Geometrias não-Euclidianas na formação de professores

Lucas Ricardo de Souza

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título
de Mestre em Ciências

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dra. Cristina Cerri
Coorientador: Prof. Sergio Alves

Fevereiro de 2022

Geometrias não-Euclidianas na formação de professores

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 09/12/2021. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Cristina Cerri (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Sergio Alves (coorientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Armando Caputi - UFABC
- Profa. Dra. Nielce Meneguelo Lobo da Costa - UNIAN

Agradecimentos

À minha família, em especial à minha mãe, pelas palavras de conforto nos momentos mais difíceis dessa jornada.

À Jéssica, pelo carinho, pelas risadas, pela ajuda e por todas as palavras de apoio que me motivaram a seguir em frente.

À Cristina Cerri e ao Sergio Alves, ilustres professores que tive o privilégio de ter como orientadores, pelas contribuições, pela paciência, pelas conversas e por todos os ensinamentos nessa jornada.

À professora Rosa Chaves, por toda a ajuda com a realização deste trabalho.

À coordenação e às professoras do MPEM (que ainda não foram citadas) e com as quais tive o prazer de estudar - Ana Paula Jahn, Barbara Corominas Valério, Iole de Freitas, Vera Helena Giusti, Elisete da C. Q. Aubin e Viviana Giampaoli.

Aos amigos e colegas do MPEM, em especial, à Dayene, ao Luan, ao Fernando e ao Ricardo, pelo companheirismo e por toda a ajuda desde o início desta etapa.

Um agradecimento especial aos professores e às professoras que aceitaram colaborar com a nossa investigação e à todas as pessoas que contribuiram direta ou indiretamente com a realização deste trabalho.

"Those who can, do.
Those who know, teach."
(Lee S. Shulman)

Resumo

SOUZA, L. R. **Geometrias não-Euclidianas na formação de professores**. 2021. 101 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Considerando a relevância do estudo da Geometria Euclidiana para a formação do estudante da Educação Básica, explicita-se a importância do professor de Matemática aprofundar seus conhecimentos acerca de tal área. Este trabalho apresenta uma investigação das contribuições do conhecimento de geometrias não-Euclidianas na compreensão da própria Geometria Euclidiana para os professores da Educação Básica. A fundamentação teórica baseou-se na Teoria do Conhecimento Matemático para o Ensino, proposta por Deborah L. Ball e colaboradores (Ball et al., 2008). A metodologia utilizada nesta pesquisa foi o Estudo de Caso envolvendo um grupo de professores do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (MPEM – IME-USP) que cursaram a disciplina Geometria: um Enfoque Via Modelos (MPM5605) no segundo semestre de 2019. A partir desta investigação foi verificado que o conhecimento de geometrias não-Euclidianas possibilitou, para o grupo de professores estudado, a ampliação do conhecimento de Geometria Euclidiana , influenciando de maneira positiva na sua compreensão sobre geometria e sobre a própria Matemática. Também foi evidente o impacto de tais conhecimentos na prática profissional destes professores.

Palavras-chave: Geometria não-Euclidiana, Formação docente, Geometria Hiperbólica, Conhecimento Matemático para o Ensino.

Abstract

SOUZA, L. R. **Non-Euclidean Geometries in teacher education**. 2021. 101 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Considering the relevance of the study of Euclidean Geometry for the Basic Education student formation, it is explained the importance of the Mathematics teacher to deepen their knowledge about this area. This work presents an investigation of the contributions of the knowledge of non-Euclidean geometries to the understanding of Euclidean Geometry itself for Basic Education teachers. The theoretical foundation was based on the Theory of Mathematical Knowledge for Teaching, proposed by Deborah L. Ball and collaborators (Ball et al., 2008). The methodology used in this research was the Case Study involving a group of teachers from the Professional Master's Program in Mathematics Teaching at the Institute of Mathematics and Statistics of the University of São Paulo (MPEM - IME-USP) who attended the subject Geometry: an Approach Via Models (MPM5605) in the second semester of 2019. From this investigation, it was found that the knowledge of non-Euclidean geometries made it possible, for the teachers group studied, to expand their knowledge of Euclidean Geometry, positively influencing their understanding of geometry and mathematics itself. The impact of such knowledge on the professional practice of these teachers was also evident.

Keywords: Non-Euclidean Geometry, Teacher education, Hyperbolic Geometry, Mathematical Knowledge for Teaching.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

A Geometria Euclidiana tem papel importante na formação do estudante da Educação Básica. Como aponta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), esta área "envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, 2017, p.271).

O estudo de Geometria também possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, "necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes" (Ibid., p.271). Ainda segundo a BNCC:

> [...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 2017, p.272)

Assim, quando se trata do ensino de Geometria, é importante que o professor conheça de maneira mais aprofundada aquilo que será ensinado. Entender o desenvolvimento histórico da Geometria e conhecer seus fundamentos pode proporcionar ao professor uma perspectiva diferente sobre esta área da Matemática, refletindo positivamente em suas aulas.

A motivação para o desenvolvimento do presente trabalho surgiu após o estudo de geometrias não-Euclidianas em uma disciplina do último semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Esta experiência particular foi marcante e acabou refletindo em minha prática como professor da Educação Básica.

O objetivo desta pesquisa é, portanto, investigar se o conhecimento de geometrias não-Euclidianas influi no modo como o professor compreende a Geometria Euclidiana. Buscamos também entender se este conhecimento se reflete na prática dos professores.

Adotamos a perspectiva teórica proposta por Deborah L. Ball e colaboradores, denominada *Conhecimento Matemático para o Ensino*, para compreendermos as relações entre o conhecimento do professor de Matemática com o ensino desta disciplina. Nesta teoria, os autores propõem uma divisão do conhecimento em duas grandes categorias, denominadas o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e o *conhecimento do conteúdo* (Ball et al., 2008).

Segundo os autores, o conhecimento do conteúdo refere-se ao conhecimento sobre o assunto a ser ensinado e é dividido em duas subcategorias: *conhecimento comum do conteúdo* e *conhecimento especializado do conteúdo*. Já o conhecimento pedagógico do conteúdo trata das relações da prática docente com o conhecimento do conteúdo e é constituída por três subcategorias: *conhecimento do conteúdo e dos estudantes*, *conhecimento do conteúdo e do ensino* e *conhecimento do currículo*.

Como explicam Ball et al. (2008), a separação entre estas subcategorias do conhecimento pode ser bem tênue e para desempenhar uma tarefa simples de sua rotina de trabalho, é possível que o professor mobilize mais de um conhecimento.

Para investigarmos as questões colocadas, inicialmente desenvolvemos duas propostas de trabalho para professores de Matemática da Educação Básica em cursos de formação continuada de curta duração. A primeira delas foi uma oficina ofertada no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (CAEM – IME-USP), dividida em dois encontros de 2h30 cada e realizada nos meses de outubro e novembro de 2018, quando tratamos da apresentação do desenvolvimento histórico das geometrias não-Euclidianas e da verificação de alguns resultados da Geometria Hiperbólica. Contamos com a presença de 8 participantes no primeiro encontro e 6 no segundo. A outra proposta ocorreu durante o XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (XIII ENEM) em julho de 2019, com duração de 2h15, estando presentes 19 professores da Educação Básica. Nesta ocasião, pelo pouco tempo disponível, comentamos sobre o desenvolvimento histórico das geometrias não-Euclidianas e verificamos alguns resultados da Geometria Hiperbólica por meio da construção de seus objetos, em um de seus modelos, com o auxílio de régua e compasso.

Estas experiências foram positivas, mas principalmente pelo curto período de contato com os professores, decidimos realizar a pesquisa num outro contexto.

Acompanhamos, então, no segundo semestre de 2019, um grupo de professores de Matemática matriculados no programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (MPEM – IME-USP), que cursavam a disciplina *Geometria: um Enfoque Via Modelos* (MPM5605). Como na disciplina são abordadas geometrias não-Euclidianas, uma investigação com os professores dessa turma foi apropriado para os objetivos da pesquisa.

Em concordância com as questões que norteiam nossos objetivos de pesquisa, escolhemos o Estudo de Caso como metodologia. Segundo Yin (2010), esta metodologia é caracterizada por uma investigação empírica cujo objetivo é compreender, em profundidade, um determinado fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto, quando os limites entre este fenômeno e seu contexto não são tão evidentes.

Como explica Ponte (2006), este fenômeno, ou entidade, denominado *Caso* pode ser uma pessoa, um grupo de pessoas, uma disciplina ou outras unidades sociais. Ainda segundo o autor, esta metodologia é utilizada quando há a necessidade de entender o "como" e os "porquês" desta entidade a partir de suas características próprias. Uma das grandes vantagens proporcionadas por esta metodologia é o uso de múltiplas fontes de dados para a obtenção das evidências.

Determinamos, então, como o Caso de nosso estudo o grupo de professores, alunos do

MPEM – IME-USP, que cursavam a disciplina Geometria: um Enfoque Via Modelos no segundo semestre de 2019.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos. No Capítulo 1 apresentamos um resumo dos fundamentos e do desenvolvimento histórico das geometrias não-Euclidianas, abordando alguns dos resultados da Geometria Hiperbólica, a partir de seus modelos. Este capítulo tem o objetivo de fornecer ao leitor elementos para acompanhar as discussões apresentadas nos capítulos que seguem.

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação dos fundamentos teóricos e metodológicos desta pesquisa. Nele apresentamos a teoria do Conhecimento Matemático para o Ensino, proposta por Deborah L. Ball e seus colaboradores, e a metodologia do Estudo de Caso, bem como os instrumentos de recolha de dados utilizados.

No Capítulo 3 detalhamos o caso estudado e são apresentadas as informações obtidas dos intrumentos aplicados.

O Capítulo 4 apresenta interpretações e análises das evidências coletadas a partir de duas perspectivas relacionadas às questões norteadoras desta pesquisa.

Finalizamos o trabalho apresentando as considerações e as conclusões obtidas a partir de todo o estudo realizado.

Capítulo 1

Geometrias Não-Euclidianas

Uma das obras mais importantes para a Matemática foi escrita por volta de 300 a. C. por Euclides de Alexandria. Nela foram reunidos diversos resultados conhecidos até então sobre Geometria Plana, Geometria Espacial e até mesmo Aritmética, em uma coleção de treze livros intitulada Os Elementos.

Na obra podemos encontrar um dos primeiros registros conhecidos de uma tentativa de axiomatização da Geometria. Euclides enunciou certas afirmações que seriam assumidas como verdade (algumas chamadas de *axiomas* e outras, de *postulados*) para deduzir os resultados contidos no livro.

A principal distinção feita entre esses dois grupos de proposições é, segundo Eves (2004), os axiomas tratam de noções comuns, válidas em toda a Matemática, enquanto os postulados estão relacionados especificamente com a Geometria. Atualmente, não é feita mais tal distinção e as palavras *postulado* e *axioma* são tidas como sinônimos. As proposições enunciadas em Os Elementos são:

> Postulados:
> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores que dois retos.
>
> Noções Comuns:
> 1. Coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
> 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
> 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
> 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
> 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
> 8. E o todo [é] maior que a parte.
> 9. E duas retas não contêm uma área. (EUCLIDES, 2009, p. 98)

Esse conjunto de postulados fundamenta o que chamamos de *Geometria Euclidiana*, em homenagem a Euclides, e sobre essa estrutura axiomática é importante salientar que:

> Os quatro primeiros postulados já estavam validados empiricamente. Eles são descrições simples e claras de procedimentos utilizadas no cotidiano dos ofícios, seja na Arquitetura, Agronomia, Marcenaria, etc. Tais processos técnicos foram adotados como os princípios mínimos para o desenvolvimento de uma teoria denominada *Geometria*, termo cujo significado etimológico é a *medição de terras*, guardando, assim, o caráter prático que deu origem a esses procedimentos. Com o acréscimo do 5º postulado, o homem elaborou o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico. (ANDRADE, 2013, p. 6, grifos do autor)

Os quatro primeiros postulados enunciados por Euclides são, de fato, de caráter auto evidente. Já o quinto não compartilha tal característica. Segundo Eves (2004), sua estrutura já era reconhecida pelos próprios gregos antigos como a de um teorema, sendo, inclusive, a recíproca da Proposição 27 do Livro I de Os Elementos (que discutiremos com mais detalhes na seção 1.1).

Outro fato importante sobre o quinto postulado é que ele foi utilizado pela primeira vez somente na demonstração da Proposição 29. Isto, aliado à desconfiança a respeito de sua estrutura, levaram ao questionamento sobre a necessidade de tal postulado, resultando em tentativas, ao longo dos séculos, de demonstrá-lo a partir das demais proposições enunciadas (Eves, 2004).

Como consequência desses esforços, hoje temos conhecimento de outras proposições equivalentes ao quinto postulado, algumas ainda mais conhecidas que o próprio postulado de Euclides. O *Postulado das Paralelas de Playfair* – chamado assim em homenagem a John

Playfair (1748-1819), responsável pela popularização da proposição, embora já fosse conhecida desde o século V por Proclo[1] (410 – 485) – nos diz que *por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta* e é um exemplo de equivalência muito utilizada em livros didáticos (Eves, 2004; Ávila, 1992).

A seguir apresentamos uma lista com outras proposições equivalentes ao quinto postulado:

a) duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes;

b) existe um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a dois retos;

c) a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a dois retos;

d) existe um par de retas equidistantes;

e) duas retas paralelas quaisquer possuem uma perpendicular comum;

f) existem dois triângulos semelhantes e não congruentes;

g) dado um triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice B, tem-se $AC^2 = AB^2 + BC^2$;

h) dado um triângulo ABC, se $AC^2 = AB^2 + BC^2$ então $A\hat{B}C$ é ângulo reto;

i) as mediatrizes de um triângulo são retas concorrentes;

j) dados três pontos não colineares, existe uma circunferência que os contém;

k) dado um triângulo ABC com B pertencente à circunferência de diâmetro $\overline{AC}$, então $A\hat{B}C$ é reto;

l) se $A\hat{B}C$ é um ângulo reto, então B pertence à circunferência de diâmetro $\overline{AC}$;

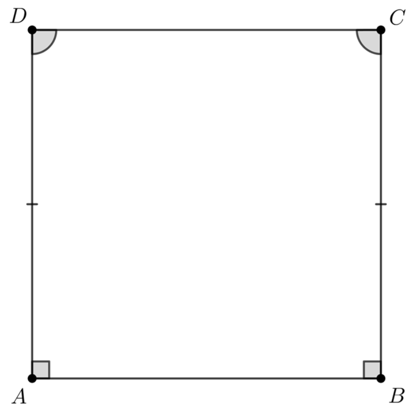
m) existe um retângulo.

O jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667 – 1733) é responsável por uma das principais tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides. Saccheri considerou um quadrilátero $ABCD$ no qual os ângulos dos vértices A e B são retos e os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes (Figura 1.1), ficando conhecido como Quadrilátero de Saccheri.

Tomando apenas essas hipóteses iniciais sobre o quadrilátero $ABCD$, juntamente com os quatro primeiros postulados e as 28 primeiras proposições de Euclides, Saccheri demonstrou

[1]Matemático e filósofo, Proclo Lício contribuiu com um comentário a respeito do primeiro livro de Os Elementos, sendo fonte de informações históricas a respeito da matemática elementar de antes de sua época. (Eves, 2004, p. 213)

Figura 1.1: *Quadrilátero de Saccheri.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

com certa facilidade que os ângulos de vértices C e D são congruentes. Seu trabalho então era mostrar que um destes ângulos é reto, pois assim o quadrilátero seria um retângulo, uma equivalência do quinto postulado.

Em sua demonstração, Saccheri começou supondo que os ângulos de vértices C e D são obtusos, deduzindo uma contradição. Contudo, ao supor que estes mesmos ângulos eram agudos, ele demonstrou diversos resultados que posteriormente seriam conhecidos em outra Geometria. A obra de Saccheri foi publicada em 1733, alguns meses após sua morte, e recebeu pouca atenção de seus contemporâneos, ganhando notoriedade apenas quando, em 1889, foi redescoberta por Eugenio Beltrami (1835 – 1900). Segundo Eves (2004),

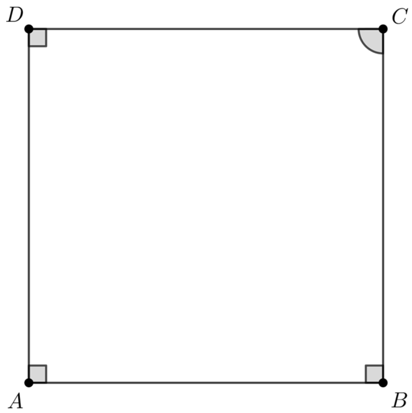
> Após obter muitos dos teoremas agora clássicos da chamada geometria não-euclidiana, Saccheri, de maneira insatisfatória e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas ideias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos. (EVES, 2004, p. 540)

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) desenvolveu uma tentativa de demonstração semelhante, com conclusão igualmente insatisfatória. Lambert utilizou um quadrilátero com três ângulos retos, conforme ilustrado na Figura 1.2, e tentou mostrar que o quarto ângulo também era reto. Posteriormente, esse quadrilátero ficou conhecido como Quadrilátero de Lambert.

Lambert, assim como Saccheri, mostrou que, para as hipóteses do ângulo obtuso, agudo e reto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que, menor que ou igual a dois retos, respectivamente. E, indo além de Saccheri, mostrou que, na hipótese do ângulo agudo, a área do triângulo é proporcional à diferença entre dois retos e a soma de seus ângulos internos (Eves, 2004).

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), matemático francês conhecido por seu livro *Éléments de Géométrie*, também se empenhou em demonstrar o quinto postulado. Nas diversas edições publicadas de sua obra, Legendre inseriu algumas de suas tentativas de demonstração do quinto postulado, muitas delas baseadas na prova de que a soma das medidas dos

Figura 1.2: *Quadrilátero de Lambert.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos.

Com o intuito de tornar a obra de Euclides mais compreensível, a obra de Legendre continha reordenações e simplificações das proposições encontradas em Os Elementos. Seu texto foi muito utilizado como base para o ensino de Geometria em diversos lugares do mundo, inclusive no Brasil, onde atingiu mais de 25 edições (Ávila, 1992).

> Por volta de 1830 já havia sérias suspeitas de que o postulado das paralelas não pudesse ser demonstrado a partir dos outros. Suspeitava-se que ele fosse independente dos outros quatro, e que se pudesse desenvolver uma geometria a partir de negações do postulado das paralelas, ao lado dos outros postulados de Euclides. (ÁVILA, 2001, p. 5)

Mesmo antes das primeiras publicações sobre as geometrias não-Euclidianas, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) já conhecia diversos resultados avançados sobre o assunto, porém nunca os publicou. Assim, o crédito da criação de uma nova Geometria, desenvolvida a partir da hipótese do ângulo agudo, deve ser compartilhado com outros dois grandes nomes: Bolyai e Lobachevsky.

Janos Bolyai (1802 – 1860) foi um oficial húngaro do exército austríaco e filho do professor de matemática Farkas Bolyai (1775 – 1856). Assim como o pai, trabalhou com o problema envolvendo o quinto postulado de Euclides. Em 1832, Janos Bolyai submeteu um artigo de 26 páginas que foi publicado no apêndice da obra de seu pai, sobre matemática elementar.

> Janos Bolyai jamais publicou nada depois disso, embora tivesse deixado uma pilha de manuscritos. Seu interesse principal era com o que ele chamava “a ciência absoluta do espaço” referindo-se com isso à coleção das proposições que independem do postulado das paralelas e que, por consequência, valem tanto na geometria euclidiana como na nova geometria. (EVES, 2004, p. 542)

Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793 – 1856) foi professor de matemática e, posteriormente, reitor da Universidade de Kazan. Publicou seu primeiro artigo sobre Geometria não-Euclidiana em 1829 em russo e, por uma questão de barreira linguística, seu trabalho não ficou muito conhecido. Em 1840, publicou um pequeno livro em alemão e em 1855 seu trabalho final em francês, intitulado *Pangeometria*, os quais receberam mais reconhecimento.

Os trabalhos de Lobachevsky e de Janos Bolyai deram origem a uma nova Geometria que, posteriormente, ficaria conhecida como Geometria Hiperbólica. Nela, o quinto postulado de Euclides é substituído por outra proposição, equivalente à hipótese do ângulo agudo nos trabalhos de Saccheri e de Lambert.

Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) mostrou que, com alguns ajustes nos postulados, é possível mostrar que a hipótese do ângulo obtuso também gera uma Geometria consistente. Tais ajustes tornam essa nova Geometria, chamada de Geometria Elíptica, diferente em muitos aspectos das demais conhecidas até então.

A seguir, apresentaremos mais detalhes da *ciência absoluta do espaço* (como foi chamada por Bolyai), sob o título de Geometria Neutra. Esta nos fornece resultados que não dependem do quinto postulado de Euclides e, portanto, são válidos tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Hiperbólica, que estudaremos mais à frente.

1.1 A Geometria Neutra

Para deduzir certos resultados, Euclides, em sua obra, utilizou fatos que não estavam enunciados no conjunto de postulados e noções comuns. Justificativas ligadas às questões de ordenação de pontos colineares e ao princípio de continuidade não estavam contempladas no conjunto de postulados proposto em Os Elementos.

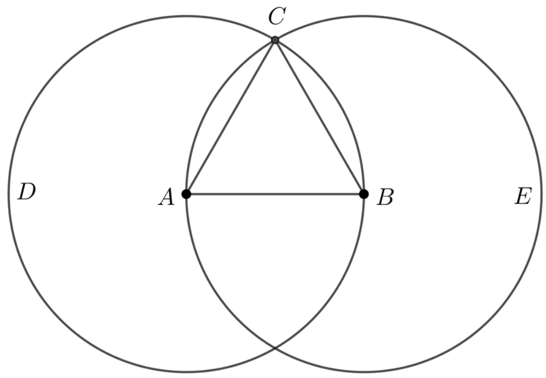
Logo na primeira proposição do Livro I de Os Elementos é assumido que duas circunferências de mesmo raio, as quais o centro de uma circunferência pertence à outra e vice-versa, se intersectam em pelo menos um ponto, cuja existência não está garantida no conjunto de postulados, sendo consequência do princípio de continuidade. Para melhor ilustrar essa questão, apresentamos a seguir a demonstração de tal proposição, a qual encontra-se em Euclides (2009, p. 99), e acrescentamos alguns comentários, entre parênteses, para evidenciar as justificativas de cada passagem com base nos postulados e definições. Observamos, ainda, que na proposição que se segue é utilizado o termo *reta limitada*, ou apenas *reta*, referindo-se ao que atualmente entendemos por *segmento de reta*.

Proposição 1. *Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.*

Prova: Seja a reta limitada dada AB. É preciso então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD (Postulado 3), e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE (Postulado 3), e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB (Postulado 1), conforme ilustrado na Figura 1.3.

Figura 1.3: *Ilustração da demonstração da Proposição 1.*



Fonte: Euclides, 2009, p.99.

E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB (definição de circunferência); de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA (definição de circunferência). Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si (Noção Comum 1); portanto, também CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si. Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB. ■

No Livro I, na décima proposição, que trata de dividir um segmento em duas partes iguais, é assumido que, num triângulo ABC, a bissetriz interna do ângulo de vértice A corta o lado $\overline{BC}$, oposto a esse ângulo, em um ponto P que está entre os vértices B e C. Essa afirmação é consequência dos postulados que estabelecem a relação de ordem para pontos colineares. Para suprir essas lacunas deixadas na obra de Euclides, outros conjuntos de postulados foram sendo formulados. Para que um conjunto de postulados seja dito "bem formulado"[2]:

> [...] deve satisfazer três condições seguintes: ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas consequências; deve ser *completo*, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e, por fim, cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é consequência deles. (ÁVILA, 2001, p. 8, grifo nosso)

Um dos conjuntos de postulados mais conhecidos foi apresentado pelo matemático alemão David Hilbert (1862 – 1943), que fez uma revisão rigorosa do texto de Euclides, investigando minuciosamente as afirmações utilizadas nas demonstrações. Hilbert também apresentou a

[2]Para uma discussão detalhada sobre a questão da completude e o Teorema da Incompletude de Gödel, ver Greenberg (2010, p. 376).

prova da independência dos seus postulados e, posteriormente, acrescentou tópicos relacionados a geometrias não-Euclidianas (Greenberg, 2010, p. 198). A seguir, transcrevemos uma adaptação do conjunto de postulados proposto por Hilbert:

> I Axiomas de Incidência:
> 1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
> 2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.
> 3. Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.
>
> II Axiomas de Ordem:
> 1. Se um ponto B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.
> 2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta $\overleftrightarrow{AC}$ tal que C está entre A e B.
> 3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.
> 4. (Pasch) Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos, então, se l intersecta o segmento $\overline{AB}$, ela também intersecta o segmento $\overline{AC}$ ou o segmento $\overline{BC}$.
>
> III Axiomas de Congruência:
> 1. Se A e B são dois pontos numa reta l e A' é um outro ponto de uma reta l', não necessariamente distinta da anterior, então é possível encontrar um ponto B' em um dado lado da reta l' tal que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes entre si.
> 2. Se um segmento $\overline{A'B'}$ e um segmento $\overline{A''B''}$ são congruentes a um mesmo segmento $\overline{AB}$ então os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$ são congruentes entre si.
> 3. Sobre uma reta l, sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ dois segmentos da mesma que, exceto por B não têm pontos em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta l', sejam $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ dois segmentos que, exceto por B' não têm pontos em comum. Neste caso, se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.
> 4. Se $\angle ABC$ é um ângulo e se $\overrightarrow{B'C'}$ é um raio, então existe exatamente um raio $\overrightarrow{A'B'}$ em cada lado de $\overline{B'C'}$ tal que $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.
> 5. Se para dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ as congruências $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ são válidas, então as congruências $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ são satisfeitas.
>
> IV Axiomas de Continuidade:
> 1. Axioma de Arquimedes: Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de $\overline{CD}$ construídas contiguamente de A ao longo do raio $\overrightarrow{AB}$ passará além do ponto B.
> 2. Axioma da Completude da Reta (ou Axioma de Cantor): Se $\overline{A_nB_n}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma coleção de segmentos encaixados, então existe pelo menos um ponto P pertencente a todos os segmentos da coleção. (ANDRADE, 2013, p. 20)

Os axiomas de ordem enunciados completam as lacunas deixadas por Euclides em situações como a da décima proposição do Livro I de Os Elementos, como exemplificada anteriormente. Já os axiomas de continuidade garantem a possibilidade de associar medidas a segmentos de reta e a ângulos, entre outras consequências.

Os postulados acima, contudo, não contemplam a questão da continuidade para circunferências. Para suprir esta falha do sistema axiomático proposto por Euclides, foi acrescentado um terceiro axioma de continuidade:

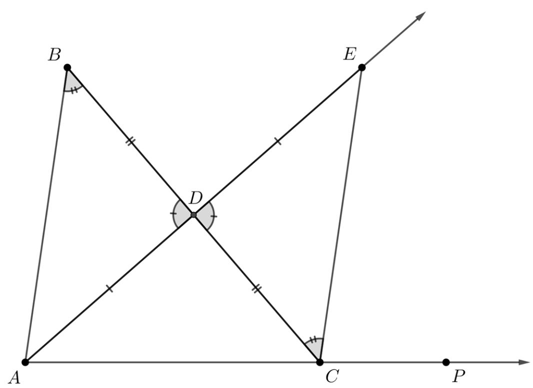
Princípio da Continuidade Circular. *Se uma circunferência contém um ponto no exterior e um ponto no interior de outra circunferência, então as circunferências se intersectam em dois pontos.*

Esse conjunto de postulados, que não inclui o Postulado das Paralelas, constitui a chamada Geometria Neutra Plana. Muitos dos resultados estudados em Geometria durante a Educação Básica, entre eles os casos de congruência de triângulos, são, na verdade, frutos dessa Geometria Neutra. Observe que, por não dependerem do Postulado das Paralelas, estes fatos também são válidos na Hiperbólica.

Proposição 2. *Na Geometria Neutra Plana, todo ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.*

Prova: Sejam A, B e C, três pontos não colineares, D o ponto médio de $\overline{BC}$ e P um ponto em $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $A - C - P$ (C está entre A e P). Tomando E na semirreta AD de modo que $\overline{AD} \cong \overline{DE}$, temos então que $A\hat{D}B \cong E\hat{D}C$, pois esses ângulos são opostos pelo vértice. Assim, pelo axioma 5 de Congruência (também conhecido como axioma LAL de congruência), $D\hat{C}E \cong A\hat{B}D$, conforme a Figura 1.4.

Figura 1.4: *Ilustração da demonstração da Proposição 2.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como consequência do Axioma 4 de Ordem, o ponto E está no interior do ângulo externo do $\triangle ABC$ que tem vértice em C (ângulo BCP), o que implica que as medidas dos ângulos DCE e BCP são tais que $m(D\hat{C}E) < m(B\hat{C}P)$. Mas como $m(D\hat{C}E) = m(A\hat{B}D) = m(A\hat{B}C)$, então $m(A\hat{B}C) < m(B\hat{C}P)$. De modo análogo, podemos fazer uma construção tomando o ponto médio de $\overline{AC}$ para mostrar que $m(B\hat{A}C) < m(B\hat{C}P)$. Portanto, o ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes. ■

Recordamos que, na Geometria Neutra, não é possível mostrar que a medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos internos não adjacentes a ele, pois seria equivalente a dizer que a soma das medidas dos ângulos internos desse triângulo é igual a 180° e, consequentemente, equivalente ao quinto postulado. Saccheri tinha conhecimento deste fato e chegou a provar que, mesmo sem o postulado das paralelas, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer não pode ser maior que 180°.

Como discutimos anteriormente, a obra de Saccheri ganhou a merecida atenção passado mais de um século de sua publicação. Neste período, Legendre também havia apresentado uma demonstração para tal resultado, compartilhando com Saccheri o crédito por um resultado que hoje é conhecido como Teorema de Saccheri-Legendre, cuja prova pode ser encontrada em Andrade (2013, p. 57).

Proposição 3. *Na Geometria Neutra Plana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre menor ou igual a* 180°.

Naturalmente, podemos nos perguntar a respeito dos resultados relacionados ao paralelismo de retas, considerando que descartamos o único postulado que tratava explicitamente sobre isso. Mesmo na ausência do postulado das paralelas, é possível garantir a existência de tais retas como veremos a seguir.

Proposição 4. *Na Geometria Neutra Plana, sejam as retas r, s e t. Se t corta as outras duas, formando ângulos alternos internos congruentes, então r e s são paralelas.*

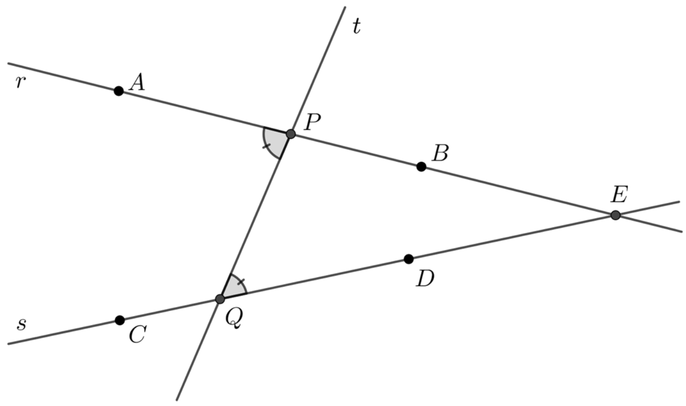
Prova: Sejam as retas r e s e uma transversal t que as intersecta nos pontos P e Q, respectivamente. Sejam ainda os pontos A e B em r tais que $A - P - B$ e os pontos C e D em s tais que $C - Q - D$, com A e C do mesmo lado de t. Por hipótese, $Q\hat{P}A \cong P\hat{Q}D$ (ângulos alternos internos são congruentes entre si). Suponhamos que as retas r e s não são paralelas, ou seja, existe um ponto E, num mesmo lado da reta t que os pontos B e D ou que os pontos A e C, tal que $r \cap s = \{E\}$. Suponha que essa intersecção ocorra do mesmo lado da reta t que os pontos B e D, conforme a Figura 1.5.

No triângulo PQE, o ângulo APQ é externo e, pela Proposição 2, $m(A\hat{P}Q) > m(P\hat{Q}E) = m(P\hat{Q}D)$, o que é uma contradição, pois $A\hat{P}Q \cong P\hat{Q}D$. Portanto, as retas r e s são paralelas. ■

Proposição 5. *Na Geometria Neutra Plana, seja r uma reta e um ponto P fora dela. Então existe uma reta s passando por P de modo que r e s são paralelas.*

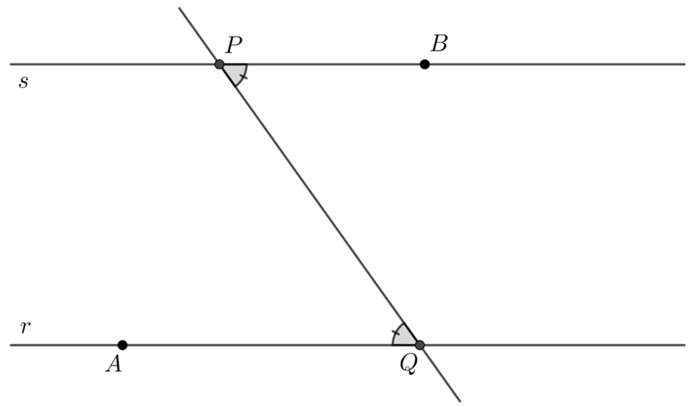
Prova: Sejam r uma reta e P um ponto fora dela. Sejam ainda A e Q pontos quaisquer em r, tais que $A \neq Q$. Pelo axioma 4 de Congruência, existe uma única semirreta PB no lado oposto de $\overleftrightarrow{PQ}$ ao que contém o ponto A, de modo que $A\hat{Q}P \cong Q\hat{P}B$. Tomemos a reta s determinada pelos pontos P e B, conforme a Figura 1.6.

Figura 1.5: *Ilustração da demonstração da Proposição 4.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 1.6: *Ilustração da demonstração da Proposição 5.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela Proposição 4, temos que r e s são paralelas. Portanto, passando por P existe uma reta paralela à reta r. ■

Dada uma reta qualquer e um ponto fora dela, sabemos que, numa Geometria Neutra Plana, existe pelo menos uma reta paralela à reta dada e que passa por este ponto. A questão que se coloca é a existência de duas ou mais paralelas, até mesmo infinitas. Somente com os postulados dessa Geometria, não é possível garantir a unicidade da paralela, fazendo necessário o acréscimo de um postulado que dê conta desta questão.

Assumindo que, numa Geometria Neutra Plana, a paralela é sempre única, temos a Geometria Euclidiana Plana. Mas se, ao invés disso, assumirmos a negação da unicidade da paralela teremos uma nova Geometria.

1.2 A Geometria Hiperbólica

Recordamos ao leitor o Postulado das Paralelas de Playfair, referido na página 6, também conhecido como Postulado Euclidiano das Paralelas.

Postulado Euclidiano das Paralelas. *Para toda reta r e para todo ponto P fora dela,* *existe no máximo uma paralela a r passando por P.*

Em razão da Proposição 5, o Postulado Euclidiano das Paralelas tem como consequência a unicidade da paralela à uma reta dada por um ponto fora dela.

A negação do axioma acima é chamada de Postulado Hiperbólico das Paralelas, cujo enunciado é o seguinte.

Postulado Hiperbólico das Paralelas. *Existem uma reta e um ponto fora dela pelo qual passam pelo menos duas retas distintas que não a intersectam.*

Uma Geometria Neutra Plana em que é válido o Postulado Hiperbólico das Paralelas é chamada Geometria Hiperbólica Plana. Nesta Geometria pode-se demonstrar resultados que são impossíveis de serem concebidos na Geometria Euclidiana.

Proposição 6. *Na Geometria Hiperbólica Plana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é estritamente menor que* $180°$.

Prova: Pela Proposição 3, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre menor ou igual a $180°$. Se existisse um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a $180°$, teríamos uma equivalência ao Postulado das Paralelas, o que contradiz o Postulado Hiperbólico das Paralelas. Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer na Geometria Hiperbólica é estritamente menor que $180°$. ■

Proposição 7. *Na Geometria Hiperbólica Plana, a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é estritamente menor que 360°.*

Prova: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Sejam os triângulos ABC e ACD, obtidos a partir da diagonal $\overline{AC}$ desse quadrilátero. Pela Proposição 6, a soma das medidas de seus ângulos internos é estritamente menor que $180°$, então, como o quadrilátero é convexo, a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero $ABCD$ é estritamente menor que $360°$. ■

Como consequência direta da Proposição 7, temos o seguinte resultado:

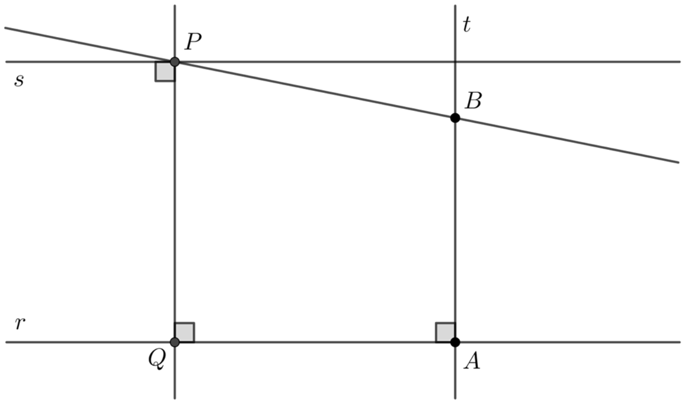
Proposição 8. *Na Geometria Hiperbólica Plana não existem retângulos.*

O Postulado Hiperbólico das Paralelas se aplica a um ponto e uma reta, mas com os resultados mostrados até o momento podemos mostrar que se esse postulado é válido, então ele se aplica a todos os pontos e todas as retas. Essa é a razão pela qual o próximo resultado é apresentado por alguns autores como Teorema Hiperbólico Universal.

Proposição 9. *Na Geometria Hiperbólica Plana, para cada reta r e cada ponto P que não está em r, passam por P pelo menos duas retas distintas que são paralelas a r.*

Prova: Seja r uma reta e P um ponto que não está em r. Seja Q o pé da perpendicular à r passando por P. Tomando, pelo ponto P, a reta s perpendicular à $\overleftrightarrow{PQ}$, pela Proposição 4

Figura 1.7: *Ilustração da demonstração da Proposição 9.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

temos que r e s são paralelas. Seja A um ponto em r, distinto de Q, e t a perpendicular à r passando pelo ponto A. Tome B o pé da perpendicular à reta t passando por P, conforme Figura 1.7.

Pela Proposição 4, temos que $\overleftrightarrow{PB}$ é paralela à reta r. Além disso, as retas s e $\overleftrightarrow{PB}$ são distintas, pois do contrário, teríamos que o quadrilátero $PQAB$ seria um retângulo, contrariando a Proposição 8. Portanto, por P incidem pelo menos duas retas distintas que são paralelas à r. ■

Proposição 10. *Na Geometria Hiperbólica Plana, para cada reta r e cada ponto P fora de r, passam por P infinitas paralelas à r.*

Prova: Note que, na demonstração da Proposição 9, variando a posição do ponto A na reta r obteremos outras retas distintas de t. Consequentemente, teremos outras retas distintas de s que passam por P e que são paralelas à r, e, pela Proposição 8, garantimos que são distintas entre si. ■

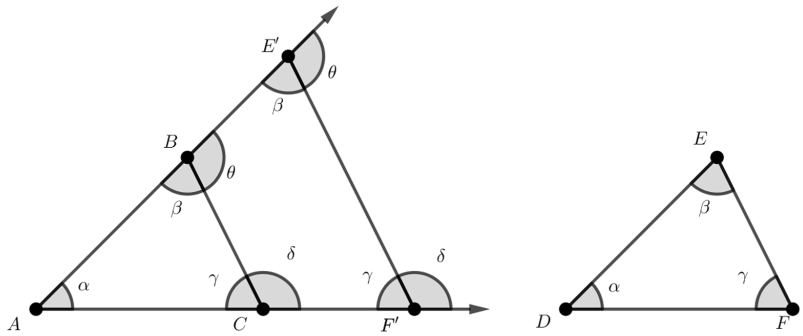
Outro fato que é bem marcante na Geometria Hiperbólica refere-se à semelhança de triângulos. Se dois triângulos, na Geometria Euclidiana, possuem seus ângulos internos congruentes, então eles são semelhantes, isto é, existe uma constante de proporcionalidade obtida a partir da razão entre dois lados correspondentes desses triângulos (mas como visto, isso é uma equivalência do quinto postulado). Na Geometria Hiperbólica toda semelhança de triângulos é, na verdade, uma congruência.

Proposição 11. *Na Geometria Hiperbólica Plana, sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$. Então os triângulos são congruentes.*

Prova: Suponha que os dois triângulos ABC e DEF não são congruentes. Por ALA, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ não são congruentes. Suponha $AC < DF$. Então, existe F' na semirreta AC, com C entre A e F', de modo que $AF' = DF$. Tomemos E' na semirreta AB de modo que $AE' = DE$. Por LAL, os triângulos DEF e $AE'F'$ são congruentes e, consequentemente, $A\hat{E'}F' \cong D\hat{E}F \cong A\hat{B}C$ e $A\hat{F'}E' \cong D\hat{F}E \cong A\hat{C}B$. Assim, pela Proposição 4, as retas BC

e $E'F'$ são paralelas. Portanto, B está entre A e E' e o quadrilátero $BCF'E'$ é convexo. Sejam $\alpha = m(\hat{A}) = m(\hat{D})$, $\beta = m(\hat{B}) = m(\hat{E}) = m(\hat{E}')$ e $\gamma = m(\hat{C}) = m(\hat{F}) = m(\hat{F}')$ e as medidas θ e δ dos ângulos suplementares aos de medidas β e γ, respectivamente, conforme a Figura 1.8.

Figura 1.8: *Ilustração da demonstração da Proposição 11.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

No quadrilátero $BCF'E'$, temos:

$$\theta + \delta + \gamma + \beta = 180 - \beta + 180 - \gamma + \gamma + \beta = 360,$$

o que contradiz o Proposição 7.

A demonstração do caso $AC > DF$ é análoga. ■

É importante notar que nas demonstrações utilizamos figuras com o intuito de facilitar a compreensão de cada prova, mas que essas figuras não condizem com os resultados demonstrados. Para que possamos visualizar tais resultados precisamos abrir mão das interpretações euclidianas dos termos primitivos *ponto* e *reta* e buscarmos de uma representação adequada, um *modelo* para a Geometria Hiperbólica.

Segundo Greenberg (1993, p. 52), um modelo de um sistema axiomático é uma interpretação de seus termos primitivos, o qual mantém válidos os postulados do sistema e, consequentemente, os resultados que decorrem deles.

Para a Geometria Hiperbólica, por exemplo, temos os modelos do Disco e o do Semiplano de Poincaré, criados a partir de objetos euclidianos para representar objetos hiperbólicos.

O uso de objetos euclidianos para a criação de modelos hiperbólicos está relacionado com a independência do quinto postulado de Euclides dos demais postulados e com a própria consistência dessa geometria.

> A real independência do postulado das paralelas dos outros postulados da geometria euclidiana só foi estabelecida inquestionavelmente quando se forneceram demonstrações da consistência da hipótese do ângulo agudo. Estas não demoraram a vir e foram produzidas por Beltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, Henri Poincaré e outros. O método consistia em construir um modelo na geometria euclidiana, de modo que o desenvolvimento abstrato da hipótese do ângulo agudo pudesse dar uma interpretação concreta numa parte do espaço euclidiano. Então qualquer inconsistência na geometria não-euclidiana implicaria uma inconsistência correspondente na geometria euclidiana. (EVES, 2004, p. 544)

Veremos na sequência a construção dos modelos de Poincaré para a Geometria Hiperbólica, começando pelo modelo do Disco e, em seguida, o do Semiplano.

1.2.1 O modelo do Disco de Poincaré

Como o próprio nome sugere, no modelo do Disco de Poincaré utilizamos como figura central um disco euclidiano. Começaremos definindo uma relação entre duas circunferências que é fundamental para compreendermos este modelo de Geometria Hiperbólica:

Definição 1. *Duas circunferências secantes são ditas ortogonais se, em um de seus pontos de intersecção, seus raios são perpendiculares.*

Utilizaremos também o conceito de inversão de ponto com relação a uma circunferência, que podemos definir da seguinte maneira:

Definição 2. *Dada uma circunferência α, de centro A e raio a, e um ponto P distinto de A, o ponto P' é dito o inverso de P com relação a α, se P' está em $\overrightarrow{AP}$ e $AP \cdot AP' = a^2$.*

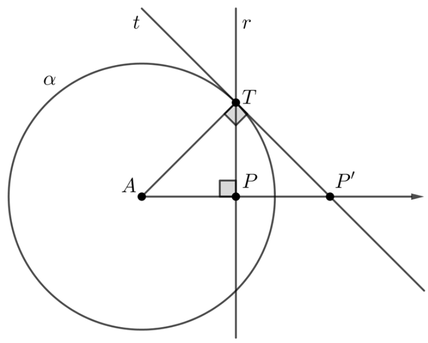
Note que, pela definição, se o ponto P está no interior da circunferência, seu inverso estará no exterior (e vice-versa), e se o ponto pertence à circunferência, seu inverso é ele próprio. Como utilizaremos a inversão de pontos do interior de uma circunferência, daremos especial atenção a este caso.

Dada uma circunferência α, de centro A e raio a, e um ponto $P \neq A$ em seu interior, é possível determinar o ponto P', inverso de P com relação à α. Para isso, basta tomarmos a semirreta AP e a reta r perpendicular à $\overrightarrow{AP}$ passando por P. Como P está no interior da circunferência, r e α se intersectam em dois pontos. Sejam T um desses pontos e t a reta tangente à α passando por T. Como $P \neq A$, a reta t intersecta a semirreta AP em um ponto P', conforme ilustrado na Figura 1.9.

Por construção, as retas AT e TP' são perpendiculares e, consequentemente, os triângulos ATP' e APT são semelhantes. Decorre diretamente desta semelhança que $AP \cdot AP' = AT^2 = a^2$, ou seja, o ponto P' é o inverso de P com relação à α.

O próximo resultado nos diz uma condição necessária e suficiente para que duas circunferências sejam ortogonais. Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em Greenberg (1993, p.246).

Figura 1.9: *Ilustração da construção do inverso de P com relação à α.*



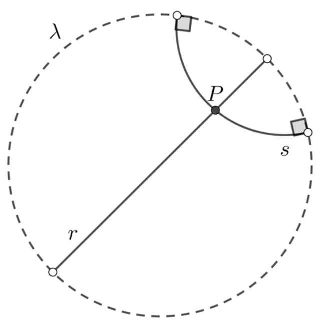
Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 12. *Na Geometria Euclidiana Plana, seja P um ponto qualquer que não pertence à circunferência α e que não coincide com o centro A de α, e seja β uma circunferência passando por P. Então α e β são ortogonais se, e somente se, β passa pelo ponto P', inverso de P com relação à α.*

Vamos agora definir quais serão as interpretações dos termos primitivos que são válidas no modelo do Disco de Poincaré. Sendo λ uma circunferência euclidiana, cada ponto euclidiano em seu interior é interpretado como um *ponto hiperbólico*. O conjunto desses pontos é a representação do *plano hiperbólico*.

Uma reta neste modelo pode ser interpretada ou como um diâmetro da circunferência λ, excluídos seus extremos, ou como a intersecção de uma circunferência ortogonal à λ com o interior de λ. Na Figura 1.10 representamos duas retas hiperbólicas r e s que passam por um ponto hiperbólico P.

Figura 1.10: *Interpretações dos termos primitivos no modelo do Disco de Poincaré.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

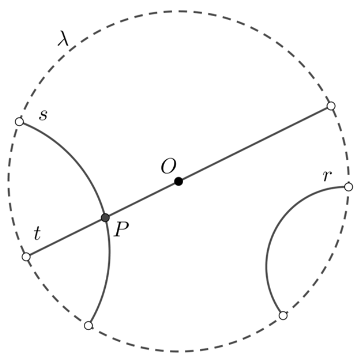
Observe que os pontos que estão sobre λ não pertencem ao plano hiperbólico. Chamamos tais pontos de *pontos ideais* ou ainda, *pontos no infinito*.

Com as interpretações dadas de ponto e reta é possível fazer a verificação dos axiomas de incidência que fundamentam a Geometria Hiperbólica. Como exemplo, faremos agora a verificação do primeiro axioma (veja pág. 12).

Sejam P e Q dois pontos no interior de λ, com P distinto do centro O de λ. Se P, Q e O são colineares, a reta hiperbólica PQ é o diâmetro desta circunferência que contém P, excluídos os extremos, e, como o modelo está construído com base em objetos da Geometria Euclidiana, esta reta é única. Caso contrário, se P, Q e O não são colineares, seja P' o inverso de P com relação à λ. Pela Proposição 12, a circunferência α que passa pelos pontos não colineares P, Q e P' é ortogonal à λ. A intersecção de α com o interior de λ determina a reta hiperbólica PQ, que é única, pois α é a única circunferência que contém aqueles três pontos.

Também podemos verificar facilmente o Postulado Hiperbólico das Paralelas. Na Figura 1.11, temos a reta hiperbólica r e um ponto P fora dela, pelo qual passam duas retas hiperbólicas s e t e que não intersectam r.

Figura 1.11: *Verificação do Postulado Hiperbólico das Paralelas no Disco de Poincaré.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível interpretar os termos primitivos estar entre e congruente de modo que os axiomas de ordem, congruência e continuidade estejam todos verificados, embora alguns deles não sejam imediatos. A verificação completa pode ser encontrada em Andrade (2013) e Greenberg (1993).

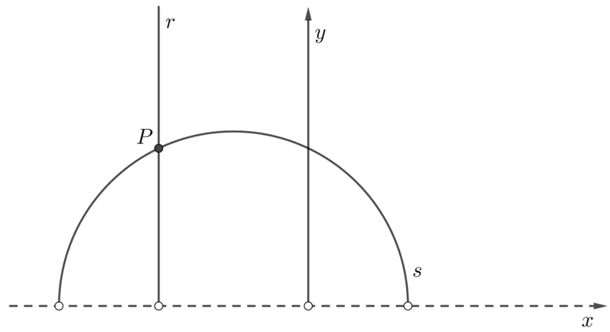
1.2.2 O modelo do Semiplano de Poincaré

Neste modelo, a figura central é um semiplano euclidiano e diferentemente do que fizemos no Disco de Poincaré, desta vez faremos uma abordagem analítica. Comecemos definindo as interpretações dos termos primitivos que são válidos neste modelo.

Sendo o plano euclidiano definido por $\mathbb{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, a representação do plano hiperbólico é o conjunto $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. De modo análogo ao que fizemos no Disco de Poincaré, os pontos hiperbólicos são os pontos $P \in \mathbb{H}$.

Uma reta neste modelo pode ser interpretada de duas maneiras. Uma delas é a intersecção de uma reta euclidiana "vertical" com $\mathbb{H}$, ou seja, dada uma constante $k \in \mathbb{R}$, a reta hiperbólica é o conjunto $r_k = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = k\}$. A outra é a intersecção de uma circunferência euclidiana cujo centro está na reta $y = 0$ com $\mathbb{H}$, nesse caso, dados $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$, a reta hiperbólica é o conjunto $r_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - a)^2 + y^2 = b^2\}$. A Figura 1.12 apresenta duas retas hiperbólicas r e s no Semiplano de Poincaré que passam por um ponto hiperbólico P.

Figura 1.12: *Interpretações dos termos primitivos no modelo do Semiplano de Poincaré.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

E, assim como fizemos anteriormente, com as interpretações dadas de ponto e reta é possível verificar os axiomas de incidência que fundamentam a Geometria Hiperbólica.

Sejam os pontos hiperbólicos $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$. Se $x_P = x_Q = k$, com $k \in \mathbb{R}$, temos que $\overleftrightarrow{PQ} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = k\}$. Caso contrário, isto é, se $x_P \neq x_Q$, verificaremos que existe uma única circunferência com centro $(a, 0)$ e raio $b > 0$ que contém P e Q. Os parâmetros a e b devem satisfazer:

$$(x_P - a)^2 + (y_P)^2 = b^2 \tag{1.1}$$
$$(x_Q - a)^2 + (y_Q)^2 = b^2. \tag{1.2}$$

Subtraindo a equação (1.2) de (1.1):

$$(x_P - a)^2 + (y_P)^2 - [(x_Q - a)^2 + (y_Q)^2] = b^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow (x_P)^2 - 2ax_P + a^2 + (y_P)^2 - (x_Q)^2 + 2ax_Q - a^2 - (y_Q)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_P)^2 - (x_Q)^2 + (y_P)^2 - (y_Q)^2 - 2a(x_P - x_Q) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{(x_P)^2 - (x_Q)^2 + (y_P)^2 - (y_Q)^2}{2(x_P - x_Q)}.$$

Dessa forma, o parâmetro a está unicamente determinado. E, por fim, deduzimos de (1.1) que:

$$b = \sqrt{(x_P - a)^2 + (y_P)^2} > 0.$$

Portanto, $\overleftrightarrow{PQ}$ fica unicamente determinada pelos pontos P e Q.

O Postulado Hiperbólico das Paralelas pode ser verificado analiticamente neste modelo. Vamos analisar um caso particular no qual tomaremos duas retas do tipo $r_{a,b}$ paralelas à reta $r_0 = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = 0\}$ e passando pelo ponto $P = (2, 1)$ não pertencente a r_0. Note que as retas $r_{2,1} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x-2)^2 + y^2 = 1^2\}$ e $r_{4,\sqrt{5}} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x-4)^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2\}$ passam pelo ponto P.

Agora vamos verificar que a reta $r_{2,1}$ é paralela a reta r_0 a partir do sistema:

$$x = 0 \tag{1.3}$$
$$(x-2)^2 + y^2 = 1^2 \tag{1.4}$$

e substituindo (1.3) em (1.4) obtemos:

$$(0-2)^2 + y^2 = 1^2 \Leftrightarrow 4 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = -3.$$

O que implica que não existe solução real para o sistema, em outras palavras, $r_{2,1} \cap r_0 = \emptyset$. De modo análogo, vamos verificar que as retas $r_{4,\sqrt{5}}$ e r_0 também são paralelas:

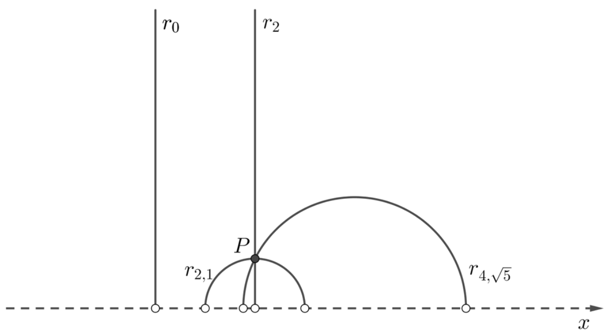
$$x = 0 \tag{1.5}$$
$$(x-4)^2 + y^2 = \sqrt{5}^2 \tag{1.6}$$

e substituindo (1.5) em (1.6):

$$(0-4)^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow 16 + y^2 = 5 \Leftrightarrow y^2 = -11.$$

De onde concluímos que $r_{4,\sqrt{5}} \cap r_0 = \emptyset$. Observe que a reta $r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{H} : x = 2\}$ também é paralela à r_0 e passa por P. A Figura 1.13 apresenta as retas hiperbólicas r_0, r_2, $r_{2,1}$ e $r_{4,\sqrt{5}}$ e o ponto hiperbólico $P = (2,1)$.

Figura 1.13: *Verificação do Postulado Hiperbólico das Paralelas no Semiplano de Poincaré.*



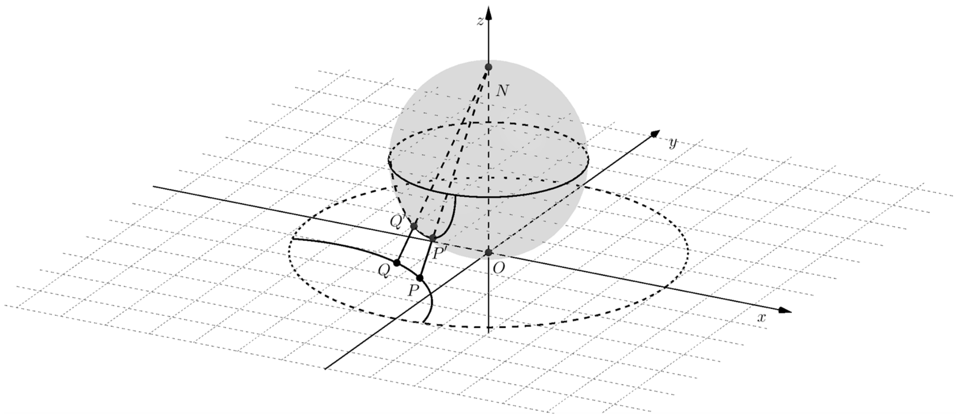
Fonte: Elaborada pelo autor.

Embora sejam definidos de maneiras diferentes, os modelos do Disco e do Semiplano de Poincaré representam a mesma Geometria. É possível encontrar, com o auxílio de projeções estereográficas, uma função bijetora que transforma ponto e reta de um modelo em ponto e reta, respectivamente, do outro, preservando a relação de incidência.

Descreveremos analiticamente o Disco de Poincaré a partir do interior de uma circunferência λ de raio $r = 2$ centrada na origem O de um sistema de coordenadas Oxy.

Sejam ε uma esfera de raio unitário e tangente ao plano xy em O e $N \in \varepsilon$ o ponto diametralmente oposto a O. É feita a projeção estereográfica com origem N dos pontos hiperbólicos do Disco de Poincaré sobre o hemisfério inferior de ε. A Figura 1.14 ilustra a projeção de uma reta hiperbólica PQ sobre o hemisfério inferior de ε, na qual os pontos P' e Q' são imagens pela projeção estereográfica de P e Q, respectivamente. Note que os pontos ideais da reta PQ correspondem a pontos do equador da esfera.

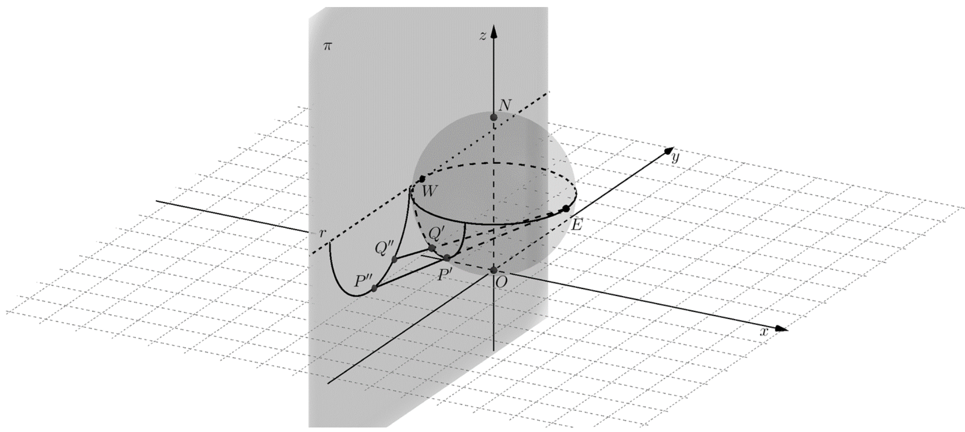
Figura 1.14: *Projeção estereográfica do Disco de Poincaré sobre uma esfera.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomamos, então, E um ponto no equador de ε e fazemos a projeção estereográfica, com origem em E, do hemisfério inferior de ε sobre um plano π tangente à ε no ponto W, diametralmente oposto a E. A imagem dessa projeção resulta em um semiplano de π determinado pela reta r que tangencia o equador em W e está contida no mesmo plano que o equador. A Figura 1.15 apresenta a imagem da reta hiperbólica $\overleftrightarrow{PQ}$ (usada na Figura 1.14) pela projeção estereográfica com origem E sobre o plano π. Os pontos P'' e Q'' são as imagens de P' e Q', respectivamente, por tal projeção.

Figura 1.15: *Projeção estereográfica do hemisfério inferior da esfera sobre um plano.*

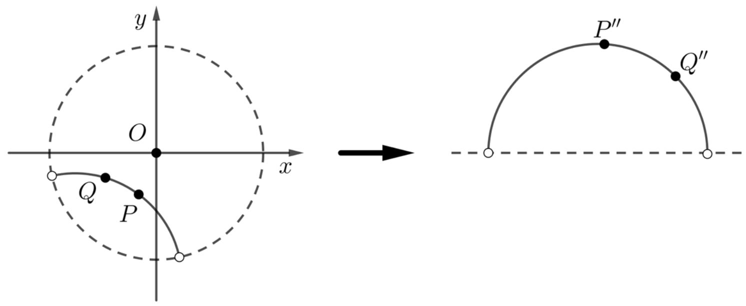


Fonte: Elaborada pelo autor.

Com esta composição de projeções estereográficas, a imagem da reta hiperbólica PQ no Disco de Poincaré é uma reta hiperbólica $P''Q''$ no Semiplano de Poincaré. A Figura 1.16 ilustra a imagem obtida a partir das projeções feitas.

No argumento acima, supomos que E', a imagem do ponto E pela projeção estereográfica com origem N, não é um ponto ideal da reta hiperbólica PQ. Na Figura 1.17 apresentamos

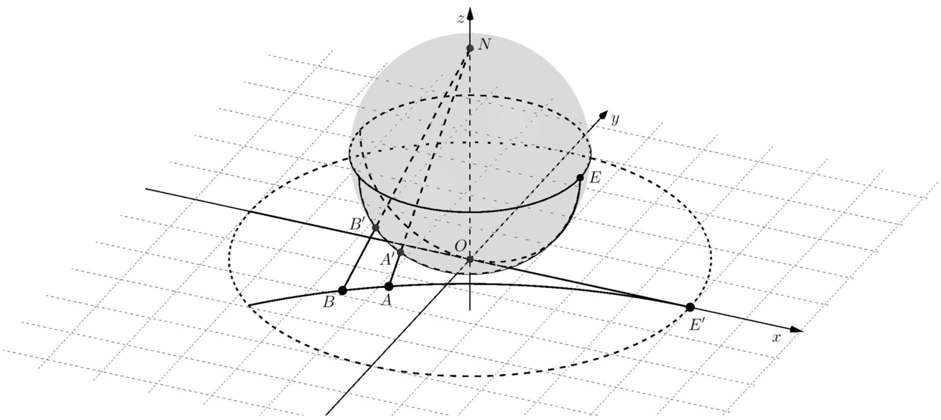
Figura 1.16: *Imagem obtida a partir da composição das projeções estereográficas descritas.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

duas retas no modelo do Disco de Poincaré que compartilham o ponto ideal E', sendo uma delas a reta AB (na qual os pontos A e B são projetados a partir de N sobre os pontos A' e B', respectivamente) e a outra determinada a partir do diâmetro de λ que passa por E'.

Figura 1.17: *Projeção estereográfica do Disco de Poincaré sobre uma esfera.*



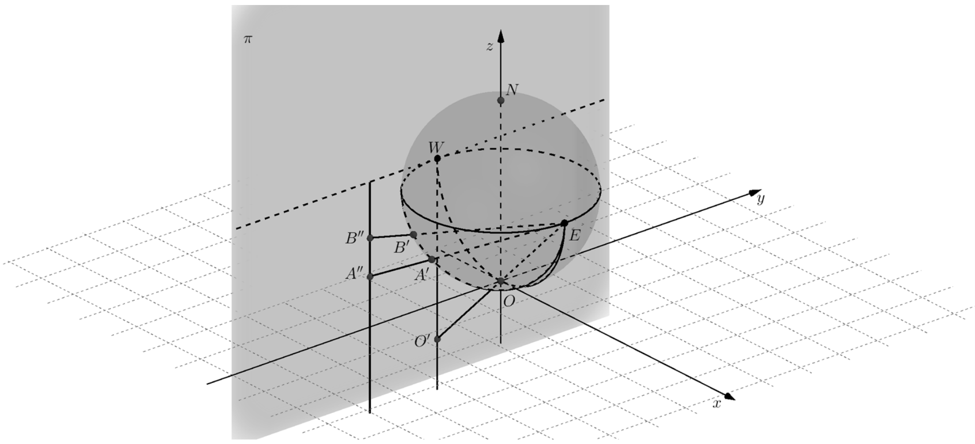
Fonte: Elaborada pelo autor.

A imagem no plano π pela projeção estereográfica com origem E dos pontos A', B' e O são os pontos A'', B'' e O', como apresentado na Figura 1.18.

O resultado da composição das projeções estereográficas realizadas está apresentado na Figura 1.19. Pela discussão realizada, é possível notar que retas "verticais" do modelo do Semiplano de Poincaré possuem um ponto ideal comum, que não é visível no modelo. Tal ponto seria a imagem do ponto E pela projeção estereográfica de origem E, que não está definida.

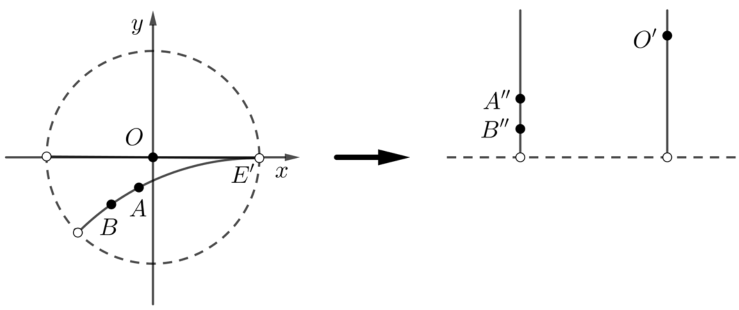
Uma discussão completa sobre o assunto, bem como a apresentação de outros modelos para Geometria Hiperbólica, pode ser encontrada em Greenberg (1993, p. 236).

Figura 1.18: *Projeção estereográfica do hemisfério inferior da esfera sobre um plano.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 1.19: *Imagem obtida a partir da composição das projeções estereográficas descritas.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 2

Aspectos Teóricos e Metodológicos

Considerando que o estudo desenvolvido no presente trabalho relaciona-se diretamente com o conhecimento do professor, a principal teoria que utilizamos como orientação foi a do *Conhecimento Matemático para o Ensino*, proposta por Deborah L. Ball e colaboradores.

Características importantes relacionadas à estrutura das questões que aqui investigamos, bem como da situação que utilizamos para investigá-las, nos levaram a escolha do Estudo de Caso como metodologia de pesquisa.

Este capítulo é dividido em duas seções, nas quais apresentamos as bases teórica e metodológica, respectivamente, que orientaram o desenvolvimento do presente trabalho.

2.1 Conhecimento Matemático para o Ensino

A formação do professor e o conhecimento necessário para que ele desempenhe eficientemente sua função são preocupações que datam de mais de um século atrás. Na Matemática, temos o exemplo de Felix C. Klein (1849 - 1925) que, em sua obra *Matemática de um ponto de vista superior*, apontou um problema relacionado aos cursos de formação de professores de Matemática no início do século XX.

Segundo o autor, o conteúdo ensinado em nível pré-universitário pouca ou nenhuma relação tinha com o conteúdo universitário. Quando formado e de volta à escola, o professor descobria que o conteúdo estudado na universidade não estava relacionado com o que seria ensinado, caracterizando uma dupla descontinuidade (Klein, 2009). Klein se aprofundou na discussão sobre o problema da *dupla descontinuidade* e, como apontam Rangel et al. (2014):

> Sobre o saber de conteúdo necessário para o ensino, Klein entende que o professor deve não somente ter conhecimento específico sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacioná-los e articulá-los, compreender sua natureza científica e sua evolução histórica, de forma a desenvolver uma visão ampla o suficiente para situá-los no panorama da Matemática como ciência (RANGEL et al., 2014, p. 2).

Na década de 1980 foi publicado um trabalho de grande notoriedade direcionado à tentativa de teorizar os conhecimentos necessários ao professor no exercício da docência. O psicólogo educacional Lee S. Shulman propôs que estes conhecimentos podem ser divididos em três categorias: o *conhecimento do conteúdo*, o *conhecimento do currículo* e o *conhecimento pedagógico do conteúdo* (Shulman, 1986).

O conhecimento de conteúdo, como apresentado pelo autor, refere-se ao quanto o professor conhece dos diferentes conceitos, procedimentos e representações para um determinado conteúdo e como organiza esse conhecimento. A cargo de ilustração, podemos tomar como exemplo o conceito de frações.

Podemos interpretar uma fração como uma representação de partes de um todo e, com a finalidade de introduzir o conceito na Educação Básica, tal representação é amplamente utilizada. Outra interpretação é a fração como o quociente, permitindo que elas representem o resultado da divisão entre dois números. Existem ainda, segundo Campos et al. (2006), outros três significados para tal conceito.

Conhecer os diferentes significados de fração, bem como os momentos nos quais podemos apresentá-los aos alunos, com o intuito de facilitar a compreensão, enquadram-se no conhecimento do conteúdo proposto por Shulman. O autor ainda acrescenta que[1]:

> O professor precisa não apenas entender que algo é; o professor precisa entender ainda o porquê é, em quais bases suas justificativas se sustentam, e sob quais circunstâncias nossa crença em sua justificação pode ser enfraquecida ou até mesmo negada. (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa)

Sobre o conhecimento do currículo, o autor aponta que[2]:

> O currículo é representado por uma gama completa de programas elaborados para o ensino de matérias e tópicos particulares em um determinado nível, a variedade de materiais instrucionais disponíveis com relação a estes programas, e o conjunto de características que servem tanto como indicadores, quanto como contra indicadores para o uso de currículos particulares ou de materiais em circunstâncias particulares. (SHULMAN, 1986, p. 10, tradução nossa)

Este conhecimento está relacionado com a compreensão destes programas e das diferentes estratégias adotadas para o ensino de determinado tópico. Segundo Shulman (1986), o conhecimento do currículo também está associado à maneira como o professor relaciona um determinado assunto com outros dentro e fora da disciplina lecionada.

O conteúdo de funções polinomiais de segundo grau, por exemplo, estudado durante o

[1]The teacher need not only understand that something is so; the teacher must further understand why it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied.

[2]The curriculum is represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at, a given level, the variety of instructional materials available in relation to those programs, and the set of characteristics that serve as both the indications and contraindications for the use of particular curriculum or program materials in particular circumstances.

Ensino Médio, pode ser relacionado com a trajetória descrita em um lançamento oblíquo de um projétil, estudado na disciplina de Física. O gráfico de tal trajetória em função do tempo é uma parábola e esta situação pode ser utilizada nas aulas de Matemática como uma aplicação deste tipo de função.

O conhecimento pedagógico do conteúdo refere-se ao saber ensinar e também abrange o conhecimento daquilo que torna um tópico mais fácil ou mais complicado de ser entendido, com base nas concepções prévias, corretas ou não, que os alunos têm sobre o assunto. Segundo Shulman (1986), compete ao professor estar munido de exemplos, situações, analogias, estratégias, e outros elementos, que permitirão o melhor entendimento daquilo que é ensinado.

Numa primeira introdução ao conceito de sistema de coordenadas na Educação Básica, pode-se utilizar estratégias para facilitar a compreensão do assunto. O uso do jogo Batalha Naval em sala, por exemplo, pode servir como uma ferramenta motivadora e como auxílio para o entendimento do conceito.

O trabalho de Shulman (1986) foi amplamente difundido, sendo citado em produções das mais diversas áreas, como ciências, engenharias, química, matemática, religião, entre outras. Contudo, mesmo com toda essa proporção que a teoria do conhecimento pedagógico do conteúdo tomou, ainda deixou em aberto alguns problemas (Ball et al., 2008).

Deborah L. Ball e colaboradores chamam atenção ao fato de que a definição de alguns termos foi feita de maneira muito geral, sem que fosse estabelecida de maneira precisa uma definição para eles. Segundo a autora[3]:

> Ao longo dos últimos vinte anos, por exemplo, pesquisadores usaram o termo "conhecimento pedagógico do conteúdo" para se referirem a uma ampla gama de aspectos do conhecimento do assunto e aspectos do ensino do assunto. Muitas vezes não está claro como as ideias em uma área se relacionam com aquelas em outra área, ou mesmo se as descobertas dentro da mesma disciplina têm visões semelhantes ou diferentes do conhecimento do professor sobre o assunto. (BALL et al., 2008, p. 3)

A autora e seus colaboradores, baseados no trabalho desenvolvido por Shulman (1986), construíram uma teoria específica para a área do ensino de Matemática, criando assim o chamado *Conhecimento Matemático para o Ensino*. Nesta teoria, houve um aprofundamento nas classificações dos conhecimentos necessários ao professor, propostos por Shulman.

Ball et al. (2008) propuseram uma divisão do conhecimento em duas grandes categorias: o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e o *conhecimento do conteúdo*. A primeira, trata das relações da prática docente com o conhecimento do assunto a ser ensinado e é constituída por três subcategorias: *conhecimento do conteúdo e dos estudantes*, *conhecimento do conteúdo e*

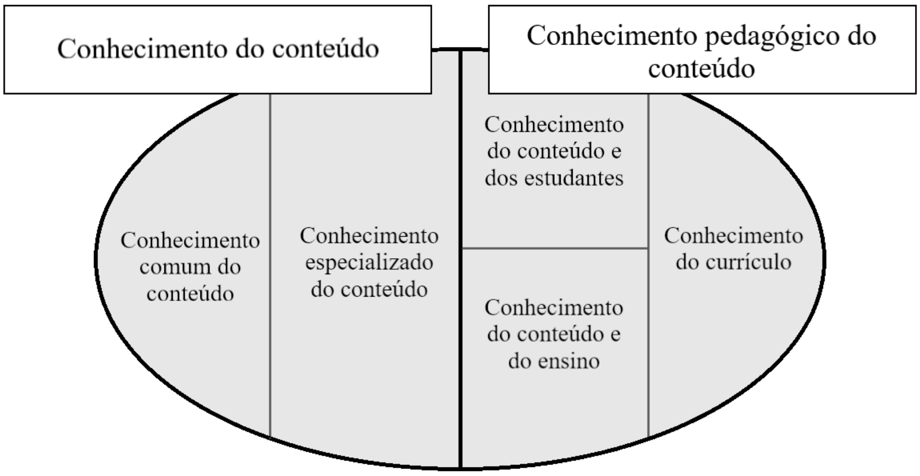
[3]Throughout the past twenty years, for example, researchers have used the term "pedagogical content knowledge" to refer to a wide range of aspects of subject matter knowledge and aspects of the teaching of subject matter. It is often unclear how ideas in one subject area relate to those in another subject area, or even whether findings within the same subject take similar or different views of teacher subject matter knowledge

do ensino e *conhecimento do currículo.*

Já a segunda categoria, refere-se aos conhecimentos relacionados ao conteúdo em si. É dividida em duas subcategorias denominadas *conhecimento comum do conteúdo* e *conhecimento especializado do conteúdo.*

A Figura 2.1 ilustra as categorias propostas por Ball et al. (2008) relacionando-as com as de Shulman (1986).

Figura 2.1: *Relação entre as categorias propostas por Shulman (1986) e Ball et al. (2008).*



Fonte: Ball et al., 2008, p. 5. Tradução nossa.

O conhecimento do conteúdo e dos estudantes, segundo Ball et al. (2008), está relacionado com a familiaridade que o professor possui com o pensamento matemático do estudante e suas conexões com o assunto. Este conhecimento permite ao professor utilizar de exemplos ou situações que despertem o interesse dos estudantes, bem como antecipar possíveis dificuldades dos alunos diante de um determinado conteúdo.

Este conhecimento é utilizado, por exemplo, quando o professor é capaz de perceber que algum aluno teve dificuldade na compreensão de um determinado conceito baseado na linguagem corporal do aluno, como a expressão facial.

O conhecimento do conteúdo e do ensino, que é bem próximo ao último citado, está associado ao conhecimento sobre o conteúdo e como organizá-lo da melhor forma para o ensino. Ele é utilizado quando o professor seleciona exemplos para aprofundar o entendimento em um determinado conteúdo ou quando escolhe utilizar uma ou outra representação de um conceito para melhor compreensão do aluno.

No ensino de funções, o diagrama de Venn-Euler é um bom exemplo para compreendermos melhor este tipo de conhecimento. A representação visual de uma função e de uma relação entre dois conjuntos que não determina uma função pode auxiliar os estudantes a compreenderem melhor o conceito estudado.

O conhecimento do currículo é, também, uma subcategoria do conhecimento pedagógico do conteúdo e é compreendido por Ball e seus colaboradores sob a mesma perspectiva proposta por Shulman (1986).

O conhecimento comum do conteúdo, segundo Ball et al. (2008), refere-se aos conhecimentos matemáticos que são esperados que uma pessoa bem instruída saiba. Este conhecimento possibilita que um professor identifique mais claramente erros cometidos por alunos e também aqueles que constam em materiais didáticos. Além disso, permite que o professor escolha termos e notações mais adequados ao ensinar um determinado conteúdo.

No reconhecimento de figuras geométricas, por exemplo, é relativamente comum que os alunos classifiquem qualquer tipo de retângulo como um quadrado. Utilizando o conhecimento comum do conteúdo o professor pode identificar a possível causa do erro, que, neste caso, pode estar relacionado com uma interpretação errônea da definição, e atuar de modo que os alunos compreendam o equívoco e não voltem a cometê-lo.

O conhecimento especializado do conteúdo vai além do conhecimento comum, sendo mais aprofundado do que aquele que deve ser ensinado. Segundo Ball et al. (2008) tal conhecimento é necessário em muitos dos afazeres específicos do professor, como os que estão apresentados na Figura 2.2.

Figura 2.2: *Afazeres matemáticos no ensino.*

Apresentar ideias matemáticas
Responder aos "porquês" dos estudantes
Encontrar um exemplo para atingir um ponto matemático específico
Reconhecer o que está envolvido no uso de uma determinada representação
Relacionar as representações às ideias subjacentes e à outras representações
Conectar um determinado tópico a outros que já foram ou ainda serão ensinados
Explicar objetivos e propósitos matemáticos aos pais
Avaliar e adaptar conteúdos matemáticos de livros didáticos
Modificar tarefas para torná-las mais fáceis ou difíceis
Avaliar a plausibilidade das afirmações dos estudantes (comumente rápido)
Dar ou avaliar explicações matemáticas
Escolher e desenvolver definições utilizáveis
Usar notação e linguagem matemáticas e criticar seu uso
Fazer perguntas matemáticas produtivas
Selecionar representações para determinados propósitos
Inspecionar equivalências

Fonte: Ball et al., 2008, p. 10. Tradução nossa.

Estes afazeres são comuns no cotidiano do professor e, por este motivo, o conhecimento especializado do conteúdo é tão importante na prática profissional. Observe que, conforme a hipótese de nosso trabalho, o estudo de geometrias não-Euclidianas pode contribuir para este tipo de conhecimento.

As fronteiras entre um determinado conhecimento e outro são, muitas vezes, bem tênues e uma situação pode exigir mais de um conhecimento do professor. Podemos citar, por exemplo, a apresentação de um dos mais famosos resultados da Geometria Euclidiana: a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

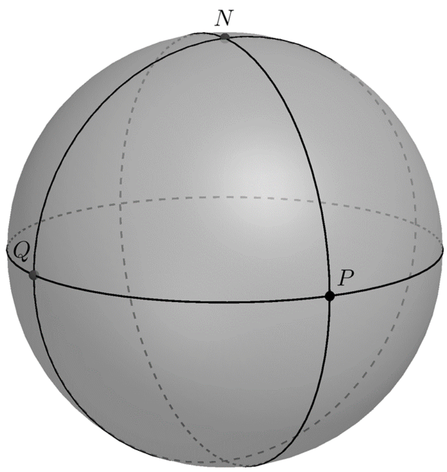
Este resultado pode ser introduzido por meio de uma situação problema que servirá de motivação para o estudo deste assunto, para que sua formalização seja feita posteriormente. Nesse caso, o professor faz uso do conhecimento do conteúdo e dos estudantes ao propor a situação problema e os conhecimentos comum e especializado do conteúdo para formalizar o resultado.

Uma forma de tratar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é utilizando dobraduras. Outra maneira, é por meio do uso de programas de Geometria Dinâmica (como o Geogebra). Em ambos os casos, o professor mobiliza o conhecimento do conteúdo e do ensino ao permitir que os alunos tenham contato com outras verificações do resultado.

Outra possibilidade de abordagem deste resultado é por meio de uma demonstração, seguido de exemplos e problemas sobre o assunto. Nesta situação, o professor mobiliza o conhecimento especializado do conteúdo juntamente com o conhecimento comum do conteúdo. O conhecimento do conteúdo e dos estudantes também é utilizado neste momento, para antecipar as dúvidas e selecionar exemplos e problemas que facilitem a compreensão do assunto.

Após a apresentação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer na Geometria Euclidiana, ainda é possível discutir com os alunos situações nas quais este resultado não é válido, com o objetivo de aprofundar ainda mais o tema. Um exemplo de situação é a construção de um triângulo sobre uma esfera, usando o próprio globo terrestre como modelo. Neste caso, o polo norte (ponto N) e as intersecções de dois meridianos perpendiculares entre si com a linha do Equador (pontos P e Q) formam um triângulo com três ângulos retos, como ilustrado na Figura 2.3.

Figura 2.3: *Triângulo sobre uma esfera.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Este exemplo pode levar a discussões mais aprofundadas sobre resultados da Geometria Euclidiana e sobre a existência de outras geometrias, além de permitir ao professor estabelecer uma relação com a disciplina de Geografia, explicando, por exemplo, conceitos de coordenadas geográficas. Note que, nesse momento, o conhecimento especializado do conteúdo é utilizado.

2.2 O Estudo de Caso

Existem dois tipos de metolodogia de investigação: a qualitativa e a quantitativa. Segundo Meirinhos e Osório (2016), a metodologia qualitativa é caracterizada por uma abordagem interpretativa e construtivista do conhecimento, na qual busca-se compreender um determinado fenômeno em seu contexto, para o qual há pouco ou nenhum controle do pesquisador. A investigação de caráter quantitativo é marcada pela perspectiva positivista e pela ideia de que o conhecimento pode ser obtido da realidade natural ou social de modo quantificável, assumindo um distanciamento entre o investigador e o fenômeno estudado.

Segundo Matos e Carreira (1994), as investigações em Educação podem ser conceituadas a partir de dois paradigmas, cada um relacionado a uma metodologia de pesquisa. O primeiro paradigma é interpretativo, no qual busca-se explicar um determinado fenômeno. Já o segundo é positivista e busca confirmar uma determinada teoria.

> Associamos o paradigma interpretativo a metodologias de investigação que assentam fundamentalmente em técnicas de índole qualitativa na recolha e análise dos dados. Dados e análise de natureza quantitativa surgem em geral quando a abordagem de investigação é conformada pelo paradigma positivista. (MATOS; CARREIRA, 1994, p. 21)

Como apontam Meirinhos e Osório (2016) e Matos e Carreira (1994), estas metodologias de pesquisa podem ser vistas como opostas e, nesse caso, assume-se que uma invetigação é feita a partir da metodologia quantitativa ou da qualitativa, mas não de ambas. Por outro lado, podemos interpretá-las como complementares, uma vez que determinadas investigações demandam a utilização de dados quantitativos e qualitativos, simultaneamente.

De acordo com Yin (2010), o Estudo de Caso é:

> [...] uma investigação empírica que
>
> - investiga um fenômeno contemporâneo em profundidade e em seu contexto de vida real, especialmente quando
> - os limites entre o fenômeno e o contexto não são claramente evidentes. (YIN, 2010, p. 39)

Segundo Ponte (2006), este fenômeno ou entidade, denominada *Caso*, pode ser uma pessoa, um grupo de pessoas, uma disciplina, um curso ou qualquer outra unidade social. Nesta estratégia, o objetivo é "compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador" (PONTE, 2006, p. 2).

Um Estudo de Caso pode ser classificado de acordo com o número de Casos em estudo, como feito em Bogdan e Biklen (1994). Yin (2010) propõe uma classificação de acordo com o propósito do estudo realizado, da qual surgem três categorias: os estudos exploratórios, os descritivos e os analíticos.

Os Estudos de Caso exploratórios são aqueles utilizados para obter informações preliminares sobre um determinado fenômeno. Os estudos descritivos são realizados com o objetivo de descrever, de maneira completa, um certo fenômeno em seu contexto. Por fim, os estudos analíticos são aqueles cujo propósito é desenvolver uma nova teoria ou confrontar uma já existente (Yin, 2010).

Uma preocupação comum na realização de um Estudo de Caso é com relação ao papel do investigador. Como explicam Meirinhos e Osório (2016), a participação nesta metodologia não é absoluta e pode variar em diferentes níveis, de acordo com a necessidade. Em um mesmo trabalho, é possível que o pesquisador tenha mais ou menos influência sobre o fenômeno estudado.

Por debruçar-se sobre as entidades para investigar seus atributos, o Estudo de Caso é compreendido como um estudo particularístico e criticado, como aponta Yin (2010), por conta deste preconceito existente. Contudo, é possível que, a partir de um Caso, sejam feitas inferências que permitam compreender outras entidades como a estudada ou que possam contribuir para maiores generalizações (Meirinhos e Osório, 2016).

É importante salientar que a generalização proporcionada por Estudos de Caso não se estendem a populações ou a universos. Essa metodologia, assim como em experimentos, "não representa uma "amostragem" e ao realizar o estudo de caso, sua meta será expandir e generalizar teorias (generalização analítica) e não enumerar frequências (generalização estatística)" (YIN, 2010, p. 36).

A obtenção das evidências pode ser feita a partir de diversos instrumentos e, de acordo com Yin (2010), o uso de múltiplas fontes de dados é importante quando se pensa na validação e na confiabilidade do estudo desenvolvido. Os instrumentos de recolha de dados utilizados nesta metodologia podem ser tanto aqueles comuns em metodologias quantitativas, como os de estudos qualitativos.

Dentre os instrumentos ressaltamos aqueles que são mais comuns, como são os casos do questionário, da entrevista individual ou coletiva, das observações e de outras fontes documentais.

O questionário é, para Chagas (2000), um conjunto de perguntas formuladas com a finalidade de se obter determinados dados necessários aos objetivos de uma pesquisa. Embora seja comumente utilizado para a recolha de dados quantitativos, o questionário pode ser uma importante fonte de evidências qualitativas (Meirinhos e Osório, 2016).

A entrevista é, segundo Yin (2010), uma conversa direcionada e constitui uma das fontes de dados mais importantes de um Estudo de Caso. Possibilita tratar de evidências relacionadas à percepção dos entrevistados sobre um dado tópico de interesse para a pesquisa e, consequentemente, proporciona uma base mais sólida para as conclusões da investigação.

A entrevista também pode ou não ser estruturada de acordo com a necessidade do estudo.

Assim como apontam Meirinhos e Osório (2016), ressaltamos que uma entrevista semi-estruturada pode possuir maiores vantagens sobre a estruturada, uma vez que não limita as respostas obtidas pelos entrevistados.

A observação de campo, como o próprio nome sugere, consiste em coletar evidências sobre o Caso a partir da observação da entidade e pode ser direta ou participante, dependendo se há interação do pesquisador com o objeto de estudo. Essa fonte de dados, de acordo com Yin (2010), tem o propósito de complementar as evidências coletadas de outras fontes.

As informações documentais podem ser obtidas de várias formas, utilizando-se de anotações, avaliações, relatórios, cartas, entre outros. Como explica o autor, além de ser uma importante fonte de dados, os documentos contribuem para a consolidação de informações vindas de outras fontes.

A análise dos dados coletados é parte fundamental da pesquisa, objetivando obter respostas às questões investigadas. Para Yin (2010, p. 131) "a análise de dados consiste em examinar, categorizar, classificar em tabelas ou, do contrário, recombinar as evidências tendo em vista proposições iniciais de um estudo".

A recolha de evidências a partir de múltiplas fontes mostra-se muito vantajosa quando a análise dos dados converge a uma conclusão comum. Para realizar esta validação, Yin (2010) aborda a triangulação de dados, método que consiste em utilizar uma mesma questão para diferentes instrumentos de recolha de dados. Caso todas as fontes indiquem a mesma conclusão, significa que os dados foram triangulados. O autor ainda acrescenta que "qualquer achado ou conclusão do estudo de caso é, provavelmente, mais convincente e acurado se for baseado em diversas fontes diferentes de informação, seguindo a um modo corroborativo" (YIN, 2010, p. 143)

No capítulo que se segue, apresentamos, de maneira detalhada, o Caso estudado no presente trabalho, bem como os instrumentos de coleta de evidências utilizados.

Capítulo 3

O Caso Estudado

Como já mencionado, o Caso estudado neste trabalho é um grupo de professores de Matemática da Educação Básica que acompanhamos enquanto cursavam a disciplina Geometria: um Enfoque Via Modelos (MAT5605), do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPEM), na qual um dos tópicos abordados é a Geometria não Euclidiana. Neste capítulo detalhamos, em duas seções, tal Caso. Primeiramente, apresentamos uma descrição das características e especificidades do curso de pós-graduação e da disciplina. Na segunda seção deste capítulo abordamos os instrumentos de coleta de dados utilizados nesta pesquisa e descrevemos os dados coletados a partir deles, para analisá-los no próximo capítulo.

O Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPEM) é um curso de pós-graduação stricto sensu ofertado gratuitamente pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME – USP) tendo como público-alvo os professores de Matemática da Educação Básica. O curso teve início em agosto de 2012 e obteve nota 4 na avaliação inicial da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

Conforme a proposta do curso, seus objetivos são:

> Melhorar a qualificação dos professores, contribuindo para a formação de profissionais mais adequados às exigências atuais da Educação Básica. Nesse aspecto, pretendemos promover a articulação entre conteúdos específicos e a reflexão sobre a prática em sala de aula, bem como discutir a utilização de recursos, informatizados ou não, voltada ao desenvolvimento de metodologia compatível com os novos paradigmas educacionais.
> Aprofundar a formação inicial do professor de Matemática de Ensino Fundamental e Médio relativamente a conteúdos, procedimentos e modos próprios de produção do conhecimento matemático de forma a favorecer sua autonomia no exercício da ação docente na Educação Básica. Destacamos, para tanto, a discussão de tópicos básicos de Estatística, Lógica, Teoria dos Números, Geometria, Álgebra e Análise.
> Buscar uma melhor compreensão sobre os objetivos, as dificuldades e os desafios que cercam os processos de ensino-aprendizagem em Matemática. Isso inclui a discussão e a reflexão sobre as novas tendências da Educação Matemática e dos documentos oficiais para a fase de ensino visada.
> Incentivar o professor a tornar-se investigador da própria prática, por meio da discussão de subsídios teóricos que possam embasar uma avaliação contínua de seu trabalho de forma a poder melhor adequá-lo constantemente. Tanto o trabalho com projetos como o processo de pesquisa, visando à elaboração de dissertação ao final do curso, são particularmente importantes para a consecução desse objetivo.
> Desenvolver espírito crítico e familiaridade com bibliografia especializada de forma a que o professor torne-se, em sua escola, um agente de melhoria da qualificação de seus próprios colegas. Tanto a discussão dos conteúdos disciplinares como os processos de reflexão e de pesquisa para a elaboração da dissertação de mestrado são importantes no desenvolvimento de tais competências. (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, [202-?])

As disciplinas ofertadas no curso estão listadas abaixo:

- Preparação à Docência de Graduação (GEN5711);
- Epistemologia da Matemática (MAT5766);
- Elementos de Lógica e Aplicações (MPM5601);
- Estatística I (MPM5602);
- Álgebra com Aplicações (MPM5604);
- Geometria: um Enfoque Via Modelos (MPM5605);
- Tópicos de História da Matemática (MPM5606);
- Matemática nos Currículos da Educação Básica (MPM5607);
- Análise Real com Aplicações (MPM5608);
- Projetos em Ensino de Matemática (MPM5609);
- Tendências da Educação Matemática (MPM5610);
- Estatística II (MPM5611);
- Tópicos de Pesquisa em Ensino de Matemática (MPM5612);
- Tópicos de Matemática Recreativa para o Ensino de Matemática (MPM5613);

• Recursos Digitais no Ensino e Aprendizagem da Matemática (MPM5614)
• Redação Científica em Inglês com Foco na Publicação Internacional: do Texto ao Contexto (IME4002).

Em concordância com os objetivos propostos para o curso, os alunos do MPEM devem, obrigatoriamente, cursar a disciplina Matemática nos Currículos da Educação Básica (MPM5607) e escolher duas das seguintes disciplinas: Estatística I (MPM5602), Álgebra com Aplicações (MPM5604), Geometria: um Enfoque Via Modelos (MPM5605) e Análise Real com Aplicações (MPM5608).

A disciplina Geometria: um Enfoque Via Modelos (MPM5605) é oferecida anualmente com duração de um semestre letivo e carga horária de 4 horas-aula semanais, distribuídas em dois dias da semana. Ela visa o aperfeiçoamento dos conhecimentos dos mestrandos na área de Geometria e tem por objetivo: "desenvolver no aluno uma visão crítica dos fundamentos da geometria euclideana, enfocando nos axiomas e apresentando diversos modelos de geometrias para criar uma apreciação da importância dos diversos conceitos introduzidos" (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, 2018).

Os conteúdos previstos a serem estudados na disciplina são:

> 1. Postulados de Incidência. Ordem. Separação e Congruência. Posição relativa de retas e planos. Triângulos: congruência e desigualdades geométricas. Perpendicularismo. Paralelismo. Semelhança.
> 2. Modelos da Geometria de Incidência: O plano cartesiano. A esfera de Riemann. Geometrias finitas. O plano afim real e o plano projetivo associado.
> 3. Os axiomas de ordem. A necessidade do axioma de Pasch.
> 4. O axioma das paralelas e suas diversas formas equivalentes. A descoberta das geometrias não euclidianas. Os modelos de Poincaré e de Klein da Geometria Hiperbólica.
> 5. O axioma da continuidade e a introdução de medidas na Geometria: as funções área e volume. (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, 2018)

A bibliografia recomendada da disciplina é composta pelas obras:

> 1. Araújo, P.V. Curso de Geometria, Gradiva, Lisboa, 2002.
> 2. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometry, Development and History, W. H. Freeman and Co., 1996.
> 3. Hartshorne, R. Geometry: Euclid and beyond, Springer-Verlag, 2000.
> 4. Millman, R. et al. Geometry: a Metric Approach with Models, Springer - Verlag, 1991.
> 5. Moise, E.E. Elementary Geometry from an Advanced standpoint, 2ndEd., Addison-Wesley, 1971.
> 6. Moise, E.E. & Down, F.L. Geometria Moderna, 2 vols, Edgard Blücher, São Paulo, 1971. (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, 2018)

Ressaltamos que Greenberg (1993) e Millman e Parker (1993) fundamentaram parte das discussões levantadas no primeiro capítulo do presente trabalho. Nosso Caso de estudo é constituído por um grupo de treze professores que cursaram a disciplina Geometria: um Enfoque Via Modelos (MPM5605) no período de 05/08/2019 a 22/11/2019. Dez destes professores eram ingressantes no MPEM e os outros três estavam no segundo semestre do curso, fato importante para compreendermos a maturidade e as experiências dos professores com relação a disciplinas de pós-graduação.

Para a obtenção das informações relevantes para a pesquisa utilizamos os seguintes intrumentos: o questionário, as entrevistas individuais, as observações de campo e documentos, estes últimos essencialmente as resoluções apresentadas pelos alunos para os exercícios propostos pela professora ministrante.

3.1 O Questionário

Aplicamos um questionário após algumas semanas do início da disciplina e o dividimos em quatro partes: Identificação; Atuação profissional; Formação; Sobre a disciplina "Geometria: um Enfoque Via Modelos" e seus conteúdos. Na primeira parte coletamos o nome dos participantes que, neste trabalho, serão referidos pelas letras de A a M.

A segunda parte, composta por três questões, foi elaborada com o objetivo de coletar informações a respeito da vida profissional dos professores. As perguntas contidas nesta parte do questionário estão descritas a seguir:

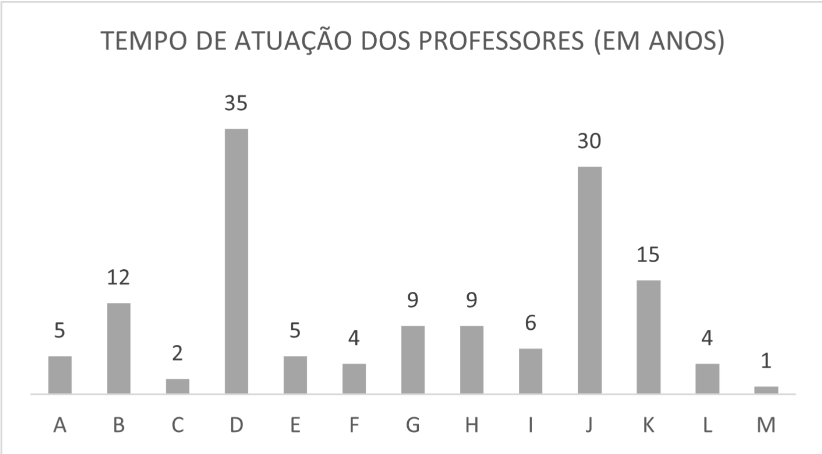
a) Em qual(is) rede(s) de ensino você leciona atualmente?
☐ Pública ☐ Particular ☐ Outros
b) Em qual(is) nível(is)?
☐ Ensino Fundamental II ☐ Ensino Médio ☐ Ensino Superior ☐ Outros
c) Há quanto tempo atua no ensino de Matemática?

Dos 13 (treze) professores, 2 (dois) afirmaram não estar atuando no ramo do ensino naquele período. Dos 11 (onze) que estavam atuando no momento da pesquisa, 5 (cinco) afirmaram que estavam na rede de ensino privada, 1 (um) especificou que lecionava no setor público-privado e 5 (cinco) assinalaram "Outros", sem maiores especificações. Nenhum dos professores atuava na rede pública de ensino.

Com relação ao nível de ensino, questionado no item (b), os professores podiam assinalar mais de uma opção. Dos 11 (treze) participantes que atuavam como professores no momento da pesquisa, 2 (dois) atuavam somente no Ensino Fundamental II, 1 (um) somente no Ensino Médio, 4 (quatro) no Ensino Fundamental II e Médio, 1 (um) atuava no Ensino Fundamental II, Médio e Superior, 1 (um) assinalou todas as opções e 2 (dois) assinalaram a opção "Outros". Nenhum dos professores que assinalaram a opção "Outros" especificou a resposta.

Sobre o tempo de atuação, o menor período de experiência registrado foi de 1 ano e o maior foi de 35 anos. A Figura 3.1 apresenta graficamente o tempo, em anos, de experiência profissional de cada um dos professores.

Figura 3.1: *Tempo, em anos, de atuação de cada professor.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na terceira parte do questionário foram coletadas informações relacionadas à formação dos professores por meio das seis questões descritas a seguir:

Sobre a sua graduação, responda:
a) Qual o curso?
b) Em qual Instituição?
c) Qual o ano de conclusão?
d) O contato que você teve com a Geometria durante a graduação foi suficiente para que você se sentisse preparado para ensiná-la? Por quê?
e) Você teve contato com a Geometria do ponto de vista axiomático?
☐ Sim ☐ Não
f) Você teve contato com alguma Geometria não-Euclidiana durante a graduação ou antes do mestrado? Se sim, como? (por meio de alguma disciplina, por conta própria, etc.)

Dos participantes, 11 (onze) são licenciados em Matemática, sendo um destes também formado em Engenharia, e 2 (dois) possuem formação inicial em Engenharia, com curso de complementação pedagógica (Resolução CNE/CEB nº 02/97 – Programas especiais de formação pedagógica). Com relação ao tipo de Instituição de Ensino Superior (IES) que os professores cursaram, 10 (dez) possuem formação exclusivamente em instituições públicas, 2 (dois) exclusivamente em faculdades particulares e apenas um tem formação em instituições de ambos os tipos.

A respeito do ano de formação dos participantes, considerando o ano de formação na última graduação que eles fizeram, 6 (seis) concluíram no ano de 2018, 3 (três) no ano de 2017, 1 (um) no ano de 2011, 1 (um) no ano de 2010, 1 (um) no ano de 2009 e 1 (um) no ano de 2008.

Quanto à quarta questão (item d) desta parte do questionário, 8 (oito) professores apontaram que o contato que tiveram com Geometria durante a graduação foi suficiente para que se sentissem preparados para ensinar este assunto, 4 (quatro) declararam o contrário e 1 (um) afirmou que se sente capacitado para o ensino de Geometria Plana, mas não para o de Geometria Espacial.

Dos professores que apontaram que se sentiram preparados para o ensino de Geometria a partir do contato que tiveram com esta disciplina na graduação, as principais justificativas apresentadas estavam relacionadas aos professores que tiveram, à abordagem feita na disciplina por meio da demonstração dos conteúdos apresentados e aos trabalhos complementares desenvolvidos ao longo do curso em espaços como disciplinas de estágio. Daqueles que não sentiram tal preparo, as principais justificativas estavam relacionadas à dificuldade dos conteúdos da disciplina e à falta de abordagem prática na disciplina.

Sobre o item (e), para 10 (dez) dos professores o contato que tiveram com a Geometria durante a graduação foi sob uma perspectiva axiomática e 3 (três) declararam que foi por outra abordagem.

Com relação ao item (f), 8 (oito) participantes tiveram contato com alguma Geometria não-Euclidiana na sua graduação e 4 (quatro) declararam que nunca tiveram este contato. Apenas um professor tomou conhecimento do assunto por conta própria.

Na quarta parte do questionário, coletamos as informações relacionadas às impressões que os professores tinham naquele momento a respeito da matéria. As questões contidas nesta parte foram:

a) Você considera que os conteúdos da disciplina têm alguma relação com aqueles ensinados na Educação Básica? Por que?
b) Na sua opinião, a abordagem feita na disciplina contribui para mudar a visão da Geometria? Por que?
c) Cite alguns resultados da Geometria Euclidiana que, na sua opinião, é possível compreender melhor após o contato com outras geometrias.
d) Descreva brevemente como está sendo sua experiência com os conteúdos explorados nessa disciplina.

Com relação à questão tratada no item (a), todos os professores veem relação dos conteúdos tratados na disciplina com aqueles ensinados na Educação Básica. Nas justificativas apresentadas, 11 (onze) professores apontaram que a relação se dá no estudo dos fundamentos dos resultados da Geometria apresentados na Educação Básica e, destes, 6 (seis) reforçaram a importância destes estudos para o professor e para o aluno, pois, segundo eles, estes fundamentos reforçam a formalização de conceitos, o que ajuda no desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno.

Os outros 2 (dois) professores enxergaram a relação por uma perspectiva diferente e apontaram que os conceitos da Educação Básica estavam relacionados com aqueles tratados na disciplina, pois, de acordo com eles, para compreender alguns tópicos estudados na disciplina era necessário fazer uso de conteúdos da Educação Básica.

Com relação à segunda questão desta seção do questionário, também houve concordância total por parte dos professores que a disciplina contribui para mudar a visão que eles tinham sobre Geometria. Nas respostas apresentadas, 9 (nove) complementaram que a abordagem feita favoreceu a ampliação da visão que eles tinham sobre Geometria e, destes, 6 (seis) complementaram apontando que esta nova perspectiva favorece a criatividade e o pensamento das possibilidades de aplicações dessas outras geometrias.

Referente à questão do item (c), os assuntos mais citados pelos professores foram o postulado das paralelas, a soma dos ângulos internos de um triângulo e congruências de triângulos, sendo estes mencionados 11 (onze), 5 (cinco) e 3 (três) vezes, respectivamente. Dentre os outros assuntos mencionados pelos professores destacamos o Teorema do Ângulo Externo e a convexidade de polígonos, que serão relevantes para a análise feita no próximo capítulo. Na Tabela 3.1 estão descritos todos os conteúdos citados pelos professores e suas respectivas frequências.

Resultados	**Frequência**
Postulado da paralelas	11
Soma ângulos interno do triângulo	5
Congruências de Triângulos	3
Estrutura axiomática da Geometria	3
Teorema de Pitágoras	2
Teorema do Ângulo Externo	1
Distância	1
Desigualdade triangular	1
Corpos convexos	1
Axioma de incidência	1

Tabela 3.1: *Resultados citados em resposta ao item (c) e suas respectivas frequências.*
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em resposta ao item (d), todos os professores manifestaram uma impressão positiva com relação à disciplina. A grande maioria dos participantes destacou que a disciplina permitiu o aprofundamento de seus conhecimentos e o aprimoramento da escrita formal e do raciocínio em demonstrações. Além disso, um deles afirmou que estava estudando sobre como levar exemplos relacionados a outras geometrias para a sala de aula. Dois deles expressaram que, apesar de gostarem da disciplina, tiveram certa dificuldade com relação à quantidade de conteúdos a serem trabalhados no período letivo.

3.2 As Entrevistas

O objetivo das entrevistas foi investigar de modo mais aprofundado os impactos da disciplina Geometria: um Enfoque Via Modelos para os professores e sua influência nas respectivas práticas profissionais. Elas foram realizadas em outubro de 2020, cerca de 10 meses após o término da disciplina, por meio de vídeo conferências utilizando a plataforma *Google Meet*, com duração de aproximadamente 25 minutos. A transcrição completa das entrevistas está presente no Apêndice C.

Dividimos as perguntas aos entrevistados em três partes. A primeira foi dedicada à atualização das informações profissionais. Na segunda, buscamos saber se, após o término da disciplina cursada no programa de pós-graduação, houve ou não alguma mudança com relação à compreensão de Geometria e de seus conceitos. Na terceira parte exploramos as conexões que o entrevistado estabeleceu entre os conteúdos estudados na disciplina cursada e sua prática profissional e, caso ele não estivesse atuando na Educação Básica, direcionamos as perguntas a situações hipotéticas sobre o ensino.

Selecionamos 4 (quatro) dos professores para aplicarmos as entrevistas e a escolha foi feita baseada em sua formação, no contato com Geometria que tiveram durante a graduação, sua experiência profissional na Educação Básica e as respostas apresentadas por estes participantes na quarta parte do questionário. Tais critérios foram determinados para que pudéssemos abranger diferentes características do grupo investigado.

Com base nos critérios, escolhemos para serem entrevistados os professores B, F, H e J. Todos possuem pelo menos 4 (quatro) anos de experiência no ensino de Matemática. Os dois primeiros, B e F, são formados em Engenharia e possuem o curso de complementação pedagógica. Já os professores H e J são licenciados em Matemática.

Os professores B e F tiveram contato pela primeira vez com geometria de um ponto de vista axiomático e com outras geometrias na disciplina de pós-graduação do MPEM. Já os professores H e J tiveram contato com geometria axiomática durante a graduação, enquanto somente o professor J foi apresentado às geometrias não-Euclidianas.

3.3 As observações e a documentação

As observações e os documentos obtidos, além de fornecerem dados adicionais sobre os professores, têm também importante papel no complemento das informações coletadas por meio dos demais instrumentos e das inferências realizadas a partir de suas análises.

Realizamos as observações durante os encontros presenciais da disciplina, nas tardes de terça e quinta-feira com duração aproximada de 2 (duas) horas em cada encontro, e em plantões de atendimento de dúvidas (monitorias), com duração de 1 (uma) hora semanal.

Sobre as aulas, a maioria foi expositiva e dialogada, com a ministrante da disciplina incentivando a participação dos professores. Em alguns momentos, eram levantadas discussões sobre determinados conteúdos e suas abordagens na Educação Básica. Em duas das aulas foram aplicadas atividades em formato de oficina, uma ministrada por um dos participantes e a outra por mim, como monitor da turma.

O critério de avaliação adotado na disciplina foi feito a partir da entrega de 6 (seis) listas de exercícios e 2 (duas) avaliações escritas, distribuídas de maneira uniforme ao longo do semestre letivo. Destes instrumentos, tivemos acesso a 5 (cinco) listas de exercícios, que serviram de complemento às evidências obtidas a partir de outros instrumentos.

A ementa do curso foi quase completamente cumprida, com exceção do tópico de volumes e áreas, para o qual não houve tempo para seu desenvolvimento. Todos os outros tópicos foram abordados e cobrados em avaliações.

Com relação às monitorias, estas ocorriam todas as terças-feiras das 18h às 19h. Nem todos os professores frequentavam os plantões e os que faziam, normalmente participavam em períodos próximos à entrega de listas ou à realização de avaliações. Por este motivo, utilizamos, principalmente, as observações feitas em aula.

No próximo capítulo apresentamos a análise das evidências coletadas para o estudo do presente Caso.

Capítulo 4

Análise das Evidências

Neste capítulo analisamos as evidências coletadas e apresentadas anteriormente a partir de duas perspectivas, que orientam cada uma das seções que seguem. Na primeira delas, buscamos compreender se a disciplina Geometria: um Enfoque Via Modelos gerou algum impacto na compreensão dos professores sobre a Geometria Euclidiana e, em caso afirmativo, quais foram estes impactos.

Já na segunda seção, investigamos se os conteúdos estudados nesta disciplina influíram na prática dos professores, a partir do que eles revelaram principalmente na entrevista realizada. Neste sentido, olhamos para o que os professores de fato aplicaram e o que eles pensam em apresentar para suas turmas da Educação Básica.

4.1 Sobre os impactos da disciplina na compreensão de Geometria Euclidiana

Com base no questionário aplicado, nas entrevistas realizadas, nas observações feitas em aula e nos demais documentos que tivemos acesso, levantamos alguns indicadores que nos permitem compreender se houve, e quais foram, os impactos da disciplina na compreensão da Geometria Euclidiana para os professores.

Na quarta parte do questionário, questão (b), investigamos se a disciplina contribuiu para a mudança da visão dos professores com relação à Geometria e retomamos esta pergunta na entrevista, para estudarmos se as respostas dos entrevistados se mantiveram as mesmas, passados 10 (dez) meses após o encerramento da disciplina.

Todos os professores afirmaram que houve tal mudança, tanto para aqueles que não tiveram contato com outras geometrias antes da disciplina (professores A, B, F, H e M), quanto aos que tiveram (C, D, E, G, I, J, K e L). Algumas justificativas apresentadas pelos professores estão descritas a seguir.

E: "[...] pois sempre temos contato unicamente com a Geometria Euclidiana, desde a Educação Básica, e essa disciplina nos faz pensar em Geometria de forma diferente e isso tem uma grande contribuição na nossa formação de licenciado."

F: "Pessoalmente, foi um desafio (e continua sendo) o desvencilhamento de pensar no "Mundo Euclidiano" apenas. Adorei essa nova maneira de ver a Geometria, pois instiga (e muito) a criatividade na busca das soluções."

J: "Porque, através de outros modelos, acabamos desconstruindo coisas "decoradas" e realmente construindo pensamentos geométricos."

K: "[...] justamente pela formalização lógica da Geometria, em que, em diversas vezes, os resultados a serem demonstrados não são intuitivos (ou não estamos acostumados a enxergá-los desta forma) e, por isso, é relevante que se deduzam os resultados com base nos postulados e definições apresentadas, tal qual é feito em outras áreas da matemática."

M: "[...] pois expandiu a maneira de observar a Geometria e quebrando os paradigmas sobre os axiomas de Euclides sobre o 5º postulado das paralelas."

Destacamos que houve uma frequente menção, nas justificativas apresentadas, ao contato com outros modelos de Geometria e à formalização de conteúdos, citados 8 (oito) e 5 (cinco) vezes, respectivamente. Estes dois tópicos, enfatizados nas respostas dos professores, possivelmente indicam os fatores que contribuíram para a mudança de visão da Geometria proporcionada pela disciplina.

Com base na observação da participação dos professores em aula, notamos uma significativa melhora na compreensão da estrutura lógica da Geometria e da própria Matemática. Esta melhora foi ressaltada em algumas respostas no questionário:

B: "A experiência está sendo muito produtiva, em termos de axiomas e aquisição de novos conceitos. A visão da Geometria do ponto de vista axiomático ajuda muito a desenvolver o raciocínio."

E: "A disciplina me proporcionou ser mais crítico e prestativo no âmbito de demonstração e uso da lógica."

I: "[...] é muito importante considerar que apesar de existir um modelo que "funcione" como é a Geometria Euclidiana, a matemática nos propicia estudar e ampliar nossa visão de forma a buscar outros tipos de modelos que podem ser bem definidos e que são muito ricos do ponto de vista estrutural e de forma. Assim, como os Números Complexos na Álgebra, podemos estudar a matemática pela matemática e não apenas pela necessidade de se procurar responder problemas do mundo real, mas sim da contextualização na própria Geometria."

J: “[...] acho que melhorou muito a minha maneira de escrever exercícios mais teóricos, demonstrando e provando o que era pedido. Senti isso através das listas de exercícios.”

Em outras questões levantadas na quarta parte do questionário também houve menções aos dois tópicos citados. Na questão (d), por exemplo, que trata de uma breve descrição de como estava sendo a experiência dos professores com os conteúdos explorados na disciplina, ressaltamos as seguintes respostas:

E: “A disciplina me proporcionou ser mais crítico e prestativo no âmbito de demonstração e uso da lógica. Além disso, tem me ajudado na compreensão melhor de conteúdos e me fez perceber que ainda tinha dificuldades em Geometria, mesmo após formado. De maneira geral, a experiência foi muito produtiva.”

H: “Contato com o método axiomático e diferentes geometrias pude verificar algumas mudanças quando não estamos na Geometria Plana.”

Já nas entrevistas, três dos quatro professores entrevistados expressaram opiniões semelhantes com relação às mudanças proporcionadas pela disciplina em sua visão sobre Geometria. Para eles, esta mudança foi positiva e houve concordância com as respostas que expressaram no questionário. Ressaltamos suas falas a seguir:

B: “É porque, assim, deu uma ampliada de horizontes, né? A gente aprendeu coisas que nem imaginava que poderia existir, né? [...] Na Geometria Plana, a Euclidiana lá no Fundamental a gente tem a ideia das coisas muito concretas, né? E, nessa matéria, a gente viu que a Geometria, ela pode ser muito abstrata, né? Não tão concreta quanto a gente imaginava quando aprendia isso lá no Fundamental, entendeu?”

F: “Ah, totalmente! Olha, me abriu um horizonte, eu já dizia isso para a própria professora, que eu jamais concebia. [...] Abria novos horizontes. E isso (eu) explicava também para os meus alunos. Falava: “gente, vocês têm noção que o menor espaço entre dois pontos pode não ser necessariamente um segmento de reta?”. [...] Mas com certeza me ajudou bastante na minha explicação, na minha visão de Geometria Euclidiana e agora também na não-Euclidiana [...].”

H: “Sim, bastante. Assim, eu acho que envolveu tudo, porque como era uma disciplina axiomática, né? E tinham muitas demonstrações. Pra mim, que me formei em 2010, eu tive que lembrar muita coisa, então essa parte eu tive que lembrar, e mudou no seguinte sentido assim... na minha cabeça só tinha a Geometria Euclidiana e não a Hiperbólica e a Esférica, como a gente viu. E é uma outra visão assim, da Geometria, que eu não tive na universidade.”

Já o professor J afirmou que, na disciplina, teve o seu terceiro contato com outras geometrias e que, portanto, não houve mudança de visão sobre esta área da Matemática. Ele ainda acrescentou durante a entrevista que não se lembrava de ter expressado uma perspectiva diferente com relação à questão colocada. Sua fala representa uma mudança na ideia que apresentou no questionário meses antes, o que nos leva a acreditar que talvez o impacto da disciplina não tenha sido tão significativo para este professor.

Podemos concluir, então, que a disciplina contribuiu para a mudança de visão da grande maioria dos professores com relação à Geometria. Enfatizamos que, conforme as evidências expostas, esta mudança se mostrou significativa para aqueles que tiveram seu primeiro contato com outras geometrias durante a disciplina.

Para investigarmos os impactos da disciplina na compreensão dos professores especificamente sobre a Geometria Euclidiana indagamos, na primeira questão da quarta parte do questionário, se eles enxergaram alguma relação entre os conteúdos estudados na disciplina e aqueles ensinados na Educação Básica. Todos afirmaram que perceberam tal relação e ressaltamos aqui três respostas apresentadas:

A: "Acredito que, dentro da Geometria, mais do que saber o resultado e como aplicá-lo, conhecer a construção e alguma forma de prova pode ser mais interessante para que o aluno se aproprie do conceito e tenha autonomia na resolução de problemas. Além disso, apesar de não lidarmos com a Geometria não-Euclidiana em salas de aula do Ensino Básico, o professor conhecer e se apropriar de outras geometrias é um diferencial para aprimorar sua explicação [...]."

E: "A disciplina proporciona discussões e momentos de reflexão para entendermos certas dificuldades que alunos tem em sala de aula, e que possivelmente, sem essa disciplina, não conseguiríamos explicar."

K: "pois essa construção lógica da Geometria é fundamental para o processo de aprendizagem da Geometria na Educação Básica. Por vezes, reforça-se ou privilegia-se as habilidades geométricas de visão, criação, concretização (que são relevantes!) Mas não se formaliza alguns conceitos, levando os alunos a pautar definições com base em intuições, o que nem sempre é pertinente."

Nestas justificativas é evidente a reflexão dos professores com relação à importância da disciplina em suas respectivas formações e como ela impacta, direta ou indiretamente, em suas práticas profissionais. No caso da resposta apresentada pelo professor A, por exemplo, houve menção dos impactos diretos, quando comentado sobre os conhecimentos da construção e da prova que podem ser ensinados aos alunos da Educação Básica, e dos indiretos, quando o conhecimento de outras geometrias por parte do professor reflete em sua explicação.

Investigamos estas conexões estabelecidas pelos professores por meio dos conteúdos apontados por eles como aqueles que foram possíveis compreender melhor após o contato com outras geometrias. Das respostas ao terceiro item da quarta parte do questionário, destacamos os seguintes conteúdos: o postulado das paralelas, a soma dos ângulos internos de um triângulo, os casos de congruência de triângulos, o Teorema de Pitágoras, a convexidade de quadriláteros e o Teorema do Ângulo Externo.

O quinto postulado de Euclides foi o conteúdo que teve o maior número de menções na referida questão, sendo citado 8 (oito) vezes. Na disciplina foram abordados modelos de diferentes geometrias, nas quais os professores puderam verificar que existem resultados que são válidos na Geometria Euclidiana, mas não em outras.

Também ressaltamos a colocação de um dos professores no questionário:

A: "[...] acredito que o aprendizado muitas vezes acontece a partir da contradição, ou seja, do exemplo onde não "funciona". Sendo assim, ao explicarmos a Geometria Euclidiana, é possível fazermos uma breve apresentação de modelos onde tal resultado não funciona."

O número de menções deste assunto, juntamente com a fala mencionada, apontam para uma melhor compreensão do papel do quinto postulado de Euclides na formalização da Geometria Euclidiana. Ressaltamos também que isto reflete o que é previsto no objetivo da disciplina, no que diz respeito ao desenvolvimento de uma visão crítica dos fundamentos da Geometria Euclidiana.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo foi mencionada 5 (cinco) vezes na mesma questão e, também, durante a entrevista com o professor H. Dentre todas as situações nas quais este resultado foi mencionado na disciplina, destacamos três.

Na primeira delas, os professores foram levados ao laboratório de informática e participaram de uma atividade apresentada por um deles, na qual foi verificada de maneira empírica, por meio do modelo do Semiplano de Poincaré no Geogebra, que na Geometria Hiperbólica a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre menor que $180°$, mas não constante.

A segunda aconteceu nas últimas aulas da disciplina, no estudo do Teorema de Saccheri (Proposição 3) na Geometria Neutra. Nesta ocasião houve a demonstração deste fato e menções, por parte da professora ministrante, à atividade aplicada no laboratório de informática aulas antes.

Na terceira situação, foi feita a verificação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo dado na Geometria Hiperbólica, por meio de uma questão presente na quinta lista de exercícios entregue pelos professores. Os professores calcularam esta soma e concluíram que, na Geometria Hiperbólica, esta soma é menor que 180º.

Na entrevista, quando perguntado se houve algum resultado estudado na disciplina que o surpreendeu, o professor H citou a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Ele ainda citou possíveis abordagens deste conteúdo em sala de aula utilizando exemplos de geometrias não-Euclidianas, como a Geometria Esférica (ver Apêndice A), embora não tenha aplicado. Detalharemos este relato na próxima seção.

O fato deste professor, que teve seu primeiro contato com outras geometrias durante a disciplina, ter enxergado esta possibilidade de abordagem em sala de aula é um indicativo de que houve contribuição da disciplina para seu conhecimento sobre um dos resultados mais conhecidos da Geometria Euclidiana. As evidências apontam que esta contribuição se deu a partir da verificação da soma dos ângulos internos de um triângulo em diferentes geometrias.

Os critérios de congruência de triângulos foram estudados na Geometria Neutra, quando foi enunciado o postulado Lado-Ângulo-Lado (LAL) de congruência. Este conteúdo foi citado 3 (três) vezes no item (c) da quarta seção do questionário e ressaltados pelo professor B durante a entrevista. Quando perguntado dos conteúdos estudados na disciplina e que possuem relação com aqueles ensinados na Educação Básica, o professor mencionou os casos de congruência de triângulo, complementando que estes estudos o ajudaram a:

B: "[...] entender melhor os porquês dos casos de congruência, né? Ter uma visão mais aprofundada da coisa, eu acho que isso ajuda... Mesmo que, sei lá, a gente não aborde a coisa mais aprofundada pros alunos lá na aula pros alunos do Ensino Fundamental, mas ajuda assim, no que tange... Na forma de explicar, né? Às vezes a gente pode falar aquela coisa mais aprofundada de uma forma mais simples, de modo que fique mais claro pro aluno também, de modo que ele possa entender melhor o conceito... Que não fique só uma coisa decorada [...]"

A partir da colocação deste professor, entendemos que este impacto em sua compreensão no conceito de congruência de triângulos pode estar relacionado com a maneira que foi feita a apresentação deste conteúdo durante a disciplina. Inicialmente foi postulado o critério de congruência LAL e, a partir dele, deduzidos os demais casos, enquanto, no Ensino Básico, é comum se apresentar todos os critérios como postulados. A Figura 4.1 exemplifica como este assunto é tratado em livros didáticos para alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental II.

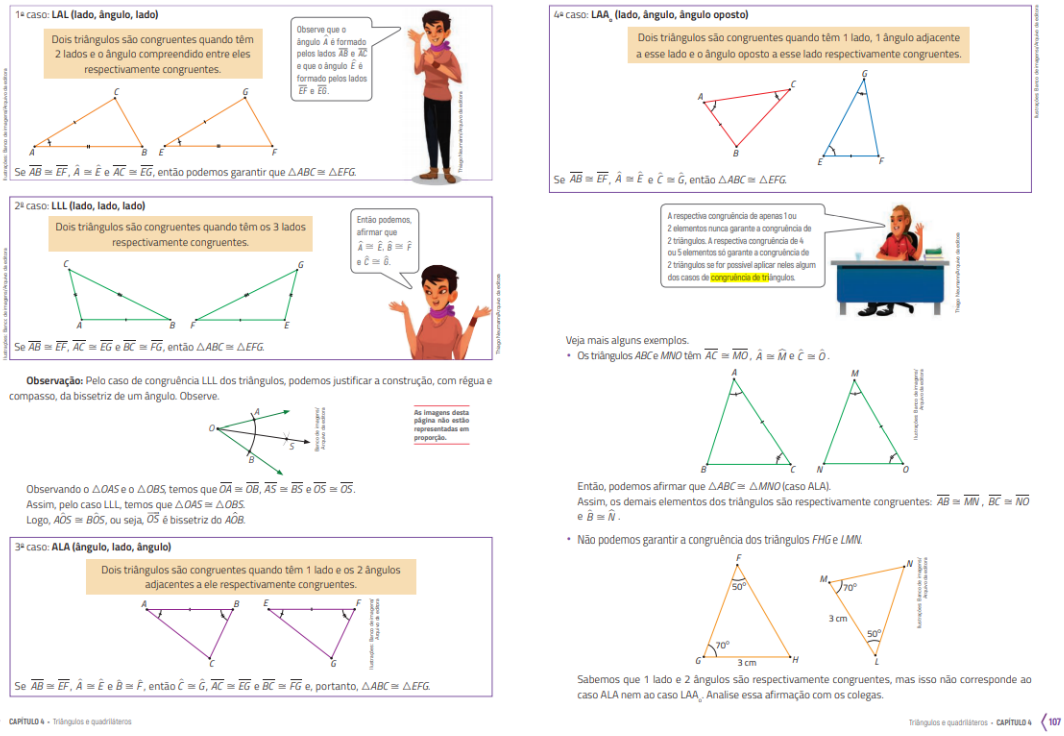
O tratamento dado a este conteúdo na disciplina pode possibilitar ao professor desenvolver uma visão mais crítica sobre os casos de congruência de triângulos, estabelecendo uma relação entre os critérios.

Os três primeiros assuntos foram aqueles que apareceram com maior frequência nas respostas dos professores à referida questão. Já os demais, embora tenham sido citados um número de vezes menor, proporcionaram discussões e reflexões relacionadas à prática profissional na Educação Básica.

O Teorema de Pitágoras foi mencionado 2 (duas) vezes no questionário e recebeu destaque em dois momentos na disciplina. O primeiro deles aconteceu durante uma das aulas, na qual a professora ministrante verificou junto com a turma que, na Geometria do Taxista, um triângulo retângulo não satisfaz a relação expressa no Teorema (ver Apêndice A).

O segundo momento aconteceu na resolução da seguinte questão da quinta lista de exercícios: "No Plano de Poincaré, considere os pontos $A = (0,1)$, $B = (0,5)$ e $C = (3,4)$.

Figura 4.1: *Exemplo de abordagem dos casos de congruência de triângulos.*



1º caso: **LAL (lado, ângulo, lado)**

Dois triângulos são congruentes quando têm 2 lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes.

Observe que o ângulo $\hat{A}$ é formado pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e que o ângulo $\hat{E}$ é formado pelos lados $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$.

Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\overline{AC} \cong \overline{EG}$, então podemos garantir que $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

2º caso: **LLL (lado, lado, lado)**

Dois triângulos são congruentes quando têm os 3 lados respectivamente congruentes.

Então podemos, afirmar que $\hat{A} \cong \hat{E}$, $\hat{B} \cong \hat{F}$ e $\hat{C} \cong \hat{G}$.

Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{EG}$ e $\overline{BC} \cong \overline{FG}$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

Observação: Pelo caso de congruência LLL dos triângulos, podemos justificar a construção, com régua e compasso, da bissetriz de um ângulo. Observe.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Observando o $\triangle OAS$ e o $\triangle OBS$, temos que $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, $\overline{AS} \cong \overline{BS}$ e $\overline{OS} \cong \overline{OS}$.
Assim, pelo caso LLL, temos que $\triangle OAS \cong \triangle OBS$.
Logo, $A\hat{O}S \cong B\hat{O}S$, ou seja, $\overrightarrow{OS}$ é bissetriz do $A\hat{O}B$.

3º caso: **ALA (ângulo, lado, ângulo)**

Dois triângulos são congruentes quando têm 1 lado e os 2 ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes.

Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\hat{B} \cong \hat{F}$, então $\hat{C} \cong \hat{G}$, $\overline{AC} \cong \overline{EG}$ e $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ e, portanto, $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

106 CAPÍTULO 4 • Triângulos e quadriláteros

4º caso: **LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto)**

Dois triângulos são congruentes quando têm 1 lado, 1 ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.

Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{G}$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

A respectiva congruência de apenas 1 ou 2 elementos nunca garante a congruência de 2 triângulos. A respectiva congruência de 4 ou 5 elementos só garante a congruência de 2 triângulos se for possível aplicar neles algum dos casos de congruência de triângulos.

Veja mais alguns exemplos.

- Os triângulos *ABC* e *MNO* têm $\overline{AC} \cong \overline{MO}$, $\hat{A} \cong \hat{M}$ e $\hat{C} \cong \hat{O}$.

Então, podemos afirmar que $\triangle ABC \cong \triangle MNO$ (caso ALA).
Assim, os demais elementos dos triângulos são respectivamente congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ e $\hat{B} \cong \hat{N}$.

- Não podemos garantir a congruência dos triângulos *FHG* e *LMN*.

Sabemos que 1 lado e 2 ângulos são respectivamente congruentes, mas isso não corresponde ao caso ALA nem ao caso LAA_o. Analise essa afirmação com os colegas.

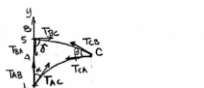
Triângulos e quadriláteros • CAPÍTULO 4 107

Fonte: Dante, 2018c, p. 106.

Determine a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC. O que podemos concluir? Mostre também que $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$. O que podemos concluir?". Uma das soluções apresentadas está exposta na Figura 4.2:

Figura 4.2: *Resolução apresentada pelo professor J.*

1)



- $\overleftrightarrow{AC}$: $L_{c,r}$, tal que $(0-c)^2+1^2=(3-c)^2+4^2 \Rightarrow c=4$ e $r=\sqrt{(0-4)^2+1^2}=\sqrt{17}$. Logo, $\overleftrightarrow{AC}$: $(x-4)^2+y^2=17$.
- $\overleftrightarrow{BC}$: $L_{0,5}$: $(x)^2+(y)^2=25$ (feito em aula)
- $\overleftrightarrow{AB}$: ${}_0L$: $x=0$.
- $T_{AB}=(0,5-1)=(0,4)$; $T_{BA}=(0,1-5)=(0,-4)$
- $T_{BC}=(5,0-0)=(5,0)$; $T_{CB}=-(4,0-3)=(-4,+3)$
- $T_{AC}=(1,4-0)=(1,4)$; $T_{CA}=-(4,4-3)=(-4,-1)$
- $\cos\alpha = \dfrac{\langle T_{AC},T_{AB}\rangle}{\|T_{AC}\|\cdot\|T_{AB}\|} = \dfrac{0+16}{\sqrt{17}\sqrt{16}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \therefore \alpha \approx 14$
- $\cos\beta = \dfrac{\langle T_{CB},T_{CA}\rangle}{\|T_{CB}\|\cdot\|T_{CA}\|} = \dfrac{+16-3}{5\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{13}{5\sqrt{17}} \therefore \beta \approx 51$
- $\cos\gamma = \dfrac{\langle T_{BA},T_{BC}\rangle}{\|T_{BA}\|\cdot\|T_{BC}\|} = \dfrac{0+0}{4\cdot 5} = 0 \therefore \gamma = 90$

Logo: $\alpha+\beta+\gamma = 90+14+51 = 155$
$(\alpha+\beta+\gamma \neq 180$ em $\mathcal{H})$

Ainda:
- $AC = \left|\ln\left(\dfrac{0-4+\sqrt{17}}{1}\right) - \ln\left(\dfrac{3-4+\sqrt{17}}{4}\right)\right| \approx 1,85$
- $AB = \left|\ln(5)-\ln(1)\right| \approx 1,61$
- $BC = \left|\ln\left(\dfrac{0-0+5}{5}\right) - \ln\left(\dfrac{3-0+5}{4}\right)\right| \approx 0,69$

Assim: $AC^2 \approx 3,4225$, $BC^2 \approx 0,4761$, $AB^2 \approx 2,5921$ e, portanto, $AB^2+BC^2 = 2,5921+0,4761 = 3,0682 \neq AC^2$.
(Não vale o teorema de Pitágoras em triângulos retângulos de $\mathcal{H}$).

Fonte: Acervo pessoal.

Neste exercício, primeiramente o professor verificou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Hiperbólica é menor que 180º e, depois, constatou que, embora o triângulo seja retângulo, não é satisfeito o Teorema de Pitágoras.

Estes momentos foram importantes para que os professores verificassem que o Teorema de Pitágoras não é válido em outras geometrias, sendo uma equivalência do quinto postulado de Euclides (item (g) da lista de equivalências, Capítulo 1, pág. 7).

O estudo da convexidade de quadriláteros se deu após a apresentação do Postulado de Pasch (4º axioma de ordem, Capítulo 1, pág. 12) e do conceito de interiores de segmentos, de ângulos e de triângulos. A definição adotada para trabalhar a convexidade dos quadriláteros foi: "[...] um quadrilátero $ABCD$ é um quadrilátero convexo se cada lado está inteiramente contido em um mesmo semiplano determinado por seu lado oposto" (MILLMAN; PARKER, 1993, p. 87, tradução nossa).

A definição de convexidade apresentada na disciplina gerou uma interessante discussão entre os professores sobre as diferentes formulações deste conceito. Possivelmente, isso se deve a forma como o assunto é tratado em livros didáticos ou ao conhecimento prévio dos professores, adquirido, talvez, durante a formação inicial ou na prática docente.

Encontramos em livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, por exemplo, duas definições diferentes relacionadas à convexidade. Em um deles, primeiramente é definida uma região convexa, como aquela na qual dois pontos quaisquer desta região "[...] determinam um segmento contido nesta região" (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a, p. 203). Depois de definir polígono como sendo "[...] a reunião de uma linha fechada simples, formada apenas por segmentos de reta, com sua região interna" (Ibid., p. 212), os autores apresentam que "quando a região interna de um polígono é uma região convexa, temos um *polígono convexo*" (Ibid., p. 212, grifo do autor). Outras obras também trazem definições análogas, como é o caso de Souza (2018a) e Sampaio (2018).

Já em outro livro didático, destinado ao mesmo público, encontramos uma definição de convexidade de polígonos diferente: "Se traçarmos uma reta sobre cada lado de um polígono e o restante do polígono ficar do mesmo lado dessa reta, então dizemos que o polígono é *convexo*" (DANTE, 2018a, p. 147, grifo do autor).

A discussão não se estendeu por muito tempo por conta do andamento da aula e notamos que, depois dela, os professores transpareceram compreender melhor a definição apresentada. Este momento da aula foi importante para que os professores tivessem a oportunidade de ter contato com outras definições de um conceito tão fundamental ensinado na Educação Básica.

O Teorema do Ângulo Externo (Proposição 2) foi enunciado e demonstrado após a apresentação dos primeiros resultados da Geometria Neutra, relacionados à congruência de triângulos. Este teorema teve destaque na disciplina e foi um dos principais assuntos estudados, sendo apontado por um dos professores no questionário como um dos resultados que foi possível compreender melhor após o contato com outras geometrias.

Nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental podemos encontrar o Teorema do Ângulo Externo da Geometria Euclidiana, que também trata da relação entre as medidas dos ângulos internos e dos ângulos externos de um triângulo, porém, diferente daquela que é feita na Geometria Neutra.

Para apresentar tal resultado, no livro didático do 7º ano de Dante (2018b), ou do 8º ano nos casos de Giovanni Júnior e Castrucci (2018b) e Souza (2018b), primeiramente é feita a demonstração de que, na Geometria Euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual à 180°. A relação que envolve as medidas dos ângulos internos e dos ângulos externos de um triângulo, como é chamada por Dante (2018b), é apresentada depois, sob o seguinte enunciado: "em todo triângulo, a medida de abertura de um ângulo externo é igual à soma das medidas de abertura dos 2 ângulos internos não adjacentes a ele" (Ibid., p. 167).

A distinção entre os resultados apresentados na Geometria Neutra e na Euclidiana, como é o caso do Teorema do Ângulo Externo, pode permitir ao professor desenvolver um olhar mais crítico com relação aos resultados que são apresentados na Educação Básica.

A partir das evidências aqui expostas, concluímos que, de fato, houve uma mudança significativa na compreensão da Geometria Euclidiana por parte dos professores, proporcionada pelos estudos desenvolvidos ao longo da disciplina. Esta mudança ocorreu tanto para os que já tiveram contato com geometrias não-Euclidianas antes da disciplina, quanto para os que não tiveram, impactando na melhor compreensão de sua estrutura axiomática e de seus resultados.

4.2 Sobre os impactos da disciplina na prática dos professores

Investigamos nesta seção a influência da disciplina na atuação dos docentes e de que forma os conhecimentos adquiridos poderiam impactar em suas práticas profissionais. Nas entrevistas realizadas perguntamos a quatro professores (B, F, H e J) a respeito das suas intenções relacionadas à adaptação e discussão de geometrias não-Euclidianas na Educação Básica.

Dois dos professores entrevistados revelaram que, enquanto cursavam a disciplina, comentavam com seus alunos alguns dos conteúdos estudados. Suas falas estão destacadas a seguir:

F: "[...] isso (eu) explicava também para os meus alunos. Falava: "gente, vocês têm noção que o menor espaço entre dois pontos pode não ser necessariamente um segmento de reta?" e eles ficavam: "não, isso não é possível!", "pois é, eu estou vendo isso na USP". E isso aí, eu fiz alguns paralelos nas aulas... ajudou bastante, né?
[...] Cheguei a comentar mas mais com o primeiro, segundo e terceiro ano do Ensino Médio, sabe? E no terceiro ano do Ensino Médio, nas aulas de Geometria Analítica que eu comentava com eles.
[...] Aí você ficava no final da classe, eu estava afiado [...], e mostrava o plano de Moulton, a Geometria do Taxista e eles ficavam: "pô, que legal!", então isso pra mim foi gratificante. Algumas pessoas, depois eu não tive mais contato, porque normalmente era o terceiro ano

que perguntava mais, geralmente eles estavam mais maduros, e eles ficavam: "como que é isso? Me mostra um exemplo disso aí...", então teve exemplos, um ou dois, mas eram poucos, não foi todo mundo assim que... Como eu falei, que tinha essa curiosidade. Infelizmente, né? Podia ser mais pessoas"

H: "[...] eu tenho alunos que se interessam bastante e ficam curiosos em saber que não existe uma única Geometria, que o mundo que a gente vive não é plano, né? Se a gente pensar no planeta. No ano passado eu até mostrei pra uns alunos, do sétimo ano também, quando a gente estava vendo a disciplina mesmo, como era novo pra mim, eu acabei contando pra eles que não era Plana, que era outro tipo de Geometria, como curiosidade e alguns alunos se interessaram, assim, falaram: "nossa, professora, que legal vou procurar saber e tal"."

O professor B revelou que, embora não tivesse feito nenhum comentário com seus alunos sobre outras geometrias, abordaria o assunto no último ano do ciclo Básico de Educação. Sua justificativa para isso foi a seguinte:

B: "Ah, o modelo de Poincaré eu acho que seria interessante abordar quando fosse ver Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio. Eu acharia interessante porque envolve meio que umas aplicações dos conceitos de Geometria Analítica dentro do modelo do Poincaré, né?"

Já o professor J não estava atuando com turmas regulares à época da realização da entrevista. Questionamos se, em uma situação hipotética na qual ele estivesse com alguma turma da Educação Básica, ele abordaria algum dos conteúdos que estudou na disciplina de pós-graduação e a resposta obtida foi positiva.

J: "Por exemplo, qualquer coisa da... soma dos ângulos internos dar 180 ou Teorema de Pitágoras... qualquer coisa desse gênero, se, hipoteticamente, eu estivesse na sala de aula, eu podia levar como curiosidade."

As falas destes professores apontam para uma possível percepção sobre a relevância destas abordagens na Educação Básica. Questionamos os entrevistados explicitamente sobre o assunto e houve concordância em todas as respostas obtidas. Dentre as justificativas apresentadas, ressaltamos as seguintes:

B: "Eu acho importante sim, porque ajuda a abrir a mente, né? A você se aprofundar nas coisas."

F: "Eu acho e pode abrir novos horizontes para eles assim como abriu pra mim né? [...] Foi uma coisa assim, totalmente fora da minha concepção de Geometria. [...] foi muito importante e mudou minha visão de Geometria, com certeza.”

A partir das colocações feitas pelos entrevistados, podemos notar que a apresentação de geometrias não-Euclidianas para alunos do ciclo Básico de Educação pode ser feita tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, dependendo de quais conceitos serão abordados. Foram identificadas nas falas duas maneiras de expor estes conteúdos, a primeira como curiosidade e a segunda como aplicação de algum conceito visto em sala de aula.

A apresentação de outras geometrias na Educação Básica, ainda segundo os entrevistados, pode servir de motivação para os alunos e pode ajudar a ampliar a visão do aluno com relação a Geometria, mostrando que a Euclidiana não é a única existente, e à própria Matemática.

Além da Geometria Analítica, da soma dos ângulos internos de um triângulo e do Teorema de Pitágoras, a apresentação de geometrias não-Euclidianas pode permitir ao professor trabalhar outros conteúdos, relacionados, inclusive, com outras disciplinas. A Geometria Esférica, por exemplo, possibilita a exploração de conceitos da Geografia, a partir do estudo do globo terrestre, como citada no questionário pelo professor A e na entrevista por H.

A: “[...] pesquisei alguns textos sobre modelos como Geometria Esférica e Hiperbólica e estou estudando fazer adaptações e buscar exemplos (o globo terrestre, por exemplo) para trazer em sala mostrando ambientes (geometrias) onde não sejam válidos alguns resultados que na Geometria Euclideana valem.”

H: “Poder associar com alguma aplicação assim no cotidiano deles, as coordenadas, a própria geodésia, que é parte da cartografia também e demonstrar pra eles. Apesar da faixa etária que eu dou, né? Eu dou pro Fundamental II e eles não têm muita maturidade, mas acho que eles nunca imaginam que possa ter uma Geometria diferente do que a gente aprendeu toda a vida, né?”

Notamos que a Geometria Esférica chamou a atenção de H possivelmente pela possibilidade do uso de materiais concretos em sua abordagem. Uma apresentação feita desta maneira, segundo ele, torna o conceito menos abstrato e permite aos alunos visualizarem aquilo que estão construindo.

H: “Então se eu tivesse a oportunidade de construir com eles alguma coisa que não fosse abstrata, mas que eles pudessem enxergar, igual o exemplo que eu falei: usar uma bola de isopor e traçar um triângulo sobre ela e medir ângulo... Sei lá, alguma coisa que eles consigam medir, né? E ver a construção. Eu acho que é muito interessante essa parte.”

Com a realização das entrevistas, percebemos que, sobre a apresentação de geometrias não-Euclidianas na Educação Básica, houve certa preocupação dos entrevistados com o tempo disponível para abordar este assunto, como citado por 3 (três) dos professores. Contudo, posta uma situação ideal na qual o tempo não fosse problema para eles, os três entrevistados afirmaram que levariam discussões sobre o tema aos seus alunos, o que ressalta a importância que o assunto tem para eles.

As evidências aqui expostas apontam para a influência do conhecimento adquiro nas suas práticas, revelando a intenção de adaptar e discutir de alguma forma alguns resultados de geometrias não-Euclidianas. Para além de contribuir em sua formação, os professores entrevistados ainda revelaram acreditar na possibilidade de que estes conteúdos possam auxiliar seus alunos também numa melhor compreensão da Geometria Euclidiana.

Considerações Finais

Recordamos ao leitor que levantamos duas questões a serem investigadas: se o estudo de geometrias não-Euclidianas influi na compreensão dos professores sobre a Geometria Euclidiana e se estes estudos impactam na prática dos professores.

Sobre a primeira questão, a partir da análise das evidências coletadas, é possível concluir que o estudo de geometrias não-Euclidianas, por meio da disciplina Geometria: um Enfoque Via Modelos (MPM5605), influiu positivamente na compreensão dos professores do grupo que acompanhamos sobre a Geometria Euclidiana.

Esta influência se deu por meio de dois fatores. O primeiro deles é o estudo da Geometria do ponto de vista axiomático, a partir do qual os professores puderam ter um contato maior com os fundamentos da Geometria e com demonstrações de seus resultados. Observamos que esta abordagem se mostrou impactante tanto para os 10 (dez) professores que já tiveram contato com esta abordagem, quanto para os outros 3 (três) que não tiveram. Paralelamente, observamos ainda que esta abordagem contribuiu positivamente na compreensão dos professores sobre a própria Matemática.

O segundo fator se deu pela apresentação de resultados que divergem daqueles que são estudados na Geometria Euclidiana e ensinados na Educação Básica, que se mostrou significante aos 9 (nove) professores que tiveram contato com outros modelos de Geometria antes da disciplina e aos 4 (quatro) que não tiveram.

Já com relação à segunda questão, concluímos, a partir da análise das evidências, que o estudo de geometrias não-Euclidianas influi na prática dos professores. Observamos ainda que a intenção revelada pelos professores de apresentar estes conhecimentos na Educação Básica indica a pressuposição de que estes conteúdos também possam influir positivamente na compreensão de seus alunos sobre a Geometria Euclidiana.

A perspectiva teórica adotada permitiu que compreendêssemos de maneira mais ampla as contribuições dos estudos de outras geometrias para a formação dos professores, por meio das relações entre os conhecimentos propostos por Ball et al. (2008). Ressaltamos a fala do professor A:

A: "Acredito que, dentro da Geometria, mais do que saber o resultado e como aplicá-lo, conhecer a construção e alguma forma de prova pode ser mais interessante para que o aluno se aproprie do conceito e tenha autonomia na resolução de problemas. Além disso, apesar de não lidarmos com a Geometria não-Euclidiana em salas de aula do Ensino Básico, o professor conhecer e se apropriar de outras geometrias é um diferencial para aprimorar sua explicação [...].”

Observamos que reflexões como esta indicam que alguns dos professores compreendem a importância do conhecimento especializado do conteúdo em suas práticas, mesmo se tratando de conceitos que não serão ensinados aos alunos da Educação Básica. Recordamos que, como apontam Ball et al. (2008), a mobilização deste conhecimento acontece nas mais diversas atividades do cotidiano do professor, incluindo situações que envolvem o fornecimento de explicações, como citado pelo professor A.

O Estudo de Caso como metodologia de pesquisa se mostrou suficiente para a obtenção das respostas às questões investigadas. Isso se deve ao fato de que o grupo de professores possui características muito interessantes quando se trata das questões propostas. Parte dos professores nunca teve contato com a Geometria por um ponto de vista axiomático e também há uma parte que nunca teve contato com outras geometrias além da Euclidiana. Além disso, o fato do grupo investigado não é muito numeroso, o que inviabilizou certos tipos de estudos, como aqueles baseados em metodologias quantitativas.

Os instrumentos de recolhas de dados utilizados para a coleta das evidências também foram de grande valia neste processo de busca por respostas. A aplicação do questionário enquanto os professores cursavam a disciplina e a realização das entrevistas meses após sua finalização, possibilitou que tivéssemos contato com a perspectiva dos professores em dois momentos diferentes de suas vidas profissionais.

Entendemos, assim, que as questões que nortearam esta pesquisa foram devidamente respondidas. A realização desta pesquisa nos proporcionou algumas reflexões que vão além destas questões e que possam ser úteis no desenvolvimento de futuras pesquisas dentro deste tema.

O cenário pandêmico causado pelo coronavírus SARS-CoV-2 e iniciado no ano de 2020 limitou algumas das ações que tomamos no desenvolvimento da pesquisa. Um exemplo disto foi a necessidade de postergar a realização das entrevistas, inicialmente previstas para serem realizadas no mês de abril de 2020. Outra consequência deste cenário foi o aumento das tarefas escolares dos professores que acompanhamos, o que ocasionou a indisponibilidade de alguns para o fornecimento das entrevistas. Isto nos levou a repensar o número de professores entrevistados.

Acreditamos que, para este tipo de investigação, possa ser interessante a realização de um estudo longitudinal, com a finalidade de compreender, a longo prazo, os reflexos do estudo dos conceitos de geometrias não-Euclidianas. Outra sugestão que possa ser útil é realizar a recolha de evidências no início e no término da disciplina, para coletar informações sobre as diferentes perspectivas que os professores possam apresentar com relação à Geometria.

Por fim, para além da formação de professores, pensamos que também possam ser investigadas questões relacionadas à apresentação de geometrias não-Euclidianas e suas contribuições para estudantes da Educação Básica.

Referências Bibliográficas

ANDRADE, P. **Introdução à Geometria Hiperbólica:** O modelo de Poincaré. SBM, 2013.

ÁVILA, G. Legendre e o postulado das paralelas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 22, p. 16-28. 1992.

__________. Euclides, geometria e fundamentos. **Revista do professor de matemática**, v. 45, 2001.

BALL, D. L; THAMES, M. H; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What make it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Versão final. Brasília: MEC, 2017.

CAMPOS, T. M. M; MAGINA, S; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa:** Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 8, n. 1, 2006.

CHAGAS, A. T. R. O questionário na pesquisa científica. **Administração on line**, v. 1, n. 1, 2000.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 6º ano:** ensino fundamental, anos finais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2018a.

__________. **Teláris matemática, 7º ano:** ensino fundamental, anos finais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2018b.

__________. **Teláris matemática, 8º ano:** ensino fundamental, anos finais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2018c.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: editora da UNICAMP, 2004.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática:** 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018a.

__________. **A conquista da matemática:** 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018b.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-euclidean geometry:** development and history. 3rd ed. W. H. Freeman, 1993.

__________. Old and new results in the foundations of elementary plane Euclidean and non-Euclidean geometries. **The American Mathematical Monthly**, v. 117, n. 3, p. 198-219, 2010.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. Volume I. Parte I Aritmética. SPM, Lisboa, 2009.

MATOS, J. F.; CARREIRA, S. Estudos de caso em Educação Matemática-Problemas actuais. **Quadrante**, v. 3, n. 1, p. 19-53, 1994.

MEIRINHOS, M.; OSÓRIO, A. O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. **EduSer-Revista de educação**, v. 2, n. 2, 2016.

MILLMAN, R. S.; PARKER, G. D. **Geometry:** a metric approach with models. 2 ed. Springer Science Business Media, 1993. 372 p.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, p. 105-132, 2006.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo–Estabelecendo Relações. **Professor de Matemática Online**, p. 1-14, 2014.

RYAN, P. J. **Euclidean and non-Euclidean geometry:** an analytic approach. Cambridge university press, 1986.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da matemática, 6º ano:** ensino fundamental, anos finais. 1 ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

SOUZA, J. R. **Matemática realidade & tecnologia:** 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 1 ed. São Paulo: FTD, 2018a.

__________. **Matemática realidade & tecnologia:** 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 1 ed. São Paulo: FTD, 2018b.

YIN, R. K. **Estudo de Caso:** Planejamento e métodos. Bookman editora, 2010.

Apêndice A

Outros modelos de Geometria Plana

No decorrer deste trabalho, houve menções a outros modelos de Geometria Plana, além da Hiperbólica, como foram os casos do Plano de Moulton e das Geometrias do Taxista e Esférica. Para o leitor não familiarizado com esses modelos, apresentamos neste apêndice alguns elementos e resultados destas geometrias, sobretudo aqueles relacionados com as citações feitas pelos professores.

Recordamos que, numa Geometria Plana, *ponto* e *reta* são considerados termos primitivos do sistema axiomático.

A.1 O Plano de Moulton

Nesta seção definiremos o modelo de Geometria Plana conhecida como Plano de Moulton. Discutiremos, ainda, resultados desta Geometria que a tornam uma Geometria não-Euclidiana Plana.

No Plano de Moulton, os pontos são os elementos do conjunto $\mathbb{R}^2$ e as retas são os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$, com $a \in \mathbb{R}$;

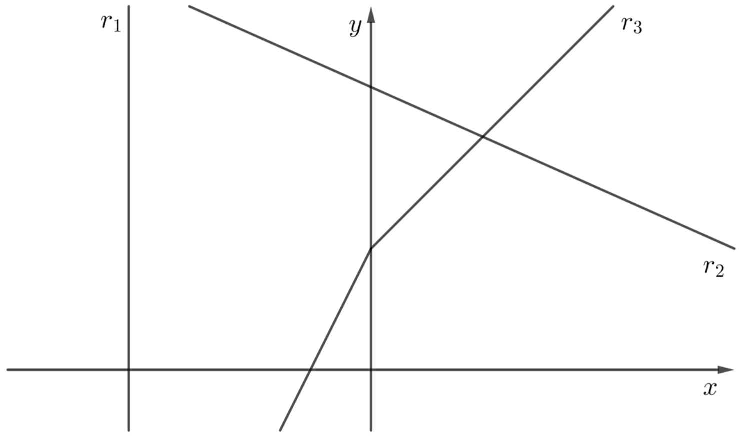
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$, com $m, b \in \mathbb{R}$ e $m \leq 0$;

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b$, se $x \leq 0$, ou $y = \frac{m}{2}x + b$, se $x > 0\}$, com $m, b \in \mathbb{R}$ e $m > 0$.

Note que as retas verticais, horizontais e aquelas cujo coeficiente angular é negativo coincidem com as retas Euclidianas. O terceiro caso, retratado no item (c), aponta que as retas crescentes se "quebram" ao cortar o eixo y. A Figura A.1 ilustra, neste modelo de Geometria, as retas r_1, r_2 e r_3 dos tipos (a), (b) e (c), respectivamente.

Dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, podemos definir a distância d_M entre eles analisando se a reta que os contém é, ou não, uma reta do tipo (c). Comentaremos cada caso a seguir. Se a reta AB é uma reta do tipo (c), definimos a distância de A até B como a soma da distância Euclidiana entre A e P com a distância Euclidiana entre P e B, onde

Figura A.1: *Interpretações de retas no Plano de Moulton.*

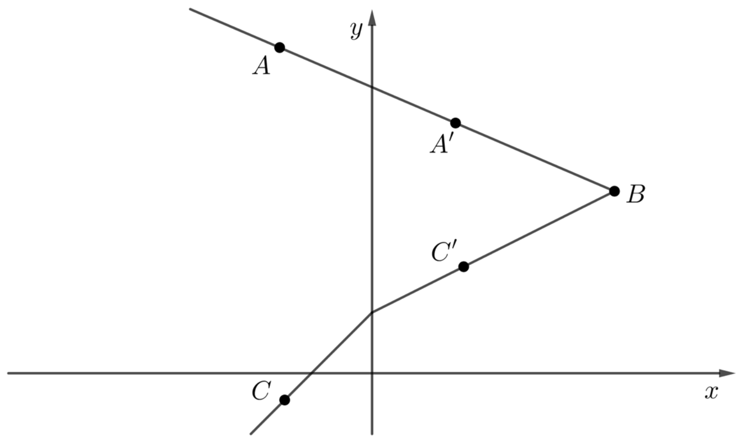


Fonte: Elaborada pelo autor.

P é o ponto no qual a reta AB cruza o eixo y, ou seja, $P = (0, b)$ com $b = \frac{2x_1y_2 - x_2y_1}{2x_1 - x_2}$. Isto é, $d_M(A, B) = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1 - b)^2} + \sqrt{(x_2)^2 + (y_2 - b)^2}$, se $x_1 \cdot x_2 < 0$ e $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$. Caso contrário, a distância entre os pontos A e B é calculada de maneira usual, como é feita na Geometria Euclidiana Plana.

Para definirmos a medida angular no Plano de Moulton, denotada por m_M, utilizamos a medida de ângulo Euclidiana m_E. Considere um ângulo ABC e suponhamos inicialmente que seu vértice não pertence ao eixo y. É sempre possível escolher pontos $A' \in \overrightarrow{BA}$ e $C' \in \overrightarrow{BC}$, de modo que A', B e C' estão de um mesmo lado do eixo y. Nesse caso, a medida angular no Plano de Moulton é definida como $m_M(A\hat{B}C) = m_E(A'\hat{B}C')$. A Figura A.2 representa o procedimento descrito para o cálculo da medida angular neste primeiro caso.

Figura A.2: *Primeiro caso do cálculo da medida angular $m_M(A\hat{B}C)$.*

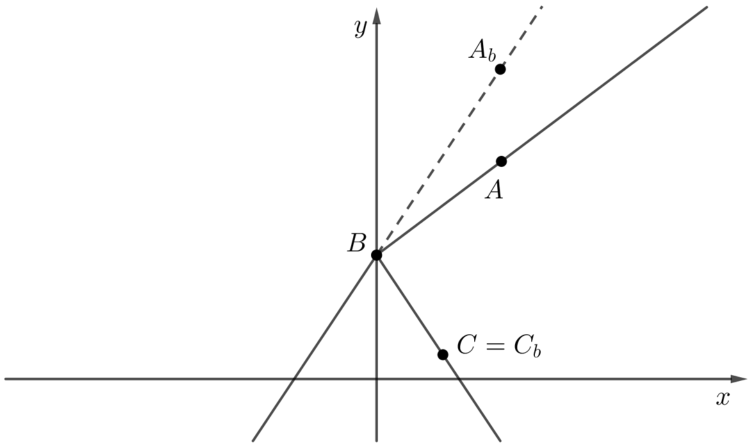


Fonte: Elaborada pelo autor.

Se o vértice B pertence ao eixo y, faremos alguns "ajustes" antes de calcularmos a medida $m_M(A\hat{B}C)$. Consideremos nesse caso $B = (0, b)$, com $b \in \mathbb{R}$. Assim, para cada número real b e cada ponto $P = (x, y)$ definimos $P_b = (x, 2y - b)$ se $x > 0$ e $y > b$ ou $P_b = (x, y)$, caso contrário. Assim, para $B = (0, b)$, definimos $m_M(A\hat{B}C) = m_E(A_b\hat{B}C_b)$.

Este ajuste faz com que retas do tipo (c) não fiquem "quebradas" quando calcularmos a medida de um ângulo que esteja sobre elas. A Figura A.3 ilustra o ajuste feito para o cálculo da medida angular neste segundo caso.

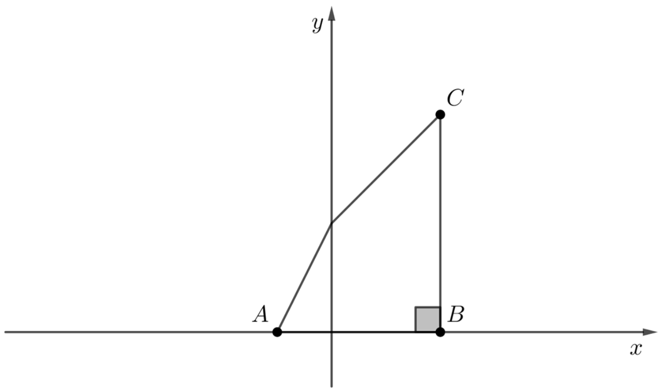
Figura A.3: *Segundo caso do cálculo da medida angular $m_M(A\hat{B}C)$.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Verificaremos agora que o Plano de Moulton não é um modelo de Geometria Euclidiana, tomando um triângulo retângulo para o qual não é válido o Teorema de Pitágoras. Sejam os pontos $A = (-1, 0)$, $B = (2, 0)$ e $C = (2, 4)$. Note que o triângulo ABC é retângulo, uma vez que $m_M(A\hat{B}C) = 90°$. A Figura A.4 representa o referido triângulo ABC.

Figura A.4: *Triângulo ABC no Plano de Moulton.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos que

$$AB = d_M(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$BC = d_M(B, C) = \sqrt{(2-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Já para calcularmos $d_M(A, C)$ precisamos antes encontrar o valor de b para a reta AC, que será

$$b = \frac{2 \cdot (-1) \cdot 4 - 2 \cdot 0}{2 \cdot (-1) - 2} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

Assim,

$$AC = d_M(A, C) = \sqrt{(-1)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}.$$

Temos então um triângulo retângulo que não satisfaz o Teorema de Pitágoras, pois $(AB)^2 + (BC)^2 \neq (AC)^2$. Portanto, não é válido o Postulado das Paralelas, como discutimos no Capítulo 1 (item (g) da lista de equivalências, Capítulo 1, pág. 7).

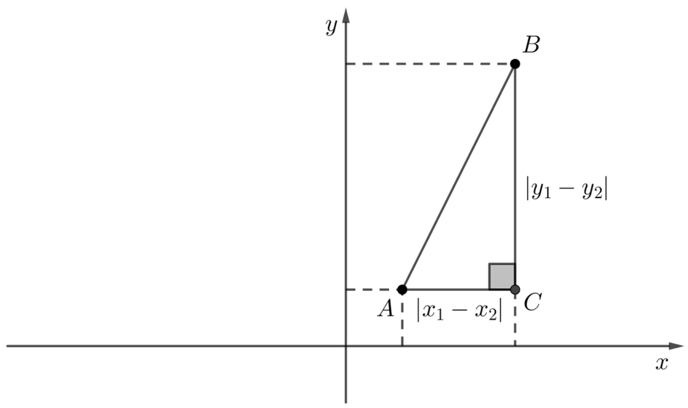
A.2 A Geometria do Taxista

Nesta seção daremos destaque ao modelo de Geometria não-Euclidiana conhecido como Geometria do Taxista. Neste modelo os termos primitivos *ponto* e *reta* são interpretados como na Geometria Euclidiana. Isto é, os pontos são os elementos do conjunto $\mathbb{R}^2$ e as retas são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 > 0$.

A medida de ângulos neste modelo, denotada por m_T, é definida como na Geometria Euclidiana. A distância, denotada por d_T, entre dois pontos é definida de um jeito diferente. Dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, definimos a distância do Taxista de A até B como $d_T(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Observe que, para calcularmos a distância Euclidiana entre os pontos A e B, representados na Figura A.5, calculamos o comprimento da hipotenusa AB do triângulo retângulo ABC. No modelo da Geometria do Taxista, a distância entre A e B é dada pela soma das medidas dos catetos AC e BC deste triângulo.

Figura A.5: *Representação da distância do Taxista entre os pontos A e B.*



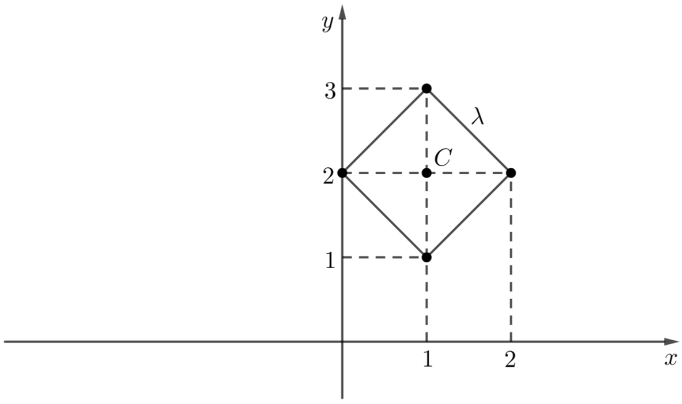
Fonte: Elaborada pelo autor.

Como consequência desta mudança, alguns objetos possuem uma representação diferente de como é na Geometria Euclidiana. Dados o ponto $C = (x_0, y_0)$ e um número real $r > 0$, a circunferência de centro C e raio r na Geometria do Taxista é o conjunto

$$\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| + |y - y_0| = r\}.$$

Note que uma circunferência na Geometria do Taxista é um quadrado Euclidiano devidamente posicionado. A Figura A.6 ilustra a circunferência de centro $C = (1, 2)$ e raio $r = 1$ na Geometria do Taxista.

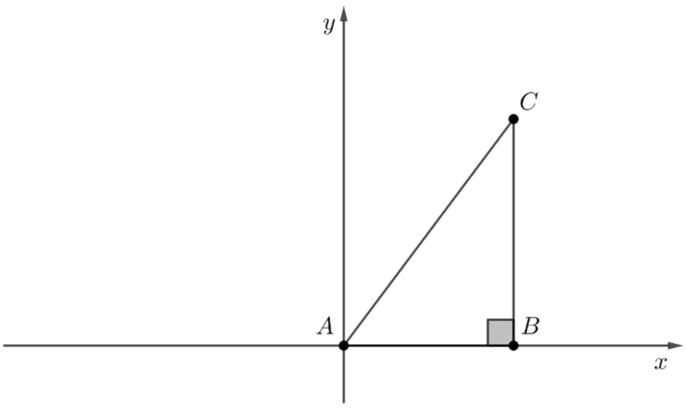
Figura A.6: *Circunferência na Geometria do Taxista.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Geometria do Taxista também não é válido o Teorema de Pitágoras. Tomemos os pontos $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (3, 4)$, como representado na Figura A.7.

Figura A.7: *Triângulo ABC na Geometria do Taxista.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

O triângulo ABC é retângulo em B e

$$AB = d_T(A, B) = |0 - 3| + |0 - 0| = |-3| = 3,$$

$$BC = d_T(B, C) = |3 - 3| + |0 - 4| = |-4| = 4,$$

$$AC = d_T(A, C) = |0 - 3| + |0 - 4| = |-3| + |-4| = 7.$$

Assim, temos que $(AB)^2 + (BC)^2 \neq (AC)^2$. Portanto, pela lista de equivalências apresentadas no Capítulo 1, o Postulado das Paralelas não é válido nesta Geometria.

A.3 A Geometria Esférica

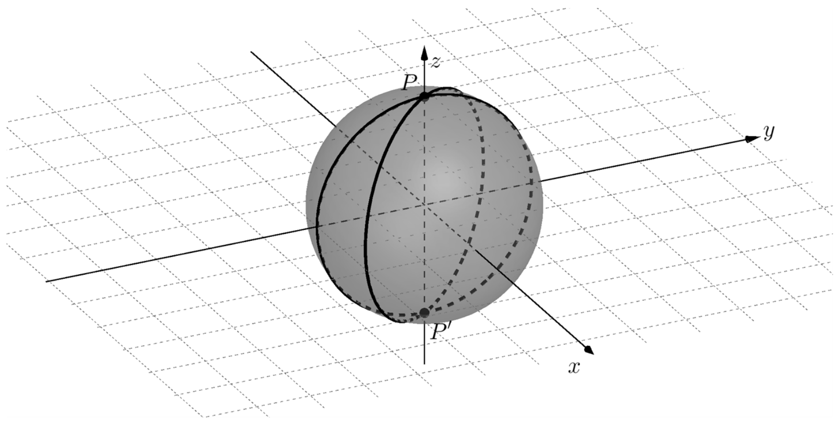
Numa Geometria Neutra Plana, dada uma reta r e um ponto P fora dela, existe pelo menos uma reta s paralela à r passando por P (Proposição 5). A Geometria Esférica é um modelo de Geometria Plana, na qual é postulada a não existência de retas paralelas à uma reta dada. Portanto, esta não é uma Geometria Neutra.

Começaremos discutindo as interpretações dos termos primitivos *ponto* e *reta* neste modelo.

Sejam $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ centrada na origem e $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Note que $\mathcal{C}$ é um conjunto de planos de $\mathbb{R}^3$ que contém a origem e que $\mathbb{S} \cap \mathcal{C}$ determina uma circunferência máxima de $\mathbb{S}$.

Observamos que por dois pontos antípodas pertencentes a $\mathbb{S}$, isto é, pontos da forma (x, y, z) e $(-x, -y, -z)$ com $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, passam infinitas circunferências máximas. A Figura A.8 ilustra duas circunferências máximas passando pelos pontos antípodas P e P'. Note que, por dois pontos não antípodas de $\mathbb{S}$ passa uma única circunferência máxima.

Figura A.8: *Circunferências máximas passando por pontos antípodas.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para que esteja satisfeito o primeiro Postulado de Incidência (veja pág. 12) interpretamos o termo primitivo *reta* como sendo uma circunferência máxima de $\mathbb{S}$ e *ponto* como um par de pontos antípodas pertencentes a $\mathbb{S}$.

A partir das interpretações apresentadas para os termos primitivos ponto e reta, algumas relações que estabelecemos no Capítulo 1, como é o caso do "estar entre", não são válidas neste modelo, sendo necessário substituir alguns dos axiomas que apresentamos por outros, com o objetivo de evitar inconsistências. Uma discussão completa dos fundamentos da Geometria Esférica pode ser encontrada em Greenberg (1993).

A medida de segmentos neste modelo possui algumas particularidades, uma vez que a relação do "estar entre" não é válida nesta Geometria. Ao leitor interessado, indicamos o trabalho de Ryan (1986).

Trataremos agora da medida angular. Sejam os pontos A, B e C em $\mathbb{S}$ e O a origem.

Considere o plano α determinado pelos pontos A, O e B e o plano β determinado pelos pontos B, O e C. A medida do ângulo $A\hat{B}C$ na Geometria Esférica, corresponde à medida Euclidiana de um dos ângulos formados pelos vetores normais unitários aos planos α e β.

Definimos a medida angular (em radianos) na Geometria Esférica, denotada por m_S, pela expressão

$$m_S(A\hat{B}C) = \arccos\left\langle \frac{A \times B}{||A \times B||}, \frac{C \times B}{||C \times B||} \right\rangle,$$

onde $\times$ e $<,>$ indicam, respectivamente, os produtos vetorial e escalar usuais do $\mathbb{R}^3$.

Verificaremos que a soma, em radianos, dos ângulos internos de um triângulo ABC na Geometria Esférica é maior que π. Tomemos os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Assim, $A \times B = (0, 0, 1)$, $C \times B = (-1, 0, 0)$ e $A \times C = (0, 1, 0)$. Note que os três vetores são unitários, então

$$m_S(A\hat{B}C) = \arccos\langle(0, 0, 1), (-1, 0, 0)\rangle = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

De modo análogo obtemos $m_S(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{2}$ e $m_S(A\hat{C}B) = \frac{\pi}{2}$. Verificamos então que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é $\frac{3\pi}{2}$.

Apêndice B

Questionário

1. Identificação

a. Nome: ____

2. Atuação profissional

a. Em qual(is) rede(s) de ensino você leciona atualmente?

☐ Pública ☐ Particular ☐ Outros

b. Em qual(is) nível(is)?

☐ Ensino Fundamental II ☐ Ensino Médio ☐ Ensino Superior ☐ Outros

c. Há quanto tempo atua no ensino de Matemática? ____________________

3. Formação

Sobre a sua graduação, responda:

a. Qual o curso? ____

b. Em qual Instituição? ____

c. Qual o ano de conclusão? ____________________________________

d. O contato que você teve com a Geometria durante a graduação foi suficiente para que você se sentisse preparado para ensiná-la? Por quê?

____

____

____

e. Você teve contato com a Geometria do ponto de vista axiomático?

☐ Sim ☐ Não

f. Você teve contato com alguma Geometria não-Euclidiana durante a graduação ou antes do mestrado? Se sim, como? (por meio de alguma disciplina, por conta própria, etc.)

____

____

____

4. Sobre a disciplina "Geometria: um Enfoque Via Modelos" e seus conteúdos

a. Você considera que os conteúdos da disciplina têm alguma relação com aqueles ensinados na Educação Básica? Por que?

b. Na sua opinião, a abordagem feita na disciplina contribui para mudar a visão da Geometria? Por que?

c. Cite alguns resultados da Geometria Euclidiana que, na sua opinião, é possível compreender melhor após o contato com outras geometrias.

d. Descreva brevemente como está sendo sua experiência com os conteúdos explorados nessa disciplina.

Apêndice C

Entrevistas

Transcrevemos na íntegra a seguir as entrevistas realizadas com os professores B, F, H e J. Utilizamos estas mesmas letras para nos referirmos às falas dos entrevistados e, para identificarmos as perguntas feitas por nós, utilizamos a letra P.

Observamos ainda que algumas partes da entrevista foram suprimidas por conterem alguma identificação dos professores ou por tratarem de falas que fogem do contexto.

C.1 Professor B

P: No momento você está atuando na Educação Básica?

B: Então, eu tô dando aula particular só, né? Então eu dou aula para alunos de Fundamental, Médio, Superior, Pós... Um público bem variado aí.

P: Você já atuou no ensino regular?

B: Não.

P: Eu vou te fazer algumas perguntas a respeito da disciplina que a gente fez na pós-graduação, que é a Geometria: um Enfoque Via Modelos. Você tinha dito que foi o primeiro contato que você teve com geometrias não-Euclidianas, né?

B: Isso.

P: Você acha que teve alguma mudança na sua visão sobre o que é Geometria depois que você teve esse contato?

B: Sim, sim... Teve uma mudança de visão sim.

P: Por quê? Ou como foi essa mudança?

B: É porque, assim, deu uma ampliada de horizontes, né? A gente aprendeu coisas que nem imaginava que poderia existir, né? Tipo uma reta curva... fora a questão daquela coisa de que, quando a gente fazia lá as demonstrações, aquilo era só um desenho esquemático, algo meio abstrato, né? Na Geometria Plana, a Euclidiana lá no Fundamental a gente tem a ideia das coisas muito concretas, né? E, nessa matéria, a gente viu que a Geometria, ela pode ser muito abstrata, né? Não tão concreta quanto a gente imaginava quando aprendia isso lá no Fundamental, entendeu?

P: Você acha que isso poderia afetar, ou afetou, a sua prática profissional? Esta visão da Geometria.

B: Ah, sim, sim... ajudou no ponto de vista de você elucidar problemas mais facilmente, a parte de demonstração eu melhorei, assim, bastante, né? Porque às vezes, assim, não é frequente que eu preciso fazer demonstração, mas de vez em quando a gente precisa, né? E sinto que me ajudou bastante sim. Ajudou sim. Essa visão mais abstrata também, ajuda em qualquer tipo de problema na Matemática, eu acho que ajuda.

P: Você considera que algum dos conteúdos que a gente viu na disciplina, eles tiveram forte relação com a Geometria que você ensina aos seus alunos?

B: É, a parte final da matéria que a gente viu lá os triângulos, os casos de congruência, né? Acho que aquilo lá está mais ligado... Os quadriláteros também. Acho que aquilo lá está mais ligado. Mas aquela parte mais inicial, lá... Aquelas partes de modelos, de Geometria Neutra... O modelo de Poincaré, tem uma certa relação, usa um pouco de Geometria Analítica também, né? Tem alguma relação, mas acho que a que tem mais relação é a parte final que a gente estudou os triângulos, os casos de congruência, os quadriláteros... Eu acho que aquela parte final tem um pouco mais de relação. Não que o início não tivesse também, mas bem menos, né?

P: E como você viu essa relação?

B: A relação ajudou a gente a entender melhor os porquês dos casos de congruência, né? Ter uma visão mais aprofundada da coisa, eu acho que isso ajuda... Mesmo que, sei lá, a gente não aborde a coisa mais aprofundada pros alunos lá na aula pros alunos do Ensino Fundamental, mas ajuda assim, no que tange... Na forma de explicar, né? Às vezes a gente pode falar aquela coisa mais aprofundada de uma forma mais simples, de modo que fique mais claro pro aluno também, de modo que ele possa entender melhor o conceito... Que não fique só uma coisa decorada, né? Os casos de congruência, por exemplo.

P: Você já se deparou com alguma situação assim? De o aluno perguntar alguma coisa...

B: É, é difícil, né? Você sabe, você dá aula também... É meio difícil pegar um aluno que vá a fundo assim, mas de vez em quando aparece. Mas na maior parte das vezes não. Especificamente nessa parte, nesse conteúdo, ainda não aconteceu, porque os alunos são mais novinhos e é difícil pegar um aluno assim muito curioso. Ainda não tive esse prazer. Mas quando o aluno é um pouco mais velho, já aconteceu de em outros conteúdos o pessoal querer ir um pouco mais a fundo na coisa e saber o porquê mais detalhadamente.

P: Se você tivesse o tempo para isso, você acha importante levar algumas discussões sobre este assunto na sala de aula para seus alunos?

B: Eu acho importante sim, porque ajuda a abrir a mente, né? A você se aprofundar nas coisas. E é possível, não é uma coisa muito além do que a gente vê lá no Ensino Básico. O problema é o tempo e, além disso, acho que o principal, é conseguir atrair o interesse da maioria dos alunos, porque isso é uma coisa um pouco complicada.

P: E você acha que o assunto ajudaria a atrair a atenção desses alunos?

B: Eu acho que não é questão do assunto, acho que é questão da disciplina... Existe um preconceito muito grande com a disciplina de Matemática, né? O pessoal vê algo como... Uma matéria como *inaprendível*, né? Infelizmente ainda existe um preconceito, eu acho, muito grande com a Matemática. As pessoas acham que só as pessoas mais inteligentes são capazes de aprender, né? Existe, infelizmente, esse preconceito, né? E fora que, tem a questão também de o professor, que a gente aprende no mestrado, de o professor deixar a aula mais motivante, o conteúdo mais motivante, que isso é um desafio também para o professor, né? É uma coisa meio complicada também.

P: Alguma noção de Geometria não-Euclidiana chocou você? Qual foi?

B: É... Eu lembro que teve uma parte da matéria que foi meio chocante, aquela parte lá dos quadriláteros de Saccheri, que você tinha que imaginar um dos lados curvos... Não me lembro com detalhes porque já passou um bom tempo, né? Quase um ano que a gente teve o conteúdo, eu não sei agora te precisar com detalhes... Mas aquela parte quando a gente começou a estudar os quadriláteros de Saccheri que você tinha que imaginar um dos lados curvos, pra se adequar às condições de Saccheri eu lembro que me deixou meio chocado.

P: Você considera que existe alguma outra noção, podendo ser diferente desta, que você considera relevante para discutir com seus alunos?

B: Ah, o modelo de Poincaré eu acho que seria interessante abordar quando fosse ver Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio. Eu acharia interessante porque envolve meio que umas aplicações dos conceitos de Geometria Analítica dentro do modelo do Poincaré, né? Eu acharia interessante, eu acho que teria condições de se abordar. E mesmo a parte das demonstrações, a parte dos triângulos, casos de congruências... Acho que daria para abordar também, só que como é para um público um pouco mais jovem, não sei se teria uma adesão e uma eficácia grande, naquele momento... Talvez no Ensino Médio, na parte de revisão no início do terceiro ano do Ensino Médio talvez desse para abordar também com os alunos um pouco mais maduros, eu acho que seria interessante essas abordagens. E daria para abordar, sem grandes problemas, para um público mais interessado e com uma base boa, né? Infelizmente, acho que não daria para abordar para qualquer público, acho que as dificuldades poderiam ser maiores para o professor também.

C.2 Professor F

P: Você tem turmas de ensino regular ou está com aulas particulares?

F: Eu inclusive tive que recusar aulas particulares por conta da carga... a demanda é tão forte das aulas síncronas que a gente tá fazendo – eu leciono no [...], né? – eu já recusei até aula em alemão, você acredita? Pediram aula em alemão, mas por questão de tempo eu tive que recusar. Onde eu leciono, eu leciono do 9º ano do Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.

P: [...] Vou fazer agora algumas perguntas sobre a disciplina, tá bom? Você acha que teve alguma mudança em como você compreendia o que é Geometria antes e depois da disciplina?

F: Ah, totalmente! Olha, me abriu um horizonte, eu já dizia isso para a própria professora, que eu jamais concebia... minha graduação não era Matemática e tive que fazer a complementação depois, mas eu nunca tinha visto, sinceramente. A Geometria não-Euclidiana não fazia parte da minha... quer dizer, do meu currículo, da minha vida acadêmica. Nunca fez. Isso o porquê que eu perguntava, às vezes ficava espantado, né? Ficava "puxa vida, que coisa bacana, diferente", né? Abria novos horizontes. E isso explicava também para os meus alunos. Falava: "gente, vocês têm noção que o menor espaço entre dois pontos pode não ser necessariamente um segmento de reta?" e eles ficavam: "não, isso não é possível!", "pois é, eu estou vendo isso na USP". E isso aí, eu fiz alguns paralelos nas aulas... ajudou bastante, né? Assim, logicamente, não expliquei o que era uma... como chamava aquela esfera...? Aquela... Aquele plano esférico... Esqueci o nome agora... de Riemann? [...] Geometria Hiperbólica! Então eu começava explicar isso pra eles, na época. Hoje eu já esqueci muita coisa. A gente não vai aplicando, então eu preciso recordar tudo isso... eu achei muito legal! Então eu ia fazendo esses paralelos com eles né? E pra mim, foi uma grata surpresa, eu 'penei' pra caramba pra aprender, não fui um ótimo, excelente aluno, mas consegui passar... Eu até talvez, num momento futuro, eu volte a estudar isso porque eu gostei. É uma coisa diferente, então pode ser que eu... Tanto que eu tava na dúvida, né? Na dissertação. Mas como eu senti mais segurança e tenho mais material para ir para o lado da música, eu fui para o lado da música. Mas com certeza me ajudou bastante na minha explicação, na minha visão de Geometria Euclidiana e agora também na não-Euclidiana, e eu repassava isso para a classe, na medida do possível.

P: O que você viu de mais surpreendente na disciplina?

F: Ah, pra mim, uma delas foi essa que eu acabei de falar, né? A Geometria Hiperbólica, né? Que pra mim, você conceber uma circunferência, um círculo, que não era... você ter um plano, aquele plano também... Como é que chamava aquele plano? A Geometria do Taxista que eu nunca tinha ouvido falar. Aquela Geometria também que chegava no eixo y e dava uma desviada...

P: A de Moulton?

F: Isso, a de Moulton! Olha, a Hiperbólica, a do Taxista e essa, para mim foram totalmente surpreendentes. A gente ficava... até tentei fazer com a Rosa e ela falou: "pô você descobriu uma nova" que era uma mistura da Hiperbólica com a de Moulton, que fazia até um capô de um fusca, assim... (gesto com a mão fazendo uma curva em formato de 'm') Pra mim foi surpreendente. Já no primeiro dia de aula eu voltei pra casa e falei pra minha família: "olha vocês esqueçam tudo que viram de Geometria até hoje, porque olha... totalmente... tenho uma visão totalmente nova para vocês!". Então isso pra mim foi surpreendente! Foi bem legal!

P: Você falou que chegou a comentar com seus alunos... Em quais momentos você fazia esses comentários?

F: Principalmente nas aulas que eu tinha com eles de Geometria Plana, né? Eu leciono lá Geometria, Trigonometria, Álgebra... Só tem eu de professor de Matemática lá. Então nas aulas de Geometria, nas aulas de Geometria espacial também, eu comentei com eles bastante também, mas mais nas aulas de Geometria Plana, quando ia explicar circunferência... que mais? Puxa vida, nas aulas de Geometria Analítica... quando chegava com eles na equação da hipérbole, na equação da circunferência. Então nesses momentos aí... na Geometria Plana com o primeiro e segundo... com o nono eu não comentava muito não. Cheguei a comentar mas mais com o primeiro, segundo e terceiro ano do Ensino Médio, sabe? E no terceiro ano do Ensino Médio, nas aulas de Geometria Analítica que eu comentava com eles.

P: Você percebeu que isso teve algum impacto positivo pra turma?

F: Tinha alguns... A grande maioria fica meio... (gesticula com a mão insinuando um gesto de uma pessoa perdida) mas tem sempre aqueles um, dois, três curiosos mais... que ficam assim "pô, mas o que significa isso, professor?". Aí você ficava no final da classe, eu estava afiado [...], e mostrava o plano de Moulton, a Geometria do Taxista e eles ficavam: "pô, que legal!", então isso pra mim foi gratificante. Algumas pessoas, depois eu não tive mais contato, porque normalmente era o terceiro ano que perguntava mais, geralmente eles estavam mais maduros, e eles ficavam: "como que é isso? Me mostra um exemplo disso aí...", então teve exemplos, um ou dois, mas eram poucos, não foi todo mundo assim que... Como eu falei, que tinha essa curiosidade. Infelizmente, né? Podia ser mais pessoas.

P: Você acha que é importante comentar sobre esses assuntos com os alunos?

F: Ah, eu acho... Eu acho e pode abrir novos horizontes para eles assim como abriu pra mim né? Como eu falei, eu não quero parar aí não, eu gostei... e uma pena que... não, não é uma pena, mas é que eu tenho que optar, por uma questão de tempo... eu preciso aprender mais para desenvolver alguma coisa nisso, eu sinto que eu preciso me preparar mais, sabe? Preciso estudar mais afundo esse tema. Como a música, eu estudei música, não oficialmente, mas com a minha esposa, sei ler partitura... mas eu tenho muito mais material aqui e senti mais segurança pra seguir nesse tema. Mas como eu falei, eu quero explorar mais esse tema no futuro, eu achei muito diferente. Foi uma coisa assim, totalmente fora da minha concepção de Geometria. Como que podia ser aquilo, né? E foi totalmente novo pra mim, eu sempre comentava, por isso que eu quero ainda retomar isso. [...] eu ainda vou fazer um *follow up* com esses alunos que eu conversei, pra ver se algum teve mais curiosidade de seguir em frente e partir pra essa área. É uma coisa que também é gratificante, você ser referência para outras pessoas, né? Eu já tive essa oportunidade de "pô, eu comecei a gostar de Matemática depois que a gente conversou, que bateu aquele papo..." isso é legal, isso não tem preço, né? Então eu pretendo sim, né? Mais pra frente... foi muito importante e mudou minha visão de Geometria, com certeza.

P: Se você tivesse mais tempo de trabalho com eles em sala de aula, você acha que seria viável aplicar uma atividade voltada para o assunto?

F: Ah, eu acho sim. Só que eu não sei... posso estar falando bobagem aqui, mas eu não sei se é o caso de fazer uma transposição didática ou não, de tal modo que não seja uma coisa impossível para eles conceberem, né? Assim, no sentido prático mesmo... Muitos podem até achar bonito, mas na hora que forem fazer, usar a régua, por exemplo... você ter a noção de régua nos exercícios... o que é essa bendita régua, né? Eu mesmo tive dificuldades de entender o que é essa régua, como que funcionava. Então talvez, fazer alguma coisa um pouco mais simples, mas eu acho possível sim! Eu acho viável. Se tivéssemos mais tempo, inserir isso no currículo... Talvez fosse uma boa ideia, viu? Assim como, por exemplo, na época que eu fiz, e olha que faz tempo, eu tive limite... e hoje, raramente... pelo menos eu nunca dei aula de limite no Ensino Médio. Limite, derivada... derivada não, mas limite, né? A noção do limite. Mas eu comecei a ter pequenas noções de limite lá no terceiro ano do Ensino Médio. Então, talvez por aí, né? Uma coisa que dê e que não vá assim, logicamente e profundamente, em cima da Geometria não-Euclidiana, mas dar uns primeiros, sabe? Uns primeiros toques de como isso daí poderia... dar uma nova visão de Geometria pra eles. Eu acho que se situar um pedaço da Geometria com um pedaço da Geometria não-Euclidiana.

C.3 Professor H

P: Você estava atuando como professora do Ensino Fundamental II, né? Você ainda está atuando com essas turmas?
H: Sim.
P: Você atua há mais de nove anos, né?
H: Sim.
P: E nessa pandemia, teve alguma mudança? Você está conseguindo levar legal a turma?
H: Então, a gente tá usando o *Meet* também, né? Eu acho que o ano passado eu coloquei que eu que dava aula pro Fundamental II, mas eu tinha nono ano, sétimo, oitavo... Aí esse ano eu tô com sextos, sétimos e eu também dou aula para o quinto. Eu tenho Pedagogia e aí eu também tenho quinto ano, que são os professores específicos, eles colocam nessa escola que eu dou aula, eles colocam professores específicos, então o professor de Português dá aula de Português, de Matemática sou eu... Então assim, agora eles não abrem muito a câmera, ficam mais na deles, poucos alunos interagem e participam, então eu tenho que ficar a todo momento perguntando se tá claro, se entenderam, se quer fazer um exemplo, sabe? Tá difícil assim, porque eles ficam quietos, né? Eles não abrem o microfone... E é assim, eu tô tentando fazer o que é mais, como fala? Mais claro possível. Não tô focando muito em tarefas, em muitas tarefas, estou construindo com eles as atividades, estou usando uns *sites* interativos e a gente vai construindo juntos, mas a gente teve que aprender um monte de coisas. A escola também não dá nada, assim, de preparação, então a gente teve que aprender na raça.
P: Com as suas turmas desse ano, você chegou a trabalhar algum conteúdo de Geometria com eles?
H: Fiz, com o sétimo ano. A parte de triângulos, a gente fez a soma dos ângulos internos, conseguimos usar um pouco o GeoGebra, aquele... não é uma demonstração, é só um jeito de mostrar que você corta um papel... marca os ângulos internos de um triângulo, corta e junta e forma um ângulo raso, que é o de meia-volta, mas eu também consegui fazer isso usando o

GeoGebra, que são as retas, sabe? Se cruzando. Eu fiz isso de uma outra forma, pra mostrar pra eles de outra forma e foi bem interessante. Fiz essas duas coisas com o sétimo ano... Ah, e com o sexto, com o sexto ano também.

P: Agora eu vou entrar em algumas perguntas mais específicas, tá? Então, você falou que não teve contato com Geometria não-Euclidiana na graduação. Foi seu primeiro contato durante a disciplina da pós?

H: Foi.

P: No ano passado, na disciplina da pós, você acha que teve alguma mudança em como você enxergava a Geometria antes e depois da disciplina?

H: Sim, bastante. Assim, eu acho que envolveu tudo, porque como era uma disciplina axiomática, né? E tinham muitas demonstrações. Pra mim, que me formei em 2010, eu tive que lembrar muita coisa, então essa parte eu tive que lembrar, e mudou no seguinte sentido assim... na minha cabeça só tinha a Geometria Euclidiana e não a Hiperbólica e a Esférica, como a gente viu. E é uma outra visão assim, da Geometria, que eu não tive na universidade.

P: Você acha que essa mudança de visão foi positiva ou negativa e por quê?

H: Não, foi bem positiva. Porque eu acho que apesar de não ensinar pros meus alunos, porque lá no Fundamental a gente só tem a Euclidiana. Mas eu tenho alunos que se interessam bastante e ficam curiosos em saber que não existe uma única Geometria, que o mundo que a gente vive não é plano, né? Se a gente pensar no planeta. No ano passado eu até mostrei pra uns alunos, do sétimo ano também, quando a gente estava vendo a disciplina mesmo, como era novo pra mim, eu acabei contando pra eles que não era Plana, que era outro tipo de Geometria, como curiosidade e alguns alunos se interessaram, assim, falaram: "nossa, professora, que legal vou procurar saber e tal". E tem coisas que a gente até consegue construir com eles, né? É que eu não fiz isso, mas pegar uma esfera mesmo e medir ângulos e mostrar pra eles que em outra Geometria dá um valor diferente... Sabe? Eu acho muito legal essa parte assim de... de poder mostrar pra eles umas coisas diferentes, apesar de eu estar na correria.

P: Partindo dessa perspectiva sua, você diria que é importante o professor saber dessas outras geometrias?

H: Sim, eu acho que é muito importante o professor saber mais, além, né? Porque foi o que eu falei pra você: quando você sabe, você vai poder ensinar, contar, até demonstrar, talvez, dependendo da faixa etária, e até mostrar uma aplicação dessa Geometria, que a gente tem várias. Mas eu gostei bastante da disciplina, apesar de ser muito difícil.

P: [...] Teve alguma coisa que te deixou surpresa na disciplina?

H: Ah, foi a soma dos ângulos internos de um triângulo... Quando a gente entrou nos quadriláteros de Saccheri, também tinham algumas coisas que eu não conhecia, então foi muito interessante esse conhecimento novo, sabe?

P: Você falou que chegou a apresentar para os alunos, como curiosidade, algumas coisas, né? Você falou que despertou o interesse deles. Se você tivesse mais tempo para trabalhar, você acha que seria, não só viável, mas interessante trabalhar esses conteúdos com eles? Por quê?

H: Sim, sim. Então, porque eu acho importante os alunos terem essa outra visão da Matemática. Eu não sei... eu acho que como eles estão acostumados... Na verdade, a Geometria mesmo é muito abstrata, a Geometria em si, e a Geometria não-Euclidiana é mais ainda. Então se eu tivesse a oportunidade de construir com eles alguma coisa que não fosse abstrata, mas que eles pudessem enxergar, igual o exemplo que eu falei: usar uma bola de isopor e traçar um triângulo sobre ela e medir ângulo... Sei lá, alguma coisa que eles consigam medir, né? E ver a construção. Eu acho que é muito interessante essa parte. Poder associar com alguma aplicação assim no cotidiano deles, as coordenadas, a própria geodésia, que é parte da cartografia também e demonstrar pra eles. Apesar da faixa etária que eu dou, né? Eu dou pro Fundamental II e eles não têm muita maturidade, mas acho que eles nunca imaginam que possa ter uma Geometria diferente do que a gente aprendeu toda a vida, né? Porque toda vida a gente aprende o plano... Eu fico imaginando como eles conseguem enxergar um triângulo construído num plano. Tá. Como que é esse triângulo? Então assim, pra eles é difícil. Se pra gente é difícil, imagine pra eles... Então eu achei interessante essa parte de poder contar e mostrar pra eles...

P: Você me falou um pouco da importância de os professores saberem esses conteúdos. E para os alunos? Você acha que tem alguma importância além de despertar a curiosidade? Você acha que desenvolve alguma coisa a mais?

H: Eu acho que pode desenvolver alguma coisa, ainda mais sendo uma coisa nova, né? Quem sabe a gente forma futuros professores de Matemática ou de outras disciplinas de, por exemplo, exatas. Porque eles vêm a Matemática só no Cálculo e problemas, então essa parte... sempre que eu trabalho Geometria com eles, eles gostam bastante dessa parte de Geometria. Então eu acho importante a gente poder contextualizar e mostrar coisas novas, para eles aprenderem mais. Imagina, eles vão entrar no Ensino Médio e sabendo que vão pensar o plano cartesiano lá da Geometria Euclidiana. E eles vão poder contar pras pessoas. Eu tive alunos que se interessaram assim, e ficaram: "nossa professora, que legal! Como que é isso?". E ficaram tentando imaginar. "Nossa, faz sentido!". Porque se a gente começa a falar do planeta, né? Como que a gente vai falar pra eles que uma reta pode ser curva? E como que a gente vai mostrar pra eles? Então eles começam a pensar coisas e a falar "faz sentido!", eles adoram falar isso. E nossa, o sexto e o sétimo, sempre fala isso. Então, eu acho importante sim, e com certeza, se eu... É que agora a gente tá vivendo uma outra experiência nessa fase de pandemia. Mas, com certeza, se eu tivesse a oportunidade de fazer alguma coisa mais concreta com eles, podendo mostrar uma Geometria não-Euclidiana eu faria sim! E cheguei a comentar, né?

C.4 Professor J

P: Você ainda está atuando no ensino neste momento?

J: Então, a minha atuação no ensino é com aula de reforço, eu não estou em escola, né? E aí, eu estou com os alunos que restaram dentro da pandemia. Mas até antes da pandemia estava tudo normal, entendeu? Que ainda era período do seu estudo.

P: E você está atuando normalmente com alunos de qual faixa etária?

J: Ensino médio agora. Fora MAT1500, que eu sou educadora, então aí eu acompanho desde fundamental 1, esse ano inteiro.

P: Certo. Se você quiser trazer alguma experiência de MAT1500 também para cá também, não tem problema nenhum... é até melhor. Então eu vou te fazer algumas perguntas sobre a disciplina, tá? A primeira coisa que eu preciso saber: você acha que teve alguma mudança em como você compreendia a Geometria antes e depois da disciplina?

J: É... Não! De verdade. Você quer dizer se a Geometria não-Euclidiana me afetou a Geometria de colégio, né? Se alguma coisa falou: "nossa por isso que na Euclidiana é desse jeito!", é esse tipo de "Eureca"? Não, acho que não. Não tive esse pensamento em alguma vez. Mas calma, deixa eu explicar aqui uma coisa. Por exemplo, [...] nosso colega, ele sempre falou que ele não teve uma boa Geometria no colégio, entendeu? Então, muitas coisas que acontecem na faculdade dão essa: "nossa, por isso...". Eu acho que eu tive uma boa Geometria. Então faz diferença isso, você imagina quanto tempo faz que eu estudei, né? Algum... muito tempo! Mas, eu fiz um bom colégio, eu tive uma boa Geometria, eu dou aula de reforço há muito, muito tempo e isso faz com que eu esteja sempre, vamos dizer, me atualizando. Porque é diferente você dar aula num colégio – eu acho, aqui é um achômetro e isso importa na minha resposta – você estando em um colégio, você faz a sua aula. Você programa, planeja como você quiser, como te convém mais. Investigar mais, investigar menos, não investigar, enfim, faz o que quiser com seus alunos, você é dona da sala. Eu com aulas de reforço não sou dona de nada, então eu tenho que me adaptar a todos os professores dos meus alunos, então eu tô sempre correndo atrás de coisas, de falar: "nossa, o que esse professor está querendo?". Então, se eu tô dando aula para algum ano, é difícil ter algum tópico que eu fale: "nossa, nunca mais vi isso, não me lembro...", né? Então acho que isso faz diferença naquilo da faculdade. Eu achei a Geometria não-Euclidiana muito interessante, mas não que tenha falado "Ah!" em algum momento... eu não me lembro de ter tido esse pensamento, tá? Se eu tive, eu esqueci, mas eu não lembro de ter tido esse pensamento de "nossa, por isso que...". Mas se eu já respondi que tive, eu esqueci também.

P: Tudo bem. A pergunta que eu ia te fazer agora era nesse sentido, de porquê você achava que não teve tanto impacto, mas você complementou sua resposta. Então na própria graduação você já chegou a ter esses conteúdos?

J: Eu tive uma boa Geometria antes e quando chegou na Geometria da graduação, a Geometria I foi Geometria não-Euclidiana, né? Basicamente, e quando chegou na Geometria II e III, eu fiz com a Bárbara. Foi super bom, é... eu acho que eu gostei da Geometria, entendi a Geometria e eu fiz aquela Geometria, optativa, que também era não-Euclidiana. Então, quando chegou na Rosa já era o terceiro contato com isso, claro e óbvio que é isso. O que eu ia falar no final eu vou falar agora: eu tenho muita coisa na minha cabeça. E nesta idade que eu me encontro, não dá. É muita informação. Então eu acho que a minha cabeça, ela separa coisas e ela fala: “bom, isso aqui você não vai precisar mais então guarda pra lá e você tá precisando disso...”. Enfim, se você me perguntar qualquer coisa, de qualquer assunto da faculdade e que eu passei com 9 ou 10, entendeu? Eu não vou te responder, porque eu tenho que retomar... Eu retomo facilmente, estou acostumada a fazer isso, eu não decoro as coisas. E se eu precisar eu vou lá e falo “ah, é isso mesmo”. Então não fica retido, eu não tenho mais essa memória de ficar retido, entendeu? Então é isso.

P: Você falou que a Geometria não-Euclidiana você não usa muito na hora de ensinar, certo?

J: A não-Euclidiana não. Por quê? Porque eu também não tenho opção. Eu tenho que fazer o que o tal do professor fez. As pessoas estão me pagando por hora, eu não vou parar pra bater papo sobre a não-Euclidiana, ou algo do gênero.

P: Desde a primeira vez que você viu este conteúdo, teve algum fato que você viu na Geometria não-Euclidiana que te surpreendeu? Algo que você tenha pensado: “eu não sabia que era assim por conta disso”?

J: Não, na realidade “eu não sabia que era assim por conta disso” não sei se foi o fato, mas “eu não sabia que era assim” ou “não sabia que existia”, porque a primeira vez que eu vi a não-Euclidiana eu não sabia que existia. Então, eu acho que eu nunca tinha considerado outra Geometria. Então quando eu comecei a ver Geometria do Taxista, Geometria Hiperbólica, a Hiperbólica então que é mais diferente, eu falava: “ahn?”. Porque eu tinha que parar e... a minha cabeça é Euclidiana. A Geometria pra mim era Euclidiana. Então na primeira vez que eu vi, que foi na Geometria I, foi meio difícil sair da caixinha, sabe? E de abstrair. Mas aí você vê, você para, você reformula... enfim, foi um exercício. Foi um exercício. Mas não, assim, “ah, dentro da Hiperbólica...”. Tudo bem, é na Hiperbólica, poxa, é tudo curva, a reta é curva, sei lá, enfim... Não sei se estou falando besteira [...]. Achar Pitágoras usando a Hiperbólica, testar Pitágoras, enfim... Foi difícil sair da caixinha, decididamente. Com a Rosa, pra mim, como foi... Teve um primeiro contato lá, o segundo não conta muito, tá? A optativa lá, [...] não teve prova. Eu tinha o caderno completo, tá? Eu copiava tudo, mas ele não cobrava. Então a gente ia entendendo na hora, e ele falava e viajava, ia bem mais longe do que a Rosa falou... E foi interessante, mas você observa e tudo certo, né? Então assim, eu sinto que tive na Geometria I, que eu sinto que foi mais difícil pra mim, e aí veio com a Rosa, que aí foi quando começou a consolidar coisas, entende? Porque ela explica direitinho. Então eu achei que aí foi menos difícil de sair da caixinha.

P: Você acha que foi importante sair um pouco dessa caixinha?

J: Sim! Não só porque eu vou usar... Quer dizer, eu acho que não vou usar para dar aulas, mas o sair da caixinha é um exercício bom para outras coisas, então você acaba saindo da caixinha para qualquer tipo de aula que você... (houve um breve corte na fala por conta de problemas de conexão). Aí eu posso dar um exemplo de MAT1500, né? MAT1500 esse ano de pandemia foi um sair da caixinha, porque MAT1500 tem a ver com estágio e estágio tem a ver com escola funcionando e a escola não está funcionando presencialmente. E aí foi um tal de repensar coisas de uma forma, que eu acho que todo esse exercício de sair da caixinha aconteceu ali, né? Então aconteceu na disciplina, eu sou educadora da Barbara, que é minha orientadora, do meu projeto. Meu projeto é sobre análise de erro, então eu ia acompanhar a turma de MAT1500, a parte teórica de análise de erros, então o que eles achavam sobre isso, eles teriam um texto lá no meio da disciplina... Como eles iam trabalhar com análise de erros na parte teórica e depois, como eles iam aplicar isso no projeto deles, né? Que não existiu nem o projeto, ainda mais a aplicação do projeto... Então eu tive que repensar o meu projeto de dissertação, a Barbara teve que repensar a disciplina, a gente, todo mundo junto, tivemos que repensar como seria o estágio de MAT1500 de forma remota... Eu tô acompanhando seis grupos com professores de escola pública, e nesses grupos está acontecendo de tudo. Então, eu tô vendo todo mundo saindo da sua caixinha, entendeu? Então, esse exercício é um exercício bom, é um chacoalhão, né? Mas serve para você falar: "olha esse modo de você pensar quadradinho, não dá...". Exemplo, tem um professor que eu acompanho, que eu esqueci o nome da escola que ele trabalha agora, e ele dá aula para os oitavos e nonos e ele tem uma dificuldade muito grande de delegar, né? De deixar os estagiários ajudarem realmente, fazerem as coisas, enfim... E tem lá três estagiários pra fazer isso. Aí, ele não consegue dar a aula via *Meet*, os alunos dificilmente entram, e ele fez um grupo de *WhatsApp*, porque ele fala que o *WhatsApp* os alunos usam, e aí eles fizeram um plantão de Matemática no *WhatsApp*. Os alunos postam as dúvidas e os estagiários respondem. O primeiro plantão que teve, o professor que respondeu tudo! Tipo, ele não deixava os estagiários responderem. E aí a gente faz sempre reunião e eu escuto a seguinte frase dele: "Ai, o que está faltando para esses alunos é exercitar". E perguntamos: "Exercitar o que?". E ele disse: "Não, tem que repetir, repetir e repetir o exercício até decorar, porque senão não aprende". Aí eu pensei: "Isso que você está querendo saber aqui, será que ficou alguma coisa na nossa cabeça? Será que a gente decorou tudo?". Porque é isso! Você decora, você esquece. Você aprende, alguma coisa fica, mas a ideia é essa. E ele lá: "Não, tem que exercitar, exercitar e exercitar, até decorar". Nossa, então é como os professores que me ensinaram... na época que eu aprendi era assim. Então eu decorei muita coisa na minha vida. Muita coisa. Obviamente, já esqueci muitas delas. Então, esse é o problema de eu ter que aprender coisas, de não decorar e aprender. É muito complicado pra mim, porque minha vida inteira estudantil foi decorando, entendeu?

P: Quando você teve o contato com a Geometria axiomática, você acha que foi mais por esse lado de decorar ou você acha que com a axiomática deu para aprender o conteúdo de fato?

J: (houve novamente uma interrupção por conta de problemas de conexão e a entrevistada começou novamente a tecer a resposta) Eu falei que era muito difícil eu responder isso porque talvez eu não tenha essa consciência... Veja bem, eu não sei te dizer se eu decorei, ou se eu aprendi. Olha que coisa louca. Então, eu tenho certeza, o que eu posso te dizer é, se você me perguntasse essas coisas, na época da matéria, eu ia saber te responder, tudo bem?

Agora, quanto tempo faz? Não sei, já faz aí um tem tempo... [...] foi no segundo semestre do ano passado, é isso? Faz um ano? Com certeza eu já não sei te dizer as coisas... Não sei te dizer, não sei, é.... Eu vou me confundir se eu começar a dizer aqui, tenho certeza, né? Mas eu sei que eles existem, então assim, é uma referência que eu tenho. Então, eu não sei se você sabe que eu sou engenheira e na engenharia a gente tem este dizer que é: engenheiro não é aquele que sabe, é aquele que sabe onde procurar. E é isso que eu sinto muitas vezes também nas coisas que tem na faculdade, entende? Eu sinto que eu não tenho que saber as coisas todas de cabeça, entendidas, memorizadas ou entendidas, que seja... entendida é mais fácil, né? Mas quando eu não pego por um tempo, não fica na minha cabeça. Dificilmente vai ficar. Então eu não sei se eu não aprendi e tô esquecendo porque eu memorizei. Ou se é porque eu não peguei mais... Eu não sei, eu não consigo distinguir isso. Porque na hora eu acho que eu entendo, só que se você me perguntar agora eu não sei fazer um exercício, mas eu sei assim "nossa, calma, isso aí eu já vi e eu tenho só que retomar algumas coisas" e vou fazer, entende? [...]

P: Você considera que algum dos conteúdos apresentados na disciplina de geometrias não-Euclidianas, nas disciplinas de Geometria que você teve na graduação, tiveram alguma relação com os conteúdos ensinados na Educação Básica?

J: Sim, claro que tem total relação e acho que a Geometria II é a que tem mais relação pra mim, com conteúdo de Ensino Básico. Ah! A Geometria não-Euclidiana tem... mas você só faz relações.

P: Você pode explicar um pouquinho melhor?

J: Por exemplo, qualquer coisa da... soma dos ângulos internos dar 180 ou Teorema de Pitágoras... qualquer coisa desse gênero, se, hipoteticamente, eu estivesse na sala de aula, eu podia levar como curiosidade. Olha, essas coisas nem sempre são válidas em outras geometrias. Eu podia expandir, né? Então, eu acho que é uma coisa de ter tempo, o que é uma coisa muito difícil em sala de aula, né? Ter tempo, conhecimento da coisa, né? Para poder abstrair um pouquinho e aumentar esse leque de conhecimentos dos alunos. Então, eu acho que tudo que a gente aprendeu a faculdade... Geometria eu acho que foi uma coisa útil. Porque tem matérias lá que eu nem vou comentar aqui...

P: Então com base nisso que você me falou, vou fazer agora uma última pergunta para a gente fechar. Você falou que levaria essas discussões, algumas situações hipotéticas para os alunos, desde que tivesse tempo. Considerando esse ambiente onde você tivesse tempo para trabalhar essas discussões, você considera que são assuntos importantes para se levar para o aluno?

J: Esse conhecimento de que existem outras geometrias? Acho que sim, porque eu não tive, por exemplo. E olha o meu susto quando eu descobri que tinha. Eu fiz: "Ahn!? Como assim? que outra Geometria é essa que eu nunca soube que existia?". Ninguém nunca me contou. Então eu gostaria de saber "olha, eu estudo uma coisa mas existem outras, viu?". Então é bom saber que as coisas existem, porque você se sente quase enganado, tipo, como assim você estudou o negócio a vida inteira e não era a única coisa que existia? Então foi o susto que eu levei na Geometria I, quando começou uma coisa totalmente diferente. Então eu gostaria de ter sabido antes.