deseja que o aluno reinvente certos processos e produtos de matematização. [...] em todos os casos deve-se ter em mente que o contexto não é uma mera vestimenta vestindo matemática nua, e matematizar é bastante diferente de

> simplesmente desabotoar essa vestimenta. Ou, para dar uma nova reviravolta a uma metáfora anterior: ver o contexto como ruído, capaz de perturbar a mensagem matemática clara, está errado; o contexto é a mensagem, e a matemática um meio de decodificação (FREUDENTHAL, 2002, página 75, tradução nossa[42]).

No experimento II, ao propor a atividade com pressa, não oportunizamos o processo de aprendizado dos(as) estudantes – foi proposto que os(as) estudantes “desabotoassem a vestimenta”. Foi feita uma inversão anti-didática, não foi dado aos(às) alunos(as) oportunidades para que descobrissem por si só os conceitos – que foram simplesmente expostos, com a falsa ideia que aprenderiam mais rápido. Na analogia de Freudenthal os conceitos a serem explorados seriam considerados a mensagem importante da matemática e o contexto que oportunizaria o desenvolvimento e criação do conceito como um ruído, que estaria atrapalhando a obtenção da mensagem, pela falta de tempo. Hoje, percebemos o quanto essa inversão não foi motivadora para o processo de ensino/aprendizagem dos(as) estudantes.

Concluímos que desenvolver e aplicar atividades embasadas nas ideias da RME é desafiador, exige criatividade, vontade, empenho e conhecimento. No entanto, dedicar-se à elaboração e aplicação de atividades nesta perspectiva, mostrou-se proveitoso, rico, motivador e significativo tanto para os(as) estudantes quanto para a comunidade escolar. O experimento VI, referente ao consumo de água, foi muito significativo aos(às) estudantes e suas famílias, que trouxeram comentários positivos sobre a atividade. Essa atividade também foi apresentada à equipe da escola em um simpósio interno, que resultou em muitos comentários entusiasmados por parte de colegas, tanto no dia da apresentação, quanto dias após. Professores(as) de diversas áreas e segmentos se sentiram inspirados com a proposta relatada. Mesmo não tendo citado a RME no relato feito no simpósio, ela estava presente – foram suas ideias que nos possibilitaram desenvolver e aplicar tal atividade. Por isso, ao final desta dissertação o sentimento de conquista se estabelece. O esforço e a dedicação

[42] Contexts were defined as domains of reality disclosed to the learner in order to be mathematised. In the cases of location, story, project, and theme such domains are purposefully -- and sometimes artificially -- delimited by the teacher or developer, who wants the learner to reinvent certain processes and products of mathematising. [...] in all cases it should be kept in mind that context is not a mere garment clothing nude mathematics, and mathematising is quite another thing than simply unbuttoning this garment. Or, to give a former metaphor a new twist: Viewing context as noise, apt to disturb the clear mathematical message, is wrong; the context itself is the message, and mathematics a means of decoding.

deram frutos, pois conseguimos aplicar nossos estudos e obter resultados significativos.

Por mais que tenhamos estudado muito de Freudenthal e de outros(as) pesquisadores(as) da Educação Matemática Realística, ainda há muito o que estudar, as ideias desenvolvidas são complexas. Ainda assim, conseguimos explorar e apresentar aqui ideias estruturadas da RME que, esperamos, possam contribuir com a formação de professores(as) e quiçá transformá-los(as), como aconteceu conosco. Agora, com a base da RME estabelecida na minha prática, meus desafios são de incorporá-la ainda mais. Como o próprio Freudenthal disse:

> Aos educadores cabe a tarefa de ajudá-los {os alunos}, não prescrevendo, mas permitindo-lhes que reinventem a matemática que devem aprender. Concordo que isso está longe de ser fácil, mas é ainda mais difícil entender adequadamente em que profundidade e por quê. A primeira coisa e a mais importante é tomar consciência desse desafio e preparar-se para enfrentá-lo, assim como preparar aqueles que se quer guiar no caminho da orientação dos seus guiados. A “formação de professores” nos dará a oportunidade de retomar esta questão (ainda que enredada com o problema de reinventar a didática pela didatização) mas enquanto isso posso dizer que o bom senso e a reinvenção guiada da matemática irão novamente pavimentar o caminho para a resposta (FREUDENTHAL, 2002, p. 48, tradução nossa).[43]

[43] Educators are charged with the task of helping them, not by prescribing but by allowing them to reinvent the mathematics they should learn. I agree this is far from easy, yet it is even more difficult to properly understand how far and why. The first and foremost thing is to become aware of this challenge and to prepare oneself to meet it as well as preparing those one wants to guide on the way of guiding their guided ones. “Teacher training” will give us the opportunity to resume this question (albeit entangled with the problem of reinventing didactics by didactising) but in the mean time I can say that common sense and guided reinvention of mathematics will again pave the road to the answer.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONINI, Adair; DRUCK, Iole de Freitas; BARRA, Eduardo Salles de Oliveira (organizadores). **Direitos à aprendizagem e ao desenvolvimento na educação básica:** subsídios ao currículo nacional. Pré-print 2018. Disponível em: https://hdl.handle.net/1884/55911. Acesso em: 24 maio 2023.

BRASIL**.** Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**.

CIANI, Andréia Büttner. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2011. 166 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013

COSTA, Newton Carneiro Affonso da. **Introdução aos fundamentos da matemática.** 2. Ed. São Paulo: HUCITEC, 1977.

FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. **Enunciados de Tarefas de Matemática: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística.** 2013. Tese (Programa de PósGraduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FERREIRA, Pamela, BURIASCO, Regina. **Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e aprendizagem**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.1, pp. 237-252, 2016.

FREUDENTHAL, Hans. **Why to teach mathematics so as to be useful.** Educational Studies in Mathematics, 1968.

______. **Perspectivas da Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar, 1975

______. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

______. **Revisiting Mathematics Education.** New York, Boston, Dordrecht, London, Mocow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

______. **Mathematics education in the Netherlands: A guided tour**. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University, 2000.

______. **Realistic Mathematics Education: work in progress.** In: LIN, F. L. (Ed.) Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, P. 1-43. November 2001.

______. **Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way!** In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). *Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Fremantle: MERGA. 2010.

IMENES, L. M., MATEMÁTICA: Imenes & Lellis, 6º ao 9º ano: guia do professor. -–1. Ed. — São Paulo: Moderna, 2010.

LOPES, Antonio José, **Analisis y caracteristicas del potencial cognitivo producciones escolares matematicas con alumnos de 11 a 14 años.** 2016. Tesis presentada para obtener el título de Doctor por la Universitat Autònoma de Barcelona, Facultat d' Educació. Barcelona, 2016.

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F., **MacTutor History of Mathematics**, 2000.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho. **Matematização: estudo de um processo.** 2014. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

TREVISAN, André; BURIASCO, Regina. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o Ensino e a Avaliação em Matemática. **REVEMAT- Revista Eletrônica de Matemática,** v. 10 n. 2, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n2p167. Acesso em: maio de 2023.

Apêndice

Atividades realizadas no tema de Consumo de água

Projeto sobre o consumo de água – Atividade inicial

Observe as unidades de medidas dos valores destacados nos trechos abaixo

Na Região Metropolitana o sistema de abastecimento é integrado, já que existem 8 grandes complexos responsáveis pela produção de **65 mil litros de água por segundo**. São eles: Alto Cotia, Baixo Cotia, Alto Tietê, Cantareira, Guarapiranga, Ribeirão da Estiva, Rio Claro e Rio Grande.[44]

A Sabesp monitora e preserva mais de **44 mil hectares**, o equivalente a quase 200 parques do Ibirapuera. São **9 mil hectares** de espelho d´água e **35 mil hectares** de área no entorno dos mananciais que abastecem os sistemas produtores de água Rio Claro, Alto Cotia, Guarapiranga, Alto Tietê e Cantareira.[45]
O Cantareira abastece 8,24 milhões de pessoas que moram em cidades da região metropolitana de São Paulo. Trata-se do principal manancial operado pela Sabesp, com **982 bilhões de litros** de água de volume útil.[46]

Isso acontece porque desde 2017 as chuvas nas cabeceiras dos rios que abastecem o sistema têm ficado abaixo dos **1,5 mil milímetros** anuais, média histórica antes da crise hídrica. Em 2020, choveu 23,2% menos do que o esperado.[47]

Na comparação do primeiro trimestre, em 2018 a Grande SP consumiu **34 milhões de metros cúbicos**, 15,4% a mais do que no mesmo período de 2015.[48]
O volume total de água armazenada, considerando todos os reservatórios que abastecem a região metropolitana de São Paulo nesta quarta-feira (31), é menor do que o do ano passado e em 2013, de acordo com dados da Sabesp:[49]

- 2021: **1.158,04 hm³**;
- 2020: **1.488,39 hm³**;
- 2013: **1.237,96 hm³**.

[44] http://site.sabesp.com.br/site/interna/Default.aspx?secaoId=590
[45] http://site.sabesp.com.br/site/interna/Default.aspx?secaoId=31
[46] https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2018/08/03/cantareira-perde-11-bilhao-de-litros-de-agua-por-dia-desde-abril.ghtml
[47] https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2021-02/falta-de-chuvas-pressiona-sistema-cantareira-em-sao-paulo
[48] **Por Bárbara Muniz Vieira, Léo Arcoverde e Tulio Kruze, G1 SP e GloboNews** — São Paulo 31/07/2018 06h00 Atualizado há 3 anos

[49] https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2021/04/01/volume-de-chuva-no-cantareira-no-1o-trimestre-de-2021-e-menor-do-que-no-periodo-anterior-a-crise-hidrica-em-2013-especialista-ve-risco-de-seca.ghtml

Roteiro de estudos sobre o consumo de água

1) Escreva a vazão encontrada e preencha as duas primeiras colunas da tabela com os dados coletados sobre os tempos gastos nos banhos. Em seguida, transforme o tempo de minutos e segundos para minutos, terceira coluna e calcule a quantidade de litros gastos em cada banho, quarta coluna.

Vazão do chuveiro:_______

Dia	Tempo gasto no banho (min e seg)	Tempo gasto no banho (min)	Litros gastos

2) Construa um gráfico de litros gastos em banhos por dia, na folha quadriculada em anexo.

Use a sua pesquisa como base para responder às questões abaixo:

3) Quantos litros de água você gastou nesta semana com seus banhos?

4) Calcule a média aritmética do seu consumo diário de água em banhos nesta semana. Compartilhe a média obtida com a professora e ao final compare com a média da turma.

5) Quantas pessoas vivem na sua casa? Estime quantos litros de água, todos vocês gastam com banhos em um mês, considerando a sua média de litros de água gastos por dia.

6) O quadro abaixo traz informações sobre o consumo de água em algumas ações domésticas retiradas do site da Sabesp.

- **Ao escovar os dentes:**

Se uma pessoa escova os dentes em 5 minutos com a torneira não muito aberta, gasta 12 litros de água. No entanto, se molhar a escova e fechar a torneira enquanto escova os dentes e, ainda, enxaguar a boca com um copo de água, consegue economizar mais de 11,5 litros de água

- **Ao lavar o rosto:**

Ao lavar o rosto em 1 minuto, com a torneira meio aberta, uma pessoa gasta 2,5 litros de água. A dica é não demorar!

O mesmo vale para o barbear: em 5 minutos gastam-se 12 litros de água. Com a economia, o consumo cai para 2 a 3 litros. A redução é de 10 litros de água, suficiente para manter-se hidratado por pelo menos 5 dias!

- **Ao dar descarga:**

O vaso sanitário não deve ser usado como lixeira ou cinzeiro e nunca deve ser utilizado à toa, pois gasta muita água. Deve-se também evitar jogar papel higiênico no vaso sanitário, tanto para evitar uma demanda maior de água, como para evitar entupimentos.

Um vaso sanitário com válvula e tempo de acionamento de 6 segundos gasta cerca de 12 litros. Quando a válvula está defeituosa, pode chegar a gastar até 30 litros. Por esta razão, deve-se manter a válvula da descarga sempre regulada, consertando-se os vazamentos assim que forem notados.

Faça uma estimativa dos gastos de água diária das ações levantadas no texto. Crie uma tabela para organizar suas informações, em seguida calcule o seu consumo de água diário com essas ações, não esqueça os valores gastos em banhos, calculado anteriormente.

7) “De acordo com a Organização das Nações Unidas, cada pessoa necessita de 3,3 mil litros de água por mês (cerca de 110 litros de água por dia para atender às necessidades de consumo e higiene). No entanto, no Brasil, o consumo por pessoa pode chegar a mais de 200 litros/dia.” (Sabesp, 2021)

A quantidade de água que você consome diariamente está dentro do recomendado pela ONU?

- Se sim, detalhe suas ações.
- Se não, o que você poderia fazer para aproximar o seu consumo do consumo recomendado?