UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA DISCUSSÃO SOBRE SUAS POTENCIALIDADES

ANDRÉ AKINAGA BENITES

Projeto de Dissertação apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências

ORIENTADORA:
PROFESSORA DRA. BARBARA COROMINAS VALÉRIO

SÃO PAULO
2023

JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA DISCUSSÃO SOBRE SUAS POTENCIALIDADES

Versão original da dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientadora: Profa. Dra. Barbara Corominas Valério

São Paulo 2023

Agradecimentos

À minha mãe, Rita de Cássia Akinaga Cordeiro, que me ensinou desde pequeno o quão prazeroso era aprender, principalmente com jogos.

Ao meu pai, Paulo Assis Benites, que sempre foi um grande exemplo a seguir, onde me espelhei para buscar sucesso e me divertir no processo.

À minha irmã, Paula Akinaga Benites, participante, como parceira ou oponente, em diversos jogos ao longo da vida.

À minha namorada, Larissa Balbino Fornezari, que me ajuda, me apoia e me incentiva nos diversos projetos que propomos a fazer.

À minha orientadora, Barbara Corominas Valério, sempre muito dedicada e prestativa. Contribuiu e me apoiou muito no desenvolvimento desta dissertação tão querida.

Aos membros da banca, professora doutora Regina Célia Grando e professora doutora Emília de Mendonça Rosa Marques, pelas contribuições dadas durante a qualificação.

Aos meus colegas do IME-USP e Colégio Bandeirantes, com quem tive experiências lúdicas incríveis, seja pelos esportes, pelos jogos de cartas, jogos de intriga, jogos de tabuleiro, jogos de palavras, e diversos outros momentos felizes.

Aos meus professores de matemática, em especial, Carlos Oliveira, Manoel Rodrigues, Denis Martins, que me explicaram a Matemática com excelência e sempre com encanto; Aos meus professores de Olimpíada de Matemática, como Irineu Romera, que me ensinou diversos desafios estimulantes ; Aos meus professores de Educação Física e Técnicos de Basquetebol, em especial, Paulo Godoi e José Roberto Mariano Rodrigues Júnior (Juninho), que me ensinaram tanto sobre o jogo de Basquete e também lições de vida sobre sempre dar o seu melhor, com dedicação, para transformar o seu esforço em um resultado positivo.

Sumário

Resumo

BENITES, A. A. **Jogos no ensino de matemática da educação básica: uma discussão sobre suas potencialidades.** Dissertação de mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2023.

Este trabalho tem como objetivo a discussão das potencialidades do Jogo para a exploração da matemática escolar e acadêmica formal. Foi realizada uma pesquisa sobre a importância do Jogo por diversos pontos de vistas: biológico, psicológico, social, histórico e para o ensino de matemática; assim como foi elaborada e realizada uma oficina com profissionais da área de ensino de matemática para pôr em prática atividades baseadas em jogos e poder abrir uma discussão com seus participantes sobre quais potencialidades o jogo traz. Com a realização da pesquisa verificamos que o trabalho com jogos pode proporcionar uma dinâmica própria, que é estimulante e interativa, e que cria um espaço de atuação amplo, complexo e fértil.

Palavras-chave: Jogos, potencialidades do uso de jogos, jogos e matemática escolar, jogos e matemática acadêmica formal, educação básica.

Abstract

BENITES, A. A. **Games in Mathematical Education in Middle School and High School: a discussion on their potentialities.** Master Thesis - Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, 2023.

This work has the goal to discuss the potentialities of Games for the exploration in high school math and formal academic math. Research was done about the importance of Games in various points of view: biologic, psychologic, social, historical and for Math teaching; there was also a workshop that was elaborated and presented to education professionals to put the game activities into practice and to open the discussion with its participants about what potentialities games have. With our research we verified that working with games provides its own dynamic, which is stimulating and interactive, and creates a wide, complex and fertile space for action.

Key-words: Games, potentialities of the use of the game, games and high school math, games and formal academic math, secondary education.

Introdução

Os Jogos e as Brincadeiras tiveram e ainda têm um papel fundamental na História Humana, seja ela no sentido individual ou coletivo.

De maneira individual, as brincadeiras estão presentes desde os primeiros anos de vida, segundo Piaget (1964), nos Jogos de exercício. Os bebês utilizam Jogos de exercício para conhecer os movimentos do próprio corpo e dos objetos à sua volta. A exploração de seus movimentos é proporcionada pela curiosidade e pela vontade de aprender possibilitando seu desenvolvimento físico e perceptivo.

Da mesma forma, segundo Huizinga (2000), o desenvolvimento mental do ser humano é proporcionado pela exploração de sons e conceitos para construir a fala e a consciência. Um dos principais incentivos para esta exploração, são os jogos e brincadeiras, como os Jogos de exercício, Jogos de imaginação, os Jogos de palavras e os Jogos de regras. Conforme a pessoa se desenvolve, também se desenvolve as atividades que esta constrói.

Os Jogos e Brincadeiras não somente auxiliam no desenvolvimento individual de cada pessoa, mas também é uma importante atividade social. Por meio do Jogo, diversas pessoas podem trabalhar colaborativamente. Construções interpessoais como as regras são criadas para regularizar essas atividades, assim como os modos de convívio do coletivo.

A implementação de regras e construções interpessoais que permitem a colaboração coletiva é um fator importante não apenas para uma geração de pessoas, mas intergeracional, fazendo parte de nossa história.

Devido a todas essas relações entre os Jogos e o desenvolvimento humano, seja ele em escala individual, social ou histórica, entendemos que existe uma importância em trabalhar com Jogos em sala de aula.

O motivo pelo qual escrevo esta dissertação é que fui e continuo sendo mais uma dentre todas estas pessoas que se encantam e se empolgam com jogos. Dentre todas as memórias da infância, os jogos certamente ocupam uma grande parte delas.

Carrego esta herança desde antes do nascimento. Sou filho de uma psicopedagoga com um engenheiro, ambos ávidos jogadores. Aprendi com eles a associar o jogo e a brincadeira com o aprendizado, e vice-versa. E as lições que tive certamente me ajudaram com o restante de minha vida.

Quando comecei a refletir sobre a temática do meu Mestrado, vários tópicos me vieram à mente: trigonometria, contagem, logaritmos… Porém, antes de tudo, quis refletir sobre qual era a razão de fazer um trabalho de mestrado. A razão era que eu havia escolhido a matemática pelo gosto e que eu gostaria de compartilhar isto com os outros. Fui perceber que a motivação que me fazia gostar da matemática era a mesma que se apresenta em um jogo.

Ao pesquisar sobre o tema, fiquei impressionado com a amplitude e a potência do termo. Ao longo da história humana, em todas as culturas, em todos os tempos e em todas as regiões, foram criados jogos e atividades lúdicas. O Jogo é algo intrínseco ao ser humano e, para alguns autores como Huizinga (2000), o grau de ludicidade é o que define o ser humano. Além disso, o Jogo pode ser encontrado para além da espécie humana, nos animais, principalmente mamíferos e aves, como Groos (1898) observa. O Jogo é uma ferramenta psíquica poderosa que amplia a cognição e aumenta a motivação, dois aspectos fundamentais do aprendizado.

Ao longo da pesquisa iremos utilizar uma distinção entre Jogos e Brincadeiras que podem não aparecer em outros textos de referência, pois estas duas palavras distintas, em outras línguas, podem ter como correspondente a mesma palavra. Iremos dizer que a **Brincadeira** é uma atividade despretensiosa, que busca apenas a exploração e o lazer, enquanto **Jogo** é uma atividade de lazer regrada com objetivo.

Também utilizaremos, no texto, a palavra "**quebra-cabeça**" para denotar uma atividade lúdica individual em que o cumprimento de seu objetivo é resultado de um raciocínio mental, inspirada na definição de Crawford (2003).

Para a definição de **lúdico**, utilizaremos a definição de Grilo (2021), onde o Estado Lúdico é um estado de entrega, onde o sujeito sofre um afastamento da realidade quando está engajado em uma atividade.

> Sumariamente, o lúdico ocorre a partir de uma "entrega" da pessoa (arrebatamento) a uma destas manifestações de comportamento lúdico (de jogo, de dança, de cantigas, de parlendas ou de desafios, por exemplo). Essa "entrega" engendra o Estado Lúdico, quer dizer, momento pelo qual a pessoa está arrebatada/absorvida pela situação e contiguamente, faz sentido para ela. (GRILO, 2021, p. 100-101)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), "Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções."(BRASIL, 1998b, p. 46). Os Jogos trazem diversos benefícios como o desenvolvimento de habilidades socioemocionais assim como estimular uma boa relação com o aprender pela sua forma recreativa.

Os Jogos são importantes como um exemplo de atividade com regras, não apenas as institucionalmente impostas, mas as regras sociais que habilitam o convívio e a cooperação entre pares, assim como uma atividade que estimula a formação de estratégias, o raciocínio tático e a resolução de problemas. Estas são habilidades essenciais para uma vida independente como cidadão.

Um motivo da importância do uso de Jogos para a Educação é o fato de que o Jogo é necessariamente coletivo e social. Infelizmente, a Matemática ganhou uma imagem estereotipada de ser um caminho individualista e solitário, provavelmente devido ao exagero de exercícios individuais e exaltação de conquistas de poucos “gênios”, quando, em realidade, boa parte da pesquisa matemática, e do desenvolvimento humano em qualquer área do conhecimento, se dá a partir da colaboração entre pessoas.

O objetivo desta dissertação é discutir as potencialidades do Jogo para a exploração da matemática escolar e acadêmica formal. Para abrir a discussão sobre a importância dos Jogos na educação matemática, foi elaborada e realizada uma oficina com profissionais da área de ensino de matemática para avaliarmos as potencialidades do uso de Jogos na sala de aula.

Nos próximos capítulos faremos uma contextualização dos Jogos segundo diferentes pontos de vista: o biológico, o psicológico, o sociológico, o histórico e o pedagógico; e iremos relatar sobre a execução da oficina de formação de professores pretendida pelo trabalho.

1: A importância dos Jogos por diferentes pontos de vista

O intuito deste capítulo é apresentar a base teórica que iremos utilizar para fundamentar nossos argumentos. Apresentaremos a importância dos Jogos pelo ponto de vista biológico, psicológico, sociológico, histórico e pedagógico;

1.1 A importância dos Jogos: Ponto de vista Biológico

A base de todo o argumento sobre a importância das Brincadeiras e Jogos do ponto de vista biológico está na teoria de Groos (1898, 1901). Ao estudar o fenômeno do brincar e do jogar pela biologia comportamental, o autor busca a razão deste tipo de comportamento no reino animal e qual a relação do comportamento de brincadeiras do animal com o comportamento de jogos e brincadeiras do ser humano. Iremos considerar que, em sua maior parte, os animais estão mais **brincando** do que **jogando**, uma vez que as atividades que eles se engajam mais se relacionam a uma experimentação sem regras ou com regras bastante maleáveis, ao invés de um **jogo** com regras e objetivos definidos, como são os jogos dos seres humanos.

Groos (1901) explica sua teoria do brincar pela perspectiva fisiológica, biológica, psicológica, estética, sociológica e pedagógica. Segundo Piaget,

> Não se poderia exagerar a importância que têm tido as profundas noções opostas por K. Groos, desde 1896, às ideias comuns sobre o jogo. Apesar dos conceitos proféticos dos grandes educadores, a pedagogia tradicional sempre considerou o jogo como uma espécie de alteração mental ou, pelo menos, como uma pseudo-atividade, sem significação funcional e mesmo nociva às crianças, que ele desvia de seus deveres. Por seu lado, o senso comum psicológico, dominado por essa espécie de adultocentrismo que foi o grande obstáculo das pesquisas genéticas, só via no jogo uma distração ou a manifestação de um desperdício de energia, sem se perguntar por que as crianças antes jogam de tal maneira que de outra. (...) K. Groos viu no jogo um fenômeno de crescimento - crescimento tanto do pensamento quanto da atividade - e formulou a si próprio a questão do porquê das diversas formas de jogo. (PIAGET, 1964, p. 194)

Para Groos (1898), a atividade do Brincar não deve ser vista como uma atividade supérflua e sem razão de existir. Pelo contrário, é um fenômeno com uma importância primordial para o desenvolvimento do animal para que ele não se torne um adulto fisicamente e mentalmente despreparado para as atividades que precisa performar. O Brincar, como forma de aprendizado e preparo, se torna uma necessidade biológica com um papel fundamental para o desenvolvimento e a adaptabilidade do indivíduo.

> A incidência de brincar em animais é instrutiva por si mesma: [...] Declaro que a motivação fundamental de toda a brincadeira é o aprendizado. Essa é a motivação original do brincar, e certamente ainda retêm muita de sua importância. (CRAWFORD, 1984, p.13, tradução nossa)[1]

Sobre a perpetuação deste comportamento, o ato de brincar tem em sua origem o instinto de brincar. A aprendizagem propiciada pela brincadeira seria o suficiente para fazer com que um animal de ordem superior execute as suas tarefas a um nível de sustentação. Se fosse possível que os instintos por si só fossem suficientes para a execução destas tarefas, então essas tarefas seriam executadas com perfeição por um mecanismo inerente e inato, porém, assim não haveria aprendizagem, adaptabilidade e progresso das habilidades ao longo da vida, características de suma importância para os animais de ordem superior.

> A partir do momento que a inteligência é suficientemente evoluída para ser mais útil que o instinto mais perfeito, então a seleção irá favorecer os indivíduos de quem os instintos em questão aparecem prematuramente e de formas menos elaboradas - de forma que não necessita movimentos sérios, e são apenas pelo propósito de prática e exercícios - isto é, que irá favorecer os animais que brincam. (GROOS, 1898, p. 76, tradução nossa)[2]

O ato de brincar não é meramente uma atividade importante dentro da juventude de um animal de ordem superior, mas que esta própria atividade define o que é a juventude. “A juventude só existe para que os animais tenham tempo de brincar” (GROOS, 1898, p. 75). Segundo Groos (1898) ainda, não é apenas na juventude que o animal brinca, esta atividade se mantém para as fases restantes da vida para manter a mente e o corpo em atividade.

Apesar desta visão utilitarista do ato de brincar, em que sua principal função é o desenvolvimento das habilidades motoras e mentais, aparentemente os animais não as executam por tarefa ou obrigação, mas pelo deleite e pela fruição.

> Nada é mais comum do que os animais terem prazer praticando qualquer instinto para seu próprio bem. Quantas vezes você já viu pássaros voar levemente, planando e navegando pelo ar obviamente por prazer? [..] Portanto, não é nem um pouco surpreendente que o pássaro macho deve continuar a cantar para seu próprio

---

[1] Texto original: The incidence of game-playing in animals is itself instructive; [...] I claim that the fundamental motivation for all game-playing is to learn. This is the original motivation for game-playing, and it surely retains much of its importance.

[2] Texto original: “At the moment when intelligence is sufficiently evolved to be more useful in the struggle for life than the most perfect instinct, then will selection favour those individuals in whom the instincts in question appear earlier and in less elaborated forms - in forms that do not require serious motive, and are merely for purposes of practice and exercise - that is to say, it will favour those animals which play.”

> entretenimento mesmo depois da temporada de cortejo acabar. (DARWIN, 1871, p.60, apud GROOS, 1898, p.81, tradução nossa)[3]

Sobre as formas do ato de brincar encontradas entre os animais, Groos (1898, 1901) destaca a experimentação, as brincadeiras de movimento, as brincadeiras de caça, as artes de construção, as brincadeiras de carinho/cuidado, as brincadeiras imitadoras e a curiosidade. Sobre os seres humanos; brincadeiras sensoriais, motoras, mentais - como memória, imaginação, atenção e razão.

Groos (1898) tem uma importante contribuição ao trazer argumentos de que o brincar está diretamente atrelado ao desenvolvimento físico, mental e social dos indivíduos das espécies que brincam.

1.2: A Importância dos Jogos: Ponto de vista Psicológico

Da mesma forma que podemos reconhecer um papel de destaque do Jogo do ponto de vista biológico para o desenvolvimento físico, intelectual e social do ser humano, o Jogo também tem um papel importante no processo de desenvolvimento psicológico de cada indivíduo.

Piaget (1964) traz a importância do Jogo para a aquisição da linguagem e das funções simbólicas e imaginativas. Assim como Groos(1901), Piaget (1964) se dedica a explicar a psicologia humana através das observações comportamentais dos indivíduos, principalmente da criança, para entender os princípios básicos da mente.

Um ponto em comum, desenvolvido por ambos, é a importância da imitação para a aquisição de novos conhecimentos. Porém, os autores têm diferentes opiniões sobre a caracterização da imitação como fenômeno instintivo ou hereditário. Enquanto Groos (1898) apresenta uma visão evolutiva e instintiva para a imitação, para Piaget (1964), nas crianças, a imitação é um esforço intencional que representa um sinal de inteligência pela busca da aprendizagem.

E, para além da imitação para a aprendizagem, citada por Groos (1898) e Piaget (1964), a participação e a elaboração de jogos é fundamental para a aprendizagem da criança. O Jogar e o Brincar para a criança é experimentar, manipular objetos a fim de entender como estes se comportam nas mais variadas situações. Esta atitude de tentativa e erro em diferentes cenários

---

[3] Texto original: “Nothing is more common than for animals to take pleasure in practicing whatever instinct they follow at other times for some real good.How often do we see birds which fly easily, gliding and sailing through the air obviously for pleasure[...] Hence it is not at all surprising that male birds should continue singing for their own amusement after the season for courtship is over.”

é uma postura importante para a aprendizagem de conceitos, sejam eles dos mais simples até os mais complexos.

Segundo Piaget (1964), a gênese do Jogo ocorre na fase sensório-motor, durante os primeiros dois anos de vida, e tem uma função fundamental no desenvolvimento da inteligência da criança. O Jogo se mantém através das outras fases de desenvolvimento, desde a pré-operatória (dos dois anos até os sete), passando para a operatória concreta (dos sete anos até os doze) e até a operatória abstrata (a partir dos doze).

Se pensarmos nos principais brinquedos das crianças na fase sensório-motor, temos os jogos de exercício que estimulam as sensações do corpo e a movimentação. Podemos pensar em exemplos como os chocalhos que envolvem o sentido da audição e da causa e efeito do movimento do bebê, bonecos de pelúcia que envolvem o tato e podem, em alguns casos que tenha algum cheiro especial para estimular o olfato, ou simplesmente o ato de correr e derrubar objetos que pode estimular o tato e a audição, dependendo do objeto.

Durante a fase pré-operatória, entre 2 a 7 anos de idade, a criança está em uma fase de domínio da linguagem e da imaginação. Nesta fase, ambos os autores Piaget (1964) e Vygotsky (1991) explicitam a importância dos jogos simbólicos (como a brincadeira de faz-de-conta) que é a manifestação do desenvolvimento deste mundo imaginário para a criança.

> Assim, um objeto adquire uma função de signo, com uma história própria ao longo do desenvolvimento, tornando-se, nessa fase independente dos gestos das crianças. Isso representa um simbolismo de segunda ordem e, como ele se desenvolve no brinquedo, consideramos a brincadeira do faz-de-conta como um dos grandes contribuidores para o desenvolvimento da linguagem escrita - que é um sistema de simbolismo de segunda ordem. (Vygotsky, 1991, p.125)

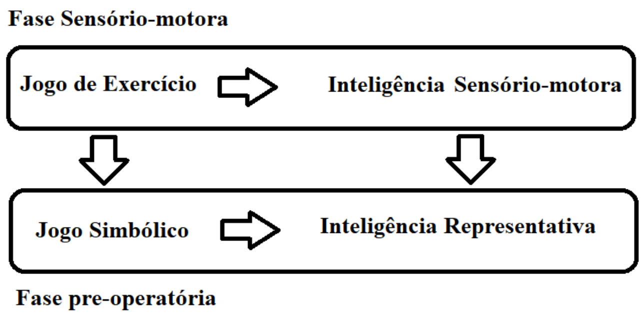
Sobre os tipos de jogos correspondente às duas primeiras fases de desenvolvimento da criança, Piaget (1964) explica a relação entre o jogo e a inteligência correspondente a cada etapa da seguinte maneira:

> O jogo simbólico está para o jogo de exercício como a inteligência representativa está para a inteligência sensório-motora. Entretanto, se existisse assim filiação no sentido diacrônico, é preciso acrescentar, do ponto de vista sincrônico, que o jogo simbólico é, para a inteligência representativa, aquilo que o jogo de exercício é para a inteligência sensório-motora. (PIAGET, 1964, p. 209)

Portanto, Piaget (1964) cria uma relação direta entre o jogo e a aquisição da inteligência em diferentes fases de desenvolvimento da criança. O jogo, que envolve a experimentação, a manipulação, o teste, a reflexão e a busca pela melhora, é parte fundamental do processo de aquisição da inteligência.

Baseado nestas colocações, podemos propor uma esquematização da relação entre o jogo e a inteligência da criança nas diferentes fases de desenvolvimento:

Figura 1 - Esquematização da relação Jogo-Inteligência



Fonte: Autor

Piaget (1964) não chega a estender este conceito para as outras fases do desenvolvimento, porém podemos acreditar que esta mesma analogia pode ser utilizada para as outras fases, onde o Jogo faz parte do processo de desenvolvimento da inteligência.

Durante a segunda etapa da fase pré-operatória, entre 4 a 7 anos de idade, já começa o princípio dos jogos de regra. Jogos em que existe algum tipo de regularização. Podemos pensar em exemplos de alguns jogos de regra como pega-pega, esconde-esconde, amarelinha, queimada, esportes como futebol, basquete, handebol, vôlei, tênis, entre outros.

Durante a fase operatória concreta, entre os 7 e 12 anos de idade, a criança já está desenvolvendo seu raciocínio lógico, porém ainda se baseia principalmente nas experiências concretas, ao invés do intelecto. Dentre a variedade de jogos que a criança pratica, podemos ressaltar a regularização como a característica que mais se aprofunda nesta fase. Durante esta fase, podemos dizer que é a fase onde, para criança, a brincadeira começa a se tornar Jogo. Ou seja, a atividade deixa de ser despretensiosa, feita apenas para próprio prazer, e passa a se tornar uma atividade regrada, visando um objetivo.

O desenvolvimento da ideia de regra para a regularização de uma atividade é importante para educação de qualquer indivíduo, pois a regra não está sendo imposta de maneira ditatorial, mas há um acordo entre os participantes justamente para que a atividade possa ser realizada. Se não houver regras, não há jogo. Não há como existir o futebol se não restringir o uso da mão para pegar a bola. Se alguma pessoa ignora as regras do jogo e não se insere na mesma ilusão que o grupo está se engajando, esta pessoa está "quebrando" a ilusão e a atividade como um todo.

Durante a fase operatória abstrata, o nível de abstração e simbolismo estão mais desenvolvidos e o raciocínio não necessariamente está vinculado a uma experiência concreta.

Diferente dos jogos de regra presentes na fase operatória-concreta, que costumam possuir algum tipo de apelo ao mundo concreto, como por exemplo, o futebol, basquete, boliche, sinuca, bola de gude, tênis e peteca, os Jogos Abstratos são predominantemente intelectuais e não necessitam de habilidade física. Este é o caso, por exemplo, do Baralho, do Xadrez, do Mancala e do Gamão. Vale dizer que estas atividades não cessam a partir do momento em que a pessoa passa pela faixa etária. Geralmente, a aquisição destas atividades é acumulativa. A pessoa segue exercendo as atividades criadas nas fases de desenvolvimento ao longo da vida, ainda que em menor grau.

> Em compensação, se no adulto se conserva apenas alguns resíduos dos jogos de exercício simples (por exemplo, brincar com o seu aparelho de rádio) e dos jogos simbólicos (por exemplo, contar uma estória), o jogo de regras subsiste e desenvolve-se mesmo durante toda a vida (esportes, xadrez, jogos de cartas etc.) . (PIAGET, 1964, p.183)

Podemos perceber que, para Piaget (1964), os jogos são fundamentais para o desenvolvimento da inteligência nas diferentes fases de desenvolvimento da criança e que persiste ainda na vida adulta.

Para a formação do símbolo, Vygotsky (1991) debruçou-se no tópico do brinquedo para a criança, que é uma manifestação de seu imaginário onde pode atribuir um significado a um objeto diferente de seu significado original. Podemos pensar em exemplos como um boneco que representa uma pessoa ou, como Vygotsky(1991) cita, um cabo de vassoura que se torna um cavalo.

Existe um desvínculo entre a relação antes direta entre o pensamento e a realidade. Esta é a base da formação de um símbolo, ou seja, representar algo por aquilo que não é. O símbolo é a base para diversas construções mentais, seja ela a fala (onde elaboramos sons para representar ideias), na escrita (onde elaboramos desenhos para representar sons) e na Matemática (onde elaboramos uma notação visual para representar um conceito ideal).

O símbolo também possibilitou outras construções interpessoais como o Direito, o Governo, a Religião, o Comércio e a Arte. Estes objetos sociais promoveram grandes avanços para a formação da sociedade.

1.3: A Importância dos Jogos: Ponto de vista Sociológico

Os Jogos possuem um caráter social, onde diversos indivíduos podem integrar uma mesma atividade, seguindo as mesmas regras e em busca de um objetivo em comum. Por isso, os Jogos possuem uma relevância para além do desenvolvimento biológico, físico e intelectual do indivíduo, esta relevância faz parte do escopo da Sociologia, campo que estuda o desenvolvimento do ser humano de maneira coletiva.

Para definir o que é um jogo, temos autores como Huizinga (2000) e Caillois (1990) que reconhecem que suas tentativas de definição não são suficientes para englobar tudo aquilo que é jogo e, ao mesmo tempo, delimitar tudo aquilo que não, porém trazem algumas características essenciais do jogo. Dentre estas características, temos a liberdade, a delimitação, a incerteza, a improdutividade, a regulamentação e a ficção (Caillois, 1990).

Para a Sociologia, os Jogos possuem uma importância imensa na evolução humana pois "é no jogo e pelo jogo que a civilização surge e se desenvolve" (HUIZINGA, 2000: prefácio). Inúmeros conceitos fundamentais da sociedade são criados a partir dos Jogos. Dentre estes conceitos fundamentais, temos a fala e a linguagem:

> Na criação da fala e da linguagem, brincando com essa maravilhosa faculdade de designar, é como se o espírito estivesse constantemente saltando entre a matéria e as coisas pensadas. Por detrás de toda expressão abstrata se oculta uma metáfora, e toda metáfora é jogo de palavras. Assim, ao dar expressão à vida, o homem cria um outro mundo, um mundo poético, ao lado da natureza. (HUIZINGA, 2000, p. 7)

A criação de um outro mundo, construído pela abstração, é um tema recorrente nas discussões sobre a natureza do Jogo. Segundo Huizinga (2000), a própria palavra "ilusão" carrega em sua etimologia o significado de "em jogo" (de *inlusio*, *illudere* ou *inludere*). Brougère (1998), se debruça na questão de como, a partir da atividade do brincar, se forma uma série de esquemas, procedimentos, referências intersubjetivas e vocabulários próprios da brincadeira e que compõem o que é chamado de cultura lúdica.

Outra associação feita com os Jogos é a relação com o Mito e o Culto. Ambos são fenômenos sociais que buscam razões e significados em uma dimensão para além da corpórea e natural, utilizando necessariamente uma abstração que, no caso, inicia no lúdico. Estes fenômenos se desmembraram em diversas outras entidades que se tornaram a base da nossa civilização.

> Outro exemplo é o mito, que também é uma transformação ou uma imaginação do mundo exterior, mas implica em um processo mais elaborado e complexo do que ocorre no caso das palavras isoladas. [...] Se, finalmente, observarmos o fenômeno do culto, verificaremos que as sociedades primitivas celebram seus ritos sagrados, sacrifícios, [...] dentro de um espírito de puro jogo, tornando-se aqui o verdadeiro sentido da palavra. Ora, é no mito e no culto que têm origem as grandes forças instintivas da vida civilizada: o direito e a ordem, o comércio e o lucro, a indústria e a

> arte, a poesia, a sabedoria e a ciência. Todas elas têm suas raízes no solo primevo do jogo.(HUIZINGA, 2000, p. 8)

Com estes exemplos, podemos perceber a extensão da palavra "jogo", suas implicações na sociedade atual e a importância dos Jogos na História da Civilização Humana.

Devido a importância do Jogo na sociedade atual, podemos trazer indicativos da importância do aprendizado de Jogos e da História dos Jogos nas escolas. Primeiramente para os alunos conhecerem a história da formação das instituições e entidades interpessoais, como o Direito, o Governo, a Religião, o Comércio e a Arte além de o quanto cada uma destas entidades influenciou a História da Humanidade; em segundo lugar, para trazer situações que estimulem o entendimento da influência destas entidades no mundo contemporâneo para os alunos, para que possam entender melhor a atualidade, e que este conhecimento ajude o aluno a tomar decisões mais conscientes para exercer seu papel como cidadão.

1.4 : A importância dos Jogos: Ponto de vista Histórico

O caráter social do jogo permitiu que indivíduos pudessem criar construções interpessoais cuja capacidade excedia a soma de suas partes. A partir deste ponto, o ser humano passou a criar invenções ainda mais poderosas e complexas. No que se segue, iremos apresentar o progresso do intelecto e da sociedade humana ao longo do tempo, a partir de quatro grandes momentos históricos.

O primeiro grande momento da história da humanidade foi enquanto o ser humano se apoiava no **corpo** para fazer matemática. Porém, esse instrumento de contagem possui limitações. Uma das limitações está na quantidade de números que podem ser representados com os dedos das mãos e outra é a incapacidade de guardar vários números diferentes. Como temos apenas duas mãos e dez dedos, temos um potencial bem limitado de números que poderemos guardar com estes recursos. Sobre o uso das mãos para contar, podemos perceber a importância do uso do corpo para a aquisição da aritmética na infância.

> No início da infância, a criança brinca com seus dedos. Constitui na primeira noção da criança de seu próprio corpo. Então a criança toca tudo para que se familiarize com o mundo, e isso também é feito principalmente com as mãos. Um dia, um professor bem-intencionado que queria que a Aritmética fosse 'mental', proibiu sua classe de 'contar com os dedos. Sem perceber, a professora havia negado à criança o uso de seus corpos. Já vi várias crianças profundamente aliviadas por poder usar suas mãos novamente: seus corpos foram finalmente aceitos. [...] Habilidades numéricas e todo o conjunto de operações lógicas da aritmética podem ser seriamente prejudicados

devido à falha de aceitar o corpo. (WEYL-KAILEY, 1985, apud IFRAH, 2000, p.5, tradução nossa)[4]

Ifrah (2000), afirma ainda, que os dedos das mãos foram grandes aliados na aquisição numérica humana, não apenas para a aquisição aritmética na infância, mas para a criação de sistemas numéricos primitivos.

Conforme citado por Ifrah (2000), uma das maneiras mais comuns de se utilizar os dedos das mãos para representar um número seria quando o número representado corresponde ao número de dedos levantados, o que provavelmente deu origem aos sistemas numéricos de base 10. Outra maneira tradicional de usar as mãos como instrumento de contagem em outras culturas seria utilizar o polegar para contar as falanges dos outros dedos, podendo contar até uma dúzia com uma mão (3 falanges em 4 dedos = 3x4 = 12 falanges), possível explicação para a origem dos sistemas numéricos de base 12. Ou, ainda, utilizando os dedos das mãos e dos pés, pode ser a explicação da origem de sistemas de base 20. Esta foi a origem da escolha da base numérica de diversas culturas e é a maneira mais usual de se utilizar os dedos para contagem, limitado pelo número de dedos das mãos e dos pés.

Vale dizer, no entanto, que a contagem com os dedos vai além da correspondência "um a um" e pode utilizar ideias matemáticas mais complexas para representar números maiores. Ifrah (2000) conta como, utilizando as articulações e os nós dos dedos, o Antigo Egito, os Romanos, os Árabes e os Persas (além dos Cristãos do Ocidente na Idade Média) representavam todos os números de 1 a 9.999 . Um outro exemplo destas representações está no livro *Liber Abaci* de Fibonacci (2002) onde se mostra como representar qualquer número de dois dígitos apenas com uma mão (utilizando sinais com o indicador e polegar para representar as dezenas e o restante dos números para representar as unidades). Ifrah (2000) também conta que os chineses criaram um sistema que conta até 100.000 com apenas uma mão.

Mesmo que algumas culturas não tenham criado numerais e formas de expressar números de grande valor, atividades utilizando grandes números eram possíveis graças à noção matemática de correspondência de "um para um". Esta correspondência, que é a base da bijeção, é uma noção primitiva anterior ao contar que possibilita, por exemplo, comparar dois conjuntos de objetos e dizer qual deles possui mais elementos.

---

[4]Texto original: In earliest infancy, the child plays with his or her fingers. It constitutes the first notion of the child's own body. Then the child touches everything in order to make acquaintance with the world, and this also is done primarily with the hands. One day, a well-intentioned teacher who wanted arithmetic to be "mental", forbade finger-counting in his class. Without realising it, the teacher had denied the children the use of their bodies, and forbidden the association of mathematics with their bodies. I've seen many children profoundly relieved to be able to use their hands again: their bodies were at last accepted [. .] Number skills and the whole set of logical operations of arithmetic can thus be seriously undermined by failure to accept the body. [L. Weyl-Kailey (1985)]

Em algum momento, os seres humanos perceberam que poderiam utilizar objetos, associado com seus esquemas de uso para formar **instrumentos** que pudessem ultrapassar as limitações de seu próprio corpo. Com a utilização de instrumentos começa-se o segundo grande momento da história humana.

Um exemplo clássico do uso de instrumentos para a contagem utilizando a correspondência "um para um" é o do pastor de ovelhas que, apesar de ter um número de ovelhas maior do que consegue contar (por exemplo, 55), ele pode utilizar uma pedra e um pedaço de osso para colocar um risco no osso para cada ovelha que sair do curral. Ele estará fazendo 55 riscos sem saber contar até 55. Ao final do dia, para cada ovelha que entrar no curral, ele move o dedo horizontalmente cobrindo mais um dos riscos. Desta forma, o pastor consegue saber se todas as ovelhas chegaram, mesmo sem saber contar quantas ovelhas tinha. Da mesma forma que ele utilizou riscos em um osso, o pastor poderia ter utilizado pedrinhas dentro de um saco.

Para o terceiro grande momento da história humana, temos uma mudança cognitiva do ser humano. Iremos, para fim de simplificação, ilustrar esta mudança cognitiva pelo uso do **símbolo** em um grau mais elevado do que o anterior. O símbolo é desenvolvido quando o objeto ganha um significado que vai para além do objeto. Por exemplo, um anel de casamento é um pedaço de metal, mas representa a união de duas pessoas; uma vassoura pode representar um cavalo; e uma peça de madeira pode representar um rei.

É preciso dizer que existe uma noção simbólica nos momentos anteriores: Pelo corpo, temos comunicação por meio de símbolos sonoros representando ideias; pelas brincadeiras e jogos temos um símbolo ilusório para que estes ocorram; e pelos instrumentos temos o símbolo no objeto devido a sua função.

Porém, nestes três casos, temos saltos cognitivos que permitiram um outro patamar para o uso de símbolos: para as relações sociais humanas, para além da comunicação sonora, temos as construções interpessoais como Governos e Religiões; para as brincadeiras e jogos passamos de atividades pouco complexas como jogos de luta, jogos de movimento ou jogos de arremesso simples para a jogos simbólicos e abstratos como Mancala, Senet, O jogo de Ur, Damas, Go e Xadrez; para o uso de instrumentos, passamos desde ferramentas de pedra, cuja função principal era a concreta, de bater e cortar objetos, para instrumentos cuja principal função era a simbólica, como o Homem-Leão da caverna de Stadel.

Este salto cognitivo é o que Harari (2015) chama de Revolução Cognitiva, e considera a primeira das grandes revoluções humanas, quando o ser humano atingiu o poder de imaginar algo para além da realidade. Huizinga (2000) também caracteriza um grande salto entre a fabricação de ferramentas e a abstração simbólica humana que se encontra presente no lúdico.

> Em época mais otimista que a atual, nossa espécie recebeu a designação de *Homo Sapiens*. Com o passar do tempo, acabamos por compreender que afinal de contas não somos tão racionais quanto a ingenuidade e o culto da razão do século XVIII nos fizeram supor, e passou a ser moda designar nossa espécie como *Homo faber*. Embora *faber* não seja uma definição do ser humano tão inadequada como *sapiens*, ela é, contudo, ainda menos apropriada do que esta, visto poder servir para designar grande número de animais. Mas existe uma terceira função, que se verifica tanto na vida humana como na animal, e é tão importante como o raciocínio e o fabrico de objetos: o jogo. Creio que, depois de *Homo faber* e talvez ao mesmo nível de *Homo Sapiens*, a expressão *Homo ludens* merece um lugar em nossa nomenclatura. (Huizinga, 2000, prefácio)

Observamos que a grande diferença entre o segundo e o terceiro momento da evolução humana está na vinculação do significado ao objeto e da desvinculação do objeto e significado. Com esta diferença, a cognição humana passou a atuar para além dos objetos concretos e criar uma vastidão de objetos interpessoais que auxiliaram a cooperação em grandes números e com alta flexibilidade, algo sem precedentes na Natureza até então.

Segundo Harari (2015), dentre algumas das maiores conquistas da Revolução Cognitiva está um aprimoramento na fala e em nossos meios de comunicação, aumentando a complexidade das nossas ações; a habilidade de viver em grupos maiores de indivíduos, como uma tribo de até 150 pessoas; a habilidade de criar construções interpessoais como religiões, nações, empresas e direitos humanos que possibilitou a cooperação de um grande número de pessoas não necessariamente familiarizadas uns com os outros. De maneira similar, podemos dizer que Huizinga (2000) descreve o mesmo fenômeno quando diz que “é no jogo e pelo jogo que a civilização surge e se desenvolve” (Huizinga, 2000, prefácio). Para este autor, a responsável por esse avanço cognitivo é justamente a abstração lúdica.

Para além da Revolução Cognitiva, iremos incluir os feitos da Revolução Agrária dentro deste terceiro grande momento da história humana, que possibilitou a criação de impérios, religiões e empresas de escala intercontinental, além do registro na forma de escrita alfabética e matemática. É neste contexto que nasce os primeiros jogos de tabuleiro registrados, Senet no Antigo Egito e o jogo de Ur na Mesopotâmia (Murray, 1978), assim como o baralho e jogos de escrita.

Para o quarto e último grande momento histórico, iremos tratar de um tipo de invenção que viabilizou a globalização instantânea. As invenções **digitais** proporcionaram uma intercomunicação audiovisual e interativa por todo o planeta de maneira imediata. Após o símbolo trazer um significado para além de um objeto concreto, temos a internet que possibilita a conexão instantânea de pessoas ao redor do globo por uma mesma rede, uma mesma construção interpessoal, o mesmo mundo abstrato que chamamos de mundo digital.

Os recursos digitais são as maiores invenções da história da humanidade em termos de transmissão e armazenamento de informações: " 95 por cento de toda a informação existente no planeta é digitalizada e a maioria acessível pela Internet e outras redes de computador" (Hilbert e López, 2011, apud Castells, 2013, p.132)

Junto da grande influência das tecnologias digitais na civilização humana e na Matemática (pela rapidez dos cálculos e pelos novos campos criados pela ciência da computação), sua influência também foi impactante para os jogos, onde possibilitaram um meio midiático interativo com capacidade inigualável:

> Originalmente desenvolvido como uma máquina de cálculos numéricos, o computador assumiu uma nova personalidade quando lhe foi dado gráficos e capacidades sonoras. Essas capacidades fizeram do computador mais poderoso: agora podia comunicar-se com seres humanos, não apenas em uma linguagem fria e distante de dígitos, mas na emocionalmente imediata e cativante linguagem de imagens e sons. Com essa habilidade veio uma nova possibilidade, antes inimaginável: a possibilidade de usar o computador artisticamente como um meio para comunicação emocional. O jogo de computador emergiu como o principal veículo para essa comunicação. (CRAWFORD, 1984, p.xii, tradução nossa)[5]

Castells (2013) comenta sobre os efeitos da internet nas formas de se relacionar socialmente e politicamente com o mundo. Nos dias contemporâneos, cada vez mais o mundo digital influencia nossas relações presenciais. Esta influência não resultará em um perigo de substituição da sociabilidade presencial pela sociabilidade digital, mas haverá uma reconstrução simbiótica de ambas devido ao novo cenário imposto:

> A sociabilidade é reconstruída como individualismo e comunidade em network por meio de uma busca por indivíduos com ideias semelhantes em um processo que combina interação online com interação offline, ciberespaço e espaço local. A individuação é o processo chave na constituição dos sujeitos (individuais ou coletivos), a rede é a forma de organização construída por esses sujeitos; (CASTELLS, 2013, p.136, tradução nossa)

[5] Texto original: Originally developed as a number-cruncher, the computer assumed a new personality when it was given graphics and sound capabilities. These capabilities made the computer more powerful: it could now communicate with human beings, not just in the cold and distant language of digits, but in the emotionally immediate and compelling language of images and sounds. With this ability came a new, previously undreamed-of possibility: the possibility of using the computer artistically as a medium for emotional communication. The computer game has emerged as the prime vehicle for this communication.

O tamanho do impacto das tecnologias digitais no dia-a-dia contemporâneo, de forma tão rápida e recente, faz com que seja importante investigar a repercussão das tecnologias digitais na formação de cidadãos para o futuro. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na etapa do Ensino Médio, temos uma seção tratando justamente das tecnologias digitais e a computação:

> A contemporaneidade é fortemente marcada pelo desenvolvimento tecnológico. Tanto a computação quanto as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão cada vez mais presentes na vida de todos, não somente nos escritórios ou nas escolas, mas nos nossos bolsos, nas cozinhas, nos automóveis, nas roupas, etc. Além disso, grande parte das informações produzidas pela humanidade está armazenada digitalmente. Isso denota o quanto o mundo produtivo e o cotidiano estão sendo movidos por tecnologias digitais, situação que tende a se acentuar fortemente no futuro (BRASIL, 2018, p.473)

Com o aumento da presença das tecnologias digitais em nosso cotidiano e em nossas salas de aula, invariavelmente também haverá um aumento da influência digital no processo educacional e nos novos recursos e construções pedagógicas permitidas por essa tecnologia.

Para o campo dos Jogos Digitais, as tecnologias também estão avançando, criando novas possibilidades, jogabilidades, estratégias e conceitos. Conforme o estudo de design de jogos se aprofunda, maior será o conhecimento de como fazer com que este meio digital se alinhe com nossos gostos tornando a experiência do jogo agradável e satisfatória.

Em um outro ponto similar, a presença de Jogos em sala de aula visa uma experiência agradável, satisfatória e recompensadora, onde os conhecimentos possam ganhar significado dentro do jogo, ser praticados e adquiridos pelos alunos para que, depois, estejam suficientemente familiarizados para serem efetivos fora do jogo e da escola.

Portanto, existem relações entre Jogo-Educação, Educação-Tecnologia e Tecnologia-Jogo que podem ser estudadas a fim de um entendimento melhor dos processos que estão ocorrendo no mundo contemporâneo.

> Jogo, aprendizagens e tecnologia são processos que se alimentam mutuamente ao longo da história do pensamento, e a industrialização capitalista, que resulta na conformação de uma sociedade do espetáculo, parece essencialmente destinada a promover a convergência entre a dimensão lúdica, a situação existencial e as 'tecnologias da inteligência', ou seja, os meios de comunicação e os sistemas de informação.(SCHWARTZ, 2014, p.233)

É oportuno que a escola se inteire destas relações para incorporar uma prática que promova uma integração entre o lúdico, a educação e a tecnologia.

1.5: A Importância dos Jogos: Ponto de vista do Ensino de Matemática

Existem muitos trabalhos que destacam a importância do uso de jogos nas atividades de ensino. Segundo Menezes (2013), o seu uso contribui para torná-las mais interessantes, livres, descontraídas, agradáveis e divertidas, promovendo um processo de ensino e de aprendizagem mais dinâmico e motivador.

Certamente, para que a atividade lúdica ocorra, é necessário um equilíbrio entre a diversão e o regramento. Para que um jogo ocorra, é preciso regras que delimitem a atividade, mas estas regras precisam ser amplas o suficientes para permitir o exercício da criatividade e da diversão. É neste ambiente suficientemente regrado para ser delimitado e, ao mesmo tempo, suficientemente livre para possibilitar a criatividade que o jogo habita.

> (...) no jogo a própria regra é a produtora de uma forma de liberdade, ou seja, a regra viabiliza o ato criativo do jogador (e.g. o próprio jogo de xadrez). Portanto, a liberdade do jogo não é uma "liberdade total", longe disso, é a capacidade do jogador em criar, expressar-se (lúdico) e tomar suas decisões em conformidade com certas condições estabelecidas pelo jogo, como as regras, o espaço-tempo e os objetivos do jogo. (GRILO, 2021, p.95)

A atividade lúdica escolar não funciona se apenas um destes elementos estiver presente. Se houver apenas diversão, sem regramento, teremos apenas uma brincadeira sem propósito, que foge do intuito de uma atividade pedagógica. Se houver apenas regramento, sem diversão, o Jogo é descaracterizado, em outras palavras, deixa de ser Jogo e torna-se exercício, perdendo inúmeras vantagens que o divertimento proporciona para o processo de aprendizagem.

> Essa utilização do jogo como recurso pedagógico deve ser abordado com cuidado, pois **para que seja preservado o caráter lúdico do jogo, a interferência do professor precisa ser reduzida**, de modo a garantir que o jogo seja, como Huizinga e Caillois afirmaram, uma atividade livre, separada, incerta, improdutiva e regulamentada ou fictícia, onde se reconheça a 'paidia' e o 'ludus', ou seja, o equilíbrio entre a alegria e a concentração.(...) Quando o professor inclui jogos em seu projeto pedagógico deve garantir que o aspecto lúdico do jogo não seja prejudicado por excesso de interferência docente e que o entusiasmo e agitação do jogo não chegue a tal ponto de impedir a concentração. (AZEVEDO, 1993, p.55)

Grando (1995) lista algumas das possibilidades psicopedagógicas para a utilização do jogo como a competição saudável, o exercício da criatividade, do raciocínio, do desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, do exercício da seriedade em ambiente lúdico e o aspecto sócio-cultural do Jogo. Grando (1995, 2000), assim como Moura(1991), defendem que o material pedagógico dos jogos devem ser utilizados a partir da metodologia da resolução de problemas.

> Portanto, o jogo como resolução de problemas possibilita a investigação, ou seja, a interação e exploração do conceito através da estrutura matemática subjacente ao jogo e que pode ser vivenciada, pelo aluno, quando ele joga, elaborando estratégias e testando-as a fim de vencer o jogo. Neste sentido, defende-se a inserção dos jogos no contexto educacional numa perspectiva de resolução de problemas, garantindo ao processo educativo os aspectos que envolvem a exploração, aplicação e explicitação do conceito vivenciado. (GRANDO, 1995, p.5)

Menezes (2013) acredita que atividades com jogos ajudam o aluno a refletir, analisar e tomar decisões frente à diversas possibilidades de ação, permitem acumular resultados cognitivos relacionados com os objetivos educativos do jogo e ajudam a desenvolver a memória e o cálculo mental. “Jogos e problemas têm o aspecto desafiador, provocativo, reinventador, auxiliar na construção de conceitos e reestruturador, entre outras”.(MENEZES, 2013, p.6)

Atividades com jogos e brincadeiras criam um cenário onde o aluno pode experimentar ativamente, criar conexões conceituais a fim de compreender a tarefa para que possa atingir sucesso. Estas são características presentes na produção de conhecimento, como é exposto em:

> Toda brincadeira é associada a intensa atividade mental e rápido crescimento intelectual. A maior forma de pesquisa é essencialmente a brincadeira. Einstein é citado dizendo que 'o desejo de finalmente chegar a uma conexão lógica de conceitos é a base emocional para toda a brincadeira feita com ideias básicas. Essas brincadeiras combinatórias e associativas parecem ser a característica essencial do pensamento produtivo”.(SCARFE, 1962, p.6, tradução nossa)[6]

A utilização de jogos em sala de aula não possui apenas como objetivo o seu fim - que é a aquisição do conhecimento específico matemático - mas também tem como objetivo o seu meio - a própria prática do jogo que permite a aquisição e prática de inúmeras habilidades e posturas socioemocionais:

[6] Texto original: “All play is associated with intense thought activity and rapid intellectual growth. The highest form of research is essentially play.Einstein is quoted as saying ‘the desire to arrive finally at logically connected concepts is the emotional basis of all vague play with basic ideas. This combinatory or associative play seems to be the essential feature in productive thought’.

> Ou seja, seria importante que se permitisse na escola que os meios, ao menos por algum tempo, fossem os próprios fins das tarefas; que se desse oportunidade às crianças e aos professores de serem criativos, para que tivessem prazer estético e conhecessem o gozo da construção do conhecimento. (MACEDO, 1997, p.140)

O Jogo permite que o aluno busque aprender um conceito sem ter de se apoiar na ideia de obrigação, mas no desafio feito para si próprio de melhorar aquilo que se sabe, aumentando sua própria capacidade.

O prazer possui um papel de suma importância na vida de um indivíduo, pois este serve como um poderoso incentivo. A busca pelo prazer na construção do conhecimento pode ser um objetivo primordial para o Ensino. A construção do conhecimento, quando é feita de maneira espontânea, recreativa e lúdica, é fonte de prazer para aqueles que a experimentam e proporcionam um relacionamento benéfico entre o aluno e a escola.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (1998b), a utilização de jogos como material pedagógico é favorável devido ao componente atrativo do jogo, à proposição de diversas situações e problemas que estimulam o pensamento racional do aluno, e ao desenvolvimento de habilidades socioemocionais para lidar com o erro de forma saudável:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998b, p. 46)

Dentre os pontos mencionados, podemos destacar que os jogos são, por natureza, interessantes. O interesse na atividade é um recurso motivacional fundamental para uma relação saudável com o aprendizado e o conhecimento. Temos o dinamismo do jogo, que possibilita a adaptação instantânea e interativa durante a atividade. Temos a pluralidade de situações-problemas e questões durante a partida, a cada jogada e durante o planejamento estratégico do jogo como um todo. Estes problemas e questões são de diferentes níveis e identificados pelos alunos diante das situações. Cada aluno encontrará as suas questões e buscará a resolução dos problemas de sua forma, apoiando-se em seu raciocínio e pensamento lógico. Em seguida, temos um caráter importante que está na atitude positiva perante os erros.

Erros são parte fundamental e integrante do processo de aprendizagem. Portanto, não se pode esperar que o processo escolar tente vilanizar os erros, mensurando o sucesso apenas pela minimização dos erros, mas que estes possam ser vistos como oportunidades de aprendizados para o aluno. Existem diferentes tipos de erros que um aluno pode cometer onde a natureza destes erros deve ser levada em consideração na hora de lidar com eles:

> A tradição escolar - que não faz diferença entre erros integrantes do processo de aprendizagem, erros construtivos e simples enganos ou desconhecimentos - trabalha com a ideia de que a ausência de erros na tarefa escolar é a manifestação da aprendizagem. Hoje, o erro construtivo é interpretado como algo inerente ao processo de aprendizagem, fator de ajuste da ação pedagógica. (BRASIL, 1998a, p.71-72)

Com dinâmicas de jogo, o erro é parte integrante do processo. Ninguém espera que se jogue perfeitamente desde a primeira vez. Se isso ocorrer, não há graça, portanto não há jogo. Caillois (1990) traz esta questão quando aponta a incerteza como característica fundamental do jogo, ou seja, uma atividade só pode ser considerada um jogo se não é possível deduzir seu resultado.

Para um jogo ocorrer, o jogador precisa executar jogadas. Invariavelmente, ambos os lados cometeram erros ou jogadas não otimizadas que poderão ser reavaliadas a fim de uma busca por um aprendizado e aprimoramento pessoal.

Diferente de um exercício, não há um “gabarito”, uma resposta universalmente correta, mas uma solução construída em conjunto até chegar a um consenso. “Na situação de jogo, muitas vezes, o critério de certo ou errado é decidido pelo grupo. Assim, a prática do debate permite o exercício da argumentação e a organização do pensamento." (BRASIL 1998b, p. 72). Portanto, podemos ver uma noção de certo e errado que não é dado por um fator exterior, mas construído coletivamente. Para que essa solução seja construída, é necessário a prática da argumentação e da retórica, assim como a verificação da própria estrutura lógica por trás dos argumentos a fim de que estes tenham veracidade. Estes debates são próprios do jogo e criam oportunidades para que os participantes exercitem suas habilidades sociais e de argumentação.

Portanto, os jogos trazem benefícios que vão além da compreensão matemática, mas de habilidades que possibilitam uma postura mais edificante em relação ao conhecimento matemático:

> Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes - enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório - necessárias para aprendizagem da Matemática (BRASIL, 1998b, p. 72)

Para além da postura individual que o aluno adquire e exercita com a prática de jogos, temos a postura social que o aluno adquire com seu grupo, durante os jogos coletivos. Através dos jogos coletivos, os alunos podem adquirir um senso de equipe onde suas ações individuais causam um reflexo no coletivo, que é o foco da atividade. Esta mentalidade coletiva se apresenta excepcionalmente útil em uma sociedade onde as parcerias e as cooperações são altamente recompensadas e deve ser incentivadas na escola para que os alunos possam desenvolvê-la. “A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento de sua competência matemática” (BRASIL, 1998b, p.72)

Além dos benefícios trazidos pelos jogos na prática individual e coletiva, podemos ressaltar as vantagens no quesito sociocultural e psicológico dos jogos, mencionados por Huizinga (2000), Caillois (1990), Piaget (1964) e Vygotsky (1991) e que se encontram favoráveis durante a prática do Ensino de Matemática:

> Além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um ‘fazer sem obrigação externa e imposta’, embora demande exigências, normas e controle. (BRASIL, 1998b, p.72)

De forma geral, podemos apontar algumas características fundamentais dos jogos que foram ressaltadas. A primeira é que os jogos são satisfatórios, agradáveis e propiciam o prazer; em segundo lugar, temos que os jogos possuem regras que não são impostas por obrigação, mas que compõem a atividade; em terceiro lugar, temos que os jogos são atividades ativas, onde os pensamentos se criam durante a ação, e também são interativas pois dependem da ação de outro jogador; em quarto lugar, os jogos propiciam o desenvolvimento de habilidades socioemocionais, justamente pela interatividade entre os participantes; em quinto lugar, o Jogo possui uma postura de exploração e aprendizado que pode ser transferida para outras esferas da vida, como o ambiente escolar.

2: Atividades envolvendo jogos

Neste capítulo apresentaremos jogos de nosso repertório, assim como atividades elaboradas por autoria própria que foram desenvolvidas para uma oficina.

A oficina teve como objetivo a apresentação da pesquisa para profissionais da área da educação, a elaboração de problemas e exercícios de jogos variados, de acordo com a temática da aula, a averiguação da opinião dos educadores em relação ao uso de jogos em sala de aula, e a investigação de potencialidades do jogo.

A oficina ocorreu em 3 encontros presenciais de 3 horas de duração cada, no horário noturno, e foi oferecida através do CAEM, Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do IME-USP, que visa a assessoria, formação continuada, qualificação de professores da Educação Básica, além de apoiar ações de formação inicial junto ao curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP.

O primeiro encontro teve como tema jogos que utilizam apenas o corpo humano (sem outros objetos), para simular as etapas da evolução humana anterior ao uso de ferramentas; e jogos com objetos simples, simulando o uso das primeiras ferramentas. Neste encontro utilizamos os jogos *Chopsticks* e *NIM*

O segundo encontro, teve como tema jogos abstratos, como jogos de tabuleiro, jogos de sorte e jogos que envolvam a escrita/representação gráfica. Neste encontro utilizamos os jogos de enfileiramento e o jogo Cilada de Cores.

No terceiro encontro, seguindo a evolução cronológica dos Jogos e a utilização de novas ferramentas, exploramos os Jogos Digitais. Neste encontro planejamos utilizar os aplicativos “Calculadora: o Jogo” e os aplicativos de geometria digital Euclidea e Pythagorea que possuem um conjunto de exercícios que consideraremos quebra-cabeças.

Em todas as oficinas, começamos com uma introdução que explicitava parte da base teórica referente ao tema da aula, em seguida, apresentávamos um jogo de nosso repertório planejado para o primeiro período. Após uma livre exploração do jogo, passávamos para uma lista de problemas envolvendo os jogos, onde os participantes deveriam conversar entre si para chegar até a resolução final. Finalizado o primeiro período, fazíamos um intervalo. E no segundo período, tínhamos um novo jogo com a mesma sequência de apresentação, exploração livre e lista de problemas. As atividades foram pensadas para seguir uma ordem que respeitasse a cronologia dos quatro grandes momentos históricos escolhidos (corpo, ferramentas, símbolos e tecnologias digitais) para retratar a História dos Jogos neste trabalho.

Após cada encontro, com o objetivo de avaliar não só os jogos trabalhados mas também a dinâmica propiciada, foram feitas algumas perguntas aos cursistas. No primeiro encontro perguntamos "O que vocês mais gostaram do encontro?", com esta pergunta, queríamos ter um feedback da dinâmica adotada, no segundo encontro perguntamos "O que o uso de jogos em sala de aula pode proporcionar?", com esta pergunta, gostaríamos de mapear as potencialidades dos jogos identificadas pelos cursistas e no terceiro "Por que utilizar Jogos em Sala de Aula?", com esta pergunta, gostaríamos de identificar quais as principais razões que levariam os cursistas a utilizarem jogos em sala de aula. Algumas das respostas obtidas com os questionários serão citadas no final do trabalho e serão referenciadas apenas por C, pois as respostas dos cursistas não foram identificadas.

2.1: Primeiro Encontro

Com o primeiro encontro, tínhamos como objetivo apresentar um pouco da bibliografia que trata sobre a análise do jogo como fenômeno biológico e sociológico; a importância do jogo para a história do desenvolvimento dos indivíduos e da sociedade; além de trabalhar com alguns jogos discutindo as particularidades e possíveis potencialidades que o uso deles poderiam proporcionar. Foram apresentados os jogos *Chopsticks* e *NIM* que utilizam apenas o próprio corpo ou objetos rudimentares. (Ver Apêndice 1.0)

Chopsticks ("Jogos dos Dedos")

Chopsticks (jogo de origem desconhecida por nós, provavelmente de domínio público) é um jogo que utiliza apenas os dedos e não possui tradução conhecida, portanto, ao longo do texto, também será chamado de "*Jogo dos Dedos*". (Ver Apêndice 1.1)

As regras básicas de *Chopsticks* são: os dois jogadores iniciam o jogo estendendo as duas mãos deixando um dedo levantado em cada mão. A jogada do jogador da vez consiste em "atacar" uma das mãos ativas do adversário com uma de suas mãos. A mão "atacada" irá somar os dedos que estavam na sua mão com os dedos da mão "atacante". Assim que uma mão ficar com **5 ou mais dedos**, ela é eliminada do jogo. O jogador que tiver as duas mãos eliminadas perde a partida.

O jogo também possui regras adicionais, que podem aumentar a complexidade do jogo. Dentre as regras adicionais, temos:

- ***roll-over*** ("rolamento"): Para eliminar uma mão, é preciso que a pontuação na mão seja **exatamente** 5 dedos.

Se a pontuação for maior que 5, a pontuação da mão se torna o quanto foi excedido. (Exemplo, se a pontuação somar 6, o resultado final será 1. Se a pontuação for 7, o resultado final é 2. Se a pontuação for 8, o resultado final é 3.)

- **Separações**: **Transferência** ou **Divisão**
  - **Transferência:** Quando um jogador performar uma **Transferência**, o jogador deve bater suas mãos e dividir o número de dedos entre elas, criando uma nova configuração.
    Por exemplo, se um jogador tivesse nas mãos 1 e 3, poderia fazer uma **transferência** e cada mão ficaria com 2 dedos.
    O inverso também é possível. Ter 2 dedos em cada mão, e transferir para que fique 1 e 3.
    As possíveis **transferências** são: (13→22, 22→13, 14→23, 23→14, 24→33, 33→24).
  - **Divisão** (Ou Ressuscitação) :
    A Divisão é como uma transferência, porém utilizando uma mão que estava eliminada (sem dedos);
    As possíveis divisões são: (02->11, 03->12, 04->13, 04->22)
  - **Eliminação**
    A eliminação é como uma transferência onde uma das mãos terminará sendo eliminada: (11→02, 12→03, 13→04, 22→04)

- **Atacar a si mesmo**: O jogador pode escolher atacar a si mesmo, ou seja, uma de suas mãos atacar sua outra mão.
- **Vários jogadores:** As regras são como as do *Jogo dos Dedos*, porém com mais de 2 jogadores. O objetivo é ser o último jogador sobrevivente.
- **N mãos por equipe:**
  É possível formar equipes de mais de uma pessoa, fazendo com que o número de mãos para cada equipe seja maior que 2.
- **N dedos por mão:** As mesmas regras do *jogo dos dedos*, porém com “mãos” com um número arbitrário de dedos, não necessariamente 5.
- **Números Inteiros:**
  As regras são como as do *Jogo dos Dedos*, porém com um novo tipo de jogada:

Inversão:

O jogador pode escolher "inverter" uma de suas mãos (ao invés de deixar a palma da mão para baixo, deixará a palma da mão para cima).

Quando a palma da sua mão estiver para cima, a pontuação de seus dedos é considerada negativa.

- **Fracionários:** Os jogadores podem fazer divisões utilizando metades (deixando apenas uma falange levantada para representar a metade)

A motivação para o uso deste jogo foi a representação da importância dos dedos para a aquisição numérica no ser humano. No início do nosso processo de numeração, quantificar a partir dos dedos é uma etapa fundamental, onde se começa a associar objetos concretos com ideias abstratas numéricas.

Tivemos como objetivos na exploração do *Jogo dos Dedos* apresentar aos cursistas as potencialidades do uso dos dedos para operações numéricas de diferentes níveis de complexidade - como o contar, a adição, a subtração, a divisão ou a aritmética modular - assim como trabalhar a escolha de decisões típica de jogos por rodadas.

Chopsticks ("Jogos dos Dedos") : Oficina

A atividade se iniciou primeiramente formando duplas e fazendo uma livre exploração do jogo, ou seja, apenas jogando o jogo em sua forma mais básica, sem observar a ficha de atividade distribuída na oficina (Ver Apêndice 1.1). Em seguida, após se familiarizar com o jogo, os cursistas analisaram as situações-problema propostas na ficha.

As situações-problema proporcionaram discussões sobre a análise de posições no jogo, onde os participantes tiveram de analisar diversas jogadas à frente para chegar a uma conclusão. Apenas com essas indagações, foi possível reconhecer a complexidade que o jogo pôde proporcionar a partir de casos aparentemente simples e como o contato com este tipo de problema pôde ajudar o sujeito do aprendizado, no caso, os professores cursistas, a lidar com essa multiplicidade de possibilidades para um resultado decisivo.

Após a exploração da forma básica do *Jogo dos Dedos*, avançamos para a regra do *roll-over*, a regra nova adicionou um nível maior de complexidade, porém, por já estarem familiarizados com o conjunto geral das regras, o incremento foi bem recebido como um desafio que possibilitava novas jogadas, sem dificuldades. É importante ressaltar estes dois aspectos para o uso de jogos em sala de aula: primeiramente, a **familiaridade** é importante para a sensação do aluno de conforto e capacitação durante a sala de aula, porém também é interessante o **aumento progressivo de complexidade** para propor novos cenários similares onde há desafios estimulantes para o aluno. O estímulo do jogo para esse aumento progressivo da complexidade é uma das grandes potencialidades do uso de jogos em sala de aula.

Os professores exploraram a nova forma de jogar, tendo *insights* sobre o funcionamento de cada jogada, por exemplo, um cursista apontou como o ato de "somar 4" nesta nova regra era equivalente a "subtrair 1".

Com estes insights, os cursistas puderam, por exemplo, relacioná-los com o cálculo mental da adição, como no caso de "somar 9" é equivalente a "diminuir uma unidade e aumentar uma dezena". Outra forma de entender o funcionamento desta nova regra é o uso de aritmética modular, onde $6\equiv1$, $7\equiv2$ e $8\equiv3$, $9\equiv4$ e $5\equiv0$. O encontro de propriedades aritméticas utilizando elementos do jogo, no caso, as mãos dos jogadores, é também uma grande potencialidade do jogo, pois os jogadores que quiserem se aprimorar no jogo, devem refletir sobre seus elementos e seu melhor uso. No caso, o uso das mãos para cálculos aritméticos é uma prática matemática muito comum e tradicional, que ocorre até os dias de hoje, seja para auxiliar na contagem da adição, na multiplicação e potências.

Em relação à regra das **Separações**, algumas duplas chegaram em "loops infinitos", jogos que repetiam as mesmas configurações e nunca terminariam se os jogadores mantivessem seus movimentos. Neste caso, foi apresentada a regra do xadrez da "repetição tripla" que, caso a configuração do jogo se repita três vezes, o jogo é considerado um empate.

Durante a oficina, as regras *roll-over* e Separações foram as únicas exploradas.

Chopsticks ("Jogos dos Dedos") : Para Além da Oficina

Nesta seção apresentaremos algumas reflexões sobre a Matemática envolvida no *Jogo dos Dedos*.

Como notação, utilizaremos uma notação inspirada na Wikipédia (CHOPSTICKS, 2023), com 4 dígitos do tipo [A, B ; C, D]. Onde A e B são o valor das mãos do jogador da vez (em ordem decrescente) enquanto C e D são o valor das mãos do outro jogador (em ordem decrescente). Uma mão eliminada possui valor 5. Com esta notação, torna- se fácil criar um grafo com as configurações possíveis de mãos levando em conta a vez do jogador.

Outra potencialidade que o jogo pode proporcionar é a criação de formas de notação para possibilitar a comunicação entre os jogadores e facilitar os estudos. Nas palavras de Richard Feynman, "Podemos, é claro, utilizar qualquer notação que quisermos; não ria das notações; invente-as, elas são poderosas. Na realidade, matemática é, em grande medida, invenção de melhores notações". (FEYNMAN, 1963)[7]

Escolhemos exercícios do apêndice 1.1 para analisar situações-problema presentes no jogo:

1.1) *Na primeira rodada do jogo (sem novas regras), o segundo jogador estava com a seguinte configuração:*

Jogador A: 1 dedo em uma mão e 2 dedos na outra.

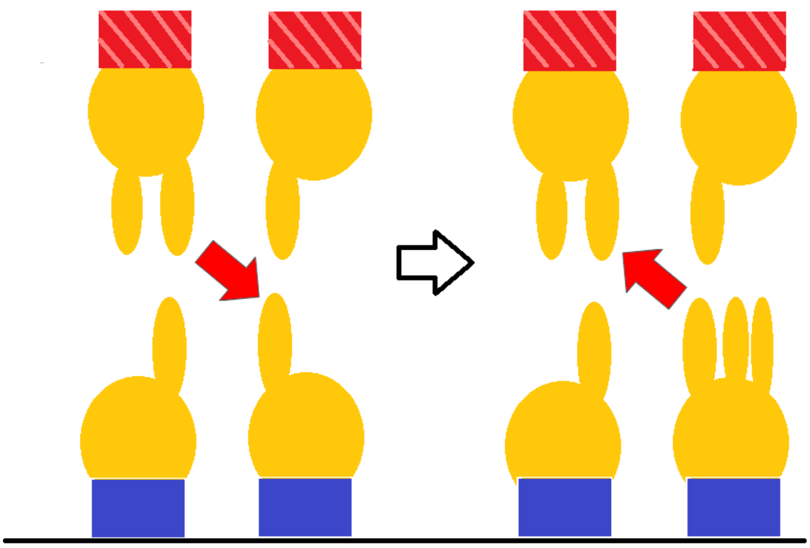
Jogador B: 1 dedo em uma mão e 1 dedo na outra.

Vamos supor que o aluno escolheu atacar com a mão direita (com 2 dedos). Sua justificativa era que, ao atacar com 2 dedos, ele estava maximizando seu ataque.

Esta escolha do jogador foi adequada?

Para decidir se a escolha do jogador A foi adequada, vamos simular a jogada. Se o jogador de mangas vermelhas listradas (jogador A) utilizar a mão com dois dedos, o jogador azul (jogador B) poderá usar a mão com três dedos para eliminar a mão de 2 dedos.

Figura 2 - Esquematização do *Jogo dos Dedos* (Exercício 1.1)



Fonte: Autor

Em notação, a jogada é representada por: [2, 1 ; 1, 1] => [3,1 ; 2,1] => [5, 1 ; 3,1]. A partir do ponto [5, 1 ; 3, 1], não há jogadas vencedoras para o jogador de mangas vermelhas listradas, já que, caso ataque a mão com 3 dedos, o jogo ficaria como [4,1 ; 5, 1] onde azul poderia ganhar atacando com 4 dedos terminando com [5,5 ; 4,1]. Se atacar a mão com 1 dedo, então [3,2 ; 5, 1], independente da jogada do jogador azul, o jogo será resolvido em duas

[7] Texto original: " We could, of course, use any notation we want; do not laugh at notations; invent them, they are powerful. In fact, mathematics is, to a large extent, invention of better notations."

rodadas. Por exemplo: [4,5; 3,2] => [5, 2 ; 5, 4] => [5, 5 ; 5, 2]. Inclusive, a partir da posição [5, 1 ; 3,1], é impossível que o jogador de azul perca, mesmo não fazendo as melhores jogadas.

Com esta análise, percebemos que a escolha de atacar com a mão com 2 dedos seria um erro, pois levaria a uma configuração onde o outro jogador consegue forçar uma vitória. Assim, apesar da justificativa do jogador A, em estar maximizando seu ataque, parecer uma boa estratégia, não se configurou como a decisão correta.

Outro exercício interessante para analisarmos é o 1.3:

1.3) Vamos supor que dois jogadores chegaram na seguinte situação:
O Jogador da vez (Jogador A) tem as mãos com 4 dedos e 2 dedos.
O outro jogador (Jogador B) tem as mãos com 3 dedos e 2 dedos.
Existe uma jogada vencedora? Qual é essa jogada?

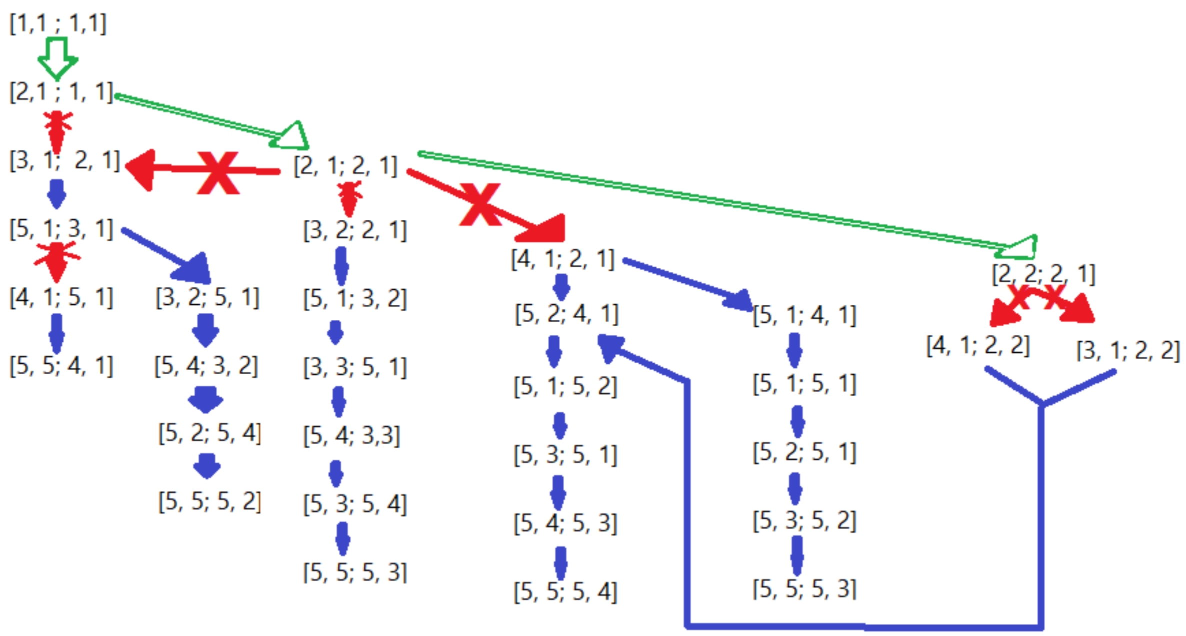
Ao analisar as jogadas, dentre as 4 possíveis, temos duas jogadas análogas, pois terminam no mesmo resultado. Se o jogador A atacar a mão de três dedos, independente de com qual mão, ficaremos com a configuração [5,2 ; 4,2]. O jogador B terá de eliminar a mão de 4 para não ser eliminado do jogo depois de uma jogada. Desta forma, é a vez do jogador A e a configuração está [5, 2 ; 5, 2] => [5, 4 ; 5, 2] => [5,5 ; 5, 2]. Então, começando com a jogada de eliminação do número 3, o jogador A perde. Se o jogador A escolher atacar a mão de 2 dedos de B com sua mão de 2 dedos, então haverá uma eliminação por rodada e B se tornará vitorioso. Exemplo: [4,2 ; 3,2] => [4,3 ; 4,2] => [5,2 ; 4,3] => [5,3; 5, 2] => [5,5 ; 5,3]. Por último, se eliminarmos a mão de 2 dedos, atacando-a com a mão de 4 dedos, temos uma configuração vencedora para A, pois B estará em uma configuração [5, 3 ; 4, 2] onde ele poderá escolher eliminar uma mão, porém a outra irá eliminá-lo na sequência.

O *Jogo dos Dedos* com sua regra inicial já é bastante interessante, pois demonstra características fundamentais de um jogo como a importância de decisões bem pensadas para garantir uma boa jogada, já que má decisões podem prejudicar sua situação no jogo. Porém, assim como o Jogo-da-Velha, não é difícil de analisar todas as possibilidades de jogadas.

Podemos criar um grafo para representar as possibilidades de jogadas. A figura 3 é um grafo que representa apenas as principais jogadas, já que algumas que resultam em uma derrota imediata não foram representadas, para facilitar a visualização.

Para entender o gráfico, em **verde e preenchimento branco** temos os movimentos "ótimos" (os movimentos que prolongam um jogo por mais tempo); em **azul**, temos movimentos "bons" (movimentos bons para o vencedor são aqueles que garantem a vitória, porém não fazem parte da melhor estratégia possível; um bom movimento para o perdedor é o que prolonga a derrota o máximo possível); em **vermelho com um x**, temos movimentos "ruins" (movimentos que permitem que o adversário ganhe o jogo).

Figura 3 - Grafo da Resolução do *Jogo dos Dedos* (sem roll-over)



Fonte: Autor

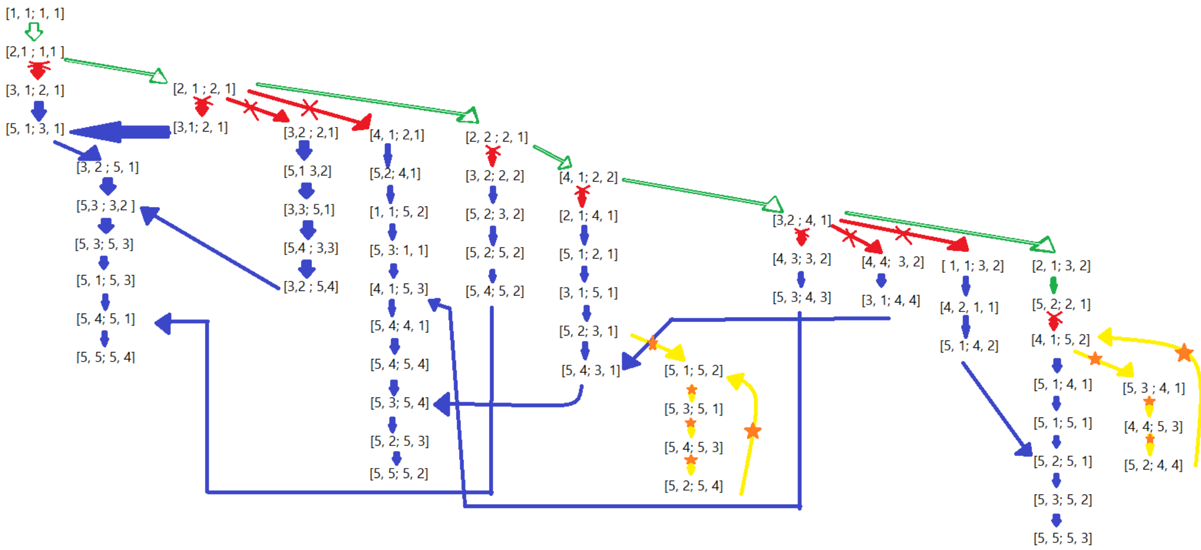
Após cada movimento ruim (vermelho), há uma sequência ímpar de jogadas boas (azul), que significa que a pessoa que fez o movimento ruim pode ser obrigada a perder. Como, independente de qual movimento o segundo jogador faça, o primeiro jogador consegue garantir uma vitória, então dizemos que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

Uma das regras adicionais mais comum do *Chopsticks* é a regra do ***roll-over***, onde a mão apenas é eliminada se ficar com exatamente 5 dedos, caso ultrapasse, ficará com o número de dedos que ultrapassou 5 (ou seja, 6 se torna 1, 7 se torna 2 e 8 se torna 3). Com esta regra, é muito mais difícil eliminar uma mão do adversário, pois existe apenas um valor possível que elimina uma mão, enquanto na versão anterior qualquer valor que ultrapassasse 5 eliminava uma mão, por exemplo, com 4 dedos em uma mão, haveria 4 valores diferentes que poderiam eliminá-la.

Além disso, o número de jogadas pode aumentar indefinidamente, inclusive sendo possível criar um jogo de infinitos movimentos. Para evitar jogos infinitos, podemos utilizar a regra de ***threefold repetition*** (repetição tripla), onde caso a configuração do jogo se repetir por três vezes, o jogo é considerado um empate.

Na figura 4, temos um grafo com a resolução do jogo de forma fraca[8]. Para evitar um número demasiadamente grande de ramificações na árvore de possibilidades de jogadas, após um erro indicamos apenas a sequência de melhores movimentos. Lembrando que os melhores movimentos são aqueles que garantem a vitória, se possível, ou aqueles que prolongam o jogo, caso seja impossível ganhar.

Figura 4 - Grafo da Resolução do *Jogo dos Dedos* (com roll-over)



Fonte: Autor

No jogo explorado anteriormente, além dos movimentos verdes, azuis e vermelhos, temos os movimentos **amarelos com estrelas** que são exemplificações de ciclos que podem se repetir infinitamente, podendo formar um empate.

Apesar de ser um jogo que tem o potencial de ter infinitas jogadas e ocorrer um empate, pudemos provar que este é um jogo com **estratégia vencedora**. Perceba que, ao caminhar pelo caminho verde, qualquer desvio faz com que o jogador cometa um erro. O motivo de que este grafo resolve o jogo de forma fraca é por conta das últimas duas setas verdes. Teoricamente, para resolver o jogo de forma forte, precisaríamos analisar as outras jogadas decorrentes de [2, 1; 3, 2], além de [5, 2; 2, 1]. Porém, para o jogador A, como ele sabe que a posição [5, 2; 2, 1] **obriga** o jogador B a fazer uma jogada que o coloca em uma situação perdedora, então ele não precisa analisar as outras jogadas e fica satisfeito com o movimento que leva a [5, 2; 2, 1] para o jogador B. Portanto, o **primeiro jogador** tem uma **estratégia vencedora**.

---

[8]Um jogo resolvido de forma **fraca** é aquele que encontra **pelo menos uma** forma que um jogador consegue forçar uma vitória, ou um empate, não importa quão bem jogue seu adversário.

Um jogo resolvido de forma **forte** seria um jogo em que se encontra **todos** os caminhos que forçam uma vitória ou um empate, independente da configuração do jogo. (ALLIS, 1994, p.8)

Outros tipos de regras que são comuns em variantes deste jogo são as **separações,** em que se pode redistribuir a quantidade de dedos entre as duas mãos, utilizando dois tipos de movimentos, a **Transferência** e a **Divisão**. A partir deste momento, podemos nos referir a uma mão eliminada como se estivesse com zero dedos.

Uma **Transferência** ocorre quando um jogador bate as suas próprias mãos "uma com a outra" e redistribuir os dedos entre elas, criando uma nova configuração. Neste caso, não é possível eliminar uma mão através de uma transferência. Por exemplo, se um jogador tivesse nas mãos 1 e 3, poderia fazer uma **transferência** e cada mão ficaria com 2 dedos. O inverso também é possível. Ter 2 dedos em cada mão e transferir para que fique 1 e 3. Se criarmos a notação [A, B] onde A e B são os valores na mão de um jogador, podemos falar sobre o exemplo acima como [3, 1] ⇔ [2, 2].

As **transferências** possíveis são: [3, 1] ⇔[2, 2]; [4, 1] ⇔ [3, 2]; [4, 2] ⇔ [3, 3]

Além das **transferências**, temos um outro tipo de **separação**: a **Divisão**. A divisão é como uma transferência, porém "ressuscitando" uma das mãos.

As possíveis **divisões** são: [2,0] => [1,1]; [0,3]=> [2, 1]; [4,0] => [3, 1]; [4, 0] =>[2,2].

Os jogadores podem concordar que as **separações** só podem ser feitas quando, ao final da transferência, a quantidade de dedos em cada mão fique a mesma. Este tipo de separação é chamada de **separações pares**.

Com as **separações**, devemos tomar alguns cuidados para que o jogo não se torne um jogo de infinitos movimentos, portanto, há algumas regras que podem ser adicionadas como um limite de **separações/divisões** por jogador ou um limite de rodadas **consecutivas** utilizando **separações/divisões**, além da regra de repetição tripla.

O exercício 3.1 (Ver apêndice 1.1) desenvolvido a seguir, apresenta uma situação em que o jogador deve escolher a jogada que não permite que o seu adversário faça uma divisão.

3.1) Em um jogo apenas com separações pares (vide Obs 2) (Sem "rolamento"), temos a seguinte situação:
O Jogador da vez tem uma mão com 3 dedos e uma mão com 2 dedos.
O outro jogador tem uma mão com 1 dedo e a outra com 0 dedos.
Qual é a jogada vencedora para o jogador da vez?

Se o jogador escolher utilizar a mão com 2 dedos, o seu adversário não poderá fazer uma **divisão**, portanto, irá perder o jogo (qualquer mão que escolher atacar, será eliminado pela outra). Se atacar com 3 dedos, o adversário poderá fazer uma divisão em suas mãos. O jogo se prolonga e é mais difícil de calcular o resultado da partida. Em geral, as melhores jogadas são consideradas aquelas que vencem o jogo em menos movimentos.

Outra regra apresentada foi a de "atacar a si mesmo". Apesar de ser contraintuitivo, podemos ter situações onde "atacar a si mesmo" pode ser a melhor jogada. A ideia é que uma de suas mãos ataca a sua outra mão, aumentando seu número de dedos.

4.1) Em um jogo apenas com "rolamento" e a regra 4. Na seguinte situação:
O jogador da vez está com uma mão com 3 dedos e outra mão com 1 dedo.
O outro jogador tem uma mão com 1 dedo.
(Assumindo que seu adversário fará as melhores jogadas)
Considere os 2 movimentos possíveis pela regra 4. Qual o resultado de cada?
Considere os 2 movimentos que não utilizam a regra 4. Qual o resultado?

Pelos movimentos possíveis pela regra 4:

- O jogador da vez (A) pode fazer com que a mão com 1 dedo ataque a mão com 3 dedos. Desta forma, teremos a configuração [1, 0; 4, 1]. Com isso, a vitória pode ser garantida para o jogador A, pois o jogador B é obrigado a atacar a mão com 4 dedos, para não ser eliminado por ela. Segue a sequência:
  [1, 0; 1, 0] => [2, 0; 1, 0]=> [3, 0; 2, 0] =>[0,0; 3,0].
  Vitória para o jogador A.
- O Jogador A pode fazer com que a mão com 3 dedos ataque a mão com 1. Desta forma, teremos a configuração [1,0; 4, 3]. Eliminando a mão com 4 para não ser eliminado na próxima, ficamos com [3,0; 1,0] => [4,0; 3,0] =>[2,0 ; 4,0] => =>[1,0; 2,0] => [3,0; 1,0]. Como atingimos a mesma configuração do início da sequência, então terminaríamos em um **empate**.

Pelos movimentos que não utilizam a regra 4:

- O Jogador A pode atacar com a mão com 1 dedo. Desta forma, teremos a configuração [2,0; 3,1]. O jogador B é obrigado a atacar a mão com 3 dedos, para não ser eliminado por ela. A sequência continua com [1, 0; 2, 0] =>[3,0; 1,0] => [4,0; 3,0] =>[2,0 ; 4,0] =>[1,0; 2,0]. Temos o mesmo ciclo do exemplo anterior, porém começando do [1,0; 2,0] ao invés de [3,0; 1,0]. Então terminaríamos em um **empate**.

- O Jogador A pode atacar com a mão com 3 dedos. Desta forma, teremos a configuração [4,0; 3,1]. Desta forma, o jogador B é obrigado a eliminar a mão com 1 dedo. A sequência segue como: [3,0; 4,0] => [2,0; 3,0] => [0,0; 2,0]. **Vitória de B**.

Portanto, vimos um cenário onde, dos 4 movimentos possíveis, apenas um movimento envolvendo a regra 4 levaria à vitória, então, apesar de ser contraintuitivo "atacar a si mesmo", pode ser a melhor jogada, no caso, a única que levaria à vitória para o Jogador A.

Através da análise das jogadas, temos a potencialidade de estudar sobre estratégias vencedoras; sobre as melhores jogadas levando em conta o nível do adversário e que, como convenção, sempre iremos considerar o adversário de maior nível possível.

O leitor interessado poderá encontrar outras formas de jogar o *Jogo dos Dedos* (Ver apêndice 1.1), assim como na página da Wikipédia (CHOPSTICKS, 2023).

NIM ("Jogo dos Palitos")

Na segunda atividade desenvolvida na oficina (Ver Apêndice 1.2) utilizamos jogos da família *NIM* (BOUTON, 1901; GRANDO, 2000), onde, no texto, também chamaremos de "Jogo dos Palitos". O material do jogo é composto por fileiras com um número determinado de palitos e as jogadas consistem em retirar palitos destas fileiras. Dependendo da regra do jogo, existem restrições para quantos e quais palitos um jogador pode pegar por jogada. O objetivo do jogo envolve o último palito a ser pego. Em alguns jogos, quem pegar o último palito ganha o jogo ("palito premiado"); em outros jogos, quem pegar o último palito perde ("palito envenenado").

A família de jogos *NIM* teve uma grande importância para o estudo dos Jogos. A primeira solução completa do jogo foi publicada por Charles L. Bouton, em 1901, onde resolveu o caso geral, com qualquer número de fileiras e peças por fileiras. A estratégia vencedora utilizou uma nova operação, a "soma-NIM", que usava a representação binária de cada uma das fileiras e fazia com que a soma das casas binárias de cada fileira tivesse resultado par.

A família de jogos *NIM* exemplifica uma classe de jogos que utilizam objetos simples, como palitos, pedras, feijões ou conchas, ou seja, objetos com pouca intervenção humana e de fácil acesso. Esta acessibilidade foi um fator importante para a disseminação do jogo tanto em suas origens quanto para os dias de hoje. Pensando na sala de aula, o professor de matemática consegue disponibilizar palitos para todos os alunos com apenas algumas caixas de fósforo, item de fácil acesso.

Os jogos da família *NIM* trazem oportunidades de explorações interessantes sobre as operações matemáticas envolvidas na sua execução e na elaboração de sua estratégia vencedora.

O objetivo desta atividade seria de introduzir o conceito de análise do jogo, utilizando diferentes formas, como o *backward reasoning* e a árvore de possibilidades, assim como o conceito de estratégia vencedora.

A seguir listamos algumas possibilidades para o *NIM* ("*Jogo dos Palitos*").

- ***NIM 1* ("*Jogo dos Palitos 1*"):**
  Tabuleiro: Uma fileira com 20 palitos.
  Regras: Em sua jogada, o jogador da vez pode capturar entre 1 a 3 palitos.
  Objetivo: Quem pegar o último palito, perde.
- ***NIM 2* ("*Jogo dos Palitos 2*"):**
  Tabuleiro: Uma fileira com 20 palitos.
  Regras: Em sua jogada, o jogador da vez pode capturar até metade dos palitos que sobraram (arredondando para baixo).
  Objetivo: Perde o jogo aquele que "sobrar" com o último palito.
- ***NIM (2 fileiras)* ("*Jogo dos Palitos (2 fileiras)*") :**
  Tabuleiro: Duas fileiras, com 5 e 7 palitos.
  Regras: Em sua jogada, o jogador da vez pode capturar quantos palitos quiser, de apenas uma fileira.
  Objetivo: Ganha o jogo quem pegar o último palito.
- ***NIM (3 fileiras)*("*Jogo dos Palitos (3 fileiras)*") :**
  Tabuleiro: Três fileiras, com 3, 5 e 7 palitos.
  Regras: Em sua jogada, o jogador da vez pode capturar quantos palitos quiser, de apenas uma fileira.
  Objetivo: Ganha o jogo quem pegar o último palito.
- ***CHOMP* :**
  Tabuleiro: Retângulo 6x5 de palitos
  Regras: Em sua jogada, um jogador escolhe um palito, e deve capturar todos os palitos que estejam acima ou à direita dele, além do próprio palito escolhido.
  Objetivo: Perde o jogo quem pegar o último palito.

NIM ("Jogo dos Palitos"): Oficina

A atividade começou formando duplas, com uma livre exploração do "*Jogo do Palito 1*". Após algumas partidas, alguns cursistas perceberam que havia algo de especial no número 5. Quando era a vez de um jogador, e sobraram 5 palitos na mesa, não havia escapatória. Independente de sua jogada, seu adversário poderia fazer com que sobrasse apenas 1 palito na mesa. (Se capturar 1, o outro jogador captura 3 e sobra 1; se capturar 2, o outro jogador captura 2 e sobra 1; se capturar 3, o outro jogador captura 1 e sobra 1). Esta posição, onde um jogador é obrigado a jogar, porém todas as possibilidades de jogadas são negativas para ele, é o que é chamado no vocabulário do xadrez de *zugzwang*. Portanto, uma boa estratégia era deixar o adversário com 5 palitos.

Uma etapa crítica para a formulação dos cálculos das jogadas seria a noção de alternadamente se colocar no lugar de seu adversário, lembrando que, para poder analisar a solução matemática, nosso adversário hipotético deve fazer a melhor jogada possível. Por exemplo, vamos supor que temos 10 palitos na mesa. Sabemos que uma estratégia é deixar 5 palitos para o oponente. Então, uma primeira tentativa poderia ser pegar 3 palitos para deixar o mais próximo de 5 palitos possível. Se imaginarmos que agora o adversário tem 7 palitos, ele tem três opções:

- Pegar 1 palito. Neste caso, podemos pegar 1 palito e deixá-lo com 5 palitos (Ganhamos o jogo)
- Pegar 2 palitos. Deixando-nos com 5 palitos. (Perdemos o jogo)
- Pegar 3 palitos. Deixando 4 palitos. Podemos pegar 3 palitos e deixá-lo apenas com 1 (Ganhamos o jogo)

Apesar de que, das três opções possíveis, duas tem resultado positivo, esta posição (deixar o adversário com 7 palitos) **não** é uma boa jogada, pois abre a possibilidade do adversário **forçar** uma vitória. E para um problema de jogos matemáticos, temos sempre que supor que nosso adversário joga de maneira **perfeita**.

A grande questão seria: "Como **forçar** um jogador a ficar com 5 palitos?"

Para isso, seria necessário um raciocínio indutivo. Conseguir um "caso-base" (que pode ser deixar o adversário com 5 palitos ou 1 palito) e pensar como os outros casos recorrem a estes "casos-base". Após as discussões em dupla e uma discussão com o grupo, onde todos socializaram suas hipóteses, fomos à lousa para sistematizar o raciocínio construído pelos cursistas.

Após reconstruir os casos com 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos, analisamos que, para os casos que sobram 6, 7, ou 8 palitos, a solução era a mesma : “deixar o adversário com 5 palitos”. O caso com 9 palitos foi o mais complicado. Como não era possível fazer com que sobrasse 5 palitos em uma jogada, era preciso fazer alguns cálculos com profundidade maior, levando em conta o princípio de que o adversário fará a melhor jogada. Basicamente, se sobrarem 9 palitos, temos 3 opções:

- Capturar 1 palito. Sobraram 8 para o adversário.
- Capturar 2 palitos. Sobraram 7 para o adversário.
- Capturar 3 palitos.Sobraram 6 para o adversário.

Nós sabíamos que se sobrassem 8, 7 ou 6 palitos, o jogador da vez poderia **forçar uma vitória**, capturando de forma que sobrasse 5 para o próximo.

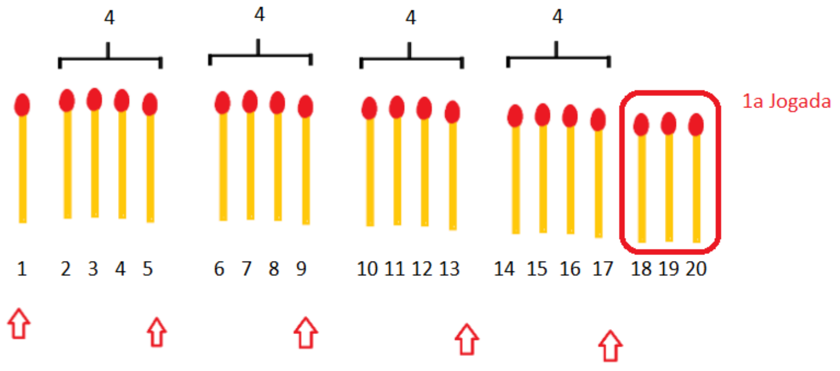
Uma observação interessante é que para um jogo matemático, ambos os jogadores são equivalentes, porém, para a nossa própria percepção, a ação do meu adversário é naturalmente diferente da minha.

Em suma, se sobrar 9 palitos, o jogador da vez **perde**. Todas as suas jogadas levam a uma chance do adversário **forçar** uma vitória. A estratégia vencedora está na mão do segundo jogador. Podemos dizer que situações onde quem começar irá perder com jogadas perfeitas serão chamadas de “situações-perdedoras”.

Para além do estudo do caso de 9 palitos, também era preciso encontrar a lógica da **recursão** do processo indutivo. Perceber que, da mesma forma que tenho como objetivo deixar o adversário com 5 palitos sobrando, para ele perder, também tenho como objetivo deixar o adversário com 9 palitos sobrando. E que a extensão desta sequência seria deixar o adversário com 13 palitos sobrando. Não posso deixar com 10, 11 ou 12 palitos, senão o adversário pode me deixar com 9, podendo forçar uma derrota para mim. Se deixá-lo com 13 palitos, após sua jogada, consigo **forçar** que fique com 9, em seguida, **forçar** que fique com 5, em seguida que fique com 1 e perca o jogo.

Pudemos perceber que a função que descreve as situações-perdedoras é a função $f(x)=1+4x$. Encontramos o padrão ao anotar os casos onde o jogador da vez poderia ser forçado a perder, ou seja, 1, 5, 9, 13 e 17, como podemos ver na figura 5.

Figura 5: Ilustração da Resolução do "Jogo do Palito 1"



Fonte: Autor

Esta função faz sentido pois, sabemos que sobrar 1 é perdedor pois quem capturar o último palito perde. E podemos perceber pela indução que, ao somar 4 a uma situação-perdedora, encontramos outra situação-perdedora, onde não importa a jogada do adversário, o outro jogador poderá forçar o adversário para outra situação-perdedora e assim sucessivamente até chegar a uma derrota inevitável. O motivo de somar 4 se encontra justamente pela junção entre o número máximo de palitos de uma jogada, ou seja, 3 palitos, somado com o número mínimo de palitos de uma jogada, 1 palito. Desta forma, independente da jogada do adversário, é possível escolher uma outra jogada onde a soma das duas jogadas é igual à 4, alcançando a próxima situação-perdedora.

Discutimos qual seria a resposta com um número maior de palitos no começo, e se mudássemos a regra para que os jogadores pudessem pegar até 5 palitos, ao invés de 3. Nesta última situação, supuseram que a nova função fosse $f(x) = 1+6x$, para 5 palitos, fazendo uma analogia entre os 3 palitos por jogada e o 4 da função, porém, como antes, não discutimos a adição por 1 entre o número de palitos por jogada e o número da função.

Poderíamos ter simplificado o jogo mudando suas regras e estabelecendo que o último jogador a pegar o palito ganha, desta forma, fica mais fácil de ver que os múltiplos de 4 são situações-perdedoras ($f(x) = 4x$) e todos os outros números são situações-vencedoras. Podemos, inclusive, relacionar ambos os jogos (o que o último jogador ganha e o que o último jogador perde) pois, podemos considerar que o jogo onde quem pega o último palito perde é equivalente ao jogo onde quem pega o penúltimo palito ganha. Portanto, deixando o último palito mais longe, o jogo com o restante dos palitos se torna um jogo onde a função de situações-perdedoras é $f(x) = 4x$. E se colocarmos este último palito de volta, temos que as situações-perdedoras do jogo com o último palito é: $g(x)=f(x)+1=4x+1=1+4x$.

Para terminar esta seção, gostaríamos de destacar que neste jogo, temos a potencialidade de trabalhar dois aspectos importantes: o primeiro é a **simplificação** de um problema complexo; o segundo é o ***backward reasoning***, onde pensamos o problema "de trás para frente", começando do final e desenvolvendo no sentido contrário até chegar ao começo.

NIM ("Jogo dos Palitos") : Para Além da Oficina

Nesta seção apresentaremos algumas reflexões sobre a Matemática envolvida no *NIM* ("*Jogo dos Palitos*"). Primeiramente, iremos analisar a atividade do "*Jogo dos Palitos 2*" (Ver apêndice 1.2), que é uma versão de *NIM* com uma fileira e limitação **relativa** do número de palitos retirados por rodada.

A ideia da resolução deste jogo é similar. Pensando no ***backward reasoning***, se sobra 1, é uma situação perdedora; sobrar 2 é vencedora; sobrar 3 só tem a possibilidade de jogar para 2, vencendo para o adversário, então é situação-perdedora; Se sobrar 4, 5 ou 6, é uma situação-vencedora, pois é possível deixar o adversário com 3 (uma situação-perdedora); 7 é uma situação perdedora; 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 são situações-vencedoras por poderem levar o adversário a uma situação-perdedora; 15 é uma situação-perdedora. Para 16, 17, 18, 19 ou 20 palitos, são situações-vencedoras, pois podem deixar o adversário no 15 (situação-perdedora).

Para analisarmos quando ocorrem as **situações perdedoras**, temos que pensar de forma similar ao jogo anterior (*Jogo dos Palitos 1*), onde as situações perdedoras eram encontradas ao adicionar 4 palitos, pois era 1 unidade a mais que o número máximo da jogada. Desta vez, como se pode capturar até metade dos palitos em jogo, ao pensar no ***backward reasoning***, para pensar no número de palitos máximo na jogada anterior, teríamos que dobrar o número de palitos. Ainda assim, em uma situação perdedora, como com 3 palitos, para pensarmos na próxima situação perdedora, teríamos que pensar em uma unidade a mais que o dobro de 3, ou seja, 7. Esta unidade a mais acontece pois o número 6 é uma situação vencedora, e o 7 é uma situação perdedora. Por indução, podemos verificar que as situações perdedoras são do tipo f(x) = 2^x-1. De fato, podemos ver que a hipótese é verdadeira para x = 1, x = 2, x= 3 (observamos que bastaria verificar para o primeiro valor de x). Suponha, por indução, que a hipótese é verdadeira para n, então, se dobrarmos e aumentarmos uma unidade, teremos que: $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. Portanto, a hipótese é verdadeira para qualquer x natural.

Da mesma forma que no "Jogo do Palito 1", onde chegamos a uma fórmula f(x) = 1+4x, onde o número de rodadas ("x") é multiplicado, por ser uma sucessão de adições, no "Jogo do Palito 2", chegamos à fórmula f(x) = 2^x-1, onde o número de rodadas, ("x") é elevado, pois se refere a multiplicações sucessivas. Então encontramos um exemplo concreto, por meio do jogo, da relação entre adição/multiplicação e multiplicação/potência.

Vale notar que no "Jogo do Palito 2", o x que representa o último palito é x=1, enquanto o x que representa o último palito no "Jogo do Palito 1" é o x=0

Além destes dois jogos que lidam com a retirada de palitos em **uma fileira**: o primeiro com uma regra aditiva, enquanto o outro com uma "regra relativa" (proporcional a um meio do total); foram propostos outros dois jogos que lidam com **mais de uma fileira**.

O terceiro jogo foi o Jogo do Palito (2 fileiras) que é um jogo *NIM* com duas fileiras, com 7 e 5 palitos. Sem restrição da quantidade de palitos retirados em uma rodada, porém sempre de apenas uma fileira.

Apesar de utilizar mais fileiras, a estratégia vencedora deste jogo é simples. Basta fazer o movimento que deixa ambas as fileiras com o mesmo número de palitos. Dessa forma, sempre que seu adversário deixar as fileiras desiguais, é possível deixá-las com a mesma quantidade. Até o momento que ele deixará uma fileira com zero palitos (pois o número de palitos é finito e toda a rodada pelo menos um palito é retirado), e você fará o movimento que deixará a outra fileira com zero palitos também, pegando o último palito.

Essa técnica também é chamada de **espelhamento** e é bastante comum para a resolução de jogos matemáticos simétricos. Então é uma ferramenta poderosa e importante para se ter na análise de jogos.

A estratégia vencedora para a variante deste jogo onde quem pegar o último palito perde é similar ao espelhamento, porém quando faltar apenas um palito em uma fileira, é preciso pegar todos na outra, se uma fileira estiver sem palitos, é preciso pegar todos menos 1 da outra fileira.

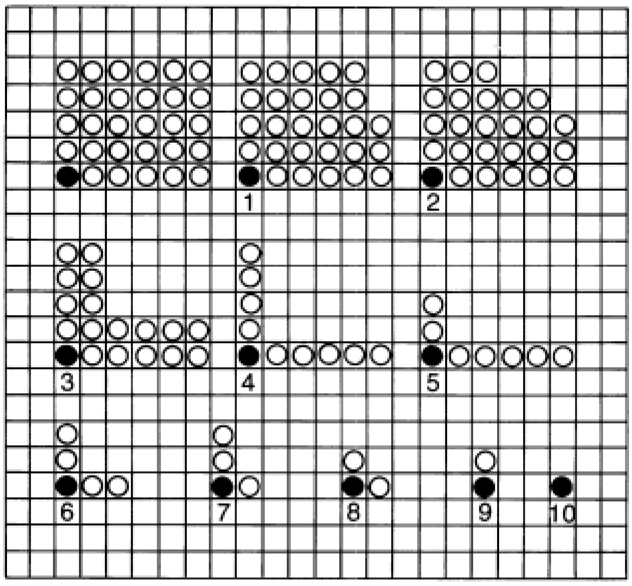
Perceba que a estratégia vencedora está com o **primeiro** jogador se as fileiras estiverem **desiguais** enquanto está com o **segundo** jogador se as fileiras estiverem **iguais**.

O quarto jogo foi o jogo *NIM* com 3 fileiras: uma fileira com 3 palitos, uma com 5 e uma com 7 palitos. A terceira fileira aumenta a complexidade da solução de maneira bastante significativa. A solução para este jogo está explicitada no artigo *Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory* (BOUTON, 1901) e envolve a utilização da representação binária do número de palitos de cada fileira.

O último jogo proposto foi o *Chomp*. *Chomp* foi inventado por David Gale e nomeado por Martin Gardner (GARDNER, 1986). As regras deste jogo são: em um tabuleiro retangular, as jogadas consistem em escolher um palito e capturar todos os palitos que estejam acima ou à direita dele. Os jogadores jogam alternadamente e perde o jogador que pegar o último palito.

Na Figura 6, apresentamos um exemplo de jogo em um tabuleiro 6x5 onde o primeiro jogador perde na décima primeira jogada, pois precisa capturar o último palito.

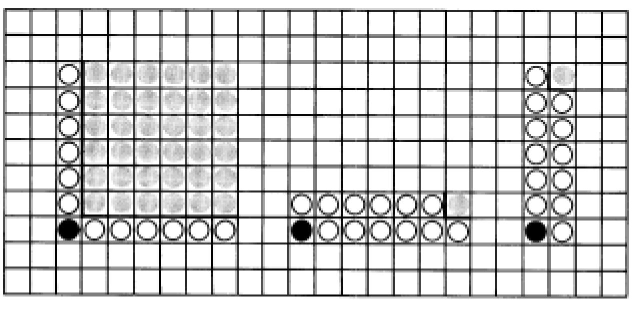
Figura 6: Exemplo de um jogo *Chomp* de 6x5



Fonte: GARDNER, (1986, p.114)

Este jogo é curioso pois ainda não encontraram o caso geral da estratégia vencedora. Para computadores, é fácil calcular soluções para tabuleiros finitos de tamanhos pequenos, porém, por não ser linear, é uma tarefa não computável para números maiores. Conhecemos a solução, para alguns casos **específicos**, como é o caso de tabuleiros **quadrados**, onde podemos deixá-lo apenas com **uma linha vertical** e **uma horizontal**, e resolver análogo ao *Jogo do Palito (duas fileiras)*. Também temos a estratégia vencedora da situação chamada de **"*Chomp Fino*"**, onde há apenas **duas fileiras**. Nesta estratégia vencedora, basta deixar a linha horizontal de cima com um palito a menos, que sempre é possível, a não ser que a posição já esteja desta forma, que seria o caso de uma situação-perdedora. A solução para **duas colunas** é análoga, deixando a coluna da direita com um palito a menos. Ver figura 7:

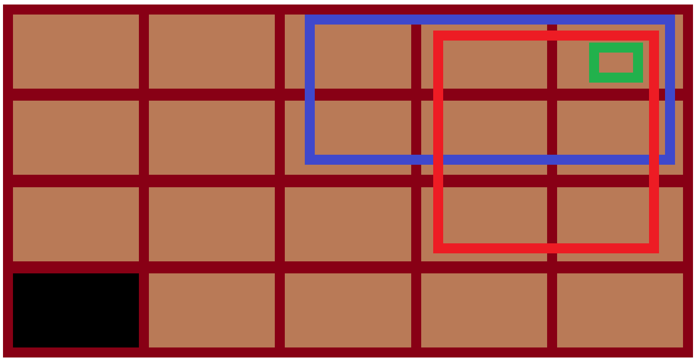
Figura 7: Ilustração da Estratégia vencedora para os casos quadrados e de 2 linhas.



Fonte: GARDNER, (1986, p.114)

Segundo Gale (1974), apesar de não sabermos a solução da estratégia vencedora, sabemos que a estratégia vencedora tem de ser do primeiro jogador. A prova é bastante simples, se a primeira jogada for capturar um palito, existem duas possibilidades: ou esta jogada faz parte de uma estratégia vencedora (portanto o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora!), ou o segundo jogador consegue fazer uma jogada que tem uma estratégia vencedora. Porém, neste segundo caso, qualquer que seja a jogada do segundo jogador que tem uma estratégia vencedora, poderia ser a primeira jogada do jogo (!). Portanto, o primeiro jogador poderia fazer essa jogada, então a estratégia vencedora com certeza é do primeiro jogador. Na figura 8 ilustramos em verde a primeira jogada em questão, podemos ver na ilustração que qualquer outra jogada que o segundo jogador possa fazer contém a primeira jogada e, então, portanto, se há uma jogada que força a vitória para o segundo jogador, ela poderia ser feita pelo primeiro jogador na primeira rodada.

Figura 8: Ilustração da prova de estratégia vencedora para o primeiro jogador.



Fonte: Autor

O *Chomp* foi escolhido justamente pelo fato de ser uma pergunta em aberto, ou seja, ainda não resolvido completamente. É interessante saber que ainda existem várias questões em aberto, até mesmo com jogos aparentemente simples. Mesmo com questões em aberto, conseguimos trabalhar com ela e fazer deduções utilizando resultados que ainda não conhecemos, mas sabemos que existem. Estas são aplicações matemáticas refinadas que são encontradas adentrando o universo dos jogos e que são bastante instigantes.

Durante a prática pedagógica, é propício entrar em contato com perguntas fechadas, ou seja, completamente resolvidas, como são os casos de exercícios de fixação e de grande parte dos problemas de apostila de exatas, onde há apenas uma resposta certa e conhecida. As perguntas fechadas são importantes para demonstrar a capacidade da matemática de solucionar problemas de maneira absoluta. Porém, também é oportuno que o aluno se depare com perguntas em aberto, ou seja, perguntas onde ainda não se sabe a solução, pois desta forma o aluno não irá apenas treinar a reprodução de um algoritmo conhecido que com certeza funcionará, mas se deparará com questões cujas respostas são desconhecidas. O aluno, para enfrentar o problema, deverá utilizar suas ferramentas matemáticas e seu raciocínio, assim como teria de fazer em alguma situação real.

Em relação ao material pedagógico do Jogo, esta é uma questão particularmente interessante pois, a partir do momento que o Jogo é resolvido por completo, este deixa de ser empolgante, acaba se **descaracterizando** e **deixa de ser um Jogo**. Este argumento é sustentado por Caillois (1990), já citado anteriormente, que afirma que o Jogo precisa da **incerteza** do resultado.

Apesar de ser uma excelente questão matemática, a busca de uma estratégia vencedora, ou de uma solução absoluta, quando resolvida por completo, tem o risco de finalizar o mistério acerca da questão. Por isso é necessário que o professor e os alunos estejam aptos para criar novas questões, buscarem novos desafios para resolver e que, dali em diante, estarão com um repertório maior de estratégias e recursos que poderão utilizar para suas resoluções.

2.2: Segundo Encontro

Com o segundo encontro, tínhamos como objetivo apresentar os jogos sob o ponto de vista da psicologia e da psicopedagogia; falar sobre a relação dos Jogos com o Ensino e a Aprendizagem; trabalhar com alguns jogos de tabuleiro e jogos de registro e discutir algumas de suas particularidades e potencialidades em sala de aula (Ver apêndice 2.0). Foram apresentados jogos de enfileiramento e o das 4 Cores.

Jogos de Enfileiramento

Na primeira atividade do segundo encontro utilizamos a família de jogos de enfileiramento (Ver apêndice 2.1). Os jogos de enfileiramento são jogos de tabuleiro em que o objetivo se relaciona com o enfileiramento de um número determinado de peças.

Com os jogos de enfileiramento, pudemos trabalhar o posicionamento geográfico das peças como parte da análise da partida, característica que não tínhamos visto nas atividades anteriores.

- ***Jogo-da-Velha*** **:**

  Tabuleiro: 3x3

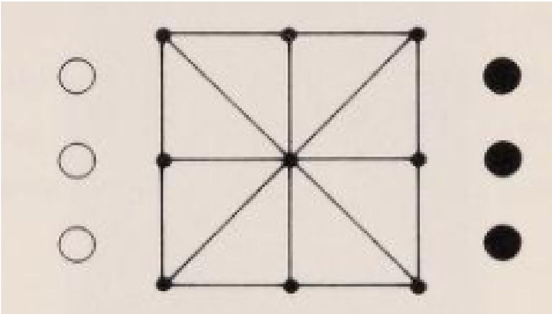
Regras: Cada jogador, alternadamente, coloca uma de suas peças em uma das casas do tabuleiro. Cada casa só pode conter, no máximo, uma peça.

Objetivo: Quem enfileirar três de suas peças (na horizontal, vertical ou diagonal), vence o jogo.

- ***Ta-Te-Ti* (*Tapatan* ou *Three Men's Morris*):**

Tabuleiro: 3x3, definido por todas as linhas horizontais, verticais e diagonais do quadrado. Ver Figura 9:

Figura 9 - Tabuleiro Ta-Te-Ti



Fonte: Zaslavsky (1982, p.30)

Regras:

Primeira fase: Cada jogador, alternadamente, irá colocar uma de suas peças em uma das casas do tabuleiro. Cada casa só pode conter, no máximo, uma peça. Cada jogador possui apenas 3 peças.

Segunda fase: Após colocarem todas as peças no tabuleiro, os jogadores escolherão movimentar uma peça pela linhas destacadas no tabuleiro. A movimentação sempre é feita para uma casa vazia adjacente.

Objetivo do jogo: Quem enfileirar as suas três peças (na horizontal, vertical ou diagonal), vence o jogo.

Em caso de repetição tripla da mesma configuração, o jogo é considerado empate.

- ***Gomoku*:**

Tabuleiro: 19x19 ou 15x15

Regras: Cada jogador, alternadamente, coloca uma de suas peças no tabuleiro.

Objetivo: O primeiro jogador que enfileirar 5 de suas peças, vence o jogo.

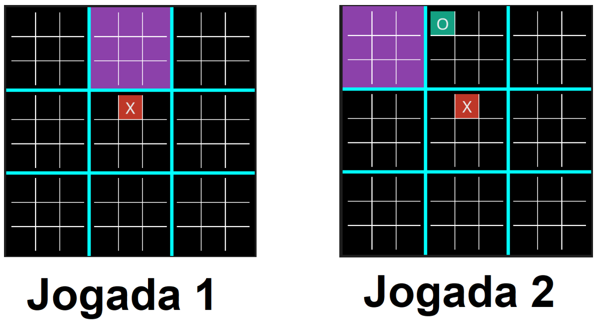
- ***Jogo-da-Velha Ultimate*:**

Tabuleiro: Tabuleiro global 3x3, onde cada uma de suas casas é um tabuleiro local 3x3.

Regras: A primeira jogada é livre, porém, a próxima jogada deve ser feita no tabuleiro local equivalente à jogada anterior (em lilás, na Figura 10). Quando um tabuleiro local for completado, o jogador que o completou irá marcá-lo com seu símbolo. Podemos ver na figura 11 um final de jogo onde termina empatado.

Objetivo: Ganha o primeiro jogador que enfileirar três casas (na horizontal, vertical ou diagonal) no tabuleiro global.

Figura 10 - *Joga-da-Velha Ultimate* (Duas Jogadas)



Fonte: XING (2019)

Figura 11 - *Jogo-da-Velha Ultimate* (Meio e Final de Jogo)

Fonte: XING (2019)

Jogos de Enfileiramento: Oficina

Com estas atividades trabalhamos novamente os conceitos de análise de jogo, como a análise da árvore de possibilidades, além de abordar o conceito de "armadilhas" e "ciladas", ou seja, situações que você pode forçar o adversário à derrota.

Como o grupo estava familiarizado com o *Jogo-da-Velha*, optamos por começar diretamente com a atividade do *Ta-Te-Ti*. Após a explicação de como o jogo funciona, tivemos um tempo para que os cursistas explorassem livremente e entendessem as regras do jogo.

Como é de se esperar, quando somos apresentados a um novo jogo, a principal preocupação do jogador é a apreensão do movimento das peças dentro das regras do jogo. A partir do momento que o movimento de cada peça é aprendido, cada jogador busca desenvolver suas próprias táticas e estratégias em relação ao jogo.

Iremos considerar que táticas são sequências de jogadas de curto prazo que darão vantagem para aquele que a efetuar. E considerar que estratégias são noções amplas de longo prazo que buscam um plano de ação para que o jogador tenha êxito na partida.

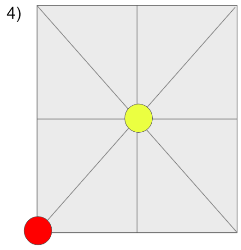
Depois da familiarização com as regras e o movimento das peças no jogo, e da livre exploração, disponibilizamos a ficha de atividade respectiva (Ver apêndice 2.1) para o grupo em que foram exploradas algumas situações-problema onde era possível criar "armadilhas" para o adversário, ou seja, encontrar situações em que, se jogar o movimento correto, poderá prejudicar o adversário e forçar uma vitória para si.

As atividades 2 e 3 representam duas das principais "armadilhas" do *Ta-Te-Ti* que, coincidentemente, se baseiam no mesmo pensamento contraintuitivo. Nos jogos de enfileiramento em tabuleiros 3x3, existe uma casa especial, a casa central. Esta condição especial tem inúmeras razões, uma delas foi explorada na primeira atividade sobre o *Jogo-da-Velha*: é a casa que possui o maior número de possibilidades de retas. Porém, em ambas as situações 2 e 3, que ocorrem após o adversário tentar manter sua peça na posição central, acaba abrindo a possibilidade para uma tática, onde seu adversário "prende" suas peças, fazendo com que perca a partida em seguida. Todos os participantes conseguiram resolver estas atividades.

As atividades 4 e 5 exploravam duas situações iniciais do jogo, ambas em que o primeiro jogador começa pelo centro. O nível de dificuldade era alto, já que poderia ser preciso analisar múltiplos casos até encontrar a solução, sendo que algumas das linhas de raciocínios eram inconclusivas, porém era possível encontrar uma sequência de movimentos que forçava a vitória para o primeiro jogador nos dois casos.

Na figura 12, podemos observar a situação-problema da atividade 4, onde o primeiro jogador (de peças amarelas) começa no centro e o segundo jogador (de peças vermelhas) começa em um canto. É perguntado se é possível garantir uma vitória para as peças amarelas e que se explique como.

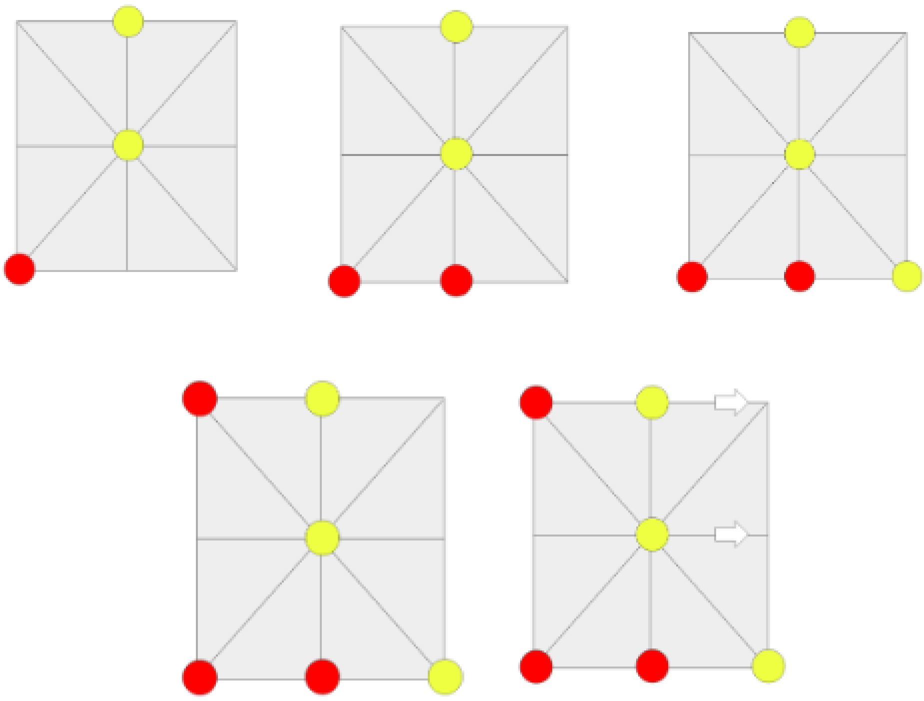
Figura 12: Tapatan (Centro-Canto)



Fonte: Autor

A resposta para esse problema é que podemos garantir uma vitória com a sequência de movimentos apresentada na Figura 13:

Figura 13: Tapatan: Estratégia Vencedora (Centro-Canto)

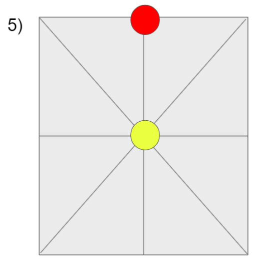


Fonte: Autor

Após colocar em um canto, o jogador de amarelo pode colocar uma peça em uma aresta não adjacente a este canto. Desta forma, obrigando o jogador vermelho a responder e não deixar que o amarelo complete a linha, colocando sua peça no lugar. O amarelo é obrigado a responder para que o vermelho não complete a linha e, na mesma jogada, faz uma ameaça de ganhar o jogo em um movimento, o jogador vermelho é obrigado a bloquear para prolongar a partida. No último quadro, é a vez do amarelo, que está a dois movimentos da vitória. O vermelho não pode impedir as jogadas do amarelo, nem vencer o jogo em um número menor de movimento, já que é a vez do amarelo. Portanto, o amarelo sempre ganha com esta estratégia.

De forma semelhante, a atividade 5 analisa a possibilidade de começar no centro e, em seguida, o oponente joga em uma das arestas, representado na figura 14:

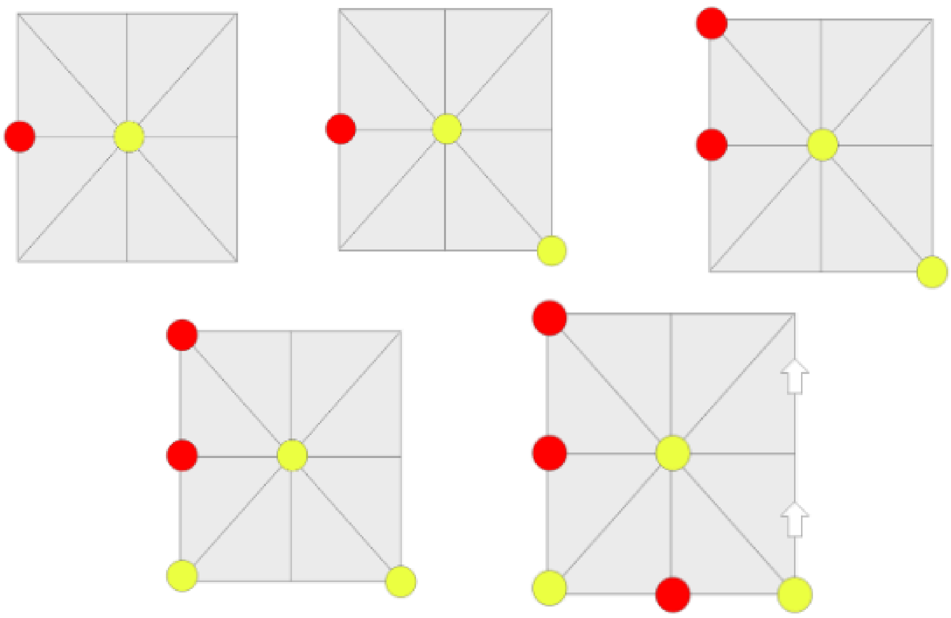
Figura 14 Tapatan: Estratégia vencedora (Centro-Aresta)



Fonte: Autor

A resposta para esse problema é que podemos garantir uma vitória com a sequência de movimentos apresentada na figura 15:

Figura 15: Tapatan: Estratégia Vencedora (Centro-Aresta)



Fonte: Autor

Similar ao exemplo anterior, se o adversário colocar em uma casa de uma aresta, a estratégia vencedora começa colocando uma peça em um "canto" não adjacente à casa da aresta. As três jogadas seguintes estão bloqueando a linha imediata do adversário. No último quadro, o amarelo consegue vencer em 2 movimentos, o vermelho não consegue impedir os movimentos e nem vencer em um número de movimentos menor, pois é a vez do amarelo. Portanto, neste caso, o amarelo sempre vence.

O exercício 6 perguntava se havia uma estratégia vencedora para este jogo. Encontrando o resultado para as atividades 4 e 5, a resolução para a atividade 6 é apenas uma decorrência(corolário), dado que as situações 4 e 5 eram as únicas possíveis, devido a simetria do tabuleiro. Após a explicação dos exercícios 4 e 5, os cursistas rapidamente deduziram a resposta do exercício 6.

A atividade 7 era uma proposta de sugestão de novas regras, para evitar que o jogo não terminasse com uma estratégia vencedora onde o jogo é previsível e sem chance para o segundo jogador de vencer, se jogar contra um oponente forte.

Algumas mudanças sugeridas pelos cursistas foram: não poder começar pelo meio ou começar com as peças no tabuleiro em uma determinada configuração. Um cursista também perguntou se teria como fazer um jogo que precisasse enfileirar mais peças. Por conta da pergunta, sugerimos trabalhar com o jogo *Gomoku*. Como tínhamos um tabuleiro de *Go*, levado à oficina para o uso de jogos de enfileiramento maiores, houve uma partida entre dois jogadores, enquanto os outros assistiam atentamente e ajudavam os colegas em algumas tomadas de decisão.

Outro jogo explorado foi o *Jogo-da-Velha Ultimate* (Ver apêndice 2.1). Esta versão de *Jogo-da-Velha* é bastante complexa e é preciso administrar a movimentação das peças não apenas nos tabuleiros menores (tabuleiro local) como no tabuleiro maior (tabuleiro global). Uma partida foi realizada por uma nova dupla. Inicialmente, os jogadores ainda estavam tirando suas dúvidas em relação à movimentação das peças, e durante a partida os jogadores puderam desenvolver seu jogo enquanto os outros participantes também assistiam e opinavam sobre a situação do tabuleiro.

4 Cores

Escolhemos o *problema das 4 Cores* para representar os jogos de registro, podendo ser jogos relacionados com a escrita ou desenhos, consideradas duas das maiores façanhas do ser humano em relação ao registro de comunicação em um meio físico.

Uma das motivações de utilizar o clássico *problema das 4 Cores* é de mostrar como um simples problema, baseado na atividade de pintar mapas com o menor número de cores, sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor; poderia inspirar uma conjectura, que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas 4 cores, sem pintar duas regiões vizinhas da mesma cor; e que, finalmente, após ser comprovado, pôde se tornar no *Teorema das 4 Cores*. O *Teorema das 4 Cores* foi solucionado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, professores da

Universidade de Illinois, com o auxílio de computadores (MACEDO, 1997) .

***Problema das 4 Cores* :**

Tabuleiro: Qualquer desenho não pintado (sugestões na ficha).

Regras: O jogador deve pintar cada região de uma cor, de forma que duas regiões vizinhas não tenham a mesma cor, utilizando apenas 4 cores.

Objetivo: Terminar o mapa inteiro.

***Cilada de Cores* :**

Tabuleiro: Qualquer desenho não pintado (sugestões na ficha).

Regras: Jogo em duplas, o primeiro jogador pinta qualquer uma das regiões, em seguida:

- Cada jogador, em rodadas alternadas, deve pintar uma região que deve ser vizinha à última região pintada pelo adversário.

Obs: Se a última região pintada não tiver regiões vizinhas em branco, então o jogador poderá escolher qualquer região vizinha a uma região pintada.

- Se ocorrer uma situação em que o jogador não consegue pintar uma região vizinha sem que duas regiões adjacentes não tenham a mesma cor, este jogador deverá escrever a sua inicial para identificar a região que não pode ser pintada. E continuará o jogo pintando alguma região vizinha a uma região colorida.
- Quem tiver o menor número de casas marcadas, vence a partida.

Objetivo: Ter o menor número de casas marcadas com sua inicial.

4 Cores: Oficina

O objetivo desta atividade era que os cursistas pudessem explorar este problema geométrico e desenvolver suas estratégias para colorir o mapa por completo, ou, no caso do *Cilada de Cores*, vencer o jogo.

Os cursistas praticaram o problema das 4 cores com o mapa do Brasil. Tiraram algumas considerações em relação à sequência em que estava pintando as regiões e quais eram as estratégias sendo utilizadas. Alguns tentaram pintar de forma que cada cor tivesse aproximadamente o mesmo número de regiões, o que seria um desafio a mais, mas foi conversado entre o grupo que uma boa estratégia seria minimizar o número de cores.

Macedo(1997) sugere marcar a sequência com que as regiões estão sendo pintadas, com os números 1, 2, 3, em diante, e, caso não seja possível pintar uma região, pois ela está vizinha a regiões com 4 cores diferentes, que se coloque a inicial do seu nome para marcar quantas regiões não foram possíveis de ser pintadas da forma escolhida.

Logo em seguida, propusemos que os cursistas experimentassem o jogo *Cilada de Cores*, uma versão do Problema das 4 Cores onde, ao invés de ser um **quebra-cabeça** individual, se torna um **jogo competitivo** onde se busca deixar o adversário em uma “cilada” (ou seja, deixar impossível que se pinte uma região adjacente à anterior de modo sem que haja nenhuma outra região adjacente da mesma cor, usando apenas 4 cores).

É importante dizer que, apesar da similaridade das regras entre o *Problema das 4 Cores* e o *Cilada de Cores*, pois ambos utilizam apenas 4 cores sem poder colorir regiões vizinhas com cores iguais, as duas atividades são bastante diferentes. Pois o *Problema das 4 Cores* envolve “facilitar” ao máximo para poder completar o objetivo, enquanto que no *Cilada de Cores*, seu objetivo é dificultar a situação do seu adversário, para que ele se prejudique e você se torne vencedor.

Outra proposta muito interessante que a atividade permite é a criação de mapas próprios para cada um dos participantes. É bastante proveitoso que os educandos não tenham apenas uma postura passiva em relação aos recebimento de problemas pelo educador, mas que tenham a postura ativa de propor problemas para que eles mesmos possam resolver. Esta postura é apoiada pelo fato de que o teorema das 4 cores funciona para qualquer mapa, ou seja, os participantes podem criar configurações de forma aleatória (rabiscando no papel, por exemplo) que poderá configurar em um mapa desafiador em que o próprio criador pode não conseguir encontrar uma solução. Esta é uma característica peculiar deste tipo de problema que não acontece em outros, como por exemplo, ao colocar uma configuração aleatória em um tabuleiro de Sudoku, não existe a garantia de solução, ou que essa solução seja única.

2.3: Terceiro Encontro:

Com o terceiro encontro, tínhamos como objetivo apresentar um pouco da bibliografia sobre os Jogos Digitais; explorar alguns aplicativos de jogos; discutir sobre o papel dos jogos e da tecnologia no âmbito da educação (Ver apêndice 3.0). Foram apresentados os jogos *Calculadora: o Jogo*, *Euclidea*, *Pythagorea* e *Nerdle*.

Calculadora: O Jogo

A primeira atividade do terceiro encontro tinha como base o aplicativo de celular "*Calculadora: O Jogo*" (Ver apêndice 3.1).

O aplicativo "*Calculadora: O Jogo*" contém uma sequência de quebra-cabeças envolvendo contas de aritmética. Para cada fase, a calculadora entrega um número inicial, botões com algumas operações (por exemplo, teria um botão "+2" e outro "+3"), um botão para reiniciar a tentativa, o número de jogadas e o objetivo (o número que se espera chegar no final).

Este aplicativo exemplifica um gênero conhecido de problemas da Matemática Recreativa que utiliza o auxílio de calculadoras. Estes problemas, de forma geral, consistem em utilizar um número mínimo de toques na calculadora para um certo objetivo, podendo ou não ter restrições (problemas do tipo "Calculadora Quebrada").

Calculadora: O Jogo

Tabuleiro: Interface de Calculadora no celular, com visor e botões.

Regras: A partir de um número inicial, chegar até um número final (objetivo) com um número limitado de jogadas e operações numéricas

Operações numéricas:

- Soma
- Subtração
- Multiplicação
- Divisão (com decimal)
- "<<" : Deleta o algarismo da unidade. Exemplo: 123 se torna 12
- Botão Roxo: Coloca o algarismo do botão na unidade enquanto desloca todos os outros algarismos uma casa decimal para a esquerda. Exemplo: Se o botão roxo tiver um 6, o número 432 vira 4326.
- "X=>Y": Faz com que toda a aparição do dígito X em um número se transforme no dígito Y. Exemplo: Se o botão for 1 => 2, então o número 1312 vira 2322.

Obs: O aplicativo possui outras operações, porém estas foram as programadas para a atividade.

Calculadora: O Jogo **: Oficina**

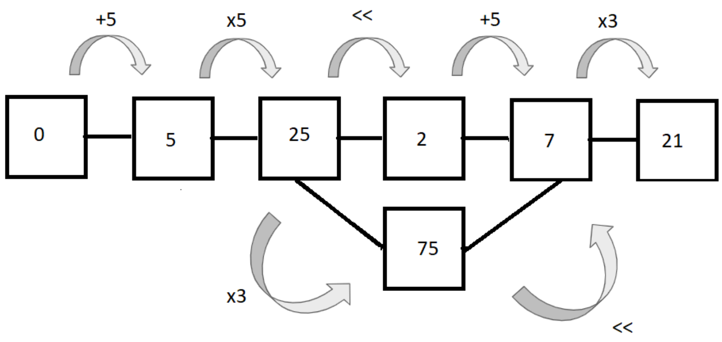
Uma das motivações para esta atividade foi que a calculadora representa um dos primeiros dispositivos digitais popularizados e que tem como função principal as operações matemáticas. Por conta de sua natureza, diversas questões matemáticas são levantadas por sua exploração.

Em um mundo com mudanças tão rápidas e intensas devido à facilidade digital, é importante ensinar não apenas o uso de calculadoras para que o educando possa criar e verificar suas próprias contas, mas ter a reflexão crítica de como utilizar essa ferramenta para seu melhor proveito.

Durante o encontro, não nos atemos à ficha de atividade. Como a ideia era acompanhar a sequência de exercícios do aplicativo, era mais fácil seguir o encontro apenas com um dispositivo, ao invés de alternar entre o dispositivo celular e o papel. Cada cursista utilizou o seu próprio celular para a realização da atividade. Focamos principalmente em discutir entre nós as questões que encontramos ao buscar solucionar os quebra-cabeças.

Houve um momento oportuno onde levamos o exercício para a lousa e buscamos soluções de forma coletiva. No nível 14, tínhamos 5 movimentos para chegar até 21, partindo do zero, com os botões “+5”, “x3”, “x5” e “<<”. Discutimos como, no primeiro movimento, a única jogada que fazia sentido era o botão “+5”, pois era o único que alterava o número do visor. Também exploramos o *backward reasoning*, pensando em qual poderia ser o último botão a ser apertado. Pudemos deduzir que o botão “x5” não deveria ser, pois a divisão de 21 por 5 não resultava em um número inteiro. Deduzimos também que não deveria ser o botão “<<”, pois não seria possível formar um número com o valor entre 210 e 219 com aquele número de jogadas (porém era possível encontrar 225 = 5x5x3x3, que resultaria em 22, após utilizar “<<”, em 5 movimentos). O botão “+5” dificilmente seria o último, pois implicaria que o penúltimo número no visor seria 16, que seria difícil de formar, dado que com as operações de adição e multiplicação, apenas teríamos resultados terminados em 5, e precisaríamos chegar a pelo menos 160 para usar o botão “<<”. Portanto, a última operação provavelmente era o botão “x3”, portanto precisaríamos pensar em uma maneira de formar “7” com as operações. Após explorarmos alguns resultados das multiplicações (o uso da calculadora do aplicativo facilitou a procura rápida e sem esforço dos resultados das operações), foram encontradas duas soluções pelo grupo. A esquematização da lousa está representada na Figura 16.

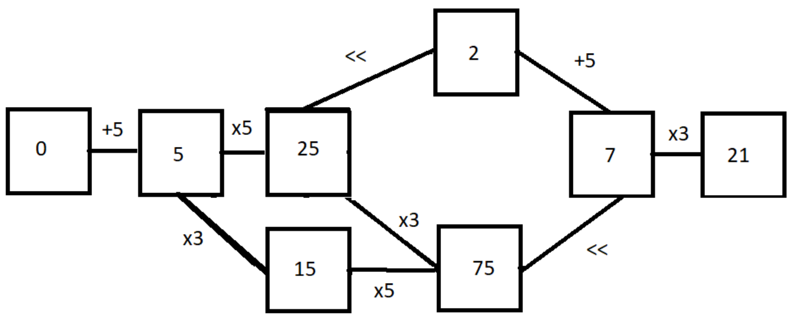
Figura 16: Esquematização da Lousa de "*Calculadora: O Jogo*"



Fonte: Autor

Coletivamente construímos duas soluções: poderíamos fazer [(0+5)x5] = 25, efetuar a operação "<<" para chegar em 2 e seguir com (2+5)x3 = 21. Ou, poderíamos fazer (0+5)x5x3=75 e efetuar a operação "<<" para chegar em 7 para fazer 7x3=21. Pudemos notar também que, devido à comutatividade da multiplicação, teríamos uma terceira possibilidade, formada pelas operações [(0+5)x3x5 = 75] e efetuando "<<" para chegar em 7 e fazer 7x3 = 21. Um esquema com as 3 soluções está reproduzido na Figura 17:

Figura 17: Representação das 3 soluções do nível 14.



Fonte: Autor

A própria escolha da representação do diagrama, similar a um diagrama de grafos, tem implicações na forma de pensamentos que podemos construir ao pensar em problemas similares a este. Os alunos durante a sua carreira escolar e para além dela, terão de trabalhar com análise de possibilidades. A utilização de diagramas de árvores ou grafos é altamente benéfica para exercitar a representação deste tipo de pensamento abstrato e que possa facilitar o entendimento do aluno quando, futuramente, tenha de aprender conceitos que lidam com esses conteúdos, como, por exemplo, Estatística, Contagem e Probabilidade.

Neste diagrama, é bastante interessante observar o "paralelogramo" de vértice 5-25-75-15, uma maneira de mostrar a comutatividade da multiplicação visualmente, com o potencial para a Teoria dos Números de representar a decomposição por número primos desta maneira. A segunda parte interessante do diagrama seria o "quadrilátero" de vértice 25-2-7-75, mostrando duas formas de chegar do número 25 até o número 7 com 2 pares de operações que não são comutativas.

Este simples jogo envolvendo operações matemáticas pode trabalhar com diversas ideias matemáticas sofisticadas: podemos criar e debater ideias sobre as operações aritméticas; sobre a comutatividade de algumas operações e a não-comutatividade de algumas sequências; sobre funções; sobre combinação linear; sobre contagem de possibilidades; sobre crescimento e decrescimento de funções; *backward reasoning*; e muitos outros conceitos matemáticos.

Calculadora: O Jogo : Para Além da Oficina

Nesta seção iremos falar sobre algumas das idéias proporcionadas pela atividade da *Calculadora: O Jogo*.

Além das operações básicas da aritmética (adição/subtração/multiplicação/divisão), a calculadora traz a potencialidade de explorar novas funções, com implicações gradualmente mais difíceis. Como o botão “<<”, os botões roxos e botões do tipo “X => Y”.

As duas primeiras funções trabalham estritamente com a manipulação de casas decimais e possuem diversas implicações em suas utilizações. A manipulação de casas decimais é importantíssima para a manipulação aritmética em nosso sistema numérico decimal. É preciso que os alunos tenham facilidade na manipulação de casas decimais para desenvolver a leitura do sistema numérico de base 10, a operacionalização dos algoritmos das operações básicas, a noção de ordem de grandeza, entre muitos outros conceitos matemáticos acerca do sistema numérico decimal.

Por exemplo, a operação “<<” deleta o algarismo da unidade, formando um novo número, por exemplo, 123 se transforma em 12. Podemos dizer que a função “<<” é equivalente à divisão por 10, na divisão inteira, sem utilizar o resto. Esta operação é de extrema importância para o entendimento do algoritmo da divisão com decimais, além de ser importante para a segmentação de números em quaisquer outras das 4 operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

A operação do tipo “X => Y” é uma operação que não se converte facilmente para uma das operações básicas ou uma função simples. Para representar esta função, seria preciso ser feita uma função condicional que também pudesse reconhecer os algarismos do número.

A exploração de uma recriação deste aplicativo em um ambiente virtual, como por exemplo, o *Scratch*, ou em uma linguagem computacional como *Python* seria uma excelente atividade digital que envolve o aprofundamento de diversos conceitos matemáticos, aritméticos e computacionais, como o armazenamento de dados, manipulação de dados, uso de funções condicionais e operacionalização numérica computacional.

Na ficha de atividade (Ver apêndice 3.1), exploramos algumas das possibilidades de desenvolvimento com cada situação e operação. A ideia da ficha era discutir como algumas das propriedades fundamentais da matemática poderiam ser exploradas utilizando elementos daquele quebra-cabeça. Por exemplo, como transformar as “novas funções” em operações matemáticas, ou se estas funções possuíam uma função inversa. Podemos observar que a função “<<” não possui inversa, por não ser injetiva (exemplo, o número “21” pode ser a imagem de qualquer número entre 210 e 219). As funções de “botão roxo” possuíam inversa, pois estavam apenas “colocando” um número na unidade, portanto poderíamos apenas tirá-lo (inclusive, é exatamente o papel da função “<<”). Temos um caso peculiar onde o “botão roxo” possui uma inversa, porém sua inversa não possui inversa. A função de conversão de dígitos também não possui inversa, pois não é injetiva, por exemplo, para a função “1=>7”, o número “77” pode ser a imagem de “11”, “17”, “71” ou “77”.

Geometria Digital

A segunda atividade do terceiro encontro tinha como base os aplicativos “*Euclidea*” e “*Pythagorea*”. Ambos os aplicativos representam formas de abordar a geometria por meio digital.

Euclidea é um aplicativo com uma sequência de quebra-cabeças em que o conteúdo são as construções de régua e compasso. É uma excelente ferramenta para introduzir os alunos a algumas das construções geométricas fundamentais. A progressão de dificuldade é gradual e intuitiva. Os quebra-cabeças possuem um botão que mostra a solução, sem mostrar como se chega nela, porém esta revelação pode ser usada para buscar propriedades da construção que podem ajudar a descobrir como é feita a solução.

Pythagorea é um aplicativo feito em uma malha quadriculada. A ideia seria resolver os desafios apenas utilizando os vértices da malha quadriculada, além de utilizar régua para construir novas retas e pontos. Também é feito de diversos quebra-cabeças separados por categorias. Ao utilizar a lógica da malha quadriculada, o educando pode perceber propriedades geométricas, por exemplo, o usuário perceber que para formar retas paralelas em uma malha quadriculada, é preciso que tenham a mesma declividade (coeficiente angular). A declividade sendo o número de quadrados avançados pela horizontal em relação aos quadrados na vertical.

Por exemplo, uma linha que, a cada três quadrados para a direita, sobe a distância de um quadrado, podemos dizer que é uma reta com declividade equivalente ao vetor (3,1).

A escolha destes aplicativos veio para representar um diálogo importante entre um campo matemático clássico com as novas tecnologias.

Ao longo da história da Geometria, os instrumentos utilizados para criar os desenhos moldaram este campo matemático, o exemplo mais notório seria as construções geométricas com régua e compasso. Para além da régua e do compasso, geômetras como Arquimedes já utilizavam instrumentos como a *neusis*, uma régua marcada e móvel, que criou novas formas de trabalhar as construções geométricas, as construções *neusis*, que conseguia resolver problemas impossíveis para a construção de régua e compasso, como a trissecção do ângulo (CONWAY, GUY, 1996). Da mesma forma, a Revolução Digital criou ferramentas digitais que evidenciaram outra forma de construção geométrica: a Geometria Dinâmica.

***Euclidea*: Regras**

Objetivos:

- 1a estrela: Resolver o problema
- 2a estrela: Resolver o problema com o menor número de movimentos
- 3a estrela: Resolver o problema com o menor número de movimentos básicos.
- 4a estrela (ocasionalmente): Colocar as múltiplas soluções (se houver)

Botões:

Ponto: Cria um ponto na tela.

Régua: Cria uma reta após escolher 2 pontos.

Compasso: Cria uma circunferência após escolher 2 pontos (Centro e ponto da circunferência).

Intersecção: Cria o ponto de intersecção após escolher 2 formas.

Mediatriz: Cria a mediatriz após escolher 2 pontos.

Obs: Mediatriz é uma função encontrada a partir de certo nível. Existem outras funções, porém não foram exploradas durante a atividade.

Pythagorea : Regras

Tabuleiro: Malha Quadrada 6x6.

Regras: Construção de pontos e retas a partir da malha quadriculada.

Objetivo: Cumprir o objetivo do quebra-cabeça apenas com pontos e linhas construídas a partir da malha quadriculada.

Geometria Digital : Oficina

Ao trabalharmos com os aplicativos tínhamos como objetivo introduzir ferramentas digitais para a exploração de conceitos geométricos e a resolução de problemas clássicos de geometria. Novamente, não seguimos a ficha de atividade disponibilizada, pois preferimos dar espaço para a livre exploração dos aplicativos, visto que alguns dos cursistas não se lembravam de algumas definições geométricas.

Após a exploração de ambos os aplicativos de geometria, passamos a discutir sobre plataformas e jogos digitais na educação e gamificação da educação. Os cursistas trouxeram suas experiências como professores e alunos.

Em seguida, enquanto mencionávamos outras possibilidades de utilização de jogos digitais, lembramos do jogo *Nerdle*.

Nerdle

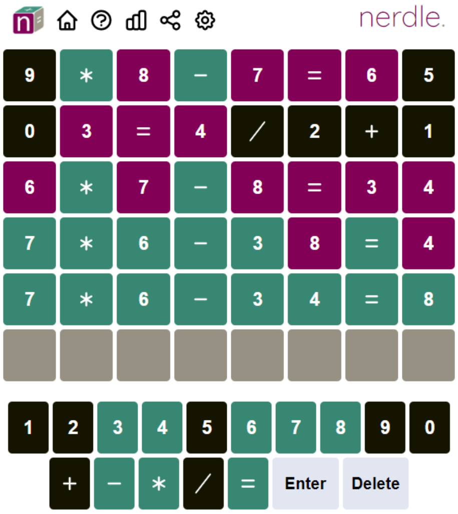
Nerdle é uma variante do jogo *Wordle*. O *Wordle* é um jogo que mistura a forma de jogar do jogo Senha, porém com palavras ao invés de cores. No jogo *Senha*, um jogador cria uma "senha", uma sequência de cores, e o outro jogador deve, por tentativas, descobrir qual é a senha. Para cada tentativa, o jogador recebe as informações de quantas cores "estão certas, no lugar certo" ou "estão certas, no lugar errado". Dizer que a cor "está certa, no lugar errado", significa que esta cor aparece na sequência proposta, mas não está no lugar certo.

No jogo *Wordle*, é preciso tentar descobrir a "palavra do dia", que possui 5 letras, em até 6 tentativas. Cada tentativa precisa ser uma palavra válida de 5 letras. Para a versão em português, temos o jogo "*Termo*", além das variantes "*Dueto*" e "*Quarteto*" em que o objetivo é descobrir duas palavras ou quatro palavras ao mesmo tempo, com 7 ou 9 tentativas, respectivamente (cada tentativa concede dicas para todas as palavras).

Após o sucesso de *Wordle*, diversas variantes do jogo se espalharam pela internet, dentre elas, o *Nerdle*, em que o objetivo é descobrir, ao invés de uma palavra, uma equação válida com 8 dígitos (contando algarismos e símbolos operacionais) utilizando, no máximo, 6 tentativas.

Para cada dígito "certo no lugar certo", a região é pintada de verde. Para cada dígito "certo no lugar errado", a região é pintada de roxo. Para cada dígito que não aparece, a região é pintada de preto, como podemos ver na figura 18.

Figura 18: Exemplo do *Nerdle*.



Fonte: < https://nerdlegame.com >. Acesso 15:45 em 13/04/2023

Podemos ver no exemplo acima como o *Nerdle* funciona. Cada linha foi uma tentativa de descobrir qual era a equação do dia. Com as duas primeiras equações, conseguimos testar todos os dígitos uma vez. Chegamos em duas operações que estavam certas, no lugar certo, e seis outros dígitos que estavam certos, porém no lugar errado (ou seja, a equação terá 8, 7, 6, 3, 4 e =, porém não apareceram no lugar correto). Como, ao somar estes 6 dígitos "roxos" com os 2 dígitos "verdes", temos 8 dígitos, já sabemos todos os dígitos da equação (felizmente, não há nenhum dígito sendo repetido, pois neste caso, não saberíamos todos os dígitos no final da segunda linha).

Na segunda linha, apesar de ser uma boa tentativa, poderia ser melhorada. É possível perceber que o jogador não usou a ordem usual na segunda linha de [operação] = [resultado] e optou para [resultado] = [operação]. Por um lado, a propriedade da comutatividade foi utilizada pois já se sabia que o sinal de igualdade não ficava na antepenúltima casa. Porém, por outro lado, a segunda linha não ajudou, pois já sabíamos que o sinal de igual não poderia estar na terceira casa, já que o sinal de multiplicar e subtrair estava na segunda e quarta casa.

Poderia ter configurado para algo como: 04/2+1=3. Dessa forma, com o deslocamento do zero, poderíamos testar se o sinal de igual ficava na penúltima casa.

Ao encontrar a equação 6*7-8=34, a terceira linha poderia ser uma péssima notícia, já que não foi achada nenhuma nova informação. Todas as novas tentativas estavam incorretas, sendo que não dava para saber previamente de nenhuma, com exceção do sinal de igualdade.

De uma certa forma, "insistindo no erro", foi tentada uma equação com 7*6 ao invés de 6*7, apesar de ser uma equação equivalente, daria informação valiosa se o 7 e o 6 apareciam de alguma forma na equação. Para deslocar o sinal de igualdade para outra casa decimal, decidiu que ao invés de subtrair 8 para se obter 34, se subtraísse 38 para se obter 4. Por conta dessa ideia equivalente, houve um deslocamento das casas decimais que ajudou a solucionar o problema, pelo menos testando uma nova casa para o sinal de igualdade.

Felizmente, o 7*6 estava certo, assim como a ideia de subtrair por "trinta e alguma coisa" para resultar em um número de 1 algarismo. Porém, as unidades estavam em lugares errados. Portanto, a forma de corrigir seria invertendo as unidades, formando a equação 7*6-34=8. O jogador poderia ter melhorado sua tentativa para 7*6-34=8 anteriormente, já que ele já sabia que o dígito 4 não estava na última casa, então a tentativa 7*6-38=4 jamais seria a resposta correta. Porém, desta forma, pudemos ver como podemos criar diversas equações similares apenas deslocando termos e casas decimais ao longo da equação.

Nerdle: Oficina

Diferentemente das outras atividades, a utilização do *Nerdle* não foi planejada previamente, mas foi fruto de uma conversa com os cursistas. Dentre as nossas discussões de jogos digitais que poderiam ser utilizados na sala de matemática, surgiu o nome *Nerdle*. Como muitos cursistas não conheciam o jogo, utilizamos a oportunidade para mostrá-lo na oficina.

Com os participantes, primeiramente jogamos o Termo para se familiarizar com as regras do jogo. Enquanto buscávamos em grupo encontrar a solução do problema, discutimos as melhores estratégias para cada tentativa (por exemplo, vale a pena tentarmos acertar a palavra o mais cedo possível ou é melhor procurar uma palavra que disponibilize mais informações, mesmo que saibamos que não será a palavra correta) como formular uma tentativa que adeque nossas condições (utilizando quais letras em quais lugares). Quais eram as deduções que poderíamos fazer com as informações das dicas?

Para os jogos linguísticos, como *Wordle*, *Termo*, *Dueto*, *Quarteto*, além de terem as formas de jogar do jogo senha e suas estratégias, também temos a adição das regras ortográficas. Temos esta potencialidade de utilizar no jogo não apenas o contexto matemático, mas outros contextos que podem estar inseridos na lógica do jogo, como é o caso linguístico do Wordle.

Inclusive, seria um erro tratar o problema se desvencilhando da ortografia e tratando as 26 letras como 26 símbolos quaisquer. Cada letra possui a sua probabilidade de acontecer, dependendo da língua, algumas letras possuem regras ortográficas próprias (como, por exemplo, o N nunca vem imediatamente antes de P ou B), e, certamente, não são todas as permutações de letras que formam palavras válidas.

Da mesma forma que é preciso entender as regras gramaticais dentro do contexto do jogo Termo, também é preciso compreender as regras aritméticas e matemáticas para poder bolar estratégias, tentativas válidas e soluções para o jogo *Nerdle*.

Durante a resolução do Nerdle na oficina, discutimos sobre a utilização de 2 dígitos sobre ordem das operações (e comutatividade), sobre a paridade dos números nas operações e sobre diversas manipulações numéricas possíveis.

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho era discutir as potencialidades do jogo para a exploração da matemática escolar e acadêmica formal.

Primeiramente, estudamos sobre a importância dos jogos por diferentes pontos de vistas, permitindo uma análise do jogo de forma multidimensional e multifacetada, encontrando no jogo um campo amplo, fértil e complexo que, ao longo da história, permitiu a prática, o desenvolvimento, o aperfeiçoamento de inúmeras habilidades e atividades humanas e o aprendizado de forma lúdica e agradável. Partindo desta análise histórico-social, buscamos trazer os jogos e seus benefícios para o ambiente escolar, procurando na literatura trabalhos que exploram as vantagens da utilização de jogos na Educação e, em especial, no Ensino de Matemática.

Para além da análise teórica dos jogos pela perspectivas biológicas, psicológicas, históricas e sociais, assim como o uso dos jogos na educação, propusemos uma análise prática, criando e ministrando uma oficina de jogos, onde poderíamos apresentar nossa pesquisa para profissionais da área da Educação, além de trabalhar com uma coletânea de jogos, para discutir sobre as potencialidades dos jogos na sala de aula, e trazer exemplos de jogos em que pode-se ter um aproveitamento não só na parte socioemocional dos participantes, mas que também são apropriados para uma análise acadêmica formal.

Algumas das potencialidades encontradas para a utilização de jogos em sala de aula que podemos mencionar são: o estímulo que o jogo traz para o aumento progressivo de complexidade da atividade; a prática das habilidades socioemocionais; o encontro e exploração de propriedades aritméticas proporcionado pelos jogos, fruto de descobertas a partir da reflexão sobre os elementos do jogo; temos a criação de novas formas de notação para facilitar a análise e comunicação entre praticantes; temos o estudo de estratégias vencedoras, aquelas que funcionam não importa o nível de seu oponente; temos a utilização de propriedades da resolução de problemas, como a simplificação e o *backward reasoning*; temos a utilização de novas funções matemáticas que podem facilitar o entendimento do jogo, ou o oposto, um jogo que pode facilitar o entendimento de elementos matemáticos, como as atividades de “Calculadora Quebrada” e as funções; assim como utilizar a análise matemática em outros contextos, como no jogo Wordle e o contexto linguístico.

Durante o trabalho desenvolvido, nos deparamos com duas dimensões distintas do pensamento matemático: A primeira dimensão seria aquela que ocorre **durante** o jogo, de forma espontânea. Enquanto os participantes estão conhecendo o jogo e se apoiando na

intuição para jogar, onde o errar é bem-vindo, onde as tentativas e experimentações compõem um formato de brincadeira, onde o aprendizado é prazeroso e, até então, menos direcionado e mais exploratório; a segunda dimensão seria aquela que ocorre **a partir** do jogo. Quando, depois de muita exploração e descobertas, pode-se **sistematizar** e **sedimentar** a construção do conhecimento. Nesta segunda dimensão, temos uma orientação para relatar e registrar os conhecimentos achados e a necessidade de uma formalização para garantir que os aprendizados sejam absolutos, para termos uma noção mais precisa de até que ponto nós sabemos e quais são os pontos que ainda precisam ser trabalhados.

E, de forma inevitável, após sedimentar um campo de conhecimento e ter clareza do alcance de sua teoria, o próximo passo se dá em buscar ampliar o campo de conhecimento, muitas vezes se encontrando em situações desconhecidas onde, novamente, é preciso voltar para a primeira dimensão do pensamento matemático, do desbravamento e da exploração livre e descompromissada, para que depois de adquirir experiência, volte para segunda dimensão, o da formalização, para completar de forma cíclica, ou melhor, espiral (por aumentar a área de atuação e complexidade a cada ciclo), as fases das construções do pensamento, evidenciada nas fases de exploração e sistematização de um jogo.

Entendemos que este revezamento de postura, de uma postura livre e exploratória para uma postura orientada e formal, é uma das grandes potencialidades que o uso de jogos pode trazer para a sala de aula.

Outra grande potencialidade que o jogo pode trazer é a sua relação com as regras. O uso de jogos de regras auxilia o desenvolvimento de habilidades próprias do jogo que se relacionam com a matemática e que podem ser bastante aproveitadas em ambiente escolar:

> No que diz respeito à matemática na perspectiva escolar, o jogo de regras possibilita à criança construir relações quantitativas ou lógicas: aprender a raciocinar e demonstrar, questionar o como e o porquê dos erros e acertos.
> (MACEDO, 1997, p.151)

Além dos reflexos no pensamento matemático, a exploração desses jogos também propiciam novas dinâmicas para as atividades que se afastam do modo individualista que os exercícios tradicionais promovem.

Na oficina, tivemos a dinâmica em duplas, um contra o outro. Neste tipo de dinâmica, a ação do adversário irá influenciar na dificuldade da atividade, pois ao propor jogadas que buscam vantagem pode gerar situações interessantes. Em uma devolutiva do formulário do primeiro encontro, um dos cursistas sugeriu que nas atividades seguintes pudesse haver a troca de duplas para um mesmo jogo: “Uma parte que acredito que possa melhorar seria a integração das pessoas que estão participando da oficina como se fosse cada pessoa jogando com mais de um oponente diferente (por mais que isso seria difícil por causa do tempo restrito)”. (C) A troca das duplas no primeiro encontro foi feita apenas quando mudamos de jogo.

Com a troca das duplas, os alunos têm a oportunidade não apenas de jogar várias vezes o jogo para conhecê-lo, mas também de ter a experiência de jogar com outras pessoas. A experiência do jogo não depende apenas de suas regras, mas também da relação com seu adversário, sua personalidade e suas diferentes estratégias de jogo.

Também tivemos dinâmicas de grupo em alguns jogos como o Gomoku, o Jogo da Velha Ultimate e o Nerdle onde todos participavam acompanhando os jogos e comentando sobre as jogadas importantes e interessantes. Neste momento, o jogo se afasta da dinâmica do “duelo”, onde um jogador quer ganhar do outro, e se aproxima de uma colaboração onde todos os participantes estão em busca de um conhecimento maior do jogo.

Devido à natureza das relações propiciadas pelo jogar, ao propor o uso do Jogo em sala de aula, a relação professor-aluno pode mudar. Ao invés de uma dinâmica onde o professor é o único a fazer perguntas (que geralmente ele já sabe a resposta), a dinâmica do Jogo permite que os alunos indaguem entre si, em busca de um melhor entendimento do jogo, e a ação do professor neste cenário não é a de condutor da aula, mas de moderador do processo de aprendizagem dos alunos.

Em situações onde as perguntas são propostas pelos alunos, talvez nem o aluno nem o professor saiba resolvê-las. Então, terão de tentar da melhor forma construir conjuntamente a melhor resposta.

Isto mostra que além de haver novas relações em sala de aula, seja a relação aluno-aluno ou a relação bilateral alunos-professor, também temos o contato com questões que não são previamente resolvidas por um gabarito, o que implica em uma construção de conhecimentos. Uma construção que é feita pelo aluno com intermédio do professor.

Com a realização da oficina percebemos que os Jogos podem proporcionar uma dinâmica de aula ativa, com a participação coletiva dos integrantes em busca de resoluções de problemas amplos.

No primeiro encontro, perguntamos “O que vocês mais gostaram do encontro?”. Alguns pontos ressaltados foram as interações com os colegas e as construções coletivas feitas pelo grupo, elogios à escolha das atividades, jogos interessantes pela simplicidade e acessibilidade das atividades, a discussão de estratégias e a parte teórica da aula. “Adorei o encontro de hoje pela troca de ideias de jogos. Jogos interessantes e com simplicidade para ter acesso e com estratégias matemáticas, podendo introduzir assuntos relevantes dos conteúdos do currículo nacional.” (C)

No segundo encontro, perguntamos “O que o uso de jogos em sala de aula pode proporcionar?”. As respostas dadas apontam vantagens no desenvolvimento mental do raciocínio lógico/estratégico, em habilidades socioemocionais e pela ludicidade e diversão. Uma das devolutivas aponta uma lista de habilidades:

> Raciocínio lógico; Autonomia; Habilidades socioemocionais; Resolução de problemas; Capacidade analítica; Planejamento estratégico; Socialização; Autoconfiança; Proatividade; Colaboração; Respeito; Etc… (C)

No terceiro encontro perguntamos aos cursistas “Por que utilizar Jogos em Sala de Aula?”. Os pontos levantados foram: o desenvolvimento do raciocínio lógico; da socialização; das habilidades socioemocionais; da autonomia; as inúmeras possibilidades de estratégias; a utilização de um material diferente do usual; a proximidade entre professor e aluno; e o interesse dos alunos. Um cursista responde “Porque é uma forma diferente e interessante de instigar o raciocínio. Porque aproxima o aluno do professor, e porque pode ser um grande ponto de partida para o interesse pela Matemática.” (C)

Diante do exposto neste trabalho, podemos tirar algumas conclusões sobre as potencialidades dos jogos para a exploração da matemática escolar e acadêmica formal. Primeiramente, o jogo, em seu sentido mais natural, possibilita um aprimoramento das habilidades do indivíduo que as pratica, sejam elas físicas, mentais ou sociais. O jogo, em cada ser humano, teve papel primordial para o desenvolvimento cognitivo, psicológico e socioemocional. Para além do ser humano como indivíduo, o jogo também permitiu que os seres humanos trabalhassem como um coletivo, por meio de construções interpessoais, como regras. E ao longo do tempo, estas construções interpessoais se aprimoraram, tornando-se mais complexas e potentes.

Para a sala de aula, cada uma dessas potencialidades encontradas nos diferentes pontos de vista são de suma importância para a educação e aprendizado dos alunos. E além dos âmbitos gerais, tem-se outras potencialidades mais específicas da área de atuação da Educação ou do Ensino de Matemática.

A ludicidade das atividades baseadas em jogos cria na sala de aula um campo fértil para experiências agradáveis que podem ajudar os alunos a obterem uma relação saudável com o conhecimento. A utilização de regras que são delimitadoras e formadoras, que também são indispensáveis para a atividade, podem trazer inúmeras reflexões e aprendizados para os alunos.

O estudo das melhores estratégias de cada jogo, invariavelmente, esbarra na Matemática. A busca por resultados absolutos em situações regradas necessita de um raciocínio e uma lógica própria da Matemática, que podem ser exploradas por metodologias como a Resolução de Problemas.

E, talvez até mais importante que os conteúdos adquiridos por esse formato, os jogos têm a potencialidade de mudar a postura com que os alunos se deparam com um problema. O problema tem de ser desafiador, precisa instigá-los e, uma característica fundamental do jogo, é que se crie um ambiente de alta emoção e sem nenhum risco. Portanto, não precisa se preocupar com o erro. Como em qualquer processo de aquisição, os erros fazem parte do processo de aprendizado.

Percebemos a potencialidade de mudar as relações da sala de aula, sejam elas uma maior interação bilateral entre aluno-aluno ou professor-aluno.

Outro aspecto importante que destacamos com o desenvolvimento da pesquisa é que não importa o quanto se descubra sobre jogos, sempre haverá mais oportunidades para descobertas. Nunca iremos esgotar o que se há para aprender sobre Jogos, pois sempre poderemos observar por diferentes pontos de vista, seja do ponto de vista matemático ou socioemocional; e sempre podemos explorar mais além, ampliando nossa visão. Tanto no jogo, quanto na Matemática, sempre podemos propor novos desafios para nos aprimorar.

Referências Bibliográficas

ALLIS, L. V.: **Searching for Solutions in Games and Artificial Intelligence**, Limburgo, Universidade de Maastrich, 1994.

AZEVEDO, M. V. R: **Jogando e Construindo Matemática**, São Paulo, VAP, 1999, 2a edição.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1998a.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998b.

BROUGÈRE, G. : **A Criança e a Cultura Lúdica**, Revista da Faculdade da Educação, São Paulo, jul/dez. 1998. v.24, n.2. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0102-25551998000200007 . Acesso em: 17/05/2023 às 10:42

BOUTON, C. L. : **Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory**, *Annals of Mathematics,* Nova Jérsei, Vol. 3, No. ¼, p.35-39, 1901-1902. Disponível em https://www.jstor.org/stable/pdf/1967631 . Acesso em: 12/10/2022 às 18:58

CAILLOIS, R. : **Os Jogos e o Homem**, Lisboa, Livros Cotovia, 1990.

CASTELLS, M: **Impact of the Internet on Society: A Global Perspective.** aasa.ut.ee, 2013. Disponível em: http://aasa.ut.ee/augsburg/literature/CASTELLS_BBVA-OpenMind-book-Change-19-key-essays-on-how-internet-is-changing-our-lives-Technology-Internet-Innovation.pdf. Acesso em: 14/12/2022 às 20:52

CHOPSTICKS (hand game) . In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2023, Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Chopsticks_(hand_game). Acesso em: 20/03/2023

CONWAY, J. H.; GUY, R. K. : **The Book of Numbers**, Nova Iorque, Springer-Verlag, 1996.

CRAWFORD, C. : **Chris Crawford on Game Design**, Indiana, New Riders Pub, 2003

________________ **The Art of Computer Game Design**, Califórnia, Osborne/McGraw-Hill, 1984

FEYNMAN, **The Feynman Lectures on Physics, Vol 1**, 1963. California Institute of Technology. Disponível em: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_17.html. Acesso em 03/10/2023.

FIBONACCI, L : **Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book os calculation**, Nova Iorque, Springer, 2002

GALE, D. : **A Curious Nim-Type Game**, Berkeley, Universidade da Califórnia, 1974

GARDNER, M. : **Knotted Doughnuts and other mathematical entertainments**, Nova Iorque, W. H. Freeman and Company, 1986

GRANDO, R. C. : **O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula**, Campinas, UNICAMP, 2000.

_______________ : **O Jogo e suas possibilidades Metodológicas no Processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática**, Campinas, UNICAMP, 1995

GRILO, R. de M. ; GRANDO, R. C. : **O Xadrez Pedagógico e a Matemática no contexto da sala de aula**, São Paulo, Pimenta Cultural, 2021.

GROOS, K. : **The Play of Man,** Nova Iorque, D. Appleton and Company, 1901

__________ **The Play of Animals**, Nova Iorque, D. Appleton and Company, 1898.

HARARI, Y. N. : **Sapiens - uma breve história da humanidade**, 1. ed, Porto Alegre, RS: L&PM, 2015

HUIZINGA, J. : **Homo Ludens**, 4a edição, São Paulo, Editora Perspectiva, 2000.

IFRAH, G; **The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer**, Nova Iorque, John Wiley & Sons, Inc, 2000

MACEDO, L. ; PETTY , A. L. S. ; PASSOS N. C.: **Quatro Cores, senha e dominó : oficinas de jogos com uma perspectiva construtivista e psicopedagógica**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

MENEZES, J. E. : **A pedagogia de Paulo Freire em atividades com jogos matemáticos: Educação, autonomia e cidadania**, Rio Grande do Sul, ULBRA, 2013

MOURA, M. O: **O Jogo e a Construção do Conhecimento Matemático**. São Paulo, FDE, n°10, 1991.

MURRAY, H. J. : **A History of Board Games other than Chess,** Hacker Art Books, Inc, Nova Iorque, 1978

PIAGET, J. : **A Formação do Símbolo na Criança: Imitação, Jogo e Sonho. Imagem e Representação.** . 3a edição, Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1964

SCARFE, N. V. : **Promoting the value of play**. 1962. Disponível em: https://www.playaustralia.org.au/sites/default/files/LibraryDownloads/Play%20is%20vital%20to%20Childhood%20Professor%20N.%20Scarfe%2C%20Vancouver.pdf. Acesso em: 12/07/2022

SCHWARTZ, G. : **Brinco, logo aprendo: Educação, *videogames* e moralidades pós-modernas**, 1a edição, São Paulo, Paulus Editora, 2014.

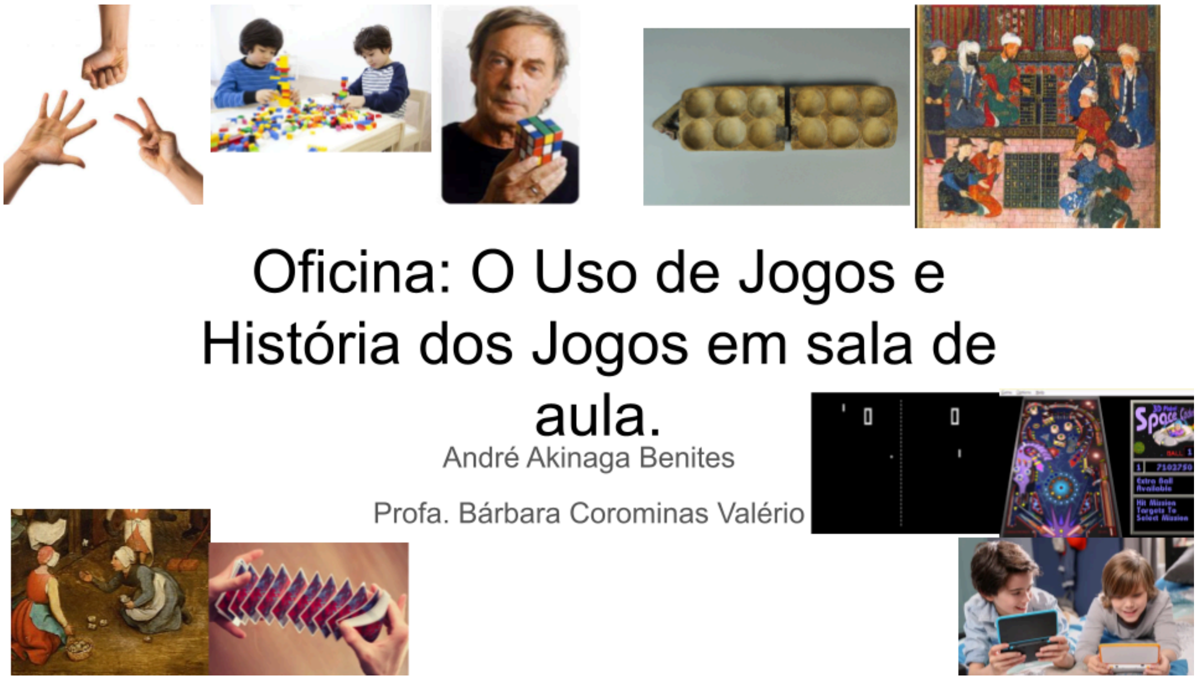
VYGOTSKY, L. S. : **A Formação Social da Mente**, 4a edição, São Paulo, Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1991.

XING, Michael: **Ultimate Tic-Tac-Toe** , v3.0, 2019. Disponível em: https://michaelxing.com/UltimateTTT/v3/ . Acesso em 04 de setembro de 2023.

ZASLAVSKY, C. : **Tic Tac Toe: And Other Three-In-A Row Games from Ancient Egypt to the Modern Computer**, 1a edição, Nova Iorque, Harpercollins, 1982

Apêndices:

Apêndice 1.0



Proposta da Oficina

- Dar um panorama da **importância** do uso dos **Jogos** e da **História dos Jogos** para o Sistema Educacional.
- Acompanhar o **desenvolvimento humano** pela perspectiva dos **Jogos**.

A Civilização e o Jogo

Johan Huizinga(1872-1945): *Homo Ludens* (1938)

Uma das primeiras e principais obras históricas sobre o **Jogo** pelo ponto de vista **sociológico**.

Título do livro: Uma nova proposição de nome para a espécie:

Homo Sapiens (Sapiência/ Inteligência*)* ->
Homo Faber(Ferramenta) -> Homo Ludens (Lúdico)

- "Já há muitos anos que vem crescendo em mim a convicção de que **é no jogo** e **pelo jogo** que a **civilização surge** e se **desenvolve**."

Lúdico tem o mesmo radical que a palavra Ilusão:
Ilusão = "em jogo" (*inlusio, illudere, inludere*)

O Jogo na Biologia

Karl Groos (1861 - 1946): *The Play of Animals* (1898) e *The Play of Man* (1901)

Explora o fenômeno do "brincar" pelo ponto de vista **biológico**, fisiológico, psicológico, estético, sociológico e pedagógico.

O **brincar** como forma de **desenvolvimento** sensorial, motor, social e intelectual.

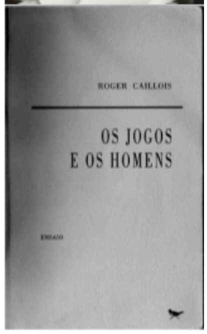
"Não é que os animais brincam por serem jovens e brincalhões mas, em realidade, ***eles têm um período de juventude para poder brincar***".

Além disso, o "brincar" em adultos se mantém pelo puro **prazer.**

Experimentação, Movimento, Caça, Luta, Amor, Construção, Cuidado, Imitação e Curiosidade
Memória, Imaginação, Atenção e Razão. Sentimentos.

Classificação dos Jogos

Roger Caillois, *Os Jogos e os Homens* (1961)



Sociólogo francês que busca aprofundar o estudo dos jogos pelo ponto de vista sociológico.

No livro é discutido sobre a **definição** de Jogos e a **classificação** de jogos.

Podemos ter jogos de natureza completamente diferentes na mesma categoria, portanto, Roger escolheu estas **4 categorias**:

Agon (Habilidade), **Alea** (Sorte), **Mimmicry**(Imitação) e **Ilinx** (Vertigem)

Dois pólos Antagônicos:
"Paidia": Diversão, turbulência, improviso e despreocupada expansão anárquica.
"Ludus": Disciplina, regrante, imperioso, competitivo.

Definições de Jogo

Johan Huizinga: "O jogo é uma atividade ou ocupação **voluntária**, exercida dentro de certos e determinados **limites** de **tempo** e de **espaço**, segundo **regras livremente consentidas**, mas absolutamente **obrigatórias**, dotado de um **fim em si mesmo**, acompanhado de um sentimento de **tensão** e de **alegria** e de uma **consciência** de ser **diferente** da **"vida quotidiana".**

Roger Caillois: "Atividade: 1. - livre: (...) 2. - delimitada: (...) 3. - incerta: (...) 4. - improdutiva: (...) 5. - regulamentada: (...) 6. - fictícia"

Definições de Jogos

Chris Crawford: Gamer Design, busca uma definição por uma série de **Dicotomias**:

1. Uma expressão criativa é uma **Arte**. Se busca dinheiro, é **entretenimento**.
2. Um pedaço de entretenimento é um **plaything** se é **interativo**.
3. Se não há nenhum **objetivo**, é um **toy**(brinquedo). Se tiver objetivos, é um **desafio**.
4. Se o desafio não possui nenhum **outro competidor**, é um **puzzle**, se existe, então é um **conflito**.
5. Se, em um conflito, os participantes não podem interagir entre si, o conflito é uma **competição**. Se os participantes interferirem uns com os outros, se trata de um **Jogo.**

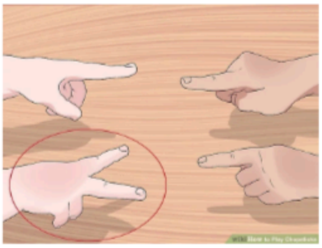
Vsauce - Why do we Play Games
https://www.youtube.com/watch?v=e5jDspIC4hY

Atividade: “Jogo dos Dedos” ou “Chopsticks”

Como jogar:

1. Sente frente-a-frente ao seu colega. Estenda suas mãos como a figura indica:


2. A quantidade de dedos levantados representa a “força” de sua mão.
O primeiro jogador, deverá escolher uma de suas mãos para “atacar” uma das mãos de seu adversário, como mostra a figura. O jogador do ataque que escolhe qual mão será atacada.

A mão que foi “atacada” irá acrescentar o número de dedos da “mão atacante”.

A partida segue alternando os turnos para cada jogador.

3. Se, após um ataque, uma de suas mãos tiver um valor de **5 ou mais**, ela será “morta”. As mãos que estiverem “mortas” deverão ficar sem mostrar nenhum dedo e estarão fora do jogo. Se os jogadores quiserem, podem colocar a “mão morta” atrás das costas para evidenciar que ela não participará mais do jogo.

4. O primeiro jogador a eliminar as duas mãos do adversário é o vencedor da partida.

Apêndice 1.1

Oficina: Jogos e história dos jogos na Educação Básica

André Akinaga Benites IME-USP

Profa. Barbara Corominas Valério IME-USP

Atividade de Manipulação dos dedos:

As atividades em seguida estão baseadas no "**Jogo dos Dedos**", chamado em inglês de "**Chopsticks**" ("**Palitinhos**").

1 - Regras :

1. Sente frente-a-frente ao seu colega. Estenda suas mãos com os dedos indicadores levantados.

2.O primeiro jogador, deverá escolher uma de suas mãos para "atacar" uma das mãos de seu adversário. O jogador do ataque que escolhe qual mão será atacada.

A mão que foi "atacada" irá acrescentar o número de dedos da "mão atacante".

A partida segue alternando os turnos para cada jogador.

3. Se, após um ataque, uma de suas mãos tiver um valor de **5 ou mais**, ela será "morta".

As mãos que estiverem "mortas" e estarão fora do jogo. Se os jogadores quiserem, podem colocar a "mão morta" atrás das costas para evidenciar que ela não participará mais do jogo.

4. O primeiro jogador a eliminar as duas mãos do adversário é o vencedor da partida.

Situações-problemas 1 :

1.1) Na primeira rodada do jogo (sem novas regras), o segundo jogador estava com a seguinte configuração:

Jogador A: 1 dedo em uma mão e 2 dedos na outra.

Jogador B: 1 dedo em uma mão e 1 dedo na outra.

Vamos supor que o aluno escolheu atacar com a mão direita (com 2 dedos). Sua justificativa era que, ao atacar com 2 dedos, ele estava maximizando seu ataque.

Esta escolha do jogador foi adequada?

1.2) Vamos supor que dois jogadores chegaram na seguinte situação:

O Jogador da vez tem as mãos com 2 dedos e 0 dedos.

O outro jogador tem as mãos com 4 dedos e 3 dedos.

É possível que o jogador da vez ganhe? Por que?

1.3) Vamos supor que dois jogadores chegaram na seguinte situação:
O Jogador da vez (Jogador A) tem as mãos com 4 dedos e 2 dedos.
O outro jogador (Jogador B) tem as mãos com 3 dedos e 2 dedos.
Existe uma jogada vencedora? Qual é essa jogada?

2 - Regra Adicional: "Rolamento" (roll-over)

As mesmas regras do **Jogo dos Dedos** se aplicam, a não ser que, para "matar" uma mão, é preciso que a pontuação na mão seja **exatamente** 5 dedos.

Se a pontuação for maior que 5, a pontuação da mão se torna o quanto foi excedido. (Exemplo, se a pontuação somar 6, o resultado final será 1. Se a pontuação for 7, o resultado final é 2. Se a pontuação for 8, o resultado final é 3.)

Situações-problemas 2 :

2.1. a) Vamos supor que dois jogadores cheguem à seguinte posição:
Cada jogador está com uma mão com 2 dedos e outra mão com 0 dedos.
Quem irá vencer? O primeiro ou o segundo jogador? Tente representar o jogo.

b): Teste todas as partidas em que restam duas mãos com dedos iguais. Quem vence em cada caso? Anote em uma tabela.

2.2) Vamos supor que dois jogadores cheguem à seguinte posição:
O jogador da vez tem apenas 1 dedo e o outro jogador tem apenas 2 dedos em uma mão.
Qual será o resultado do jogo?

2.3) Vamos supor que dois jogadores cheguem à seguinte posição:
Jogador da vez (Jogador A) com a mão com 2 dedos e outra com 3 dedos.
Outro jogador (Jogador B) com a mão com 1 dedo e outra com 0 dedos.
O jogador atacou a mão adversária com a mão com 2 dedos. Esta foi uma boa jogada?
Sugestão: Considere os casos vistos em 2.1 para este exercício

3 - Regra Adicional: Separações

Durante o jogo, podemos redistribuir a quantidade de dedos entre as duas mãos, utilizando a **Transferência** e a **Divisão**.

3.1 - Transferência:

Quando um jogador performar uma **Transferência**, o jogador deve bater suas mãos e dividir o número de dedos entre elas, criando uma nova configuração.

Por exemplo, se um jogador tivesse nas mãos 1 e 3, poderia fazer uma **transferência** e cada mão ficaria com 2 dedos.
O inverso também é possível. Ter 2 dedos em cada mão, e transferir para que fique 1 e 3.
As possíveis **transferências** são: (13-22, 22-13, 14-23, 23-14, 24-33, 33-24).

3.2 - Divisão (Ou Ressuscitação):
A Divisão é como uma transferência, porém "ressuscitando" uma das mãos.
As possíveis divisões são: (02-11, 03-12, 04-13, 04-22)
Obs 1: Com as **separações**, devemos tomar alguns cuidados para que o jogo não se torne um jogo infinito, portanto, algumas regras que podem ser adicionadas como um limite de **separações/divisões** *por jogador* ou um limite de rodadas **consecutivas** utilizando **separações/divisões**.

Obs 2: Os jogadores podem concordar que as **separações** só podem ser feitas com um número **par** de dedos e que apenas quando, ao final da transferência, a quantidade de dedos em cada mão seja a mesma.
Ao seguir esta observação, as possíveis **separações pares** são: (13-22, 24-33, 02-11, 04-22)

Situações-problemas 3 :

3.1) Em um jogo **apenas** com **separações pares (vide Obs 2)** (Sem "rolamento"), temos a seguinte situação:
O Jogador da vez tem uma mão com 3 dedos e uma mão com 2 dedos.
O outro jogador tem uma mão com 1 dedo e a outra com 0 dedos.
Qual é a jogada vencedora para o jogador da vez?

4 - Regra Adicional: Atacar a si mesmo
O jogador pode escolher atacar a si mesmo.
4.1) Em um jogo apenas com "rolamento" e a regra 4. Na seguinte situação:
O jogador da vez está com uma mão com 3 dedos e outra mão com 1 dedo.
O outro jogador tem uma mão com 1 dedo.
(Assumindo que seu adversário fará as melhores jogadas)
Considere os 2 movimentos possíveis pela regra 4. Qual o resultado de cada?
Considere os 2 movimentos que não utilizam a regra 4. Qual o resultado?

Regras Bônus:
5 - Jogo dos Dedos: Vários Jogadores.
As regras são como as do Jogo dos Dedos, porém com mais de 2 jogadores. Sugerimos que joguem

com 3 jogadores, mas nada impede que se jogue com mais jogadores.

O objetivo é ser o último jogador sobrevivente.

6 - Jogo dos Dedos: Números Inteiros

As regras são como as do Jogo dos Dedos, porém os jogadores recebem um novo tipo de jogada:

Inversão:

O jogador pode escolher "inverter" uma de suas mãos (ao invés de deixar a palma da mão para baixo, deixará a palma da mão para cima).

Quando a palma da sua mão estiver para cima, a pontuação de seus dedos é considerada negativa.

7 - Jogo dos Dedos: Muitas mãos

É possível formar equipes de mais de uma pessoa, fazendo com que o número de mãos para cada equipe seja maior que 2. Sugerimos começar com 3 e depois seguir com 4.

8 - Jogo dos Dedos: Muitos dedos (?)

Como seria o jogo se nossas mãos tivessem n dedos?

9 - Jogo dos Dedos: Fracionários

Um jogador poderá fazer divisões em metades.

(É equivalente a um Jogo dos Dedos com 10 dedos em cada mão)

Fontes: https://en.wikipedia.org/wiki/Chopsticks_(hand_game)

Apêndice 1.2

Oficina: Jogos e história dos jogos na Educação Básica

André Akinaga Benites IME-USP

Profa. Barbara Corominas Valério IME-USP

Jogos com Palitos: (Nim, Chomp e outros).

Jogo do Palito 1:

Regras: Dado uma fileira de 20 palitos, os jogadores possuem as seguintes regras:

- Em sua jogada, o jogador da vez pode capturar entre 1 a 3 palitinhos.
- Perde o jogo aquele que capturar o último palitinho

Após jogar algumas partidas, responda os exercícios abaixo:

1) Este jogo possui uma estratégia vencedora[9]? Qual? Debata com seus colegas para descobrir pistas para encontrar a estratégia vencedora.

   Após discutir a estratégia vencedora com o professor, discuta sobre as seguintes questões:

2) Se, ao invés de 20 palitinhos, tivéssemos 40 palitinhos. Qual seria a estratégia vencedora? Qual seria a estratégia vencedora para "n" palitinhos?

3) Se mudássemos as regras para que o jogador da vez pudesse capturar entre 1 a 5 palitinhos. Qual seria a estratégia vencedora? E para "n" palitinhos?

Jogo do Palito 2:

Regras: Dado uma fileira de 20 palitos, os jogadores possuem as seguintes regras:

- Em sua jogada, o jogador da vez pode capturar até metade dos palitinhos
- Perde o jogo aquele que "sobrar" com o último palitinho.

[9] Uma estratégia que um jogador sempre irá vencer

Após jogar algumas partidas, responda os exercícios abaixo:

4) Este jogo possui uma estratégia vencedora? Debata com seus colegas para descobrir pistas sobre a estratégia vencedora. Discuta a estratégia vencedora para qualquer número de palitos inicial.

5) Qual seria a estratégia vencedora se só pudesse ser capturados até 1 terço dos palitos e perdesse se sobrasse 1 ou 2 palitos?

Jogo do Palito (2 fileiras)

Dado duas fileiras de palitos; uma com 7 palitos e outra com 5 palitos, os jogadores possuem as seguintes regras:

- O jogador da vez pode escolher uma das fileiras, e pegar quantos palitos quiser desta fileira.
- Ganha o jogador que pegar o último palito.

Após jogar algumas partidas, responda os exercícios abaixo:

6) Este jogo possui uma estratégia vencedora? Debata com seus colegas para descobrir pistas para encontrar a estratégia vencedora.
Em seguida, descubra a estratégia vencedora para qualquer número de palitos para cada fileira. (Ex: Qual é a estratégia para o jogo com fileiras 6 e 6?)
Bônus:
Jogo dos Palitos (3 fileiras) - NIM
Dado 3 fileiras de palitos; uma com 7 palitos, outra com 5 palitos e outra com 3 palitos, os jogadores possuem as seguintes regras:

- O jogador da vez pode escolher uma das fileiras, e pegar quantos palitos quiser desta fileira.
- Ganha o jogo quem pegar o último palito.

Obs: O jogo de NIM foi um dos primeiros jogos a ter uma análise matemática completa sendo publicado pelo departamento de matemática de Princeton em 1901.

Fonte: https://www.jstor.org/stable/1967631?seq=2#metadata_info_tab_contents

Chomp

Dado um tabuleiro 3x3 de palitos: Os jogadores possuem as seguintes regras:

- Um jogador escolhe um palito, e deve capturar todos os palitos que estejam ou acima ou à direita dele (e todos que estejam acima e à direita dele).
- Perde o jogador que pegar o último palito.

Obs: Sabemos a estratégia vencedora de Chomp para tabuleiros quadrados, porém não sabemos para retangulares. (Mas podemos provar que a estratégia existe!)

https://en.wikipedia.org/wiki/Chomp

https://plus.maths.org/content/mathematical-mysteries-chomp

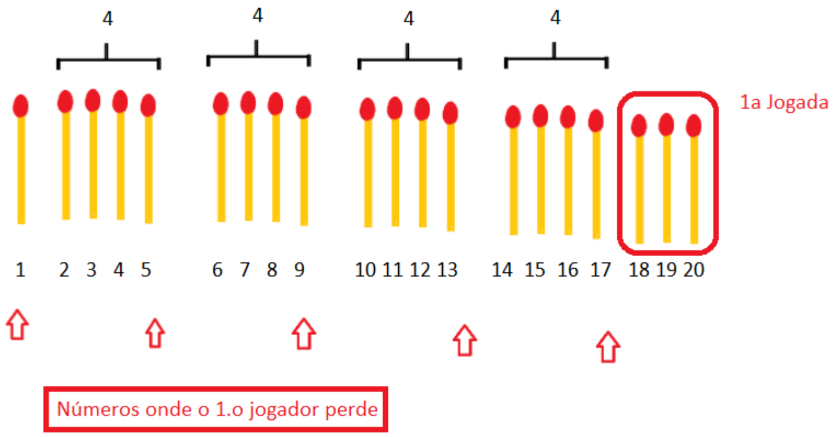
Apêndice 1.3

Jogo do Palito 1:

A estratégia vencedora está em sempre deixar um número de palitos na forma 3n+1, sendo n um número natural:

Dessa forma, não importa a jogada do adversário, sempre é possível manter a estratégia de deixar um número de palitos na forma 4n+1, até sobrar apenas um palito.

Ilustração:

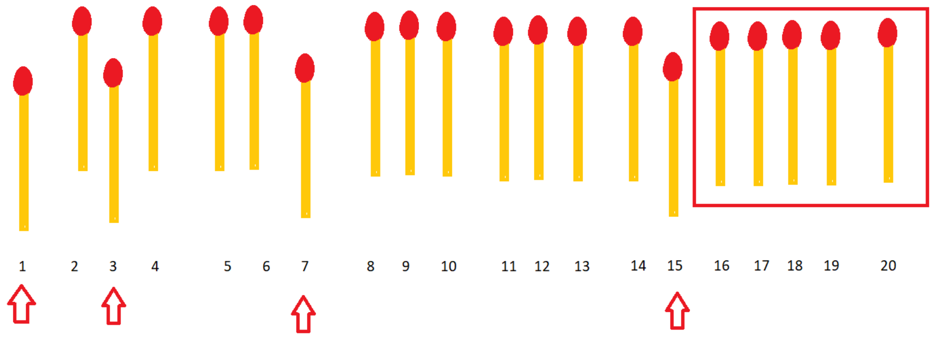


Obs: Os palitinhos que estão para baixo representam os palitos em que, nesta quantidade, o jogador que começar a rodada perde.

Jogo do Palito 2:

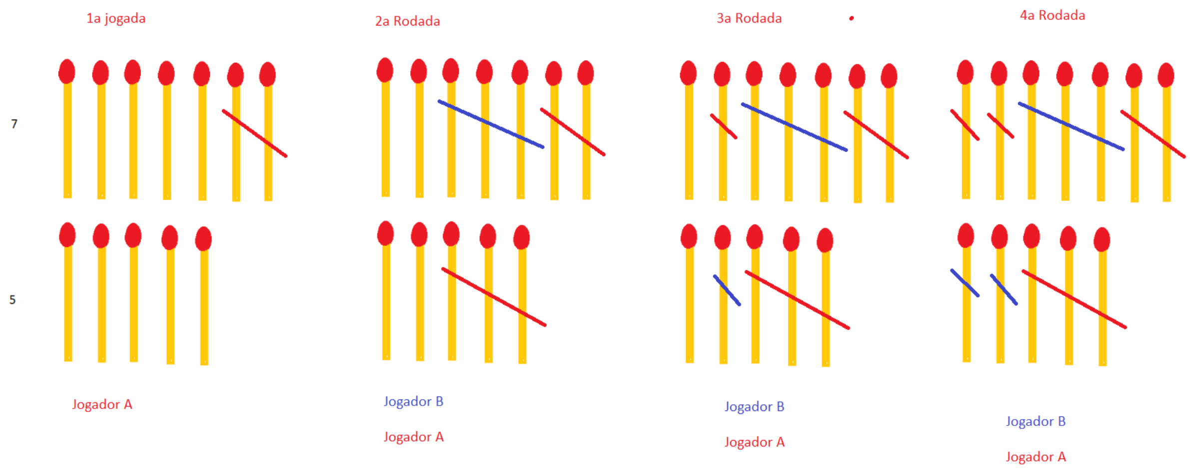
A estratégia vencedora é sempre deixar um número de palitos na forma 2^n - 1.

Dessa forma, não importa a jogada do adversário, sempre é possível manter a estratégia de deixar um número de palitos na forma 2^n - 1, até sobrar apenas um palito.



Jogo do Palito (2 fileiras)

A estratégia vencedora do jogo está em deixar as fileiras sempre com o mesmo número de peças (“espelhamento”), até que algum dos jogadores deixe apenas um palito em uma das fileiras. Quando isto acontecer, o jogador da estratégia vencedora pode capturar todos os palitos da fileira que tem mais de 1.

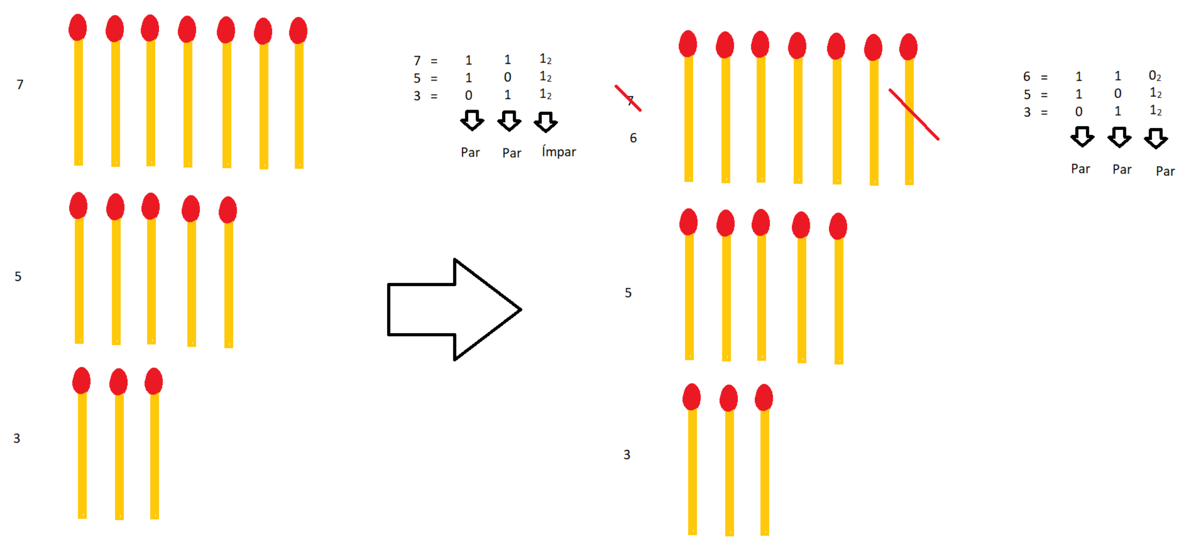


Jogo do Palito (3 fileiras) - NIM

A resolução é bastante complexa, porém se baseia no seguinte:

- Transforme cada fileira em um número binário.
- Some cada uma das "casas binárias"
- Se:
    - A soma de cada casa binária for par, então a estratégia vencedora está nas mãos do segundo jogador.
    - A soma de alguma casa binária for ímpar, então a estratégia vencedora consiste em subtrair de forma que todas as somas de casa binária sejam par.

Ex:



Sabemos que, se todas as somas de casas binárias forem par, então a próxima rodada terá de deixar pelo menos uma ímpar.

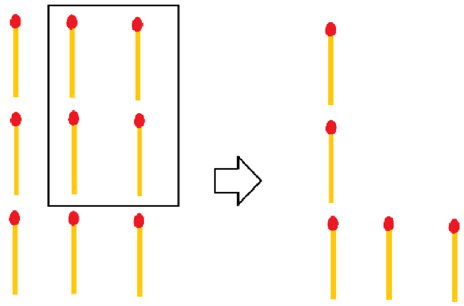
Também podemos provar que, se as somas de casas binárias não for par, é possível escolher uma transformação em que as somas das casas binárias fique par.

Fonte: https://www.jstor.org/stable/1967631?seq=2#metadata_info_tab_contents

Chomp

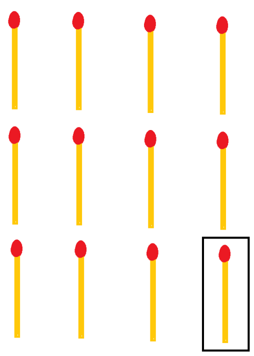
Estratégia vencedora para jogos de Chomp em tabuleiros quadrados é a seguinte:

- Capture um retângulo de forma que sobre apenas uma coluna vertical e uma coluna horizontal.
  (Ou seja, para um tabuleiro n x n , capturar a peça que retire um retângulo (n-1) x (n-1))
- Faça um espelhamento da jogada adversária entre a coluna vertical e horizontal.



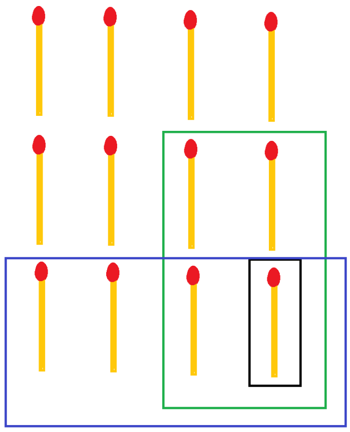
Prova de que existe uma estratégia vencedora para tabuleiros retangulares (e que o primeiro jogador sempre possui uma estratégia vencedora):

Vamos pensar nesta primeira jogada para o Jogador 1:



Existem duas opções:

- Se esta jogada **não tiver** nenhuma contra-resposta, então existe uma estratégia vencedora e esta é sua primeira jogada.
- Se esta jogada **tiver** uma contra-resposta (ou seja, B consegue fazer uma sequência de jogadas que faz com que B seja consiga obrigatoriamente ganhar); então A poderia ter **começado** o jogo com a **contra-resposta** de B e utilizar a sequência que faz com que ela consiga obrigatoriamente ganhar. (Isto ocorre pois a primeira jogada escolhida sempre estará "incluída" dentro de qualquer outra "segunda jogada" escolhida)



Apêndice 2.0

Psicologia e Educação

Jean Piaget (1896-1980): "A Psicologia da Criança" (1969).

Piaget foi o **pioneiro** no estudo do desenvolvimento mental na criança, fazendo extensos estudos sobre a psicologia da criança e suas **fases**.

1 - Fase Sensorimotor (Até os 2 anos de idade): Estágio inicial onde a criança depende mais da sua **percepção sensorial** do que **raciocínio.**

2- Fase Pré-operacional (Entre 2 anos e 7 anos): Início da **fala**. Imitação e **"Faz de Conta"**. Raciocínio **autocentrado**. "Egoísta". Dificuldade de perceber a diferença entre o "eu" e o "outro".

3- Fase Operacional Concreta (Entre os 7 a 12 anos): Início da **leitura**. **Amadurecimento** do raciocínio. Já exercem a **lógica** como no pensamento de **classes** e **ordem**. Restrito àquilo que é **concreto**.

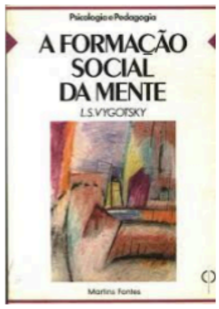
4- Fase Operacional Formal(12 anos em diante): Pensamento **abstrato**. Resolução de problemas, etc…

PIAGET, J. : **A Formação do Símbolo na Criança: Imitação, Jogo e Sonho. Imagem e Representação.** . 3a edição, Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1964

Psicologia e Educação

Lev Vygotsky (1896-1934): Analisa o desenvolvimento da criança a partir do seu contexto **social**.

A criança se desenvolve principalmente, não por fatores **biológicos** de seu corpo (que são fatores secundários), mas por fatores **sociais** como **estímulos** e **experiências**.



Papel da **Linguagem, Signos(Símbolos), Memória, Instrumento** e o **Brinquedo.**

O desenvolvimento é adquirido através das **interações sociais**.

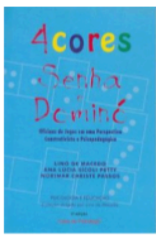
Psicologia e Educação

Lino de Macedo(1944- presente):
Professor titular do IP-USP.
Linhas de Pesquisa: Jogos na aprendizagem e ensino da matemática.
Psicologia escolar e Educacional. "Piagetiano".

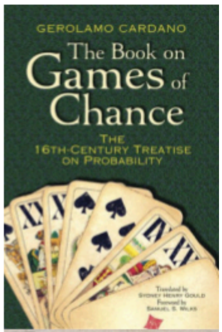
Obras:
- 4 Cores, Senha e Dominó: oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica(1997)

- Aprender com jogos e situações-problema(2000)

- Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar(2005)



Estudo dos Jogos

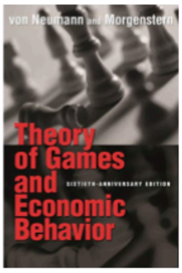


Gerolamo Cardano (1501-1576): Polímata italiano. Figura importante para a solução das **equações de 3° e 4° grau.** Pioneiro no estudo da **Probabilidade**.

Além de médico, matemático e físico, Cardano era conhecido por ser um exímio apostador em jogos de **chance** e jogador de **xadrez**.

Obra: *Liber de Ludo Alea* (1663): "Livro dos Jogos de Chance".

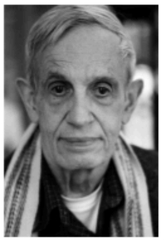
Estudo dos Jogos



Teoria dos Jogos:

- John von Neumann e Oskar Morgenstern - *Theory of Games and Economic Behaviour (1944)*

- John Nash : Nobel de Economia (1994): Equilíbrio de Nash. *Mente Brilhante* (2001): Filme biográfico.



- A Evolução da Confiança (Simulação Interativa) (2017)
- https://ncase.me/trust/ (original)
- https://brunolemos.github.io/trust/ (Português)

Apêndice 2.1

Oficina: Jogos e história dos jogos na Educação Básica

André Akinaga Benites IME-USP

Profa. Barbara Corominas Valério IME-USP

Jogos de Enfileiramento

Jogo da Velha:

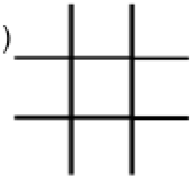
O Jogo da Velha é um jogo de um tabuleiro 3x3, o objetivo do jogo é formar uma linha com três símbolos iguais. Cada jogador possui um símbolo, “O” ou “X”. O jogo é feito em jogadas alternadas.

Você já conhece o Jogo da Velha? Jogue um pouco com seus colegas.

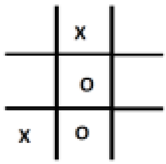
Questões:

1) Para cada uma das casas, coloque quantas linhas são possíveis de formar utilizando-a.
2) Na situação ao lado, é a vez do jogador “X”, qual jogada garante a vitória? Por quê?
3) Nesta posição, vez do jogador “O”:
   Qual é a melhor jogada? E a pior? Por quê?
4) Vamos supor que você começou o jogo com “X”, e chegou na seguinte posição:
   É possível forçar uma vitória? De quantas maneiras??
5) Vamos supor que você começou o jogo com “X”, e chegou na seguinte posição:
   É possível forçar uma vitória? De quantas formas?

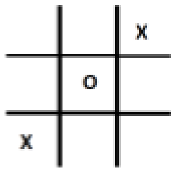
1)



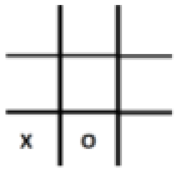
2)



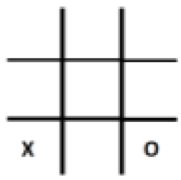
3)



4)

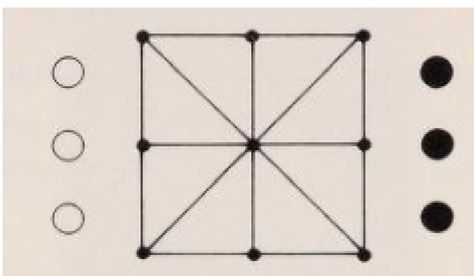


5)



Ta-Te-Ti (Ou Tapatan, ou Three Men’s Morris)

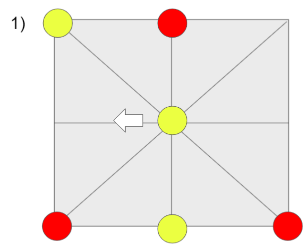
O Ta-Te-Ti (ou Tapatan) é um jogo similar ao Jogo da Velha, porém jogado com apenas 3 peças. O objetivo do jogo ainda é enfileirar três peças. O jogo é feito em duas fases: A primeira fase é a fase de posicionamento, onde, no seu turno, cada jogador coloca uma de suas peças no tabuleiro, até terminar suas peças. Se, após a fase de



posicionamento, nenhum jogador tiver cumprido o objetivo, o jogo passa para a próxima fase, a fase de movimentação. Na fase de movimentação, o jogador da vez deverá movimentar uma de suas peças, seguindo as linhas tracejadas do tabuleiro, para uma casa adjacente. O jogo continua até que algum jogador ganhe, ou ocorra um empate (seja por acordo de ambos os jogadores, ou se a mesma situação se repetir no tabuleiro por três vezes).

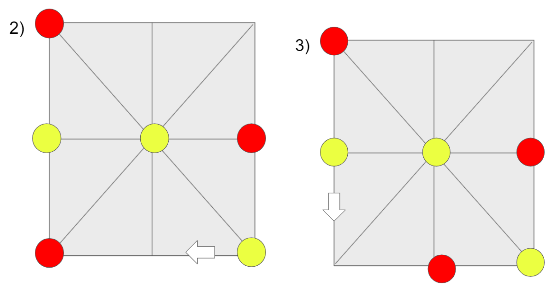
Jogue um pouco com seus colegas.

1) Se o jogador amarelo fizer a jogada indicada pela seta branca: De que forma o jogador vermelho pode garantir sua vitória?



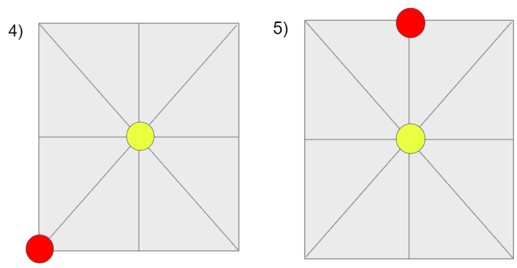
2) Se o jogador amarelo fizer a jogada indicada pela seta branca: De que forma o jogador vermelho pode garantir sua vitória?

3) Se o jogador amarelo fizer a jogada indicada pela seta branca: De que forma o jogador vermelho pode garantir sua vitória?



4) Vamos supor que o jogador amarelo começou o jogo e chegou na seguinte posição:
É possível garantir uma vitória? Como?

5) Vamos supor que o jogador amarelo começou o jogo e chegou na seguinte posição:
É possível garantir uma vitória? Como?



6) O Ta-Te-Ti é um jogo de estratégia vencedora?

7) Alguma sugestão de mudanças para este jogo?

Fonte: Autores

Alguns outros jogos de Enfileiramento:

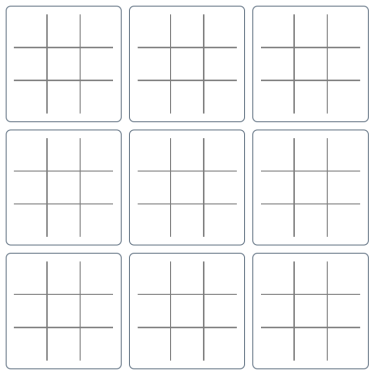
- Shisima (Ou Rota); Picaria; Altan Xaraacaj; “Brasileirão”; 9 Buracos; Jogo-da-velha-quadrado-mágico, Nhac-nhac
  (Enfileiramento 3x3, movimentação, outras configurações de tabuleiro)
- Tsoro Yamatatu (Tabuleiro triangular (3x3), movimentação)
- Tick Tackle 4 e Tick Tackle 5
  (Enfileiramento, 4x4 e 5x5, respectivamente. Movimentação)
- Six Men’s Morris, Nine Men’s Morris (moinho/trilha)
- Quarto (Tabuleiro 4x4, peças com 4 características)
- Quixo (Tabuleiro 5x5, dados móveis)
- Gomoku (Tabuleiro 15x15 ou 19x19, Enfileiramento de 5)

Para mais informações:

https://andreakibenites.wixsite.com/variantesxadrez/página-em-branco-5

https://archive.org/details/tictactoeothert00zasl/page/22/mode/2up

Jogo da Velha Ultimate



Jogo da Velha Ultimate é uma variante de Jogo da Velha onde temos 9 tabuleiros locais de jogos da velha configurados em um tabuleiro global 3x3. A primeira jogada é livre, porém, a próxima jogada deve ser feita no tabuleiro local equivalente à jogada anterior. Quando um tabuleiro local for completado, o jogador que completou irá marcá-lo com seu símbolo. Ganha o primeiro jogador que fizer uma linha no tabuleiro global

Apêndice 2.2

Oficina: Jogos e história dos jogos na Educação Básica

André Akinaga Benites IME-USP

Profa. Barbara Corominas Valério IME-USP

O Problema das 4 Cores

Foi proposto em 1850, quando Francis Guthrie, recém formado pela Universidade de Londres, percebeu que a maioria dos mapas encontrados em atlas eram pintados com quatro cores, respeitando-se o critério de não utilizar a mesma cor em territórios adjacentes.

Segundo o teorema, podemos desenhar qualquer mapa utilizando apenas 4 cores, sem que dois territórios adjacentes tenham a mesma cor.

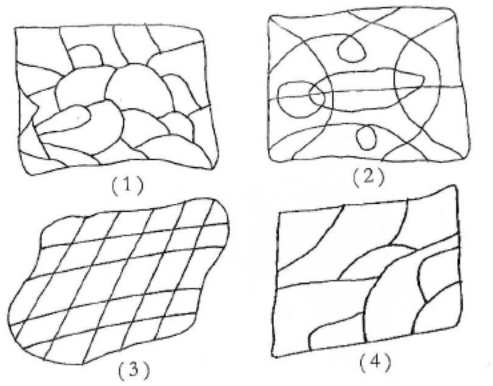
Uma das primeiras soluções para o Problema das 4 Cores foi dada por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, professores da Universidade de Illinois, em 1976, com o auxílio de computadores.

Exercícios

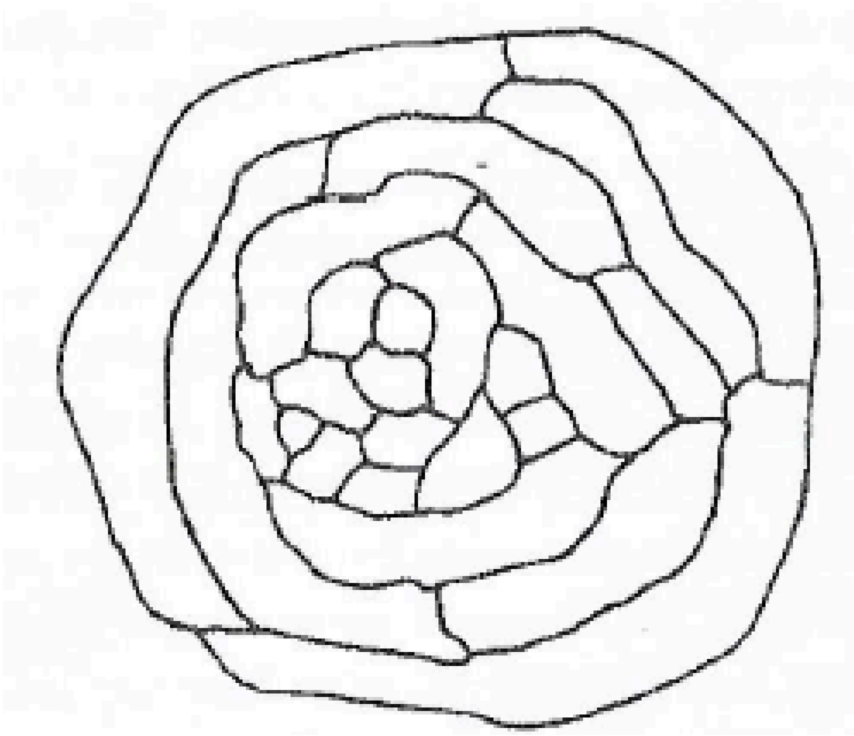
1) Busque pintar as regiões abaixo.

2) Compare as figuras abaixo, ordenando-as conforme o grau crescente de dificuldade.[10]

[10] Retirado de 4 Cores, Senha e Dominó (Lino de Macedo, 1997)



3) Pinte as figuras abaixo, seguindo as regras do jogo enumerando as regiões na sequência em que forem sendo pintadas[11]



4) Crie seu próprio mapa e proponha para um colega resolvê-lo.

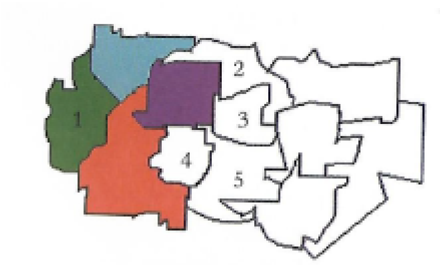
[11] Retirado de “4 Cores, Senha e Dominó” (Lino de Macedo, 1997)

Jogos com as 4 Cores: Cilada de Cores[12]:

O Jogo "Cilada de Cores" é similar ao "Problema das 4 Cores", porém é um jogo disputado entre dois jogadores, onde os jogadores devem evitar entrar em uma "cilada" (uma situação onde não conseguem colorir sem quebrar a regra das regiões vizinhas de cores diferentes).

- A Figura a ser desenhada pode ser feita pelos próprios jogadores. Inclusive, os jogadores podem construir juntamente a figura, alternando a vez de formar um traço novo.
- Cada jogador, em rodadas alternadas, deve pintar uma região que deve ser vizinha à última região pintada pelo adversário.
- Se, a última região pintada não tiver regiões vizinhas em branco, então o jogador poderá escolher qualquer região vizinha a uma região pintada.

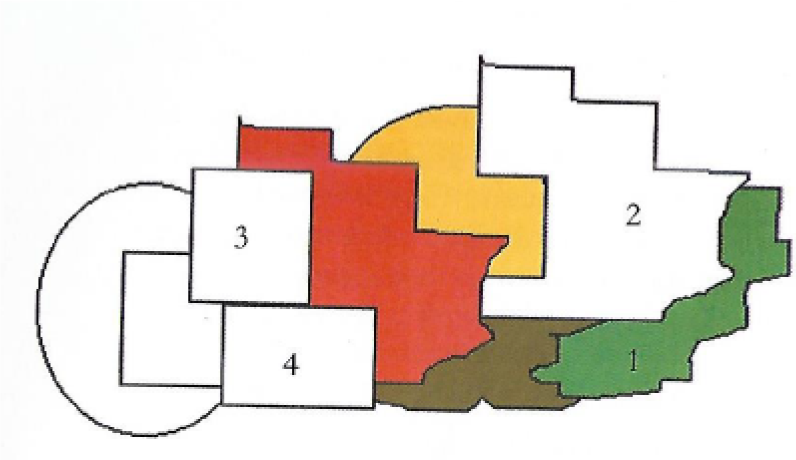
Ex: Se a última região pintada for a região 1, então o próximo jogador poderá escolher qualquer uma das regiões 2, 3, 4 ou 5 para continuar a jogar.



- Se ocorrer uma situação em que o jogador não consegue pintar uma região vizinha sem que duas regiões adjacentes não tenham a mesma cor, este jogador deverá escrever a sua inicial para identificar a região que não pode ser pintada. E continuará o jogo pintando alguma região vizinha a uma região colorida.

Ex: A última região pintada foi a região "1". A região "2", como ela já tem as 4 cores como vizinhas, não pode ser pintada por nenhuma cor sem quebrar a regra (de que duas regiões vizinhas não podem ter a mesma cor). Portanto, o jogador coloca sua inicial para marcar a região 2 e continua o jogo pintando a região 3 ou 4.

[12] Retirado de "4 Cores, Senha e Dominó" (Lino de Macedo, 1997)



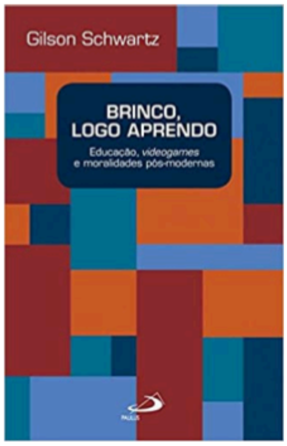
- Quem tiver o menor número de casas marcadas, vence a partida.

Apêndice 3.0

História dos Jogos Virtuais

Brinco, Logo Aprendo

Gilson Schwartz (USP) - “Brinco, logo aprendo: Educação, *videogames* e moralidades pós-modernas”(2014)



Formado em Economia e Ciências Sociais pela USP, Gilson traz em seu livro uma retrospectiva dos Estudo dos Jogos para a Educação, desde a Grécia Antiga até os tempos atuais e discute o papel dos *games* e *videogames* na sociedade atual.

O Instrumento e a Instrumentalização

Pierre Rabardel (1945 - 2021):
Professor emérito em **ergonomia** e **psicologia** na Universidade Paris 8.

Desenvolvimento humano da **cognição** a partir da transformação de um **artefato** para um **instrumento** (**Gênese instrumental**).

Estudo da **instrumentalização** a partir de uma visão **antropocêntrica**.

Principais obras:
O Homem e a tecnologia - Uma aproximação cognitiva dos instrumentos contemporâneos (1995)

“Cognição e Artefato: A Contribuição para o Estudo do Pensamento em Relação à Atividade com Instrumento.” Pierre Verillon e Pierre Rabardel

O Computador e Jogos digitais

O início da Inteligência Artificial

Turochamp: O primeiro programa de xadrez já inventado. Feito por Alan **Tur**ing e David **Champ**ernowne em 1948.
https://mdoege.github.io/nimTUROCHAMP/

Os computadores da época não tinham a capacidade de rodar o programa, então o próprio Turing seguia as instruções por papel e caneta. (Cerca de meia hora para calcular cada movimento)

No filme *O Jogo da Imitação*(2014), que conta a vida de Alan Turing, é mostrado como um quebra-cabeça de palavras-cruzadas foi utilizado para testar e recrutar pessoas para a equipe de decifradores de códigos em Bletchley Park.

Inteligência Artificial

IBM Deep Blue (1997): Primeira Inteligência Artificial a ganhar de um Campeão Mundial de Xadrez, Garry Kasparov.

AlphaGo(2016): Primeira Inteligência Artificial a ganhar do campeão Mundial de Go.

AlphaZero (2017): Inteligência Artificial que ultrapassou as melhores máquinas de Xadrez, Go, Shogi em questão de horas.

Apêndice 3.1

Calculadora: O Jogo

Baixe o jogo “Calculadora: O Jogo” em seu celular:
Tenha um papel em mãos e anote as estratégias que foram utilizadas para passar de níveis difíceis.

Parte 1: (Níveis 1-7)

Perguntas:

1.1) Você já conhecia este aplicativo?

1.2) O que podemos desenvolver com este quebra-cabeça?

Parte 2: (Níveis 8- 16)
Somos introduzidos a um novo botão: **o botão (<<)**.

2.1) Como você descreveria que o botão funciona?

2.2) Se você fosse transformá-lo em contas matemáticas, com soma/adição/multiplicação/divisão/arredondamento, que contas você faria?

2.3) O que podemos aprender com este novo botão?

2.4) Sobre o **Nível 13**, como esperamos que o aluno vai descobrir o problema?

Parte 3: Botões Roxos (Níveis 17 - 26)

3.1) Como você descreveria ?

3.2) Se você fosse transformá-lo em contas matemáticas, com soma/adição/arredondamento, que contas você faria?

3.3) O que podemos aprender com este novo botão?

Parte 4: Botões (X => Y)(Níveis 27 - 36)

4.1) Como você descreveria o botão?

4.2) Tente utilizar contas matemáticas para descrever a operação.

4.3) Pensando na computação, como você imagina que foi feita essa operação?

Parte 5: Discussão

5.1) Observe o papel em que você anotou as estratégias utilizadas nas fases difíceis. Quais deles são úteis para os alunos discutirem na sala de aula?

5.2) Seria interessante tentar criar este aplicativo a partir do Scratch?

5.3) Neste caso, a utilização de um aparelho digital foi importante para o Ensino e Aprendizagem?

Extra:

Dentre as novas funções exploradas na aula de hoje **(<<)**, **[botão roxo]** e **(X=>Y)**.

E.1) Quais delas possuem inversa? Justifique a resposta com exemplos.