Sequências e séries geométricas no Ensino Médio

uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski

Rodrigo Martins Lopes

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Vera Helena Giusti de Souza

2023

Sequências e séries geométricas no Ensino Médio

uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski

Rodrigo Martins Lopes

Esta é a versão original da Dissertação elaborada pelo candidato Rodrigo Martins Lopes, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Dedicatória

Dedico aos meus amados pais, a minha orientadora e a todos os meus queridos professores, sem os quais não teria conseguido concluir esta difícil tarefa. Vocês foram fundamentais nesta conquista.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que fez com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudos.

Aos meus pais, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Às pessoas com quem convivi ao longo desses anos de curso, que me incentivaram e que certamente tiveram impacto na minha formação acadêmica.

Agradeço a minha orientadora Drª Vera Helena Giusti de Souza, pelas orientações, pela paciência e por abraçar essa proposta, ajudando-me a concluí-la.

Ao meu grande amigo José Carlos Breviglieri, pois me incentivou e me ajudou muito no começo de minha jornada acadêmica.

Aos meus amigos Fernando Lima e Dayane Ferreira Santos, pelo apoio, sugestões e por me acompanharem nessa trajetória.

Agradeço a todos que participaram das atividades, alunos e professores.

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo .”

(Galileu Galilei)

Resumo

Lopes, R. M. **Sequências e séries geométricas no Ensino Médio: uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 2023.

Pesquisas mostram que o uso de vários sistemas de representação semiótica em sequências e séries, na Educação Básica, enriquece o aprendizado em Matemática, e que é preciso desenvolver aspectos intuitivos que favoreçam processos de generalização. Compreender, discriminar e saber usar diferentes registros não é espontâneo e precisa ser trabalhado pelo professor em sala de aula, de forma complementar ao livro didático. Como objetivos desta pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, tem-se: identificar se os participantes desenvolvem "bons" aspectos intuitivos; se inter-relacionam aspectos intuitivos, algorítmicos e formais; quais dificuldades nos processos de conversão e tratamento de diferentes registros de representação semiótica em sequências e séries geométricas e quais concepções de infinito podem ser identificadas nas respostas obtidas. Espera-se responder três questões: "Uma abordagem de ensino baseada em vários registros de representação semiótica favorece a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais em sequências e séries geométricas?","Quais concepções de infinito emergem nas respostas dos participantes em sequências e séries geométricas?" e "Quais as dificuldades explicitadas pelos participantes nos processos de tratamento e conversão de sequências e séries geométricas?". Foram elaboradas duas propostas de ensino, baseadas no Triângulo de Sierpinski, e a primeira delas foi aplicada a sete estudantes de 2ª série do Ensino Médio brasileiro e a um grupo de 13 professores e licenciados, cuja análise consta neste texto. Como produto final esperado de um Mestrado Profissional, deixam-se as atividades propostas e reelaboradas, para uso do professor de Matemática da Educação Básica, com elementos que consideramos interessantes para o ensino de sequências e séries geométricas e também para um trabalho com concepções de infinito que aparecem no assunto.

Palavras-chave: Representações semióticas, aspectos formais, aspectos intuitivos, aspectos algorítmicos, dobradura , Triângulo de Sierpinki

Abstract

Lopes, R. M. **Sequências e séries geométricas no Ensino Médio: uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 2023.

Research shows that using several systems of semiotic representation in sequences and series, in Basic Education, enriches Mathematics learning, and it is needed to develop intuitive aspects which allows generalization processes. Understanding, discriminating and knowing how to use different registers is not spontaneous and needs to be worked on by Mathematics teachers in classroom, in a complementary form to the textbook. For this reason, research theme of this Professional Master's Dissertation in Mathematics Teaching is to identify if the participants evolve "good" intuitive aspects and interrelate intuitive, algorithmic and formal aspects. Also, which difficulties they have in conversion and treatment processes of different semiotic representation registers used in geometric sequences and series and which conceptions of infinity may be identified in the answers given to the proposed activities. It is expected to answer three questions: "Does a teaching approach based on several registers of semiotic representation favor the interaction of algorithmic, intuitive and formal aspects in geometric sequences and series?", "What conceptions of infinity emerge in participants' responses in sequences and geometric series?" and "What are the difficulties explained by the participants in the processes of processing and converting geometric sequences and series?". Three teaching proposals were elaborated, based on Sierpinski Triangle, and the first of them was applied to seven Brazilian High School students and to a group of 13 teachers and graduates, whose analysis is included in this text. As an expected final product of a Professional Master's Degree, the activities proposed, and redesigned, for using by Mathematics teachers in Basic Education is left, with elements that may be considered interesting for teaching geometric sequences and series and also for working with infinite conceptions that appear in the subject.

keywords: Semiotic representation, formal aspect, intuitive aspect, algorithmic aspect, paper folding, Sierpinski Triangle

Sequências e séries geométricas no Ensino Médio

uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski

a ser apresentado à CPG para a dissertação

Rodrigo Martins Lopes

Lista de figuras

Figura 1: Abordagem de dízimas periódicas no caderno do aluno Currículo em Ação 30
Figura 2: Abordagem de dízimas periódicas na Avaliação da Aprendizagem em Processo 31
Figura 3: Coordenação de vários registros de representação semiótica 36
Figura 4: Subdivisão de um semicírculo 44
Figura 5: Subdivisão de um seguimento (série geométrica convergente) 45
Figura 6 - Triângulo equilátero Etapa 0 50
Figura 7 - Processo de construção do Triângulo de Sierpinski 51
Figura 8 - Figura geradora 51
Figura 9 - Figura geradora Etapa 1 52
Figura 10 - Triângulo da Etapa 2 52
Figura 11 - Triângulo da Etapa 3 53
Figura 12 - Quatro primeiras etapas do Triângulo de Sierpinski 70
Figura 13 - Tela inicial GeoGebra Classic 5 73
Figura 14 - Triângulo equilátero 73
Figura 15: Cor do triângulo Equilátero (etapa 0 da tabela 3 e 4) 74
Figura 16 - Pontos médios D, E F 74
Figura 17 - Triângulo DEF (etapa 1 da tabela e tabela 3 e 4) 75
Figura 18 - Criar uma ferramenta 76
Figura 19 - Objetos iniciais 76
Figura 20 - Nome para a ferramenta 77
Figura 21 - Ícone da nova ferramenta 77
Figura 22 - Criando o Triângulo de Sierpinski 78
Figura 23 - Esconder os Pontos e seguimentos 79
Figura 24 - Triângulo de Sierpinski (etapa 4 da tabela 3 e 4) 79

Lista de quadros

QUADRO 1: ANÁLISE DE CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA DA CONVERSÃO ENVOLVIDA NA SÉRIE GEOMÉTRICA 39

QUADRO 2: HABILIDADES E COMPETÊNCIAS A SEREM ALCANÇADAS BNCC (2017)..................47

QUADRO 3 - QUESTIONÁRIO 1 - TRIÂNGULOS COLORIDOS 66

QUADRO 4 – QUESTIONÁRIO 2 - ESTUDO DO PERÍMETRO (TRIÂNGULOS COLORIDOS TABELA 2) 68

QUADRO 5 – QUESTIONÁRIO 3 - ESTUDO DA ÁREA (TRIÂNGULOS COLORIDOS)..........................85

QUADRO 6 – QUESTIONÁRIO 4 - ESTUDO DO PERÍMETRO (TRIÂNGULOS COLORIDOS TABELA 2) 86

QUADRO 7: – F.P1 – FOTOS DA DOBRADURA E DA TABELA 1 PREENCHIDA POR P1...................97

QUADRO 8: - C.P1 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P1 PARA A TABELA 1.......................98

QUADRO 9: - Q.P1 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P1 PARA O QUESTIONÁRIO 99

QUADRO 10: - F.P2 - FOTOS DA DOBRADURA E DA TABELA 1 PREENCHIDA POR P2................101

QUADRO 11:- C.P2 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P2 PARA A TABELA 1 102

QUADRO 12: - Q.P2 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P2 PARA O QUESTIONÁRIO...........103

QUADRO 13:- F.P3 - FOTOS DA DOBRADURA E DA TABELA 1 PREENCHIDA POR P3.................105

QUADRO 14:- C.P3 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P3 PARA A TABELA 1 106

QUADRO 15: - Q.P3 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P3 PARA O QUESTIONÁRIO...........107

QUADRO 16: - F.P4 - FOTOS DA DOBRADURA E DA TABELA 1 PREENCHIDA POR P4................109

QUADRO 17: - C.P4 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P4 PARA A TABELA 1...................110

QUADRO 18: - Q.P4 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P4 PARA O QUESTIONÁRIO...........111

QUADRO 19: - F.P5 - FOTOS DA DOBRADURA E DA TABELA 1 PREENCHIDA POR P5................113

QUADRO 20: - C.P5 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P5 PARA A TABELA 1...................114

QUADRO 21: - Q.P5 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P5 PARA O QUESTIONÁRIO...........115

QUADRO 22: - F.P6 - FOTOS DA DOBRADURA E DA TABELA 1 PREENCHIDA POR P6................117

QUADRO 23: - C.P6 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P6 PARA A TABELA 1...................118

QUADRO 24: - Q.P6 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P6 PARA O QUESTIONÁRIO...........119

QUADRO 25: - F.P7 - FOTOS DA DOBRADURA E DA TABELA 1 PREENCHIDA POR P7................121

QUADRO 26: - C.P7 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P7 PARA A TABELA 1...................122

QUADRO 27: - Q.P7 - CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS DE P7 PARA O QUESTIONÁRIO...........123

QUADRO 28: - QUANTIFICAÇÃO DAS RESPOSTAS DOS PARTICIPANTES À TABELA 1 - ALUNOS .125

QUADRO 29: - F.G1 - FOTO DA DOBRADURA FEITA PELO GRUPO G1.......................................132

QUADRO 30 - T.A1: FOTO DA TABELA 1 PREENCHIDA POR A1 133

QUADRO 31 - T.A2 - FOTO DA TABELA 1 PREENCHIDA POR A2 134

Quadro 32 - C.A1 - Categorização das respostas de A1 para a Tabela 1 135
Quadro 33 - C.A2 - Categorização das respostas de A2 para a Tabela 1 136
Quadro 34 - F.G2 - Foto da dobradura feita pelo grupo G2.. 137
Quadro 35 - T.A3 - Foto da Tabela 1 preenchida por A3 138
Quadro 36 - T.A4 - Foto da Tabela 1 preenchida por A4 139
Quadro 37 - C.A3 - Categorização das respostas de A3 para a Tabela 1 140
Quadro 38 - C.A4 - Categorização das respostas de A4 para a Tabela 1 141
Quadro 39 - F.G3 - Foto da dobradura de G3.. 142
Quadro 40 - T.A5 - Foto da Tabela 1 preenchida por A5 143
Quadro 41 - T.A6 - Foto da Tabela 1 preenchida por A6 144
Quadro 42 - C.A5 - Categorização das respostas de A5 para a Tabela 1 145
Quadro 43 - C.A6 - Categorização das respostas de A6 para a Tabela 1 146
Quadro 44 - Quantificação das respostas à Tabela 1 – licenciandos e professores 147
Quadro 45 - Comparativo das respostas à Tabela 1 – alunos, professores licenciandos 150

Lista de tabelas

TABELA 1 - ESTUDO DA ÁREA - TRIÂNGULOS COLORIDOS...54
TABELA 2 - ESTUDO DO PERÍMETRO - TRIÂNGULOS COLORIDOS 62
TABELA 3 - ESTUDO DA ÁREA COLORIDA - TRIÂNGULOS PINTADOS..80
TABELA 4 - ESTUDO DO PERÍMETRO - TRIÂNGULOS PRETOS...84

Lista de abreviações

AAP - Avaliação da Aprendizagem em Processo

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

IME-USP - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

MPEM - Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

PIBID - Programa institucional de Bolsa de Iniciação à Docência

PCN+ - Parâmetros Curriculares Nacionais + do Ensino Médio

SEESP - Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

Sumário

INTRODUÇÃO

1. JUSTIFICATIVA 24

1.1. QUESTÕES DE PESQUISA 32

1.2. OBJETIVOS 32

2. QUADRO TEÓRICO 34

2.1. CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 34

2.1.1. O fenômeno da não congruência 38

2.1.1.1. O fenômeno da não congruência nas séries geométricas 38

2.2. ASPECTOS ALGORÍTMICOS, INTUITIVOS E FORMAIS 41

2.3. CONCEPÇÕES DE INFINITO POTENCIAL E INFINITO REAL SOB A PERSPECTIVA DE FISCHBEIN (1994) E FISCHBEIN, TIROSH E MELAMED (1981) 43

3. AS ATIVIDADES 47

3.1. HABILIDADES E COMPETÊNCIAS BNCC (2017) 47

3.2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 48

3.3. ATIVIDADE 1 – SEQUÊNCIAS E SÉRIES GEOMÉTRICAS: CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI POR MEIO DE DOBRADURAS EM PAPEL A1 SULFITE 90G 49

3.3.1. Fase 1 - dobradura 49

3.3.1.1. Processo de construção da dobradura 50

3.3.2. Fase 2 – estudos da área e do perímetro do Triângulo de Sierpinski 53

3.3.2.1. Preenchimento da Tabela 1 da Fase 2 - Estudo da área colorida 53

3.3.2.2. Preenchimento da Tabela 2 da Fase 2 - Estudo do perímetro 61

3.3.3. Fase 3 – Questionários investigativos 66

3.3.3.1. Fase 3 – Questionário 1 investigativo da tabela 1 – estudo da área 66

3.3.3.2. Fase 3 – Questionário 2 investigativo da tabela 2 – estudo do perímetro 68

3.4. ATIVIDADE 2 – SEQUÊNCIA E PROGRESSÕES: CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI POR MEIO DO GEOGEBRA (GEOGEBRA CLASSIC 5, GEOGEBRA CLASSIC 6 E GEOGEBRA ONLINE) 70

3.4.1. Fase 1 – Construção do Triângulo de Sierpinski por meio do GeoGebra Classic 5 71

3.4.1.1. Processo de construção no GeoGebra Classic 5 72

3.4.2. Fase 2 – estudos da área e do perímetro do Triângulo de Sierpinski 79
3.4.2.1. Preenchimento da Tabela 3 da Fase 2 - Estudo da área colorida 80
3.4.2.2. Preenchimento da Tabela 4 da Fase 2 - estudo do perímetro 84
3.4.3. Fase 3 – Questionários investigativos 85
3.4.3.1. Questionário 3 investigativo da tabela 3 – estudo da área............................85
3.4.3.2. Questionário 4 investigativo da tabela 4 – estudo do perímetro..................86
3.5. RELAÇÃO CONTRAINTUITIVA EXISTENTE NA ÁREA HACHURADA E NO PERÍMETRO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI (ATIVIDADES 1 E 2) 87
3.6. ANÁLISE DIDÁTICA DAS ATIVIDADES 1,2 E 3...88
3.6.1. Justificativa 89
3.6.2. Objetivo das atividades propostas 90
3.7. AÇÕES ESPERADAS EM CADA FASE 91
4. RELATO DA APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1 COM UM GRUPO DE SETE ESTUDANTES DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO 94
4.1. RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1 94
4.1.1. Análise das respostas dadas nas tabelas 1 e às questões do questionário investigativo...95
4.1.1.1. Análise das respostas do participante P1 97
4.1.1.2. Análise das respostas do participante P2 101
4.1.1.3. Análise das respostas do participante P3 105
4.1.1.4. Análise das respostas do participante P4 109
4.1.1.5. Análise das respostas do participante P5 113
4.1.1.6. Análise das respostas do participante P6 117
4.1.1.7. Análise das respostas do participante P7 121
4.1.2. Algumas conclusões, baseadas na análise das respostas dadas nas tabelas 1 e às questões do questionário investigativo 125
5. RELATO DA APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1 COM UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E ESTUDANTES DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA..130
5.1. RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1 130
5.1.1. Análise das respostas dadas nas tabelas 1 por 4 professores e 2 licenciandos ...131
5.1.1.1. Análise das respostas do grupo G1...132
5.1.1.2. Análise das respostas do grupo G2...137

5.1.1.3. Análise das respostas do grupo G3 142
5.1.2. Algumas conclusões, baseadas na análise das respostas dos professores e licenciandos dadas nas tabelas 1 147
6. COMPARATIVO ENTRE A QUANTIFICAÇÃO DAS RESPOSTAS – ALUNOS E PROFESSORES 150
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS 152

INTRODUÇÃO

Ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática, fui confrontado com alguns tópicos abordados na grade curricular do curso que mostraram um alto grau de dificuldade para mim e para os colegas de classe, em especial sequências e séries em Cálculo III. E, mesmo que tenhamos sido aprovados em Cálculo I e II, apresentávamos dificuldade em compreender as ideias de infinito implícitas nas séries, por exemplo a "convergência" de uma adição com "infinitas" parcelas.

Como bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) durante dois anos na *Escola Estadual Anhanguera*, São Paulo – Lapa, fiz estágio com observação na Escola Estadual Professor Miguel Sansigolo, São Paulo – SP e pude lançar meu olhar sobre interações desenvolvidas em salas de aulas das séries iniciais do Ensino Fundamental II e no Ensino Médio de escolas públicas estaduais. Em todas essas instâncias, observei que o trabalho realizado em torno da aprendizagem de Matemática centrava-se, quase que em sua totalidade, em uma proposta de ensino meramente transmissivo, limitada a levar o aluno a memorizar e reproduzir conceitos e regras prontas. Ao acompanhar algumas turmas de 1ª série do Ensino Médio, que estavam no tópico de sequências e progressões (PA e PG), pude perceber as diversas aplicações de fórmulas que eram impostas aos estudantes.

Ainda na graduação, tive contato com diversas teorias sobre o ensino de Matemática. Umas dessas teorias, a dos Registros de Representação Semiótica, proposta pelo pesquisador francês Raymond Duval, possibilitou-me uma reflexão sobre a importância de utilizar diferentes registros de representação para a compreensão de um objeto matemático. Concluída a licenciatura no primeiro semestre de 2018, fiz um curso de extensão na universidade Federal de Santo André com o título "Padrões e regularidades na matemática escolar: explorando números, álgebra e geometria", endereçado para professores da Educação Básica, no qual foram desenvolvidas atividades variadas sobre números figurados, que são aqueles que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Se o arranjo formar um polígono regular, estes números chamam-se números poligonais, entre os quais se destacam os números triangulares, quadrados e hexagonais. Foi então que comecei a compreender a importância das diversas formas de representação na matemática e o que cada uma delas poderia contribuir para a compreensão conceitual de um objeto matemático. E, claro, a importância de um trabalho desse tipo em sala de aula da Educação Básica.

Refletindo sobre essas dificuldades, encontradas tanto no Ensino Superior como na Educação Básica, surgiram algumas perguntas: “Será que na Educação Básica faltou algo que poderia ter contribuído para que pudéssemos compreender os conceitos de infinito e de convergência?” “Não estão presentes no conteúdo as adições com infinitas parcelas e a convergência?” “Se séries geométricas estão presentes na Educação Básica, no estudo de progressões geométricas com razão $0 < |q| < 1$, por que o estranhamento com questões relacionadas às ideias de infinito?”, “Como abordar temas complexos com os estudantes, longe da mera exposição de fórmulas, mais próxima de uma compreensão conceitual e significativa, com atividades interessantes?”, “Como abordar o infinito e algumas de suas diferentes representações, de modo que estudantes possam compreender conceitos implícitos em fórmulas?”.

Como uma prova disso, cito minha experiência como atual professor de Matemática em uma escola estadual do Estado de São Paulo. Ao ministrar aulas em turmas de 8º e 9º anos, observei que nos materiais didáticos desenvolvidos para apoiar os professores, como a apostila Currículo em Ação (ver observações no capítulo 1, Justificativa), proposto semestralmente pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e nas avaliações externas - por exemplo nas provas da Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP), propostas pela SEESP bimestralmente até 2022, pois a partir de 2023 passou a se chamar Prova Paulista (ver mais considerações no capítulo 1, Justificativa) - os estudantes são constantemente “convidados” a mostrar que sabem converter uma dízima periódica em uma fração geratriz. Em conversa com os alunos, pude observar que a forma como é apresentada essa conversão é apoiada em fórmulas e regras a serem memorizadas, sem uma discussão sobre o objeto matemático e que a maioria deles não compreendia o real significado desse objeto.

Também pude presenciar dificuldades dos estudantes em compreender as ideias de infinito em dízimas periódicas, pois formas diferentes de representar um mesmo objeto matemático podem auxiliar a compreensão, ou não, do verdadeiro significado do objeto matemático apresentado. Por exemplo, ao darmos a dízima $0{,}999\ldots$ para dois estudantes distintos (I e II), conforme descrevemos a seguir, podemos ter significados diferentes para cada um deles, e isso pode depender do modo como a apresentamos, gerando, como consequência, diferentes concepções.

- Estudante I:

$$0{,}999\ldots=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots \quad\rightarrow\quad S_{\infty}=\frac{a_1}{1-q} \quad\rightarrow\quad S_{\infty}=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

Neste caso, recorremos ao estudo das progressões geométricas e, como a razão é $0<|q|<1$, podemos calcular o valor numérico que representa a soma infinita, por meio do limite da soma, e mostrar ao estudante que o valor numérico da dízima $0{,}999\ldots$ é igual a 1, apenas se somarmos as infinitas parcelas, por exemplo, recorrendo à representação na reta numérica. Caso contrário, por maior que seja o número de parcelas somadas, o valor dessa soma nunca será 1, mas se aproxima de 1. Como resultado, a adição das infinitas parcelas fracionárias, nessa ordem, é o que chamamos de série geométrica e a dízima periódica pode ser interpretada como uma série geométrica.

Isso justifica, no nosso entender, que as dízimas periódicas podem (e devem) ser exploradas como séries, chamadas séries geométricas, e/ou com a representação decimal, que tem “infinitas” casas decimais. Em ambos os casos, temos duas noções de “infinito”, pois como mostramos no exemplo acima, podemos escrever $0{,}999\ldots=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$, e discutir com os estudantes o significado dos três pontinhos em cada uma das representações. No primeiro caso ($0{,}999\ldots$), os três pontinhos representam um processo infinito e, no segundo ($\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$), uma “adição” com infinitas parcelas. Posto isto, nos indagamos se estudantes compreendem o verdadeiro significado dessa conversão, o que está implícito na mudança de representação na igualdade acima e se compreendem a diferença entre as duas representações, no caso, decimal e fracionária e as ideias de infinito, tanto na convergência como na adição de infinitas parcelas.

- Para o estudante II, sob outra perspectiva, cobrada nas avaliações (AAP) e nos materiais de apoio (Currículo em Ação).

Chamando a dízima periódica $0{,}9999\ldots$ de **x**, então temos:

$$x=0{,}9999\ldots \qquad \text{(eq1)}$$

Conforme a quantidade de algarismos do período (no caso 999.. temos um algarismo) multiplica-se a dízima periódica por uma potência de base 10, por exemplo: 10, 100, 1000, 10.000, que tenha tantos zeros quantos são os algarismos do período. Assim, obtemos:

$$10x = 9{,}999\ldots \qquad \text{(eq2=10.eq1)}$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, temos:

$$x = 0{,}9999\ldots$$

$$\underline{10x = 9{,}999\ldots}$$

$$10x - x = (9{,}999\ldots) - (0{,}999\ldots) \qquad \text{(eq2) – (eq1)}$$

$$9x = 9$$

$$x = \frac{9}{9} = 1$$

Neste caso, é apresentado ao estudante um algoritmo para encontrar a fração geratriz, que dá uma outra representação da dízima periódica. Vale ressaltar que, ao aplicar esse algoritmo, estamos considerando que $0{,}9999\ldots$ é um número real, o que precisaria ficar explícito para os estudantes.

Em ambas as abordagens apresentadas, dos estudantes I e II, foram dadas justificativas diferentes para o mesmo objeto matemático/dízima e em ambas é possível encontrar a fração geratriz que representa a dízima periódica: para o estudante I, temos uma série geométrica envolvendo as ideias de infinito real e infinito potencial, em que a adição – infinito potencial - das infinitas parcelas $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$ tem uma soma finita, o número 1; para o estudante II, um algoritmo aritmético muito utilizado por professores na Educação Básica, muito cobrado em provas externas, como as AAP (ver figura 2), propostas pela SEESP bimestralmente. Esse algoritmo pode não fazer sentido para o estudante, além de esconder conceitos matemáticos ligados aos números reais, como vimos acima, pois deixa implícito no processo de resolução as ideias de infinito potencial e infinito real.

Tanto o estudante I como o II chegarão à resposta "correta", mas cada uma dessas representações tem significado distinto para uma mesma representação de um objeto matemático - dízima periódica - com aspectos algorítmicos, intuitivos e formais diferentes para os estudantes. É sempre mais cômodo para o professor de Matemática usar o método "axiomático" como abordagem de ensino de conceitos que exigem uma abstração dos estudantes que as "fórmulas" não apresentam. Há muitas propriedades matemáticas que podem ser investigadas em conteúdos da Educação Básica e que acabam passando despercebidas por nós professores, mas que poderiam ajudar os estudantes na compreensão de conceitos que podem ser complexos, com uma matemática cada vez mais próxima de uma compreensão conceitual e significativa, por meio de atividades interessantes.

Foi a partir de questões como essas que meu interesse pedagógico e didático por progressões e séries geométricas trouxe como objetivo estudar e pesquisar como abordar o trato do infinito e algumas de suas diferentes representações, pelo menos nesse assunto, a fim de compreender o que é uma convergência e o que é uma adição com infinitas parcelas. Se séries geométricas estão presentes e são trabalhadas na Educação Básica, não seria esperado os estudantes sentirem tanta "estranheza" em questões relacionadas às ideias de "adição" de infinitas parcelas, nem o fato dessa "adição" resultar numa "soma" finita, como é o caso das séries convergentes. Uma hipótese é que isso acontece porque são propostos apenas cálculos, com o simples uso de fórmulas e/ou tarefas repetitivas do gênero calcular e/ou determinar, com a mera aplicação de fórmulas, que não adquire sentido para o aluno.

No segundo semestre de 2018, ingressei no Mestrado Profissional do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (MPEM), do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) e juntamente com minha orientadora buscamos investigar o trato desses assuntos. No mestrado, visualizei a possibilidade de ampliar minha formação acadêmica por meio do desenvolvimento de uma pesquisa que tivesse como foco uma abordagem de Ensino de Matemática por meio da pluralidade de sistemas de representação de que a matemática dispõe para se comunicar. Procurar alternativas para tornar os resultados mais acessíveis aos estudantes, ou seja, buscar trabalhar os "resultados abstratos" de uma forma mais compreensível e por intermédio de uma teoria que nos ajudasse a atingir este objetivo. Interessa-me saber não só se os alunos aprendem a fazer cálculos, mas também se lhes são oferecidas oportunidades para que construam uma estrutura cognitiva sólida, com conhecimento sobre o uso, diga-se imprescindível, de diferentes registros de representação. O caminho percorrido nesse campo da semiótica, por meio da teoria de Duval.

Em conversas com minha orientadora, diante das experiências adquiridas na graduação, no curso de extensão e, especialmente, com as dificuldades dos estudantes de compreenderem certos conceitos matemáticos relacionados às ideias de infinito em sequências e séries geométricas, presentes em diferentes formas, decidimos por utilizar a Teoria das Representações Semióticas (DUVAL, 2009) em atividades para o ensino de sequências e séries geométricas no Ensino Médio, sobre a necessidade de o estudante conhecer e coordenar pelo menos dois sistemas de representação semiótica, com o objetivo de pesquisar uma forma de ensino que vá além da mera utilização de fórmulas e para que o estudante possa compreender e apreender o real significado por trás do conteúdo.

Em meio às leituras para busca de apreensão da teoria mencionada, redefini os objetivos da pesquisa, pois algumas indagações tornaram-se centrais para o desenvolvimento dela, a saber: "Uma abordagem de ensino baseada em vários registros de representação semiótica favorece a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais em sequências e séries geométricas?" "Quais concepções de infinito emergem nas respostas dos participantes em sequências e séries geométricas?" e "Quais as dificuldades explicitadas pelos participantes nos processos de tratamento e conversão de sequências e séries geométricas?".

No que segue, descrevemos a estrutura geral do trabalho, que está dividido em sete capítulos, conforme descrevemos a seguir.

Apresentamos no **capítulo 1** nossa justificativa, com o intuito de comprovar a importância do tema para a área de Educação Matemática.

O **capítulo 2** é dedicado à apresentação dos referenciais teóricos que compõem nosso trabalho. Apresentamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009) que defende a pluralidade do uso desses registros no ensino de Matemática. Os argumentos de Fischbein (1994) (ver Capítulo 5, pp. 238-345) sobre a importância da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais para a aprendizagem em Matemática. E as concepções de infinito que emergem no assunto, sob a perspectiva dada por Fischbein, Tirosh e Melamed (1981) (ver Capítulo 12, pág.491-512).

No **capítulo 3,** trazemos os procedimentos metodológicos que utilizamos com a aplicação da Atividade 1 e que também podem ser utilizados com o uso da Atividades 2, ambas baseadas no Triângulo de Sierpinski, desenvolvidas com base nas ideias de Duval (2009), e que deixamos como sugestão para o professor de Matemática da Educação Básica.

No **capítulo 4,** relatamos a aplicação da atividade 1 com um grupo de sete estudantes de 2ª série do Ensino Médio e a análise dos dados obtidos com essa aplicação.

No **capítulo 5,** relatamos a aplicação da atividade 1 com um grupo de onze professores de matemática e dois estudantes de um curso de licenciatura em matemática e a análise dos dados obtidos com essa aplicação.

No **capítulo 6,** apresentamos uma comparação entre a quantificação das respostas – alunos participantes e professores e licenciandos.

Por fim, no **capítulo 7,** nas considerações finais, trazemos nossas conclusões, as respostas às questões de pesquisa, obtidas a partir da análise dos dados apresentados nos capítulos 4, 5 e 6 e destacamos pontos importantes que se colocaram no desenvolvimento de nossa pesquisa.

1. JUSTIFICATIVA

O ensino de sequências e séries geométricas é parte do programa de Matemática da 1ª série do Ensino Médio em escolas públicas e privadas do Brasil, com o objetivo de mostrar uma forma de modelar fenômenos da natureza que apresentam regularidades e padrões, tanto no cotidiano como na Matemática, leis de formação (que nem sempre existem), situações que envolvem grandezas que sofrem variações, processos de contagem, o desenvolvimento de sistemas de numeração, fenômenos que variam exponencialmente (taxas de crescimento e de decrescimento), entre outros.

Os padrões e as regularidades encontradas em sequências e séries geométricas podem ser um ótimo caminho para um conhecimento mais profundo de Álgebra, da concepção do infinito e, sobretudo, do pensamento algébrico, pois, por meio de diferentes representações semióticas, é possível explorar as ideias de infinito envolvidas no trato do assunto. Para isso, é necessário que os alunos tenham contato com experiências que envolvam a análise de padrões e relações numéricas, diferentes representações e generalizações, por meio de diferentes processos.

Alguns autores, como Ponte, Branco e Matos (2009) defendem que, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, devemos trabalhar e explorar padrões e regularidades, para que assim possamos "desenvolver o pensamento algébrico nos alunos". (PONTE et al., 2009, p. 10). Para Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), em leitura obrigatória sobre o assunto, o pensamento algébrico pode se expressar por meio de várias linguagens:

> [...] não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p.88)

Além disso, defendem que o pensamento algébrico pode (e deve) ser desenvolvido aos poucos nos estudantes, antes da formalização da linguagem simbólica, porque uma introdução antecipada desta abstração pode ocasionar um empecilho à aprendizagem de álgebra e constituir um impedimento para o seu desenvolvimento. Para esses autores ainda, é importante que na educação básica "o objetivo fundamental a que se deve visar é o desenvolvimento da capacidade de perceber regularidades e de captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações-problemas, através do processo de generalização". (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p. 89).

Ao trabalhar com séries geométricas, deve-se discutir convergência e divergência de uma série geométrica por meio de exemplos com representações numéricas, algébricas, geométricas e gráficas. O estudo dos padrões em sequências e séries geométricas, como parte dos conteúdos de Álgebra e de Geometria, pode permitir o entendimento, a discriminação e o uso de diferentes sistemas de representação, dado que, ao tentar identificar padrões, o estudante faz observações e compreende conceitos e propriedades e ainda assume um papel fundamental na sua aprendizagem. Essa ligação permite ao professor explorar, com os diferentes registros de representação, desenvolver a interação de diferentes representações e trabalhar tratamentos e conversões.

É preciso que se explore no ensino de sequências e séries geométricas, os registros de representação, os padrões, as regularidades, os números e concepções de infinito. No caso das progressões e séries geométricas, deve-se trabalhar dízimas periódicas (ver apêndice G), fração geratriz, discutir convergência e divergência de uma série geométrica por meio de exemplos com representações numéricas, algébricas, geométricas e gráficas.

Em relação às séries geométricas, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais + do Ensino Médio (PCN+, 2002), no ensino dessa unidade recomenda-se que:

> O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno entender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. (BRASIL, 2002, p. 121).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais + do Ensino Médio (PCN+, 2002), sequências, progressões aritméticas e progressões geométricas, apresentadas de forma teórica e breve, apenas com exercícios e fórmulas, não fazem sentido algum aos alunos, que se limitam a decorar como responder às questões colocadas pelo professor. Deste modo, partimos da hipótese que a análise desse conteúdo torna-se importante para o professor tomar uma direção na sua prática de ensino em sala de aula; e que também seja uma opção de ensino para realizar suas atividades e contribuir para os processos de aprendizagem dos estudantes. Além disso, permite também que sejam desenvolvidas nos alunos as competências e habilidades matemáticas esperadas pela BNCC (2017).

Também encontramos as recomendações da competência 5 e habilidades implantadas pela BNCC (2017), relacionadas ao ensino de sequências e progressões, proposto para a 1º série do Ensino Médio. No ensino das progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), é necessário:

> EM13MAT508 -Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas[..]. EM13MAT509 - Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BRASIL,2017, p.529).

Segundo a BNCC (2017):

> [...] o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio[...] compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL,2017, p.529-531).

Além disso, no sentido de propor o trato de padrões e representações, encontramos:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas." (BRASIL,2017, p.531)

Conforme González-Martin (2009), uma das principais mudanças na transição do "cálculo" praticado no Ensino Médio para o universitário é a necessidade de trabalhar com limites ou com adições com infinitas parcelas, especialmente de sequências e/ou séries infinitas. Foram identificados por González-Martin (2009) e também por González-Martín, Nardi e Biza (2011), duas dificuldades em relação ao conceito de soma infinita. O primeiro é a ideia intuitiva e natural de que a soma de infinitos termos deve ser infinita. O segundo é a concepção de que um processo infinito deve passar por cada etapa, uma após a outra, sem pular, o que leva ao conceito de infinito potencial.

Em relação às séries geométricas, em conformidade com Fischbein (1994), para um estudante do Ensino Médio (ou do Ensino Superior) aceitar que vale a igualdade $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$, ele precisa considerar o conjunto infinito de elementos da sequência em sua totalidade, ou seja, o infinito real (ver observações no capítulo 2, Quadro teórico). Fischbein (1994) relata um estudo feito por Vinner (1991) que, ao aplicar essa igualdade, com o intuito de definir o conceito de limite - após o ensino deste - com 15 estudantes superdotados do Ensino Médio, chegou aos seguintes resultados: soma = 2 (5,6%), soma = infinito (51,4%) e "a soma é menor que 2" ou "a soma tende a 2" (16,8%). Segundo Vinner (1991), os estudantes não consideram a totalidade das parcelas e consideram o infinito da sequência como potencial, isto é, "a soma tende a 2 ou a soma é menor do que 2" (grifos nossos) e assumem que pode ser realizado sem nunca parar, a mesma dificuldade apontada por González-Martín, Nardi e Biza (2011). Em concordância com Fischbein (1994), "Como se pode ver, apenas uma porcentagem muito pequena de alunos deu a resposta $(s = 2)$. A explicação é que, como mencionamos acima, o infinito real é contra intuitivo." (FISCHBEIN, 1994, p. 240, tradução nossa).[1]

Com isso, segundo ele, os estudantes esquecem facilmente e consideram o infinito da sequência como um infinito potencial "a soma tende a 2 ou a soma é menor do que 2" (grifos nossos), ou seja, potencialmente infinito, e assumem que pode ser realizado sem nunca parar, o mesmo obstáculo que também foi mencionado acima por González-Martín, Nardi e Biza (2011).

Fischbein (1994) menciona a dificuldade de compreensão dos estudantes em conversões de dízimas periódicas:

> Pedir a estudantes do ensino médio ou universitário que encontrasse o equivalente decimal de 1/3, eles descrevem de bom grado 1/3 = 0,333 ... Por outro lado, dificilmente aceitariam que 0,333 ... é igual a 1/3. Como no exemplo acima, a afirmação de que 0,333 ... tende a 1/3. Além disso, deve-se enfatizar o seguinte aspecto: Se um aluno aceita que 1/3 = 0,333 ..., deve aceitar também que 0,333 ... = 1/3: A relação de igualdade é simétrica. Na realidade, como foi mostrado (ver Kieran, 1981), o modelo tácito intuitivo associado ao sinal de igualdade é geralmente aquele

[1] *As one can see, only a very small percentage of students gave the correct answer (S = 2). The explanation is that, as we mentioned above, actual infinity is counterintuitive."* (FISCHBEIN, 1994, p. 240).

de um processo de entrada → saída que não é simétrico! ” (FISHBEIN, 2009, p. 240 “tradução nossa”).[2]

Skemp (1976) apresenta para discussão dois pontos de vista do entendimento matemático, o relacional e o instrumental . O entendimento relacional é aquele pelo qual o estudante é estimulado ao real entendimento e compreensão do que está estudando e desenvolve isso por meio de planos de ação ligados ao que ele já conhece. Essa forma de compreender a matemática não se apoia em fórmulas e regras a serem memorizadas, mas em compreender o objeto matemático. O entendimento instrumental, por outro lado, é o saber fazer; o estudante pode não ter clareza do que está envolvido e não compreender o real significado do objeto matemático estudado. “Eles aprendem isso instrumentalmente, como uma receita, sem nenhum porquê ou por quê.” (SKEMP, 1976, p. 24, “tradução nossa”).[3]

Ainda, segundo ele, o entendimento relacional é muito mais adaptável, pois o número de planos que podem ser derivados da mesma estrutura de conhecimento é maior do que o número de regras que podem ser memorizadas separadamente já que o entendimento relacional exige mais raciocínio e menos memorização. Em virtude de aprender por obrigação, ou seja, sem o propósito do real significado do aprendizado, o estudante se torna cada vez mais dependente de um professor que continue provendo regras e estratégias específicas para cada novo modelo de situação a ser trabalhada nas aulas de Matemática e, consequentemente, na vida profissional. Esses mecanismos instrumentais são apresentados sem o devido esclarecimento do “porquê”, por exemplo, para encontrar a fração geratriz de dízimas periódicas (sem explicitar o conceito de infinito envolvido), dentre outros.

Quina (2015), ao aplicar quatro atividades sobre sequências e séries, utilizando registros de representação semiótica, com alunos de 1ª série do Ensino Médio, buscou mostrar que o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica enriquece o aprendizado em Matemática; no entanto, relata que notou um alto grau de dificuldade nas atividades propostas, pois muitos

---

[2] *Asking high school or college students to find the decimal equivalent of 1/3, they willingly white 1/3=0.333... On the other hand, they would hardly accept that 0.333... equals 1/3. As In the above example, the claim that 0.333... tends to 1/3. We encounter here the same type of intuitive obstacle as above. In addition, one has to emphasize the following aspect: If a student accepts that 1/3 =0.333..., he or she should accept also that 0.333...= 1/3: The relation of equality is symmetrical. In reality, as it has been shown (see Kieran, 1981), the intutive, tacit model associated with the equality sign is usually that of na input→ ouput process that is not symmetrical! (FISHBEIN 2009, p. 240).*

[3] *They learn it instrumentally, like a recipe, with no why or why.*(SKEMP, 1976, p. 24).

não conseguiram fazer a conversão entre os registros e não compreenderam as ideias de infinito envolvidas. Portanto, concordamos com Duval (2012), que compreender os registros de representação não ocorre espontaneamente e que esse tema necessita ser explorado em sala de aula por meio de atividades que trabalhem diferentes tipos de registros, dos mais simples aos mais complexos.

Em relação ao desenvolvimento de atividades, é recomendável que:

> Nesta perspectiva, três tipos de atividade extremamente diferentes impõem-se (apresenta-se, aqui, uma caracterização bastante breve de cada uma delas): o primeiro tipo concerne à compreensão das representações semióticas; o segundo, a aprendizagem de tratamentos próprios de uma certa categoria de registros e; o terceiro tipo concerne ao modo de produção de representações complexas.[...] No entanto, é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. (DUVAL, 2012, pp. 270-285).

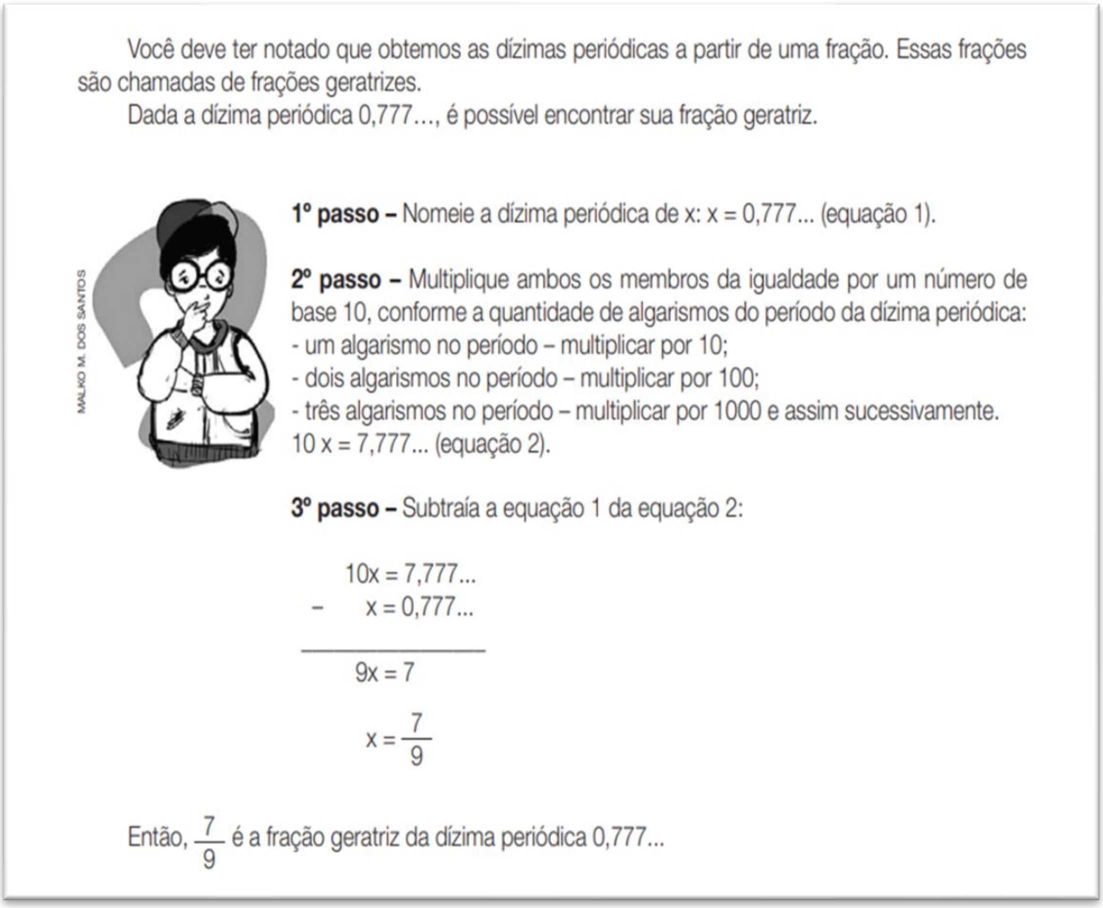
Para Duval (2012), na Educação Básica e até mesmo em cursos superiores, quando se envolvem diferentes sistemas de representação semiótica de um objeto matemático, os estudantes encontram dificuldades para compreender, espontaneamente, as mudanças de registros e tendem a confundir um objeto com suas representações; daí a importância de o professor trabalhar, em sala de aula, diferentes sistemas de representação e suas mudanças. Partindo da pesquisa de Diaz (2011), de que muitos professores de Matemática se baseiam essencialmente em livros didáticos, defendemos a ideia de que o ensino de sequências e séries geométricas precisa ir além desses livros, pois não pode ficar restrito às fórmulas e às manipulações algébricas de progressões aritméticas e progressões geométricas. Segundo Dias:

> [...] é fato, suficientemente constatado, que os professores utilizam este material como um recurso central do trabalho cotidiano em sala de aula. Na verdade, o relatório final do estudo do uso de livros didáticos (MINEDUC, 2010) afirma que, em nível geral, 81% dos professores utilizam o texto apresentado pelo Ministério e 58% declaram seu uso de maneira frequente, pode-se dizer que em quase todas as aulas. (DÍAZ, 2010, p. 615)

Posto isto, em relação aos materiais de apoio aos docentes, conforme mencionamos na introdução, vamos discorrer sobre um desses materiais didáticos desenvolvidos para apoiar os professores, no caso, os cadernos do aluno Currículo em Ação, os quais são propostos com base nas habilidades implementadas no currículo paulista - que contempla as competências gerais impostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – e sobre a avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP), aplicadas semestralmente para medir o índice de aprendizagem dos estudantes.

Os cadernos do aluno Currículo em Ação, propostos a partir de 2021 e utlizados atualmente, constituem um material de apoio ao Currículo Paulista de Matemática, e são propostos semestralmente pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Neles, são propostas diversas situações de aprendizagem, planejadas para contribuir com o desenvolvimento das competências e habilidades previstas no Currículo Paulista (e, portanto, da BNCC), com atividades para serem desenvolvidas pelos docentes da rede pública paulista em sala de aula, durante o ano letivo. Em um desses cadernos do aluno do Currículo em Ação, podemos ver como é proposto o trato do infinito em dízimas periódicas (ver figura 1).

Figura 1: Abordagem de dízimas periódicas no caderno do aluno Currículo em Ação



Você deve ter notado que obtemos as dízimas periódicas a partir de uma fração. Essas frações são chamadas de frações geratrizes.

Dada a dízima periódica 0,777..., é possível encontrar sua fração geratriz.

MALKO M. DOS SANTOS

1º passo – Nomeie a dízima periódica de x: x = 0,777... (equação 1).

2º passo – Multiplique ambos os membros da igualdade por um número de base 10, conforme a quantidade de algarismos do período da dízima periódica:
- um algarismo no período – multiplicar por 10;
- dois algarismos no período – multiplicar por 100;
- três algarismos no período – multiplicar por 1000 e assim sucessivamente.

10 x = 7,777... (equação 2).

3º passo – Subtraía a equação 1 da equação 2:

$$\begin{array}{rl} & 10x = 7,777... \\ - & x = 0,777... \\ \hline & 9x = 7 \\ & x = \dfrac{7}{9} \end{array}$$

Então, $\frac{7}{9}$ é a fração geratriz da dízima periódica 0,777...

Fonte: Caderno do aluno Currículo em Ação: Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas - 8º ano/volume 1. (São Paulo, 2021, pg. 46)

A imagem acima evidencia, no nosso entender, que, nos materiais de apoio propostos aos professores e estudantes, as dízimas periódicas não são exploradas como séries geométricas. Assim, nos indagamos se os estudantes compreendem o verdadeiro significado e se compreendem a diferença entre as duas representações, no caso, decimal e fracionária e se são exploradas as ideias de infinito no assunto. Em relação ao sistema de avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP), propostas pela SEESP até 2022, era um sistema de avaliação composta por questões (ver figura 2) de múltipla escolha, com o intuito de diagnosticar o nível de aprendizado dos estudantes matriculados na rede estadual, e auxiliar os docentes no desenvolvimento de ações pedagógicas. É importante destacarmos que nas AAP, essa cobrança permeia o Ensino, o que mostra que é importante o trato do assunto.

Figura 2: Abordagem de dízimas periódicas na Avaliação da Aprendizagem em Processo

Descrição da Habilidade	MP02 - Identificar a fração geratriz de uma dízima periódica e vice-versa.

Questão 3

A fração geratriz da dízima periódica 7,4343434... é:

(A) $\frac{736}{99}$

(B) $\frac{743}{99}$

(C) $\frac{736}{9}$

(D) $\frac{43}{9}$

Fonte: Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP (9º ano, 22ª edição)

De acordo com a Figura 2, podemos observar que assim como no caderno Currículo em Ação, o estudante é convidado a mostrar que sabe realizar a conversão entre dízima periódica e fração geratriz. Posto isto, temos certeza que se pode ir além de exercícios e fórmulas e escolher, ou desenvolver, um livro ou um material didático que não restrinja o tema Sequências e Séries geométricas a isso. Colocamos como desafio de nossa pesquisa iniciar o estudo do conteúdo com problemas e questões motivadoras e optar pelo ensino do tema com o uso de várias representações semióticas.

Assim, para nossa Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP, colocamos como meta deixar uma proposta para o professor de Matemática da Educação Básica, com elementos interessantes e aspectos importantes para o ensino de sequências e séries geométricas em sala de aula, de modo que isso enriqueça o planejamento do docente e ele possa ir além do que se propõe em alguns livros didáticos.

Para atingir esse objetivo, pretendemos desenvolver, analisar e aplicar uma proposta de ensino que envolva estratégias, generalizações, observações de padrões, resolução de problemas, concepções de infinito, justificativas, diferentes representações, convergência e divergência de séries geométricas.

Também responder três questões de pesquisa:

1.1.Questões de pesquisa

Partimos da hipótese de que uma abordagem de ensino com vários registros de representação semiótica contribui para a aprendizagem de sequências e séries geométricas no Ensino Médio e colocamos três questões de pesquisa.

"Uma abordagem de ensino baseada em vários registros de representação semiótica favorece a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais em sequências e séries geométricas?"

"Quais concepções de infinito emergem nas respostas dos participantes em sequências e séries geométricas?"

"Quais as dificuldades explicitadas pelos participantes nos processos de tratamento e conversão de sequências e séries geométricas?".

1.2.Objetivos

O objetivo da pesquisa é desenvolver, analisar didaticamente e apresentar, ao final do Mestrado Profissional, propostas de ensino, para o professor de Matemática da Educação Básica, compostas por conjuntos de atividades que envolvam generalizações, observação de padrões, concepções de infinito, justificativas e diferentes representações, com elementos interessantes e aspectos importantes para o ensino de sequências e séries geométricas. Assim, propor uma abordagem para o ensino de sequências, progressões e séries geométricas, por meio de materiais concretos e/ou utilização de ferramentas computacionais, com o uso de diferentes registros de representação semiótica. Deste modo, pesquisar uma forma de ensino, para o trato de sequências e séries geométricas e de ideias relacionadas ao infinito, que vá além da mera utilização de fórmulas.

2. QUADRO TEÓRICO

Neste capítulo, discorremos sobre os pontos que consideramos importantes do ponto de vista dos referenciais teóricos, que contribuíram para esta pesquisa, pois se articulam com o ensino e a aprendizagem de sequências e séries geométricas. Começamos com a Teoria das Representações Semióticas (DUVAL, 2009, 2012), segundo a qual a pluralidade de representações é essencial para a compreensão de um objeto matemático, e que é utilizada em nossas propostas de abordagem. Como base para a análise qualitativa dos protocolos obtidos, utilizamos as ideias de Efraim Fischbein (1994) (ver Capítulo 5, pág. 238-345), que argumenta que uma pessoa, em atividade de aprendizagem matemática, necessita interagir com aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Para as concepções de infinito potencial e de infinito real, buscamos a perspectiva dada por Fischbein (1994) e Fischbein, Tirosh e Melamed (1981) (ver Capítulo 12, pág.491-512) de que, para compreender a ideia de infinito em Matemática, é necessário que os estudantes saibam distinguir e assimilar ideias relacionadas ao infinito potencial do infinito real.

2.1.Contribuições da teoria dos registros de representação semiótica

Trata-se de uma teoria cognitiva que analisa as dificuldades na interpretação dos signos encontrados na aprendizagem de Matemática e no funcionamento cognitivo que é característico de toda e qualquer ciência. Duval parte do princípio de que só é possível acessar um objeto matemático (abstrato) por meio de representações semióticas que permitam representá-lo. Além disso, destaca que o mais importante para o entendimento de um objeto matemático são as transformações de representações e não uma única delas. Para Duval (2012), “As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.” (DUVAL, 2012, p.269).

O que seriam essas representações? “Uma escrita, uma notação, um símbolo representando um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo.” (DUVAL, 2012, p.268). Conforme o autor, são estruturas algébricas e lógicas que permitem exprimir as relações entre a linguagem materna e os registros de representação que podem ser utilizadas para os objetos matemáticos.

Duval (2009) menciona que há três fenômenos estritamente ligados às representações fundamentais relativas ao raciocínio e às dificuldades encontradas nessas representações: diversificação de registros de representação semiótica; diferenciação entre o representante e o representado; e coordenação entre diferentes registros. Ele reforça que não se deve confundir o representante com o representado, pois nenhum dos registros de representação é o objeto matemático, apenas o representam, e que cada uma das representações (língua materna, algébrica, figural, gráfica ou numérica) permite conhecer características diferentes do objeto.

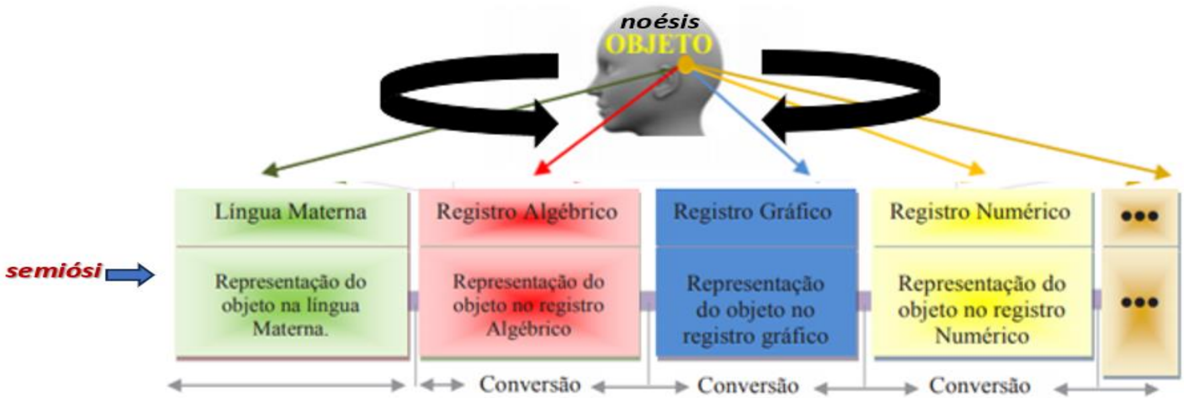
Também relata que os objetos matemáticos não são acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como pode acontecer com objetos "reais" ou "físicos". Podemos representar um quadrado, os números, um círculo ou um ponto, entre outros, mas não os vemos, pois tais objetos não são físicos, são de natureza abstrata, e não podemos manuseá-los concretamente, apenas por meio de representações semióticas, que irão permitir atividades sobre o objeto representado. Essa impossibilidade de acesso concreto aos objetos matemáticos torna mais difícil o ensino e a aprendizagem em Matemática e a confusão objeto/representação torna quase impossível a aprendizagem. A distinção entre um objeto matemático e suas representações se torna, portanto, um ponto importante na compreensão do objeto representado.

De acordo com Duval, para ser um registro semiótico é necessário que exista um conjunto de símbolos (ou signos) que irão representar os objetos escolhidos e que esse conjunto permita três atividades cognitivas ligadas à semiósis, quais sejam, a formação, o tratamento e a conversão. A formação consiste no uso de um ou vários signos segundo regras que permitam criar uma representação semiótica do objeto, constituindo as chamadas "regras de conformidade" (Duval, 2012, p.268). Por exemplo, as letras do alfabeto para produzir as palavras. O tratamento, que permite transformar representações dentro do mesmo sistema, por exemplo, "O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismos e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas no mesmo registro de escritura de números" (DUVAL, 2009, p.57). A conversão, que permite transformar uma representação, dada num sistema, em uma representação em outro sistema. Sobre a conversão, Duval (2012) acrescenta: "A conservação é uma transformação externa ao registro de início (o registro de representação a converter)". (DUVAL, 2012, p.272).

Pensar que a função do registro semiótico se restringe à comunicação é um equívoco, é por meio da *semiósis* que se forma a *noésis*, é por meio das representações semióticas que se compreende o objeto matemático. Para Duval (2009), *Noésis* é a compreensão do objeto matemático, com seu significado e suas particularidades e a *semiósis* é a produção de uma representação desse objeto. Segundo o autor, as duas etapas – *noésis* e *semiósis* – não ocorrem independentemente uma da outra. Na *noésis,* o objeto é traduzido em representações mentais, ou seja, a compreensão do objeto; na *semiósis,* tais representações são traduzidas em representações semióticas; portanto, “Não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis”* (DUVAL, 2009, p.17). Desta forma, fica evidente a importância de uma representação adequada para um objeto matemático, não apenas para comunicar, mas também para criar conhecimento. Ao representar, fazer tratamentos e conversões, tem-se a construção do conhecimento matemático, ou seja, a *noésis*.

Por conta disso, a coordenação (ver figura 6) de vários registros de representação semiótica – a *semiósis* - em sistemas de representação diferentes, é fundamental para a apreensão conceitual de objetos matemáticos e para que o objeto seja reconhecido, mas não confundido com suas representações possíveis.

Figura 3: Coordenação de vários registros de representação semiótica



Fonte: Adaptado de Henriques e Almouloud (2016)

Segundo Duval (2009), ao operar os objetos matemáticos na forma natural, algébrica, tabelar, gráfica entre outras, desenvolve-se a cognição específica para cada atividade matemática e essas atividades cognitivas entre coordenação, conversão e tratamento estão intrinsecamente no ensino e na aprendizagem de Matemática. No exemplo a seguir, vamos fazer alguns tratamentos e conversões que exemplificam essas operações.

1 - Representação em língua materna

Considere uma parábola cujo vértice passa pelo ponto de coordenadas cinco e dezesseis, com raízes um e nove.

2 - Representação Tabular

$\boldsymbol{x}$	$y = -x^2 + 10x - 9$	$\boldsymbol{y}$	$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $com\ \ x, y \in \mathbb{R}$
1	$y = -1^2 + 10.1 - 9 = 0$	0	(1,0) raiz
9	$y = -9^2 + 10.9 - 9$	0	(9,0) raiz
5	$y = -5^2 + 10.5 - 9$	16	(5,16) vértice
...	...		...

3- Representação algébrica

$$com\ \ a \neq 0$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \boldsymbol{v} = (\mathbf{5}, \mathbf{16})\ \boldsymbol{vértice}$$

$$16 = a(5)^2 + b.5 - 9$$

$$16 = 25a + 5b - 9$$

$$16 + 9 = 25a + 5b \ \to 25a + 5b = 25$$

$$5a + b = 5$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \boldsymbol{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})\ \boldsymbol{raiz}$$

$$0 = a(1) + b.1 - 9$$

$$0 = a + b - 9$$

$$a + b = 9$$

tratamento

Sistema de equações

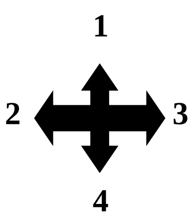
$$\begin{cases} 5a + b = 5 \\ a + b = 9 \end{cases}$$

$$a = -1; b = 10$$

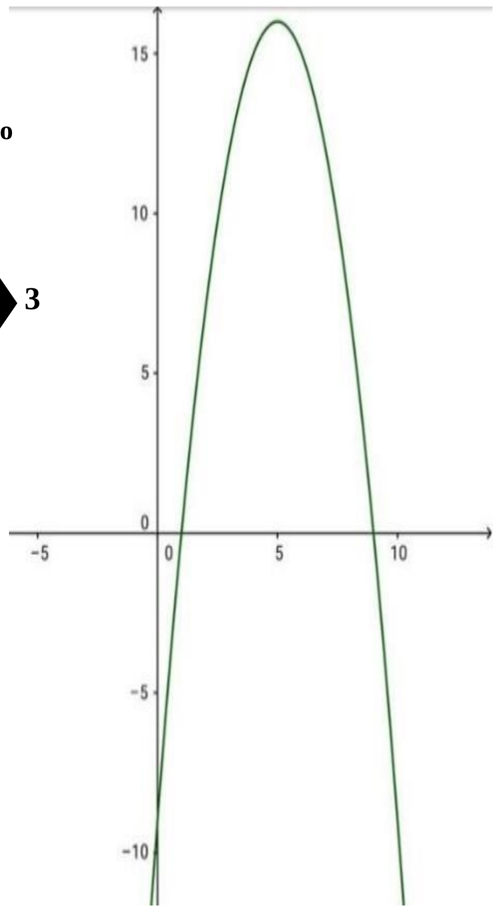
A= -1 , B= 10, C= -9

Função $\boldsymbol{y = -x^2 + 10x - 9}$

Conversão



4 - Representação gráfica



Nesse exemplo, a parábola é representada por meio de quatro registros diferentes, em quatro sistemas de representação. Em cada um deles, podemos extrair propriedades diferentes da parábola.

2.1.1. O fenômeno da não congruência

Os processos de conversão - e os de tratamento - são sempre relações entre dois registros diferentes e podem ser mais ou menos complexos, o que depende muito dos registros de representação de partida e de chegada e se envolvem congruência ou não congruência. Segundo Duval (2009), para que uma conversão seja congruente, deve satisfazer três critérios:

> O primeiro critério é a possibilidade de uma correspondência "semântica" dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar da outra. [...] O segundo critério é a univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro de representação de chegada. [...] O terceiro critério é relativo à organização das unidades significantes. As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondências semânticas segundo a mesma ordem nas duas representações (DUVAL, 2009, p.18).

Se uma dessas três condições não está satisfeita, a conversão é não-congruente. Para Duval (2009), o grau de dificuldade de uma conversão está diretamente relacionado à congruência ou não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada.

2.1.1.1. O fenômeno da não congruência nas séries geométricas

No quadro 1 é apresentada a análise da congruência semântica da conversão da série geométrica na representação numérica $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$. Para representação algébrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n, com \ \ n \geq 1$. Segundo os três critérios de congruência estabelecido por Duval (2009).

1) Correspondência semântica das unidades significantes (CS)
2) Univocidade semântica terminal (US)
3) A organização das unidades significantes (OR)

Quadro 1: Análise de Congruência Semântica da conversão envolvida na série geométrica

<table>
<tr><td colspan="6">Análise da congruência semântica da conversão da representação numérica da série geométrica $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots$ para representação algébrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n, com\ n\geq 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade Significante do registro de partida (numérico)</td><td rowspan="2">Unidade Significante do registro de chegada (algébrico)</td><td colspan="3">Critérios de congruência</td><td rowspan="2">Conclusão</td></tr>
<tr><td>CS</td><td>US</td><td>OR</td></tr>
<tr><td>+ + +</td><td>$\sum$</td><td>Sim</td><td>Não</td><td>Não</td><td rowspan="3">Não congruente</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots$</td><td>$\left(\frac{1}{4}\right)^n$</td><td>Sim</td><td>Não</td><td>Não</td></tr>
<tr><td>1,2,3, ...</td><td>n</td><td>Sim</td><td>Não</td><td>Não</td></tr>
</table>

Fonte: adaptado pelos autores de Cargmin e Barros (2016, p. 21)

A seguir, de forma detalhada, discorremos sobre a análise de Congruência Semântica da conversão envolvida na série geométrica $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\to\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n,\ com\ n\geq 1$, apresenta no Quadro 1, conforme os três critérios de congruência de (Duval, 2009) e com base na análise de Cargmin e Barros (2016, p. 21).

- Notamos que a unidade significante simples "+" está associada a uma unidade significante elementar da outra representação "Σ", portanto, existe congruência semântica (CS). A cada unidade significante elementar "+" não corresponde uma única unidade elementar "Σ" , ou seja, não existem três unidades "Σ ", só existe uma unidade "Σ ", desta forma, não existe a univocidade semântica terminal (US). As organizações das unidades "+", "+" e "+" conduzem a apreender a unidade de correspondência semântica "Σ" segundo a mesma ordem? A resposta é: não. Então não existe a mesma organização das unidades significantes (OR).

- As unidades significantes simples $\left(\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4}\right)^2,\left(\frac{1}{4}\right)^3,\ldots$ estão associadas a uma unidade significante elementar da outra representação $\left(\frac{1}{4}\right)^n$, logo, existe congruência semântica

(CS). A cada unidade significante elementar $\left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^3, \ldots$ não corresponde uma única unidade elementar $\left(\frac{1}{4}\right)^n$, ou seja, não existem infinitas unidades $\left(\frac{1}{4}\right)^n$, assim, não existe a univocidade semântica terminal (US). As organizações das unidades $\left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^3, \ldots$ não conduzem a apreender a unidade de correspondência semântica $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ segundo a mesma ordem, então não existe a mesma organização das unidades significantes (OR).

❖ A mesma análise se aplica às unidades significantes 1, 2, 3, ... e n.

No que segue, exemplificamos o fenômeno da não-congruência nas séries geométricas.

Considerando que a área do triângulo equilátero na figura abaixo seja igual a um e o número de iterações/etapas tende ao infinito, qual o cálculo da área vazada (parte branca) ?

Representação – figural Representação – numérica

$$\xrightarrow[conversão/congruente]{} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}+\cdots \xrightarrow[tratamento]{}$$

Representação numérica Representação – algébrica

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ \ldots \quad \xrightarrow[conversão/não\ congruente]{} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n, com\ n \geq 1$$

Representação algébrica Representação algébrica → Representação numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n, com\ n \geq 1 \quad \xrightarrow[conversão/não\ congruente]{} \quad S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

A análise da congruência semântica da conversão da série geométrica na representação algébrica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n, com \quad n \geq 1,$ para a representação numérica $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots$. também não é congruente, segundo os três critérios de congruência estabelecido por Duval (2009).

2.2. Aspectos algorítmicos, intuitivos e formais

Para Fischbein (1994), a Matemática não é um corpo formal e dedutivo rigoroso do conhecimento conforme exposto em tratados e livros didáticos de alto nível. De acordo com o autor, devemos olhar a Matemática como atividade humana. Segundo ele, nós educadores de ciências exatas, devemos olhá-la como um processo criativo da atividade humana, que implica em momentos de "iluminação, hesitação, aceitação e refutação" e que os estudantes sejam capazes de produzir afirmações matemáticas, construir provas e avaliar, não apenas formalmente, mas também intuitivamente, a validade dessas produções. E chama a atenção para a necessidade do educador matemático observar a existência, ou não, e a interação, ou não, de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais na atividade matemática de um ser humano. Para Fischbein (1994), esses são os três aspectos básicos necessários para que possamos considerar a matemática como um processo criativo.

O **aspecto formal** refere-se a axiomas, definições, teoremas e provas, que representam o núcleo da Matemática como uma ciência formal e precisam ser considerados quando analisamos a Matemática como um processo humano. Devem penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio e devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente.

O **aspecto algorítmico** diz respeito às técnicas e procedimentos de resolução, que devem ser ativamente treinados pois, de acordo com Fischbein (1994), os aspectos formais não são autossuficientes para que um sujeito adquira habilidade e possa resolver problemas em atividade matemática. Essa habilidade, associada a aspectos formais, deve ser sistematicamente usada para que o sujeito possa justificaticar formalmente. Fischbein destaca que o raciocínio matemático não pode ser reduzido a algoritmos e/ou técnicas de resolução, pois estes, não acompanhados de justificativas formais, tornam-se simplesmente "fórmulas" e podem ser facilmente esquecidos. Fazer matemática apenas com procedimentos "mecânicos/algorítmicos" pode trazer dificuldades diante de situações não usuais, em que há necessidades de aspectos formais.

O **aspecto intuitivo** corresponde a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva. A intuição cognitiva é o que o individuo considera verdadeiro sem a necessidade de prova ou justificação. Como consequência, os aspectos intuitivos podem desempenhar um papel facilitador no processo de conhecimento, mas podem aparecer equívocos e contradições. Por exemplo, muitos estudantes pensam que quanto maior for o perímetro de uma figura, maior será a sua área, ou que a soma de infinitas parcelas será infinito.

Por isso, Fischbein argumenta que é necessário que haja interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos para que ocorra aprendizagem e, se for o caso, a superação desses obstáculos. Para o autor, a interação desses aspectos deve guiar nossas escolhas quando ensinamos matemática, pois permite que os estudantes sejam capazes de produzir afirmações matemáticas, construir provas e avaliar, formal e intuitivamente, a validade dessas produções (FISCHBEIN, 1994). No exemplo a seguir, vamos exemplificar como pode ocorrer as interações de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, no caso, dos objetos matemáticos dízimas periódicas.

Muitos são os exemplos que poderíamos citar onde há necessidade de interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, como o das séries geométricas. Por exemplo, dada a dízima periódica 0,999.... essa dízima periódica é $0{,}999\ldots = 1$ ou $0{,}999\ldots < 1$? Justifique.

- Podemos observar que $0{,}999\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots$, temos aqui uma percepção intuitiva e procedimentos algorítmicos, ou seja, aspectos intuitivos interagindo com aspectos algorítmicos. Posto isto, temos que:

- $0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$ → aspectos intuitivos interagindo com aspectos algorítmicos. Logo, observando o padrão encontrado na soma das infinitas parcelas, podemos formalizar (generalizar) o padrão encontrado. Observe a seguir.

- $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots \rightarrow a_n = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n$ com $n \geq 0$, aspectos intuitivos e algorítmicos interagindo com aspectos formais. Após formalizar o padrão encontrado na sequência ($\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$) e por meio de aspectos formais observar que a dízima periódica $0{,}999\ldots$ pode ser representada por meio de uma progressão geométrica de $0 < r < 1$, logo, utilizando procedimetos algorítmicos (aspectos algorítmicos), podemos chegar ao valor numérico (infinito real) que representa a soma infinita, assim temos que:

- $a_n = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n$ com $n \geq 0$, → $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, aspectos intuitivos e algorítmicos interagindo com aspectos formais. Portanto, ($S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$) representa a soma das infinitas parcelas (infinito real /aspectos formais) do objeto matemático dízima periódica, cuja soma infinita é: $S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow S_\infty = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$

A adição infinita dessas parcelas fracionárias, nessa ordem, é o que chamamos de série geométrica e a dízima periódica pode ser interpretada como uma série geométrica. Há aqui um exemplo de uma situação não usual, em que a interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais foi importante e necessária para produzir conjecturas e elaborar justificativas a respeito do objeto matemático dízima periódica.

Para nossa pesquisa, em especial na análise dos dados, também vamos fazer referência aos aspectos intuitivos numéricos, definidos por SOUZA (2008), os quais são aspectos intuitivos que o individuo sente a nescessidade de um contexto puramente numérico e não consegue desenvolver um pensamento matemático para conjecturar o que acaba de afirmar ou prever, por exemplo, ao perceber um padrão e utilizar uma letra para generalizar esse padrão. Logo que, em algumas situações, utilizar valores "numéricos" particulares, pode perder características de padrão e regularidade e tornar difícil a identificação do que ocorre genericamente e a consequente generalização.

2.3.Concepções de infinito potencial e infinito real sob a perspectiva de Fischbein (1994) e Fischbein, Tirosh e Melamed (1981)

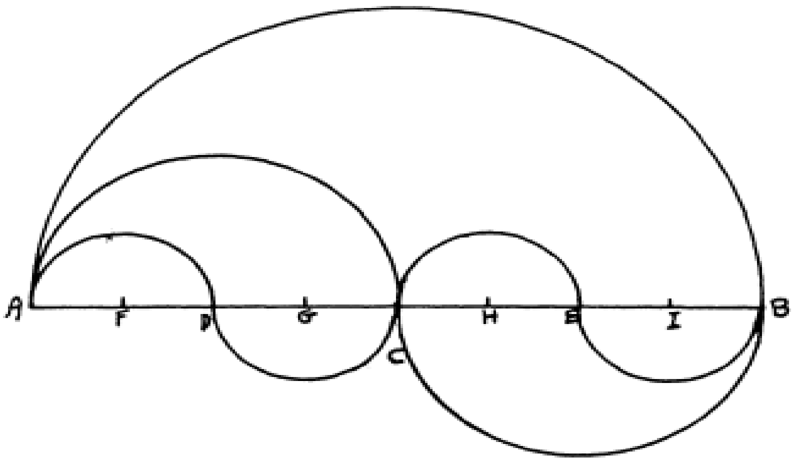
Segundo Fischbein (1994), o processo de aprendizagem do conceito de infinito matemático é de grande dificuldade para estudantes em todos os níveis de ensino, por ser muito comum a "óptica" intuitiva. Fischbein também afirma que, para compreender a ideia de infinito, é necessário distinguir o infinito potencial do infinito real. O infinito potencial consiste em um processo que vai além dos limites finitos. No caso de uma série, há a possibilidade da "soma" ficar cada vez maior, pois não há um elemento que seja o "último". É preciso apreender que esse processo pode ser realizado sem nunca parar, ou seja, é um processo potencialmente infinito. Já o infinito real não é um processo, mas sim o resultado deste processo, isto é, é o próprio número. No caso de uma série geométrica de razão $0 < |r| < 1$, seria o valor numérico quando somadas as infinitas parcelas.

A soma resultante da adição de infinitas parcelas de uma série geométrica convergente é o próprio número; o infinito real refere-se aos infinitos elementos de uma soma infinita ou aos infinitos elementos de um conjunto numérico considerados em sua totalidade.

Os estudos que envolvem as ideias de infinito potencial e infinito real surgem muito cedo, ainda no Ensino Fundamental, quando lidamos com dízimas periódicas, que contemplam esses dois conceitos, pois podem ser representados por meio de uma adição infinita. Por exemplo, a fração $\frac{2}{3}$, pode ser representada como $\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}$ +.... Qualquer dízima pode ser representada por meio de uma adição infinita e esta "chega", apesar de um número infinito de parcelas, a um limite finito, que é o valor numérico da soma. Assim, na igualdade $\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\cdots=\frac{2}{3}$, podemos notar que no primeiro membro há o infinito potencial, um processo que nunca para de "somar" e, portanto, sempre será possível adicionar mais uma parcela e, no segundo membro, a ideia de infinito real, que representa a soma das infinitas parcelas, ou seja, neste caso o valor finito ($\frac{2}{3}$). A seguir, exemplificamos as ideias de infinito potencial e infinito real em alguns casos de objetos matemáticos.

Assim, como na Geometria, em que também se pode notar os dois infinitos. Por exemplo, a partir de um semicírculo (ver Figura 4) com o segmento AB como diâmetro, ao ter AB dividido em duas partes iguais, AC e CB, há a possibilidade de construir dois semicírculos em AC e CB. Se continuarmos esse processo de divisão, teremos infinitos semicírculos?

Figura 4: Subdivisão de um semicírculo



Fonte: Fischbein, Tirosh e Hess (1979)

O que acontecerá com a adição infinita dos comprimentos das linhas onduladas dos semicírculos, conforme dividimos o comprimento de cada subsegmento?

$$\pi r + \frac{\pi r}{2} + \frac{\pi r}{4} + \frac{\pi r}{8} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \pi r \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \quad com\, i \geq 1 \;\; e \;\; i \in \mathbb{N}^*, \qquad n \to \infty \qquad S_\infty = \frac{\pi r}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r \;\; u.c$$

infinito potencial **infinito real**

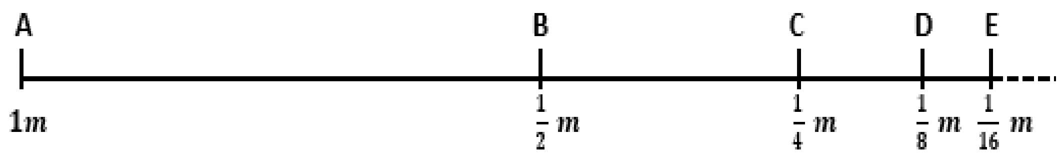
O que acontecerá com a adição infinita das áreas determinadas pelos semicírculos, à medida que dividimos o comprimento de cada subsegmento?

$$\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{8} + \frac{\pi r^2}{32} + \frac{\pi r^2}{128} + \cdots = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} com\, i \geq 1 \;\; e \;\; i \in \mathbb{N}^*, \quad n \to \infty \quad S_\infty = \frac{\frac{\pi r^2}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2\pi r^2}{3} u.a$$

infinito potencial **infinito real**

Considerando exemplos no campo das progressões geométricas sob uma perspectiva voltada às séries geometricas convergentes, como dado um segmento $AB = 1m$ (ver Figura 5), vamos supor que outro segmento $BC = \frac{1}{2}m$ seja adicionado a AB. Se continuamos da mesma forma, adicionando segmentos de $\frac{1}{4}m$, $\frac{1}{8}m$ e assim sucessivamente, poderíamos perguntar aos estudantes se esse processo teria fim? Qual será a soma dos segmentos AB + BC + CD +...?

Figura 5: Subdivisão de um seguimento (série geométrica convergente)



Fonte: Fischbein, Tirosh e Melamed (1981)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} com\, i \geq 1 \;\; e \;\; i \in \mathbb{N}^*, \;\; n \;\; \to \infty \qquad S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2u.c$$

infinito potencial **infinito real**

Este exemplo foi aplicado a 108 estudantes de Israel na faixa etária de 13 a 14 anos e, segundo Fischbein, Tirosh e Melamed (1981), boa parte deles admitiu que o processo é infinito.

“Sempre é possível adicionar um segmento de linha que terá a metade do comprimento do antigo segmento de linha”. No entanto, a categoria de respostas erradas mais frequente é constituída por aqueles que afirmam que a soma dos segmentos é infinita, enquanto aqueles que afirmam que a “soma é igual a dois” apresenta um nível muito baixo de aceitação intuitiva. Para aqueles que afirmam que a “soma apenas se aproxima de 2”, o nível de aceitação intuitiva é maior. Podemos notar que isso está ligado à ideia de infinito potencial, o estudante aceita que a “soma” sempre pode ficar maior a cada parcela somada, mas não aceita que a soma infinita é 2.

Os autores relatam que apenas seis estudantes (5,60%) respondem corretamente: “a soma dos segmentos é igual a 2”. No entanto, não deram argumentos às suas respostas. E, que embora a resposta esteja matematicamente correta, os estudantes não sentiram veracidade nas respostas. A nosso ver, isso pode ter acontecido porque eles não dominam aspectos formais que justificam as respostas e chegaram a elas com base apenas em aspectos intuitivos e no fato de não compreenderem as ideias de infinito, no caso infinito real, faz com que não tenham aspectos formais para justificar que a soma infinita da série geométrica é igual a 2. Pode-se perceber, a partir desses exemplos, que, geralmente, os sujeitos acreditam na infinidade do processo, mas encontram dificuldade se são confrontados com a ideia de infinito real. E isso se aplica ao infinito potencial, que aparenta ser mais intuitivo/aceito do que o infinito real, visto que a compreensão do infinito real não é intuitiva e torna-se complexa sua abordagem.

Como já mencionamos (introdução), o ensino escolar trabalha com deficiência as ideias de infinito e a razão disso pode estar ligada a uma possível falha na formação do professor de Matemática e/ou por falta de materiais didáticos adequados. As ideias de infinito, ao serem apresentadas para os estudantes, podem parecer como algo inusitado e complexo, visto que a noção de infinito, em especial o infinito real, causa estranheza por proporcionar algumas propriedades inesperadas que contrariam aspectos intuitivo adquiridos.

Podemos dizer que os conceitos de infinito real e de infinito potencial têm permeado a Matemática desde sempre e podem estar presentes na Educação Básica, principalmente no Ensino Médio e no Ensino Superior, quando se estudam as sequências e séries geométricas. São assuntos de grande importância e que deveriam receber uma ênfase maior no processo de ensino desses tópicos, o que pode representar uma contribuição à construção do saber matemático dos estudantes.

3. AS ATIVIDADES

Com base nas ideias de Duval (2009), que defende a pluralidade do uso de registros de representação semiótica no ensino de Matemática, e justificados pelas leituras feitas, desenvolvemos as duas propostas de atividade, baseadas no Triângulo de Sierpinski. Alicerçados nos argumentos de Fischbein (1994), quanto à necessidade de interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais para a aprendizagem matemática, colocamos como hipótese que o uso de vários registros provoca a interação desses aspectos e, a partir disso, analisamos as respostas dos participantes à Atividade 1, para verificar se essa interação ocorreu. Sob a perspectiva dada por Fischbein (1994) e Fischbein, Tirosh e Melamed (1981), que destacam duas concepções de infinito, o potencial e o real, e a importância de se ter bons aspectos intuitivos, procuramos, nas respostas dos participantes à Atividade 1, se essas concepções aparecem e se foram desenvolvidos aspectos intuitivos que podem ser considerados bons. As ideias defendidas por esses autores compõem nosso quadro teórico.

3.1.Habilidades e competências BNCC (2017)

Nas atividades elaboradas, espera-se que o aluno possa desenvolver: conhecimentos numéricos e algébricos sobre sequências, progressões e séries geométricas; autonomia para investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas; o reconhecimento de padrões e regularidades; a experimentação por meio de materiais concretos e ferramentas tecnológicas. No quadro a seguir, encontram-se as recomendações das competências e habilidades implantadas pela BNCC (2017), relacionadas ao ensino de sequências e progressões, das quais destacamos a Competência Específica 5.

Quadro 2: Habilidades e competências a serem alcançadas BNCC (2017)

Tópico	**Objetos de conhecimento (Associados à BNCC, 2017)**	**Competência específica 5** **Habilidades**
Sequências Progressão aritmética (PA) Progressão geométrica (PG) (“Séries geométricas”)	Conhecimentos numéricos Sequências e progressões Conhecimentos algébricos	EM13MAT507 EM13MAT508

Fonte: Autores

- Conteúdos: Conhecimentos prévios que precisam ser trabalhados pelo professor com o aluno: sequências; progressões (PA e PG); somas infinitas (PG, com razão $0 < |q| < 1$); potenciação de números inteiros positivos; área e perímetro de um triângulo equilátero; congruência de triângulos e semelhança de triângulos.

- Conteúdos abordados nas atividades: área e perímetro de um triângulo equilátero, Triângulo de Sierpinski, sequências, progressões (PA e PG); séries geométricas convergentes, semelhança de triângulos, convergência e infinito.

As atividades 1 e 2 podem ser desenvolvidas em três fases cujos procedimentos metodológicos sugeridos são descritos no que segue.

3.2. Procedimentos metodológicos

Apresentamos um conjunto de atividades em que estudantes do Ensino Médio possam:

- Analisar padrões e regularidades encontradas em representações figurais/fractais de sequências, progressões e séries geométricas convergentes.

- Utilizar representações figurais para a descoberta de um padrão.

Partimos da hipótese de que o participante desenvolva "bons" aspectos intuitivos na fase 1 (dobradura ou GeoGebra) para fazer a representação figural (coluna 1 da tabela - fase 2) e os interaja com aspectos algorítmicos e formais para realizar as conversões para as representações numérica e algébrica.

- Descrever esses padrões nas representações figural, numérica e algébrica.

Apresentamos a seguir os procedimentos metodológicos que adotamos, relacionados à atividade 1, a única que foi aplicada para nosso Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e os deixamos como sugestão para a aplicação da Atividades 2.

3.3. Atividade 1 – Sequências e séries geométricas: construção do Triângulo de Sierpinski por meio de dobraduras em papel A1 sulfite 90g

- Material necessário: Caderno, lápis de cor, caneta, borracha, régua, papel sulfite 90g.
- Conteúdo: sequências; progressões (PA e PG); área do triângulo equilátero; perímetro do triângulo equilátero; somas infinitas (PG, com razão $0 < |q| < 1$); semelhança de triângulos; potenciação de números inteiros positivos; Séries Geométricas convergentes.
- Público-alvo: Estudantes do Ensino Médio.

3.3.1. Fase 1 - dobradura

Nesta fase, propõe-se aos participantes a construção do fractal denominado Triângulo de Sierpinski por meio de dobraduras. A utilização das dobraduras poderá induzir o participante a perceber que o processo de colorir os triângulos novos a cada etapa pode ser repetido indefinidamente, visto que, sempre sobram triângulos brancos que não foram hachurados e, a cada nova iteração, podem ser encontrados os pontos médios dos lados dos triângulos hachurados e que apesar de estarmos somando a área de infinitos triângulos, o resultado é finito, pois a área da folha utilizada nas dobraduras é finita. Diríamos que trabalhar com essa ideia de infinito por meio de diferentes representações (DUVAL, 2009) e inter-relacionar aspectos intuitivos, algorítmicos e formais é o foco de nossas atividades (FISCHBEIN, 1994).

Queremos despertar nos participantes "bons" aspectos intuitivos, que permitam uma compreensão do infinito real como uma soma finita, resultante da adição de infinitas parcelas e do infinito potencial, como um processo potencialmente infinito. Consideramos também que, ao utilizar dobraduras no processo de iteração para o Triângulo de Sierpinski, cada participante desenvolve e inter-relaciona aspectos algorítmicos e formais, percebe a regularidade, faz a "conversão" da dobradura para a representação figural e desenvolve a generalização.

É importante ressaltar que, de acordo com Duval (2009), um registro de representação semiótica é composto por um conjunto de símbolos (ou signos) que permite três atividades cognitivas ligadas à *semiósis* (formação, tratamento e conversão). Posto isso, não é uma "conversão" a passagem entre dobradura e representação figural, uma vez que a dobradura não permite as três atividades cognitivas citadas e, portanto, não pode ser considerada um "sistema de representação semiótica", no sentido de Duval.

Defendemos o processo de construção do Triângulo de Sierpinski, por meio de dobradura, por ser uma forma motivadora e interessante de induzir nos participantes "bons" aspectos intuitivos, devido ao apelo visual que esse processo apresenta e, assim, estudantes poderão desenvolver argumentos e ferramentas necessários para a interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994).

Descrevemos a seguir, os passos para o processo de construção da dobradura.

3.3.1.1. Processo de construção da dobradura

Cada participante recebe um triângulo equilátero recortado (ver figura 6) com aproveitamento de um dos lados de um papel A1 sulfite 90g, para realizar, por dobradura, as três primeiras etapas da construção do Triângulo de Sierpinski. Apresentamos o passo a passo da dobradura a ser realizada com os participantes. É importante destacar, que fica a critério do professor, entregar, ou não, o triângulo equilátero já recortado para o participante, visto que, pode ser proposto ao participante encontrar o triângulo equilátero no papel A1 sulfite 90g.

Figura 6 - Triângulo equilátero Etapa 0

Fonte: Autores

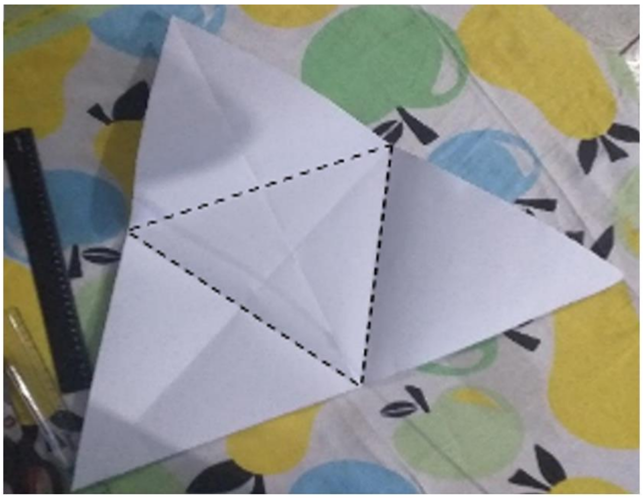
Primeiro passo: encontrar o ponto médio de um dos lados e dobrar o papel de modo que o vértice oposto coincida com esse ponto (ver figura 7).

Figura 7 - Processo de construção do Triângulo de Sierpinski

Fonte: Autores

Segundo passo: desdobrar o papel, dobrar nos pontilhados e desdobrar novamente, em seguida, dobrar o papel sobre si mesmo para vincar o pontilhado (ver figura 8).

Figura 8 - Figura geradora



Fonte: Autores

Terceiro passo: pintar (ou hachurar) o triângulo que não tem os vértices do triângulo original – triângulo pontilhado (ver figura 8), formado pelos pontos médios dos lados do triângulo original - para que, assim, consigam obter a figura geradora (ver figura 9). Assim chamada porque, no Triângulo de Sierpinski, é ela que aparece "infinitas" vezes. Esta é a Etapa 1, que corresponde à linha 2 da Tabela a ser preenchida (tabelas 1 e 2 / fase 2 da atividade).

Figura 9 - Figura geradora Etapa 1

Fonte: Autores

Quarto passo: em cada um dos três triângulos não hachurados da Etapa 1, repetir a dobradura feita na Etapa 1 e pintar o triângulo que não tem os vértices do triângulo original (ver figura 10). Esta é a Etapa 2, que corresponde à linha 3 da Tabela a ser preenchida (tabelas 1 e 2 / fase 2 da atividade).

Figura 10 - Triângulo da Etapa 2

Fonte: Autores

Quinto passo: repetir esses passos nos nove triângulos não hachurados da Etapa 2. Esta é a Etapa 3, que corresponde à linha 4 da Tabela a ser preenchida (ver figura 11).

Figura 11 - Triângulo da Etapa 3

Fonte: Autores

Apresentamos o processo de preenchimento da tabela 1, referente à área dos triângulos hachurados.

3.3.2. Fase 2 – estudos da área e do perímetro do Triângulo de Sierpinski

Um trabalho investigativo de generalização, por meio do preenchimento de uma tabela com cinco colunas e sete linhas (ver tabela 1), referentes à área dos triângulos hachurados, com diferentes representações - figural, numérica e algébrica. As linhas correspondem, respectivamente, às Etapas 0, 1, 2, 3, n e $(n \to \infty)$ da Fase 1.

3.3.2.1. Preenchimento da Tabela 1 da Fase 2 - Estudo da área colorida

Com a tabela, o intuito é provocar o raciocínio indutivo e, consequentemente, a análise e a generalização de padrões e de regularidades em representações figurais, numéricas e algébricas que podem ser associadas a sequências e séries geométricas, bem como trazer à tona processos de conversão e de tratamento desses registros. E, na análise das respostas obtidas, investigar se os participantes fazem, ou não, interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994) e que concepções de infinito desenvolvem. (FISCHBEIN, TIROSH E MELAMED, 1981).

Tabela 1 - Estudo da área - triângulos coloridos

Desenho Representação Figural	**Etapa (n)**	**Números total de triângulos coloridos (todos)**	**Área de cada triângulo colorido (menor)**	**Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)**
	0			
	1			
	2			
	3			
...	...	...	...	...
Genérico $\rightarrow$				
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito $(n \rightarrow \infty)$				

Fonte: Autores

Construção (Atividade 1 - Triângulo de Sierpinski), realizada pelos autores, com controle deslizante e informações sobre suas medidas de áreas. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/haeg4xxd.

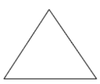
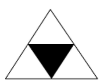
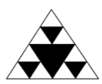
O uso da tabela, ao organizar as diferentes representações propostas, é uma maneira dos participantes perceberem os padrões e, por meio da interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, descubram um caminho que os conduza à generalização. Escolhemos 3 etapas de dobradura (ou 3 iterações), pois acreditamos serem suficientes para generalizar e perceber o padrão no processo de iteração, e as representações figurais correspondentes (aspectos intuitivos) como um guia para o preenchimento das linhas 2,3,4 e 5, as duas últimas relativas à Etapa genérica n e $(n \to \infty)$ (aspectos algorítmicos e formais).

É importante deixar explicitado como devem ser preenchidas as tabelas 1 e 2, pois isso é parte importante de nossa proposta. Primeiramente são preenchidas, na ordem, as células 2, 3, 4 e 5 da **coluna 1** (Representação Figural), que correspondem às três etapas da dobradura, respectivamente Etapas 0, 1, 2 e 3, nas quatro primeiras linhas. Na **coluna 2,** preencher o genérico para n e $(n \to \infty)$. Em seguida, de forma análoga à coluna 1, são preenchidas as **colunas 3** (Número total de triângulos coloridos - todos), **coluna 4** (Área de cada triângulo colorido - menor) e **coluna 5** (Área total de todos os triângulos coloridos - somas parciais), nessa ordem. Posteriormente, preencher a **5ª linha,** relativa à Etapa genérica e a **6ª linha,** relativa ao infinito. Descrevemos com mais detalhes, no que segue, o caso da Tabela 1 (o preenchimento da Tabela 2 é análogo).

Procedimentos a serem seguidos para o preenchimento da Tabela 1

COLUNA 1

Após a dobradura, devem ser preenchidas as 4 primeiras linhas da coluna 1, referentes ao registro figural do que ocorre no papel (Fase 1), com destaque para os triângulos hachurados nas etapas respectivas. Queremos que os participantes observem o registro figural e consigam interagir com aspectos intuitivos, formais e algorítmicos para analisar padrões e generalizar, de modo a obter representações algébricas e numéricas. Uma "boa" representação, no caso a representação figural, pode se tornar um "facilitador" para definir caminhos e/ou estratégias para o participante chegar à generalização, tanto por aspectos algorítmicos (passos da dobradura) como formais (expressões algébricas), o que levaria à interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994). Logo que, o apelo visual trazido pela representação figural poderá provocar "bons" aspectos intuitivos. Assim, a ideia é que os participantes realizem a passagem entre a dobradura e o registro figural, pois este não foi dado, e façam essa representação no caso das 3 primeiras etapas da dobradura. A sequência abaixo ilustra como deve ser a representação figural.

$etapa\ 0 \to$  $etapa\ 1 \to$  $etapa\ 2 \to$  $etapa\ 3 \to$ 

Ao passar da dobradura para a representação figural, o participante precisa interagir com aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, pois percebe que: 1. o processo de construção do Triângulo de Sierpinski, a cada etapa, é “autossemelhante” (repetitivo); 2. cada parte é uma cópia de si própria; 3. a cada nova etapa são gerados novos triângulos; 4. e, ao fazer as 4 representações figurais da dobradura, o “segredo” é a existência dos pontos médios necessários para gerar os triângulos novos. Por isto, acreditamos que o processo de dobradura provocará nos participantes “bons” aspectos intuitivos, de maneira que ele inter-relacione aspectos algorítmicos e formais e perceba a regularidade conforme faz a passagem dobradura→figura.

COLUNA 2

Para complementar a coluna 2, cujas quatro primeiras linhas já estão preenchidas com 0, 1, 2 e 3 (correspondem às etapas da dobradura), é preciso preencher a célula correspondente à Etapa genérica (linha “5”) com uma letra (n por exemplo), o que já envolve a interação de aspectos e uma generalização que precisa ser discutida e apreendida. Finalmente, a célula correspondente à etapa relativa ao infinito (linha 6), que quase certamente é a que apresenta maior dificuldade, é representada pelo símbolo ($n \to \infty$) e na qual temos o “infinito real”, pois indica um processo que continua. Acreditamos que os participantes, ao preencherem as células, irão identificar que esse processo gera uma sequência que pode ser representada pelo conjunto dos números naturais e, por conta da existência do ponto médio, o número de etapas é infinito.

Com as quatros primeiras linhas preenchidas (correspondem às etapas da dobradura 0,1, 2, e 3), apostamos que irão “provocar” “bons” aspectos intuitivos e, consequentemente, a interação com aspectos formais e algorítmicos, que irão permitir que os participantes possam estabelecer um padrão (0, 1, 2, 3, ...) para perceber o que acontece na etapa **n** e o que ocorre se se realizam mais etapas da dobradura, ou seja, conforme **n** tende ao infinito. Gostaríamos que os participantes compreendessem que para obter o sucessor de um número natural **n**, basta somarmos 1 (um) a esse número **(n+1)** e para obter a próxima etapa da dobradura basta encontrar os pontos médios de cada lado do novo triângulo gerado e ligar esses pontos. E, por menor que seja esse novo triângulo gerado, sempre é possível encontrar os pontos médios dos lados desses triângulos e fazer a etapa **(n+1)**, o que novamente envolve a ideia do infinito real e não é uma ideia muito simples, como indicam pesquisas relacionadas.

COLUNA 3

Pede-se o registro numérico da quantidade de triângulos hachurados (ou pintados); o participante precisa realizar a passagem do registro figural/desenho para o registro numérico. Feito isso em cada uma das quatro primeiras etapas, nossa expectativa é que os participantes desenvolvam "bons" aspectos intuitivos e estabeleçam um padrão que permita calcular o número de triângulos na etapa **n** e o que ocorre com o número de triângulos hachurados conforme **n** aumenta e tende para o infinito (real). Esse registro numérico vai permitir que o participante perceba que a quantidade de novos triângulos gerados e hachurados obedece a uma PG de razão 3, ou seja, é dada por (1, 3, 9, 27, ...), conforme os seguintes resultado

$$\boldsymbol{etapa0} \rightarrow 0\ triangulo \qquad \boldsymbol{etapa1} \rightarrow (0+\mathbf{1})\ triângulo$$

$$\boldsymbol{etapa2} \rightarrow (1+\mathbf{3})\ triângulos \qquad \boldsymbol{etapa3} \rightarrow (4+\mathbf{9})\ \ triângulos$$

Assim, ao preencher e fazer o registro numérico da quantidade total de triângulos obtidos em cada etapa, o participante poderá relacionar esse registro numérico ao registro algébrico das somas parciais das áreas, pedido na coluna 5.

COLUNA 4

Pede-se a área do menor triângulo hachurado (ou pintado) em cada uma das Etapas, nas 4 primeiras linhas, para depois generalizar essa área, fazendo uso de uma letra - $\boldsymbol{l}$ por exemplo, para indicar o lado do triângulo na etapa zero - e completar a linha 5. Temos aqui duas dificuldades a serem enfrentadas e discutidas, uma delas pelo fato de não ser dada a área do triângulo inicial e a outra, pela escolha de uma letra para indicar a etapa genérica. Acrescente-se a isso a necessidade de representar algebricamente o que acontece no "infinito", na linha 6.

Uma situação possível de ocorrer é os participantes estarem acostumados com um contexto puramente numérico e não conseguirem trabalhar com uma área inicial **A**. É importante o uso de uma letra para representar a área do triângulo inicial, posto que uma relação deduzida de valores particulares pode perder características de padrão e regularidade e tornar difícil a identificação do que ocorre genericamente e a consequente generalização, obtida pela passagem da representação figural para a representação algébrica e pela interação de aspetos intuitivos, algorítmicos e formais. Por exemplo, se considerarmos que a área do Triângulo de Sierpinski na primeira Etapa seja igual a 0,25, qual o valor da área hachurada quando o número de etapas tende ao infinito? $(0{,}25 + 0{,}1875 + 0{,}14625 + 0{,}10546875 + \cdots = 1)$. Com este exemplo, podemos observar que uma relação deduzida a valores pode deixar implícitos padrões e regularidades. Com o auxílio de uma letra para generalizar um determinado padrão matemático, torna-se mais simples perceber esse padrão e identificar características.

Dessa forma, neste caso, a generalização é obtida pelo fato do triângulo hachurado numa dada etapa ser semelhante, com razão ½, ao triângulo hachurado da etapa anterior, do qual são tomados os pontos médios dos lados. Assim, a área do triângulo hachurado em uma dada etapa é $\frac{1}{4}$ da área do triângulo hachurado da etapa anterior. Tais resultados, se não forem conhecidos dos participantes, podem e devem ser discutidos pelo professor, eventualmente de forma "intuitiva" ou local. No que segue, ilustramos o comportamento desse padrão. Seja um triângulo equilátero de lado l, tomado inicialmente.

$$\boldsymbol{etapa\ 0} \rightarrow (\text{triângulo original em branco}) \qquad \boldsymbol{etapa\ 1} \rightarrow \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\right)$$

$$\boldsymbol{etapa\ 2} \rightarrow \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right) \qquad \boldsymbol{etapa\ 3} \rightarrow \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right)$$

Vale a pena ressaltar que, do ponto de vista cognitivo, é necessário que os participantes, na hora de generalizar, saibam representar, de forma simbólica, por meio de uma "letra", os padrões relativos à área. O custo cognitivo envolvido é necessário, pelas razões explicitadas acima, para se chegar à generalização. Sabemos que esta generalização/representação pode não ser algo simples, por isso o professor deve ficar atento, para destacar a importância do uso de uma letra no lugar de um número para generalizar a área e trabalhar a ideia do genérico em Matemática (aspectos formais e algorítmicos).

COLUNA 5

Nas linhas 1, 2, 3 e 4 (para n=0, n=1, n=2 e n=3), pede-se a soma das áreas dos triângulos hachurados nas etapas correspondentes, cujas áreas individuais estão na coluna 4 e cujo registro figural pode ser visualizado na linha correspondente, na coluna 1. O segredo aqui então é perceber quantos são esses triângulos, pois cada triângulo não preenchido numa etapa gera um triângulo hachurado na etapa seguinte. E as somas solicitadas são as "somas parciais" para obtenção da soma total das áreas de todos os triângulos hachurados (ou pintados) no chamado Triângulo de Sierpinski. Para calcular essa área hachurada, os participantes, a partir do preenchimento das linhas 1, 2, 3 e 4, precisam identificar que esses 4 resultados formam uma progressão geométrica (às vezes chamada série geométrica nos livros didáticos) de razão ¾ e esse é o padrão; portanto, a área total dos triângulos hachurados é a adição "infinita" dessa PG e pode ser representada na forma algébrica (série geométrica), cuja soma vai ser o resultado a ser preenchido na linha 6 da coluna 5.

Apostamos que esse procedimento pode provocar "bons" aspectos intuitivos para a interação de aspectos algorítmicos e formais relativos às somas parciais e ao genérico, seja como a "soma" resultante de uma adição com infinitas parcelas, no caso da área (infinito potencial), seja como um processo com "infinitos" passos (infinito real). Também pode instigar o entendimento da ideia das somas parciais, para relacioná-la à ideia de convergência, o que significa um passo importante para a interação de aspectos algorítmicos e aspectos formais nas linhas correspondentes às duas últimas Etapas (genérica n e $(n \to \infty)$). Ao identificar e preencher o registro algébrico das somas parciais obtidas nas 3 primeiras etapas, o participante pode observar que este registro é representado por uma série geométrica convergente cuja soma parcial pode ser calculada como descrevemos a seguir:

Etapa zero, temos o triângulo em branco $\rightarrow 0$

Etapa um, temos a Etapa zero mais uma área correspondente a $\frac{1}{4}$ da área original $\rightarrow 0 + \frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$

Etapa dois, temos a Etapa zero, mais a Etapa 1 e surgem 3 triângulos menores de área $(\frac{1}{4})^2$ da área original $\rightarrow 0 + \frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right)$

Etapa três, temos a Etapa zero, a Etapa 1 mais a Etapa 2 e surgem 9 novos triângulos menores que têm $(\frac{1}{4})^3$da área original. Temos a seguinte expressão: $0 + \frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right) + 3^2.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right)$

O participante pode relacionar o padrão encontrado ao registro algébrico que permite preencher a 5ª linha (genérico - 5ª linha).

5ª LINHA

Pede-se a generalização do que ocorre nas 4 primeiras linhas, em termos de um número finito de etapas vencidas no processo infinito real. Analisar as informações referentes às 4 primeiras linhas da tabela e estabelecer um padrão (genérico) deve permitir calcular o número de triângulos na etapa genérica **n**. O participante tem que preencher as colunas com o símbolo genérico n, baseado em aspectos algorítmicos e formais.

Por meio do genérico, o participante percebe que: 1. em cada iteração, a área dos novos triângulos hachurados é reduzida pelo fator ¼ nos triângulos novos; 2. que as somas parciais para obtenção da soma total das áreas de todos os triângulos hachurados (ou pintados) do Triângulo de Sierpinski é multiplicada pelo fator ¾ (série geométrica de razão ¾); 3. que a sequência formada pelos números de triângulos formados a cada Etapa é crescente; 4. a cada etapa, a área está em progressão crescente, dando a ideia de somas parciais; 5. sempre é possível chegar à etapa (n+1)**.** De modo que, se inter-relacionar aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, percebe a regularidade e desenvolve o genérico.

Com base no preenchimento das colunas, com a interrelação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, pode-se evidenciar um padrão e a respectiva generalização. Assim, cada participante consegue escrever uma representação genérica (aspectos formais) a partir da observação dos padrões que são gerados de uma linha para a outra em cada Etapa, de acordo com a tabela abaixo.

Coluna 1	coluna 2	coluna3	coluna4	coluna 5
Genérico →	$\boldsymbol{n}$ $com\, n \geq 1$	$a_1 = 1$ $3a_{(n-1)} + 1$ $com \quad n \geq \boldsymbol{2}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ $com \quad n \geq 1$	$\sum_{i=1}^{n} l^2 \frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}$ $com \quad n \geq 1$

6ª LINHA

Pede-se a generalização do que ocorre ao final do processo infinito (infinito real), que corresponde a fazer ($n \to \infty$). Examinar as informações referentes às 4 primeiras linhas da tabela e ao genérico (5ª linha) e formalizar (nas 5 colunas) o que acontece quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$); para isso, o participante precisa basear-se em aspectos formais e algorítmicos. A compreensão resultante do preenchimento das colunas pode provocar “bons” aspectos intuitivos, que irão permitir vivenciar e observar o resultado da adição como um número finito, ou seja, após infinitas etapas a área total de triângulos hachurados é finita, pois está contida na área do triângulo original, é igual à área do triângulo inicial (triângulo equilátero “branco” de área $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ / Etapa 0) e a área restante vai para zero. Isso pode ser avaliado e discutido quando observamos que, a cada iteração, a área da figura obtida foi aumentada em $3/4$ em relação à área da etapa anterior.

Esse fato é particularmente interessante por envolver a ideia de convergência (infinito real). Em relação à área do menor triângulo hachurado, observar que após infinitas etapas a área de cada triângulo menor vai para zero, por conta da razão $1/4$, relativa à semelhança entre os triângulos obtidos em etapas subsequentes. Observe abaixo:

Coluna 1	coluna2	coluna3	coluna4	coluna 5
Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$	$\lim_{n\to\infty} n = \infty$	$\lim_{n\to\infty} 3a_{(n-1)} + 1 = \infty$ $com\ n \geq 1$	$\lim_{n\to\infty} \frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ $com\ n \geq 1$	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} l^2 \frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $com\ n \geq 1$

Para um estudante da Educação Básica, a ideia de uma adição com infinitas parcelas (infinito real) pode parecer bastante abstrata e contraditória. No entanto, trazer a discussão das ideias relacionadas a essa adição, no caso da série geométrica, mesmo de maneira intuitiva (aspectos intuitivos), pode enriquecer a percepção sobre convergência, necessária para fornecer aspectos formais necessários. Por isso, ao imaginarem infinitas etapas, poderão ficar intrigados com a ideia de que a adição das áreas de infinitos triângulos não é infinita e resulta em um número real.

3.3.2.2. Preenchimento da Tabela 2 da Fase 2 - Estudo do perímetro

Dando continuidade à atividade 1, após realizar o estudo da área do Triângulo de Sierpinski, propomos que o professor faça com seus alunos a análise do comportamento do perímetro do Triângulo de Sierpinski (ver tabela 2), conforme as três Etapas realizadas no processo de dobradura, pois, neste caso, a soma resultante da adição dos perímetros dos triângulos hachurados é infinita. Essa atividade pode trazer à tona conhecimentos prévios errôneos, por exemplo, que, quando a área aumenta, o perímetro também aumenta ou vice-versa. O processo de preenchimento da tabela 2 é similar ao da tabela 1. A seguir, apresentamos a tabela 2 e os passos do processo para seu preenchimento.

Tabela 2 - Estudo do perímetro - triângulos coloridos

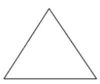
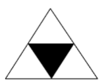
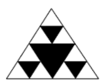
Desenho Representação Figural	**Etapa (n)**	**Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)**	**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**	**Perímetro total de todos triângulos coloridos**
	0			
	1			
	2			
	3			
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Genérico →				
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Quando o número de etapas tende ao infinito (n → ∞)				

Fonte: Autores

Procedimentos a serem seguidos para o preenchimento da Tabela 2

COLUNA 1

Preencher as 4 primeiras linhas da coluna 1, referentes ao registro figural do que ocorre no papel (Fase 1), com destaque para os triângulos hachurados nas etapas respectivas. A sequência abaixo ilustra como deve ser a representação figural.

$etapa\ 0 \rightarrow$  $etapa\ 1 \rightarrow$  $etapa\ 2 \rightarrow$  $etapa\ 3 \rightarrow$ 

COLUNA 2

Para complementar a coluna 2, cujas quatro primeiras linhas já estão preenchidas com 0, 1, 2 e 3 (que correspondem às etapas da dobradura), é preciso preencher a célula correspondente à Etapa genérica (linha "5") com uma letra (n por exemplo) e a representada pelo símbolo ($n \to \infty$), que representa o "infinito real".

COLUNA 3

Pede-se o comprimento do lado de cada triângulo colorido menor, o que requer fazer uso de uma "letra" (l por exemplo), para indicar o lado do triângulo na etapa zero e observar a regularidade apresentada no cálculo do lado de cada triângulo gerado conforme as Etapas. A partir da representação figural, ao inter-relacionar aspectos intuitivos, formais e algorítmicos, com auxílio de uma letra, esse procedimento poderá provocar nos participantes "bons" aspectos intuitivos, relativos ao lado do triângulo hachurado a cada nova etapa. Observar que o triângulo hachurado numa dada etapa tem lado com razão ½ do lado do triângulo hachurado da etapa anterior, e que o conjunto formado por essas medidas é uma Progressão Geométrica ((PG) de razão de razão 1/2. Conforme a sequência a seguir:

Etapa 0→ 0 etapa1→ $l/2$ etapa 2→ $l/4$ etapa 3→ $l/8$

Dessa forma, o participante poderá relacionar esse registro algébrico ao registro algébrico que representa o perímetro de cada triângulo colorido menor (coluna 4).

COLUNA 4

Pede-se o perímetro de cada triângulo colorido menor e a descrição da regularidade matemática que pode ser observada. Calcular o perímetro de cada um dos triângulos obtidos em cada Etapa é interessante, pois vai facilitar o cálculo da soma dos perímetros das 4 primeiras linhas dos triângulos hachurados (coluna 5) e da figura como um todo (6ª linha). O cálculo do perímetro vai revelar que, a cada nível de iteração, o perímetro de cada triângulo colorido menor diminui conforme as etapas aumentam, como ilustra a sequência a seguir:

Etapa 0 → 0 etapa 1→ $3l/2$ etapa 2→ $3l/4$ etapa 3→ $3l/8$

Dessa forma, ao perceber o padrão que se apresenta, o participante pode generalizar e representar essa sequência na forma algébrica (interação de aspectos).

COLUNA 5

Pede-se a soma dos perímetros dos triângulos hachurados e que podem ser visualizados no registro figural correspondente. Cada uma delas representa uma soma parcial para obtenção da soma total dos perímetros de todos os triângulos hachurados (ou pintados). Ao perceber o padrão existente no cálculo dessas somas parciais, é possível representar essa sequência na forma algébrica (série geométrica - aspectos algorítmicos e formais). Ao explorar a relação numérica obtida com o número de triângulos, o comprimento de cada lado e o perímetro de cada triângulo, apostamos que isso irá provocar "bons" aspectos intuitivos e, consequentemente, a interação de aspectos algorítmicos e aspectos formais. O registro algébrico das somas parciais dos perímetros obtidos nas 4 primeiras etapas resulta numa série geométrica, cuja soma parcial descrevemos a seguir:

Etapa zero, temos o triângulo em branco → 0

Etapa 1, temos a Etapa zero mais um perímetro correspondente a $\rightarrow 0 + \frac{3l}{2}$

Etapa dois, temos a Etapa zero, mais a Etapa 1 e surgem 3 triângulos menores → $0 + \frac{3l}{2} + \boldsymbol{3.}\frac{3l}{4}$

Etapa três, temos a Etapa zero, a Etapa 1 mais a Etapa 2 e surgem 9 triângulos menores → $0 + \frac{3l}{2} + \boldsymbol{3.}\frac{3l}{4} + \boldsymbol{9.}\frac{3l}{8}$

O participante poderá relacionar o padrão encontrado no perímetro parcial ao registro algébrico (genérico - 5ª linha).

5ª LINHA

Pede-se a generalização do que ocorre nas 4 primeiras linhas, em termos de etapas vencidas no processo infinito (resultados parciais, com um número finito de etapas). O participante precisa preencher as colunas com um símbolo genérico (aspectos formais). A tabela abaixo ilustra o genérico em cada uma das sequências, conforme as colunas.

Coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5
Genérico →	***N***	$l\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ $com\ \ n \geq 1$	$3l\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ $com\ \ \ n \geq 1$	$\sum_{i=1}^{n}\frac{3l}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}$ $com\ \ \ n \geq 1$

Com o genérico, por conta de sempre considerarmos o ponto médio, o participante poderá perceber que, em cada iteração, a medida do lado dos novos triângulos hachurados é reduzido pelo fator ½ e que as somas parciais dos perímetros de todos os triângulos hachurados (ou pintados) são multiplicadas pelo fator 3/2, e representa uma série geométrica crescente, com razão positiva e maior do que um.

6ª LINHA

Pede-se a generalização do que ocorre ao final do processo infinito (número infinito de etapas, infinito real), que corresponde a fazer (n→∞). Calcular o perímetro do Triângulo de Sierpinski (triângulos hachurados), então, envolve o somatório dos perímetros dos triângulos para **n** iterações quando (n→∞), por meio de uma série geométrica obtida na 5ª Linha. Para completar a 6ª linha, nas 5 colunas, quando o número de termos tende ao infinito (n→∞), o participante precisa basear-se em aspectos algorítmicos e formais. A tabela abaixo ilustra o comportamento para (n→∞).

coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5
Quando o número de etapas tende ao infinito $(n \to \infty)$	$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} l\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $com n \geq 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} 3l\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $com n \geq 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3l}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} = \infty$ $com n \geq 1$

Essa perspectiva relacionada ao infinito não é nada trivial e intuitiva, logo que a ideia de que a adição infinita dos perímetros dos triângulos hachurados resulta no infinito quando (n→∞) é contraditória com o resultado obtido para a área desses mesmos triângulos, que resulta num número finito. A cada nova Etapa, tanto as áreas como os perímetros dos novos triângulos hachurados ficam cada vez menores, por conta dos fatores de redução, respectivamente, ¼ e ½. Como citado na área (tabela 1), este é um exemplo de um objeto matemático contraintuitivo, que não encontramos na matemática "básica" escolar, pois o perímetro total (n→∞) tende a infinito enquanto a área total (n→∞) tende para um número finito, que é a área do triângulo original e ainda contradizendo o que pode ser visto em pesquisas da área de que muitas pessoas pensam que quando a área aumenta, o perímetro também aumenta e vice-versa (este é um tema de pesquisa que precisa ser aprimorado, para gerar abordagens que destruam essa ideia do senso comum, mas que não é tema deste trabalho).

3.3.3. Fase 3 – Questionários investigativos

Nesta fase, a proposta é que os participantes respondam (ver quadro 3) questões relacionadas às ideias de infinito (como processo, infinito real) e de convergência (como resultado de uma "adição", infinito potencial). É importante ressaltar que os participantes têm acesso à tabela preenchida na fase 2. Com a identificação e a categorização de erros, acertos e dificuldades, pode-se comparar as respostas para avaliar se houve, ou não, a presença e a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais (FISCHBEIN, 1994). E quais concepções de infinito emergem nas respostas desses participantes.

3.3.3.1. Fase 3 – Questionário 1 investigativo da tabela 1 – estudo da área

Quadro 3 - Questionário 1 - triângulos coloridos

Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?
Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?
Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada (pintada) também será infinita?
Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?
Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior?
Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?
Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas (pintadas) aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?
Q8 - O que ocorre com a "área hachurada de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?
Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?

Fonte: Autores

Com a **questão 1**, os participantes são convidados a apresentar qual(is) propriedade(s) podemos encontrar no processo de construção/dobradura, isto é, observar que o ponto médio (propriedade/aspectos formais) de cada lado do triângulo inicial se torna um vértice de um novo triângulo (ver figura 11). Desse modo, os lados dos triângulos gerados na próxima iteração possuem metade do comprimento (e, consequentemente, a metade da altura) do triângulo inicial. Além do ponto médio, podemos esperar que os participantes também percebam que, ao fazer a dobradura, é possível identificar, no Triângulo de Sierpinski, outras propriedades matemáticas interessantes, como a "autossemelhança", a congruência, a relação de proporcionalidade nos lados, na área hachurada e no perímetro.

As **questões 2, 3 e 4** foram elaboradas para trazer à discussão ideias relacionadas a conceitos de infinito, que emergem nas três etapas realizadas nas fases 1 e 2, para as quais os participantes precisam inter-relacionar aspectos intuitivos (dobraduras), algorítmicos e formais (propriedades). Dessa forma, são convidados a conjecturar sobre o processo de construção do triângulo e quais concepções de infinito emergem, ao justificar que, por menor que fique o triângulo hachurado a cada etapa, sempre é possível encontrar os pontos médios dos lados desse triângulo (ver figura 7) e fazer outra iteração. Trabalhar com essas questões é uma forma de convidá-los a desenvolver pensamentos abstratos e argumentos lógicos, relacionados a diferentes concepções de infinito, tanto o infinito real quanto o infinito potencial, com coerência matemática.

As **questões 5 e 6** discorrem sobre o que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior. Assim, os participantes precisam argumentar que a cada nova iteração os lados dos novos triângulos gerados são reduzidos com a razão 1/2, e o processo de iteração sempre será o mesmo, baseado na construção do triângulo, cujos vértices são os pontos médios dos lados de cada um dos triângulos não hachurados (ver figura 9) e que não têm os vértices do triângulo original.

A **questão 7** foi sugerida para o participante investigar se há alguma regularidade na forma com que as áreas aumentam no decorrer das iterações (aspectos algorítmicos e formais) e que regularidade é essa. A partir do entendimento da regularidade encontrada nas somas parciais, referente às etapas realizadas, observar que, a cada nova etapa, ao somar as áreas dos novos triângulos hachurados, a área aumenta ¾ da área da etapa anterior. Obtemos assim uma progressão geométrica de razão ¾ e primeiro termo positivo.

A **questão 8** traz à discussão as áreas dos triângulos (menores) que são gerados a cada nova etapa e que mostra uma regularidade na forma como as áreas desses triângulos diminuem no decorrer das iterações. O participante precisa observar que, conforme ocorrem as etapas, as áreas dos novos triângulos diminuem, aproximando-se de zero à medida que cada iteração é realizada. Isso acontece porque a cada nova etapa são gerados novos triângulos e cada um destes tem a área igual a ¼ da área do triângulo não hachurado.

Na **questão 9** queremos que os participantes analisem o que ocorre ao final do processo infinito (número infinito de etapas). Com base em aspectos formais e algorítmicos, gostaríamos que compreendessem que se trata de uma série geométrica, com implicações no critério de convergência, porque a razão é positiva e menor do que 1. É interessante que o professor estimule no aluno a ideia de convergência (infinito real), que é intuitivamente contraditória. Sabemos que compreender o infinito real pode ser uma tarefa bem complexa, como a adição de infinitos números - no caso, a área dos triângulos hachurados – que resulta em um número finito.

3.3.3.2. Fase 3 – Questionário 2 investigativo da tabela 2 – estudo do perímetro

Na fase 3, após o preenchimento da tabela 2, a proposta é analisar as respostas dadas por estudantes às questões colocadas no questionário 2 (ver quadro 4), com vistas ao comportamento do perímetro do Triângulo de Sierpinski,

Quadro 4 – Questionário 2 - estudo do perímetro (triângulos coloridos tabela 2)

1 – Existe alguma regularidade para o "**Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
2 - Existe alguma regularidade para o "**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
3 - A sequência formada pelos valores "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" é representada por uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?

4 – Qual a relação entre o "**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**" e o "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" quando o número de etapas tende ao infinito?

Fonte: autores

Na **questão 1,** os participantes são convidados a conjecturar que em qualquer uma das Etapas da construção do triângulo de Sierpinski, determinam-se os pontos médios dos lados dos triângulos não preenchidos e unem-se esses pontos, o que é sempre possível e gera o coeficiente de redução 1⁄2 no perímetro de cada novo triângulo hachurado. E, por menor que seja esse novo triângulo gerado, sempre é possível encontrar os pontos médios dos lados desses triângulos e fazer a próxima etapa, o que envolve uma noção de infinito real**.** Queremos que os participantes inter-relacionem aspectos intuitivos, algorítmicos e formais e descrevam uma expressão algébrica para o termo geral (genérico) e conjecturem, no caso, sobre o comprimento do lado de cada triângulo menor quando esse processo vai para infinito, e também sobre o perímetro desse triângulo.

Com as **questões 2, 3 e 4,** ao inter-relacionem aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, queremos que os participantes descrevam uma expressão algébrica para o termo geral (genérico) referente ao perímetro de cada triângulo colorido (menor) e para o perímetro total de todos os triângulos coloridos. Posto isto, a discussão gira em torno de uma relação que consideramos contraintuitiva entre o perímetro de cada triângulo menor e a soma dos perímetros de todos os triângulos, posto que, apesar de termos um fator de redução 1⁄2 no perímetro de cada triângulo, a cada Etapa, o perímetro total é 3/2 do perímetro anterior, ou seja, essa soma infinita tende para infinito enquanto o perímetro de cada triângulo colorido (menor) se aproxima de zero. Esperamos que os participantes façam ligações entre essas duas características e o professor abra uma discussão sobre o assunto em sala de aula, uma vez que é intuitivamente contraditório. Comparar os resultados nos dois casos, descrever algebricamente o genérico (aspectos formais) e o padrão encontrado no perímetro do Triângulo de Sierpinski ao final do processo infinito é assunto que precisa ser abordado.

Assim como explorar essas ideias que se apresentam contraintuitivas e analisar quais concepções de infinito (aspectos formais) emergem nas respostas de participantes, ao relacionarem o perímetro de cada triângulo menor e a soma resultante da adição dos perímetros de todos os triângulos hachurados. Sabemos que essas ideias relacionadas ao infinito são complexas, principalmente neste caso do perímetro, e devem ser sempre discutidas pelo professor de Matemática da Educação Básica, para que os alunos possam superar dificuldades inerentes ao infinito.

3.4. Atividade 2 – Sequência e progressões: construção do Triângulo de Sierpinski por meio do GeoGebra (GeoGebra Classic 5, GeoGebra Classic 6 e GeoGebra online)

❖ Conteúdo: Sequências; progressões (PA e PG); área do triângulo equilátero; somas infinitas (PG, com razão q, $0 < |q| < 1$); congruência de triângulos; potenciação de números inteiros positivos.

❖ Público alvo: Estudantes do ensino médio.

❖ Material: Caderno, lápis, caneta, borracha, Computador, Software GeoGebra

Um fractal bastante conhecido é o Triângulo de Sierpinski, que é formado a partir de um triângulo equilátero e, a partir dos pontos médios dos seus lados, inscreve-se um outro triângulo equilátero, o que dá origem a 4 triângulos congruentes, que compõem o triângulo original. Excluindo a área do triângulo inscrito, hachuramos e consideramos a área dos três triângulos restantes e que têm um dos vértices no vértice do triângulo original, obtemos a 1ª etapa. Na 2ª etapa, repete-se esse processo de construir 3 triângulos a partir dos pontos médios dos lados, em cada um dos 3 triângulos hachurados, e excluindo o triângulo inscrito (triângulo central), o que gera nove triângulos. Esse processo pode ser repetido infinitamente, o que gera o fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski.

A sequência de figuras abaixo apresenta as quatros primeiras etapas e podemos perceber algum padrão.

Figura 12 - Quatro primeiras etapas do Triângulo de Sierpinski

Fonte: Acervo pessoal

A seguir, apresentamos nossa proposta para a aplicação da Atividade 2 que, como no caso da Atividade 1, pode ser desenvolvida em três fases. Na fase 1, os participantes constroem o Triângulo de Sierpinski com o software GeoGebra (ao invés da dobradura proposta na fase 1 da Atividade 1). Na fase 2, precisam preencher duas tabelas, aqui denominadas Tabela 3 e Tabela 4, relacionadas, respectivamente, à área e ao perímetro do Triângulo de Sierpinski, ambas quase iguais à Tabela 1 e Tabela 2 da atividade 1, a única diferença é que propomos quatro etapas anteriores ao preenchimento das tabelas (ao invés de três, como no caso das dobraduras da Atividade 1). Na fase 3, os participantes respondem a dois Questionários Investigativos, um associado à Tabela 3 e o outro, à Tabela 4. No que segue, damos mais detalhes sobre a aplicação da Atividade 2, em cada uma das três fases.

3.4.1. Fase 1 – Construção do Triângulo de Sierpinski por meio do GeoGebra Classic 5

Nesta fase, é proposta aos participantes a construção do Triângulo de Sierpinski por meio do software GeoGebra (GeoGebra Classic 5, GeoGebra Classic 6 e GeoGebra online). O apelo "visual" oferecido pela geometria dinâmica (GeoGebra) pode induzir os participantes a "bons" aspectos intuitivos, de tal modo que provoque a interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, a percepção da regularidade e consequentemente desenvolve a generalização. Ao utilizar o software como uma ferramenta de aprendizagem, podemos explorar de forma interativa várias propriedades encontradas no processo de construção do Triângulo de Sierpinski.

O recurso computacional poderá trazer significativas contribuições ao desenvolvimento de nossa proposta. A construção do Triângulo de Sierpinski por meio do GeoGebra explora o processo iterativo de uma forma mais intensa do que recursos convencionais. Dessa forma, uma das contribuições obtidas com o software GeoGebra Classic 5 é que podemos ter uma precisão das medidas por meio do comando "zoom", conforme as iterações vão aumentando, o que possibilita aos participantes observarem e visualizarem a repetição encontrada no Triângulo de Sierpinski em partes extremamente pequenas, conforme ocorre o processo de iteração. Isto posto, a utilização do recurso computacional de "dar o zoom" pode dar ao participante aspectos intuitivos mais construtivos para aceitar que o processo pode ser considerado infinito. Assim, com o comando "zoom" o participante poderá conjecturar que, por menor que seja esse novo triângulo gerado, sempre é possível encontrar os pontos médios dos lados desses triângulos e realizar mais uma etapa, o que envolve a ideia do infinito real.

Outra característica da utilização do GeoGebra para a construção do Triângulo de Sierpinski é a criação de ferramentas personalizadas (ou macros, mais detalhes na descrição que segue). Com essa função, é possível automatizar o processo de construção do Triângulo de Sierpinki, o que pode induzir também a importância dos pontos médios dos lados na construção e evita a repetição manual de tarefas. Alguns comandos do GeoGebra são muito importantes e podem ser utilizados para a construção dos infinitos triângulos que compõem o Triângulo de Sierpinski, a partir de um determinado parâmetro. Com o desenvolvimento de uma ferramenta com o parâmetro escolhido, aplicamos o procedimento a cada triângulo criado, em cada iteração. A escolha do parâmetro, se analisada matematicamente, pode indicar ao estudante como responder à questão 1. "Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?", que sugerimos colocar no questionário investigativo da atividade 1.

Outra vantagem da utilização do GeoGebra, talvez a mais importante, é a possibilidade de professores e alunos trabalharem em um ambiente de Geometria dinâmico e interativo. O trabalho com conceitos e concepções matemáticos complexos, como no caso do infinito, aliado ao suporte tecnológico provido por uma Geometria Dinâmica, pode facilitar ao sujeito desenvolver a ideia de infinito real, com aspectos intuitivos "bons" e, com isso, inter-relacionar aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.

A seguir, apresentamos o passo a passo da construção do triângulo de Sierpinski no GeoGebra.

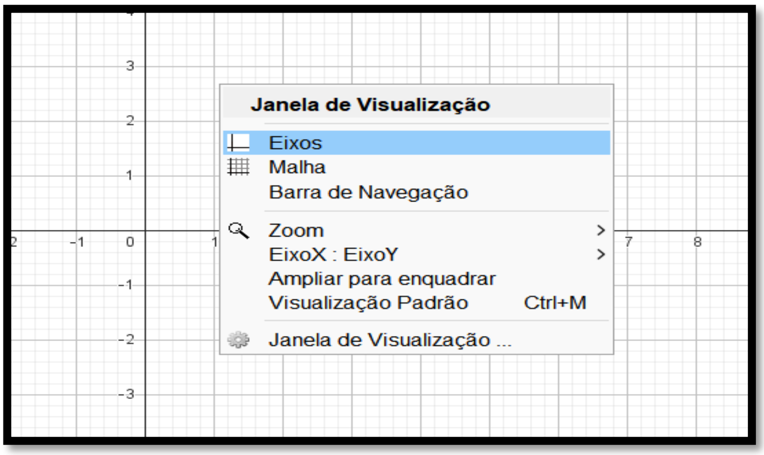
3.4.1.1. Processo de construção no GeoGebra Classic 5

Escolhemos usar o GeoGebra Classic 5, mas é possível fazer a construção do Triângulo de Sierpinski com qualquer versão disponível do GeoGebra, que permita a construção de macros. No nosso caso, os seguintes passos foram seguidos.

1) Primeiramente, clique com o botão direito do mouse e desabilite o **Eixo** e a **Malha** da tela inicial, veja a figura 13. Agora, faça um triângulo equilátero na janela de visualização do GeoGebra. Para isso, vá na barra de ferramentas, clique na ferramenta 5, selecione o "**Polígono regular"**, clique na janela de visualização uma vez e arraste até o comprimento desejado para a base do triângulo equilátero. Ao clicar de novo, abrirá uma janela, onde

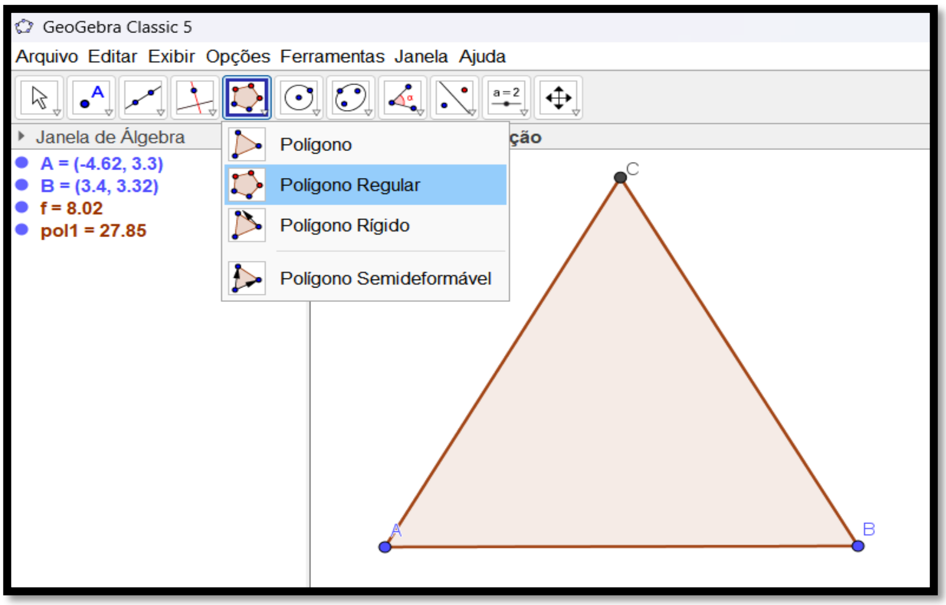
deverá ser colocado o número 3, clicar em ok, formando assim um triângulo equilátero, conforme a figura 14.

Figura 13 - Tela inicial GeoGebra Classic 5



Fonte: Autores

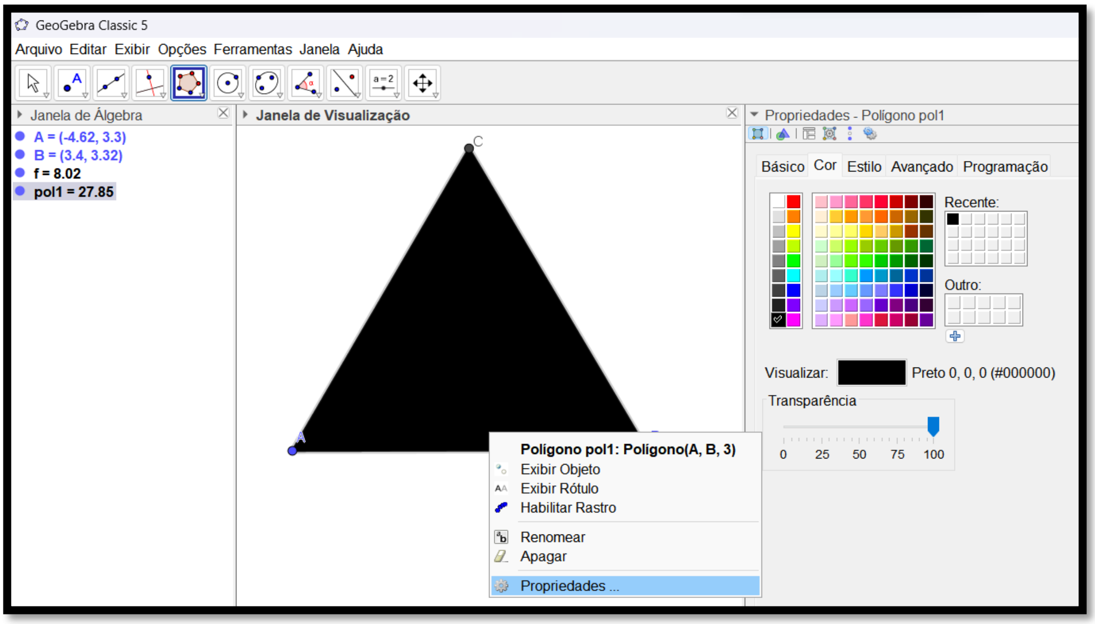
Figura 14 - Triângulo equilátero



Fonte: Autores

2) Agora, vamos escolher uma cor para o triângulo. Primeiramente, clique com o botão direito em cima do triângulo e em seguida em "**Propriedades**", abrirá uma nova janela. Após, altere a cor do triângulo para preto clicando sobre a cor e em seguida escolha 100% de "**Transparência".** Conforme a figura 15.

Figura 15: Cor do triângulo Equilátero (etapa 0 da tabela 3 e 4)

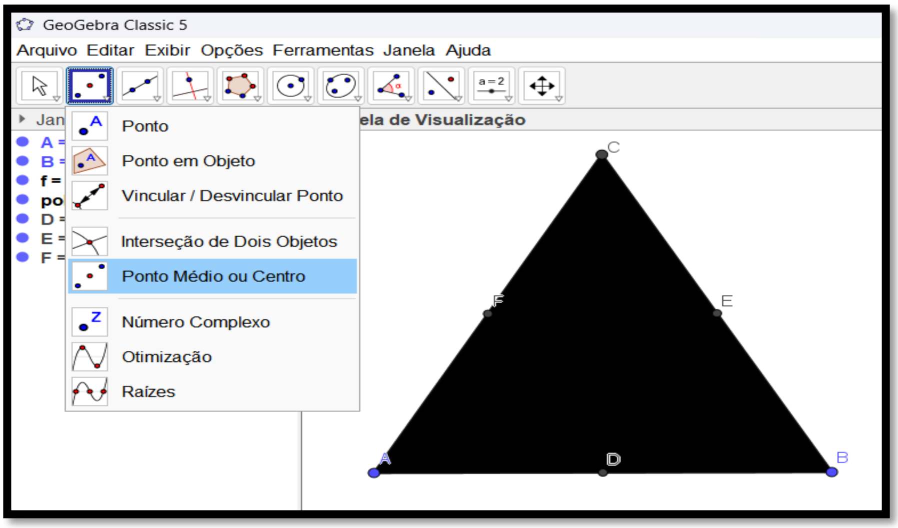


Fonte: Autores

3) Na segunda opção de ferramenta, será feito os pontos médios D, E F. Clique em **Ponto Médio** e na sequência clique em cada ponto do triângulo ABC na seguinte sequência:

A →B, depois B→ C e em seguida C→ A ou vice-versa. Veja a figura 16.

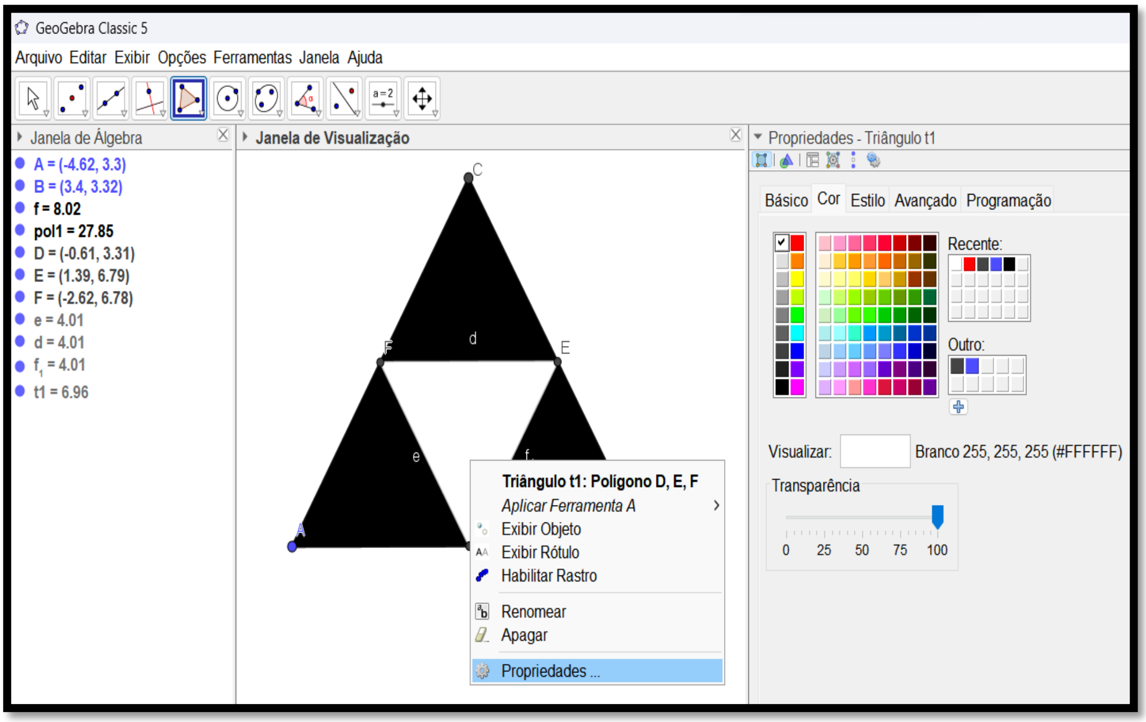
Figura 16 - Pontos médios D, E F



Fonte: Autores

4) Construa o triângulo DEF (triângulo branco), cujos vértices são os pontos médios D, E F, do triângulo ABC. Assim, clique na opção “**Polígono”** da barra de ferramentas e em seguida clique nos pontos médios D, E, F e D do triângulo ABC. Será formado o triângulo DEF (figura 17). Logo após, clique com o botão direito sobre o triângulo DEF, vá em “**Propriedade”** e altere a cor deste triângulo para branco, colocando na “**Transparência”** 100 %.

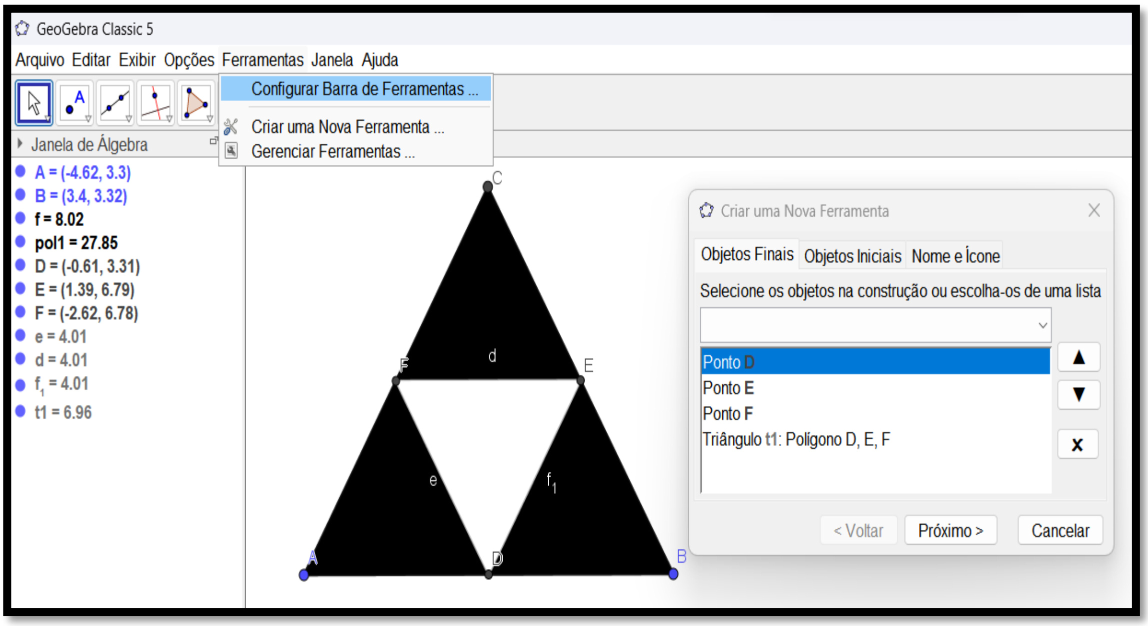
Figura 17 - Triângulo DEF (etapa 1 da tabela e tabela 3 e 4)



Fonte: Autores

5) Vamos criar uma ferramenta para montar as etapas de iteração do Triângulo de Sierpinki. Abra o menu “**Ferramentas”** e clique em “**Criar ferramentas**”. Abrirá uma janela. Em “**Objetos Finais**”, clique na setinha para baixo que aparece abaixo da frase “**Selecione os objetos da construção ou escolha-os de uma lista**”. Selecione os três pontos médios D, E e F, e o triângulo 2 (polígono FDE - triângulo brancos) construído, conforme a figura 18.

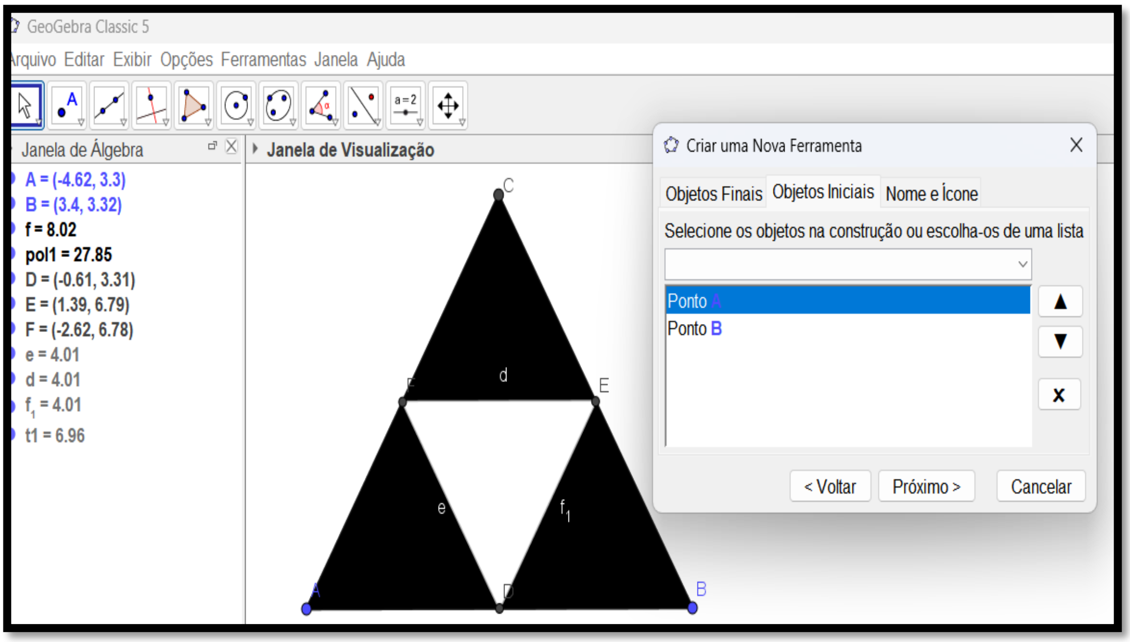
Figura 18 - Criar uma ferramenta



Fonte: Autores

6) Em seguida, clique em Próximo para “**Objetos Iniciais**”. Os pontos. A e ponto B são selecionados automaticamente, conforme a figura 19.

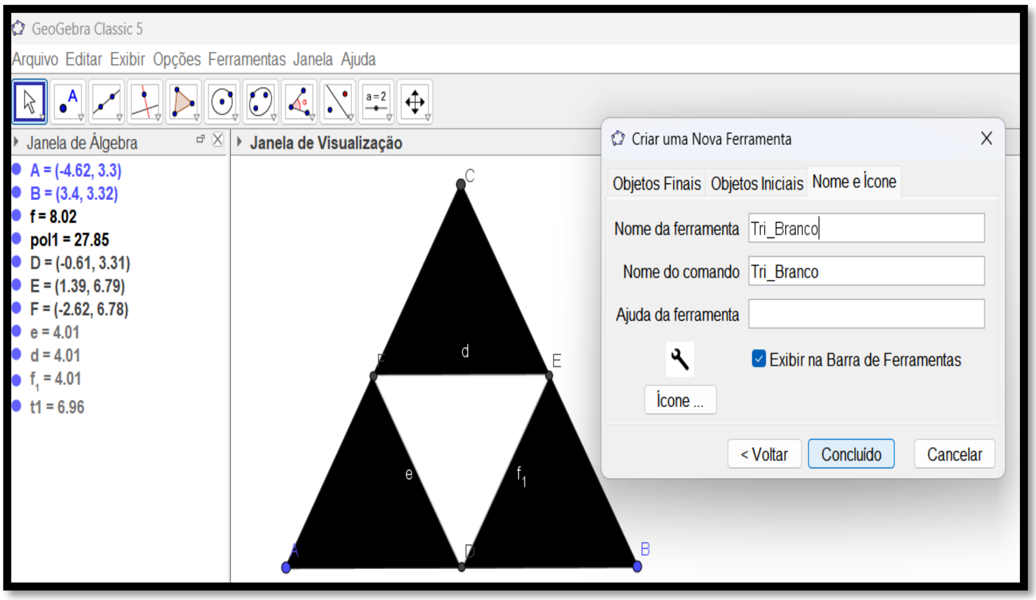
Figura 19 - Objetos iniciais



Fonte: Autores

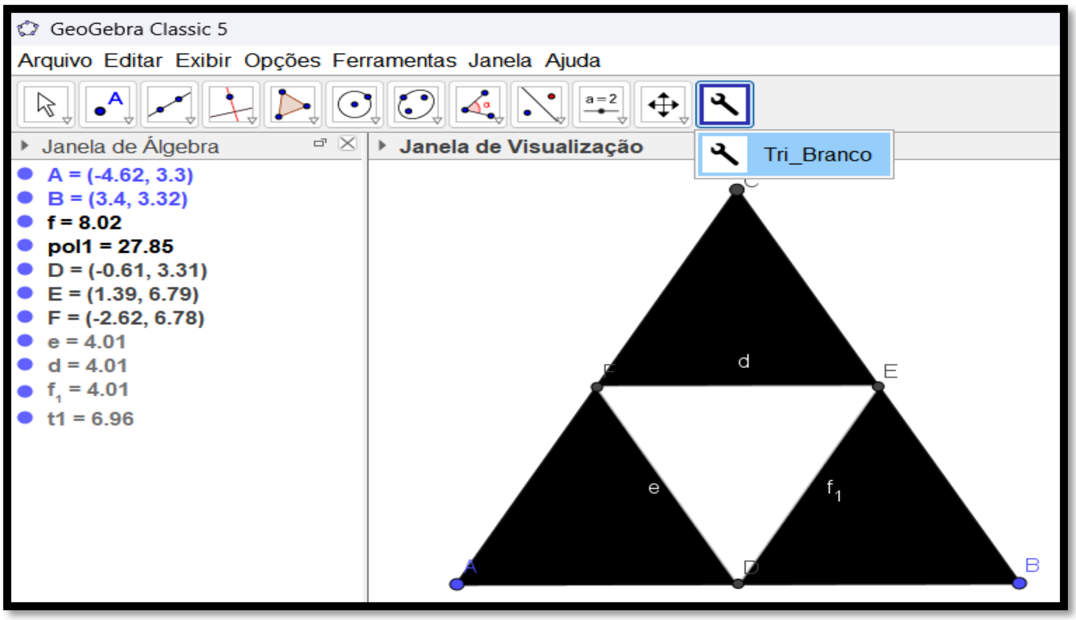
7) Em “**Nome e Ícone**”, dê um nome à ferramenta, de sua opção – por exemplo: Tri_Branco - e clique em concluído. Aparecerá um novo ícone na barra de ferramentas referente à ferramenta criada, conforme as figuras 20 e 21.

Figura 20 - Nome para a ferramenta



Fonte: Autores

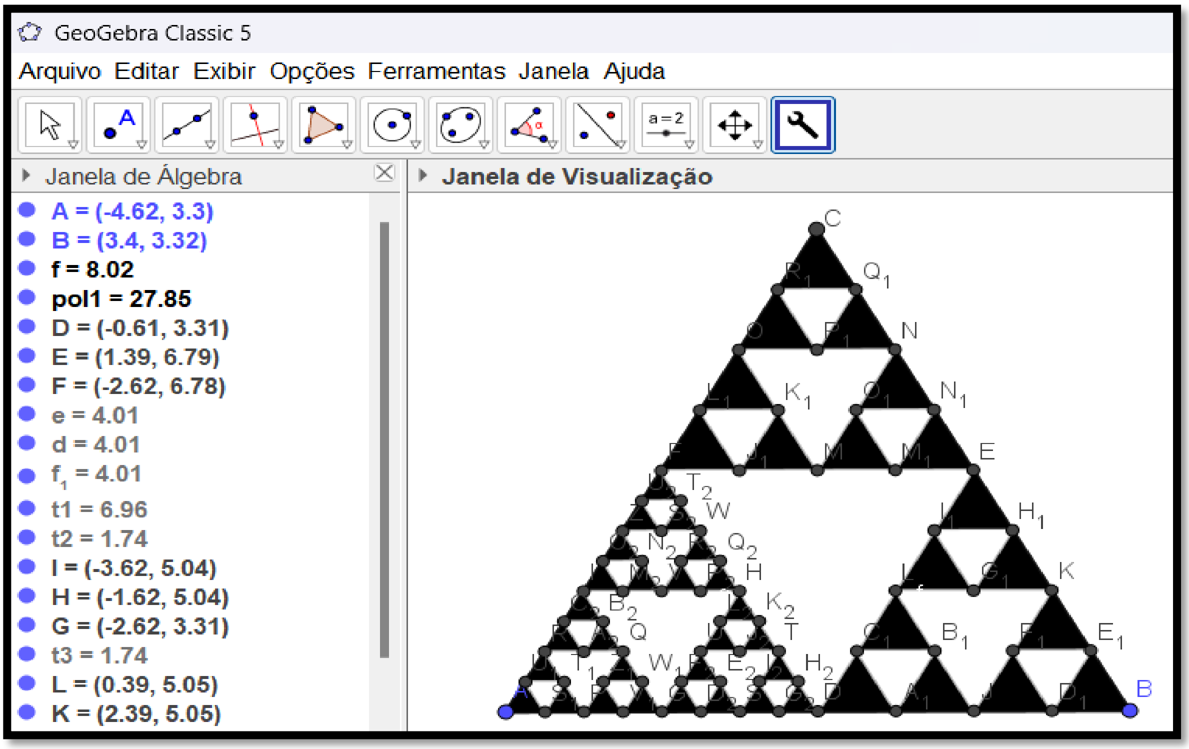
Figura 21 - Ícone da nova ferramenta



Fonte: Autores

8) Monte o Triângulo de Sierpinski conforme as etapas. Clique no ícone da nova ferramenta e depois em dois vértices de um dos triângulos que estão coloridos, contudo, que seja no sentido da esquerda (→) para a direita. Logo após, faça a mesma coisa nos outros dois triângulos coloridos. Agora repita o mesmo processo em cada um dos triângulos que estão coloridos e assim sucessivamente, conforme a figura 22.

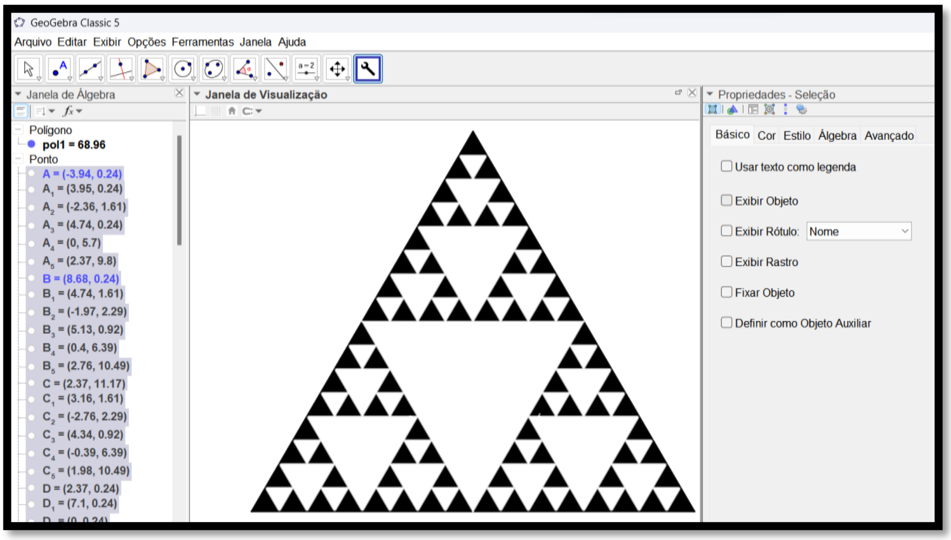
Figura 22 - Criando o Triângulo de Sierpinski



Fonte: Autores

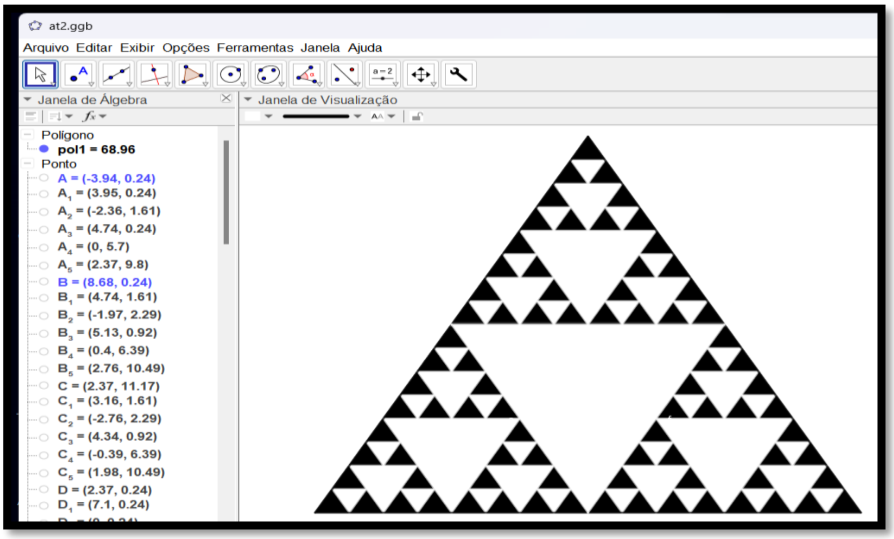
9) Agora, todos os pontos e segmentos serão apagados de forma que apenas o triângulo fique visível. Na **Janela de Álgebra,** Clique em "**Ponto",** assim todos os pontos da construção seram selecionados (veja os locais marcados na figura 23), após, clique com o botão direito do mouse em propriedades. Após, desmarque a opção "**Exibir Objeto**" e "**Exibir Rótulo**", aguarde e clique em fechar. Assim, temos apenas o Triângulo de Sierpinski visível, conforme a figura 24.

Figura 23 - Esconder os Pontos e seguimentos



Fonte: Autores

Figura 24 - Triângulo de Sierpinski (etapa 4 da tabela 3 e 4)



Fonte: Autores

3.4.2. Fase 2 – estudos da área e do perímetro do Triângulo de Sierpinski

Dando continuidade à atividade 2, propomos uma análise dos comportamentos da área e do perímetro do Triângulo de Sierpinski, com base nos passos realizados na Fase 1, com o GeoGebra, e de forma análoga à que foi feita na Atividade 1, ou seja, o preenchimento de duas tabelas, Tabela 3 para a área e Tabela 4 para o perímetro. Como destacamos no início da sessão 3.4, acrescentamos uma linha nessas tabelas, porque sugerimos realizar 4 etapas iniciais, em lugar de 3 (caso da Atividade 1), para ajudar o desenvolvimento de aspectos intuitivos. Com isso, cada uma dessas tabelas tem 7 linhas e 5 colunas (na Atividade1, as tabelas 1 e 2 têm 6 linhas e 5 colunas).

3.4.2.1. Preenchimento da Tabela 3 da Fase 2 - Estudo da área colorida

Tabela 3 - Estudo da área colorida - triângulos pintados

Desenho Representação Figural	**Etapa (n)**	**Números total de triângulos pretos (todos)**	**Área de cada triângulo preto (menor)**	**Área total de todos os triângulos pretos (somas parciais)**
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			
...	...	...	...	...
Genérico $\longrightarrow$				
...	...	...	...	...
Quando o número de etapas tende ao infinito $(\boldsymbol{n} \to \infty)$				

Fonte: autores

Construção (Atividade 2 - Triângulo de Sierpinski), realizada pelos autores, com controle deslizante e informações sobre suas medidas de áreas, que pode ser encontrada no link: https://www.geogebra.org/m/eejcsurn.

Procedimentos a serem seguidos para o preenchimento da Tabela 3

COLUNA 1

Pede-se o registro figural das figuras obtidas na Fase 1, com destaque para os triângulos pretos. Acreditamos que o processo de construção por meio do GeoGebra provocará “bons” aspectos intuitivos, a consequente interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais e a regularidade que pode ser percebida na passagem do GeoGebra para a representação figural. Sugerimos quatro etapas no GeoGebra e o desenvolvimento de uma ferramenta (macro) que automatiza essas etapas e torna possível perceber a regularidade do processo de construção do triângulo de Sierpinski, principalmente baseada na existência dos pontos médios dos lados de cada triângulo hachurado, por menor que seja, o que pode ser melhor observado com o comando “zoom¨. Esta última característica não é tão fácil de aceitar no trabalho com a dobradura, por exemplo.

A sequência abaixo ilustra como deve ser a representação figural:

$etapa\ 0\ \rightarrow$  $etapa\ 1 \rightarrow$  $etapa\ 2 \rightarrow$ 

$etapa\ 3\ \rightarrow$  $etapa\ 4\ \rightarrow$ 

COLUNA 2

As cinco primeiras linhas já estão preenchidas com 0, 1, 2, 3 e 4 e correspondem às etapas realizadas no Geogebra. É preciso preencher a célula correspondente à Etapa genérica (linha “6”) com uma letra (n por exemplo) e a célula correspondente à etapa relativa ao infinito (linha “7”), com o símbolo ($n \rightarrow \infty$) e que representa o “infinito real”.

COLUNA 3

Pede-se o registro numérico da quantidade de triângulos pretos gerados no GeoGebra, o que envolve a conversão do registro figural/desenho para o registro numérico. Sugerimos a contagem do número total de triângulos hachurados em cada nova etapa. Esse registro numérico vai permitir que o participante compreenda que o conjunto formado por esses números segue uma PG de razão 3 (1, 3, 9, 27, ...). Observe a sequência abaixo.

$$\boldsymbol{etapa0} \rightarrow 1 triângulo \qquad \boldsymbol{etapa1} \rightarrow 3\ triângulos \qquad \boldsymbol{etapa2} \rightarrow 9\ triângulos$$

$$\boldsymbol{etapa3} \rightarrow 27\ triângulos \qquad \boldsymbol{etapa4} \rightarrow 81\ triângulos$$

COLUNA 4

Pede-se a área do menor triângulo hachurado (ou pintado) em cada uma das Etapas, nas cinco primeiras linhas, para depois generalizar essa área, fazendo uso da mesma “letra” - l por exemplo – usada para representar de forma genérica o lado do triângulo equilátero. No que segue, ilustramos o comportamento deste padrão.

$$\boldsymbol{etapa\ 0} \rightarrow \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) \qquad \boldsymbol{etapa\ 1} \rightarrow \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\right) \qquad \boldsymbol{etapa\ 2} \rightarrow \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right)$$

$$\boldsymbol{etapa\ 3} \rightarrow \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right) \qquad \boldsymbol{etapa\ 4} \rightarrow \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}\right)$$

COLUNA 5

Pede-se a soma das áreas dos triângulos pretos e que podem ser visualizados no registro figural correspondente, por meio de um registro algébrico. Cada uma delas representa uma soma parcial para obtenção da soma total das áreas do Triângulo de Sierpinski, que já deve ter sido identificada como uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$ e primeiro termo $\frac{\boldsymbol{l}^2\sqrt{3}}{4}$, de acordo com a sequência

Etapa zero, temos o triângulo preto inicial de área total $\rightarrow \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Etapa um, temos 3 triângulos pretos de área $\frac{1}{4}$ da área original $\rightarrow 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\right)$

Etapa dois, temos 9 triângulos pretos de área $(\frac{1}{4})^2$ da área original $\rightarrow 3^2.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right)$

Etapa três, temos 27 triângulos pretos de área $(\frac{1}{4})^3$ da área original $\rightarrow 3^3.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right)$

Etapa quatro, temos 81 triângulos pretos de área $(\frac{1}{4})^4$ da área original $\rightarrow 3^4.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}\right)$

6ª LINHA

Pede-se a generalização do que ocorre nas 4 primeiras etapas, ou seja, a soma parcial de ordem **n** das somas das áreas dos triângulos pretos, o que corresponde à etapa n da construção com o GeoGebra. Esta generalização não é elementar nem imediata e o professor precisa estar atento para essa discussão que, no nosso entender, só vai ocorrer com a interação de aspectos intuitivos (“bons”), algorítmicos e formais.

Coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5
Genérico $\longrightarrow$	$\boldsymbol{n}$	$3^{\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{com}\ \boldsymbol{n} \geq 0$	$\frac{\boldsymbol{l}^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{com}\ \boldsymbol{n} \geq 0$	$\frac{\boldsymbol{l}^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{com}\ \boldsymbol{n} \geq 0$

7ª LINHA

Pede-se a generalização do que ocorre ao final do processo infinito (número infinito de etapas), que corresponde a fazer uma adição com infinitas parcelas (infinito real) e que resulta numa soma finita (infinito potencial), resultante da soma infinita de uma PG de razão positiva e menor do que um (no caso, ¾). Para isso, o participante precisa se basear em aspectos algorítmicos e formais. É importante que o professor discuta o que acontece com os estudantes, inclusive para fazer vir à tona que a área de cada triângulo preto é cada vez menor e que a soma total é igual à área do triângulo inicial. Também que a soma é um número finito porque as áreas não se sobrepõem e estão todas contidas na região delimitada pelo triângulo inicial. Essas ideias não são elementares nem espontâneas, dizem muitas pesquisas a respeito. Observe a seguir.

Coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5
Quando o número de etapas tende ao infinito $(\boldsymbol{n} \to \infty)$	$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{n} = \infty$ $\boldsymbol{com}\ \boldsymbol{n} \geq 0$	$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} 3^{\boldsymbol{n}} = \infty$ $\boldsymbol{com}\ \boldsymbol{n} \geq 0$	$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} = \frac{\boldsymbol{l}^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\boldsymbol{n}} = 0$ $\boldsymbol{com}\ \boldsymbol{n} \geq 0$	$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} = \frac{\boldsymbol{l}^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\boldsymbol{n}} = 0$ $\boldsymbol{com}\ \boldsymbol{n} \geq 0$

Dessa forma, os participantes são convidados a conjecturar sobre o processo de construção do Triângulo de Sierpinski e quais concepções de infinito aparecem após as cinco etapas realizadas.

3.4.2.2. Preenchimento da Tabela 4 da Fase 2 - estudo do perímetro

Dando continuidade à atividade, realizamos uma análise do comportamento do perímetro do Triângulo de Sierpinski a partir das quatro Etapas no GeoGebra.

Tabela 4 - Estudo do perímetro - triângulos pretos

Desenho Representação Figural	**Etapa (n)**	**Comprimento do lado de cada triângulo preto (menor)**	**Perímetro de cada triângulo preto (menor)**	**Perímetro total de todos triângulos pretos**
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			
...	...	...	...	...
$\overrightarrow{\textbf{Genérico}}$				
...	...	...	...	...
Quando o número de etapas tende ao infinito ($\mathbf{n} \to \infty$)				

Fonte: autores

Destacarmos que os procedimentos a serem seguidos para a tabela 4 (ver apêndice G) são similares à tabela 2, referentes ao estudo do perímetro da atividade 1. A única diferença é que propomos quatro etapas (ao invés de três, como no caso da Atividade 1).

3.4.3. Fase 3 – Questionários investigativos

A proposta é que os participantes respondam as questões (ver quadro 5) relacionadas às ideias de infinito (como processo) e de convergência. Com a identificação e categorização de erros, acertos e dificuldades, podemos comparar as respostas para avaliar se houve, ou não, a presença e a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais (FISCHBEIN, 1994).

3.4.3.1. Questionário 3 investigativo da tabela 3 – estudo da área

Quadro 5 – questionário 3 - Estudo da área (triângulos coloridos)

1 - Existe uma expressão/representação genérica para a sequência dada pelos dos valores da coluna " **Números total de triângulos pretos (todos)**"? Se sim, qual é? O que acontece quando $n \to \infty$?
2 - A sequência formada pelos valores da coluna "**área de cada triângulo preto (menor)**" forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando $n \to \infty$?
3 - A sequência formada pelos valores da coluna **"área total de todos os triângulos pretos"** forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é?
4 - A cada novo termo (etapa), a sequência "**área total de todos os triângulos pretos"** tende se aproxima algum valor específico? Se sim, qual é este valor? E quando o número de etapas (termos) tende ao infinito? Que valor é esse?

Fonte: autores

Com a **questão 1,** foi sugerida para o participante investigar se há alguma regularidade na forma com que o número de triângulos pretos aumenta no decorrer das iterações (aspectos algorítmicos), que regularidade é essa e o que acontece quando temos infinitas etapas. Desta forma, ao inter-relacionem aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, descrevam uma expressão algébrica para o termo geral (genérico).

Na **questão 2,** o participante precisa atentar ao fato de que, conforme ocorrem as etapas, as áreas dos novos triângulos diminuem, aproximando-se de zero à medida que cada iteração é realizada, investigar se há alguma regularidade na forma como a área de cada triângulo preto gerado diminui no decorrer das iterações, e que cada um desses novos triângulos tem a área reduzida por um fator de 1/4. Espera-se que o participante perceba que a sequência formada pelos triângulos novos gerados está em modelo de progressão e assim, a partir da observação desse padrão, possam escrever uma fórmula geral (genérico) ao inter-relacionar aspectos formais, algorítmicos e intuitivos (FISCHBEIN, 1994).

Nas questões **3 e 4** queremos que os participantes analisem o que ocorre ao final do processo infinito (número infinito de etapas). Precisam investigar se há alguma regularidade na forma como a área de todos os triângulos pretos diminuem no decorrer das iterações. Com base em aspectos formais, gostaríamos que o participante compreendesse a relação existente entre os processos de construção do triângulo e suas implicações no critério de convergência, a qual pode ser representada por uma progressão geométrica. Posto isto, a intereção de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, poderá induzir os participantes a descrever uma expressão algébrica para o termo geral (genérico). Trabalhar com essas questões é uma forma de convidá-los a desenvolver ideias e concepções de infinito, despertando a curiosidade e a interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.

.

3.4.3.2. Questionário 4 investigativo da tabela 4 – estudo do perímetro

Quadro 6 – Questionário 4 - estudo do perímetro (triângulos coloridos tabela 2)

1 – Existe alguma regularidade para o "**Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
2 - Existe alguma regularidade para o "**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação para o termo geral? Se sim, qual é?
3 - A sequência formada pelos valores "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" é representada uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação para o termo geral? Se sim, qual é?
4 – Qual a relação entre o "**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**" e o "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" quando o número de etapas tende ao infinito?

Fonte: autores

Na **questão 1,** queremos que os participantes descrevam uma expressão algébrica para o termo geral (genérico) e conjecturem, no caso, sobre o comprimento do lado de cada triângulo menor quando esse processo vai para infinito, e sobre o perímetro desse triângulo. E, a partir disso, inter-relacionem aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.

Com as **questões 2, 3 e 4,** esperamos que os participantes façam ligações entre o perímetro de cada triângulo menor e a soma dos perímetros de todos os triângulos, posto que, apesar de termos um fator de redução $1/2$ no perímetro de cada triângulo, a cada Etapa, o perímetro total é 3/2 do perímetro anterior, ou seja, essa soma infinita tende para infinito enquanto o perímetro de cada triângulo se aproxima de zero. Posto isto, comparar os resultados nos dois casos, descrever algebricamente o genérico (aspectos formais) e o padrão encontrado no perímetro do Triângulo de Sierpinski ao final do processo infinito é assunto que precisa ser abordado.

3.5. Relação contraintuitiva existente na área hachurada e no perímetro do Triângulo de Sierpinski (atividades 1 e 2)

Por fim, seria interessante uma discussão do que foi visto nas etapas das atividades. Uma retrospectiva instigando os participantes a apresentarem o que foi desenvolvido. Ao realizar as etapas (área e perímetro) por meio do GeoGebra Classic 5 e/ou por meio da dobradura, o participante se depara com algumas propriedades interessantes do Triângulo de Sierpinski.

Por exemplo, na atividade 1, a área hachurada fica $3/4$ é maior a cada etapa, pois é representada por uma série geométrica dada por uma PG, com razão 3/4; no limite desse processo, a área converge, ou seja, a área do triângulo é representada por um número fixo $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. No caso do perímetro, obtivemos uma progressão geométrica de razão 3/2 e primeiro termo positivo, o que significa que a progressão geométrica tende para infinito quando $n \to \infty$. Conforme descrevemos a seguir.

$$área \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} l^2\frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\ , \ \ com\ n \geq 1$$

$$perímetro \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{3l}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} = \infty\ , \ \ com\ n \geq 1$$

Vale destacar que, a mesma análise se aplica a atividade 2, entretanto, a área hachurada fica $3/4$ menor a cada Etapa e converge para zero e o perímetro vai para infinito. Em suma, gostaríamos que os participantes conseguissem relacionar a área hachurada ao perímetro, investigando padrões em cada etapa da construção. Desta forma, conjecturar que o perímetro aumenta indefinidamente à medida que aumentamos o número de Etapas na construção do Triângulo de Sierpinski. Isto leva a uma conclusão aparentemente contraditória, pois a área total representada pelos infinitos triângulos converge para um valor fixo (finito) enquanto o perímetro representado pelos infinitos triângulos aumenta indefinidamente. Como já mencionado, este é exemplo de um objeto matemático que aparenta ser contraditório aos estudantes.

Com base na análise das três fases das atividades, ao relacionar a área com perímetro, observar como os alunos coordenam a área hachurada e o perímetro e lidam com uma situação nada trivial. Dado que noções diretas da área e do perímetro de formas geométricas são apreendidas pela primeira vez no ensino fundamental e são revisitadas e aproveitadas ao longo do ensino fundamental e médio. Embora a maioria das escolas de Ensino Médio não estudem noções de limites, é possível por meio do Triângulo de Sierpinski introduzir uma ideia sobre o assunto. Explorando a Matemática dos fractais no Ensino Médio por meio de situações dinâmicas e interativas, como no caso do GeoGebra. O entendimento é intuitivo e pode ser perfeitamente absorvido pelos alunos. desenvolvendo neles a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais (FISCHBEIN, 1994).

3.6. Análise didática das atividades 1,2 e 3

Percebemos, em contato com nossos alunos, que estes se espantam com a ideia de que a soma das áreas de infinitos triângulos pode ser um número finito, o que, em Matemática, pode aparecer na forma “essa soma converge para um determinado valor numérico”. Esse espanto (aspectos intuitivos “ruins”), que não consideramos trivial, fez-nos optar por desenvolver atividades que promovam discussões entre os estudantes, para provocar curiosidade, interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais e explorar a percepção do infinito, no caso com a área e o perímetro de infinitos triângulos, visto que muitos pensam que quanto maior for o perímetro de uma figura, maior será a sua área (ou vice-versa), ou que a adição de infinitas parcelas sempre resultará numa soma infinita.

Com as atividades propostas, buscamos promover a análise de padrões e de regularidades em representações figurais, numéricas e algébricas, discutir processos de conversão e de tratamento desses registros (DUVAL, 2009) e verificar se os participantes apresentam e/ou interagem (ou não) aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994. Também pretendemos identificar concepções de infinito que emergem nas respostas dos participantes. As atividades propostas foram elaboradas com foco em alunos do Ensino Médio, mas podem ser utilizadas no Ensino Fundamental Anos Finais, com eventuais acertos de linguagem.

3.6.1. Justificativa

Com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009), um estudante precisa conhecer, discriminar e saber usar pelo menos dois sistemas de representação semiótica, o que não é espontâneo e precisa ser trabalhado pelo professor de Matemática em sala de aula. No caso de nossas atividades, as 3 fases propostas em cada uma delas - atividade 1: dobradura (fase 1), tabela (fase 2) e questionário (fase 3); atividades 2: GeoGebra (fase 1), tabela (fase 2) e questionário (fase 3) - estão relacionadas ao uso de pelo menos três representações semióticas, bem como aos tratamentos e às conversões entre esses registros (DUVAL, 2009). Com isso, esperamos favorecer interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994). Numa análise individualizada, porém, não única, podemos supor que aspectos intuitivos aparecem na fase 1 relativa às dobraduras (na atividade 1)/GeoGebra (na atividade 2); algorítmicos, com a “conversão” entre a dobradura/GeoGebra e os desenhos/figuras e/ou as expressões algébricas solicitadas; formais, nas conversões anteriores e nas generalizações. O apelo visual, provocado pela dobradura e/ou GeoGebra, pode dar aos estudantes argumentos e ferramentas para responder diferentemente questões que podem ser não intuitivas.

No caso do infinito, constatamos, em contato com estudantes, que, para estes, o infinito é apenas uma potencialidade (infinito potencial), um processo sem fim, enquanto a ideia de “soma infinita” no caso do infinito real, é intuitivamente contraditório. Algumas situações de ensino na Educação Básica podem induzir nos estudantes a ideia de que “sempre” o infinito está relacionado a algo/valor muito grande, como um processo sem fim (infinito potencial), porém, é importante desconstruir conclusões equivocadas, para que eles possam desenvolver concepções de infinito, tanto real quanto potencial, com coerência matemática. Em busca de diagnosticar se isso é verdade, identificamos que as ideias relacionadas ao conceito de infinito costumam aparecer no Ensino Fundamental – Anos Finais, especificamente no 8º ano, em sequências e dízimas periódicas e, apesar disso, não encontramos em muitos materiais didáticos, um espaço que incentive o professor a trabalhar com essas ideias relacionas ao infinito de forma estruturada. Por essa razão, trabalhar com o infinito – no caso de nossas atividades - pode ser uma boa oportunidade de convidá-los a desenvolver pensamentos abstratos, argumentos lógicos e generalizações matemáticas.

Ainda na direção de um diagnóstico sobre a ideia de infinito nos estudantes, encontramos em Fischbein, Tirosh e Melamed (1981) que muitas das dificuldades relacionadas à compreensão intuitiva em aprendizagem de Matemática podem ser causadas pela falta de representações intuitivas adequadas, ou seja, representações que provoquem nos participantes os “bons” aspectos intuitivos. Por isso, concordamos com estes autores que é necessária uma “boa” representação para provocar nos estudantes “bons” aspectos intuitivos que os levem a inter-relacionar aspectos algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994).

3.6.2. Objetivo das atividades propostas

Nosso objetivo é oferecer uma abordagem de sequências e séries geométricas para a Educação Básica, com a exploração de diferentes representações semióticas, com o intuito de provocar a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos no assunto, bem como ideias associadas ao infinito, seja como a “soma” resultante de uma adição com infinitas parcelas, seja como um processo com “infinitos” passos. Ou seja, por meio de uma abordagem com o tratamento e a conversão de várias representações semióticas (DUVAL, 2009), promover nos sujeitos bons aspectos intuitivos e a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos (FISCHBEIN, 1994). Diríamos que trabalhar com essa ideia de infinito por meio de diferentes representações e inter-relacionar aspectos intuitivos, algorítmicos e formais é o foco de nossas atividades.

3.7.Ações esperadas em cada fase

Com as atividades propostas, o professor pode explorar ideias básicas para a compreensão de conceitos como convergência de uma sequência e/ou de uma série geométrica e o infinito, tanto potencial como real. Para isso, a proposta é que o estudante, ao lidar com essas tarefas, realize as ações que descrevemos no que segue.

FASE 1

- Na atividade 1, realizar, por meio de dobradura, as três primeiras etapas do chamado Triângulo de Sierpinski.

- Na atividade 2, explorar, por meio do GeoGebra, as quatro primeiras etapas do chamado Triângulo de Sierpinski.

- Observar o processo de construção/dobradura do Triângulo de Sierpinski, nas etapas solicitadas, para identificar regularidades e padrões.

FASE 2

- Preencher uma tabela, associada ao processo de construção do Triângulo de Sierpinski, com registros de representação semiótica (Duval, 2009), especificamente os registros figural, numérico e algébrico.

- Utilizar diferentes registros de representação semiótica em sequências e séries geométricas (tratamento, conversão, registros algébrico, numérico e figural).

- Utilizar tratamentos e conversões desses diferentes registros.

- Analisar o comportamento de construção do Triângulo de Sierpinski, correspondente às Etapas 0, 1, 2, 3, n e ($n \to \infty$) da Fase 1.

- Descrever algebricamente (genérico) (aspectos algorítmicos e formais) o padrão encontrado no cálculo da área (tabelas 1 e 3) dos triângulos hachurados nas Etapas 0, 1, 2, 3 e n.

- Descrever formalmente (aspectos algorítmicos e formais) o que ocorre com a área (tabelas 1 e 3) dos triângulos hachurados ao final do processo infinito (número infinito de etapas), que corresponde a fazer ($n \to \infty$).
- Observar o padrão relacionado ao comportamento do perímetro (tabelas 2 e 4) dos triângulos hachurados.
- Descrever algebricamente (genérico) (aspectos algorítmicos e formais) o padrão encontrado no perímetro (tabelas 2 e 4) dos triângulos hachurados nas Etapas 0, 1, 2, 3 e n.
- Descrever formalmente (aspectos algorítmicos e formais) o que ocorre com o perímetro (tabelas 2 e 4) dos triângulos hachurados ao final do processo infinito (número infinito de etapas), que corresponde a fazer ($n \to \infty$).

FASE 3

- Responder um questionário investigativo, relacionado às fases 1 e 2.
- Analisar o comportamento de uma sequência e/ou série geométrica, para identificar a variação entre termos consecutivos e as implicações disso no critério de convergência (padrão) (tratamento, aspectos algorítmicos, intuitivos e formais).

Objetivos esperados dessas ações

- Partir de aspectos intuitivos (dobraduras/GeoGebra) para desenvolver aspectos algorítmicos e formais e a interação de todos (tratamento, conversão, definição e generalização).
- Partir de aspectos intuitivos (dobraduras/GeoGebra) para desenvolver "bons" aspectos intuitivos.
- Desenvolver concepções de infinito real, no caso da adição de infinitas parcelas de uma série (interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais).
- Desenvolver concepções de infinito potencial, no caso das dobraduras/GeoGebra e consequências disso (interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais).

- Desenvolver concepções de infinito real, no caso da adição de infinitas parcelas de uma P.G. com razão $0 < |q| < 1$.

- Apreender diferentes representações semióticas no estudo do infinito.

- Interagir aspectos algorítmicos, intuitivos e formais.

4. RELATO DA APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1 COM UM GRUPO DE SETE ESTUDANTES DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresentamos a análise dos dados obtidos com a Atividade 1 – a que parte da dobradura -, que foi aplicada em junho de 2021, com duração total de 1 hora e 40 minutos, a uma turma de sete participantes da 2ª série do Ensino Médio, do turno da manhã, em uma escola particular da cidade de São Paulo. A Escola e os participantes (alunos) foram avisados de que os dados e resultados obtidos seriam utilizados em nossa pesquisa e, conforme exigência da ética em pesquisa, assinaram, respectivamente, a Autorização, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ver Anexo3), bem como os responsáveis dos participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ver Anexo 4).

Vale destacar, duas observações importantes: a primeira, o pesquisador/professor não conhecia e não ministrava aula para a turma escolhida, pois era professor da 8ª série. Como as atividades desenvolvidas são propostas de ensino para estudantes do Ensino Médio, um professor de língua portuguesa concedeu de bom grado duas de suas aulas para o pesquisador aplicar a atividade 1; a segunda, estávamos no período da pandemia, com as restrições de circulação e isolamento social, escolas particulares e públicas estavam realizando o ensino híbrido, por conta disso, foi estabelecido um limite de 30% dos estudantes por sala, que se revezaram em um esquema de rodízio, que resultou um total de sete estudantes na sala escolhida.

Para apresentar os resultados da análise individual realizada deste capítulo, e para respeitar o código de ética para pesquisas com pessoas, utilizamos as siglas **P1, P2, P3, P4, P5, P6** e **P7** para referenciar os participantes.

4.1.Resultados obtidos com a aplicação da atividade 1

Nesta seção, apresentamos a análise dos dados obtidos com os protocolos dos sete participantes, com foco na identificação e classificação de erros que aparecem nas Tabelas 1 individuais e nas respostas dadas ao questionário investigativo, associados aos processos de conversão e tratamento propostos, bem como às generalizações pedidas (casos genéricos n e $n \rightarrow \infty$). Esta análise foi realizada considerando nossos pressupostos teóricos e nossos objetivos, o que significa que procuramos identificar: procedimentos e ideias equivocadas e analisar possíveis causas; a presença e a interação, ou não, de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, conforme ideias propostas por Fischbein (1994); e concepções de infinito que emergem nas respostas dos participantes, sob a perspectiva dada por Fischbein, Tirosh e Melamed (1981), para verificar se foram desenvolvidos "bons" aspectos intuitivos.

Dividimos esta secção em duas subsecções, 4.1.1 e 4.1.2. Apresentamos, na secção 4.1.1, a análise individual dos protocolos relativos ao preenchimento das Tabelas 1 e das respostas dadas ao questionário investigativo; e na 4.1.2, uma análise geral, baseada nos resultados individuais observados na secção 4.1.1

4.1.1. Análise das respostas dadas nas tabelas 1 e às questões do questionário investigativo

Optamos por apresentar a análise por participante para cada um dos quais montamos três quadros, nessa ordem

- um quadro, identificado por Quadro **F.Pi,** com duas fotos, uma da "dobradura" feita por cada participante e a outra, da Tabela 1 entregue por ele, identificada por Tabela **I.Pi**;
- outro quadro, identificado por Quadro **C.Pi**, com nossas observações sobre as respostas dadas por **Pi** e que podem ser vistas no Quadro **F.Pi** (dobradura e Tabela **I.Pi)**;
- e um terceiro quadro, identificado por Quadro **Q.Pi**, com as respostas dadas por **Pi** às questões do Questionário Investigativo e nossas observações a respeito delas.

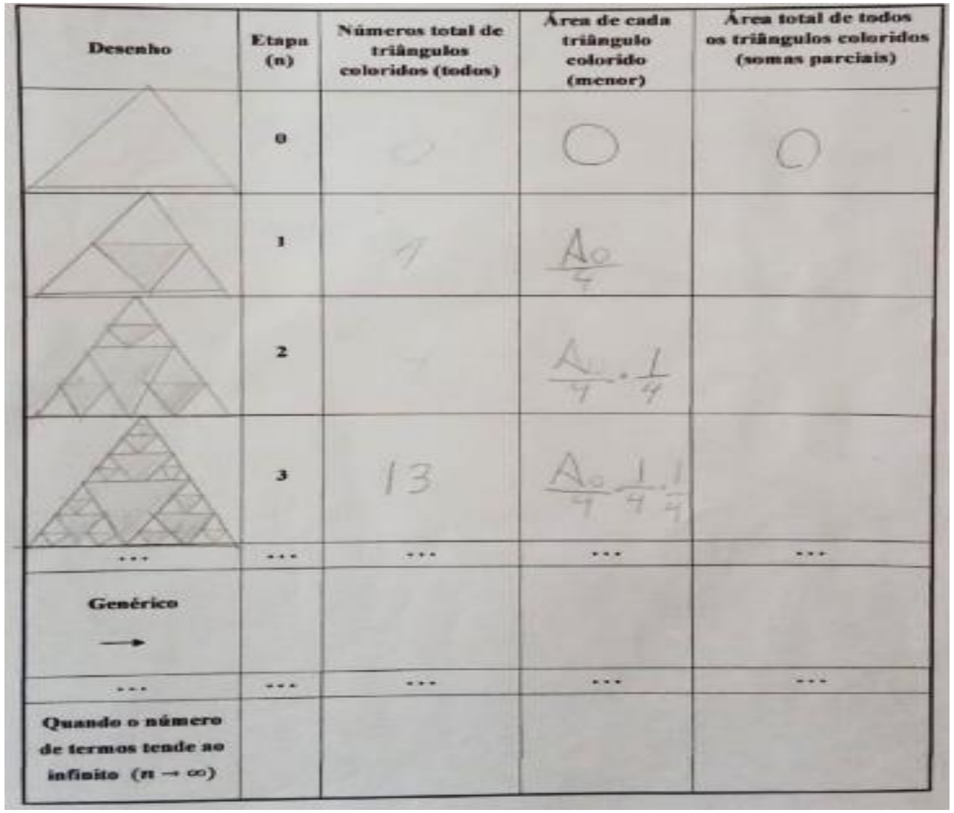
O Quadro **C.Pi** tem 3 colunas: na primeira, colocamos a ação esperada em cada coluna da Tabela 1; na segunda, pusemos **s (em azul)** para as respostas corretas e **n (em vermelho)** para as não corretas; na terceira, nossas observações sobre as respostas dadas por **Pi**. Em cada coluna, colocamos 10 linhas, uma para o título, oito para cada uma das ações esperadas e a 10ª linha para conclusões que julgamos pertinentes, relacionadas a **Pi**. Buscamos analisar se **Pi** realizou as ações esperadas, fez a passagem entre a dobradura e a representação figural, qual o resultado dessa passagem (representação figural), quais aspectos estão presentes e quais estão interrelacionados. Com base no que for observado a partir dos dados da tabela **I.Pi**, buscamos entender procedimentos e ideias equivocadas e suas possíveis causas, à luz da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais (FISCHBEIN, 1994) e se a atividade matemática apresentada por **Pi** mostra a presença de aspectos intuitivos que podem ser considerados “bons”.

Uma primeira observação antecipada e importante que fazemos é que nenhum dos participantes preencheu as linhas 5 e 6 da tabela 1, que correspondem, respectivamente, à generalização do número de etapas possíveis - **n** - e o que ocorre ao final do processo infinito de etapas. Com a análise das respostas, tanto as da tabela como as do questionário, poderemos buscar uma justificativa para isso. A segunda, é que, para a 4ª coluna, como os participantes tiveram dificuldade por não “saberem” o valor numérico da área do triângulo inicial, nem como representá-la genericamente, tivemos que sugerir, no decorrer da etapa 1, que a chamassem de **A**, o que indica a prevalência de aspectos intuitivos numéricos - definido por Souza (2008) - e falta de aspectos formais.

O Quadro **Q.Pi** tem 11 linhas e três colunas. Na primeira linha, colocamos os títulos dos conteúdos (Questões, Respostas e Observações). Nas nove linhas seguintes, colocamos, de acordo com esses títulos, a questão proposta, a resposta dada por **Pi** e nossas observações a respeito dessa resposta, e na 11ª linha (observações), uma análise geral com observações que consideramos importantes, relacionadas a **Pi.** Vamos destacar se os participantes mostram ter presentes, ou não, aspectos algorítmicos, intuitivos ou formais, bem como a interação deles, e identificar concepções de infinito que emergem nas respostas.

4.1.1.1. Análise das respostas do participante P1

Quadro 7: – F.P1 – Fotos da dobradura e da Tabela 1 preenchida por P1

Dobradura P1	Tabela IP1
	

Desenho	Etapa (n)	Números total de triângulos coloridos (todos)	Área de cada triângulo colorido (menor)	Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)
	0	0	0	0
	1	1	$\frac{A_0}{4}$	
	2	[illegible]	$\frac{A_0}{4}\cdot\frac{1}{4}$	
	3	13	$\frac{A_0}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	
...	...	...	...	...
Genérico →				
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)				

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 8: - C.P1 - Categorização das respostas de P1 para a Tabela 1

Ação esperada	**s / n**	**Observações**
Dobradura	**s**	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura, percebeu o padrão e hachurou os triângulos referentes às etapas.
Coluna 1 - Representação figural	**s**	Realizou a passagem da dobradura para a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	**n**	Não preencheu as células correspondentes aos genéricos n e $(n \to \infty)$, o que indica ausência de aspectos formais.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	**s**	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	**s**	Utilizou a razão ¼ relativa às áreas dos triângulos hachurados.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	**n**	Preencheu apenas a primeira célula (caso n=0), o que indica que não compreendeu a ideia das somas parciais e não inter-relaciona aspectos algorítmicos e formais ou não compreendeu o que se pedia.
Linha 5 – Genérico	**n**	Deixou em branco.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$	**n**	Deixou em branco.
Conclusão: Podemos observar que P_1 não desenvolveu “bons” aspectos intuitivos, apesar de ter realizado a passagem da dobradura para a representação figural, pois não conseguiu generalizar. Usou a razão ¼ entre as áreas dos triângulos hachurados, mas isso não foi suficiente para alavancar a compreensão e o preenchimento da coluna 5 e das linhas 5 e 6, relativas às Etapas genérica n e $(n \to \infty)$, o que indica a não presença de aspectos formais e o não inter-relacionamento de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.		

Fonte: autores

Quadro 9: - Q.P1 - Categorização das respostas de P1 para o questionário

Questões	Respostas	Observações
Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?	Sempre feito um processo repetitivo achamos os pontos médios	Não enuncia formalmente propriedades matemáticas (aspectos formais) no processo de construção, entretanto, dá a entender que percebeu o padrão na construção do triângulo (ponto médio).
Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?	Não	Aparenta ter se limitado ao processo de construção das dobraduras em papel (concreto, aspectos intuitivos), onde há uma limitação para encontrar o ponto médio. Podemos dizer que não apresenta aspectos formais nem algorítmicos, pois aceitou a ideia de infinito - como processo (infinito potencial) - na construção dos triângulos, mas apenas com base em aspectos intuitivos.
Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?	Não	
Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?	Sim, caso o material físico permitir, porém, matematicamente falando é infinito	
Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior	Sempre será dividido no ponto médio	Tem percepção da propriedade do ponto médio, mas não justifica porque sempre é possível encontrar o ponto médio em qualquer etapa da dobradura, ausência de aspectos formais.
Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?	Sim, por conta de obtermos o ponto médio	
Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?	Sim, por conta de sempre olharmos o triângulo "básico" ou o anterior	Não interrelacionou aspectos formais e algorítmicos para chegar à expressão das somas parciais proposta na questão. Isso seria possível se tivesse preenchido, em **C.P1**, as linhas do genérico n e do $n \to \infty$.

Q8 - O que ocorre com a "área de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?	Sim, cada vez que vai diminuindo vai ao 0, por ficar cada vez menor	Não propôs o quanto o triângulo fica menor a cada etapa realizada, embora tenha usado a razão 1⁄4 para as áreas que calculou. Podemos perceber uma ideia de convergência quando diz "vai ao 0". Como afirma Fischbein (1994), aspectos intuitivos podem se tornar um facilitador – ou não - se estiver de acordo com verdades logicamente justificáveis e, neste caso, aspectos intuitivos poderiam ter agido como um "facilitador" para inter-relacionar aspectos intuitivos, algorítmicos e formais; nota a ideia de convergência na resposta com base em aspectos intuitivos, mas não os inter-relacionou com aspectos formais para justificar.
Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?	As iterações vão ser infinitas assim como o valor	Mostra ter associado o processo infinito (as iterações) com o valor da área total. Não apresenta a percepção de convergência relacionada à "soma" infinita, pois não inter-relacionou aspectos algorítmicos, intuitivos e formais para perceber que a área não pode ser infinita.
Observações: apresenta concepções confusas em relação às ideias de infinito, pois não fez a passagem da dobradura (material físico) para as representações matemáticas, pedidas na Tabela 1. Mostra aceitar (aspectos intuitivos) a ideia de infinito como um processo (infinito potencial), mas não inter-relaciona aspectos intuitivos a aspectos algorítmicos e formais para justificar. Apesar de não apresentar argumentos matemáticos, o que indica a não interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, podemos observar a ideia de convergência relacionada à questão 8; entretanto, relaciona área infinita (questão 9) à quantidade infinita de triângulos gerados. De acordo com Fischbein, Tirosh e Melamed (1981), algumas situações relacionadas ao caso do infinito real são intuitivamente contraditórias, visto que é "intuitivo" que o infinito está relacionado a algo muito grande, como um processo sem fim (infinito potencial) ou um valor muito grande, e podemos notar essa contradição na resposta dada à questão 9. Podemos dizer que a dobradura não provocou bons aspectos intuitivos e P1 não conseguiu generalizar		

Fonte: autores

4.1.1.2. **A**nálise das respostas do participante P2

Quadro 10: - F.P2 - Fotos da dobradura e da Tabela 1 preenchida por P2

Dobradura P2

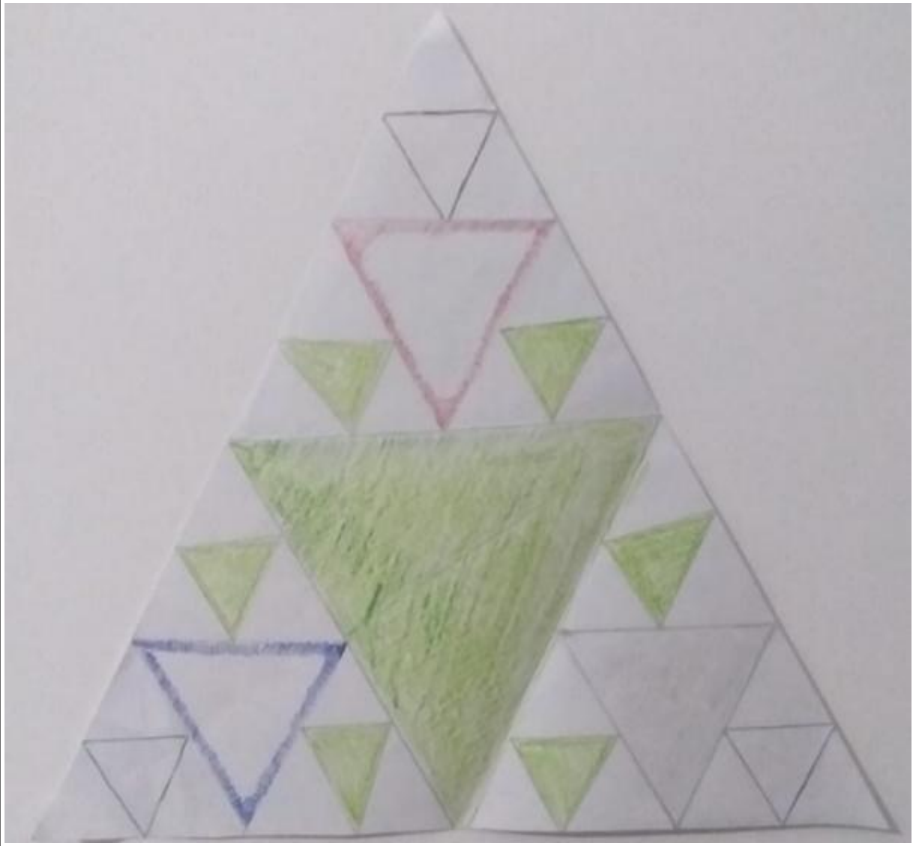
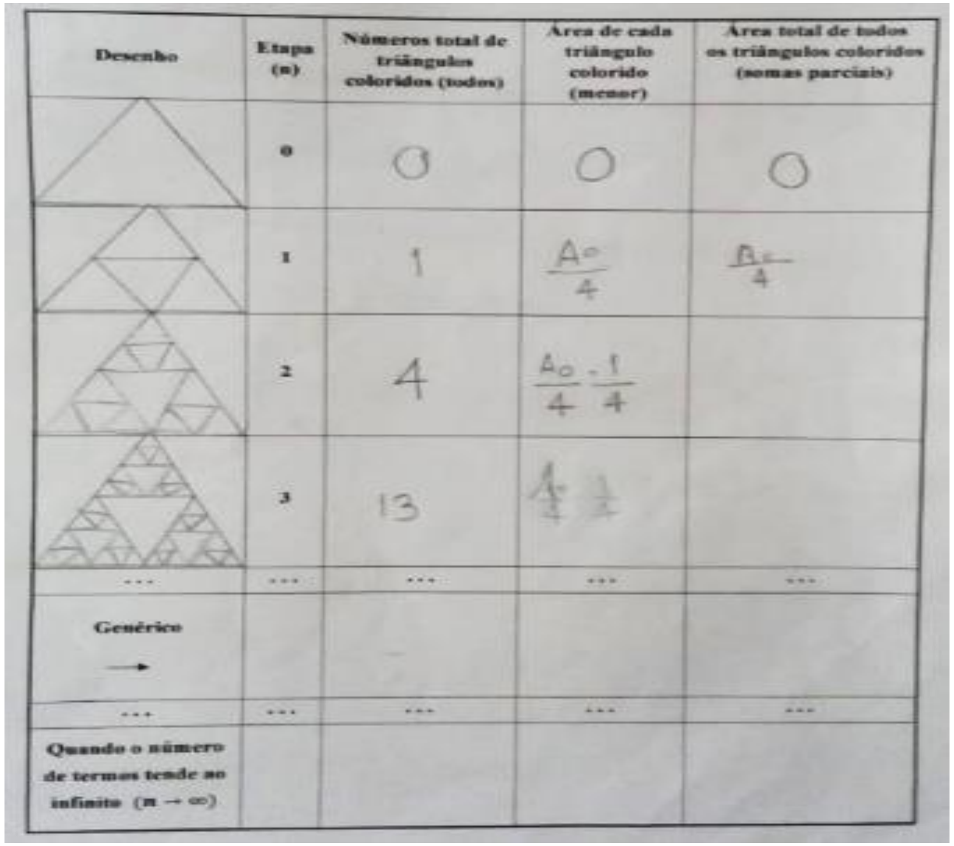


Tabela IP2



Desenho	Etapa (n)	Números total de triângulos coloridos (todos)	Área de cada triângulo colorido (menor)	Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)
	0	0	0	0
	1	1	$\frac{A_0}{4}$	$\frac{A_0}{4}$
	2	4	$\frac{A_0}{4} \cdot \frac{1}{4}$	
	3	13	[illegible]	
...	...	...	...	...
Genérico →				
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)				

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 11:- C.P2 - Categorização das respostas de P2 para a Tabela 1

Ação esperada	s / n	Observações
Dobradura	n	Hachurou os triângulos gerados na dobradura na etapa 1, alguns na etapa 2 e não hachurou nenhum na etapa 3.
Coluna 1 - Representação figural	n	Não fez nenhuma das representações figurais pedidas, pois não pintou os triângulos, nem mesmo os que aparecem na dobradura. Não mostra ter inter-relacionado aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Coluna 2 – Etapas	n	Não preencheu as células correspondentes aos genéricos n e ($n \to \infty$), o que revela ausência de aspectos formais.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	s	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	n	Preencheu corretamente as três primeiras células, embora não tenha feito a representação figural correta. Na célula 4 (caso n=3), não aplicou a razão 1⁄4, relativa à semelhança entre os triângulos obtidos em etapas subsequentes e aparenta não identificar o padrão estabelecido pelos triângulos hachurados “menores”.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	n	Deixou as células 3 e 4 em branco (caso n=0 e n=1), que envolvem somas parciais, que indica não inter-relacionar aspectos intuitivos, algorítmicos e formais ou pode não ter compreendido o que se pediu na coluna.
Linha 5 – Genérico	n	Deixou em branco.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)	n	Deixou em branco.
Conclusão: esses resultados indicam dificuldades que P2 encontrou na percepção do padrão ao realizar a passagem da dobradura para a representação figural. Notamos que a atividade com as dobraduras não foi suficiente para P2 desenvolver “bons” aspectos intuitivos, o que pode ter ocorrido, pois não passou da dobradura para a representação figural ou para preencher as demais colunas, o que nos revela o não inter-relacionamento de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.		

Fonte: autores

Quadro 12: - Q.P2 - Categorização das respostas de P2 para o questionário

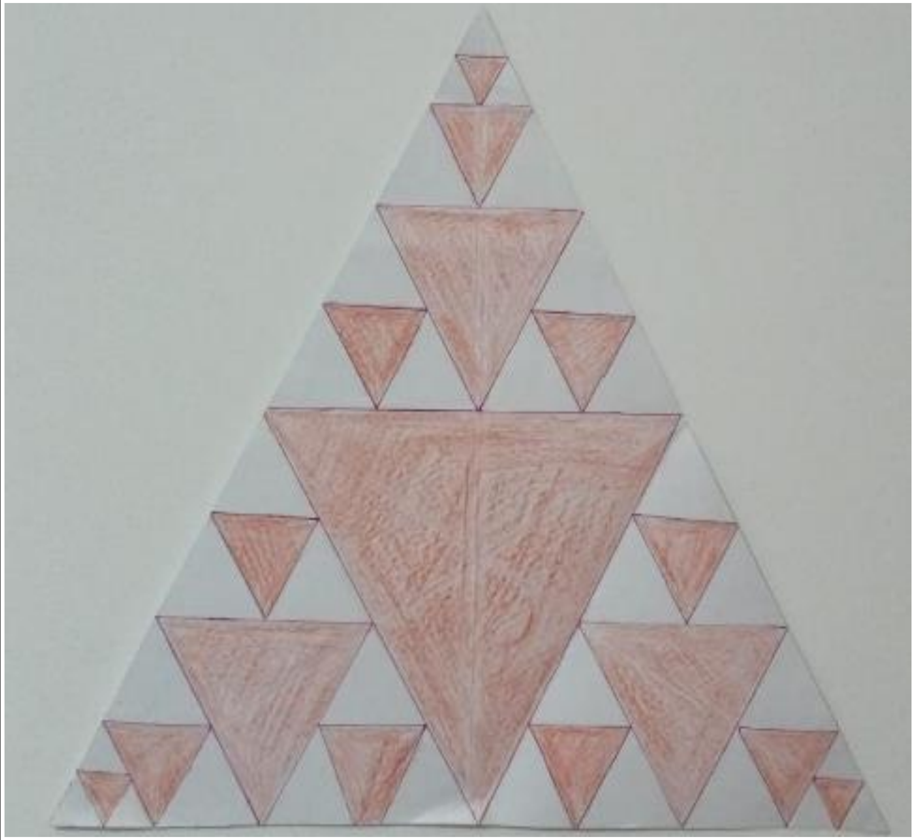
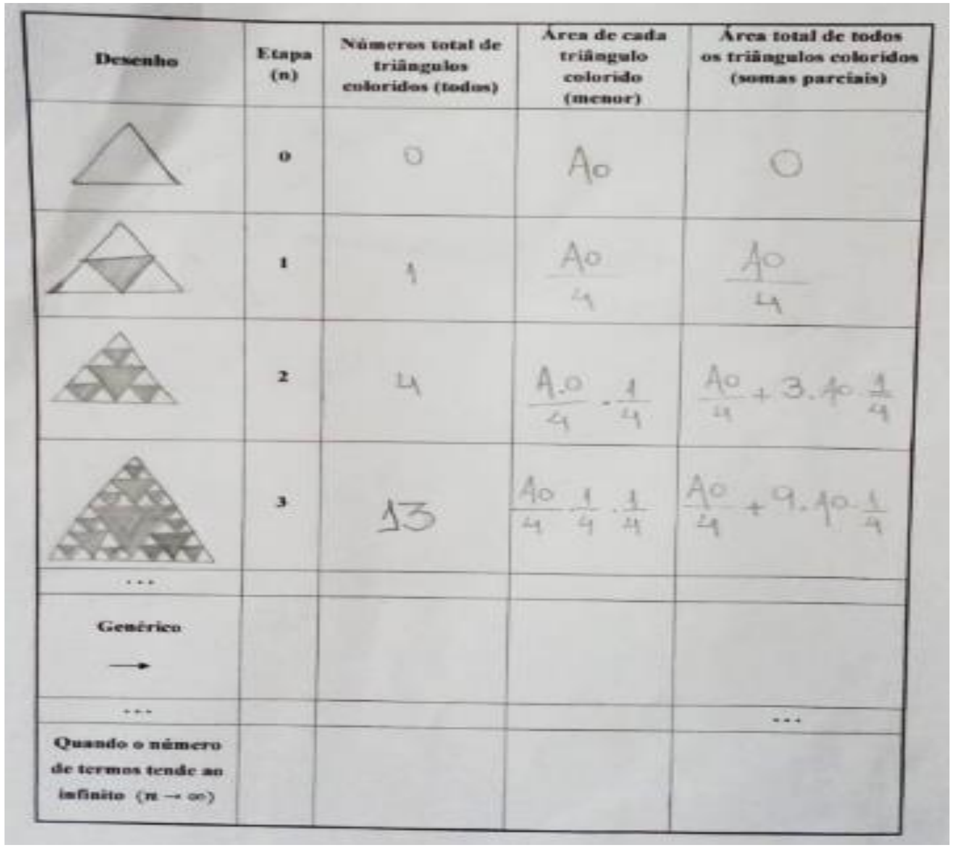
Questões	Respostas	Observações
Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?	Simplificação	Não enuncia nenhuma propriedade matemática (aspectos formais) no processo de construção, não aparenta perceber o padrão na construção do triângulo (ponto médio).
Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?	Sim, teríamos infinitos triângulos	Aparenta ter desenvolvido aspectos intuitivos para perceber a infinidade dos triângulos (ideia de infinito potencial) e que a área não será infinita, mas não os inter-relaciona com aspectos algorítmicos e formais para apresentar justificativa matemática. Como responde que "pode ser infinito", dá a entender que não conseguiu generalizar e não tem certeza se é um processo com infinitas etapas (infinito potencial).
Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?	Sim, porém, a área não será infinita	
Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?	Sim, o número de iterações pode ser infinito	
Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior	A cada nova iteração os triângulos simplificam formando novos triângulos	Não apresenta justificativas formais relacionadas às propriedades no processo de construção do Triângulo, por exemplo, o ponto médio e a semelhança de triângulos.
Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?	Sim, a cada processo adicionarem novos triângulos e assim sucessivamente	
Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?	Sim, que a cada nova etapa o número de triângulos multiplica e vão diminuindo de tamanho	Não compreendeu a regularidade da "soma" relacionada à ideia das somas parciais proposta na questão.
Q8 - O que ocorre com a "área de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?	Vai ficar cada vez menor, e se tiver valor não será infinita.	Não menciona o quanto o triângulo fica menor a cada etapa realizada, nem de qual valor essa área se aproxima. A atividade com a dobradura não foi suficiente para P2

		perceber que, em cada etapa, o triângulo colorido é 1⁄4 do triângulo colorido na etapa anterior.
Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?	Cada iteração é infinita, mas a área se aproxima de um valor específico	Apesar da dificuldade de compreensão na resposta dada, dá a entender que reconheceu o processo infinito das etapas, mas não justifica, nem mesmo com aspectos intuitivos. Talvez por ter percebido o comportamento dos triângulos hachurados ao fazer a dobradura, mas não apresenta argumentos matemáticos, que poderiam ser encontrados nas linhas do genérico n e ($n\rightarrow\infty$). Observamos apenas interpretações baseadas em aspectos intuitivos, não inter-relacionando aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Observações: aceita a infinidade do processo (infinito potencial) na resposta à Questão 9, mas não ao responder à Questão 4 (coloca a palavra pode), apenas com base em aspectos intuitivos. Não aparenta ter a percepção do ponto médio (propriedade matemática), pois em nenhum momento o menciona, o que pode ter contribuído para P2 não conseguir generalizar. Quanto às ideias de convergências (infinito real), não apresenta argumentos formais, pois não inter-relaciona aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Conforme afirmam Fischbein, Tirosh e Melamed (1981), algumas situações relacionadas ao domínio do infinito são aceitas sem questionar, como no caso do infinito em processo (infinito potencial), visto que, o indivíduo aceita a ideia de infinito como processo.		

Fonte: autores

4.1.1.3. Análise das respostas do participante P3

Quadro 13:- F.P3 - Fotos da dobradura e da Tabela 1 preenchida por P3

Dobradura P3	Tabela IP3
	

Desenho	Etapa (n)	Números total de triângulos coloridos (todos)	Área de cada triângulo colorido (menor)	Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)
	0	0	A_0	0
	1	1	$\frac{A_0}{4}$	$\frac{A_0}{4}$
	2	4	$\frac{A_0}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{A_0}{4} + 3 \cdot A_0 \cdot \frac{1}{4}$
	3	13	$\frac{A_0}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{A_0}{4} + 9 \cdot A_0 \cdot \frac{1}{4}$
...				
Genérico →				
...				...
Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$				

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 14:- C.P3 - Categorização das respostas de P3 para a Tabela 1

Ação esperada	**s / n**	**Observações**
Dobradura	s	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura, percebeu o padrão e hachurou os triângulos referentes às etapas. Podemos observar que P3 deu início ao processo de construção da etapa 4 na dobradura (ver Quadro F.P3), embora não tenha sido pedido durante a atividade; mas não terminou de hachurar os triângulos referentes a esta etapa.
Coluna 1 - Representação figural	s	Realizou a passagem da dobradura para a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	n	Não preencheu as células correspondentes aos genéricos n e $(n \to \infty)$, o que evidencia ausência de aspectos formais.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	s	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	s	Representou corretamente, compreendeu e aplicou a razão ¼ referente às áreas dos triângulos hachurados nas etapas subsequentes.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	n	Preencheu corretamente as células 1 e 2, na terceira célula (caso n=2), não atenta ao fato de que as áreas dos três triângulos novos gerados têm razão 1⁄4, relativa à semelhança de razão ½ entre os triângulos. Na quarta célula (caso n=3), não somou os três triângulos da etapa anterior e novamente não aplicou a razão 1⁄4 referente às áreas dos triângulos da etapa anterior. O que indica aspectos algorítmicos não inter-relacionados a aspectos formais.
Linha 5 – Genérico	n	Deixou em branco.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$	n	Deixou em branco.
Conclusão: realizou a passagem entre a dobradura e a representação figural, compreendeu e aplicou a razão ¼ entre as áreas dos triângulos hachurados como mostra a coluna 4 da Tabela IP3, mas cometeu alguns equívocos ao representar as somas parciais (caso n=3), pois deixou de somar os triângulos gerados na etapa anterior e não aplicou a razão ¼. Apesar disso, por ter preenchido corretamente as colunas 2 e 4, acreditamos que esses resultados poderiam ter ajudado no entendimento e preenchimento da coluna 5 e das linhas 5 e 6, o que não ocorreu, indicando não inter-relacionar aspectos algorítmicos e formais. Por isso, não podemos afirmar ter desenvolvido “bons” aspectos intuitivos.		

Fonte: autores

Quadro 15: - Q.P3 - Categorização das respostas de P3 para o questionário

Questões	Respostas	Observações
Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?	Achamos o ponto médio	Não enuncia formalmente as propriedades, mas dá a entender que percebeu o padrão na construção dos triângulos (ponto médio).
Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?	Não pois a folha limita a seria infinitos triângulos	Podemos observar falta de aspectos formais, pois relaciona a quantidade de Triângulos à quantidade de dobras possíveis, que é limitada pelo tamanho da folha. Vemos que aspectos intuitivos se sobrepõem a aspectos algorítmicos e formais e não faz a interrelação com estes, o que impediu P3 de "ver além" das dobraduras, para definir caminhos e estratégias para uma solução formalmente correta. Justifica o número infinito de etapas pelo ponto médio, mas não usa isso para generalizar.
Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?	Sim, porém a área não seria infinita	
Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?	Sim, seria possível justificar por conta do ponto médio, a partir disso seria possível construir novos triângulos	
Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior	Ele ficará cada vez menor, sempre mantendo o ponto médio	Identifica que o processo de construção dos triângulos é um processo infinito, relacionado à existência dos pontos médios dos lados dos triângulos hachurados. Dá a entender que aceita um processo com infinitas etapas (infinito potencial). Associa regularidade com repetitivo, o que pode indicar falta de aspectos formais.
Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?	Sim, pois será repetitivo	
Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?	Tem uma regularidade baseada no formato do desenho, mas não no tamanho, cada vez formado ele fica menor	Não percebe que a cada nova iteração a área aumenta ¾ em relação à área anterior. Falta de aspectos formais algébricos e geométricos.

Q8 - O que ocorre com a "área de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?	Sim, ele vai diminuindo, cada vez mais multiplicando a quantidade de triângulos brancos	Não apresenta argumentos formais relacionados à ideia de convergência, pois não descreveu o quanto o triângulo fica menor a cada etapa realizada, nem de qual valor se aproxima a área dos triângulos (menores) gerados nas etapas subsequentes, embora aceite o processo com infinitas etapas. Usa a ideia de "multiplicação" sem traduzir isso algebricamente.
Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?	Sim, o valor irá ser infinito	Notamos aqui aspectos intuitivos relacionados à quantidade de triângulos coloridos, mas associa o processo infinito com o valor infinito da área. Não percebe que a área não pode ser infinita, pois os triângulos são disjuntos e contidos no inicial. Não apresenta a percepção de convergência relacionada à "soma" infinita, pois, não inter-relaciona aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Observações: não apresenta "bons" aspectos intuitivos, pois não conseguiu generalizar, talvez porque se ateve ao tamanho do papel no processo de dobradura. Mostra ter a percepção quanto ao padrão (ponto médio), mas apresenta equívocos relacionados à ideia de convergência, dado que relaciona a quantidade "infinita" de triângulos à soma "infinita" das áreas, o que corrobora Fischbein, Tirosh e Melamed (1981), que relatam que algumas situações relacionadas ao caso do infinito real são intuitivamente contraintuitivas, no caso a soma das infinitas áreas ser infinita.		

Fonte: autores

4.1.1.4. Análise das respostas do participante P4

Quadro 16: - F.P4 - Fotos da dobradura e da Tabela 1 preenchida por P4

Dobradura P4

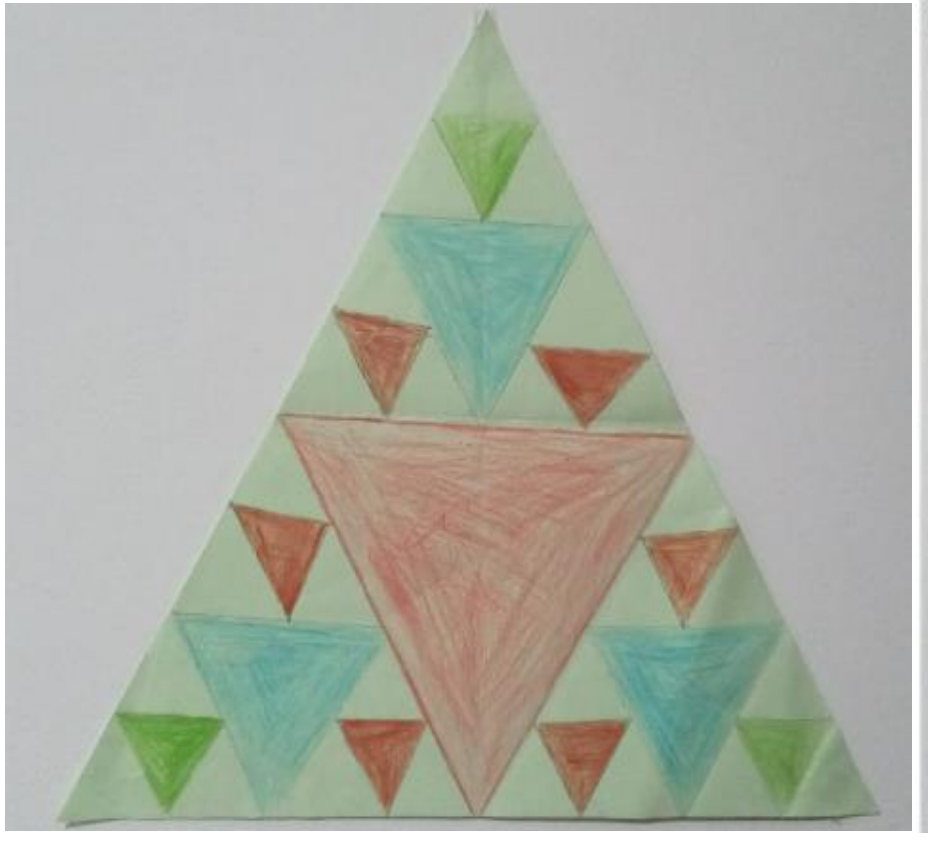


Tabela IP4

Desenho	Etapa (n)	Números total de triângulos coloridos (todos)	Área de cada triângulo colorido (menor)	Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)
	0	0	0	
	1	1	$A = \frac{1}{4}$	
	2	4	$\frac{A \cdot 1}{4} = \frac{1}{4}$	
	3	13	$\frac{A}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	
...	...	...	...	...
Genérico →				
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)				

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 17: - C.P4 - Categorização das respostas de P4 para a Tabela 1

Ação esperada	**s / n**	**Observações**
Dobradura	s	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura, percebeu o padrão e hachurou os triângulos referentes às etapas.
Coluna 1 - Representação figural	s	Realizou a passagem da dobradura e a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	n	Não preencheu as células correspondentes aos genéricos n e $(n \to \infty)$, não indica inter-relacionar aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	s	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	n	Preencheu corretamente a primeira célula (caso n=0), nas outras células não usou corretamente a fórmula para cálculo da área, pois usou a razão ¼ antes do sinal de =. Aparenta ter identificado o padrão (razão 1⁄4) referente às áreas dos triângulos novos gerados, mas não soube expressar isso algebricamente, o que indica falta de aspectos formais. Cometeu equívocos (aspectos algorítmicos e aspectos formais) ao representar esse padrão, o que mostra a não inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	n	Deixou em branco .
Linha 5 – Genérico	n	Deixou em branco.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$	n	Deixou em branco.
Conclusão: aparenta ter percebido o padrão referente à área dos triângulos novos gerados, como indica a coluna 4 da Tabela IP4, mas as respostas mostram dificuldade com a representação algébrica. Além disso, na coluna 5, não preencheu as somas parciais, deixando a coluna em branco. Encontrou dificuldade nas representações e consideramos que, para P4, a dobradura não desenvolveu "bons" aspectos intuitivos, pois não conseguiu realizar as conversões pedidas, o que nos revela a não inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.		

Fonte: autores

Quadro 18: - Q.P4 - Categorização das respostas de P4 para o questionário

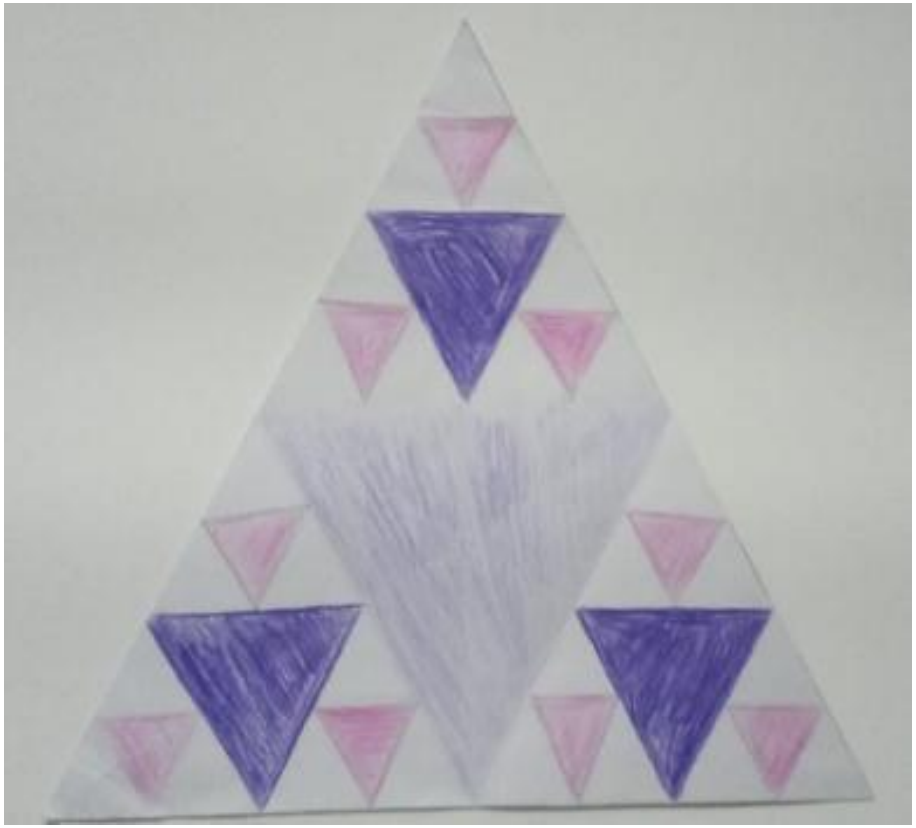
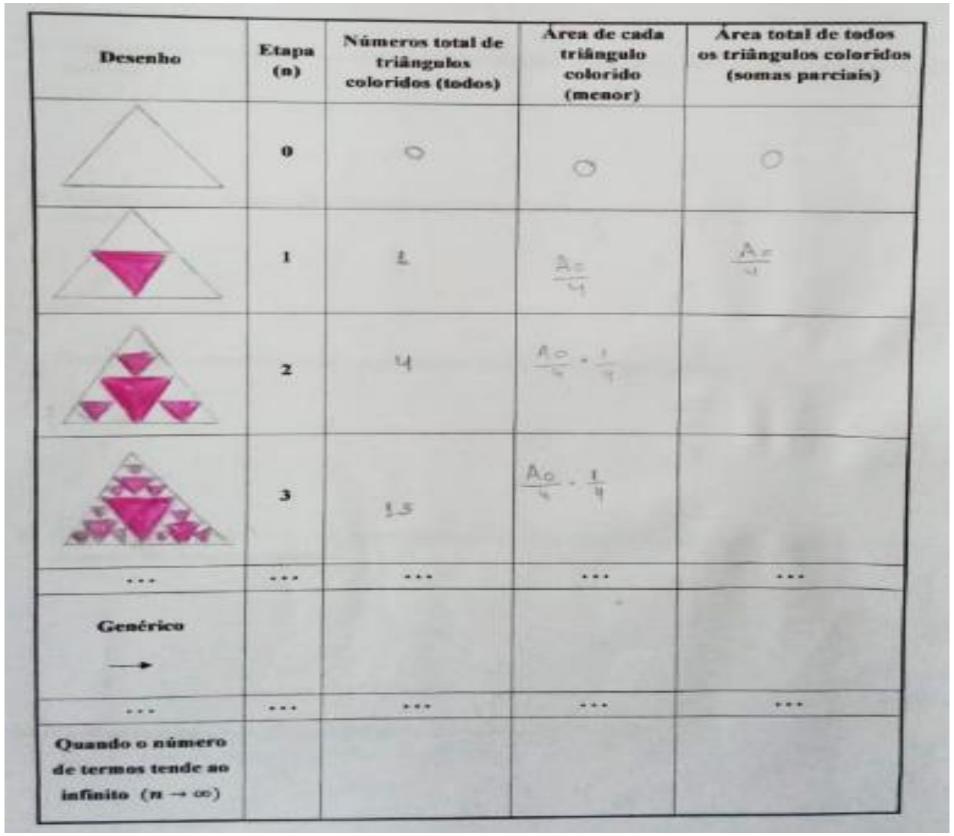
Questões	Respostas	Observações
Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?	Ponto médio	Apresenta uma das propriedades esperadas, mas não justifica por que isso permite a generalização.
Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?	Infinitos	Como não inter-relaciona aspectos algorítmicos e formais, P4 não compreende além das dobraduras. Com base em aspectos intuitivos, percebe a infinidade de triângulos, mas justifica com base na folha (dobradura). Afirma que a área não será infinita, mas não justifica.
Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?	A área não	
Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?	Sim, depende do material	
Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior	Cada vez que faz uma dobradura os triângulos iriam diminuindo	Não menciona a razão $\frac{1}{2}$ referente aos lados, porém, percebeu o processo infinito da construção por meio da percepção do ponto médio (dobradura), evidenciando aspectos intuitivos.
Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?	Sim, porque sempre encontramos o ponto médio	
Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?	Está diminuindo das partes maiores, e virando ¼	Não compreendeu a regularidade da "soma" relacionada à ideia das somas parciais, ou seja, que a cada nova iteração a área aumenta ¾ em relação à área anterior.
Q8 - O que ocorre com a "área de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?	Iriam diminuir a área, virando ¼	Representou corretamente o quanto a área do triângulo fica menor a cada etapa na razão $1/4$, mas não descreve de qual valor essa área se aproxima, inter-relacionando aspectos intuitivos e algorítmicos relacionados à ideia de convergência.

Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?	Iriam ocupar muitos espaços e iriam ficar coloridos	Não indica ter percepção de convergência. Apresenta aspectos intuitivos relacionados aos "muitos espaços", sem formalizar. Faltam aspectos algorítmicos e aspectos formais.
Observações: indica ter aceitado a infinidade (aspecto intuitivo) do processo (infinito potencial), pois apresenta o ponto médio, mas associa o "material físico" à infinidade do processo. Podemos ver concepções de infinito relacionadas à visualização, ou seja, ao tamanho do papel, sem interagir com representações algébricas necessárias para desenvolver argumentos matemáticos.		

Fonte: autores

4.1.1.5. Análise das respostas do participante P5

Quadro 19: - F.P5 - Fotos da dobradura e da Tabela 1 preenchida por P5

Dobradura P5	Tabela IP5
	

Desenho	Etapa (n)	Números total de triângulos coloridos (todos)	Área de cada triângulo colorido (menor)	Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)
	0	0	0	0
	1	1	$\frac{A_0}{4}$	$\frac{A=}{4}$
	2	4	$\frac{A_0}{4} \cdot \frac{1}{4}$	
	3	13	$\frac{A_0}{4} \cdot \frac{1}{4}$	
...	...	...	...	...
Genérico →				
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$				

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 20: - C.P5 - Categorização das respostas de P5 para a Tabela 1

Ação esperada	**s / n**	**Observações**
Dobradura	**s**	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura, percebeu o padrão e hachurou os triângulos referentes às etapas.
Coluna 1 - Representação figural	**s**	Realizou a passagem da dobradura para a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	**n**	Não preencheu as células correspondentes aos genéricos n e $(n \to \infty)$, o que indica ausência de aspectos formais.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	**s**	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	**n**	Preencheu corretamente as três primeiras células. Na célula 4 (caso n=3), não aplicou a razão 1⁄4, relativa à semelhança entre os triângulos obtidos em etapas subsequentes e aparenta não identificar o padrão estabelecido nas áreas dos triângulos hachurados "menores".
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	**n**	Deixou as células 3 e 4 (casos n=2 e n=3) em branco, que envolvem somas parciais, o que mostra o não inter-relacionamento de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Linha 5 – Genérico	**n**	Deixou em branco.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$	**n**	Deixou em branco.
Conclusão: realizou a passagem da dobradura para a representação figural, no entanto, não aplicou a razão ¼ nas áreas dos triângulos hachurados, não desenvolveu a interação e a inter-relação dos aspectos algorítmicos, intuitivos e formais. Não mostra que a dobradura desenvolveu "bons" aspectos intuitivos, pois encontrou muitas dificuldades relativas às representações algébricas.		

Fonte: autores

Quadro 21: - Q.P5 - Categorização das respostas de P5 para o questionário

<table>
<tr><th>Questões</th><th>Respostas</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?</td><td>Usamos o ponto médio para conseguir fazer mais triângulos</td><td>Não menciona formalmente as propriedades, contudo aparenta perceber o padrão na construção do triângulo (ponto médio).</td></tr>
<tr><td>Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?</td><td>Sim, teriam triângulos infinitos</td><td rowspan="3">Dá a entender a infinidade de triângulos, mas não apresenta justificativas matemáticas para o “matematicamente” (com grifo nosso), o que indica a prevalência de aspectos intuitivos e a não inter-relação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais.
Como escreve “triângulos infinitos” e não infinitos triângulos, deixa dúvida sobre o entendimento que tem da questão.</td></tr>
<tr><td>Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?</td><td>Sim</td></tr>
<tr><td>Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?</td><td>Sim, pois matematicamente falando nunca vai ter um sim, será infinito</td></tr>
<tr><td>Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior?</td><td>Os triângulos começam a ficar menores</td><td rowspan="2">Não apresenta a razão $\frac{1}{2}$ referente aos lados, contudo percebeu que o processo infinito da construção é possível por meio do ponto médio.</td></tr>
<tr><td>Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?</td><td>Sim, sempre usando o ponto médio</td></tr>
<tr><td>Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?</td><td>Os triângulos começam a diminuir, sempre vai ser ¼ dos triângulos pintados</td><td>Não compreendeu a regularidade da “soma” relacionada à ideia das somas parciais. A questão pergunta sobre o aumento das áreas e a resposta de P5 não considera isso e parece que se atém à quantidade de triângulos e não à área pedida.</td></tr>
</table>

Q8 - O que ocorre com a "área de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?	A área começa a diminuir, e, novamente, sempre vai ser ¼ de cada triângulo	Apresenta a relação entre a área de um triângulo hachurado com o triângulo da etapa anterior, mas não se refere ao valor dessa área, nem menciona de qual valor essa área se aproxima. Podemos destacar aspectos intuitivos e algorítmicos, porém, não apresenta aspectos formais relacionados à ideia de convergência.
Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?	Sim, ele vai começar a ocupar todo espaço, e toda a área vai ficar colorida	Podemos observar uma ideia de convergência, que talvez possa ter sido clara ao participante por conta do processo de dobradura (visualização) após colorir os triângulos coloridos a cada nova etapa, porém, sem justificativas e argumentos matemáticos.
Observações: notamos uma aceitação intuitiva quanto ao processo ser infinito (infinito potencial), pois P5 apresenta o ponto médio e percebe a infinidade de triângulos. Também podemos observar a ideia de convergência relacionada às somas infinitas (questão 9), mas sem interagir aspectos algorítmicos e formais. Podemos considerar que esse é um exemplo que Fischbein (1994) relata no qual o estudante encontra dificuldade de aplicar os algoritmos em situações não "comuns", como é o caso da ideia de limite. Principalmente se não foi estimulado, em sua trajetória escolar, sem usar argumentações e justificativas, pois estas não são adquiridas espontaneamente.		

Fonte: autores

4.1.1.6. Análise das respostas do participante P6

Quadro 22: - F.P6 - Fotos da dobradura e da Tabela 1 preenchida por P6

Dobradura P6

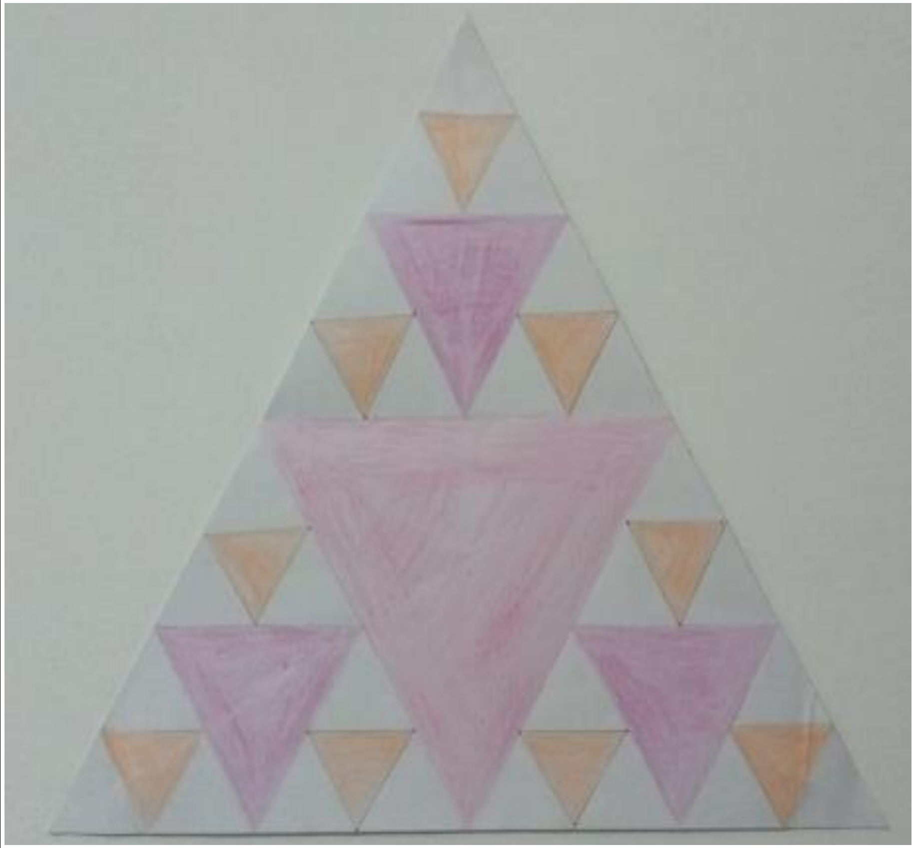
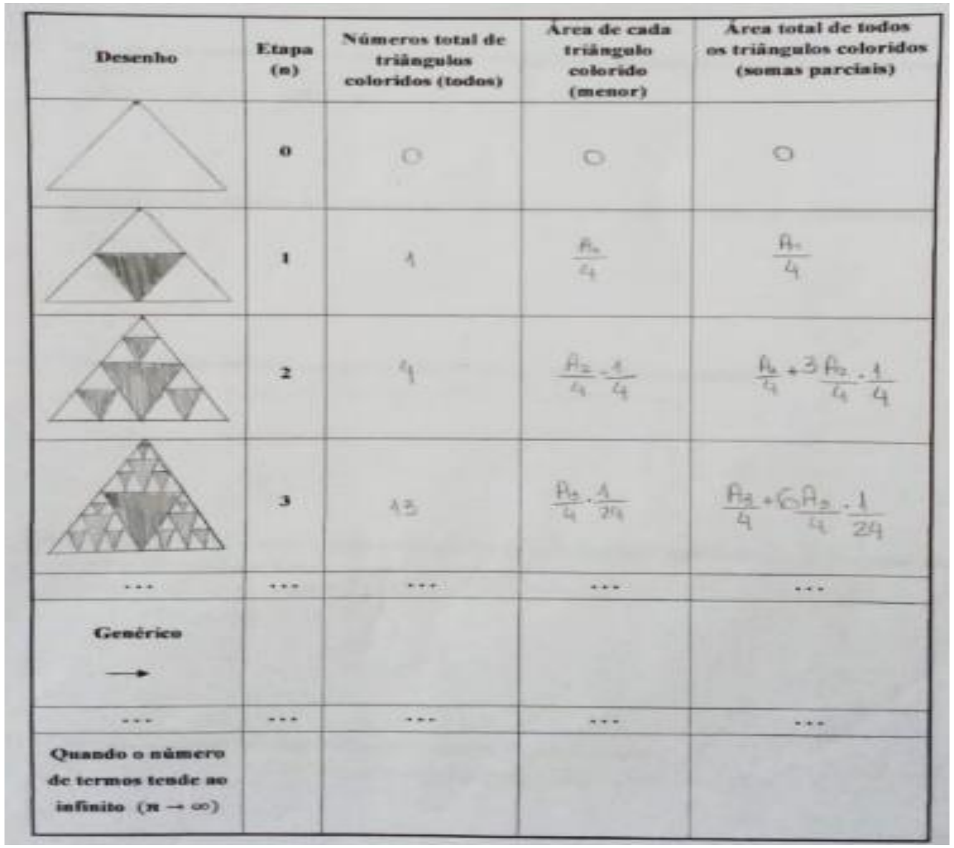


Tabela IP6



Desenho	Etapa (n)	Números total de triângulos coloridos (todos)	Área de cada triângulo colorido (menor)	Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)
	0	0	0	0
	1	1	$\frac{A_0}{4}$	$\frac{A_0}{4}$
	2	4	$\frac{A_0}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{A_0}{4}+3\frac{A_0}{4}\cdot\frac{1}{4}$
	3	13	$\frac{A_0}{4}\cdot\frac{1}{24}$	$\frac{A_0}{4}+6\frac{A_0}{4}\cdot\frac{1}{24}$
...	...	...	...	...
Genérico →				
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)				

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 23: - C.P6 - Categorização das respostas de P6 para a Tabela 1

Ação esperada	**s / n**	**Observações**
Dobradura	**s**	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura, percebeu o padrão e hachurou os triângulos referentes às etapas.
Coluna 1 - Representação figural	**s**	Realizou a passagem da dobradura para a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	**n**	Não preencheu as células correspondentes aos genéricos n e $(n \to \infty)$, o que indica ausência de aspectos formais.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	**s**	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	**n**	Apresenta confusão na hora de simbolizar a área referente às etapas. Na segunda, terceira e quarta células (casos n=1, n=2 e n=3), utiliza letras diferentes para representar as áreas. Isso mostra equívocos na hora de generalizar, ou seja, ausência de aspectos formais. Ao mesmo tempo, aparenta identificar o padrão referente à razão 1⁄4 estabelecido pelas áreas dos triângulos hachurados "menores", mas comete equívocos de natureza formal ao representar esse padrão, o que aponta ausência de aspectos formais (erro semelhante ao cometido por P4).
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	**n**	Podemos observar ideias confusas na hora de simbolizar as áreas referentes às somas parciais, evidenciando uma não inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Linha 5 – Genérico	**n**	Deixou em branco.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$	**n**	Deixou em branco
Conclusão: não desenvolveu "bons" aspectos intuitivos, pois não conseguiu realizar as conversões pedidas, o que nos revela a não interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Realizou a passagem da dobradura para a representação figural, mas notamos equívocos de natureza formal, pois utiliza diferentes "letras" na hora de generalizar as áreas. De fato, isso pode ter ocorrido porque P6 não relaciona as áreas dos triângulos, nas várias etapas, à área do triângulo equilátero inicial (etapa 0). Também aponta ausência do processo de generalização em sua atividade matemática.		

Fonte: autores

Quadro 24: - Q.P6 - Categorização das respostas de P6 para o questionário

Questões	Respostas	Observações
Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?	Podemos encontrar com ajuda da propriedade do ponto médio. Sempre dividir em duas partes iguais	Apresenta o ponto médio como sendo uma propriedade, mas "dividir em duas partes iguais" indica dificuldade em justificar em Matemática.
Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?	Sim, triângulos infinitos	Dá a entender que tem a percepção quanto à infinidade de triângulos, mas não apresenta justificativas matemáticas, o que indica a prevalência de aspectos intuitivos e a não inter-relação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais. Como P5, escreve "triângulos infinitos" e não 'infinitos triângulos", o que mostra dificuldade em se expressar formalmente em Matemática.
Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?	Sim	
Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?	Sim, pois o número de triângulos nunca irá acabar	
Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior	A cada triângulo ocorre a diminuição comparada com a iteração anterior	Não relaciona a razão $\frac{1}{2}$ referente aos lados, mas justifica formalmente (aspectos formais) que sempre é possível obtermos um ponto médio por menor que seja o triângulo, o que garante a infinidade do processo.
Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?	Sim, sempre irá utilizar a propriedade do ponto médio	
Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?	A regularidade sempre irá diminuir a ¼ cada triângulo	Não compreendeu a regularidade da "soma" relacionada à ideia das somas parciais. Refere-se à área diminuir, numa questão que pergunta sobre o aumento das áreas (semelhante a P5).

Q8 - O que ocorre com a "área de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?	A área vai diminuindo, sempre que cada triângulo tem seu valor específico. E sempre será infinita	Não menciona o quanto a área (razão $1/4$) do triângulo fica menor a cada etapa, nem para qual valor essa área se aproxima.
Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?	Sim, terá um valor específico a cada triângulo. E sempre será infinita	Sem argumentos matemáticos para justificar a resposta, o que está relacionado a aspectos formais, associados às linhas do genérico n e $n \rightarrow \infty$. Não apresenta a percepção de convergência relacionada à " soma" infinita, pois não inter-relaciona aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Observações: Apresenta a percepção do padrão, visto que enuncia a propriedade do ponto médio, e também quanto à razão $1/4$, relacionada às áreas dos triângulos novos gerados. Aceita a infinidade do processo, no caso, as ideias relacionadas ao infinito potencial. Entretanto, não mostra ter compreendido ideias de convergência, pois não apresenta argumentos matemáticos, o que indica ausência de aspectos formais, notamos respostas dadas apenas com base em aspectos intuitivos.		

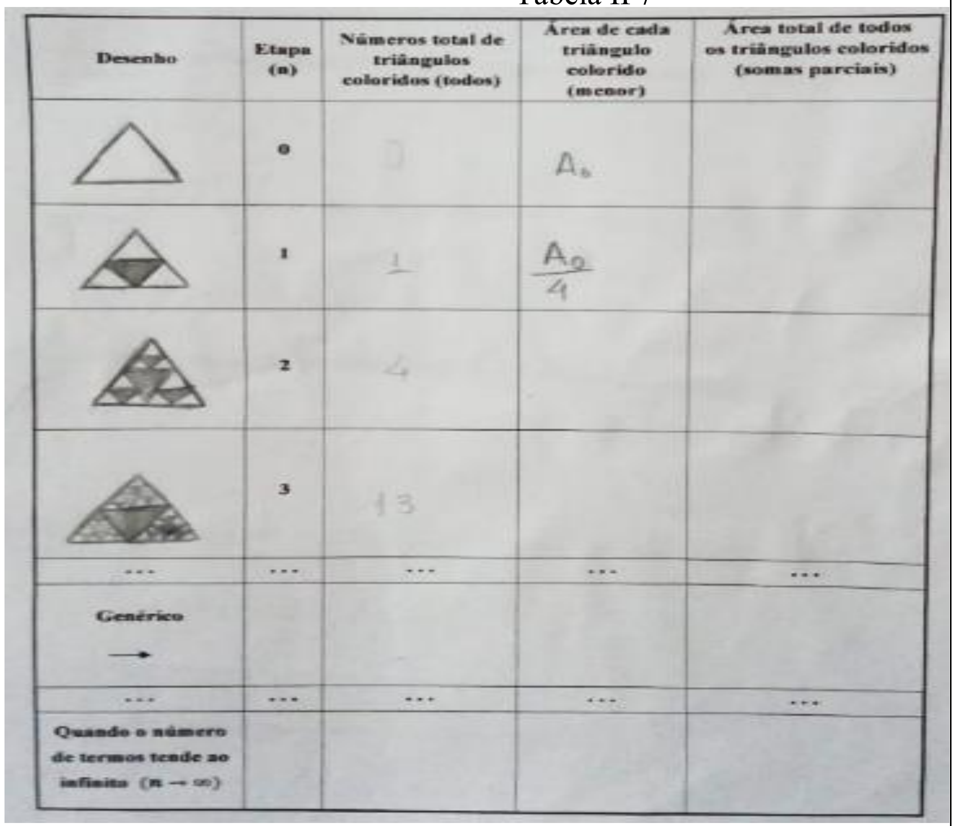
Fonte: autores

4.1.1.7. Análise das respostas do participante P7

Quadro 25: - F.P7 - Fotos da dobradura e da Tabela 1 preenchida por P7

Dobradura P7

Tabela IP7



Desenho	Etapa (n)	Números total de triângulos coloridos (todos)	Área de cada triângulo colorido (menor)	Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)
	0	0	A_0	
	1	1	$\frac{A_0}{4}$	
	2	4		
	3	13		
...	...	...	...	...
Genérico →				
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$				

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 26: - C.P7 - Categorização das respostas de P7 para a Tabela 1

Ação esperada	**s / n**	**Observações**
Dobradura	**s**	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura, percebeu o padrão e hachurou os triângulos referentes às etapas.
Coluna 1 - Representação figural	**s**	Realizou a passagem da dobradura para a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	**n**	Não preencheu as células correspondentes aos genéricos n e $(n \rightarrow \infty)$, o que indica ausência de aspectos formais.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	**s**	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	**n**	Preencheu corretamente a primeira e a segunda células (casos n=0 e n=1), nas outras não aplicou a razão 1/4, relativa à semelhança entre os triângulos, o que indica ausência de interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	**n**	Deixou em branco.
Linha 5 – Genérico	**n**	Deixou em branco.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito $(n \rightarrow \infty)$	**n**	Deixou em branco.
Conclusão: podemos observar muitas dificuldades de P7, ao dar as respostas na Tabela IP7, pois não conseguiu generalizar (colunas 4 e 5), o que indica ausência de aspectos algorítmicos e formais. Deixou muitas colunas em branco, não conseguiu realizar as conversões pedidas, a partir da representação figural. Não compreendeu a razão ¼ na área dos triângulos novos gerados (coluna 4) e consequentemente não soube preencher a coluna 5. Como **P7** não conseguiu realizar as conversões pedidas, não mostrou apresentar "bons" aspectos intuitivos, evidenciando uma não inter-relação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais		

Fonte: autores

Quadro 27: - Q.P7 - Categorização das respostas de P7 para o questionário

Questões	Respostas	Observações
Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?	Podemos encontrar novos triângulos	Não apresenta aspectos formais, pois não enuncia propriedades encontradas no processo de dobradura.
Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?	Sim, infinitos	Podemos observar que o participante associa a quantidade de triângulos à área. Como relata Fischbein (1994), algumas situações se apresentam como contraintuitivas ao estudante, como é o caso de P7 e podemos ver a prevalência de aspectos intuitivos equivocados.
Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?	Sim, também por causa dos triângulos	
Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?	Sim, pois a cada etapa daria mais triângulos	
Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior	Eles darão novos triângulos	Não apresenta a relação (razão $\frac{1}{2}$) referente aos lados dos novos triângulos hachurados, ausência de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais.
Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?	Sim, por causa que ele vai ser dividido cada vez mais	
Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?	Sim, vai tendo mais triângulos	Sem argumentos matemáticos, apenas aspectos intuitivos.
Q8 - O que ocorre com a "área de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?	Ele vai aumentando, não, sim	

Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?	Não, sim	
Observações: P7 indica ter compreendido o processo de infinidade (infinito potencial), mas apresenta equívocos referentes às ideias relacionadas às somas infinitas, em virtude de associar a quantidade de triângulos às áreas . Conforme afirmam Fischbein, Tirosh e Melamed (1981), situações que envolvem o domínio do infinito e o estudante apresentam-se contra-intuitivas, são poucas vezes, ou nunca, trabalhadas pelo processo de ensino usual. E em uma situação que contradiz uma abordagem intuitiva "básica", o estudante tem poucas chances de desenvolver "bons¨ aspectos intuitivos.		

Fonte: autores

4.1.2. Algumas conclusões, baseadas na análise das respostas dadas nas tabelas 1 e às questões do questionário investigativo

Apresentamos, no Quadro 28, os percentuais de respostas em branco, erradas e corretas para cada uma das colunas das Tabelas 1 preenchidas pelos sete participantes.

Quadro 28: - Quantificação das respostas dos participantes à Tabela 1 - alunos

Descrição das colunas da Tabela 1	Corretas	Erradas	Em branco
Dobradura	85,8 %	14,2%	0%
1ª. Coluna / Representação figural	85,8 %	14,2%	0%
2ª. Coluna / genéricos n e $(n \to \infty)$,	0%	0%	100%
3ª. Coluna / Números total de triângulos coloridos (todos)	100%	0%	0%
4ª. Coluna / Área de cada triângulo colorido (menor)	28,6%	57,14	16,2%
5ª. Coluna / Área total de todos os triângulos coloridos	0%	28,6%	71,5%
Linha 5 / Genérico	0%	0%	100%
Linha 6 / $(n \to \infty)$	0%	0%	100%

Fonte: Elaborado pelo autores

A passagem da dobradura e a representação figural não ofereceu dificuldade aos participantes. Ao fazerem as dobraduras, perceberam o padrão relacionado à propriedade do ponto médio encontrado em cada etapa. A Coluna 3 foi preenchida corretamente por todos os participantes. A análise da Coluna 4 revelou dificuldades na identificação do padrão que define a área hachurada de cada triângulo menor, a cada etapa. Apenas os participantes **P1** e **P3** conseguiram preencher todas as colunas, embora não todas as células. Isso mostra dificuldades dos participantes com aspectos formais e representações algébricas e, consequentemente, com a inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Buscando o que já afirmava Fischbein (1994), quando o ensino de Matemática fica só nos procedimentos, os indivíduos ficam “travados”, principalmente diante de situações não usuais. Na Coluna 4, os erros dos outros participantes (exceto P1 e P3) mostram que, por mais que alguns deles tenham percebido, com as dobraduras, que a relação de proporção da área é ¼ a cada nova etapa, não conseguiram representar algebricamente este padrão, o que evidencia ausência de aspectos algorítmicos e formais, por exemplo, **P4** que mostra ter identificado o padrão (razão 1⁄4) referente às áreas dos triângulos novos gerados, mas não soube representar algebricamente, o que indica falta de aspectos formais.

Outra dificuldade encontrada pelos participantes foi que não sabiam calcular a área de um triângulo equilátero, nem que podiam usar uma área genérica **A**, não numérica, o que evidencia, mais uma vez, ausência de aspectos formais e a prevalência de aspectos intuitivos numéricos. Com o intuito de fazer com que os participantes pudessem generalizar, propusemos que chamassem a área do triângulo equilátero inicial de **A**, assim que percebemos que os participantes **P1** e **P3** tinham indicado que o padrão entre as áreas era de ¼ a cada nova etapa, sendo que **P3** respondeu que a área era ¼ da “área da etapa zero (**P3**, áudio)” e **P1**, que “era 0,25 da área da etapa zero (**P1**, áudio)”. Esses participantes mostram ter aceitado a ideia do infinito (como um processo/infinito potencial), visto que, foram os únicos participantes a preencherem corretamente a Coluna 4.

Cinco participantes (de sete) deixaram a Coluna 5 em branco. As dificuldades dos estudantes em apresentarem uma representação algébrica para as Colunas 4 e 5 pode estar ligada às dificuldades relacionadas à identificação de padrões e generalização nas somas das áreas do triângulo a cada etapa. Os resultados dos protocolos reiteram, portanto, que o desempenho não satisfatório dos participantes nas representações algébricas deve-se à ausência de aspectos formais e a não interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (Fischbein, 1994), pois todos encontraram muita dificuldade em perceber e representar generalizações de padrões.

O insucesso nas representações algébricas pode ser explicado por uma ausência de conhecimentos matemáticos que já foram - ou deveriam ter sido - abordados em anos anteriores e que seriam necessários para terem aprendido a generalizar. O fato de os participantes não conseguirem elaborar uma representação algébrica de uma sequência numérica mostra a supervalorização de aspectos intuitivos numéricos (SOUZA, 2008), que pode estar ligada a uma categoria de ensino que supervaloriza técnicas para obtenção de resultados e uso de fórmulas algébricas, sem discussão sobre elas. Com isso, o tipo de atividade proposta por nós pode parecer estranho aos estudantes, pois estes não foram cobrados, na trajetória escolar, a explicitar um raciocínio matemático relacionado a percepção de padrão e generalização, que vai além da aplicação de fórmulas.

A análise mostra evidentes dificuldades na generalização, na conversão para e na elaboração da lei algébrica, presentes nos participantes, que são do Ensino Médio. Essa perspectiva reitera dificuldades dos participantes em lidar com aspectos algoritmos e formais (Fischbein, 1994), relativos ao estudo de sequências e séries geométricas, que podem impactar negativamente o desenvolvimento do raciocínio matemático e gerar o que Fischbein chama de obstáculos epistemológicos, citando Brousseau (FISCHBEIN, 1994), relativos ao uso de várias representações semióticas, necessárias para pensar, escrever e comunicar Matemática (DUVAL, 2002). Esses dados indicam ainda que os aspectos citados por Fischbein, (1994) e as diferentes representações semióticas, defendidas por Duval (2009) (tanto para processos de representação, como mudanças de representações) talvez não tenham sido explorados de forma ampla com estes estudantes na Educação Básica.

A não interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais dificultaram o desenvolvimento de processos de generalização e representação e a presença de espaços deixados em branco nas tabelas evidencia que aspectos intuitivos e algorítmicos não foram colocados em interação com aspectos formais, ou seja, os aspectos intuitivos provocados pelo processo de construção da dobradura – o que foi observado nos questionários dos participantes - não interagiram com aspectos algorítmicos e formais. Essa não interação e a dificuldade mostrada nas diversas formas de representar um objeto matemático, no caso de sequências e séries geométricas, tende a restringir a capacidade desses estudantes em lidar com problemas desse gênero. E, por conta disso, não tiveram autonomia para generalizar.

Na análise do questionário investigativo, podemos observar a ideia de infinito potencial nas respostas e isso pode ter ocorrido pela realização construção/dobradura com três etapas, que indica um processo potencialmente infinito e provoca aspectos intuitivos. Os resultados obtidos no geral indicam a prevalência desses aspectos intuitivos e a não inter-relação destes com aspectos algorítmicos e formais. Fischbein, Tirosh e Melamed (1981) relatam que o infinito em processo (infinito potencial) apresenta um alto grau de aceitação intuitiva, como um processo com infinitas etapas, uma após a outra, pois para nossa lógica usual e para uma compreensão intuitiva, o infinito é apenas uma potencialidade. Já o conceito de infinito real é intuitivamente contraditório, pois contraria essa lógica usual de potencialidade, onde precisamos considerar o infinito como um todo.

Fischbein (1994) alerta que aspectos intuitivos podem desempenhar papel facilitador, mas também podem aparecer equívocos e contradições. Por exemplo (questão 3), **P5**, **P6** e **P7** não apresentaram aspectos intuitivos "bons", pois associaram a quantidade infinita de triângulos a uma área infinita (infinito real). Por que isso acontece? Muitos estudantes têm a percepção apenas do infinito potencial, a ideia de sempre "somar", ou seja, na mesma proporção que a quantidade de triângulos aumenta, a área também vai aumentar, isto é, infinitos triângulos implica área infinita, o que realmente acontece em algumas situações, como no caso do perímetro do Triângulo de Sierpinki, A questão é que em algumas situações, como no caso da área hachurada do Triângulo de Sierpinski a soma das infinitas áreas hachuradas converge para um número e em outras não. Acreditamos que concepções intuitivas do infinito desses participantes podem ter sido estimuladas pelo processo de construção da dobradura, que apresenta uma limitação para encontrar o ponto médio e generalizar para o que acontece com infinitas etapas, pois a dobradura é finita.

Certamente, este equívoco pode estar relacionado à falta de compreensão do conceito de infinito real, que às vezes se apresenta intuitivamente contraditório à percepção do infinito potencial, por gerar resultados que contrariam algumas intuições que se apresentam ao participante como evidentes. Fischbein, Tirosh e Melamed (1981) destacam que situações contraintuitivas são poucas vezes trabalhadas pelo processo de ensino usual e em uma situação incomum que contradiz uma abordagem intuitiva "clara e óbvia", há poucas chances de serem desenvolvidos "bons" aspectos intuitivos com eficiência, em incomuns situações.

Concordamos com Fischbein, Tirosh e Melamed (1981), que relatam que o processo (infinito potencial) é perceptível e intuitivo, e apresenta um alto nível de aceitação intuitiva, pois pode-se perceber (questão 4) que a maior parte dos participantes acredita no processo infinito. Na discussão referente às áreas hachuradas dos triângulos (menores) que são gerados a cada nova etapa (questão 8), de um ponto de vista intuitivo, a solução pode estar relacionada à ideia de que "vai ficar cada vez menor", como se houvesse um "limite" para o processo das etapas, de tal modo que "o limite pode ser um ponto". **P1** apresenta uma resposta em que podemos perceber uma ideia de convergência, a concepção de infinito potencial quanto ao processo de iteração relacionado aos triângulos pequenos coloridos, a ideia de aproximação, ou seja, "tende ao zero".

Na análise sobre o que ocorre ao final do processo infinito (número infinito de etapas), ideias relacionadas às somas parciais (questão 9), a concepção dada por **P5** "ocupar todo espaço", podemos observar, neste argumento, que embora **P5** não justifique com argumentos formais, há uma concepção de infinito real em sua resposta, pois pode ter uma compreensão intuitiva de que o processo infinito resultará no triângulo todo hachurado. **P4** não apresenta a concepção de infinito real, mostra um entendimento do infinito potencial, "ocupar muitos espaços", isto é, a ideia de aproximação, da área hachurada, a área finita que representada é o triângulo todo hachurado. **P7** e **P3** citam área infinita, contradição em relação ao infinito real, a ideia de que a relação de etapas infinitas resulta infinitos triângulos e área infinita.

Outra observação importante, é em relação a linguagem apresentada em algumas situações, por exemplo nas respostas de **P6** e **P7** ao questionário, no qual escrevem "triângulos infinitos" e não infinitos triângulos. Desta forma, como podemos observar, que estes estudantes apresentam dificuldades em descrever argumentos, seja formal ou em língua materna, para Duval (2012), a língua natural deve ser considerada, como um registro, ou seja, é uma forma de representar e argumentar, não é possível negligenciar ou descartar a língua natural no âmbito do ensino da matemática, ela é um registro tão fundamental quanto os outros registros, particularmente aqueles em que os tratamentos de cálculo são possíveis.

5. RELATO DA APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1 COM UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E ESTUDANTES DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Apresentamos neste capítulo a análise dos dados obtidos com a Atividade 1 – a que parte da dobradura - aplicada a um grupo de 11 professores e 2 licenciandos de Matemática, durante uma oficina de 3 horas, realizada com o apoio do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM), do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), em março de 2020, uma semana antes do início do recesso causado pela pandemia do Corona Vírus.

Como a oficina, originalmente proposta para dois encontros, só teve um deles, por conta desse recesso, escolhemos 3 grupos de dois participantes para apresentar a análise dos protocolos obtidos com a Atividade 1, relativos às fases 1 (Dobradura) e 2 (Tabela 1). Para respeitar o código de Ética para pesquisas com pessoas, utilizamos as siglas **A1, A2, A3, A4, A5** e **A6** para referenciar os participantes. Para cada grupo, foi realizada uma única dobradura e apresentamos a análise da seguinte forma: grupo 1 (G1 - licenciandos), dos participantes **A1** e **A2;** grupo 2 (G2 - professores), dos participantes **A3** e **A4;** e grupo 3 (G3 - professores), dos participantes **A5** e **A6**. Professores e licenciandos foram avisados que os dados obtidos seriam utilizados em nossa pesquisa e, conforme exigência da Ética em pesquisa, assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (anexo 1). Isso se aplica aos observadores, que assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (anexo 2).

5.1. Resultados obtidos com a aplicação da atividade 1

Assim como na análise dos alunos (Capítulo 4), apresentamos analiticamente os dados obtidos com os protocolos dos seis participantes, com foco na identificação e classificação de erros que aparecem nas Tabelas 1 individuais, associados aos processos de conversão e tratamento propostos, bem como às generalizações pedidas (casos genéricos n e $n \to \infty$). Procuramos identificar: procedimentos e ideias equivocadas e analisar suas possíveis causas; a presença e a interação, ou não, de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, conforme ideias propostas por Fischbein (1994) e verificar se foram desenvolvidos "bons" aspectos intuitivos.

Dividimos esta secção em duas subsecções, 5.1.1 e 5.1.2. Apresentamos, na secção 5.1.1, a análise individual dos protocolos relativos ao preenchimento das Tabelas 1; e na 5.1.2, uma análise geral, baseada nos resultados individuais observados na secção 5.1.1

5.1.1. Análise das respostas dadas nas tabelas 1 por 4 professores e 2 licenciandos

Optamos por apresentar a análise por participante **Ai** ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), para cada um dos quais montamos três quadros, nessa ordem:

- um quadro, identificado por Quadro **F.Gi,** com a foto da dobradura realizada pelo grupo **Gi**
- um quadro, identificado por Quadro **T.Gi,** com a foto da Tabela 1 entregue pelos componentes do grupo **Gi**, identificada por Tabela **I.Ai**;
- outro quadro, identificado por Quadro **C.Ai**, com nossas observações sobre as respostas dadas por **Ai** e que podem ser vistas no Quadro **T.Gi**;

Assim como na análise anterior (capítulo 4), o Quadro **C.Ai** tem 3 colunas, conforme descrevemos a seguir:

Na coluna 1, colocamos a ação esperada em cada coluna da Tabela 1.

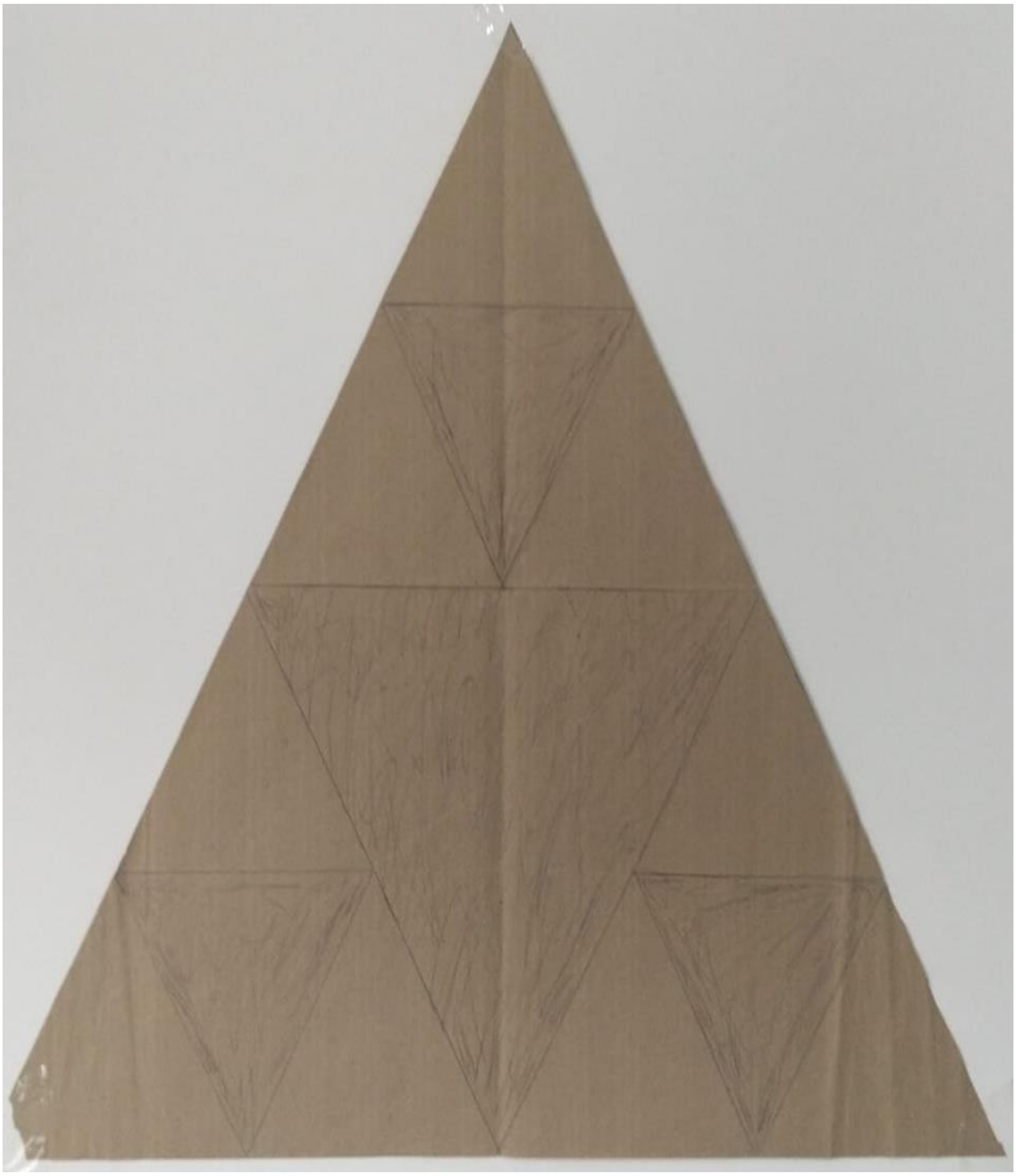
Na coluna 2, pusemos **s (em azul)** para as respostas corretas e **n (em vermelho)** para as não corretas.

Na terceira, nossas observações sobre as respostas dadas por **Ai**.

Em cada coluna, colocamos 10 linhas, uma para o título, oito para cada uma das ações esperadas e a 10ª linha para conclusões que julgamos pertinentes, relacionadas a **Ai**. Posto isto, vamos analisar se **Ai** realizou as ações esperadas, fez a passagem entre a dobradura e a representação figural, qual o resultado dessa passagem (representação figural), quais aspectos estão presentes e quais estão inter-relacionados. Com base no que for observado a partir dos dados da tabela **I.Ai**, buscamos entender procedimentos e ideias equivocadas e suas possíveis causas, à luz da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais (FISCHBEIN, 1994) e se a atividade matemática apresentada por **Ai** mostra a presença de aspectos intuitivos que podem ser considerados "bons", ou seja, que favoreceram o processo de generalização necessário para responder os questionamentos colocados por nós.

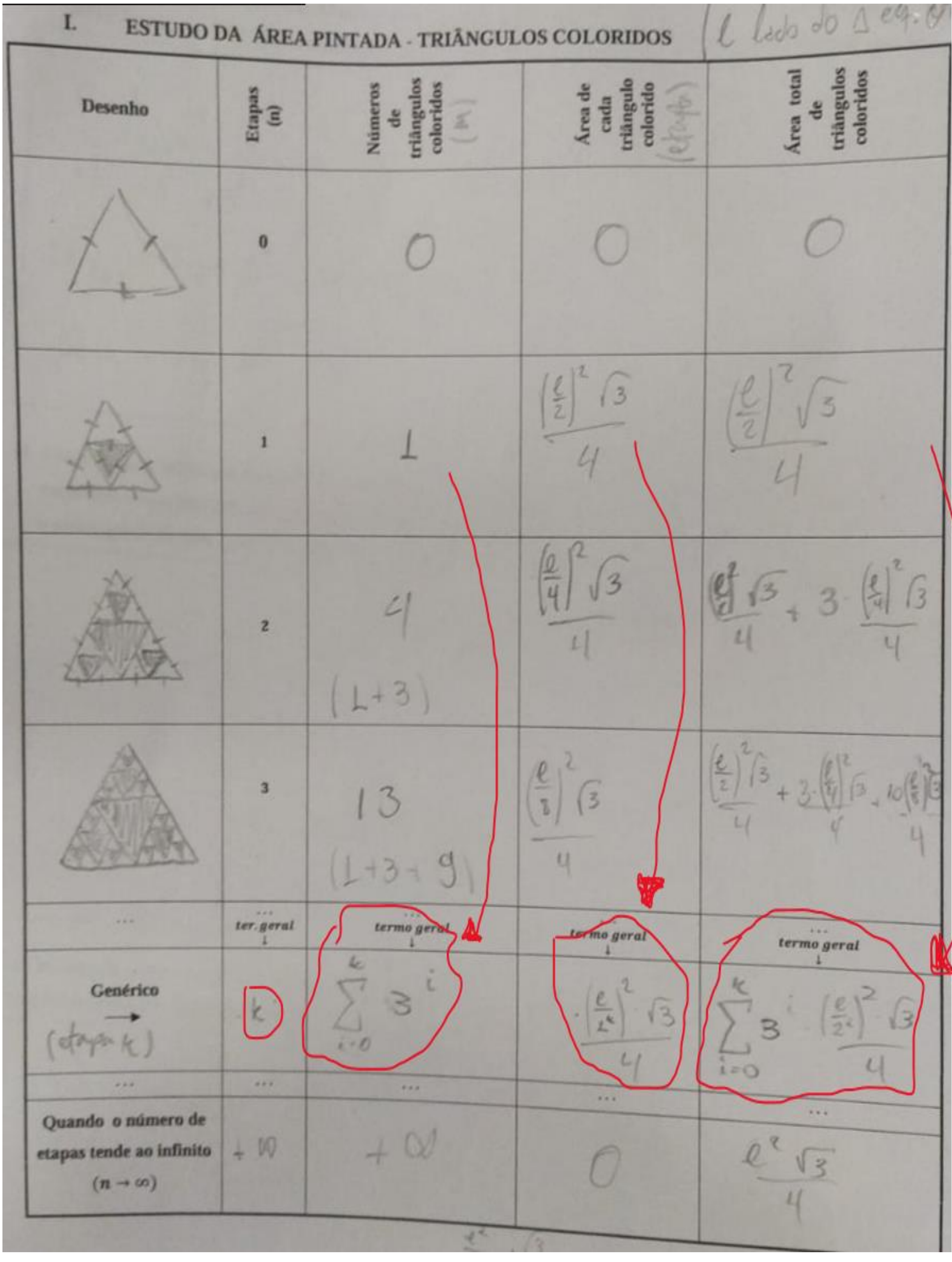
5.1.1.1. Análise das respostas do grupo G1

Quadro 29: - F.G1 - Foto da dobradura feita pelo grupo G1



Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 30 - T.A1: Foto da Tabela 1 preenchida por A1



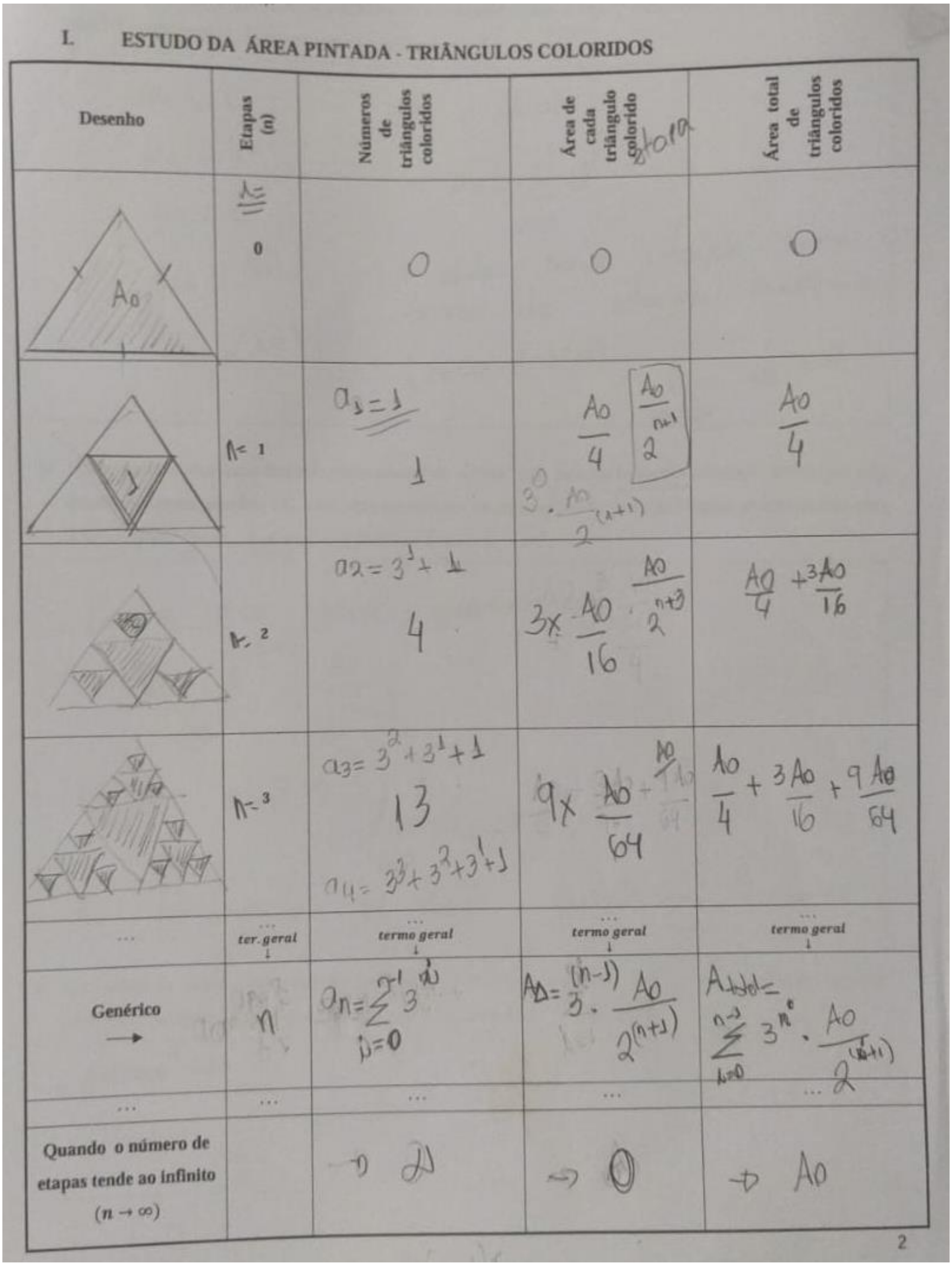
I. ESTUDO DA ÁREA PINTADA - TRIÂNGULOS COLORIDOS

ℓ lado do Δ eq.

Desenho	Etapas (n)	Números de triângulos coloridos (m)	Área de cada triângulo colorido (etapa)	Área total de triângulos coloridos
	0	0	0	0
	1	1	$\frac{(\frac{\ell}{2})^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{(\frac{\ell}{2})^2\sqrt{3}}{4}$
	2	4 (1+3)	$\frac{(\frac{\ell}{4})^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{(\frac{\ell}{2})^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{(\frac{\ell}{4})^2\sqrt{3}}{4}$
	3	13 (1+3+9)	$\frac{(\frac{\ell}{8})^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{(\frac{\ell}{2})^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{(\frac{\ell}{4})^2\sqrt{3}}{4}+10\frac{(\frac{\ell}{8})^2\sqrt{3}}{4}$
...	... ter. geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓
Genérico → (etapa k)	k	$\sum_{i=0}^{k} 3^{i}$	$\frac{(\frac{\ell}{2^k})^2\sqrt{3}}{4}$	$\sum_{i=0}^{k} 3^{i}\cdot\frac{(\frac{\ell}{2^i})^2\sqrt{3}}{4}$
...	...	...	...	...
Quando o número de etapas tende ao infinito ($n \to \infty$)	$+\infty$	$+\infty$	0	$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 31 - T.A2 - Foto da Tabela 1 preenchida por A2



I. ESTUDO DA ÁREA PINTADA - TRIÂNGULOS COLORIDOS

Desenho	Etapas (n)	Números de triângulos coloridos	Área de cada triângulo colorido	Área total de triângulos coloridos
A_0	$n =$ 0	0	0	0
1	$n =$ 1	$a_1 = 1$ 1	$\frac{A_0}{4}$ $\boxed{\frac{A_0}{2^{n+1}}}$ $3^0 \cdot \frac{A_0}{2^{(1+1)}}$	$\frac{A_0}{4}$
	$n =$ 2	$a_2 = 3^1 + 1$ 4	$3x \frac{A_0}{16} \cdot \frac{A_0}{2^{n+3}}$	$\frac{A_0}{4} + \frac{3A_0}{16}$
	$n =$ 3	$a_3 = 3^2 + 3^1 + 1$ 13 $a_4 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 1$	$9x \frac{A_0}{64}$	$\frac{A_0}{4} + \frac{3A_0}{16} + \frac{9A_0}{64}$
...	... ter. geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓
Genérico →	n	$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{i}$	$A_\Delta = 3^{(n-1)} \cdot \frac{A_0}{2^{(n+1)}}$	$A_{total} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{i} \cdot \frac{A_0}{2^{(i+1)}}$
...	...	...	...	...
Quando o número de etapas tende ao infinito $(n \to \infty)$		$\to \infty$	$\to 0$	$\to A_0$

2

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 32 - C.A1 - Categorização das respostas de A1 para a Tabela 1

Ação esperada	s / n	Observações
Dobradura	S	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura.
Coluna 1 - Representação figural	S	Realizou a passagem da dobradura para a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	S	Propôs corretamente o genérico.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	S	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	S	Preencheu corretamente.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	S	Realizou a representação esperada, preenche corretamente as células 1, 2 e 3. Entretanto, na célula 4 (caso n=3), não atenta ao fato de que são gerados 9 novos triângulos. A1 coloca 10.
Linha 5 – Genérico	S	Propõe a ideia correta, mas por conta de não termos um número para a área na etapa zero, apresenta equívoco na variação do índice (colunas 3 e 5), que deve ser entre 1 e k e não entre 0 e k, e também não apresenta a variação de k, visto que só temos área a partir da etapa 1 e, no caso, k é válido para $k \geq 1$. Genéricos corretos para as coluna 3 e 5 $com\ base\ nas\ ideias\ de\ A1;$ $\left[\sum_1^k 3^{i-1}\right];$ $\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{3^{i-1}(\frac{l}{2^i})^2\sqrt{3}}{4}\right]$ $com\ k \geq 1.$
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)	S	Preencheu corretamente.
Conclusões: a dobradura provocou “bons” aspectos intuitivos, pois realizou as representações esperadas, fez a representação algébrica (genérico) para n e ($n \to \infty$), usando k para indicar o termo genérico. Apesar do equívoco cometido na coluna 5 - erra na quantidade de triângulos -, o que aparenta ser falta de atenção na hora de realizar as somas parciais e de cometer erro na variação de k, o que podemos atribuir a um aspecto intuitivo previamente adquirido (o mais “comum” é o índice iniciar no 0 e, no caso, é válido para $k \geq 1$), podemos afirmar que A1 desenvolveu “bons” aspectos intuitivos, pois conseguiu realizar representações algébricas, para as quais inter-relacionou aspectos algorítmicos, intuitivos e formais.		

Fonte: autores

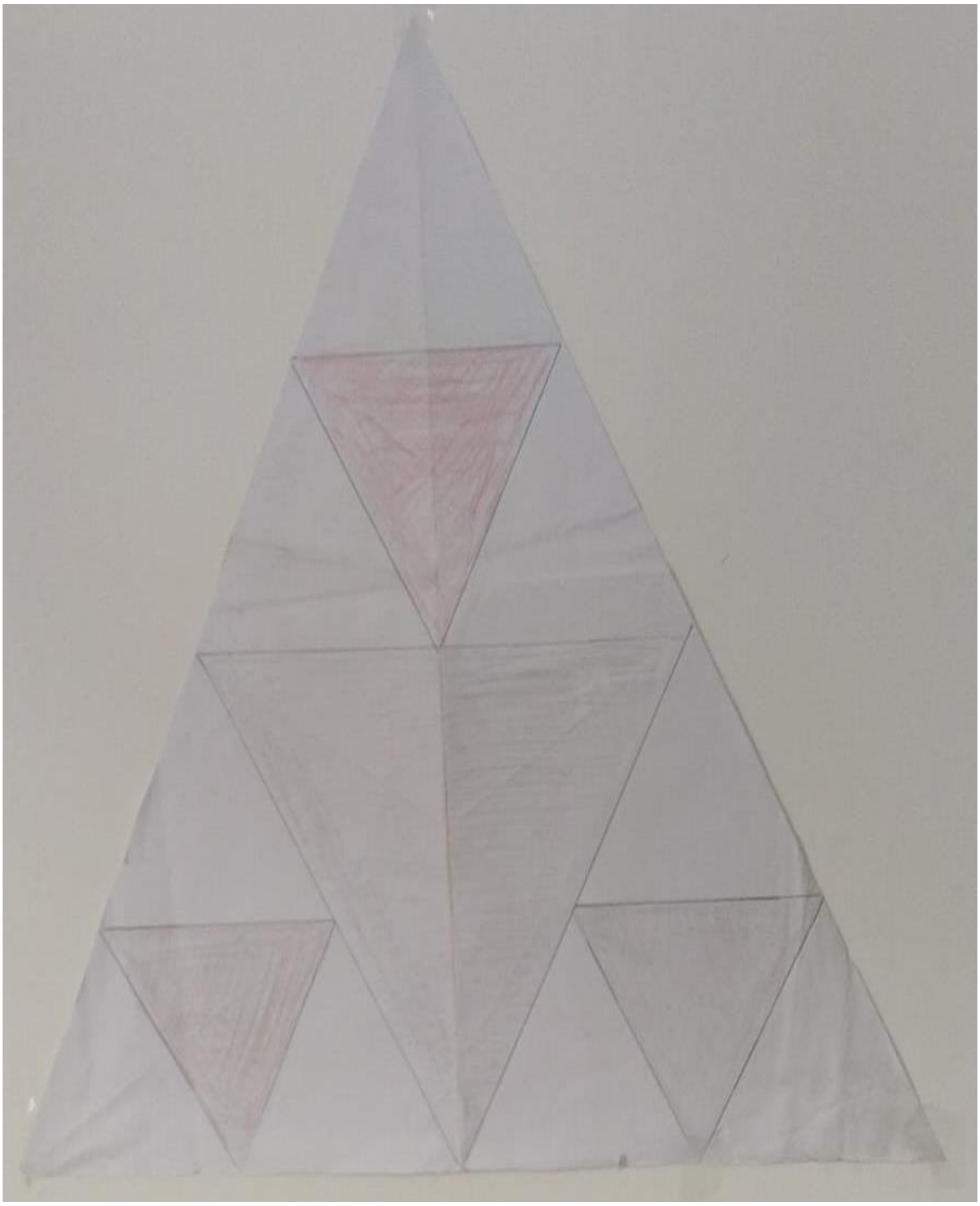
Quadro 33 - C.A2 - Categorização das respostas de A2 para a Tabela 1

Ação esperada	**s / n**	**Observações**
Dobradura	**S**	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura.
Coluna 1 - Representação figural	**S**	Realizou a passagem da dobradura para a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	**S**	Propôs corretamente o genérico.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	**S**	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	**N**	Percebeu o padrão, mas a ideia era representar a área do triângulo menor referente à etapa n e A2 representa a área de todos os triângulos hachurados. Este equívoco pode ser mais um problema de interpretação do que foi pedido.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	**S**	Preencheu corretamente.
Linha 5 – Genérico	**N**	preencheu corretamente as colunas 2 e 3, mas, assim como A1, inclui n=0, o que não ocorre, e podemos dizer que aspectos intuitivos podem ter conduzido a erro, por conta de uma aprendizagem anterior. Na coluna 5, erra na razão da pg, pois a cada nova iteração a área aumenta com razão ¾ em relação à área anterior, e A2 aplica a razão ½, que está relacionada aos lados do triângulo e não à área. $Genéricos\ corretos\ para\ as\ coluna\ 4\ e\ 5\ com\ base\ nas\ ideias\ de\ A2;\left[\frac{A_0}{4^n}\ com\ n \geq 1\right];\left[\sum_{i=1}^{n} 3^i \frac{A_0}{4^i}\ com\ n \geq 1\right]$.
Linha 6 – Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$	**S**	Preencheu corretamente as Colunas 3, 4 e 5 e deixou em branco a Coluna 2.
Conclusão: Apesar de alguns equívocos cometidos na Coluna 4 - que não consideramos como um erro formal, mas sim uma interpretação errada sobre o que foi pedido na coluna - e em alguns casos do genérico (colunas 4 e 5), por exemplo não apresentar o índice de variação para n (no caso, válido para $k \geq 1$, mesmo erro cometido por A1). Podemos considerar que A2 desenvolveu "bons" aspectos intuitivos, pois conseguiu generalizar em alguns casos (Colunas 2 e 3), embora, no genérico referente às somas parciais, tenha usado razão ½, e não ¾, no cálculo da adição das áreas.		

Fonte: autores

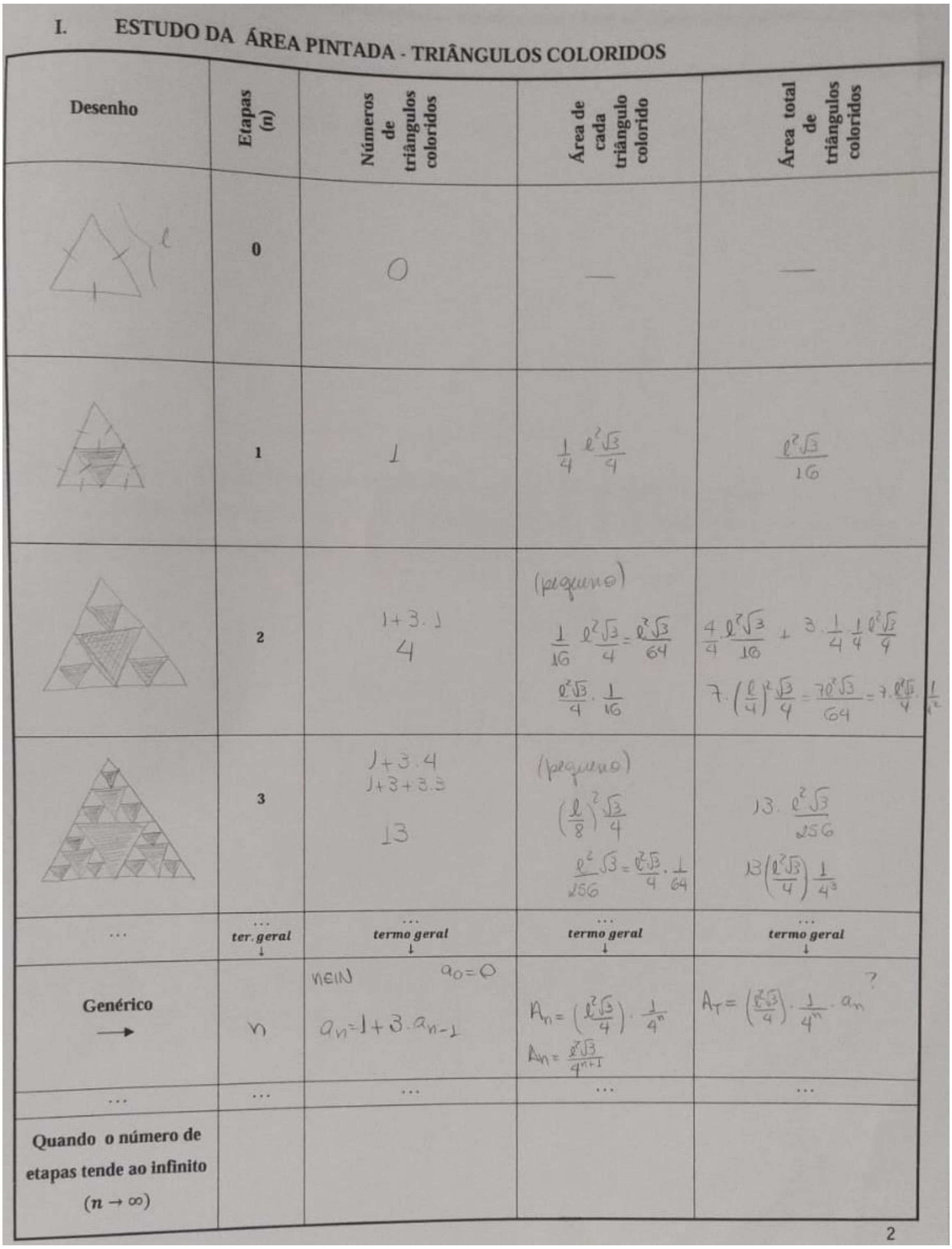
5.1.1.2. Análise das respostas do grupo G2

Quadro 34 - F.G2 - Foto da dobradura feita pelo grupo G2



Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 35 - T.A3 - Foto da Tabela 1 preenchida por A3



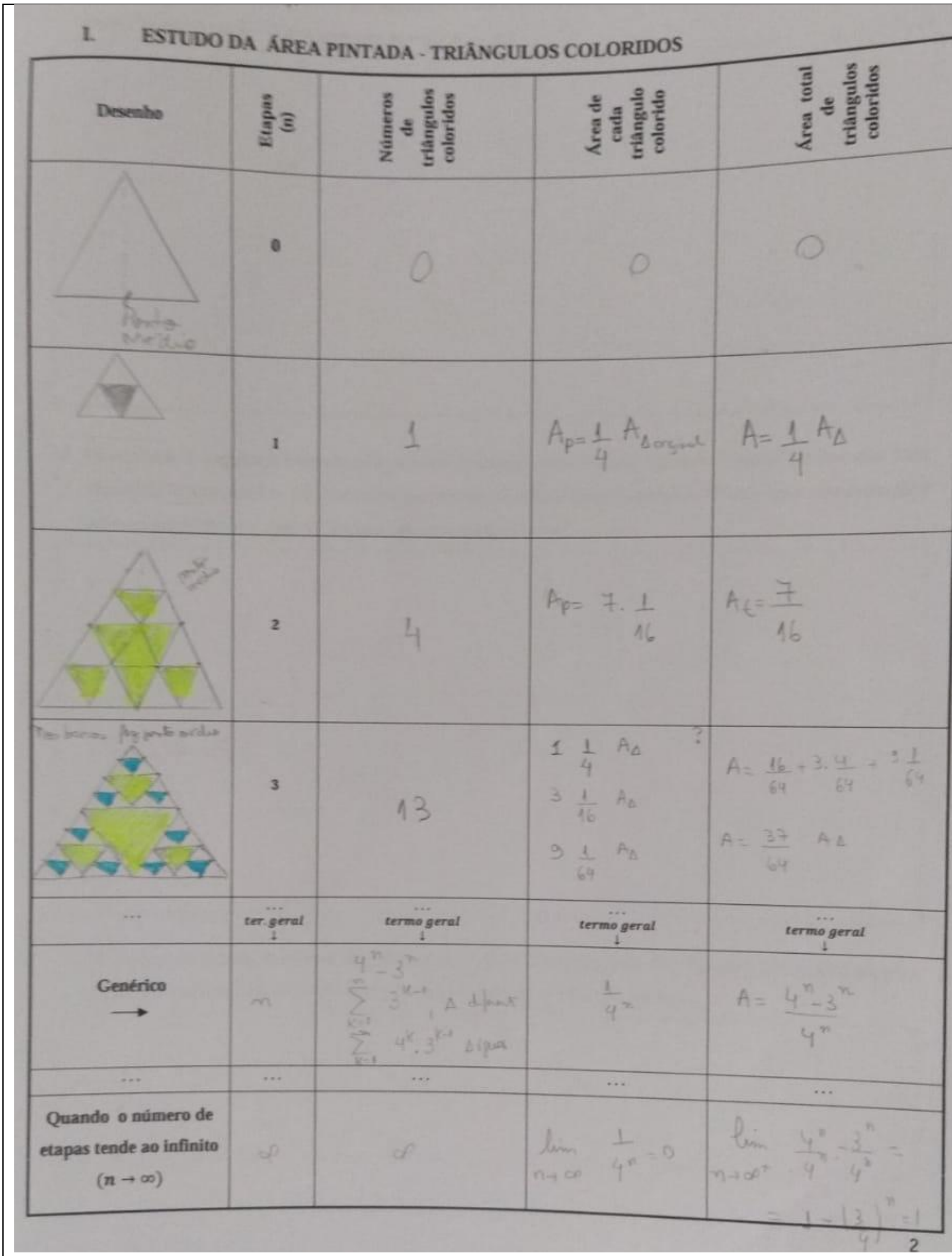
I. ESTUDO DA ÁREA PINTADA - TRIÂNGULOS COLORIDOS

Desenho	Etapas (n)	Números de triângulos coloridos	Área de cada triângulo colorido	Área total de triângulos coloridos
ℓ	0	0	—	—
	1	1	$\frac{1}{4}\,\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{16}$
	2	$1+3\cdot 1$ 4	(pequeno) $\frac{1}{16}\,\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{64}$ $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{16}$	$\frac{4}{4}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{16}+3\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ $7\cdot\left(\frac{\ell}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{7\ell^2\sqrt{3}}{64}=7\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4^2}$
	3	$1+3\cdot 4$ $1+3+3\cdot 3$ 13	(pequeno) $\left(\frac{\ell}{8}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\frac{\ell^2}{256}\sqrt{3}=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{64}$	$13\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{256}$ $13\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)\frac{1}{4^3}$
...	... ter. geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓
Genérico →	n	$n\in\mathbb{N}$ $a_0=0$ $a_n=1+3\cdot a_{n-1}$	$A_n=\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\frac{1}{4^n}$ $A_n=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}$	$A_T=\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\frac{1}{4^n}\cdot a_n$?
...	...	...	...	...
Quando o número de etapas tende ao infinito $(n\to\infty)$				

2

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 36 - T.A4 - Foto da Tabela 1 preenchida por A4



I. ESTUDO DA ÁREA PINTADA - TRIÂNGULOS COLORIDOS

Desenho	Etapas (n)	Números de triângulos coloridos	Área de cada triângulo colorido	Área total de triângulos coloridos
Ponto Médio	0	0	0	0
	1	1	$A_p = \frac{1}{4} A_{\Delta \text{original}}$	$A = \frac{1}{4} A_{\Delta}$
	2	4	$A_p = 7 \cdot \frac{1}{16}$	$A_t = \frac{7}{16}$
	3	13	$1 \ \frac{1}{4} A_\Delta$? $3 \ \frac{1}{16} A_\Delta$ $9 \ \frac{1}{64} A_\Delta$	$A = \frac{16}{64} + 3 \cdot \frac{4}{64} + 9 \frac{1}{64}$ $A = \frac{37}{64} A_\Delta$
...	... ter. geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓
Genérico →	n	$4^n - 3^n$ $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$, Δ difrent $\sum_{k=1}^{n} 4^k \cdot 3^{k-1}$ Δ igua	$\frac{1}{4^n}$	$A = \frac{4^n - 3^n}{4^n}$
...	...	...	...	...
Quando o número de etapas tende ao infinito $(n \to \infty)$	∞	∞	$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{4^n} = 0$	$\lim_{n \to \infty^+} \frac{4^n}{4^n} - \frac{3^n}{4^n} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1$

2

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 37 - C.A3 - Categorização das respostas de A3 para a Tabela 1

Ação esperada	s / n	Observações
Dobradura	S	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura.
Coluna 1 - Representação figural	S	Fez corretamente a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	S	Propôs corretamente o genérico.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	S	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	S	Preencheu corretamente.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	S	Realizou corretamente as somas parciais, entretanto, cometeu um equívoco em relação às somas dos triângulos na célula 4 (caso n=3). Valor correto é $\frac{37l^2\sqrt{3}}{256}$, valor mencionado $\frac{13l^2\sqrt{3}}{256}$.
Linha 5 – Genérico	S	Preencheu corretamente as Colunas 2,3 e 4, mas na coluna 5, não representa corretamente o genérico das somas parciais. Genérico correto para coluna 5 com base nas ideias de A3 ; $\left[\sum_1^n 3^{i-1} \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^i\right]$ $com\ n \geq 1$.
Linha 6 - Quando o número de termos tende a infinito ($n \to \infty$)	N	Não preencheu.
Conclusão: realizou corretamente as representações esperadas, fez a passagem da dobradura para a representação figural. Cometeu um equívoco nas somas parciais (caso n=3) e não preencheu a linha 6, relativa a n ($n \to \infty$). Em relação às representações algébricas, não apresenta o índice de variação para n , no caso válido para $k \geq 1$, não representa corretamente o genérico para as somas parciais, o que indica ausência de aspectos formais. Apesar disso, consideramos que o participante inter-relacionou aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, pois conseguiu generalizar em alguns casos (colunas 1, 2 e 3) e realizar as representações esperadas, o que mostra "bons" aspectos intuitivos.		

Fonte: autores

Quadro 38 - C.A4 - Categorização das respostas de A4 para a Tabela 1

Ação esperada	s / n	Observações
Dobradura	S	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura.
Coluna 1 - Representação figural	S	Fez corretamente a representação figural.
Coluna 2 – Etapas	S	Propôs corretamente o genérico.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	S	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	S	Preenche corretamente.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	S	Representa corretamente as somas parciais, mas na célula 3 (caso n=2), escreve apenas a fração referente a soma parcial, sem representar a área $participante\ A_t = \frac{7}{6}$ $representação\ correta\ A_t = \frac{7}{6}A_0$.
Linha 5 – Genérico	N	Preencheu corretamente a coluna 2 e 3, apresenta não inter-relacionar aspectos algorítmicos e formais. Visto que podemos encontrar erros nas representações dos genéricos. Não conseguimos compreender o que A4 quis representar no genérico da coluna 5, tentativas algébricas sem sentido, o que mostra evidências de dificuldades com a caracterização e a relação entre os conceitos de convergência. Genérico correto para coluna 4 $com\ base\ nas\ ideias\ de\ A4$; $\left[\frac{A_0}{4^n}\right]$; $com\ n \geq 1$.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)	S	Realizou corretamente para n ($n \to \infty$), porém, como não representou o genérico referente às somas parciais corretamente, erra ao calcular n ($n \to \infty$).

Conclusão: realizou corretamente a dobradura e a passagem para a representação figural. Podemos observar uma não inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, pois A4 comete erros na hora de generalizar; por exemplo, nas somas parciais, não apresenta o índice de variação para n, no caso válido para n≥ 1, o que indica ausência de aspectos formais. Para n ($n \to \infty$), aplica o limite chegando a 1, o que mostra a não validade do genérico encontrado apresentado po A4. Assim, não consideramos que A4 desenvolveu "bons" aspectos intuitivos, pois não conseguiu generalizar e encontrou muitas dificuldades em formalizar de forma coerente os genéricos das colunas 4 e 5. Neste caso, há evidências da não interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, o que limitou as estratégias de resolução de A4.

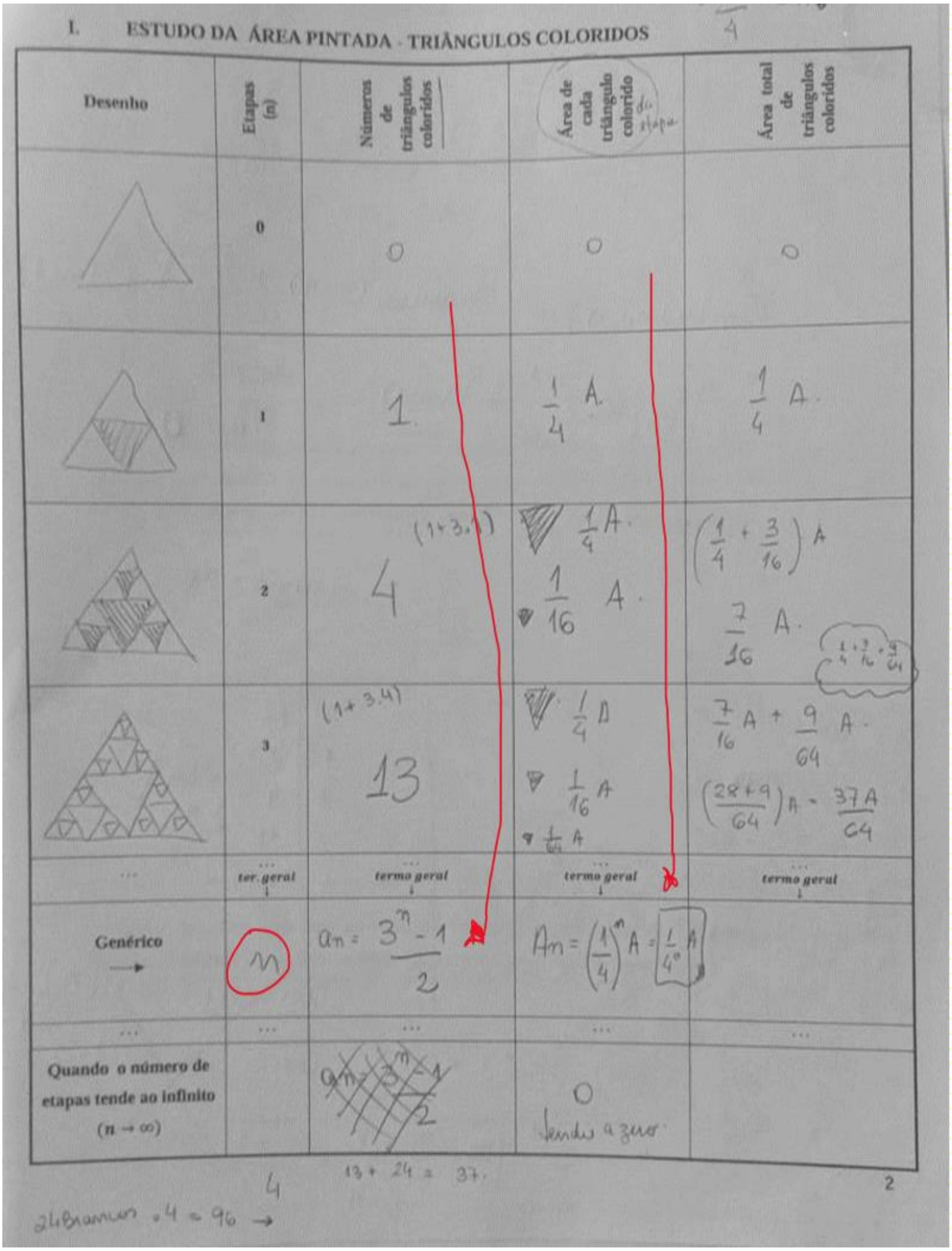
Fonte: autores

5.1.1.3. Análise das respostas do grupo G3

Quadro 39 - F.G3 - Foto da dobradura de G3

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 40 - T.A5 - Foto da Tabela 1 preenchida por A5



I. ESTUDO DA ÁREA PINTADA - TRIÂNGULOS COLORIDOS 4

Desenho	Etapas (n)	Números de triângulos coloridos	Área de cada triângulo colorido da etapa	Área total de triângulos coloridos
	0	0	0	0
	1	1	$\frac{1}{4}$ A	$\frac{1}{4}$ A
	2	(1+3.1) 4	$\frac{1}{4}$ A $\frac{1}{16}$ A	$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\right)$ A $\frac{7}{16}$ A $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}$
	3	(1+3.4) 13	$\frac{1}{4}$ A $\frac{1}{16}$ A $\frac{1}{64}$ A	$\frac{7}{16}$ A + $\frac{9}{64}$ A $\left(\frac{28+9}{64}\right)$ A = $\frac{37A}{64}$
...	... ter. geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓
Genérico →	n	$a_n = \frac{3^n-1}{2}$	$A_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n A = \boxed{\frac{1}{4^n} A}$	
...	...	...	...	...
Quando o número de etapas tende ao infinito ($n \to \infty$)		$\cancel{a_n = \frac{3^n-1}{2}}$	0 tende a zero	

13 + 24 = 37.

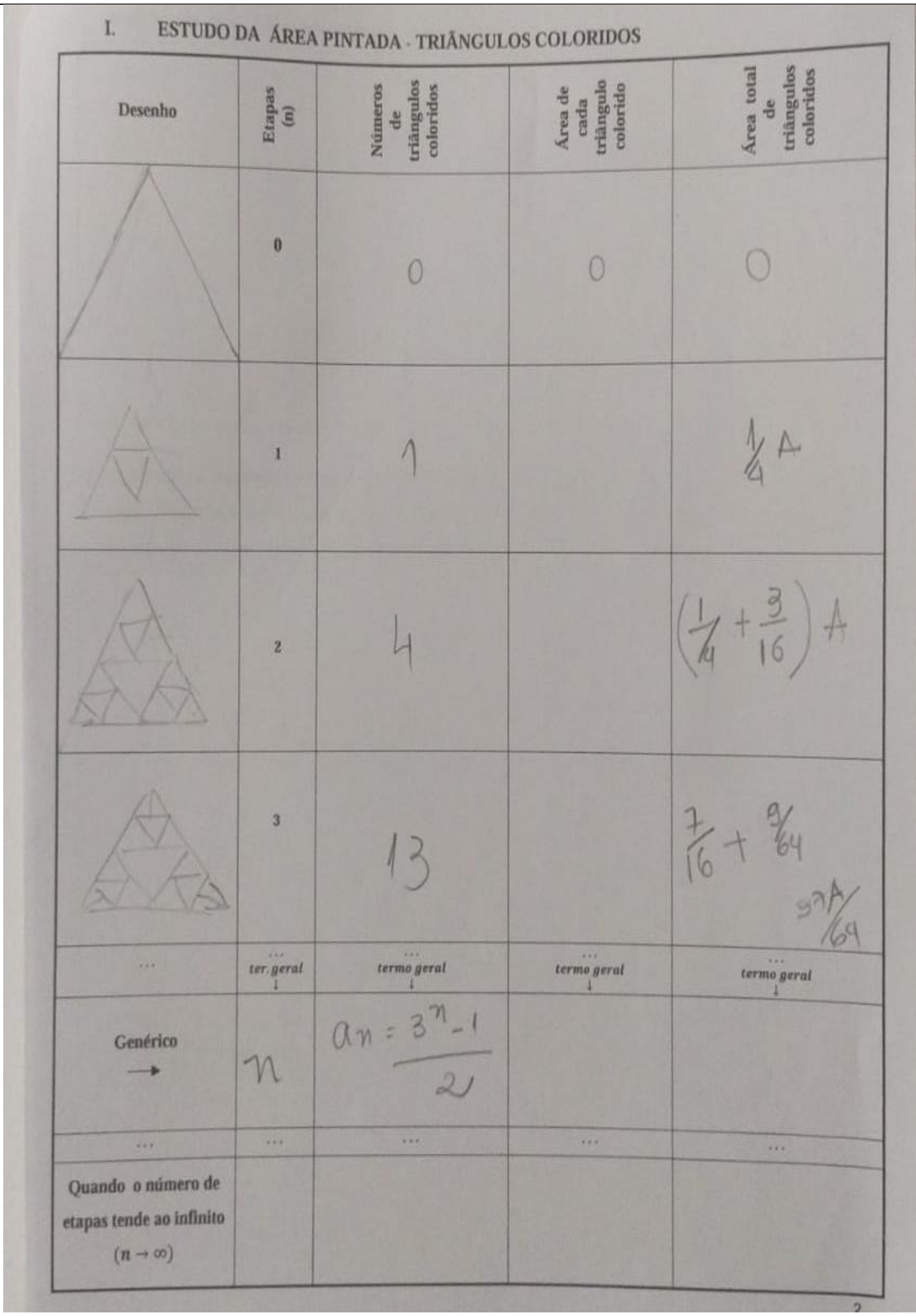
4

24 brancos . 4 = 96 →

2

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 41 - T.A6 - Foto da Tabela 1 preenchida por A6



I. ESTUDO DA ÁREA PINTADA - TRIÂNGULOS COLORIDOS

Desenho	Etapas (n)	Números de triângulos coloridos	Área de cada triângulo colorido	Área total de triângulos coloridos
	0	0	0	0
	1	1		$\frac{1}{4} A$
	2	4		$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right) A$
	3	13		$\frac{7}{16} + \frac{9}{64}$ $\frac{37A}{64}$
...	... ter. geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓	... termo geral ↓
Genérico →	n	$a_n = \frac{3^n - 1}{2}$		
...	...	...	...	...
Quando o número de etapas tende ao infinito ($n \to \infty$)				

2

Fonte: Material de pesquisa do autor

Quadro 42 - C.A5 - Categorização das respostas de A5 para a Tabela 1

Ação esperada	s / n	Observações
Dobradura	S	Realizou corretamente a dobradura.
Coluna 1 - Representação figural	S	Fez corretamente a representação figural, mas sem hachurar os triângulos referentes à etapa 3.
Coluna 2 – Etapas	S	Propôs corretamente o genérico.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	S	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	S	Preencheu corretamente.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	S	Preencheu corretamente.
Linha 5 – Genérico	S	Realizou corretamente as representações genéricas, mas não fez o genérico referente às somas parciais, não apresenta a variação de n, visto que não temos área na etapa zero, no caso, n é válido para $n \geq 1$.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)	N	Deixou em branco as colunas 2, 3 e 4.
Conclusão: realizou corretamente as representações esperadas e a passagem da dobradura para a representação figural. Não fez o genérico referente às somas parciais, o que mostra dificuldades com a generalização relacionada à convergência (infinito real). Também não apresenta o índice de variação para n , no caso válido para $n \geq 1$. Não preencheu a relação para n ($n \to \infty$), que A5 deixou em branco. Apesar disso, consideramos que A5 inter-relacionou aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, pois conseguiu generalizar em alguns casos, como nas colunas 2, 3 e 4 e fazer as representações esperadas nessas colunas, o que mostra "bons" aspectos intuitivos.		

Fonte: autores

Quadro 43 - C.A6 - Categorização das respostas de A6 para a Tabela 1

Ação esperada	s / n	Observações
Dobradura	S	Realizou corretamente o processo de construção da dobradura.
Coluna 1 - Representação figural	N	Não realizou a passagem da dobradura para a representação figural, pois não hachurou os triângulos referentes as etapas.
Coluna 2 – Etapas	S	Não preencheu as células correspondentes aos genéricos n.
Coluna 3 - Número total de triângulos coloridos	S	Preencheu corretamente.
Coluna 4 - Área de cada triângulo colorido (menor)	N	Preencheu corretamente a primeira célula (caso n=0). Deixou em branco as demais.
Coluna 5 - Área total de todos os triângulos coloridos	N	Deixou em branco.
Linha 5 – Genérico	N	Deixou em branco.
Linha 6 - Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)	N	Deixou em branco.
Conclusão: podemos observar muitas dificuldades de A6, ao dar as respostas em sua Tabela (TA6), pois não conseguiu generalizar (colunas 4 e 5), o que indica ausência de aspectos algorítmicos e formais. Deixou muitas células em branco, não conseguiu realizar as transformações pedidas, a partir da representação figural. Não compreendeu a razão ¼ na área dos triângulos novos gerados (coluna 4) e consequentemente não soube preencher a coluna 5. Não mostrou ter desenvolvido “bons” aspectos intuitivos, evidenciando uma não interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais.		

Fonte: autores

5.1.2. Algumas conclusões, baseadas na análise das respostas dos professores e licenciandos dadas nas tabelas 1

Apresentamos, no Quadro 44, os percentuais de respostas em branco, erradas e corretas para cada uma das colunas das Tabelas 1 preenchidas pelos seis participantes.

Quadro 44 - Quantificação das respostas à Tabela 1 – licenciandos e professores

Descrição das colunas da Tabela 1	Corretas	Erradas	Em branco
Dobradura	100%	0%	0%
1ª. Coluna / Representação figural	84%	16%	0%
2ª. Coluna / genéricos n e $(n \rightarrow \infty)$,	100%	0%	0%
3ª. Coluna / Números total de triângulos coloridos (todos)	100%	0%	0%
4ª. Coluna / Área de cada triângulo colorido (menor)	66%	16%	16%
5ª. Coluna / Área total de todos os triângulos coloridos	84%	16%	0%
Linha 5 / Genérico	50%	33%	17%
Linha 6 / $(n \rightarrow \infty)$	50%	0%	50%

Fonte: Elaborado pelo autores

Realizaram a passagem da dobradura para a representação figural (exceto A6), perceberam o padrão relacionado à propriedade do ponto médio encontrado em cada etapa. As dificuldades de alguns participantes, em apresentarem uma representação algébrica para o genérico (linha 5) em algumas colunas, podem estar ligadas à não interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, e essa dificuldade mostrou-se mais ligada à ausência de aspectos formais (Fischbein, 1994). Notamos dificuldades com conceitos relacionados à adição com infinitas parcelas, que podem estar ligadas à identificação/elaboração da representação algébrica (genérico) e à ausência de aspectos formais e/ou dificuldade para lidar com estes, relacionadas às ideias de convergência (infinito real) e de generalização de padrões.

Em relação às adições com infinitas parcelas (área total - célula 5 da linha 5), nas quais temos ideias relacionadas à convergência (infinito real), notamos que **A2**, **A3** e **A4** não representaram corretamente o genérico. Isso indica erros na passagem da coluna 5, referente às somas parciais, para o genérico na linha 5 (DUVAL, 2012). Com isso, mostram dificuldades em trabalhar com sequências, em que a lei de formação (genérico) envolve uma adição com infinitas parcelas, no caso ideias relacionadas ao infinito real. Essa ausência de aspectos formais parece ser a grande responsável pelo "mau" desempenho desses participantes e a não interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Os participantes **A5** e **A6** deixaram essa célula em branco.

Ainda sobre as ideias relacionadas à adição com infinitas parcelas (infinito real), estes participantes não parecem dominar aspectos formais nem algorítmicos, bem como as transformações necessárias entre as representações pedidas e o genérico (linha 6). Conforme defende Duval (2012), é preciso transitar (realizar conversões) entre representações semióticas distintas para um mesmo objeto matemático. Nesse caso, a relação entre pelo menos duas das representações semióticas pode implicar uma compreensão. Esses resultados reiteram que essas dificuldades na elaboração do genérico (área total) podem constituir um obstáculo relacionado ao formalismo matemático, dado que para desenvolver a argumentação formal com coerência e consistência, é preciso inter-relacionar aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, pois só com essa interação podemos desenvolver argumentos e construir formalmente afirmações matemáticas.

A importância da existência de aspectos formais é relevante para o entendimento da Matemática e favorece o desenvolvimento de justificativas, de argumentação e contribui para a generalização de padrões, como é o caso da linha 5 da tabela 1. Trabalhar a Matemática só com aspectos intuitivos e algorítmicos não desenvolve, a longo prazo, a capacidade de generalizar e justificar, nem de desenvolver argumentos formais e não favorece, assim, a expansão de ideias relacionadas ao infinito real.

Observamos, nesses participantes, muitas dificuldades com aspectos formais e representações algébricas e, consequentemente, com a inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Outro equívoco que indica ausência de aspectos formais foi o erro apresentado por todos de não explicitarem a variação de **n**, o que podemos atribuir a um aspecto intuitivo previamente adquirido, de que o índice sempre começa no zero e, no caso, não temos etapa zero. Valeria a pena investigar por que esse tipo de erro acontece. Parece que o mais "comum" é o índice iniciar no 0 e seria interessante serem trabalhados exemplos em que isso não acontece, como é o nosso caso.

Podemos notar que, para as colunas 2, 3 e 4, os participantes **A2**, **A3 e A5** apresentaram "bons" aspectos intuitivos, pois desenvolveram a interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, dado que encontraram o genérico, o que mostra que para esses casos os aspectos intuitivos e algorítmicos foram colocados em interação com aspectos formais, ou seja, os aspectos intuitivos provocados pelo processo de construção da dobradura e a representação figural foram ¨bons¨. Podemos dizer, que a utilização de vários registros de representação (DUVAL, 2012), na Tabela I, estimulou-os e induziu "bons" aspectos intuitivos. Esta análise também se aplica ao participante **A1,** que foi o único que conseguiu preencher a tabela toda corretamente. De fato, **A1** apresentou "bons" aspectos intuitivos, pois inter-relaciona aspectos algorítmicos, intuitivos e formais e consegue realizar as representações esperadas. Para o genérico referente às somas parciais (infinito real), **A1** apresentou corretamente uma representação algébrica, o que indica aspectos formais.

Podemos observar ainda que **A6** deixou muitas células em branco, o que mostra muitas dificuldades, inclusive com a matemática básica. Isso mostra dificuldades, em geral, do grupo de participantes com aspectos formais e representações algébricas e, consequentemente, com a inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Acreditamos que a abordagem que propusemos funcionou em alguns momentos para esses participantes, pois pelo menos 4 deles mostraram desenvolver os esperados "bons" aspectos intuitivos e inter-relacionaram aspectos intuitivos, algorítmicos e formais ao longo da atividade.

6. COMPARATIVO ENTRE A QUANTIFICAÇÃO DAS RESPOSTAS – ALUNOS E PROFESSORES

Apresentamos, no Quadro 45 os percentuais de respostas em branco, erradas e corretas para cada uma das colunas das Tabelas I preenchidas pelos alunos, licenciados e professores.

Quadro 45 - Comparativo das respostas à Tabela 1 – alunos, professores licenciandos

Descrição das colunas da Tabela 1	Corretas		Erradas		Em branco	
	Alunos	Prof./Lic.	Alunos	Prof./Lic.	Alunos	Prof./Lic.
Dobradura	85,8 %	100%	14,2%	0%	0%	0%
1ª. Coluna / Representação figural	85,8 %	84%	14,2%	16%	0%	0%
2ª. Coluna / genéricos n e $(n \to \infty)$	0%	100%	0%	0%	100%	0%
3ª. Coluna / Números total de triângulos coloridos (todos)	100%	100%	0%	0%	0%	0%
4ª. Coluna / Área de cada triângulo colorido (menor)	28,6%	66%	57,14	16%	16,2%	16%
5ª. Coluna / Área total de todos os triângulos coloridos	0%	84%	28,6%	16%	71,5%	0%
Linha 5 / Genérico	0%	50%	0%	33%	100%	17%
Linha 6 / $(n \to \infty)$	0%	50%	0%	0%	100%	50%

Fonte: Elaborado pelos autores

De maneira geral, alunos (85,8%) e professores (100%) realizaram o processo de dobradura. A representação figural com êxito de 85,8 % para os alunos e 84% para os professores. Podemos notar uma grande divergência nos resultados da Tabela I, onde há necessidade da inter-relação dos aspectos intuitivos algorítmicos e formais, como na segunda coluna onde 100% dos alunos não apresentaram o genérico **n** e por outro lado, 100% dos professores apresentaram a resposta esperada. A terceira coluna não apresentou dificuldades para nenhum dos participantes (alunos, professores e licenciados), entretanto, as dificuldades em lidar com interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais foram identificadas por todos os estudantes que participaram da pesquisa. Nas colunas 4 e 5, notamos essa divergência nos resultados, dado que na coluna 4 os professores e licenciados tiveram 66% de acertos e os alunos com êxito de 28,6% , e para a coluna 5, índice de 0% de acertos por parte dos alunos e professores e licenciados com êxito de 84%, resultados; que nos mostra a gravidade da situação em relação aos alunos, o que indica ausência de interação dos três aspectos.

Com base nos dados comparativos, entendemos que as incompreensões, erros e limitações dos alunos e parte dos professores estão em não relacionar aspectos algorítmicos e formais, pois essa não inter-relação dificulta na elaboração de justificativas e argumentações em Matemática, como generalização e formalização. Quando comparamos os resultados referentes às linhas 5 (genérico) e a linha 6, notamos uma deficiência muito grande por parte dos alunos nos processos de generalização, pois nenhum dos participantes conseguiu generalizar ou sequer tentou esboçar uma tentativa para o genérico. Os dados dos professores também mostram as dificuldades relacionadas à elaboração de argumentações e justificativas formais, parecem ser um grande obstáculo para o desenvolvimento da inter-relação dos aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, pois, quando trabalhamos padrões e questões relacionadas às ideias de infinito, em especial o infinito real, exige-se a capacidade de elaborar justificativas e afirmações.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, destacamos os pontos relevantes que se colocaram durante a realização de nosso trabalho. Começamos com os alunos; nossa análise evidenciou que os participantes não tinham o hábito de realizar atividades envolvendo estratégias de generalização de padrões matemáticos, como foi proposto na atividade 1, pois para eles, representar e generalizar o que estava sendo pedido na tabela, pareceu algo não "comum". Dessa forma, não conseguimos “provocar”, nesses participantes, “bons” aspectos intuitivos, como mostram os dados analisados. Podemos perceber em todas as tabelas e questionários analisados a não inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Esses dados nos alertam que não podemos trabalhar só com aspectos intuitivos numéricos (SOUZA, 2008), como muitas vezes é cobrado nos materiais didáticos, mas é preciso entender e desenvolver nesses estudantes a inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. De fato, para o nosso grupo de alunos, a abordagem que propusemos não funcionou de forma eficaz, visto que não mostraram desenvolver os esperados “bons” aspectos intuitivos e não inter-relacionaram aspectos intuitivos, algorítmicos e formais ao longo da atividade.

Em relação aos Licenciandos e professores, também não podemos afirmar que deenvolveram¨bons¨ aspectos intuitivos e a decorrente, no nosso entender, inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, por encontrarem dificuldades em representar as adições com infinitas parcelas (genérico referente às áreas). Em concordância com Duval (2012), que relata que existem processos de conversão (ver quadro 1) - como no caso dessas adições - que podem ser complexos, o que depende muito se há congruência ou não congruência dos registros. Essa análise indica que esses professores ainda encontram dificuldades em generalizar padrões em que não há congruência, como é o caso de uma série geométrica convergente; o que também indica que, em relação às ideias de infinito real, apresentam dificuldades com a formalidade matemática.

Em relação às contribuições de nossa pesquisa, para o Ensino de sequências e séries geométricas, podemos destacar um alerta que fica em relação a alunos da Educação Básica, uma vez que ficou clara uma “deficiência” desses participantes na atividade 1, pois não conseguiram representar (genérico) os padrões encontrados no processo de construção da dobradura e apresentaram muitas dificuldades em situações que exigiam conhecimentos "básicos", por exemplo não saber a área de um triângulo equilátero. Não conseguiram realizar as conversões, pois não generalizaram, o que mostra que é preciso enfatizar mais, em sala de aula de Matemática, o uso de várias representações semióticas (DUVAL, 2012) e utilizar abordagens que promovam a inter-relação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994). Esse indicativo reitera uma atenção especial à necessidade de mais pesquisas que nos permitam entender melhor porque esses estudantes não desenvolveram a interação desses três aspectos e como elaborar abordagens que promovam tanto a apreensão desses aspectos como a interação deles .

As dificuldades formais apontadas nas análises das respostas de nossos participantes (tanto alunos como professores) mostram a necessidade do desenvolvimento de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais durante a formação dos estudantes, para que a interação desses aspectos ocorra, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior. Assim, a observação de padrões, a generalização e argumentos formais devem ser trabalhados nas escolas e universidades, uma vez que o uso desses processos contribui para a compreensão das ideias relacionadas ao infinito e a generalizar padrões.

Sendo assim, colocamos/sugerimos algumas questões a serem pesquisadas e/ou pensadas para uma aplicação da atividade 1: utilizar mais etapas no processo de construção da dobradura, assim os participantes desenvolveriam melhores percepções quanto ao padrão encontrado no Triângulo de Sierpinski, para poder generalizar. 2. Realizar uma discussão preliminar, acompanhada de uma revisão com conceitos básicos de sequências e progressões, pois poderia "induzir" os participantes a desenvolverem “bons” aspectos intuitivos e a interagir aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. 3. utilizar mais aulas para realizar a atividade para um melhor desenvolvimento nas 3 fases propostas da atividade.

Diríamos ainda que, para aplicar novamente a Atividade 1, seria interessante trabalhar previamente alguns conceitos, como: área de um triângulo equilátero, semelhança de triângulos, sequências numéricas e progressões. Estes conteúdos, trabalhados previamente, com o desenvolvimento de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, bem como a interação deles, poderá “provocar” bons aspectos intuitivos. Acreditamos que é preciso desenvolver sempre abordagens para que nossos estudantes possam desenvolver esses “bons” aspectos intuitivos e inter-relacionar aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, em qualquer assunto de Matemática da vida escolar.

Por fim, como produto esperado de um Mestrado Profissional, deixamos um conjunto com duas propostas de ensino, baseadas no Triângulo de Sierpinski, para uso do professor de Matemática da Educação Básica, com elementos que consideramos interessantes para o ensino de sequências e séries geométricas e também para um trabalho com concepções de infinito que aparecem no assunto.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação (MEC/SEED). **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão - Versão Final. Brasília, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf . Acesso em: 10 de ago. de 2023.

BACHELARD, Gaston. **O novo espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Estrela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, p. 17-28, 1996. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/fis2008/Bachelard1996.pdf. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

CARGNIN, C.; BARROS, R. M.O. **O conceito de integral de Riemann do ponto de vista da congruência semântica**. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis -SC v. 11, n. 1, p. 16-35, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/42329. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates.** SBEM. Ano II. N2. Brasília. P. 15-19, 1989. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

DUVAL, R**. Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

___________.**Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência.** Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 07, n. 1, p.97-117,.2012b. dez. 2012. Trad. Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p97/22381. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

____________. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Registres de representations semiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Revista eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v.7, n.2,p.266-297, dez. 2012. Trad. Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: http://priodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

_____________. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2005. p. 11-34.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A. e MIORIM, M. A**. Contribuição para um Repensar... a Educação** Algébrica Elementar, In: Pro-Posições, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp. Vol.4, n. 1[10]. Campinas: Cortez Editora, p. 78-91, 1993. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1761/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

FISCHBEIN, E. **The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity**. In R., Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann. Didactics of mathematics as a scientific discipline, p.231-245. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher. 1994. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~dpdias/2016/GEN5711%20-%20Fischbein.pdf.

Acesso em:10 de ago. de 2023.

FISCHBEIN, E., D. TIROSH, and P. HESS (1979). **The intuition of infinity. Educational Studies in Mathematics**, 10, 3–40.

FISCHBEIN, Efrain ; TIROSH, Dina. & MELAMED, U. **Is it possible to mesure the intuitive acceptance of a mathematical statement?** Educational Mathematics Studies, v. 3, n. 23, p. 491-512, 1981. Disponível em: https://link.springer.com/epdf/10.1007/BF00308145?sharing_token=L9XlQ39T3HFngMqhMrGYI_e4RwlQNchNByi7wbcMAY7I2BJSzEIsI9G671ozvooavfLJbJJ1vSKMNX8gVEHsUw2JcDDIV4M12vQJcBYnLH4Zvul2_JCuUQvXyeEXYKx_C307d-nQy_2XtXCJ72SyKw. Acesso em:10 de ago. de 2023.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S., NARDI, E., & BIZA, I. (2011). **Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice**: The case of infinite series. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42(5), 565-589. Disponível em: https://ueaeprints.uea.ac.uk/id/eprint/15824/1/2011_IJMEST_Gonzalez_Martin_Nardi_Biza_42_5_565_589_Repository.pdf. Acesso em:10 de ago. de 2023.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. (2009). **L'introduction du concept de somme infinie : une première approche à travers l'analyse des manuels.** Actes du colloque EMF 2009. Groupe de travail 7, 1048-1061. Disponível em:

http://emf.unige.ch/files/6414/5329/9054/EMF2009_GT7_Gonzales.pdf. Acesso em:10 de ago. de 2023.

PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Ministério da Educação, Portugal. Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Portugal, 2009. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf

.Acesso em:10 de ago. de 2023.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. **Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple.** Ciênc. Educ., Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/ciedu/v22n2/1516-7313-ciedu-22-02-0465.pdf. Acesso em:10 de ago. de 2023.

SANTAELLA, Lúcia. ***Semiótica aplicada***. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Caderno do aluno Currículo em Ação: Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas**. 8º ano/volume 1. São Paulo, 2021, pg. 46. Disponível em: (P) 8 ano EF MIOLO.indb (educacao.sp.gov.br). Acesso em:10 de ago. de 2023.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP**. 9º ano, 22ª edição. Disponível em: MATEMÁTICA TUPÃ: AAP - AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM EM PROCESSO (matematicatupa.blogspot.com). Acesso em:10 de ago. de 2023.

SKEMP, R. R. **Relational understanding and instrumental understanding**. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), p.88–95. Disponível em: https://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Resources/Richard_Skemp.pdf. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

SOUZA, V. H. G. **O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica**. 2008. 307 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/ handle/11294?mode=full. Acesso em:10 de ago. de 2023.

VIEIRA, W. **Do cálculo à análise real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: http://repositorio.pgsskroton.com.br/ handle/123456789/21826 . Acesso em:10 de ago. de 2023.

QUINA, C. M. **Sequências e Séries: uma proposta duvaliana para a educação básica**. 2015.181f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo -USP, São Paulo, 2015. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-21012016-211144/publico/Dissertacao_Caio_Moura_Quina.pdf. Acesso em: 10 de ago. de 2023.

Anexos

ANEXO 1

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Participantes/Licenciandos - oficina)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **Sequências e séries geométricas no Ensino Médio:** ***uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski***, que tem como pesquisador responsável **Rodrigo Martins Lopes**, aluno do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado pela **Drª. Vera Helena Giusti de Souza**, os quais podem ser contatados pelo e-mail rodrigoml@ime.usp.br/ vhgiusti@ime.usp.br ou telefone (11) 96365 - 4575.

O presente trabalho tem por objetivos: oferecer uma oportunidade aos professores participantes de explorarem e discutir por meio de atividades lúdicas uma abordagem de sequências e séries geométricas para a Educação Básica. De modo que essas atividades em sala de aula buscam promover a análise de padrões e de regularidades em representações algébricas, numéricas, figurais e gráficas de sequências e séries geométricas, bem como discutir processos de conversão e de tratamento desses registros. Minha participação consistirá em realizar as atividades propostas pelo pesquisador.

Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

Assinatura: ____

Nome: ____

São Paulo, _____de ____________ de 2020

ANEXO 2

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (observadores - oficina)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **Sequências e séries geométricas no Ensino Médio:** ***uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski***, que tem como pesquisador responsável **Rodrigo Martins Lopes**, aluno do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado pela **Drª. Vera Helena Giusti de Souza**, os quais podem ser contatados pelo e-mail rodrigoml@ime.usp.br/ vhgiusti@ime.usp.br ou telefone (11) 96365 - 4575.

O presente trabalho tem por objetivos: oferecer uma oportunidade aos professores participantes de explorarem e discutir por meio de atividades lúdicas uma abordagem de sequências e séries geométricas para a Educação Básica. De modo que essas atividades em sala de aula buscam promover a análise de padrões e de regularidades em representações algébricas, numéricas, figurais e gráficas de sequências e séries geométricas, bem como discutir processos de conversão e de tratamento desses registros. Minha participação consistirá em observar e anotar as informações relevantes quanto às realizações das atividades pelos participantes da oficina.

Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser.

Assinatura: ____

Nome: ____

São Paulo, _____de ____________ de 2020

ANEXO 3

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Participantes/alunos)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **Sequências e séries geométricas no Ensino Médio:** ***uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski***, que tem como pesquisador responsável **Rodrigo Martins Lopes**, aluno do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado pela **Drª. Vera Helena Giusti de Souza**, os quais podem ser contatados pelo e-mail rodrigoml@ime.usp.br/ vhgiusti@ime.usp.br ou telefone (11) 96365 - 4575.

O presente trabalho tem por objetivos: Identificar dificuldades dos estudantes nos processos de conversão e de tratamento de registros de representação semiótica em sequencias e séries geométricas e dificuldades com a concepção de infinito nas representações algébricas, numéricas, figural e gráfica. Minha participação consistira em responder um questionário.

Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

Assinatura: ________________________________

____

Nome: ____

São Paulo, _____de ____________ de 2021.

ANEXO 4

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Participantes/alunos - Responsável)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____RG: ___________________

Declaro saber da participação de meu filho(a) _____________________________________

Na pesquisa intitulada **Sequências e séries geométricas no Ensino Médio:** ***uma abordagem com o Triângulo de Sierpinski***, que tem como pesquisador responsável **Rodrigo Martins Lopes**, aluno do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado pela **Drª. Vera Helena Giusti de Souza**, os quais podem ser contatados pelo e-mail rodrigoml@ime.usp.br/ vhgiusti@ime.usp.br ou telefone (11) 96365 - 4575.

O presente trabalho tem por objetivos: Identificar dificuldades dos estudantes nos processos de conversão e de tratamento de registros de representação semiótica em sequencias e séries geométricas e dificuldades com a concepção de infinito nas representações algébricas, numéricas, figural e gráfica. Minha participação consistira em responder um questionário.

Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

Assinatura: ____

Nome: ____

São Paulo, _____de ____________ de 2021.

ANEXO 5

ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO

Nome do(a)observador(a)____

Data da observação ___/___/___

Horário início ________

Termino___________

grupo (nome dos participantes)____

Atividade 1: Sequências e séries geométricas: construção do Triângulo de Sierpinski por meio de dobraduras em papel A1 sulfite 90g

Fase 1 - dobradura

1) Quais as propriedades /conceitos matemáticos foram mencionados pelo grupo ao fazer a dobradura do triângulo equilátero na etapa 0 ?

   ( ) os ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes, logo, todos eles medem 60°.

   ( ) triângulo equilátero é todo triângulo em que os três lados são iguais.

   ( ) a mediana, a **bissetriz**, a **mediatriz** e a **altura** de um triângulo equilátero são semelhantes.

   ( ) todos os ângulos externos que constituem um triângulo equilátero medem 120°.

   - Outros (especifique)

2) O grupo encontrou alguma dificuldade ao fazer a dobradura do triângulo equilátero? Se sim, quais foram?

3) O grupo encontrou alguma dificuldade para justificar que no terceiro passo o triângulo original resultou em quatro triângulos equiláteros congruentes? Se sim, quais foram?

4) Quais dos cinco passos da construção do triângulo equilátero que o grupo encontrou mais dificuldades? especifique.

Fase 2 – estudos da área do Triângulo de Sierpinski

5) Em qual coluna da tabela 1, o grupo encontrou mais dificuldades para representar a descoberta de um padrão na área do triângulo?

6) O grupo conseguiu analisar e escrever os padrões da área do triângulo equilátero nas representações geométrica (coluna 1) , aritmética (coluna 2 e 3) e algébrica (coluna 4 e 5)?

7) Alguma dificuldade de interpretação da tabela? Qual(is)

8) Todas as três etapas descritas na tabela foram executadas? Se não, qual não foi? Por quê? Qual foi a primeira? Qual foi a última?

9) Qual(is) da(s) coluna(s) o grupo encontrou mais dificuldade de encontrar o termo geral (genérico)? especifique o motivo.

10) Das questões propostas, qual(is) o grupo encontrou mais dificuldade? Qual(is) encontrou mais facilidade?

11) Das questões propostas, qual(is) teve alguma estratégia **"interessante"** de resolução ?

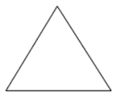
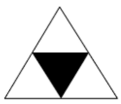
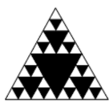
12) Na coluna " Área total de triângulos coloridos" o grupo conseguiu encontrar o termo geral e compreender as ideias básicas necessárias do conceito de convergência de uma sequência e de uma série geométrica?

13) O grupo compreendeu as ideias relacionadas ao infinito? Se não, especifique as dificuldades encontradas.

APÊNDICES

Apêndice A

Tabela 1 preenchida (ATIVIDADE 1 / Estudo da área - triângulos coloridos)

Desenho Representação Figural	*Etapa (n)*	*Números total de triângulos coloridos (todos)*	*Área de cada triângulo colorido (menor)*	*Área total de todos os triângulos coloridos (Somas parciais)*
	*0*	0	0	0
	*1*	*1*	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$
	*2*	*4*	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right)$
	*3*	*13*	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right) + 3^2.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right)$
…	…	…	…	…
Genérico →	n com $n \geq 1$	$a_1 = 1$ $3a_{(n-1)} + 1$ com $n \geq 2$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ com $n \geq 1$	$\sum_{i=1}^{n} l^2 \frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}$ com $n \geq 1$
…	…	…	…	…
Quando o número de termos tende ao infinito ($n \to \infty$)	$\lim_{n\to\infty} n = \infty$	$\lim_{n\to\infty} 3a_{(n-1)} + 1 = \infty$ com $n \geq 1$	$\lim_{n\to\infty} \frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ com $n \geq 1$	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} l^2 \frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ com $n \geq 1$

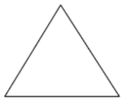
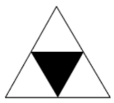
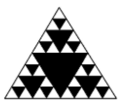
Apêndice B

Tabela 1 não preenchida (ATIVIDADE 1 / Estudo da área - triângulos coloridos)

Desenho Representação Figural	***Etapa (n)***	***Números total de triângulos coloridos (todos)***	***Área de cada triângulo colorido (menor)***	***Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)***
	0			
	1			
	2			
	3			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Genérico $\rightarrow$				
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Quando o número de termos tende ao infinito $(n \rightarrow \infty)$				

Apêndice C

Tabela 2 preenchida (ATIVIDADE 1 / Estudo do perímetro - triângulos coloridos)

Desenho Representação Figural	*Etapa (n)*	*Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)*	*Perímetro de cada triângulo colorido (menor)*	*Perímetro total de todos triângulos coloridos*
	*0*	0	0	*0*
	*1*	$\frac{l}{2}$	$\frac{3l}{2}$	$\frac{3l}{2}$
	*2*	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{4}$	$\frac{3l}{2}+3.\frac{3l}{4}$
	*3*	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{3l}{2}+3.\frac{3l}{4}+9.\frac{3l}{8}$
…	…	…	…	…
Genérico →	*N*	$l\left(\frac{1}{2}\right)^n$ com $n \geq 1$	$3l\left(\frac{1}{2}\right)^n$ com $n \geq 1$	$\sum_{i=0}^{n} \frac{3l}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}$ com $n \geq 1$
…	…	…	…	…
Quando o número de etapas tende ao infinito $(n \to \infty)$	$\lim_{n\to\infty} n = \infty$	$\lim_{n\to\infty} l\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ com $n \geq 1$	$\lim_{n\to\infty} 3l\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ com $n \geq 1$	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{3l}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} = \infty$ com $n \geq 1$

Apêndice D

Tabela 2 não preenchida (ATIVIDADE 1 / Estudo do perímetro - triângulos coloridos

Desenho Representação Figural	***Etapa (n)***	***Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)***	***Perímetro de cada triângulo colorido (menor)***	***Perímetro total de todos triângulos coloridos***
	0			
	1			
	2			
	3			
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Genérico $\rightarrow$				
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Quando o número de etapas tende ao infinito $(n \rightarrow \infty)$				

Apêndice E

Tabela 3 preenchida (ATIVIDADE 2 / Estudo da área colorida - triângulos pintados)

Desenho Representação Figural	*Etapa (n)*	*Números total de triângulos pretos (todos)*	*Área de cada triângulo preto (menor)*	*Área total de todos os triângulos pretos (somas parciais)*
	*0*	3^0	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
	*1*	3^1	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$	$3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\right)$
	*2*	3^2	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}$	$3^2.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right)$
	*3*	3^3	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}$	$3^3.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right)$
	*4*	3^4	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}$	$3^4.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}\right)$
…	…	…	…	…
Genérico ⟶	n	3^n $com\ \ n \geq 0$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ $com\ \ n \geq 0$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ $com\ \ n \geq 0$
…	…	…	…	…
Quando o número de etapas tende ao infinito $(n \to \infty)$	$\lim_{n\to\infty} n = \infty$ $comn \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$ $com\ \ n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ $com\ \ n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ $com\ \ n \geq 0$

Apêndice F

Tabela 3 não preenchida (ATIVIDADE 2 / Estudo da área - triângulos pintados)

Desenho Representação Figural	**Etapa (n)**	**Números total de triângulos pretos (todos)**	**Área de cada triângulo preto (menor)**	**Área total de todos os triângulos pretos (somas parciais)**
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			
…	…	…	…	…
Genérico →				
…	…	…	…	…
Quando o número de etapas tende ao infinito $(\boldsymbol{n} \to \infty)c$				

Apêndice G

Tabela 4 preenchida (ATIVIDADE 2 / Estudo do perímetro - triângulos pretos)

Desenho Representação Figural	*Etapa (n)*	*Comprimento do lado de cada triângulo preto (menor)*	*Perímetro de cada triângulo preto (menor)*	*Perímetro total de todos triângulos pretos*
	*0*	l	$3l$	$3l$
	*1*	$\frac{l}{2}$	$\frac{3l}{2}$	$\frac{3.3l}{2}$
	*2*	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{4}$	$\frac{3^2.3l}{2^2}$
	*3*	$\frac{l}{8}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{3^3.3l}{2^3}$
	*4*	$\frac{l}{16}$	$\frac{3l}{16}$	$\frac{3^4.3l}{2^4}$
…	…	…	…	…
Genérico $\longrightarrow$	*N*	$l\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $com\, n \geq 0$	$3l\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $com\ \ n \geq 0$	$3l\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $com\ \ n \geq 0$
…	…	…	…	…
Quando o número de etapas tende ao infinito ($n \to \infty$)	$\lim_{n\to\infty} n = \infty$	$\lim_{n\to\infty} l\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $com\ \ n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} 3l\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $com\ \ n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} 3l\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$ $com\ \ n \geq 0$

Apêndice H

Tabela 4 não preenchida (ATIVIDADE 2 / Estudo do perímetro - triângulos pretos)

Desenho Representação Figural	*Etapa (n)*	*Comprimento do lado de cada triângulo preto (menor)*	*Perímetro de cada triângulo preto (menor)*	*Perímetro total de todos triângulos pretos*
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			
…	…	…	…	…
Genérico				
…	…	…	…	…
Quando o número de etapas tende ao infinito ($n \to \infty$)				

Apêndice I

Questionário 1 preenchido – (ATIVIDADE I / triângulos coloridos)

Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?
Podemos encontrar as propriedades: semelhança de triângulos, ponto médio, congruência, equivalência entre áreas, a relação de proporcionalidade nos lados e nas áreas hachuradas.

Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?
Sim, pois por menor que seja o triângulo gerado em uma determinada etapa **n**, sempre é possível encontrar novamente os pontos médios dos lados desse triângulo e fazer a etapa **(n+1)**. Por conta desse processo sem fim, podemos associar a etapa **(n+1)** a sequência dos números naturais, portanto, teremos infinitos triângulos.

Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?
Sim, pois o processo de iteração é infinito (justificado na questão 2). Entretanto, a área será finita, pois por mais que façamos as infinitas etapas, essa área nunca ultrapassará a área do triângulo na etapa zero (triângulo equilátero inicial).

Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?
Sim, pois sempre é possível encontrarmos o ponto médio e fazer a etapa subsequente (justificado na questão 2).

Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior?
A cada nova iteração os lados dos novos triângulos gerados são reduzidos a razão ½.

Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?
Sim, por conta de sempre encontrarmos os pontos médios, visto que em cada um dos três triângulos não hachurados, é pintado o triângulo que não tem os vértices do triângulo original.

Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?
Sim, há uma regularidade, a "soma" relacionada à ideia das somas parciais, ou seja, que a cada nova iteração a área aumenta ¾ em relação à área anterior. Conforme o genérico $\sum_{i=1}^{n} l^2 \frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}$.

Q8 - O que ocorre com a "área hachurada/pintada de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?
A área do triângulo fica menor a cada etapa, com razão $1/4$ e após as infinitas etapas se aproxima de zero. Conforme o genérico $\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?
Sim, se aproxima do valor $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} l^2 \frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, ou seja, a área será finita, pois por mais que façamos as infinitas etapas, essa área nunca ultrapassará a área do triângulo na etapa zero (triângulo equilátero inicial $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$).

Apêndice J

Questionário 1 não preenchido – (ATIVIDADE I / triângulos coloridos)

Q1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova iteração (etapa)?
Q2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?
Q3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área hachurada/pintada também será infinita?
Q4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?
Q5 - O que ocorre com os lados dos novos triângulos de cada iteração (etapa) com relação aos lados dos triângulos da iteração anterior?
Q6 - O processo de iteração (etapa) é sempre o mesmo? Se sim, por quê?
Q7 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas hachuradas/pintadas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?
Q8 - O que ocorre com a “área de cada triângulo colorido (menor)” a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapa) será infinita?
Q9 - A cada novo termo (etapa), a sequência “área total de todos os triângulos coloridos” se aproxima de algum valor específico? Essa iteração será infinita?

Apêndice K

Questionário 2 preenchido (ATIVIDADE I / Estudo do perímetro – triângulos coloridos tabela 2)

1 – Existe alguma regularidade para o "**Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito? A cada nova iteração/etapa os lados dos novos triângulos gerados são reduzidos a razão 1/2. E, podemos representar este padrão pela expressão (genérico) $l\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$. Por conta de sempre encontrarmos o ponto médio, sempre é possível realizar mais uma iteração, assim o número de etapas vai para infinito.
2 - Existe alguma regularidade para o "**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito? Sim, como a cada nova iteração os lados dos novos triângulos gerados são reduzidos a razão ½, o perímetro de cada triângulo colorido novo gerado terá seu valor reduzido a ½. Podemos representar este padrão pela expressão $3l\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$. Como temos uma progressão geométrica de razão ½, quando o número de etapas vai para infinito, o perímetro de cada triângulo menor se aproxima de zero.
3 - A sequência formada pelos valores "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" é representada uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito? Não, essa sequência é representada por uma série geométrica convergente. Podemos representar este padrão pela expressão $\sum_{i=0}^{n}\frac{3l}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}$. Como o perímetro total de todos os triângulos coloridos é representado por uma série geométrica de razão 3/2, temos que, quando **n** tende para infinito, o perímetro diverge, ou seja, também vai para infinito.
4 – Qual a relação entre o "Perímetro **de cada triângulo colorido (menor)**" e o "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" quando o número de etapas tende ao infinito? Como cada triângulo novo gerado tem seu valor reduzido a ½, após infinitas etapas, o perímetro de cada triângulo se aproxima de zero. Entretanto, conforme é somado às áreas de os triângulos coloridos, o perímetro total de todos os triângulos coloridos, quando temos infinitas etapas , é representado por uma série geométrica de razão 3/2, portanto, vai para infinito.

Apêndice L

Questionário 2 não preenchido (ATIVIDADE 1 / Estudo do perímetro – triângulos coloridos tabela 2)

1 – Existe alguma regularidade para o "**Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
2 - Existe alguma regularidade para o "**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
3 - A sequência formada pelos valores "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" é representada uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
4 – Qual a relação entre o "Perímetro **de cada triângulo colorido (menor)**" e o "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" quando o número de etapas tende ao infinito?

Apêndice M

Questionário 3 preenchido – (ATIVIDADE 2 / triângulos coloridos)

1 - Existe uma expressão/representação genérica para a sequência dada pelos dos valores da coluna " **Números total de triângulos pretos (todos)**"? Se sim, qual é? O que acontece quando $n \to \infty$? Sim, podemos notar que essa sequência é representáda pela expressão (genérico) $3^{\boldsymbol{n}}$. Como temos uma progressão geométrica crescente de razão 3, essa sequência vai para infinito quando $n \to \infty$.
2 - A sequência formada pelos valores da coluna "**área de cada triângulo preto (menor)**" forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando $n \to \infty$? A sequência gerada pela área de cada triângulo preto menor é representada por uma progressão geométrica Podemos representá-la pela expressão (genérico) $\frac{\boldsymbol{l}^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\boldsymbol{n}}$. Como temos um progressão geométrica de razão ¼ , quando $n \to \infty$ a área se aproxima de zero.
3 - A sequência formada pelos valores da coluna **"área total de todos os triângulos pretos"** forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? A sequência gerada pela área total de todos os triângulos preto é representada por uma progressão geométrica. Podemos representá-la pela expressão (genérico) $\frac{\boldsymbol{l}^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\boldsymbol{n}}$. Como temos um progressão geometrica de razão $3/4$, quando $n \to \infty$ a área se aproxima de zero.
4 - A cada novo termo (etapa), a sequência "**área total de todos os triângulos pretos"** tende a se aproximar algum valor específico? Se sim, qual é este valor? Quando o número de etapas (termos) tende ao infinito? Que valor é esse? Como a área total de todos os triângulos pretos fica menor a cada etapa, com razão $3/4$ e após as infinitas etapas se aproxima de zero. Conforme $\mathbf{n}$ vai para infinito , $\lim_{n \to \infty} = \frac{\boldsymbol{l}^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\boldsymbol{n}} = 0.$

Apêndice N

ANEXO 20 – Questionário 3 não preenchido – (ATIVIDADE 2 / triângulos coloridos)

1 - Existe uma expressão/representação genérica para a sequência dada pelos valores da coluna " **Números total de triângulos pretos (todos)**"? Se sim, qual é? O que acontece quando $n \to \infty$?
2 - A sequência formada pelos valores da coluna "**área de cada triângulo preto (menor)**" forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando $n \to \infty$?
3 - A sequência formada pelos valores da coluna **"área total de todos os triângulos pretos"** forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é?
4 - A cada novo termo (etapa), a sequência "**área total de todos os triângulos pretos"** tende a se aproximar algum valor específico? Se sim, qual é este valor? Quando o número de etapas (termos) tende ao infinito? Que valor é esse?

Apêndice O

Questionário 4 preenchido (ATIVIDADE 2/ Estudo do perímetro – triângulos coloridos tabela 4)

1 – Existe alguma regularidade para o "**Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito? A cada nova iteração/etapa os lados dos novos triângulos gerados são reduzidos a razão 1/2. Podemos representar este padrão pela expressão (genérico) $l\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Por conta de sempre encontrarmos o ponto médio, sempre é possível realizar mais uma iteração, assim, o número de etapas vai para infinito.
2 - Existe alguma regularidade para o "**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito? Sim, como a cada nova iteração os lados dos novos triângulos gerados são reduzidos a razão ½, o perímetro de cada triângulo colorido novo gerado terá seu valor reduzido a ½. Podemos representar este padrão pela expressão $3l\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Como temos uma progressão geométrica de razão ½, quando o número de etapas vai para infinito, o perímetro de cada triângulo menor se aproxima de zero.
3 - A sequência formada pelos valores "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" é representada por uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito? Não, essa sequência é representada por uma série geométrica convergente. Podemos representar este padrão pela expressão $\sum_{i=0}^{n} \frac{3l}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}$. Como o perímetro total de todos os triângulos coloridos é representado por uma série geométrica de razão 3/2, temos que, quando **n** tende para infinito, o perímetro diverge, ou seja, também vai para infinito.
4 – Qual a relação entre o "Perímetro **de cada triângulo colorido (menor)**" e o "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" quando o número de etapas tende ao infinito? Como cada triângulo novo gerado tem seu valor reduzido a ½, após infinitas etapas, a perímetro de cada triângulo se aproxima de zero. Entretanto, conforme é somado às áreas de os triângulos coloridos o perímetro total de todos os triângulos coloridos, quando temos infinitas etapas , é representado por uma série geométrica de razão 3/2, portanto, vai para infinito.

Apêndice P

Questionário 4 não preenchido (ATIVIDADE 2 / Estudo do perímetro – triângulos coloridos tabela 4)

1 – Existe alguma regularidade para o "**Comprimento do lado de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
2 - Existe alguma regularidade para o "**Perímetro de cada triângulo colorido (menor)**"? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
3 - A sequência formada pelos valores "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" é representada por uma sequência qualquer? Existe uma expressão/representação algébrica para o termo geral? Se sim, qual é? O que acontece quando o número de iterações (etapas) vai para infinito?
4 – Qual a relação entre o "Perímetro **de cada triângulo colorido (menor)**" e o "**Perímetro total de todos os triângulos coloridos**" quando o número de etapas tende ao infinito?

Apêndice Q

ATIVIDADE - SEQUÊNCIAS E SÉRIES GEOMÉTRICAS - DÍZIMAS PERIÓDICAS

Se fizermos a representação de uma dízima periódica por meio da soma de parcelas fracionárias, teremos infinitas parcelas. Já que o número de parcelas é infinito, podemos dizer que a soma dessas parcelas será infinita? Na Educação Básica, as dízimas periódicas podem ser interpretadas como adição de infinitas parcelas na forma fracionária, explorando uma ideia de infinito potencial e infinito real. Por meio de séries geométricas, podemos mostrar aos estudantes alguns conceitos importantes que muitas vezes não ficam claros ao menos quando é utilizado um algoritmo para encontrar a fração geratriz. Utilizar séries geométricas para representar dízimas periódicas favorece na compreensão do infinito envolvido e na compreensão do infinito potencial e infinito real.

Material necessário: Caderno, lápis, caneta, borracha,

Procedimentos metodológicos: Pretendemos nesta atividade, apresentar ao professor de Matemática do Ensino Médio uma atividade em que os estudantes possam:

- Analisar padrões e regularidades encontradas em dízimas periódicas, tais como: sequências, progressões e séries geométricas por meio de diferentes representações.
- Utilizar dízimas periódicas para a descoberta de um padrão, analisar e escrever esses padrões nas representações aritmética, algébrica, geométrica e gráfica.

A atividade será desenvolvida em duas Etapas, cujos procedimentos metodológicos são descritos no que segue.

Etapa 1: preenchimento da tabela com diferentes representações numérica decimal/fracionária e algébrica. Um trabalho investigativo de generalização, por meio do preenchimento de uma tabela com quatro colunas e seis linhas. Estas correspondem, respectivamente, às parcelas 0, 1, 2, 3, n e $(n \to \infty)$. Na coluna 1, pede-se o número de termos/parcelas nas etapas respectivas. Na coluna 2, está discriminada a representação decimal de cada parcela. Na coluna 3, pede-se o registro numérico fracionário. Na coluna 4, pede-se a soma de todas as parcelas, são as somas parciais. Na 5ª linha das tabelas, pede-se a generalização do que ocorre nas 4 primeiras linhas, em termos de parcelas vencidas no processo infinito (resultados parciais de um número finito de parcelas), e na 6ª linha, a generalização sobre o que ocorre ao final do processo infinito (número infinito de etapas), que corresponde a fazer ($n \to \infty$).

Etapa 2: resposta a um questionário, formado por questões relacionadas às ideias de infinito (como processo) e de convergência (como resultado de uma "adição"). Será proposta uma sequência investigativa, para a exploração de conceitos e análise de Série geométrica.

ETAPA 1 – PREENCHIMENTO DA TABELA

análise da dízima periódica 0,999… = 1

Números de termos parcelas (n)	*Representação decimal de cada parcela*	*Representação fracionária de cada parcela*	*Soma total de todos os termos (parcelas)*
1º	0,9	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$
2º	*0.09*	$\frac{9}{100}$	$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}$
3º	0,009	$\frac{9}{1000}$	$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}$
4º	0,0009	$\frac{9}{10000}$	$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}$
...	…	…	…
Genérico $\longrightarrow$	$0{,}9(0{,}1)^{n-1}$ *com* $n \geq 1$	$\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ *com* $n \geq 1$	$\sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{i-1}$ *com* $n \geq 1$
...	…	…	…
Quando o número de etapas tende ao infinito $(n \to \infty)$	$\lim_{n\to\infty} 0{,}9(0{,}1)^{n-1} = 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{i-1} = 1$

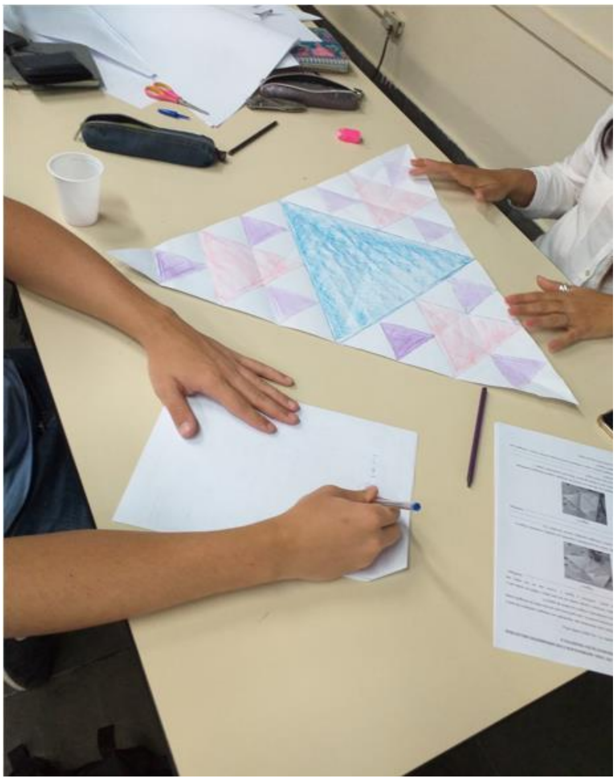
ETAPA 2 – QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO

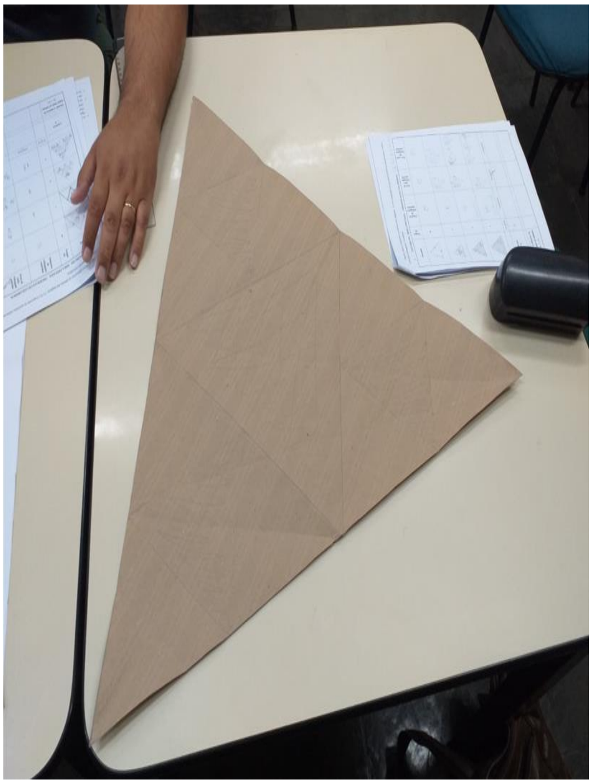
Análise da dízima periódica 0,999… = 1

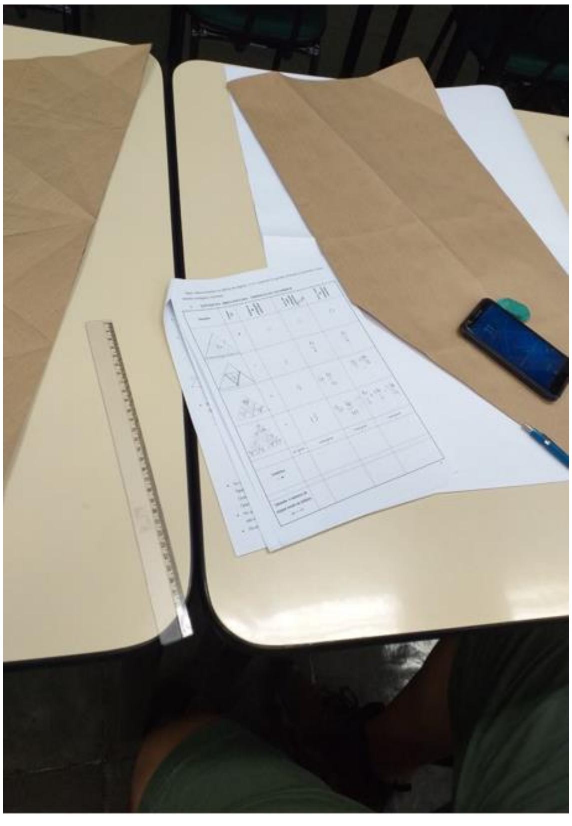
Q1 - A sequência formada pelos valores da coluna **“representação decimal de cada parcela (termo)”** forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? O que acontece quando $n \to \infty$? Qual a lei de formação?
Q2 - A sequência formada pelos valores da coluna **“representação fracionária de cada parcela”** forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? O que acontece quando $n \to \infty$? Qual a lei de formação?
Q3 - A sequência formada pelos valores da coluna **“soma total das parcelas”** forma uma PA, PG ou uma sequência qualquer? O que acontece quando $n \to \infty$? Qual a lei de formação?
Q4 - O que ocorre com o valor das parcelas a cada novo termo.
Q5 - Quantas parcelas teremos se continuarmos o processo indefinidamente?
Q6 - Existe alguma fração que representa a dízima periódica 0,999...? Essa dízima periódica $0{,}999$ ... é igual a 1 ou < 1? Mostre que a cada novo termo o valor da soma parcial das parcelas fica cada vez maior e se aproxima de um valor **A**. Que valor é esse? Quando o número de termos (ou parcelas) tende ao infinito? Que valor é esse? Justifique sua resposta.
Q7 - Faça uma representação do gráfico da dízima $0{,}999 \ldots = 1$. O que podemos observar?
Q8 - Faça uma representação geométrica da dízima $0{,}999 \ldots = 1$.

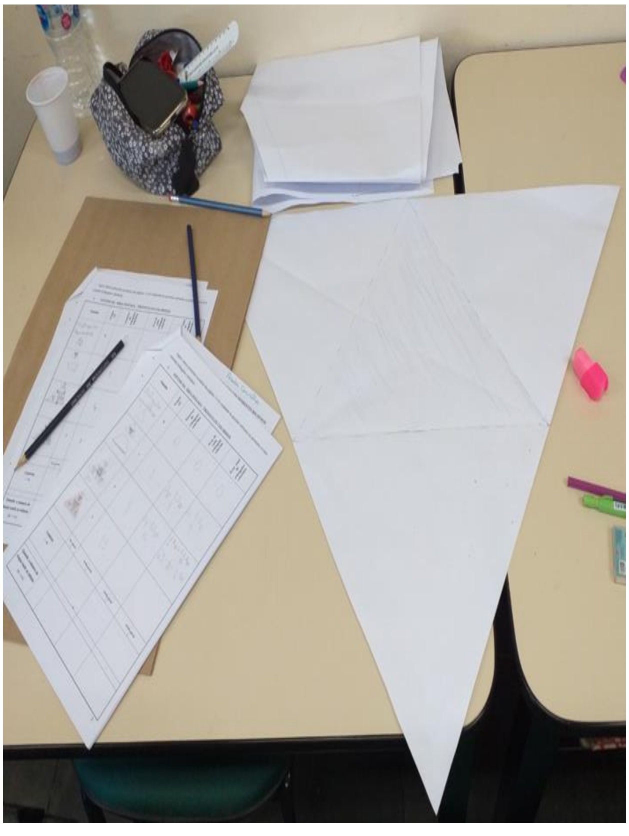
Apêndice R

Fotografias da atividade / oficina









Apêndice S

Fotografias da atividade / alunos