Operações com frações racionais: uma abordagem matemática utilizando teoria musical

Luan Moreira Batista Oliveira

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do diploma
de
Mestre em Ciências

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dr. David Pires Dias

São Paulo, Dezembro de 2023

Operações com frações racionais: uma abordagem matemática utilizando teoria musical

Esta versão contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 13/12/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. David Pires Dias (orientador) - IME-USP
- Prof. Márcio Fabiano da Silva - UFABC
- Profa. Dra. Elisabete Teresinha Guerato - IFSP-SP

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, que além de me abençoaram com o dom da vida, sempre batalharam pela minha educação, serviram e servirão eternamente como exemplo para mim.

Ao meu orientador, David Pires Dias, que sempre acreditou em mim e apoiou minhas ideias, sendo para mim o maior exemplo de educador. Sua paciência e sabedoria foram fundamentais para o sucesso desse trabalho.

Ao Instuto de Matemática e Estatística (IME), que foi minha segunda casa durante a graduação e mestrado, e foi responsável por me fornecer educação de qualidade e gratuita.

Aos meus professores, em especial aos do IME, sempre muito comprometidos com a educação dos estudantes do instituto, o que permitiu que eu chegasse até aqui.

À minha companheira Sara, por todo seu apoio, confiança em mim e por me motivar a ser melhor a cada dia.

Aos meus amigos e colegas que fiz durante a minha trajetória, em especial ao Lucas e à Dayene, pelos momentos de diversão e pelas palavras motivadoras.

À direção e coordenação escola que cedeu espaço para o meu trabalho, sempre de forma educada e receptiva.

Resumo

OLIVEIRA, L. M. B. **Operações com frações racionais: uma abordagem matemática utilizando teoria musical**. 2023. 82 p.. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Esse trabalho propõe uma sequência didática voltada para estudantes do Ensino Fundamental anos finais, em forma de oficinas. O objetivo dessas oficinas é construir, em seu público-alvo, conhecimentos a respeito das operações com números racionais usando como suporte e objeto motivador, conceitos de leitura de partituras e escala musical pitagórica, estes que são objetos de estudo da teoria musical. Considera-se importante que estudantes sejam introduzidos à teoria musical em algum momento de sua vida escolar, o que pode-se verificar presente nas discussões aqui trazidas. Os dois primeiros capítulos desse texto apresentam as justificativas por trás da escolha do tema, os objetivos das oficinas da perspectiva curricular/pedagógica e a metodologia sugerida para professores que optarem por realizar as atividades aqui presentes. A proposta foi levada a uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental da rede pública do Estado de São Paulo, localizada na zona norte da cidade de São Paulo, na primeira metade do ano de 2022. O trabalho relata as experiências vividas durante as aplicações, as dificuldades encontradas e visões a respeito das aprendizagens por parte dos estudantes. O ano de 2022 foi marcado pelo retorno definitivo do modelo presencial de educação após a pandemia de COVID-19, que submeteu o sistema educacional brasileiro ao modelo de ensino remoto. No momento em que as oficinas foram aplicadas, ainda era obrigatório o uso de máscaras em ambientes fechados, como salas de aula. Apesar do contexto pós-pandêmico e dos diversos obstáculos presentes nos momentos de aplicação das oficinas, a motivação, engajamento nas atividades e registros falados e escritos pelos participantes sugerem que as atividades propostas pelas oficinas podem contribuir para proporcionar ambientes de aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Números Racionais, Frações, Teoria Musical, Ensino de Matemática.

Abstract

OLIVEIRA, L. M. B. **Operations with Rational Fractions: A Mathematical Approach Using Music Theory**. 2010. 82 p. Thesis (Master) - Institute of Mathematics e Statistics, University of São Paulo, São Paulo.

This paper proposes a didact sequence for final years students of the elementary school, in workshop format. The objective of these workshops is building knowledge, in its target audience, about operations with rational fractions using as support and motivation the sheet music reading and Pythagorean scale, those which are study objects of musical theory. It is considered important that students are presented to music theory at some point moment of their scholar life, as can be seen in the discussions presented here. The first two chapters of this text present the justifications behind the choice of the theme, the objectives of the workshops from a curriculum/pedagogical perspective, and the suggested methodology for teachers who choose to use the activities presented here. The proposal was implemented with a 6th-grade class in the public school system of the State of São Paulo, located in the northern zone of the city of São Paulo, in the first half of the year 2022. The paper reports the experiences during the implementations, the difficulties encountered, and the students perspectives on their learning. The year 2022 was marked by the definitive return to in-person education after the COVID-19 pandemic, which subjected the Brazilian educational system to remote teaching. At the time the workshops were conducted, the use of masks in indoor environments, such as classrooms, was still mandatory. Despite the post-pandemic context and the various obstacles encountered during the workshop sessions, the motivation, engagement in activities, and spoken and written records by the participants suggest that the activities proposed by the workshops can contribute to creating environments of meaningful learning.

Keywords: Rational Numbers, Fractions, Music Theory, Mathematics Education.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

Ensinar matemática pode ser um objetivo desafiador para os educadores, tão quanto é para os jovens aprendê-la. Debates sobre o futuro da educação brasileira apresentam-se cada vez mais comuns entre a população, muitos motivados pelo momento político de transição para um novo currículo escolar ou mesmo pela instabilidade política e sanitária vivida pelo país durante o período de pandemia.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi instituída em 2017 de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), como parte da reforma educacional brasileira. O documento alega garantir uma educação mais igualitária e de qualidade, assegurando que todos os alunos tenham acesso a uma formação básica comum, independentemente de sua localização geográfica ou condição socioeconômica.

Por outro lado, vemos um Brasil cada vez mais distante da educação musical. A autora Cecília Cavalieri França discorre em seu artigo pela Revista "Música na Educação Brasileira":

> É frustrante que, após tanto empenho da área em construir a percepção de música como campo epistemológico inseparável da cultura e do contexto, o documento pareça reduzir o fervilhar criativo da criança dessa idade ao ensaio do hit emocional do momento para apresentação do dia das mães! Graças a essa concepção, grande parte do que se pratica e se consome em educação musical, especialmente nos segmentos iniciais, tem sido limitado a fórmulas artisticamente vernaculares, de pequeno impacto estético e pouca relevância cultural. (FRANÇA, 2020, p.37)

Tendo em vista, por exemplo, a teoria musical que inclui aspectos como leitura de partituras, estruturação harmônica e melódica, etc., sequer é citada na BNCC, como alguns defensores do ensino musical poderiam desejar:

> A falta de recursos na escrita reflete tanto quanto endossa uma prática empobrecida, apática e imitativa de modelos estereotipados. Em vez de priorizar o fazer musical espontâneo e criativo, o texto enfatiza repetidamente a exploração sonora "para acompanhar" repertórios escolhidos pelo professor. Tal empobrecimento revela uma desconexão com a natureza do desenvolvimento da criança. (FRANÇA, 2020, p.36).

A nova proposta deixa o ensino de música entre as disciplinas de arte e língua portuguesa, sendo abordada em caráter secundário mesmo entre estas. As habilidades propostas pela BNCC relacionadas à música são inespecíficas o bastante para que essas possam ser perdidas no decorrer da Educação Básica.

A Matemática e a Música já foram próximas o bastante para serem consideradas uma mesma área de estudo. Por volta do século V a.C., Pitágoras formulou uma estrutura de ensino focado em sete temas essenciais, que pouco mais tarde fora conhecido como as sete artes essenciais. Essas sete artes dividiam-se em dois blocos, conhecidos como *trivium* e *quadrivium*. Keith Critchlow explica no livro "*Quadrivium*":

> O *Trivium* da linguagem está estruturado sobre os valores fundamentais e objetivos da Verdade, da Beleza e da Bondade. Seus três temas são: a Gramática, que assegura a boa estrutura da linguagem; a Lógica, para encontrar a verdade; e a Retórica, para o belo uso da linguagem ao expressar a verdade. O *Quadrivium* surge do mais reverenciado de todos os assuntos disponíveis à mente humana: o número. A primeira dessas disciplinas é a Aritmética. A segunda é a Geometria ou a ordem do espaço como número no espaço. A terceira é a Harmonia, que, para Platão, significava o número no tempo. A quarta é a Astronomia ou o número no espaço e tempo. Todos esses estudos oferecem em uma escada segura e confiável para alcançar os valores simultâneos da Verdade, da Beleza e da Bondade. Por sua vez, isso leva ao valor essencial e harmonioso da Totalidade. (CRITCHLOW, 2014, p.7).

Com o desenvolvimento da Matemática e da Música, naturalmente o caráter criativo e cultural da música como manifestação artística conduziu a uma diferenciação entre esses dois campos de estudo. Atualmente, reconhecemos essas disciplinas como independentes no contexto educacional, muitas vezes categorizadas em diferentes grandes áreas de conhecimento. A música, por exemplo, geralmente é situada no campo das humanidades ou das artes, enquanto a matemática é tida como ciência exata ou como um campo próprio.

À medida que os jovens se afastam cada vez mais da teoria musical e se enclausuram em uma cultura restrita a determinados estilos e gêneros musicais, emerge uma inquietação sobre as consequências significativas de privá-los de um estudo mais profundo da música. Surge, portanto, a relevância de oferecer um debate sobre perspectivas e conceitos musicais. Através dessa diversidade de abordagens, as pessoas podem ter a oportunidade de discernir e escolher as suas preferências musicais de forma mais informada e consciente.

Dessa forma, surge uma pergunta instigante: seria possível reestabelecer a conexão entre esses dois domínios, a fim de buscar uma abordagem singular para o ensino de determinados tópicos matemáticos presentes no currículo educacional brasileiro? Mais do que isso, tal iniciativa poderia abrir aos alunos uma janela para uma área até então pouco explorada por eles, convidando-os a refletir sobre a interseção entre a matemática e a música, e as oportunidades valiosas que podem emergir desse encontro?

Com o intuito de responder essas questões, essa dissertação se propôs a apresentar oficinas cujo público alvo eram estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental da rede de escolas estaduais de São Paulo, não excluindo a possibilidade de que as mesmas fossem aplicadas a estudantes de outros anos e de outras redes de ensino. Essa dissertação traz também os resultados obtidos em uma aplicação deste material, analisando os resultados obtidos pelos relatos e o material produzido pelos participantes, a fim de compreender a viabilidade e validade de tal sequência didática como uma estratégia genuína para o ensino de Matemática ligado ao ensino de teoria musical e sua história.

Este trabalho vem com uma proposta de sequência didática organizada em oficinas que, por meio de conceitos de teoria musical, introduz ou reforça aos participantes, as operações entre frações racionais e como realizá-las. Para tal, utilizam-se duas oficinas que abordaram diferentes temas: uma relacionando as operações de adição e subtração de frações com o auxílio dos símbolos rítmicos utilizados em partituras e outra relacionando as operações de produto e divisão entre frações por meio de uma réplica do experimento do monocórdio de Pitágoras e a construção da escala musical pitagórica.

O monocórdio, de acordo com o músico e filósofo Siemen Terpstra (1993), é uma ferramenta para medições de intervalos musicais que em sua forma mais simples consiste em uma corda esticada entre duas hastes fixas em uma tábua de madeira ou em uma caixa sonora mais apropriada. Terpstra (1993) também constata que o monocórdio foi uma fonte primária para os primeiros estudos científicos sobre harmonia, que vislumbravam aplicações em teoria de afinação, aritmética, geometria e astronomia, sendo também o antecessor de todos os instrumentos de traste[1]. Ainda que existam registros sumérios sobre o monocórdio, popularizou-se o experimento realizado por Pitágoras que utilizava o monocórdio para construir uma escala musical utilizando as notas harmônicas que se conseguia pelo uso de razões numéricas.

No caso da oficina sobre o experimento do monocórdio, optou-se por trabalhar com o instrumento pronto, trazido aos estudantes para investigação. A intenção inicial era trazer diversos monocórdios para que cada grupo de estudantes pudesse ter mais tempo e liberdade com o instrumento, porém devido a uma série de negociações falhas com alguns luthiers (profissional que confecciona instrumentos de corda), houve a disponibilidade de apenas um instrumento. Entretanto, caso haja disponibilidade, é possível incluir em um período anterior ao início dessa oficina um projeto de construção de um monocórdio pelos estudantes. Tal projeto não está incluso neste trabalho pois foge ao tema principal e requer uma maior quantidade de aulas para que possa ser desenvolvido. O portal clubes de matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) possui um guia para construção de monocórdios, que pode ser usado como base para a confecção do instrumento com os estudantes. As instruções podem ser encontradas em: http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio. (Acesso em 22 de outubro de 2023)

Esta dissertação possui um total de 4 capítulos, em que identifica-se este inicial com intenções de apresentar o trabalho e as motivações pessoais por trás da escolha do tema trabalhado. O próximo capítulo diz respeito a como o trabalho é desenvolvido, buscando primeiramente justificar teoricamente a escolha do tema e do modelo a ser aplicado, uma parte histórica que busca fundamentar os leitores, em especial professores que futuramente possam utilizar essas oficinas em suas turmas, munindo-os de conhecimentos mais específicos a respeito dos temas abordados, os objetivos pretendidos por este trabalho e pelas oficinas, de forma específica e distinta entre cada uma delas e por fim uma seção que explicita qual a metodologia utilizada na aplicação dessas oficinas. O terceiro capítulo será destinado aos relatos referentes a aplicação das oficinas e também análises a respeito

[1] Um instrumento de traste, também conhecido como instrumento de cordas trastejadas, é um tipo de instrumento musical em que as cordas são pressionadas contra trastes (pequenas barras, normalmente metálicas) localizados no braço do instrumento. Esses trastes dividem o braço em diferentes posições, permitindo ao músico alterar o comprimento vibrante das cordas e, assim, produzir diferentes sons associados a diferentes notas musicais quando as cordas são tocadas.

dos resultados obtidos. O último capítulo é destinado às demais considerações.

Este trabalho teve sua elaboração iniciada em 2019, com a aplicação das oficinas programada para 2020. Infelizmente, em 2020 tivemos o fechamento das escolas devido ao início da pandemia do COVID-19. Inicialmente, em 2020, os alunos ficaram sem aulas até perceberem que a pandemia teria efeitos mais graves e que a paralisação das escolas deveria ser mais longa do que o esperado, o que levou o governo brasileiro a optar pelo ensino remoto emergencial. Do segundo semestre de 2020 até o final de 2021 os alunos permaneceram no modelo remoto, cujos impactos para a educação foram vastos e bem documentados por diversos órgãos de pesquisa e ensino. O modelo remoto inviabilizava a aplicação das oficinas presentes neste trabalho e portanto sua aplicação foi remanejada para 2022, quando houve o retorno das aulas presenciais nas escolas.

1.2 Motivações Pessoais

Desde criança tive convívio com a música, pois meu pai tinha formação instrumentista em conservatório musical e trabalhava realizando shows em casas noturnas de São Paulo ou em eventos culturais. Devido a essa grande influência do meu pai, aprendi a tocar violão ainda criança e cresci estudando o instrumento, enquanto acompanhava meu pai em suas apresentações e até mesmo participando em algumas delas quando era possível, com algumas pequenas performances.

Até boa parte da minha adolescência pensava em ser músico profissional e seguir os passos do meu pai, porém minhas frustrações com relação ao rumo que a cultura musical estava tomando dentro do Brasil me deixava sempre com muitas dúvidas sobre ser realmente esse o caminho que gostaria de seguir: existia uma grande dominância na mídia de alguns estilos musicais que não eram meus preferidos, o que parecia cada vez mais dificultar uma carreira musical para praticantes de outros estilos.

Os estilos musicais que estavam presentes diariamente na vida dos brasileiros, em boa parte por influência das mídias, pareciam para mim cada vez mais restritos. Apenas poucas canções de estilos diferentes conseguiam furar a bolha e atingir a maior parte dos brasileiros. O modelo objetivando a lucratividade sobre a cultura fazia com que a indústria musical, ao meu ver, vendesse expressões artísticas cada vez mais carentes de qualidade. Apesar de na época eu não entender muito bem essas nuances, isso ainda me deixava bastante frustrado e me fez diversas vezes questionar meu futuro como músico ou musicista.

Outra grande influência que tive era minha afeição por tecnologias, o que me fazia ter grande curiosidade de entender sobre elas e aprender sobre como foram criadas e o que as faziam funcionar, o que me levou a sempre gostar muito de Matemática. Meus professores em geral gostavam muito de mim e sempre me incentivaram a ajudar meus colegas de classe a entender a disciplina. Apesar de eu sempre ajudar todos que me pediam, não pensava naquela época em ser professor, já que nesse momento comecei a pensar em fazer algum curso relacionado à tecnologia.

Quando comecei o ensino médio, como grande apreciador da música popular brasileira (MPB) e *rock*, eu já tinha certeza que não gostaria de seguir carreira de música, a menos como atividade principal pois o mercado de trabalho era muito pouco atrativo ainda mais para o estilo de música que eu gostaria de fazer, pois tornava-se cada dia menos popular no Brasil. Ainda que eu gostasse muito de música e de tocar violão, minha motivação a seguir carreira era cada dia menor, pois eu via de perto todas as dificuldades da profissão já que acompanhava meu pai em quase todas as suas apresentações. Grande parte dos amigos dele que também eram músicos tinham problemas financeiros, provenientes da baixa remuneração ou mesmo a ausência de trabalhos. Muitos deles, incluindo meu pai, acabavam dando aulas de instrumento para complementar a renda. Mesmo dentro do contexto das aulas de instrumento, havia irregularidade na procura, o que somada à irregularidade da presença de trabalhos como músico, compositor ou instrumentista, gerava instabilidade financeira na minha família, assim como nas famílias dos amigos do meu pai.

Apesar da grande admiração que sempre tive por música e pelo trabalho do meu pai, as dificuldades da profissão acabaram me levando a tomar a decisão de tornar a música apenas um hobby, ainda que eu nunca, de fato, houvesse descartado a possibilidade de trabalhar com música de alguma forma, mesmo que não fosse como músico.

Minha boa relação com a Matemática se preservou até o final do meu Ensino Médio. Naquele momento, já havia decidido que eu gostaria de cursar algo na área de exatas. Em um primeiro momento havia decidido que cursaria engenharia da computação, porém uma das minhas professoras de Matemática me inspirou a cursar Licenciatura em Matemática e me tornar professor. A ideia de ser professor me agradava muito e me espantava eu nunca ter pensado nisso, já que eu sempre gostei de ensinar meus colegas de turma, ao mesmo tempo a escola sempre me pareceu um ambiente no qual eu gostava de estar. Unindo as duas coisas a decisão de ser professor me pareceu muito boa, ainda que eu tivesse ciência dos problemas intrínsecos da profissão no Brasil, sobre os quais não iremos discutir aqui.

A escolha de ser professor parecia ter tapado um buraco de incertezas que tinha sobre a carreira que eu seguiria, e me foi bastante natural escolher a Matemática como minha especialidade. Ainda que eu fosse muito apegado às outras ciências exatas, a Matemática é aquela que está presente nas outras ciências e entre elas, e era a área que eu parecia entender melhor até aquele momento, e portanto não tive dúvidas em relação a isso.

Após o término do Ensino Médio, passei um ano estudando para os vestibulares, finalmente consegui ingressar no curso de Licenciatura em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), mesma instituição onde defendo esta dissertação. Durante minha graduação, eu comecei a desenvolver um apego muito grande pela Matemática: descobrir como a Matemática teórica era feita me encantava. A matemática construída através de uma axiomática, sobre um processo lógico e coerente sendo desenvolvida por meio de teoremas devidamente demonstrados me impressionava, e hoje não tenho dúvidas de que escolhi o caminho certo para seguir.

Descobri também diversas relações entre as duas coisas que mais me inspiravam como ser humano: a Música e a Matemática. Em algum momento durante a parte final da graduação me interessei pelo programa de mestrado em educação matemática oferecido pelo IME-USP, e então decidi que iria entrar no programa e já tinha em mente que tipo de trabalho eu gostaria de fazer durante o programa: sobre Matemática e Música.

"Seria possível levar para a escola uma proposta de ensino de matemática na qual os alunos pudessem também ter contato com teoria musical em algum nível? Seria possível tentar mudar a percepção dos alunos tanto quanto em relação à matemática, como também em relação à música, através dessa proposta? Essa proposta poderia também contar aos alunos um pouco da história de ambas as áreas de estudo e motivá-los de alguma forma a criar interesse ou ao menos gosto por estudar matemática durante a escola, através de um trabalho divertido e inovador aos olhos dos alunos?" - Essas são as perguntas que inicialmente nortearam a pesquisa, ainda que no fim buscamos responder apenas as perguntas apresentadas na seção anterior a essa.

Decidi que esse trabalho seria realizado com as turmas do 6º ano do Ensino Fundamental, visto que esse é um momento decisivo para as crianças em seu processo educacional: o começo de um novo ciclo, onde agora elas encontram-se tendo aulas com professores especialistas em suas disciplinas e que irão trabalhar assuntos novos e mais complexos do que já estão acostumadas.

Durante minhas experiências como professor de Matemática, muitas pessoas, incluindo estudantes e conhecidos, me relatavam sobre como se sentiam em relação à Matemática. Dentre esses, era comum eu ouvir que eram bons em matemática, mas em algum momento ela se tornou muito complicada, ou mesmo que nunca entenderam Matemática.

Esses relatos, pela frequência que os escuto, me motivaram ainda mais a tentar realizar um trabalho que evite esse tipo de acontecimento. Tenho a intenção de que meus estudantes entendam e gostem de Matemática, mas também que eles tenham contato com teoria musical, já que a grande maioria deles não teve acesso a esse tipo de informação até aquele momento.

Como educadores, nunca sabemos do que estamos privando um educando quando deixamos de oferecer acesso a algum tipo de informação. Sendo assim, considero muito importante que os alunos tenham a oportunidade de conhecer a teoria musical, e isso vai muito além dos motivos intrínsecos da própria educação musical, já que o trabalho com teoria musical com jovens e crianças enriquecem sua formação humana e educacional, capacitando-os a discernirem a respeito do que realmente é uma composição musical.

Além disso, a educação musical promove a apreciação artística e cultural. Quando os alunos compreendem os elementos musicais que compõem uma peça, podem apreciar e reconhecer a complexidade e a beleza presentes na música. Eles podem se tornar ouvintes mais atentos e capazes de interpretar melhor as intenções do compositor. Isso não apenas enriquece sua experiência musical, mas também amplia sua sensibilidade artística em geral.

Por fim, ao proporcionar aos alunos a oportunidade de aprender teoria musical, estamos abrindo as portas para uma forma de linguagem, quase universal. A música transcende fronteiras linguísticas e culturais, permitindo que os alunos se conectem com pessoas de diferentes origens e contextos. Isso promove uma compreensão mais profunda da diversidade humana e ajuda a construir pontes entre culturas.

Capítulo 2

Desenvolvimento

2.1 Justificativa

A música, ainda que sua definição possa variar consideravelmente ao redor do mundo, pode ser entendida como uma forma de arte ou uma expressão cultural que constitui-se da combinação de sons, ritmos e até mesmo da interpolação entre tais e o silêncio. De outro lado, temos a matemática que busca estudar e compreender os objetos abstratos como números e conjuntos, medidas e formas, estatísticas e probabilidades através do raciocínio lógico e da dedução.

Segundo o Latham (2011), o termo teoria musical é utilizado para três principais finalidades, ainda que estas estejam interligadas. A primeira é composta pelas primeiras noções para compreensão da notação musical, como os elementos de notação, armaduras de clave, compassos, notação rítmica e etc.; a segunda trata-se das concepções sobre a música pelos estudiosos desde a antiguidade até os tempos atuais; o terceiro seria um subtópico da musicologia (que está mais relacionada ao estudo acadêmico e pesquisas relacionadas à música), que visa definir processos e princípios gerais da música. Neste trabalho, entenderemos o termo teoria musical como o da primeira finalidade citada acima, isto é, como as notações musicais e compreensão das estruturas que formam a música como linguagem.

Dentre os mais diversos entrelaçamentos entre os campos de conhecimento da Matemática com outras áreas, encontramos algumas relações presentes na teoria musical. Aqueles que estudam as duas áreas, ou ao menos uma delas, geralmente conseguem enxergar algumas dessas relações, que acabam sendo bastante naturais e intuitivas. Desde contar tempos, intervalos rítmicos e harmônicos, batimentos por minuto, escalas, temperamento, estrutura do som, etc., são alguns dos conceitos musicais que fazem uso sistemático da Matemática e que foram sendo modificados conforme o desenvolvimento de ambas as áreas.

Um aluno regular de música geralmente não aprende tais conceitos fazendo uso direto de conceitos matemáticos. Na verdade, é bastante comum que o ensino de Música não adentre especificamente na Matemática pois não existe a necessidade de fazê-lo de forma direta, principalmente para estudos relacionados à prática de um instrumento musical e canto.

Tais relações muitas vezes são estudadas apenas em cursos mais aprofundados relacionados a música ou mesmo em matemática, pois os currículos da Educação Básica Brasileira não contemplam conteúdos relacionados à música teórica. Por outro lado, mesmo em cursos de Licenciatura em Matemática, durante todo o currículo os alunos, em um cenário ideal, deparam-se com muitas situações-problemas e aplicações práticas para boa parte dos conteúdos que aprendem durante as aulas de matemática, mas raramente temas que relacionam-se com a música são estudados com tal viés.

Atualmente, não é obrigatório que as escolas brasileiras possuam uma disciplina de música, apesar de ter existido um esforço para torná-la obrigatória através da Lei 11.769/08, aprovada em 18 de agosto de 2008, mesmo que esta nunca tenha entrado de fato em vigor. Segundo Silva:

> Foram anos maturando o projeto de lei que em sua concepção ou tramitação no Senado Federal, não contemplou a efetiva volta da disciplina de música no currículo escolar, mas a volta e a obrigatoriedade dos conteúdos de música no ensino da arte. (CY, ANDRADE, 2008, p. 4)

Devido a esse fato, é razoável dizer que o único contato que o estudante brasileiro porventura terá com música será dentro de cursos privados, ensinamentos não formalizados (como aprender com os pais ou amigos) ou outras iniciativas. O estudante do ensino público regular brasileiro possui pouco ou nenhum contato com qualquer tipo de teoria musical, visto que os currículos contemplam apenas o ensino de música ligados aos conceitos poéticos (através da disciplina de linguagens e códigos) ou mesmo como uma expressão cultural (através da disciplina de artes), porém não está contemplado na BNCC ou em propostas anteriores, conteúdos relacionados à teoria musical como leitura de partituras, escalas, intervalos, campos harmônicos, instrumentação, etc.

Alguns países como, por exemplo, a Austrália e a Suécia incorporam o ensino de música em seus currículos. Na Austrália a disciplina de música inclui diversos elementos de teoria musical, instrumentação, composição, performance, improvisação e até mesmo elementos de música típica da cultura local durante os 6 anos em que a educação musical é oferecida. Mais informações sobre o currículo educacional australiano podem ser encontradas em: https://v9.australiancurriculum.edu.au (Acesso em 19/08/2023, às 14h32)

Enquanto isso, a disciplina de música nas escolas suecas, geralmente abrange uma variedade de aspectos musicais, incluindo teoria musical, história da música, apreciação musical, canto e instrumentação. As escolas oferecem oportunidades para os alunos explorarem diferentes gêneros musicais, experimentarem instrumentos e aguçar a criatividade criando músicas. Mais informações sobre o currículo educacional sueco podem ser encontradas em: https://www.skolverket.se/en (Acesso em 19/08/2023, às 14h32)

A ausência do ensino de teoria musical na escola configura um desperdiçado potencial de crescimento social e intelectual dos estudantes, visto que a Música é mais que apenas sons que agradam os ouvidos: é a percepção e entendimento dos mais diversos sentimentos humanos através da audição. O estudo de música é capaz de desenvolver diversas áreas do cérebro, pois mesmo que seja visto como material criativo, também existem diversas conexões lógicas em seu estudo. A música, assim como a matemática, pode auxiliar na construção de um cidadão crítico e mais completo, capaz de refletir sobre os problemas ao seu redor e da sua sociedade, auxilia no pensamento analítico e racional além de ser capaz também de aprimorar habilidades socioemocionais (atualmente pouco trabalhado dentro da escola e da matemática).

No artigo *"A population level analysis of associations between school music participation and academic achievement"* escrito por Gunh, Emerson e Gouzouasis e publicado pela American Psychological Association, referindo-se a um estudo realizado no Canadá com cerca de 110.000 participantes da escola elementar, examina-se a relação entre a educação musical e o desempenho acadêmico dos estudantes.

O estudo fornece evidências de que alunos com acesso à educação musical demonstram melhores resultados acadêmicos em todas as disciplinas, como afirmam os autores: *"The findings suggest that multiyear engagement in music, especially instrumental music, may benefit high school academic achievement."* (GUHN, EMERSON, GOUZOUASIS, 2020, p.308) (Em tradução livre: "Os achados sugerem que o envolvimento em música por anos, especialmente música instrumental, pode beneficiar os resultados acadêmicos no ensino médio").

Maiores níveis de engajamento do aluno em estudos de música, mostraram relação com as maiores notas em exames escolares, existindo uma relação mais forte com estudos relacionados à música para instrumentação do que comparados à música para canto. Os autores discorrem:

> Findings demonstrated that public secondary school students who took school music courses, on average, outperformed their peers who took no school music courses, in standardized exams on English, mathematics, and science. Also, higher levels of school music course engagement corresponded to higher levels of academic achievement. These findings contradict notions of an opportunity cost conferred by taking music courses, which is commonly communicated in school policy debates (Fiske, 1999; Gouzouasis, 2014;
> Scripp, 2002)—purporting that more time spent on music and less time spent on "basic academic courses" (e.g., math, science, English) undermines achievement in those courses. (GUHN, EMERSON, GOUZOUASIS, 2020, p.320)
>
> Em tradução livre: Os resultados demonstraram que estudantes do ensino médio público que cursaram disciplinas de música na escola, em média, apresentaram um desempenho melhor do que seus colegas que não cursaram disciplinas de música na escola, em exames padronizados de inglês, matemática e ciências. Além disso, níveis mais elevados de envolvimento nas disciplinas de música correspondiam a níveis mais altos de conquistas acadêmicas. Esses resultados contradizem a ideia de um custo de oportunidade conferido pela participação em disciplinas de música, que é comumente comunicada em debates de políticas escolares (Fiske, 1999; Gouzouasis, 2014; Scripp, 2002) - defendendo que mais tempo dedicado à música e menos tempo dedicado a "disciplinas acadêmicas básicas" (por exemplo, matemática, ciências, inglês) compromete o desempenho nessas disciplinas.

O estudo de Guhn, Emerson e Gouzouasis (2020) afirma também que o fazer musical está relacionado com o desenvolvimento de habilidades cognitivas focadas no controle e regulação entre comportamentos e pensamentos, como antecipação, planejamento e memória. Quando comparados a não músicos, músicos mostraram performances superiores em relação a muitas dessas habilidades, incluindo flexibilidade cognitiva (capacidade para adaptação para novos cenários, desafios, e situações inesperadas) e capacidade de realizar múltiplas tarefas. No quesito social, o estudo de música também mostrou criar um ambiente colaborativo e geralmente não competitivo, que melhora não só o clima escolar como também as interações sociais nesse contexto.

Já o artigo *"Longitudinal Analysis of Music Education on Executive Functions in Primary School Children"* publicado pela *Frontiers in Neuroscience* dos autores Jaschke, Honing e Scherder referente a um estudo realizado durante 2,5 anos em crianças com média de 6,4 anos de idade que foram divididas em quatro grupos de estudos: um grupo relacionado a crianças que estudavam artes visuais, outros dois que estudavam música e por fim um grupo controle, sem contato com algum ensino de artes.

Por meio de questionários, estudos estatísticos e uma série de testes (neuropsicológicos, motores, visuais e de intelecto) obteve-se, como no estudo anterior, a existência de uma influência positiva do estudo de música com o desempenho em habilidades cognitivas como planejamento e inteligência verbal, mostrando ainda um possível efeito de transferência dessas habilidades para melhores resultados acadêmicos, como discutem os autores do artigo: *"All results combined, this study supports a far transfer effect from music education to academic achievement mediated by executive sub-functions."* (JASCHKLE, HONING, SCHERDER, 2019, p. 1) (Em tradução livre: Com a combinação de todos os resultados, este estudo dá suporte ao efeito de ampla transferência da educação musical para resultados acadêmicos através das sub-funções executivas).

Por essas pesquisas, pode-se perceber a importância que a música pode ter no desenvolvimento de uma pessoa, em especial da criança. Nota-se que apesar da música poder não despertar interesse em uma parte dos estudantes, existem aqueles que interessar-se-ão pelo assunto e poderão passar a estudá-lo mais a fundo, da mesma forma como ocorre em todas as outras disciplinas do currículo escolar. É saudável debater se deve-se ter ou não uma disciplina específica para a música, já que o ensino da mesma é absolutamente fragmentado e marginalizado pela BNCC como uma área de conhecimento próprio, encontrando-se apenas em vestígios de sua verdadeira essência trabalhados apenas na disciplina de artes.

Observa-se no trecho retirado da BNCC (no que se refere ao Ensino Fundamental Anos Finais, de 6º ao 9º ano) as seguintes habilidades:

- "Explorar e identificar diferentes formas de registro musical (notação musical tradicional, partituras criativas e procedimentos da música contemporânea), bem como procedimentos e técnicas de registro em áudio e audiovisual."

- "Explorar e criar improvisações, composições, arranjos, jingles, trilhas sonoras, entre outros, utilizando vozes, sons corporais e/ou instrumentos acústicos ou eletrônicos, convencionais ou não convencionais, expressando ideias musicais de maneira individual, coletiva e colaborativa."

- "Explorar e analisar elementos constitutivos da música (altura, intensidade, timbre, melodia, ritmo etc.), por meio de recursos tecnológicos (games e plataformas digitais), jogos, canções e práticas diversas de composição/criação, execução e apreciação musicais."

É curioso observar que tais habilidades são escritas de forma bastante inespecífica e sob um contexto amplo o bastante para que quase qualquer discussão a respeito de música dentro de sala de aula possa ser suficiente para que um professor de Artes considere tais habilidades devidamente trabalhadas.

A sensação que abordagens desse tipo trazem é a de que a Educação Musical fica completamente à parte das prioridades da base curricular, visto que é bastante difícil que ao cumprimento de tal, um estudante seja capaz de compreender nuances intrínsecas de música teórica, por exemplo. Com a proposta de ensino integral, a BNCC parece não considerar o ensino de teoria musical como algo que deva fazer parte do tal "desenvolvimento integral" citado pelo documento, como podemos observar no trecho:

> Com a Base, vamos garantir o conjunto de aprendizagens essenciais aos estudantes brasileiros, seu desenvolvimento integral por meio das dez competências gerais para a Educação Básica, apoiando as escolhas necessárias para a concretização dos seus projetos de vida e a continuidade dos estudos. (BRASIL, 2018, p.5)

Considera-se importante que os estudantes da Educação Básica possuam acesso aos diversos tipos de conhecimento visto que tais conhecimentos podem despertar diferentes formas de se enxergar a realidade. Ao privar alguém de algum desses, podemos estar poupando-o de seguir os estudos em tal área: nunca sabemos o quão interessante pode ser um determinado assunto para cada pessoa.

Cabe esclarecer que as habilidades matemáticas presentes nas oficinas são de maior importância para este trabalho, já que trata-se especificamente de Educação Matemática. Portanto fica claro que o foco do professor durante a aplicação das oficinas é orientar os alunos a atingirem o desenvolvimento de tais habilidades. Entretanto, gostaríamos de observar outros desenvolvimentos que denotaremos como secundários por não serem necessariamente o objetivo primário, mas que possuem também grande importância. Esses desenvolvimentos secundários podem ser, por exemplo, a capacidade de compreender elementos presentes em partituras assim como interpretá-los ou até mesmo realizar leituras simples, ter noções sobre as notas musicais, conhecer partes da história da música, da matemática e da ciência, etc. Tais resultados são bastante amplos para serem previstos, e portanto mensurados. Tais observações serão pontuadas no decorrer das considerações finais desse texto.

2.2 Um pouco de história

Sabe-se que a relação entre a matemática e a música existe desde a antiguidade, porém muito pouco se sabe a respeito de tais conhecimentos, já que estes foram perdidos devido a diversos fatores históricos, como esclarece Abdounur (1999):

> Pelo menos em ênfase registrada, os primeiros sinais de casamento entre a matemática e a música surgem no século VI a.C., quando Pitágoras, através de suas experiências com sons do monocórdio, efetua uma de suas mais belas descobertas, que dá à luz, na época, ao quarto ramo da matemática: a música (ABDOUNUR, 1999, p. 4)

Pelo quarto ramo da matemática, entende-se que existiam outros três ramos que, em conjunto com a música, formavam o que era chamado de Matemática. Nessa época os pitagóricos chamavam os estudos relacionados a esses ramos de *Quadrivium*, que conforme Critchlow (2014), compunham junto ao *Trivium* os conhecimentos que seriam passados adiante para os frequentadores da escola pitagórica.

Segundo Eves (2005), Pitágoras foi o fundador da escola pitagórica, um centro de estudo em filosofia, matemática e ciências naturais, que no fundo tornou-se uma forte irmandade que acabou existindo por cerca de dois séculos após a morte de Pitágoras.

Quando o assunto é Pitágoras, existem diversas incertezas a este respeito, pois as fontes primárias de informação sobre tal época da história da matemática grega são bastantes escassas, e portanto os historiadores apoiam-se em outras evidências, futuras a esse tempo. Deve-se ter aqui o cuidado de esclarecer que quando tratamos de Pitágoras na verdade podemos estar tratando de uma descoberta genuína dele ou não, como explica Eves (2005):

> Como os ensinamentos da escola (pitagórica) eram inteiramente orais e como era costume da irmandade atribuir todas as descobertas ao reverenciado fundador, é difícil agora saber exatamente que descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da confraria (EVES, 2005, p. 97)

Dada a citação acima e acrescentando que existe uma certa "cultura" nas escolas, acabamos por nos acostumar a utilizar o termo "Pitágoras" para fazer referência tanto ao próprio quanto à escola pitagórica. Por conta disso, utilizaremos neste texto e nas oficinas o termo "Pitágoras".

Pitágoras é conhecido principalmente por ter seu nome relacionado a dois fatores de grande importância para o desenvolvimento da Matemática: o teorema conhecido como "teorema de Pitágoras"[1], que como Eves (2005, p.103) explica: "esse teorema era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras." que refere-se às medidas dos lados de um triângulo retângulo e à escola pitagórica, que foi uma corrente filosófica grega que acabou trazendo outros nomes relevantes de filósofos e matemáticos, como por exemplo, Arquitas de Tarento, Filolau de Crotona e Timeu de Locros.

Além disso, podemos citar também o experimento de Pitágoras, que foi relevante o bastante para registrar um possível marco na história da ciência, "caracterizando a primeira lei descoberta empiricamente, o experimento de Pitágoras é ainda a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial" (ABDOUNOR, 1999, p. 5).

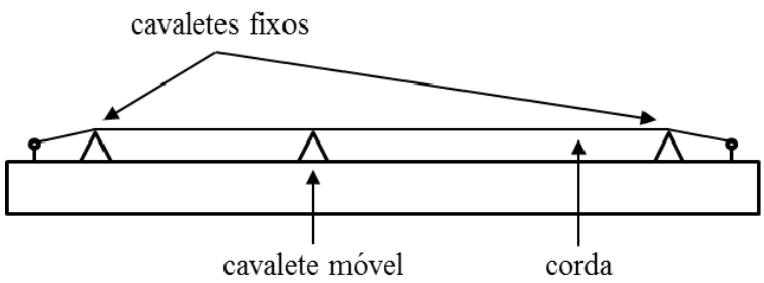
Pitágoras observava as relações que existiam entre os sons emitidos pelo monocórdio e o comprimento da corda utilizada. Naquela época não se falava de números racionais,

[1] O teorema de Pitágoras diz que em um triângulo retângulo, a medida do lado não adjacente ao ângulo reto, quando elevado à segunda potência, iguala-se a soma das segundas potências das medidas dos outros dois lados. Esse teorema é válido na geometria hoje chamada de euclidiana.

tampouco decimais: o esquema de análise que ele utilizou foi por meio de proporções.

O monocórdio era um instrumento musical bastante simples, composto apenas por uma base com dois cavaletes fixos responsáveis por segurar uma corda que ficaria esticada, e um terceiro cavalete móvel que prenderia algum ponto entre as extremidades da corda, dividindo assim a corda em duas partes. Um esquema para o monocórdio pode ser observado na figura a seguir.

Figura 2.1: Esquema de Monocórdio



Fonte: <https://www.researchgate.net/figure/O-monocordio-ou-canon_fig11_312106396> - Acesso em: 14/10/2023 às 20h30

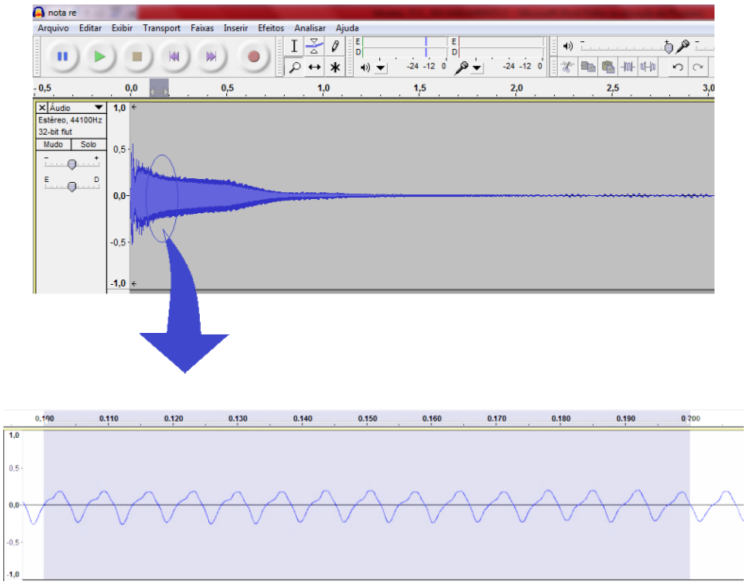
Sabe-se hoje, por meio da física, que o som é uma onda mecânica (uma onda que se propaga em meios materiais como o ar ou a água) causada por uma vibração. No caso de um som gerado por uma corda, suas principais características, como timbre, comprimento de onda, amplitude e frequência, estão intrinsecamente ligadas às características da corda em questão.

O som é usualmente representado por meio de gráficos de senóides, já que a função seno é muito boa para modelar fenômenos caracterizados pela periodicidade, justamente como as ondas sonoras. Portanto, assim como a função seno, as características do som gerado pelas cordas estão associadas também à amplitude da vibração gerada pela corda e seu período.

Observe a imagem obtida pela gravação da nota ré no *software Audacity*[2]:

Figura 2.2: Ondas sonoras captadas por programa de gravação de áudio

[2]Programa de computador que realiza gravações de som através de um microfone

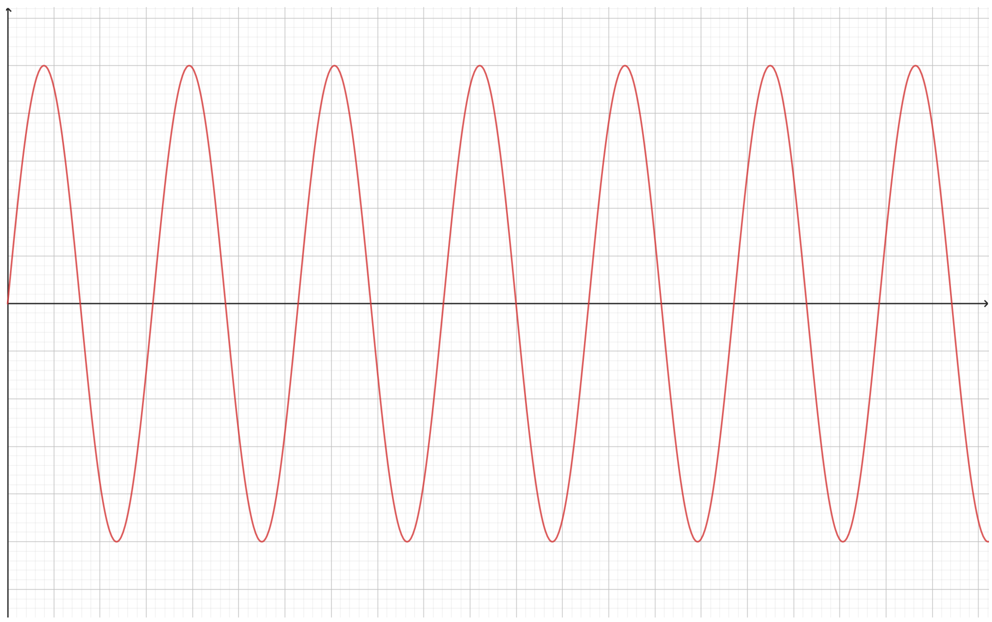


Fonte: Pontes, Madruga, (2019).

Por essa imagem, podemos observar que as vibrações repetem-se diversas vezes pelos 3 segundos em que ela foi gravada. Nota-se que a diferença entre um máximo local e o mínimo local seguinte torna-se cada vez menor ao decorrer do tempo, o que indica que a intensidade do som diminui ao passar do tempo. Agora observemos a similaridade das vibrações produzidas pela nota ré com o gráfico da função $f(x) = sen(x)$, definida para valores reais positivos, obtido pelo *software* Geogebra[3]:

[3] Programa de computador de geometria dinâmica, com diversas outras funções incluindo calculadora gráfica e ferramentas de estatística

Figura 2.3: Gráfico da função seno



Fonte: O autor (2023).

Ao interpretarmos graficamente o movimento de propagação uma onda mecânica com velocidade constante v_0, o eixo horizontal representa o tempo enquanto representamos o eixo vertical como a amplitude da onda (distância entre o eixo horizontal e o ponto de máximo ou mínimo).

Assim sendo, entenderemos o período da onda sonora gerado pela corda como o tempo necessário para a onda percorrer de um ponto de máximo para o próximo ponto de máximo. Uma característica importante de ondas em geral é a sua frequência. Dizemos que a frequência de uma onda é a quantidade de períodos que a onda completa por segundo. Se definirmos como p o período da onda, então a frequência seria o inverso do período. Sendo assim estabelecemos a relação entre a frequência f e o período p por $f = 1/p$.

As cordas, quando submetidas a maiores tensões provocam vibrações com menor período, ou seja, maior frequência, pela relação $f = 1/p$. A unidade de medida utilizada no Sistema Internacional de Medidas para frequências é o Hertz (Hz ou vibração por segundo), que aplica-se para qualquer fenômeno cíclico ou periódico, como no caso das ondas sonoras.

O ouvido humano é capaz de distinguir sons entre 20 e $20000Hz$. Para fins de comparação, um diapasão (instrumento metálico em forma de U, que quando golpeado gera vibrações sonoras) que auxilia na afinação de instrumentos é normalmente regulado para gerar um som com frequência de $440Hz$. Segundo a fonoaudióloga Mara Behlau (2001), a fala humana é normalmente registrada entre 80 e $560Hz$, ainda que as cordas vocais consigam emitir sons que podem registrar até cerca de $800Hz$.

Dizemos que um som é mais grave ou mais agudo que outro: em suma, dizemos que o som de maior frequência é mais agudo em relação ao som de menor frequência e vice-versa. Essa relação não é linear, e segundo Behlau (2001, p.109) "isso ocorre porque nosso sistema auditivo é mais sensível a algumas mudanças de frequência; particularmente as mais baixas, ou seja, aumentar de 100 a $200Hz$ é muito mais percebido do que aumentar de 3000 a $3100Hz$"

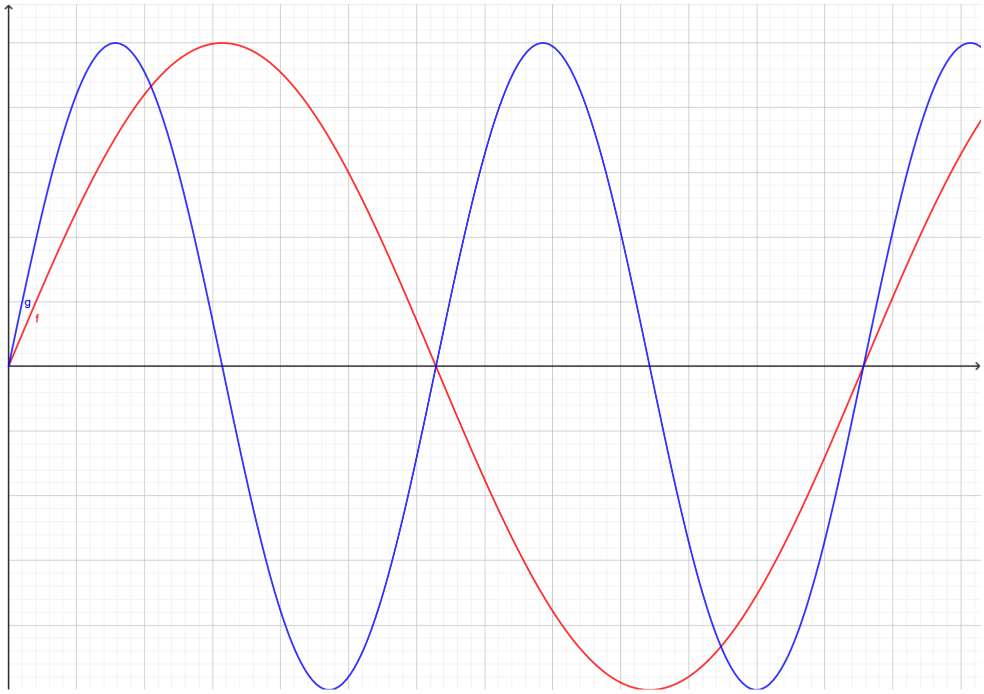
Já em relação a sua amplitude, ou seja, a diferença entre o maior e o ponto inicial de uma onda sonora, quanto maior a amplitude maior será a intensidade do som. Tal característica é informalmente chamada de volume sonoro, e é medido em decibéis (dB).

Caso exista o interesse em compreender melhor o fenômeno físico das ondas sonoras, recomenda-se a leitura de um livro de física básica como o "Curso de Física Básica"de Moysés, presente nas referências desse trabalho.

Pitágoras realizava testes com o seu instrumento, percebeu que existiam razões do comprimento da corda que tornavam o som obtido consonante com o som original, correspondente à corda solta. O conceito de consonância seria, para Pitágoras, quando dois sons ao serem tocados simultaneamente soam de maneira harmônica para os ouvidos humanos. As razões de consonância obtidas por Pitágoras eram de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{4}$. Tais razões geram sons consonantes devido ao comportamento das ondas sonoras, como explicado acima: quando colocamos a mesma corda sob uma razão de $\frac{1}{2}$, ou seja, ao dividirmos uma corda ao meio, estamos na verdade dividindo seu período por dois e por consequência, dobrando a frequência do som. Como trata-se da mesma corda, percebe-se que ao compararmos o período do som gerado pela corda original com o da corda dividida ao meio, no intervalo do primeiro período do som original encaixam-se perfeitamente dois períodos da corda dividida ao meio, gerando assim o que Pitágoras entendeu por consonância.

A imagem, a seguir, ilustra a situação, onde em vermelho observa-se o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ enquanto em azul temos a função $g(x) = sen(2x)$. Como f possui o período 2π, enquanto que g possui o período π, então temos que a frequência de g é o dobro da frequência de f. Note que para intervalo $[0, 2\pi]$, a f conclui um único período enquanto a g conclui dois.

Figura 2.4: Gráficos das funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(2x)$



Fonte: Os autor (2023).

De fato, nessa primeira razão de um para dois, a consonância é tamanha que os sons misturam-se tanto que quando tocados simultaneamente parecem não serem sons distintos mas sim complementares. A diferença entre eles estava justamente em um ser mais grave que o outro apesar de tão similares. Por esse motivo, Pitágoras decidiu dizer que tais sons poderiam ser classificados como um mesmo som, o que hoje podemos entender como sons de mesma classe de equivalência[4], e assim decidiu que todas as notas possíveis de classes diferentes estariam situadas entre o som da corda solta e o som da corda dividida ao meio, ou seja, as razões da corda para as novas notas musicais deveria estar entre $\frac{1}{2}$ e 1.

Para construção da escala musical, Pitágoras utilizou as razões de consonância $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ para obter novas notas dentro de sua escala da seguinte forma: toma-se a nota obtida pela razão $\frac{2}{3}$ e toma-se depois $\frac{2}{3}$ dessa nota. Como a razão resultante seria $\frac{4}{9}$, o que vai contra o

[4]Em teoria musical, uma classe de equivalência de notas musicais refere-se a um grupo de notas que são percebidas como tendo a mesma qualidade tonal ou o mesmo nome de nota, mas diferem em altura por uma ou mais oitavas. Isso significa que as notas na mesma classe de equivalência têm o mesmo nome (por exemplo, "Dó", "Sol", "Lá", etc.), mas estão em diferentes registros.

princípio da escala se localizar entre $\frac{1}{2}$ e 1, pega-se então a nota que teria a mesma classe de equivalência multiplicando-a por 2, como discorrido acima.

O processo é repetido até a terceira potência, totalizando 7 notas musicais. A escolha da terceira potência é justificada por Frazer (2001): "*Pythagoras believed that it should not be necessary to go beyond the third power (cube) of a number as one cannot go beyond length, width and depth*" (Frazer, 2001, p. 13) (Em tradução livre: Pitágoras acreditava que não deveria ser necessário ir além da terceira potência (cubo) de um número já que não se poderia ir além de comprimento, largura e profundidade).

Apesar de intuitivamente pensarmos nas notas musicais pelos seus nomes atuais, estes foram criados em algum momento entre o século X e XI. Não sabemos quais nomes os pitagóricos usavam para as notas musicais, ou mesmo se existia a necessidade de nomeá-las. Os nomes das notas musicais que utilizamos hoje foram criados inicialmente por Guido de Arezzo (955-1050 d.C)[5] baseados em um hino latino, as quais hoje são dó, ré, mi, fá, sol, lá e si.

2.3 Objetivos

Esse trabalho tem como objetivo propor uma sequência didática para ensino de matemática que interage simultaneamente com alguns conceitos básicos de teoria musical, dessa forma buscando trazer um aprendizado significativo a respeito dos temas que são trabalhados por meio deste.

> Aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende. (MOREIRA, 2010, p.2)

Tal sequência não só valoriza os aprendizados em matemática, mas também tem a intenção de introduzir temas iniciais de teoria musical de forma a causar interesse e curiosidade do aluno, incentivando-o ao estudo mais aprofundado de ambas as grandes

[5]Guido de Arezzo usou uma série de sílabas iniciais do hino "Ut queant laxis", que é dedicado a São João Batista. Essas sílabas foram usadas para nomear as notas em uma escala hexacorde (escala de seis notas), que posteriormente se desenvolveu para a escala diatônica moderna. Observa-se no poema: **UT** queant laxis **RE**sonare fibris **MI**ra gestorum **FA**muli tuorum, **SOL**ve polluti **LA**bii reatum, **S**ancte **I**ohannes. Com o tempo, a sílaba "ut"acabou sendo substituída por "dó".

áreas.

As oficinas visam proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem em que cada uma delas procura consolidar alguns conceitos específicos, pois apesar de serem oficinas que incluem o ensino de música, o seu objetivo final é transmitir conhecimentos matemáticos sob uma perspectiva diferente das aulas que envolvem apenas caderno e lousa. As atividades e o material utilizado no período de aplicação estão disponíveis nos anexos deste trabalho.

As oficinas são voltadas para o público da escola de nível fundamental, mais especificamente para turmas do 6º ano do segundo ciclo, em que a nova base curricular brasileira (BNCC) incentiva o ensino das habilidades de matemática abordadas durante as oficinas. Podemos observar na BNCC as seguintes habilidades:

- "(EF05MA04) Identificar frações equivalentes" (p.295)
- "(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes." (p.301)
- "(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária." (p.301)
- "(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias." (p.307)

As oficinas foram desenvolvidas na expectativa de contemplar as habilidades acima, partindo da ideia de buscar dar contexto e motivação para os estudantes trabalharem os temas.

A primeira oficina tem como objetivos específicos:

- Introduzir aos estudantes uma noção geral de que se trata a música teórica;
- Ensiná-los de que se trata a partitura musical e como identificar os símbolos e elementos presentes nela;
- Relacionar as figuras rítmicas de uma partitura presentes em um compasso com frações;

- Mostrar as equivalências presentes entre as figuras rítmicas e seus usos com o objetivo de transpor desse conhecimento para a compreensão da equivalência entre duas frações numéricas;
- Demonstrar por meio da simbologia da partitura como realizar a operação de soma ou subtração entre duas frações de mesmo denominador e também de frações de denominadores diferentes, por meio de equivalências.

Os dois últimos objetivos em especial são os objetivos que relacionam-se diretamente com as habilidades presentes na BNCC, e portanto os temas de matemática oriundos do 6º ano do Ensino Fundamental.

As figuras rítmicas presentes nas partituras musicais são visualmente distintas e representam intervalos de tempo específicos. Isso permite que os alunos tenham uma compreensão intuitiva das frações, já que as figuras rítmicas refletem diretamente a duração de cada fração. Essa necessidade de completar um intervalo musical, por exemplo, motiva o estudo das operações soma ou subtração de frações que aliados aos conceitos de equivalência de frações visam resolver um problema real e tangível.

A natureza visualmente distinta entre as figuras rítmicas evidencia a necessidade do rigor para realizar as operações, já que não é lógico contar figuras de diferentes tipos como se fossem do mesmo tipo, o que pode esclarecer, por exemplo, a necessidade de se ter denominadores iguais para poder adicionar os numeradores das frações.

Dessa forma, ao cumprir os objetivos da primeira oficina, o ensino de teoria musical contribui diretamente para o desenvolvimento de habilidades musicais e matemáticas dos estudantes, alinhando-se às diretrizes educacionais presentes na BNCC. Além disso, incentiva-se uma abordagem integrada entre diferentes áreas do conhecimento.

A segunda oficina tem como objetivos específicos:

- Introduzir as motivações históricas por trás dos estudos de música e sua relação com os estudos de matemática na época de Pitágoras.
- Apresentar os conceitos de notas e intervalos musicais.
- Apresentar o conceito de escalas musicais e os pensamentos de Pitágoras a respeito das relações entre os números e os elementos da natureza.

- Reproduzir o experimento do monocórdio de Pitágoras, experimentando quais notas tocadas “soam bem”.
- Trabalhar as operações de multiplicação e divisão entre frações através da construção da escala pitagórica musical e da construção do ciclo das quartas e quintas.

A introdução das motivações históricas que impulsionaram os estudos musicais, aliadas à exploração da relação entre música e matemática na época de Pitágoras, visa permitir que os estudantes entendam como essas duas disciplinas se entrelaçaram desde os primórdios. Além disso, a reprodução do experimento do monocórdio de Pitágoras, que explora a harmonia das notas, serve como um exemplo concreto de como a matemática está imersa na própria essência do som. As operações de multiplicação e divisão entre frações aparecem naturalmente no processo da construção da escala pitagórica musical.

2.4 Metodologia

O trabalho foi realizado por meio de oficinas que abordaram ambas as áreas simultaneamente, sempre realizando uma interlocução entre as duas.

As oficinas pressupõem que os alunos sejam capazes de realizar as 4 operações básicas entre números naturais, temas usualmente abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e também tenham ao menos algum nível conceitual a respeito de frações, apesar desta última não ser excludente pois quer-se também nessa oficina que este conceito seja solidificado.

Pensava-se que a forma de trabalho dos alunos durante as oficinas seria feita através de agrupamentos em duplas ou trios, dependendo da demanda da sala. O trabalho em grupo proporciona para o professor uma organização mais fácil da turma e torna possível que os estudantes debatam ideias entre si para resolução dos exercícios, podendo chegar a uma conclusão sem a necessidade de consultar o docente.

A forma de validação dos objetivos da oficina se deu pelas respostas escritas pelos grupos de alunos das atividades propostas, que posteriormente foram analisadas. Além disso, as percepções do professor a respeito do desenvolvimento das atividades pela turma, falas dos alunos e mesmo os comentários de outros membros da escola envolvidos no projeto são materiais fundamentais para complementar os dados e resultados atingidos e o que é possível aperfeiçoar. Para que as análises tenham maior efetividade, é importante que os alunos sejam incentivados a escrever os passos de suas resoluções e tentem explicitar os raciocínios que tiveram.

A primeira oficina teve início apresentando uma problemática bastante comum da música: como os músicos transcrevem as melodias que criaram para que sejam tocadas por outros músicos; dando assim a devida importância da existência de uma linguagem musical universal, que ficou conhecida como partitura musical.

Lembrando que em tempos mais antigos, não existiam vídeos ou outros recursos digitais, o texto fornece uma breve introdução de como é feita a leitura de uma partitura, explicando o significado dos símbolos mais comuns nela presentes. Para essa oficina, demos destaque às figuras rítmicas: por meio delas que os conceitos a serem trabalhados no decorrer da oficina se desenvolveram. A grande importância das figuras rítmicas nessa oficina encontra-se no fato delas representarem, mesmo que inicialmente seja de forma implícita, frações de um compasso. Como cada figura rítmica ocupa uma determinada parte de um compasso, temos então uma fração de um compasso sendo representada não por um número racional ou decimal, mas sim por um símbolo.

Sabemos que ao aprender como trabalhar com frações os estudantes começam a fazer uma de suas primeiras abstrações matemáticas. Ainda que o conceito seja bastante palpável via exemplificações em coisas presentes no cotidiano, existem grandes dificuldades intrínsecas demonstradas por diversos trabalhos da área de ensino de matemática sobre como ensinar frações indicando algumas dificuldades desse assunto.

Druck (1994) indaga que existem diversos questionamentos possíveis a respeito do tema, como por exemplo, o uso da mesma notação para números racionais e frações. Tais nuances devem ser de conhecimento do professor para que assim as transposições didáticas possam ocorrer de maneira mais favorável para o entendimento dos alunos. Analisando ao argumento de Druck (1994), temos:

> Pode-se dar inicialmente aos alunos a prerrogativa de inventar nomes para os diferentes pedaços. É prejudicial introduzir rapidamente a notação e a nomenclatura oficiais da aritmética, antes que eles tenham atribuído significado claro à diferença entre, por exemplo, a metade, a terça parte ou o quinto. (DRUCK, 1994, p. 4)

A utilização do símbolo vem não somente como uma forma de tornar mais acessível a percepção da definição de fração, mas principalmente para tornar as operações de adição e subtração muito mais palpáveis no seu momento inicial, corroborando com a ideia de Druck (1994).

É muito mais simples entender primeiro que tais operações só podem ser realizadas com elementos de mesma natureza para depois extrapolar para sua forma numérica. Por exemplo, sabe-se que em um compasso 4 por 4, cabem exatamente 4 semínimas, e portanto cada semínima ocuparia $\frac{1}{4}$ desse compasso.

Se fosse adicionado nesse compasso mais duas semínimas teríamos um total de três semínimas. Tais três semínimas ocupariam $\frac{3}{4}$ do compasso, já que elas ocupam três tempos em um total de quatro tempos. Caso esse mesmo raciocínio fosse iniciado pela operação de $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, é comum que estudantes em primeiro contato com a operação nos racionais tente somar numeradores e denominadores, obtendo $\frac{3}{12}$.

Notemos que para esse tipo de erro, pode ser argumentado como interpretar musicalmente o resultado obtido: ao obter o $\frac{3}{12}$ na adição, podemos então utilizar a equivalência entre frações para entender que $\frac{3}{12}$ possui tanto numerador quanto denominador que são múltiplos de 3. Dessa forma, é possível dividir ambos para obter a fração $\frac{1}{4}$ e assim procurar qual figura ocupa tal fração do compasso. Assim, pode-se esclarecer ao adicionarmos duas novas semínimas não poderíamos ter a mesma fração do compasso ocupada.

É importante que durante as explicações o professor comente e reforce diversas vezes a importância de se ter o mesmo denominador para realizar tais operações para evitar que o aluno concretize conceitos errados para o futuro. Segundo Druck (1994), muitos alunos de anos superiores carregam de forma errada os conceitos relacionados a números racionais, presentes nessa oficina, além de relatarem grande dificuldade em trabalhar com frações, levando ao desestímulo de resolver exercícios que as envolvam.

Dessa forma, busca-se aqui também familiarizar o aluno com o uso de frações construído por meio de uma base mais ampla, que concretize o significado das operações tão quanto sua representatividade em outras áreas do conhecimento.

A primeira oficina está organizada da seguinte forma:

- Duas aulas para introdução à parte teórica, na qual o professor orientará os alunos sobre os tópicos de música e leitura de partitura, exemplificando com o uso de palmas, metrônomos (uma ferramenta que emite sons em tempos fixados para auxiliar o ouvinte a entender o andamento/ritmo de uma música) ou outras ferramentas disponíveis. O professor nessa etapa tem o papel de instrutor, sendo de grande importância a leitura conjunta e participação ativa dos alunos na interpretação do texto e das propostas presentes nas oficinas. Nessa primeira etapa seria interessante que os alunos tivessem a liberdade de explorar os conceitos musicais e formar suas primeiras impressões e teorias a respeito de como tais coisas funcionam.

- Duas aulas para a realização das 4 primeiras atividades. Durante as atividades o professor agiu como um mediador, responsável apenas por acompanhar os alunos e auxiliá-los caso seja solicitado. É importante que nesse momento o professor evite interferir, pois as respostas espontâneas dos alunos serão importantes para a validação do trabalho.

- Duas aulas para realizar as 4 últimas atividades, seguindo ainda as mesmas orientações das atividades anteriores.

- Uma aula para fechamento da oficina, na qual o professor escutará o relato dos alunos (suas opiniões sobre as atividades, o que eles aprenderam com elas, etc.). Essas respostas podem ser registradas em papel pelos alunos, o que será elemento importante para a consolidação da oficina.

Duração total: 7 horas/aula.

A segunda oficina tem uma introdução histórica, contando sobre o que os pensadores antigos sabiam sobre matemática e música até então para por fim chegar no matemático que seria "protagonista" dessa oficina: Pitágoras. São apresentados aos estudantes os conceitos de nota musical e intervalos entre notas musicais (como é feito na música, por exemplo: o intervalo entre uma nota dó e uma nota mi é um intervalo de terça maior). Através do experimento do monocórdio de Pitágoras, os estudantes podem ter uma experiência única de reviver um momento histórico muito importante para a construção da música no que ela é hoje, e ainda assim aprender matemática nesse processo.

A segunda oficina está organizada da seguinte forma:

- Uma aula destinada à introdução da oficina, onde o professor buscou contar um pouco sobre quem foi Pitágoras e como foi a realização do experimento do monocórdio.
- Uma aula destinada à manipulação do instrumento disponível (no caso deste trabalho foi um monocórdio, mas existe a possibilidade de utilizar algum outro instrumento de corda que sirva para o propósito da oficina), no qual os alunos puderam medir a corda e testar frações de comprimento da corda que se consiga consonâncias.
- Duas aulas destinadas à realização das tarefas propostas na oficina.
- Uma aula para o fechamento da oficina, onde o professor deu os nomes próprios para as 7 notas musicais (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si) e explicou os intervalos melódicos importantes para a construção dessa escala musical (os intervalos de quarta e quinta).

Duração total: 5 horas/aula.

Apesar de a metodologia idealizada para a aplicação das oficinas ter sido como descrito acima, muitas vezes estas podem ser adaptadas às necessidades de cada turma/professor. É fácil conceber diversas situações em que a metodologia requer adaptações, como por exemplo estender a quantidade de aulas dedicadas às oficinas, ou mesmo a forma de apresentar ou dar continuidade aos temas desenvolvidos durante as oficinas.

No caso da aplicação feita para este trabalho, alguns fatores diferiram do planejado. As oficinas acabaram por tomar mais tempo que o estipulado, a quantidade de alunos por grupo foi de 5 a 6 alunos e mesmo a parte investigativa, que pressupunha uma maior independência e maturidade dos estudantes para discutirem entre si a forma de resolver os problemas propostos, acabou sendo realizada em sua maioria, em conjunto com o docente. Maiores detalhes a respeito dessas diferenças serão abordados no capitulo seguinte, dedicado a relatar nossa experiência no processo de aplicação das oficinas.

Capítulo 3

Aplicação das oficinas

3.1 Sobre a escola

As oficinas foram aplicadas em uma escola da rede pública Estadual, localizada na Zona Norte da cidade de São Paulo. Essa escola faz parte do Programa de Ensino Integral do Estado de São Paulo (PEI), em que estudantes contam com atividades extras como orientações de estudo, que são instruções e reuniões fornecidas por um professor tutor[1] e disciplinas eletivas, as quais o estudante tem liberdade para escolher dentre as ofertas realizadas pela escola.

Como as aplicações aconteceram no período do primeiro semestre de 2022, ainda havia a obrigatoriedade de usar máscaras em sala de aula, tando discentes quanto docentes. As atividades escolares estavam voltando ao modelo totalmente presencial de ensino ainda naquele ano, e em especial, os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental (primeiro ano do segundo ciclo de ensino) passaram os últimos dois anos que encerram o primeiro ciclo (Ensino Fundamental Anos Iniciais) em quase sua totalidade no formato de ensino remoto.

Meu primeiro contato com a escola foi com uma das coordenadoras, ao falar sobre a aplicação do projeto na escola, e então ela solicitou um documento que incluiria a proposta do projeto com a quantidade de aulas necessárias e horários. Prontamente elaborei esse documento, que incluiu uma apresentação do projeto, público alvo, objetivos, metodologia,

[1]Os professores do corpo docente da escola ficam responsáveis por momentos de tutoria com os estudantes. Nesses momentos, eles são orientados em relação aos estudos e aos seus objetivos acadêmicos. Cada professor fica responsável por uma certa quantidade de estudantes.

quantidade de aulas e horários. Quando enviei o documento, este foi encaminhado à direção da Escola, à coordenação e ao professor de Matemática que lecionava na turma em que o projeto seria realizado. No dia seguinte fui informado que a realização do projeto foi autorizada, porém existia uma certa urgência para o início das atividades, já que o professor de Matemática já havia começado a trabalhar o tema de frações com a turma e gostaria que iniciasse o quanto antes.

Prontamente atendidos, me foram cedidas três aulas por semana para aplicação das oficinas, nas quartas feiras das 10h15 às 11h, das 13h30 às 14h15 e nas quintas feiras das 10h15 às 11h. Caso haja curiosidade em relação ao documento enviado para a escola, este está localizada nos anexos deste trabalho.

Mesmo após o aceite da proposta, mediante a entrega do projeto, ainda foram necessárias, na semana anterior ao início das aplicações das oficinas, outras negociações com a escola, dessa vez sobre o termo de compromisso que os envolvidos da equipe da escola assinariam e o termo de compromisso destinado aos alunos.

Nesse e em todos os momentos que estive aplicando o projeto fui muito bem recebido por todos da escola, especialmente a diretora, que fez questão de me mostrar as instalações da escola e me explicar alguns dos projetos que aconteciam naquela unidade PEI.

A diretora também me levou à turma, me apresentando de forma sucinta e dizendo que trabalharíamos em uma pesquisa de mestrado que envolvia matemática e música, o que os deixou bastante animados. A apresentação durou cerca de 3 a 5 minutos, sendo na verdade quase que uma propaganda, pois a diretora perguntou para a turma: "Quem aqui gosta de música?", e logo após o sim coletivo a diretora falou sobre o projeto de matemática e música de uma forma que os cativou e criou expectativas. Em seguida me apresentei para a turma, contando-lhes meu nome, minha formação acadêmica e sobre o projeto do qual eles participariam, que era referente a uma etapa do curso de mestrado. Pelos olhares atentos e sorrisos dos estudantes pude perceber que estavam felizes em participarem do projeto. Na semana seguinte foi a primeira vez que, de fato, começamos as atividades das oficinas.

Saliento que as oficinas foram aplicadas de forma independente das aulas regulares de matemática, apesar de ocupar os horários dedicados a essas. Apesar disso, o professor titular da turma acompanhou quase todo o processo da aplicação das oficinas, com exceção de algumas aulas que a direção precisou da atenção dele em outros assuntos. É importante também deixar claro que o desempenho dos participantes nas oficinas não seria utilizada como método avaliativo em nenhum dos processos avaliativos do professor titular, ou em termos mais práticos, a participação e desempenho dos estudantes nas oficinas seriam avaliados.

3.2 Sobre a primeira oficina

Apesar da primeira oficina ter sido idealizada para 7 aulas de 50 minutos, as aulas na escola possuem duração de 45 minutos, o que somado a outros fatores fez com que a aplicação durasse 9 aulas. As aulas das 10h15 às 11h eram a primeira aula logo após o intervalo matutino da escola, que fazia com que os alunos demorassem para voltar à sala de aula, enquanto que a aula das 13h30 às 14h15 era a última antes do intervalo vespertino da escola, o que os deixavam eufóricos para fazer a pausa, ou seja, mesmo com 45 minutos, o aproveitamento era inferior a 40 minutos.

O professor titular dessa turma acompanhou as aulas, cedendo-me espaço para aplicar as atividades. Os alunos pareciam bastante empolgados com a minha presença, a de um professor que os ensinaria conceitos de música. Uma das primeiras coisas que perguntei para a turma foi se algum aluno já estudou música ou aprendeu a tocar algum instrumento musical. Alguns alunos então se manifestaram, dizendo que estavam aprendendo violão, flauta doce, teclado e bateria, porém nenhum deles havia aprendido leitura de partituras, por exemplo. Portanto, eu estava aplicando a oficina 1 para uma turma ainda leiga a respeito de teoria musical.

Conversamos então sobre os termos de consentimento, e foi como a diretora havia me dito anteriormente: devido ao PEI, os alunos já passaram por processos anteriores relacionados à assinatura de termos de consentimento pelos pais, então esse processo não foi trabalhoso já que eles já estavam acostumados com isso.

Cada aluno então recebeu um termo de consentimento e uma cópia impressa da Oficina 1. Apesar de um tanto assustados com a quantidade de páginas, expliquei que esse seria um material que seria trabalhado ao longo das visitas e, portanto, eles deveriam trazê-lo para os próximos encontros. Discutiremos mais sobre esse fato nas considerações finais desse trabalho.

Nesse primeiro contato, era nítido que eles estavam interessados em aprender música, pois estavam bastante participativos e tinham vontade de responder as perguntas e participar das interações propostas.

Ainda na primeira visita, comecei as apresentações de alguns conceitos que usaríamos na primeira oficina. Com o auxílio da lousa, conversamos sobre o pentagrama musical, como as notas eram posicionadas no pentagrama de acordo com a clave, o compasso (com bastante ênfase no compasso de 4 por 4) e as figuras rítmicas. Antes de introduzir o conceito de compasso musical, foram introduzidas as figuras rítmicas. Os alunos acompanhavam a tabela presente no texto para conhecer e aprender a diferenciar cada uma das figuras e seus valores individuais, para que assim pudessem entender de que se trata o compasso.

O processo de conversão dos tempos das figuras rítmicas foi fácil quando se tratavam de figuras que possuíam a relação 1:2, como por exemplo da mínima para a semínima (o tempo da mínima equivale ao tempo de duas semínimas). Nesse caso, quando foi perguntado aos estudantes sobre quantas semínimas poderíamos colocar no lugar de uma mínima, os estudantes respondiam "duas", sem aparecer outras respostas. Quando a relação era 1:4 ou 1:8 por exemplo, os alunos mostraram as primeiras dificuldades. Quando perguntei quantas semicolcheias poderíamos colocar no lugar de uma semínima, escutavam-se respostas diferentes, como "duas", "quatro"ou "oito". Apesar de alguns estudantes responderem de forma errada no começo, muitos perceberam que no lugar de uma semínima cabem quatro semicolcheias, e assim foi com outros exemplos que foram dados a eles.

Nesse primeiro momento, em que a equivalência estava sendo trabalhada de forma implícita, pude perceber a importância de usar uma linguagem não matemática para dar início, ou reforçar, o conceito de equivalências, como explicado por Druck (1994). Pudemos perceber também que essas conversões abrem espaço para discutir sobre potências de 2, já que seria um conceito que ajudaria muito a entender essas conversões.

Quando conversávamos sobre o compasso, enquanto eu explicava que o compasso tinha a função de separar a música em intervalos de tempo para organizar o estudante E1 perguntou: "Por que precisa separar em intervalos?". Então quando respondi que isso auxiliava no entendimento do ritmo da música e na organização da partitura ele pareceu convencido, pois respondeu "entendi"e não fez mais perguntas.

Ao terminar com a apresentação dos elementos da partitura, decidi fazer uma atividade recreativa com a turma para tentar deixá-los mais interessados no assunto. A atividade consistia em tocar um ritmo através de uma partitura que coloquei na lousa: a clave dessa partitura foi chamada de "6ºB"(que era a turma com a qual eu estava trabalhando as oficinas) e nela posicionei duas possíveis notas, uma referente a uma palma com as mãos e a outra era bater na mesa com as mãos. Essa partitura que coloquei na lousa tinha o compasso de 4 por 4 com duas semínimas para bater na mesa e uma mínima para palma, formando assim um ritmo bastante conhecido na cultura popular que faz referência à canção *We will rock you* de autoria do grupo musical britânico *Queen*.

Apesar de alguma dificuldade para acertar o ritmo no começo, após algumas tentativas toda a turma estava fazendo o ritmo, que inclusive contagiou outras turmas que estavam nas salas próximas, pois conseguíamos ouvir outras turmas tentando reproduzir o ritmo que havia sido produzido pelo nosso grupo. Cabe aqui a ressalva de que a diretora da escola ficou curiosa sobre o que estava acontecendo na sala, e disse que os alunos de outras turmas ficaram interessados nisso também. Ela inclusive comentou que gostaria de gravar essa dinâmica, porém isso acabou não acontecendo pois não tocamos mais no assunto, creio que devido ao excesso de tarefas que ela tinha para realizar.

Essa dinâmica inicial os deixou bastante animados para continuar a oficina e considero que foi muito importante como forma de motivá-los a trabalhar nos exercícios que seriam feitos logo depois, já que quando todos conseguiram se encaixar no ritmo tivemos um aplauso coletivo do grupo e os sorrisos em seus rostos pareciam mostrar que estavam felizes em terem conseguido. É importante salientar que essa e outras dinâmicas das oficinas são inviáveis em um ensino remoto, e portanto uma adaptação para tal formato a tornaria menos rica.

Antes de começar as atividades, orientei os alunos a se unirem em grupos de até 3 pessoas, dado que a turma possuía um total de 36 alunos. O objetivo dos grupos era gerar um espaço para que os alunos discutissem as questões da oficina e chegassem em uma conclusão conjunta. Expliquei também que esses grupos seriam os mesmos até o fim do projeto e pedi para que separassem uma folha para anotar as respostas, de forma individual (pois esperava analisar as respostas de cada um), e me entregar ao final da oficina. Sobre as folhas de respostas, também há uma discussão nas considerações finais desse trabalho.

Creio que as aulas serem separadas (não serem duas aulas de matemática seguidas) foi prejudicial ao andamento do projeto, por alguns motivos, como por exemplo o tempo perdido gerado na ida e no retorno do intervalo e para organização da sala em grupos, no início de cada aula.

Como já lecionei para turmas de 6° ano do ensino fundamental, eu tinha uma certa expectativa sobre o funcionamento de trabalhos realizados em grupos. Creio que, por conta dos efeitos do ensino remoto, os estudantes não estavam muito acostumados com essa dinâmica de trabalho em grupo e socialização. Sendo assim, a produtividade dos grupos acabou sendo um pouco afetada. Entretanto, esse processo de agrupamento provou-se importante não só para a ressocialização desses estudantes, extremamente necessária naquele momento, mas como também para incentivá-los a desenvolver as habilidades de trabalho em equipe.

Outro efeito notável do ensino remoto foi em relação às anotações, visto que durante esse período os registros eram arquivados em arquivos digitais, que não se perdem de maneira tão fácil quanto um físico. No decorrer da oficina, alguns estudantes anotaram as respostas no meio do caderno ao invés de separar uma folha enquanto outros separaram e perdiam a folha na aula seguinte, o que fez com que a organização e coleta dos materiais da oficina fosse um pouco prejudicada.

O primeiro exercício da oficina já foi desafiador para os participantes, não só pelo caráter descrito acima, como também pela falta de familiaridade com o tema. O valor individual das figuras rítmicas no compasso 4 por 4, apesar de existir alguma dificuldade, acabou fluindo de forma mais natural quando eles perceberam que uma figura valia sempre a metade da figura que estava logo acima, informação essa que já havia sido dita e repetida nas apresentações anteriores, mas ainda não havia sido assimilada e portanto esse conceito carecia de maior apreciação. Na parte que se referia à fração do intervalo que cada figura rítmica ocuparia num compasso 4 por 4, novas dificuldades apareciam, como o exercício trabalha com a ideia de fração como parte de um todo, a argumentação que pareceu mais funcionar para convencê-los de que, por exemplo, uma semínima ocuparia $\frac{1}{4}$ do intervalo era de que o intervalo poderia comportar até 4 semínimas e portanto uma única semínima seria uma parte em um total de quatro partes, mas essa argumentação só funcionou para os alunos que conseguiam compreender que um intervalo comporta 4 semínimas.

Novamente, quando eles perceberam a relação de metade/dobro, as outras figuras saíram com mais naturalidade. Ainda que eles tenham reconhecido o padrão da tabela, senti que a conversão entre os valores individuais das figuras rítmicas ainda não estava muito bem assimilada.

Figura 3.1: Tabela do estudante E2

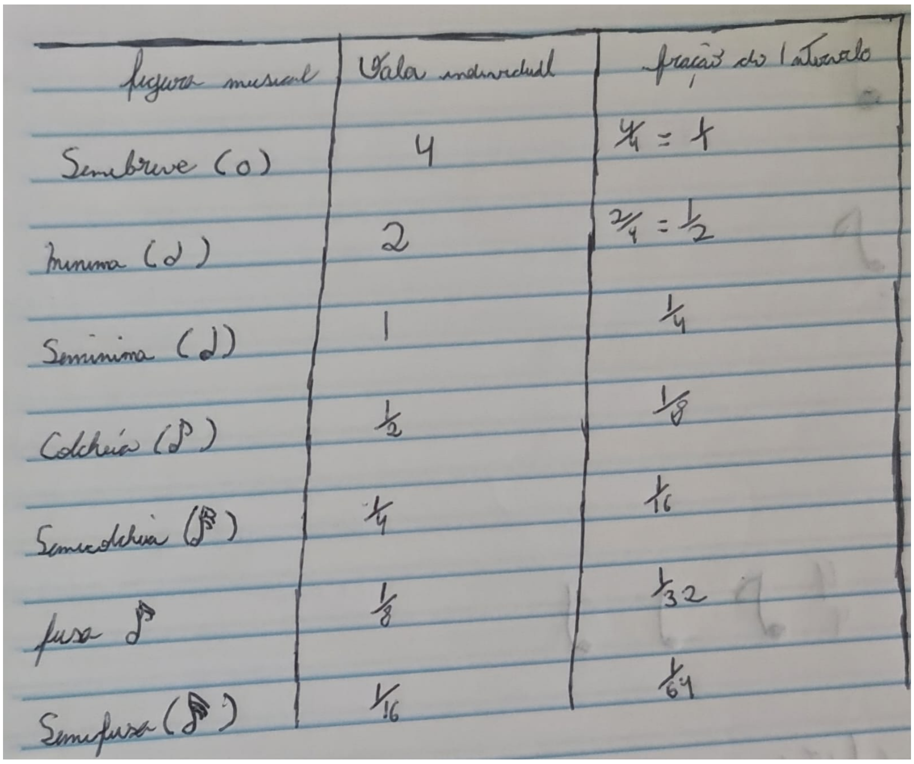


figura musical	Valor individual	fração do 1 intervalo
Sembreve (o)	4	4/4 = 1
minima	2	2/4 = 1/2
Seminima	1	1/4
Colcheia	1/2	1/8
Semicolcheia	1/4	1/16
fusa	1/8	1/32
Semifusa	1/16	1/64

Fonte: O Autor (2023)

Considerei que nesse primeiro exercício era de grande importância que a tabela fosse preenchida corretamente como no exemplo acima, e assim além de auxiliá-los a completar a tabela no quadro, tentei garantir que as tabelas das folhas de respostas que iriam me entregar estariam preenchidas, pois o objetivo dessa tabela é de auxiliar nas eventuais consultas dos valores individuais e frações do intervalo que cada figura rítmica ocupa, já que seriam informações utilizadas no decorrer dos outros exercícios da oficina.

Logo no segundo exercício eu comecei a perceber que os grupos não estavam desenvolvendo as atividades de maneira independente. Os estudantes demonstravam estranheza em relação ao formato da oficina, em que era necessário a leitura e compreensão sobre o que fora solicitado. Pude perceber que eles discutiam se alguém sabia fazer para explicar para o restante dos integrantes, o que algumas vezes acontecia. Os grupos tinham interesse em entender e tentar realizar as atividades, e para tal me chamavam para pedir ajuda. Como minha intenção inicialmente era deixá-los pensar na solução, eu tentei a princípio dar dicas e ideias do que poderia ser feito, como usar as equivalências e consultar a tabela do exercício 1, ainda que para uma parte dos estudantes as dicas foram insuficientes, outros conseguiam entender e repassar para o restante de seu grupo.

Com relação àqueles em que as dicas não foram suficientes, adotei a estratégia de resolver junto com o grupo o primeiro item do exercício, em passo a passo. Enquanto alguns grupos conseguiram fazer o segundo item, outros necessitaram o processo do passo a passo, novamente. O terceiro item foi o mais desafiador, pois era composto por uma figura de valor inteiro e outra de valor não-inteiro. A forma como os estudantes entenderam o exercício os levou a somar o valor individual das figuras e depois dividir o resultado por 4, já que o compasso de 4 por 4 consegue comportar figuras que somam valor individual 4. Assim, no terceiro item, a resposta mais comum foi $\frac{2{,}5}{4}$, enquanto eu esperava que chegassem em $\frac{5}{8}$, usando a ideia de reduzir figuras de maior valor para as figuras de menor valor por equivalências. A ausência de tempo me impossibilitou de discutir sobre a transformar a fração $\frac{2{,}5}{4}$ em $\frac{5}{8}$, porém, apesar de não ser incorreto responder $\frac{2{,}5}{4}$, essa era uma discussão que gostaria de ter feito.

Com a proposta investigativa das atividades, alguns estudantes conseguiram desenvolver raciocínios de forma autônoma, mas grande parte deles precisava recorrer à minha ajuda para começar os exercícios. Normalmente antes de iniciar um novo exercício, líamos o enunciado de forma coletiva, tentando entender o que devia ser feito, mas mesmo assim era insuficiente para alguns alunos. Ao refletir sobre isso, percebi que os alunos tinham muito menos autonomia do que outros alunos de 6° ano em que fui professor. Comparado aos alunos de um 6° ano que lecionei em 2019, pude notar que os estudantes que participaram das oficinas estavam menos acostumados com o trabalhos em grupo e a leitura e interpretação de textos para trabalhar autonomamente. Aqui novamente entendo ser um efeito relacionado à pandemia. No período de ensino remoto, muitas vezes os estudantes não estavam inseridos em contextos que favoreciam boas condições para aprendizagem e, além disso, não era possível saber em quais condições os estudantes realizavam suas atividades escolares, o que pode ter levado a prejuízos no desenvolvimento da autonomia.

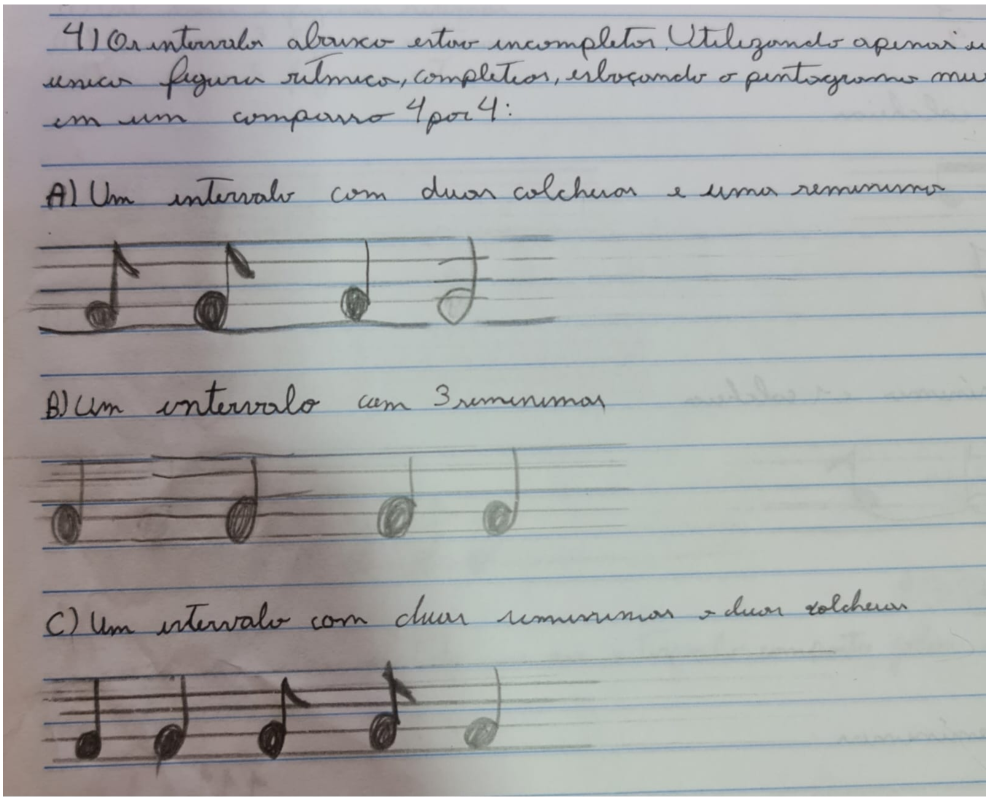
Na continuidade das atividades, podia perceber que muitos estavam interessados em tentar resolver os problemas, e esses buscavam e disputavam minha atenção, muitas vezes levantando a mão ou verbalizando. Mesmo existindo dificuldades para continuar as atividades de forma mais independente, isso não foi motivo de desinteresse para a maioria dos estudantes. Para que eu pudesse auxiliá-los de alguma forma, a estratégia que utilizei foi resolver um dos itens do exercício com eles, para servir de exemplo, enquanto solicitava que eles tentassem resolver os próximos. E como esperado de uma sala de aula de 36 estudantes, alguns desses conseguiam resolver os próximos enquanto outros ainda buscavam meu auxílio para dar continuidade.

Por conta dessa dinâmica, acabei por decidir que era mais razoável seguir com a turma toda no mesmo ritmo, seguindo para o próximo exercício somente quando todos da turma tinham tido a oportunidade de me consultar ou terminar de forma autônoma. Daí em diante, os exercícios acabaram por seguir esse ritmo coletivo e com os grupos solicitando minha atenção. A cada exercício o enunciado era lido em conjunto com toda a turma, e então eles tentariam resolver em grupo. Entendo que essa proposta difere um pouco da proposta original descrita na metodologia, porém como toda turma tem sua particularidade e, especialmente em período pós-pandêmico, foi necessário a adaptação.

Notei que apenas 2 ou 3 estudantes destacavam-se dos demais, necessitando menos da minha presença para realizar as atividades da forma esperada. Creio que existia uma grande insegurança, natural da idade e fase escolar das crianças, nesses e nos demais alunos, que muitas vezes pareciam necessitar da minha validação para prosseguir nas atividades. Era comum que eu fosse chamado para responder perguntas como a do estudante E1: *"Professor, tá certo assim?"*, e caso a resposta fosse negativa a pergunta seguinte era *"como que faz então?"*. Nesses casos, novamente eu tentava recorrer a exemplos ou resoluções de casos mais simples para incentivar que eles tentassem a atividade solicitada por conta própria, o que novamente, para alguns era suficiente e para outros não.

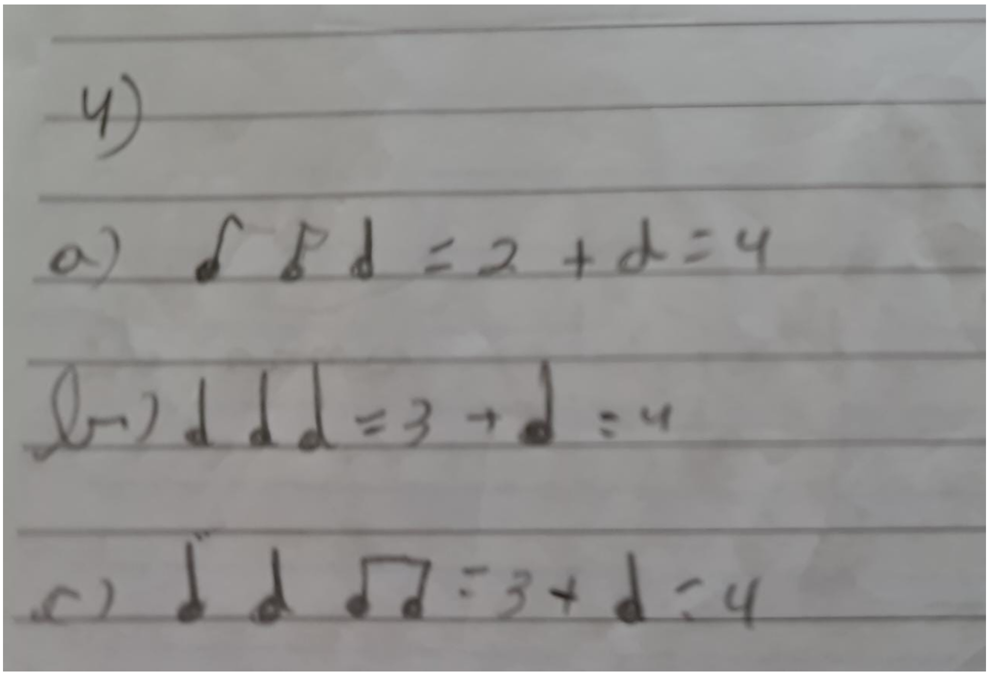
Ao trabalhar os exercícios 4, 5 e 6 pude perceber que esses, em especial, foram desafiadores pois os estudantes ainda estavam se acostumando com as figuras rítmicas. Esses parecem ter tomado mais tempo, provavelmente pela necessidade de desenhar as figuras, além de absorver o conceito de compasso musical. Nas imagens a seguir podemos ver como alguns estudantes realizaram a atividade.

Figura 3.2: Atividade realizada pelo estudante E3



Fonte: O autor (2023)

Figura 3.3: Atividade realizada pelo estudante E4



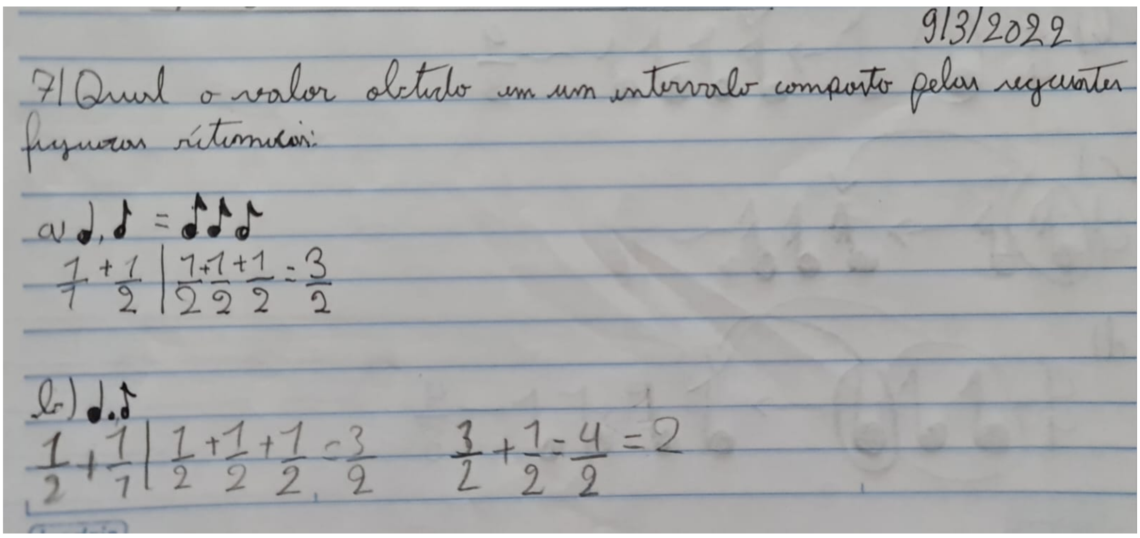
Fonte: O autor (2023)

Nessa atividade, percebe-se que o estudante E3 não utilizou em seus registros recursos matemáticos para resolver o problema, registrando apenas a resolução correta. Por outro lado, o estudante E4 utilizou em seus registros uma forma, ainda que equivocada pela utilização do símbolo de igualdade que não representa quantidades iguais, de equação para obter o resultado desejado. Percebe-se que o estudante E4, de forma correta, associou as figuras rítmicas com a fração que elas ocupam em um compasso 4 por 4, e assim utilizou de forma implícita a soma de frações, já que as colcheias, por exemplo, ocupam a fração de $\frac{1}{2}$ de compasso.

Assim como no primeiro exercício, optei por preencher a tabela presente no sexto exercício de forma coletiva, utilizando o quadro para anotar as soluções que obtivemos. Novamente, levei em consideração que a tabela ser preenchida de forma correta era essencial para que as atividades seguintes não fossem prejudicadas.

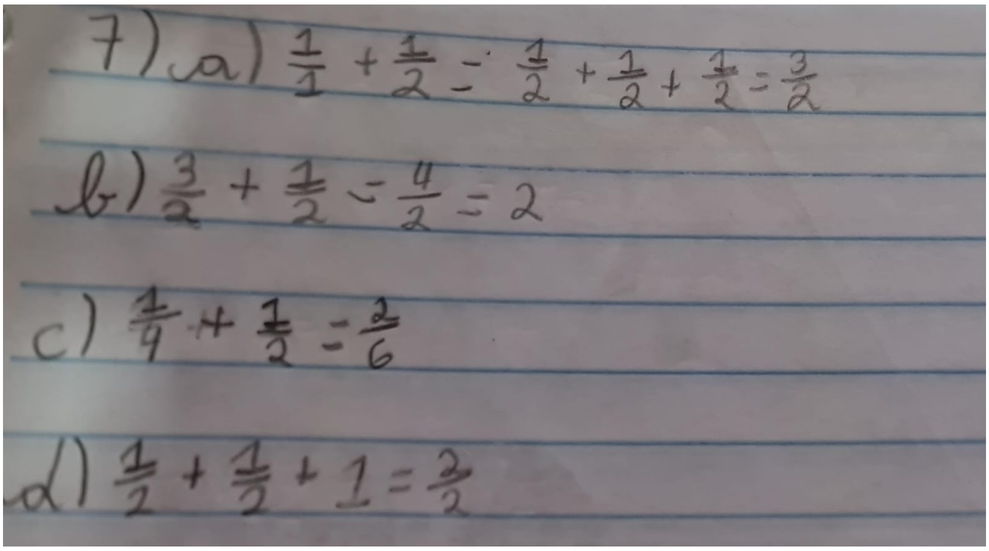
No exercício 7 os estudantes puderam observar que as conversões de figuras rítmicas para figuras equivalentes eram necessárias para realizar as operações. Com o auxílio das tabelas construídas nos exercícios 1 e 6, o valor individual de cada nota era obtido pelos estudantes, que quando necessário usavam as conversões para obter figuras rítmicas do mesmo tipo para assim poderem realizar a operação de soma, conforme os exemplos abaixo ilustram. Ainda que houvesse aqui algumas dificuldades referentes às conversões, estas foram superadas pelas explicações mais individualizadas.

Figura 3.4: Atividade realizada pelo estudante E3



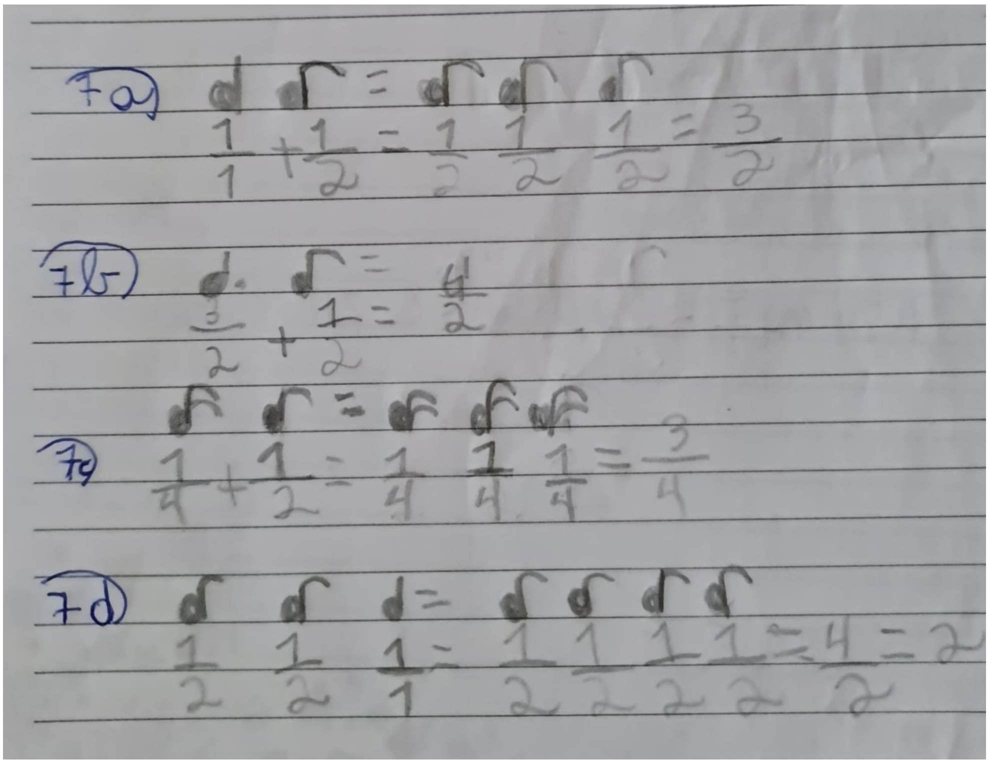
Fonte: O autor (2023)

Figura 3.5: Atividade realizada pelo estudante E5



Fonte: O autor (2023)

Figura 3.6: Resolução de exercício pelo estudante E6



Fonte: O autor (2023)

Podemos observar, pelas soluções dos estudante E3 e E6, como as figuras rítmicas são utilizadas para entender a adição de frações. Nesse exemplo, os estudantes convertem a figura de maior tempo em duas de menor tempo, obtendo assim figuras de mesmo tipo. Podemos perceber, por essas resoluções, as ideias de equivalências sendo utilizadas por esses estudantes. No caso do estudante E6, sua escrita mostra a falta de prática em manipular os objetos matemáticos, por esquecer os símbolos de adição entre as frações, porém podemos ver a aprendizagem se manifestando através desse registro. Já outros estudantes, como o estudante E5, pulam essa etapa e resolvem o problema sem utilizar o registro das figuras rítmicas.

Note que na resolução do terceiro item do estudante E5 é possível perceber a não utilização das figuras rítmicas para auxiliar nos cálculos, partindo diretamente para a abordagem aritmética. Assim em sua resolução, vemos os denominadores de $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ sendo somados, gerando a resposta $\frac{2}{6}$. Esse exemplo evidencia a importância da linguagem não matemática nesse momento de primeira assimilação, proporcionada pelo suporte oferecido pela teoria musical, já que uma das intenções de trazer os símbolos das figuras rítmicas para o ensino de frações é convencer os participantes de que para podermos pensar em como somar frações, é necessário primeiro que essas estejam sob um mesmo denominador, já que assim representariam objetos de mesma natureza, como fazemos para poder adicionar figuras rítmicas, o que evitaria esse tipo bastante comum de erro na execução do cálculo.

Dentre os conceitos matemáticos propostos pela oficina 1, o que me pareceu mais bem fixado foi a de soma e subtração entre frações. Ao final da primeira oficina os alunos, em geral, entendiam que eles necessitavam de denominadores iguais entre as frações para que a soma pudesse ser realizada, ou mesmo de forma equivalente, identificavam que não era possível contar figuras rítmicas diferentes, mas sim transformar por meio de equivalências em figuras de um único tipo.

Um dos pontos importantes da primeira oficina que poderia ter sido melhor trabalhada é a questão das equivalências entre frações/figuras rítmicas. Entretanto, ainda que existissem dificuldades para equivalências menos diretas, como de semínimas para semicolcheias, os estudantes tinham sucesso em realizar equivalências mais simples, como transformar semínimas em concheias e vice-versa, o que seria similar a transformar o número 1 em $\frac{2}{2}$. Mesmo nos casos em que o sucesso não era imediato, através das dicas e da resolução conjunta ao grupo, as resoluções acabavam por aparecer.

Ao saber dos desafios diante do ensino de frações e operações entre elas, podemos dizer que essa oficina, apesar das tão comuns adversidades enfrentadas no processo de aplicação, trouxe aos estudantes uma abordagem diferente da usual ao assunto e mostrou resultados interessantes e promissores.

3.3 Sobre a segunda oficina

A segunda oficina foi realizada cerca de 1 mês depois do término da primeira. Eu e o professor da turma decidimos esperar ele terminar adição de frações antes de começar a falar das operações de multiplicação e divisão que são os temas abordados na segunda oficina. Por motivos de cronograma ele precisava realizar as avaliações, fechar notas e ele gostaria que isso fosse feito antes que a turma entrasse em um próximo assunto.

Acredito que o espaçamento entre as oficinas foi bastante necessário, mesmo porque nas ultimas aulas da primeira oficina era perceptível, pelo nível de engajamento nas atividades, que a motivação que os primeiros momentos da primeira oficina causaram nos estudantes não se manteve até o fim. Naturalmente, o engajamento acabou caindo um pouco, e um tempo para absorção por parte dos estudantes e desenvolvimento posterior desses conceitos por parte do professor titular era necessário.

Pelos mesmos motivos da primeira oficina, essa também demorou mais que o programado, usando um total de 7 aulas de 45 minutos, enquanto o planejado era utilizar 5 aulas.

Assim como apresentado anteriormente, para a segunda oficina preparei um instrumento bastante semelhante a um monocórdio de Pitágoras, uma caixa oca de madeira, cuja parte superior era furada para formar uma caixa acústica. Na parte superior da caixa foram presas duas hastes que seguram duas cordas, de mesmo material e diâmetro, que seriam tensionadas por duas tarrachas fixas, posicionadas na lateral do instrumento, como ilustrado a seguir.

Figura 3.7: Instrumento construído para realização das atividades

Fonte: o autor (2022)

A distancia entre as pontas das hastes é de 60cm, um número conveniente para maioria das divisões que seriam feitas nas atividades das oficinas e palpável a um instrumento, porém essa distância é teoricamente arbitrária para que a atividade funcione, desde que seja grande o suficiente para que a corda possa produzir uma boa faixa de frequências ao dividi-la de acordo com as atividades propostas.

Como só foi produzido um único instrumento, a manipulação do instrumento pelos alunos foi bastante reduzida em relação ao que havia sido idealizado no início do projeto. O instrumento circulava pelos grupos, sob minha supervisão, para que ouvissem os sons das cordas divididas em diferentes comprimentos e pudessem assim decidir se os sons eram consonantes ou não aos seus ouvidos.

Para auxiliar nos processos de medição de tamanhos, forneci aos estudantes dois instrumentos, uma régua de 60cm e uma trena de 3m. Para demarcar as novas notas que iriamos conseguir com o desenvolvimento das atividades, forneci pequenos adesivos em formato de setas de diferentes cores. Esses adesivos seriam colados no instrumento para marcar a posição das novas notas obtidas ao decorrer das aulas de aplicação da oficina.

Nesse primeiro momento, a parte experimental se mostrou de grande importância, já que grande parte dos alunos se mostravam com vontade de participar das medições para saber o tamanho da corda do instrumento, assim como para medir os novos tamanhos de corda que obtivemos no processo e ouvir os sons gerados. Os alunos se mostravam muito interessados não só em manipular o instrumento e ouvir os sons que ele geraria como também em responder às perguntas que os eram feitas a respeito das frações que usaríamos, ou o resultado das operações, assim como foi observado nos momentos iniciais da oficina anterior.

Nesse momento inicial, em que testaríamos os sons das primeiras frações propostas pela oficina, era solicitado aos alunos que primeiro respondessem perguntas relacionadas às operações entre frações e inteiros, e nesse aspecto os alunos não demonstravam muitas dificuldades, ainda que aparentemente eles não tivessem tido contato com esse tipo de operação.

Primeiro expliquei rapidamente como se realizaria a multiplicação entre frações e inteiros em nosso primeiro exemplo na oficina, que tratava-se da multiplicação $\frac{1}{2} * 60$. Nesse momento eu ouvia comentários, de alguns estudantes que não pude identificar, do tipo *"Faz sentido!"*, e portanto decidi fazer a pergunta em outro sentido, quando por exemplo perguntei: "Qual o número que quando multiplicado por 60 resulta em 30?", boa parte da sala respondeu *"meio"*, e quando questionados sobre qual era essa fração eles responderam *"um sobre dois"*. Como os estudantes pareciam seguros de como realizar essa operação, era possível prosseguir com as atividades da oficina.

Para as frações propostas inicialmente pela oficina, no caso de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ apenas alguns poucos alunos ficaram em dúvida para decidir se consideravam os sons consonantes ou não, mas quando viram que a grande maioria da turma considerava consonante eles acabaram por concordarem que as notas eram consonantes. Em alguns grupos ouvi inclusive comentários como "Que bonito!", para fazer referência ao som de duas notas consoantes tocadas simultaneamente, corroborando com a ideia da experimentação contribuir para atrair a atenção do aluno.

Para construir a escala musical pitagórica, de acordo com o desenvolvimento das atividades das oficinas, os grupos verificavam o comprimento da corda com uma régua ou trena e depois marcavam no instrumento, com o adesivo colorido, a altura da corda que seria a nota da escala que estivesse sendo trabalhada o adesivo colorido. Cada adesivo tinha uma cor diferente para diferenciar as notas musicais, e o resultado final ficou conforme a figura a seguir:

Figura 3.8: Instrumento marcado pelos estudantes

Fonte: O autor (2023)

Nessa oficina os exercícios tinham um caráter de guia para obter a escala musical pitagórica. As respostas dos alunos para os primeiros exercícios acabaram sendo bastante simplórias, respondendo em sua maioria sim ou não para as perguntas.

O exercício 4 foi feito de forma coletiva pela turma, já que não havia instrumentos suficientes para testarem em grupos. Dessa forma, decidimos 3 frações de corda para testar e foi decidido que testaríamos as frações $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{3}{7}$. Esse exercício em especial foi bastante interessante, pois gerou alguma polarização de opiniões em relação à consonância dos sons. A fração $\frac{1}{6}$ resultou em um som consonante pra boa parte dos alunos, o que era esperado já que é uma composição das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. Já a fração $\frac{1}{10}$ foi tida como não consonante pela maioria dos alunos, o que também está dentro da expectativa. Porém, a fração $\frac{3}{7}$ foi a que gerou uma polarização já que uma parte dos alunos considerou consonante e outra parte não consonante. Acredito que o motivo de tal polarização é que o som gerado pela fração $\frac{3}{7}$ aproxima-se do som de uma oitava (gerado pela fração $\frac{1}{2}$), o que unido com a imprecisão das medições acabou por confundir.

Em relação ao exercício 5, era esperado que os alunos percebessem que o resultado da multiplicação de $\frac{2}{3} * \frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{4} * \frac{2}{3}$ seria $\frac{6}{12}$, que é equivalente a $\frac{1}{2}$ e portanto corresponderia ao som "A2". Porém, na prática, apenas alguns estudantes perceberam que a fração $\frac{6}{12}$ poderia ser simplificada para $\frac{1}{2}$. Nesse momento, os estudantes perceberam que o resultado da conta, mesmo ao alterar a ordem, gerava o mesmo resultado, pois segundo eles dava "o mesmo tamanho de corda"e por isso "daria a mesma nota". Alguns estudantes perguntaram se "dava para dividir", o que me levou a entender que tratava-se da simplificação, enquanto a maioria não percebeu.

O exercício 6, que completaria a escala musical pitagórica, trouxe algumas surpresas. Nesse exercício devíamos primeiro obter as notas através da potenciação das razões anteriores, ou seja, obter o comprimento de corda correspondente as frações $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{9}{16}$ e $\frac{27}{64}$. Como o comprimento da corda era de 60cm, ao obterem a fração $\frac{4}{9}$ pela multiplicação $\frac{2}{3} * \frac{2}{3}$ e multiplicarem esse resultado pelo comprimento da corda, alguns alunos questionaram se o resultado da divisão "daria errado"ou "daria quebrado". Discutir sobre dízimas periódicas com a turma, apesar dessa necessidade ter passado despercebido durante a elaboração das oficinas, foi de grande importância para a continuidade do trabalho. Percebia-se na fala de alguns alunos que eles já estavam cientes que esse tipo de número (dízimas periódicas) existia, pois eles respondiam uns aos outros dizendo que o resultado na verdade "dava uma dízima", enquanto outros mostravam se lembrar da palavra "dízima"sem lembrar o que ela significava.

Nesse contexto, assim que obtínhamos uma nova nota, o que os estudantes mais queriam era ouvi-la. Antes de começar a medir a corda, era necessário discutir se a fração obtida era menor ou maior que $\frac{1}{2}$. A estratégia que um dos estudantes sugeriu foi *"dividir os números e ver qual é maior"*. Como alternativa a essa sugestão, sugeri que trabalhassem com o mesmo denominador através das equivalências, como feito na primeira oficina, para então comparar qual delas possui o maior numerador. As duas sugestões foram aplicadas, com alguma resistência em relação à primeira sugestão, visto que alguns estudantes comentaram que *"assim vai dar dízima"*.

Quando a conclusão era de que a fração obtida era menor que $\frac{1}{2}$, então era necessário multiplicar essa fração por 2. Caso contrário, poderíamos usar a própria fração. Assim, era feita a multiplicação da fração obtida por 60cm, de forma a se obter o comprimento de corda que geraria mais uma das notas que iriam compor a escala completa.

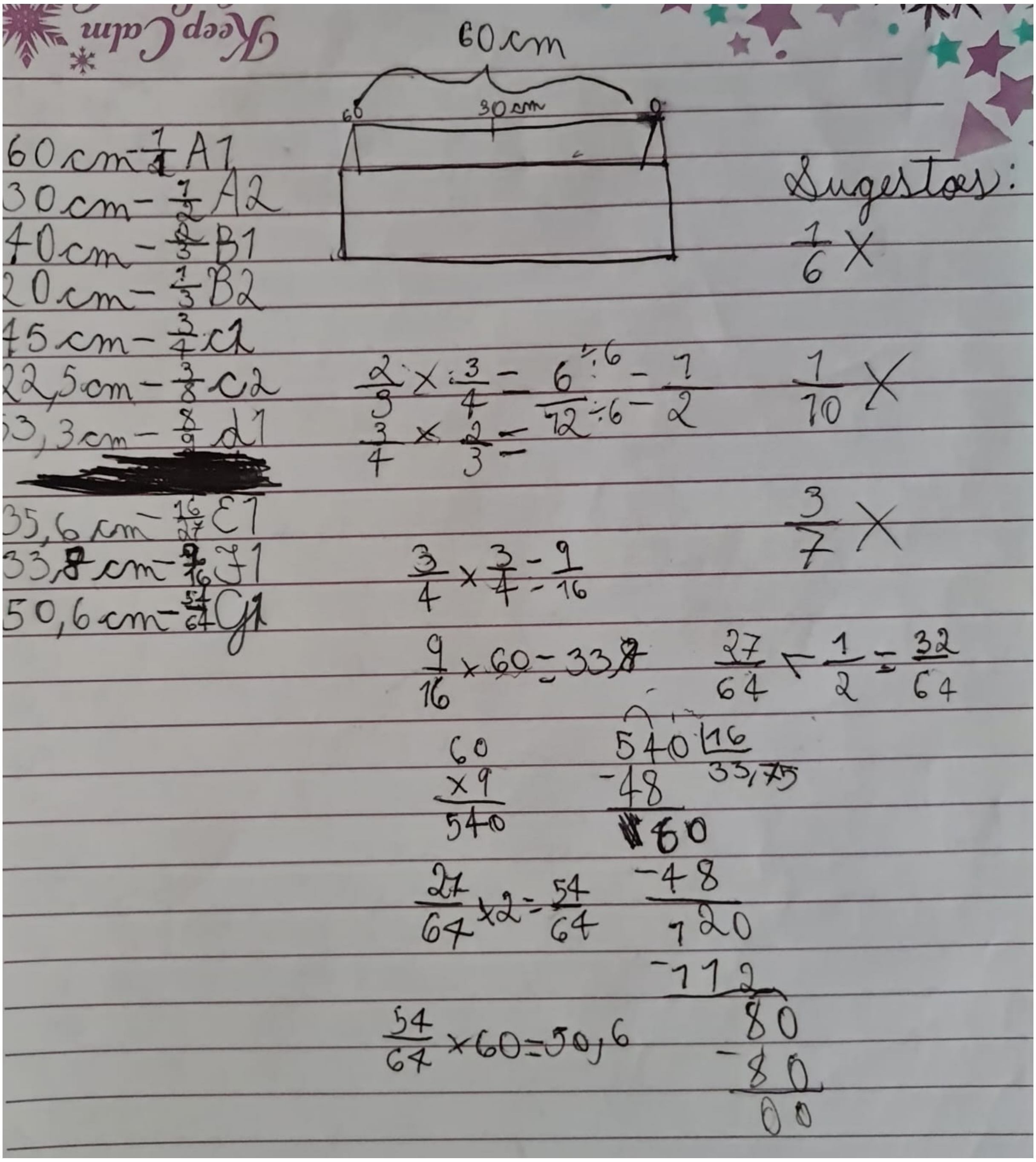
O exercício 7 foi trabalhado durante minha última visita à escola. Como os estudantes já haviam obtido o comprimento de corda de cada uma das 7 notas da escala musical, bastava organizá-los em ordem crescente, o que acabou acontecendo de forma bastante rápida e natural, pois já haviam sidos calculados os comprimentos de cada um dos trechos de corda correspondentes. Ao organizar esses comprimentos em ordem crescente, a oficina foi finalizada com os grupos ouvindo a escala musical que foi criada e opinando sobre o que acabaram de ouvir. Muitos disseram que "ficou bonito", outros perceberam a estranheza em algumas notas com falas do tipo "essa nota ficou estranha". De fato, a estranheza era de se esperar já que esta é uma simulação da escala mais primitiva já feita.

Para finalizar as discussões com a turma, argumentei que esse era apenas o primeiro passo de muitos em diante para o desenvolvimento da música da forma como conhecemos hoje. A forma como Pitágoras escolheu para montar sua escala musical gerava alguns problemas, como por exemplo, tornar impossível fechar um ciclo perfeito já que qualquer potencia das frações $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ jamais seriam iguais a $\frac{1}{2}$. Nesse momento, a turma pareceu concordar que a escala não era perfeita, mas mesmo assim ainda era "muito legal". Esse problema fora ignorado por Pitágoras e só foi resolvido mais adiante com o conceito de temperamento, que dividiria o intervalo de forma com que o ciclo fosse perfeitamente fechado.

Houve também a discussão de que essas notas a princípio não tinham nomes, mas conforme o desenvolvimento dos estudos de teoria musical acabariam por receber os nomes que conhecemos atualmente, como discutido nos últimos parágrafos do texto da segunda oficina.

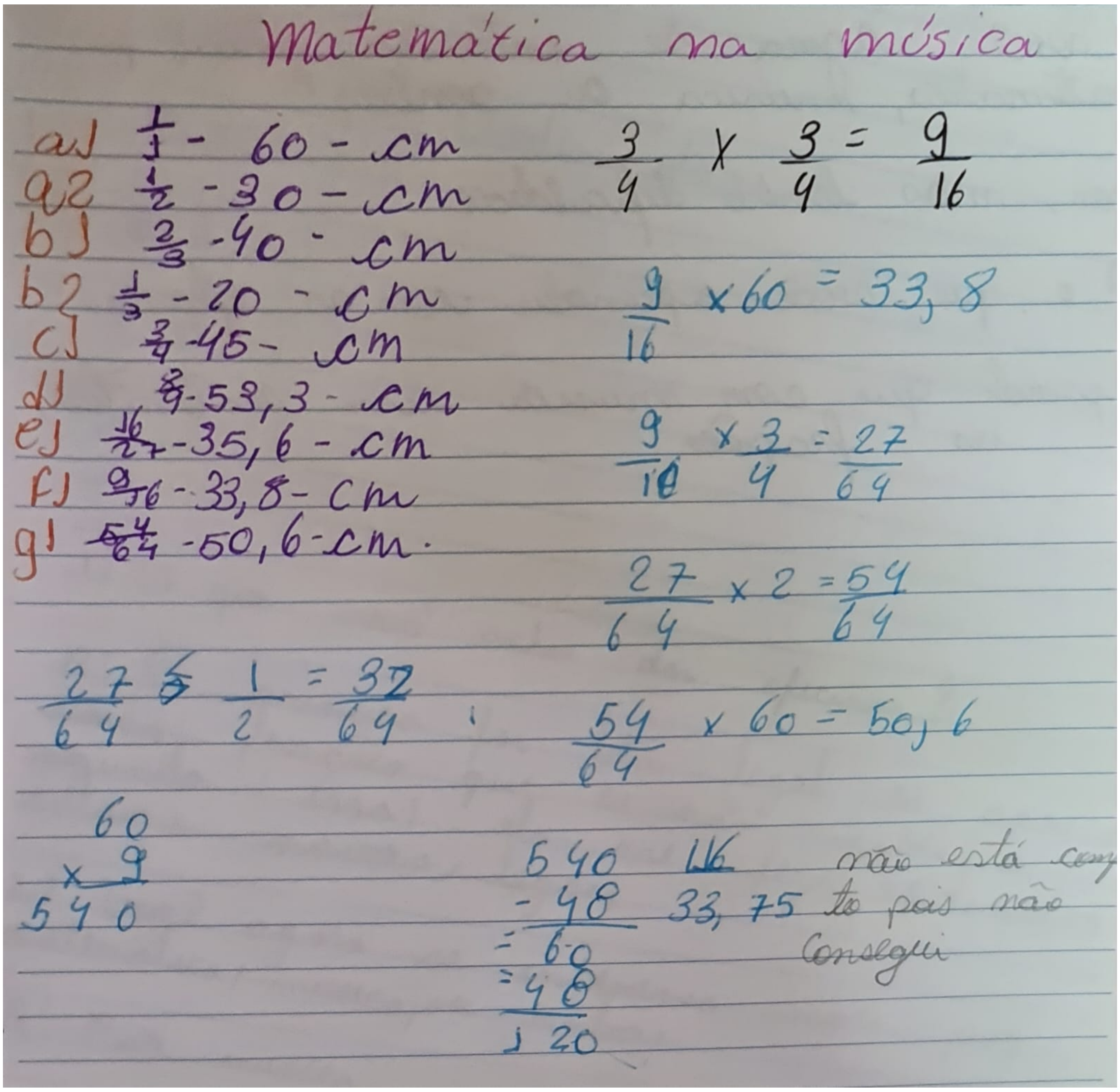
As imagens a seguir mostram algumas das folhas de respostas que recolhi ao final da segunda oficina.

Figura 3.9: Folha de respostas do estudante E7



Fonte: O autor (2023)

Figura 3.10: Folha de respostas do estudante E8


Matemática na música

a) $\frac{1}{1}$ - 60 - cm
a2 $\frac{1}{2}$ - 30 - cm
b) $\frac{2}{3}$ - 40 - cm
b2 $\frac{1}{3}$ - 20 - cm
c) $\frac{3}{4}$ - 45 - cm
d) $\frac{8}{9}$ - 53,3 - cm
e) $\frac{16}{27}$ - 35,6 - cm
f) $\frac{9}{16}$ - 33,8 - cm
g) $\frac{54}{64}$ - 50,6 - cm.

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$\frac{9}{16} \times 60 = 33,8$

$\frac{9}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

$\frac{27}{64} \times 2 = \frac{54}{64}$

$\frac{27}{64} \times \frac{1}{2} = \frac{32}{64}$

$\frac{54}{64} \times 60 = 50,6$

60
× 9
540

540 | 16
- 48 | 33,75
= 60
= 48
120

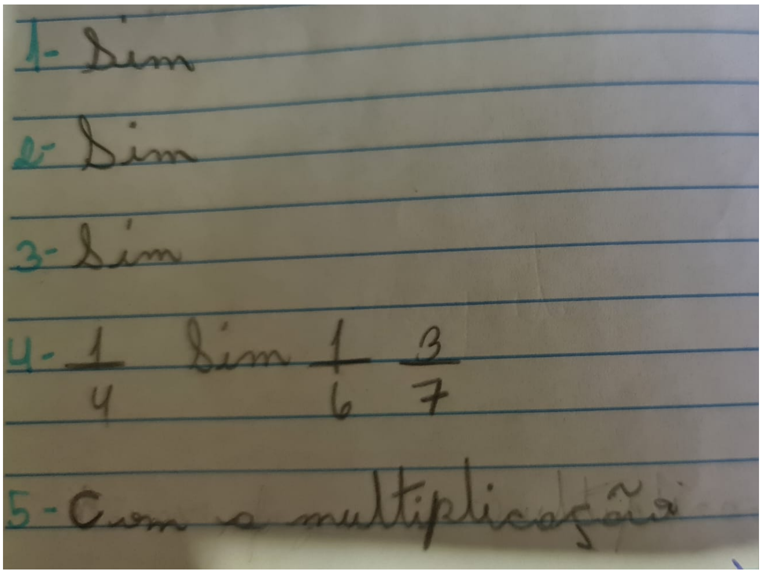
não está certo pois não consegui

Fonte: O autor (2023)

Os alunos, de modo geral, registraram em suas folhas de respostas as informações mais relevantes das atividades, como as frações obtidas para cada nova nota musical construída para a escala, assim como o tamanho da corda que seria necessário para obter aquela nota. Nesses registros, podemos observar as operações de multiplicação entre as frações sendo realizadas. Nota-se também a comparação das frações obtidas com a fração $\frac{1}{2}$, utilizando o recurso da equivalência.

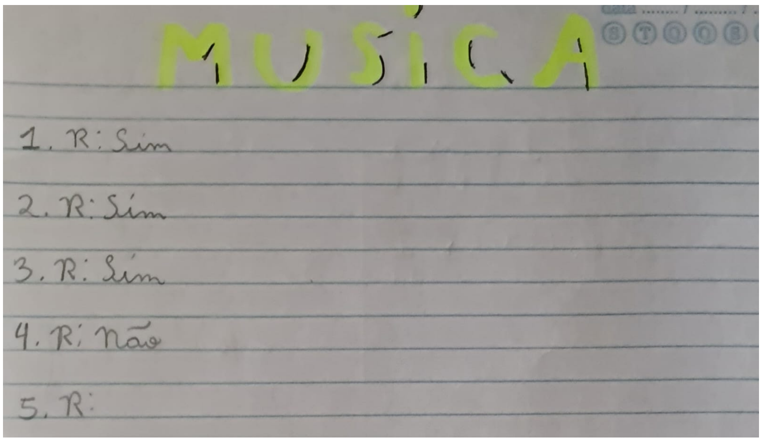
Como respostas as atividades presentes na segunda oficina, foi bastante comum que estas fossem respondidas apenas com *"Sim"* ou *"Não"*, sem que houvesse alguma argumentação posterior. Podemos observar esse fato pelos exemplos a seguir:

Figura 3.11: Folha de respostas do estudante E9



Fonte: O autor (2023)

Figura 3.12: Folha de resposta do estudante E10



Fonte: O autor (2023)

Nos 15 minutos finais dessa última visita, decidi conversar com os participantes sobre o que eles acharam das oficinas e aproveitei para colher suas opiniões com três simples perguntas que escrevi na lousa. Essas perguntas foram improvisadas, e portanto não apareceram anteriormente na descrição do método utilizado, porém sinto que foram importantes para entender um pouco sobre a visão dos estudantes sobre os temas trabalhados nas oficinas.

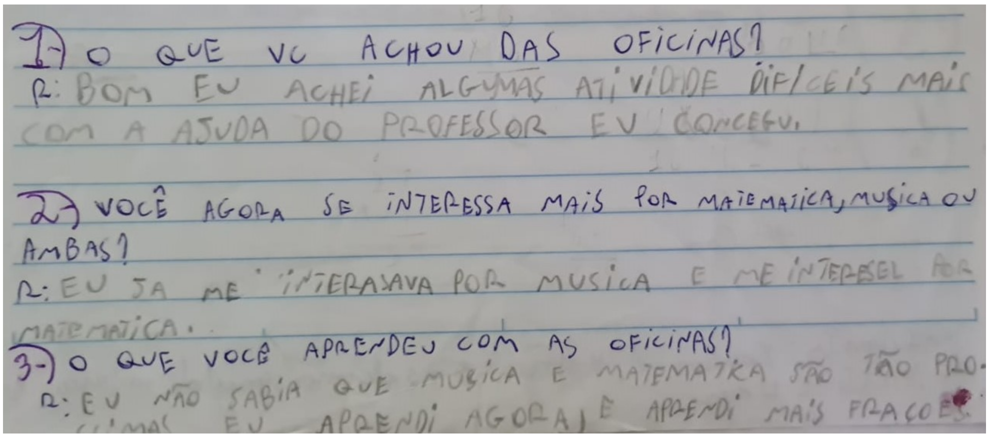
Foram feitas as seguintes perguntas:

- O que você achou das oficinas?
- Agora você se interessa mais por matemática, música ou ambas?
- O que você aprendeu com as oficinas?

Pelas respostas obtidas, notei que uma grande parte da turma achou *"legal"* e *"interessante"* ter participado das oficinas, porém houve uma parcela de respostas que consideraram as atividades difíceis. Muitas respostas sobre o aprendizado com as oficinas foram bastante simples, como *"aprendi mais sobre matemática"* ou *"aprendi mais sobre música"*, porém pudemos observar algumas respostas interessantes como *"fazer fração mais rápido"*, *"equivalência"*, *"notas musicais"*, *"dividir e multiplicar"*.

As imagens a seguir ilustram algumas das respostas encontradas:

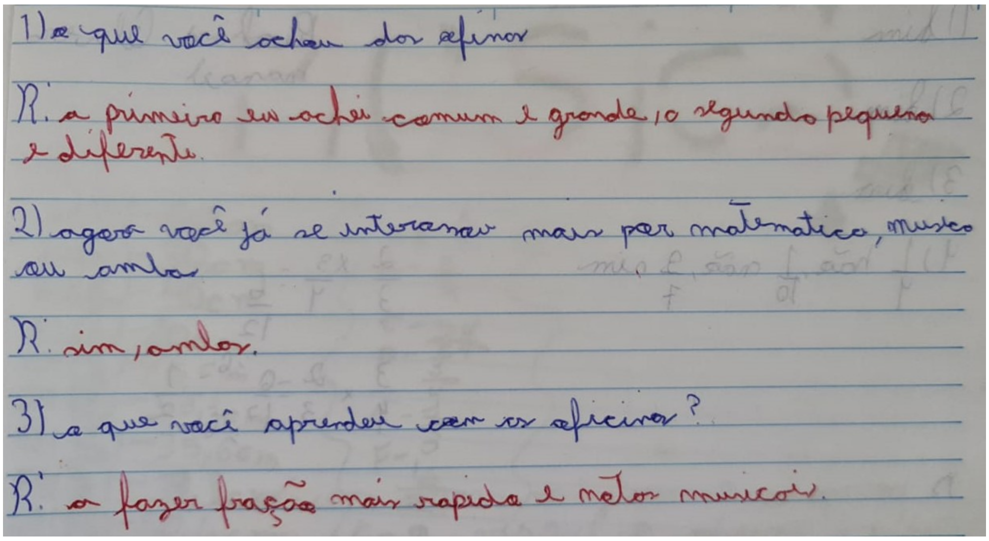
Figura 3.13: Respostas do estudante E11


1-) O QUE VC ACHOU DAS OFICINAS?
R: BOM EU ACHEI ALGUMAS ATIVIDADE DIFÍCEIS MAIS
COM A AJUDA DO PROFESSOR EU CONCEGUI.

2-) VOCÊ AGORA SE INTERESSA MAIS POR MATEMATICA, MUSICA OU
AMBAS?
R: EU JA ME INTERASAVA POR MUSICA E ME INTERESEI POR
MATEMATICA.
3-) O QUE VOCÊ APRENDEU COM AS OFICINAS?
R: EU NÃO SABIA QUE MUSICA E MATEMATICA SÃO TÃO PRO-
EU APRENDI AGORA, E APRENDI MAIS FRAÇOES

Fonte: O autor (2023)

Figura 3.14: Respostas do estudante E12



1) o que você achou das oficinas

R. a primeira eu achei comum e grande, o segundo pequeno e diferente.

2) agora você já se interessa mais por matematica, musica ou ambos

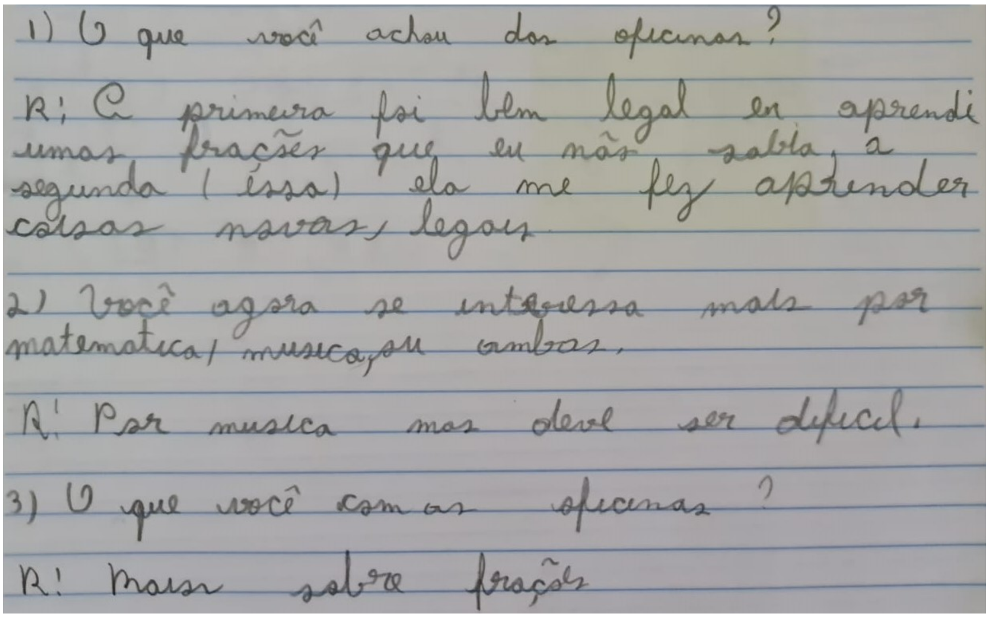
R. sim, ambos.

3) o que você aprendeu com as oficinas?

R. a fazer fração mais rapida e notas musicais.

Fonte: O autor (2023)

Figura 3.15: Respostas do estudante E13



1) O que você achou das oficinas?

R; A primeira foi bem legal eu aprendi umas frações que eu não sabia, a segunda (essa) ela me fez aprender coisas novas, legais

2) Você agora se interessa mais por matematica, musica, ou ambos.

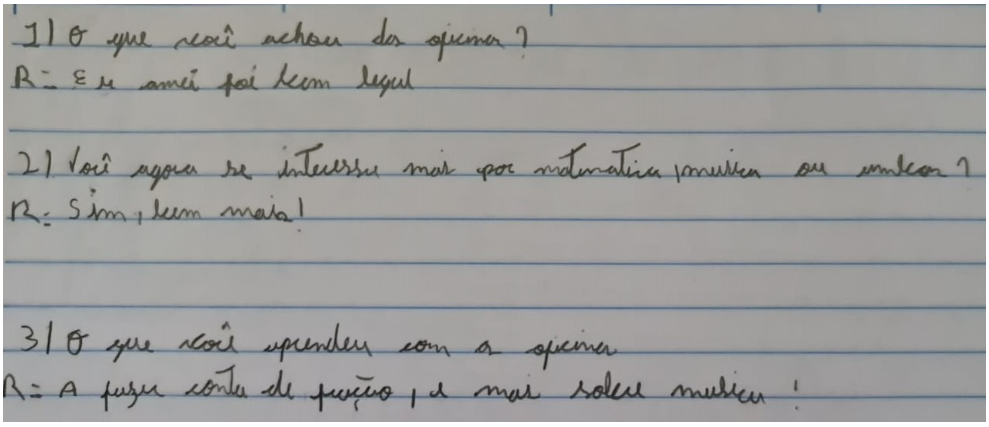
R! Por musica mas deve ser dificil.

3) O que você com as oficinas?

R! Mais sobre frações

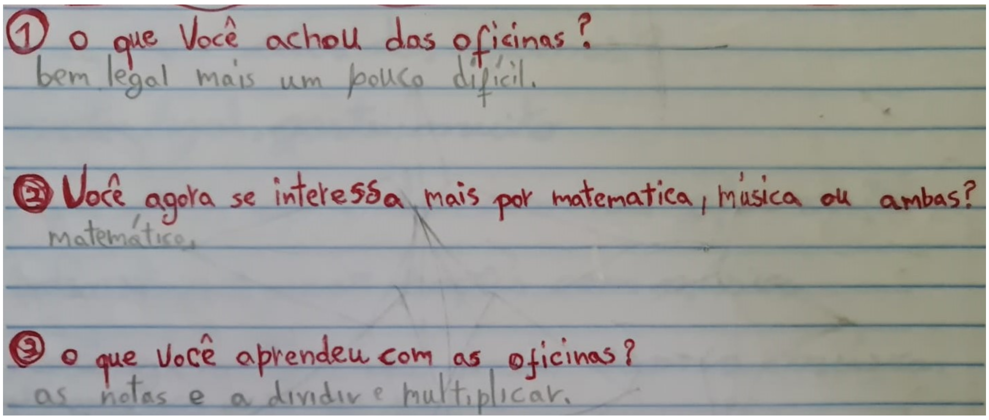
Fonte: O autor (2023)

Figura 3.16: Respostas do estudante E14


1) O que você achou da oficina?
R: Eu amei foi bem legal
2) Você agora se interessa mais por matemática, música ou ambas?
R: Sim, bem mais!
3) O que você aprendeu com a oficina
R: A fazer conta de fração, e mais sobre música!

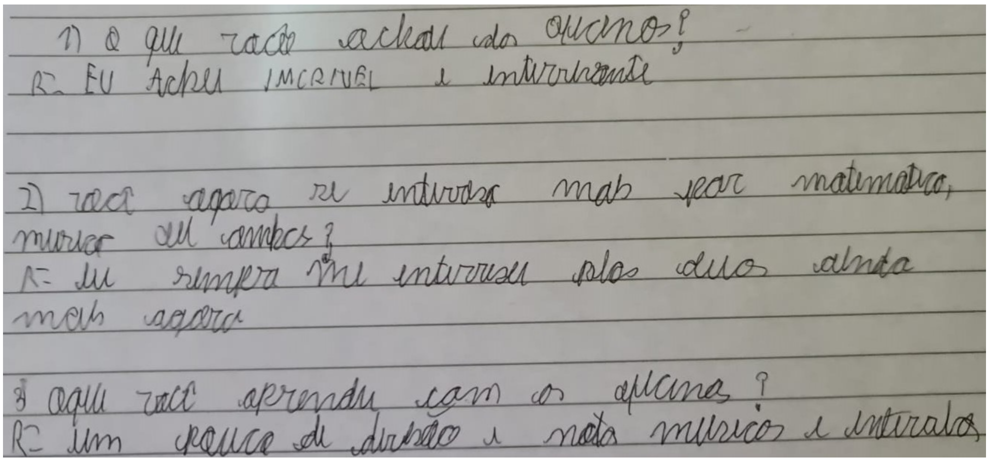
Fonte: O autor (2023)

Figura 3.17: Respostas do estudante E15


1 o que Você achou das oficinas?
bem legal mais um pouco difícil.
2 Você agora se interessa mais por matematica, música ou ambas?
matemática.
3 o que Você aprendeu com as oficinas?
as notas e a dividir e multiplicar.

Fonte: O autor (2023)

Figura 3.18: Respostas do estudante E16


1) O que você achou das oficinas?
R: EU Achei INCRIVEL e interessante
2) você agora se interessa mais por matematica, musica ou ambos?
R: eu sempre me interessei pelos duas ainda mais agora
3 o que você aprendeu com as oficinas?
R: um pouco de divisão e nota musicais e intervalos

Fonte: O autor (2023)

Capítulo 4

Considerações Finais

Para iniciar esse capítulo deve-se novamente salientar que as oficinas foram aplicadas no primeiro semestre letivo de 2022. O país estava passando pelo período de pandemia em que a grande maioria dos estudantes estavam voltando ao ensino presencial após quase 2 anos letivos de forma totalmente remota. Os problemas relacionados à pandemia e os impactos causados pelo isolamento na educação como um todo foram enormes.

A educação matemática no Brasil durante a pandemia de COVID-19 enfrentou desafios significativos, com o fechamento de escolas e a transição para o ensino remoto, muitos estudantes e professores enfrentaram dificuldades para adaptação ao modelo de ensino, isso quando possuíam recursos. A pandemia evidenciou as desigualdades existentes no Brasil, e para o contexto de ensino remoto, o acesso à internet e a dispositivos eletrônicos eram fundamentais. O difícil acesso à essas tecnologias pelas populações com menores rendas fez com que o acesso à educação desses estudantes fosse ainda mais prejudicada.

A pesquisa "Retorno para Escola, Jornada e Pandemia"conduzida por Marcelo Neri (2022) da Fundação Getúlio Vargas (FGV) mostra que em setembro de 2020 os alunos de 6 a 15 anos que estudavam em escolas públicas, em média, dedicavam aos estudos apenas 2 horas e 18 minutos em dias letivos, números esses que entram em forte contraste com dados de 2006, em que essa categoria de alunos dedicava 4 horas e 15 minutos

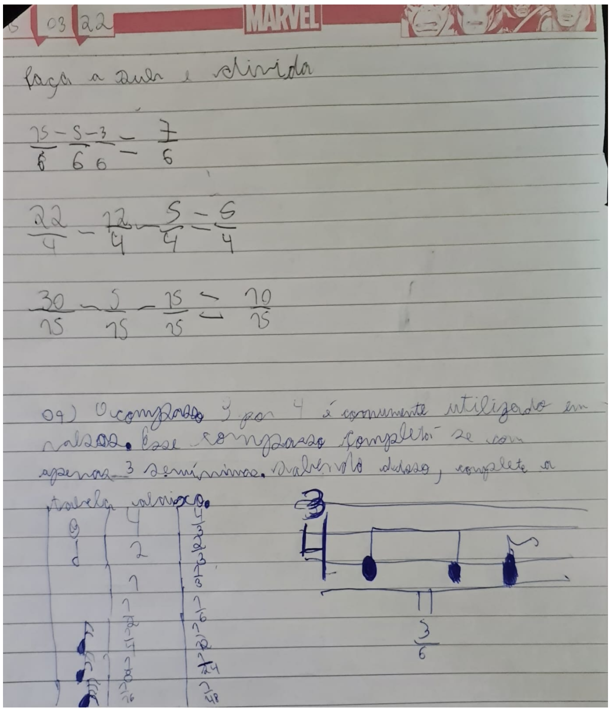
Outros prejuízos, como em relação ao conhecimento dos estudantes e fatores socioemocionais, também foram consequências do período de isolamento. Jamil Chade (2022) aponta em sua reportagem pela revista virtual Uol: "O Unicef destaca ainda como houve uma regressão de mais de uma década em algumas das principais matérias. No caso dos exames de matemática, os resultados foram equivalente s ao que existia há 14 anos."

Os efeitos da pandemia e do modelo de ensino remoto podiam ser facilmente notados na turma em que as oficinas foram aplicadas. Assim como evidenciou-se na pesquisa citada anteriormente, os estudantes mostravam muita dificuldade em utilizar o tempo de aula para se dedicarem as atividades escolares. Essas dificuldades podem ter sido acentuadas tanto pelo retorno ao formato presencial quanto pelo fato de que a escola em questão possuía a carga horária em formato integral, que acabava por deixá-los ainda mais tempo na escola.

A aplicação das oficinas nos permitiu observar alguns pontos em que ajustes seriam apreciados. Na primeira oficina, por exemplo, a densidade do material entregue aos participantes pareceu deixá-los um pouco desconfortáveis. Sendo assim, sugere-se que para aplicações posteriores, o material seja dividido em atividades menores, possibilitando uma maior constância de registros, que podem ser recolhidos e avaliados de forma menos esporádica. Outro possível benefício dessa sugestão pode ser o de criar uma certa expectativa dos estudantes ao não saberem quais serão as próximas atividades, já que da forma como foi aplicada, eles tinham acesso a todas as atividades daquela oficina no momento em que recebiam o material.

Ainda no que se refere à coleta das respostas dos estudantes, é possível também fornecer aos estudantes uma folha dedicada às respostas, o que pode auxiliá-los na organização. A figura a seguir ilustra a folha de respostas de um dos estudantes, que acabou misturando os registros de aulas regulares de matemática com os da oficina.

Figura 4.1: Folha de respostas do estudante E17



Fonte: O autor (2023)

Como já explicitado no capítulo anterior, em relação a quantidade de aulas utilizadas pelas oficinas ser maior que a planejada, entende-se que a organização e a disposição das aulas que foram cedidas acabou levando as atividades a tomarem mais tempo. As aulas de 45 minutos acabavam durando, na prática, cerca de no máximo 40 minutos. Em muitas aulas era necessário aguardar os estudantes subirem do pátio para a sala de aula, para que então pudessem se organizar em grupos.

As oficinas proporcionaram a esses estudantes, que foram privados da socialização com seus pares devido ao ensino remoto como consequência da crise sanitária, novas oportunidades de socialização e trabalho em grupo. Ainda que não acostumados com essas dinâmicas, muitas vezes pode-se observar os estudantes tentando ensinar uns aos outros como resolver as atividades propostas, ou mesmo discutindo sobre os sons serem ou não consonantes. Essas experiências são fundamentais na formação de um cidadão, e muitas vezes são esquecidas em aulas regulares de matemática. Essa característica socioemocional das atividades da oficina pela organização em grupos mostrou-se de considerável importância para os participantes em especial, justamente devido ao isolamento social que foi estipulado devido à crise sanitária.

A compreensão dos conceitos matemáticos propostos, como a conversão entre figuras rítmicas, equivalência de frações e operações envolvendo frações, variou entre os alunos. A estratégia de usar exemplos e resoluções passo a passo foi crucial para garantir que todos pudessem acompanhar o conteúdo. A falta de familiaridade com frações equivalentes e as dificuldades de conversão entre as figuras rítmicas indicaram que o projeto também atuava como um reforço para conceitos matemáticos previamente aprendidos.

Durante as aplicações das oficinas, algumas discussões ricas e inesperadas aconteceram, como por exemplo sobre as dízimas periódicas. Os estudantes perceberam de forma autônoma que algumas multiplicações de números inteiros por frações resultariam em dízimas, além de naturalmente perceberem a necessidade de aproximar esse número para medir e estabelecer um comprimento de corda razoável.

Outro exemplo de discussão importante foi, como ilustrado pelas figuras 3.8 e 3.9, o uso de equivalências para decidir quais frações eram menores que $\frac{1}{2}$, que reforça os conceitos abordados pela primeira oficina além de retratar conceitos de desigualdade utilizando frações.

Como já era esperado, alguns obstáculos apareceram no decorrer das aplicações e, apesar disso, sobre alguns dos conceitos abordados no trabalho, vimos a potencialidade de ter ocorrido aprendizagem significativa. Podemos citar como exemplo a necessidade de trabalhar com denominadores iguais ao somar frações, que em diversos atendimentos individuais mostravam perceber o incômodo com denominadores diferentes, ou figuras rítmicas diferentes, mesmo que não soubessem convertê-las.

Ao levar em conta a realidade da turma no qual esse projeto foi realizado, percebemos que em diversos pontos as oficinas tiveram efeitos bastante positivos nos participantes. Dentre esses efeitos, podemos citar a grande curiosidade dos alunos pelo tema, o interesse gerado pela novidade em seus cotidianos escolares ("aula de música", como a maioria dos alunos acabaram apelidando as oficinas) e, de certa forma, uma parte dos conceitos foram de fato absorvidos por parte dos estudantes. Podemos citar como exemplo, nas Figuras 3.2 e 3.3 que observa-se o uso indireto do conceito de equivalência para contar os tempos necessários para se completar um intervalo musical, ou mesmo nas Figuras 3.4 e 3.6, em que os estudantes utilizam os recursos de teoria musical para corretamente realizar as adições entre frações.

Em alguns momentos durante as aplicações das oficinas, foi possível perceber que estas foram responsáveis por criar cenários que propiciam aprendizagem. Durante os momentos iniciais das aplicações das oficinas, percebe-se na atitude dos alunos grande interesse e curiosidade pelo tema que antes nunca fora abordado na escola. Essa energia é bem direcionada pelas oficinas, que levam os estudantes a terem disposição para aprender, como Pellizari et. al. explica:

> Para haver aprendizagem significativa são necessárias duas condições. Em primeiro lugar, o aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. Em segundo, o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, ele tem que ser lógica e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio. (PELLIZARI et al., p. 38, 2002)

Apesar de boa parte dessa energia acabar nos momentos finais das oficinas, é razoável argumentar que esta foi essencial para que os processos de aprendizagem tivessem início. É possível notar, também, que os conhecimentos prévios que os estudantes tinham sobre frações vieram à tona ao estudar primeiro as figuras rítmicas, que foram fundamentais para a realização dos exercícios seguintes, ainda que alguns dos participantes demonstrassem passar por obstáculos na assimilação dos conteúdos. É plausível dizer que tais obstáculos podem ser atribuídos ao contexto pós-pandêmico e mesmo ao que tange o próprio conteúdo de frações, que por si, é um grande desafio para boa parte dos estudantes em diversos contextos.

Note que o objetivo das oficinas nunca foi tornar o ensino de frações menos desafiador. Por um lado, envolvê-las no cenário da teoria musical pode nos fazer pensar que naturalmente, por incluir mais elementos do que o usual, poderia tornar o ensino mais desafiador do que inicialmente imaginado. Entretanto, como já discorrido, a proposta das oficinas é justamente buscar por motivações diferentes das usuais para se ensinar frações, dispor de recursos simbólicos (figuras rítmicas) e materiais (monocórdio) para representá-las e assim tornar mais palpável o primeiro contato com as operações entre frações racionais, criando assim um ambiente propício para a aprendizagem.

É possível observar, com nas Figuras 3.13 até 3.18, que alguns estudantes relataram que passaram a se interessar mais por matemática após as oficinas, enquanto outros relataram se interessar mais por música. É bem provável que essas respostas tenham sido sinceras, já que não havia nenhuma recompensa ou motivação para que assim a respondessem. As respostas obtidas pelas perguntas no final da segunda oficina, de modo geral, foram bastante motivadoras, dando fortes evidências de que os estudantes, em geral, gostaram de ter participado das atividades e que lembrarão delas como uma experiência positiva.

Mesmo nos casos em que os estudantes, de modo geral, não tiveram progressos significativos a respeito de operações com números racionais, outros aspectos dessa sequência didática que envolvem motivação, socialização e trabalho em grupo acabam contemplando fatores importantes para que esses estudantes possam, em outros processos, obter novos conhecimentos sobre esses e outros tópicos de matemática, e até mesmo a respeito de outras áreas, como por exemplo, a teoria musical.

Além disso, deve-se ter em mente a outra essência desse trabalho que visa introduzir teoria musical em aulas de matemática, abordando não somente a linguagem musical e conceitos harmônicos, como também reproduzindo experiências históricas não só para contar e dar a devida relevância aos fatores históricos que levaram ao desenvolvimento da música e da matemática como conhecemos, mas também para trazer uma oportunidade singular para a vida dos estudantes envolvidos: de conhecer e apreciar as diversas nuances do mundo da música, da matemática e da ciência.

Sendo assim, esse trabalho mostra evidências de que é possível restabelecer a conexão entre a matemática e a teoria musical para o ensino de alguns tópicos da matemática, como no caso deste trabalho, as operações entre frações racionais, que são discutidas e motivadas por conceitos de teoria musical. Por fim, também temos evidências, como as ilustradas pelas Figuras 3.14, 3.15, 3.16 e 3.18, de que essa abordagem pode despertar interesse nos estudantes em se aprofundar na área teoria musical, que normalmente é pouco explorada nas escolas, levando-os a refletir sobre os processos presentes em seu aprendizado e as suas intersecções com a matemática que, por sua vez, desenvolve habilidades de resolução de problemas e pensamento lógico, capacitando os indivíduos a enfrentar desafios complexos em diversas áreas da carreira e da vida.

Referências

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música: O pensamento analógico na construção de significados.** São Paulo: Escrituras, 1999. 333 p.

BEHLAU, Mara. **Voz – O livro do especialista.** v.1. Rio de Janeiro: Revinter, 2001.

BRASIL. LDB n.º 9.394/96. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base.** Brasilia: MEC, CONSED, UNDIME, 2018. 600 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 15 de novembro de 2019

Clubes OBMEP. **Aplicando a Matemática Básica: Construção de um Monocórdio.** Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/>. Acesso em: 28 de setembro de 2023.

CRITCHLOW, K. Introdução Geral. In: MARTINEAU, J (Org). **Quadrivium: as quatro artes liberais clássicas da aritmética, da geometria, da música e da cosmologia.** 8º impressão. São Paulo: É realizações, 2014.

CY, Valdemar Félix da Silva; ANDRADE, Margaret Amaral de. Música na Escola Pública: Desafios E Soluções. Escola de Música e Belas Artes do Paraná, 2019. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2315-8.pdf>.

DRUCK, Iole de Freitas. **Frações: uma análise de dificuldades conceituais**. . São Paulo: IME-USP. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/directbitstream/f67cbea2-7f25-497b-a248-c46682417d88/1555913.pdf>. Acesso em: 06 fev. 2024. , 2006

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Unicamp, 2005. 843 p.

FRANÇA, Cecília Cavalieri. **BNCC e educação musical: muito barulho por nada?** Música na educação básica (MEB), v. 10, n. 12, 2020.

FRAZER, Peter. **The Development of Musical Tuning Systems.** Disponível em: <https://www.peterfrazer.co.uk/music/tunings.html>. Acesso em: 19 de agosto de 2023.

GUHN, Martin; EMERSON, Scott D.; GOUZOUASIS, Peter. **A population-level analysis of associations between school music participation and academic achievement.** Journal Of Educational Psychology, [s.l.], p.308-328, 2020. American Psychological Association (APA). <http://dx.doi.org/10.1037/edu0000376>.

CHADE, Jamil. **Unicef: Covid gerou 'erosão' do ensino no Brasil e retrocesso de uma década.** UOL Notícias. 23/01/2022. Disponível em: <https://noticias.uol.com.br/colunas/jamil-chade/2022/01/23/unicef-covid-gerou-erosao-do-ensino-no-brasil-e-retrocesso-de-uma-decada.htm> Acesso em: 25 de outubro de 2023

JASCHKE, Artur C.; HONING, Henkjan; SCHERDER, Erik J. A. **Longitudinal Analysis of Music Education on Executive Functions in Primary School Children.** Frontiers In Neuroscience, [s.l.], v. 12, p.1-11, 28 fev. 2018. Frontiers Media SA. <http://dx.doi.org/10.3389/fnins.2018.00103>.

LATHAM, Alison. **Music Theory. The Oxford Companion to Music.** Oxford Music Online, 2011. ISBN 978-0199579037.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa?** Revista cultural La Laguna Espanha, 2012. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>. Acesso em: 19/08/2023.

NERI, Marcelo. **Retorno para Escola, Jornada e Pandemia.** Centro de Políticas Sociais, Rio de Janeiro, Janeiro/2022. Disponível em: <https://www.cps.fgv.br/cps/bd/docs/FGV_Social_Neri_RetornoParaEscolaJornadaPandemia.pdf>. Acesso em: 20 de outubro de 2023.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés (2002). **Curso de Física Básica. 2 - Fluidos, Oscilações e Ondas Calor** Editora Blucher - 5ª edição, 2013.

PELIZZARI, A.; KRIEGL, M. L.; BARON, M. P.; FINCK, N. T. L.; DOROCINSKI, S. I. **Teoria da Aprendizagem Significativa segundo Ausubel.** Revista PEC, Curitiba, v. 2, nº 1, p. 37-42, jul. 2001/jul. 2002.

PONTES, F. L., MADRUGA, Z. E. de F. (2019). **Música e Modelagem Matemática: representações de notas musicais por meio da função seno.** TANGRAM - Revista De Educação Matemática, 2(4), 79–95. <https://doi.org/10.30612/tangram.v2i4.10215>.

ROSSI, D. **Atividades musicais extracurriculares e aulas de artes nas escolas estaduais de ensino médio do município de Curitiba.** Curitiba: Universidade Federal do Paraná. Dissertação (Mestrado) – Setor de Educação Curitiba, 2006, p.111-112

TERPSTRA, Siemen. **An Introduction to the Monochord.** Alexandria 2: The Journal of the Western Cosmological Traditions, Volume 2, p.137-166, 1993. David Fideler, ed. Red Wheel/Weiser. ISBN 9780933999978.2

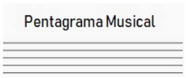
Apêndice A

Anexos

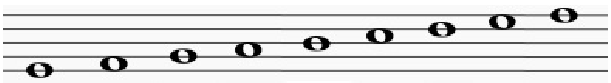
A.1 Oficina 1 - Figuras Musicais

Existem diversas formas de transcrever uma música para o papel, no objetivo de registrar uma nova melodia que foi criada ou para aprender músicas já transcritas. Uma dessas formas é a partitura: uma rica linguagem musical composta por símbolos que representam o que quer ser dito, ou no caso, o que quer ser tocado.

A partitura é composta pelo pentagrama, que consiste de 5 retas paralelas em que cada linha ou espaço entre duas linhas pode ser marcado para representar uma determinada nota musical.

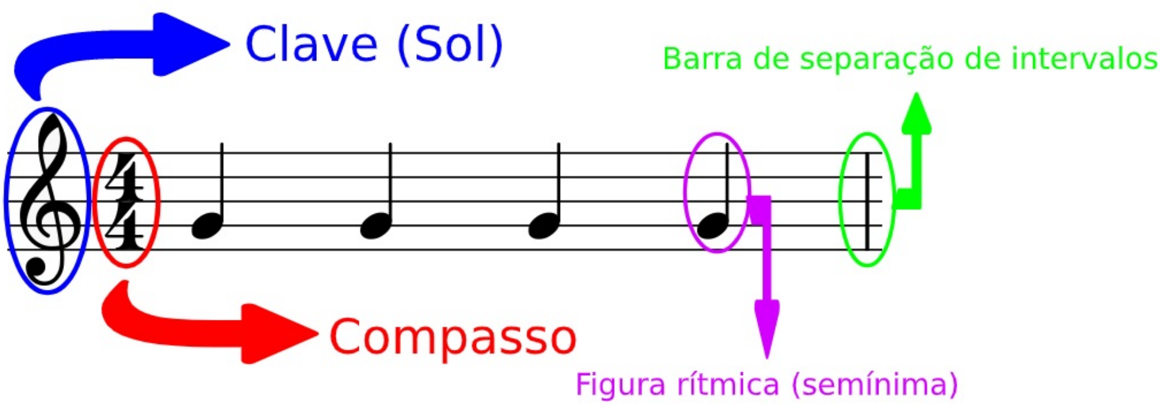


As 5 linhas nos dão 5 notas enquanto os espaços entre elas nos dão mais 4 notas. Isso resultaria em um total de 9 notas, certo? Na figura abaixo, cada uma das figuras marcadas em preto nas linhas ou espaços representam uma nota musical.



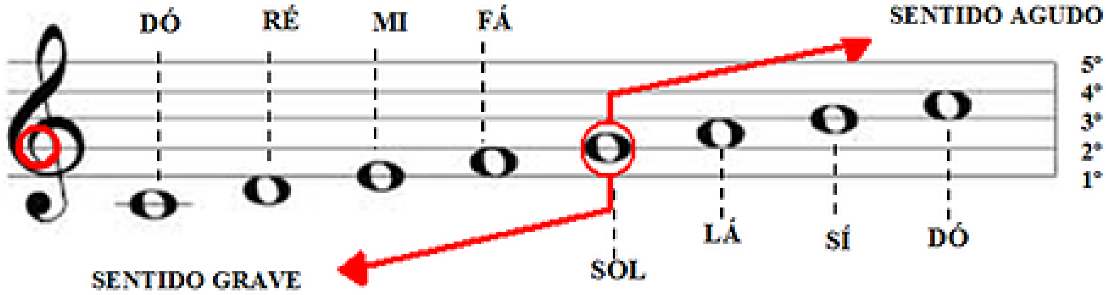
Muitas vezes essas 9 notas não são suficientes para expressar todas as notas em uma música, e portanto é necessário utilizar notas que não se encontram em uma linha ou em um espaço entre linhas que já está padronizadamente representado. Para isto utilizamos linhas complementares, que seriam linhas desenhadas somente para representar tais notas no pentagrama.

Existem alguns elementos importantes para se construir uma partitura. Desses elementos, que podemos chamar de figuras musicais, falaremos sobre três: a clave, o compasso e as figuras rítmicas.



No começo de um pentagrama observa-se a figura conhecida como clave: a clave é responsável por determinar qual nota musical cada uma das linhas representa. Existem as claves de Sol, Fá e Dó, além da clave neutra (utilizada para instrumentos de percurssão).

Na imagem abaixo, podemos visualizar onde se localizam as notas musicais em uma clave de Sol, que geralmente é utilizada para instrumentos como o violão, flauta, clarinete e a região da mão direita no piano.



Antes de entender de que se trata o compasso, precisamos entender o que são as figuras rítmicas. As figuras rítmicas nos indicam por quanto tempo uma nota deve ser tocada e a cada uma delas é associada uma nomenclatura, uma pausa e um número de representação (que também corresponde ao seu valor individual).

Figura	Pausa	Nomenclatura	Número de representação
𝅝	𝄻	Semibreve	1
𝅗𝅥	𝄼	Mínima	2
♩	𝄽	Semínima	4
♪	𝄾	Colcheia	8
𝅘𝅥𝅯	𝄿	Semicolcheia	16
𝅘𝅥𝅰	𝅀	Fusa	32
𝅘𝅥𝅱	𝅁	Semifusa	64

Na tabela ao lado, observamos que a primeira figura rítmica é a semibreve, cujo valor individual é 1. Já a próxima figura rítmica é a mínima, com valor individual igual a 2. O tempo em que uma semibreve deve ser tocada é exatamente o dobro do tempo que uma mínima deve ser tocada, ou seja, uma semibreve ocupa o mesmo tempo que duas mínimas. Isso está relacionado ao valor individual de cada uma dessas notas: 1 semibreve equivale a 2 mínimas, assim como 2 mínimas equivalem a 4 semínimas (ou 1 mínima equivale a 2 semínimas) e assim por diante.

As figuras de pausa representam quando nenhuma nota deverá ser tocada durante esse tempo, ou seja, é um espaço de tempo onde é feito silêncio.

A próxima figura, que usualmente localiza-se à direita da clave, é o compasso. O compasso é responsável em agrupar as figuras rítmicas em intervalos de tempo iguais, através de barras verticais, para que se facilite o entendimento do leitor. Os compassos são compostos por dois números, um em baixo do outro, onde o número de baixo nos indica qual a figura de referência, de acordo com seu número de representacão, enquanto o número de cima indica quantas dessas figuras completam um intervalo.

O compasso mais comum é o compasso 4 por 4, ou seja, para cada intervalo de tempo cabem 4 semínimas. Note que o número de representação também indica o valor dessas notas individualmente.

Devemos nos atentar também ao conceito chamado andamento. Em geral representado com o símbolo que está associado a figura de referência do compasso (o número de baixo) sendo igualado a um número que nos diz quantas vezes aquela figura rítmica seria tocada dentro de um minuto. Por exemplo, num compasso 4 por 4, teríamos ♩ = 120, o que indicaria que se essa música tivesse 1 minuto e fosse formada apenas por semínimas, teria 120 semínimas.

Geralmente utiliza-se um metrônomo, um aparelho que emite sons de mesma duração, para indicar o andamento de uma música. Em linguagem mais técnica, o metrônomo pode ser ajustado para emitir uma determinada quantidade de pulsos por minuto. Quando não identifica-se a velocidade na partitura, fica a critério do instrumentista.

Confira um exemplo de partitura da famosa canção folclórica brasileira "Atireu um pau no gato"

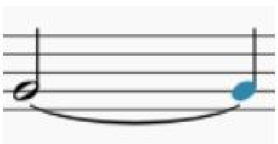
Agora que já vimos informações básicas sobre partituras, iremos trabalhar um pouco com a parte rítmica da partitura. Se tomarmos como referência o compasso 4 por 4, sabemos que nele cabem 1 semibreve, ou 2 mínimas, ou 4 semínimas e assim por diante. Mas quanto cada figura dessa representa, individualmente, de um compasso? Para responder essa pergunta, precisamos do conceito matemático de fração. Se no intervalo de tempo cabem 2 semínimas, então uma única semínima ocuparia metade do intervalo, ou seja, cada semínima ocupa exatamente $\frac{1}{2}$ do intervalo.

Atividades

1) Utilizando os conceitos apresentados até o momento, complete a tabela atribuindo o valor individual de cada figura rítmica e uma fração que ela representa em cada intervalo, baseada no compasso 4 por 4.

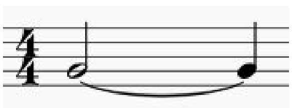
Figura Músical	Valor individual	Fração do Intervalo
Semibreve (𝅝)		
Mínima (𝅗𝅥)		
Semínima (♩)		
Colcheia (♪)		
Semicolcheia (𝅘𝅥𝅯)		
Fusa (𝅘𝅥𝅰)		
Semifusa (𝅘𝅥𝅱)		

2) A ligadura é uma ferramenta da partitura que permite que duas notas ou mais sejam ligadas para formar uma única nota cujo valor individual corresponde a soma dos valores individuais das notas ligadas.



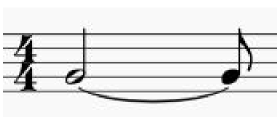
Por exemplo, em uma partitura onde aparece uma mínima em ligadura com uma semínima, teríamos uma nota de valor individual igual a $2 + 1$, ou seja, 3. A qual fração do intervalo, num compasso 4 por 4, corresponderia as seguintes notas ligadas:

a) Uma semínima e uma mínima

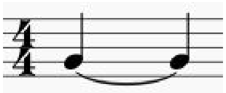


b) 2 colcheias

c) 1 mínima e 1 colcheia



d) 2 semínimas



3) De acordo com o exercício anterior, podemos reparar que duas figuras iguais ligadas correspondem a qual outra figura?

Percebemos então que podemos trocar duas figuras iguais ligadas por uma única figura cujo seu valor individual é o dobro, ou seja, estamos trabalhando com a equivalência entre as figuras musicais. Quando trabalhamos com frações podemos pensar no mesmo conceito: duas frações são equivalentes se ambas representam a mesma parte de um todo. Outra forma de verificar se duas frações são equivalentes é observar se suas representações decimais são iguais, ou seja, se ambas possuem o mesmo valor numérico. Por exemplo, comparemos as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$: ambas possuem representação decimal igual a 0,5 e portanto são frações equivalentes.

Quando olhamos as figuras musicais presentes em um compasso, em geral podemos dizer quantas figuras temos de cada tipo. Por exemplo, repare no seguinte compasso ao lado: Nesse compasso temos um total de 3 semínimas e 2 colcheias. Não dá pra dizer que temos 5 semínimas ou 5 colcheias, pois são figuras diferentes. Com as frações acontece a mesma coisa: se duas frações possuem denominadores diferentes então não podemos somá-las. Fazer isso para a matemática é o mesmo que somar maçãs e laranjas como se fossem duas frutas iguais, ou somar mínimas e semínimas como se fossem a mesma figura rítmica.

Agora voltando a pensar nas figuras musicais, vimos a pouco que podemos trocar duas figuras iguais ligadas por uma com o dobro de seu valor individual, então também podemos fazer o processo ao contrário: podemos trocar uma figura por duas cujo valor individual corresponda a duas metades ligadas.

Pensando no mesmo compasso da figura acima, agora observe esse compasso:

Pode-se observar que esse novo compasso é composto por um total de 8 colcheias, mas se trocarmos cada par de colcheias ligadas por uma semínima teríamos exatamente o compasso anterior.

Obs: Se você estranhou, as figuras rítmicas presentes nessa figura são colcheias! Para facilitar a notação entre repetidas colcheias ou figuras de menores valores, ligam-se as figuras com a quantidade de hastes que as mesmas possuem caso estejam sozinhas.

O que fizemos foi trocar as figuras musicais por outras equivalentes de forma que eu tivesse a mesma figura em todo o compasso, pois dessa forma podemos realizar a soma das figuras presentes no compasso. Então no fundo o que queríamos dizer é que 3♩ + 2♪ = 6♪ + 2♪ = 8♪.

Podemos pensar no valor individual dessas notas para transpor nosso pensamento para as frações: qual seria o valor total ao somar o valor individual de 3 semínimas e 2 colcheias? Sabemos que o valor individual de cada semínima é 1 e de cada colcheia é $\frac{1}{2}$, sendo assim temos a seguinte operação: $1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Ao trocarmos cada semínima por 2 colcheias ligadas, conseguimos colocar no compasso todas as figuras com mesmo valor individual através dessa equivalência, e então trocaremos o valor individual de cada semicolcheia para o valor individual de 2 semicolcheias ligadas: ao invés de dizer que o valor individual de cada semínima é 1, diremos que cada semínima vale $\frac{2}{2}$, que seria o valor individual de 2 semicolcheias ligadas. Dessa forma, temos todos os números em nossa operação sob o mesmo denominador e portanto podemos realizar a soma de seus numeradores: $\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}$ Como podemos dividir 8 por 2 então o valor individual das figuras somadas é 4, completando assim o compasso. Para realizar a subtração entre duas frações a regra é a mesma: devemos ter o denominador de ambas as frações iguais para podermos proceder. Caso os denominadores sejam diferentes, devemos usar a equivalência entre frações para escrevê-las de tal maneira que ambas possuam o mesmo denominador.

4) Os intervalos abaixo estão incompletos. Utilizando apenas uma única figura rítmica, complete-os, esboçando o pentagrama musical em um compasso 4 por 4:

a) Um intervalo com duas colcheias e uma semínima

b) Um intervalo com 3 semínimas

c) Um intervalo com duas semínimas e duas colcheias

5) Observe o seguinte intervalo músical:

a) O intervalo está completo? Se não, qual fração do intervalo está completa?

b) Complete o intervalo de tal forma que:

(i) Use mais 2 figuras rítmicas

(ii) Use mais 3 figuras rítmicas

(iii) Use mais 5 figuras rítmicas

6) Agora vamos trabalhar com o ponto de aumento (·). O ponto de aumento, quando colocado ao lado de uma figura rítmica, soma a figura metade de seu valor. Por exemplo, sabemos que no compasso 4 por 4 a figura (♩) tem o valor de $\frac{1}{4}$ do intervalo. Assim, uma semínima pontuada (♩.) tem o valor de uma (♩) mais o valor de uma (♪), ou seja, $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. Podemos pensar também em trocar uma (♩) por duas (♪), obtendo assim um total de três (♪). Como precisaríamos de um total de 8 (♪) para completar o compasso, então teríamos que a (♩.) corresponde a $\frac{3}{8}$ compasso. Agora, faça uma tabela com o valor individual e a fração do intervalo de cada uma das figuras pontuadas.

Figura Músical	Valor individual	Fração do Intervalo
Semibreve pontuada (𝅝.)		
Mínima pontuada (𝅗𝅥.)		
Semínima pontuada (♩.)		
Colcheia pontuada (♪.)		
Semicolcheia pontuada (𝅘𝅥𝅯.)		
Fusa pontuada (𝅘𝅥𝅰.)		
Semifusa pontuada (𝅘𝅥𝅱.)		

Trabalhando com operações

7) Qual o valor obtido em um intervalo composto pelas seguintes figuras rítmicas:

a) ♩ , ♪

b) ♩. , ♪

c) 𝅘𝅥𝅯 , ♪

d) ♪ , ♪ , ♩

e) ♩ , ♩ , ♪ , ♪ , ♪

8) Utilize os itens do exercício anterior para transformar as figuras musicais na fração que elas ocupam em um compasso 4 por 4. Realize novamente as operações.

9) O compasso 3 por 4 é comumente utilizado em valsas. Esse compasso completa-se com apenas 3 semínimas. Sabendo disso, complete a tabela abaixo:

Figura Músical	Valor individual	Fração do Intervalo
Semibreve (𝅝)		
Mínima (♩)		
Semínima (♩)		
Colcheia (♪)		
Semicolcheia (𝅘𝅥𝅯)		
Fusa (𝅘𝅥𝅰)		
Semifusa (𝅘𝅥𝅱)		

10) Em um compasso 3 por 4 são posicionadas uma mínima e uma colcheia. Qual fração do compasso foi ocupada? Indique duas formas diferentes para se completar esse compasso.

Existem diversos outros compassos que eventualmente podem ser utilizados em alguma música. Compassos 2 por 2, 2 por 4, 6 por 4 e até mesmo 12 por 8! Todos esses funcionam sobre a mesma lógica e podemos estudar as frações que as figuras rítmicas ocupam nesses compassos da mesma forma que estudamos no compasso de 4 por 4. Com o auxílio de um metrônomo ou até mesmo com solfejo podemos entender como cada um desses compassos podem soar. As frações são muito importantes para a compreensão de como cada figura rítmica se comporta dentro de cada compasso, como completar compassos e até mesmo para sistematizar o uso da partitura.

Para a próxima oficina iremos pensar mais a respeito das relações entre os sons. Reflita: será que existe alguma relação numérica entre os sons emitidos pelos instrumentos musicais?

A.2 Oficina 2 - O ciclo das quintas e a escala musical pitagórica

Por que será que algumas melodias soam tão bem? É comum que as pessoas passem a perceber o mundo de uma forma diferente quando estão ouvindo suas músicas favoritas. Antigamente, por volta do século VI A.C., pensava-se que todos os mistérios da natureza e do universo poderiam ser explicados através de relações matemáticas, apenas não se havia conhecimento suficiente para tal. Nessa época, o grande pensador, filósofo e matemático Pitágoras de Samos refletia sobre a essência dos sons e da melodia.

Em uma de suas obras, Pitágoras discorre sobre algumas das relações entre a matemática e a música, que apesar de ter tido pouco impacto na área da matemática foi uma grande pioneira no estudo da música teórica, pois até onde se sabe, não haviam estudos de caráter científico anteriores a esse, sendo esse o primeiro o primeiro estudo científico conhecido na história da humanidade. Nessa época ainda entendia-se que a música era uma área de estudo da matemática, apenas posteriormente as duas áreas distinguiram-se.

Pitágoras tinha vontade de entender o que tornavam dois sons consonantes (entenda por consonantes quando dois sons parecem se misturar de forma harmoniosa, dizemos que são sons consonantes), e para isso ele elaborou uma ferramenta de estudo bastante engenhosa: uma tábua de madeira com duas hastes fixas segurariam uma corda esticada, enquanto uma haste móvel seria responsável por prender essa corda em algum ponto dela, dividindo-a em duas partes. Essa ferramenta ficou conhecida como "Monocórdio", e por meio dela que Pitágoras e nós faremos nossas próximas atividades.

A essa altura você já deve ter percebido que uma corda esticada emite um som quando deformada, mas o som que ela emite depende de duas coisas: de seu comprimento e da tensão a qual a corda está submetida.

Assim podemos notar que, se forem colocadas sob a mesma tensão, cordas mais compridas emitem sons mais graves enquanto cordas menos compridas emitem sons mais agudos. Por outro lado, cordas de mesmo tamanho emitem sons mais graves se forem menos tensionadas enquanto emitem sons mais agudos se mais tensionadas.

Como o Monocórdio é uma ferramenta que não permite regulagem de tensão da corda, portanto o estudo é feito baseado somente na relação dos sons com o comprimento da corda.

Primeiro, tocaremos o monocórdio com a corda em seu tamanho total. Vamos chamar essa nota obtida de "A", que será a nossa primeira nota musical. A primeira coisa que Pitágoras percebeu foi que, ao tentar ver que som faria caso diminuíssemos o tamanho da corda pela metade, ele rparou que o som parece ter a mesma natureza do nosso "A", e que quando tocamos as duas notas juntas elas parecem se misturar. Temos então nosso primeiro caso de consonância, ou seja, os dois sons juntos pareciam agradáveis para Pitágoras.

Como os dois sons são tão parecidos que parecem ser o mesmo, diremos então que esses sons são de uma certa categoria, a qual chamaremos de "A". A diferença entre os sons dessa categoria seria a altura deles, no sentido de um ser mais grave ou agudo que outro. Assim, o som mais grave será chamado então de "A1", e o som obtido pela corda com som "A1" dividida em duas partes iguais será chamado de "A2". Pitágoras então desejava construir uma escala musical, ou seja, uma sequência de notas musicais que foram obtidas de consonâncias.

Atividades

1) Faremos agora o que Pitágoras fez para começar a construção de sua escala musical: divida a corda em três partes iguais e pressione a corda sobre uma dessas partes. Nota-se que a maior parte da corda possui $\frac{2}{3}$ do comprimento da corda original e por consequência a parte menor possui $\frac{1}{3}$ desse comprimento. Na sua opinião, ao ouvir o som da corda original e em seguida a corda dividida em $\frac{2}{3}$, você diria que esses sons são consonantes?

Para Pitágoras, tais sons eram consonantes, e portanto essa parte da corda que equivale a $\frac{2}{3}$ da corda deveria entrar como uma das notas de sua escala. Porém tal nota não se encontrava entre as notas "A1" e "A2", já que o som "A2" corresponde a metade do comprimento de "A1", ou seja, $\frac{1}{2}$ e ao compararmos essas frações percebemos que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. Para entender como comparamos essas frações devemos pensar nas equivalências como vimos na primeira oficina: ao colocarmos ambas sob o mesmo denominador, como por exemplo o 6, que é múltiplo do 2 e 3, temos que $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ e $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Com ambos sob mesmo denominador, comparamos então qual das frações tem o maior numerador, sendo no caso a $\frac{4}{6}$. Assim então podemos concluir que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.

Para o som correspondente ao comprimento de corda de $\frac{2}{3}$, chamaremos-o de "B". Mas vimos que $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, o que cumpriria a condição de Pitágoras de que as notas da escala deveriam estar entre as notas "A1" e "A2", portanto obteríamos a segunda nota de nossa escala, a nota "B1".

Como vimos na obtenção da nota "A2", ao dividir a corda ao meio obteríamos um som da mesma classe de equivalência, e portanto poderíamos dividir a corda com $\frac{2}{3}$ do tamanho da corda original com som "A1" em duas partes iguais. Calcular a metade de algo, ao mesmo tempo que significa dividi-la por 2, também significa multiplicá-la por $\frac{1}{2}$: quando multiplicamos duas frações estamos na verdade multiplicando quantas partes serão consideradas pelas partes que correspondem ao total da fração, ou seja, o novo numerador é a multiplicação dos numeradores de ambas as frações e o novo denominador é a multiplicação de ambos os denominadores.

Assim, quando multiplicamos alguma coisa por $\frac{1}{2}$, então não estaríamos alterando a quantidade de partes consideradas (o numerador seria multiplicado por 1, o que não o alteraria) e o total de partes seria o dobro (já que o denominador seria multiplicado por 2). Teríamos então o dobro do total de partes, mas tomaríamos desse total a mesma quantidade de partes, o que na verdade significaria dividir esse número por 2. Se quiséssemos obter a nota equivalente a "B1" na outra metade da corda, poderíamos dividi-la por 2, que seria o mesmo que multiplicá-la por $\frac{1}{2}$.

Assim teríamos $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, que seria o comprimento da corda correspondente ao som "B2" (no caso, um som equivalente ao "B1" porém mais agudo).

2) Para nosso próximo teste, tomaremos a fração $\frac{3}{4}$ da corda. Para Pitágoras, era natural seguir seus estudos com tal fração, pois passamos pelas frações $\frac{1}{2}$ (que nos gera um som de classe equivalente) e $\frac{2}{3}$ (que nos gera um som não equivalente, porém consonante), portanto seguiria-se com a fração $\frac{3}{4}$. Você acha que o som obtido pela corda com $\frac{3}{4}$ do tamanho original é consonante com os sons "A"?

3) Para Pitágoras esse também era um caso de consonância e portanto agora chamaremos essa nota de "C1". Essa nota, sem nenhuma modificação, poderia fazer parte da escala?

4) Sugira alguma fração da corda (de forma que o numerador seja menor que o denominador) para obter uma nova nota. Você acha que essa nova nota obtida é consonante com as notas "A"?

5) Pitágoras percebeu que ao aplicar a fração de $\frac{2}{3}$ sob a nota "C1" teríamos novamente a nota "A2". Da mesma forma, se aplicarmos a fração $\frac{3}{4}$ sobre a nota "B1" teríamos obtido também a nota "A2". Você consegue explicar porque isso acontece?

6) Para completar a escala musical de Pitágoras, ou seja, uma sequência ordenada de notas musicais, Pitágoras completaria com mais quatro notas: duas delas tomando repetidamente a fração $\frac{2}{3}$ (as notas formadas por $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ da corda, e $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ da corda) e outras duas tomando repetidamente a fração $\frac{3}{4}$ (analogamente, as notas formadas por $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{4}$ da corda, e $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{4}$ corda). Dessa forma, quais seriam os comprimentos da corda em relação ao comprimento original para obter as 7 notas musicais da escala?

7) Para terminar a escala, é necessário ordenar as notas de forma decrescente, por ordem de comprimento da corda. Lembre-se que a primeira nota da escala tem o comprimento de corda original. Sabendo disso, ordene as notas e obtenha a forma final da escala musical de Pitágoras.

Atualmente, damos nomes padronizados para as 7 notas musicais, que são: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. Para que os músicos não caiam em problemas para tocar seus instrumentos, os sons de cada uma dessas notas são padronizados mundialmente em todos os instrumentos.

Nesse experimento, podemos ter trabalhado com notas que estão fora do padrão mundial, pois essa foi a primeira escala musical que existiu! Desde Pitágoras, muitos estudiosos passaram a apreciar o fenômeno musical e estudá-lo, o que no futuro levou a música a ser uma área de estudo própria, separada da matemática. A partir desse ponto muitas teorias a respeito de música foram desenvolvidas e as coisas mudaram com o passar do tempo para chegar nas obras mais famosas que conhecemos hoje!

Espero que essas oficinas tenha despertado o interesse de todos a respeito de matemática e música! Muito obrigado pela sua participação e colaboração!

A.3 Operações com frações racionais: uma abordagem matemática utilizando teoria musical

Idealizador do projeto: Luan Moreira Batista Oliveira, licenciado em matemática pelo IME-USP, aluno regular do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pelo IME-USP. (<http://lattes.cnpq.br/4445644773183798>)

Orientado por: Prof. Doutor David Pires Dias (<http://lattes.cnpq.br/1464247269026445>)

Apresentação:

Esse documento tem como objetivo apresentar para as escolas colaboradoras, o projeto de pesquisa que deverá ser desenvolvido para obtenção do título de mestre em ciências, deixando em aberto possíveis adaptações para adequar-se às necessidades e exigências da escola. A proposta do projeto é tentar produzir uma sequência didática que combine elementos de teoria musical com o ensino de matemática, visando assim uma metodologia que busca por meio da interdisciplinaridade uma forma de transmitir conhecimentos aos alunos. Este projeto de pesquisa em ensino busca validar sua tese por meio do estudo de campo, ou seja, aplicar uma proposta de projeto, envolvendo atividades relacionadas à matemática e música, aos alunos e avaliar os resultados produzidos de acordo com a literatura científica Busca-se assegurar que o projeto é adaptável a outras realidades e por isso pode ser apresentado como alternativa para outros professores. Como a problemática principal do projeto é o ensino de frações, turmas do 6º ano do ensino fundamental II são as mais adequadas para a aplicação, com base no currículo escolar brasileiro. Os alunos participantes do projeto só terão os materiais produzidos durante a aplicação do projeto analisados e disponíveis na versão final da dissertação caso os responsáveis pelo aluno e a direção da escola assinem o TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido) que será disponibilizado no início da realização do projeto. Note que a não assinatura do termo não desqualifica os interessados a participar do projeto, apenas inviabiliza a utilização do material produzido por tal estudante.

Objetivos:

Esse projeto tem como objetivo propor uma sequência didática para ensino de matemática que funciona simultaneamente com alguns conceitos básicos de música, dessa forma buscando trazer um aprendizado significativo a respeito dos temas que são trabalhados por meio deste. Tal sequência não só valoriza os aprendizados em matemática, mas também tem a intenção de introduzir temas iniciais de teoria musical de forma a causar interesse e curiosidade do aluno, incentivando-o ao estudo mais aprofundado de ambas as grandes áreas. O projeto funcionará através de duas oficinas que abordarão ambas as áreas simultaneamente, sempre realizando uma interlocução entre as duas. As oficinas visam proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem em que cada uma delas procura consolidar alguns conceitos específicos, pois apesar de serem oficinas a se trabalhar o ensino de música, o seu objetivo final é transmitir conhecimentos matemáticos sob uma perspectiva diferente da tradicional.

As oficinas recebem o nome de **"Figuras Musicais"** e **"O ciclo das quintas e a escala** musical pitagórica"

As oficinas são voltadas para o público da escola de nível fundamental, mais especificamente para turmas do 6º ano do segundo ciclo, onde o novo currículo brasileiro (BNCC) incentiva o ensino das habilidades de matemática abordadas durante as oficinas. Podemos observar na BNCC as seguintes habilidades:

- "(EF05MA04) Identificar frações equivalentes (p.295)"
- "(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes." (p.301)
- "(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária." (p.301)
- "(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias." (p.307)

É possível identificar que pelas oficinas, tenta-se contemplar as habilidades acima, estas que podem servir também para dar contexto e motivação para os alunos trabalharem os temas.

A primeira oficina (Figuras Musicais) terá por objetivos específicos:

- Introduzir aos alunos uma noção geral de que se trata a música teórica;
- Ensiná-los de que se trata a partitura musical e como identificar os símbolos e elementos presentes nela;
- Relacionar as figuras rítmicas de uma partitura presentes em um compasso com frações;
- Mostrá-los as equivalências presentes entre as figuras rítmicas e seus usos para por fim realizar a transposição desse conhecimento para a compreensão da equivalência entre duas frações numéricas;
- Demonstrar através da simbologia da partitura como realizar a operação de soma ou subtração entre duas frações de mesmo denominador e também de frações de denominadores diferentes, através de equivalências.

Os dois últimos objetivos em especial são os objetivos que relacionam-se diretamente com as habilidades presentes na BNCC, e portanto os temas de matemática oriundos do 6º ano do ensino fundamental II.

A segunda oficina (O ciclo das quintas e a escala musical pitagórica) terá por objetivos específicos:

- Introduzir as motivações históricas por trás dos estudos de música e sua relação com os estudos de matemática na época de Pitágoras.
- Apresentar os conceitos de notas musicais e intervalos musicais.
- Apresentar o conceito de escalas musicais e os pensamentos de Pitágoras a respeito das relações entre os números e os elementos da natureza

- Reproduzir o experimento do monocórdio de Pitágoras, experimentando quais notas tocadas “soam bem”
- Trabalhar as operações de multiplicação e divisão entre frações através da construção da escala pitagórica musical e da construção do ciclo das quartas e quintas.

Metodologia:

As oficinas pressupõem que os alunos sejam capazes de realizar as 4 operações básicas entre números naturais e também tenham ao menos algum nível conceitual a respeito de frações, apesar desta última não ser excludente pois quer-se também nessa oficina que este conceito seja solidificado. Pensa-se que a forma de trabalho dos alunos durante as oficinas é feita através de agrupamentos em duplas ou trios, dependendo da demanda da sala. O trabalho em grupo proporciona para o professor uma organização mais fácil da turma e torna possível que os alunos debatam ideias entre si para resolução dos exercícios, podendo evitar que os alunos consultem o professor ao invés de investigar soluções com seus colegas de grupo.

A primeira oficina será organizada da seguinte forma:

- Duas aulas para introducão a parte teórica, onde o professor orientará os alunos sobre os tópicos de música e leitura de partitura, exemplificando através de palmas, metrônomos ou outras ferramentas disponíveis. O professor nessa etapa tem o papel de instrutor, sendo de grande importância a leitura conjunta e participação ativa dos alunos na interpretação do texto e das propostas presentes nas oficinas.
- Duas aulas para a realização das primeiras atividades. Durante as atividades o professor agirá como um mediador, responsável apenas por acompanhar os alunos e auxiliá-los apenas caso seja solicitado. É importante que nesse momento o professor evite interferir, pois as respostas espontâneas dos alunos serão importantes para a validação do trabalho.
- Duas aulas para realizar as últimas atividades, seguindo ainda as mesmas orientações das atividades anteriores.

- Duas aulas para realizar as últimas atividades, seguindo ainda as mesmas orientações das atividades anteriores.

- Uma aula para fechamento da oficina, em que o professor escutará o relato dos alunos (suas opiniões sobre as atividades, o que eles aprenderam com elas, etc.). Essas respostas podem ser registradas em papel pelos alunos, o que será elemento fundamental para a consolidação dessa oficina.

Duração total: 7 horas/aula.

A segunda oficina será organizada da seguinte forma:

- Uma aula destinada à introdução da oficina, onde o professor buscará contar um pouco sobre quem foi Pitágoras e como foi a realização do experimento do monocórdio.

- Uma aula destinada à manipulação do instrumento disponível (pode ser um monocórdio ou algum outro instrumento de corda que sirva para o propósito da oficina), onde os alunos possam medir a corda e testar frações de comprimento da corda que se consiga consonâncias.

- Duas aulas destinadas à realização das tarefas propostas na oficina.

- Uma aula para o fechamento da oficina, onde o professor dará os nomes próprios para as 7 notas musicais (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si) e explicará os intervalos melódicos importantes para a construção dessa escala musical (os intervalos de quarta e quinta)

Duração total: 5 horas/aula.

O tempo de duração de cada oficina poderá ser adequado de acordo com a disponibilidade da escola.

Disponibilidade:

Segundas e quintas-feiras: das 7:00 as 13:00. Quartas-feiras: das 7:00 as 18:00. Para qualquer dúvida ou esclarecimento, fico a disposição através do e-mail xxxxxxx@xxxxxxx ou pelo telefone (11)xxxxx-xxxx