Pensamento e linguagem algébricos nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar sobre a produção de significados

Vinicius Henrique Sbaiz

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO NO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Iole de Freitas Druck

São Paulo, outubro de 2023

Pensamento e linguagem algébricos nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar sobre a produção de significados

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Esta versão contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante defesa pública ocorrida em 19/12/2023.

Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei apenas que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos. (LINS, 1999,p. 85)

Agradecimento

Em primeiro lugar, desejo expressar minha profunda gratidão à minha orientadora e companheira nesta jornada, Profa. Drª Iole de Freitas Druck. Sua orientação constante e apoio incansável têm sido uma fonte inesgotável de inspiração. Agradeço por ter sido a primeira a acreditar no meu potencial de aprendizado em matemática, desde os primeiros dias da graduação, e por nutrir minha paixão por essa área do conhecimento. Ao concluir esta etapa do meu percurso acadêmico, sinto-me revigorado, fortalecido em minha trajetória formativa e determinado a continuar aprofundando meus conhecimentos, pois sei que este é apenas o começo de uma jornada que busca sempre a excelência e o constante crescimento. Sua orientação é um farol inspirador para seguir evoluindo.

Quero agradecer às professoras participantes da pesquisa, que abraçaram este projeto com entusiasmo e generosidade, reservando seus preciosos sábados para participar de nossas discussões. Da mesma forma, desejo estender meu agradecimento à banca examinadora composta por Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald, Profa. Drª Patricia Rosana Linardi, Prof. Dr. Antonio José Lopes Bigode e Profa. Drª Vera Helena Giusti de Souza. Suas leituras atenciosas e sábias orientações, ainda no exame de qualificação, contribuíram imensamente para a trajetória deste projeto.

Agradeço à minha tia Vera, que desempenhou um papel fundamental em minha jornada. Ela é minha ouvinte atenta, conselheira incansável e amiga leal. É à ela que devo minhas conquistas, pois sua crença inabalável em nossa resiliência para superar obstáculos jamais enfraqueceu.

Agradeço à minha irmã Viviane, que é meu porto seguro. Saiba que esta conquista é nossa, desejo que no futuro, seus filhos(as), Amarillis e Artur, possam olhar para este trabalho e compreender o papel libertador que a educação proporcionou em nossas vidas.

Agradeço à minha amiga de todas as horas, Jaquellyne Barbosa, por todos os momentos de reflexão, descontração e por resgatar e manter a minha alegria em fazer as coisas de forma divertida. Sua amizade é um presente precioso que ilumina meus dias e torna cada desafio mais leve e gratificante.

Expresso minha gratidão à minha amiga Beatriz Roldão, a pessoa que me incentivou a embarcar nessa emocionante jornada. Durante este período, compartilhamos inúmeras experiências, opiniões e nos tornamos mais fortes para enfrentar o que o futuro nos reserva.

Agradeço também a minha amiga Andressa Rubin por sua presença em todos os momentos importantes de minha formação acadêmica e por suas observações precisas e coerentes.

Por fim, dedico este trabalho a minha mãe (Sonia), meu pai (Vanderlei) e minhas irmãs (Vanessa e Vitória), que partiram cedo, mas cujas presenças se transformaram em estrelas-guia ao longo do meu caminho. Agradeço por terem me ensinado que a educação é a chave para um mundo repleto de oportunidades, e é por isso que sigo adiante.

Resumo

Sbaiz, V. H **Pensamento e linguagem algébricos nos anos iniciais do Ensino Fundamental: um olhar sobre a produção de significados.** 2023.
Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo.

Nesta dissertação é apresentada uma pesquisa qualitativa, realizada com um grupo de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental (AIEF), cujo objetivo principal foi a identificação dos significados matemáticos e didáticos por elas atribuídos a pensamento e linguagem algébricos. Com ela buscou-se também contribuir para o aprofundamento da compreensão das professoras sobre a natureza de tais habilidades cognitivas, e para a reflexão sobre suas próprias práticas em sala de aula. A metodologia da pesquisa desenvolvida foi fundamentada no Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Romulo Campos Lins e consistiu na formação de um grupo de professoras interessadas na temática, como um espaço democrático de debates, com ampla participação das envolvidas. Foram realizados vinte (20) encontros online, nos quais: (1) refletiu-se sobre concepções de pensamento e linguagem algébricos; (2) analisou-se atividades didáticas descritas por estudiosos(as) da temática na Educação Matemática, bem como foram elaboradas questões para aplicação em sala de aulas das professoras; e (3) discutiu-se os elementos constituintes do MCS. Sobre a primeira temática foram estudadas as contribuições de Romulo Campos Lins, Joaquim Gimenez, James Kaput, Luis Radford, João Pedro da Ponte, Neusa Branco e Ana Matos. As atividades (2) abordaram reconhecimento de padrões e generalizações, propriedades das operações elementares e introdução à ideia de equação e ao uso de linguagem simbólica na resolução de problemas. Sobre o MCS (3), a metodologia de diálogo proposta pelo autor na relação professor(a)-aluno(a) – no modelo chamada de uma interação *autor-texto-leitor* – foi essencial à dinâmica adotada para os debates nos encontros do grupo participativo. Destacamos também os constructos de *conhecimento*, *núcleo*, *justificação* e *enunciação,* que embasaram, tanto a definição aqui adotada para ‘aprendizagem significativa’, como as análises realizadas no desenvolvimento da pesquisa. Ao longo dos encontros um mapa conceitual foi sendo construído, envolvendo quatro eixos de ideias e suas interconexões, a saber: pensamento algébrico; linguagem algébrica; dificuldades no ensino de álgebra; estratégias no ensino de álgebra. Este estudo, pertinente à Educação Matemática, se insere na área de Formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática.

Palavras chaves: pensamento e linguagem algébricos, pré-álgebra, Modelo dos Campos Semânticos, aprendizagem significativa, formação de professores que ensinam Matemática

Abstract

Sbaiz, V. H **Algebraic Thinking and Language in the Early Years of Elementary Education: An Examination of the Production Meanings.** 2023.
Dissertation (Master's degree) – Institute of Mathematics and Statistics. University of São Paulo

In this dissertation a qualitative research study is presented, conducted with a group of the early elementary school education's teachers. The main objective of this research has been to identify the mathematical and didactical meanings attributed by these teachers to algebraic thinking and language. It also aimed to contribute to a deeper understanding of the teachers' perception of the nature of these cognitive abilities and to encourage reflection about their own classroom practices.The research methodology has been based on Romulo Campos Lins' Semantic Fields Model (MCS) and, as a democratic space for discussion, involved the formation of a group of teachers interested in the topic with active participation from all involved. Twenty (20) online meetings were held in which: (1) reflections were made about conceptions of algebraic thinking and language; (2) didactic activities described by scholars in the field of Mathematics Education were analyzed as well as questions were developed for use in the teachers' classrooms; and (3) the constituent elements of the MCS were discussed. Regarding the first theme, were studied contributions from Romulo Campos Lins, Joaquim Gimenez , James Kaput, Luis Radford, João Pedro da Ponte, Neusa Branco, and Ana Matos. The activities (2) addressed generalizations and pattern's recognition, properties of elementary operations, and an introduction to the concept of equations and to the use of symbolic language in problems-solving. Regarding the MCS (3), the dialogue methodology proposed by the author in the teacher-student relationship – in the model called an *author-text-reader* interaction – was essential to the dynamics adopted for discussions in the participatory group. We also highlighted the key constructs of *knowledge*, *core*, *justification*, and *enunciation*, both in defining 'meaningful learning' and in the analyses conducted in the research's development. Throughout the meetings, a conceptual map has been constructed, involving four axes idea's and their interconnections, namely: algebraic thinking; algebraic language; teaching algebra's difficulties; strategies in teaching algebra. This study, relevant to Mathematical Education, is part of the field of initial and continuing education of first graders' Mathematics' teachers.

Keywords: algebraic thinking and language, early algebra, Semantic Fields Model (MCS), meaningful learning, education of first graders' Mathematics' teachers

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

Introdução

O interesse sobre o tema desta pesquisa surgiu a partir de questões por mim formuladas durante a graduação na Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidades de São Paulo (IME-USP), ao escrever uma monografia de final de curso, sob a orientação do prof. Dr. Nilson José Machado. Nela desenvolvi uma proposta de atividades didáticas sobre o pensamento algébrico voltadas a alunos(as) dos anos iniciais do Ensino Fundamental (AIEF). Na aplicação das atividades, verificou-se uma alta capacidade dos(as) estudantes em encontrar justificativas a situações-problemas envolvendo pré-álgebra. Ao concluir o mencionado trabalho, questionamentos ficaram em aberto, sendo eles os pontos iniciais desta nova jornada. As perguntas surgidas foram repensadas e reformuladas na forma de questões de investigação, expostas na sequência.

Observamos não ser novidade que a proposta de ensinar esse tema vem sendo discutida e faz parte da prática atual em diversas salas de aula. Desde o final dos anos 90, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), já era indicada a importância de o estudo de pré-álgebra ser introduzido nos AIEF. Porém, o que ainda se vê, nesta fase de escolaridade, é a priorização quase exclusiva da aritmética nas práticas escolares.

A prática pedagógica de ensinar álgebra após aritmética é comumente adotada na Educação Matemática, respaldada por embasamentos pedagógicos e teóricos. Tal sequência educacional encontra justificação nas distinções fundamentais entre os dois campos, conforme argumentam Carraher, Schliemann, Brizuela e Earnest (CARRAHER et al,. 2006). A aritmética trata das operações com números concretos, enquanto a álgebra lida com operações que envolvem números generalizados. A história do desenvolvimento matemático também contribuiu para esta sequência, uma vez que a álgebra emergiu historicamente após a aritmética, conforme apontado na referência anteriormente citada. A fundamentação para a prática de ensinar álgebra após aritmética se estende também ao desenvolvimento cognitivo dos(as) alunos(as). Nesse contexto, Raquel S. Freire (FREIRE, 2011) observa que a hierarquização dos conteúdos ao longo da escolaridade, que prevê a priorização do ensino de aritmética antes do de álgebra, encontra raízes nos estudos de Piaget e Inhelder (apud FREIRE. 2011, p. 181). Segundo estes estudiosos, as crianças em estágios das operações concretas têm habilidade principalmente para lidar com situações aritméticas, consideradas mais simples por focarem em números, operações básicas e tabuladas (FREIRE, 2011, p. 36). Em outras palavras, a precedência da aritmética relativamente à álgebra decorre da hipótese de que o trabalho com quantidades concretas ou fixas é mais acessível aos(às) alunos(as) em comparação ao trabalho mais abstrato envolvendo variáveis ou incógnitas. Desta forma, aceitar tal premissa implica em afirmar que a álgebra deve ser introduzida somente em estágios mais avançados da educação, quando os(as) alunos(as) possuem condições cognitivas mais desenvolvidas.

Contribuindo para a discussão, Filloy e Rojano (FILLOY, E.; ROJANO, T., 1989) indicam que o pensamento aritmético evolui gradualmente em direção ao pensamento algébrico, partindo de contextos concretos para abstrações. Essa evolução sugere a existência de um ponto de transição, marcando a passagem de um tipo de pensamento ao outro. Linchevski e Herscovics (LINCHEVSKI, L.; HERSCOVICS, N.,1996) vão além, sugerindo a presença de uma lacuna entre álgebra e aritmética, caracterizada pela incapacidade dos(as) alunos(as) de lidar espontaneamente com quantidades não predefinidas (incógnitas). Embora estes autores reconheçam que crianças frequentemente resolvem problemas com termos desconhecidos, eles argumentam que os(as) alunos(as) frequentemente utilizam procedimentos de contagem ou operações inversas para chegar às respostas, sem necessariamente representar ou operar com incógnitas. No entanto, pesquisas mais recentes, como as de Blanton e Kaput (KAPUT, J. BLANTON, M. L.; MORENO,2008), e Canavarro (CANAVARRO, A.P.,2007), contradizem a noção de uma lacuna, demonstrando que os(as) alunos(as) são capazes de elaborar generalizações matemáticas no trabalho com a aritmética desde os primeiros anos. Blanton e Kaput (KAPUT, J. BLANTON, M. L.; MORENO,2008) até consideram a aritmética como uma forma de pensamento algébrico, visto que ela expressa e formaliza generalizações, promovendo o raciocínio sobre operações e propriedades numéricas – aritmética generalizada. É importante considerar que o campo da educação matemática está em constante evolução, e abordagens podem variar conforme o contexto educacional e as pesquisas atuais, como observado por Blanton e Kaput (KAPUT, J. BLANTON, M. L.; MORENO,2008) ao enfatizarem a interconexão entre álgebra e aritmética.

Diante dessas reflexões, esta dissertação tem como finalidade discutir a importância de explorar o desenvolvimento do pensamento algébrico mais cedo, já no início do Ensino Fundamental. Lins e Gimenez (LINS, 1997) destacam ser necessário que o trabalho com álgebra se dê ao mesmo passo que com aritmética, uma contribuindo para o desenvolvimento da outra. Em sala de aula, isso pode ser promovido por meio de problemas contextualizados e através da exploração de representações visuais, proporcionando uma compreensão mais completa e prática. Diante do exposto, concluímos que a interligação estratégica entre álgebra e aritmética desempenha um papel crucial na educação. Na formação de professores(as) dos anos iniciais (não especialistas em matemática), estratégias acessíveis e contínuas podem ser essenciais para destacar as conexões entre essas áreas, com vistas a capacitá-los(as) à promoção desta interligação e, com isso, enriquecer a aprendizagem dos(das) alunos(as).

Desde 1998, a criação de uma grande rede de conexões, relacionando a compreensão e os significados, é destacada nos documentos oficiais norteadores dos currículos da Educação Básica. Nos PCN há um trecho que cita a relevância de interconectar os objetos matemáticos no ensino, ou seja, de relacionar entre si os elementos que compõem a matemática escolar.

> [...] para que a aprendizagem possa ser significativa é preciso que os conteúdos sejam analisados e abordados de modo a formarem uma rede de

> significados. Se a premissa de que compreender é apreender o significado, e de que para apreender o significado de algum objeto ou acontecimento é preciso vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos, é possível dizer que a ideia de conhecer assemelha-se à ideia de tecer uma teia (BRASIL, 1998, p. 75).

Aqui adotamos a concepção de Romulo Campos Lins (LINS, 1992) para as definições de *conhecimento* e de *aprendizagem significativa*: conhecimento é aquilo que o indivíduo acredita ser correto; e aprendizagem significativa são os modos de constituir conhecimento. Partindo desta compreensão é possível que o(a) professor(a) possa perceber o que é necessário aprofundar e discutir sobre eventuais lacunas na aprendizagem, para a correção de conceitos ou o esclarecimento de fatos que podem estar causando bloqueios nos(as) estudantes.

Entendemos que se pode favorecer o desenvolvimento da habilidade de pensar algebricamente dos(as) estudantes incluindo-os(as), desde os anos iniciais, em situações que os(as) levem a: observar de forma crítica; reconhecer padrões; e argumentar sobre os objetos matemáticos em estudo.

> Os alunos no 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. Os alunos desenvolvem igualmente a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. (PONTE et al., 2007 p. 40).

Como destacado na citação anterior, não se espera o mesmo desenvolvimento e formalidade dos(as) alunos(as) dos AIEF comparado aos(às) alunos(as) dos anos finais do Ensino Fundamental (AFEF). No início da vida escolar, é desejável que sejam proporcionadas situações que mobilizem o pensamento e uma introdução à linguagem algébrica, preparando o aprofundamento esperado na segunda etapa do Ensino Fundamental (EF).

O ensino de álgebra é uma prática atual, estando também contemplado na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental (BNCC/EF) (BRASIL,2018), onde o desenvolvimento de pensamento algébrico é considerado essencial para a Matemática e são apresentados possíveis caminhos para que a construção desse pensamento seja desenvolvida. Segue um detalhamento constante no documento citado.

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos

> identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?". (BRASIL, 2018, p. 270)

O estudo de álgebra é importante na formação matemática dos(as) estudantes, tanto por desenvolver um tipo especial de pensamento, como pela construção de uma linguagem simbólica. Esta linguagem contribui para a matemática e para as áreas do conhecimento que se amparam nessa mesma maneira de se comunicar. O domínio e o entendimento dos símbolos utilizados na álgebra fazem parte da matemática como ciência. Esta linguagem possibilita o estabelecimento de uma comunicação universal desse conhecimento. Mas, para que isso aconteça, é necessário compreendê-la, como destacou Danyluk em meados da década de 90.

> Se a Ciência Matemática tem a peculiaridade de ser expressa em uma linguagem simbólica, pode-se afirmar que, ao ler um texto de Matemática, o homem envolve-se com simbolismos; o leitor deve familiarizar-se com os símbolos mostrados no discurso. Por outro lado, é preciso considerar, também, que o leitor deve encontrar significado nesses registros [...] (DANYLUK, 1993, p. 39).

O papel do(a) professor(a) é fundamental e insubstituível em todo o processo de formação e desenvolvimento do pensamento algébrico. Cabe a ele(a) proporcionar um ambiente propício para que ideias sejam discutidas, argumentos formulados, os símbolos introduzidos e o pensamento algébrico desenvolvido.

A interação entre os(as) alunos(as) quando feita de forma conectada e dialógica, pode proporcionar o conhecimento significativo, como sugere Schwantes:

> Pelo diálogo argumentativo e a produção de significados ocorre a sintonia permanentemente entre aluno, professor e objeto de estudo. Por esta sintonia estabelece-se uma confiança mútua, que motiva os alunos a confiarem em suas potencialidades, em seus saberes prévios e na capacidade de seus pares. Isso favorece a liberdade de argumentação para a construção conceitual, a elaboração de conjecturas, suas validações, refutações, e, por conseguinte, sua representação por meio de linguagem simbólico-formal (SCHWANTES, 2004, p. 500).

É importante que faça parte da vida profissional dos(as) professores(as) tanto a formação continuada como a atualização da própria prática pedagógica. Sabemos que a formação dos(as) professores(as) atuantes nos AIEF é generalista, não apenas restrita à matemática. Também é frequente que muito da sua atuação em sala de aula seja baseada em livros didáticos, em materiais de apoio fornecidos pela sua instituição de ensino e influenciada pela própria experiência escolar enquanto estudantes. Entender os significados desenvolvidos por professores(as), no que diz respeito ao ensino de álgebra, pode nos levar a descobrir eventuais dificuldades de compreensão de conteúdos e assim ajudá-los(as) no desenvolvimento de concepções mais abrangentes, possibilitando novas perspectivas para suas práticas em sala de aula.

Resumidamente, com esse projeto buscamos um entendimento mais aprofundado dos conhecimentos desenvolvidos por professores(as) do AIEF, para a compreensão dos significados que produzem sobre o pensamento algébrico, sobre o papel da linguagem algébrica no aprendizado inicial de álgebra e sobre abordagens adequadas à atribuição de significados a esses conteúdos por estudantes dos AIEF. Esse será o caminho para a construção de reflexões sobre teorias e práticas pedagógicas propícias a uma atuação mais eficaz no ensino de álgebra. Para tanto formulamos as seguintes questões de pesquisa para nossa investigação.

Questões de pesquisa:

- Qual é a natureza dos conhecimentos algébricos, constantes dos currículos dos AIEF, e sua relevância para a formação dos(as) estudantes?
- Quais concepções de pensamento e de linguagem algébricos têm professores(as) que atuam nos AIEF?
- O quanto a discussão em um grupo participativo de estudos sobre pensamento e linguagem algébricos, formado por professores(as) atuantes AIEF em conjunto com os pesquisadores(as) envolvidos neste projeto, pode contribuir para a renovação de suas práticas em sala de aula, no sentido de propiciar uma aprendizagem significativa desta temática aos seus(suas) estudantes?

Na busca de respostas às questões formuladas estabelecemos os seguintes objetivos gerais e específicos para efetivação e desenvolvimento da pesquisa:

Objetivos gerais:

- Identificar e problematizar os significados matemáticos e didáticos sobre o pensamento e linguagem algébricos atribuídos por professores(as) dos AIEF.
- Contribuir para o aprofundamento da compreensão de professores(as) sobre o que são o pensamento e a linguagem algébricos, sobre o papel da aprendizagem desses temas na formação dos(as) estudantes dos AIEF, e também para o aprimoramento consciente de suas práticas em sala de aula.

Objetivos específicos:

- Aprofundar estudos sobre a natureza do pensamento e da linguagem algébricos trabalhados na Educação Básica.
- Fazer pesquisa bibliográfica e estudar autores(as) que produziram reflexões sobre a natureza dos conhecimentos algébricos e sua relevância na formação de estudantes.
- Pesquisar, na literatura em Educação Matemática, dificuldades recorrentes de aprendizagem de alunos(as) dos AIEF, bem como abordagens de ensino que favoreçam a superação das mesmas.
- Aprofundar estudos sobre o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Romulo Campos Lins.
- Formar um grupo participativo de estudos com professores(as) atuantes nos AIEF para realizar discussões sistemáticas apoiadas nas ideias do MCS visando favorecer o desenvolvimento de concepções mais abrangentes sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra nesta fase de escolaridade.
- Apoiar ativamente os(as) professores(as) do grupo na reflexão e no amadurecimento de sua prática em sala de aula na introdução à Álgebra nos AIEF, incorporando ideias constantes do MCS.

Delimitadas as questões e os objetivos da pesquisa, o presente trabalho está organizado da seguinte maneira.

O **capítulo 1** é destinado a apresentar algumas das concepções de pensamento algébrico dos seguintes autores(as), apontando pontos relevantes para proporcionar debates sobre a habilidade de pensar algebricamente: Romulo Campos Lins, Joaquim Gimenez, James Kaput, Luis Radford, João Pedro da Ponte, Neusa Branco e Ana Matos.

Descrevemos no **capítulo 2** nossa fundamentação teórico/didática sobre aprendizagem significativa. Apresentamos algumas ideias de Lev Vygotsky em sua teoria Histórico-Cultural, particularmente sobre a importância de garantir um espaço democrático para o fortalecimento da comunicação nas práticas escolares. Detalhamos as definições dos constructos que compõem o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Romulo Campos Lins, como ferramentas para a identificação dos significados produzidos por professores(as) e estudantes em situações de ensino/aprendizagem.

No **capítulo 3** descrevemos a formação do grupo participativo criado para discutir tópicos pertinentes ao pensamento algébrico nos AIEF e elencamos os temas discutidos ao longo dos encontros realizados. Tratamos especificamente do MCS em ação, nosso embasamento teórico para a pesquisa de campo realizada, discorrendo sobre como foi utilizado no desenvolvimento dos trabalhos com o grupo.

No **capítulo 4** aborda-se os conhecimentos algébricos debatidos e compartilhados na pesquisa de campo, com ênfase na comunicação algébrica e nos significados atribuídos ao pensamento algébrico.

No **capítulo 5** apresenta-se uma visão geral das atividades desenvolvidas e aplicadas pelas professoras do grupo participativo. São detalhadas as atividades criadas por elas com o intuito de potencializar o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos dos(as) estudantes. Também é apresentado o mapa conceitual utilizado como ferramenta para organizar e visualizar os principais conceitos abordados nas discussões no grupo. Por fim, são discutidos os produtos finais das professoras, que consistem em projetos a serem implementados em sala de aula, bem como relatos individuais sobre suas experiências no grupo participativo.

No **capítulo 6**, das considerações finais, fazemos uma avaliação detalhada das questões propostas nesta pesquisa e expomos as conclusões obtidas. Focalizamos a discussão nos principais resultados, salientando especialmente as contribuições significativas proporcionadas no grupo participativo como formação continuada das professoras. Ademais, apresentamos questões em aberto consideradas pertinentes ao enriquecimento de discussões acerca do pensamento e da linguagem algébrica. Essa análise reflexiva fundamenta as considerações finais do estudo.

Na sequência dos capítulos, os apêndices constituem um material complementar desta pesquisa. Destaca-se o relato detalhado de um dos encontros envolvendo a discussão sobre ferramentas digitais no Ensino de Matemática (Apêndice 1), com a descrição das interações ocorridas no grupo sobre este tema. O apêndice 2 contém a carta convite para a formação do grupo participativo. Finalmente, no apêndice 3 incluímos os *slides* dos roteiros para as discussões nos encontros do grupo participativo que foram detalhados ao longo desta dissertação.

Capítulo 1. Concepções sobre o pensamento algébrico

Inúmeros são os trabalhos dedicados a relatar e estabelecer as vantagens de se ensinar álgebra nos AIEF. A álgebra ocupa um amplo espaço de objetos de estudo, como por exemplo equações, inequações ou funções. Além de tratar de muitos conceitos matemáticos, faz parte deste campo da matemática a inclusão de processos algébricos como o reconhecimento de padrões, inversão, simplificação, determinação de fórmulas e a utilização de uma linguagem simbólica própria. Muitos desses conceitos não são explorados na formação dos professores(as) atuantes nessa fase de escolaridade, o que pode causar inseguranças na sua prática em sala de aula. Com a finalidade de contextualizar o(a) leitor(a), descrevemos a seguir algumas das concepções de pesquisadores(as) da Educação Matemática sobre o tema, buscando encontrar pontos de convergência que nos possibilitem formular uma definição para pensamento algébrico.

Para Romulo Campos Lins (LINS, 1992), pensar algebricamente na Educação Básica é uma maneira de produzir sentidos para a Álgebra, ou seja, é a capacidade mental de atribuição de significados por parte de um indivíduo para o objeto algébrico que esteja no centro de uma discussão. Esta concepção foi defendida pelo autor em sua tese de doutorado (LINS, R. C. 1992), onde o autor entende por ‘sentido’ qualquer ideia que uma pessoa tenha a respeito de algum conceito e que consegue expressar por meio de algum enunciado.

Lins e Gimenez (LINS, R. C; GIMENEZ, J. 1997), apresentam três vertentes para o pensamento algébrico, denominadas: *Aritmeticismo*, *Internalismo* e *Analiticidade*.

> Já mostramos também que há distintos modos de produzir significado para a álgebra; o pensamento algébrico é um desses modos e tem três características fundamentais:
> 1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso aritmeticismo);
> 2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos ' físicos" ou geométricos (chamamos a isso internalismo); e,
> 3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso analiticidade).
> Pensar algebricamente é pensar dessa forma; é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com (1), (2) e (3). (LINS; GIMENEZ, 1997, p.152).

O *Aritmeticismo* como ‘pensamento algébrico’ é o modo de pensar que, diante de situações envolvendo números, operações e a relação de igualdade, leva o indivíduo a produzir associações entre os elementos participantes e não apenas a obter um mero resultado numérico. Ou seja, nesta forma de pensar o(a) aluno(a) expande sua compreensão da aritmética aproximando-a da álgebra. Cabe destacar que nesta abordagem não se utiliza a linguagem algébrica simbólica usualmente encontrada ao se estudar a álgebra, mas, segundo Lins e Gimenez, não é somente o uso da linguagem simbólica que determina o pensamento existente em uma situação de sala de aula. Vejamos o que disseram:

> [...] Por outro lado, o que caracteriza a "verdadeira" operação aritmética é a "sensação" de se estar "fazendo uma conta": dois elementos são associados para "produzir" um terceiro. É essa característica – forte – das operações aritméticas "verdadeiras" que persiste nas leis de composição da álgebra abstrata, de modo que não vemos inconveniente em utilizar a nomenclatura que adotamos, de modo a preservar o *insight* que ela oferece (LINS; GIMENEZ, 1997, p.152).

Em outras palavras, para os autores o que determina a existência de um pensamento algébrico é a possibilidade de perceber as operações aritméticas como "funções" que associam dois elementos a um terceiro, o que pode ser caracterizado como uma forma intuitiva de se pensar algebricamente.

Na segunda vertente, chamada de *Internalismo*, os números e as operações são tratados com foco em suas propriedades matemáticas, sendo utilizados não somente para a modelagem de problemas, mas também como objetos de estudo. Vale destacar que os autores separam os números e operações da finalidade usual inserida ao se trabalhar com a aritmética. Diferente da abordagem anterior, onde se produzem significados para as operações, nesta vertente o foco é a análise das regularidades de suas propriedades.

Já, segundo a *Analiticidade* os números desconhecidos (variáveis, incógnitas, constantes, parâmetros ou indeterminadas), são tratados como sendo objetos (de um universo conhecido) que podem ser manipulados diretamente, respeitando as propriedades gerais das operações que os envolvem. Vejamos nas palavras dos autores:

> [...] O leitor não deveria se espantar ao concluir que essa nossa caracterização de pensamento algébrico corresponde bastante de perto ao que poderíamos chamar de "manipulação formal"; é evidente que uma caracterização que deixasse de fora esse aspecto não seria de interesse. Por outro lado, é preciso ver que nossa caracterização não se esgota como "cálculo formal". [...] Com isso, queremos dizer que não estamos interessados em reduzir "pensamento algébrico" a uma noção abstrata e extremamente genérica, como seria o caso se disséssemos que pensar algebricamente é "operar sintaticamente", como alguns autores parecem sugerir; [...] é preciso que conheçamos as propriedades dos "números" e das "operações aritméticas", termos genéricos, é verdade, mas que só ganham vida "concreta" na medida em que são especificados em sua particularidade, no interior da atividade em questão. (LINS; GIMENEZ, 1997, p.153).

James Kaput assim como Lins, concorda que o conhecimento está no indivíduo e não no objeto matemático estudado, ou seja, para ele o fato de se trabalhar com objetos algébricos não caracteriza a presença de pensamento algébrico. A conclusão de que tal pensamento foi mobilizado só pode ocorrer após a certeza de que houve atribuição de sentido para os elementos envolvidos.

Em Kaput (KAPUT, J.; CARRAHER, D; BLANTON, M., 2008), fica estabelecido que o pensamento algébrico é uma atividade unicamente humana, pois se manifesta pela capacidade de estabelecer relações, e de encontrar generalizações com o uso de uma linguagem formalizada para o fornecimento de argumentos cada vez mais consistentes e genéricos. O autor também classifica em três vertentes o pensamento algébrico, no caso denominadas: *Aritmética Generalizada ou Pensamento Quantitativo; Pensamento Funcional; Modelação*.

Encontrar generalizações para os processos aritméticos potencializa o desenvolvimento do pensamento algébrico. Na vertente da *Aritmética Generalizada* são explorados: o reconhecimento de padrões; as relações entre os números; a exploração da igualdade dentro de expressões; a observação do caráter algébrico dos números; e a capacidade de se trabalhar com números desconhecidos. Observamos que essa definição engloba as duas primeiras vertentes definidas por Lins e Gimenez. Diferentemente desses autores, Kaput centraliza em um mesmo aspecto os significados das operações e suas propriedades.

No *Pensamento Funcional* definido pelo autor, os padrões numéricos estudados incluem descrever relações que possibilitem variações dentro de um mesmo conjunto. Neste caso o conceito de variável passa a ser explorado também com a utilização de suas representações gráficas.

Por fim, a última vertente deste autor, nasce das explorações de situações cotidianas para representá-las por meio de linguagem algébrica, transformando-as em situações mais abstratas. Assim a *Modelação* é o caminho para a atribuição de significados ao emprego da álgebra. Esta vertente se junta às duas anteriores para a definição de pensamento algébrico (KAPUT, J.; CARRAHER, D; BLANTON, M., 2008).

Ao comparar os autores mencionados até aqui, encontramos diversos pontos em comum. O que Kaput traz de novo ao que foi descrito por Lins e Gimenez, nas obras aqui citadas, é a exploração do pensamento funcional como sendo parte importante para caracterizar o pensamento algébrico. Outro elo de consenso entre os autores é a linguagem própria que se desenvolve na exploração do pensamento algébrico.

Para explorar um pouco mais a relação entre pensamento e linguagem, assim como sua importância para o pensamento algébrico, vamos recorrer aos escritos de Luis Radford, que se aprofundou sobre isto. Este autor (RADFORD, L. 2006) afirma que pensar algebricamente é uma forma particular de refletir sobre a matemática. Para tanto utiliza como fundamentação a Teoria da Objetivação do Conhecimento, por ele desenvolvida, na qual são relacionados linguagem e pensamento, com destaque ao fato de que o conhecimento não pode estar restrito à linguagem e ao discurso, mas também às práticas sociais nas quais os indivíduos estão inseridos. Para Radford (RADFORD, L. 2009) o pensamento algébrico se manifesta de três formas diferentes, segundo seus graus de generalidade: *Pensamento Algébrico Factual; Pensamento Algébrico Contextual;* e *Pensamento Algébrico Padrão.*

Ao fazer uso do *Pensamento Algébrico Factual*, o indivíduo é capaz de discernir o padrão subsequente em uma série de figuras ou números em atividades específicas envolvendo contextos particulares. No entanto, é importante destacar que, apesar de ter essa habilidade, o alcance do Pensamento Algébrico Factual ainda se mostra limitado, uma vez que o indivíduo não consegue prever termos distantes em uma sequência ou conceber uma generalização válida para representar um termo arbitrário da sequência.

Com o *Pensamento Algébrico Contextual*, o indivíduo consegue explorar generalizações em situações para as quais está sendo desafiado. Nessa etapa é possível perceber que o nível de abstração não se ampara mais somente em estímulos visuais, mas sim em leis de formação pertinentes às representações matemáticas. Cabe destacar que tais representações são feitas em língua materna escrita, oral ou figural, acessíveis a ele(a) nesta fase do pensamento.

No Pensamento *Algébrico Padrão*, o indivíduo utiliza a linguagem algébrica simbólica, ou seja, nas generalizações identificadas já faz uso de fórmulas alfanuméricas com grau de complexidade superior ao identificado na fase anterior, podendo construir novos registros e possíveis simplificações.

João Pedro da Ponte, Neusa Branco e Ana Matos (PONTE, J. P.; M. L.; BRANCO, N.; MATOS, A., 2009) apontam também três vertentes para o ensino de álgebra: *Representar, Raciocinar e Resolver Problemas*. A primeira vertente, *Representar*, envolve a habilidade de utilizar diferentes sistemas de representação, especialmente aqueles cujos caracteres possuem natureza simbólica. Isso permite que os(as) alunos(as) traduzam problemas e conceitos matemáticos em linguagem algébrica, facilitando a manipulação de expressões e equações. A segunda vertente, a de *Raciocinar*, desempenha um papel crucial na construção do pensamento algébrico. Tanto a dedução como a indução são raciocínios importantes na análise de propriedades dos objetos matemáticos e no estabelecimento de relações válidas para determinadas classes de elementos. Ao relacionar padrões e regularidades, os(as) alunos(as) desenvolvem a capacidade de generalizar conceitos e descobrir propriedades que se aplicam a um conjunto mais amplo de situações. Tal aspecto do raciocínio é essencial para que eles(elas) não se restrinjam a resolver problemas específicos, mas possam aplicar o conhecimento de forma abstrata e generalizada. A terceira vertente, a da *Resolução de Problemas*, engloba a habilidade de utilizar diversas representações de objetos algébricos para interpretar e solucionar problemas, tanto na Matemática como em outros campos de conhecimento. Isso inclui a modelagem de situações do mundo real em termos matemáticos, permitindo que os(as) alunos(as) enfrentem desafios e questões complexas com uma abordagem analítica. Por meio da aplicação do pensamento algébrico na resolução de problemas práticos, os(as) estudantes desenvolvem uma visão mais ampla sobre a relevância da álgebra em seu cotidiano e em contextos mais amplos.

Para os(as) mesmos(as) autores(as), estas três vertentes do pensamento algébrico estão intrinsecamente interligadas e fortalecem a compreensão e a capacidade dos(as) alunos(as) de tratar com conceitos matemáticos mais avançados. O desenvolvimento desta capacidade é fundamental para que os(as) estudantes se tornem pensadores(as) críticos(as), capazes de analisar e resolver problemas complexos em diversos campos, tornando-os(as) mais preparados(as) para enfrentar os desafios acadêmicos e profissionais que encontrarão ao longo de suas trajetórias.

Observemos que os(as) autores(as) apresentados(as) neste capítulo utilizam-se de pilares semelhantes para definirem a habilidade de pensar algebricamente. Mas também é possível notar que cada um(a) inclui situações diversificadas ou chama a atenção para pontos particulares que entende como sendo mais relevantes. Com base na análise das perspectivas dos(as) autores(as) apresentados(as), enfatizamos as premissas compartilhadas por todos(as), que destacam o reconhecimento de padrões e a linguagem simbólica como elementos centrais do pensamento algébrico, como sendo imprescindíveis para o estudo e a compreensão deste campo.

Capítulo 2. Caminhos para o favorecimento de uma aprendizagem significativa

Neste capítulo, fazemos a discussão sobre a influência histórico-cultural no processo de educação e discutiremos sobre possibilidades de exploração do pensamento algébrico em sala de aula. A partir das concepções de pensamento algébrico relacionadas à Perspectiva Histórico-cultural de Vygotsky, nos deparamos com a importância da promoção de uma aprendizagem significativa no ensino de Álgebra. Para tanto, vamos nos apoiar no referencial teórico/pedagógico do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), que foi desenvolvido por Rômulo Campos Lins em sua tese de doutorado (1992). Entendemos que a utilização do MCS como referencial teórico/pedagógico, pode nos possibilitar análises pertinentes sobre os processos de produção de significado e nos mostrar caminhos para a criação de debates e de atividades que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.1 A construção do pensamento e da linguagem na perspectiva de Lev Vygotsky

Vygotsky foi um grande pensador do século XX tendo sido o pioneiro a considerar explicitamente que o desenvolvimento intelectual das crianças se dá por meio de suas interações sociais e condições de vida. Em seus escritos ele defendeu a ideia de popularizar o conhecimento dando destaque para o papel de mediador do professor(a) entre os saberes prévios dos(as) alunos(as) e os conhecimentos formalizados da escola.

Para Vygotsky o desenvolvimento do pensamento da criança é inicialmente provocado por estímulos sociais que acabam por favorecer a possibilidade de novas concepções individuais, evoluindo sua forma de pensar. Sendo assim ele defende que o amadurecimento do pensamento da criança está totalmente ligado às suas experiências vivenciadas. Desta forma a escola se torna um meio poderoso para a exploração e o favorecimento do desenvolvimento do pensamento e da linguagem.

Vygotsky propõe que o ambiente escolar seja democrático, onde alunos(as) e professores(as) atuem como sujeitos que se relacionam e constituem conexões dialógicas baseadas na reciprocidade, onde todos desfrutem o mesmo espaço de debate e de troca de opiniões. Por outro lado, acreditamos que a aprendizagem do aluno(a) se dá de forma ativa, com participação e interação, que estimulam o aperfeiçoamento de sua linguagem e de seu pensamento com base em suas experiências sociais e culturais.

Direcionando nossa discussão para o âmbito da Educação Matemática, na perspectiva de Vygotsky a matemática escolar não pode ser apresentada de forma fragmentada e desconectada da vivência do(a) aluno(a). A matemática, por se tratar de uma ciência construída por seres humanos, precisa estar inserida no contexto cultural dos estudantes e ser vista como um conhecimento que vai sendo utilizado/assimilado em contextos de práticas sociais.

> [...] o aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola. Qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia. Por exemplo, as crianças começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes elas tiveram alguma experiência com quantidades – elas tiveram que lidar com operações de divisão, adição, subtração e determinação de tamanho. Consequentemente, as crianças têm a sua própria aritmética pré-escolar, que somente psicólogos míopes podem ignorar. (VYGOTSKY, 1989, p. 94-95).

A formulação de conjecturas e o estabelecimento de generalizações se amparam na linguagem como ferramenta para a construção do pensamento e da tomada de consciência. Em particular, para o desenvolvimento do pensamento matemático é importante o domínio das linguagens: verbal; escrita em linguagem natural e simbólica; geométrica; e gráfica.

Pode-se dizer que uma pessoa pensou matematicamente quando ela atribuiu significado aos elementos matemáticos estudados, sendo que esse significado só é transmissível por meio de uma linguagem. Dessa maneira é importante que a matemática seja contextualizada na realidade dos(as) alunos(as), pois somente com esse vínculo é que se pode estabelecer uma relação de interesse, ou mesmo prazer, no estudo dessa ciência. Cabe destacar que a evolução de cada aluno(a) em sala de aula não é linear ou de forma padronizada, é preciso entender as particularidades de cada indivíduo em seu processo de formação da sua própria identidade comunicativa.

Assim como em todo processo educativo na perspectiva histórico-cultural de Vygotsky a Educação matemática é construída de forma participativa dando voz às experiências e vivências sociais dos(as) alunos(as). O diálogo em sala de aula e a exploração de situações-problema levam-nos(as) a familiarizar-se com a linguagem matemática de forma gradativa. Nesse sentido, o professor(a) exerce uma função primordial para conectar as ideias iniciais trazidas por eles(as) e auxiliá-los(as) nas produções de significado para as situações em estudo, favorecendo a transição entre os conhecimentos anteriores à fase escolar para os apropriados ao pensamento matemático.

Cabe um destaque importante, se o professor(a) é responsável por auxiliar os(as) estudantes na transição de seus conhecimentos prévios para os conhecimentos matemáticos, faz-se necessário a presença dos pais e ou responsáveis na construção desse elo entre espaço social vivenciado pelos(as) alunos(as) e a escola.

> Para Vygotsky, a aprendizagem inicia-se desde que a criança nasce, momento em que inicia a aprendizagem de uma língua através do convívio familiar. Também por influência do meio, no grupo social, onde constitui a sua cultura. Através da fala a criança pode nomear objetos, realizar atividades matemáticas com quantidades, operações matemáticas, entender e ser entendida. Aos poucos começa a formar frases, perguntar, responder, descrever, contar histórias, enfim, a estabelecer relações com a realidade. (SCHWANTES, 2004, p. 66).

Naturalmente o(a) aluno(a) ao chegar na escola traz consigo elementos que fazem parte de sua experiência. Quando ele consegue resolver os problemas sem o auxílio de colegas ou de apoio docente, é dito que o(a) estudante possui o desenvolvimento real. Porém diante de novas problematizações e questionamentos eles podem não conseguir resolver de forma autônoma inicialmente. Para os casos onde o(a) aluno(a) só consegue resolver com o auxílio de outras pessoas é dito que ele(a) estava na fase de desenvolvimento proximal. Vygotsky (apud SCHWANTES,2004) entende que a exploração de atividades nessa zona de desenvolvimento proporciona aos alunos(a) avanços significativos devido às interações e descobertas feitas em grupo, que podem passar despercebidas quando o trabalho é feito individualmente.

> Quanto mais o professor de matemática atuar na zona de desenvolvimento proximal, maior será o avanço intelectual atingido pelo aluno. Vale salientar também que na zona de desenvolvimento proximal, o aluno, ao atuar com parceiros, está propenso a realizar mais atividades do que realizaria sozinho. Pode-se assim perceber através da participação e realização de atividades, quais as funções que já estão maduras no aluno e as que estão em processo de maturação. (SCHWANTES, 2004, p. 77).

O caminho para essa abordagem é o estabelecimento de conexões entre a linguagem cotidiana e as situações problemas que a matemática trata. Produzir e identificar significados nas relações de sala de aula é importante para se constituir o pensamento matemático. Nessa linha de atuação o professor(a) deixa de ser um mero expositor de situações e passa a ser um mediador de discussões, proporcionando debates entre os alunos, fornecendo direcionamentos que facilitem as compreensões e produções de significados.

Teoricamente essa discussão pode parecer simples, mas sabemos da complexidade da tarefa de entender e capturar os significados que foram atribuídos pelos(as) estudantes nas situações propostas. Um questionamento importante a fazer aos professores(a) pode ser: qual é o seu completo entendimento sobre os conceitos e procedimentos matemáticos que intervêm em uma atividade a ser desenvolvida com seus alunos(as)? Acreditamos que um momento de reflexão sobre seus próprios conhecimentos pode ser de grande auxílio para o desenvolvimento de sua comunicação mais efetiva e da capacidade de elaborar tarefas mais adequadas ao potencial de aprendizagem dos(as) mesmos(as), minimizando eventuais obstáculos didáticos ou epistemológicos.

No próximo item apresentamos o Modelo dos Campos Semânticos (Lins,R.C. 1992), nosso principal referencial teórico pedagógico para a análise dos significados desenvolvidos pelos estudantes em atividades de matemática em sala de aula.

2.2 Modelo dos Campos Semânticos de Romulo Lins

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) começou a ser desenvolvido em 1986 por Romulo Campos Lins, partindo de suas inquietações em relação ao tratamento dado usualmente aos erros dos(as) alunos(as) durante as atividades de matemática. Lins, destaca que seu foco era entender "erro" não como uma falha do(a) aluno(a), mas sim como o pensamento dos indivíduos durante a criação de suas respostas. Como dito por Lins:

> Eles estavam pensando em alguma coisa, e eu queria poder tratar destas outras coisas do mesmo modo (com o mesmo referencial teórico) que as coisas "certas". Em minha tese de doutorado usei a noção de campo semântico, mas a escrita da teoria começa mesmo em 1992 [...] O leitor interessado vai encontrar mais desta história em minha "tese" de Livre-Docência, de 2002. (LINS, 2012 p.11).

Neste mesmo artigo, o autor afirma que o MCS não é uma teoria a ser estudada, mas sim uma teorização para ser usada, tanto na Educação Matemática como em outras áreas interessadas em estudar o conhecimento.

> O Modelo dos Campos Semânticos nasceu e cresceu no interior da Educação Matemática, mas sempre existiu em muitas outras partes. Em todas, aliás, onde existe o ser (verbo) humano, já que o que lhe interessa, em última instância é a interação que nos faz humanos. Porque fala de conhecimento, se interessa pelas teorias do conhecimento. (LINS, 2012 p.10)

No modelo são descritas noções favorecedoras do entendimento das produções de significados dos indivíduos nos processos de ensino/aprendizagem. Tais noções são relacionadas entre si e possibilitam analisar e interpretar, de forma mais efetiva, as ideias dos indivíduos nas situações propostas. Faremos agora uma pequena descrição dessas noções para trazer ao leitor(a) definições gerais dos constructos que estruturam o Modelo dos Campos Semânticos.

A noção denominada ***enunciação***, fundamental na teoria, refere-se ao ato individual de produzir enunciados argumentativos em um contexto comunicativo, no interior de uma atividade. No processo de produção de ***enunciações***, novas ideias ou intuições poderão surgir e, eventualmente, contribuir para o enriquecimento das discussões e delimitação de novos caminhos.

O sujeito que produz uma ***enunciação*** é dito ***o autor*;** este ***autor*** se dirige a outro indivíduo — no MCS denominado ***um leitor***, como tal instalado intencionalmente pelo ***autor***. Por sua vez, o que ***um leitor*** acredita ter sido dito por alguém é chamado de ***resíduo de enunciação*.** Por fim, **o *texto*** é definido como a ***enunciação*** transportada entre o ***leitor*** e o ***autor***, sofrendo adaptações e interpretações de cada um dos dois sujeitos envolvidos. De forma alternada, ***o leitor*** se transforma em ***um autor*** e ***o autor*** passa a ser ***um leitor*** dos ***textos*** produzidos ao longo do processo dialógico.

Já as *enunciaçõe*s formuladas por indivíduos para legitimar afirmações, feitas anteriormente durante uma atividade, são denominadas de ***justificações***. No modelo, elas não coincidem com o que se entende usualmente por justificativa. Vejamos a definição apresentada por Lins.

> Não é justificativa. Não é explicação para o que digo. Não é algum tipo de conexão lógica com coisas sabidas. É apenas o que o sujeito do conhecimento (aquele que o produz, o enuncia) acredita que o autoriza a dizer o que diz. (LINS, 2012 p.21)

A argumentação é parte fundamental da produção de significados, mas só existem argumentos quando se acredita no que se está dizendo. Para Lins, ***acreditar(crença)*** só é comprovado se vier acompanhado do princípio da coerência. Ou seja, só é possível dizer que exista uma ***crença*** sobre o que é dito se houver consistência entre o que se diz e o que se pratica. Como disse Lins (2012, p.13): "Por exemplo, eu digo "Não é possível uma pessoa ver através de paredes". Tendo perdido minhas chaves, não seria coerente ficar olhando para a parede, tentando saber se minhas chaves estão na sala ao lado". ***Crença-afirmação*** é definida como sendo uma *enunciação* que o indivíduo formula sobre algo em que acredita, ou seja, é a externalização de uma *crença.*

De posse dos constructos apresentados até aqui, passamos a formular a definição de ***conhecimento*** no MCS. O ***conhecimento*** de alguém é uma ***crença-afirmação*** acompanhada de uma ***justificação***. A ideia de ***conhecimento*** definida nesta teoria foi formulada na busca de determinar ferramentas que possibilitem, na relação professor/aluno, entender os(as) alunos(as) com base naquilo que eles(as) demonstram de concepções, em uma atividade, sobre o tema de estudo, independente da veracidade científica do assunto em questão. Nesta concepção deixa-se de olhar o(a) aluno(a) pela falta, passando-se a valorizar e entender o que de fato eles(as) acreditam.

> Um conhecimento não é nem mais, nem menos, que isto. Existe em sua enunciação e deixa de existir quando ela termina. A justificação é parte constitutiva de um conhecimento, assim como aquilo que é afirmado e a crença no que é afirmado; isto quer dizer que o que constitui um conhecimento são estes três elementos. Nisto o MCS se diferencia de outras teorizações sobre conhecimento. (LINS, 2012 p.12)

Assim, inicialmente, esta noção (conhecimento) prescinde da necessidade de 'verificação'. Neste modelo o *conhecimento* pode ser produzido independentemente de julgamento sobre sua verdade ou falsidade. Esta específica definição de conhecimento tem como finalidade colocar em pé de igualdade todas as particulares produções de argumentos e ideias desenvolvidos no interior de atividades escolares.

No MCS ***verdade*** não é um atributo de alguma afirmação feita durante a produção de conhecimentos, mas é atribuída ao próprio ***conhecimento*** produzido.

> Como consequência de ser enunciado na direção de um interlocutor, e de ter mesmo sido produzido, todo conhecimento é verdadeiro. Isto não quer dizer que aquilo que é afirmado seja "verdade". (LINS, 2012 p.21)

Já ***legitimidade*** diz respeito aos modos de produção de significados.

> A luta pelo poder dentro de culturas (sociedades) se dá na forma do controle de quais são os modos de produção de significados legítimos; é nisto que ela é simbólica. E como a produção de significado é sempre local, sempre e inevitavelmente este controle vai ser frágil e temporário, cheio de fissuras e rachaduras.
> A luta pelo controle de quais são os modos de produção de significados legítimos é o próprio processo de determinação de horizontes culturais (as fronteiras). (LINS, 2012 p.21)

Uma outra noção importante no MCS é a de ***interlocuto*r**, que é uma direção na qual se fala, e não deve ser confundido com uma pessoa com quem se conversa ou, como no caso do *leitor*, alguém instalado intencionalmente pelo *autor* de uma *enunciação*. Interlocutores são *legitimidades* e possibilitam autonomia na produção de significados. "Internalizar interlocutores, legitimidades, é o que torna possível a produção de conhecimento e de significado, torna possível antecipar uma legitimidade do que digo".(LINS, 2012, p.20)

Para Lins, uma ***leitura plausível*** é definida como sendo uma interpretação de um *texto*, aceitável em um contexto, e uma ***leitura positiva*** identifica o conhecimento que o indivíduo expressa e não o que ele não sabe. Diz o autor:

> As noções de leitura plausível/leitura positiva têm sido, por vezes, usadas como equivalentes, mas eu prefiro fazer uma distinção. A leitura plausível se aplica de modo geral aos processos de produção de conhecimento e significado; ela indica um processo no qual o *todo* do que eu acredito que foi dito faz sentido. Outra maneira de dizer que faz sentido em seu todo, é dizer que o todo é coerente (nos termos de quem eu constituo como <u>um</u> autor do que estou lendo).
> Neste *sentido*, podemos dizer que é uma leitura positiva, e não pela falta. Trata-se de saber de que forma uma coerência se compõe na fala de uma pessoa, num livro, e assim por diante, e não de, *em meus termos*, dizer que aquela fala indica falta de informação, ou de reflexão, ou de isso ou aquilo. (LINS, 2012, p.23)

No MCS, o constructo ***campo semântico*** é um processo que designa um modo *legítimo* de *produção de significados* e de construção de ***conhecimento*** visando a constituição de objetos, no interior de uma atividade. Nele acontece a ***interlocução/***dinâmica ***autor-texto-leitor***, por meio de ***enunciações***, ***justificações*** e ***crença-afirmações***.

> Um campo semântico, de modo geral, é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores dentro de limites; que limites são estes, só sabemos a posteriori: enquanto a interação continua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico. (LINS, 2012, p.17)

As fronteiras de um ***campo semântico*** são delimitadas por aquilo que pode ser feito e explorado no interior de uma atividade, de forma a garantir que todos estejam falando do mesmo assunto e produzindo argumentos dentro do mesmo espaço de ***leituras plausíveis.***

> Do ponto de vista da teorização, "campo semântico" serve para articular "produção de conhecimento", "significado", "produção de significado" e "objeto". A referência a "no interior de uma atividade" serve para evitar o caso em que se esteja falando de futebol e de equações "ao mesmo tempo" e terminemos fazendo referência a um campo semântico no qual pareça que se está produzindo significado para gol em relação a uma balança de dois pratos. Não que isto não possa acontecer, mas é melhor ter a possibilidade da leitura mais fina. É isto que o MCS oferece: um quadro de referência para que se possa produzir leituras suficientemente finas de processos de produção de significados. (LINS, 2012,p.18)

O ***núcleo*** de um *campo semântico* é um conjunto de verdades incontestáveis localmente (como por exemplo os dados iniciais de um problema), a partir das quais o processo de produção de significado se estabelece. Para que se alcance esse *núcleo* será necessária a produção de enunciações, que serão responsáveis pela criação dos *significados de um objeto*, que é tudo que se pode argumentar sobre um objeto no interior de uma atividade.

> Pode acontecer de uma afirmação produzida no interior de um campo semântico vir a tornar-se, por motivos diversos, parte do núcleo. É o caso, comumente, de teoremas. A princípio eles demandam demonstração. Depois, aos poucos, os teoremas mais usados (mais centrais, mais importantes, mais usados pelo autor x, …) eles passam a ser usados como se fossem axiomas. (LINS, 2012,p.26)

A escolha do MCS como fundamentação teórica desta dissertação nos possibilitou analisar, de forma estruturada, as produções de significados para o pensamento algébrico tanto no ensino como na aprendizagem deste tema em sala de aula de AIEF. Buscamos entender quais concepções e *conhecimentos* tinham desenvolvido as integrantes da pesquisa de campo realizada, e como poderíamos explorá-los por meio de debates colaborativos. Essa utilização auxiliou incluir as docentes participantes do projeto em situações de autoconhecimento sobre o seu processo de aprendizagem. No próximo capítulo discorreremos sobre o MCS em ação e como ele aqui foi introduzido e utilizado.

Capítulo 3. Metodologia da pesquisa de campo: o MCS em ação

Na busca de perseguir o segundo objetivo geral deste trabalho, descrito na introdução[1], constituímos um grupo participativo de estudos formado por professoras atuantes nos AIEF e pelos pesquisadores(as) envolvidos neste projeto. Ao iniciarmos as análises das discussões colaborativas no interior do grupo após a realização do exame de qualificação, e por sugestão da banca de examinadores, passamos a utilizar o Modelo Dos Campos Semânticos como o principal instrumento teórico para a compreensão adequada das discussões e das movimentações decorrentes das problematizações geradas no interior do grupo. Dessa maneira, neste capítulo apresentamos o MCS em ação e como ele foi utilizado como embasamento teórico neste projeto.

3.1 Formação do grupo participativo e caminhos percorridos

Para a formação do grupo participativo, no final de 2020, direcionamos aos(ás) professores(as) de Ensino Fundamental I de duas escolas da rede pública municipal de ensino de São Paulo uma carta de apresentação dos(as) pesquisadores(as) e do projeto contendo: objetivos do mesmo; a proposta de sistemática de trabalho em grupo pretendida; e um questionário diagnóstico inicial. Nesta carta buscamos caracterizar esta atividade como uma formação continuada de professores(as) sobre ensino/aprendizagem de álgebra no AIEF. Tal carta consta no apêndice 1. Com ela pretendemos motivar professores(as) eventualmente interessados(as) a se inscreverem como participantes do grupo. Do formulário, direcionado às escolas, juntamente com a carta para as inscrições, constaram as seguintes perguntas:

1. Para você, o que é pensamento algébrico?
2. Quais suas maiores dificuldades no ensino de álgebra?
3. Como você avalia a importância de se ensinar álgebra nos AIEF?
4. O que você espera do grupo de estudo a ser formado? ou por qual razão ou quais razões você gostaria de participar do grupo de estudo?

Ao final do período de inscrição tivemos a adesão de doze (12) professores(as), das duas escolas, engajados(as) em fazer parte das discussões coletivas. Em dezembro de 2020 fizemos um primeiro encontro com a participação de 6 professoras. Ao iniciar o ano de 2021 houve uma redução no quadro de professores(as) participantes, restando cinco (5) professoras das duas escolas no grupo, além dos(as) pesquisadores(as). Esta configuração se manteve até abril de 2021, com um total de 6 encontros. Neste mês uma sucessão de eventos em uma das escolas impediu que suas professoras continuassem fazendo parte do grupo. Neste momento o grupo ficou apenas com duas professoras de uma mesma escola e o(as)s pesquisadores(as), totalizando quatro (4) componentes. Tal cenário se manteve até o final. A escolha de

[1] Contribuir para o aprofundamento da compreensão de professores(as) sobre o que são o pensamento e a linguagem algébricos, sobre o papel da aprendizagem desses temas na formação dos estudantes dos anos finais do AIEF, e também para o aprimoramento consciente de suas práticas em sala de aula.

manter quatro (4) participantes foi tomada em conjunto para garantir a continuidade do trabalho já desenvolvido nos encontros anteriores, evitando assim rupturas no processo já construído. Foram realizados vinte (20) encontros remotos do grupo ao longo de 2021.

As discussões tiveram como foco: mapear os problemas de ensino e aprendizagem de álgebra identificados pelas professoras do grupo; aprofundar a compreensão dos problemas por meio da leitura de textos especializados — tanto relativamente a conteúdos de álgebra como a metodologias de ensino que favoreçam a aprendizagem significativa; elaborar, com base nas discussões anteriores, propostas de atividades para sala de aula de tópicos, selecionados em conjunto, a serem aplicadas nas classes das professoras do grupo; e analisar os resultados obtidos nas práticas desenvolvidas em sala de aula.

Na construção dos seminários coletivos foram propostas leituras de textos teóricos e de práticas coerentes com o tema estudado, como embasamento para a elaboração e a aplicação de propostas de atividades para a sala de aula das professoras. Nos capítulos 4 e 5 faremos a descrição e a análise mais detalhadas dos seminários realizados.

Ao longo de todo o processo construímos um Mapa Conceitual (explorado em detalhes no capítulo 5.2 desta dissertação), em grupo, com o auxílio da ferramenta digital *Padlet*, por meio da qual foi possível a edição online por todos os participantes. Nele estabelecemos quatro linhas de conceituação para o registro de suas características e interconexões: pensamento algébrico; linguagem algébrica; dificuldades no ensino de álgebra; e estratégias para o ensino de álgebra nos AIEF.

No processo de descobertas e construções conceituais, percorremos os temas a seguir descritos.

- As concepções do grupo sobre pensamento algébrico e a prática didática dos professores em sala de aula.
- A importância e a dificuldade da utilização da linguagem algébrica no ensino inicial de Álgebra.
- Currículos do Ensino Fundamental I norteados pela BNCC/2018.
- A elaboração de atividades e as análises feitas pelo grupo sobre suas aplicações.
- A exploração de abordagens potencialmente favorecedoras de uma aprendizagem significativa por parte dos(as) alunos(as).

Ao final de todos os encontros fizemos uma avaliação tanto de nossa evolução individual e como grupo.

Cabe destacar que os temas de aprofundamento específicos não foram previamente definidos, mas sim seguiram as propostas feitas de maneira coletiva no interior do grupo participativo. As discussões partiram das inquietações e das experiências práticas vivenciadas pelas professoras em sala de aula, como base para a determinação de estudos de aprofundamento a serem realizados em conjunto.

Estão colocados no apêndice 3 os *slides* dos encontros por nós considerados mais pertinentes aos objetivos desta dissertação.

3.2 O MCS em ação na pesquisa de campo

> Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei apenas que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos. (LINS, 1999, p. 85)

Inspirados nessa compreensão de Lins (LINS,1999), tivemos como foco da aplicação da pesquisa de campo tentar localizar os lugares de *conhecimento* onde as professoras, participantes do grupo, estavam durante todo o processo de discussões sobre pensamento e linguagem algébricos. Para utilização do MCS em ação, tivemos como prioridade criar um espaço democrático de exposição de ideias, que tornasse possível ouvir e entender as concepções que o grupo tinha sobre os temas propostos. Ao longo da pesquisa, tal prioridade exigiu um olhar atento no sentido de tentar identificar, nas *enunciações* das professoras, aquilo que fosse uma concepção autêntica e o que pudesse ser mais um jargão assimilado em sua formação ou prática docente, pois, em algumas situações, tornou-se claro que as mesmas nem haviam tido a oportunidade de refletir sobre seus *conhecimentos*. Por vezes, as professoras apresentaram dificuldades em expressar suas ideias, entretanto com o passar dos primeiros encontros percebemos que elas ficaram mais à vontade em argumentar, o que nos possibilitou saber onde elas estavam e entender os significados por elas desenvolvidos.

As perguntas provocativas feitas por nós, pesquisadores deste projeto, surgiram de *enunciações* elaboradas no grupo que entendemos ser potencialmente ricas para o debate coletivo no sentido de encontrar novos caminhos e possibilidades de abordagens de ensino da álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental. As enunciações foram então revisitadas em encontros posteriores e discutidas, na busca de conseguirmos percorrer juntos(as) novos lugares. Em situações como essas, os(as) integrantes do grupo, incluindo os pesquisadores, transitaram entre *autores* e *leitores*.

Sabíamos a importância de acompanhar a evolução do grupo durante vários encontros, pois os *conhecimentos* que desenvolvemos necessitam um tempo de amadurecimento. Desta forma, ao decorrer dos debates muitas das ideias iniciais foram reformuladas e algumas barreiras ou incompreensões referentes à habilidade de pensar algebricamente foram deixadas para trás, sendo que este processo serviu de alavanca para chegarmos a novas concepções sobre o tema trabalhado. O foco da pesquisa de campo não foi o de encontrar erros ou acertos nas *enunciações* dos integrantes, mas sim, encontrar elementos que dão legitimidade a elas.

As professoras tiveram a oportunidade de replicar com seus(suas) alunos(as) processos análogos em suas salas de aula, com a mesma finalidade de olhar os(as) alunos(as), não pela ausência de algum *conheciment*o, mas buscando entender os argumentos que sustentam as ideias por eles enunciadas. Esse intercâmbio, entre os encontros do grupo colaborativo e as práticas em sala de aula, fez com que questionamentos referentes às dificuldades encontradas no ensino da álgebra pudessem estar presentes nas discussões do grupo. Isso nos permitiu um amplo espaço de trocas de boas práticas no intuito de acessar as reais dificuldades dos alunos(as) em seus processos de aprendizagens.

A troca no grupo, entre as práticas de sala de aula e as atividades que estávamos debatendo, nos alertou que algumas das ideias matemáticas, envolvidas nas situações-problema propostas, não estavam totalmente claras para as professoras. Quando o ambiente se tornou confortável para que elas pudessem falar sobre suas dificuldades ou tirar dúvidas, por mais simples que pudessem parecer, conseguimos acessar os entraves que as bloqueavam. Isto ocorreu, por exemplo, em uma situação na qual exploramos a propriedade comutativa da multiplicação. As professoras sabiam seu nome, argumentavam sobre a importância de ensiná-la, mas mostraram dificuldade em explicitar *justificações* capazes de sustentar a veracidade da propriedade. Generalizando, percebemos que elas dominavam os procedimentos operatórios, mas não *produziam significados* para as propriedades das operações envolvidas. Situações como esta serão discutidas em maior detalhe no próximo capítulo.

Capítulo 4. Conhecimentos algébricos debatidos e compartilhados ao longo da pesquisa de campo

Neste capítulo abordamos as discussões ocorridas no interior dos seminários do grupo colaborativo. Trazemos aqui pontos relevantes debatidos, bem como as principais ideias direcionadoras do desenvolvimento do projeto aplicado durante o ano de 2021, organizadas nos seguintes blocos temáticos: significados atribuídos ao pensamento algébrico; comunicação algébrica; e relação entre pensamento e linguagem algébricos. Fazemos a análise da participação das professoras buscando, a partir de suas *justificações* (no sentido de Lins), entender os *significados* por elas atribuídos aos temas debatidos. Também foram levantados os desafios quanto ao ensino de álgebra por elas elencados.

4.1 Significados atribuídos ao pensamento algébrico

Iniciamos as conversas no grupo, fazendo um diagnóstico das concepções das professoras sobre pensamento algébrico. Observamos que várias das ideias expostas eram bastante genéricas, podendo ser atribuídas a pensamento matemático em geral. Assim, no dizer de algumas professoras, a criança pensa algebricamente quando elabora respostas para exercícios matemáticos propostos. Para outras, trata-se de uma habilidade em encontrar algum número desconhecido. Vejamos algumas das respostas na íntegra (as professoras aqui são referidas por siglas):

> Profa.1 - *Compreender como chegar em um resultado que não está explícito.*
> Profa.2 - *A forma como a psique abstrai e se comporta diante de situações matemáticas.*
> Profa.3 - *Como é o raciocínio da criança ao elaborar uma resposta ou resolução.*
> Profa.4 - *É levar os estudantes para um outro plano da matemática, onde o pensar, observar e investigar, vem antes das operações.*
> Profa.6 - *Seria sobre as diversas letras que possuímos no alfabeto, dentre especificamente x e y.*

Para o grupo, a importância do pensamento algébrico estava mais bem definida do que a especificidade deste tipo de pensamento e de como os(as) estudantes o desenvolvem. Vejamos algumas das respostas das professoras sobre a importância do pensamento algébrico:

> Profa.1: *Como professora alfabetizadora acredito que desde cedo o aluno deve desenvolver a observação, levantar dúvidas e criar hipóteses. Para isto, ele precisa de conhecimentos que o façam organizar esses questionamentos. A álgebra é um desses conhecimentos*.

Profa.4: *Eu acho super importante, porque você desenvolve nos estudantes um pensamento crítico e investigativo, onde eles desenvolvem suas hipóteses algébricas, construindo o saber, antes mesmo de chegar nas operações.*

Profa.7: *É a base. Um pensamento bem estruturado desde o início da vida escolar contribui não somente com a matemática, mas também com outras formas de encontrar soluções e agir em diversas situações.*

Profa.9: *Para mim ensinar álgebra no fundamental I é a base para que os alunos se apropriem das regularidades matemáticas, saibam argumentar, generalizar.*

Com o objetivo de enriquecer o debate sobre o pensamento algébrico, sugerimos às professoras a leitura do texto: "Entendendo e discutindo as possibilidades do ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental" (DE OLIVEIRA, VANESSA; PAULO, ROSA MONTEIRO, 2019). E, para provocar a discussão no grupo, apresentamos uma nova questão: *Que tipo de novas ideias deve-se buscar compreender sobre o pensamento algébrico para se ensinar álgebra?*

Essa questão teve como finalidade desafiar as professoras do grupo a refletirem sobre suas concepções e também possibilitar aos pesquisadores a real compreensão dos significados desenvolvidos para pensamento algébrico pelos integrantes do grupo, na busca de compreender os *conhecimentos* que elas demonstravam ter sobre o tema.

Diante da questão colocada, a proposta que surgiu no grupo foi a de explorar os registros dos(as) alunos(as) durante as atividades em sala de aula e utilizar as ideias trazidas por eles(as) a fim de estimular a participação e interesse dos(as) estudantes pelos temas abordados. As professoras relataram que seus(uas) alunos(as) possuem dificuldade na organização de seus pensamentos, seja por meio de linguagem oral ou escrita, sendo este um forte entrave na exposição de suas ideias. Diante disso propuseram a utilização de rodas de conversas como estratégia para a superação deste obstáculo, por acreditarem que a argumentação é fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim como defendido por Lins, (LINS, R. C.,2012), as professoras estavam buscando criar um ambiente confortável de troca de ideias para incentivar os(as) alunos(a) a expressarem suas *justificações*.

Outro ponto ressaltado pelas professoras foi a importância de aproximar a realidade dos(as) alunos(as) das atividades voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico nas aulas de matemática. Um exemplo, por elas levantado, foi o de incentivar uma reflexão coletiva sobre situações vivenciadas no percurso da residência à escola. Esta proposta poderia ser utilizada para estabelecer conexões entre a realidade do(a) aluno(a) e as atividades escolares, aproximando seu cotidiano com os temas matemáticos abordados. Percebemos assim que elas, em sua prática pedagógica, tinham percepção diretamente relacionada à teoria sócio-cultural de Vygotsky (VYGOTSKY, L. S.,2009), sobre ser o desenvolvimento do indivíduo resultado de um processo sócio-histórico decorrente da interação do indivíduo com a realidade circundante e vice-versa.

Chamar a atenção do(a) aluno(a) para ações recorrentes que faça pode ser um caminho a ser explorado com questões como: qual o tempo do translado entre sua casa e a escola?; o horário de sua saída interfere no tempo do percurso?; ou nos dias de chuva este tempo de deslocamento muda?. Esses são pontos que podem ser problematizados para dar início à temática sobre o reconhecimento de padrões — uma das características fundamentais do pensamento algébrico.

Dando sequência às discussões no grupo, questionamos as professoras sobre quais foram os maiores desafios por elas encontrados no ensino de álgebra. Vejamos algumas das respostas formuladas:

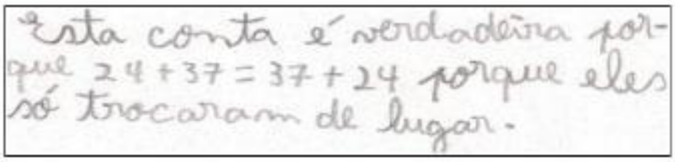
> Profa.2: *Criar momentos significativos em sala para fomentar a curiosidade e a vontade de aprender.*
> Profa.4: *É usar de propostas que fazem parte do seu meio social e que tenham significado para eles.*
> Profa.7: *Maior dificuldade não digo, mas acho interessante poder entender as diversas formas do "fazer matemática" de cada um. Gostaria de aprender mais sobre como explorar essas formas diversas.*
> Profa.8: *Falta de interesse das crianças.*
> Profa.9: *Argumentar, fazer relações, desenvolver um raciocínio lógico.*

Observamos que para as professoras os termos "significativo" e "significado" relacionam-se à ideia de que o(a) aluno(a) desenvolva um efetivo aprendizado do conceito matemático em foco nas atividades de ensino. Ou seja, elas esperam que este "significado" seja coerente com a compreensão que elas próprias têm do que seja correto na Matemática. No entanto, relembramos que para Lins (LINS, R. C., 2012) a *produção de significados* é a capacidade de produzir *justificação* para uma ideia que o indivíduo acredita ser verdadeira, algo capaz de dar coerência, e assim legitimidade, a seus argumentos — independentemente do que seja a definição oficial do conceito. Para o autor, pensar algebricamente é uma forma, entre outras, de *produzir significados* para a álgebra, no sentido exposto imediatamente antes. Pode-se perceber assim que, para as professoras, "atribuição de significados" não tinha o mesmo sentido de Lins.

Neste ponto julgamos necessário explicitar claramente qual é a concepção de "atribuição de significados" ou "aprendizagem significativa" que estamos utilizando nesta dissertação. Tal movimento pode parecer irrelevante para alguns, ou até mesmo distante das discussões que poderiam ser feitas em sala de aula, mas entendemos ser este um dos pontos centrais para a exploração escolar do desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, portanto também do pensamento algébrico. Com Lins, acreditamos relevante o oferecimento de reais oportunidades ao indivíduo para a criação de suas *justificações,* que expressem, com coerência, suas *crenças-afirmações,* por mais que elas possam parecer distantes do sentido oficial do conceito matemático. Para o autor, esse tipo de procedimento didático permite ao(à) professor(a) entender o que de fato pensam os(as) alunos(as) e assim conseguir aproximar o(a) docente do *conhecimento* efetivamente desenvolvido pelos(as) estudantes.

No decorrer dos encontros do grupo, abordamos as propriedades da adição e da multiplicação, que são: comutativa; associativa; existência de elemento neutro; e distributiva da multiplicação em relação à adição. A escolha de tal tema se deu pelo interesse das professoras e também pela oportunidade de capturar os reais significados que as mesmas haviam desenvolvido para ele. A exploração foi iniciada por meio de debates sobre as resoluções dos(as) estudantes a problemas constantes em artigos ou anteriormente por nós aplicados. O grupo discutiu sobre quais seriam as possíveis compreensões desses(as) alunos(as) em suas respostas. A seguir detalhamos as discussões feitas referentes à propriedade comutativa da adição e da multiplicação e à propriedade distributiva. Sobre as demais propriedades as professoras não demonstraram dificuldade de compreensão e nem questionamentos.

Nos primeiros encontros com o grupo, levamos respostas de alunos(as) a situações-problema constantes do artigo “O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de alunos do 3º ano de escolaridade do ensino básico” (MESTRE, C.; OLIVEIRA, H., p. 11) para a discussão coletiva. A primeira atividade debatida estava relacionada à propriedade comutativa da adição, pois era solicitado que o(a) aluno(a) justificasse a veracidade da igualdade 24+37 = 37+24. Uma das respostas apresentada foi: *Esta conta é verdadeira porque 24+37 = 37+24 porque eles só trocaram de lugar* (ver figura 1).


Esta conta é verdadeira por-
que 24 + 37 = 37 + 24 porque eles
só trocaram de lugar.

1.Figura 1 - Fonte: Mestre e Oliveira, 2011, p. 11

Questionamos as professoras sobre a importância que atribuem, ou não, a trabalhar esse tipo de atividade em sala de aula, com alunos(as) do AIEF. Destacamos aqui parte do diálogo estabelecido:

> Profa.1: *Eu acho importante, acho que é primeira explicação da própria criança, um jeito bem simples que ela entende a propriedade comutativa.*
> Pesq.2: *E a gente teria alguma pergunta para fazer ao aluno? Por que trocando de lado dá o mesmo resultado? Tem alguma situação que trocando de posição não dá o mesmo resultado?*
> Profa.2: *Essa foi uma boa pergunta agora, estou aqui pensando em como explicar para eles que trocar de lugar não faz diferença. Realmente eu acho que não saberia explicar isso em questões matemáticas.*
> Pesq.2: *Por exemplo, se um aluno está do lado da janela e está batendo sol e o outro está em outro lugar que não está batendo sol, eles trocando de lugar faria a diferença. Então, por que no caso da adição isso não faz diferença?*
> Profa.2: *Eu não saberia explicar.*

Pesq.2: *Aí é que vem a importância de trabalhar com os alunos, sobretudo no começo, o que significa, qual é a ideia de somar duas coisas. Na adição uma das ideias é juntar objetos, então se eu junto 3 maçãs com 4 bananas para colocar em um cesto, tanto faz a ordem de quem eu começo a juntar, o conjunto geral da cesta terá a mesma quantidade final de frutas.*

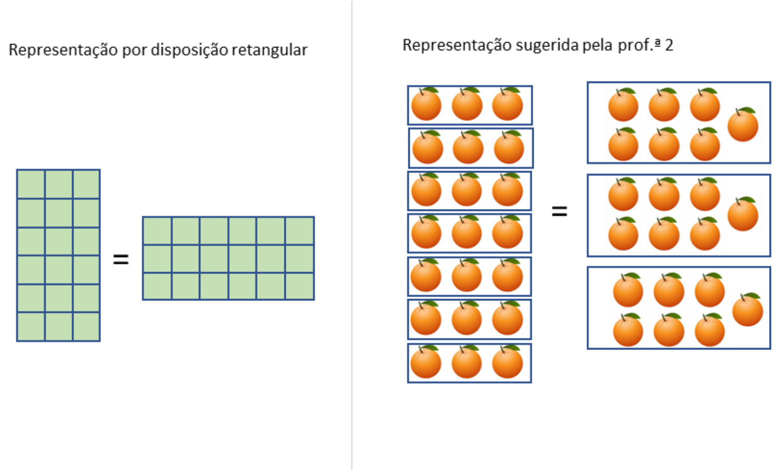
Neste diálogo transcrito, percebemos que as professoras não sabiam criar *justificações* para o significado da propriedade comutativa da adição. Observamos que elas não haviam desenvolvido um *conhecimento* (no sentido de Lins) específico sobre esta propriedade. Destacamos que a exibição dessa situação não tem a finalidade de criar julgamentos sobre a prática docente dos(as) professores(as), mas sim entender os significados desenvolvidos por eles(as). Acreditamos que debater esses assuntos pode ser um ponto relevante para o professor(a) refletir sobre sua prática e criar maneiras de auxiliar seus alunos(as) a superar possíveis dificuldades nas aulas de álgebra.

Dando sequência à exploração das propriedades das operações, perguntamos ao grupo como poderíamos explorar a propriedade comutativa da multiplicação $a.b = b.a$.

Profa.2: *Eu sempre utilizo imagens, por exemplo se eu tiver duas caixas com uma certa quantidade, e se eu fizer o contrário a quantidade em relação ao desenho ou o desenho em relação a quantidade teremos a mesma coisa. Pois eu acho que eles entendem melhor com algo mais visual*.
Pesq.2: *Pensando nas ideias, o que significa multiplicar um número por outro?*
Profa.2: *Sobre como multiplicar um número pelo outro e o porquê não muda? Eu nunca pensei sobre isso. Eu focava nas respostas deles que dava na mesma coisa, mas nunca parei para pensar no porquê não faz a diferença.*
Pesq.2: *Eu estou propondo não de um jeito que possamos explicar para eles necessariamente, mas para a gente ir, devagarinho, se aproximando de como se chega lá. Então eu pergunto para vocês, o que significa multiplicar 7 por 3*.
Profa.1: *Você está fazendo uma adição de uma maneira mais simples, mais rápida. Eu não deixo de associar a multiplicação com a adição*.
Pesq.2: *Mas como assim? Eu não estou somando 7 com 3.*
Profa.1: *Como ela falou, o 7 seria as caixas e o 3 as laranjas, por exemplo.*
Pesq.2: *Esse é o ponto importante, na multiplicação os números têm significado diferentes. Na multiplicação 7 são as caixas e o 3 são as laranjas. Na adição tudo é laranja.*
Profa.1: *Verdade, exatamente!*
Profa.2: *É verdade mesmo!*
Pesq.2: *Olhando o concreto a gente vê essa diferença. Então concretamente é diferente eu ter 7 caixas de 3 laranjas ou ter 3 caixas de 7 laranjas. Então isso já não é tão fácil quanto como na ação de juntar, onde tanto faz a ordem. Estamos mudando os significados dos fatores. Ou seja, na multiplicação um dos números é o indicador de quantas parcelas eu vou ter na minha adição,*

então dizemos que ele é um operador, um índice de quantas parcelas temos em adições iteradas.

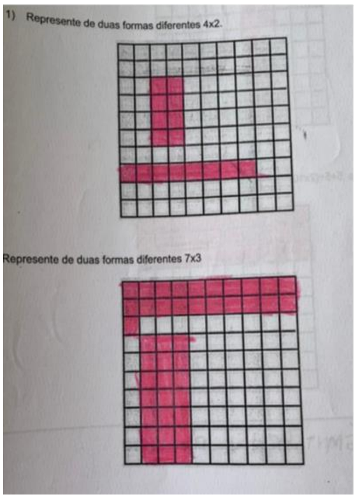
Assim como na pergunta anterior, as professoras tiveram dificuldade em argumentar sobre a propriedade comutativa da multiplicação. Apresentaram bloqueios ao tentar expressar as ideias que a envolvem. O que faz esta propriedade ser verdadeira é o fato de os dois resultados coincidirem, ou seja, a quantidade total de objetos resultantes das duas operações indicadas em cada lado da igualdade. Um apoio visual na compreensão de tais ideias é a chamada “disposição retangular”, bastante explorada nos livros didáticos. Neste recurso, usualmente é desenhado um retângulo em papel quadriculado como representação do produto, no qual o operador (no concreto, o número de caixas) é indicado pelo número de linhas constantes do retângulo e as parcelas (a quantidade de laranjas por caixa da “soma mais rápida” apontada pela Profa.1) são indicadas pela quantidade de quadradinhos em cada linha. Tal representação pictórica da multiplicação pode parecer ser mais útil do que a “concretude das caixas”, apontada pela Profa.2. Porém, no caso do exemplo discutido no diálogo transcrito, visualmente só é <u>imediato</u> para quem domina o cálculo da área de retângulos a constatação de que o retângulo na posição vertical $(7x3)$ tem a mesma quantidade de quadradinhos do que o retângulo na posição horizontal $(3x7)$. Já, para constatar que 7 caixas de 3 laranjas contém a mesma quantidade que 3 caixas de 7 laranjas, é necessário um procedimento de contagem, acessível imediatamente a alunos(as) da faixa alvo, como foi destacado pelas professoras. Portanto, entender a representação por disposição retangular, demanda uma maior capacidade de abstração do que a representação concreta. Segue abaixo uma ilustração das duas possíveis representações.



2.Figura 2 - Imagem (própria) de representações para propriedade comutativa da multiplicação

Com a finalidade de explorar mais a representação retangular da multiplicação, apresentamos às professoras duas respostas elaboradas por um aluno a uma das atividades por nós aplicada em 2018, no contexto de um estágio supervisionado obrigatório do curso de Licenciatura em Matemática do IME/USP.

Nesta atividade pediu-se aos estudantes que representassem de duas formas diferentes as operações $(4x2)$e $(7x3)$. Segue a imagem de um dos registros.



3.Figura 3 - Atividade desenvolvida na disciplina de Projetos de Ensino- IME-USP

Segue trecho das análises feitas pelas professoras diante das respostas exibidas:

> Profa.3: *Se a gente observar a representação do aluno, ele sempre pensa na forma "armada" no momento de fazer os desenhos. Olhando assim seria uma conta "armada" no lúdico. Se a gente der um problema diferente, que não seja com a conta ou trabalhando o lúdico mesmo com frutas ou outras coisas, será que eles conseguiriam chegar em uma representação pensando no concreto? Sem que eles pensem na forma de armar a conta de multiplicação.*
> Pesq.1: *Esse seria um bom teste a ser feito com os alunos.*
> Profa.3: *Por exemplo, eu pego um monte de lápis de cor e peço para eles fazerem* $(4x2)$ *de duas formas diferentes usando os lápis. Será que eles iriam tentar montar uma conta? Fico perguntando se eles precisam fazer isso para ter o resultado embaixo, como na imagem, ou mesmo na parte de cima como na segunda imagem.*
> Profa.1: *Vamos pensar que faça essa atividade, e me aparece esses resultados, aí daria para a gente quando for falar* $(4x2)$*: é quatro de dois? Podendo introduzir o "de". Eu acho que eles entenderiam. Para explicar os outros* $(7x3)$*: é sete de três? Daria para fazer o contrário são três de sete?*

Na interpretação da Profa.3 "os desenhos representam as contas armadas com o seu resultado", manifestando a preocupação de que o(a) aluno(a) pudesse estar operando de forma mecânica, sem a atribuição de significado à multiplicação, que talvez pudesse ser melhor favorecida com a utilização de material manipulável. Neste momento, a Profa.1 propõe, em atividade com o uso de material manipulável, a utilização da preposição "de" ao invés da ênfase usual à palavra "vezes", ao tratar-se de uma multiplicação. Surgiu então a questão: ficará mais acessível à compreensão dos alunos esse tipo de abordagem nesta faixa etária do que o recurso à disposição retangular? Como, afinal, as professoras não fizeram esse tipo de experimento durante o período dos encontros, a questão ficou em aberto. Agora percebemos que as falas das professoras, baseadas em suas percepções de sala de aula, apontam para a possibilidade de que a representação retangular não seja suficientemente “concreta” para crianças da faixa etária de seus(suas) estudantes. Refletindo sobre tal possibilidade, levantamos a hipótese de que o conhecimento da noção de área e do cálculo da área de retângulos possa ser necessário para que uma representação retangular favoreça a atribuição de significado à propriedade comutativa da multiplicação. Assim, é plausível que o tratamento desta propriedade em situações concretas por meio de “caixas de objetos”, possa de fato melhor favorecer a compreensão de alunos(as) desta etapa da escolaridade, tanto da ideia da multiplicação como soma de parcelas iguais, como da propriedade comutativa da operação.

Durante esta discussão, inúmeras ideias surgiram sobre possíveis pensamentos dos(as) estudantes ao responderem os problemas. Isso fez com que o grupo sinalizasse a importância de questionar o(a) aluno(a) sobre como ele(a) pensou ao dar sua resposta. Perceber quais são os pensamentos presentes nas elaborações dos registros é necessário para identificar o *campo semântico* no qual ele(a) está operando (sobre *campo semântico* ver p. 31). Tal identificação permite avançar ou retomar os conteúdos que estão sendo abordados. É importante permitir que os(as) estudantes tenham liberdade de expor suas ideias e também encorajá-los(as) a superar o eventual medo de errar. O erro faz parte da aula de matemática, com ele conseguimos trilhar caminhos novos e refletir sobre aqueles que não levam aos lugares esperados.

Decorrente do debate e das análises manifestadas anteriormente, entendemos que o problema proposto – representar de duas formas diferentes $(4x2)$ – possa ter sido inadequado, tanto em sua redação como no quadriculado apresentado para as representações. Refletimos que um questionamento mais pertinente para levantar uma problematização sobre a propriedade comutativa da multiplicação com crianças desta faixa etária poderia ser: Como você explica que $(2x4)$ e $(4x2)$ têm o mesmo resultado 8? Faça dois desenhos que mostrem o que você explicou. Além disso, entendemos ser pertinente apresentar o problema aos(as) alunos(as) sem a exibição de uma malha quadriculada, possibilitando assim que os(as) mesmos(as) tenham a liberdade de criar suas próprias representações. Acreditamos que valeria a pena testar essa nova formulação.

Na sequência exploramos a propriedade distributiva da multiplicação diante da adição, utilizando uma proposta de atividade que explora a tabuada do 3, de Ana Paula Canavarro (CANAVARRO, 2007, p. 97), autora portuguesa. Visando a percepção de possíveis regularidades por parte dos(as) estudantes, na atividade é solicitado que encontrem o resultado de $(2x3) + (5x3)$.

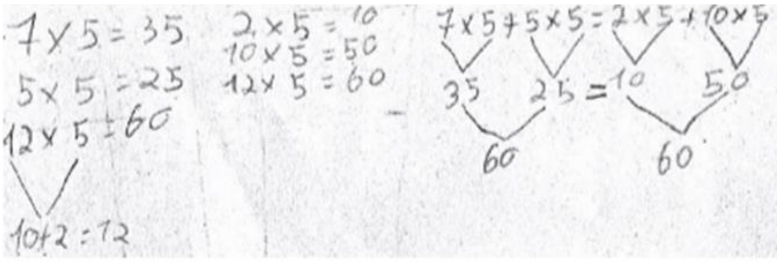
<u>Observação</u>: Esta atividade vem acompanhada da seguinte ilustração da tabuada do 3, onde o operador aparece à direita do operando, disposição essa inversa à da convenção utilizada no Brasil, onde o operador é colocado à esquerda da

operação, como sabemos. Assim, talvez convenha adaptar a atividade se quisermos aplicá-la em escolas do Brasil.

Assim, para obter o resultado de $(2x3) + (5x3)$, os seguintes passos são sugeridos: somar os primeiros fatores de cada multiplicação $(2 + 5 = 7)$; somar os produtos encontrados nas duas parcelas $(6 + 15 = 21)$; e localizar qual número da tabuada do 3 (que estavam estudando) resulta em 21.

O esperado é que os(as) alunos(as) percebam assim que o número 7, encontrado como multiplicador na tabuada, é a soma na primeira etapa sugerida. A seguir é proposto que explorem outras tabuadas para que cheguem à propriedade distributiva em sua representação simbólica generalizada: $(\mathrm{a\ x\ b}) + (\mathrm{c\ x\ b}) = (\mathrm{a} + \mathrm{c})\ \mathrm{x}\ (\mathrm{b})$.

Após a proposta da atividade ter sido compreendida, discutimos no grupo uma das respostas para determinar o resultado de $(7x5) + (5x5)$, problema constante do artigo. A seguir é mostrada a imagem da resolução analisada e os diálogos ocorridos no grupo.



4.Figura 4 - Atividades proposta em Canavarro, 2007, p.27

Pesq.1: *Vocês têm alguma ideia de como o aluno pensou?*

Profa.2: *Na primeira conta ele faz* $(7x5) + (5x5)$, *ele já percebeu que o 5 está em toda*s.

Pesq.2: *Ele escreveu que 12 é igual a* $(10 + 2)$, *e o 10 não havia aparecido antes.*

Profa.1: *Esse* $(10 + 2)$, *pode ser que ele estivesse somando o 7 com 5* .

Profa.3: *Eu acho que ele pensou assim:* $(2x5 = 10)$ e $(10x5 = 50)$, e $(50 + 10 = 60)$*. Quando ele decompõe na escrita do lado me mostra isso*.

Pesq.1: *Pode ser que ele não saiba a tabuada do 12, mas ele sabe a do 10 e a do 2.*

Profa.3: *Exatamente, essa decomposição dele é para confirmar se a ideia que ele teve estava correta*.

Pesq.2: *É verdade, se ele só tem a tabuada até o 10, ele foi bem esperto.*

Profa.3: *Super. Por isso eu acho importante que a gente dê tempo ao aluno para desenvolver a ideia dele, sem aquela pressa, ansiedade. Se você for olhar bem ele entendeu a ideia, e ainda acresceu algo mais, ele conferiu a conta que ele fez.*

Pesq.1: *Por nossas conversas, eu acho que ele realmente não quis utilizar o número 12, porque olhando do lado direito, quando ele faz* $(7x5) + (5x5)$, *se fosse seguir a regra do problema ele já faria* $(12x5)$, *mas escreveu como sendo* $(2x5) + (10x5)$.
Pesq.2: *Olha, ele foi muito além da proposta, que legal! Isso que nós estamos conjecturando é bem plausível que seja o pensamento do aluno, eu concordo com essa ideia.*
Profa.3: *O que seria bom é o professor, quando for fazer a correção, chamar o aluno para explicar seu pensamento, pois muitas coisas que o professor coloca errado, pode estar certo. Isso também pode ajudar o professor a entender as dificuldades dos alunos e também ajudá-lo a preparar outras aulas.*

Observamos que, utilizando o procedimento do exemplo anterior, o(a) aluno(a) obteve o resultado preliminar de $(12x5)$ para a conta $(7x5) + (5x5)$, mas não pode chegar a uma resposta final nesta etapa. Para o grupo possivelmente isso se deveu ao fato de ele(a) ter conhecimento das tabuadas até o 10 apenas, o que o(a) desafiou a fazer uma nova passagem para obter o resultado final. Nossa hipótese é que a mesma lógica foi aplicada, ao substituir 12 por $(10 + 2)$, o que justificaria a segunda parte da conta representada pelo(a) estudante.

O exercício de buscar entender os possíveis raciocínios dos(as) alunos(as), provocou no grupo a reflexão sobre as diversas possibilidades de interpretação dos problemas por parte de cada estudante. É inevitável que as interpretações dadas pelas professoras tenham sido pensadas a partir de suas experiências pessoais em suas práticas de sala de aula. Nas análises por elas feitas sobre como os(as) alunos(as) interpretaram o problema proposto, possivelmente projetaram suas próprias expectativas do que fossem a compreensão dos(as) alunos(as). A última fala de uma professora indica a compreensão da importância de solicitar aos(as) alunos(as) que expliquem o que pensaram para resolver o problema. Essa reflexão nos pareceu significar um avanço na direção de internalizar o que é proposto no MCS, sobre a relevância de compreender o real *conhecimento* do(a) aluno(a).

Nos termos do MCS esse tipo de situação pode ser descrito da seguinte forma: o conteúdo discutido na atividade (no caso, obter o resultado de $(7x5) + (5x5)$, é identificado como *texto*; quem propõe o *texto* é chamado de *autor*; o *autor* idealiza o que a outra pessoa vai entender sobre o *texto*; e por fim, quem recebe essa informação é chamado de *leitor* (sobre a relação *autor-texto-leitor* ver p. 31). É importante que a relação *autor-texto-leitor* seja explorada, principalmente para provocar a discussão sobre as expectativas, tanto dos(as) professores(as) como dos(as) estudantes no processo de ensino/aprendizagem. A tomada de consciência desta relação pode permitir uma melhor eficiência no alcance dos objetivos de aprendizagem por possibilitar uma compreensão mais efetiva do entendimento dos(as) alunos(as) sobre o conteúdo trabalhado nas atividades de ensino propostas.

Em sala de aula, quando o(a) professor(a) faz uma pergunta é comum que sejam sempre os(as) mesmos(as) alunos(as) a responder. Ao questionar os(as) alunos(as) que ficam mais calados, na sequência, geralmente obtém-se respostas análogas, como decorrência de uma idealização sobre o que o(a) professor(a) esteja esperando como solução do problema proposto. Ou seja, muitos estudantes podem não estar totalmente convencidos das suas argumentações, mas sim construindo-as a partir de suas expectativas sobre o que é deles(as) esperado. A promoção de um espaço isento de cobranças sobre o que seja certo ou errado, é relevante para propiciar um olhar e uma compreensão mais efetiva do(a) professor(a) sobre o real pensamento de seus(suas) alunos(as).

Durante as discussões sobre as atividades percebemos que as professoras demonstraram pouca reflexão sobre a relação de igualdade, por eventualmente tratarem o símbolo da igualdade (=) apenas como uma "separação" entre duas expressões, na busca de um resultado. A dificuldade detectada sobre a produção de significado para a igualdade ocorre, em geral, com os(as) estudantes em diferentes níveis de escolaridade. Lessa (LESSA, 1996) e Clement (CLEMENT, 1980) apontam que muitos(as) alunos(as), nos primeiros anos de ensino, tratam o símbolo de igualdade apenas como um link convencionado entre etapas de cálculo. Entendemos que isso ocorre por não perceberem o fato de que o símbolo = indica o predicado de uma frase matemática (a é igual a b). Muitos chegam a levar consigo tal dificuldade até o ensino superior. Assim, nos encontros com as professoras decidimos trazer à discussão um texto de apoio da disciplina de Álgebra I do curso de Licenciatura/IME/USP, elaborado pela orientadora desta dissertação, do qual transcrevemos um trecho.

> A igualdade (=) é uma relação de equivalência definida em todos os conjuntos que satisfaz ainda outras propriedades. Assim, dado um conjunto arbitrário A, e sendo a, b, c elementos quaisquer de A, valem as propriedades a seguir descritas para a igualdade:
> = é uma relação de equivalência em A, ou seja, valem, para todo $a, b, c \in A$:
> = 1) $a = a$ (Reflexiva)
> = 2) $a = b \rightarrow b = a$ (Simétrica)
> = 3) $(a = b \text{ e } b = c) \rightarrow a = c$ (Transitiva)
> Se $f : A \rightarrow A$ é uma função, então, sendo $a, b, c \in A$ quaisquer, valem:
> = 4) $a = b \rightarrow f(a) = f(b)$
> (Toda função é unívoca) ou (Mudando igualmente os dois termos de uma igualdade, sempre obtenho outra igualdade.)
> = 5) $(k = f(b) \text{ e } b = c) \rightarrow k = f(c)$
> (Obtemos outra igualdade ao trocar um elemento que compõe a expressão de um dos termos de uma igualdade por outro elemento igual ao primeiro.)
> Sendo P(a) uma propriedade qualquer sobre elementos de A, e sendo $a, b \in A$ elementos arbitrários, vale:
> = 6) $a = b \rightarrow (P(a) \leftrightarrow P(b))$
> (Obtemos propriedades equivalentes, trocando um termo por outro igual a ele na propriedade.) (DRUCK, I.F., 2016)

Como mencionado anteriormente este texto foi desenvolvido para alunos do curso de Licenciatura em Matemática, por esse motivo a linguagem utilizada é mais formal do que a usual dos livros didáticos dos AIEF e possivelmente pouco explorada desta forma também em cursos de formação de professoras dos anos iniciais. No entanto entendemos que a apresentação dele fosse importante para que as professoras pudessem se apropriar das propriedades que envolvem a igualdade, vejamos abaixo como o texto foi introduzido dentro do grupo.

> Pesq.2: *Este foi um material elaborado para utilizar no curso de Álgebra I com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Quando estávamos falando da igualdade eu me lembrei dele. Como foi escrito para alunos do curso de matemática a linguagem é um pouco mais formal, mas enfim, achamos que vale a pena discutir aqui. A igualdade é uma relação entre duas "expressões" de forma que os termos igualados são dois nomes do mesmo "objeto". Os dois termos são representações diferentes, mas se referem ao mesmo objeto. Então é claro que (a) é sempre igual a si mesmo* $(a = a)$, *(propriedade reflexiva), como se eu estivesse me vendo no espelho. A simetria expressa, por exemplo, que se* $(2 + 3)$, *é igual a 5, então 5 é igual a* $(2 + 3)$, *ou seja, a relação é simétrica, não importa a ordem da leitura. Em um exemplo da propriedade transitiva, se eu digo que* $(2 + 3 = 5)$ *e eu também sei que* $(5 = 4 + 1)$, *então eu posso concluir que* $(2 + 3)$ *também se refere a* $(4 + 1)$. *Estas são as propriedades básicas, mas elas não são só da igualdade, qualquer relação que as satisfazem é chamada de relação de equivalência. A igualdade é uma relação de equivalência* ***forte***. *A propriedade que permite que eu possa fazer as mesmas coisas dos dois lados de uma igualdade e que continuemos a ter uma igualdade, pode ser representada por* a = b → f(a) = f(b) . *Esse (f) pode ser – somar 2, dividir por 3, etc, o que eu obtenho é outra igualdade também. Por exemplo* $(4 + 1 = 5)$ *quando eu multiplico* $(4 + 1)$ *por 2, eu tenho* $(8 + 2)$, *quando eu multiplico o 5 por 2 eu obtenho 10, é claro que* $(8 + 2 = 10)$, *a igualdade permanece, muda o objeto, mas o outro muda igualmente e chega-se ainda a uma igualdade – quando eu aplico uma função.*
> Profa.2: *São maneiras diferentes de chegar a um mesmo resultado?*
> Pesq.2: *Não é bem isso.*
> Pesq.1: *Posso tentar explicar? (a) e (b) são nomes para uma mesma coisa, (f) é uma aplicação, eu estou fazendo uma modificação, então o mesmo movimento que (f) faz em (a) ele faz em (b) como a=b então f(a)=f(b), pois eu fiz a mesma coisa e manteve-se a igualdade entre outros objetos a partir daqueles que já eram iguais.*
> Pesq.2: *Agora, na quinta propriedade* (k = f(b) e b = c) → k = f(c) *eu estou trocando o (b) por um (c) que é igual a ele, então o (k) também pode ter o nome de (f(c)). Ou seja, se (k) é uma transformação de algo (f(b)), se eu trocar esse algo (b) por outra coisa que seja igual a ele (c), a transformação se mantém igual a (k). Na sexta propriedade (*a = b → (P(a) ↔ P(b)), caso P(a) *representa uma frase, uma afirmação sobre algo. Podemos pensar que P(x) afirme, por exemplo – x é bonita. Se y é igual a x então vale que y também é bonita e se y é bonita valerá igualmente que x é bonita.*

Entendemos que a clareza sobre a relação de igualdade possibilita uma melhor compreensão e maior desenvolvimento das habilidades que compõem o pensamento algébrico. Por esse motivo refletir sobre as diferentes maneiras de representar um mesmo objeto pode servir como uma ferramenta para a criação das estratégias de resolução de problemas envolvendo a álgebra. Ou seja, quando o(a) aluno(a) é capaz de entender que uma mesma "coisa" possa ser descrita/representada de formas diferentes, ele(a) seguramente poderá escolher ou interpretar qual é a representação que melhor pode auxiliá-lo(a) em cada situação proposta, e com isso atribuir *significado* ao sinal de =.

À medida que os assuntos foram sendo discutidos, assim como a igualdade, percebemos que algumas das ideias das operações não estavam claras para o grupo, por mais que ensinar as quatro operações fundamentais fizesse parte do cotidiano das professoras em sala de aula. Assim, abrimos um espaço de debate sobre o tema, para que o grupo pudesse refletir com mais profundidade.

Para a adição existem três principais ideias associadas: **juntar**, **acrescentar** e **restaurar**. Vejamos exemplos de situações-problema para cada uma dessas ideias:

juntar – Maria comprou R$100,00 de um certo produto e R$45,00 de um outro produto. Quanto ela gastou?;

acrescentar – Maria tinha 100 figurinhas e ganhou mais 50 de sua irmã. Com quantas figurinhas ela ficou?; e

restaurar – Maria vende brinquedos, hoje ela vendeu 150, mas ainda restam 65 brinquedos. Quantos brinquedos ela tinha para vender?

Na subtração temos também três possibilidades de interpretação: **tirar**, **comparar** e **completar**. Seguem exemplos:

tirar – João comprou 130 figurinhas, mas 23 foram repetidas. Quantas figurinhas diferentes ele possui?;

comparar – João tem 20 anos e seu pai 55 anos. Quantos anos a mais o pai de João tem do que ele?; e

completar – João está lendo uma revista de 120 páginas. Ele já leu 25 páginas. Quantas páginas ainda faltam para finalizar a leitura?

Na multiplicação são possíveis quatro interpretações: **soma de parcelas iguais**, **disposição retangular**, **ideia combinatória e proporcionalidade**. Vamos aos exemplos:

soma de parcelas iguais – Quantas ovos há em 3 dúzias de ovos?;

disposição retangular – Em uma sala há 10 fileiras com 7 cadeiras em cada fileira. Quantas pessoas podem sentar nessa sala?;

ideia combinatória – Maria, Ana, João e José foram para uma festa juntos. Quantos pares podem ser formados para uma dança entre essas pessoas?; e

proporcionalidade – Para fazer 3 bolos, José utiliza 6 latas de leite condensado e 9 colheres de chocolate. Quanto de cada ingrediente ele precisa para fazer 6 bolos?

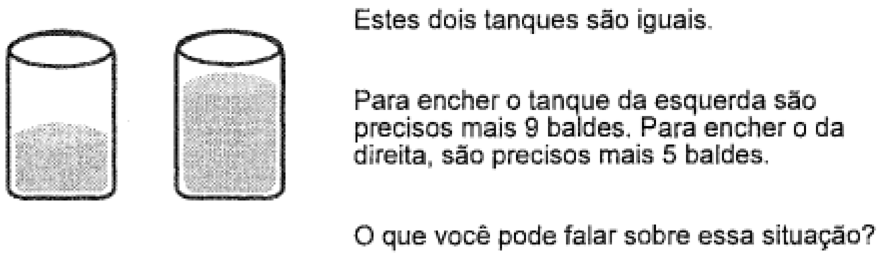
Para a divisão existem duas ideias associadas: **Repartir em partes iguais** e **medir o dividendo tomando o divisor como unidade de medida (quanto cabe**). Exemplos:

repartir em partes iguais – Em uma escola estudam 210 alunos em 7 salas de aula, cada uma com a mesma quantidade de alunos(as). Quantos alunos(as) compõem cada sala de aula?;

medir – Quantos copos de 200 ml cabem em uma garrafa de 2 l?

A partir das discussões das ideias expostas anteriormente, percebemos que as professoras reconheceram as problematizações, mas que ainda não haviam estabelecido relações diretas com as operações envolvidas. Muitas dessas situações aparentemente eram utilizadas em suas salas de aula sem que houvesse a intenção de explorar as ideias das operações de forma direcionada. Desta forma, trouxemos ao grupo uma reflexão sobre a relevância dos(as) professor(as) direcionarem as atividades a seus(suas) alunos(as) de forma proposital, para que sejam expostos(as) às diferentes situações do uso das operações e, com isso, se tornarem capazes de aumentar a habilidade de solucionar diferentes problemas matemáticos. Entender as ideias relacionadas às operações favorece o desenvolvimento, pelo(a) aluno(a), de uma maior facilidade em produzir *significados* às situações-problema enunciadas. Com isso ele(a) terá mais segurança na produção de suas *justificações*. Podemos verificar que muitas dessas ideias fazem parte do dia a dia das pessoas, assim, aproximar a realidade dos alunos com os temas debatidos em sala de aula é uma boa estratégia para explorar e entender os conhecimentos que os(a) estudantes possuem sobre os temas estudados.

Ao longo das discussões anteriores, abordamos temas importantes da matemática a ser explorada nos anos iniciais, entretanto ainda bastante localizados nas ideias aritméticas, envolvendo as propriedades e as relações das operações. Nosso objetivo era aprofundar as concepções das professoras sobre o que seja a habilidade de pensar algebricamente, explorando os *conhecimentos* que elas tinham sobre estes temas que antecedem a álgebra, do ponto de vista de conteúdo escolar, e como elas os abordavam com seus(suas) alunos(as). Visamos desmistificar a ideia de que pensamento algébrico se mobiliza somente na resolução de equações, como trazido inicialmente pelo grupo. Para avançar nesta questão trouxemos à discussão um exemplo prático de uma atividade mobilizadora do desenvolvimento do pensamento algébrico, constante do livro de Lins e Gimenez . Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI, aplicada com aluno(a)s do 7°ano. Com esta atividade pudemos colocar o MCS em ação, de forma a explicitar seus componentes e etapas, na busca de evidenciá-los clara e conscientemente. No processo partimos das ideias das operações aritméticas, para identificar eventuais generalizações com o uso de ferramentas algébricas. Vejamos o enunciado do problema: *Estes dois tanques são iguais. Para encher o tanque da esquerda são precisos mais 9 baldes. Para encher o da direita, são precisos mais 5 baldes. O que você pode falar sobre essa situação?* (Conforme imagem abaixo).



5.Figura 5 - Atividade apresentada Lins, R. C. & Giménez, J. (1997), p.125

Segue o relato de como se deu a discussão:

Profa.1: *Que eles têm quantidade de água diferente.*
Profa.2: *Que é uma questão de proporção?*
Pesq.2: *Diga o que você acredita, aquilo que você pode afirmar.*
Profa.2: *É que eu não tenho certeza.*

Profa.1: *Que um balde tem mais água do que o outro e por isso tem quantidade diferente para poder enchê-los.*
Pesq.2: *O que vocês acham que seus alunos poderiam dizer sobre isso?*
Profa.1: *Eu acho que meus alunos iriam responder isso.*
Profa.2: *Eu também acho que não sairia muito dessa ideia.*
Profa.1: *Eles poderiam questionar essas quantidades olhando a imagem, e questionar se seriam muitos baldes 5 ou 9 para encher o tanque.*
Pesq.1: *Como que garantimos essas afirmações?*
Profa.1: *Observando, visualizando.*
Profa.2: *Por aquilo que a imagem mostra e também por aquilo que está sendo pedido.*
Pesq.2: *Por que o que está sendo proposto garante isso?*
Profa.2: *Pelo fato de que diz que precisa de mais balde em um do que no outro tanque, mesmo que não tivesse a imagem nós imaginaríamos.*
Profa.1: *Os meus alunos não, eles precisam olhar.*
Profa.2: *Você acha isso?*
Profa.1: *Se não tivessem os baldes eles não fariam essa relação.*

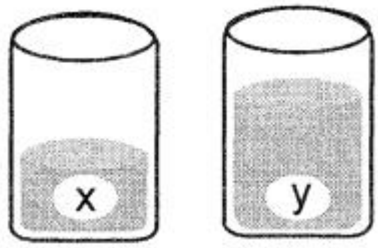
Observemos que, neste primeiro momento, as professoras produziram suas *enunciações* expressando o que elas acreditavam ser *verdade* a partir do enunciado da situação. Na continuidade da atividade, mostramos a elas duas das *justificações* apresentadas no livro sobre a afirmação feita por um aluno de que “no [tanque] da direita há mais água do que no da esquerda”.

J1A—“Podemos *ver*, no desenho.”
J1B—“Porque falta mais para encher o tanque da esquerda (9 baldes) do que para encher o da direita (apenas 5 baldes).”

6.*Figura 6 - Atividade apresentada Lins, R. C. & Giménez, J. (1997), p.125*

Pesq.1: *O que podemos dizer sobre o conhecimento dos alunos nas respostas anteriores?*
Profa.1: *Que eles conseguem distinguir visualmente as diferenças.*
Profa.2: *Que eles tenham uma noção de proporção, porque conseguem entender que do todo falta um pouco e do outro todo falta mais um pouco. Acho que dá para entender que eles possuem essa compreensão, mas a Profa.1 tem razão, acho que só com o texto eles não teriam conseguido.*
Profa.1: *No desenho reforçam a questão da igualdade. Eles não são iguais.*
Pesq.2: *E um tem mais do que o outro.*
Pesq.1: *O que mais podemos dizer sobre os tanques?*
Profa.2: *Como eu falei em proporção, talvez dê para eu dividir, se faltam 5 aqui, faltam 9 aqui. Completo seriam quantos baldes ao todo? Não sei, talvez pensar no todo e nem só nas partes.*

Cabe destacar que muitas das respostas e ideias que surgiram nesse momento, foram similares às ideias apresentadas pelos autores ao fazerem essa mesma atividade com estudantes. Atividades como essas, em que os(as) alunos(as) são expostos a situações-problema sem uma solução imediata, os(as) estimula a desenvolverem suas capacidades de investigação, criando conclusões próprias sobre o problema em discussão. Dando sequência apresentamos novas *justificações* dos alunos e, como sugerido por Lins e Gimenez, passamos a dar nomes às quantidades de água dos recipientes: (b) para a quantidade de água que cada balde cheio contém e (X) e (Y) para as quantidades de água de cada tanque.



7.*Figura 7 - Atividade apresentada Lins, R. C. & Giménez, J. (1997), p.125*

Pesq.1: *O que podemos dizer, agora que temos as letras b para os baldes e as letras* (x) e (y) *para as quantidades de água de cada tanque?*
Profa.2: *Que* (y) *tem uma quantidade maior do que* (x)*.*
Profa.1: *Podemos usar símbolos matemáticos, maior, menor. Agora o b eu não sei onde poderia colocar.*
Profa.2: $(b = y + x)$.
Profa.2: *Mas esquece o que eu falei, pois se colocarmos o* (x) *dentro do* (y) *eu estou achando que vai passar. Então* (b) *não pode ser igual a* $(x + y)$
Profa.1: *Mas nós podemos usar* $(x + 9 = b)$*?.*
Profa.2: *Acho que sim, ou então* $(y + 5 = b)$.
Pesq.2: *Mas b é a quantidade do balde e não do tanque.*
Profa.2: *Se a gente tivesse nome para o tanque ficaria mais fácil*.
Profa.1: *Eu acho que eu sei, podemos fazer* $(x + 9b) = (y + 5b)$

Observamos na última resposta que a Profa.1, de posse das informações do enunciado, construiu equação. Esse *conhecimento*, estabeleceu no grupo uma sensação de satisfação pelo resultado encontrado. Além de se mostrar satisfeita com sua conclusão, pudemos observar que ela se mostrou mais segura com a utilização correta da relação da igualdade para modelar algebricamente a situação.

Seguindo com as discussões, apresentamos algumas respostas (*crenças-afirmações*) constantes do texto, algumas com suas *justificações*.

C-A1 —"X < Y"
C-A2 —"X + 2b < Y"

8.Figura 8 - Atividade apresentada Lins, R. C. & Giménez, J. (1997), p.126

C-A3 —"X + 4b = Y"
J3 —"Se juntarmos 4 baldes a X, ficarão faltando 5 baldes do lado esquerdo, que é o mesmo que falta do lado direito."
C-A4 —"Y - 4b = X"
J4 —"Se retirarmos 4 baldes de Y, ficarão faltando 9 baldes do lado direito, que é o mesmo que falta do lado esquerdo."

*9.*Figura 9 - Atividade apresentada Lins, R. C. & Giménez, J. (1997), p.127

Pesq.1: *O que vocês acham de* $(x + 4b = y)$*?.*
Profa.2: *Eu gostei porque aí você chega exatamente na mesma quantidade do Y, fica igualado, e o mesmo vale retirando*.
Pesq.1: *Podemos notar que no J4 os alunos utilizam a língua escrita para fazer a justificação, não somente a linguagem simbólica.*
Pesq.2: *É bom que no começo eles falem em português as justificações, digamos que mais para frente a frase matemática esteja familiarizada a ponto de aparecer de forma natural. Por isso é importante fazer essa discussão em língua materna neste início pois, vocês vejam, nós discutimos essa relação da igualdade – é o mesmo que tem do lado esquerdo e do lado direito – duas maneiras de falarmos da mesma coisa, no caso a quantidade de água. Ou seja, a gente vai garantindo que esse símbolo de igualdade tenha para a criança o significado que é importante que ela acredite que tenha. Assim o conhecimento dela vai coincidindo com o conhecimento científico".*
Pesq.1: *Qual é o objeto de estudo nessa atividade?*
Profa.2: *Para mim o objeto são as comparações entre as quantidades*.
Profa.1: *Os objetos poderiam ser as letras?*
Pesq.1: *É importante lembrar de como as letras surgiram nessa atividade, elas foram colocadas para viabilizar as criações de novos significados. Nós tínhamos dois tanques sem nome, o que a gente conseguia afirmar naquele momento é que um tanque é maior do que o outro, escrevendo, fazendo comparações, então as letras foram auxiliares na produção de novas ideias, elas não se tornaram o objeto da investigação.*

Como podemos perceber para uma das professoras a letra possui o papel principal da atividade. Ela chega a verbalizar que o *objeto* de estudo da atividade são as letras. Na situação dos dois tanques criamos *justificações* compatíveis com o *núcleo* da situação proposta, ou seja, os dados iniciais fornecidos no enunciado, que não requerem *justificações* ou questionamentos. Os caminhos que essa exploração pode tomar em sala de aula são incertos, mas o(a) professor(a), atento(a), deve perceber que os elementos matemáticos, em especial do pensamento algébrico, podem ser aprofundados durante o desenvolvimento desta atividade.

Faz parte do pensamento algébrico o estabelecimento de relações entre os elementos identificados na situação, como foi feito por uma das professoras anteriormente. Os símbolos auxiliares para facilitar a representação das *crenças-afirmações* no caso em foco foram letras, por se tratar de alunos(as) de 7° ano. No entanto acreditamos que a linguagem utilizada nesta atividade possa ser adaptada à realidade e ao grau de maturidade de cada aluno(a), sem que a mesma perca a sua relevância. Seguimos questionando as professoras do grupo para a construção de novas ideias e para avançarmos nas discussões sobre a situação em estudo.

> Pesq.1: *Quais justificações poderiam ser dadas para a crença-afirmação*$(x - y = 4b)$*?*
> Profa.2: *Acho que eu não sei como comprovar isso*.
> Profa.1: *Pensando na quantidade de água nos baldes: o* (x) *eu preciso de 9 baldes para completar e o* (y) *eu preciso de 5 baldes para completar. Fazendo* $(9 - 5)$ *dá 4.*
> Pesq.2: *Por que essa conta que você justifica a crença-afirmação?*
> Profa.1: *Não sei por que dá certo, foi a forma que eu pensei para chegar no 4.*
> Profa.2: *Se eu tirar* (x) *de* (y) *vai dar 4 baldes*.
> Pesq.2: *Sobre essa afirmação da Profa.2 eu não tenho como verificar, pois eu não sei a quantidade* (y)*, eu não sei o que é a quantidade* (x)*, então concretamente, dentro do mesmo campo semântico, eu não consigo fazer essa operação.*
> Profa.2: *Não é porque o tanque da direita tem 4 baldes a mais do que o tanque da esquerda?*
> Pesq.2: *Eu não sei, por quê?*
> Profa.1: *Se eu colocar 4 baldes no* (x) *eu vou ter a mesma quantidade do que* (y)*, ai eles serão iguais, certo?*
> Pesq.2: *Certo,* $(x + 4b = y)$*, se subtrairmos* (x) *dos dois lados daria o que procuramos, mas como justificar isso?*
> Pesq.1: *Colocamos isso aqui para discutirmos que nem todas as crenças-afirmações estão dentro do mesmo campo semântico. Como dito pelo Rômulo, existem regras que nos permitem operar sem que haja a criação de um novo campo semântico, que é um espaço onde as regras, se existem, precisam ser respeitadas. Por mais que a gente consiga imaginar esses espaços vazios – aqui faltam 9, aqui faltam 5 e eu fazendo as diferenças entre os vazios me daria os 4 que eu procuro. Isso tem significado dentro do campo semântico inicial?*

Durante a discussão desta atividade conseguimos entender melhor os elementos que compõem a teoria do Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Como dito por Lins (LINS, 2012): “O MCS não é uma teoria para ser estudada, é uma teorização para ser usada". No capítulo seguinte exploramos as atividades que as professoras desenvolveram com seus(suas) estudantes para esta mesma situação, utilizando símbolos de linguagem adequados a seus(suas) alunos(as) de EFI e tendo o MCS como base do desenvolvimento da atividade.

A exploração dessas atividades e as conversas dentro do grupo participativo, nos possibilitaram diversas vezes discutir sobre o reconhecimento de padrões. Entendemos que o reconhecimento de padrões é parte importante para estimular nos estudantes o desenvolvimento da habilidade de pensar algebricamente. O que nos propomos neste trabalho foi identificar e entender como o grupo classifica a importância e a especificidade do reconhecimento de padrões no pensamento algébrico, e quais são os *conhecimentos* que as professoras possuem sobre esse assunto. Vejamos alguns dos diálogos ocorridos no grupo.

> Pesq.1: *Qual é a importância de explorar atividades que envolvam o reconhecimento de padrões no ensino de matemática?*
> Profa.2: *Eu tenho para mim que o pensamento lógico é muito importante para você entender melhor a matemática, e eu entendo que a compreensão de sequência e até tentar prever a próxima sequência, envolve esse pensamento lógico. Eu acho que é importante para eles pois a gente sente que na escola, no ensino básico, falta um pouco dessa ideia de pensamento lógico matemático.*
> Profa.1: *Uma das atividades que eu fiz com as crianças, no desafio da matemática que houve na minha escola, foi a de pedir para que as crianças organizassem um cômodo da casa deles. Eu acho que quando a criança começa a fazer a organização de forma concreta, ao passar para a atividade de sequência fica mais fácil ela perceber qual seria a continuação. Ela vai organizar o pensamento fazendo as relações, relação de cor, de forma, e ela vai construindo isso ao longo do tempo, para chegar depois em uma atividade abstrata. Eu acho interessante e muito importante.*
> Pesq.1: *Quais contribuições que as atividades com reconhecimento de padrões têm para o desenvolvimento do pensamento algébrico?*
> Profa.2: *Eu acho que faz a criança pensar além do óbvio, ela ter que descobrir sozinha. Eu acho que tudo isso auxilia no pensamento algébrico porque ela vai ter de explorar ali o próprio conhecimento para chegar em algo que ela não sabe. Então eu acho que ajuda sim, pois se o pensamento algébrico é essa forma de abstrair e você chegar a uma resposta em relação ao que você não sabe, chegar a um dado que você não tem, partindo de outros que você tem, eu acho que essas atividades auxiliam nesse pensamento mais abstrato.*
> Profa.1: *Eu acho que faz você pensar além, vai além daquilo que você está olhando. Contribui para o pensar mais na frente. A criança pensa muito baseada naquilo que ela está vendo, no imediato, quando ela trabalha e consegue ver essas regularidades, eu acho que, com o decorrer dos anos, ela vai conseguir pensar o depois. Vejo que isso é muito importante.*

Pesq.2: *Estava implícito no que vocês falaram que uma das questões básicas do pensamento algébrico é a capacidade de generalização, descobrir propriedades e suas relações. Isso seguramente tem a ver sim com o desenvolvimento do raciocínio lógico, mas a lógica usada na matemática não é só isso. Essa coisa de descobrir padrões é ver que não é só algo particular, tem algo que se generaliza, que está ligado com a capacidade de abstração que a Profa.2 falou.*

Entendemos que os(as) alunos(as) precisam ser convidados(as) a descobrir padrões em situações propostas nas aulas de matemática. Tal convite pode: estimular sua percepção para o reconhecimento da presença ou ausência de padrões; favorecer a criação de relações entre os elementos em estudos; e buscar generalizações de situações propostas. Com isso eles(as) desenvolvem características do pensamento algébrico.

Em resumo, nas discussões feitas: abordamos as ideias envolvendo as operações aritméticas e suas propriedades; exploramos atividades que exigiram das professoras a argumentação e a elaboração de justificativas na construção de seus próprios *conhecimentos*; conversamos sobre a importância da relação de igualdade matemática; e, ao longo de todos os encontros, introduzimos o reconhecimento de padrões como potencializador do desenvolvimento do pensamento algébrico no AIEF. Os caminhos não foram pré determinados e as discussões seguiram os rumos ditados pela curiosidade que as professoras demonstraram sobre como favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus(suas) alunos(as). Mas também nos ficou claro que, além disso, houve um grande interesse das professoras em refletir sobre a natureza do pensamento algébrico e ampliar as suas concepções sobre o tema.

A seguir passamos a abordar o papel que a linguagem tem na comunicação algébrica e sua importância no ensino/aprendizado de álgebra no EFI.

4.2 Comunicação algébrica

Inicialmente o grupo participativo não tinha como foco discutir o papel da linguagem algébrica no ensino/aprendizagem de Álgebra. Entretanto tal tema se tornou necessário diante da importância atribuída pelas professoras à linguagem simbólica no ensino de Álgebra. Vejamos o que escreveu uma delas:

Profa.6: *Pensamento algébrico seria sobre as diversas letras que possuímos no alfabeto, dentre especificamente x e y.*

Observa-se ser muito comum a associação da álgebra ao uso de letras, sem a compreensão de que a linguagem algébrica possui sintaxe própria, na qual as “letras” são signos, cada um dos quais, na dependência do contexto utilizado, podem apresentar diferentes conotações semânticas. Por exemplo, é frequente que não seja percebido nitidamente em uma “frase” escrita em linguagem algébrica qual símbolo representa o sujeito e qual o predicado – o que dificulta o equacionamento em linguagem formal de um problema formulado em língua materna. Isso aparece claramente na seguinte resposta de uma professora:

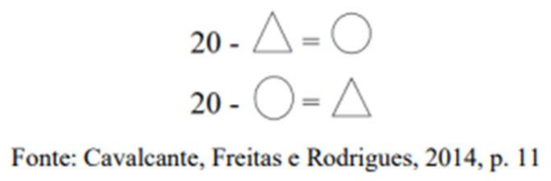
> Profa.10: *Minha maior dificuldade está no ensino de resolução de problemas envolvendo interpretação e passagem da linguagem escrita para a linguagem matemática.*

Para a maioria das professoras do grupo, os(as) alunos(as) ainda possuem dificuldades de alfabetização e de entendimento de textos escritos, o que praticamente inviabiliza que possam expressar-se por meio de linguagem algébrica. Diante disso, provocamos um debate no grupo sobre o papel da linguagem no desenvolvimento de pensamento algébrico.

A linguagem serve para a comunicação de ideias. No AIEF não é necessário que os(as) estudantes se apropriem inteiramente da linguagem formal matemática, porém a introdução gradativa de linguagem algébrica, adequada à faixa etária, mas não infantilizada, pode favorecer a produção de *significados* da linguagem formal a ser adotada nos anos futuros de sua formação, tornando-se assim mais familiar e facilmente compreendida.

> [...] Como toda nova linguagem escrita, essa também demanda uma nova alfabetização, exige o tempo do amadurecimento e da introjeção dos símbolos com seus significados e das “regras gramaticais” para a sua correta utilização. Linguagens servem para a comunicação de ideias, e isso vale também para a linguagem formal. Portanto a utilização desta pelos estudantes não pode ser esvaziada dos significados que ela comunica – o que ocorre com muita frequência, infelizmente! O domínio com compreensão da linguagem algébrica, por parte dos alunos, dependerá das vivências com seu uso que, gradativamente, lhes possibilitem incorporá-la aos seus repertórios pessoais. (DRUCK, Iole de Freitas, 2018)

Em muitos momentos a utilização da letra “x”, como representação de um elemento desconhecido, foi citada pelas professoras como sendo a presença marcante de linguagem algébrica em um enunciado. Dessa maneira, entendemos ser necessário o aprofundamento sobre o uso de letras como variáveis, constantes e incógnitas na linguagem algébrica. Mais do que saber os nomes, é importante vivenciar seus usos em diferentes situações. Para introduzir essas questões discutimos a seguinte atividade no grupo, por meio do enunciado: “É possível encontrar o valor ou valores do círculo e do triângulo? ”.



10.Figura 10 - Atividade proposta em Canavarro, 2007, p.27

Esta atividade proporciona uma discussão sobre o tratamento de valores desconhecidos como variáveis, e não apenas como incógnitas, única ideia trazida pelas professoras para o significado do elemento desconhecido. Veja como se deu essa discussão dentro do grupo.

> Pesq.1: *O que vocês acharam dessa atividade? É possível encontrar o valor ou valores do círculo e do triângulo?*
> Profa.1: *Eu tenho dúvidas sobre o que seriam as variáveis independentes, as dependentes.*
> Pesq.2: *Vamos ver uma coisa, nesta atividade como vocês classificariam o triângulo e o círculo? Como variáveis, como constantes ou como incógnita?*
> Prof.2: *Eu acho que entraria como variáveis e como incógnita, eu posso estar errada, porque nós não sabemos exatamente qual o valor e uma depende da outra.*
> Pesq.2: *São variáveis porque podem ter mais de um valor, e são incógnitas pelos valores desconhecidos. E o que significa o sinal de igual ali?*
> Profa.2: *Eu entendo que tem a ver com dependência, porque se você tirar um pouco de um vai ter que compensar do outro.*
> Pesq.2: *Então essa igualdade quer dizer que dá o mesmo número. Uma vez substituído o triângulo por um número, o círculo fica condicionado a ser somente aquele número fixado, e vice-versa.*

Como na discussão anterior notamos que as professoras tiveram dificuldade em compreender os significados que podem ser atribuídos às letras em uma expressão algébrica, apresentamos um texto desenvolvido pela orientadora desta dissertação, onde são expostas algumas das possibilidades das utilizações de letras em diferentes contextos matemáticos.

> [...]1 - (x + y = y + x) para expressar a validade da propriedade comutativa da adição para quaisquer pares de números somados, onde se subentende que x e y são números genéricos; 2 - (2n + 1) como a expressão geral de um número ímpar, onde n é imaginado como um número natural arbitrário; 3 - ($A = b \times h/2$) para comunicar o mesmo que a sentença – "a medida da área de qualquer triângulo pode sempre ser obtida como o resultado do cálculo da metade do produto da medida do comprimento de sua base pelo comprimento de sua altura". [...]Hoje elas são utilizadas em expressões matemáticas para representar "elementos genéricos" de alguma coleção (como nos dois primeiros exemplos do segundo parágrafo deste texto), e nesse caso são chamadas de variáveis. No caso do terceiro exemplo, é distinto o significado do uso das letras A, b e h, pois estão a serviço de expressar uma relação funcional entre grandezas. No entanto também são chamadas de variáveis, mas ganham qualificativos: são ditas independentes enquanto que A é referida como dependente (por seu valor numérico depender dos valores escolhidos para as demais). Já, ao comparecerem em equações, algumas letras são chamadas de incógnitas, mas outras podem ser chamadas de constantes ou parâmetros. Assim, por exemplo, as mesmas letras têm conotações linguísticas distintas, por um lado na expressão genérica de uma equação do segundo grau (ax 2 + bx + c = 0), e, por outro lado, na conhecida fórmula de Bháskara (x = $-b$ ± $\sqrt{b}$ 2−4ac/ 2a) utilizada para determinar suas

> raízes. Na primeira, o x é chamado de incógnita, enquanto que na segunda, ele é empregado como variável dependente. Já as letras a, b e c são chamadas de constantes genéricas (ou parâmetros) na equação do 2º grau, mas são usadas como variáveis independentes na fórmula de Bháskara. Ou seja, em expressões distintas de um mesmo contexto matemático, as mesmas letras podem assumir papéis linguísticos distintos. (DRUCK, Iole de Freitas, 2018)

O que queremos aqui é mostrar a importância da produção de significados das utilizações de letras na interpretação adequada da linguagem algébrica. Entendemos que os(as) alunos(as) precisam ser expostos(as) a diversas situações para que, com a prática e com os devidos amadurecimentos, sejam capazes de encontrar diferentes ideias e leituras que possam ser representadas por letras em uma expressão (ou frase) matemática. Mas não vamos nos limitar a pensar que a linguagem é somente a escrita. Existem outras formas importantes de comunicação matemática a serem exploradas, como por exemplo a linguagem oral, expressa em língua materna. Além disso, o(a) professor(a), conectado(a) com os seus(suas) alunos(as), consegue identificar também através da linguagem facial e corporal se seus(suas) estudantes desenvolveram *conhecimento* ou se ficaram com dúvidas que possam ser mais debatidas, possibilitando trocas de novas *enunciações* que favoreçam o desenvolvimento de *conhecimento*s sobre o conteúdo discutido.

Acreditamos que a linguagem tem a comunicação como seu principal foco. Neste sentido, vemos o papel do(a) professor(a) como fundamental na organização e exploração do debate entre os(as) estudantes de forma a garantir que todos entendam as ideias expressas pelos(a) colegas. Assim questionamos as professoras do grupo sobre como elas veem o papel do(a) professor(a) dentro da sala de aula, por meio de três perguntas.

Para a primeira questão – Na sua opinião qual é o papel do professor? – obtivemos as seguintes respostas:

> Profa.1: *Meu papel, primeiramente, é fazer a criança acreditar que ela pode aprender e ser diferente do que ela é hoje. Saber como ela pode trilhar esse caminho só é possível com um diálogo entre um ouvinte paciente e persistente (professor) e um orador que confia e tem características individuais (aluno).*
> Profa.2: *Hoje em dia, o papel do professor é o de mediador na sala de aula. O mediador provoca o aluno a agir como um pesquisador e questionador, trazendo situações e aproveitando a curiosidade inata no educando para enriquecer a aprendizagem do mesmo. O professor orienta a criança no caminho do conhecimento, e torna o processo de ensino-aprendizagem, algo divertido e interessante, para que o indivíduo se desenvolva em todas as dimensões.*

Na resposta à primeira pergunta, as professoras chamam atenção para a importância de ouvir de forma paciente seus(suas) alunos(as) e mediar discussões dentro da sala de aula. É interessante que uma das professoras também destaca a relevância de provocar estudantes a tornarem-se questionadores, a atuarem como pesquisadores(as), críticos(as) e curiosos(as) em sua própria aprendizagem de matemática.

Para a segunda questão – Como você observa e avalia o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos em sua sala de aula? – obtivemos as seguintes respostas:

> Profa.1: *Observo no dia a dia da sala de aula. Infelizmente, a atividade escrita ainda é a prova de que o aluno sabe. Faço atividades escritas de acordo com as necessidades dos alunos. Assim comprovo seu avanço.*
> Profa.2: *Avalio observando as respostas escritas e proferidas pelos diálogos em sala, e também através das estratégias escolhidas para responder ou resolver atividades lúdicas de matemática. Tenho percebido que avaliar através do diálogo com base em situações problema do cotidiano deles, geralmente surte um efeito mais favorável para a aprendizagem, e para a minha compreensão do nível de desenvolvimento de cada um. Busco também não dar as respostas, e espero que eles reflitam e manifestem suas ideias, podendo assim avaliar com mais assertividade.*

O que chama atenção é que as professoras, mesmo apontando que observam o dia da sala de aula, na verificação da aprendizagem, levam em conta principalmente as respostas escritas de seus(suas) estudantes. Tal prática nos parece ser frequentemente adotada nas escolas. Entretanto destacamos que a Profa.2 aponta que diálogos baseados em situações cotidianas favorecem mais a aprendizagem, apesar de não apontar outros instrumentos de avaliação.

Para a terceira questão – Como seus alunos agem e interagem em sala de aula? – obtivemos as seguintes respostas:

> Profa.1: *Na minha prática de sala de aula, trabalho com atividades coletivas e participativas que os alunos interagem entre si e aprendem. Não só eles, como eu.*
> Profa.2: *Algumas vezes tentam compreender e descobrir as respostas sozinhos, em outras, quando eu chamo ao diálogo, conversam entre si, trocando estratégias e ideias. Quando percebem uma estratégia diferente que um colega descobriu, geralmente ponderam e avaliam se aquele modo de resolver é adequado.*

O diálogo em sala de aula favorece o desenvolvimento da comunicação e consequentemente o desenvolvimento da linguagem algébrica. Nesses relatos e nas atividades feitas dentro do grupo percebemos que as professoras, em algumas situações, não associavam a comunicação em sala de aula como sendo ferramenta poderosa para se desenvolver as atividades de matemática. Assim, tratamos de discutir a conexão entre pensamento e linguagem algébricos, para o estabelecimento de uma comunicação algébrica eficaz. Neste sentido, questionamos as professoras: A matemática utiliza apenas linguagem simbólica? Para você, qual é o papel da linguagem na matemática?

Profa.1*: A linguagem simbólica da Matemática é importante para que o aluno consiga elaborar novas hipóteses para soluções de problemas. A linguagem matemática colabora para a construção de argumentações sobre um dado fato; exemplo: contestar fake news.*

Profa.2: *Acredito que a matemática não seja somente simbólica. Ela tem seus próprios símbolos que são relacionados e compreendidos a partir de regras bem determinadas. A linguagem (como a usada em situações-problema) tem o papel de expressar melhor essas regras e facilitar a compreensão de determinados conceitos matemáticos*.

Para as professoras fica evidente que a linguagem possui como principal função a comunicação. Elas afirmam que a comunicação ajuda o(a) aluno(a) a expressar suas ideias e serem mais críticos sobre suas realidades.

Para Luis Radford (RADFORD, 2009), "a atribuição de significado para os objetos matemáticos deveria ser tão importante quanto o domínio da linguagem algébrica necessária para representá-los". Discutimos no grupo sobre essa afirmação do autor, sobre a importância da linguagem algébrica como utensílio de tradução do pensamento e dos significados que são atribuídos aos objetos que estão no centro da discussão. Na concepção do grupo só é possível perceber e materializar o que o(a) aluno(a) de fato entendeu quando ele(a) expressar sua ideia por meio de linguagem. Só assim a comunicação da sua ideia pode ser efetiva. Uma criança, por exemplo, quando está aprendendo a falar pode classificar todos os animais de uma forma, não fazendo distinção por palavras entre um gato e um cachorro, podendo por vezes chamá-los através de seus sons característicos. Mas, com o passar do tempo e com o amadurecimento de seu entendimento, a mesma criança passa a dar nomes diferentes aos animais. Trazemos aqui essa ilustração, por acreditarmos que a alfabetização algébrica acontece da mesma maneira. Os estudantes precisam ver nas letras ou nos símbolos a possibilidade de transportarem suas ideias para outras pessoas, fazendo-se entender.

> Pensamento e linguagem se constituem simultaneamente, isto é, o pensamento não é "anterior" ou "anunciado" pela linguagem, mas consuma-se nela. "O pensamento 'puro' reduz-se a um certo vazio da consciência [...]. A nova intenção significativa só se conhece a si mesma recobrindo-se de significações já disponíveis, resultado de atos de expressão anteriores" (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 249).

A seguir pedimos para que as professoras apontassem exemplos de como a linguagem e a matemática podem se relacionar para favorecer o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa em suas salas de aulas. Vejamos as respostas:

Profa.1*: Orientações do professor para os alunos: fazer fila em ordem crescente/decrescente; pedir a data do dia anterior e do dia da aula;*

organização das atividades do dia- rotina (alunos organizam - registro coletivo); jogos: trilhas (uso de fichas com sinais de – ou +, contagem de casas. Levantamento de regras, etc.); discutir as falas que os alunos irão responder nas situações problemas e fazer comentários dos alunos após a realização da tarefa.

Profa.2: *Criar situações-problema bem explicitadas, de forma que o aluno compreenda o que se pede; aproveitar a comunicação escrita dos alunos para discernir o que têm se aprendido ou não, ou níveis de dificuldade. Ou até mesmo, usando diversos tipos de gêneros textuais que tragam desafios matemáticos, explicitem conceitos ou solicitem determinadas resoluções de problemas.*

A comunicação algébrica quando bem compreendida facilita a aprendizagem da álgebra. Esse trabalho quando iniciado nos AIEF pode favorecer e facilitar os(as) estudantes a atribuírem sentido aos estudos mais formais da álgebra nos AFEF.

Neste capítulo percorremos: algumas das possíveis interpretações para os símbolos algébricos; destacamos a importância que entendemos ter a comunicação algébrica para expressar as ideias do pensamento algébrico; apresentamos as principais concepções do grupo sobre a linguagem e como as professores atribuem a sua importância no ensino de matemática; e por fim coletamos algumas das sugestões que as professores acreditam favorecer a aprendizagem de seus estudantes por meio da comunicação em sala de aula. No próximo capítulo essas ideias serão exploradas na prática, através da discussão das atividades que foram desenvolvidas pelas professoras. Algumas delas foram aplicadas em sala de aula e aprimoradas pelo grupo.

Capítulo 5. Atividades desenvolvidas e aplicadas pelas professoras do grupo participativo

O capítulo 5 é destinado a apresentar as propostas que foram desenvolvidas pelas professoras no decorrer dos encontros do grupo participativo. As atividades expostas contam com nossa leitura e análise dos significados observados, com a finalidade de identificar as concepções (*conhecimentos)* das professoras sobre o pensamento e a linguagem algébrica. O objetivo desta seção é descrever o processo de reflexão que houve para a elaboração, aplicação e análise das atividades desenvolvidas pelas professoras em sua sala de aula.

5.1 Atividades desenvolvidas pelas professoras para potencializar o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos

Inicialmente solicitamos às professoras que fizessem a leitura dos objetos de conhecimentos e as habilidades algébricas constantes da BNCC, relativas à álgebra no EFI (BNCC/2018, pp. 280 a 297). O objetivo foi que tomassem conhecimento do que é oficialmente indicado para o ensino/aprendizado de álgebra, fazer uma análise conjunta do documento e que confrontassem o que é lá indicado com suas práticas em sala de aula.

Iniciamos a discussão com o trecho que fala especificamente sobre o que é esperado no bloco de álgebra.

> [...] é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. (BNCC/2018, pp. 280)

Como discutido anteriormente neste trabalho, percebemos a importância da relação da igualdade como parte fundamental do desenvolvimento do pensamento algébrico e do aprofundamento do estudo do bloco de álgebra. Chamamos atenção também para a regularidade e o reconhecimento de padrões serem postos em destaques. Essa concepção também está alinhada com os autores que selecionamos para nosso referencial teórico e que serviram de estudo no grupo.

Fizemos a leitura dos objetos de conhecimentos com as respectivas habilidades, por ano escolar. As professoras relataram nunca terem lido antes o documento relativo à Álgebra. Transcrevemos a seguir objetos de conhecimento e habilidades, por ano escolar, prescritos na BNCC.

1º ano
Objetos de conhecimento
Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.
Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)
Habilidades
(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

2º ano
Objetos de conhecimento
Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.
Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência
Habilidades
(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

3º ano
Objetos de conhecimento
Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas
Relação de igualdade
Habilidades
(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

4º ano
Objetos de conhecimento
Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.
Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.
Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão.
Propriedades da igualdade.

Habilidades
(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

5º ano
Objetos de conhecimento
Propriedades da igualdade e noção de equivalência Relação de igualdade.
Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.
Habilidades
(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Durante a leitura com as professoras, percebemos a ausência de familiaridade com diversos termos que aparecem no documento, como por exemplo sequência recursivas e noção de equivalência. Assim, abrimos espaço para que tirassem suas dúvidas sobre esses conceitos a fim de conseguirem elaborar propostas de atividades para suas salas de aula. Voltaremos a esse assunto quando abordarmos tais conceitos presentes nas atividades elaboradas por elas. Outro ponto que nos chamou a atenção foi que, em diversos momentos, as professoras relataram que já exploravam tais habilidades com seus(suas) alunos(as), mesmo desconhecendo ser esperado oficialmente que fossem desenvolvidas, por entenderem sua importância nos anos iniciais.

Passamos a discutir as atividades desenvolvidas pelas professoras participantes do grupo. As propostas foram elaboradas com a finalidade de potencializar o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus(suas) alunos(as), explorando uma ou mais habilidades propostas nos documentos da BNCC/2018.

A primeira atividade, exposta abaixo, foi desenvolvida pela Profa.2, por ela considerada pertinente ao objeto de conhecimento "sequências recursivas" e à habilidade EF02MA10 – “Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos”. Apresentamos também uma parte da discussão feita no grupo.

Atividade:

2x3 = 6 e 6x3=9

Faça como no exemplo e descubra o número faltante:

3x1=3 e 3x___=12

4x3=12 e ___x3=39

11.Figura 11 - Atividade proposta pela Profa.2

Profa.2*: Eu comecei a pesquisa, pois nunca havia pensado de forma tão clara sobre atividades que desenvolvam o pensamento algébrico. Tentei olhar em livros e pensar no meu dia a dia, como eu poderia explicar em atividades de sala de aula e também para entender melhor como passar essa atividade aqui no grupo. Nesta atividade tem o exemplo* $(2x3 = 6)$ *2 e* $(6x3 = 18)$ *, eu cometi um erro ali na digitação, a ideia era fazer com que a criança observasse* $(3x1 = 3)$ *e* $(3x\ \_ = 12)$*, para completar o espaço faltante. A criança teria que pensar 3 vezes quantos para chegar no 12. Na parte de baixo, o esperado é que reproduzisse a mesma ideia para:* $(4x3 = 12)$ *e* $(\_3 = 39)$*.*

Pesq.2: *O interessante foi que você não usou nem* (x) *nem* (y)*, você deixou um espaço vazio para eles preencherem.*

Profa.2: *Eu tentei achar uma habilidade que se encaixasse com essa atividade e escolhi a que fala sobre a sequência de números naturais por elementos ausentes.*

Profa.1*: Deixa-me ver se eu entendi,* $(3x1 = 3)$ *e* $(3x\_ = 12)$*, eu que já sei a resposta posso dizer que é 4. Mas olhando para a de baixo eu posso dizer que não tem um padrão?*

Profa.2*: Eu quis que eles descobrissem que o primeiro resultado é o primeiro número da próxima conta. Eu digitei errado e eu queria ter deixado 36 na segunda conta”.*

Profa.1: *“ahhh, agora eu entendi. Quando eu vi o 39 eu pensei que a ideia fosse discutir a ausência de padrão.*

Pesq.2: *Olha que interessante pois eu havia visto outro padrão.* $(3x1 = 3)$ *e* $(y3x4 = 12)$*. Neste caso o 4 é o sucessor do resultado anterior. Então pensei que sua proposta fosse essa,* $(4x3 = 12)$ *e o sucessor do 12 é o 13 e* $(13x3 = 39)$*. Não sei como seus alunos pensaram.*

Profa.1*: Esse erro é muito interessante, eu achei que tivesse sido de forma intencional.*

Pesq.1: *Legal, eu não tinha pensado nessa ideia do sucessor. Talvez mais um exemplo pudesse ajudar a não ficar com dúvidas sobre o padrão.*

A discussão sobre a ambiguidade não intencional da Profa.2 na redação de sua atividade evidenciou, em primeiro lugar, a incompreensão sobre o conceito de "sequência recursiva" por parte das professoras. Além disso, mostrou a necessidade de uma revisão cuidadosa do enunciado formulado, no sentido de identificar se a ideia de regularidade imaginada fica claramente definida e mesmo se não há erros de digitação. Ouvir as diferentes interpretações de leitura do enunciado proposto, que surgiram no debate sobre a atividade, também oportunizou uma reflexão sobre a relevância de escutar os(as) estudantes diante de possíveis "erros de resposta". A partir disso as professoras tomaram consciência da importância da formulação de enunciados claros nos problemas propostos para seus(suas) alunos(a) resolverem, trazendo para a discussão as diferentes interpretações que eles podem dar a uma mesma atividade.

O exemplo anteriormente trazido pela professora não se enquadra como sequência recursiva. Uma sequência desta natureza se caracteriza pelo fato de cada termo, a partir do(s) primeiro(s), é determinado por uma lei de formação que envolve o(s) termo(s) anterior(es). Na situação exposta, o(a) aluno(a) precisa apenas saber as tabuadas para encontrar o elemento desconhecido, não necessitando de uma relação com as equações anteriores (mesmo que a professora tivesse conseguido redigir corretamente a ideia que pensou).

Passamos agora à primeira atividade desenvolvida pela Profa. 1, juntamente com a transcrição de parte das nossas interações.

escreva o que falta em cada operação.

_+ 9=13

9+4= _

13- _ = 9

13- _ = 4

12.Figura 12 - Atividade proposta pela Profa.1

Profa.1: *Minha proposta nessa atividade era trabalhar com eles a ideia das operações. Queria que eles pensassem quanto que falta no 9 para chegar no 13. Ao fazer isso eles chegariam no 4. E sem pensar muito na parte de baixo já conseguiriam responder caso observassem que se tratava da mesma conta,*

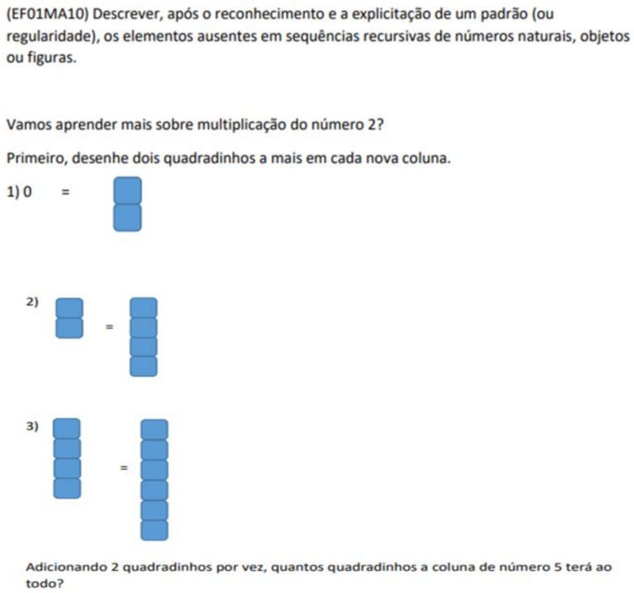
mas em lugar trocado. Eu entendi que se encaixa com a habilidade de sequência recursiva.
Pesq.2: *Então acho que é um exercício interessante, mas entendo que essa ideia da sequência recursiva não está presente.*
Profa.1: *Nem se eu utilizo o quadro numérico?*
Pesq.2: *O que seria um quadro numérico?*
Profa.1: *É um quadro de 0 a 100 escrito em algarismos e com o nome do número abaixo. Pensei que eles poderiam voltar nesse quadro para fazer a operação.*
Pesq.2: *Eu acho que é uma atividade importante, mas deve corresponder a uma outra habilidade.*
Profa.1: *A minha dúvida é: essa atividade não possui a ideia de reconhecimento de padrão?*
Pesq.1: *Eu tenho dúvidas se essa atividade poderia se encaixar na ideia de reconhecimento de padrão. Eu enxergo como reconhecimento de padrão quando tenho uma sequência e que consigo nela explorar alguma coisa. Quando eu tenho um número e esse número somado a outro resulta em algo, isso para mim não é um padrão pois eu não preciso entender a sequência que veio antes para resolver. Para mim o padrão acontece quando, com uma ideia inicial, eu consigo prever coisas que possam estar lá na frente. Talvez esse exercício fique no campo da aritmética.*
Pesq.2: *Eu acho que ela entra como uma atividade relacionada ao pensamento algébrico, pois esse número desconhecido pode ser interpretado como uma incógnita, mas talvez não tenha essa habilidade de reconhecimento de padrão. A álgebra envolve as operações com seu sinal de igualdade e também as generalizações dessas coisas.*
Profa.1: *Eu entendi e concordo. Quando eu elaborei eu estava pensando na questão de precisar do termo anterior, mas me dei conta que eu não precisaria para responder as contas na sequência, bastava saber o resultado.*

A discussão desta atividade ocorreu no mesmo encontro no qual a Profa.2 havia apresentado sua primeira proposta de atividade (figura 11). Imediatamente após essa discussão ela pediu para que sua atividade fosse novamente debatida sugerindo uma nova formulação. Vejamos o que ela disse:

Profa.2*: Eu gostaria de voltar para a minha atividade, pois eu me dei conta que montei errado a primeira linha, pois eu deveria ter colocado um espaço no lugar do 3 vezes outro espaço igual a 12. Porque o aluno iria pegar a resposta do primeiro que deu 3 e entenderia que ali é 3 vezes alguma coisa que precisa dar 12. Ou seja, ele aproveitaria o resultado do primeiro para achar o segundo e com isso teríamos a ideia de recursão.*

Destacamos aqui o fato da professora reeditar sua questão com base na discussão de um outro problema. Um dos objetivos do grupo era o de proporcionar às professoras uma abertura para a renovação de suas práticas de ensino. Ao observarmos a alteração de seus problemas de forma voluntária, constatamos que estávamos caminhando nesta direção e como consequência auxiliando-as a tornarem-se mais seguras e críticas nas futuras elaborações de suas propostas didáticas, evitando a criação de obstáculos didáticos a seus(suas) alunos(as) no processo de ensino/aprendizagem.

Abaixo segue a segunda atividade desenvolvida pela Profa.2, com o propósito de abordar o desenvolvimento da habilidade EF01MA10.

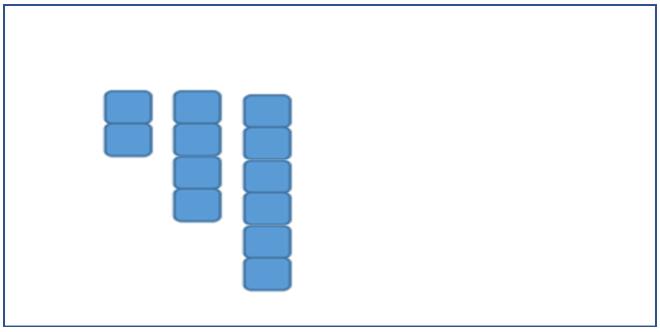


13.Figura 13 - Atividade proposta pela Profa.2

Profa.2: *Eu quis fazer uma ideia da representação da multiplicação por 2. Então para que os alunos entendessem, assim como a tabuada começa no 0, eu também comecei no zero. Então começo do zero e eles precisam desenhar 2 quadrinhos a mais eles fariam a primeira imagem. Então do 2 eles teriam que desenhar mais 2 e chegariam em 4 quadradinhos. Eu queria que eles conseguissem chegar na coluna de número 5 fazendo esse mesmo padrão. Eles teriam que prever, pois eu fiz até a coluna 3.*
Pesq.2: *Diante do que eu falei e nós já conversamos sobre o sinal da igualdade você acha que isso aí está claro? O que você queria está claro na representação que você fez?*
Profa.1: 0 não é igual a 2.
Profa.2: *Mas eu quis dizer que como a tabuada começa no 0, e como eles tem que desenhar 2 a cada nova coluna, eu quis dizer que do 0 ele pularia para o 2.*
Pesq.2: *Então o problema foi usar o sinal de igualdade, pois como a Profa.1 falou o 0 não é igual a 2. Você poderia ter colocado uma setinha, você poderia ter botado uma vírgula, poderia ter colocado por escrito. Desta forma como você*

utilizou o sinal de igual, como igual está mal-empregado, a médio prazo a ideia da igualdade pode ficar esvaziada de significado para os alunos.
Profa.2: *Faz sentido, você tem razão!*
Profa.1: *Sei que não foi intencional, mas talvez colocar algumas atividades assim pode ajudar a capturar se os alunos entenderam as ideias. Será que os alunos iriam levantar essa questão que o 0 não é igual ao 2? Pode ser que seja interessante também*.
Pesq.2: *Outro ponto que eu gostaria de chamar a atenção, é que somente na primeira etapa aparece um número, o 0. Será que não deveria ter o vazio ali? Porque não é o número 0, mas sim a ausência de quadradinhos.*
Profa.2: *Foi isso que eu quis dizer (risos).*
Pesq.2: *Me dei conta agora de mais um fato que precisa ser revisto na formulação do problema. Você colocou no enunciado "coluna", mas no seu exemplo você está acrescentado "linhas". Além disso, o fato de o enunciado falar que é multiplicação do 2 pode fazer com a investigação dos alunos seja menos explorada.*

Sugerimos diversas melhorias à redação desta atividade feita pela Profa.2, e também diferentes abordagens possíveis de serem adotadas em sala de aula. Como por exemplo, pensamos em maneiras de adaptá-la para alunos do 1º ano do AIEF, utilizando as figuras em coluna, conforme a imagem a seguir:



14.Figura 14 - Disposição proposta no grupo

No grupo, discutimos a importância de manter um espaço vazio no início da imagem, para indicar o início da sequência, com as imagens sendo postas lado a lado. Segundo as professoras esta configuração poderia facilitar a compreensão dos(as) alunos(as) mais jovens, e com isso fazer com que fique mais perceptível o reconhecimento do padrão nesta nova disposição. Sugerimos que as professoras testassem diferentes formulações com seus(suas) estudantes e escolhessem a que melhor atendesse às necessidades e expectativas de aprendizagem.

Vamos apresentar e discutir uma outra atividade proposta pela Profa.1, a partir dos diálogos ocorridos no grupo.

b) Descubra a sequência:
2, 4, , 8, , , 14….

55, , 65, 70, . 80…

100, , 90, , , 75, 70….

15.Figura 15 - Atividade proposta pela Profa.1

Profa.1: *Eu queria que eles observassem a sequência e com ela conseguissem completar os espaços em branco. Tentei fazer variações e também incluir uma decrescente*.
Pesq.2: *Eu sempre acho conveniente que no início fique claro qual é o padrão. Deixar o segundo termo para descobrir deixa mais difícil o problema. Acho que após o terceiro termo fica mais fácil. Você pode tentar fazer e me dizer se o que eu acho faz sentido.*
Profa.1: *Eu fiz com os alunos e na primeira questão eles já tiveram dificuldade*. Porque para eles é *só uma sequência numérica normal*. *Eles olham e veem que não tem o 3, mas para eles depois do 4 sempre vai vir o 5.*
Pesq.2: *Nesse seu primeiro exemplo, eu teria colocado o número 10 também e só depois deixado dois espaços vazios, dando um pouco mais de tempo para eles perceberem a regularidade.*
Pesq.1: *Ir dificultando ao longo da sequência*
Profa.1: *A mesma coisa com os outros, né?*
Pesq.2: *Acho que sim.*

Nos chamou a atenção, na atividade sugerida pela Profa.1, a preocupação em também explorar sequências numéricas decrescentes. Em um primeiro momento pode parecer mais difícil para alunos(as) que estão iniciando o trabalho com esse tipo de atividade, mas talvez este tipo de situação possibilite uma estratégia motivadora para a introdução do conjunto dos números Inteiros ($\mathbb{Z}$) nos anos finais do Ensino Fundamental.

Acreditamos ser importante a exploração do reconhecimento de padrão em diferentes representações, seja por meio de figuras ou de números. A próxima atividade explora o reconhecimento de padrões por meio de imagens.

(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.

Atividade:

Complete a sequência com os desenhos faltantes de acordo com o padrão abaixo:

16.Figura 16 - Atividade proposta pela Profa.2

Profa.2: *Na verdade essa sequência eu me inspirei em um livro que eles estão usando em sala de aula. Eu fiz com os alunos e acho que ficou um pouco confusa, eu acho que para eles também ficou confuso. Mas com esses valores desconhecidos, as incógnitas, eu acho que entra também na ideia da álgebra.*
Pesq.2: *Entra sim, é uma sequência repetitiva, o primeiro bloco e o último bloco são iguais. Não! Na verdade, tem um bloco que é circunferência, triângulo e estrela. Daria para colocar mais dois riquinhos para formar quatro blocos inteiros. Você achou difícil fazer isso com os alunos?*
Profa.2: *Com a turma que eu estou agora ficou complicado eles chegarem ao resultado dessa sequência. Eu tentei uma sequência mais simples e precisei de duas aulas para explicar.*
Profa.1: *Essa atividade poderia ser aplicada no 1º ano e ela está no 4º ano".*
Profa.2: *Eu percebo que eles têm muita dificuldade em conteúdo que são até mesmo do 2º ano.*
Pesq.2: *Às* vezes *quando você faz um desafio eles se motivam mais e acabam andando mais rápido. Mas precisa ser motivador para eles.*

Não nos pareceu simples para as professoras o desafio de formular questões totalmente compreensíveis aos(às) estudantes. Notamos isso na discussão imediatamente posterior a este problema que envolve o reconhecimento de padrões. Foi discutido no grupo sobre a necessidade de mobilizar a atenção e o interesse dos(as) alunos(as) e deixar o mais claro possível o padrão da sequência, para que uma atividade possa ser bem executada. Após a familiaridade dos(as) estudantes com esse tipo de problemas as propostas podem ficar mais complexas, com padrões que exigem mais cuidado.

Segue mais uma atividade desenvolvida, onde também é possível identificar problemas na redação do enunciado:

2- Quantas diferenças você consegue criar
usando os algarismos 2, 3, 6 e 8?
exemplos: 6-3= 3

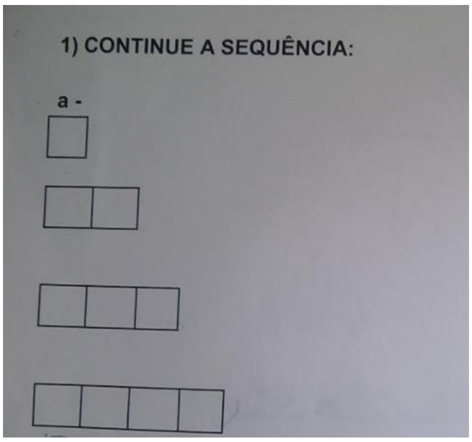
23-6 = 17

17.Figura 17 - Atividade proposta pela Profa.1

Profa.1: *Eu pensei nesse exemplo com base em um livro que eu pesquisei. Eu pensei na importância dessa atividade para explorar a igualdade. Eles precisam usar esses números para montar. Eu também gosto desse problema por utilizar a palavra "diferenças" que retorna naquelas ideias das operações que discutimos. São palavrinhas que precisam assimilar o significado na matemática.*
Pesq.2: *Mas nesse exemplo de baixo eu não entendi, pois o 1 e o 7 não estão na lista de algarismos. Ou seja, eu posso conseguir dessa maneira uma infinidade de diferenças. Talvez esse exemplo traga mais confusão. Eu acho que daria para ficar somente nos números do problema (2,3,6 e 8). Ou até mesmo questionar quais números eu consigo fazendo as diferenças desses números, por exemplo: eu consigo o 0, basta tirar um do outro; eu consigo o 1 fazendo o 3 -2; consigo o 2 fazendo 8 - 6; o 3 fazendo 6 - 3; o 4 com 6 - 2; 5 fazendo 8 - 3; o 6 fazendo 8 - 2.*
Pesq.1: *Profa.2 o que você achou?*
Profa.2: *Inicialmente eu não tinha visto problema, mas depois da discussão realmente ficou confuso o fato de usar números fora da lista do problema. Acho que para nossas crianças ficaria difícil de entender.*

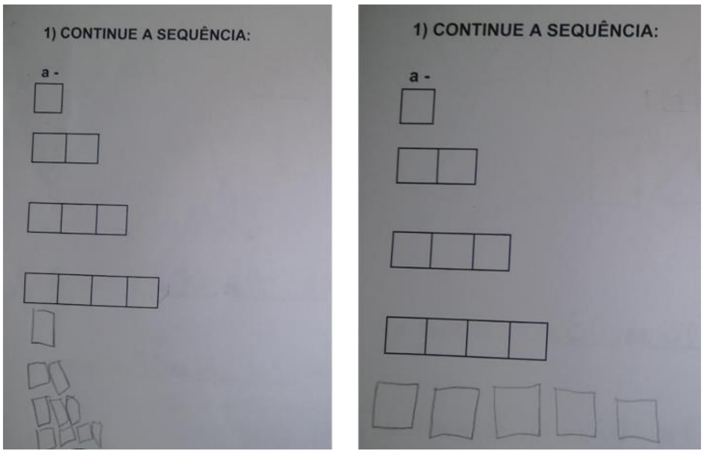
Um outro ponto que não ficou claro nesse mesmo exemplo, foi a possibilidade de juntar algarismos para formar outro número, gerando também um problema de entendimento. A leitura conjunta com as professoras sobre as atividades que elas desenvolveram, permitiu que houvesse uma reflexão sobre o que se espera desenvolver no(a) estudante diante de uma atividade proposta. Destacamos como sendo fundamental, no processo de criação de atividades, a leitura atenciosa dos enunciados e resolvê-los antes de aplicar em sala de aula.

A próxima atividade da Profa.1 também foi aplicada na sala de aula com seus(suas) alunos(as). Sua inspiração surgiu das discussões anteriores. Vejamos como ela apresentou a proposta e também a resposta de alguns(umas) deles(as).



18.Figura 18 - Atividade proposta pela Profa.1

Profa.1: *A ideia seria fazer com que as crianças continuassem a sequência. O que eu percebi foram dois tipos de respostas: na primeira as crianças copiavam como estava na figura e no segundo caso eles continuavam partindo da última sequência.*

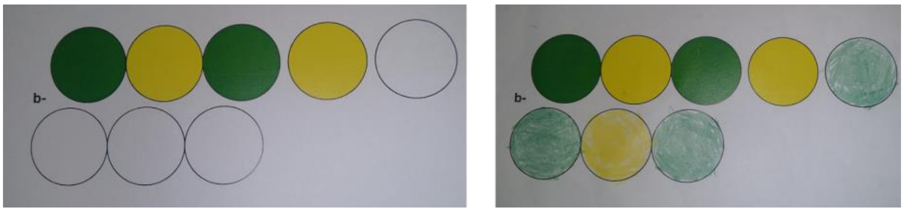


19.*Figura 19 - Resposta de alunos na atividade proposta pela Profa.1*

Profa.1: *Esse aluno da segunda imagem, eu considero que ele seja um aluno que entende as coisas. Mas nessa atividade ele não entendia o que era necessário fazer. Foi um exercício difícil, ficar somente perguntando e não dar a resposta. A primeira resposta que ele me deu foi que era (0), eu questionei onde o zero iria vir e ele me disse que viria antes de tudo, então eu perguntei o que iria vir por último aí ele disse (5). Depois disso eu o deixei fazer a representação dele para o (5).*
Pesq.2: *Ele se ligou somente na quantidade de quadradinhos.*
Profa.1: *Exatamente, ele não seguiu o padrão da imagem.*
Pesq.2: *Talvez o enunciado tenha sido curto demais.*
Profa.1: *Pode ter sido isso também, mas já tinha trabalhado antes com eles em atividades semelhantes. Eu quis ser simples para ver o que aconteceria, mas talvez ser simples não tenha sido o suficiente. Eu percebo que eles esperam muitos detalhes, eles esperam a gente falar tudo, eu queria desconstruir isso, eu queria que eles falassem para mim.*
Pesq.2: *Eu acho válido testar esse tipo de atividade sim, mas nesse primeiro caso a aluna pensou que fosse para repetir a imagem. Me ocorreu que se você tivesse feito essa atividade em papel quadriculado, talvez em um primeiro momento fosse mais simples deles fazerem o desenho de um retângulo contínuo. Perceba que nessas duas respostas os quadrinhos não ficaram grudados.*

Cabe destacar que a aplicação deste exercício em sala de aula ocorreu após a discussão das primeiras atividades sugeridas pela professora. Percebe-se que o padrão está claro para a professora, e a habilidade na qual se baseou está mais bem direcionada. Chama a atenção também a sinalização da professora que mesmo quando o padrão não tinha ficado claro para os(as) alunos(as) ela evitou dar as respostas sem que eles tivessem tentado resolver. Esse último fato correlaciona-se diretamente com as ideias expressas no MCS, que aponta a importância da escuta atenta e do diálogo não hierarquizado com os(as) estudantes.

O próximo item da mesma atividade também foi aplicado em sala de aula pela mesma professora.



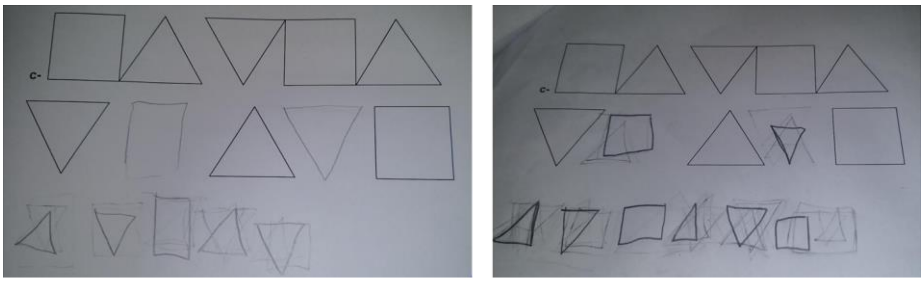
20.*Figura 20 - Resposta de alunos na atividade proposta pela Profa.1*

Profa.1: *Esse é um exemplo de resposta de uma aluna minha que não consegue ir além do número 5. Eu até tinha comentado com a Profa.2 que nesta atividade toda haviam acertado, mas eu fui olhar direito e encontrei esta resposta onde ela repetiu o de cima. É interessante perceber que esta aluna não conseguiu visualizar que a parte de baixo é uma continuação do que estava na parte de cima.*

Pesq.1: *Pode ser que ela tenha entendido que cada uma das linhas se tratava de uma sequência.*

Profa.1: *Ela foi a única aluna que fez dessa forma. Eu percebi nesse exercício que a questão da cor ajudou muito eles a acertarem.*

A professora tentou uma versão semelhante a este problema no exercício seguinte, alterando as formas e não as cores. Vejamos duas respostas de alunos(as).

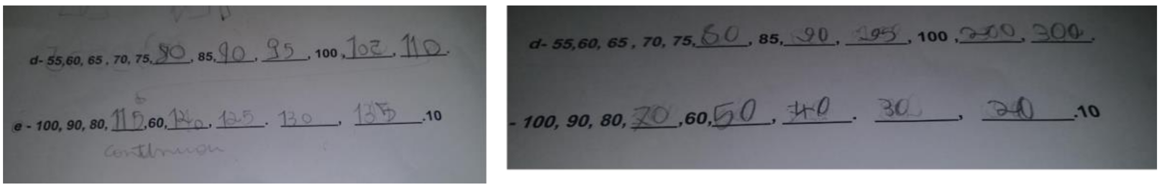


21.Figura 21 - Resposta de alunos na atividade proposta pela Profa.1

Profa.1: *Ao contrário do anterior, neste todos os alunos tiveram muitas dificuldades. Eu acho que é pelo fato de não ter a cor. Acredito que com a cor sairia fácil, pode reparar que eles apagaram muito.*
Pesq.2: *Como você deixou esses 3 elementos grudados eles podem ter pensado que era um único, poderia ter dado um espaço entre cada elemento. Eu mesma estava me confundindo aqui.*
Profa.1: *Eu não entendi. O que poderia ter sido diferente?*
Pesq.2: *Ter separado cada um dos elementos por espaço, para eles não acharem que esses grudados são um grupo.*
Profa.1: *Entendi, não havia pensado que isso poderia dar confusão.*
Pesq.2: *O visual é muito forte. Como você deixou primeiras duas figuras, depois vem 3 figuras, eu poderia imaginar que o terceiro tem 4 figuras juntas. Eu não saberia qual a lógica de continuar isso. Acredito que a sequência não estava muito clara, por esse motivo eles podem não ter conseguido fazer.*
Profa.1: *Eu achei estranho o grau de dificuldade deles.*
Pesq.1: *Você não perguntou o porquê?*
Profa.1: *Eu questionei, mas eles não souberam me dizer o motivo do não entendimento. Mas vocês me falando agora desse problema em grudar os elementos estou me dando conta que pode ter sido isso. Mas no momento que eu estava fazendo eu não me dei conta. Eu vou separar as figuras e tentar refazer com eles.*

Em exercícios de reconhecimento de padrões a disposição das figuras ajuda na identificação dos próximos elementos, assim o cuidado com a formulação clara da sequência é fundamental para garantir o entendimento e execução dos problemas propostos. Chamamos a atenção para esse fato, por entendermos que a última atividade apresentou problemas visuais no reconhecimento do padrão, podendo assim produzir diferentes leituras dos(as) estudantes.

Seguindo com o grupo de atividades proposto e aplicado pela Profa.1, observamos que ela utilizou diferentes maneiras para explorar o reconhecimento de padrões em sequências. Usou cores, formas e na atividade seguinte temos um exemplo da exploração dos números. A seguir as respostas de uma aluna e um aluno e uma parte da discussão feita no grupo.



22.Figura 22 - Resposta de alunos na atividade proposta pela Profa.1

Profa.1: *Esta atividade os alunos fizeram usando o quadro numérico que eles têm na carteira.*

Pesq.1: *Nessa primeira imagem é possível notar que o aluno não percebeu que a sequência de baixo era diferente, ele continuou com a mesma regra que estava na parte de cima*

Profa.1: *Essa aluna teve muita dificuldade em identificar os números, por mais que ela tenha feito na primeira linha corretamente na parte de baixo ela nem olhou os números já foi colocando, só foi seguindo.*

Pesq.2: *No segundo exemplo ele foi bem até o 100, mas depois ele pulou para o 200.*

Profa.1: *O engraçado foi que a ordem descrente ele fez de forma muito rápida, ele fez e nem quis tirar dúvidas.*

Pesq.2: *Acho que seria interessante trocar essas respostas entre eles e deixar eles discutirem sobre as ideias dos seus colegas.*

Profa.1: *Eles ainda têm bastante dificuldade na escrita, então não sei como eles iriam explicar se concordam ou não com a resposta do colega.*

Pesq.2: *Mas pode ser feito por meio de debate com eles, expor algumas ideias e deixar eles comunicarem suas ideias na fala mesmo.*

Profa.1: *Farei isso, vou copiar na lousa as ideias que surgiram e ver o que acontece.*

Pesq.2: *Uma outra dificuldade que me ocorreu, e você pode também tentar fazer na lousa, é deixar a sequência das atividades anteriores na mesma linha, sem que tenha a quebra para a linha de baixo. Acho que isso pode também ter atrapalhado o entendimento dos padrões das figuras.*

No bloco de atividades proposto anteriormente fica evidente a dificuldade das professoras na explicitação do *núcleo* das atividades de reconhecimento de padrão. Como alguns dos termos das sequências foram colocados em linhas diferentes, quebrando o padrão, acreditamos que isso possa ser a causa dos *conhecimentos* não esperados, produzidos por alguns(umas) alunos(as). O impacto positivo das discussões dessas aplicações foi o fato da professora, no momento da sua explicação, ter conseguido identificar pontos problemáticos nos enunciados de suas propostas que pudessem ter levado seus(suas) alunos(as) a ideias diferentes das inicialmente esperadas por ela. Diante disso resolvemos aprofundar a discussão sobre o que seja um *núcleo* de uma atividade e sobre a importância de que ele esteja claro para quem elabora a atividade e para quem irá resolvê-la. Visando alimentar novas discussões, propusemos algumas atividades a serem aplicadas em sala de aula e solicitamos que as professoras buscassem identificar os constructos do MCS durante o desenvolvimento das mesmas com suas turmas.

Segue o enunciado da primeira proposta e a transcrição inicial da discussão, onde buscou-se identificar o *núcleo* do problema.

Sugestão de atividade:

Problema: Tenho 2 baldes, sendo um deles com capacidade de 5 litros e o outro com 7 litros
Utilizando apenas esses 2 baldes como eu consigo obter exatamente 1l, 2l, 3l, 4l, 5l,6l, 7l de água?

Quais conceitos matemáticos podem ser trabalhados com esse problema?

Desafio: Proponha um roteiro de atividade para seus alunos de maneira que vocês possam observar: os conhecimentos, justificativas, núcleos e significados atribuídos por eles

23.Figura 23 - Sugestão de problemas para aplicação em sala de aula

Profa.2: *Quando eu fiz essa atividade com os alunos eu tentei escutá-los para identificar os elementos da teoria na fala deles. Eu observei na fala deles que o núcleo nessa atividade foi aquilo que a maioria percebeu, ou pelo menos a maioria se deu conta, que virou um consenso que não precisava nem justificar, isso eu chamei de núcleo: falaram que um dos baldes tem mais capacidade que o outro; disseram que se fosse possível marcar a quantidade de litros da parte de fora dos baldes ficaria mais fácil. Foram essas coisas que não precisou justificar para fazer sentido para eles.*
Pesq.2: *Você concorda e acrescenta algo, Profa.1, de que esse seja o núcleo da atividade?*
Profa.1: *Eu concordo, mas durante a minha aplicação da atividade eu fiquei com algumas dúvidas sobre como classificar cada um dos elementos. Até conversei com a Profa.2. Eu sei que não é necessário ficar sabendo o nome dos elementos do MCS, mas sei que se eu conseguir identificar pode me facilitar na hora de fazer as atividades. Eu sempre trabalho no concreto, então a primeira coisa que eu pensei foi em qual balde eu iria levar para fazer essa atividade com eles. Eu fico pensando que nós professores estamos muito atrelados aos conceitos e às vezes esquecemos de deixar as crianças falarem, então eu repensei e resolvi fazer, inicialmente, colocando na lousa o problema, deixando eles lerem para somente depois explorar aquilo que estava escrito, juntos.*
Pesq.2: *Eu acho que foi um bom ponto de partida. Mas estou pensando que seria bom que a gente chegasse a algum conhecimento comum do que seria o núcleo dessa atividade.*
Profa.1: *Eu não sei te dizer, pois na forma que fomos fazendo as ideias foram sendo sobrepostas.*
Pesq.2: *Eu estou pensando que o fato de um dos baldes ter mais do que o outro trata-se de um conhecimento que todos mostraram ter. Não necessariamente é o núcleo.*
Profa.1: *Eu pensei que isso seria um núcleo por conta de a imagem deixar claro e não precisar de nenhuma justificação. Eu nem precisei explicar.*
Pesq.2: *Mas daria para explicar, não?*
Profa.1: *Depois que eu fui para o concreto e coloquei sobre a mesa os 2 baldes, ficou bem claro que um era maior do que o outro.*
Pesq.2: *Mas você chegou a questionar o porquê disso?*

Profa.1: *Sim, e eles me falaram que é porque em um cabe mais água do que no outro.*
Pesq.2: *Isso é uma justificação, não?*
Profa.1: *Sim, faz sentido porque é aquilo que eles acreditam que dá veracidade àquilo que eles estão vendo, né?*
Pesq.2: *Isso. Eu vou falar a minha concepção para o núcleo nessa atividade. É aquilo que está no enunciado da atividade, sobre o qual eu não posso duvidar. Que é o caso de que eu tenho dois baldes e um tem capacidade de 5l e outro de 7l, isso é o dado do problema e não precisa justificação porque está dito. O fato de um caber mais porque eu estou vendo é uma justificação, eu poderia pensar que se eu coloco o líquido de um no outro e ainda me sobra seria uma outra justificação possível.*
Profa.1: *Quando eu levei o balde eles quiseram colocar uma fita para demarcar o 5l e o 7l. Vejo agora que eles estavam querendo deixar o núcleo exposto também no concreto.*

Nesta primeira etapa do debate, notamos a dificuldade das professoras em diferenciar elementos que são dados nos problemas daquelas que são as ideias mais óbvias que aparecem a partir dos dados do enunciado. O fato de um balde ter mais capacidade do que o outro é uma *crença-afirmação*. Mesmo que isso pareça de senso comum, cabe solicitar *justificação* para ela. Mas no entendimento delas, nos pareceu que uma *justificação* necessita estar obrigatoriamente relacionada a ideias mais elaboradas, o que não confere com a ideia definida no MCS.

Segue a continuação da discussão com as professoras.

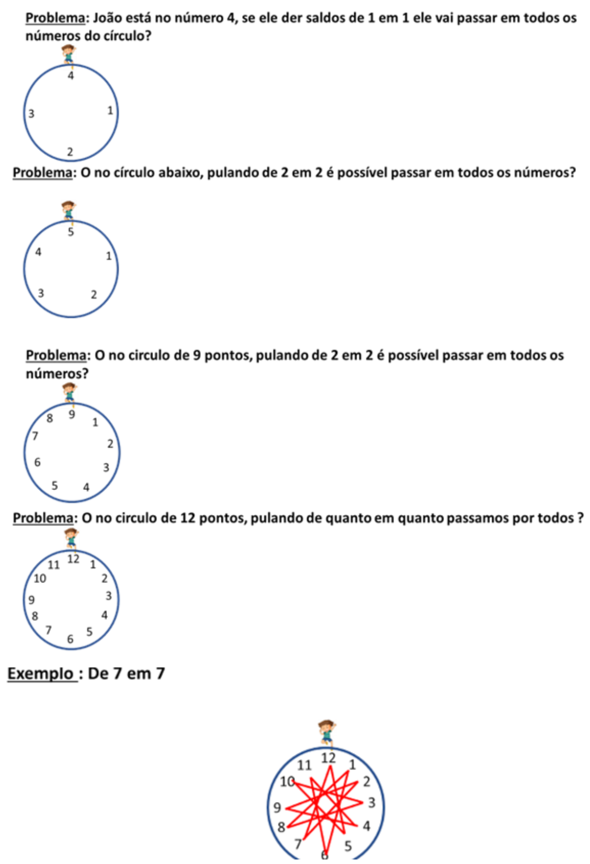
Prof.2: *Eu, quando fiz a atividade, não deixei eles medirem. Eu somente trabalhei com os valores nos baldes e a única coisa que eles poderiam fazer era trocar as quantidades de água de um balde para o outro. Para se descobrir novas quantidades eles queriam marcar, mas eu insisti que eles fizessem sem a necessidade de ficar marcando. Eu perguntava como conseguimos 2l, eles respondiam que era fácil medindo. Mas eu tentei mostrar para eles que a forma que se pedia era não medir por fora.*
Pesq.1: *Vocês resolveram esse problema?*
Prof.2: *Eu confesso que eu fiz junto com eles, eles me ajudaram a achar a solução.*
Pesq.2: *Como você resolveria esse problema?*
Prof.2: *Eu consegui chegar em alguns números. Por exemplo o 4 eu não consegui chegar. Minha única ideia foi pensar em metade"*
Pesq.2: *Mas se você utilizasse a metade você estaria saindo fora do Campo Semântico. Vamos tentar resolver o problema, isso pode nos ajudar a caminhar com o problema. Obter 5 e 7 é fácil, né?*
Prof.2: *Sim, só encher cada balde.*
Pesq.1: *Qual outro é fácil também de fazer?*

Prof.2: *O de 2. Que basta encher o 7 deixar o de 5 vazio, passar a água do de 7 para o de 5 e vamos ficar com 2l no balde que antes tinha 7l. Agora os outros eu não sei.*
Pesq.2: *Você tem alguma ideia para outros valores?*
Prof.2: *Tem que pensar nas quantidades que já temos. Eu poderia encher novamente o de 7. Se eu passar o de 7l naquele que tem 2l e cabe 5l, quando eu passar 3l vão sobrar 4l naquele que tem 7l.*
Prof.1: *Mas eu posso encher novamente o balde?*
Pesq.2: *Sim, você pode.*
Prof.1: *Mas eu não sabia que poderia encher novamente. Na minha cabeça eu tinha que usar uma única vez a quantidade,*
Pesq.2: *Você tem que usar os recipientes. Mas você poderia encher sim. Dessa forma seu núcleo estava muito limitado.*
Prof.2: *Agora eu estou curiosa para chegar nos outros. Eu agora estou com 4 no balde de 5l. Se eu encher o de 7 e completar 1 para o 5, o de 7l vai ficar com 6l.*
Pesq.2: *Isso mesmo.*
Prof.2: *Eu agora jogo fora o de 5l, eu passo de 6l para o 5l e sobra 1l no balde de 7l.*
Pesq.2: *Agora só falta achar 3l.*
Prof.2: *Se eu passar esse 1l para o balde que cabe 5l, eu posso encher o balde 7l novamente e passar os 4l que faltam para o balde que cabe 5 e já tem 1l e vai sobrar 3l no balde que cabe 7l.*
Pesq.2: *Ficou agora mais claro?*
Prof.2: *O que me ajudou a pensar nessa atividade para chegar no núcleo, é que a coisa mais importante é usar a diferença da capacidade entre os baldes, com a ideia de juntar, também a de subtrair.*
Prof.1: *Eu deveria ter entendido a atividade antes de fazer com os alunos. A compreensão que eu tive não incluía a possibilidade de usar mais quantidades de águas. Mas foi bom eu ver que eu, com a mesma explicação, entendi diferente. Eu acho que se tivesse entendido dessa forma meus alunos teriam também conseguido chegar.*

Este problema exige criatividade e atenção. O interessante é possibilitar aos(às) alunos(as) a liberdade de criar suas soluções. O fato da Profa.1 não ter entendido o problema, reforçou a influência que as *enunciações* têm no entendimento do *leitor*. Assim, é importante garantir que o *texto* esteja claramente relacionado ao *núcleo* do problema para que as fronteiras do *campo semântico* envolvido fiquem bem definidas. Discutimos em grupo que o *campo semântico* desta atividade pode ser adaptado a cada ano de escolaridade, deixando mais simples ou mais complexo.

No segundo problema proposto trabalha-se as ideias de divisores e de números primos entre si. Fornecidas algumas circunferências numeradas com números equidistantes entre si, solicita-se a determinação de percursos que passam por todos os números, fazendo “saltos” de mesma amplitude. Seja (n) a quantidade de números sobre a circunferência e *s* a amplitude de cada “salto”. Então, é possível percorrer todos os números sobre a circunferência se e somente se$(\mathrm{mdc}(\mathrm{n}, s) = 1)$. Por exemplo, em uma circunferência com 4 números, “saltando” de 2 em 2 não será possível percorrer todos e $(\mathrm{mdc}(4,2) = 2)$. Por mais que o conceito matemático possa parecer inacessível a alunos(as) dos AIEF, entendemos que as crianças, mesmo nesta fase de escolaridade, possam desenvolver conhecimentos por meio de atividades como essas, seja para reconhecer padrões das figuras formadas, na contagem dos saltos, ou na exploração da divisão e da multiplicação.

Vejamos o enunciado apresentado ao grupo e como se deu a discussão.



24.*Figura 24 - Sugestão de atividade para aplicação em sala de aula*

Prof.1: *Foi bem legal essa atividade. Eu fiz com meus alunos e eles ficaram desenhando nos relógios que eu já havia levado. Eu só achei que eles ficaram na adição, eles contavam de quanto em quanto eles conseguiriam chegar.*

Prof.2: *Os meus também ficaram contando, mas quando chegava em alguma figura que eles já conheciam, rapidamente paravam e concluíam que não iria passar por todos*

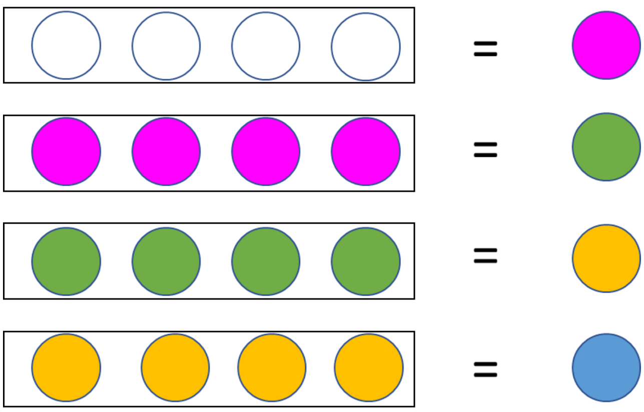
Pesq.2: *Mesmo que eles não tenham conseguido justificar quais números passariam e qual não, vocês entendem que fez sentido fazer com eles?*

Prof.1: *Para mim fez. Quando eu fiz o relógio com 12 números, eu perguntei: se eu der 13 pulos eu vou parar onde? Eles contaram e chegaram no número 1, então eu disse que é por isso que 13h é 1h da tarde.*

Inicialmente a atividade aplicada pelas professoras ficou no campo das operações. Mas outras possibilidades podem ser exploradas com esse problema. **Números pares e ímpares**: em uma circunferência numerada de doze números, "saltando" de dois em dois, a partir do 12, iríamos percorrer somente os números pares, podendo ser concluído que a soma de números pares sempre será um número par. **Figuras geométricas**: em uma circunferência numerada de doze números, "saltando" de quatro em quatro passamos nos números (4,8,12), formando um triângulo, "saltando" de três em três passamos por (3,6,9,12), formando um quadrilátero etc. **Aritmética modular**: a exemplo da atividade feita pela Profa.1 é possível pensar em números que "retrocedem" na circunferência numerada, por exemplo dar quatorze "saltos" de um em um, em uma circunferência de doze números irá fazer pararmos no número 2, que é o resto da divisão de 14 por 12 (em linguagem formal $14 \doteqdot 2\ mod(12)$). **Divisão**: Quando o número da circunferência numerada tem resto zero na divisão pelo tamanho do "salto", não será possível passar por todos os números. Incluímos aqui apenas algumas das possibilidades de explorar o pensamento algébrico podendo ser adequado a cada turma em sala de aula.

Com o objetivo de explorar sistemas de numeração de outras bases, propusemos a resolução de uma sequência de problemas constantes de um texto elaborado para uma oficina do CAEM (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do IME/USP) – "A cidade do Nunca 4", (DRUCK, I. F. 1995). Nesta sequência de atividade apresenta-se uma cidade fictícia que possui quatro tipos de moedas para as quais vale a seguinte regra de troca: 4 moedas brancas valem 1 moeda rosa, 4 moedas rosas valem 1 moeda verde, 4 moedas verdes valem 1 moeda amarela, 4 moedas amarelas valem 1 moeda azul.

A tabela a seguir mostra as regras de trocas como apresentadas às professoras:



25.Figura 25 - Sugestão de atividade para aplicação em sala de aula

Após a apresentação da tabela apresentamos a primeira situação-problema constante do texto mencionado, solicitando às professoras que pensassem sobre as perguntas da atividade:

I – Numa loja de móveis da cidade há a seguinte tabela de preços:

armário	–	2 brancas, 1 amarela e 2 verdes
banco	–	3 rosas e 3 brancas
cama	–	2 verdes, 2 brancas e 2 rosas
sofá	–	1 branca, 1 rosa, 1 verde e 1 amarela

Pergunta-se: (Justifique suas respostas)

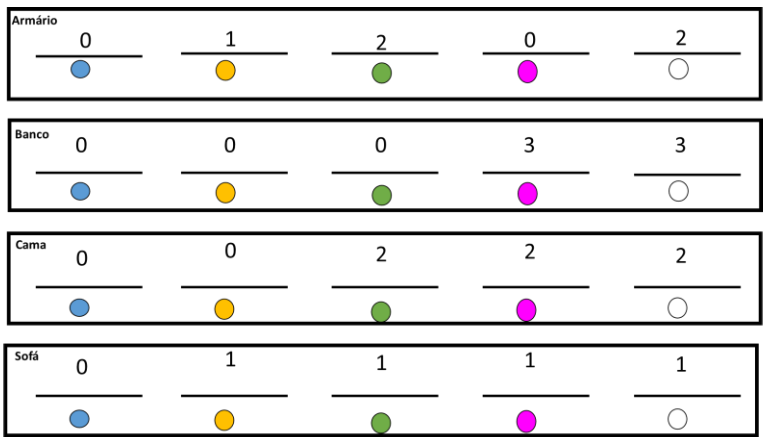
1) Qual o móvel mais caro e qual o mais barato?
   Escreva o nome dos móveis em ordem crescente de preço.
2) Se um comprador tiver somente moedas amarelas, quantas necessitará para comprar cada móvel e quanto receberá de troco em cada um deles?

(DRUCK, I. F., 1995)

Incluímos aqui a transcrição da conversa, no grupo, sobre o problema.

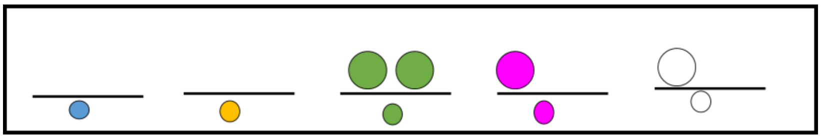
Pesq.1: *Vocês chegaram a pensar sobre essa atividade?*
Prof.2: *Eu peguei um papel e comecei a tentar resolver. Cheguei à conclusão de que a moeda azul é a mais valiosa e que a branca vale menos. Eu coloquei um valor em cada moeda, mas isso fez com que eu me atrapalhasse no resultado.*
Pesq.2: *A confusão pode ter ocorrido porque você tentou atribuir valores na base 10, e isso impediu você de pensar na base 4.*
Prof.1: *Eu fiquei na dúvida de como posicionar os números e os valores. É possível mostrar como ficaria a escrita dos valores dos móveis?*

A Partir da última pergunta elaboramos a seguinte representação para os preços dos móveis.



26.Figura 26 - Sugestão de atividade para aplicação em sala

Pesq.2: *É importante colocar o zero na hora de posicionar, pois precisamos informar que não existem moedas naquela posição. Se não indicarmos podemos induzir erros de leitura.*
Prof.1: *Dessa forma a cama iria custar duzentos e vinte e dois?*
Pesq.2: *Não, duzentos e vinte e dois é na base 10. Neste caso ela vale os números (222).*
Prof.1: *Eu estou achando superinteressante, porque meus alunos quando eu dou atividades com a centena e não falo da dezena eles ficam confusos. Depois que estudamos bastante eles começam a falar da posição do zero.*
Pesq.2: *Isso é que chamamos de valor posicional.*
Prof.2: *Eu estou achando muito interessante pois é igual à base decimal, mas com o valor de troca não sendo o 10, mas sim o 4.*
Pesq.2: *Quando eu for falar eu não preciso me preocupar com a ordem, mas na hora de escrever numericamente eu preciso posicionar os números corretamente.*
Pesq.1: *Se eu receber 37 moedas brancas, como eu poderia representar na base dessa Cidade do Nunca 4?*



27.*Figura 27 - Sugestão de atividade para aplicação em sala de aula*

Discutimos em grupo, que o número trinta e sete (37), também poderia ser escrito nas potências de quarto (4): $\mathbf{2x4^2 + 1x4^1 + 1x4^0 = 32 + 4 + 1.}$

Pesq.1: *Parece estranho a gente ver as potências de 4 né?*
Prof.1: *Eu ainda estou tentando entender sobre o sistema que nós usamos.*
Pesq.1: *Quanto é cem?*
Prof.1: *É 10 x 10.*
Pesq.1: *E 10 x 10 não é o mesmo que* $1x10^2$*?*
Prof.1: *É mesmo, então 10 é igual a* $1x10^1 + 0x10^0$ *, e eu posso dizer então que o 100 é igual* $1x10^2 + 0x10^1 + 0x10^0$*, é isso?*
Pesq.2: *Isso mesmo. A base 10 nos dá um conforto porque quando falamos trinta, isso nos lembra do número 3, que são os 3 vezes 10. Os nomes que damos para os números estão baseados na escrita decimal e isso favorece a compreensão da leitura do número, mas por outro lado atrapalha no entendimento do sistema de troca. Por conta disso é importante estudar outras bases, isso pode ajudar os alunos na real compreensão da representação decimal dos números.*

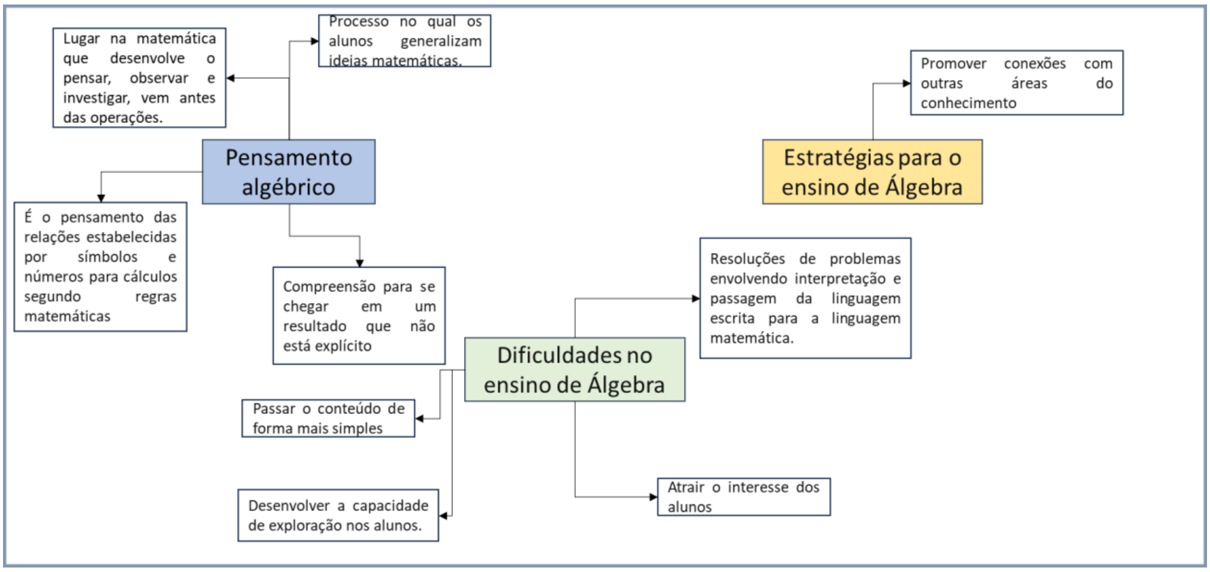
Identificamos um aprofundamento da compreensão das professoras do nosso sistema de numeração decimal, a partir do momento em que elas perceberam a lógica na escrita dos números e a importância da posição dos algarismos em suas representações escritas. Quando questionamos sobre como seriam as representações escritas em outras bases, rapidamente elas conseguiram transpor as ideias e *conhecimentos* desenvolvidos com essa atividade na elaboração de suas *justificações* condizentes com suas *crenças-afirmações* de como ficariam as escritas numéricas nesse novo contexto.

Passamos por diversas atividades com as professoras e entendemos que somente escutando atentamente é que iremos conseguir identificar o entendimento dos indivíduos para os problemas propostos. São muitos os *conhecimentos* que os(as) estudantes podem ter nesses tipos de situações-problema, e pensar algebricamente é uma maneira de organizar essas ideias. Sabemos que esse tipo de pensar vai se desenvolvendo de forma gradual, por isso, é importante que tenham contato, desde cedo, com diferentes situações que os levem a atribuir *significado* a: padrões que estão sendo repetidos; fatos que possam ser generalizados; símbolos que guardam significados de ideias; e *justificações* para os *conhecimentos* que vão desenvolvendo. Este processo é que vai auxiliá-los(as) no desenvolvimento e no amadurecimento do pensamento matemático e científico.

5.2 Mapa conceitual: ferramenta de organização e visualização dos principais conceitos abordados pelo grupo

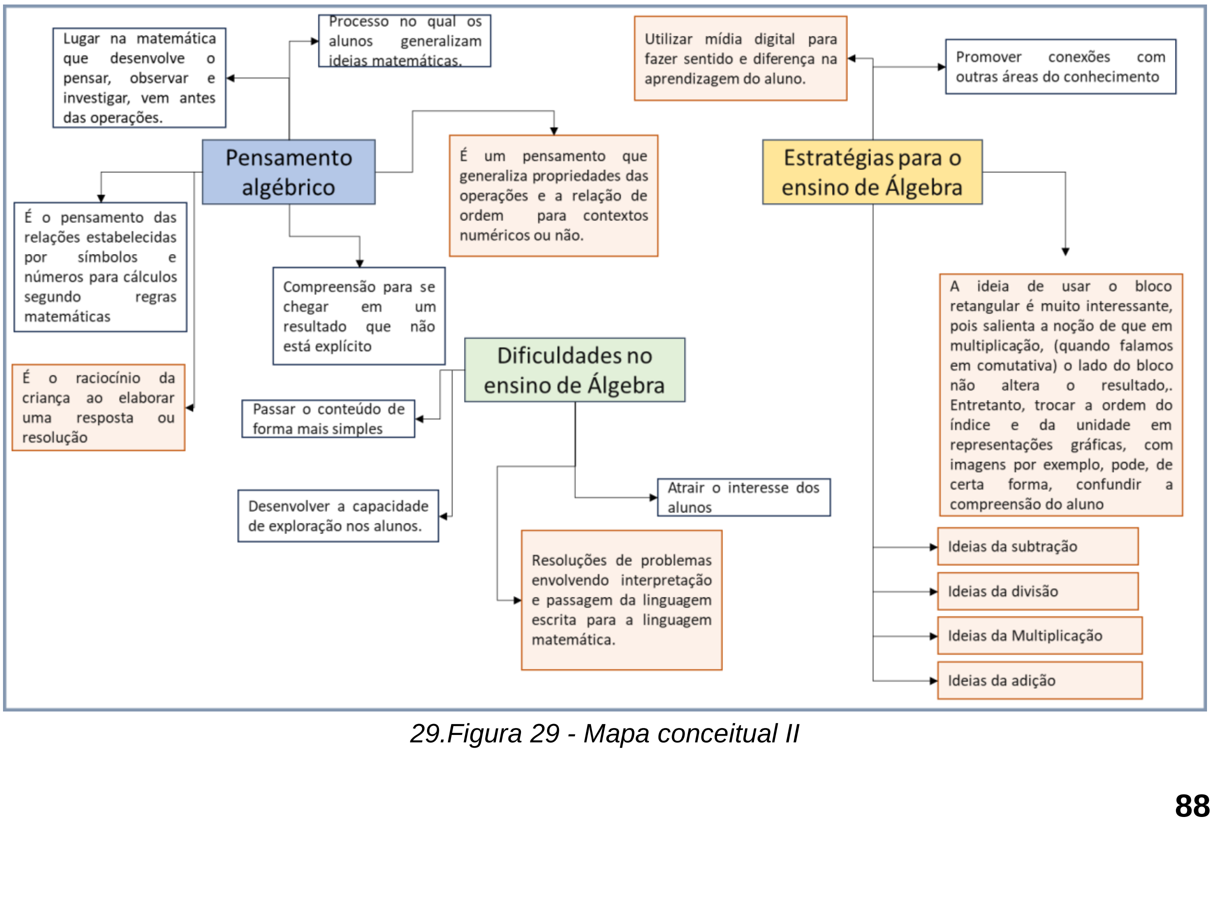
Ao decorrer dos encontros fomos desenvolvendo um mapa conceitual em conjunto com as professoras. Utilizamos como suporte a ferramenta *Padlet*, que permite a edição *online* por todos(as) os(as) participantes. Inicialmente incluímos três grandes blocos, sugeridos pelas professoras, para serem nossos objetivos de aprofundamento. São eles: pensamento algébrico; dificuldades no ensino de Álgebra; e estratégias para o ensino de Álgebra. Desenvolver o mapa conceitual, foi uma maneira adotada para que as professoras pudessem identificar a evolução de suas compreensões e perceber os caminhos percorridos durante nossos encontros. A possibilidade de edição *online*, garantiu que todos(as) tivessem o mesmo espaço de troca de ideias e para a explicitação de suas percepções.

Logo de início as professoras relataram dificuldades em atrair a atenção de seus(suas) estudantes em aulas de álgebra, indicando ser este fato um dos pontos que comprometia o bom andamento de suas aulas. Solicitaram, assim, a indicação de atividades que pudessem auxiliar na superação deste fato. O grupo via poucas possibilidades de estratégias a serem utilizadas na exploração do pensamento algébrico em sala de aula. Vejamos a seguir as ideias colocadas no primeiro mapa conceitual construído.



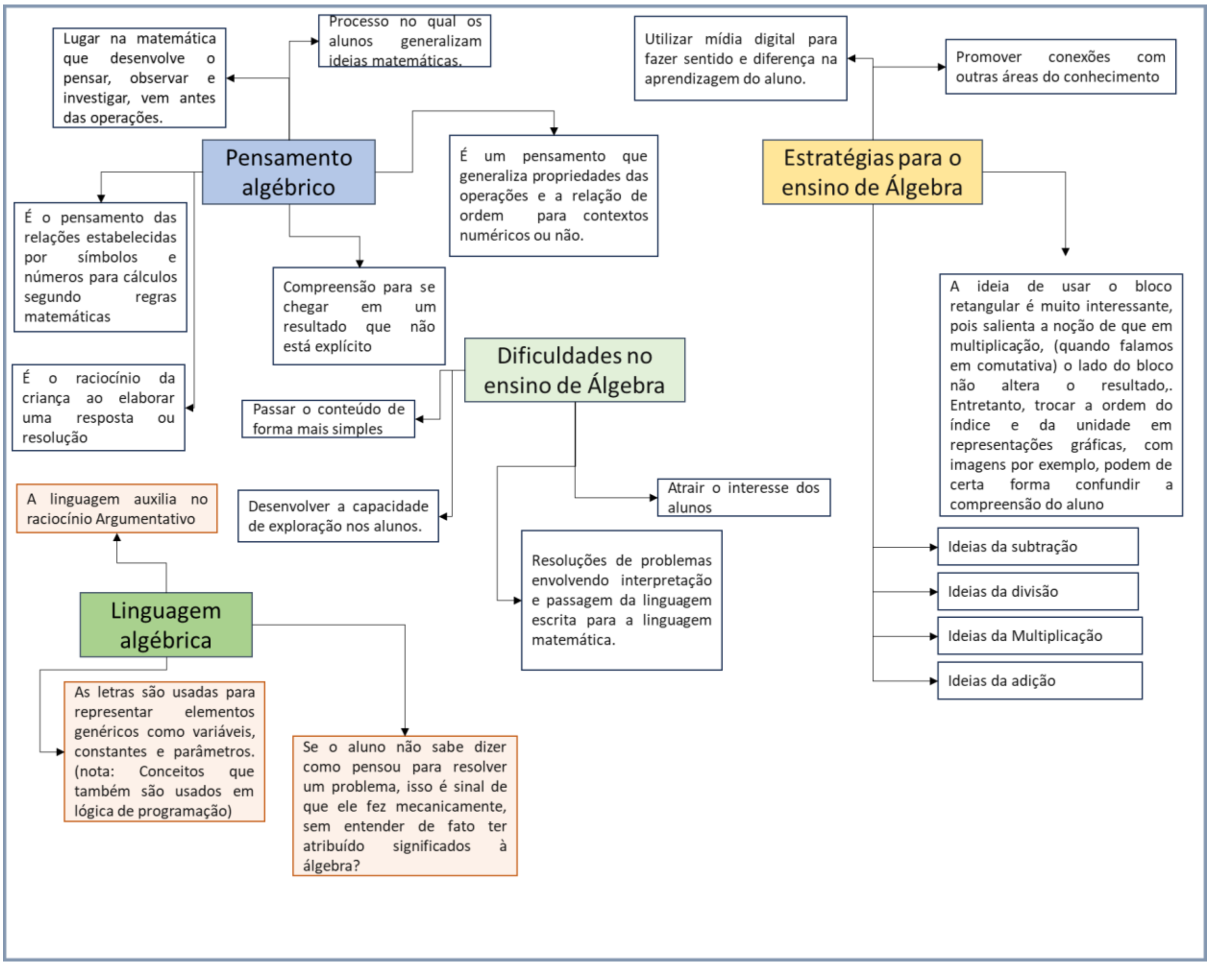
28.Figura 28 - Mapa conceitual I

Com a evolução dos encontros novas ideias foram surgindo, a exemplo da exploração de atividades envolvendo ferramentas tecnológicas no ensino da matemática que, para o grupo, poderia ser uma estratégia a ser adotada visando o favorecimento do desenvolvimento do pensamento algébrico. À medida que os encontros foram ocorrendo, as professoras sentiram a necessidade de incluir novas definições para pensamento algébrico, além de incluir as ideias das operações que haviam sido discutidas. A seguir indicamos o estado do mapa neste momento. Para facilitar a leitura deixaremos destacadas as ideias acrescentadas.



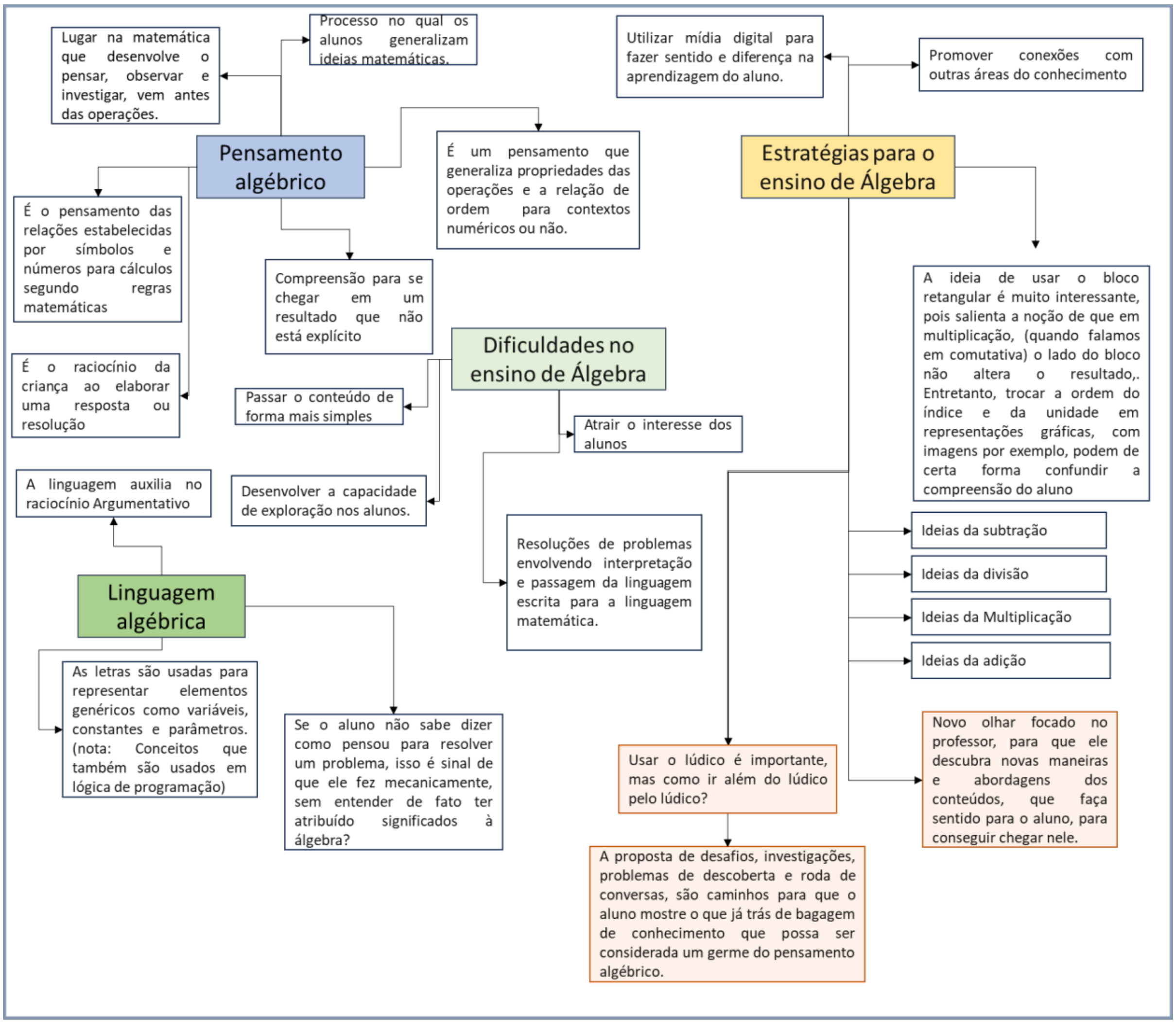
29.Figura 29 - Mapa conceitual II

Com as discussões de novas ideias, naturalmente as professoras sentiram a necessidade de incluir um bloco específico para a linguagem algébrica, por terem assimilado que é com a linguagem que a comunicação ocorre. Para as professoras a linguagem algébrica, além de ajudar os(as) estudantes na sua comunicação, auxilia também no desenvolvimento do pensamento argumentativo e, com isso, é possível identificar se eles(elas) produziram *significados* para os assuntos abordados. Em uma das ideias anexadas ao mapa fica claro que a professora via a ausência de uma comunicação algébrica como uma possível indicação sobre se o(a) aluno(a) a aprendeu ou apenas reproduziu de forma mecânica o que foi ensinado. Vejamos a nova configuração do mapa conceitual.



30.Figura 30 - Mapa conceitual III

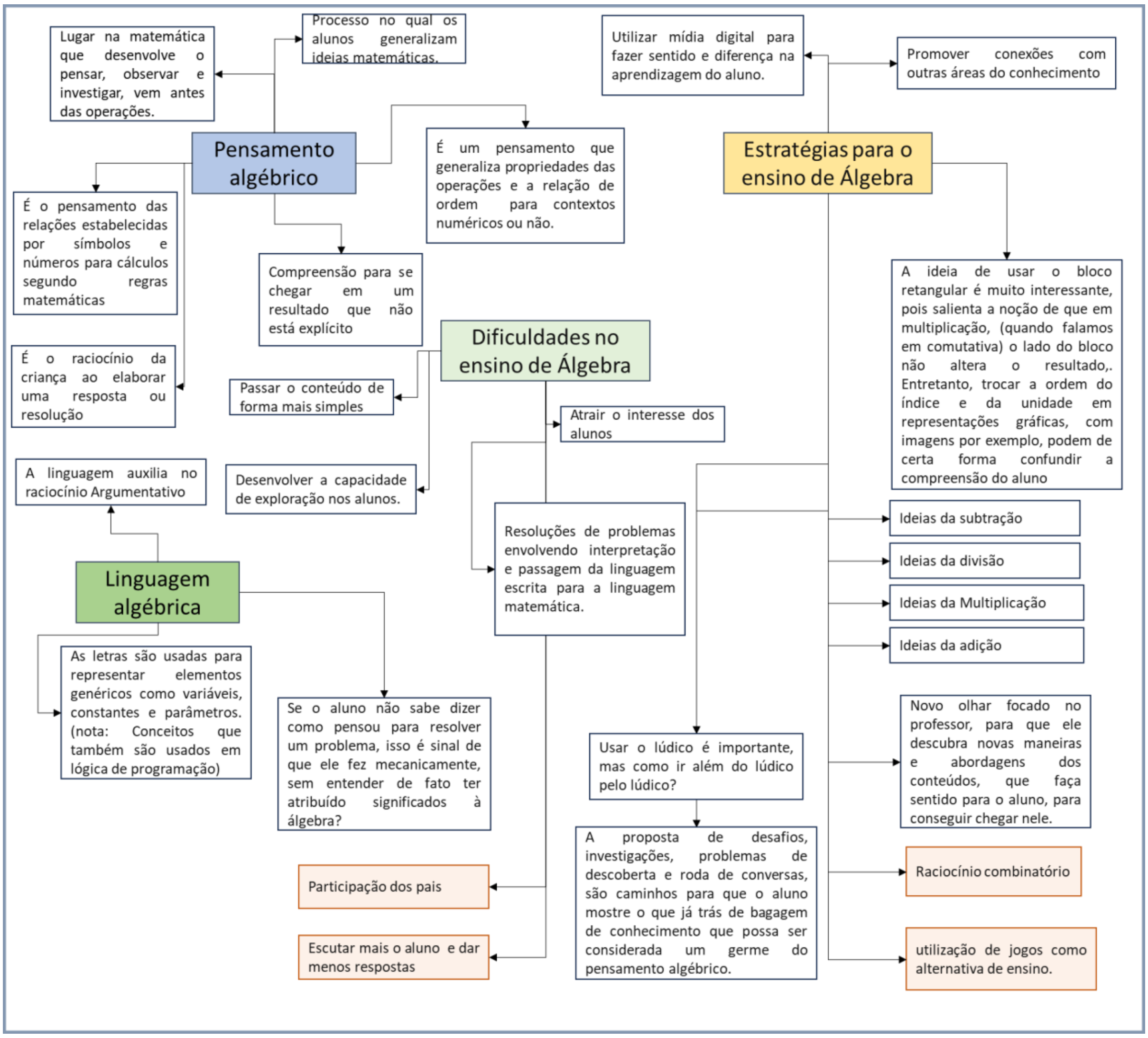
A utilização de materiais manipuláveis e a elaboração de atividades lúdicas fazem parte do ensino de matemática nos anos AIEF. Esta era uma preocupação das professoras no momento de elaborar e pensar em atividades para as suas salas de aula, pois inicialmente para elas somente neste estilo de propostas é que os(as) alunos(as) “focalizam” a atenção em atividades das aulas de matemática. Foi discutido em grupo as estratégias que deveríamos adotar para ir além do lúdico, o que levou as professoras a incluir uma pergunta relativa a isso no bloco das estratégias para o ensino de álgebra. Também verbalizaram a importância do(a) professor(a) estar aberto(a) a aprender e explorar novas abordagens de ensino, sempre aproveitando os conhecimentos prévios de seus(suas) estudantes. Vejamos abaixo, a nova configuração do mapa conceitual após essas novas discussões.



31.Figura 31 - Mapa conceitual IV

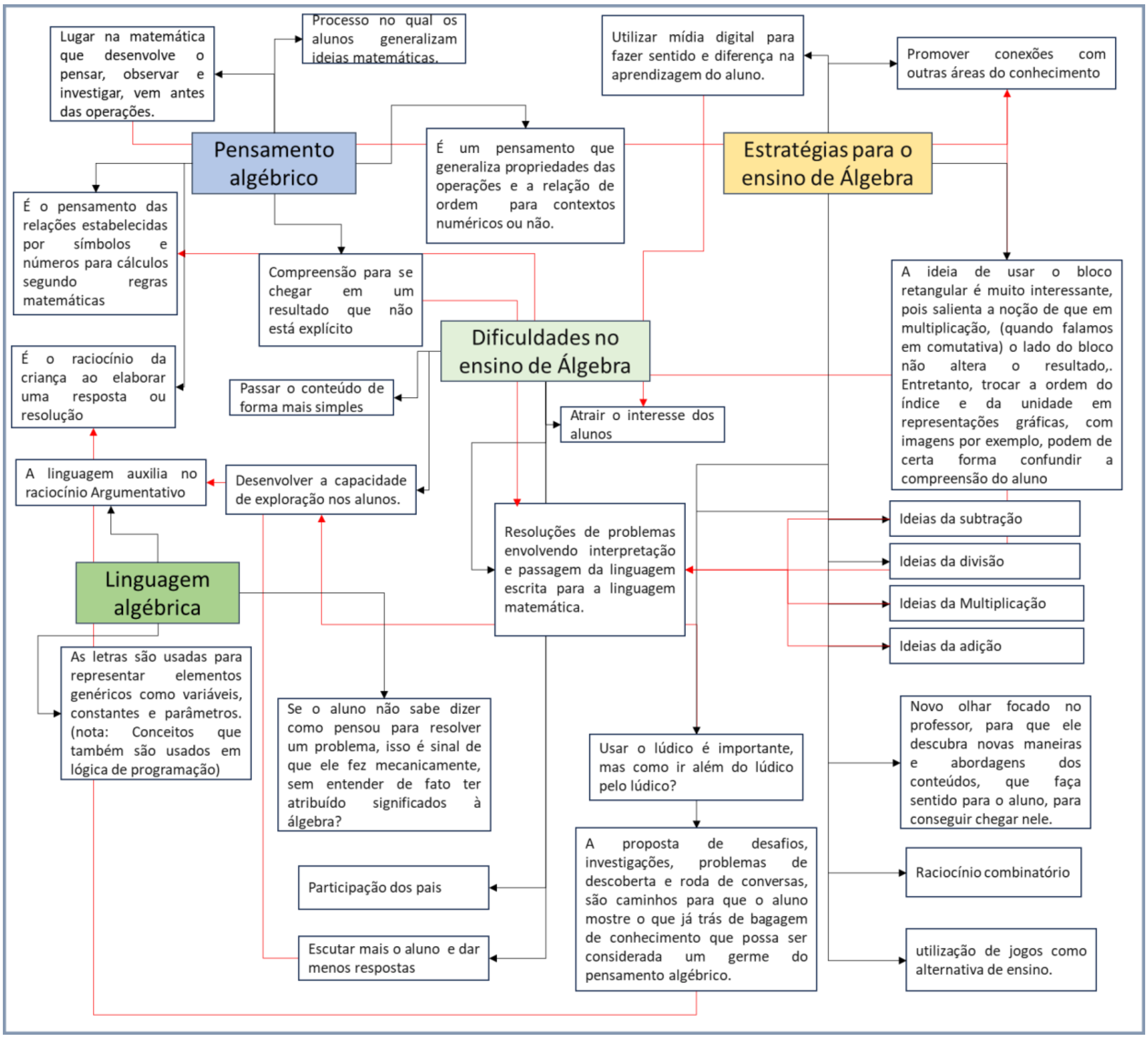
Com a discussão de temas tratados por Vygotsky, resolvemos incluir no mapa a importância da participação dos pais na educação matemática. As professoras relataram ser esta uma dificuldade, pois em sua escola percebem que os pais e responsáveis participam pouco do processo de ensino/aprendizagem de seus(suas) filhos(as). Relataram também outra dificuldade em suas aulas, que é escutar mais seus(suas) estudantes sem dar a eles(elas) imediatamente as respostas aos problemas. Elas imaginavam que, ao fornecer respostas, eles chegavam mais facilmente aos *conhecimentos* esperados. Porém, com as discussões sobre o MCS, identificaram a importância de escutá-los para poderem identificar se não ficou claro algum ponto importante da atividade ou então validar se a proposta estava devidamente ajustada aos objetivos esperados com o trabalho.

Duas novas ideias surgiram, na sequência, como estratégias para o ensino de álgebra: a exploração do raciocínio combinatório e a utilização de jogos que fazem parte do dia a dia dos(as) estudantes. Para o grupo tais abordagens podem implicar em motivações às atividades a serem aplicadas. A seguir apresentamos a disposição que o mapa conceitual adquiriu neste momento.



32.Figura 32 - Mapa conceitual V

Nos últimos encontros do grupo, fizemos a leitura conjunta de tudo o que havíamos colocado no nosso mapa conceitual e percebemos que várias ideias deveriam ser relacionadas entre si. Por isso, fizemos as conexões ligando itens que consideramos relevantes. Vejamos como ficou a versão final do mapa conceitual elaborado pelo nosso grupo participativo.



33.Figura 33 - Mapa conceitual final

5.3 Produtos finais das professoras: projetos a serem desenvolvidos em sala de aula e relatos individuais sobre a experiência no grupo participativo

No último encontro do grupo participativo solicitamos que as professoras pensassem em projetos que pudessem ser desenvolvidos em suas salas de aula, com a finalidade de explorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Neste encontro apontamos sugestões em grupo de melhorias que poderiam ser feitas, embasadas nas reflexões e nos *conhecimentos* discutidos no grupo participativo ao longo do ano.

O primeiro projeto, apresentado pela Profa.1 e intitulado Alimentação Saudável, surgiu em função de dificuldades da escola quanto à alimentação fornecida nas refeições dos(as) alunos(as). A professora relatou que para alguns estudantes a refeição não é levada a sério, o que provoca um volume alto de desperdício de alimentos. Outro ponto por ela apontado é que muitas crianças demonstram ter hábitos alimentares prejudiciais à sua saúde, como não comer verduras e não se dispor a experimentar novos alimentos. Motivada por este assunto, ela elaborou seu projeto, que expomos a seguir na íntegra.

Profa.1 – ***Alimentação Saudável: um projeto de investigação***

Questionar sobre o assunto, usar perguntas como:

- *Como você se alimenta?*
- *Por que é importante se alimentar com alimentos saudáveis?*
- *Quais são os alimentos saudáveis?*
- *Quais são os alimentos que você gosta? Por quê?*
- *Quais alimentos você não come? Por quê?*

Com o levantamento dessas respostas, vou iniciar o projeto com foco nos conceitos matemáticos de: frequência que os alimentos aparecem, diferenças de preços e calorias dos alimentos, criar com alunos tabelas e gráficos com as informações coletadas, pensar com eles sobre as temperaturas ideais para a conservação e armazenamento de alimentos, explorar o tempo de crescimento dos alimentos, introduzir instrumentos e unidades de medidas, valor monetário, etc.

Objetivo: conscientizar os alunos dos benefícios da alimentação saudável, partindo dos hábitos alimentares dos alunos com características familiares, mostrar alternativas e esclarecer medos e resistências para experimentar sabores novos, tão comum nessa idade (6 e 7 anos). Para essa mudança de hábito e autonomia de escolha, me baseio em 2 princípios: prato colorido e sempre experimentar alimentos novos. Vou utilizar o livro: Socorro meu filho come mal.

Desenvolvimento:

1°bimestre construção do projeto com as necessidades apresentadas no grupo de alunos, levando em consideração a investigação inicial.

- *Leituras coletivas: dragões do mundo; chapeuzinho vermelho; chapeuzinho redondo; o lobo sentimental.*

2°bimestre – festa junina.

3°bimestre – super-heróis da alimentação - mudança de hábitos.

4°bimestre – alfabeto de alimentos saudáveis e minha lista de novos sabores.

Material: livros infantis para leituras coletivas, cadernos da cidade, folhas com atividades sobre o tema, bonecos de alimentos para vivência em casa, filmes e textos.

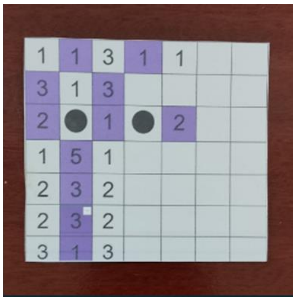
Podemos perceber na ideia de projeto da professora, que muitos assuntos podem ser relacionados com a álgebra, como: o recolhimento de padrões em alimentos de mesma natureza; classificação de alimentos em categorias; utilização de diversas unidades de medidas; exploração de equações para encontrar o custo desconhecido de uma suposta compra de alimentos; e explorar a comunicação entre os(as) estudantes.

A seguir apresentamos a proposta enviada pela Profa.2 (Apêndice 1). Seu projeto nasceu com base em suas pretensões futuras de atuar na sala de informática da escola. Para ela, este é um espaço pouco explorado por alunos e alunas, e com isso se tornar ocioso em sua função de incentivar o desenvolvimento dos pensamentos computacional, lógico e matemático. Ao longo dos encontros, ela deixou clara sua afinidade com ferramentas digitais no apoio ao processo de ensino/aprendizagem de matemática. Segue o projeto.

Profa.2 – **Robótica e Criatividade para conhecimentos matemáticos e científicos**

Objetivo: Raciocínio lógico, criatividade, percepção espacial, concentração e foco, estratégias e resolução de problemas, diminuição da ansiedade, e socialização.
Atividades:

- *TANGRAM DESPLUGADO E ONLINE: Reposicionamento das peças de modo que as peças com as mesmas cores sejam colocadas na linha certa. Desenvolve o pensamento lógico matemático, organização de ideias e foco na solução.*
- *JOGO DE PROGRAMAÇÃO DESPLUGADA: As crianças devem seguir os comandos das cartas e formar uma figura específica. Atividade para compreender como zeros e uns podem ser usados para representar informações como imagens digitais; compreender conceitos fundamentais de lógica.*



34.Figura 34 - Sugestão de atividade para aplicação em sala de aula

- *JOGO DE PROGRAMAÇÃO II: Nesta variação, os alunos precisam generalizar sobre qual quadradinho pintar, considerando o endereço dele através de números e letras. Desenvolve o pensamento algébrico, uma vez que faltam informações, que a criança precisa descobrir através da lógica das informações anteriores e posteriores.*
- *CONTAGEM DE BLOCOS TRIDIMENSIONAIS: O aluno deve colocar a quantidade de bloquinhos e cor solicitada no cartão, usando um hashi. Desenvolve noções de tridimensionalidade, lateralidade (direita, esquerda e diagonal) e geometria, desenvolvimento motor pelo uso do hashi, contagem e transformação de números pela quantidade de blocos, e compreensão da ideia de modelagem 3D, para jogos, por exemplo.*

Competências que são desenvolvidas com essas atividades:

- *Pensamento sistêmico*
- *Competência antecipatória*
- *Competência Normativa*

- *Competência estratégica*
- *Colaboração*
- *Pensamento crítico*
- *Pensamento algébrico*
- *Resolução integrada de problemas*

No projeto da Profº2 conseguimos identificar muitos elementos que compõem o campo da Álgebra. Para além dos conteúdos abordados, notamos em sua proposta a relevância que deu à criação de espaços para trocas de ideias entre os(as) estudantes. Ela cita a socialização dos(as) estudantes como um objetivo a ser alcançado no projeto. Essas ideias se relacionam a tópicos que debatemos ao longo do ano no grupo participativo.

Após as discussões dos projetos, solicitamos às professoras o envio de um relato individual sobre suas participações no grupo, pois julgamos ser importante capturar o quanto o grupo participativo teve impactos em suas práticas de ensino. Vejamos os dois depoimentos enviados.

Profa.1 – Em 2021, veio o desafio da volta ao presencial, vivendo uma pandemia e priorizando conteúdo. Minha maior dificuldade sempre foi como desenvolver os conhecimentos matemáticos de uma maneira lúdica e interessante. Pensando na evolução desse conhecimento, do concreto para o abstrato. O curso "Pensamento Algébrico" era uma oportunidade de melhorar minha prática e resolver minhas dúvidas (ou melhor, inseguranças).

Contribuição dos encontros para mim:

- Desafio e investigação não são só para os alunos.

- Ter tempo, e que é permitido errar.

- Pontos de avanço de aprendizagem.

- Estudar e discutir o que aprendeu.

- Colocar o pensamento concreto em símbolos matemáticos com significado.

- Usar a linguagem matemática, oralmente.

- Jogar, aprender e criar regras para organização do pensamento.

- Acreditar e dar autonomia: início, meio e fim do meu trabalho.

Agradeço a oportunidade de crescimento profissional e pessoal, participando desse grupo.

A professora Iole e o Vinicius deram um exemplo de aula: ouviram, tiraram dúvidas, plantaram ideias que já deram frutos e trouxeram textos que geraram questionamentos e muito conhecimento. E, acredito que a melhor forma de aprender é pelo exemplo.

Profa.2 – Iniciei no grupo participativo em 2021, interessada e curiosa, uma vez que nunca havia refletido sobre o termo "pensamento algébrico". Durante minha formação em pedagogia, notei que o currículo do curso não disponibiliza muitas investigações ou práticas relacionadas à área do saber de matemática. Na verdade, vimos apenas um pouco de estatística, e por conseguinte, ao término do curso, não *me sentia preparada de fato para ministrar aulas de matemática para o fundamental I. Já no cotidiano em sala de aula, notei que não isoladamente, os alunos iniciavam sua vida escolar empolgados com matemática, mas com o tempo, parecia que iam perdendo a vontade de aprender e de lidar com esse assunto. Eu realmente me sentia desanimada com essa realidade, e tinha a intenção de fazer algo em relação a isso. Até que fui convidada para entrar no grupo participativo. Hoje, posso dizer que minha vida profissional e até pessoal mudou muito.*

Durante nossos encontros aos sábados, podia trocar minhas indagações e experiências com os professores e com minha colega de trabalho. Durante as semanas, nas aulas, eu testava teorias que conversávamos, e notei que aos poucos o andamento das aulas e a aprendizagem dos alunos iam tomando mais forma, as aulas começaram a ser mais interessantes e significativas para eles, e mais experimentais para mim. As aulas que eu montava eram de fato diferentes para eles, com situações que fomentam a criatividade, uma atitude investigativa. As atividades envolviam os alunos, porque traziam desafios em que as crianças precisavam de fato generalizar, refletir, pesquisar, investigar e encontrar padrões e informações não tão óbvias. Até mesmo a comunicação entre eles melhorou muito, uma vez que a empolgação os fazia compartilhar as dúvidas e descobertas.

Hoje, ao final dos nossos encontros, reflito sobre todo esse processo ao qual eu passei, e pude transmitir às crianças. Entendo mais ainda o quanto a matemática é importante para a vida, e que o pensamento algébrico traz possibilidades ímpares de aprendizagem, pois são atividades que preparam os alunos para os anos seguintes. Só tenho a agradecer aos professores pela oportunidade, e pela simplicidade e abertura com a qual me receberam. Sempre senti que meu conhecimento em matemática era defasado, e, se não fosse a abertura e naturalidade das nossas conversas, talvez eu não tivesse me sentido tão à vontade para trocar experiências e sanar minhas dúvidas.

Hoje, sei que ainda tenho muito a aprender, mas pretendo ajudar meus outros colegas da escola, levando um pouco desse mundo tão especial que é o pensamento algébrico. Pretendo continuar nossas trocas de experiência nos próximos anos, e agradeço por todo o conhecimento adquirido.

Passado um ano após a finalização dos trabalhos no grupo participativo, entramos em contato novamente com as professoras para entender como estavam as suas aulas. Abaixo incluímos os relatos que nos foram enviados ao final do ano de 2022.

Profa.1 – Percebemos pontos importantes, como o fato de que desafio e investigação, não são apenas para os estudantes, e sim para nós também, que ao aprendermos, melhoramos nossas aulas. Que errar faz parte e tem sua importância, e que cada criança tem seu tempo. Compreendemos que aulas com jogos são interessantes para eles, pois aprendem as regras e as reproduzem usando os conceitos matemáticos, organizando seu pensamento.

Como professora regente, temos alguns roteiros diários que usam conceitos matemáticos, como: colocar o pensamento concreto em símbolos matemáticos com significado; desafios em atividades de grupos; mais critérios nas escolhas das *atividades como também, objetivos mais definidos para usá-las; oralidade; registro; discussões das hipóteses; afirmações com entendimento.*

Em uma conversa com a professora que hoje é regente da minha turma do ano passado, para sondar o desenvolvimento matemático deles, ela informou que a média deles em matemática é 7, que eles compreendem com facilidade o que é proposto, mas que ainda apresentam um pouco de dificuldade de fazer convencionalmente (o algoritmo).

Profa.2 – Ao final do ano passado, já obtendo mais confiança em ensinar matemática, me inscrevi na função de professora de informática, pensando em iniciar um projeto de matemática no laboratório. Consegui ingressar na função, e tenho vivido momentos muito interessantes durante esse primeiro ano de atuação. Sinto que as crianças precisam perder o receio de matemática e aprender conceitos importantes para estarem preparadas quando chegarem ao fundamental ll, onde os conceitos são mais complexos e é necessária uma base bem consolidada para que tenham uma boa continuidade.

Só tenho a agradecer por tudo que aprendi o ano passado. Aprendi que sei mais de matemática do que eu imaginava, e que ensinar matemática pode ser muito divertido e recompensador. Aprendi também que podemos ensinar qualquer conceito, desde que o conteúdo seja adequado para a idade e maturidade do aluno. Compreendi que o pensamento algébrico é tão importante, que pode mudar a forma de pensar de um aluno, e levá-lo a lugares muito interessantes. Hoje, sinto que meu projeto de matemática tem auxiliado e ajudado a desenvolver os meus alunos, e pretendo aperfeiçoá-lo a cada dia. Aprendi a estudar matemática para transmitir com inovação os conteúdos na sala de aula, e uma das maiores mudanças em meu cotidiano na escola, foi aprender a ouvir melhor meus alunos dando espaço e autonomia para eles, com paciência e buscando diversas maneiras de apresentar conteúdos matemáticos com qualidade. Gostaria de que outros professores tivessem essa mesma oportunidade que tive. Se assim fosse, certamente teríamos uma educação adequada para nossas crianças.

Capítulo 6. Considerações finais

Ao longo desta pesquisa, tivemos a oportunidade de refletir e analisar sobre o pensamento algébrico, notadamente sobre diversas maneiras de introduzi-lo na formação de estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Visamos favorecer, desde o início da jornada educacional, o desenvolvimento de uma base importante para a evolução dos estudos em matemática, especialmente em álgebra. Do processo de coleta de dados e observação dos encontros, destacamos um aspecto fundamental: as professoras participantes passaram por um significativo processo de reflexão sobre suas próprias concepções acerca do pensamento algébrico. Através dos diálogos e das análises críticas sobre os(as) autores(as) selecionados, elas passaram a questionar suas *crenças- afirmações*[2] e visões sobre o pensamento algébrico e a álgebra. Tais reflexões se mostraram essenciais para que pudessem compreender, tanto a especificidade do pensamento algébrico, como a diferença entre pensar algebricamente e o próprio ensino formal da álgebra. As distintas perspectivas teóricas de estudiosos(as) da Educação Matemática, estudadas no grupo participativo, enriqueceram substancialmente a abrangência e a profundidade do entendimento das professoras para, além de reformularem suas concepções sobre o pensamento algébrico, aprimorarem suas práticas em sala de aula. Os debates ocorridos nos encontros possibilitaram que transcendessem uma visão usual de que álgebra se restringe a fórmulas e procedimentos, levando-as a conceber a importância deste tipo de pensamento ser desenvolvido com vagar e cuidado nos estudos escolares de pré-álgebra. As professoras passaram a perceber que pensar algebricamente é um processo envolvendo a capacidade de generalizar, de abstrair padrões e relações, de argumentar logicamente e de resolver problemas de forma flexível e criativa. Além disso, a compreensão da diferença entre o pensar algebricamente e a prática usual da álgebra em sala de aula mostrou-se fundamental para que passassem a desenvolver estratégias pedagógicas mais apropriadas e eficazes à aprendizagem de seus(suas) alunos(as). A partir destas conscientizações, elas sentiram-se melhor capacitadas a abordar a álgebra de uma maneira *significativa*, contextualizada e acessível aos(as) estudantes, estimulando-os(as) a desenvolver seu pensamento algébrico.

Neste contexto de análise, é necessário apontar uma diferença fundamental entre as interpretações iniciais das professoras e a perspectiva defendida por Lins (LINS, R. C., 2012) quanto aos conceitos de "significativo" e "significado". Enquanto na abordagem de Lins estes termos referem-se à habilidade do indivíduo em formular *justificações* coerentes independentemente das definições “oficiais” dos conceitos, as educadoras relacionavam tais termos à capacidade dos(as) alunos(as) responderem corretamente segundo os parâmetros matemáticos estabelecidos convencionalmente. Esta diferença incide diretamente sobre a maneira pela qual o conhecimento matemático é elaborado e apreendido pelos(as) discentes, sendo assim um elemento relevante para a tomada de decisão sobre as práticas educacionais a serem adotadas.

---

[2] Termos em itálico se referem sistematicamente a constructos do MCS.

Diante disso, trabalhamos no grupo participativo a concepção de Lins sobre "atribuição de significados" e "aprendizagem significativa", o que resultou numa maior participação de alunos(as) nas atividades escolares, trazendo suas ideias como parte fundamental de seus processos de aprendizagens, sem que fossem vistos como meros receptores em sua jornada escolar. Pudemos observar, nos relatos finais das professoras, que de fato elas assumiram esta perspectiva, aceitando suas *justificações,* sem excluir previamente as contribuições tidas como divergentes das esperadas.

É importante destacar uma das conclusões relevantes provenientes dessas experiências: que a valorização da investigação e a aceitação do erro como *conhecimento* é parte inerente ao processo de aprendizagem, tanto para os(as) alunos(as) quanto para as próprias professoras. Durante as discussões no grupo, enfatizou-se a importância de incentivar a exploração, experimentação e reflexão como caminhos para alcançar um ensino/aprendizagem mais efetivo e enriquecedor.

O Modelo dos Campos Semânticos se mostrou uma ferramenta adequada para que as professoras se sentissem incentivadas a repensar e refletir sobre suas próprias experiências. Ao observarem os diferentes *conhecimentos* e *significados* desenvolvidos por seus(suas) alunos(as), as docentes foram desafiadas a questionar suas próprias concepções e entendimentos sobre os temas abordados em sala de aula. Esse processo reflexivo levou-as a ampliar suas perspectivas e a compreender que o aprendizado é uma via de mão dupla, onde elas também são aprendizes em constante crescimento. As interações com os(as) alunos(as) e a análise das atividades por intermédio do MCS permitiram às professoras identificar suas próprias suposições e *crenças*, muitas vezes inconscientes, o que incentivou uma revisão de suas práticas pedagógicas. Esse novo olhar, mais sensível e conectado com as necessidades e saberes dos(as) alunos(as), estimulou-as, segundo seus relatos, à uma educação mais empoderadora de seus(suas) estudantes. Portanto, o MCS não apenas proporcionou um ambiente de escuta atenta e a valorização dos *conhecimentos* dos(as) alunos(as), como também desencadeou um processo de autoconhecimento e aprimoramento profissional para elas.

No contexto dessas reflexões, no grupo foi ressaltada a importância da valorização da comunicação entre os(as) alunos(as), estimulando a criação de um espaço propício para expressarem oralmente suas ideias e compreensões matemáticas. A interação entre eles(as) fomentou a construção colaborativa de conhecimentos, promovendo a troca de saberes entre pares. Por outro lado, as docentes reconheceram a relevância da formação contínua e o papel do aprendizado que desenvolveram no processo dos trabalhos conjuntos realizados no grupo participativo.

Destacamos também a elaboração do mapa conceitual durante as atividades do grupo, o que permitiu a visualização dos conceitos discutidos de forma organizada e a ampliação de ideias e conceitos ao longo dos encontros. Este mapeamento evidenciou a evolução das discussões e a maneira como as compreensões das professoras foram se ampliando e aprofundando, estimulando uma reflexão crítica sobre os temas abordados.

Outro aspecto relevante, abordado durante as discussões do grupo, foi a importância do uso de recursos digitais no ensino de matemática, especialmente no contexto do pensamento algébrico. As professoras puderam explorar diferentes ferramentas digitais e constataram o quanto elas podem enriquecer as atividades em sala de aula, tornando o aprendizado envolvente e acessível aos(às) estudantes.

Ao longo dos encontros realizados, notou-se que as professoras gradualmente se sentiram mais à vontade para expressar suas dúvidas sobre conceitos matemáticos que não foram abordados em suas formações iniciais. Esse processo de crescimento da autoconfiança demonstra o impacto positivo da aprendizagem contínua na prática pedagógica. Neste sentido, as discussões participativas puderam ser percebidas como uma valiosa forma de formação continuada, que capacita os(as) professores(as) a se adaptarem, aprimorarem e refletirem sobre seus conhecimentos e práticas ao longo de suas carreiras, contribuindo assim para a melhoria da qualidade da educação oferecida aos(às) estudantes.

Esperamos que as discussões relatadas nesta pesquisa possam contribuir para o aprofundamento de reflexões sobre o pensamento algébrico e sua relação com o ensino da álgebra, por parte de professores(as) interessados(as) no tema. Apesar de a pesquisa de campo ter abrangido um número limitado de participantes, esta dissertação fornece um quadro detalhado de percepções e práticas docentes relativas ao ensino de matemática, com foco específico na abordagem da álgebra e seus *significados*. Nosso objetivo é que esta amostra qualitativa das diferentes concepções e abordagens, presentes no contexto estudado, possa contribuir de forma efetiva para o debate sobre o aprimoramento do ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Mesmo que aqui tenham sido trabalhados vários aspectos e abordagens do pensamento algébrico e do ensino de pré-álgebra, o presente estudo deixa algumas questões em aberto, a exemplo da exploração da propriedade comutativa por meio da disposição retangular e sua possível relação com o conceito de área que é efetivamente ensinado apenas nos anos finais do Ensino Fundamental. Observamos que a visualização da multiplicação como a área de um retângulo foi uma estratégia eficaz para uma produção de significado à propriedade comutativa pelas professoras. Porém, pelo relato que fizeram da aplicação de uma atividade deste tipo em suas classes, acabamos percebendo que seus(suas) estudantes não apresentaram a mesma compreensão – possivelmente por não terem o conhecimento do conceito de área. Neste sentido, apontamos a conveniência de investigar tipos de abordagem adequados ao favorecimento de uma efetiva atribuição de *significado* à propriedade comutativa por estudantes nesta fase de escolaridade.

Do ponto de vista pessoal, percebo que minha participação neste estudo desenvolveu em mim uma convicção mais ampla da necessidade da atribuição de significados para o real desenvolvimento de pensamento e linguagem algébrico dos(as) estudantes. Esta experiência não apenas enriqueceu minha base teórica, mas também permitiu minha presença em debates construtivos com professoras que estão atuando no ensino, enriquecendo minha compreensão prática e pedagógica. Além disso, a participação das professoras na pesquisa, me proporcionou novas reflexões e uma consequente ampliação do meu entendimento sobre as complexidades e desafios inerentes ao ensino da álgebra no nível inicial do ensino fundamental, fornecendo *insights* valiosos sobre estratégias de ensino eficazes. Em última análise, a participação nesta pesquisa desempenhou um papel crucial na minha formação acadêmica, expandindo significativamente minha perspectiva sobre o pensamento algébrico e incentivando uma reflexão contínua sobre o aprimoramento do ensino deste tópico fundamental nos currículos da Educação Básica.

Referências Bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular. Brasília**. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 de janeiro de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental– Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARRAHER, D. W**. Arithmetic and algebra in early mathematics education**. Journal for Research in Mathematics Education, n. 37, p. 87-115, 2006

CANAVARRO, A. P. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**. Quadrante,Lisboa-Portugal, v. XVI, n. 2, p.81-118, 2007.

CLEMENT, J**. Algebra Word problem solutions: Analysis of a common misconception**. In: Annual Meeting of American Educational Research Association, Boston, 1980.

DANYLUK, O. S. **Alfabetização Matemática: o cotidiano da vida escolar**. Caxias do Sul: EDUCS, 1991.

DE OLIVEIRA, V.; PAULO, R. M. **Entendendo e discutindo as possibilidades do ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Educação Matemática Pesquisa, v. 21, p. 75-95, 2019.

DRUCK, I. F. **Variáveis, constantes, incógnitas, equações e inequações: significados e relevância da linguagem algébrica para a formação geral dos estudantes da Educação Básica na área de matemática**. Texto elaborado para a disciplina `MAT0120- Álgebra I para a Licenciatura, IME/USP. São Paulo, 2018 disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7936680/mod_resource/content/1/VARI%C3%81VEIS%2C%20constantes%2C%20inc%C3%B3gnitas%2C%20equa%C3%A7%C3%B5es%20e%20inequa%C3%A7%C3%B5es.pdf (visualizado em 11/01/2024).

DRUCK, I. F. **A cidade do nunca 4**. Texto elaborado para uma oficina do CAEM em 1995. Disponível: https://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20122/mat1514/tg1.pdf (visualizado em 11/01/2024).

FILLOY, E.; ROJANO, T. **Solving equations: The transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics**, Rotterdam, v. 9, n. 2, p. 19-25, 1989.

FREIRE, R. S. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental**. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-

Graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. 2011.

KAPUT, J. **What is algebra? What is algebraic reasoning?** In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), Algebra in the Early Grades. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KAPUT, J. BLANTON, M. L.; MORENO, **Algebra from a symbolization point of view**. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), Algebra in the Early Grades. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KENSKI, V. M. **Comunidades de aprendizagem: em direção a uma nova sociabilidade na educação**. Revista de Educação e Informática "Acesso", SEED/SP, n. 15, dez. 2001.

LESSA, M. M. L. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à Álgebra: um estudo comparativo**. 1996. 236f, Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife-PE, 1996.

LINCHEVSKI, L.; HERSCOVICS, N. **Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operation on the unknown in context of equations. Educational Studies in Mathematics,Rotterdam**, n. 30, p. 39-65, 1996.

LINS, R. C. **O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações**. In: ANGELO, C. L. et al. (Orgs). Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história. 1ed. São Paulo: Midiograf, 2012, v. 1, p. 10-20.

LINS, R. C. **Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática**.In: BICUDO, M. A. V. (org.). Perspectivas em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da Unesp, 1999, pp. 75-94

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 4 ed. Campinas: Papirus Editora, 1997.

LINS, R. C. **A framework for understanting what algebraic thinking is**. Unpublished PhD thesis. Nottingham, UK. 1992.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da Percepção**. 2ª ed. São Paulo: Editora Martins Fontes, 1994.

MESTRE, C.; OLIVEIRA, H. **O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de alunos do 3º ano de escolaridade do ensino básico**. In: C. Guimarães & P. Reis (Orgs.) Professores e Infâncias: Estudos e experiências. São

Paulo: Junqueira & Marin Editores, 2011, p. 201-223. Disponível em: http://ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/334683.PDF. Acesso em: 11 de setembro de 2018.

PONTE, J. P., et. al. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC, Lisboa, 2007

PONTE, J. P.; M. L.; BRANCO, N.; MATOS, A. **A Álgebra no ensino básico. Portugal: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular** - DGIDC, Lisboa, 2009.

RADFORD, L. **Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective**. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds), Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 1-21,2006.

___________.**Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective**. In: DURAND-GUERRIER, V et. al. (Eds.), Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education – CERME 6 Université Claude Bernard, Lyon. p. XXXIII – LIII, 2009.

SCHWANTES, V. **Uma Reflexão Sobre O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico Discente no Ensino Fundamental**. In: SANTIAGO, Anna Rosa Fontella (org.). Educação Nas Ciências: Pesquisas discentes 2003. Ijuí, Editora Ijuí, 2004. p.497-518

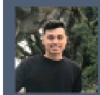
VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2. ed. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

Apêndice 1- Carta convite do Grupo Participativo

Olá professora! Olá professor!

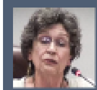
Eu sou Vinicius Henrique Sbaiz, aluno de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática (IME-USP) e tenho como orientadora a profª Drª Iole de Freitas Druck. Sabendo das dificuldades enfrentadas no Ensino Fundamental I quanto ao ensino de álgebra, decidi pesquisar de perto a realidade concreta de salas de aula. Assim, como parte do meu projeto de mestrado, necessito formar um grupo de trabalho de discussões conjuntas com professores atuantes na rede pública com a finalidade de: mapear as dificuldades enfrentadas, aprofundar estudos, e elaborar propostas para o desenvolvimento mais significativo do pensamento e raciocínio algébrico por parte dos estudantes.

Quem somos?



Vinicius Henrique Sbaiz

Graduado em Licenciatura em Matemática pelo IME-USP em 2018. Atualmente é aluno do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática na mesma instituição.



Iole de Freitas Druck

PhD em Matemática pela Université de Montreal (1986). Atualmente é professora doutora sênior da Universidade de São Paulo. Tem experiência na área de Matemática com ênfase em Lógica e na área de Educação Matemática com ênfase em Formação de Professores e Currículos.

Qual a proposta do grupo?

Discutir sobre o pensamento algébrico na sala de aula, bem como produzir atividades e soluções para os problemas de ensino e aprendizagem identificados. O grupo será composto por professores atuantes na rede pública que sintam a necessidade de discutir abordagens de ensino de álgebra que favoreçam uma aprendizagem significativa a seus alunos.

Por que fazer parte do grupo?

A participação poderá propiciar descobertas e o desenvolvimento, em conjunto com os pesquisadores da USP, de novas práticas de sala de aula visando o enfrentamento de dificuldades no ensino e aprendizagem da álgebra na segunda fase do Ensino Fundamental I. Além da contribuição para a formação continuada, serão disponibilizados certificados para os participantes do grupo.

Por que ensinar álgebra no Ensino Fundamental I?

A álgebra é parte do currículo de matemática para os anos iniciais, presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A finalidade de se colocar a álgebra desde cedo no ensino básico está na importância de desenvolver habilidades que são importantes para a formação integral dos estudantes e pilares para uma boa formação matemática: argumentar, reconhecer padrões, generalizar, comparar, representar.

Como serão os encontros?

Encontros quinzenais (online) com duração de 1:30. A primeira reunião será em dezembro (12/12/2020) e o início do projeto em janeiro de 2021.

Se você sente a necessidade de repensar o ensino de álgebra na sua sala de aula, venha fazer parte desse grupo!

Apêndice 2- Sobre uso de recursos digitais no ensino e aprendizagem de Matemática

Profa. Dra. Ana Paula Jahn

A ideia do encontro com a Professora Drª Ana Paula Jahn surgiu do interesse das professoras em utilizar as ferramentas digitais no desenvolvimento do pensamento algébrico. Compartilhamos com a Profa. Ana alguns dos temas abordados no grupo e solicitamos sua contribuição, como especialista da área de tecnologias digitais no ensino de matemática que é. Trazemos aqui alguns destaques do que foi discutido.

Profa. Drª Ana Paula Jahn (APJ)*: Agradeço a todos pelo convite, eu encarei esse convite como uma conversa, para falar um pouco sobre os assuntos que temos tocado nas disciplinas do mestrado profissional no IME/USP e nas oficinas de formação com professores relacionadas ao uso de recursos digitais no ensino de matemática. Vou trazer algumas questões, na ideia de retomar um pouco sobre o que vocês já discutiram nos encontros do grupo e pensar em coisas que poderiam estender, vamos dizer assim, as reflexões de vocês referente ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Eu tenho pensado e orientado mais trabalhos relacionados com o ensino de geometria, mas como sabia que o tema dos encontros de vocês é pensamento algébrico, foquei nesse contexto. Gostaria de, inicialmente, já mencionar que o uso de recursos digitais, que eu considero pertinentes nos anos iniciais, é mais limitado na álgebra do que em outras áreas da matemática. Mas antes de começar gostaria de ouvir um pouco mais sobre vocês.*

Profa.2: *Eu vou começar por aqui, esses encontros mudaram a minha forma de ver a matemática, porque eu aprendi mais sobre a própria matemática e sobre as maneiras que eu apresento esses conceitos para as crianças. Por mais que eu sinta que tenha que mudar muita coisa no meu ensino, acredito que o caminho até aqui já me fez mudar muito. À medida que eu entendo melhor os conceitos, eu consigo passar mais para meus alunos. Eu não entendia a importância do pensamento algébrico até chegar no grupo, e sobre a importância de prepará-los para o ensino fundamental II.*

Profa.1: *Eu não consigo falar de mim, eu preciso falar dos meus alunos. Eu estou na mesma turma desde o 1ºano, agora eles estão no 3º e eu consigo perceber a evolução deles. A linguagem matemática eu não usava tanto, e isso o curso trouxe para mim. Hoje eu peço para eles falarem a sentença matemática, se comunicarem entre si. Esse curso foi muito importante para mim, pois aprendi a deixar as crianças falarem, deixá-los chegar a seus próprios raciocínios.*

Profa. APJ: *Me falem um pouco sobre como é a estrutura da escola de vocês, relacionado a ferramentas digitais.*

Profa.1: *Eu vou começar falando e depois a Profa.2 completa. Ano passado estávamos totalmente no remoto e os recursos eram nossos, eu aprendi a usá-los sozinha. Eu não sou uma pessoa nativa digital, então tive que aprender do zero, então foi super desafiador fazer eles aprenderem por meio da telinha.*

Profa.2: *Como a escola não previa uma pandemia, acho que foi bem difícil. Mas agora, no presencial, as coisas estão se ajustando. Eu acho que mesmo voltando deveríamos aproveitar os recursos digitais, pois eles se somam no processo de aprendizagem.*

Profa. APJ*: Porque vocês acham importante o uso de recursos digitais em sala de aula?*

Profa.2: *Como a escola não estava digitalmente preparada, acho que foi bem difícil no começo, mas agora, no presencial, os recursos digitais ajudam muito, porque eles já nasceram nesse berço digital. Eles ficam super animados em descer para sala de informática. Aula com lápis e papel, para eles, é coisa do passado.*

Profa. APJ: *Você concorda com essa afirmação, Profa.1?*

Profa.1: *Eu não concordo muito, porque eu sou velhinha. Eu tento motivar as crianças não só com o lápis e o caderno. Mas eu entendo que, como eles ficam muito tempo nessas telas, é necessário trazê-los para a realidade. Eu também vejo os recursos digitais como uma maneira de incluir as crianças nas discussões de sala de aula. Por outro lado, eu vejo a sala de aula como um espaço para desenvolver outras habilidades, como a motora, a social. Eu vejo os recursos digitais ainda como muito individual.*

Após a discussão inicial, quando as professoras expuseram suas motivações e ideias sobre ferramentas digitais e a importância que dão a seu uso em sala de aula, a Profa. Ana Paula explorou a importância de motivar os(as) alunos(as) por meio de ferramentas digitais, mas deixou claro que somente a motivação não é suficiente no processo de ensino/aprendizagem. Vejamos uma citação por ela trazida neste encontro.

> As ferramentas computacionais podem ser vistas como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem, devidamente articuladas com uma estratégia pedagógica que oportunize a construção crítica do conhecimento. Contudo, não substituem o papel do professor, nem resolvem todos os problemas de dimensões escolares, mas podem, no contexto de sala de aula e para além dele, oportunizar a dinâmica da experimentação. (KENSKI, 2001)

Vejamos uma fala da Profa. Ana Paula, na qual ela compartilhou com o grupo algumas dicas de perguntas chaves motivadoras para a utilização de ferramentas digitais, expondo sua opinião.

Profa. APJ: *Eu acho que a tecnologia precisa ser utilizada para ampliar a possibilidade de ação em sala de aula, tanto do professor como do aluno. Especificamente falando em aprendizagem, eu vejo tecnologia digital podendo enriquecer o contexto da atividade matemática dos alunos. É nessa perspectiva que proponho a gente pensar o uso de recursos digitais. Algumas das perguntas chaves que eu gosto fazer são: ‘Quais os limites e as possibilidades dos recursos que eu pretendo usar?’ e ‘O que ele propicia em termos de ação do aluno?’. Por exemplo, se eu for usar uma calculadora: ‘Qual é o papel dela nessa atividade?’, ‘Ela vai ter o papel mais convencional de agilizar cálculo?’. Caso eu esteja em uma atividade de resolução de problemas, eu levo a calculadora para tirar o foco dos cálculos, dando também uma confiança aos alunos para eles acreditarem que não vão errar contas, então eles podem entrar um pouco mais motivados na ação. Ou, por outro lado, eu posso levar a calculadora porque eu vou querer que os alunos experimentem muito para perceberem um padrão ou uma propriedade dos números nas operações. Se pergunte se os alunos conseguiriam fazer a mesma atividade sem o recurso digital. Se a resposta for “sim”, eu desconfio um pouco se seu uso está adequado.*

Vejamos a seguir alguns sites sugeridos pela professora na exploração de atividades que desenvolvem o pensamento algébrico.

fonte: *https://www.escolagames.com.br/jogos/dividindoPizza/?deviceType=computer*

Profa. APJ: *O que vocês acharam, em princípio, só olhando rapidamente o uso desse recurso? Acham que faz sentido? Qual seria o potencial?*

Profa.2*: Eu acho que dá para trabalhar sim fração com esse joguinho. Mas olhando agora rapidamente eu acho que poderíamos fazê-lo sem o uso da internet.*

Profa.1: *Eu gostei, mas gostaria de ter visto a resolução na tela pois da forma que está exposto iria explorar bem pouco a troca entre eles. Acho que eles poderiam chutar as respostas sem pensar muito.*

Profa. APJ: *Você tocou em ponto importante. Deveríamos pensar em soluções de confronto de respostas entre os estudantes, como as possibilidades de somas diferentes chegando na mesma parte da pizza. Vai depender de quais estratégias você vai adotar para apresentar ao aluno como atividade. Por isso é importante pensar bem antes de levar aos alunos. Mesmo usando recursos digitais, o uso de papel de lápis não fica descartado no uso de recursos digitais.*

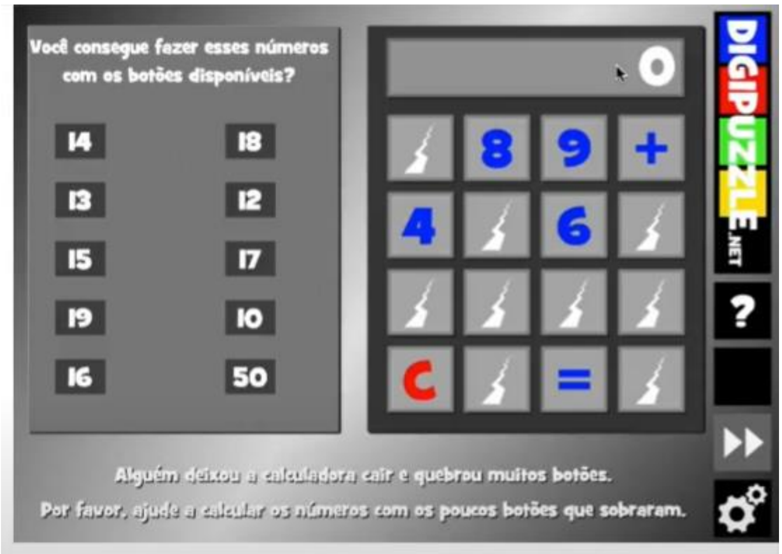
Discutimos que a atividade apresentada anteriormente possuía diversas limitações para a sala de aula, além de induzir alguns erros ou então não explorar a representação das frações pelos(as) alunos(as). Percebemos que as professoras do grupo estavam mais críticas sobre as ferramentas apresentadas, pontuando aspectos relevantes deixados de lado para o favorecimento da aprendizagem de seus(suas) estudantes. Discutimos também que esta atividade poderia levar os(as) alunos(as) a pensarem que, em uma fração, as partes precisam ter o mesmo formato, ser congruentes. Porém as partes, nas quais o todo foi dividido, precisam ser apenas iguais em medida. No caso desta atividade, devem ter a mesma área, ou seja, devem ser equivalentes.

Vejamos mais uma atividade trazida pela Profa. Ana Paula .

fonte: https://www.digipuzzle.net/digipuzzle/animals/puzzles/tilesmath_missing_addends.htm?language=portuguese&linkback=../../../pt/jogoseducativos/matematica/index.ht

Avaliamos que esta atividade possibilita a exploração tanto de questões visuais como de cálculo mental de somas 100. Para as professoras, a imagem pode, em um primeiro momento, ser mais relevante do que as operações e, diante disso, muitos(as) alunos(as) poderiam sequer pensar nas operações, mas somente focar nas peças do quebra-cabeça. Entretanto, discutimos aspectos relevantes do pensamento algébrico, como usar as cores adjacentes das peças para reconhecer o padrão de encaixe das mesmas.

Na sequência, exploramos uma atividade envolvendo calculadora com teclas ausentes (conhecida como “calculadora quebrada”). Vejamos uma parte da discussão ocorrida no grupo.



fonte: https://www.digipuzzle.net/minigames/brokencalculator/brokencalculator.htm?language=portuguese&linkback=../../pt/jogoseducativos/matematica/index.htm

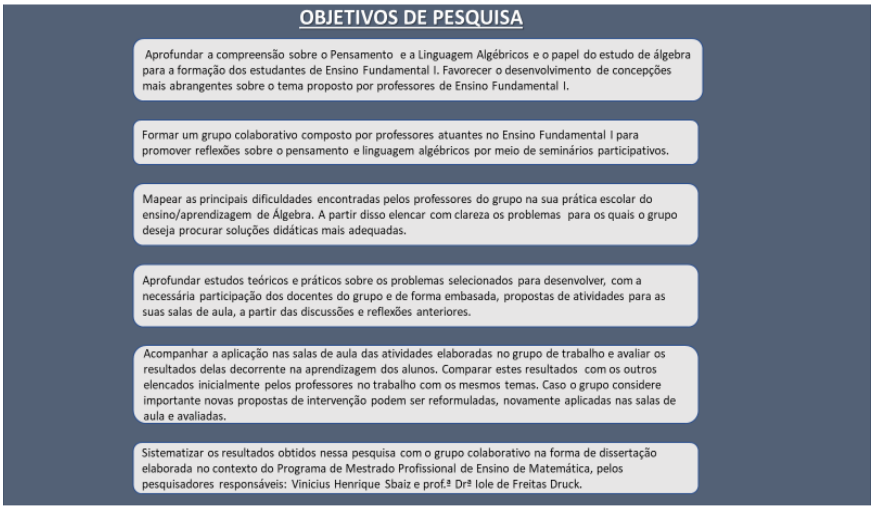
Profa. APJ: *Durante essas atividades fica claro como é importante o papel do professor, para que ele pense qual estratégia ele pode adotar para potencializar o uso, em função do seu objetivo. Porque eu acho que isso é um pouco do que falta na prática dos professores, que é ter esse tempo de se apropriar, adaptar, refletir sobre seus conhecimentos, tanto didáticos como matemáticos, possibilitando a ação dos alunos para uma aprendizagem mais autônoma e também nas práticas do que chamamos de metacognição, que é você discutir sobre o processo, sobre o que você fez. Alguns temas relacionados ao pensamento algébrico só têm graça fazer com recursos tecnológicos, porque dinamizam, porque têm esse alcance, têm esse potencial, a exemplo deste que chamamos de calculadora quebrada. Os temas são cálculo mental, equivalência de expressões, propriedades das operações sendo usadas – o que eu acho essencial como uma pré álgebra. Uma base para trabalhar as expressões algébricas, é trabalhar fortemente com as expressões numéricas equivalentes e eu acho que esse tipo de recurso tem um potencial bem interessante. Com este recurso vai aparecer mais de uma expressão para o mesmo resultado e com isso vai dar margem para a discussão entre os alunos. Outro ponto interessante é que em geral, no ensino inicial, é dada uma operação e pedimos o resultado. Neste caso, estamos fazendo diferente, estamos dando o resultado para obtermos uma expressão numérica que resulte naquele número.*

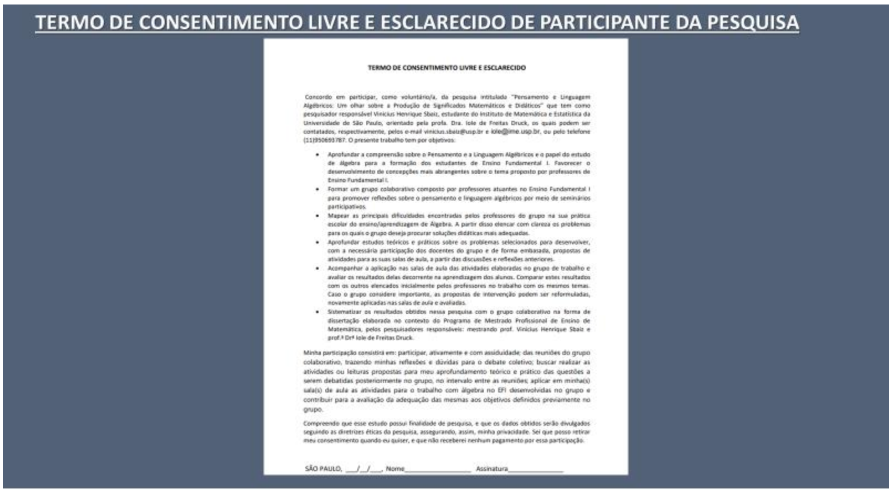
Pesq.2: *Me ocorreu que isso é um início da ideia de equações, com expressões numéricas sem variáveis ou incógnitas. Aquilo que discutimos sobre a ideia da igualdade, sobre coisas iguais serem representadas de formas diferentes.*

Esses foram alguns destaques que selecionamos do encontro sobre ferramentas digitais com a Profa. Ana Paula Jahn. Chamamos a atenção à evolução que as professoras demonstraram ao julgar a pertinência do uso das ferramentas apresentadas, além de propuseram novas alternativas de ensino, possíveis de serem exploradas em suas salas de aula. Destacamos o fato das professoras terem solicitado a abordagem deste tema em nossos encontros, por entenderem sua relevância no ensino da matemática, em particular no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Apêndice 3 - Slides dos encontros efetivamente mencionados na dissertação

Encontro 1





TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

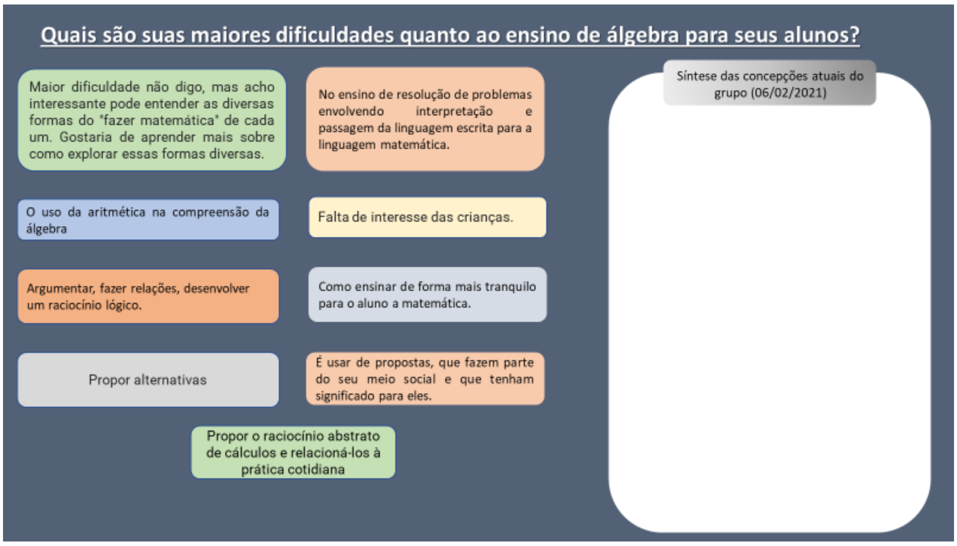
Concordo em participar, como voluntário/a, da pesquisa intitulada "Pensamento e Linguagem Algébricos: Um olhar sobre a Produção de Significados Matemáticos e Didáticos" que tem como pesquisador responsável Vinicius Henrique Sbaiz, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado pela profa. Dra. Iole de Freitas Druck, os quais podem ser contatados, respectivamente, pelos e-mail vinicius.sbaiz@usp.br e iole@ime.usp.br, ou pelo telefone (11)950693787. O presente trabalho tem por objetivos:

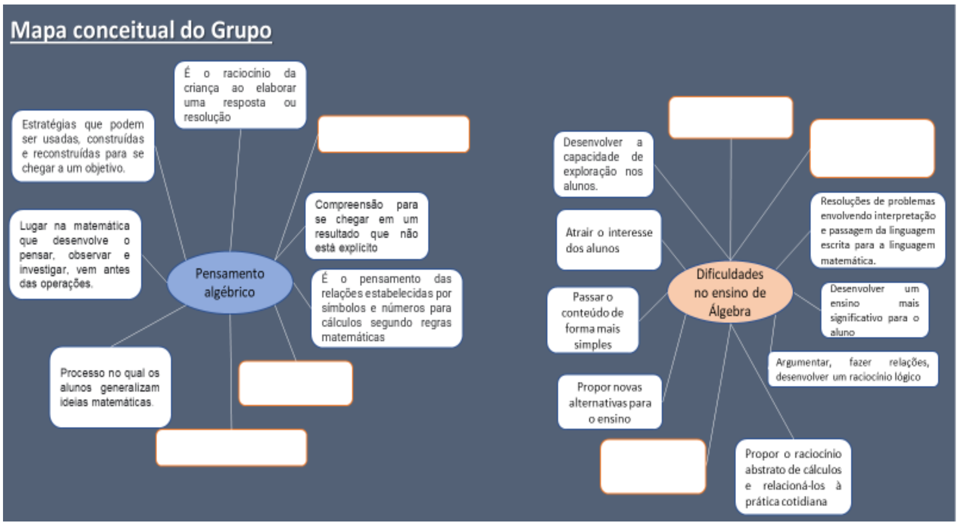
- Aprofundar a compreensão sobre o Pensamento e a Linguagem Algébricos e o papel do estudo de álgebra para a formação dos estudantes de Ensino Fundamental I. Favorecer o desenvolvimento de concepções mais abrangentes sobre o tema proposto por professores de Ensino Fundamental I.
- Formar um grupo colaborativo composto por professores atuantes no Ensino Fundamental I para promover reflexões sobre o pensamento e linguagem algébricos por meio de seminários participativos.
- Mapear as principais dificuldades encontradas pelos professores do grupo na sua prática escolar do ensino/aprendizagem de Álgebra. A partir disso elencar com clareza os problemas para os quais o grupo deseja procurar soluções didáticas mais adequadas.
- Aprofundar estudos teóricos e práticos sobre os problemas selecionados para desenvolver, com a necessária participação dos docentes do grupo e de forma embasada, propostas de atividades para as suas salas de aula, a partir das discussões e reflexões anteriores.
- Acompanhar a aplicação nas salas de aula das atividades elaboradas no grupo de trabalho e avaliar os resultados delas decorrente na aprendizagem dos alunos. Comparar estes resultados com os outros elencados inicialmente pelos professores no trabalho com os mesmos temas. Caso o grupo considere importante, as propostas de intervenção podem ser reformuladas, novamente aplicadas nas salas de aula e avaliadas.
- Sistematizar os resultados obtidos nessa pesquisa com o grupo colaborativo na forma de dissertação elaborada no contexto do Programa de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática, pelos pesquisadores responsáveis: mestrando prof. Vinicius Henrique Sbaiz e prof.ª Drª Iole de Freitas Druck.

Minha participação consistirá em: participar, ativamente e com assiduidade; das reuniões do grupo colaborativo, trazendo minhas reflexões e dúvidas para o debate coletivo; buscar realizar as atividades ou leituras propostas para meu aprofundamento teórico e prático das questões a serem debatidas posteriormente no grupo, no intervalo entre as reuniões; aplicar em minha(s) sala(s) de aula as atividades para o trabalho com álgebra no EFI desenvolvidas no grupo e contribuir para a avaliação da adequação das mesmas aos objetivos definidos previamente no grupo.

Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

SÃO PAULO, ___/__/___, Nome__________________ Assinatura_______________


Quais são suas maiores dificuldades quanto ao ensino de álgebra para seus alunos?
Maior dificuldade não digo, mas acho interessante pode entender as diversas formas do "fazer matemática" de cada um. Gostaria de aprender mais sobre como explorar essas formas diversas.
No ensino de resolução de problemas envolvendo interpretação e passagem da linguagem escrita para a linguagem matemática.
O uso da aritmética na compreensão da álgebra
Falta de interesse das crianças.
Argumentar, fazer relações, desenvolver um raciocínio lógico.
Como ensinar de forma mais tranquilo para o aluno a matemática.
Propor alternativas
É usar de propostas, que fazem parte do seu meio social e que tenham significado para eles.
Propor o raciocínio abstrato de cálculos e relacioná-los à prática cotidiana
Síntese das concepções atuais do grupo (06/02/2021)


Mapa conceitual do Grupo
Pensamento algébrico
É o raciocínio da criança ao elaborar uma resposta ou resolução
Estratégias que podem ser usadas, construídas e reconstruídas para se chegar a um objetivo.
Lugar na matemática que desenvolve o pensar, observar e investigar, vem antes das operações.
Compreensão para se chegar em um resultado que não está explícito
É o pensamento das relações estabelecidas por símbolos e números para cálculos segundo regras matemáticas
Processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas.
Dificuldades no ensino de Álgebra
Desenvolver a capacidade de exploração nos alunos.
Resoluções de problemas envolvendo interpretação e passagem da linguagem escrita para a linguagem matemática.
Atrair o interesse dos alunos
Passar o conteúdo de forma mais simples
Desenvolver um ensino mais significativo para o aluno
Argumentar, fazer relações, desenvolver um raciocínio lógico
Propor novas alternativas para o ensino
Propor o raciocínio abstrato de cálculos e relacioná-los à prática cotidiana

Encontro 3

NO ENCONTRO ANTERIOR...

- Quais são as estratégias que podem ser utilizadas para o favorecimento do Ensino de Álgebra?
  - Utilizar de novas tecnologias como ferramentas didáticas
  - Aproximar as experiências em sala de aula com a realidade do aluno
  - Contribuir para a compreensão de conexões da álgebra com as demais componentes curriculares.
- Discutimos as ideias da multiplicação
  - Como soma iterada
  - Como a quantidade de quadradinhos que compõem retângulos ou de cubinhos que compõem blocos retangulares
- Resumos sobre 'pensamento algébrico' nos três autores do texto lido
  - James Kaput

  Interpretamos, segundo o que expõem Blanton e Kaput (2005), que o pensamento algébrico pode ser compreendido numa perspectiva conceitual como aritmética generalizada, exploração de padrões e modelagem.
  - João Pedro da Ponte

  Entendemos, segundo essa perspectiva, que na resolução de problemas o pensamento algébrico se desenvolve com base em atividades de representar (ler, compreender, traduzir informações), raciocinar (relacionar, deduzir, generalizar) e resolver situações problema (usando expressões algébricas para solucionar situações do contexto matemático).
  - Luis Radford

  O autor destaca que a atribuição de significado para os objetos matemáticos deveria ser tão importante quanto o domínio da linguagem algébrica necessária para representá-los.

POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS

- "Dentre as diferentes áreas ou campos da matemática, disciplina que é conhecida por oferecer maior obstáculo à aprendizagem, a álgebra se destaca, especialmente pelo caráter abstrato pelo qual é apresentada aos estudantes" (OLIVEIRA, PAULO, 2019, apud LINS; GIMENEZ, 1997; FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017).
  - Você considera que tem caráter abstrato a geometria apresentada aos estudantes de anos inicias? Por que?
  - É possível apresentar o pensamento algébrico no anos iniciais de uma forma mais concreta? Como?
- "Procurando alternativas ao ensino da álgebra, algumas pesquisas indicam a relevância de ela ser tratada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental"(OLIVEIRA, PAULO, 2019, apud CANAVARRO, 2007; PONTE; BRANCO; MATO, 2009; MESTRE; OLIVEIRA, 2011; CAVALCANTE; FREITAS; RODRIGUES, 2014).

  "Dentre as justificativas apresentadas, está aquela que se volta para a defesa do pensamento algébrico destacando que não se trata de acrescentar temas novos ao currículo dos anos iniciais, mas, antes, entendê-lo *como uma forma de pensamento que aponta significação, profundidade e coerência à aprendizagem de outros temas*" (OLIVEIRA, PAULO, 2019, apud MESTRE, OLIVEIRA, 2011, p. 1).
  - Aponte tópicos do currículo dos anos iniciais que tenham potencial para mobilizar o desenvolvimento do pensamento algébrico.
- As autoras comentam que a constituição do pensamento algébrico demandam tempo e um trabalho "contínuo que, por meio de diferentes tipos de exploração, vai se tornando complexo, à medida que as tarefas matemáticas e os conceitos também se complexificam" (OLIVEIRA, PAULO, 2019, apud NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p. 14-15)." Dizem ainda que com esse trabalho envolve refletir sobre o objetivo que se espera alcançar, o tipo de raciocínio que se desenvolve, quais ações são possíveis, quais tarefas devem envolver.

- O que você achou das atividades propostas no artigo?
- Você acha que essas atividades são viáveis para a sua sala de aula?
- A leitura e as discussões que tivemos, despertou em você outras ideias para a exploração do pensamento algébrico em sala de aula?

Encontro 4

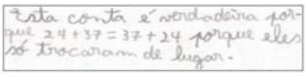
- Quais são as propriedades da adição?
  - ✓ Comutativa $2+3=3+2$
  - ✓ Associativa $(2+3)+4= 2+(3+4)$
  - ✓ Existência de elemento neutro $1=1+0$
- Quais são as propriedades da multiplicação?
  - ✓ Comutativa $2x3=3x2$
  - ✓ Associativa $(2x3)x4 = 2x(3x4)$
  - ✓ Existência de elemento neutro $2=2x1$
- Qual é a propriedade que envolve as duas operações?
  - ✓ Distributiva $2x(3+4)= (2x3) + (2x4)$
- É importante explorar essas propriedades em sala de aula de Ensino Fundamental I? Por que?
- Como podemos explorar essas propriedades em sala de aula do Ensino Fundamental I?

ATIVIDADE PARA EXPLORAÇÃO DA PROPRIEDADE COMUTATIVA NA ADIÇÃO

Questionamento feito para os alunos:

24 + 37 = 37 + 24 é verdade?

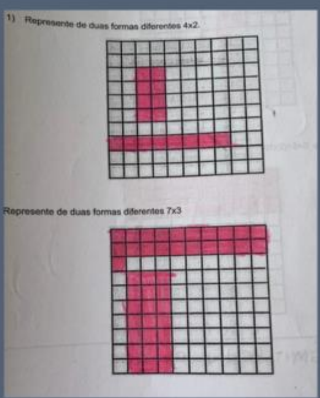
Figura 4 – Registro do aluno



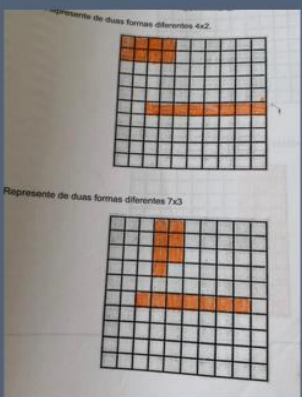
Fonte: Mestre e Oliveira, 2011, p. 11

- Como poderíamos explorar a propriedade comutativa da multiplicação?

ATIVIDADE ELABORA E APLICADA EM 2018 NA DISCIPLINA DE PROJETOS DE ENSINO – IME USP



M. 9 anos – 3° ano

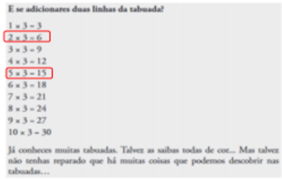


H. 8 anos – 3° ano

Encontro 5

ATIVIDADE QUE OBJETIVA GENERALIZAR A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO DIANTE DA ADIÇÃO

Figura 1 – Atividade "E se adicionares duas linhas da tabuada?"



Fonte: Canavarro, 2007, p. 97

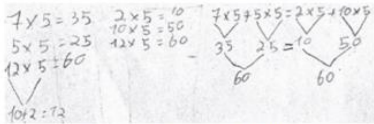
Para iniciar a exploração a professora toma duas linhas da tabela (tabuada do 3): a segunda (2 x 3 = 6) e a quinta linha (5 x 3 = 15). Solicita que os alunos somem o primeiro fator de cada uma das multiplicações, isto é, somem 2 + 5, obtendo 7. Ela recomenda que também somem os produtos de 2 x 3 e 5 x 3. Eles obtêm 21. No diálogo, os alunos identificam que as somas expressam dados da sétima linha da tabuada, isto é, 7 x 3 = 21.

$$\begin{array}{ccc} 2 \times 3 = & 6 \\ + & + \\ 5 \times 3 = & 15 \\ 7 & 21 \end{array}$$

Nesse momento a professora questiona se há possibilidade de estabelecer a mesma relação com outras linhas dessa tabuada. E de outras tabuadas? Os alunos exploram as possibilidades sugeridas e registram o obtido.

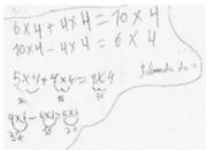
ATIVIDADE QUE OBJETIVA GENERALIZAR A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO DIANTE DA ADIÇÃO

Figura 2 - Registro de um aluno: exploração da tabuada do 5



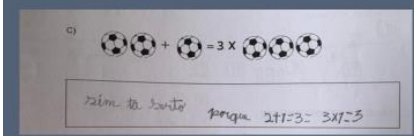
Fonte: Canavarro, 2007, p. 101

Figura 3 - Registro de um aluno: exploração da tabuada do 4

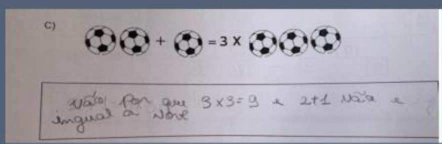


Fonte: Canavarro, 2007, p. 101

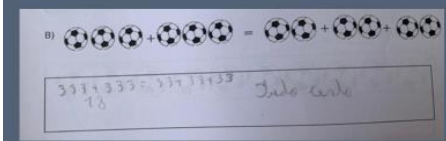
ATIVIDADE ELABORA E APLICADA EM 2018 NA DISCIPLINA DE PROJETOS DE ENSINO – IME USP



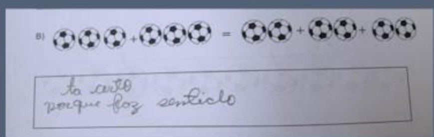
D. 8 anos – 3° ano



B. 10 anos – 5° ano



M. 10 anos – 5° ano



A. 11 anos – 5° ano

ATIVIDADE PARA EXPLORAÇÃO DE VALORES DESCONHECIDOS

É possível encontrar o valor do triângulo e do circulo?

Figura 6 – Alterando a situação proposta

$$20 - \triangle = \bigcirc$$

$$20 - \bigcirc = \triangle$$

Fonte: Cavalcante, Freitas e Rodrigues, 2014, p. 11

- O que são variáveis?
- O que são constantes?
- O que são Incógnitas ?

NO ENCONTRO ANTERIOR...

- Sobre os diálogos com os alunos nas aulas de álgebra
  - Incentivar o aluno a expressar suas ideias utilizando sua própria linguagem
  - Incentivar os alunos a produzir argumentos que expliquem seus raciocínios
  - Inserir a linguagem algébrica de forma gradual e acessível aos alunos, visando uma aprendizagem significativa sobre os objetos matemáticos estudados
- Estratégias para a introdução do pensamento algébrico na sala de aula
  - Partir das ideias dos alunos, aproximando a realidade deles com as investigações em sala de aula
  - Abordar os conteúdos com diferentes propostas que levem o aluno a vivenciar situações diversificadas, visando que formem uma visão abrangente sobre os assuntos estudados
  - Incentivar os alunos a utilizarem representações próprias e buscar entender o pensamento expresso por eles
- Sobre o caráter abstrato da álgebra
  - Todos os objetos matemáticos são abstratos
  - A geometria nas sala de aula é vista de forma mais concreta por conta do olhar humano sobre as suas representações geométricas que se tornam mais 'acessíveis' do que as representações algébricas
  - Desafio: encontrar maneiras de trabalhar os assuntos de álgebra de forma concreta
- Propriedades da adição e multiplicação

Para todo *a,b,c* pertencendo a Z :

	adição		multiplicação	
Associativa:	*a + (b + c) = (a + b) + c*	*ex: 3 + (5 + 7) = (3 + 5) + 7*	*a x (b x c) = (a x b) x c*	*ex: 3 x (5 x 7) = (3 x 5) x 7*
Comutativa:	a + b = b + a	ex: 3 + 7 = 7 + 3	a x b = b x a	ex: 3 x 7 = 7 x 3
Elemento neutro:	a + 0= a	ex: 3 + 0 = 3	a x 1= a	ex: 3 x 1 = 3

- Distributiva:

Adição/ multiplicação

a x (b x c) = ab x ac

BNCC (Base Nacional Comum Curricular)

"A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um **tipo especial de pensamento – pensamento algébrico** – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na **compreensão**, **representação** e **análise de relações quantitativas de grandezas** e, também, de **situações e estruturas matemáticas**, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos **identifiquem regularidades** e **padrões** de sequências numéricas e não numéricas, **estabeleçam leis matemáticas** que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como **criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas**, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: **equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade**. Em síntese, essa unidade temática deve **enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações**. Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam."

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Encontro 6

PROPRIEDADES LÓGICAS DA IGUALDADE- IOLE DE FREITAS DRUCK, IME/USP

A igualdade (=) é uma relação de equivalência definida em todos os conjuntos que satisfaz ainda outras propriedades. Assim, dado um conjunto arbitrário A, e sendo a, b, c elementos quaisquer de A, valem as propriedades a seguir descritas para a igualdade:

= é uma relação de equivalência em A, ou seja valem:

= 1) a = a (Reflexiva)
= 2) a = b → b = a (Simétrica)
= 3) (a = b e b = c) → a = c (Transitiva)

Se f : A → A é uma função, então, sendo a, b, c ∈ A quaisquer, valem:

= 4) a = b → f(a) = f(b)

(Toda função é unívoca) ou ("Mudando igualmente os os dois termos de uma igualdade, sepre obtenho outra igualdade.")

= 5) (k = f(b) e b = c) → k = f(c)

("Obtemos outra igualdade ao trocar um elemento que compõe a expressão de um dos termos de uma igualdade por outro elemento igual ao primeiro.")

Sendo P(a) uma propriedade qualquer sobre elementos de A, e sendo a, b ∈ A elementos arbitrários, vale:

= 6) a = b → (P(a) ↔ P(b)) ("Obtemos propriedades equivalentes, trocando um termo por outro igual a ele na propriedade.")

PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO COM ESTUDANTES DE PEDAGOGIA. ROSILDA SANTOS DO NASCIMENTO

Quais pontos vocês destacam após a leitura do texto?

Qual foi a experiencia na formação matemática no curso de pedagogia?

Quais foram as principais diferenças entre a teoria e prática em sala de aula? Quais os maiores desafios?

"O professor tem um papel determinante a ser exercido nas práticas educativas dentro da sala de aula. Será ele o responsável para que ocorra a comunicação entre os envolvidos no âmbito escolar, pois as diferentes formas de comunicação revelam a interpretação e compreensão dos estudantes ocasionando a reflexão para a aprendizagem."

"Tardif (2002) compreende que os professores são profissionais práticos reflexivos que geram saberes específicos sobre seu trabalho, possuindo capacidade de ponderação acerca de suas práticas, de objetivá-las e partilhá-las, de aperfeiçoá-las e de utilizar inovações que acreditam poder melhorar sua eficácia dentro da sua prática. A formação inicial de professores, principalmente dos anos iniciais (pedagogos), possui o desafio de desenvolver conhecimentos variados nos futuros professores, tanto do conteúdo a ser ensinado, dos aspectos pedagógicos e curriculares, para que estes o mobilizem, posteriormente, para a realização de práticas inovadoras. "

ATIVIDADE PROPOSTA

(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Atividade:

2x3 = 6 e 6x3=9

Faça como no exemplo e descubra o número faltante:

3x1=3 e 3x___=12

4x3=12 e ___x3=39

(EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável

Atividade: Você consegue preencher os espaços com os resultados das multiplicações dos bloquinhos?

 = 2+2 ____ 2x2 ___

 = 4+4+4 ____ 4x3 ___

ATIVIDADE PROPOSTA

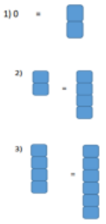
(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Se com 1 saco de arroz eu faço 4 panelas de arroz cozido, quantos sacos de arroz vou precisar para fazer 12 panelas de arroz cozido?

(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Vamos aprender mais sobre multiplicação do número 2?

Primeiro, desenhe dois quadradinhos a mais em cada nova coluna.



Adicionando 2 quadradinhos por vez, quantos quadradinhos a coluna de número 5 terá ao todo?

ATIVIDADE PROPOSTA

(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.

Atividade:

Complete a sequência com os desenhos faltantes de acordo com o padrão abaixo:

Encontro 7

BNCC (Base Nacional Comum Curricular)
1º ano

- Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências
- Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)

Habilidades
(EF01MA09) **Organizar e ordenar** objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.

(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Atividade:

2x3 = 6 e 6x3=9

Faça como no exemplo e descubra o número faltante:

3x1=3 e 3x___=12

4x3=12 e ___x3=39

BNCC (Base Nacional Comum Curricular)
1º ano

- Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências
- Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)

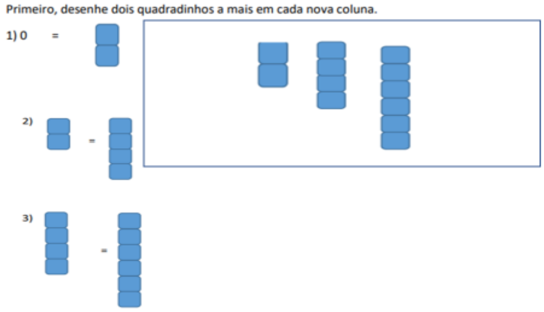
Habilidades
(EF01MA09) **Organizar e ordenar** objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.

(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Vamos aprender mais sobre multiplicação do número 2?

Primeiro, desenhe dois quadradinhos a mais em cada nova coluna.



Adicionando 2 quadradinhos por vez, quantos quadradinhos a coluna de número 5 terá ao todo?

BNCC (Base Nacional Comum Curricular)
3º ano

- Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas
- Relação de igualdade

Habilidades

(EF03MA10) **Identificar regularidades** em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

(EF03MA11) **Compreender a ideia de igualdade** para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

a)PARADA PARA CALCULAR(modificações depois de orientações da aula passada)

1 Observe:

exemplo

Agora é a sua vez!
escreva o que falta em cada operação.

_+ 9=13

_+4= 17

_- 2 = _

15- _ =1 4

BNCC (Base Nacional Comum Curricular)

3º ano

- Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas
- Relação de igualdade

Habilidades

(EF03MA10) **Identificar regularidades** em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

(EF03MA11) **Compreender a ideia de igualdade** para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

b) Descubra a sequência:

2, 4, , 8, , , 14....

55, , 65, 70, . 80...

100, , 90, , , 75, 70....

BNCC (Base Nacional Comum Curricular)

3º ano

- Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas
- Relação de igualdade

Habilidades

(EF03MA10) **Identificar regularidades** em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

(EF03MA11) **Compreender a ideia de igualdade** para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

2- Quantas diferenças você consegue criar usando os algarismos 2, 3, 6 e 8?
exemplos: 6-3= 3

23-6 = 17

Encontro 8

PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO COM ESTUDANTES DE PEDAGOGIA. ROSILDA SANTOS DO NASCIMENTO

Quais pontos vocês destacam após a leitura do texto?

Qual foi a experiencia na formação matemática no curso de pedagogia?

Quais foram as principais diferenças entre a teoria e prática em sala de aula? Quais os maiores desafios?

"O professor tem um papel determinante a ser exercido nas práticas educativas dentro da sala de aula. Será ele o responsável para que ocorra a comunicação entre os envolvidos no âmbito escolar, pois as diferentes formas de comunicação revelam a interpretação e compreensão dos estudantes ocasionando a reflexão para a aprendizagem."

"Tardif (2002) compreende que os professores são profissionais práticos reflexivos que geram saberes específicos sobre seu trabalho, possuindo capacidade de ponderação acerca de suas práticas, de objetivá-las e partilhá-las, de aperfeiçoá-las e de utilizar inovações que acreditam poder melhorar sua eficácia dentro da sua prática. A formação inicial de professores, principalmente dos anos iniciais (pedagogos), possui o desafio de desenvolver conhecimentos variados nos futuros professores, tanto do conteúdo a ser ensinado, dos aspectos pedagógicos e curriculares, para que estes o mobilizem, posteriormente, para a realização de práticas inovadoras. "

PROPRIEDADES LÓGICAS DA IGUALDADE- IOLE DE FREITAS DRUCK, IME/USP

A igualdade (=) é uma relação de equivalência definida em todos os conjuntos que satisfaz ainda outras propriedades. Assim, dado um conjunto arbitrário A, e sendo a, b, c elementos quaisquer de A, valem as propriedades a seguir descritas para a igualdade:

= é uma relação de equivalência em A, ou seja valem:

= 1) a = a (Reflexiva)
= 2) a = b → b = a (Simétrica)
= 3) (a = b e b = c) → a = c (Transitiva)

Se f : A → A é uma função, então, sendo a, b, c ∈ A quaisquer, valem:

= 4) a = b → f(a) = f(b)

(Toda função é unívoca) ou ("Mudando igualmente os os dois termos de uma igualdade, sepre obtenho outra igualdade.")

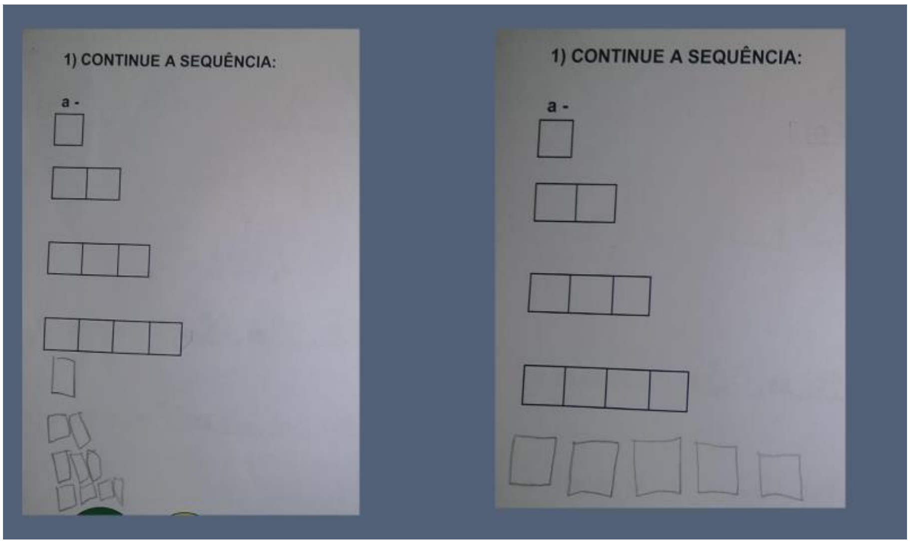
= 5) (k = f(b) e b = c) → k = f(c)

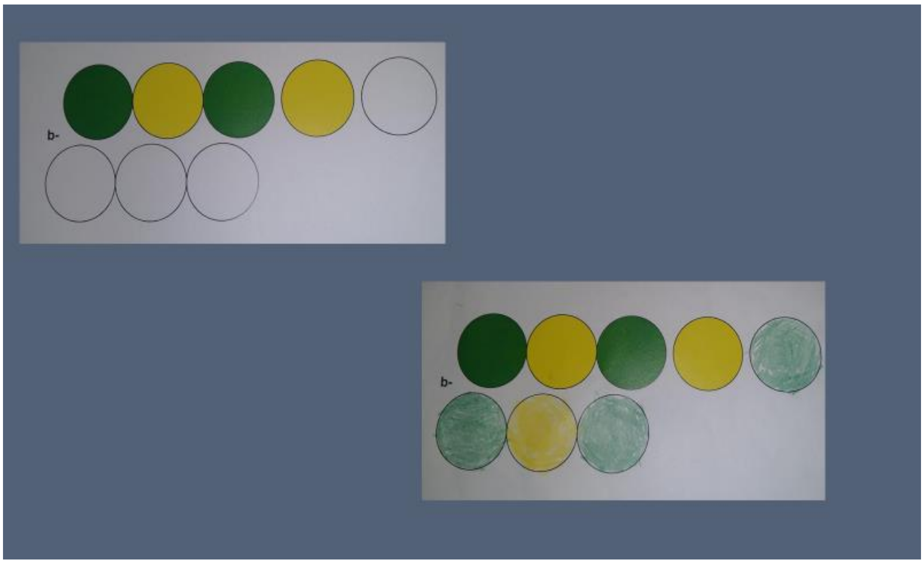
("Obtemos outra igualdade ao trocar um elemento que compõe a expressão de um dos termos de uma igualdade por outro elemento igual ao primeiro.")

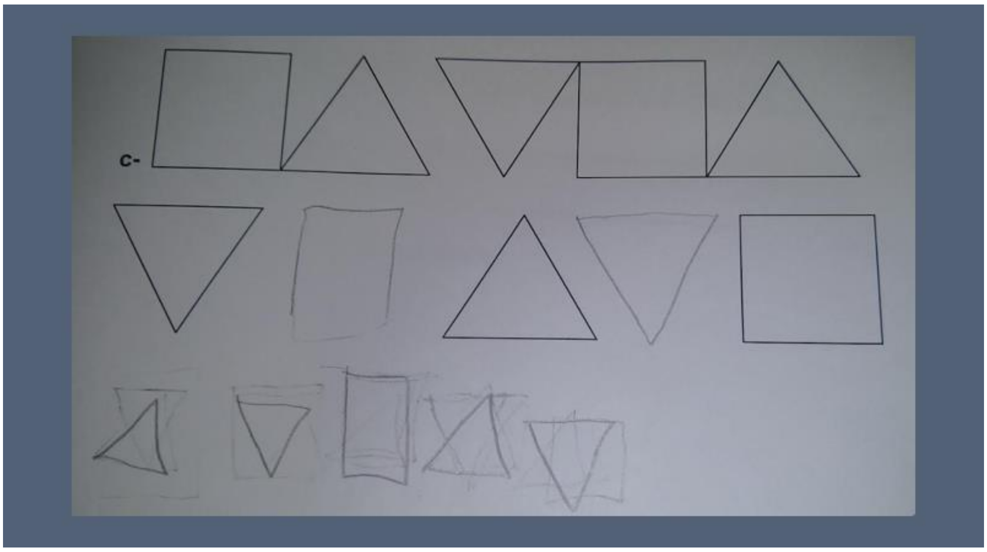
Sendo P(a) uma propriedade qualquer sobre elementos de A, e sendo a, b ∈ A elementos arbitrários, vale:

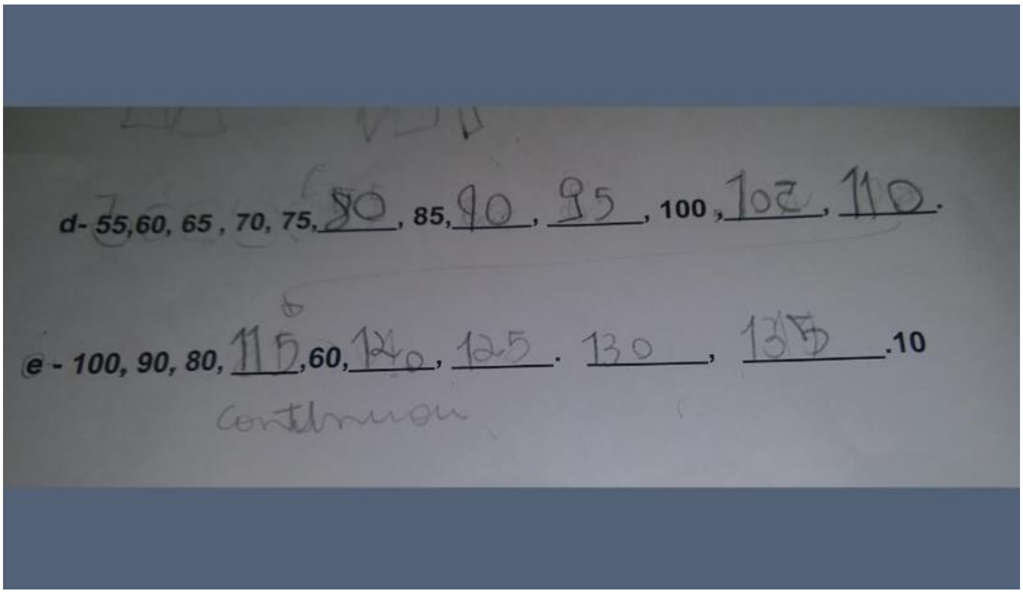
= 6) a = b → (P(a) ↔ P(b)) ("Obtemos propriedades equivalentes, trocando um termo por outro igual a ele na propriedade.")

Encontro 9



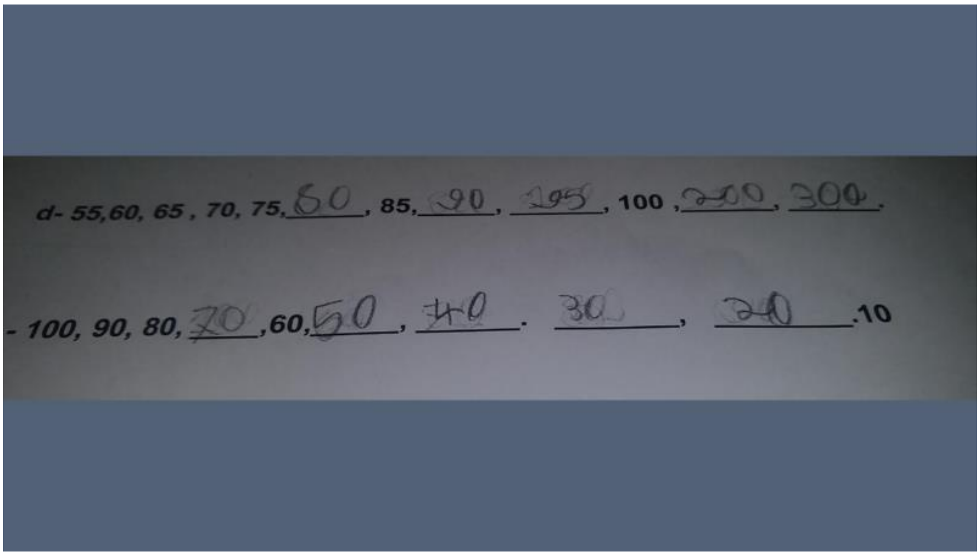





d- 55,60, 65 , 70, 75, 80 , 85, 90 , 95 , 100 , 102 , 110 .

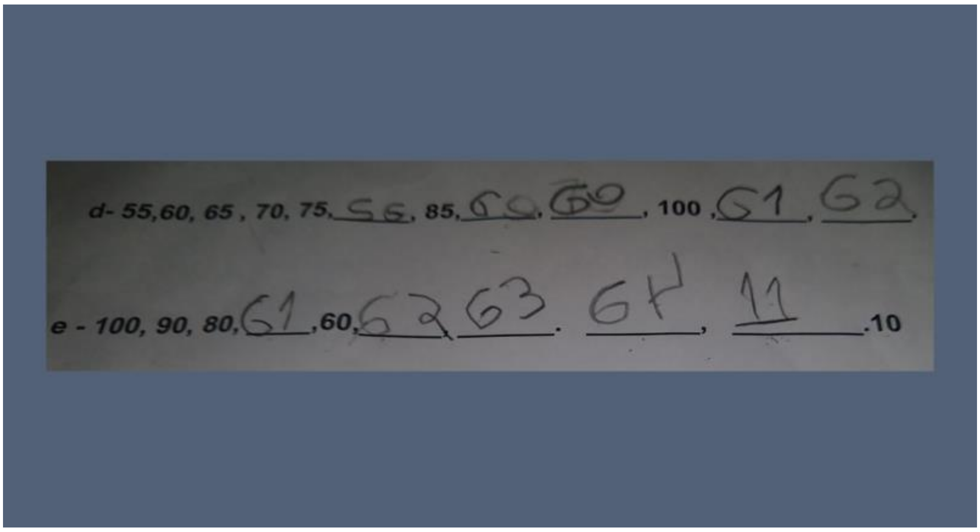
e - 100, 90, 80, 115 ,60, 120 , 125 . 130 , 135 .10

continuou



d- 55,60, 65 , 70, 75, 80 , 85, 90 , 195 , 100 , 200 , 300 .

- 100, 90, 80, 70 ,60, 50 , 40 . 30 , 20 .10



d- 55,60, 65 , 70, 75, 56 , 85, 60 , 60 , 100 , 61 , 62 .

e - 100, 90, 80, 61 ,60, 62 63 . 64 , 11 .10

Encontro 12

Romulo Campos Lins (1955-2017)- LINS

Professor Dr. Romulo Campos Lins, licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (1986) e doutorado em Educação Matemática pela University of Nottingham, UK (1992), foi professor Livre Docente da UNESP de Rio Claro, onde atuou por 25 anos junto aos programas de mestrado e doutorado. Por toda a sua obra, é considerado por seus pares como um dos principais pensadores de sua geração e reconhecido internacionalmente por seus estudos sobre Álgebra Thinking.

Lins publicou em coautoria com o professor Joaquim Gimenez o livro "Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI", Ed. Papirus (1997) obra que inspirou inúmeros trabalhos sobre o ensino da álgebra, também organizou e editou o livro "Perspectives on School Algebra", publicado pela prestigiosa editora Kluewer (2001). Ao longo de sua vida acadêmica criou o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) um modelo epistemológico e uma ferramenta teórica poderosa adotada por professores e pesquisadores em Educação Matemática, liderava o grupo Sigma-t, de mestres e doutores que orientou e que continuam sua obra.

Para além do Lattes foi antes de tudo um grande sujeito, conhecido por seu humor refinado, sarcasmo na medida e uma inteligência arguta. Era um contador de histórias, apreciador de um bom vinho e de comida que preparava e temperava com conversas que se alongavam madrugada adentro. Conhecido por sua integridade e ética, amou e foi amado, bom marido, bom pai e um amigo que deixa todos que tiveram o prazer de partilhar sua companhia, tristes, órfãos, saudosos e consternados. Era único, não será substituído.

Fonte: https://sigma-t.org/romulo-lins/

Proposta de investigação

Referência da atividade: Lins, R. C. & Giménez, J. (1997). Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus.

Referência teórica: LINS, R.C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, C.L. et al (org.). Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p.11-30.

Disponível em: https://sigma-t.org/romulo-lins/

Proposta de investigação

Esses 2 tanques são iguais.
Para encher o primeiro tanque são precisos mais 9 baldes , para encher o segundo tanque são precisos mais 5 baldes

Enunciação é produção comunicativa daquilo que acreditamos. (LINS, R.C, 2012)

O que podemos falar sobre essa situação?

Como garantimos essas afirmações ?

Respostas de alunos

JIA "Podemos ver, no desenho."

Jm-"Porque falta mais para encher o tanque da esquerda (9 baldes) do que para encher o da direita (apenas 5 baldes)."

Justificação não é justificativa, não é explicação, mas sim o que o individuo acredita autorizar a dizer o que diz. (LINS, R.C, 2012)

Proposta de investigação

O que podemos dizer sobre o conhecimento dos alunos nas respostas anteriores?

O que mais podemos dizer sobre os tanques?

Conhecimento consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz). (LINS, R.C, 2012)

Respostas de alunos

C-A2 -"Se acrescentarmos dois baldes de água no tanque da esquerda, ainda assim vai haver menos água do que no da direita."

JzB -"Se acrescentarmos dois baldes de água no tanque da esquerda, vão ficar faltando 7 baldes para enchê-lo, e no da direita faltam apenas 5 baldes."

Proposta de investigação

Atribuímos nomes às quantidade de água de cada tanque, e usamos "b" para denotar a quantidade de água de um balde completo. Com esses nomes, o que mais pode ser afirmado?

Respostas de alunos

C-A1-"X <Y"
C-A2 -"X + 2b < Y"
C-A3 -"X + 4b = Y"
J3 -"Se juntarmos 4 baldes a X, ficarão faltando 5 baldes do lado esquerdo, que é o mesmo que falta do lado direito."
C-A4 -"Y- 4b = X"
J4 --"Se retirarmos 4 baldes de Y, ficarão faltando 9 baldes do lado direito, que é o mesmo que falta do lado esquerdo."

Significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade.

Nessa atividade qual é então o objeto, no sentido do autor?

O significado de um objeto, no interior de uma atividade, não é tudo que poderia ser dito a respeito da coisa da qual se fala (nesta ou em outras atividades) (LINS, R.C, 2012)

[...] com relação ao pensamento científico, é natural considerar que este seja estruturado por conceitos. Parte considerável da atividade científica consiste, na verdade, em articular novas idéias ou evidência experimental aos conceitos básicos da ciência em questão. (LINS, 1996b, p.137)

Em relação ao ensino e aprendizagem de conceitos científicos o autor xxx coloca o seguinte questionamento:

Para nós, o problema, ao assumirmos que o pensamento estrutura-se por conceitos, reside no fato de não existir nenhuma alternativa que nos permita não ler as pessoas pela falta. Isto nos desviaria de uma de nossas questões centrais: entender por que as pessoas dizem o que dizem. Nesse sentido é que uma posição alternativa faz-se necessária. A questão que se põe então é: que elementos de outra natureza, que não conceitos, estruturam o pensamento?

SILVA, Amarildo Melchiades da. Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática. Rio Claro. 2003. 147p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista

O significado de um objeto, no interior de uma atividade, não é tudo que poderia ser dito a respeito da coisa da qual se fala (nesta ou em outras atividades) (LINS, R.C, 2012)

Proposta de investigação

Núcleos são verdades consensuais que não requerem justificações, em uma atividade (LINS, R.C, 2012)

Campo semântico é um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade. É como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo dentro de seus limites. (LINS, R.C, 2012)

O que existe de diferença entre as respostas?

Do aluno que disse "X + 4b = Y" com o aluno que disse "Y- 4b = X" ?

Proposta de investigação

Que justificações poderiam se dar para a seguinte crença-afirmação?

C-A5- "Y- X = 4b"

Essa crença afirmação está no mesmo núcleo e mesmo campo semântico da atividade proposta?

Para nós, pode parecer natural dizer que "se tiramos o tanto de X do tanto de Y vão restar apenas 4 baldes", mas para as crianças isso pode parecer um tanto estranho: como tirar de Y um tanto (X) que não conhecemos? Como seria possível fazer isso "na prática"? Essa pode parecer uma questão menor, mas não é, e descartá-la como sem importância pode levar a um impasse no diálogo com os alunos. É sem dúvida possível realizar a seguinte operação: retire um balde do tanque esquerdo e um do tanque direito. Quando o tanque esquerdo for esgotado, sobrarão 4 baldes no tanque direito, o que quer dizer que a diferença entre os dois tanques é de 4 baldes.

(Lins, R. C. & Giménez, J. (1997). Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus.)

Proposta de investigação

É possível trabalhar com essa atividade em suas salas de aula? Se sim, aplique a atividade em sua sala de aula e observe os significados desenvolvidos pelos estudantes.

Sugestão de atividade:

Problema: Tenho 2 baldes, sendo um deles com capacidade de 5 litros e o outro com 7 litros
Utilizando apenas esses 2 baldes como eu consigo obter exatamente 1l, 2l, 3l, 4l, 5l,6l, 7l de água?

Quais conceitos matemáticos podem ser trabalhados com esse problema?

Desafio: Proponha um roteiro de atividade para seus alunos de maneira que vocês possam observar: os conhecimentos, justificativas, núcleos e significados atribuídos por eles

Encontro 13

NO ENCONTRO ANTERIOR...

- Discutimos sobre o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS)

Enunciação é produção comunicativa daquilo que acreditamos. (LINS, R.C, 2012)

Justificação não é justificativa, não é explicação, mas sim o que o individuo acredita o autorizar a dizer o que diz. (LINS, R.C, 2012)

Conhecimento consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz). (LINS, R.C, 2012)

Significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade.

O significado de um objeto, no interior de uma atividade, não é tudo que poderia ser dito a respeito da coisa da qual se fala (nesta ou em outras atividades) (LINS, R.C, 2012)

Núcleos são verdades consensuais que não requerem justificações, em uma atividade (LINS, R.C, 2012)

Campo semântico é um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade.
É como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo dentro de seus limites. (LINS, R.C, 2012)

Desafio proposto

<u>Problema</u>: Tenho 2 baldes, sendo um deles com capacidade de 5 litros e o outro de 7 litros. Utilizando apenas esses 2 baldes como eu consigo obter exatamente 1l, 2l, 3l, 4l, 5l,6l, 7l de água?

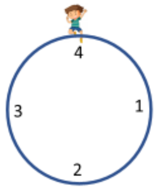
Quais conceitos matemáticos podem ser trabalhados com esse problema?

<u>Desafio</u>: Proponha um roteiro de atividade para seus alunos de maneira que você possa observar conhecimentos, justificativas, núcleos e significados atribuídos por eles.

- Qual foi a sua solução para o problema proposto?
- Como foi a experiência em sala de aula?
- Quais os maiores desafios encontrados na atividade proposta?
- Como foi a participação dos alunos ?

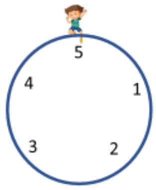
Novo Desafio proposto

<u>Problema</u>: João está no número 4, se ele der saldos de 1 em 1 ele vai passar em todos os números do círculo?



E de 2 em 2? E de 3 em 3? De 4 em 4?

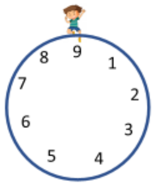
<u>Problema</u>: O no círculo abaixo, pulando de 2 em 2 é possível passar em todos os números?



E de 3 em 3? E de 4 em 4? De 5 em 6?

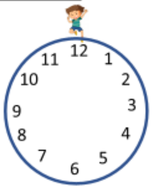
Novo Desafio proposto

<u>Problema</u>: O no circulo de 9 pontos, pulando de 2 em 2 é possível passar em todos os números?



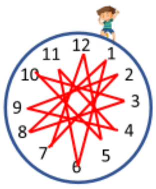
Pulando de quanto em quanto é possível passar em todos os pontos?

<u>Problema</u>: O no circulo de 12 pontos, pulando de quanto em quanto passamos por todos ?

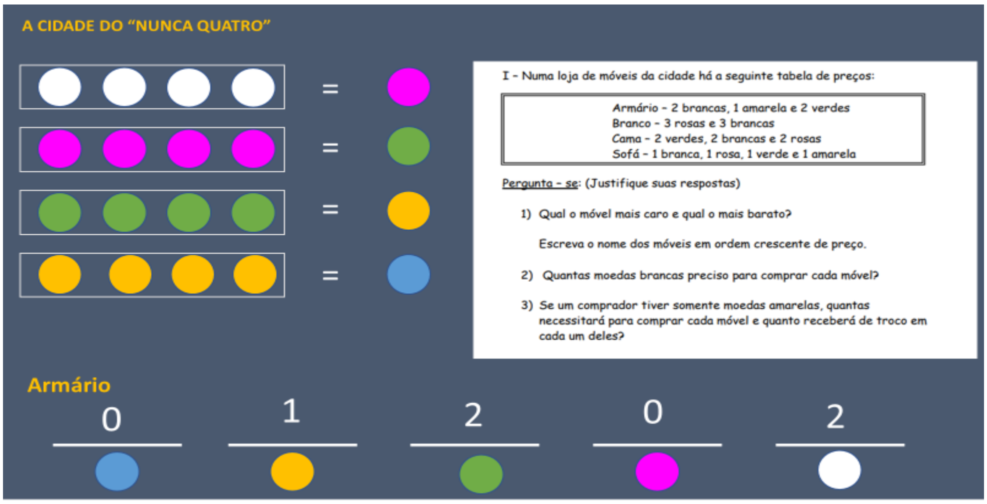


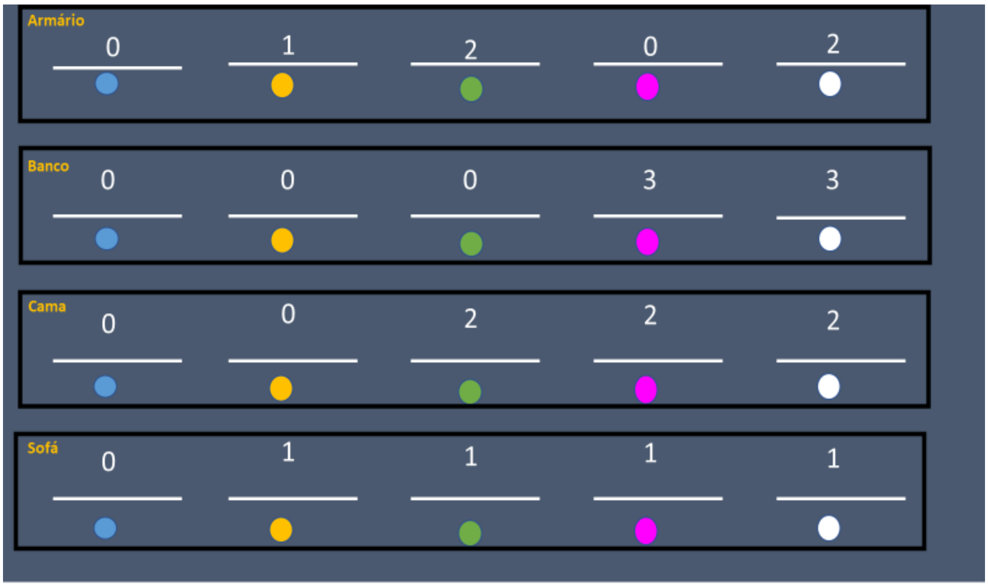
Novo Desafio proposto

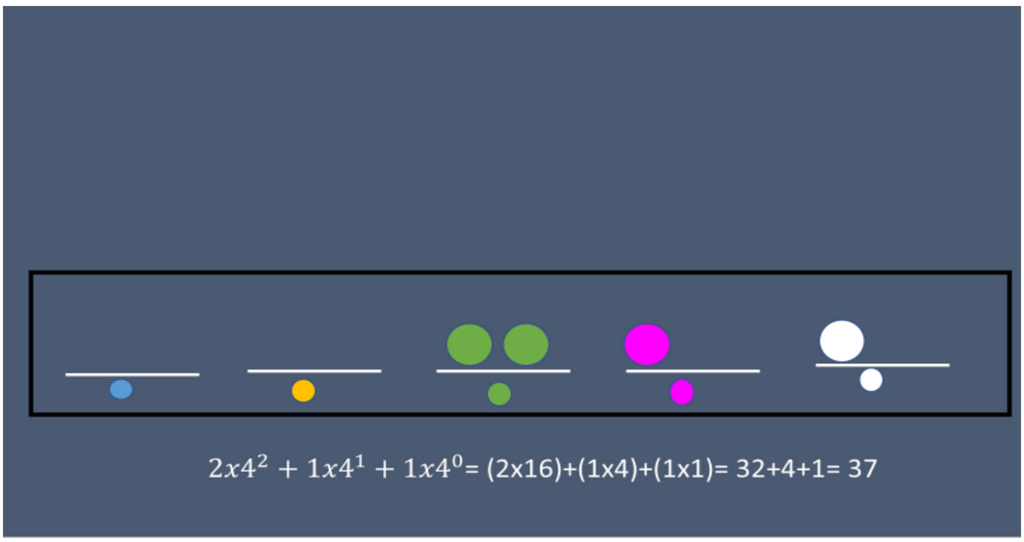
<u>Exemplo</u> : De 7 em 7



Encontro 17


A CIDADE DO "NUNCA QUATRO"
=
=
=
=
I - Numa loja de móveis da cidade há a seguinte tabela de preços:
Armário - 2 brancas, 1 amarela e 2 verdes
Branco - 3 rosas e 3 brancas
Cama - 2 verdes, 2 brancas e 2 rosas
Sofá - 1 branca, 1 rosa, 1 verde e 1 amarela
Pergunta - se: (Justifique suas respostas)
1) Qual o móvel mais caro e qual o mais barato?
Escreva o nome dos móveis em ordem crescente de preço.
2) Quantas moedas brancas preciso para comprar cada móvel?
3) Se um comprador tiver somente moedas amarelas, quantas necessitará para comprar cada móvel e quanto receberá de troco em cada um deles?
Armário
0
1
2
0
2


Armário
0
1
2
0
2
Banco
0
0
0
3
3
Cama
0
0
2
2
2
Sofá
0
1
1
1
1


$2x4^2 + 1x4^1 + 1x4^0$= (2x16)+(1x4)+(1x1)= 32+4+1= 37