# Concepções de área e de perímetro de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental

Fernando Siqueira Vieira Lima

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Vera Helena Giusti de Souza

2023

**Concepções de área e de perímetro de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental**

Fernando Siqueira Vieira Lima

Esta é a versão corrigida da Dissertação elaborada pelo candidato Fernando Siqueira Vieira Lima.

**Dedicatória**

*Dedico à Maria de Lourdes (in memorian), Gilberto, Alex, Ana Paula, Lucas Hideki, Mirian Katsuyama e aos meus alunos.*

## Agradecimentos


Durante a graduação em Licenciatura e o mestrado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME USP), conheci professores incríveis: Antonio Carlos Brolezzi, Agnaldo Arroio, César Polcino Milies, Cristina Cerri, Daniela Mariz Silva Vieira, Davi Pires Dias, Gladys Chalom, Junior Barrera, Marcos Nascimento Magalhães, Maria Ângela Salvatori, Nílson José Machado, Roberto Hirata Junior, Rosa Maria, Sergio Muniz Oliva, Viviana Giampaoli e Vinício de Macedo Santos. Agradeço a estes pelo apoio e pelos valiosos ensinamentos.

Agradeço, em especial, a professora Ana Paula Jahn e ao professor Sergio Alves, que participaram da minha banca de TCC e me encorajaram a continuar meus estudos na pós-graduação.

Expresso minha gratidão a Professora Maria Cristina Araújo de Oliveira e ao Professor Saddo Ag Almouloud, pela participação nas bancas de qualificação e de defesa, as correções sugeridas, com muita sensibilidade, e apontamentos que foram decisivas para a conclusão deste trabalho.

Aos amigos Celso Grisi e Décio Pecequilo, meu agradecimento pelos constantes incentivos e apoio da elaboração deste texto.

Não posso deixar de agradecer o suporte, ajuda e apoio da equipe da Comissão de Pós-Graduação (CPG): Ana Paula, Henrique, Katia, Irineu, Luiza e Regiane; da excelente equipe da biblioteca: Stela e Ana; e dos membros da Comissão de Recepção de Pós-Graduação do IME USP do período de 2017 a 2020. E também a Mariko Kawamoto, pelo suporte inicial.

Agradeço às pessoas que dedicaram tempo para contribuir positivamente com o IME: Jean Carlo, Ricardo Ângelo, Willian Pereira Barreto e todos os representantes discentes com os quais tive o privilégio de trabalhar e trocar experiências.

Existem pessoas que passam em nossas vidas e nos marcam definitivamente, nos fazendo melhores. Agradeço por isso à Bartira, Marisa e Simone.

Aos meus colegas do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPEM), agradeço pelas sugestões, críticas e elogios, especialmente à Dayane e ao Flávio.

Há pessoas que abraçam nossos sonhos e os despertam. Agradeço o privilégio de ter pessoas assim em minha vida, Ana Luiza e Rodrigo.

Agradeço à Comissão Coordenadora de Curso (CCP) do MPEM por me apoiarem e financiarem minha participação no EBRAPEM 2018 e no ENEM 2019. Também agradeço todos os membros dessa comissão pelo esforço permanente no aperfeiçoamento do programa, pela organização dos seminários e por promover os Encontros do MPEM.

Expresso meu sincero agradecimento à professora Catarina Akemi Arai, cujo apoio e incentivo foram essenciais durante todo o período de finalização deste texto. Sua amizade e seus conselhos são valiosos presentes que iluminaram este percurso.

Agradeço à professora Maria Cristina Bonomi, pelas incríveis aulas de cálculo durante a graduação, por me ajudar a enxergar uma parte da beleza da Matemática aceitando me orientar na iniciação científica e no TCC. Por me encorajar a seguir meus estudos na pós-graduação. Seus ensinamentos e palavras de incentivo ainda ecoam em minha mente, ajudando em minha prática docente. Também agradeço por tê-la me apresentado à professora Vera Helena.

Expresso meu agradecimento à professora Vera Helena Giusti de Souza pela competência, empenho, amizade, ensinamentos, crença em mim (muitas vezes mais do que eu mesmo), orientações, paciência, correções, reflexões, conversas e conselhos. Certamente sem ela esse trabalho não seria possível. Agradeço por ser uma pessoa incrível.

Muito obrigado a todos e a todas.

*Matemática*

*A Matemática está em tudo*
*Até mesmo nesse poema*
*E olha que eu nem precisei fazer um teorema*
*Ainda bem que isso não é um problema*

*Para alguns ela é enigmática*
*Para muitos ela é problemática*
*Mas para poucos chega até ser mágica*

*Seria a Matemática a maior criação da humanidade?*
*Só sei que gosto da sua efetividade*
*E como você pode ver, ela tem muitas funcionalidades*

*As vezes fico surpreso como as pessoas usam e abusam dela*
*Que maneira incrível mostrar nossa criatividade*
*Tenho até afinidade*
*Essa Ciência tem uma incrível personalidade*
*(Poema escrito pelo aluno Guilherme P. dos Santos, 9º ano)*

## Resumo

Lima, F. S. V. ***Concepções de área e de perímetro de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental***. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 2023.

Neste trabalho, apresentam-se as conclusões obtidas em pesquisa do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IMEUSP, a qual teve por objetivo investigar concepções relacionadas às ideias de área e de perímetro de figuras planas de alguns alunos brasileiros do Ensino Fundamental – Anos Finais, a partir de um conjunto de atividades. Pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem desses conceitos geométricos mostram que estudantes apresentam equívocos relacionados a essas ideias, como por exemplo confundir uma grandeza com sua medida ou achar que se a área de uma figura plana aumenta, então o perímetro também aumenta. Buscou-se base teórica nas ideias de Definição de Conceito e Imagem de Conceito evocadas de David Tall e Vinner e nos paradigmas de Geometria de Bernard Parsysz e pretendeu-se responder duas questões de pesquisa “As Imagens de Conceito individuais de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II referentes a área e ao perímetro de figuras planas contemplam concepções numérica, geométrica e de grandeza?, “Estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental II mostram articular uma geometria de observação e uma geometria de demonstração?”. A partir da fundamentação teórica e das questões de pesquisa, foi elaborado um conjunto de 45 atividades que, por conta da pandemia, foram utilizadas, individualmente e à distância, com três estudantes de 7º e 9º anos do EF, num formato do tipo entrevista reflexiva. Essas entrevistas foram áudio gravadas e transcritas e, juntamente com os protocolos recolhidos, serviram de base para as análises feitas. Pode-se observar que os três participantes mostraram dificuldade em entender uma curva fechada como um objeto unidimensional, que não inclui a região limitada por esta, reconhecer regiões do plano que possuem ¨buracos¨ e trabalhar com comparações entre curvas e superfícies sem uso de uma unidade de medida. Concluímos que as imagens individuais apresentadas não contemplam concepções de grandeza, os participantes apresentaram dificuldades em articular uma geometria de observação e uma geometria de demonstração, sobretudo, fazerem comparações sem uso algum instrumento graduado. Deixa-se como produto final desta Dissertação o conjunto de atividades utilizada, que foi revisitada e reformulada ao final da pesquisa, como sugestão de abordagem diferenciada para o assunto, em aulas de Matemática da Educação Básica.



**Palavras-chave**: Área. Perímetro. Imagem de Conceito. Definição de Conceito. Matemática. Ensino. Didática.

# Abstract

Lima, F. S. V. Area **and perimeter conceptions by Elementary School students**. Thesis (Master) - Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

In this work, we present conclusions obtained in a research for Professional Master's Degree in Mathematics Teaching at IMEUSP, which aimed to investigate conceptions related to area and perimeter of flat figures ideas from some Brazilian Elementary School – Final Years students. Researches related to teaching and learning of these geometric concepts show that students have misconceptions related to these ideas, such as confusing greatness with its measurement or thinking that if the area of a flat figure increases, then the perimeter also increases. The theoretical basis was sought in the ideas of evoked Concept Definition and Concept Image as given by David Tall and Vinner and on Geometry paradigms defined by Bernard Parsysz aiming to answer two research questions “Individual evoked Concept Images of students in final years of Elementary School regarding the area and perimeter of flat figures show conceptions numerical, geometric, and of magnitude?”, “Do students in final years of Elementary School show they articulate a geometry of observation and a geometry of demonstration?”. Based on theoretical foundation and research questions, a set of 45 activities was elaborated and, due to pandemic, were used, individually and remotely, with three 7th and 9th grade students, in a reflective interview format. These interviews were audio recorded and transcribed and, together with collected protocols, served as basis for the analyzes carried out. It can be observed that the three participants showed difficulty in understanding a closed curve as a one-dimensional object, which does not include the region limited by it, recognizing regions of the plane that have ¨holes¨ and working with comparisons between curves and surfaces without using a unit of measurement. We concluded that the individual images presented do not contemplate conceptions as magnitude. The participants encountered difficulties in articulating an geometry of observation and a geometry of demonstration, especially in making comparisons without the use of any graduated instruments. The final product of this Dissertation is the set of activities used, which were revisited and reformulated at the end of the research, as a suggestion for a different approach to the subject, in Basic Education Mathematics classes



**keyword**: Area. Perimeter. Image Concept. Definition of Concept. Mathematics. Teaching. Didactics.

**Concepções de área e de perímetro**

***de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental***

**a ser apresentado à CPG para a dissertação**

Fernando Siqueira Vieira Lima

## Lista de figuras

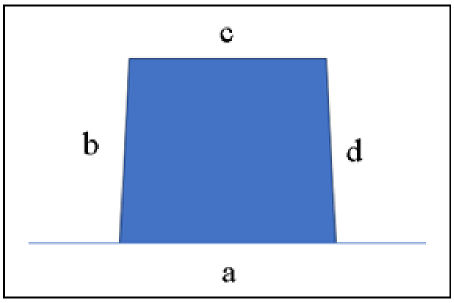
## Lista de quadros

# Sumário

## INTRODUÇÃO

Segundo Eves (2004), os egípcios, há 1000 a.C, sabiam calcular a medida do perímetro e a medida da área de alguns terrenos à margem do rio Nilo. Ainda segundo o autor, os papiros de Golenishev e Rhind, de 1850 a 1650 a.C aproximadamente, mostram a Geometria utilizada na época e neles é possível identificar 26 exercícios, com suas soluções, a maioria deles com problemas de mensuração, como a área de terrenos. De acordo com Wagner (2016), nessa época, para os egípcios calcularem, por exemplo a área de um terreno, representado pela figura a seguir (ver FIGURA 1), era utilizada a seguinte "regra", a área de um quadrilátero era obtida por meio do produto entre a média da média dos lados opostos do quadrilátero, esse procedimento pode ser escrito na linguagem moderna como, Área = $[(a+c)/2][(b+d)/2]$, com *a* e *c*, representando lados apostos do quadrilátero assim como *b* e *d*. Era uma forma experimental de se calcular a medida da área, sem preocupações com a validade dessa forma de procedimento. Nota-se que para este cálculo, não há noção de unidade de medida de área e sim uma medida do contorno do terreno.

Figura 1 - Quadrilátero com as respectivas medidas dos lados

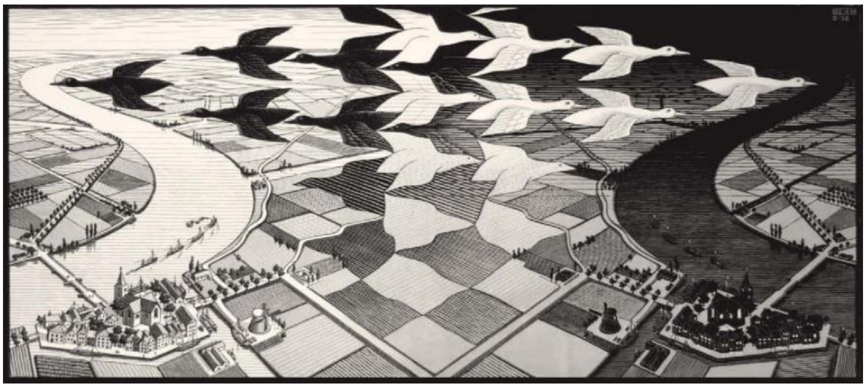



Fonte: Autor

É possível notar que caso o terreno (quadrilátero) tivesse formato retangular, esse procedimento apresenta o cálculo exato da medida da área.

Seja na Babilônia, Egito, Grécia antiga ou em qualquer outro lugar do planeta, o Homem esteve e está cercado pela natureza e suas formas e estas podem ser expressas por modelos geométricos. Tais modelos passam a inspirar o Homem e este passa a utilizar elementos geométricos para produzir monumentos, artesanatos, obras de arte em geral (ver Figuras 1 e 2), jogos, pavimentações, entre outros.

Figura 2 – “Giorno e Notte” (1938) do artista Maurits Cornelis Escher



Fonte: http://www.archimagazine.com/renigmaescher.htm, acesso em 19/04/2023.

Figura 3 – “Composição” (1953) da artista Lygia Clark

Fonte: https://www.flickr.com/photos/66742871@N05/7896972512/in/album-72157631328080912/ acesso em 19/04/2023.

Além da arte, elementos da geometria, como área e perímetro, estão ligados a diversas situações em nosso dia a dia. Um exemplo curioso é o mapa do Estado de Goiás, que cerca completamente o Distrito Federal, que por sua vez, não faz parte do Estado de Goiás. Em um site especializado no turismo de Goiás, podemos observar o seguinte mapa, ver FIGURA 4.

No mapa, podemos notar as diferentes cores representando as diversas regiões do Estado de Goiás, e uma região sem cor, representando o Distrito Federal, que não pertence a Goiás.

Imaginando a representação, no mapa, do Estado de Goiás, podemos perceber que se trata de uma figura plana que possui um “buraco”. E assim, como trabalhar os conceitos de área e de perímetro com figuras desse tipo?

Figura 4 – Mapa Turístico do Estado de Goiás


Fonte: https://www.goias.gov.br/servico/83522-goias-tem-novo-mapa-turistico.html acesso em 19/04/2023.

Em nosso dia a dia, não é difícil notar a quantidade de "figuras planas com buracos", representações planas de uma parede que possui uma janela ou uma porta (ou ambos), a moldura de um porta-retrato ou de um quadro, a superfície de uma mesa de madeira com tampo de vidro entre outras.

O contato que tive com o estudo de figuras planas que possuem um ou mais "buracos" foi ao final do curso de Licenciatura em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME USP) em 2016, quando elaborei junto com a Professora Maria Cristina Bonomi, na época docente do Departamento de Matemática, um trabalho de conclusão de curso que teve como objetivo, propor uma sequência didática que fizesse com que alunos da Educação Básica refletisse sobre as seguintes indagações: Ao mexermos em uma figura plana:

- se aumentamos sua área, seu perímetro necessariamente aumentará?

- se a área dessa figura permanecer a mesma: o que se pode dizer sobre seu perímetro?
- se diminuirmos o perímetro de uma figura plana, a área necessariamente diminuirá?

Para ajudar os alunos a responderem essas perguntas, foi proposto o uso do Tangram de Nove Peças, jogo que possibilita a criação de figuras de mesma área (respeitadas as regras do jogo), inclusive figuras com buracos.

Ao concluir a graduação em Licenciatura, ingressei no programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPEM) e fui apresentado à professora Vera Helena Giusti de Souza, que aceitou, como proposta de projeto de Mestrado, uma investigação sobre dificuldades de estudantes no entendimento dos conceitos de área e de perímetro de figuras planas e se o uso de figuras planas com “buraco” poderia auxiliar no ensino e na aprendizagem desses conceitos, que são trabalhados ao longo do Ensino Fundamental.

O ingresso na pós-graduação marca o início de minha carreira como professor de Matemática (após a qualificação) no Ensino Fundamental - Anos Finais, na rede privada de ensino na zona leste de São Paulo. Assim, as discussões sobre ensino e aprendizagem incentivadas ao longo do programa de mestrado bem como os seminários e os Encontros do MPEM e as participações nos congressos foram de suma importância na minha prática docente.

A primeira proposta dessa investigação consistiu em um conjunto de atividades aplicadas em sala de aula, que julgamos simples e que tinha, como um dos objetivos, verificar quais respostas seriam dadas às perguntas apresentadas anteriormente; porém, ao ser aplicado em turmas de Ensino Fundamental - Anos Finais de sétimo e nono anos e de Ensino Médio de primeira e terceira séries, em duas Escolas Públicas, trouxe preocupações pois grande parte dos alunos que participaram, confundiram área com perímetro e apresentaram dificuldades em obter a medida da área de um retângulo. Alguns destes apresentaram como resposta o produto entre a medida do comprimento e a medida da largura do retângulo dividido por dois. Assim, repensamos o projeto, de maneira que este pudesse contribuir de maneira mais significativa para o ensino de área e de perímetro aos participantes e, ao mesmo tempo, que trouxesse à luz as concepções sobre esses dois importantes conceitos. Cabe destacar que, após a qualificação dessa proposta de investigação, decidimos trabalhar com área e perímetro como grandezas (uma das propostas sugeridas pela banca de qualificação).

O presente trabalho apresenta alguns dos resultados que foram obtidos com a aplicação de um conjunto de atividades que teve como objetivo investigar concepções dos participantes em relação aos conceitos de área e de perímetro, ambos trabalhados como grandezas.

No primeiro capítulo, apresentamos uma breve discussão sobre os conceitos de área e de perímetro de figuras planas, enquanto grandezas.

No segundo capítulo encontra-se um estudo sobre o que consideraremos como concepções matemáticas, com foco em concepções de área e de perímetro, no caso de figuras planas.

No terceiro e no quarto capítulos, apresentamos a importância do estudo de área e de perímetro na Educação Básica, bem como questões de pesquisa e nosso propósito com essa investigação.

No quinto e no sexto capítulos, apresentamos, respectivamente, considerações teóricas e os procedimentos metodológicas que nortearam essa pesquisa.

No sétimo capítulo, expomos a sequência de atividades aplicadas.

No oitavo capítulo, encontram-se a análise dos resultados obtidos com a aplicação das atividades.

No nono capítulo, apresentamos as considerações finais dos estudos deste trabalho.

Nos anexos, constam os termos de consentimento enviados aos participantes, bem como a sugestões de respostas das atividades aplicadas.

# 1. OS CONCEITOS DE ÁREA E DE PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS

Neste capítulo tratamos dos conceitos de área e de perímetro de figuras planas. Procuramos apresentar alguns resultados de pesquisa sobre o tema bem como um breve estudo desses conceitos como grandezas.

## 1.1. Os estudos de área e de perímetro como saberes matemáticos

Os cálculos de medida de área e de perímetro são antigos, segundo Eves (2004); há registros do período de 2000 a.C. e 1600 a.C. que revelam que os babilônios tinham familiaridade com regras gerais relacionadas à área. Eles calculavam a medida da área de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e talvez tivessem conhecimento no cálculo da medida da área de um triângulo qualquer e existe a possibilidade, nesse mesmo período, de terem conhecimento da medida da área do trapézio retângulo e de saberem calcular o volume de alguns sólidos geométricos. Ainda segundo o autor, os egípcios, em 1000 a.C, sabiam calcular a medida do perímetro, trabalho feito pelos "estiradores de cordas", e a medida da área de alguns terrenos à margem do rio Nilo, além de serem uma sociedade conhecida por suas habilidades em projetos, nos quais utilizavam o que atualmente chamamos de Geometria. Há de se destacar que muito tempo antes do período descrito.

Muitos séculos se passaram e os cálculos de área e de perímetro continuam sendo utilizados, agora na vida moderna. Seja para calcular a quantidade de pisos para se pavimentar uma determinada superfície ou para calcular a medida correta do comprimento do elástico a ser costurado em uma bermuda para que este se ajuste na cintura ou ainda para decidir entre caminhos a serem percorridos, qual será o mais curto. Estes conceitos geométricos transcendem a Matemática, como a noção de fronteiras e territórios, utilizados na Geografia, os conceitos de superfície de atrito, utilizados na Física ou de área foliar, utilizada na Agricultura.

Contudo, podemos perceber a importância de se aprender o conceito de área e de perímetro. O cerne de nosso trabalho é propor ao aluno do Ensino Fundamental II – anos finais, por meio de um conjunto de atividades, um melhor entendimento de área e de perímetro como grandezas, isto é, uma clareza maior em relação aos conceitos de superfície e fronteira.

## 1.2. Área e perímetro como grandezas

Nossa experiência em sala de aula com alunos do Ensino Fundamental II, nos revela que, parte destes alunos não conseguem distinguir área de perímetro, também acreditam que o cálculo da medida da área de uma figura plana seja feito por meio de um produto entre os lados da figura, independentemente do número de lados – se a figura não for um polígono, os alunos demonstram muitas dificuldades para calcular sua medida de área e essas dificuldades aumentam quando é necessário calcular a medida do perímetro. Eles procuram recorrer às fórmulas, para o cálculo da medida da área de figuras planas, uma parte destes não calculam corretamente a área de um quadrado ou um triângulo, o mesmo para o perímetro destas figuras. De forma clara, é possível perceber que boa parte desses alunos possuem uma ideia muito limitada sobre área, o mesmo para o perímetro.

Segundo Baltar (1996, apud MELO, 2009, p. 25), área e perímetro são conceitos que possuem:

*Topologias diferentes*, pois a área é associada a uma superfície e o perímetro ao contorno de uma superfície.

*Dimensões diferentes*, pois não possuem mesmas unidades dimensionais.

*Computacionais diferentes*, pois possuem fórmulas distintas para o cálculo dessas medidas.

*Variações não no mesmo sentido*, pois ao aumentarmos a área de uma figura plana, não necessariamente aumentamos seu perímetro.

De acordo com Douady e Perrin-Glorian (1989, apud FACCO, 2006, p. 29), o estudo de área e de superfície passa por três pólos, o **geométrico**, em que as superfícies são consideradas como partes do plano; o pólo **grandeza**, que se refere às áreas; e o pólo **numérico**, que se relaciona às medidas. Ainda segundo Facco (2006), Douady e Perrin-Glorian (1989) utilizam como hipóteses que o tema área, deveria ser estudado como grandeza, favorecendo assim o estabelecimento de relações entre os pólos geométrico e numérico. A outra hipótese é a identificação precoce entre grandezas e números que pode gerar confusões entre comprimento e área. Para chegar a essas conclusões, ainda segundo a autora, as pesquisadoras acompanharam e observaram os erros relacionados ao conceito de área, cometidos por um grupo de estudantes franceses, segundo elas, tais erros ocorreram como consequência do tipo de abordagem dada, em que é privilegiada uma "concepção forma", ligada ao pólo geométrico, ou uma "concepção número", ligada ao pólo numérico, ou ainda às duas simultaneamente, porém sem que seja estabelecida uma relação entre elas (SILVA, 2016).

Sendo assim, optamos em trabalhar os conceitos de área e de perímetro como grandezas, isto é, propor que o aluno trabalhe com os conceitos de superfície e de fronteira e com isso, sejam capazes de diferenciar área de perímetro bem como obter um melhor entendimento destes conceitos. Ora criando situações em que se possa comparar superfícies, sem que para isso seja necessário estabelecer uma medida, ora fazendo comparações utilizando unidade de medida. O mesmo será utilizado com a ideia de fronteira.

Para elaborar a sequência de atividades e analisar os protocolos obtidos, escolhemos como fundamentação teórica as ideias de Imagem de Conceito e de Definição de Conceito, defendidas por Tall e Vinner (1981) e os quatro Paradigmas Geométricos desenvolvidos por Bernard Parzysz (2006), porque acreditamos que são ideias que permitem investigar possíveis concepções de área e de perímetro de figuras planas dos participantes bem como contribuir com a aprendizagem destes conceitos.

## 1.3. Problemática

Em relação ao ensino e à aprendizagem de área e de perímetro de figuras planas, trabalhado ao longo do Ensino Fundamental, estes tem apresentado dificuldades vivenciadas por professores e educadores de Matemática, como mostram pesquisas feitas por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Santos (1999), Facco (2006), D’Amore e Fandiño (2007), Ferreira (2010), Barbosa (2002) e Melo (2009), motivando assim a busca por abordagens e instrumentos inovadores, na tentativa de viabilizar e tornar mais eficientes os processos de ensino e de aprendizagem destes conceitos.

Desde o século XX, segundo D’Amore e Fandiño (2007), trabalhos que trazem a luz as dificuldades com o entendimento dos conceitos de área e de perímetro foram publicados em 1926, no livro intitulado, “*La rappresentazione del mondo nel fanciullo*”, escrito pelo psicólogo suíço Jean Piaget.

Algumas das dificuldades descritas com o entendimento de área e de perímetro, assim como outras, são relatadas por Facco (2006), como, por exemplo, ao pedir para um aluno calcular a medida da área de uma figura plana, este acaba calculando o perímetro e o mesmo vale quando solicitado para que este calcule o perímetro. A autora revela que, numa atividade referente ao cálculo da área e do perímetro de um retângulo, em uma turma da 5.ª série (atual 6.º ano) do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual, 55% dos participantes utilizaram a fórmula do perímetro para calcular a medida da área do retângulo. Segundo Santos (1999), os alunos confundem os conceitos de área e de perímetro, bem como os de contorno e superfície, e há aqueles que erroneamente consideram que apenas segmentos de reta possuem comprimento, ou ainda, que um conjunto restrito de polígonos, possuem área e perímetro.

Em Ferreira (2010), encontramos a seguinte reflexão: se forem trabalhadas a composição e a decomposição de figuras, por exemplo, se alguém associa a área de uma figura plana à medida de uma superfície, ao mudar a forma dessa superfície, terá em mente que a medida da área também poderá sofrer mudanças; mas quando se associa a área apenas a um número positivo, só se mobilizam concepções numéricas, limitando-as a aspectos relacionados aos cálculos. (FERREIRA, 2010, p.16).

# 2. CONCEPÇÕES RELACIONADAS A CONCEITOS MATEMÁTICOS

O objetivo desse capítulo é apresentar o que entendemos por **concepção**, seguindo as ideias de Sfard (1991), que “classifica” as concepções como operacionais e estruturais, seja no contexto histórico como no psicológico. E assim como em Sfard (1991), buscaremos distinguir **concepção** de **conceito**.

## 2.1. Concepção estrutural e concepção operacional

A ideia de *concepção* está ligada diretamente ao cerne deste trabalho e, assim, há necessidade de apresentarmos o que entendemos por ela. Parece-nos razoável assumir que as noções mais populares de *concepção* podem ser encontradas nos dicionários de língua portuguesa ou de maneira mais formal, no contexto da Filosofia.

No dicionário Michaelis on-line (2023), encontramos o significado de *concepção*, do latim *conceptĭo*, como “operação mental para a elaboração de ideias e conceitos”, “ponto de vista; noção, opinião”, “trabalho de criação, geralmente artístico; criação, projeto, plano” e “ato de conceber ou gerar um ser vivo; fecundação”, isto é, uma ideia formada a partir de um conceito. Segundo o Dicionário Básico de Filosofia (2001), concepção é, "operação pela qual o sujeito forma, a partir de uma experiência física, moral, psicológica ou social, a representação de um objetivo de pensamento ou conceito” e também “operação intelectual pela qual o entendimento forma um conceito (ex.: o conceito de triângulo)”. (JAPIASSU, MARCONDES, 2001, p.39). Assim, podemos dizer que os significados de *concepção* apresentados, estão ligados a formação de ideias que um indivíduo “cria” a partir de um determinado conceito.

Segundo Pontes (1992), as *concepções* estão ligadas ao processo de aprendizagem, ajudam a distinguir objetos e são indispensáveis porque estruturam o sentido que damos às coisas, porém, podem atuar como um elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e de compreensão. Ainda segundo o autor, as *concepções* são formadas num processo simultaneamente individual e social. Individual porque resulta da elaboração da nossa experiência. Social porque é um resultado do confronto de nossas interações com outras pessoas. Assim, nossas *concepções*, são influenciadas pelas experiências que nos acostumamos a reconhecer e pelas representações sociais.

Segundo Sfard (1991, p.3), a *concepção* tem um papel importante na construção da Matemática ou de qualquer outra ciência. Segundo a autora, o termo está ligado a formação, pelo indivíduo, do conjunto das representações e associações internas emanadas do conceito.

Assim, inspirados por Pontes (1992) e Sfard (1991) entendemos por **concepção** como sendo a ideia formada, num processo simultaneamente individual e social, a partir de experiências, de representações e associações emanadas do conceito.

Uma vez que entendemos que a interação de um indivíduo com um determinado conceito matemático, favorece a formação de concepções, podemos nos perguntar sobre a coerência entre essas diversas concepções. Para este questionamento, recorremos às ideias publicadas por Tall e Vinner em 1981.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a mente humana possui um funcionamento complexo, não é uma entidade puramente lógica e não segue necessariamente a lógica matemática, na qual os conceitos são definidos de modo preciso, exato, e fornecem assim uma base sólida à Matemática. Segundo os autores, quando um conceito matemático é apresentando a um estudante, nos diversos níveis de ensino, as dificuldades encontradas por este, podem estar relacionadas a distinção entre o conceito formalmente definido e os processos cognitivos pelos quais são compreendidos.

É importante destacar que para Tall e Vinner (1981), as concepções que um indivíduo possui em relação a um conceito, podem mudar ao longo do tempo, sobretudo quando este é revisitado. Assim, cada indivíduo desenvolve sua própria **imagem de conceito**, que é definida pelos autores como

> "[...] a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos a eles associados. Ela é desenvolvida durante os anos por meio de experiências e todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadure." (TALL e VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[1])

Podemos notar que as experiências que um indivíduo vivência são importantes para a formação da **imagem de conceito** sobre determinado conceito. Assim, no ambiente escolar, por exemplo, um estudante será apresentado diversas vezes ao conceito de área e de perímetro, cada vez que ele revisita esses conceitos, sua imagem de conceito relacionada à área e ao perímetro muda, conforme os estímulos pelo qual ele foi submetido e seu amadurecimento matemático.

---

[1] "[...] the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the Years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures."

Uma vez apresentada a definição de concepção, que usaremos em todo esse trabalho, acreditamos que seja importante também definir o que entendemos por **conceito matemático**.

De acordo com o dicionário Michaelis on-line (2023), dentre os possíveis significados populares de *conceito*, destacamos, “representação mental das características gerais de um objeto”, “compreensão que se tem de uma palavra; definição, noção”. Assim, podemos notar que tal termo, está ligado a “ideia formada a partir das características de um objeto” ou “definição”. Segundo o Dicionário Básico de Filosofia (2001), conceito, no contexto matemático, “é uma noção de base que supõe uma definição rigorosa (ex.: o conceito de círculo: figura gerada por um segmento de reta em torno de um ponto fixo)”. (JAPIASSU, MARCONDES, 2001, p.39). Isto é, um conceito é a noção que se tem de uma definição rigorosa. Segundo Sfard (1991), um conceito é uma construção teórica dentro de um universo formal de conhecimento ideal, ou seja, para a autora, o termo significa, uma ideia formada por meio de uma definição rigorosa, aceita pela comunidade cientifica.

Assim podemos constituir nosso entendimento de **conceito matemático** como, uma ideia matemática formada a partir de uma definição rigorosa aceita pela comunidade Matemática.

Segundo Sfard (1991, p.4), conceitos abstratos podem ser concebidos de duas maneiras, estruturalmente como objeto e operacionalmente como processo, essas duas abordagens são complementares e não dicotômicas. Como exemplo, a autora apresenta a formação do conceito de número ao longo da história. Ainda segundo a autora, número por um bom tempo ficou restrito a ideia do que atualmente chamamos de “número natural”, originado pelo processo de contagem. A partir do surgimento das proporções, originadas pelos processos de medição, passamos a denominar número, na linguagem moderna, por “números racionais”. Quando passamos a medir diagonais, os matemáticos perceberam que havia medidas que não poderiam ser expressas como números racionais, levando a descoberta da incomensurabilidade, e assim surge os números reais positivos. A resolução de equações de terceiro e quarto grau, trouxe à tona o que denominamos por números negativos e os números complexos. Sfard (1991, p.12). Isto é, o conceito de número foi forjado por um processo cíclico, no qual a mesma sequência de eventos pode ser observada repetidamente, sempre que um novo tipo de número nascia.

De forma análoga, a autora defende que, os processos de aprendizagem e de resolução de problemas consistem em uma interação intrínseca entre concepções operacionais e estruturais. De acordo com Sfard (1991), a **concepção estrutural** está ligada as construções estáticas, integradoras, concebidas a partir de objetos abstratos. Já a **concepção operacional** está associada a construções dinâmicas, sequenciais e detalhadas, são concebidas como um processo computacional (sequência de ações).

Um indivíduo possui uma concepção estrutural de um determinado conceito matemático quando ele consegue tratar esse conceito como um <u>objeto</u>, sem se prender a detalhes, "olhando" como um todo, "o pensamento estrutural cria uma fisionomia para o conceito." (SFAR, 1991, p.4, tradução nossa[2]). A concepção operacional é formada a partir de uma sequência de ações, ainda que o indivíduo não necessariamente saiba definir o conceito matemático, isto é, a concepção operacional está ligada a um <u>processo</u>, "implica olhá-lo mais como um potencial do que como um conceito, o qual vem de uma sequência de ações." (SFAR, 1991, p.4, tradução nossa[3]). Para a autora, para que um indivíduo adquira um conhecimento profundo de um conceito matemático, é imprescindível que este conceito seja "visto" como um processo e como um objeto. A autora apresenta alguns exemplos a fim de mostrar que qualquer conceito matemático pode ser visto do ponto de vista estrutural como operacional, tais exemplos são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 - Descrição estrutural e operacional de conceitos matemáticos

| | Estrutural | Operacional |
|---|---|---|
| Função | Conjunto de pares ordenados (BOURBAKI, 1934) | Processo de cálculo ou método bem definido de obter um sistema de outro |
| Simetria | Propriedade de uma forma geométrica | Transformação de uma forma geométrica |
| Número natural | Propriedade de um conjunto ou a classe de todos os conjuntos com mesma cardinalidade finita | Zero ou qualquer número obtido de outro natural somado 1 (o resultado de contagem) |
| Número racional | Par de inteiros (um membro de um conjunto de pares definido especificamente) | O resultado de divisão de inteiros |
| Circunferência | Lugar de todos os pontos equidistantes de um ponto dado | Uma curva obtida de rotação de um compasso em torno de um ponto fixo |

Fonte: Sfard (1991, p.5)

Em relação ao conceito de área de figura plana, entendemos que na concepção estrutural, um estudante reconhece a área de uma figura plana como uma medida de sua região interna ou como classes de equivalência de superfícies de mesma área. Já a concepção

[2] We can say that structural thinking endows a concept "a kind of physiognomy".
[3] Implies regarding it as a potential rather than actual entily, wich comes into existence upon request in a sequence of actions.

operacional será importante no processo de desenvolvimento desse conceito, construído a partir de processos de obtenção de área de figuras planas. Quanto ao perímetro, as ideias seguem de forma análoga.

## 2.2. As ideias de Anna Sfard sob o contexto histórico.

Na sessão anterior, foram apresentadas as ideias de Sfard (1991) quanto as concepções estrutural e operacional. De acordo com a autora, há razões para pensar que no processo de formação dos conceitos, a concepção operacional precede a estrutural.

> Um olhar atento à história dos conceitos de números ou funções mostrará que eles foram concebidos operacionalmente muito antes que suas definições e representações estruturais fossem inventadas. (SFARD, 1991, p.11, tradução nossa[4])

Ainda segundo a autora, conceitos matemáticos se desenvolveram em um processo cíclico (entre operacional e estrutura), e a cada ciclo, surgia algo novo, assim como o conceito de número, descrito na sessão anterior.

## 2.3. As ideias de Anna Sfard sob o contexto psicológico.

Para Sfard (1991, p.16), quando um indivíduo adquire um novo conceito matemático, a concepção operacional é na maioria das vezes, a primeira a se desenvolver. Segundo a autora, a hierarquia "operacional antes do estrutural" pode ser entendido como sendo uma prescrição para ensinar. Ainda segundo a autora, sua argumentação é baseada nas pesquisas de Piaget (*Epistemologia Genética*).

Assim, de acordo com a autora, quando usamos problemas para introduzir um conceito, o estudante utiliza a concepção operacional e assim que resolve e generaliza, passa do operacional para o estrutural. Ainda de acordo com a autora, os conceitos matemáticos possuem uma característica mais estrutural, podendo criar uma "imagem mental", assim alguns tipos de representações internas se mostram mais adequadas que outras.

A formação de uma concepção estrutural, segundo Sfard (1991), é um processo lento e muitas vezes um processo inerentemente difícil, realizado em três fases distintas: **interiorização**, **condensação** e **reificação**.

Na **interiorização** o estudante se familiarizar com os processos que irão dar origem a um novo conceito. Esses processos são executados nos objetos matemáticos e podem favorecer condições para que o novo conceito possa ser organizado. Por exemplo, podemos

---

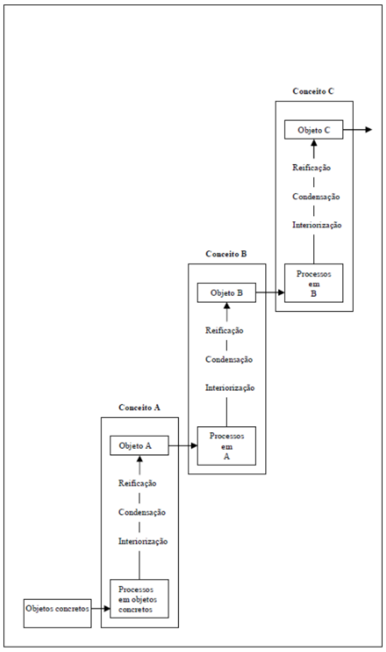
[4] A close look at the history of such notions as number or funcion will show that they had been conceived operationally long before their structural definitions and representations were invented.

considerar o processo de comparar as regiões internas de duas figuras planas (distintas a fim de identificar a de maior área) como forma de dar origem o conceito de área como grandeza ou ainda trabalhar com comparações entre contornos de figuras planas como forma de dar origem ao conceito de perímetro como grandeza, em ambos os casos, procurando trabalhar com figuras convexas, não convexas, figuras formadas por poligonais assim como figuras formadas por curvas.

Na **condensação** o estudante começa a pensar sobre o processo como um todo, sem ficar preso a detalhes, ou seja, é o momento em que ele passa a fazer compactações das sequências de operações. É nessa fase que o estudante passa a fazer generalizações, comparações e combinações com outros processos. É na condensação que nasce o conceito. Por exemplo, se o estudante trabalha apenas com polígonos convexos, ele naturalmente poderá dar origem ao conceito de perímetro como a soma da medida dos lados desse polígono.

Quando um indivíduo se torna capaz de “ver” um conceito como um objeto, Sfard (1991) afirma que este conceito foi **reificado**. É o ponto em que a interiorização de conceitos de nível mais alto começa. É uma fase difícil de conseguir, segundo a autora, pois exige muito esforço e pode vir de forma súbita. Uma vez que o conceito de área de figura plana foi concebido, a partir da reificação, este conceito poderá ser aplicado em outros objetos matemáticos. A FIGURA 5 apresenta um exemplo de desenvolvimento de um conceito.

Figura 5 – Desenvolvimento de um conceito segundo Sfard




Fonte: Sfard (1991, p. 22).

## 3. JUSTIFICATIVA E QUESTÕES DE PESQUISA

A Geometria, com o passar dos tempos, vem sendo cada vez mais utilizada e atualmente se apresenta fortemente ligada a outras áreas do conhecimento, como Engenharia, Arquitetura, Química, Geografia, Física e pode ser encontrada nos versos da canção “Aquarela” do compositor Toquinho “(...) E com cinco ou seis retas é fácil fazer um castelo (...)”. O estudo de Geometria possibilita um melhor entendimento de características e propriedades de objetos e de ideias geométricas subjacentes.

A importância do estudo da Geometria é destacada em documentos nacionais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997) do Ensino Fundamental e recentemente pela Base Comum Curricular BNCC (Brasil, 2018), homologada no final de 2017.

Em relação ao ensino e à aprendizagem de área e de perímetro de figuras planas, trabalhado ao longo do Ensino Fundamental, estes tem apresentado dificuldades vivenciadas por professores e educadores de Matemática, como mostram pesquisas feitas por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Facco (2006), D’Amore e Fandiño (2007), Ferreira (2010) e Melo (2009), motivando assim a busca por abordagens e instrumentos inovadores, na tentativa de viabilizar e tornar mais eficientes os processos de ensino e de aprendizagem.

Tal preocupação com o ensino e a aprendizagem de área e perímetro na Escola Básica encontra força em Brasil (2018), que indica que um aluno do 5.º ano do Ensino Fundamental I, deve “Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes”. (Brasil, 2018, p. 297).

De acordo com Douady e Perrin-Glorian (1989, apud FACCO, 2006, p. 28), o estudo de área e de superfície passa por três pólos, o geométrico, em que as superfícies são consideradas como partes do plano; o pólo "grandeza", que se refere às áreas; e o pólo numérico, que se relaciona às medidas.

Ainda de acordo com as autoras, citada por Ferreira (2010, p. 26), a construção do conceito de área como grandeza passa por:

- diferenciar a área de uma figura plana de sua forma, considerando que figuras planas com formas diferentes podem ter mesma área.
- diferenciar a área de uma figura plana do número, uma vez que a uma mesma figura plana, pode-se associar diferentes unidades de medida.

O que se pretende investigar nesse trabalho, são as “imagens” individuais dos participantes, alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II, a partir de um conjunto de atividades utilizando para isso entrevistas reflexivas individuais. Também faz parte do objetivo desta investigação, verificar se esses participantes articulam uma geometria de observação e uma geometria de demonstração.

## 4. OBJETIVO

Nosso objetivo com esta pesquisa será estudar a concepção dos alunos, do Ensino Fundamental - Anos Finais, a partir de um conjunto de atividades referentes à área e ao perímetro de figuras planas, ambos conceitos trabalhados como grandeza.

# 5. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Neste capítulo apresentamos nossa fundamentação teórica, que consiste nos Paradigmas de Geometria, definidos por Parsysz (2006), que defende que o pensamento geométrico deve ser desenvolvido passando-se de uma geometria de observação para uma geometria de demonstração e nas ideias de Tall e Vinner (1981), referentes à Imagem de Conceito e Definição de Conceito, que utilizaremos para analisar as concepções de área e de perímetro dos participantes entrevistados.

Utilizamos essas ideias tanto para elaborar o conjunto de atividades como para realizar a análise qualitativa dos áudios das gravações e dos protocolos obtidos.

No final deste capítulo, apresentamos uma articulação entre esses dois quadros teóricos, cujo objetivo está alinhado com a proposta do nosso trabalho.

## 5.1. Ideias de Bernard Parsysz sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria

Segundo Parszys (2006), a Geometria ensinada na Escola Primária à Universidade, deveria evoluir de uma "geometria de observação" para uma "geometria de demonstração". Uma geometria de observação é caracterizada pela forma com que os objetos são percebidos, considerando formas, cores, tamanhos entre outras características ou propriedades. Na geometria de demonstração, os objetos são abstratos e a existência desses é garantida pelo modelo de geometria em questão, diferente do modelo Euclideano. Dessa forma, Parszyz defende que as práticas nas séries iniciais deveriam começar com uma modelagem do espaço físico e, ao longo dos anos de escolaridade, desenvolver o estudo de objetos abstratos, esse é o nível alcançado nas Universidades. De acordo com o autor, essa evolução pode ser "dividida" em quatro paradigmas, G0, G1, G2 e G3, baseados nos trabalhos do casal Van Hiele (1984), Houdement & Kuzniak (1998) e Henry (1999).

O casal de professores holandeses, Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, desenvolveram na década de 70 um modelo de aprendizagem geométrica no qual sugere que alunos devam progredir o pensamento geométrico, por meio de uma sequência de cinco níveis progressivos de compreensão de conceitos. Nasser (1997).

Os níveis propostos por Van Hiele (1984, apud Parzysz, 2001, pp. 99-100), são:

Nível 0 – Visualização: neste nível, os objetos geométricos são identificados somente por sua aparência / características físicas;

Nível 1 – Análise: é o nível onde a pessoa começa a distinguir as propriedades dos objetos geométricos, porém, ainda não é capaz de descrevê-los;

Nível 2 – Dedução Informal: neste nível, as pessoas são capazes de obter alguns resultados de forma empírica, com uso de técnicas de dedução para isso e começa-se a trabalhar com definições e propriedades de objetos geométricos;

Nível 3 – Dedução Formal: as validações são feitas a partir desde nível, usando técnicas de dedução a partir de um sistema axiomático que modela a realidade, como exemplo, a Geometria Plana;

Nível 4 – Rigor: neste nível, já são utilizados diferentes modelos de geometria, principalmente os Não-Euclideanos.

O trabalho de Houdement & Kuzniak (1988), segundo Parzysz (2006), apresenta três paradigmas, G1, G2 e G3. Ainda segundo o autor, em G1 – Geometria natural, a geometria e a realidade são confundidas. No paradigma G2 – Geometria axiomática natural, apesar da compreensão e utilização de um sistema axiomático, ainda há uma confusão entre o axiomático e a realidade. No paradigma G3 – Geometria axiomática formal, não há mais ligação entre o axiomático e a realidade, as validações são feitas formalmente.

Parzysz também utiliza as ideias de Henry (1999), este propõe três relações geométricas para o ensino e para a aprendizagem de geometria:

- Situação Concreta;
- Primeira Modelação;
- Matematização.

Com base nos autores mencionados, Parzysz afirma que o desenvolvimento do pensamento geométrico transita por duas etapas, o pensamento não-axiomático (concreto e espaço-gráfico) e o pensamento axiomático (proto-axiomática e axiomática). Para Parsysz, a resolução de um problema de geometria elementar consiste, ainda que implicitamente, em idas e vindas entre esses dois tipos de geometria e tem a figura, como elemento de suma importância.

O quadro teórico proposto por Parzysz com os quatro paradigmas pode ser visualizado no **QUADRO 2**.

Quadro 2 - Quadro teórico proposto por Parzysz

<table>
<tr><td colspan="3">Geometrias não axiomáticas</td><td colspan="2">Geometrias axiomáticas</td></tr>
<tr><td>Tipo de geometria</td><td>Concreta* (G0)</td><td>Espaço-gráfico (G1)</td><td>Proto-axiomática (G2)</td><td>Axiomática (G3)</td></tr>
<tr><td>Objetos</td><td colspan="2">Físicos</td><td colspan="2">Teóricos</td></tr>
<tr><td>validações</td><td colspan="2">perceptivo-dedutivas</td><td colspan="2">hipotético-dedutivas</td></tr>
</table>

Fonte: (PARZYSZ, 2006, p.130)

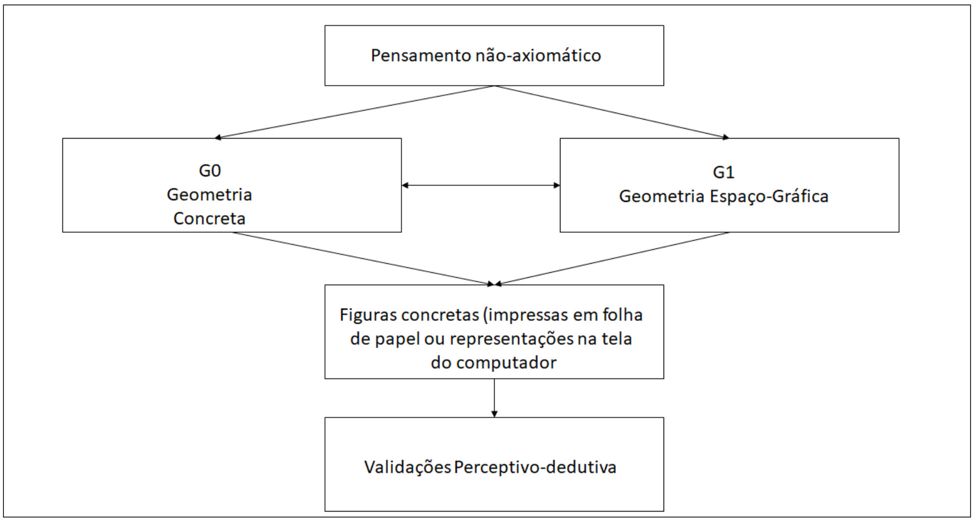
Para o pensamento não axiomático, temos dois paradigmas, Concreto G0 e Espaço-Gráfico G1. No paradigma G0, a ideia de geometria é primitiva e confundida com o espaço físico, os objetos de estudo são concretos e as validações esperadas são perceptivo-dedutivas, feitas pelo olhar, pelo toque, pela manipulação, pela comparação concreta etc. Um exemplo de pensamento comum, na prática, de G0 seria comparar a área de duas figuras utilizando para isso sobreposição. De forma parecida, compara-se a altura ou largura de objetos.

No paradigma Espaço-Gráfico G1, os objetos são representados graficamente, seja numa folha de papel ou na tela de um computador. As validações são perceptivo-dedutivas também, mas apoiadas pelos instrumentos de medida como régua graduada, compasso, esquadro ou movimentando objetos virtuais por meio de software de geometria.

Tanto em G0 como em G1, uma caixa de sapato representa um prisma, uma bola representa uma esfera, uma folha de papel sulfite representa um retângulo. As comprovações feitas em G1 partem de situações concretas e se apoiam em representações particulares. Importante destacar que como as conclusões são baseadas nos instrumentos de medida, a falta de precisão somadas a possíveis erros humanos, podem contribuir com falsas conclusões. Por exemplo, ao utilizar uma régua para medir os lados de uma folha de papel sulfite, a falta de precisão pode levar a conclusão de que essa folha de papel seja um retângulo.

O **QUADRO 3** apresenta um diagrama do pensamento não-axiomático proposto por Parsysz.

Quadro 3– Diagrama do pensamento não-axiomático (PARSYSZ, 2006)



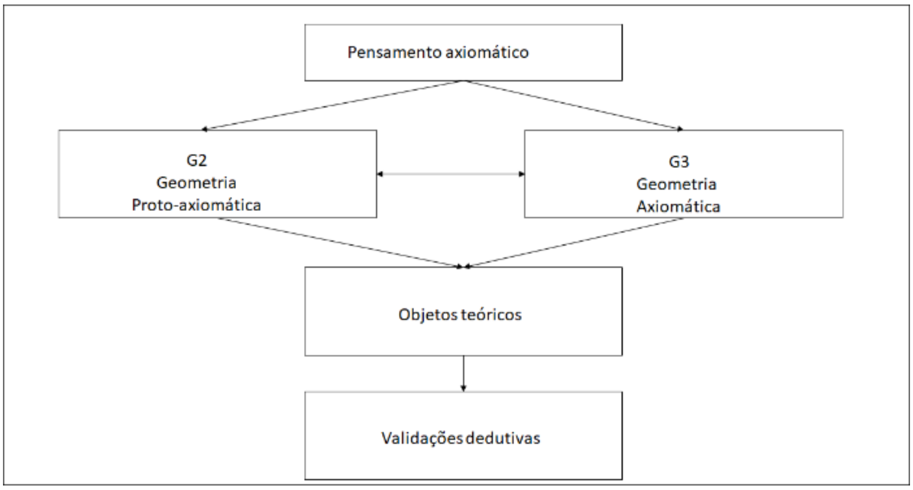

Fonte: Autor.

Para o pensamento axiomático (proto-axiomático e/ou axiomático), Parsysz (2006) define dois paradigmas, G2 e G3. No paradigma G2, as validações são hipotético-dedutivas, baseadas em resultados formais da geometria Euclideana, como postulados, definições, axiomas, proposições e teoremas. Os objetos são teóricos e as validações, hipotético-dedutivas, que podem ser auxiliadas por algum desenho não particular.

No paradigma G3, temos uma geometria axiomática, em que tanto objetos como validações são obtidos com base em postulados, definições, axiomas, proposições e teoremas da Geometria estudada, sem auxílio de representações semióticas concretas. Entendemos que esse paradigma deve ser trabalhado em cursos Universitários.

O **QUADRO 4** apresenta um diagrama do modelo axiomático proposto por Parsysz.

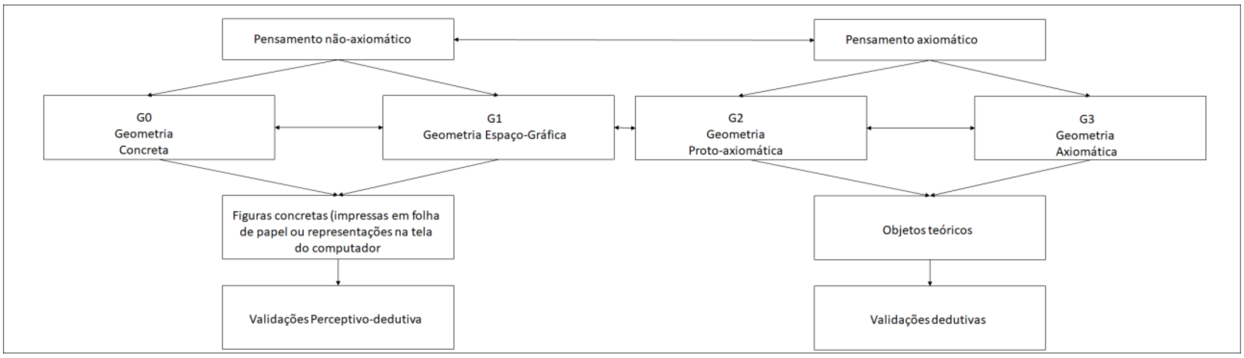
Quadro 4 – Modelo de pensamento axiomático




Fonte: Autor.

Assim como observado anteriormente, queremos que o pensamento geométrico transite entre o pensamento não-axiomático e o pensamento axiomático. Para facilitar a análise da classificação feita por Parsyzs, apresentamos o **QUADRO 5.**

Quadro 5 – Diagrama dos pensamentos não-axiomático e axiomático (PARSYSZ, 2006)



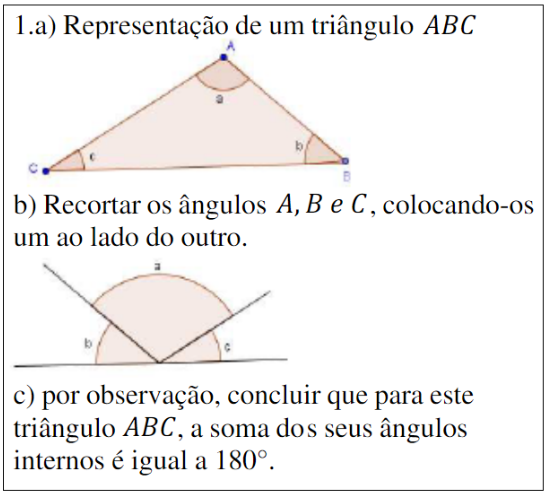

Fonte: Autor.

Segundo Parsysz (2006), na Escola Básica, os paradigmas G1 e G2 são importantes para a construção do conhecimento geométrico. Em G1, utiliza-se para resolver alguma tarefa, instrumentos de medida (percepção instrumental), seja utilizando instrumentos de medida ou software de geometria, e as validações são feitas por meio de observações visuais ou superposições. Dessa forma, mostrar por exemplo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, pode-se utilizar para isso um transferidor ou fazer construções em softwares de geometria que possibilitam medir ângulos. Em G2, a mesma tarefa é resolvida utilizando-se a noção de reta, ponto, segmento, círculo, cuja existência é garantida por definições, axiomas, propriedades e essa resolução é feita de forma dedutiva, com base nos axiomas e teoremas que fazem parte do conhecimento geométrico quanto da resolução do problema proposto. Ainda segundo o autor, o desenho é utilizado tanto em G1 quanto em G2 e é ele que fará com que esses dois paradigmas se confrontem e se completem.

Em Kawamoto (2016, p.51), encontramos um exemplo (Exemplo 1) de atividade que consiste em mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Para mostrar esse resultado utilizando-se das ideias do paradigma G1, os alunos poderiam apresentar a seguinte solução (ver esquema na FIGURA 6):

- Desenhar um triângulo qualquer ABC e marcar os três ângulos.
- Recortar os ângulos A, B e C, colocando-os um ao lado do outro, sem sobreposição;
- Por observação, pode-se concluir que, para este triângulo ABC, a soma dos ângulos internos é igual a 180º.

Figura 6 – Resolução no paradigma G1



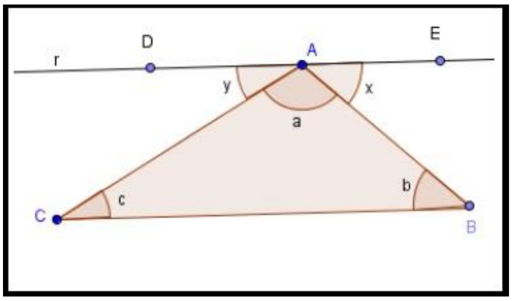

Fonte: (KAWAMOTO, 2016, p. 51)

Uma possível solução no paradigma G2-G1 poderia obedecer a seguinte ideia:

1) Considere um triângulo ABC qualquer;
2) Pelo vértice A, oposto ao lado $\overline{\boldsymbol{BC}}$, traçar uma reta r paralela à reta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ reta suporte ao lado $\overline{\boldsymbol{BC}}$, cuja existência e unicidade, lhe são garantidas por axioma.

Para um melhor entendimento necessitamos de uma representação e assim recorremos ao paradigma G1 para continuar a demonstração (ver FIGURA 7).

Figura 7 – Auxílio de uma representação para resolução




Fonte: (KAWAMOTO, 2016, p. 51)

Com o auxílio de uma representação, podemos seguir da seguinte forma: o ângulo externo com vértice em $\boldsymbol{A}$, e lado $\boldsymbol{A}$C e o ângulo $\boldsymbol{c}$ são congruentes. Da mesma forma, o ângulo externo com vértice em $\boldsymbol{A}$ e lado $\boldsymbol{AB}$ e o ângulo $\boldsymbol{b}$ são congruentes.

Exemplo 2: Inspirado no exemplo apresentado por Kawamoto (2016, p.52), devemos mostrar que um quadrado cuja medida do lado é igual a 10 $cm$ e um retângulo cujos lados medem 20 $cm$ e 5 $cm$, possuem áreas equivalentes, porém o perímetro não. Apresentamos duas soluções, uma em G1 e a outra em G2.

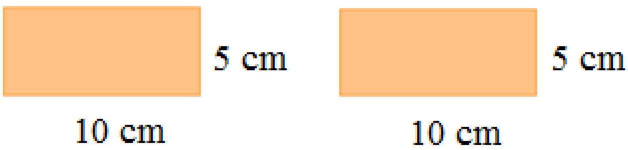
Figura 8 – Quadrado e retângulo com suas respectivas medidas


Fonte: Autor.

Inicialmente, uma possível solução em G1 seria desenhar em uma folha ambos os quadriláteros e recortá-los, FIGURA 8. Em seguida, utilizando algum instrumento de medida, mede-se o lado do quadrado e chega-se à conclusão que seu perímetro vale 40 $cm$. Em seguida, ainda utilizando o instrumento de medida, medem-se os lados do retângulo e assim é possível concluir que seu perímetro vale 50 $cm$, logo o perímetro do retângulo é maior que o perímetro do quadrado.

Para compararmos as áreas, podemos adotar o seguinte procedimento, cortamos o retângulo ao meio de tal maneira que resultem dois retângulos congruentes, com lados 10 $cm$ e 5 $cm$, assim como mostra a FIGURA 9.

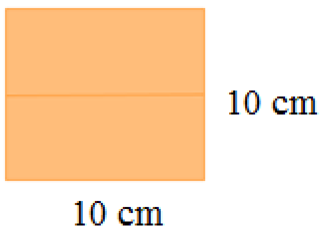
Figura 9 – Retângulos semelhantes




Fonte: Autor.

Se colocarmos estes dois retângulos sobre a região quadrada (FIGURA 9), sem superposição e sem deixar lacuna, é possível observar que cobrem a região quadrada, o que significa que têm a mesma medida de área. A FIGURA 10 ilustra o procedimento adotado.

Figura 10 – Retângulos semelhantes justapostos




Fonte: Autor.

Assim, mostramos visualmente, por meio de decomposição e composição de figuras planas, que o quadrado de lado 10 $cm$, e o retângulo de medidas 20 $cm$ e 5 $cm$ possuem a mesma medida de área.

Para mostrar em G2, que ambos os quadriláteros possuem mesma medida de área, porém perímetros distintos, podemos recorrer ao uso da fórmula do cálculo da medida de área. Sabendo a medida dos lados do quadrado, temos então que a medida de sua área é igual a 100 $cm^2$. Por outro lado, a medida da área do retângulo é calculada fazendo o produto da medida de seus lados, obtendo assim, área igual a 100 $cm^2$, o que já é suficiente para mostrar que ambas as áreas são equivalentes.

Para o perímetro, sabemos que o perímetro de um polígono regular é igual à soma da medida de seus lados, assim o quadrado possui perímetro igual a 40 cm e o retângulo possui perímetro igual a 50 cm. Caracterizando assim, dois quadriláteros de mesma área, mas de perímetros distintos.

Um terceiro exemplo pode servir para mostrar como pode-se articular entre os paradigmas G1 e G2.

Exemplo 3: Sejam A e B são duas figuras geométricas planas quaisquer. Decida se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, dê um argumento que justifique sua resposta. Se o perímetro de A é menor do que o perímetro de B, então a medida da área de A é menor do que a de B. Uma possível solução utilizando as ideias do paradigma G1, seria apresentar duas figuras planas A e B, de modo que o perímetro de A seja menor que o perímetro de B, e a medida da área de A seja maior que a medida da área de B. Mostrando assim, que se trata de uma afirmação falsa.

Inicialmente pode-se construir dois retângulos congruentes, um deles denominamos por A e o outro, fazemos um recorte com formato de triângulo, e chamando-o de figura B, a FIGURA 11 apresenta as duas figuras A e B.

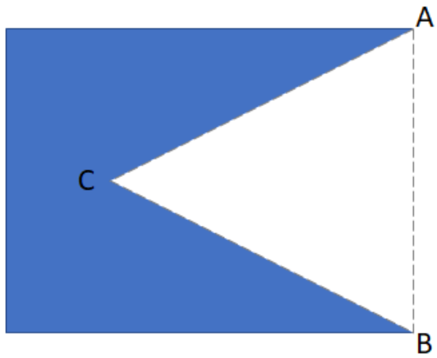
Figura 11 – Retângulo (A) e Pentágono (B)

Fonte: Autor.

Utilizando uma régua para medir ambos os perímetros, pode-se afirmar que o perímetro de A é menor que o perímetro de B, mas claramente, a medida da área de A é maior que a de B. Sendo assim, a afirmação feita é falsa.

Em G2, pode-se apresentar as mesmas figuras, e assim, os alunos trabalham com G2 e G1, porém, mostrando que três dos vértices do pentágono formam um triângulo e, portanto, a medida de AB é menor que a soma das medidas de AC e CB, FIGURA12.

Figura 12 – Pentágono (B)




Fonte: Autor.

Embora o contraexemplo para a afirmação inicial pareça simples, ele requer a quebra de alguns paradigmas nos quais, alunos da Escola Básica, possam estar presos. Segundo D'Amore e Fandiño (2006), alunos da Escola Básica Italiana bem como professores, tendem a firmar que se trata de uma afirmação verdadeira, e uma das possíveis causas dessa *misconception* estão ligados a dois fatores, segundo o autor. A pobreza de um repertório figural que contemple polígonos não convexos e o costume de se trabalhar com transformações homotéticas. Isto é, para alunos que pensam em polígonos convexos e pensam em modificar essas figuras por meio de homotetia, estes tendem a achar a afirmação verdadeira, pois nesse caso particular, ao aumentar a área de uma figura como o quadrado, por exemplo, o perímetro também aumenta. O mesmo vale para diminuir.

## 5.2. Imagem de conceito e definição de conceito

De acordo com Tall e Vinner (1981), sabe-se empiricamente que indivíduos constroem imagens de um determinado conceito de maneira que essas não sejam necessariamente coerentes e consistentes, além disso, tais imagens podem sofrer influência de experiências anteriores uma vez que estes conceitos podem ser revisitados sobre novos contextos, como, por exemplo, a imagem de conceito de número.

A imagem de conceito, ou imagem conceitual, ainda segundo os autores, está ligada a estrutura cognitiva do indivíduo, que no caso da Matemática, é acessada pela diversidade de ideias junto a experiências acumuladas por esse indivíduo e que estão associadas ao conceito. Ela é constituída de todas as imagens mentais, representações visuais, verbalizações e impressões associadas ao conceito. Quanto maior for a quantidade de ideias ligadas a esse conceito, mais favorável será a formação da imagem de conceito.

Segundo Cornu (1981, apud Tall, 1988, p.1) "Dentro da atividade matemática, as noções matemáticas não são usadas apenas de acordo com sua definição formal, mas também por meio de representações mentais que podem diferir para diferentes pessoas[5]" (Tall, 1988, p.2, tradução nossa). O autor ainda revela que é possível um indivíduo utilizar corretamente definições formais, inclusive aplicar corretamente fórmulas matemáticas, porém, ao mesmo tempo, pode desenvolver conflitos entre imagens de conceito diferentes.

A definição de conceito, segundo o autor, é o texto escrito em palavras pelo qual um indivíduo "define" um conceito. Esta definição pode ou não ser coerente com a definição formal, aceita pela comunidade matemática.

Ainda segundo o autor, a compreensão de um conceito está ligada à formação de uma imagem de conceito associada ao objeto de conhecimento. Quando se apresenta um conceito matemático por meio de uma definição formal, é esperado que o aprendiz construa imagens conceituais associadas a essa definição.

Com base na teoria de Tall e Vinner, é possível investigar elementos presentes na imagem de conceito e qual a definição de conceito de um grupo de alunos que cursam os anos finais do Ensino Fundamental, em relação área e ao perímetro de figuras planas.

Em conversas informais em sala de aula, quando perguntamos aos alunos "Em relação à área de uma figura plana, o que lhe vêm à mente? E ao perímetro?", isto é, quando investigamos a imagem de conceito individual de um grupo de alunos, as respostas, em sua maioria, estão ligadas a uma fórmula. Em relação à área, é recorrente respostas como "base vezes altura" ou "base vezes altura, dividido por dois". Já em relação ao perímetro, é quase unanimidade a resposta "soma dos lados". Assim podemos perceber que, para esse grupo pesquisado, a imagem de conceito individual, não possui nenhuma associação topológica, isto é, não existem menções relacionadas a medida de uma superfície. Também não há menções relacionadas as dimensões utilizadas na medida da área e do perímetro, assim como também não há menções ligadas as variações entre área e perímetro.

[5] Within mathematical activity, mathematical notions are not only used according to their formal definition, but also through mental representations which may differ for different people.

A partir das ideias de Tall e Vinner (1981), pretende-se elaborar algumas questões e propô-las a um grupo de alunos que estão nos anos finais do Ensino Fundamental. Essas questões deverão ser tais que permitam analisar as concepções que cada participante tem, individualmente, de área e de perímetro e da relação entre esses conceitos. Com a análise das respostas e, eventualmente, de entrevistas individuais, espera-se responder duas questões de pesquisa, "As Imagens de Conceito individuais de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II referentes a área e ao perímetro de figuras planas contemplam concepções numérica, geométrica e de grandeza?". "Os participantes articulam bem uma geometria de observação e uma geometria de demonstração?".

# 6. CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

## 6.1. Entrevista reflexiva

Um dos objetivos desse projeto é procurar analisar qual imagem de conceito é evocada por estudantes do Ensino Fundamental – Anos finais, em relação à área e ao perímetro de figuras planas e quais convicções carregam a respeito desses conceitos. Assim, pretendemos aplicar um questionário que seja possível fazer o entrevistado verbalizar tais ideias. Mas que também seja possível verificar se esse grupo de estudantes sabe articular bem entre uma geometria de observação e uma geometria de demonstração. Para isso será utilizada a entrevista reflexiva.

Na entrevista reflexiva, há a possibilidade de construção de conhecimento, conforme destaca (Szymanski, 2011, p.10), à medida que a interação entre entrevistado e entrevistador avança, o conhecimento vai se organizando junto com uma reflexão.

A reflexividade tem o sentido de reflexão sobre a narrativa do entrevistado pelo entrevistador, este último submete tal compreensão ao entrevistado, garantindo assim a fidedignidade da informação, ou ainda, o aprimoramento dela. Assim, é comum se ter no mínimo, dois encontros com o entrevistado. Ainda é importante destacar que o objetivo da entrevista reflexiva deve estar claro assim como as informações que se pretende obter.

A entrevista reflexiva é composta por seis elementos principais: aquecimento, questão desencadeadora (também denominada como questão geradora), a expressão de compreensão, sínteses, questões de esclarecimento, focalizadora, aprofundadora e devolução (Szymanski, 2011, pp 25-60). Ainda segundo a autora, cada uma dessas partes pode ser definida da seguinte forma:

O **aquecimento** é o período posterior ao início da entrevista. É o momento em que o entrevistador dita o clima da entrevista, podendo ser formal ou informal. Também é o momento no qual o entrevistador pode obter informações pessoais do entrevistado como idade, escolaridade, material didático de matemática utilizado etc.

A **questão desencadeadora** trata do tema que se deseja investigar. Ela é o ponto de partida da fala do entrevistado, assim, os pontos em que se deseja investigar devem ser focadas. O objetivo da questão é fazer com que o entrevistado narre livremente sobre o tema que foi introduzido. Segundo (Szymanski, 2011, pp 31-32), a elaboração da questão desencadeadora deve levar em consideração alguns critérios como:

**1)** Objetivos da pesquisa;
**2)** Amplitude da questão, permitindo o desenvolvimento de informações importantes ao tema proposto;
**3)** Evitar a indução de respostas;
**4)** Termos utilizados na pergunta, que devem pertencer ao universo linguístico do entrevistado;
**5)** Escolha do termo interrogativo. Questões onde são utilizadas o "porquê", tendem a obter respostas indicadoras de causalidade. Já questões que utilizam "como", apresentam respostas narrativas/descritivas.

Para evitar novas formulações no momento da entrevista, sugere-se que a questão desencadeadora seja elaborada de diferentes formas para ser utilizada no caso de falta de entendimento por parte do entrevistado durante a entrevista. (Szymanski, 2011, pp 30-31).

A **expressão da compreensão** tem como finalidade, fazer com que o entrevistador verbalize a compreensão da fala do entrevistado. Importante destacar que compreensão e interpretação são possuem o mesmo sentido conforme alerta a autora. A compreensão é uma síntese da informação recebida, referente ao conteúdo verbalizado. (Szymanski, 2011, p. 37). Não podendo assumir a forma de uma avaliação pessoal do entrevistador sobre o entrevistado. Pode-se usar esse momento para que o entrevistado tenha oportunidade de fazer o entrevistado manter o foco do problema estudado, formular questões esclarecedoras, questões focalizadoras e de aprofundamento.

A **síntese** é feita de tempos em tempos e tem a finalidade de fornecer uma sinopse na qual o entrevistador vai direcionando o rumo da entrevista com base na fala do entrevistado. Durante esses momentos, o entrevistador poderá se aprofundar em determinados pontos no discurso do entrevistado. As sínteses podem ainda ser úteis para levar a entrevista para o(s) foco(s) que se busca assim como podem auxiliar no encerramento de uma divagação.

As **questões de esclarecimento** são questões com o objetivo de deixar claras as ideias de um discurso confuso ou quando os fatos narrados junto às ideias apresentadas, não estão claros por parte do entrevistador. As questões de esclarecimento devem ser analisadas paulatinamente com objetivo de se identificar os momentos em que o discurso do entrevistado era estruturado e em qual era elaborado. Elas ainda devem ser avaliadas quanto a forma em que foram respondidas. No caso de respostas truncadas ou duvidosas, pode indicar ocultamentos de informações.

As **questões focalizadoras** possuem um papel importante na entrevista quanto a digressão é prolongada. Essas questões têm o objetivo de trazer o discurso do entrevistado para o foco que se quer. Os momentos e tipos de digressão pode contribuir com informações relevantes na análise da entrevista.

As **questões de aprofundamento** são perguntas que podem ser feitas nos momentos em que o discurso do entrevistado passa pelo foco superficialmente, mas trazem a possibilidade de uma investigação mais aprofundada. Os itens que foram aprofundados e os que foram tratados de maneira superficial, podem trazer informações relevantes para a análise da entrevista.

A **devolução** é o momento em que o entrevistador, retorna ao entrevistado, a compreensão descrita do discurso feito. O material (transcrições, pré-análise, considerações, conhecimentos, etc.) pode ser apresentado ao entrevistado para que este o valide, podendo ainda apresentar modificações geradas pelos momentos de reflexão (durante a primeira entrevista, no período entre uma e outra entrevista e na comparação de sua interpretação). Importante destacar que o procedimento da segunda entrevista, segue os mesmos procedimentos da primeira.

#### 6.1.1. A questão desencadeadora

Assim como já descrito anteriormente, o objetivo da entrevista, neste projeto, é procurar entender as imagens de conceito, definições de conceito e as concepções que os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental carregam consigo a respeito dos conceitos de área e de perímetro de figuras geométricas plana.

Com base nas ideias apresentadas anteriormente, inspirado pela pesquisa de D'Amore (2006) e Tall e Vinner (1981), e ainda obedecendo aos preceitos de construção da questão desencadeadora sugeridos por Szymanski (2011), as questões propostas têm objetivo de mensurar os seguintes aspectos do entrevistado:

- A definição de conceito de área e de perímetro que cada um carrega consigo;
- A imagem de conceito e concepções que os entrevistados apresentam em relação à área e ao perímetro;
- Verificar se esses participantes articulam uma geometria de observação e uma geometria de demonstração.

No capítulo a seguir, são apresentadas as questões que compõem os conjuntos das atividades 1 e 2.

## 7. CONJUNTO DE ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentamos o conjunto de atividades que elaboramos e utilizamos, por meio de entrevistas reflexivas individuais, com três alunos do Ensino Fundamental II anos finais.

Nosso objetivo, conforme colocamos na secção 5, é investigar se as "imagens de conceito" individuais evocadas pelos participantes, são suficientes para que não confundam os conceitos de área e de perímetro de figuras planas, e também explorar as "definições de conceito" de área e perímetro. Também é nosso objetivo, com esta investigação, verificar se os participantes, principalmente os dos anos finais do Ensino Fundamental II, articulam uma geometria de observação e uma geometria proto-axiomática (geometria de demonstração). Os aspectos teóricos defendidos por Tall e Vinner (1981) sobre definição de conceito e imagem de conceito, e a teoria de Parzysz (2006) sobre a necessidade de estudantes evoluírem de uma geometria de observação para uma geometria de demonstração, ao longo da escolaridade, são apresentados, com detalhes, na secção 4.1, no caso pesquisado por nós; porém, para facilitar a leitura deste capítulo, acreditamos que seja importante revisitar, de forma geral, esses aspectos teóricos.

As Imagens de Conceito que buscamos explorar são as relacionadas aos conceitos de área e de perímetro. Segundo Tall e Vinner (1981), a Imagem de Conceito está ligada à estrutura cognitiva do indivíduo e à construção de imagens mentais de um determinado conceito. Estas podem não ser coerentes e consistentes e sofrem a influência de todas as experiências vividas pelo indivíduo, ao longo da vida. Ainda segundo o autor, a Definição de Conceito está relacionada ao conjunto de palavras utilizadas pelo indivíduo para definir um determinado conceito. Na nossa experiência com turmas do Ensino Fundamental II e anos finais do Ensino Médio, é comum encontrar como Definição de Conceito, uma verbalização do tipo "área e perímetro é aquela coisa de somar ou multiplicar", quando pedimos a um aluno que defina a área e o perímetro de uma figura geométrica plana.

A par disso, o conjunto de atividades propostas foi desenvolvido sob grande influência dos quatro Paradigmas Geométricos desenvolvidos por Bernard Parzysz (2006). Tais paradigmas são divididos em dois grupos, geometrias não axiomáticas (geometria concreta e geometria espaço-gráfica) e geometrias axiomáticas (geometria proto-axiomática e geometria axiomática) e o ensino de geometria deveria evoluir de uma “geometria concreta” para uma “geometria axiomática” , ou melhor dizendo, de uma geometria de observação, caracterizada pela forma com que os objetos são percebidos, considerando formas, cores, tamanhos, entre outras características ou propriedades, para uma geometria de demonstração, em que os objetos são abstratos e a existência destes é garantida pelo modelo de geometria em questão. Ainda segundo o autor, nesse paradigma, os modelos estudados vão além do modelo Euclideano, como, por exemplo, a Geometria Hiperbólica. Dessa forma, Parszyz defende que as práticas pedagógicas, nas séries iniciais, deveriam começar com uma modelagem do espaço físico e, ao longo dos anos de escolaridade, desenvolver o estudo de objetos abstratos. De acordo com este pesquisador, essa evolução pode ser “dividida” em quatro paradigmas, G0 (geometria concreta), G1 (geometria espaço-gráfica), G2 (geometria de demonstração) e G3 (geometria axiomática). Neste projeto, consideramos possíveis apenas os paradigmas G0, G1 e G2 e deixamos o G3 para o Ensino Superior.

Destacamos ainda que trabalhos como, Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Facco (2003), D’Amore e Fandiño (2006), Melo (2009), Ferreira (2010) inspiraram o desenvolvimento do conjunto de atividades aqui apresentadas. Além desses estudos, procuramos seguir as recomendações da Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental (BNCC, 2017) e não podemos deixar de citar a troca de ideias, críticas e sugestões recebidas pelas participações em congressos como EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2018) e ENEM (Encontro Nacional em Educação Matemática, ANO 2019), os Seminários e os Encontros do MPEM (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME USP, 2018 e 2019) e experiências vivenciadas em alguns testes que realizamos com alunos regularmente matriculados nos anos finais do Ensino Fundamental II e anos iniciais do Ensino Médio de duas escolas públicas da capital de São Paulo.

Os resultados desses testes nos mostraram equívocos e grandes dificuldades relacionadas aos conceitos de área e de perímetro como medidas, apresentados por grande parte dos alunos participantes. Ousamos utilizar o adjetivo grande porque essas dificuldades incluem, por exemplo, a utilização da fórmula de cálculo da medida da área do triângulo para o cálculo da medida da área de quadrados e retângulos, bem como utilizar a fórmula do cálculo de área de um retângulo para a obtenção da medida da área de um triângulo. Uma vez que os conceitos de área e de perímetro são trabalhados como medida ao longo de todo o Ensino Fundamental, os resultados que obtivemos nos testes, além de nos causar preocupação com a falta de entendimento com esses conceitos, fez com que revisássemos este nosso estudo.

A ideia de elaborar uma atividade que favorece o entendimento de grandezas como superfície e fronteira, é inspirada em estudos como os de Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Facco (2006), que defendem o estudo de "área" enfatizando-a como grandeza. Incluímos o estudo do perímetro também e com ênfase, a ideia deste como grandeza.

Para a utilização do conjunto de atividades, planejamos realizar entrevistas reflexivas, (SZYMANSKI, 2011), individuais, por permitirem a observação direta de erros e acertos do participante e também, principalmente, pela troca de aprendizagem, do entrevistado, com a discussão das atividades e do entrevistador/pesquisador, que acompanhará as dúvidas do entrevistado e, assim, poderá descobrir a "origem" de tais dúvidas. Ao longo das entrevistas, espera-se que o conhecimento possa ir se organizando junto com a linguagem utilizada, e que a cada item discutido e refletido, os conceitos de superfície e fronteira possam ser consolidados, contribuindo assim com a aprendizagem de área e de perímetro e suas diferenças.

As entrevistas ocorreram em dois dias distintos, separados por 7 dias, com cada um dos participantes. Na primeira, foi utilizada a atividade 1 e na segunda, a atividade 2.

### 7.1. Atividades propostas para o primeiro dia entrevista

As figuras a seguir, (FIGURA 13, FIGURA 14, FIGURA 15, FIGURA 16, FIGURA 17, FIGURA 18, FIGURA 19, FIGURA 20, FIGURA 21, FIGURA 22, FIGURA 23, FIGURA 24 e FIGURA 25) apresentam o conjunto denominado Atividade 1. Todas compõem o conjunto de atividades que foram aplicadas no primeiro dia de entrevista.

Figura 13 – itens (a) e (b) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

**Atividade 1**

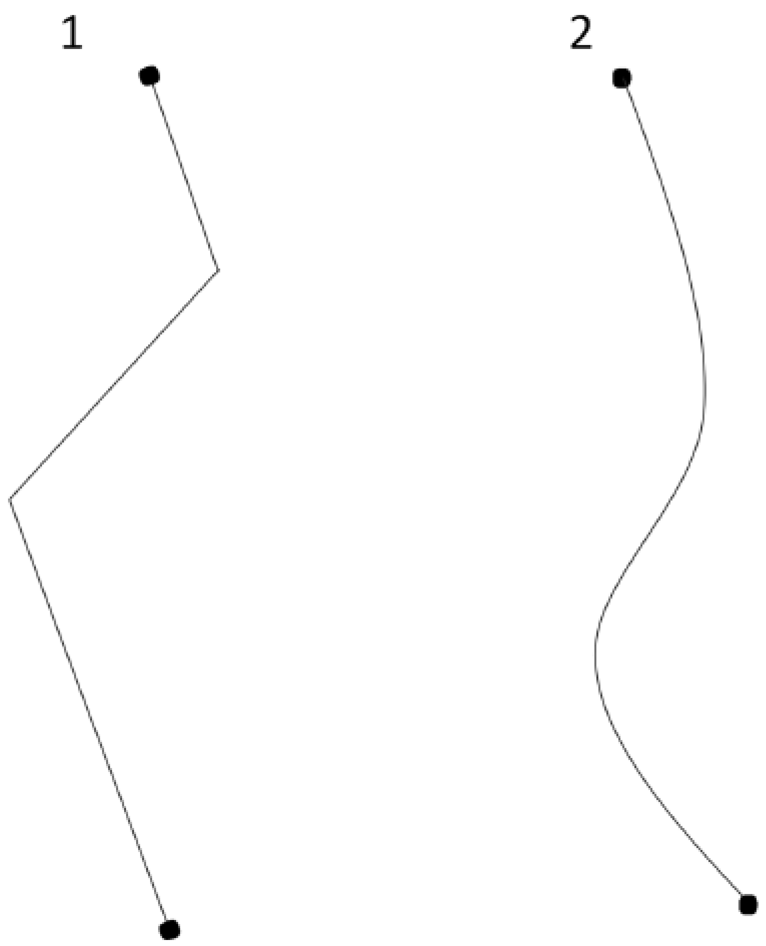
a) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.

b) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.

Fonte: Autor.

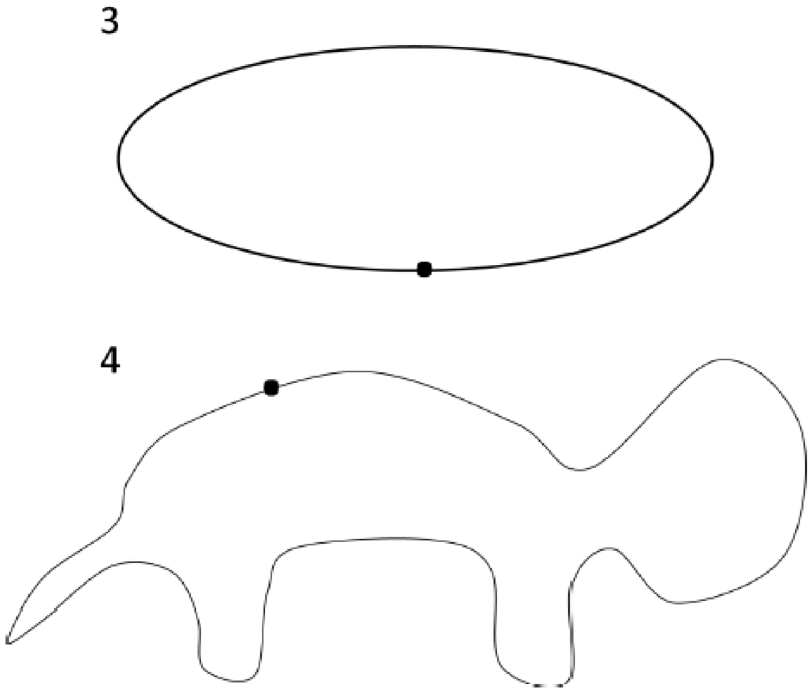
Figura 14 – item (c) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

c) Observe e reproduza os caminhos a seguir utilizando os fios de barbante disponíveis. Em seguida, responda às questões.




Fonte: Autor.

Figura 15 - continuação do item (c), itens (d), (e), e (f), ambas da Atividade 1, primeiro dia de entrevista




d) Há diferenças nos caminhos? Qual(is) ?

e) Algum caminho delimita uma região do plano?

f) Qual desses caminhos você lembra de ter visto nas aulas de Matemática na escola?

Nota: "Um ponto é interior quando qualquer semirreta traçada por ele encontra a curva em um número **ímpar** de pontos."

"Um ponto é exterior quando qualquer semirreta traçada por ele encontra a curva em um número **par** de pontos."

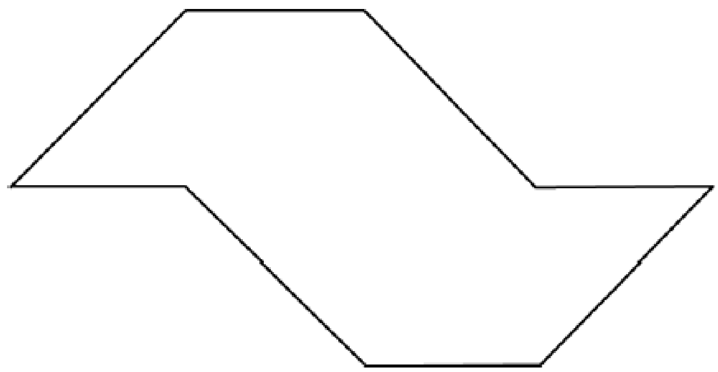
Fonte: Autor.

Figura 16 - itens (g), (h) e (i), ambas da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

g) Você recebeu uma folha de papel que representa uma região limitada plana e alguns colares de barbante que representam curvas fechadas. Escolha dois desses colares e use-os sobre a folha, à vontade. Crie duas situações que você considera diferentes. Justifique.

h) Em cada uma das situações que você criou, destaque a região interior e a região exterior dos desenhos formados com os colares de barbante.

i) O desenho a seguir representa um mapa estilizado do Estado de São Paulo.



i.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de São Paulo.

i.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de São Paulo.

i.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de São Paulo.

Fonte: Autor.

Figura 17 - item (j) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

j) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado de Goiás e do Distrito Federal. Lembre-se que o Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás.


j.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de Goiás.

j.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de Goiás.

j.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de Goiás.

Fonte: Autor.

Figura 18 - item (k) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

k) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado brasileiro de Goiás e do Distrito Federal.

k.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Distrito Federal.

k.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Distrito Federal.

k.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Distrito Federal.


Fonte: Autores

Figura 19 - item (l) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

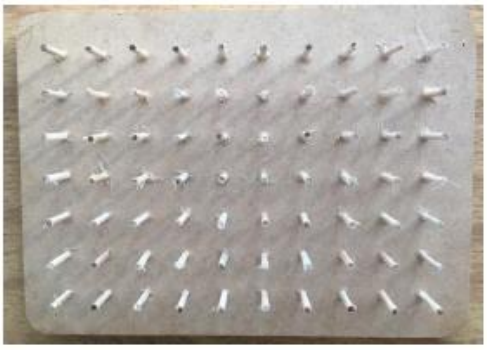
l) Um aluno representou o Estado de Goiás conforme o mapa estilizado abaixo, sem o Distrito Federal. O que o Estado de Goiás ganharia ou perderia se o mapa estivesse correto?


Resposta:

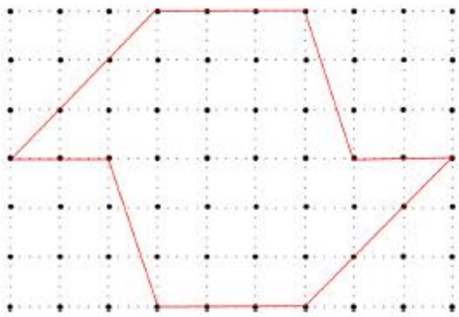
Fonte: Autor.

Figura 20 - item (m) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

O geoplano é um material educativo, criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno em 1961. É formado por uma placa, geralmente de madeira, sobre a qual é marcada uma malha quadriculada ou pontilhada e, em cada um dos pontos da malha é fixado um pino. Com a ajuda de um barbante ou linha, pode-se "desenhar" sobre o geoplano, utilizando os pinos.



m) Reproduza no geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de São Paulo de acordo com o mapa estilizado do item l.



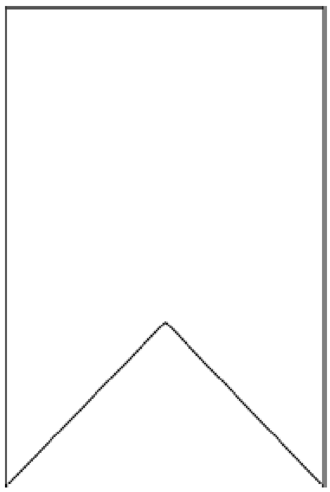
No geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de São Paulo? E a fronteira? E a região externa?

Fonte: Autor.

Figura 21 - itens (n) e (o), ambas da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

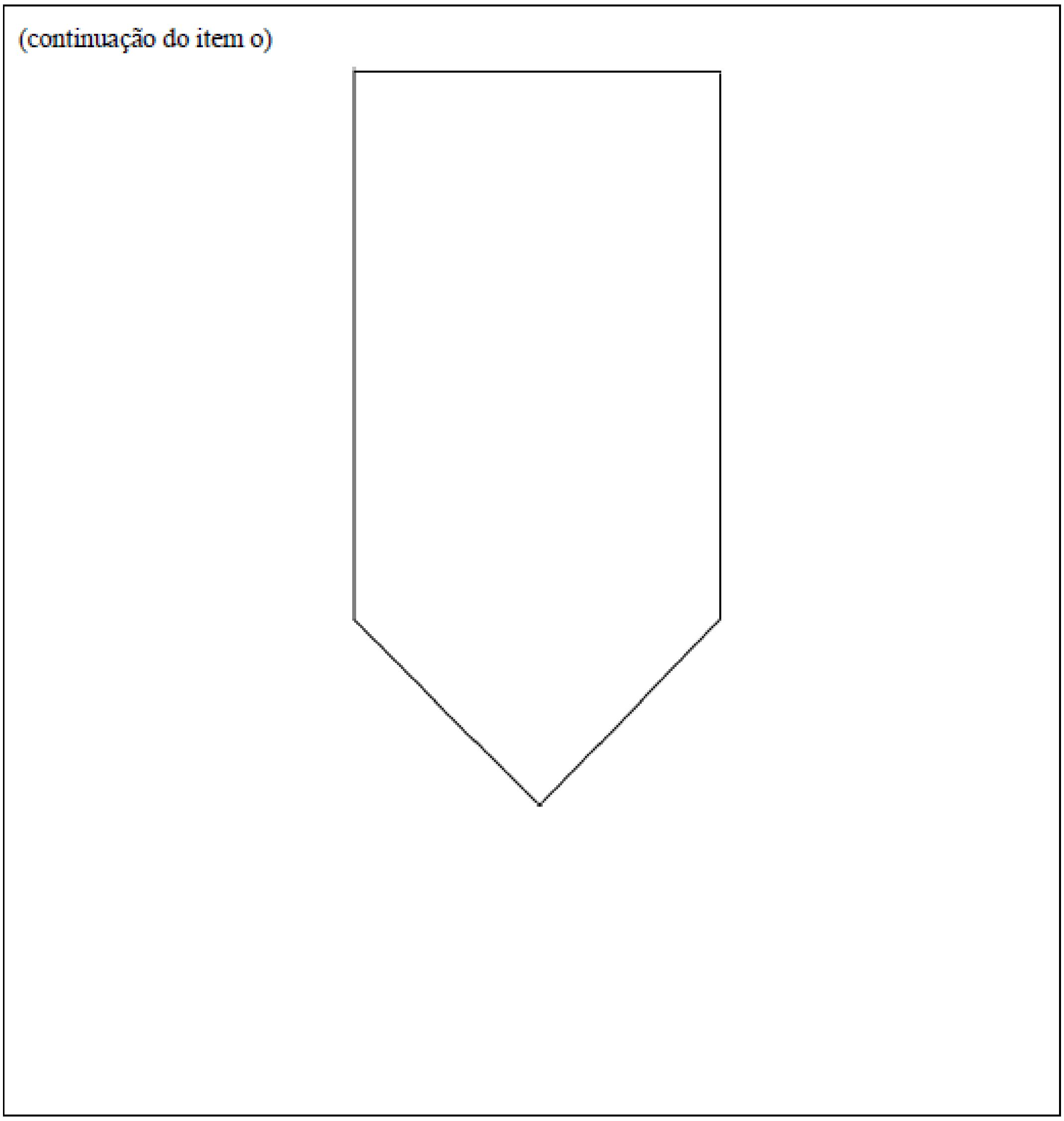
n) Reproduza no geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de Goiás, de acordo com o mapa estilizado do item j.
No geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de Goias? E a fronteira? E a região externa?

o) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir. Em seguida, pinte com caneta verde o interior de cada figura. O que podemos dizer sobre as regiões internas? E sobre as fronteiras?



Fonte: Autor.

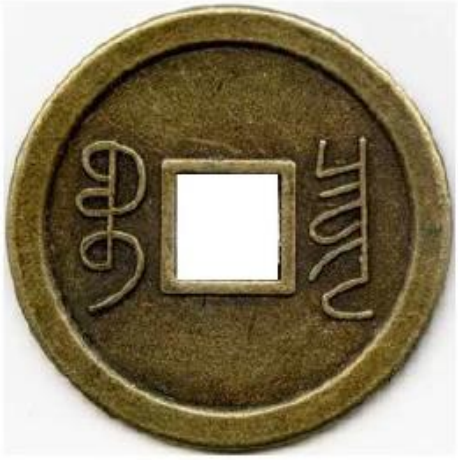
Figura 22 - item (o) (continuação) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista




Fonte: Autor.

Figura 23 - item (p) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

p) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir (moeda japonesa e moeda chinesa). Em seguida, pinte o interior de cada figura.



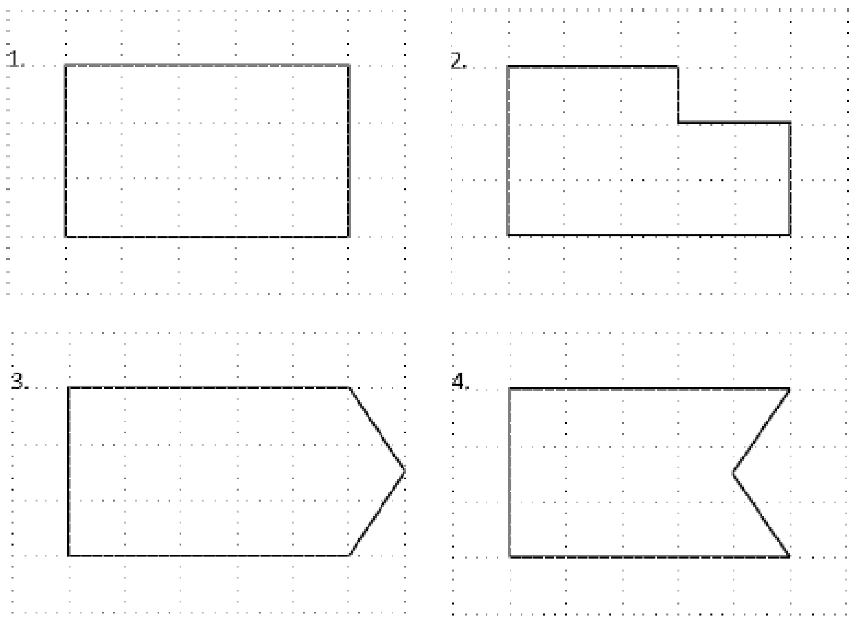
Moeda Chinesa Feng Shui

Moeda Japonesa de 5 Ienes

Fonte: Autor.

Figura 24 - item (q) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

q) Imagine que os contornos de cada desenho abaixo foram colados com barbante.




q. 1) Quais utilizariam a mesma quantidade de barbante? Justifique.

Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e geoplano).

q.2) Quais utilizariam mais barbante? Justifique.

Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e geoplano).

Fonte: Autores

Figura 25 - item (r) da Atividade 1, primeiro dia de entrevista

r) Durante essa atividade, trabalhamos com diversos desenhos. Para nosso próximo encontro, traga alguns recortes ou fotos impressas de desenhos que contenham buracos e que representem situações que você encontra fora da escola.

Fonte: Autor.

Uma vez apresentado o conjunto de itens que compõem o que denominamos Atividade 1, no que segue apresentamos uma análise didática dessas questões.

## 7.2. Análise dos itens da Atividade 1 (Primeiro dia de entrevista)

Com a Atividade 1, temos por objetivo a manipulação e a compreensão dos conceitos de região interna ou superfície e fronteira de figuras planas. Utilizamos figuras planas formadas por caminhos curvos e caminhos poligonais, desenhados em papel A3, lápis, canetinha colorida, barbante e o Geoplano, e convidamos o participante a trabalhar nos paradigmas G0-G1, mencionados na seção anterior. Escolhemos desenhos e caminhos não usuais, isto é, que não encontramos em livros das coleções didáticas de Matemática, como, por exemplo a face da moeda Chinesa FengShui, cuja superfície é delimitada por um caminho circular e uma curva retangular (ver FIGURA 23).

Para a resolução da atividade, como já mencionado, colocamos à disposição do participante folhas tamanho A4, com o enunciado dos problemas, barbante, cola, tesoura, lápis preto, caneta de cor roxa, caneta de cor verde, borracha, Geoplano, folhas de sulfite A3. Importante destacar que embora um pedaço de barbante não seja unidimensional, o utilizamos como uma representação física de caminhos curvos e poligonais, abertos e fechados, para que o participante possa trabalhar de forma concreta com estes e outros conceitos. Assim, partimos dos paradigmas G0-G1 e, ao fim do conjunto de atividades, trabalhamos sobretudo no paradigma G2. Essa mesma ideia segue quando convidamos o participante a manipular uma folha de papel ou o Geoplano, para representar um plano ou parte dele, bem como a região interna de uma figura plana.

Ao longo das atividades, decidimos não utilizar o termo "área" e em seu lugar utilizamos "região interna". O que motiva essa troca é a busca por uma abordagem do conceito de área como grandeza, conforme discutido na secção 2.2 de nossa Dissertação, o que não significa que não trabalhamos o conceito de área como medida. Bellemain e Lima (2010) defendem que o uso popular da palavra área possui diferentes sentidos, diferentes do sentido Matemático, o que pode gerar conflitos na compreensão do conceito.

> O sentido que a palavra área vai tomar na aula de Matemática entra em conflito com esse uso da palavra. Vamos supor que temos um terreno de 15 metros de frente por 20 metros de fundo. Outro terreno com as mesmas dimensões, localizado no bairro vizinho, tem a mesma área (no sentido matemático), mas não é a mesma área (no sentido da expressão vende-se esta área). Mais ainda, um terreno com 10 metros de frente e 30 metros de fundo, mesmo não tendo as mesmas dimensões, terá a mesma área que o primeiro. Alguns alunos vivenciam um conflito entre os sentidos que as palavras têm na vida cotidiana e aqueles que elas possuem nas aulas de Matemática. Por isso, você colega professor, deve ter muita clareza sobre os sentidos matemáticos e sobre a possibilidade de os alunos confundi-los com os outros sentidos. (BELLEMAIN.; LIMA, 2010, p.188)

Com a Atividade 1 aqui proposta, procuramos contribuir também no entendimento de área como uma superfície limitada no plano (concepção geométrica de área).

Utilizamos o termo fronteira para nos referir ao(s) contorno(s) que delimitam regiões do plano, objetivando uma abordagem do perímetro como grandeza e porque acreditamos que esse termo, na Educação Básica, esteja ligado a noções usadas em aulas de Geografia, o que pode auxiliar a aprendizagem do conceito, como grandeza e/ou como medida e por ser um termo popular, tanto dentro da sala de aula como fora dela.

Em toda a Atividade 1, propomos a comparação entre superfícies, ou regiões internas, e fronteiras de figuras planas, sem que seja necessária a utilização de uma medida para essas grandezas.

**Os itens (a)** e **(b)**

O objetivo dessas atividades, ver FIGURA 13, é propor que o participante apresente suas ideias referentes a definição de conceito de área de uma figura plana (item a) e definição de conceito de perímetro de figura plana. Quando um indivíduo define verbalmente um objeto matemático, utilizando para isso suas próprias palavras, segundo Tall e Vinner (1981), à essa definição denominamos por definição de conceito. Normalmente a definição de conceito difere da definição matemática formal. Assim como já apresentamos anteriormente, quando um participante apresenta uma definição de conceito que contempla concepções geométrica, numérica e de grandeza, denominamos que este possui uma estrutura cognitiva total suficiente, em relação ao conceito de área.

**O item (c)**

Com o item (c), (ver FIGURA 14), primeira atividade proposta, temos como objetivo convidar o participante a reproduzir caminhos abertos e fechados no plano, com a ponta de um lápis ou um pedaço de barbante para traçar ou cobrir, uma única vez, a curva apresentada. No caminho aberto, subitens 1 e 2, parte-se de um ponto e chega-se a outro, ambos distintos e, no caminho fechado, subitens 3 e 4, parte-se de um ponto e chega-se ao mesmo ponto. A forma de desenvolvimento da atividade segue uma abordagem concretivista, nos paradigmas G0-G1, isto é, o participante desenvolve a atividade a partir de situações concretas.

Neste item (c), subitem 2, o participante é convidado a interagir com caminhos curvos, pouco explorados nos livros didáticos que analisamos, que enfatizam o conceito de linha poligonal fechada. Esperamos que, com os subitens 1, 2, 3 e 4 do item (c), o participante possa manipular, reconhecer e diferenciar caminhos abertos e fechados, curvos e poligonais, e adicionar, à sua imagem de conceito, essa experiência.

Importante destacar que, o formato da figura do subitem 4, atividade (c), traz a possibilidade do participante manipular uma figura geométrica não convexa, escolha nossa porque, ao longo das atividades propostas, tentamos apresentar um conjunto de figuras geométricas que fogem do que convencionamos ser um conjunto de figuras usuais (amplamente trabalhadas na Educação Básica), formado por quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, losangos e circunferências. As figuras geométricas não convexas são pouco exploradas nos livros didáticos.

Destacamos ainda que, por se tratar de uma entrevista reflexiva, elementos que permeiam cada atividade podem ser explorados pelo entrevistador. Essa troca de ideias pode favorecer o enriquecimento da imagem de conceito do participante e auxiliar o entrevistador na descoberta de dificuldades e possíveis erros cometidos pelo participante. Como exemplo, no item (a), o entrevistador pode explorar, a definição de conceito de caminho do entrevistado.

**O item (d)**

Uma vez que no item (c) o aluno manipulou caminhos poligonais, curvos, abertos e fechados no plano, no item (d) temos como objetivo convidar o participante a refletir sobre a diferença entre os caminhos abertos e os fechados (ver FIGURA 15). É importante que o participante consiga distinguir um caminho fechado de um caminho aberto, uma vez que o objetivo principal, com essas atividades, é trabalhar com superfícies limitadas e suas fronteiras.

Para auxiliar na condução do item (d) da Atividade 1, optamos por dar uma definição formal de ponto interior a uma região, mas que atendesse ao que se espera na Educação Básica, evitando a definição formal, encontrada, por exemplo, em livros de Topologia. Procuramos uma definição que desse conta de grande parte dos exemplos trabalhados na Educação Básica. Em SANGIORGI (1974), tem-se que "Um ponto é interior quando qualquer semi-reta traçada por ele encontra a curva em um número ímpar de pontos". Quanto à definição de ponto exterior, ainda em SANGIORGI (1974) temos, "Um ponto é exterior quando qualquer semi-reta traçada por ele encontra a curva em um número par de pontos". Quando um ponto está sobre a curva, não pode ser caracterizado como interior e nem como exterior de uma região e o caracterizamos como um ponto de fronteira. Ainda que as definições do autor não sejam suficientes para caracterizar pontos interiores ou exteriores em casos exóticos, na verdade servem como exemplo de transposição didática, uma vez que grande parte do conjunto figural trabalhado na Educação Básica é formado por figuras não exóticas, como quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, losangos, circunferências, elipses (figuras todas convexas) e algumas regiões não convexas, mas para as quais é fácil verificar se satisfazem as definições que escolhemos.

**O item (e)**

No item (b) da Atividade 1, o participante foi convidado a refletir e discutir sobre a diferença entre caminhos fechados e abertos. No item (c), (ver FIGURA 15), o conceito de região interna (área como grandeza), é explorado, assim como o conceito de fronteira (perímetro tratado como grandeza). Nesta atividade, assim como mencionado nos objetivos pretendidos com o item (b), espera-se que o participante, durante a entrevista reflexiva, discuta sobre as ideias de regiões limitadas no plano, utilizando uma terminologia correta.

**O item (f)**

Alguns estudos como Baltar (1996), Facco (2003), D'Amore e Fandiño (2006), Melo (2009), Ferreira (2010) sugerem que, na Educação Básica, para o ensino de área de figuras planas, professores de Matemática devem trabalhar além do conjunto padrão de figuras (quadrado, retângulo, triângulo, trapézio, losango e circunferência). Dessa forma, o objetivo do item (d) (FIGURA 15) é verificar dentre os 4 tipos de caminhos propostos pelo item (a), qual(is) o participante recorda ter trabalhado em sala de aula.

Destacamos que as atividades (a), (b), (c), (d), (e) e (f) seguem os preceitos da fase de aquecimento proposto para uma entrevista reflexiva (SZYMANSKI, 2011), sobre a qual o leitor curioso poderá conferir detalhes na secção 6.3.

**O item (g)**

O que se pretende com o item (g), (ver FIGURA 15), é convidar o participante a criar duas figuras planas, cada uma delas com fronteiras formadas por duas curvas fechadas. Pretendemos incentivar o participante a criar uma delas de forma que uma das curvas está contida no interior da região determinada pela outra. O que denominamos por figura com buraco.

A aplicação do item (g) consiste em deixar com o participante uma folha de papel A3, que representa uma região limitada plana, junto com colares de barbante de diferentes tamanhos, que é uma maneira de fazer com que o participante trabalhe, nos paradigmas G0-G1, os conceitos de região interna e fronteira (área e perímetro). A experiência em sala de aula, com turmas do Ensino Fundamental II, anos iniciais, mostra que esses alunos apresentam dificuldade para entender o conceito primitivo de plano, especificamente entender sua infinitude. Diante desse fato, optamos por delimitar uma parte do plano e representá-la por uma folha de sulfite A3, disposta sobre uma região plana. É fundamental que, nessa atividade, o entrevistador incentive o participante a criar uma figura com buraco.

Contudo, é importante que o participante possa criar regiões limitadas e que estas fiquem registradas, para que possam ser discutidas no item seguinte.

**O item (h)**

Na atividade (g), o participante foi convidado a criar figuras com buracos (lembrando que convencionamos chamar por figuras com buracos partes do plano delimitadas por duas curvas fechadas, uma delas contida completamente no interior da região delimitada pela outra curva fechada). No item (h), (ver FIGURA 15), o participante deverá distinguir as regiões interna e externa das figuras planas criadas na atividade (g). É imprescindível que esses conceitos sejam discutidos e se reflita sobre eles para que se possa seguir com as demais atividades.

**O item (i)**

Com o item (i) (ver FIGURA 16), o objetivo é fazer com que o participante trabalhe nos paradigmas G0-G1, com os conceitos de região interna (área como grandeza), bem como com a fronteira (perímetro como grandeza) e seja capaz de distinguir a região interna do mapa (região que pertence ao Estado de São Paulo, pintado com uma caneta de cor verde), reproduza a fronteira (do Estado de São Paulo) com auxílio de um barbante, bem como ser capaz de destacar a região que não pertence ao Estado de São Paulo, pintada com uma caneta de cor roxa.

A atividade parte de um mapa estilizado do Estado de São Paulo, figura supostamente conhecida por participantes pertencentes a esse Estado, representado por uma curva poligonal fechada e impresso em uma folha de papel sulfite tamanho A4. Dessa forma será possível trabalhar, sob os paradigmas G0-G1, os conceitos de região interna e de fronteira. A ideia de buscar na Geografia elementos que pudessem auxiliar no estudo de região interna (área como grandeza) e de fronteira (perímetro como grandeza) surgiu da necessidade de se pensar em exemplos reais que fossem representações de figuras geométricas com buraco, caso do Vaticano, totalmente cercado pelo território pertencente a Roma. No Brasil, acontece algo semelhante, ao observarmos o Distrito Federal, cercado pelo Estado de Goiás; porém, para não trabalharmos diretamente com a região do Estado de Goiás, o que representa trabalhar com uma figura com buraco, acreditamos que fosse importante trabalhar inicialmente com a representação de uma figura plana sem buraco, é o que acontece quando consideramos o Estado de São Paulo.

**O item (j)**

Na atividade (j) (ver FIGURA 16), como mencionado no item (i), pode-se trabalhar os conceitos de região interna e de fronteira, sob os paradigmas G0-G1. Neste item, o participante continua a manipulação de mapas estilizados, desta vez, com a representação do Estado de Goiás que cerca totalmente o Distrito Federal, importante região brasileira que possui destaque em livros de História, Geografia, Atlas, na grande mídia e nas discussões políticas. O objetivo é convidar o participante a refletir sobre a região do Estado de Goiás, desconsiderando para isso a região pertencente ao Distrito Federal. Essa representação utilizando mapas estilizados, são representados por uma figura com buraco, objeto geométrico de interesse de nosso estudo.

Nesta atividade, uma nota é apresentada ao participante da atividade para lembrar de que o Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás.

**O item (k)**

Na atividade (k), (ver FIGURA 16), o participante trabalha sob os paradigmas G0-G1, manipulando o mapa do Distrito Federal com auxílio de barbante para representá-lo, canetinha de cor verde para representar sua região interna e canetinha de cor roxa para representar a região externa do Distrito Federal. Os conceitos de região interna e fronteira continuam sendo trabalhados, o que reforça o entendimento de figuras geométricas com buracos.

**O item (l)**

Com o item (l), (ver FIGURA 17), o objetivo é convidar o participante a refletir sobre a região que pertence ao Estado de Goiás, ora considerando o Distrito Federal, ora não e, pela comparação dos mapas, ver que enquanto, em um a região do Estado aumenta e o perímetro diminui e vice-versa. Esse fato não é obvio, assim como sugere o estudo de D'Amore e Fandiño (2006) e vivenciado por nós em nossa primeira atividade teste.

Julgamos possível afirmar que as atividades (i), (j), (k) e (l) cumprem um papel fundamental na Atividade 1, que é apresentar um exemplo que pode fazer parte do cotidiano do entrevistado e contrarie o senso comum descrito por D'Amore e Fandiño (2006), "Seja dado um polígono F, com determinado perímetro p e área A. Modificamos F: se p tende a aumentar, necessariamente A também aumentará (e vice-versa)". (BONOMI, D'AMORE et al., 2015, p. 123).

**O item (m)**

Antes de iniciar o item (m), o Geoplano é apresentado ao participante. O Geoplano é bastante utilizado em atividades em sala de aula que visam desenvolver de forma concreta o conceito de perímetro. Ele é formado por uma placa, normalmente feita de madeira, sobre essa placa, é fixado uma malha quadriculada, em cada ponto dessa malha é fixado um pino. Este objeto educacional foi criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno, no ano de 1961.

No item (m), (ver FIGURA 18), com auxílio de um Geoplano e barbante, trabalha-se sob os paradigmas G0-G1, a reprodução de um mapa estilizado do Estado de São Paulo. O objetivo com esse item (m) é convidar o participante a manipular o barbante, que representará a fronteira do mapa estilizado, sob uma malha quadrada, que no caso será o Geoplano, assim, essa atividade favorece o trabalho de área e de perímetro como grandeza e também como medida. Além da manipulação com o barbante, o participante da atividade, deverá identificar a região interna, região externa e a fronteira do mapa estilizado.

**O item (n)**

Na atividade do item (n), (ver FIGURA 19), os objetos são os mesmos que os utilizados na atividade do item (m), com a diferença de que este item (n), o participante reproduzirá no Geoplano, o mapa do Estado de Goiás, junto com o Distrito Federal.

**O item (o)**

No item (o), (ver FIGURA 20), o participante terá a oportunidade de trabalhar com duas figuras cujo formato é utilizado para enfeitar escolas para as tradicionais festas juninas.

São dois pentágonos construídos de maneira a terem perímetros iguais e áreas visivelmente diferentes. Os pentágonos, impressos em uma mesma folha de tamanho A4, são apresentados ao participante que utilizando cola e barbante, deverá sobrepor a fronteira dos pentágonos e pintar com canetinha de cor verde a região interna das figuras planas e em seguida, comparar as fronteiras e as regiões internas dos pentágonos. O entrevistador tem um papel importante na condução dessa discussão, pois o participante deverá perceber que está diante de figuras de mesmo perímetro, porém com áreas diferentes, reforçando assim, a dissociação entre área e perímetro e enriquecendo seu repertório de exemplos de que uma variação na área em um sentido, não implica necessariamente que o perímetro irá variar no mesmo sentido, isto é, ao modificarmos uma figura plana a fim de aumentarmos sua área, seu perímetro não necessariamente também irá aumentar.

**O item (p)**

O item (p), (ver FIGURA 21) foi elaborado de maneira a convidar o participante a reconhecer duas figuras com buracos (lembrando que convencionamos chamar por figuras com buracos partes do plano delimitadas por duas curvas fechadas, uma delas contida completamente no interior da região delimitada pela outra curva fechada). Em uma folha de papel tamanho A4, estão impressas a superfície da moeda Chinesa FengShui e a superfície da moeda japonesa de 5 Ienes, ambas com buraco. Com auxílio de barbante, o participante irá colá-lo sob as fronteiras dessas superfícies, em seguida, destacar a região interna de ambas as superfícies.

Escolhemos estas figuras para que o participante possa manipular, com auxílio do barbante, novas figuras com buracos. Neste caso, propomos que o participante trabalhe no paradigma G1-G0, fazendo com que a imagem das figuras das faces e a imagem de conceito de região interna e fronteira se validem, porém, o entrevistador deverá ficar atento e tentar identificar se essas imagens causam conflitos.

**O item (q)**

No item (q), (ver FIGURA 21 e FIGURA 22), o participante recebe uma folha de papel tamanho A4, nela estão impressos quatro polígonos, numerados de 1 a 4, cada um sob uma malha quadrada, as malhas são idênticas. Esses polígonos obedecem às seguintes relações, entre outras:

- Os polígonos 1 e 2 possuem mesmo perímetro e a medida da área do polígono 1 é visivelmente maior que do polígono 2.

- Os polígonos 3 e 4 possuem mesmo perímetro com a medida da área do polígono 3 sendo visivelmente maior que a do polígono 4.

O objetivo dessa atividade é convidar o participante a refletir diante das quatro figuras, sobre quais delas possuem a mesma quantidade de barbante gasto para marcar sua fronteira, caso as fronteiras fossem demarcadas por barbante. E também, destacar quais dos polígonos possuiriam uma quantidade maior de barbante gasto para demarcar sua fronteira, caso essa demarcação fosse realizada. Para auxiliar na resposta desses questionamentos, o participante poderá utilizar livremente Geoplano, lápis, cola e papel.

Embora a região interna das figuras não esteja sendo trabalhadas de forma explicita, acreditamos que o fato de as figuras possuírem áreas visivelmente diferentes, contribua com a dissociação entre área e perímetro, assim como descrito nos objetivos da atividade do item (m).

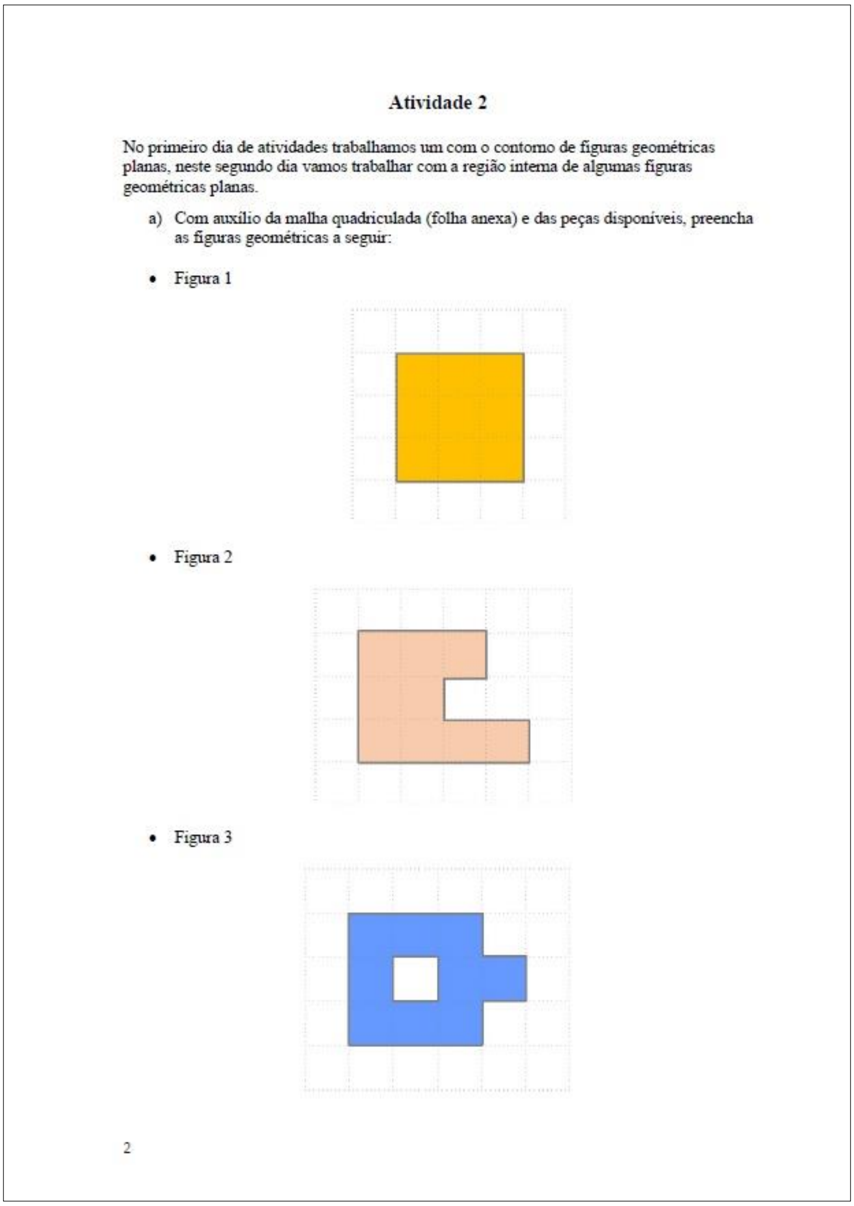
**O item (r)**

No item (r), (ver FIGURA 23), última atividade do primeiro dia de entrevista, o participante é convidado a pesquisar sobre figuras com buracos, separando fotos impressas ou desenhos, para serem apresentados no próximo encontro. Esse item (r) tem como objetivo ampliar o conjunto figural do participante com figuras com buraco. Além dessa ampliação, também objetivamos aproximar do participante, a Geometria trabalhada ao longo da Atividade 1 com a Geometria observada em seu cotidiano.

### 7.3. Atividades propostas para o segundo dia de entrevista

O segundo e último dia de entrevista reflexiva é composto por 8 atividades (ver FIGURA 26, FIGURA 27, FIGURA 28, FIGURA 29, FIGURA 30, FIGURA 31, FIGURA 32 e FIGURA 33). Essas atividades apresentam o conjunto denominado Atividade 2. Todas compõem o conjunto de atividades que foram aplicadas no segundo dia de entrevista.

Figura 26 - item (a) da Atividade 2, segundo dia de entrevista



**Atividade 2**

No primeiro dia de atividades trabalhamos um com o contorno de figuras geométricas planas, neste segundo dia vamos trabalhar com a região interna de algumas figuras geométricas planas.

a) Com auxílio da malha quadriculada (folha anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:

- Figura 1

- Figura 2

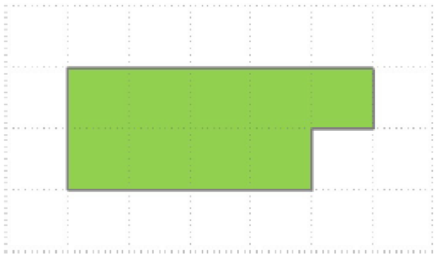
- Figura 3

2

Fonte: Autor.

Figura 27 - item (a) da Atividade 2 (continuação), segundo dia de entrevista

- Figura 4



a.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?

a.2) E em relação ao número de quadrados necessários para preencher cada uma delas?

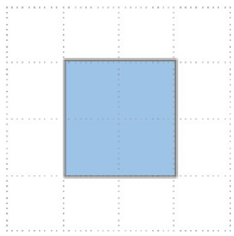
a.3) E em relação as fronteiras?

Fonte: Autor.

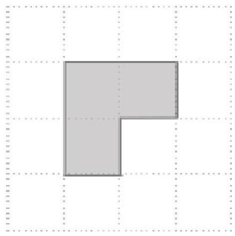
Figura 28 - item (b) da Atividade 2, segundo dia de entrevista

b) Com auxílio da malha quadriculada (anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:

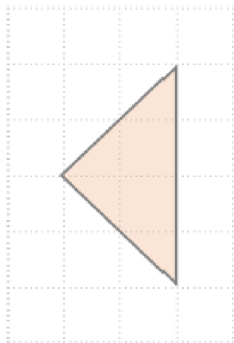
- Figura 5



- Figura 6



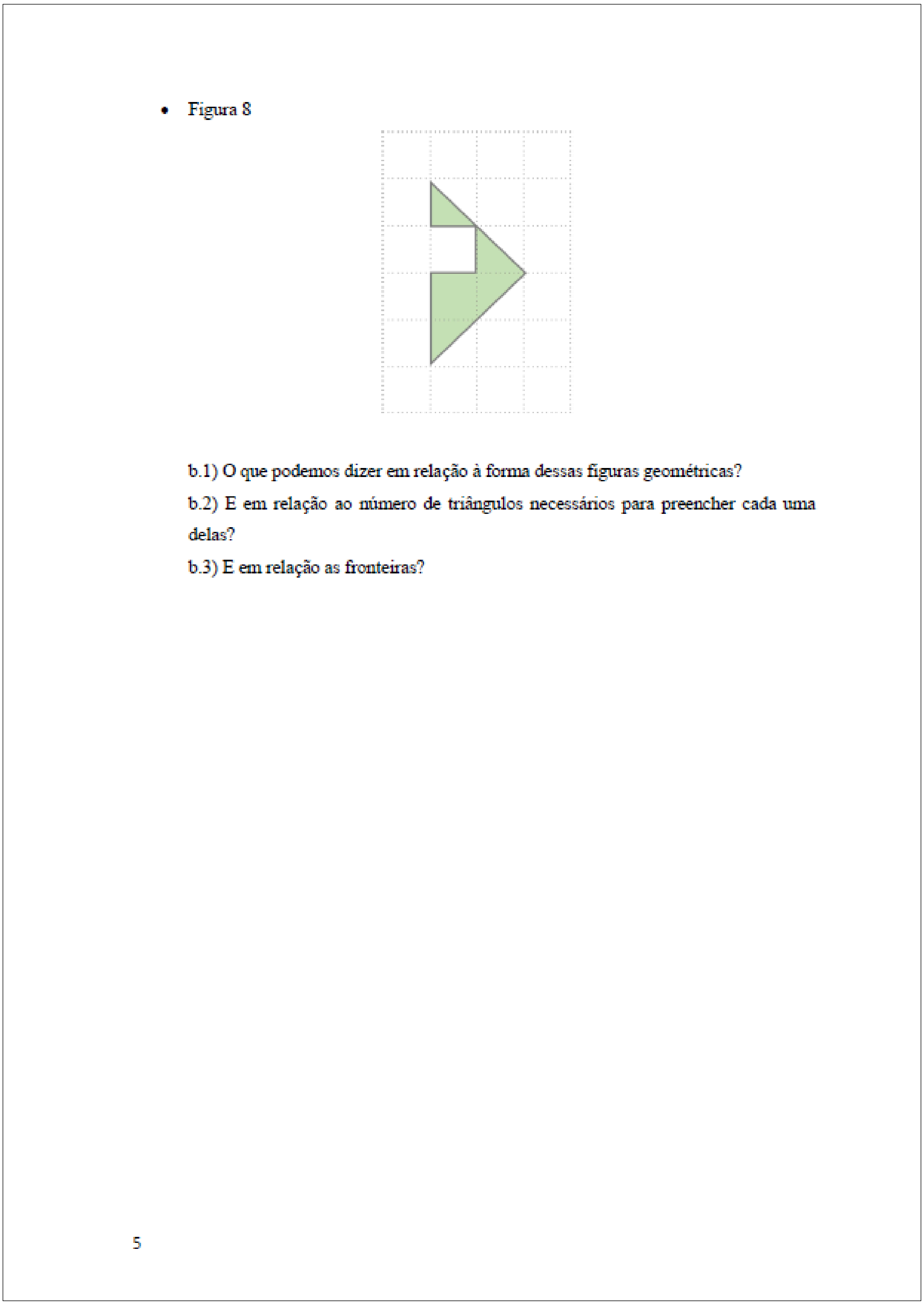
- Figura 7



4

Fonte: Autor.

Figura 29 - item (b) da Atividade 2 (continuação), segundo dia de entrevista



- Figura 8

b.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?

b.2) E em relação ao número de triângulos necessários para preencher cada uma delas?

b.3) E em relação as fronteiras?

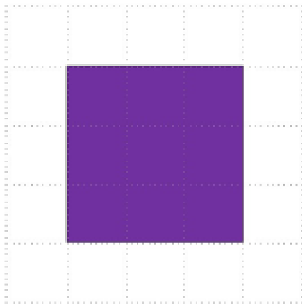
5

Fonte: Autor.

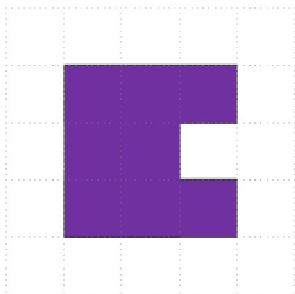
Figura 30 - item (c) e (d) da Atividade 2, segundo dia de entrevista

c) Utilizando a folha anexa, preencha a Figura 9 com os quadradinhos disponíveis, em seguida, preencha a Figura 10 com os triangulinhos disponíveis.

- Figura 9



- Figura 10



d) Analisando a região interna da Figura 9 e da Figura 10, com base na colagem feita, qual das figuras possui maior região interna? E qual possui maior fronteira?

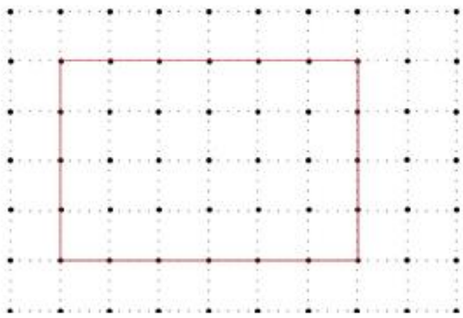
6

Fonte: Autor.

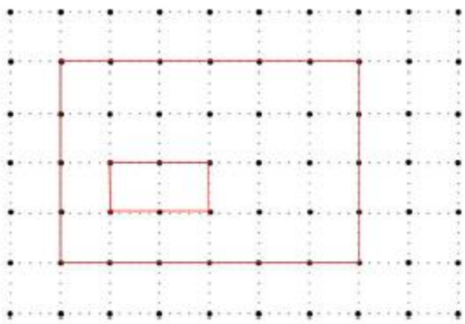
Figura 31 - item (e) da Atividade 2, segundo dia de entrevista

e) Com auxílio do geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no geoplano os formatos a seguir:

- Figura 9 (Um retângulo)



- Figura 10 (Um retângulo com buraco)



e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

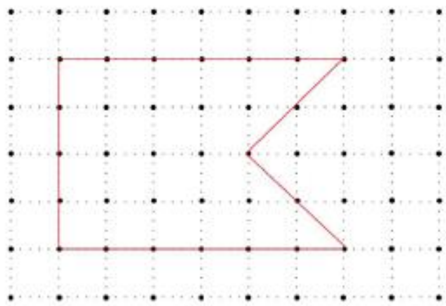
7

Fonte: Autor.

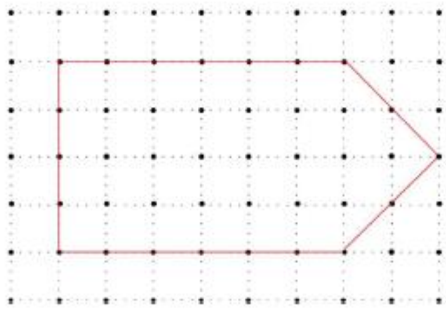
Figura 32 - item (f) da Atividade 2, segundo dia de entrevista

f) Com auxílio do geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no geoplano os formatos a seguir:

- Figura 3 (Bandeirinha de festa junina 1)



- Figura 4 (Bandeirinha de festa junina 2)



e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

8

Fonte: Autor.

Figura 33 - itens (g), (h) e (i) da Atividade 2, segundo dia de entrevista

g) Pensando em duas figuras geométricas planas, denominado as por Figura A e Figura B. Apresente um exemplo de situação onde a fronteira da Figura A seja maior que a fronteira da Figura B, porém, a região interna da Figura A seja menor que a região interna da Figura B. Utilize o material disponível (papel, cola, barbante, lápis ou geoplano).

h) Durante as atividades realizadas nos encontros, trabalhamos com a região interna das figuras planas. Com base nas atividades realizadas, com suas palavras, como você definiria a região interna de uma figura plana?

i) Com base nas atividades realizadas, usando suas palavras, como você definiria a fronteira de uma figura plana?

9

Fonte: Autor.

## 7.4. Análise dos itens da Atividade 2 (Segundo dia de entrevista)

Com a Atividade 2, temos por objetivo continuar com a manipulação e a compreensão dos conceitos de região interna e de fronteira, isto é, área e perímetro como grandezas, acrescentando a medida. Para esse segundo encontro, utilizamos figuras convexas, não convexas, figuras com buracos (lembrando que convencionamos chamar por figuras com buracos partes do plano delimitadas por duas curvas fechadas, uma delas contida completamente no interior da região delimitada pela outra curva fechada), figuras de mesmas medidas de área e diferentes perímetros, figuras de mesmo perímetro, mas com medida de área diferentes. Também nesse conjunto de atividades propomos trabalhar com os paradigmas G1-G2, trabalhar com unidades de medida não usuais, tanto para a medida da área como para o perímetro. E ao final, procuramos documentar as definições de conceitos verbalizadas pelos participantes, ligadas a região interna e a fronteira.

### O item (a)

Com o item (a), (ver FIGURA 26 e FIGURA 27), atividade que inicia o segundo dia de entrevista, temos como objetivo convidar o participante a pavimentar quatro figuras planas, sob uma malha quadriculada, impressas em folha de tamanho A4, utilizando para isso, como unidade de medida, peças quadriculadas (2 cm de lado), feitas de papel canson. A medida do lado do quadrinho é utilizada como unidade de medida de comprimento.

Das quatro figuras apresentadas no item (a), apenas uma é convexa (quadrado) e todas possuem mesma medida de área, porém, com diferentes superfícies e diferentes perímetros.

Em relação às figuras apresentadas, (ver FIGURA 1.2.1), temos:

- Figura 1: Área = 9 quadradinhos e perímetro = 12 u.m.
- Figura 2: Área = 9 quadradinhos e perímetro = 16 u.m.
- Figura 3: Área = 9 quadradinhos e perímetro = 18 u.m.
- Figura 4: Área = 9 quadradinhos e perímetro = 18 u.m.
- Figura 5: Área = 9 quadradinhos e perímetro = 14 u.m.

No subitem a.2, o objetivo é fazer com que o convidado reflita sobre a medida da área de cada figura, notando ou sendo induzido, pelo entrevistador, a perceber que se trata de figuras com mesma medida de área. Já com subitem a.3, procuramos conduzir o participante a refletir sobre a fronteira de cada figura, notando que figuras de mesma medida de área podem ter perímetros diferentes.

**O item (b) da Atividade 2**

Com o item (b), (ver FIGURA 28 e FIGURA 29), o participante é convidado a manipular figuras pouco usuais, com exceção da figura 1 (quadrado), também tem oportunidade de pavimentar figuras planas fechadas utilizando como unidade de medita de área, triângulos isósceles (medida da base e medida da altura iguais a 2 cm) feitos de papel canson e disponíveis ao participante. Em relação ao conjunto de figuras do item (b), a figura 5 e a figura 6 (ver FIGURA 28 e FIGURA 29) possuem mesmo perímetro, porém visivelmente, a figura 6 tem menor medida de área que a figura 5. A figura 7 tem medida de área maior que a figura 8, porém, a figura 8 possui perímetro maior que a figura 7. Importante que as características mencionadas sobre as figuras do item (b) sejam exploradas pelo entrevistador durante a entrevista reflexiva, procurando assim, contribuir com o enriquecimento das imagens de conceito do participante, associadas a região interna relacionadas a figuras planas e de fronteira.

Em relação às figuras apresentadas no item (b), (ver FIGURA 28 e FIGURA 29), temos:

- Figura 5: Área = 8 triangulinhos e perímetro = 8 u.m.
- Figura 6: Área = 6 triangulinhos e perímetro = 8 u.m.
- Figura 7: Área = 8 triangulinhos e perímetro = 4 u.m + 4 diagonais.
- Figura 8: Área = 6 triangulinhos e perímetro = 6 u.m + 4 diagonais.

No subitem a.2, o objetivo é fazer com que o convidado reflita sobre a medida da medida da área de cada figura, notando ou sendo induzido, pelo entrevistador, a perceber que há figuras de mesma medida de área. Já com subitem a.3, procuramos conduzir o participante a refletir sobre a fronteira de cada figura, notando que figuras de mesma medida de área podem ter perímetros diferentes.

**O item (c) e (d) da Atividade 2**

Com os itens (c) e (d), (ver FIGURA 30), o participante pavimentará a figura 9 utilizando para isso, quadrados (medida de lado de 2 cm) e para pavimentar a figura 10, triângulos isósceles (lados congruentes com medida de 2 cm), tanto os quadrados como os triângulos são feitos com papel canson. O objetivo destes dois itens é proporcionar ao participante a experiência de manipular duas figuras planas, cuja medida da área de uma (figura 10) é visivelmente menor que a medida da área da outra (figura 9), porém, utilizando unidades de medida diferentes e de tal maneira que a figura de maior área (figura 9) possui como medida de área, 9 quadrados e a figura de menor área (figura 10), possui 16 triângulos como medida de área. O que colocamos em xeque com esse item é o entendimento de área como uma medida, mostrando assim que um número positivo não é suficiente para descrever a medida de uma superfície ou seu contorno, valorizando assim, a diferença entre os conceitos de área e de perímetro de uma figura plana. Possibilitando assim, enriquecer a imagem de conceito do participante, relacionada a região interna e a fronteira.

**O item (e)**

Com o item (e), (ver FIGURA 31), o participante é convidado a representar com auxílio de um Geoplano e colares de barbante, um retângulo (figura 9) e um "retângulo com buraco" (figura 10) e em seguida, compará-las em relação a suas fronteiras e suas regiões internas. Neste item, novamente, ao compararmos as regiões internas da figura 9 e da figura 10, visivelmente temos que a figura 10 possui área maior que a figura 9, porém a figura 10 tem perímetro maior que a figura 9. Importante destacar que neste item, o entrevistador deverá encaminhar a entrevista de modo a propiciar ao entrevistado a reflexão de que não é necessário usarmos medida para decidir, neste item (e), qual figura possui maior área e qual possui maior perímetro.

**O item (f)**

No item (f), (ver FIGURA 32), o participante voltará a trabalhar com as figuras apresentadas na Atividade 1, item (m), pentágonos construídos de maneira a terem perímetros iguais e áreas visivelmente diferentes. A escolha por essas figuras está ligada a popularidade destas em festas juninas, seu formato é utilizado como bandeirinhas de festa junina e são utilizadas nas Escolas Básicas como enfeite, muitas vezes feitas por estudantes, pelo Brasil. Nesta vez, a manipulação é feita utilizando o Geoplano e colares de barbante. O participante utilizará o colar de barbante para representar no Geoplano os dois pentágonos (bandeirinhas de festa junina), um de cada vez, e assim esperamos que o participante note, por meio de uma manipulação concreta, que o contorno das duas figuras possui o mesmo comprimento (subitem f.1). E que suas regiões internas são diferentes (subitem f.2).

Os argumentos apresentados e verbalizados pelo participante para os subitens f.1 e f.2 além de revelarem as imagens de conceito, podem indicar em qual paradigma geométrico o participante articulou seus argumentos.

**O item (g)**

Os itens (g), (h) e (i) finalizam o conjunto de Atividades 2 e com esses itens temos o objetivo principal, verificar as ideias que o participante apresenta em relação aos conceitos de região interna e fronteira de figuras geométricas planas e também, como o participante articula suas respostas, em relação aos paradigmas de Parzysz (2006). No item (g), (ver FIGURA 33), o participante deverá citar um exemplo de duas figuras geométricas planas A e B, de maneira que a região interna de A seja maior que a de B, e a fronteira da figura B seja maior que a de A. O objetivo com o item (g) é verificar se o participante consegue apresentar um exemplo correto de maneira a atender o enunciado do item (g), podendo utilizar para isso, papel, cola, barbante, lápis e/ou Geoplano.

Lembramos que o senso comum, de acordo com D'Amore e Fandiño (2006) citados anteriormente, indica que quanto maior a medida da área de uma figura geométrica plana, maior será seu perímetro.

O entrevistador deverá estar atendo às verbalizações e as construções elaboradas pelo participante tanto para entender as imagens de conceito evocadas, relacionadas à região interna e fronteira e em qual paradigma geométrico o participante articula sua resposta.

**Os itens (h) e (i)**

Nos itens (h) e (i), (ver FIGURA 1.2.8), o participante definirá, utilizando as próprias palavras para isso, região interna de uma figura plana, item (h), e fronteira de uma região interna, item (i). A definição de conceitos desses objetos geométricos faz parte do nosso objetivo com estes dois itens finais do conjunto de Atividades 2.

### 7.4.1. Considerações finais sobre o Conjunto de Atividades

As atividades apresentadas foram elaboradas de maneira que cada item quando avançado, eventuais equívocos verbalizados ou apresentado por meio de manipulações, ou gestos, fossem discutidos e superados, cumprindo assim o objetivo da entrevista reflexiva. Assim, acreditamos que ao final do conjunto de atividades, o participante tenha enriquecido sua imagem de conceito relacionada à área e ao perímetro de figuras planas, como grandezas, e que sejam capazes de articular essas ideias sob os paradigmas G1-G2 de Parzysz (2006) e possam entender melhor esses objetos geométricos tão presentes em seu cotidiano.

Ao entrevistador, esperamos que esse não encarre o conjunto de atividades apresentados como uma sucessão de itens propostos onde levasse em conta apenas respostas entendidas como corretas. Investigar possíveis equívocos e conflitos cognitivos, e discuti-los, pode contribuir com ideias de outras atividades que possam auxiliar outros participantes além de contribuir com a prática docente.

# 8. RELATO DAS APLICAÇÕES DAS ATIVIDADES 1 E 2

O objetivo desse capítulo é apresentar a análise dos dados obtidos com a Atividade 1 e Atividade 2, aplicadas em outubro de 2020, momento em que vivíamos a pandemia de COVID-19 e o distanciamento social.

## 8.1. Entrevistas

As atividades foram estruturadas, inicialmente para serem feitas por alunos da rede pública de Ensino Fundamental II do Estado de São Paulo, em dois dias separados por um intervalo de uma semana, seguindo os preceitos das entrevistas reflexivas, com a utilização de materiais básicos, como lápis, caneta, compasso, tesoura, apontador, canetas coloridas, barbante e Geoplano. Incluindo também recortes de papel canson em forma de quadrados e triângulos para serem utilizados como unidades de medida, convencionais (quadrados) e não convencionais (triângulos), de área. As dimensões dessas unidades de medida se deram após alguns testes com alunos que precisavam fazer uma atividade de colagem. Inicialmente as dimensões eram menores, causando dificuldades na manipulação. Posteriormente um novo teste foi feito com as dimensões atuais, trazendo um resultado satisfatório. Assim, cada quadradinho representa um quadrado cujos lados medem 3 cm e os triângulos retângulos isósceles com catetos medindo 3 cm e hipotenusa medindo $3\sqrt{2}$ cm.

Ao iniciarmos a escolha dos participantes para as atividades, ocorreu a suspensões das aulas presenciais na rede pública paulista de ensino (primeira quinzena de março/2020) devido ao surto de COVID-19. O retorno às aulas da rede pública se deu de forma remota, porém com baixa adesão. Com a nova rotina estabelecida tanto para alunos e professores como para as respectivas famílias, tivemos dificuldade para conseguir voluntários que aceitassem participar das atividades que havíamos elaborado, principalmente por ser fora do horário escolar. Assim, alguns ajustes foram feitos nessas atividades, para que estas pudessem ser realizadas de forma remota e os convidados foram escolhidos em um colégio da rede privada.

Por conta do tempo de duração das atividades e da forma como seriam conduzidas, o critério para escolha dos participantes teve como peso maior gostar de matemática e alunos que apresentam, durante as aulas, atitude mais crítica em relação ao aprendizado, isto é, alunos que nos questionam e procuram analisar os resultados encontrados. Isto porque sabíamos que o tempo de duração da entrevista seria longo, então precisaria ser alguém que poderia se sentir à vontade em passar algumas horas discutindo as atividades e que pudessem expressar livremente.

As entrevistas possuem o aval do participante, dos responsáveis (por se tratar de menores de 18 anos) e da direção do colégio, conforme exigência da ética em pesquisa, assinaram, respectivamente, a Autorização (ver Anexo I), o Termo de Assentimento (ver Anexo II), bem como os responsáveis dos participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ver Anexo III).

As entrevistas foram agendadas conforme disponibilidade dos participantes. Estes receberam dois envelopes lacrados marcados com os dizeres, “Atividade 1” e “Atividade 2” e um Geoplano.

Os materiais, antes de serem entregues aos participantes, seguiram os protocolos de saúde contra COVID-19, todos foram higienizados e em seguida lacrados. Junto ao material, foi disponibilizado um frasco de álcool em gel 70º com 52 g.

As entrevistas feitas em ambiente virtual, gravadas, com o aval dos participantes, respectivos responsáveis e direção do colégio. Todas entrevistas foram realizadas em ambiente virtual, utilizando o aplicativo Google Meet, mesmo aplicativo utilizado nas aulas remotas do Colégio e que ofereceu a possibilidade de fazer a gravação da entrevista.

Para apresentar os resultados da análise individual realizada deste capítulo, e para respeitar o código de ética para pesquisas com pessoas, utilizamos as siglas P1, P2 e P3 para referenciar os participantes.

## 8.2. Resultados obtidos com a aplicação da Atividade 1

Nesta seção, apresentamos a análise dos dados obtidos com os protocolos dos três participantes, cujo objetivo é investigar concepções relacionadas às ideias de área e de perímetro de figuras planas dos participantes P1, P2 e P3, com um foco maior no conceito de perímetro, trabalhado como grandeza, isto é, como fronteira de uma superfície plana.

A presente análise foi construída sob à luz de nossos referenciais teóricos bem como em nossos objetivos, isto é, procuramos analisar as imagens individuais dos participantes são suficientes para que não confundam área e perímetro de figuras planas, conforme as ideias de Tall e Vinner (1981), e se os participantes articulam uma geometria de observação e uma geometria de demonstração, de acordo com as ideias de Parzysy (2006).

Dividimos esta secção em três subsecções, 8.2.1, 8.2.2. e 8.2.3. Apresentamos, na secção 8.2.1, a análise individual dos protocolos relativos às respostas apresentadas na

Atividade 1, na secção 8.2.2, as respostas apresentadas na Atividade 2, já na secção 8.2.3, a análise geral, baseada nos resultados individuais observados na secção 8.2.1 e 8.2.2.

### 8.2.1. Análise das respostas da Atividade 1

A imagem de conceito é associada a um conceito, é não-verbal, e pode ser construída por um conjunto de impressões ou experiências adquiridas pelo sujeito, podendo também ser formada por representação visual do conceito, se for o caso. (Vinner, 1992, p.68)

Ainda segundo os autores, a imagem de conceito não precisa ser necessariamente coerente, pois dependendo do estímulo que é dado, o indivíduo pode ativar diferentes partes dessa sua imagem e assim, construí-la de modo a não ser toda coerente.

Um indivíduo que apresenta a definição de um conceito por meio de uma descrição verbal, é definida por Tall e Vinner (1981) como sendo a definição de conceito. A definição de conceito raramente é semelhante à definição matemática formal associada ao conceito.

Na atividade (a) o participante é convidado a apresentar sua definição de conceito relacionada à área de uma figura plana, e ele a apresenta. Segundo Vinner (1992), quando um indivíduo revolve uma tarefa, ele aciona sua definição de conceito e a imagem de conceito associada. Assim, a definição de conceito apresentada pelo indivíduo, é a que ele utiliza ao resolver atividades ligadas à área de uma figura plana.

A atividade 1 inicia com o contato via o aplicativo Google Meet e após ajustes de câmera e de posse de todo o material que compõe a atividade, o entrevistador inicia a gravação a partir do momento em que é aberto o envelope destinado à atividade 1. Em seguida, o participante retira do envelope todas as folhas de respostas e forma uma pilha de folhas onde cada uma é retirada por vez.

A cada início de atividade, o participante lê em voz alta o enunciado e responde às atividades na ordem em que elas estão na pilha, não podendo pular atividades.

Não houve nenhum caso de atividade não respondida.

Com exceção das atividades (a) e (b), ao final de cada atividade, há uma fase de discussão das respostas apresentadas.

### 8.2.2. Participante P1

O primeiro participante (P1) é um aluno do 9.º ano do Ensino Fundamental II de um colégio da rede privada de ensino, localizado na zona leste de São Paulo. P1 estudou neste mesmo colégio durante os 9 anos (todo o Ensino Fundamental), é participativo em sala de aula, se dedica em todas as disciplinas, questiona, reflete, analisa, apresenta grande receio em errar e se cobra bastante. Nos processos avaliativos, é um aluno que se destaca tanto em matemática como nas demais disciplinas.

A atividade 1 (primeiro encontro) teve duração de 4 horas e a atividade 2 de 4 horas e meia (segundo encontro).

Em algumas das falas verbalizadas por P1 procuramos grifar aquelas que nos parecem importantes pois o conteúdo nos remete ao termo “engaiolamento” utilizado pelo Professor Ubiratan D’Ambrosio.

A seguir, apresentamos as respostas para cada um dos itens que compõem a Atividade 1. Para cada item, o participante leu o enunciado em voz alta e em seguida, descreveu sua resposta e verbalizou suas considerações.

**a) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.**

O participante escreve: “A área de uma figura plana é calculada de acordo com a quantidade de lados que ela possui. A área também pode ser considerada a parte interna da figura. Existem diferentes fórmulas para calcular a medida da área das diferentes figuras”. Em seguida verbaliza corretamente o procedimento para calcular a medida da área de um quadrado, escrevendo na folha de respostas, assim como pode ser observado na FIGURA 34.

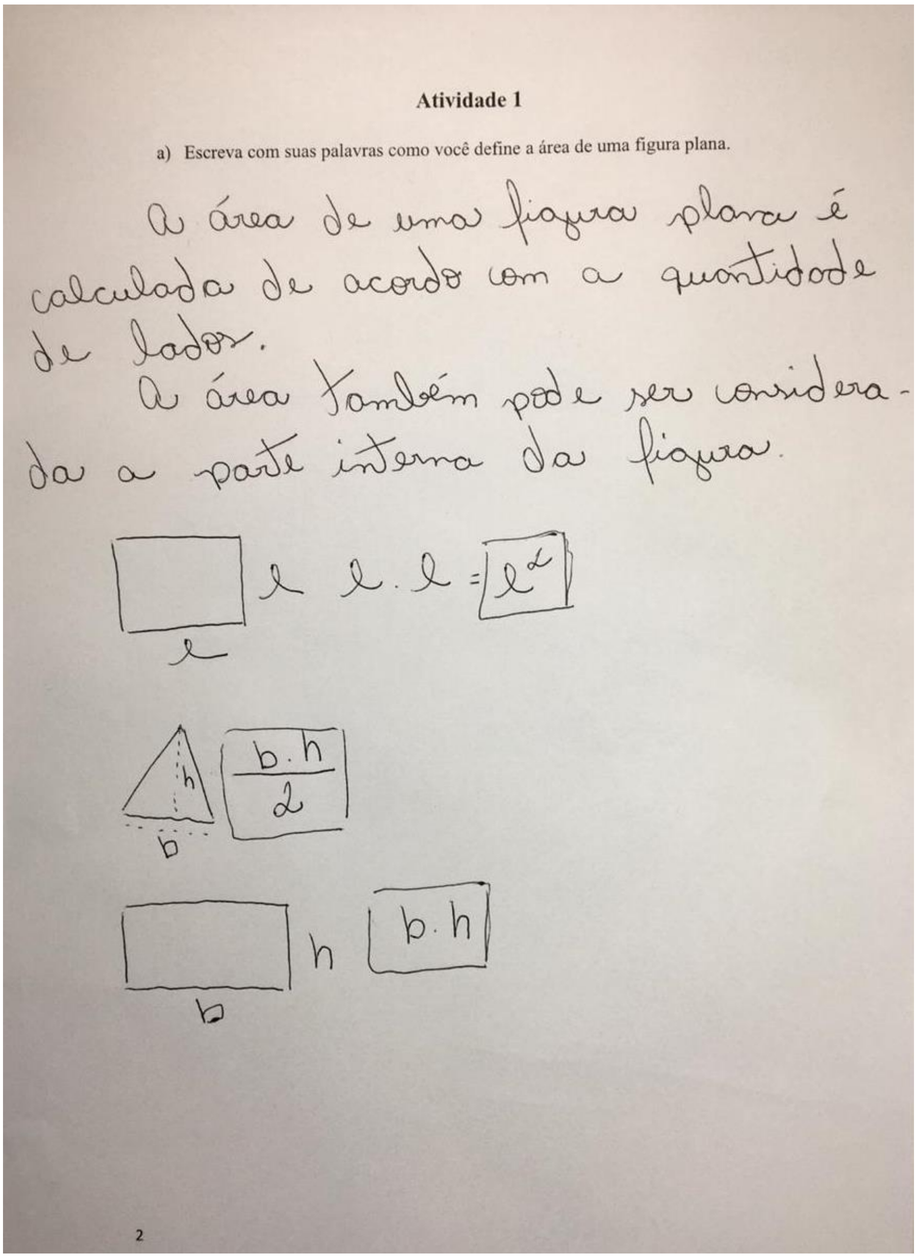
Em seguida registra na folha de respostas a representação de um triângulo, ver Figura 34, marca a altura por “h” e a base por “b” e segue verbaliza o procedimento correto para calcular a medida da área do triângulo. “Em um triângulo a gente usa a medida da altura e da base. A altura vou representar por h e a base por b. Então nós calcularíamos, base vezes altura dividido por dois, para calcular a medida da área de um triângulo”.

O participante descreve o procedimento para calcular a medida da área de um retângulo, “Aí por exemplo, de um retângulo, nós calcularíamos base vezes altura ou largura vezes comprimento. Que vou representar por b e h também”.

“Então eu concluo que as diferentes figuras geométricas possuem diferentes fórmulas para calcular a medida da área interna”.

Quando perguntado sobre novas considerações o participante responde “Eu acho que isso é o que vejo de maneira geral sobre as áreas das figuras”.

Figura 34 - Resposta ao item (a) - Atividade 1



**Atividade 1**

a) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.

A área de uma figura plana é calculada de acordo com a quantidade de lados.

A área também pode ser considerada a parte interna da figura.

$l \quad l \cdot l = \boxed{l^2}$

$l$

$h \quad \boxed{\dfrac{b \cdot h}{2}}$

$b$

$h \quad \boxed{b \cdot h}$

$b$

2

Fonte: Autores

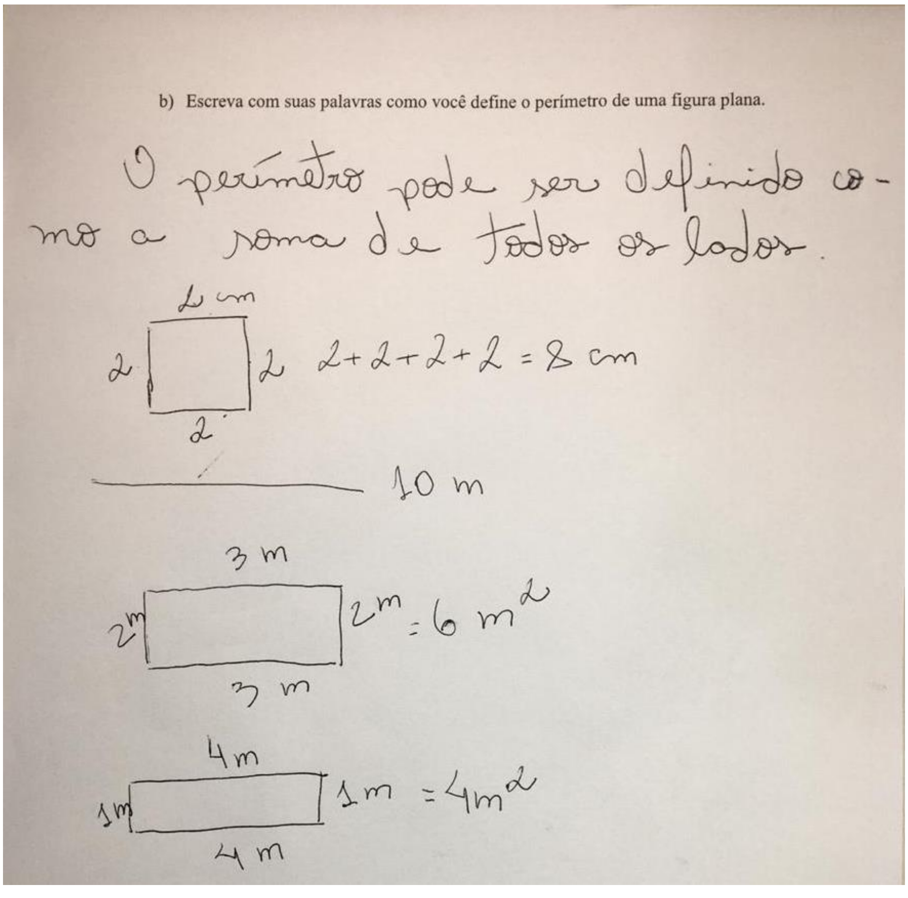
**Considerações:** A definição de área apresenta concepções ligadas a aspectos geométricos, pois leva em consideração o tipo de forma geométrica e a quantidade de lados. Também é apresentada a concepção numérica, pois o participante relaciona a área a uma medida. O termo área é utilizado como sinônimo de região interna da figura. Para este participante, o conceito de área está limitado a figuras poligonais e para cada uma delas, existe um procedimento diferente para se calcular a medida da área. Nenhuma referência à grandeza foi apresentada. A coleção de figuras apresentadas pelo participante nos remete aos materiais didáticos de matemática, que quase sempre, utilizam estas como exemplos, sobretudo na parte de Geometria. Pesquisadores como Fandiño e D'Amore (2006) denominam essa coleção "figuras estereotipadas". Afirmam inclusive que o uso excessivo dessas pode contribuir para as *misconceptions* relacionada à área e ao perímetro. (Fandiño e D'Amore, 2016, pp.123-126).

A concepção de grandeza não aparece na definição de conceito do participante, o que não significa que ele desconheça as grandezas envolvidas com a área de uma figura plana, segundo Vinner (1991), a definição de conceito não é necessariamente tudo o que o indivíduo conhece sobre o objeto matemático, mas ela é "aciona" ao resolver uma tarefa.

**b) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.**

O participante inicia verbalizando, "Então primeiramente o mais óbvio, perímetro é a soma de todos os lados" e em seguida registra na folha de respostas, ver FIGURA 35. Ainda na folha de resposta, ele desenha um quadrado (marcando em cada lado o número 2) e diz "Um quadrado por exemplo, vamos supor que ele mede 2 por 2 e como é um quadrado, todos lados medem 2, então o perímetro seria a soma de todos os lados do quadrado".

Figura 35 - Resposta ao item (b) - Atividade 1




Fonte: Autor.

O participante então escreve: “2+2+2+2=8”, e menciona que “se a unidade em questão fosse centímetro, a resposta seria 8 cm de perímetro da área do quadrado”. Neste momento, em um dos lados do quadrado ela escreve a unidade de medida (cm).

> “Uma observação que fiz, eu acho inclusive com uma atividade proposta em sala de que não necessariamente o perímetro está diretamente relacionado à área. Então por exemplo, se eu tiver o mesmo perímetro e se eu distribuir de maneira diferente pela figura pode ser que a área dê um resultado diferente no final, quando a gente for fazer a conta. E aí tem outros exemplos, só que é basicamente isso que eu sei sobre perímetro”. (P1).

Ao término da resposta, o entrevistador solicita alguns exemplos sobre o que foi dito (relações entre área e perímetro). Ele diz,

> “Tá, por exemplo, eu vou pegar um exemplo que inclusive foi de uma atividade. Quando eu quero fazer por exemplo, a delimitação de um galinheiro, de uma coisa do campo, aí eu tenho uma corda que possui 10 metros, vamos supor, de comprimento. Eu posso distribuir ela de diferentes formas. Então por exemplo, se eu quiser fazer uma área retangular”. (P1).

Ao verbalizar essa fala, o participante descreve a corda, marca o comprimento 10 m, em seguida faz um retângulo na folha, pensa por alguns segundos e coloca as medidas, ver FIGURA 35.

Em seguida, verbaliza “Só que eu poderia distribuir isso de maneira diferente também”. Formula um novo exemplo. No segundo exemplo, escreve um retângulo, com lados medindo 1 m e 4 m e escreve ao lado, “= 4 m$^2$” e finaliza sua resposta.

**Considerações:** Destacamos inicialmente no trecho da verbalização do participante o adjetivo “óbvio”, que sugere que essa é a definição de conceito dele. Para ele, a definição de conceito que ele traz consigo é adequada. A definição apresentada pelo participante condiz com a definição de conceito de área, ambas estão associadas a uma coleção restrita de figuras planas formadas por poligonais e não apresentam concepções ligadas a grandezas.

Na representação figural apresentada, ver FIGURA 35, é a de um quadrado cujos lados medem 2 e em seguida, ao lembrar das unidades de medida, os lados passam a medir 2 cm. E assim, reforçando a concepção numérica e apresentando a noção de medida.

O participante ainda verbaliza, “se a unidade em questão fosse centímetro, <u>a resposta seria 8 cm de perímetro da área do quadrado</u>”, o que reforça o uso de área como sinônimo de região interna. (grifo nosso).

De acordo com o participante, em sala de aula foi feita em uma atividade, com a área de retângulos de diferentes áreas, mas de mesmo perímetro. Ele desenha dois retângulos cujas áreas são diferentes, mas possuem o mesmo perímetro e em seguida apresenta um novo exemplo com a mesma situação. Desse estudo feito em sala de aula, o participante ficou com a ideia de que “não necessariamente o perímetro está diretamente relacionado à área”. Assim, muito embora o participante tenha apresentado a ideia de que retângulos com áreas diferentes podem possuir mesmo perímetro, fica difícil concluir que ele entenda essa ideia, uma vez que já vimos que ele não apresenta ideias claras sobre os conceitos de área e de perímetro.

Em resumo, a imagem de conceito de perímetro trazida pelo participante, revela uma ideia limitada a figuras poligonais, associada a concepção geométrica, sobretudo a concepção numérica.

Há de se destacar que tanto a imagem de conceito de área como a de perímetro apresentam um pequeno conjunto de polígonos, desenhados em uma disposição muito semelhante as figuras encontradas nos materiais didáticos.

**c) Observe e reproduza os caminhos a seguir utilizando os fios de barbante disponíveis. Em seguida, responda às questões.**

Nesta atividade, o participante cola o barbante iniciando de cima para baixo, ver FIGURA 36, e comenta que assistiu pelo celular pessoas fazendo atividades parecidas com esta e ao final é perguntado “qual linha é maior”. Ele fica com receio de que esta seja a finalidade da atividade. O participante apresentou desconforto com a atividade por esta não apresentar medidas.

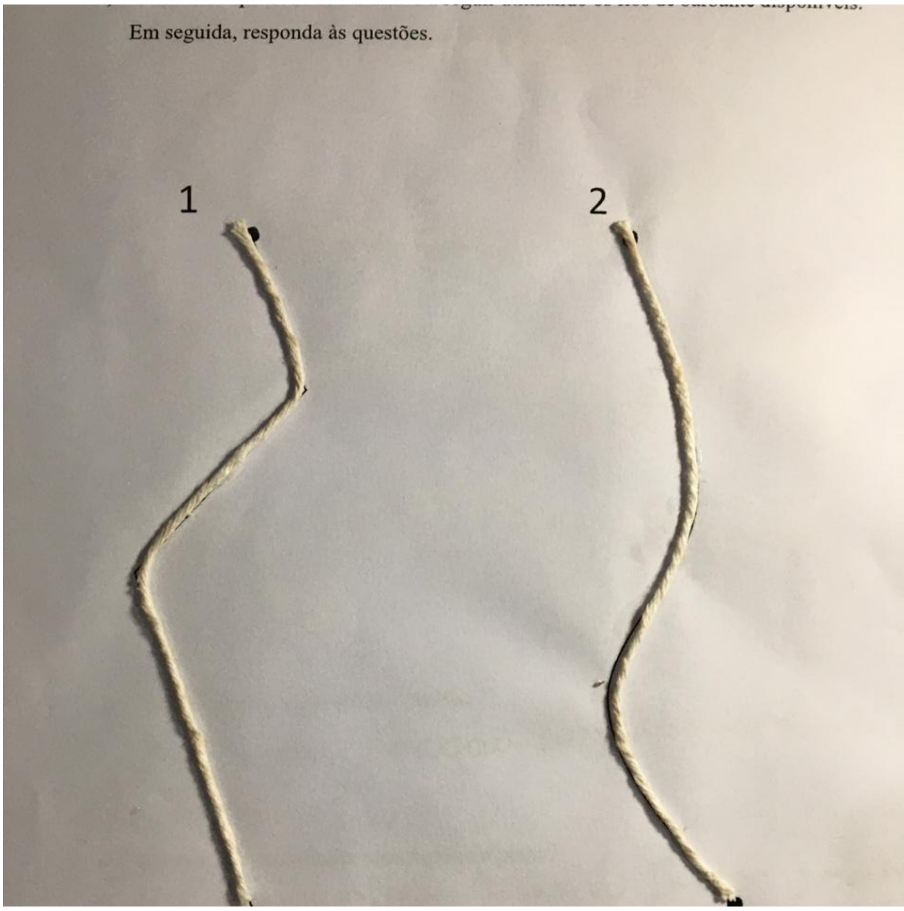
Os caminhos 1, 2, 3 e 4 são reproduzidos pelo participante, este comenta que esse tipo de atividade (utilizando cola, barbante, materiais concretos), “não está acostumado a fazer” nas aulas, exceto nas aulas de artes.

**Considerações:** O participante não apresenta dificuldades na colagem das tiras de barbante, porém revela um receio de ter que decidir qual caminho tem comprimento maior, uma vez que nenhuma delas possui medidas. O que de certa forma reforça a concepção de medida, apresentada nas atividades (a) e (b).

Ainda que não seja o objetivo da atividade, entendemos que o participante não conseguiria distinguir qual dos caminhos tem maior comprimento, de acordo com sua própria fala, isto é, não tem experiência em situações de comparações.

O participante também revela que não tem o costume de trabalhar com materiais concretos em sala de aula, o que pode indicar uma falta de atividades no paradigma G0.

Figura 36 - Resposta ao item (c) - Atividade 1




Fonte: Autor.

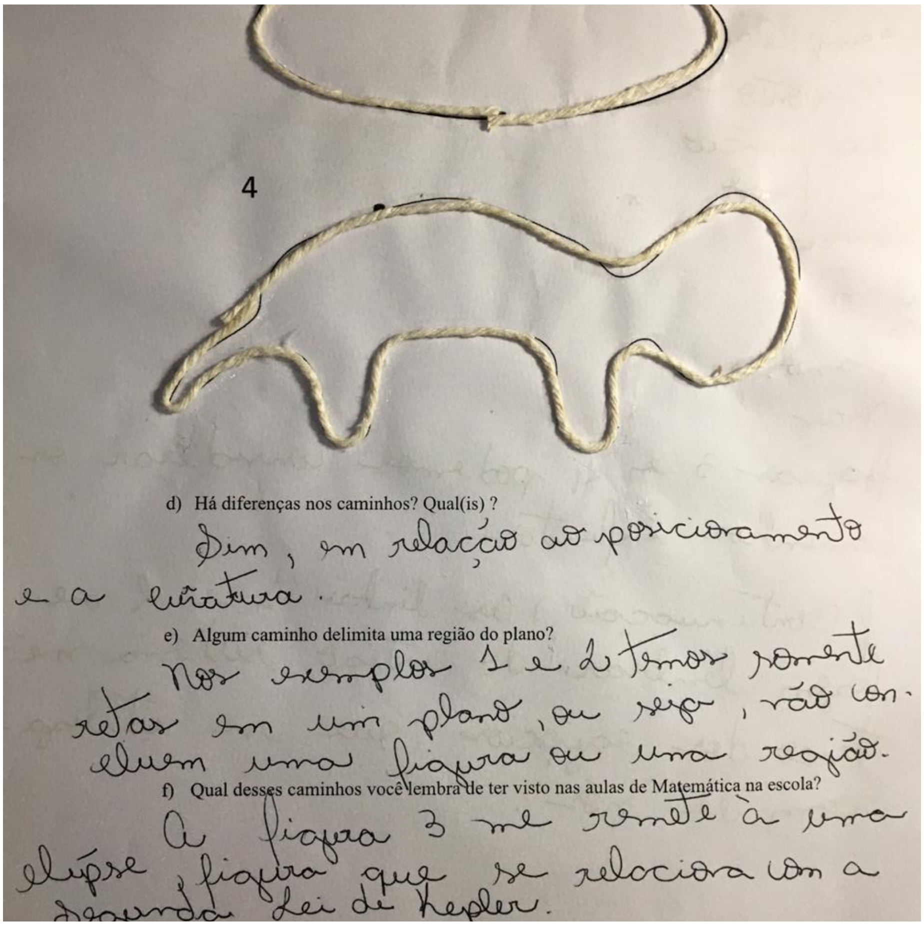
**d) Há diferenças nos caminhos? Qual(is)?**

O participante verbaliza, “Sim, há diferenças entre os caminhos, em relação ao posicionamento da linha, por exemplo na folha, no espaço. O posicionamento e a curvatura também”. Ele escreve na folha de respostas: “Sim, em relação ao posicionamento e a curvatura”, ver FIGURA 37.

O entrevistador pede para que o participante falasse mais sobre a resposta apresentada, o participante diz que o termo posicionamento se refere a formato da curva. O entrevistador solicita a ele que comente mais sobre o significado de posicionamento e direção. O participante verbaliza, “Posição para mim é como eu coloquei a linha no papel ou como a linha se posicionou no espaço, por exemplo, porque quanto a gente desenha uma linha no espaço, é um conjunto de pontos indo em uma direção”. Em seguida aponta para a figura 3 da atividade (c) e compara um segmento de arco da própria figura com um segmento da figura 4, ainda da atividade (c), ver Figura 3, e diz, “Essa parte é diferente (Figura 3), é diferente dessa parte (FIGURA 37) em relação a posição, elas estão posicionadas de maneira diferente no espaço, é isso que chamo de posição”.

Uma vez que o participante não foi capaz de distinguir uma curva aberta de uma curva fechada, o entrevistador, comenta sobre esses conceitos.

Figura 37 - Resposta aos itens (d), (e) e (f) - Atividade 1




Fonte: Autor.

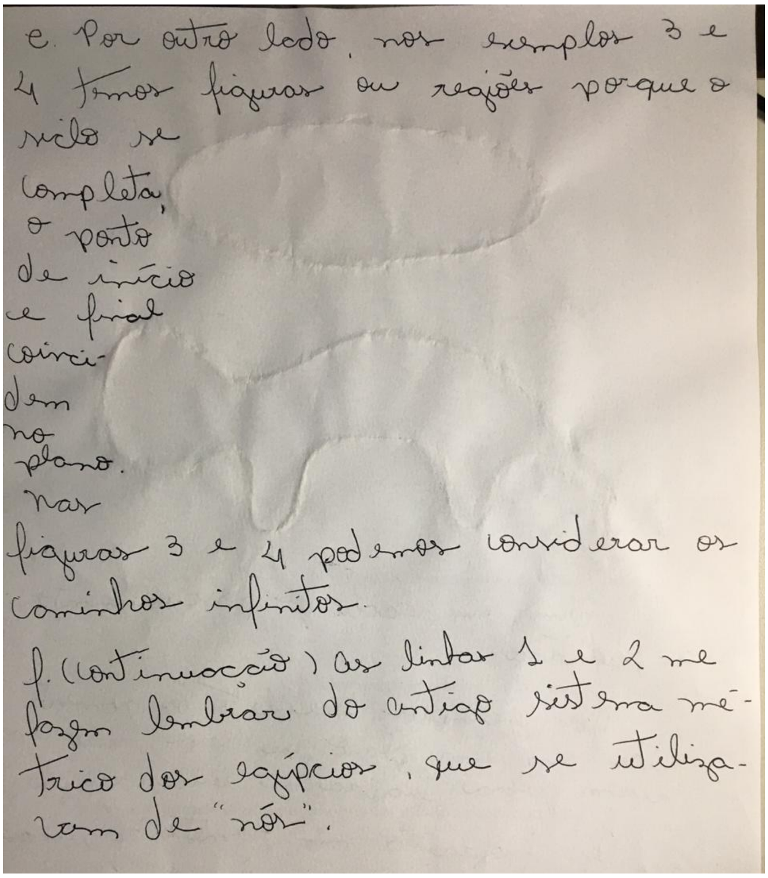
**Considerações:** O participante não reconheceu um caminho aberto ou um caminho fechado, levando-o a não saber classificar as curvas. Uma vez que o participante não tem experiência em fazer comparações e não reconhece caminhos abertos ou fechados, entendemos que a ideia que ele tem de área e de perímetro além de confusa, seja vaga, pois ele não reconhece o contorno de uma figura plana como um caminho, o que dificultar o entendimento de uma fronteira como grandeza.

**e) Algum caminho delimita uma região do plano?**

O participante pergunta, “Uma região seria uma parte do plano?”. O entrevistador confirmar que sim, então ele diz, “Os caminhos 1 e 2 não delimitam nenhuma região porque eles não fecham pois estão soltos no plano”, quanto aos caminhos 3 e 4 ele afirma que delimitam uma região do plano e utiliza como justificativa o preenchimento da região interna da figura 3 (elipse), ver FIGURA 37. O participante faz um gesto de como se estivesse pintando com o dedo a região interna da figura 3 (elipse). Na folha de resposta escreve, “Nos exemplos 1 e 2 temos somente retas em um plano, ou seja, não concluem uma figura ou uma região. Por outro lado, nos exemplos 3 e 4, temos figuras ou regiões porque o caminho se completa, o ponto de início e fim coincidem no plano”.

No final ele faz a consideração de que os caminhos 3 e 4 são infinitos pois se fossem “uma pista de corrida”, não haveria fim e nem início.

Figura 38 - Resposta aos itens (e) e (f) - Atividade 1


e. Por outro lado, nos exemplos 3 e 4 temos figuras ou regiões porque o ciclo se completa, o ponto de início e final coinci-dem no plano. Nas figuras 3 e 4 podemos considerar os caminhos infinitos.

f. (continuação) As linhas 1 e 2 me fazem lembrar do antigo sistema mé-trico dos egípcios, que se utiliza-vam de “nós”.

Fonte: Autor.

**Considerações:** O participante identificou os caminhos que delimitam uma região do plano, porém apresenta uma ideia equivocada relacionada a caminho fechado e região interna, para ele, esses termos são sinônimos porque ambas são entendidas, por ele, como a região interna delimitada por um caminho fechado, isto é, um caminho fechado é entendido pelo participante como algo bidimensional e não unidimensional. O que ajuda a compreendermos por exemplo, a unidade de medida apresentada por ele na atividade (b) “8 cm de perímetro da área do quadrado”.

Para o participante, uma figura plana é composta apenas por sua região interna, ignorando assim a ideia de contorno. Ele entende, por exemplo, um retângulo não como uma figura formada por uma linha poligonal e sim como uma região plana limitada que possui forma de um retângulo e sem contorno. Aos lados desse retângulo, pode-se associar uma medida. Para o participante, o perímetro dessa "figura" é a soma dessas medidas.

Algumas terminologias utilizadas pelo participante, como "não fecham", "estão soltos no plano", "caminho se completa", "ponto de início", "uma pista de corrida", "não haveria fim e nem início". Sugerem uma ideia de geometria muito concreta onde se leva em consideração algumas interferências dinâmicas, como "soltos no plano".

A consideração final feita por P1 nos remete a questões de pesquisas a serem feitas, quanto aos caminhos 3 e 4 serem infinitos, utilizando como exemplo, uma pista de corrida, que segundo ele, não possui início e nem fim.

**f) Qual desses caminhos você lembra de ter visto nas aulas de Matemática na escola?**

O participante responde que a figura 3 foi vista recentemente na aula de Física quando estudou a 2ª lei de Kepler (orbitas elípticas), ver FIGURA 37. Ao final, ele complemente dizendo que as figuras 1 e 2, "... me fazem lembrar do antigo sistema métrico dos egípcios, que se utilizavam de nós".

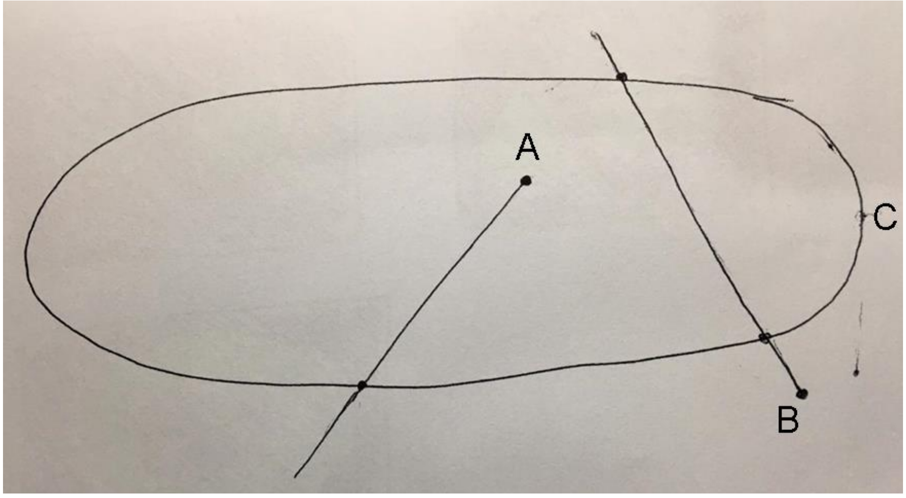
Como já mencionado, o participante lê em voz alta a definição de ponto interior e ponto exterior retirada de SANGIORGI (1974). Em seguida, o entrevistador pede para que ele faça uma figura qualquer e que faça alguns pontos, a fim de trabalhar a definição apresentada. Na folha de respostas, ele desenha um caminho fechado convexo que lembra uma elipse, ver Figura 6, e dois pontos, que denominamos por A e B. Ambos foram marcados conforme orientação do entrevistador.

Ainda seguindo as instruções do entrevistador, a partir do ponto A, P1 traça uma semirreta e destaca a intercessão entre a semirreta e a fronteira da figura. Em seguida é discutido o fato de que para qualquer outra semirreta traçada a partir do ponto A, cada uma das semirretas terá 1 ponto de intercessão com a curva, o que pela definição vista nos mostra que o ponto A é um ponto interior. A mesma ideia foi seguida com o ponto B, chegando à conclusão de que B é um ponto exterior.

Em seguida P1 pergunta, "Mas isso só vale se a reta for infinita, se a gente considerar que a reta for infinita, né? Porque por exemplo, se eu pegar daqui e traçar até aqui, por exemplo, não vai cruzar em dois pontos né? Só que aí a reta não é infinita”. O entrevistador ressalta a importância de traçar uma semirreta e não um segmento de reta.

O participante apresenta duas situações hipotéticas, na primeira ele marca o ponto C e fica com dúvida se este ponto é interior ou exterior a região delimitada pela curva. O entrevistador diz que o ponto C é um ponto especial pois ele sob a curva. A segunda situação descrita pelo participante se trata de traçar um segmento de reta que intercepta a curva em infinitos pontos, porém, essa pergunta só foi entendida na fase de análise da entrevista, após os dois encontros terem ocorrido.

Figura 39 - Exemplo de pontos internos ou externos a uma figura - Atividade 1




Fonte: Autor.

**Considerações:** Na resposta ao item (f), o entrevistado reforça a ideia de que o conjunto figural carregado por ele, “colhido” ao longo dos anos nas aulas de matemática é um conjunto restrito as figurais usuais, quadrado, retângulo, triângulo e nem mesmo uma elipse faz parte.

Ao final da resposta, o participante diz que as figuras 1 e 2 o fizeram lembrar do sistema métrico egípcio, que em nosso contexto, reforça a ideia de medida ainda que esse não seja o objetivo da atividade.

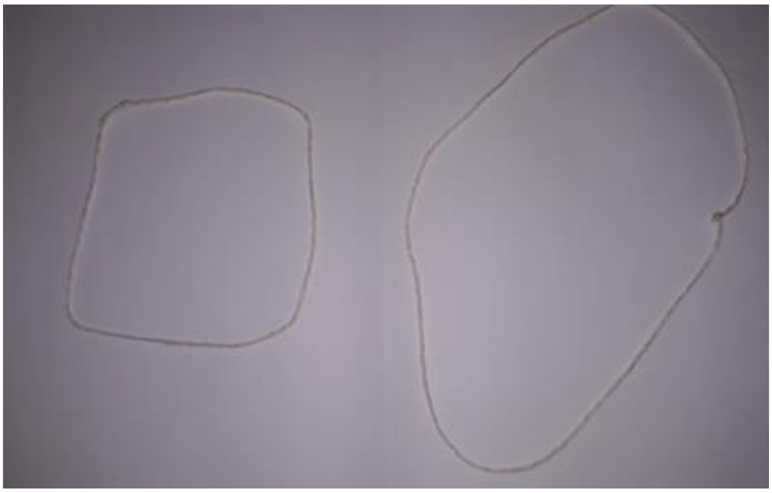
Quanto a definição de ponto inteiro e ponto externo, P1 desenha uma figura que remete a uma elipse, isto é, uma figura regular, convexa, que mais uma vez reforça a hipótese de que ele possui com conjunto figural restrito a poucas figuras.

Ele também parece não saber diferenciar semirreta de reta, o que foi resolvido com uma conversa breve.

Em relação as definições de ponto interior e ponto exterior, o participante não apresentou dificuldades no entendimento, aparentemente conseguiu se apropriar das definições apresentadas e apresenta duas situações, na primeira, marca o ponto C, FIGURA 39, o que nos faz rever as definições apresentadas pois o ponto escolhido fica sob a curva. A segunda situação se refere a escolher uma semirreta que intercepta a curva em um número infinito de pontos. Esta última, no momento da atividade não foi entendida pelo entrevistador e assim, não foi comentada.

**g) Você recebeu uma folha de papel que representa uma região limitada plana e alguns colares de barbante que representam curvas fechadas. Escolha dois desses colares e use-os sobre a folha, à vontade. Crie duas situações que você considera diferentes. Justifique.**

Figura 40 - Resposta ao item (g), 1ª situação - Atividade 1



Fonte: Autor.

Inicialmente P1 pergunta, "É meio que para desenhar duas figuras? Montar duas figuras diferentes no plano?" O entrevistador reforça que o objetivo é criar duas situações diferentes. O participante pergunta, "Mas eu posso escolher o formato que eu quiser?". O entrevistador responde que sim.

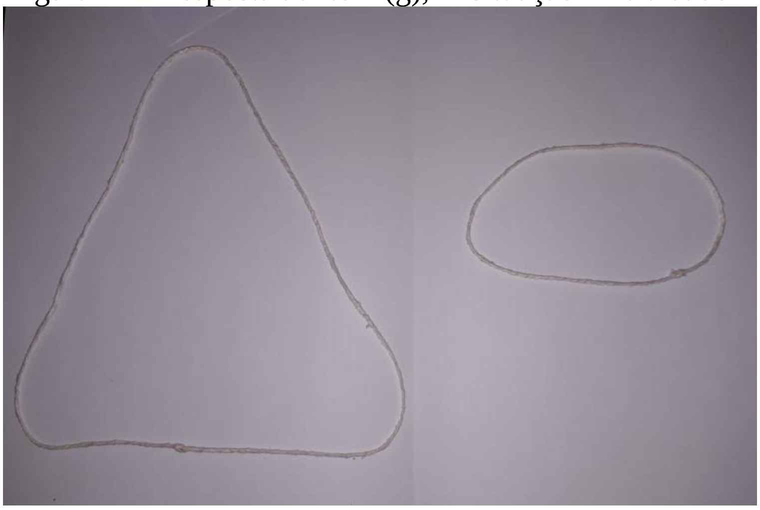
Utilizando os dedos, ele diz que fez um "quadrado" usando um dos colares e assim que solta o colar, o formato é desfeito, ver FIGURA 40. Na mesma folha de papel A3, à direta, o participante diz tentar fazer um "círculo perfeito". Ele finaliza dizendo que são duas situações diferentes.

Após montar a 1ª situação, o participante registra com seu celular a situação, retira as tiras de barbante e pega duas outras. Em seguida, é solicitado que ele faça uma nova situação com um novo par de colares de barbante.

Para 2ª situação, utilizando os colares, o participante sob a folha A3, faz duas figuras, uma ao lado da outra, ver FIGURA 41, e diz que as figuras representam um triângulo e uma elipse.

Na sequência, sob a orientação do entrevistador, a 3ª situação é construída de forma que um colar estivesse na região interna do outro colar, criando assim uma situação diferente da apresentada pelo participante nas duas situações anteriores, ver FIGURA 42.

Figura 41 - Resposta ao item (g), 2ª situação - Atividade 1



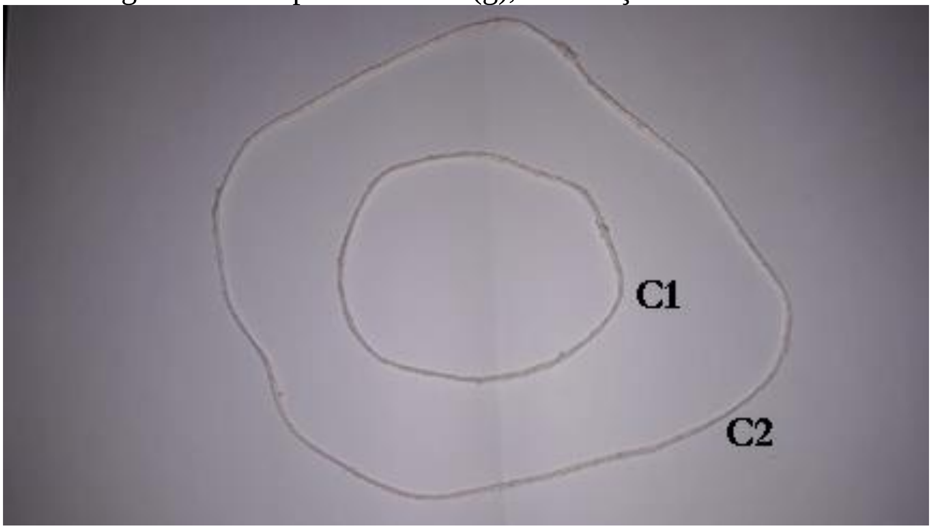
Fonte: Autores

Para facilitar a descrição da resposta de P1, definiremos por C2 o colar que ele coloca primeiro sob a folha de papel. No interior de C2, é colocado um colar que chamaremos de C1. A FIGURA 43 representa a situação descrita.

Figura 42 - Resposta ao item (g), 2ª situação - Atividade 1

Fonte: Autor.

Figura 43 - Resposta ao item (g), 3ª situação - Atividade 1




Fonte: Autor.

O entrevistador pergunta ao participante o que ele achou dessa situação, P1 verbaliza, “Eu achei interessante porque eu parei para pensar que por exemplo, essa figura aqui (ele aponta para a curva C1) tem uma área, e essa aqui também (gesticulando com a mão sobre a região interna de C2), se ela não tivesse dentro (o participante aponta para C1), se elas tivessem separadas por exemplo. Só que quando eu coloco uma dentro da outra, eu não posso somar as áreas delas e falar que essa figura aqui (figura composta por C1 e C2) tem tal área porque, essa área (o participante se refere a C1 e seu interior) somada com essa área (ele aponta para região interna de C2) dá um tal valor. Eu deveria considerar por exemplo, que a área dessa figura (ele aponta o interior de C1) está ocupando o que deveria ser o espaço da área dessa (ele aponta para C2).”

O participante se mostra incomodado com essa 3ª situação. Na fase de discussão, o entrevistador opta em ir para o próximo item para que o participante pudesse descrever um pouco mais sobre a 3ª situação.

**Considerações:** P1 no início, parece ficar surpreso pela liberdade em poder utilizar os colares para reproduzir as figuras que quiser. Em seguida, há de se destacar as figuras formadas, quadrado, circunferência, triângulo (aparentemente isósceles) e elipse, todas regulares e convexas.

O objetivo da atividade, propor que o participante criasse duas situações diferentes com os colares, não foi atingido. O que faz o participante é propor representações de figuras geométricas diferentes.

Na 3ª situação, temos uma figura formada pelos dois barbantes (que obedece a uma certa simetria), ver FIGURA 43, isto é, uma figura cuja região interna é delimitada por duas curvas representadas pelos colares C1 e C2. É interessante notar que para o participante, a figura é formada por sobreposição de figuras. Ele não entende C1 como um caminho, mas sim, como uma figura plana, o mesmo ocorre para C2. Logo, para o participante, não faz sentido posicionar a curva C1, na região interna de C2, o que reforça a ideia de que o participante tem dificuldade de compreender uma curva descrita no plano como um elemento unidimensional e sim bidimensional, considerando a além da curva, sua região interna, não distinguindo curva de região interna.

**h) Em cada uma das situações que você criou, destaque a região interior e a região exterior dos desenhos formados com os colares de barbante.**

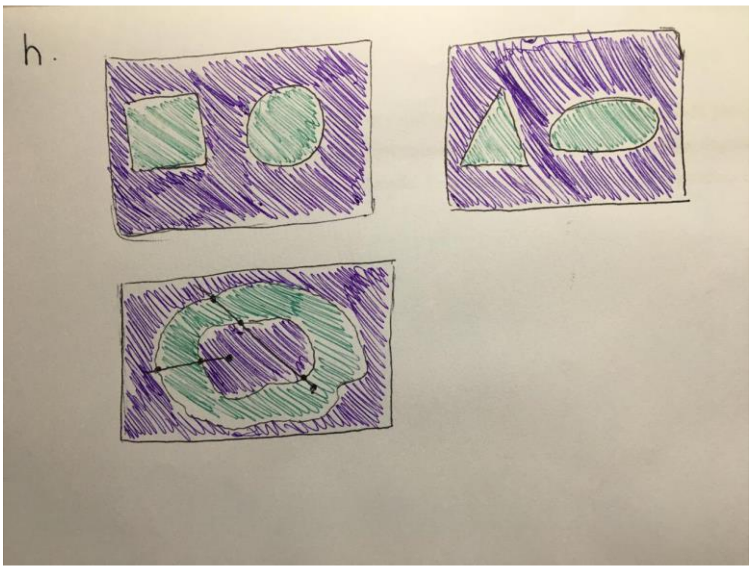
O participante é orientado a fazer a representação figural das três situações na folha de resposta e utilizar a caneta de cor roxa para destacar a região externa de uma figura, uma caneta de cor verde para destacar a região interna e preta para destacar a fronteira.

**1ª situação**

O participante verbaliza, “Mas por exemplo, a parte exterior do quadrado pode ser considerada a parte interior do círculo?”. E completa dizendo, “Eu teria que pintar tudo de roxo pois a parte interna de uma é parte externa do outro”.  Ele é orientado pelo entrevistador a pintar inicialmente a parte interior das figuras e em seguida, destacar a região externa as duas figuras, ver FIGURA 44.

O participante faz a fronteira das figuras utilizando a caneta de cor preta, pinta de cor verde a região interna do quadrado e da circunferência, em seguida pinta de roxo a região externa das duas figuras.

Figura 44 - Resposta ao item (g) - Atividade 1




Fonte: Autor.

**2ª situação**

O participante faz o contorno do triângulo e da elipse utilizando a caneta de cor preta, pinta de verde a região interna das figuras e de roxo a região externa.

**3ª situação**

O participante inicia perguntando “O que eu considero da figura aqui? É tudo isso aqui?” (ele se refere a figura 9, e aponta para a região interna de C2 e ignorando C1, ver FIGURA 43). Em seguida, ele questiona, “Se por exemplo, eu considerar que tudo isso aqui é uma figura (ele se refere à figura da 3ª situação), então eu não vou considerar a individualidade dessa circunferência aqui (ele se refere a curva C1)”. O entrevistador sugere que ao participante analise a figura, utilizando para isso, as definições de ponto interior e ponto exterior à uma região. Ele faz uma observação, “Se eu colocar um ponto aqui (ele aponta para a região compreendida entre C1 e C2) e traçar aqui uma semirreta (ele faz o movimento de interceptar a curva C1), eu consigo dois pontos, nessa figura aqui (ele aponta para a região interna da figura C1), mas não nessa”, (ele aponta para a figura formada por C1 e C2).

O entrevistador sugere ao participante que represente no papel a situação apresentada por ele, o participante então faz as marcações na própria figura da atividade, ver FIGURA 44. Ao verificar que a semirreta traçada intercepta a figura em 3 pontos, ele conclui que o ponto está na região delimitada pelas curvas C1 e C2. O participante marca um ponto na região delimitada por C1, traça uma semirreta, observa que ela intercepta a figura em 2 pontos e conclui que o ponto escolhido está na região externa a região delimitada pelas curvas C1 e C2. Em seguida ele verbaliza, “Só que não está fazendo sentido, por exemplo, se a gente considerar que, né? Ela tá dentro da outra figura. Na teoria deveria estar dentro”. O entrevistador então apresenta a ideia de “buraco” e faz uma alusão a uma “rosquinha plana”. O participante verbaliza, “Então eu posso considerar esse espaço aqui (ele aponta para a região interna de C1) e esse espaço aqui (ele aponta para a região exterior de C2) como sendo a parte externa na figura?”. O entrevistador confirma que sim, então o participante pinta a figura corretamente, ver FIGURA 44.

**Considerações:** O objetivo da atividade é propor que o participante possa trabalhar com figuras planas que sejam formadas por duas curvas, explorando assim os conceitos de fronteira, região interna e região externa de forma concreta, sob o paradigma G0-G1.

O participante na 3ª situação, põem em xeque suas ideias relacionadas a região interna e a fronteira e foi estimulado a confrontar essas ideias com as definições de região interna e região externa. Com isso, a percepção que o participante tem inicialmente de que a figura formada seja uma sobreposição de figuras vai se desfazendo paulatinamente até chegar em uma ideia parecida com “na região interna de uma figura plana, pode haver uma região externa”, não são as palavras utilizadas pelo participante, mas sim como o entrevistador traduz a fala do participante.

Acreditamos que essa atividade tenha contribuído com um maior repertorio figural do participante bem como acrescentando novas informações para sua imagem de conceito, tanto de área como de perímetro.

i) **O desenho a seguir representa um mapa estilizado do Estado de São Paulo.**

**i.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de São Paulo.**

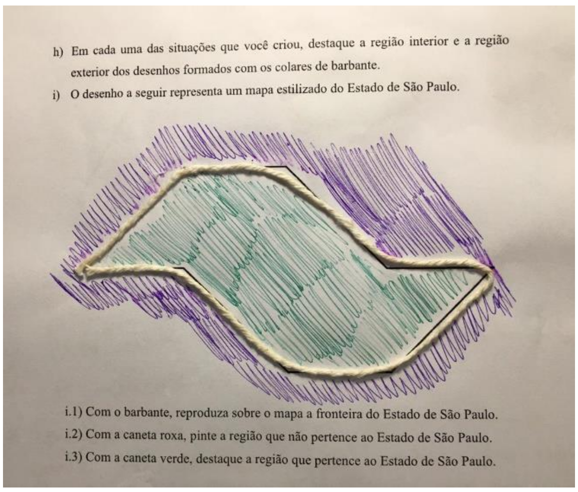
**i.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de São Paulo.**

**i.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de São Paulo.**

O participante cola o barbante no contorno do mapa estilizado de São Paulo, ver FIGURA 45. Em seguida pinta de cor verde a região interna do mapa e de cor verde a região externa de roxo.

Ao final ele menciona que aprendeu de forma prática o que foi discutido na atividade anterior. “Eu acho que essa atividade (i) apresentou de forma prática o que a gente aprendeu nos outros exercícios, nos exercícios anteriores, que é como classificar a região interna e a região externa de uma figura”. Ele justifica as cores que pintou apontando para a folha e destacando um ponto imaginário da região externa do mapa de São Paulo, descreve a semirreta a partir desse ponto e mostrando que essa semirreta intercepta o barbante (fronteira) em dois pontos. Ela faz o mesmo procedimento para justificar a região interna do mapa.

Figura 45 - Resposta ao (i) - Atividade 1



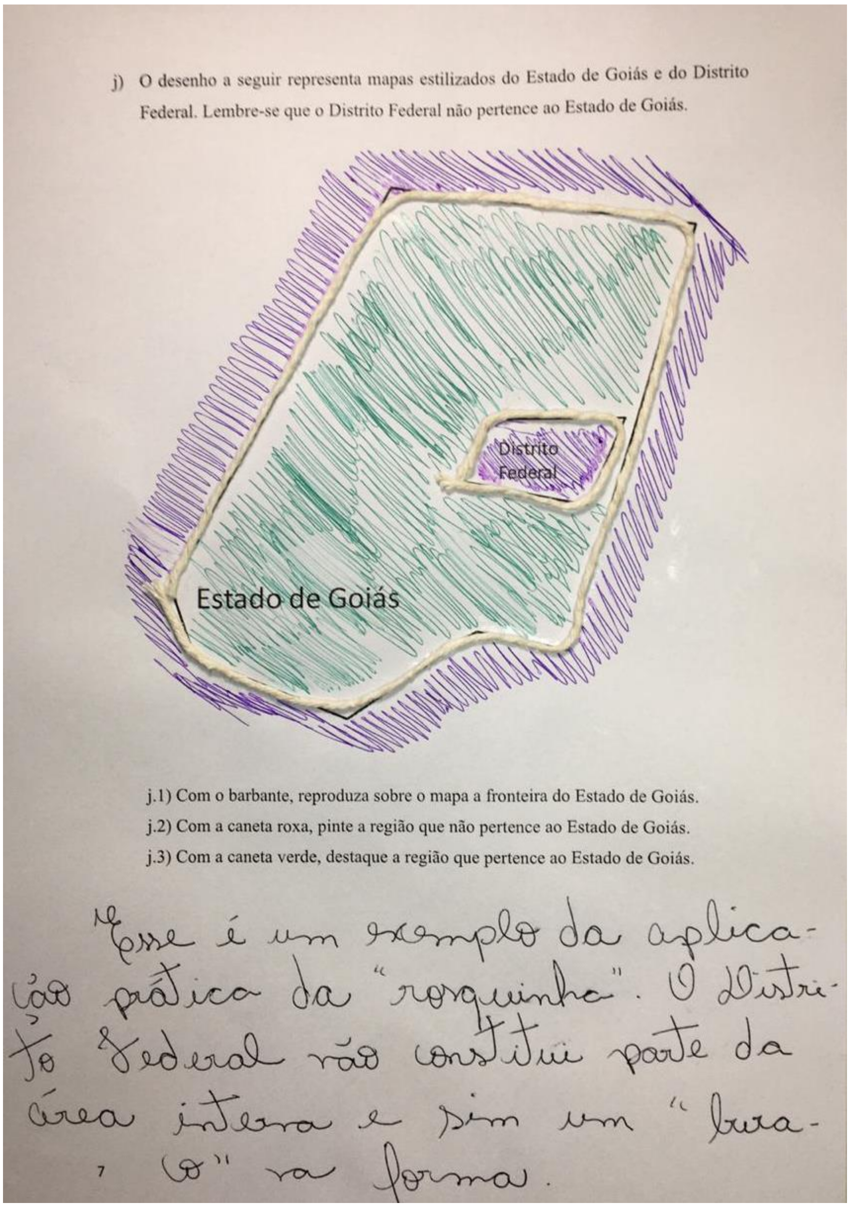

Fonte: Autor.

**Considerações:** O participante utiliza as cores corretamente para destacar/pintar o mapa e sem a necessidade de estímulos, aplicou as definições de região interna e região externa a uma curva. Ao final, reconhece a atividade (i) como uma “aplicação prática” das definições de região interna e região.

A manipulação do barbante para formar a fronteira da figura, no caso do participante, acaba sendo imprescindível, uma vez que ao longo das atividades anteriores, apresentou dificuldades para reconhecer a fronteira de figuras planas.

**j) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado de Goiás e do Distrito Federal. Lembre-se que o Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás.**

Figura 46 - Resposta ao item (j) - Atividade 1




Fonte: Autor.

**j.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de Goiás.**

Ao ler o enunciado da atividade, o participante menciona que é “o mesmo exercício” que foi feito com o item da “rosquinha”, referindo-se à situação 3 do item (h). Esse comentário é feito por ele associar a situação apresentada (mapa de Goiás e Distrito Federal) ao mapa da atividade, no caso, mapa de Goiás.

Inicialmente ele contorna com o barbante a fronteira em que o Estado de Goiás faz com os outros Estados, em seguida, contorna a fronteira que o Distrito Federal faz com o Estado de Goiás, ver FIGURA 46.

**j.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de Goiás.**

O participante lê o item (j.2) e pinta de cor roxa o mapa do Distrito Federal, e diz que a região do Distrito Federal representa um “buraco na forma” pois ele não pertence ao Estado de Goiás. A decisão de pintar o Distrito Federal de roxo parte da informação fornecida no enunciado da atividade.

**j.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de Goiás.**

O participante destaca em verde toda a região do Estado de Goiás. Em seguida, registra na folha de respostas: “Esse é um exemplo da aplicação prática da rosquinha. O Distrito Federal não constitui parte da área interna e sim um “buraco na forma”.

**Considerações:** O participante consegue desenvolver a atividade sem a necessidade da utilização da definição pois ele utiliza a informação do enunciado da atividade (Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás).

A citação ao “exemplo da rosquinha” mostra que realmente o participante se apropriou da figura e passou a utilizá-la. Importante destacar que P1 a cada atividade, vai se apropriando cada vez mais de figuras compostas por duas curvas fechadas.

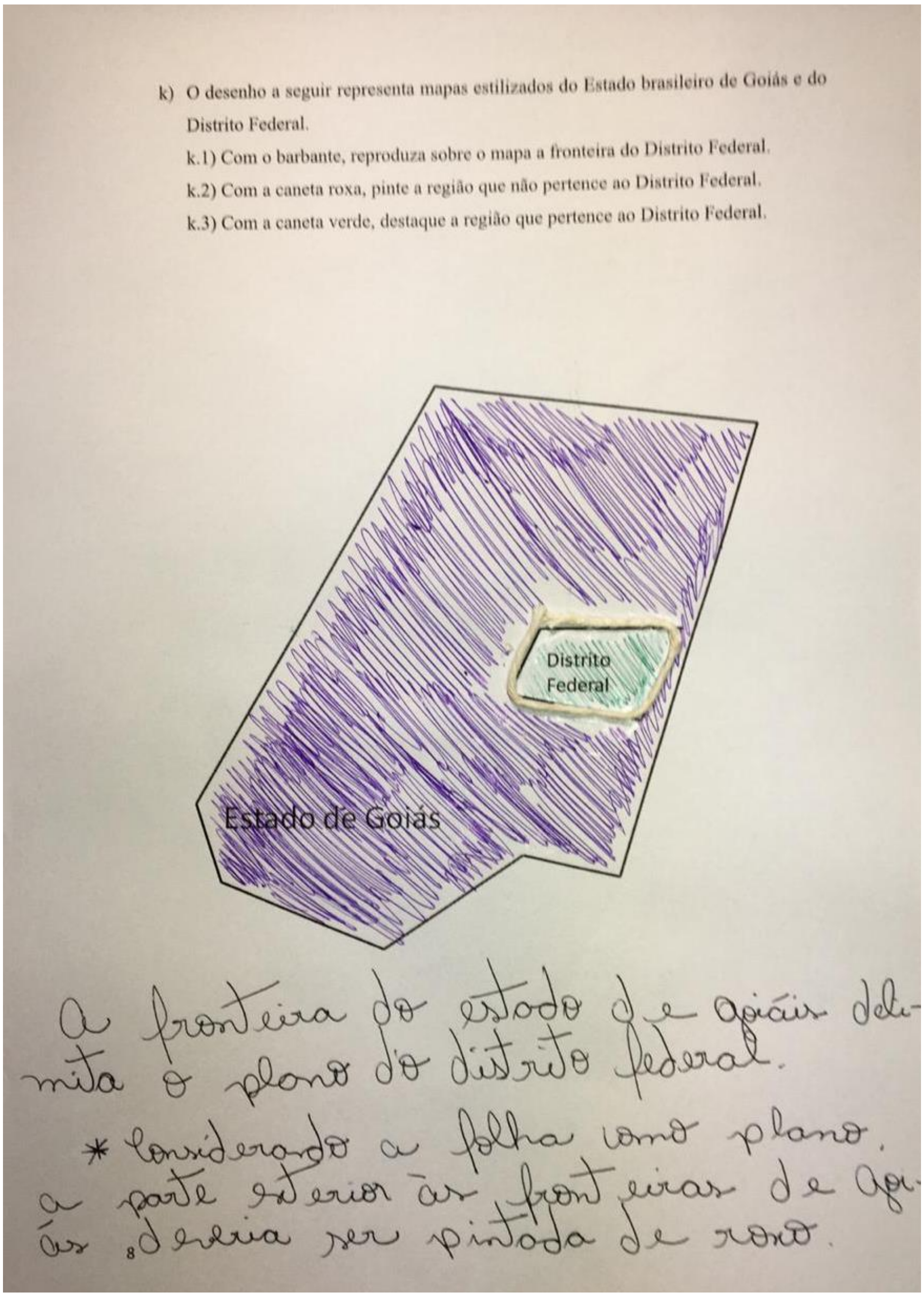
**k) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado brasileiro de Goiás e do Distrito Federal.**

**k.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Distrito Federal.**

**k.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Distrito Federal.**

**k.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Distrito Federal.**

Figura 47 - Resposta ao item (k) - Atividade 1




Fonte: Autor.

Ao ler o enunciado da atividade, P1 pergunta “Posso considerar neste exemplo que o plano do Distrito Federal é o Estado de Goiás?”, ao ser perguntada sobre o que estava querendo dizer, o participante concorda com a afirmação, “A região do Estado de Goiás delimita o Distrito Federal” e verbaliza, “Vou fazer a consideração que por exemplo, essa região aqui (ela aponta para o território do Estado de Goiás), é a região externa do Distrito Federal, porque a gente tem essa linha aqui delimitando o plano (ele aponta para a fronteira que o Estado de Goiás faz com outros Estados), por isso não vou pintar aqui (ele mostra a região externa do Estado de Goiás novamente), ver FIGURA 47.

O participante quis dizer que irá considerar o território do Estado de Goiás como um plano e o Distrito Federal como região desse plano.

Ao terminar de pintar o mapa do Distrito Federal, o participante escreve na folha de respostas “A fronteira do Estado de Goiás delimita o plano do Distrito Federal”. Em seguida verbaliza, “Então se eu fizesse um ponto fora do Estado de Goiás aqui (o participante aponta para a região externa do Estado de Goiás), eu poderia considerar que a reta cruzaria esse ponto aqui (ponto na fronteira que o Estado de Goiás faz com os outros Estados), esses (dois pontos na fronteira do Distrito Federal) e esse (ponto na fronteira que o Estado de Goiás faz com os outros Estados), então seria um número par de pontos”. O entrevistador pergunta o que esse ponto escolhido por P1 representa em relação ao Distrito Federal. P1 responde, “Se é um número par, está fora”. Em seguida pergunta, “Então eu preciso pintar de roxo essa região (região externa do Estado de Goiás)”. O entrevistador pergunta, “O que você acha?”. P1 responde, “É que eu justifiquei que o plano que usei foi do Estado de Goiás, só que o plano pode ser considerado a folha inteira né?”.

O entrevistador confirma que sim e então P1 diz, “Então eu posso fazer por exemplo um asterisco e falar que se eu considerasse a folha como um plano, eu pintaria as partes externas do Estado de Goiás de roxo?”. O entrevistador confirma, o participante escreva a seguinte nota, “Considerando a folha como plano, a parte exterior às fronteiras de Goiás deveria ser pintada de roxo”. Como consideração final, o participante diz, “Quando a gente fala do Distrito Federal, comparando com o exemplo da rosquinha, a gente está falando do buraco da rosquinha, então a gente pode fazer uma analogia dizendo que se nós fizéssemos uma fronteira no buraco da rosquinha daria praticamente as mesmas considerações que a gente fez aqui, com o Estado de Goiás e o Distrito Federal.”

O entrevistador diz a ideia de ponto interno e externo do Distrito Federal e o que seria pintado de roxo.

**Considerações:** O participante mostra que não tem um bom entendimento sobre o conceito de plano e sua infinitude (considera o Distrito Federal como um plano), embora devêssemos deixar explicito no enunciado da atividade que a folha de respostas poderia ser considerada uma região limitada do plano.

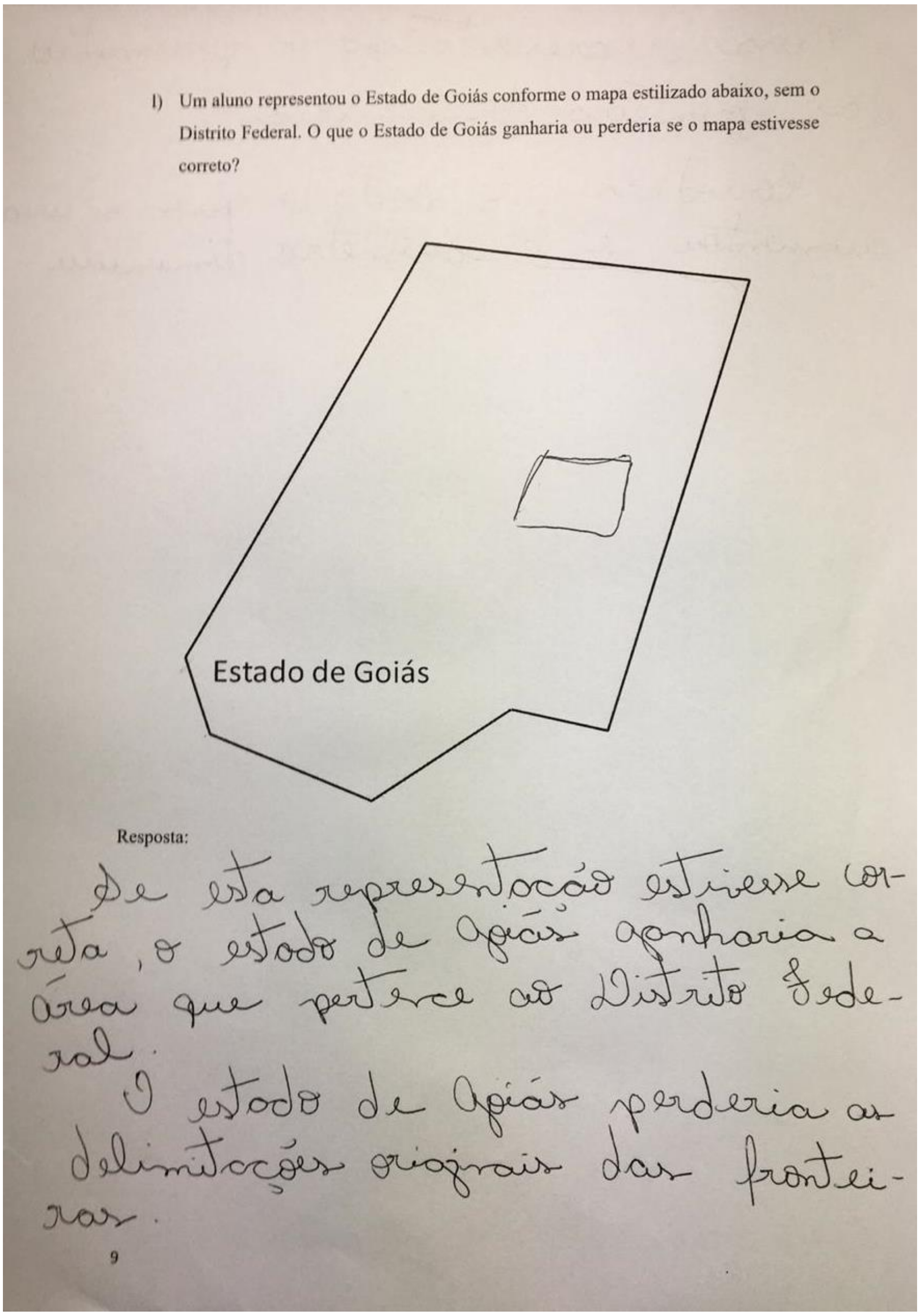
No mapa, o participante cola o barbante na fronteira do Distrito Federal, pinta corretamente a região interna. Num primeiro momento, ele considera o Estado de Goiás como sendo um plano que contém e apresenta dificuldades em pintar a região externa do Distrito Federal, inicialmente limitando essa região à apenas o Estado de Goiás, pois o considera como o plano que contém o Distrito Federal. Em seguida, reconhece que poderia pintar também de roxo a região externa

l) **Um aluno representou o Estado de Goiás conforme o mapa estilizado abaixo, sem o Distrito Federal. O que o Estado de Goiás ganharia ou perderia se o mapa estivesse correto?**

O participante verbaliza, “Pela lógica ele ganharia a área do Distrito Federal, então por exemplo, se não houvesse a delimitação do Distrito Federal, então eu consideraria que tudo isso (o participante aponta para a região interna do Estado de Goiás), faz parte do Estado de Goiás sendo que essa consideração está errada porque quando vamos considerar a área do Estado de Goiás, a gente tira a do Distrito Federal”. Ele responde na folha de questões, “Se esta representação estivesse correta o Estado de Goiás ganharia a área que pertence ao Distrito Federal”, ver FIGURA 48.

Quando o entrevistador pergunta se o Estado de Goiás perderia algo, P1 pergunta se é em relação a área. O entrevistador sugere que ele compare os mapas, em seguida P1 diz, “Ele ganharia terreno, e se a gente fosse por exemplo, pintar o formato dele, ele perderia o formato original, ele sofreria uma mutação, se a gente fosse pintar em relação à área, então eu poderia considerar que ele perderia o formato, a forma original das fronteiras”. Na folha de respostas, P1 escreve, “O Estado de Goiás perderia as delimitações originais das fronteiras”. O entrevistador pergunta sobre essa mudança na fronteira, P1 diz, “Se fosse por exemplo, medir a fronteira, ele perderia fronteira, se fosse medir o espaço da fronteira”. O entrevistador pergunta sobre uma possível justificativa da afirmação feita sobre essa perda, P1 desenha no mapa do Estado de Goiás, o Distrito Federal e diz, “Se nós pegássemos uma fita métrica, na imaginação, o perímetro da fronteira (ele aponta com a caneta para a fronteira que o Estado de Goiás faz com os outros Estados e aponta para a fronteira do Distrito Federal) teria um tamanho, se a gente tirasse essa fronteira, deixasse essa imagem (mapa do Estado de Goiás sem o Distrito Federal), o perímetro da fronteira diminuiria”. Na folha de respostas, o participante escreve, “Nessa representação o perímetro da fronteira diminuiria”.

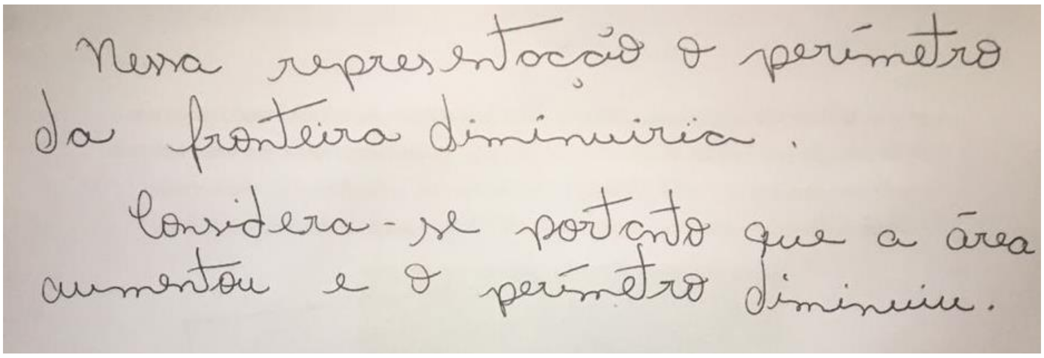
Figura 48 - Resposta ao item (l) - Atividade 1. Marcação do Distrito Federal feita pelo participante




Fonte: Autor.

O entrevistador pergunta a P1 sobre a ideia de a área aumentar e o perímetro diminuir. O participante faz algumas considerações, “Então eu poderia considerar que se isso fosse uma forma, a área teria aumentado e o perímetro diminuído”. Na folha de respostas ele escreve, “Considera-se, portanto que a área aumentou e o perímetro diminuiu”, ver FIGURA 49.

Figura 49 - Continuação da resposta ao item (l) - Atividade 1


Nessa representação o perímetro
da fronteira diminuiria.
Considera-se portanto que a área
aumentou e o perímetro diminuiu.

Fonte: Autor.

**Considerações:** P1 reconhece que a área de Goiás aumentaria, caso a representações estivesse correta, porém apresenta dificuldades para reconhecer a diminuição da fronteira, reforçando assim a ideia de que para ele, uma figura plana é entendida como um objeto que possui apenas área. Em um segundo momento, após o estímulo do entrevistador, P1 percebe e relata que houve uma mudança na fronteira e que esta diminuiu.

A citação a “fita métrica”, reforça a concepção numérica de perímetro. A utilização do termo “perímetro da fronteira” indica que ele ainda possui um entendimento confuso sobre esses conceitos e suas diferenças.

Na fase de discussão, após o entrevistador fazer um resumo do que foi discutido, o participante reforça a ideia de que trabalhou numa situação em que uma mudança feita numa figura plana, provocou um aumento em sua área e a diminuição de seu perímetro, ver FIGURA 49.

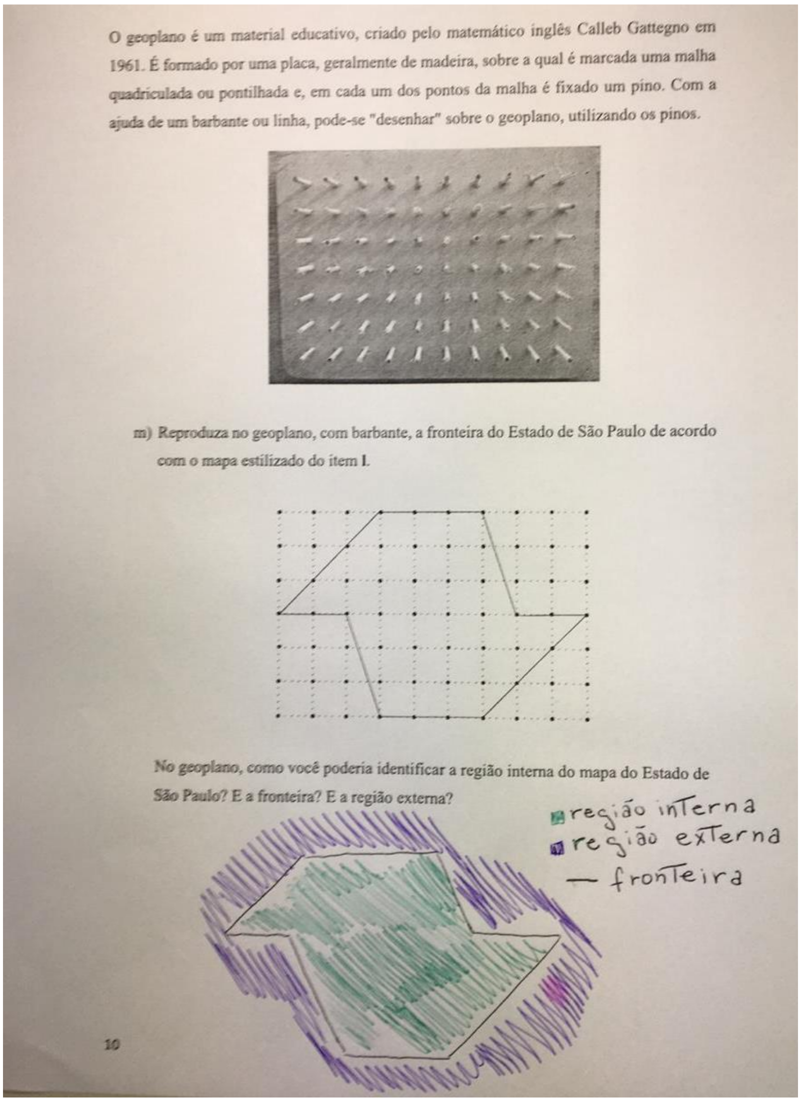
**O Geoplano é um material educativo, criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno em 1961. É formado por uma placa, geralmente de madeira, sobre a qual é marcada uma malha quadriculada ou pontilhada e, em cada um dos pontos da malha é fixado um pino. Com a ajuda de um barbante ou linha, pode-se "desenhar" sobre o Geoplano, utilizando os pinos.**

**m) Reproduza no Geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de São Paulo de acordo com o mapa estilizado do item (i).**

Figura 50 - Resposta ao item (m) - Atividade 1


Fonte: Autor.

Figura 51 - Resposta ao item (m) - Atividade 1


O geoplano é um material educativo, criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno em 1961. É formado por uma placa, geralmente de madeira, sobre a qual é marcada uma malha quadriculada ou pontilhada e, em cada um dos pontos da malha é fixado um pino. Com a ajuda de um barbante ou linha, pode-se "desenhar" sobre o geoplano, utilizando os pinos.

m) Reproduza no geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de São Paulo de acordo com o mapa estilizado do item l.

No geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de São Paulo? E a fronteira? E a região externa?



10

Fonte: Autor.

O participante diz que nunca havia visto e nem manipulado um Geoplano e não nem mesmo sabia de sua existência. Com o barbante, ele faz a representação do mapa de São Paulo no Geoplano. Ele consegue fazer o mapa do Estado de São Paulo utilizando o Geoplano e uma tira de barbante.

**No Geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de São Paulo? E a fronteira? E a região externa?**

Após ler o enunciado, o participante passa a palma da mão sobre os pinos que fazem parte da região interna do mapa e diz, “A parte interna é essa aqui, que está delimitada pelo barbante porque se eu pegar por exemplo esse ponto e fizer uma semirreta, ver FIGURA 50, ela só vai passar uma vez, que é um número ímpar, então ele está internamente. Agora se eu tomar como referência esse ponto aqui (ele aponta e toca em um pino que não pertence a região interna do mapa) e traçar uma semirreta, considerando que ela é infinita, ela fará uma intercessão aqui e aqui (o participante mostra dois pontos sobre o barbante), são duas intercessões, dois é um número par, então ele está fora, segundo a regra que a gente leu. E a fronteira é o que separa a parte interna da parte externa, então seria o próprio barbante”.

Para finalizar sua resposta, o participante desenha o mapa estilizado de São Paulo o pinta utilizando a cor roxa para indicar a região externa, preto para a fronteira e verde para a região interna.

**Considerações:** O participante revela no início da atividade que nunca havia trabalhado com o Geoplano, já havia revelado antes que não trabalhou ou não se recordava em ter trabalhado com materiais concretos nas aulas de matemática, o que nos permite concluir que o paradigma G0-G1 foi pouco explorado durante a vivência do participante ao longo do Ensino Fundamental.

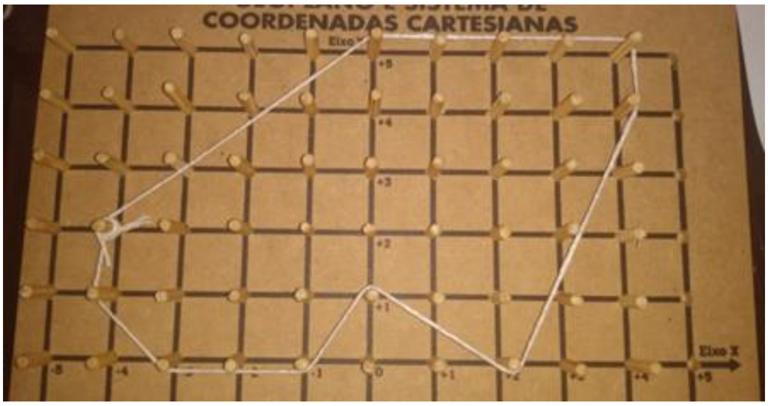
Ao montar a fronteira do Estado de São Paulo, P1 não faz uma representação muito fiel a representação do mapa estilizado de São Paulo. Ele descreve a fronteira do mapa como algo que separa a região interna da região externa de uma figura plana e não como algo que delimita uma região.

Nota-se que o participante ao aplicar a definição de ponto interior e ponto exterior a uma região, utilizando o Geoplano, ele procura fazer isso sempre tocando, seja em um pino, seja num conjunto de pinos ou no barbante. O que nos leva a concluir que ele de alguma forma precisa tocar para fazer suas validações, assemelhando-se as ideias do paradigma G0-G1.

n) **Reproduza no Geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de Goiás, de acordo com o mapa estilizado do item j.**
**No Geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de Goiás? E a fronteira? E a região externa?**

Nesta atividade o participante deve reproduzir as fronteiras do Estado de Goiás no Geoplano. Na primeira versão do mapa P1 não considera o Distrito Federal, ao escrever na folha de respostas, ela reproduz o mapa do Estado de Goiás e nota que está faltando o Distrito Federal. Ele pergunta se deveria considerar ou não o Distrito Federal. O entrevistador diz que ele precisa considerar a fronteira. P1 concluí que deve considerar o Distrito Federal e diz que precisará refazer a representação no Geoplano.

Figura 52 - Resposta ao item (n) - Atividade 1




Fonte: Autor.

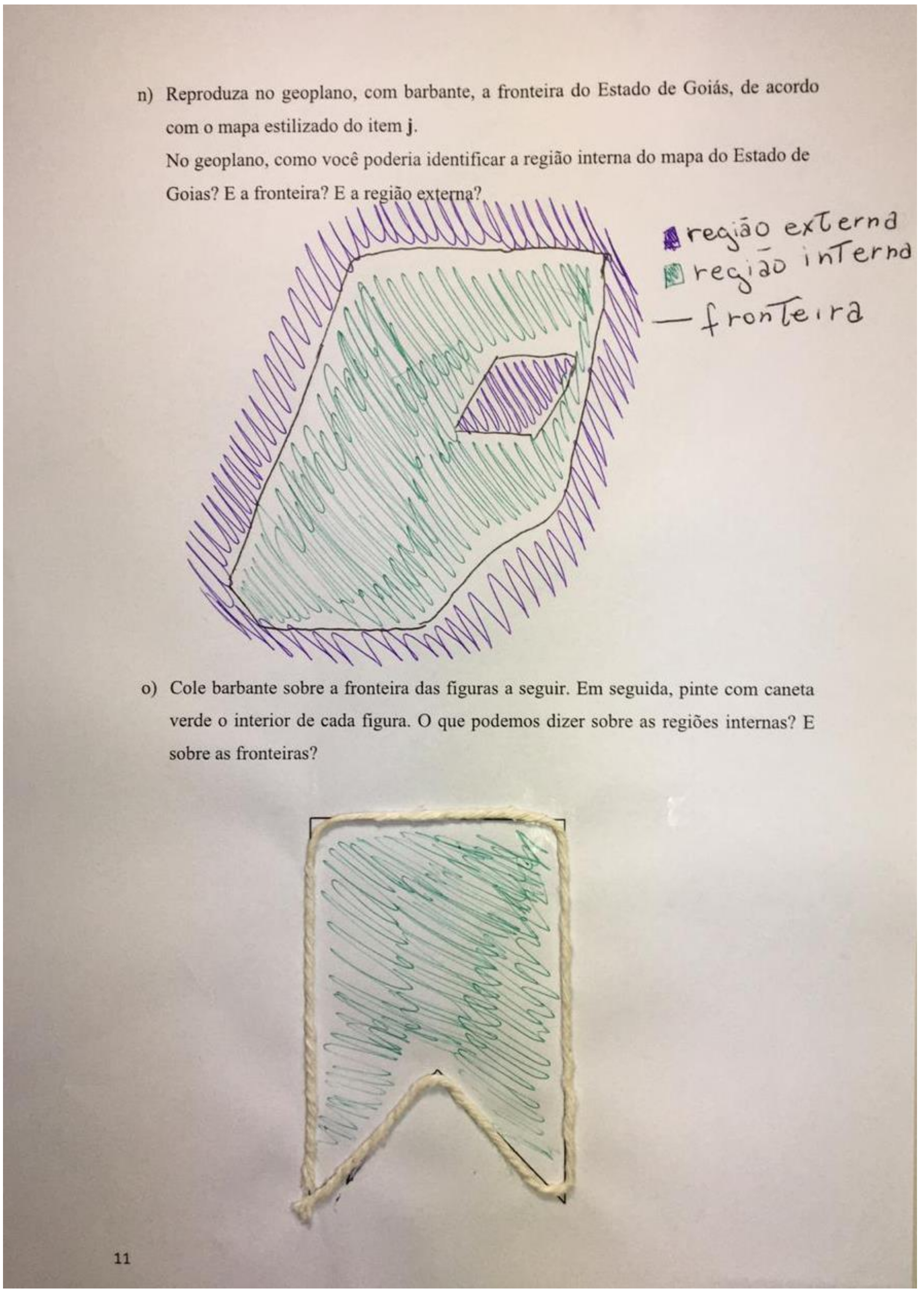
Figura 53 - Resposta corrigida ao item (n) - Atividade 1


Fonte: Autor.

Antes de concluir a atividade, o entrevistador pergunta para P1 sobre ter feito no Geoplano a representação do Estado de Goiás sem considerar o Distrito Federal e ter notado a falta apenas quando desenhou na folha de questões, ver FIGURA 52. P1 responde, “Eu acho que é porque no Geoplano eu estava muito concentrada na fronteira, em como eu iria fazer a fronteira, então eu não prestei muita atenção no desenho que eu estava fazendo exatamente, aí quando eu fui fazer no papel, na folha, eu prestei muita atenção e lembrei inclusive da legenda que eu havia feito no mapa anterior e eu acho que foi por isso que eu lembrei, por causa da legenda e porque eu estava prestando mais atenção no formato do desenho”. O entrevistador pede para P1 falar um pouco mais sobre ideia que descreveu, ele diz, “Quando eu olho para uma figura, eu contrasto a figura como o fundo e já sei a área dela, a delimitação da área dela. Quando eu penso em exercícios como o da rosquinha por exemplo, eu meio que deixo como segundo plano, como algo não tão importante o que eu vi dentro da figura, porque quando a gente olha, a gente olha diretamente para a figura e o fundo então a gente deixe em segundo plano o que está dentro da figura, tanto é que eu pensei que fosse duas figuras sobrepostas e não um buraco no meio de uma figura só. Porque acho que faz mais sentido lógico, por exemplo, quando a gente pensa em formas, não quando a gente pensa na vida real porque a gente tem vários exemplos disso na vida real, como por exemplo a própria rosquinha, mas quando representamos geometricamente fica mais difícil pensar logicamente nisso, mas quando vamos comparando com exemplos da vida real, vai ficando mais fácil, cada vez mais fácil”

O entrevistador pergunta se há alguma dificuldade em trabalhar com perímetro, P1 responde, “O que traz mais desconforto é o perímetro, porque a área é bem mais fácil de visualizar, então quando a gente pensa em figuras geométricas, a gente pensa em figuras geométricas perfeitas, ou formas perfeitas, porque é bem mais fácil de trabalhar, por exemplo, eu me sentiria bem mais confortável em trabalhar com um quadrado que seja de lado 2 do que um quadrado de lado 13,85 por exemplo, algo que não é exato. Então quando a gente tem a forma de pensar já estruturada num caminho, desviar desse caminho é um pouco difícil, então eu acho que é por isso que fica um pouco mais complicado trabalhar com perímetro. Sintetizando, é difícil trabalhar com algo que a gente não conhecia bem, trabalhar com algo novo. Então por exemplo, aplicar matemática em formas perfeitas, como eu já disse, é confortável. É confortável para gente. Por que é perfeito né? Entre aspas. Agora quando a gente passa a matemática para vida real, como por exemplo, para delimitar a fronteira dos países, dos Estados, aí fica um pouco mais difícil, porque não é natural pra gente trabalhar com isso”.

Figura 54 - Resposta aos itens (n) e (o) - Atividade 1




Fonte: Autor.

**Considerações:** P1 apresenta dificuldades em reproduzir a fronteira que o Estado de Goiás faz com o Distrito Federal, reforçando ainda mais a ideia de que ele não diferencia, um caminho fechado plano (unidimensional) de uma região plana (bidimensional), ou seja, para P1, toda curva fechada é entendida por P1 como uma superfície plana. Esse fato fica evidenciado sempre que P1 trabalha com figuras que possuem mais de uma fronteira. Ainda que não seja nosso objetivo, a manipulação de figuras delimitadas por mais de uma curva fez com que esse participante confrontasse sua ideia de fronteira, perímetro, região interna, região externa e área.

Durante a atividade, P1 busca justificar a dificuldade encontrada por ele ao se trabalhar com fronteira, relatando que a “área” é visual, já o perímetro não. O termo área aqui continua sendo utilizado por ele como sinônimo de interior da figura/superfície.

Nota-se que para o participante o entendimento dos objetos geométricos área e perímetro passam por validações feitas por observações o que mostra que seus pensamentos geométricos relacionados aos objetos em questão, área e perímetro, estão em sintonia com os paradigmas G0-G1. Por se tratar de um aluno dos anos final do Ensino Fundamental, este deveria ter ideias ligadas ao paradigma G2, conhecido como geometria de demonstração.

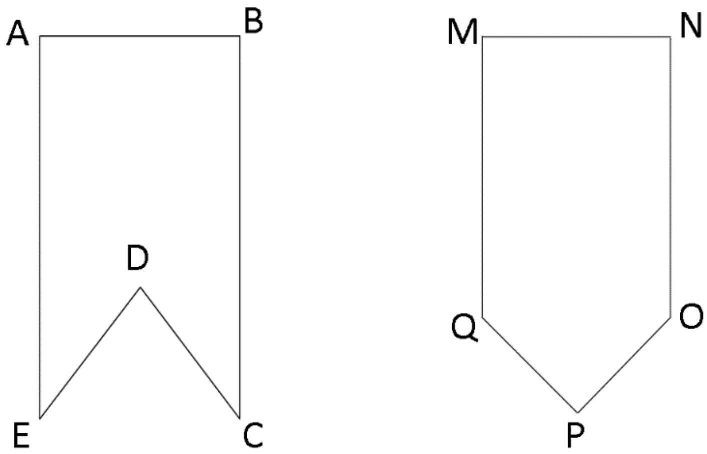
Por fim, P1 relata que existe uma certa dificuldade de se trabalhar em matemática quando é necessário utilizar figuras “não perfeitas” bem como números não inteiros. Assim, temos que além dos problemas que um aluno pode ter quando é limitado a trabalhar apenas com figuras regulares como quadrado, retângulo, triângulo e circunferência, esse conjunto acaba contribuindo para uma visão distorcida da Geometria e até mesmo da Matemática. O mesmo ocorre com o uso excessivo de números inteiros.

**o) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir. Em seguida, pinte com caneta verde o interior de cada figura. O que podemos dizer sobre as regiões internas? E sobre as fronteiras?**

Para facilitar o entendimento da resposta de P1, nomeamos os vértices das figuras da atividade. Originalmente, na resposta de P1 não há vértices, ele apenas aponta para o vértice que se refere.

Os pentágonos serão denominados por ABCDE e MNOPQ, assim como pode ser observado na FIGURA 55.

Figura 55 - Representação das figuras do item (o) - Atividade 1




Fonte: Autor.

O participante passa o barbante pelas figuras, ver FIGURA 54 da atividade (o), colando este sobre a fronteira das figuras. Em seguida ele pinta as regiões internas de cor verde e verbaliza, "Se a gente fosse estabelecer uma relação entre as regiões internas e as fronteiras, a gente diria que tudo que está dentro dos limites das fronteiras são as regiões internas ou região externa, essa é a relação que eu consigo estabelecer entre eles". Na folha de respostas ela escreve: "A região interna é a parte de dentro das fronteiras, que é basicamente o que quer dizer região interna", ver FIGURA 56. O entrevistador pergunta, "olhando para a região interna de uma figura e da outra, o que você pode dizer?", P1 responde: "Uma é côncavo (pentágono ABCDE) e outra é convexa (pentágono MNOPQ). Então por exemplo, essa aqui que é côncava (pentágono ABCDE) ela tem essa região aqui, essa parte aqui (ele passa a caneta mencionando os vértices CDE que formam um triângulo) está representada aqui (o participante aponta para o triângulo formado pelos vértices OPQ), então eu posso dizer que se a gente levar em consideração só essa parte (triângulo CDE), essa aqui (pentágono MNOPQ) tem o dobro da área essa aqui (pentágono ABCDE) em relação a essa parte (triângulo CDE). Porque além de preencher esse espaço aqui (triângulo CDE) ela duplicou (se referindo ao pentágono MNOPQ).

O participante responde na folha de respostas: "A primeira figura é côncava e a outra é convexa. <u>Podemos considerar que a área vazia da primeira figura esta preenchida e duplicada na segunda</u>, ou seja, nessa região em específico existe o dobro de área". (grifo nosso).

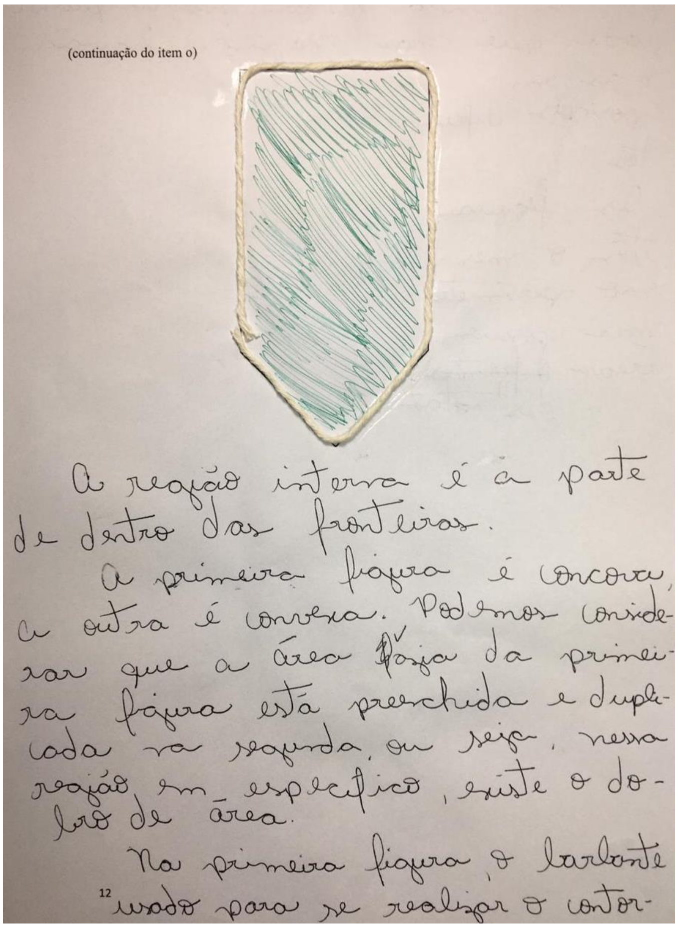
O entrevistador pergunta, "e em relação a fronteira?", P1 responde, "Se a gente for considerar o perímetro, eu acho que, assim, é um pensamento meu, eu acho que essas duas figuras têm o mesmo perímetro." O entrevistador solicita uma justificativa para essa a afirmação, P1 verbaliza, “Eu acho que não vou conseguir explicar isso aqui de uma maneira assim, bonitinha. Eu literalmente peguei essa parte aqui (vértice D) e empurrei para baixo e vi que era a mesma coisa.” O participante escreve na folha de respostas, “Na primeira figura o barbante usado para realizar o contorno da linha foi na mesma quantidade que para contornar a segunda figura, mas em posições diferentes. As figuras têm o mesmo perímetro, mas possuem áreas diferentes”.

O entrevistador pergunta se visualmente seria fácil de verificar que os perímetros são os mesmos (entre as duas figuras do item em questão). P1 responde,

> “Então, obviamente como a gente já vem discutindo, <u>a área é bem mais fácil de identificar do que o perímetro, porque é muito visível</u>. Aí na questão do perímetro, pode-se confundir um pouco <u>em razão da visão mesmo</u>. Porque quando a <u>gente olha por cima, rápido, a primeira figura tem menos perímetro que a segunda, porque a gente relaciona com a área</u>, só que na realidade, pelo sentido logico como a gente já falou, a gente consegue perceber que é o mesmo perímetro, (grifo nosso).

Só que a linha, nesse caso o barbante, está em uma posição diferente. Que foi o que justifiquei na questão.”

Figura 56 - Continuação da resposta do item (o) - Atividade 1




Fonte: Autor.

**Considerações:** P1 apresenta não tem bem estabelecida uma ideia de comparação, no caso, entre regiões internas e fronteiras. Um termo utilizado pelo participante que nos chama a atenção é “área vazia”, revelando uma dificuldade em se expressar matematicamente.

Para estabelecer a comparações entre regiões internas e fronteiras, o participante precisou ser estimulado e a partir daí ele apresenta suas ideias e estratégias para desenvolvimento da atividade.

O participante nota com facilidade que se trata de figuras com áreas diferentes. Ele distingue e reconhece a figura de maior área da figura de menor área utilizando para isso uma comparação visual entre as regiões internas e utilizando para isso a área do triângulo CDE. Em seguida ele reafirma que o perímetro é menos visual que a área, porém diz conseguir afirmar que o perímetro das duas figuras são os mesmos por ter gastado a mesma quantidade de barbante para contornar ambas as figuras. E assim, P1 começa a associar a fronteira com o perímetro, por meio de uma medida. Importante notar que embora as comparações entre fronteiras estejam sendo feitas, o participante busca estabelecer uma unidade de medida, um número para que consiga fazer sua análise. No caso, a quantidade de barbante.

Vale também destacar que nesta atividade o participante começa associar a fronteira de uma figura ao barbante e a quantidade deste ao perímetro. Se por um lado a fronteira passa a auxiliar no entendimento do perímetro como grandeza, por outro P1 busca um meio de levar a análise para o campo numérico, reforçando para si a ideia de perímetro como um número.

O participante destaca que inicialmente, para ele, dentre as duas figuras apresentadas na atividade, identificar a figura de maior área, de forma visual, de certa forma o faz pensar que essa figura terá o maior perímetro, porém, como ele sabe que essa relação não é necessariamente verdadeira, ele busca uma outra forma de tirar suas conclusões.

**p) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir (moeda japonesa e moeda chinesa). Em seguida, pinte o interior de cada figura.**

Figura 57 - Resposta ao item (p) - Atividade 1


Fonte: Autor.

O participante contorna com barbante corretamente as fronteiras das moedas e pinta o interior de verde. Ele destaca que é um novo exemplo do “caso da rosquinha”.

**Considerações:** O objetivo da atividade é fazer com que o participante manipule, sob o paradigma G0, com figuras cuja região interna seja delimitada por duas curvas, trazendo para isso a face de duas moedas, uma japonesa e uma chinesa.

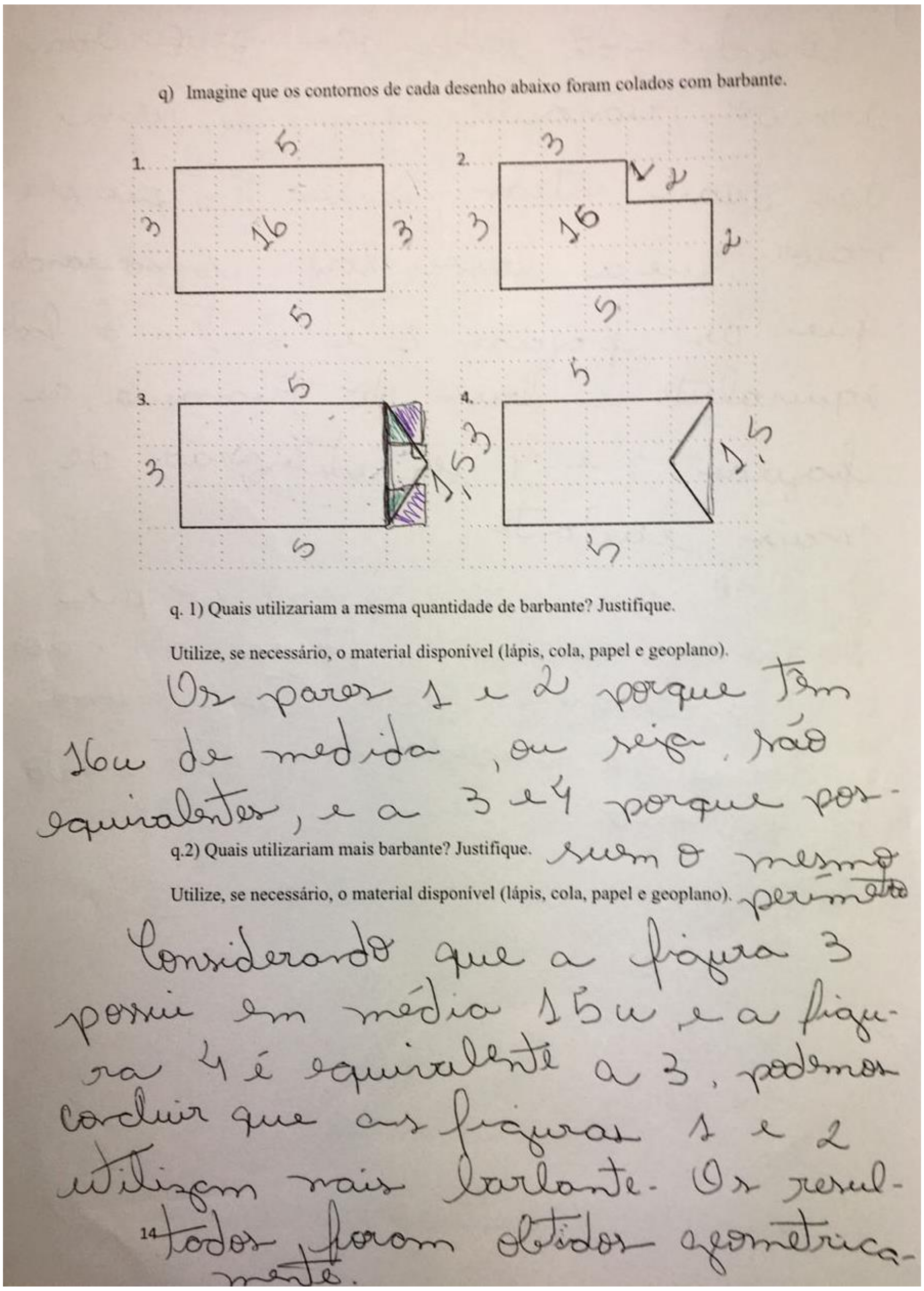
O participante contorna as fronteiras formadas pelas faces das moedas e pinta a região interna de ambas. Ele entende a atividade como uma “aplicação do exemplo da rosquinha”, mencionando assim a discussão da atividade (g).

**q) Imagine que os contornos de cada desenho abaixo foram colados com barbante.**

**q. 1) Quais utilizariam a mesma quantidade de barbante? Justifique.**

**Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e Geoplano).**

Figura 58 - Resposta ao item (q) - Atividade 1




Fonte: Autor.

O participante após ler o enunciado, verbaliza, “A gente já viu que essa e essa figura usaria a mesma quantidade de barbante, no outro exemplo (ele se refere as figuras da atividade o). Essa (figura 1) eu teria que contar os quadrados, eu imagino que esses quadrados tenham a mesma área, todos eles. Então por exemplo, esse tem cinco quadrados de largura (figura 1), então eu poderia usar como unidade de medida o 5.”

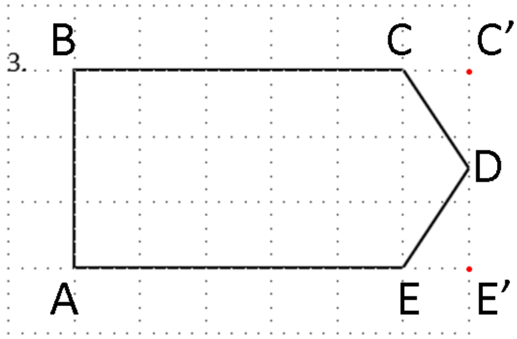
O participante marca na folha de respostas, ver FIGURA 58, as medidas do retângulo, um lado 5 e outro lado 3. Em seguida contabiliza 16 unidades de medida como perímetro desse retângulo (figura 1). Em seguida, o participante calcula o perímetro da figura 2 da atividade (q). Ele faz as marcações da medida de cada lado da figura e contabiliza 15 unidades de medida e conclui, “Essas figuras não usariam a mesma quantidade de barbante. Essa (ele aponta para a figura 1) usaria mais barbante”. Em seguida, verifica que esqueceu de considerar a medida de um lado da figura 2, corrigi e conclui que as figuras 1 e 2 da atividade (q) possuem o mesmo perímetro. Em seguida o participante pergunta se precisa comparar todas as figuras. O entrevistador confirma que sim. O participante verbaliza, “Como eu sei que essas duas têm o mesmo perímetro (figuras 3 e 4), eu posso medir o perímetro só de uma e considero pra outra também”.

**q.2) Quais utilizariam mais barbante? Justifique. Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e Geoplano).**

O participante diz que irá tentar calcular a medida do perímetro da figura 3, para isso, marca a medida de três lados, dois lados de medida 5 e o um lado de medida 3.

Para descrever de forma organizada os procedimentos que o participante faz para tentar calcular a medida do perímetro da figura 3, desta atividade, nomeamos os vértices do pentágono (figura 3) por ABCDE, ver FIGURA 59 e denominamos, o ponto C’ como sendo um ponto que pertence a reta que coincide com o lado BC, e a distância entre C e C’ é de uma unidade de medida. Analogamente, marcamos o ponto E, que dista 1 unidade de medida do vértice E e pertence a reta que coincide com o lado AE, ver FIGURA 59.

Figura 59 - Figura complementar ao item (q) - Atividade 1

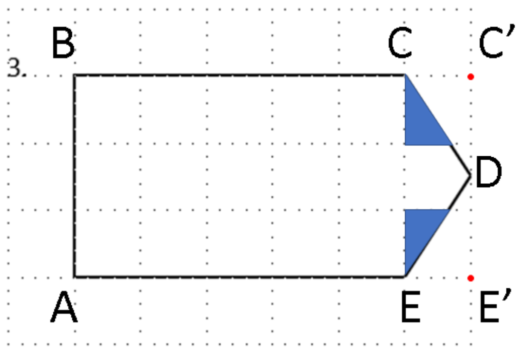



Fonte: Autor.

Utilizando como referência a FIGURA 59, os segmentos BC e AE o participante conclui que medem 5 unidades, já o segmento AB, ele marca como medida 3 unidades. Em seguida, começa a pensar em procedimentos para calcular a medida dos segmentos CD e DE. Ele verbaliza, “Eu poderia considerar que elas são complementares? Essa parte cortada (ele se refere aos segmentos CD e DE com o segmento C’E’) com essa parte inteira? Ele desiste da ideia e em seguida pergunta, “Eu posso considerar CC’E’E um retângulo e em seguida substituir as partes?”, logo em seguida ele mesmo responde que não poderia fazer tal consideração”. Ele pensa e conclui que não conseguirá calcular as medidas que faltam e então conclui que só conseguirá comparar as figuras 1 e 2 e como não conseguiu calcular a medida dos lados da figura 3, também não conseguirá calcular as medidas da figura 4, pois essa última também tem segmentos que formam diagonais.

O participante verbaliza, “Então a gente pode considerar que com esse triângulo (ele aponta para os segmentos CD e DE, ver FIGURA 59), mais ou menos um triângulo, poderia dar no máximo 16 unidades para que fossem equivalentes, então se fosse mais, iria passar. Só que eu não tenho ideia de como ver a unidade ou o tamanho desse triângulo. Mas eu posso tentar resolver visualmente?”. O entrevistador lembra ao participante que ele pode utilizar o lápis, cola, papel, barbante e o Geoplano. O participante desenha sobre figura 3, ver Figura 24, na folha de resposta, dois quadrados, de tal maneira que o segmento CC’ seja um dos lados do um quadrado e o segmento EE’ seja o outro (FIGURA 60). Enquanto ele desenha, verbaliza, “Eu posso por exemplo considerar que esse quadrado e esse, se eu for parar para pensar, eles são iguais, são equivalentes, então eu posso dizer que por exemplo, essa parte aqui com essa outra parte aqui, dá um quadrado inteiro”. O participante forma dois triângulos e pinta o interior de cada um, assim ilustra a figura abaixo.

Figura 60 - Figura complementar ao item (q.2) - Atividade 1




Fonte: Autor.

Em seguida ele diz que os quadrados mencionados são iguais e ao unir os dois triângulos que pintou o resultado seria um quadrado e concluiu, “Então eu posso considerar, por exemplo, que eu tenho como se fosse, um quadrado aqui (ele aponta para o quadrado que tem C como um dos vértices, ver FIGURA 61), ou quase, considerando essas medidas. E se eu juntasse essa parte com essa outra parte (o participante aponta para a região próxima do vértice D e que não foram pintadas, conforme a FIGURA 60), se fosse simétrico, daria para fazer dois quadrados pequenos, é que eu acho que não tem uma relação geométrica nesse aqui, mas se fosse geometricamente perfeito, eu acho que daria, mais ou menos dois quadrados. Eu posso considerar então que esse seria metade de um quadrado. Então considerando que eu tenho um quadrado inteiro, mais meio, vamos supor, daria então, 14,5, então eu posso considerar que essas figuras aqui (ele aponta para as figuras 1 e 2) gastam mais barbante que essas aqui (ele aponta para as figuras 3 e 4)”.

Na folha de questão, o participante faz as seguintes anotações, ver Figura 21, “Considerando que a figura 3 possui em média 15 u e a figura 4 é equivalente a 3, podemos concluir que as figuras 1 e 2 utilizam mais barbante, os resultados foram obtidos geometricamente”.

Como considerações finais, P1 diz que apesar de não saber como fazer as medidas, acredita que há formas sim de calcular, mas que não lembra ou desconhece, mas acredita, pois, acha já ter visto exercícios parecidos com esse em alguma prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). O entrevistador pergunta sobre a necessidade de unidades de medidas nesta atividade. P1 comenta,

> É que por exemplo, como eu estou tentando descobrir se eles possuem o perímetro, ter uma coisa que seja certa, uma medida exata, eu procurei uma unidade de medida, para que ficasse exato. Então por exemplo, se eu somente visse as figuras geométricas, eu pessoalmente, nunca teria o álibi de conseguir falar que essas figuras tinham o mesmo perímetro, então para mim, foi mais fácil estabelecer uma unidade de medida, porque eu teria certeza do resultado, matematicamente falando (referência as figuras 1 e 2). (P1).

Como a questão não trata propriamente do perímetro, mas P1 justifica suas decisões e menciona o perímetro de cada figura, o entrevistador pergunta para ele sobre a diferença entre contorno e perímetro. Ele responde,

> Pra mim eles são iguais, quando pedem o contorno de uma figura e o perímetro de uma figura pra mim é a mesma coisa, só que quando falam em contorno, eu não imagino números, eu imagino o desenho, a linha, quando falam perímetro, eu imagino unidades, números. (P1).

O entrevistado descreve para o participante as conclusões obtidas até o momento, ao término o participante diz,

> Eu tive uma ideia, pode estar errado, mas acho que faz um pouco de sentido, por exemplo, quando a gente observa essa figura aqui, figura 3 (FIGURA 58), a gente vê quadrados, e aqui a gente vê um triângulo, o triângulo, quando a gente vai calcular sua área, a gente divide o número por 2, então por exemplo, a gente pode considerar que de uma maneira simplista, o triângulo é a metade do quadrado, em alguns casos. Por exemplo, aqui (ele aponta para a figura 1 da atividade q) eu tenho 3, o triângulo é a metade do quadrado, se a gente fazer de uma maneira simplista, então eu poderia, para conseguir fazer a área dessa parte (ele aponta para os vértices C, D e E da figura 3), três dividido por dois, considerando que o triângulo é a metade da área do quadrado, ai daria um e meio, só que eu não tenho certeza dessa conta, só que a lógica foi essa, estabelecer que o triangulo é a metade do quadrado. (P1).

O entrevistador indica para o participante pensar no triângulo CDE, unindo os vértices C e E por meio de um segmento de reta e quando começa a falar sobre as propriedades de um triângulo, P1 diz, ah lembrei, é verdade", o entrevistador pede para P1 continuar a falar, ele segue,

> É que não pode ser menor né? Então por exemplo, essa parte aqui (ele aponta para os segmentos CD e DE), não podem ser menores que essa parte aqui (ele aponta para o segmento CE), a soma deles (segmentos CD e DE) tem que ser maior que essa aqui (ele destaca o segmento CE), porque senão não formaria um triângulo, é verdade! (P1).

O entrevistador pergunta, "e agora quando você olha para a figura de cima (figura 1), isso te ajuda ou te atrapalha?". Ele responde,

> Ah nossa! Calma ai, eu acho que é esse raciocínio, pode ser que esteja errado também, como a soma dessas duas partes tem que ser maior que essa aqui (ele menciona a desigualdade triangular do triângulo CDE), então automaticamente, essas partes somadas (segmentos CD e DE) são maiores que essa aqui (ele aponta para o lado de medida 3 da figura 1), logo, essas duas figuras (ele aponta para a figura 3 e 4) usam mais barbante que essas duas aqui (figuras 1 e 2). (P1).

O entrevistador diz que a conclusão e a justificativa estão corretas. P1 diz, "Nossa! <u>Nem precisava então fazer a conta da unidade</u>", (grifo nosso).

O entrevistador pergunta, "quando usamos medidas e quando vamos trabalhar com objetos que não possuem medida, a gente fica desconfortável, você acha que a gente deveria trabalhar mais com objetos sem suas medidas?". P1 responde,

> Eu acho que extremamente importante a gente trabalhar além de números na matemática, por exemplo, as formas geométricas mesmo, porque muitas vezes a gente consegue resolver visualmente, eu não consigo ainda, eu preciso das unidades, como eu demonstrei aqui né? Eu fico muito perdido sem número na frente para guiar o que tenho que fazer. Então, eu acho importante porque isso ajudaria a gente a resolver as questões de forma prática, seria muito mais fácil também, não necessariamente uma coisa mais simples seria uma coisa menos inteligente, muita gente confunde essas coisas. Eu acho o contrário inclusive, quanto mais simples você conseguir deixar, mais inteligente foi sua resolução. Então com certeza a gente deveria trabalhar com coisas além de números na matemática. (P1).

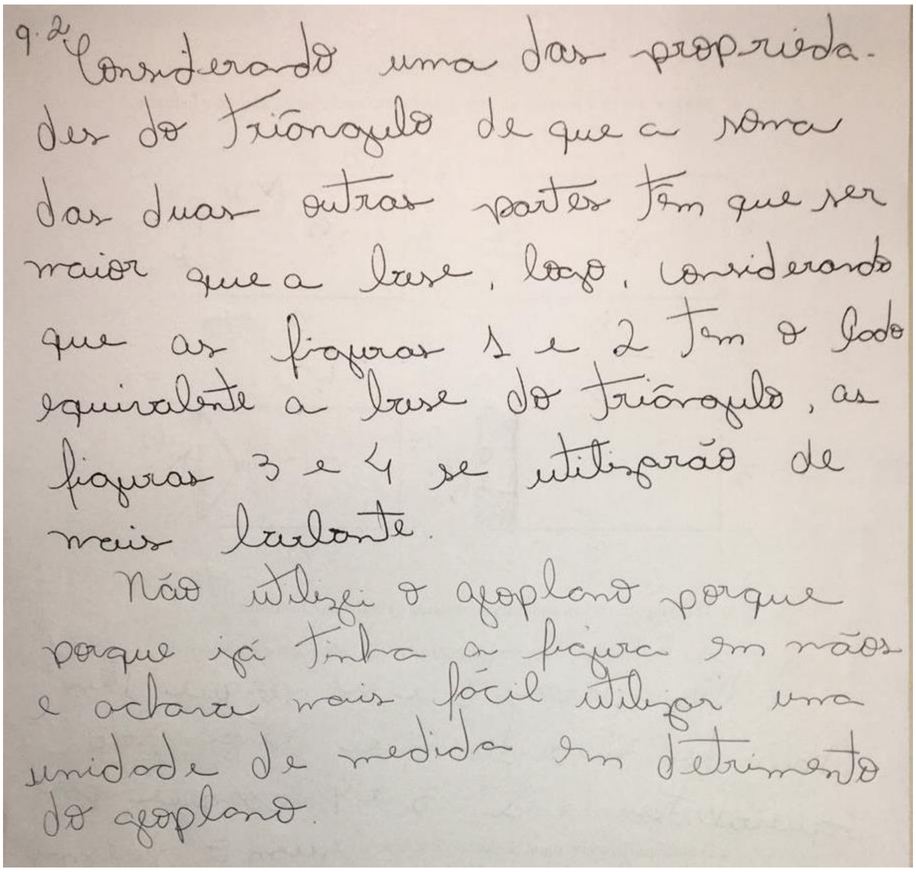
Na folha de respostas o participante escreve, ver Figura 51,

> Considerando uma das propriedades do triângulo, a soma das duas outras partes tem que ser maior que a base, neste caso considerando que as figuras 1 e 2 (atividade q) tem um lado equivalente a base do triângulo, as figuras 3 e 4 (atividade q) utilizarão mais barbante. (P1).

Como considerações finais, P1 diz,

> Isso que o senhor faz com a gente de pôr um outro ângulo as coisas que a gente está acostumado ver apenas de um modo é muito importante porque quando a gente for fazer provas fora da escola, eu tenho certeza de que as instituições de ensino, elas procuram muito isso, né? As pessoas que olham de um jeito diferente o que todo mundo vê igual. Se eu aprendi isso, é isso, aí você não abre o olhar para outras coisas também. Então ter esse olhar diferente, essa outra concepção, essa outra forma de resolver, é muito importante também. Principalmente na matemática, né? Eu acho que é por isso tem tanta gente que não gosta de matemática, porque quando você fala que uma coisa é assim e ponto, é chato porque você não consegue perguntar mais. Então, qual o sentido né? Ter uma ciência que não se questiona mais. Uma ciência que não se questiona não é uma ciência, é um dogma, então eu acho muito importante essa parte. (P1).

Figura 61 - Resposta ao item (q2) - Atividade 1



q.2 Considerando uma das proprieda-
des do triângulo de que a soma
das duas outras partes têm que ser
maior que a base, logo, considerando
que as figuras 1 e 2 têm o lado
equivalente a base do triângulo, as
figuras 3 e 4 se utilizarão de
mais barbante.
Não utilizei o geoplano porque
porque já tinha a figura em mãos
e achava mais fácil utilizar uma
unidade de medida em detrimento
do geoplano.

Fonte: Autor.

**Considerações**: P1 faz algumas tentativas para concluir a atividade, todas elas não se valem dos materiais concretos disponíveis assim como todas passam pela tentativa de obter a medida das fronteiras, isto é, calcular a medida do perímetro. Ele reconhece que as figuras 3 e 4 possuem o mesmo perímetro.

Em seguida P1 calcula o perímetro da figura 1, utilizando a malha quadriculada, e faz o mesmo com a figura 2, inclusive comete um erro e em seguida corrige e chega à conclusão de que ambas possuem o mesmo perímetro. Apesar das atividades realizadas, a concepção numérica ainda é marcante para o participante. A busca do participante em levar a atividade para o campo numérico, limita sua forma de solução e faz com que ele não repare que por meio de algumas comparações, as figuras 1 e 2 possuem o mesmo perímetro.

O participante reconhece as figuras que possuem a mesma quantidade de barbante (possuem mesmo perímetro). Porém não foi capaz de sozinho apresentar a figura que tem a maior quantidade de barbante (maior perímetro). P1 faz algumas tentativas, em uma delas, utiliza a ideia de que figuras com áreas proporcionais, possuem perímetros proporcionais. O que nos revela que na imagem de conceito do participante, há a ideia de que área e perímetro possuem uma relação. Porém essa ideia não é suficiente para lhe dar convicção e ele a abandona.

A busca de P1 por estabelecer uma medida, nos mostra a “força” que a concepção numérica possui sobre as estratégias que ele articula para resolver uma determinada tarefa. Ao mesmo tempo mostra que esse conjunto de atividades não é suficiente para que essa concepção numérica dê espaço para a concepção de grandeza.

O participante se espanta com ao verificar que para resolver a atividade, não era necessário utilizar medida e reconhece ter dificuldades em trabalhar com objetos da geometria sem medida.

Nesta atividade fica notório que o participante necessita trabalhar com mais atividades que favoreçam comparações entre grandezas, utilizando para isso, objetos mais concretos tanto para trabalhar sob o paradigma G0 como sob o paradigma G1. Em um próximo passo, trabalhar com atividades sob o paradigma G2.

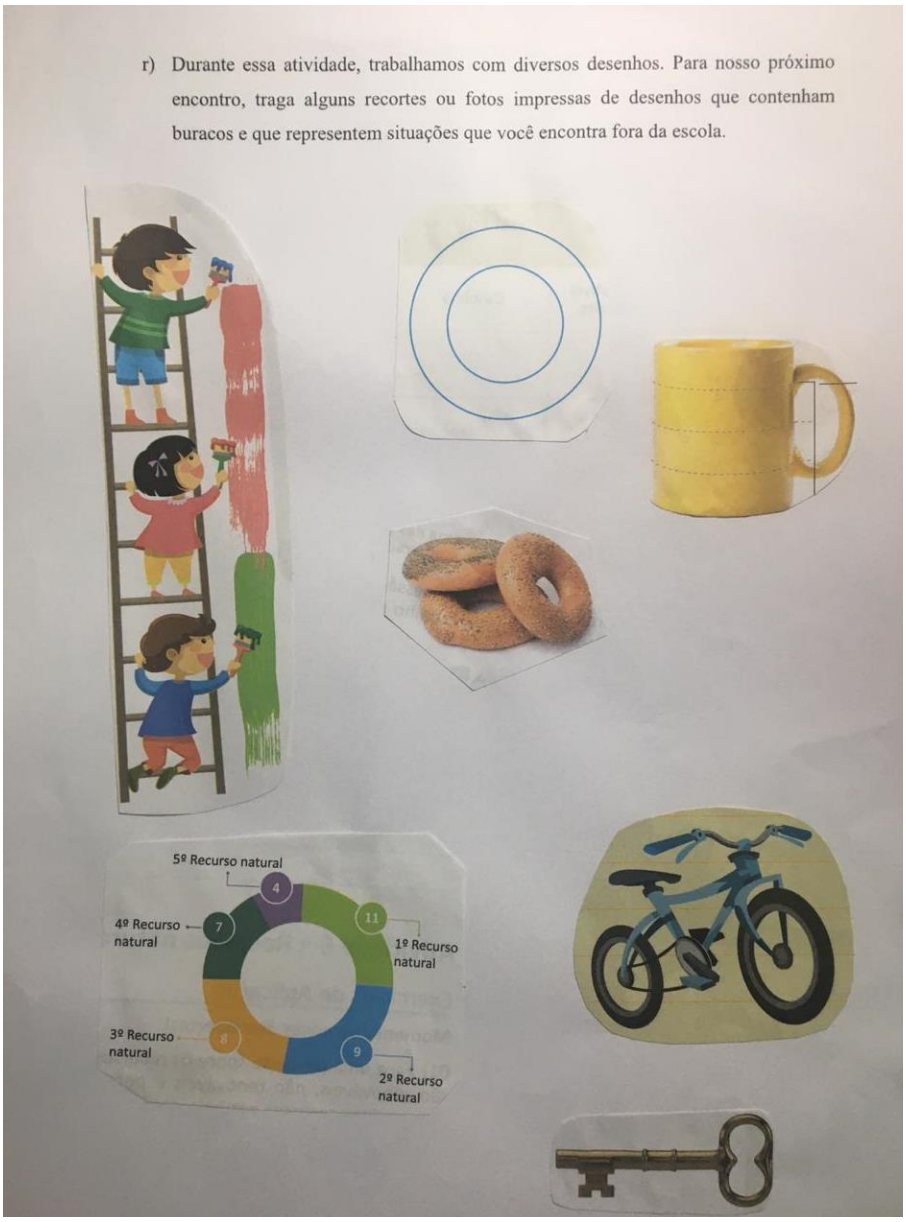
Destacamos que o objetivo com esse conjunto de atividades é discutir com o participante ideias, sobretudo relacionadas a grandeza, relacionadas a região interna, região externa, fronteira, área e perímetro e de antemão reconhecemos que dois encontros sejam suficientes para mudar completamente a ideia que o participante tem sobre os conceitos de área e de perímetro, mas sim ampliar o conhecimento do participante diante desses conceitos que julgamos importantes para sua vida.

Ao final, P1 faz críticas à forma na qual trabalhou Matemática até o momento, utilizando o termo “dogma”, se referindo a uma falta de discussão durante as aulas. Também revela que a atividade fez com que ela visse à Matemática com “outros olhos”.

r) **Questão r: Durante essa atividade, trabalhamos com diversos desenhos. Para nosso próximo encontro, traga alguns recortes ou fotos impressas de desenhos que contenham buracos e que representem situações que você encontra fora da escola.**

No item (**r**), o participante é convidado a pesquisar e colar na folha de respostas algumas figuras cuja região interna é delimitada por duas ou mais curvas e que representassem situações diferentes das vivenciadas na escola. Nesta atividade o participante apresenta um conjunto de figuras relacionadas a um objeto geométrico conhecido como toro, que pode ser representado por uma rosquinha (bastante citada pelo participante), por uma câmara de pneu entre outros objetos. Outra figura recorrente apresentada pelo participante é a coroa circular, que de certa forma está associada ao toro. O que indica que para o participante, o exemplo da "rosquinha" (atividade g) acabou ficando marcado.

Figura 62 - Resposta ao item (r) - Atividade 1




Fonte: Autor.

O participante traz ainda duas figuras, uma escada que remete a retângulos e uma chave cujo parte do formato se assemelha a duas elipses.

O conjunto de figuras apresentado pelo participante tem uma ligação com figuras geométricas planas como retângulos, circunferências e elipses. É um conjunto formado por pouca "variedade" de formas. Por outro lado, é possível percebermos que P1 reconhece em situações do dia a dia, figuras com "buracos" de forma tridimensional, o que pode contribuir com o maior entendimento desse tipo de situação no plana.

**Perguntas finais**

Após P1 ler o enunciado (r) e ter confirmado seu entendimento, o conjunto de atividades que compõem a Atividade 1 é encerrado. Em seguida, o entrevistador pergunta:

**Entrevistador**: Retornando à atividade (c), você apresentou receio em ter que responder qual caminho é mais comprido (caminhos 1 ou 2, ver Figura 36). Gostaria de saber se após esse conjunto de atividades, você se sente mais seguro em responder qual caminho é mais comprido?

P1 responde,

> Eu ficaria mais confiante de falar, bom eu posso estar errado porque eu acho que não sou muito bom nisso (risos), mas eu diria que a 1 é maior porque ela tem mais espaçamento, por exemplo, ela dobra, então isso me chamou a atenção para que ela seja maior né? Em relação a 2. Em relação ao medo, eu acho que perdi um pouco, porque antes de começar a fazer os exercícios (ele se refere as atividades), eu tinha muito medo de trabalhar com coisa abstrata, que eu não sabia né? Eu tenho muito medo de coisa abstrata, por exemplo, que não tem o valor certo, porque eu acho muito mais fácil trabalhar com coisas que tem o valor certo. É isso e ponto, muito mais fácil. Eu acho que é complicado você adaptar o seu conhecimento, por exemplo, quando a gente estuda para uma prova, a gente decora o que está na apostila, quando é prova de história..., decora data, decora nome etc. Aí quando o professor vai lá e te pergunta qual a relação entre as religiões, a ética a moral..., aí a gente fala, opa! Mas isso eu não decorei. E agora? O que a gente faz? Então eu acho que o mais difícil, o mais complicado, é adaptar o conhecimento que você já tem para algo que você vai descobrir ainda. Eu tinha muito medo disso e agora eu acho que tenho um pouquinho, mas acho que melhorou. (P1).

O entrevistador pergunta: "Em relação as concepções de fronteira e região interna de figuras planas, o que mudou para você?". P1 responde,

> A questão é que eu nem pensava nisso, de uma forma com buraco, entendeu? Com certeza a gente vê, que nem a gente tem falado, está em nosso dia a dia, só que eu não tinha essa consciência, aí quando o senhor me apresentou, eu pensei uma coisa, que elas estavam justapostas, uma com a outra, e aí quando o senhor falou, na realidade isso é um buraco, não é uma outra forma. Aí eu fiquei meio perdido né? No começo desnorteado, mas depois que eu percebi que não era tão difícil assim, era só um outro jeito de ver aquela forma, eu achei impressionante e inclusive estou gostando desse novo jeito de ver as formas, porque nem tudo tem que ser do jeito que a gente sabe né? Inclusive se fosse, a gente nunca aprenderia mais, eu vi uma frase, um pensamento que dizia que para que a gente evolua a gente tem que ser contrastado, perguntado, contestado, se eu ficasse a vida inteira pensando que as

> formas são perfeitas, eu nunca descobriria esse lado, que o senhor me apresentou. Inclusive muito obrigado. (P1).

Após as considerações finais, P1 guarda as folhas de respostas dentro do envelope e envia as fotos das atividades para o entrevistador, que confirma o recebimento e assim a entrevista é encerrada.

### 8.2.3. Participante P2

O segundo participante (P2) é um aluno do 7º ano do Ensino Fundamental II de um colégio da rede privada de ensino, localizado na zona leste de São Paulo. Estudou sempre neste mesmo colégio. É um aluno introvertido, costuma fazer questionamentos, se dedica em todas as disciplinas, diz gostar de matemática.

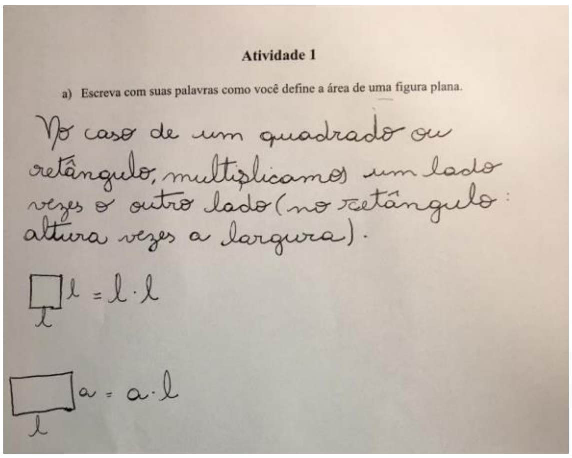
A atividade 1 teve duração de 2 horas e 46 minutos, já a atividade 2 deve duração de 5 horas e 34 minutos.

**a) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.**

Ao ler o enunciado, P2 pergunta: “Essa figura tem alguma especificação ou é qualquer uma?”. O entrevistador responde, “é sobre uma figura qualquer”. P2 diz, “Mas por exemplo, eu não lembro como define a área de um triângulo e do trapézio, lembro só do quadrado e do retângulo que eu creio que sejam os mais fáceis... Vou falar do quadrado e do retângulo que são os únicos que eu sei calcular a medida da área”.

Na folha de questões P2 responde, ver Figura 63, “No caso de um quadrado ou retângulo multiplicamos um lado vezes o outro lado (no retângulo altura vezes a largura)”. Ele complementa a resposta desenhando um quadrado de lados l (éle) e escreve l.l, logo abaixo faz um retângulo cujos lados medem l (éle) e a, ao lado escreve “a.l”. Assim o participante encerra a resposta.

Figura 63 - Resposta ao item (a) - Atividade 1


**Atividade 1**

a) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.

No caso de um quadrado ou retângulo, multiplicamos um lado vezes o outro lado (no retângulo: altura vezes a largura).

$l = l \cdot l$

$a = a \cdot l$

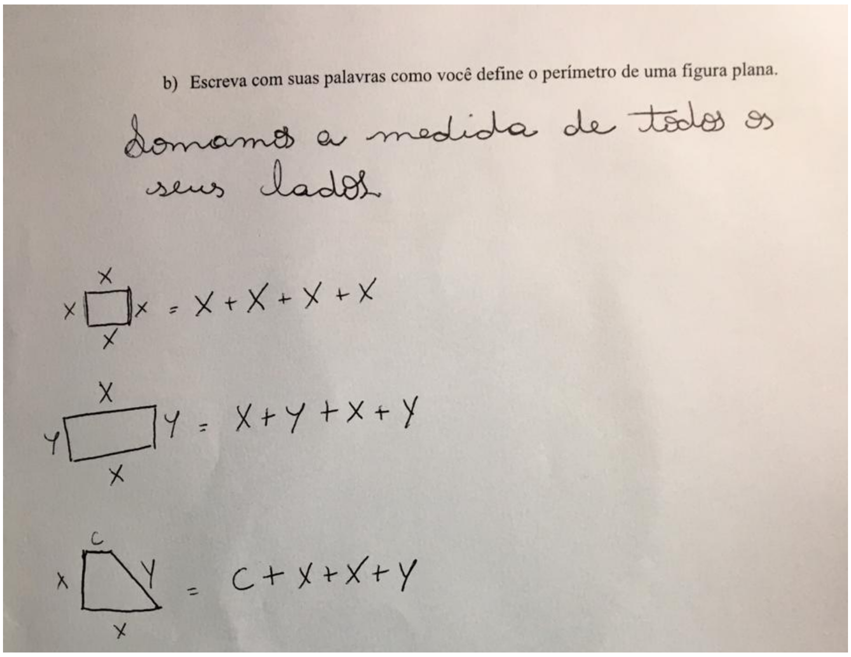
Fonte: Autor.

**Considerações**: P2 apresenta uma definição de área com concepções ligadas a aspectos geométricos, pois leva em consideração o tipo de forma geométrica e também ligada a concepção numérica pois o participante relaciona a área a um valor e a um conjunto de procedimentos para cálculo. Para P2, o conceito de área está limitado um conjunto figural descrito por ele como quadrado, retângulo, triângulo e trapézio e para cada uma delas, existe um procedimento diferente para se calcular a medida da área. Assim como P1, P2 também apresente um conjunto de figuras estereotipadas. Nenhuma referência à grandeza foi apresentada.

**b) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.**

P2 escreve na folha de respostas, "Somamos a medida de todos os seus lados". Como exemplo, ele desenha um quadrado, um retângulo e um trapézio, assim como apresentado na Figura 64.

Figura 64 - Resposta ao item (b) - Atividade 1




Fonte: Autor.

O participante desenha um quadrado com lados de medida x, um retângulo com lados de medidas x e y, por fim, desenha um trapézio com lados medindo, c, x e y. Ao lado de cada figura, P2 escreve o procedimento para se obter o perímetro de cada uma das figuras.

**Considerações:** P2 apresenta uma definição de conceito de perímetro associada a figuras formadas por poligonais simples, portanto possuem lados. essa definição nos remete a definição de perímetro encontrada em materiais didáticos.

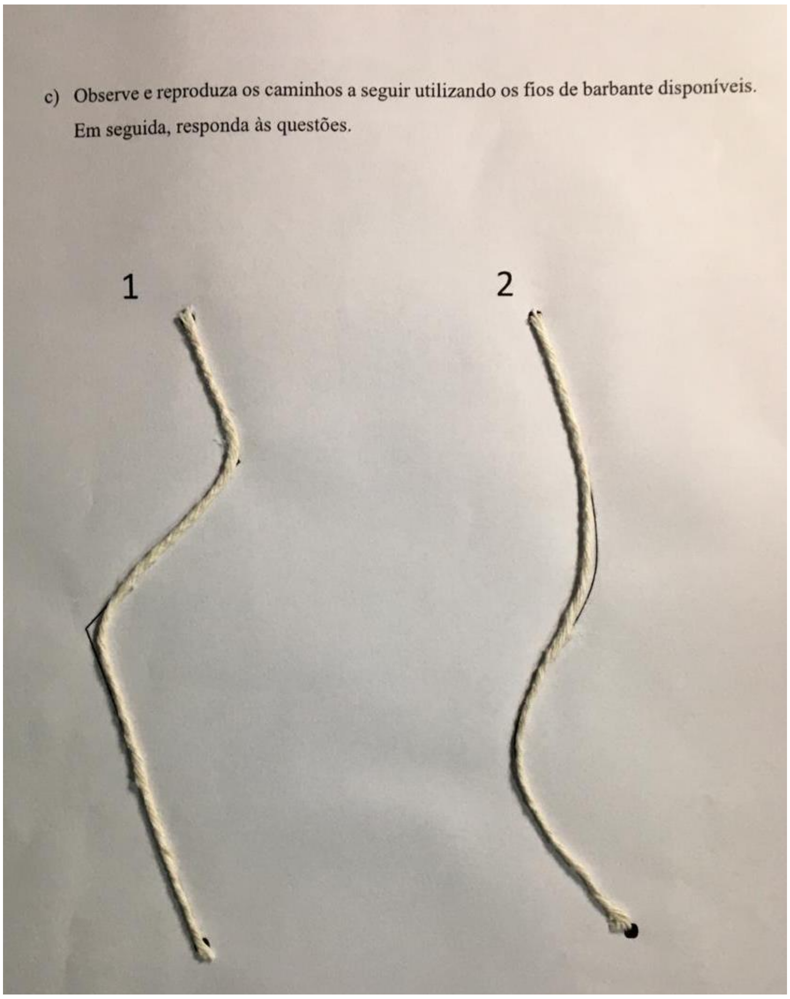
Tanto a definição de conceito de perímetro como a definição de conceito de área de P2, se restringem a figuras poligonais que possuem lados. As concepções numéricas e geométricas são apresentadas. As ideias de grandeza não estão presentes na resposta apresentada bem como o uso de unidades de medida.

**c) Observe e reproduza os caminhos a seguir utilizando os fios de barbante disponíveis. Em seguida, responda às questões.**

P2 inicia colando as tiras e diz não se lembrar quando fez atividades de colagem nas aulas de matemática, revela que acredita ter trabalhado com atividades lúdicas, nas aulas de matemática, apenas no período anterior ao Ensino Fundamental I.

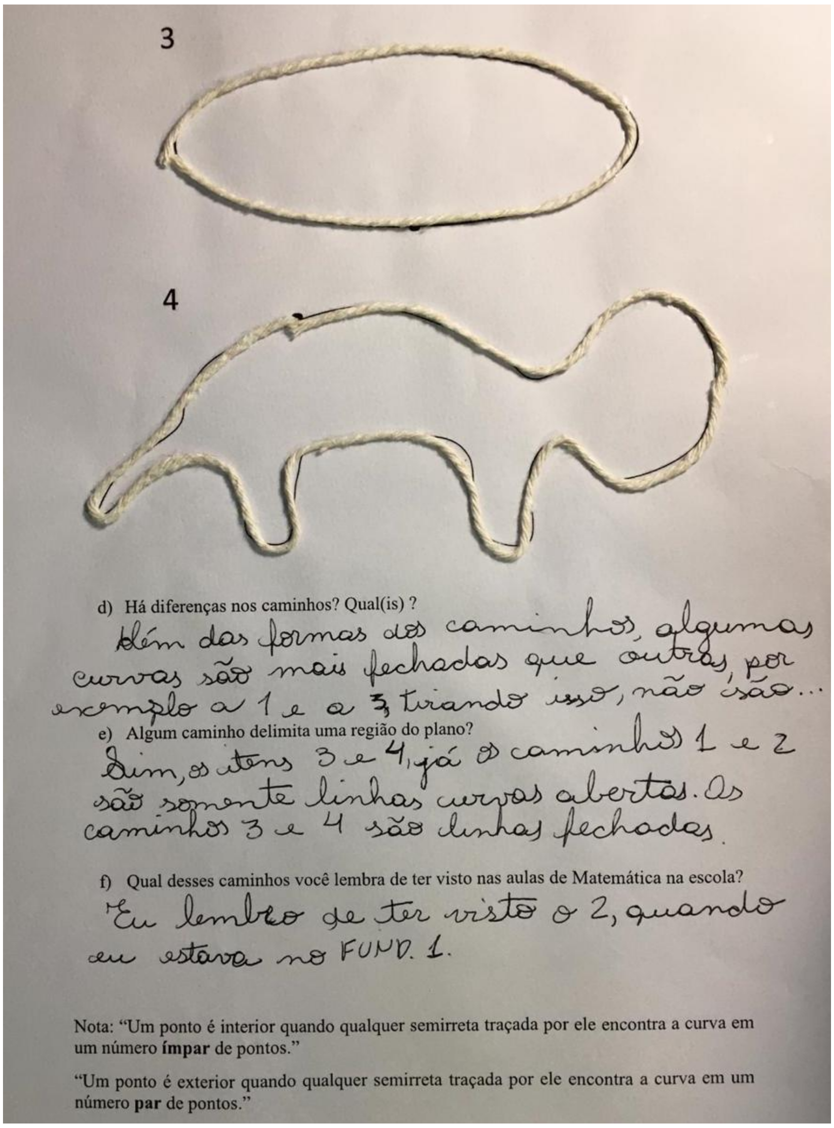
**Considerações:** Importante reforçar que o participante cursa o 7º ano do Ensino Fundamental II e diz não se lembrar de ter feitos atividades lúdicas durante o Ensino Fundamental, isto é, ainda que este participante tenha trabalhado sob o paradigma G0, G0-G1, esse trabalho não foi suficiente para fazer ser acrescido em sua imagem de conceito.

Figura 65 - Resposta ao item (c) - *Atividade 1*



Fonte: Autor.

Figura 66 - Resposta aos itens (c), (d) e (e) – Atividade 1



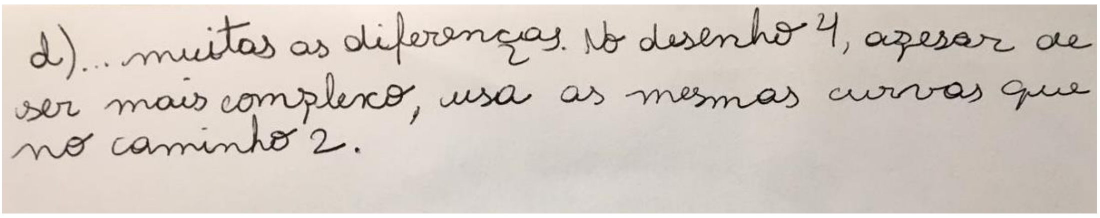

Fonte: Autor.

**d) Há diferenças nos caminhos? Qual(is)?**

Ao ler o enunciado, P2, "É entre o 1 e o 4?". O entrevistador pergunta se há diferença(s) entre os caminhos 1, 2, 3 e 4". O participante escreve na folha de resposta, ver Figura 66 e FIGURA 65, "Além das formas dos caminhos, algumas curvas são <u>mais fechadas</u> que outras, por exemplo, o caminho 1 e 3. Tirando isso, não são muitas as diferenças, no caminho 4, apesar de ser <u>mais complexo</u>, usa as mesmas curvas que no caminho 2".

O participante destaca como diferença, particularidades das curvas, utiliza os termos "mais fechadas" e "mais complexa" para distinguir um caminho aberta de um fechado. Após a fase de discussão, momento em que o entrevistador distingue curva aberta de curva fechada, o participante revela que o termo “além das formas” utilizado por ele, significaria “além de um ser fechado e outro ser aberto”.

Figura 67 - Resposta ao item (d)




Fonte: Autor.

**Considerações:** P2 consegue distinguir caminhos abertos de caminhos fechados, assim como também consegue comparar as diferentes curvas.

**e) Algum caminho delimita uma região do plano?**

P2 verbaliza, ver Figura 66, “Sim, os itens 3 e 4, já os caminhos 1 e 2 são somente linhas curvas abertas. Os caminhos 3 e 4 são linhas fechadas”.

Sem novas considerações, o participante finaliza a atividade.

**Considerações:** O participante consegue distinguir caminhos que delimitam uma região no plano, porém, procura fazer poucas considerações. Nessa atividade ele passa a caracterizar curvas como abertas ou fechadas.

**f) Qual desses caminhos você lembra de ter visto nas aulas de Matemática na escola?**

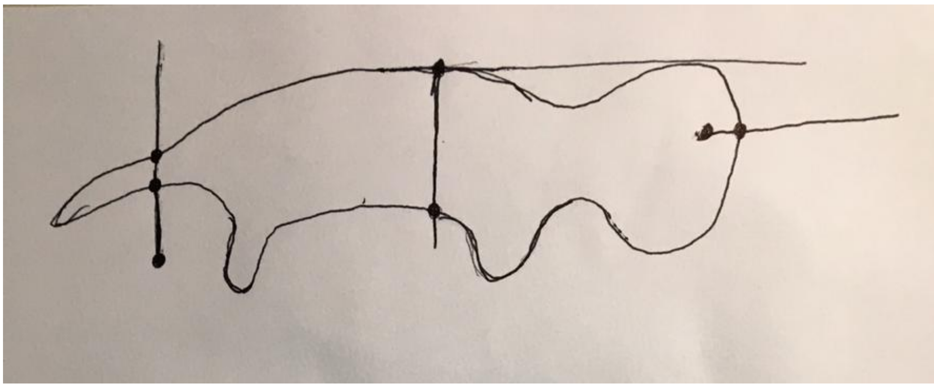
O participante P2 verbaliza “Eu lembro do caminho 2, quando estava aprendendo linhas retas e linhas curvas, era eu bem novinho”. Na folha de respostas escreve, “Eu lembro de ter visto o 2, quando eu estava no FUND I”.

**Considerações:** Importante lembrar que o participante cursa o 7º do Ensino Fundamental II. Neste período, ele diz recordar de ter visto o caminho 2, ver FIGURA 65, no Ensino Fundamental I. Neste trabalho, não conversamos com os professores que lecionaram para as turmas em que os participantes desta pesquisa fizeram parte. Assim, o que podemos afirmar é que o participante tem poucas lembranças relacionadas a caminhos abertos e fechados que fogem de caminhos fechados “usuais” como quadrado, retângulo, triângulo e trapézio.

**Nota sobre regiões internas e regiões externas**

Ao terminar a leitura da nota, o entrevistador e P2 discutem alguns exemplos de casos em que se pode analisar regiões internas ou externas a uma curva. O entrevistador pede para que o participante desenhe uma figura não convexa qualquer e faça alguns pontos da folha, o participante desenha uma das figuras da atividade (c), ver FIGURA 68, e faz alguns pontos e traça algumas semirretas. Um desses pontos o entrevistador informa que está na fronteira da figura. Em um outro ponto, traça uma semirreta e verifica que essa intercepta a figura em dois pontos, concluindo que o ponto está no exterior da figura.

Figura 68 - Exemplo de pontos internos e externos a uma curva fechada - Atividade 1



Fonte: Autor.

Antes de iniciar a próxima atividade, o entrevistador pergunta a P2, sobre seu entendimento da figura 3 da atividade (c), ver FIGURA 66, se ele entende a figura como um caminho fechado (figura unidimensional) ou como o contorno de uma figura plana (figura bidimensional) com preenchimento. P2 responde, “Eu imagino como se fosse sem preenchimento, agora se ela estiver colorida por dentro eu imaginaria ela com preenchimento”.

**Considerações:** Após a discussão e o exemplo trabalhado na folha de repostas, ver FIGURA 68, o participante aparenta ter compreendido a ideia de ponto interno e ponto externo a uma região. Porém, ao verificar se um ponto é exterior ou interior a uma curva, o participante insiste algumas vezes em traçar apenas 1 semirreta a partir do ponto dado. Isto é, não havia ficado claro para o participante o trecho da definição, “quando qualquer semirreta traçada por ele”.

**g) Você recebeu uma folha de papel que representa uma região limitada plana e alguns colares de barbante que representam curvas fechadas. Escolha dois desses**

**colares e use-os sobre a folha, à vontade. Crie duas situações que você considera diferentes. Justifique.**

O participante P2 ao ler o enunciado da atividade (g), pega 3 saquinhos, em cada um destes há um par de colares de barbante de tamanhos diferentes. Ele escolhe um, abre, cria a primeira situação e em seguida registra a situação com uma foto, ver Figura 70. Em seguida ele pega outro par de colares, e monta a segunda situação. O entrevistador pergunta sobre as diferenças entre a primeira situação e a segunda, ele diz, "na primeira situação teve mais curvas e tiveram as curvas mais fechadas e a segunda situação são figuras geométricas", referindo-se à representação de uma elipse e um do quadrado feita.

O entrevistador orienta na elaboração da 3ª situação, ver Figura 71. E a disposição das curvas causa estranheza por parte do participante.

Na fase de discussão, há uma reflexão sobre o fato das duas primeiras situações apresentadas serem semelhantes, isto é, duas curvas que não se interceptam. Justificando assim a existência de uma terceira situação e a discussão de que uma curva poderia estar localizada na região interna de outra.

**1ª Situação:**

Figura 69 - Resposta ao item (g) - 1ª situação - Atividade 1

Fonte: Autor.

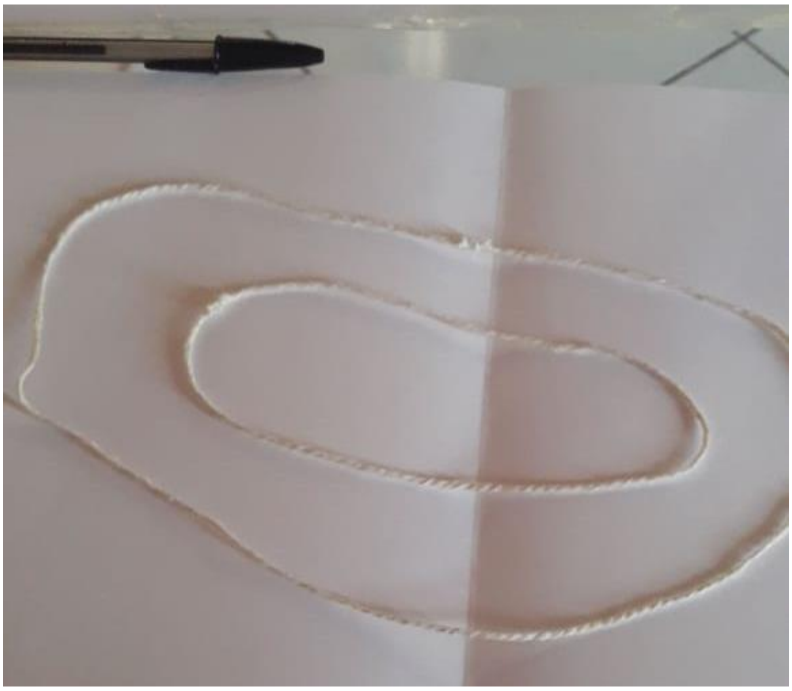
**2ª Situação:**

Figura 70 - Resposta ao item (g) – 2ª situação – Atividade 1

Fonte: Autor.

**3ª Situação:**

Figura 71 - Resposta ao item (g) – 3ª situação – Atividade 1



Fonte: Autor.

**Considerações:** Na primeira situação P2 apresentou duas figuras não convexas (fugindo das formas tradicionais), na segunda situação, apresentou duas figuras convexas conhecidas (quadrado e elipse). Como de forma espontânea o participante não conseguiu apresentar duas situações diferentes, a terceira situação foi estimulada pelo entrevistador.

O fato de o participante ter achado estranho a situação 3 pode ser justificado pelo pouco contato com figuras formadas por duas curvas. Em geral esse tipo de figura é apresentado, por exemplo, no estudo da área de uma coroa circular.

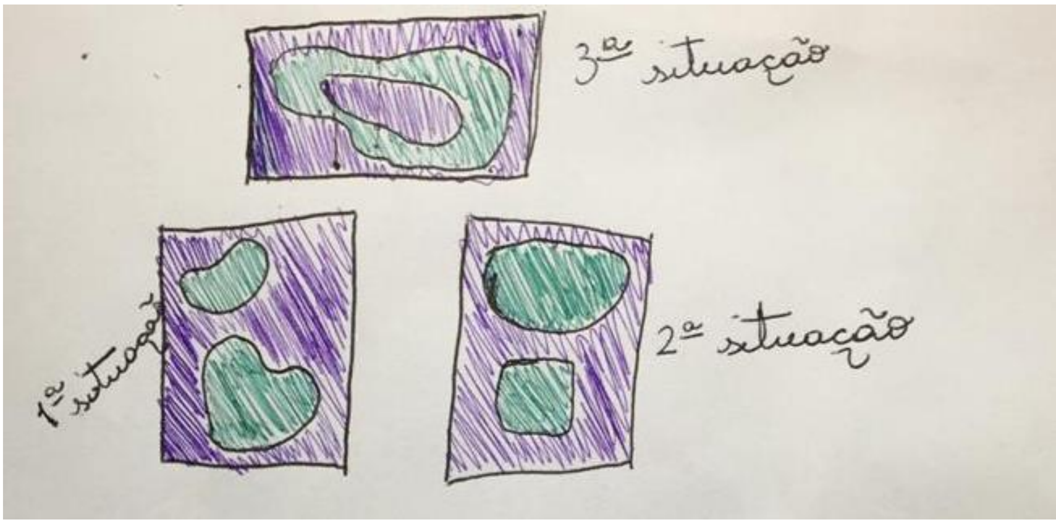
Vale destacar que a situação 3 é induzida pelo entrevistador para que P2 passe por uma experiência de trabalhar com uma curva fechada totalmente contida no interior de outra curva fechada.

**h) Em cada uma das situações que você criou, destaque a região interior e a região exterior dos desenhos formados com os colares de barbante.**

A proposta da atividade é trabalhar com os conceitos de fronteira e região interna (como grandezas) sob os paradigmas G0-G1, sobretudo, a regiões interna e externa.

O participante é orientado a fazer a representação figural das três situações da atividade (g) na folha de resposta e utilizar a caneta de cor roxa para destacar a região externa e uma caneta de cor verde para destacar a região interna, ver FIGURA 72.

Figura 72 - Resposta ao item (h) – 2ª situação – Atividade 1




Fonte: Autor.

As situações 1 e 2 são feitas com facilidade pelo participante. Na situação 3 ele pergunta, “Tem a região externa que é a folha e a região de dentro dos barbantes, as duas de dentro são as internas?”. O entrevistador orienta P2 a fazer um ponto em alguma região, traçar semirretas a partir desse ponto e verificar se esse ponto faz parte de uma região interna ou externa. P2 traça 3 pontos, um ponto na região compreendida entre as das curvas, um ponto na região externa à curva maior comprimento e um ponto na região interna à curva de menor comprimento. Ao ser perguntada sobre a situação 3, P2 diz, "Nessa parte do meio, quando eu fiz o ponto, deu par né? Deu só dois, a parte do meio, então ela é exterior. Eu não sabia disso porque para mim ela estava dentro do barbante maior, então eu achei que ela seria interior, mas quando fiz pontos, mostrou que ela é exterior".

Na fase de discussão, o entrevistador faz uma analogia a região interna à curva de menor comprimento com um buraco.

**Considerações:** Na primeira situação P2 apresenta duas figuras não usuais (não convexas), na segunda situação são feitas duas representações de figuras geométricas conhecidas (retângulo e elipse). P2 não diferencia as situações e sim o formato das figuras. A situação 3 traz desconforto ao participante em um primeiro momento e após ele atribuir pontos pela figura, consegue compreender que há uma região que não pertence ao interior da figura. A definição de ponto interior e ponto exterior a uma curva contribui no entendimento da situação 3.

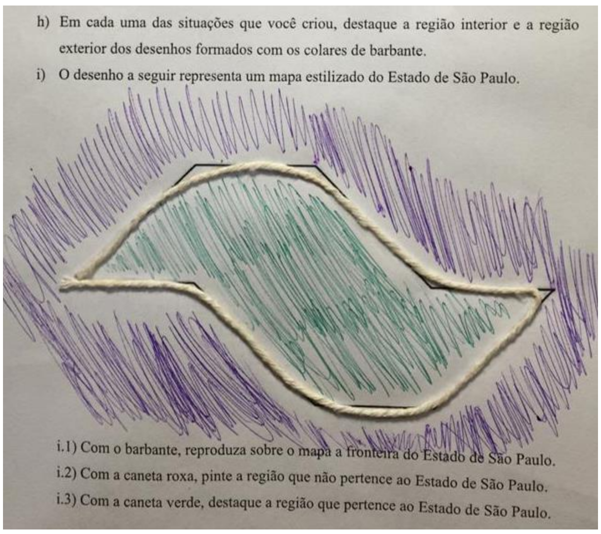
**i) O desenho a seguir representa um mapa estilizado do Estado de São Paulo.**

**i.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de São Paulo.**

**i.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de São Paulo.**

**i.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de São Paulo.**

Figura 73 - Resposta aos itens (h) e (i) – Atividade 1



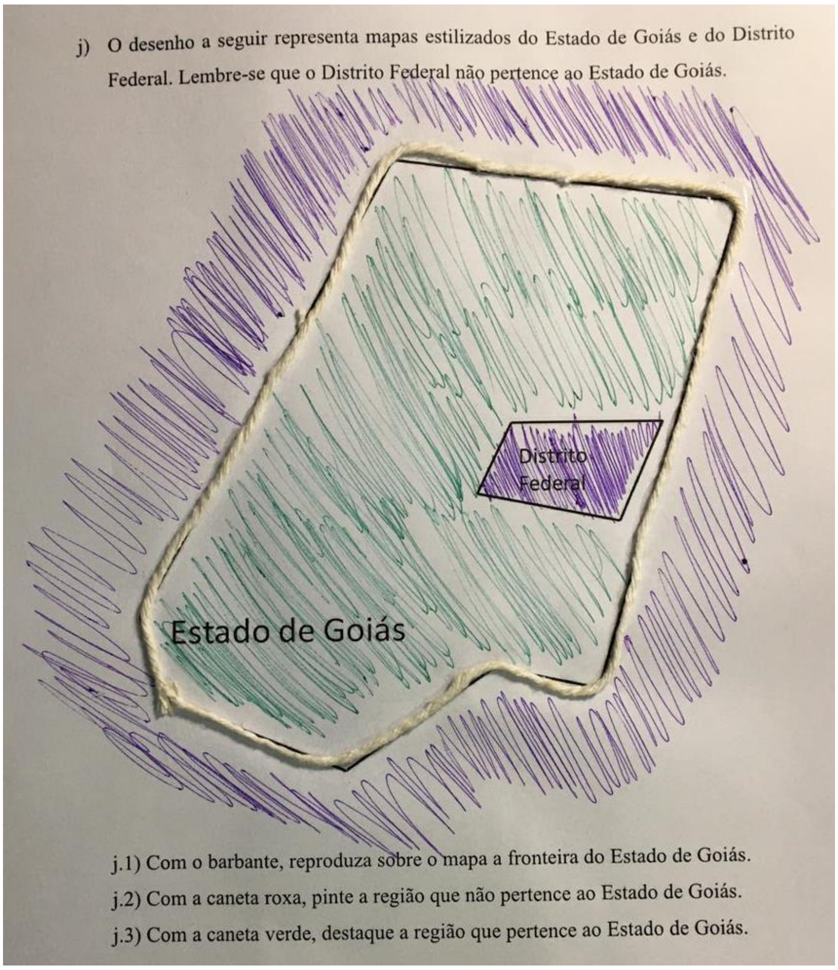

Fonte: Autor.

O participante cola uma tira de barbante no contorno do mapa, utiliza uma tesoura para acertar o comprimento do barbante e em seguida pinta de cor roxa a região que não pertence ao Estado de São Paulo, na sequência pinta de verde a região que pertence ao Estado de São Paulo. Ao terminar, não faz nenhuma consideração.

**Considerações:** O participante não apresenta dificuldades na execução da atividade, assim como é o esperado. Uma vez que também é objetivo dessa atividade é preparar o participante para a atividade seguinte.

**j) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado de Goiás e do Distrito Federal. Lembre-se que o Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás.**

Figura 74 - Resposta ao item (j) – Atividade 1




Fonte: Autor.

**j.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de Goiás.**

O participante pega uma tira de barbante, cola sob uma das fronteiras do Estado de Goiás, porém a fronteira que o Distrito Federal faz com o Estado de Goiás fica sem barbante, ver FIGURA 74. Em seguida, passa para o próximo item da atividade.

**j.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de Goiás.**

Ao terminar de ler em voz alta o enunciado, o participante pinta de roxo a região interna do Distrito Federal e em volta do Estado de Goiás. Sem fazer considerações, ele passa para o próximo item da atividade.

**j.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de Goiás.**

O participante lê o item, em seguida, pinta de verde a região do Estado de Goiás, sem fazer sobreposição (não pinta de verde Distrito Federal), ver FIGURA 74.

Nas considerações, o P2 verbaliza, “Dessa vez eu entendi por causa da resposta daquele exercício né? Até porque também, no enunciado fala que o Distrito Federal não faz parte do Estado de Goiás, então eu já sabia que tinha que pintá-lo de roxo”. O exercício que ele se refere é a situação 3 da atividade (h).

Na fase de discussão, o entrevistador solicita uma justificativa para não se colocar barbante sobre a fronteira do Distrito Federal com Goiás, o participante diz “Porque não é fronteira do Estado de Goiás”, em seguida ele diz que passou o barbante pela fronteira do Estado de Goiás. Nessa fase de discussão, o participante apresenta dificuldade no entendimento do conceito de fronteira. Apesar de estarmos utilizando o termo fronteira no sentido “matemático”, durante a discussão, o que foi possível perceber é que o participante não tinha uma ideia clara sobre o termo fronteira e que junto a isso, está o fato dele não ter o costume de analisar casos semelhantes a este, onde uma região é completamente “cercada” por outra. Por exemplo, não causou estranheza ao participante ele ter a região do Estado de Goiás pintada de verde e a região do Distrito Federal pintada de roxo e entre elas não haver uma delimitação. Acreditamos que há muitas formas de explorar essas ideias utilizando mapas, como por exemplo, analisar o Estado de São Paulo e suas fronteiras com a Cidade de São Paulo. Contribuindo assim com uma interdisciplinaridade, contextualização e além da forma lúdica de se trabalhar, há atualmente ferramentas gratuitas para se explorar mapas utilizando recursos digitais.

O participante ao final da discussão parece ter compreendido melhor a ideia de fronteira.

**Considerações:** Nesta atividade o participante encontrou dificuldade em destacar as fronteiras da figura (Estado de Goiás). Porém não aparentou ter dificuldades na demarcação das regiões, interna e externa. Na fase de discussão mostrou dificuldades no entendimento do conceito de fronteira.

**k) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado brasileiro de Goiás e do Distrito Federal.**

**k.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Distrito Federal.**

**k.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Distrito Federal.**

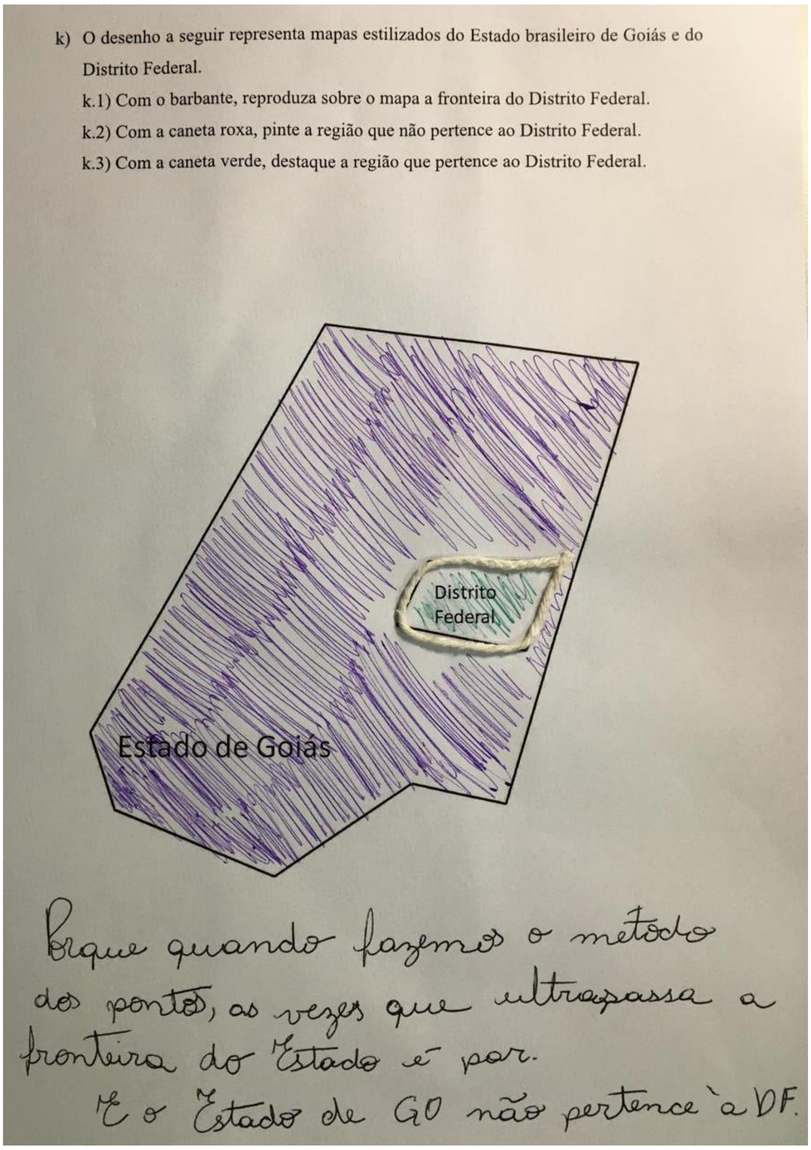
**k.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Distrito Federal.**

Nesse item, P2 destaca a fronteira do Distrito Federal utilizando o barbante, ver FIGURA 75. Em seguida, pinta de cor roxa a região que não pertence ao Distrito Federal, colorindo assim, apenas a região do Estado de Goiás. Em seguida ele pergunta, "Eu não devo pintar fora do Estado de Goiás dessa vez né?". O entrevistador não responde. O participante pinta de verde o Distrito Federal.

Na fase de discussão, o entrevistador pede para P2 justificar a região pintada de roxo. P2 diz, "Tem aquele método dos pontos, que se eu fizer um ponto nessa parte (o participante aponta para a região da folha que está fora do mapa) e passar para fora ela vai cortar então a parte fora de Goiás também é fora do Distrito Federal. Se eu fizer um ponto dentro de Goiás e passar para cima, vai cortar o Distrito Federal em 2 pontos, que é par, então é parte exterior também. E porque pediu para pintar a região que não pertence ao Distrito Federal. E Goiás não faz parte do Distrito Federal". O entrevistador pergunta se o Estado do Mato Grosso estivesse no mapa, qual cor seria pintado, P2 responde, "roxo".

**Considerações:** Nesta atividade P2 destaca corretamente a fronteira e a região interna do Distrito Federal. Quanto a região que não pertence ao Distrito Federal, P2 destaca apenas o Estado de Goiás. P2 passa a entender que a região externa vai além da demarcada por ele quando o entrevistador pede para que use a definição de ponto interior e ponto exterior. P2 considera o Estado de Goiás como um plano, ignorando assim sua infinitude.

Figura 75 - Resposta ao item (j) – Atividade 1




Fonte: Autor.

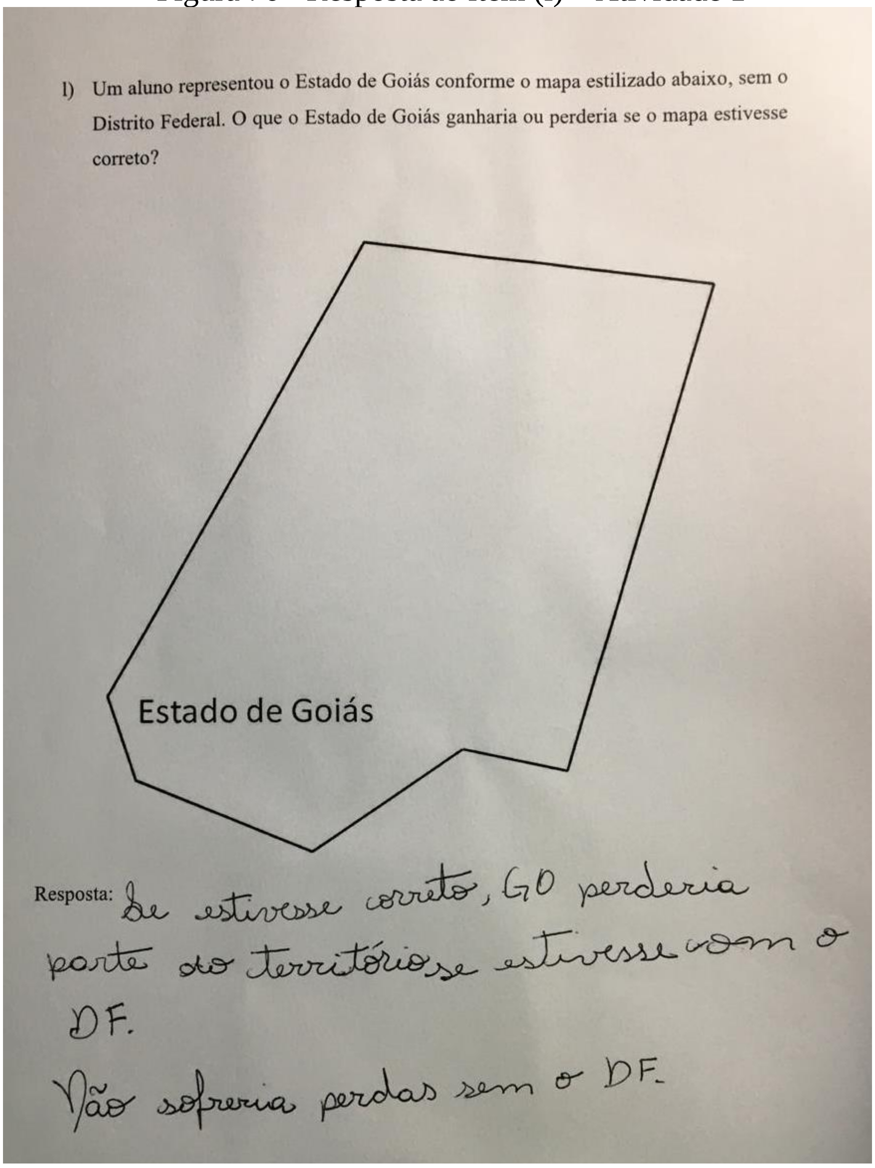
**l) Um aluno representou o Estado de Goiás conforme o mapa estilizado abaixo, sem o Distrito Federal. O que o Estado de Goiás ganharia ou perderia se o mapa estivesse correto?**

O participante lê o enunciado em voz alta e verbaliza, "Se estivesse correto, Goiás perderia parte do território pois pertenceria agora ao Distrito Federal". O entrevistador pede para que ele justificasse a resposta, o participante responde, ver FIGURA 75, "Perderia porque agora o território pertenceria ao Distrito Federal, não iria mais fazer parte do Estado de Goiás". Em seguida o P2 para, lê o enunciado e diz ter entendido que "se o Estado de Goiás estivesse correto com o Distrito Federal". O participante faz essa observação na folha de respostas. Ele ainda concorda que caso o erro tivesse sido cometido, o Estado de Goiás teria aumentado seu território. Em relação a perda, P2 diz não identificar perdas, complementa que caso isso acontecesse na realidade, Goiás perderia uma quantidade de população.

Na fase de discussão o entrevistador comenta a perda da fronteira e P2 concorda.

Durante a atividade foi possível notar a dificuldade de P2 em fazer comparações, sobretudo na comparação entre fronteiras.

Figura 76 - Resposta ao item (l) – Atividade 1

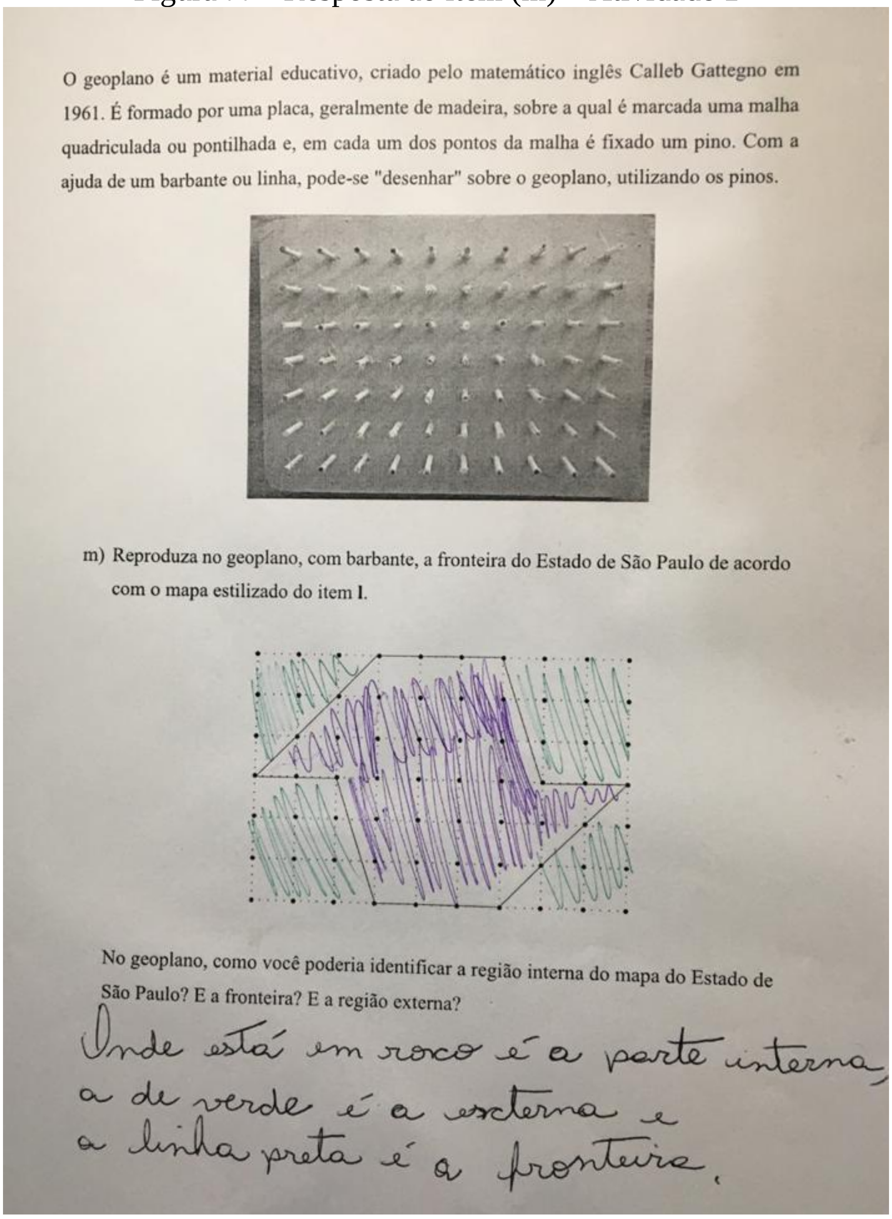



Fonte: Autor.

**Considerações:** Nesta atividade P2 nota que a troca entre as figuras (mapas do Estado de Goiás, correto e incorreto) gera um acréscimo na região interna do Estado de Goiás, porém, não nota uma diminuição da fronteira. Ainda que o contorno da figura esteja sendo representado por uma tira de barbante, este é desconsiderado na análise. O que poderia contribuir para essa percepção, é propor para o participante qual das figuras utiliza mais barbante e qual figura gastaria mais tinta para ser preenchida, isto é, trabalhar mais sob o paradigma G0.

**O Geoplano é um material educativo, criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno em 1961. É formado por uma placa, geralmente de madeira, sobre a qual é marcada uma malha quadriculada ou pontilhada e, em cada um dos pontos da malha é fixado um pino. Com a ajuda de um barbante ou linha, pode-se "desenhar" sobre o Geoplano, utilizando os pinos.**

Figura 77 - Resposta ao item (m) – Atividade 1



O geoplano é um material educativo, criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno em 1961. É formado por uma placa, geralmente de madeira, sobre a qual é marcada uma malha quadriculada ou pontilhada e, em cada um dos pontos da malha é fixado um pino. Com a ajuda de um barbante ou linha, pode-se "desenhar" sobre o geoplano, utilizando os pinos.

m) Reproduza no geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de São Paulo de acordo com o mapa estilizado do item l.

No geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de São Paulo? E a fronteira? E a região externa?

Onde está em roxo é a parte interna, a de verde é a externa e a linha preta é a fronteira.

Fonte: Autor.

m) **Reproduza no Geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de São Paulo de acordo com o mapa estilizado do item l.**

Antes de iniciar a atividade, o participante afirma que não conhece o Geoplano.

Figura 78 - Resposta ao item (m) no Geoplano – Atividade 1


Fonte: Autor.

O participante faz a representação do mapa do Estado de São Paulo utilizando o Geoplano e a tira de barbante, ver FIGURA 78. Sobre a região interna o participante responde, “A parte interna é... como eu posso dizer... É a parte de dentro do barbante, é essa aqui”. Ele põe a mão acima dos pinos da região interna em seguida aponta para os pinos.

Em relação a fronteira o participante responde, “A fronteira seria o próprio barbante”. Quanto a região externa, o participante vai passando o dedo de pino em pino do Geoplano (que não estão cercados pelo barbante) e diz, “A parte externa seria onde está em volta do barbante”. Sinalizando os pinos localizados próximos ao barbante, mas na região externa do mapa.

Em seguida, P2 faz uma legenda na folha de respostas, denominando as regiões interna, externa e a fronteira, ver FIGURA 77.

**Considerações**: O participante afirma desconhecer o Geoplano.

Após fazer o contorno do mapa utilizando o barbante, ver FIGURA 78, para caracterizar as regiões interna e externa, o participante utiliza como referência o barbante, que representa a fronteira do mapa. Assim, para o participante, região interna é o que está “na parte de dentro do barbante” e região externa é o que está “em volta do barbante”. Os elementos em jogo, região interna, região externa e fronteira, são apresentados pelo participante tanto de forma verbal como por toque.

n) **Reproduza no Geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de Goiás, de acordo com o mapa estilizado do item j.**

**No Geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de Goiás? E a fronteira? E a região externa?**

Nesta atividade o Geoplano continua sendo utilizado para reproduzir um mapa, desta vez, o mapa do Estado de Goiás, utilizando para isso uma tira de barbante.

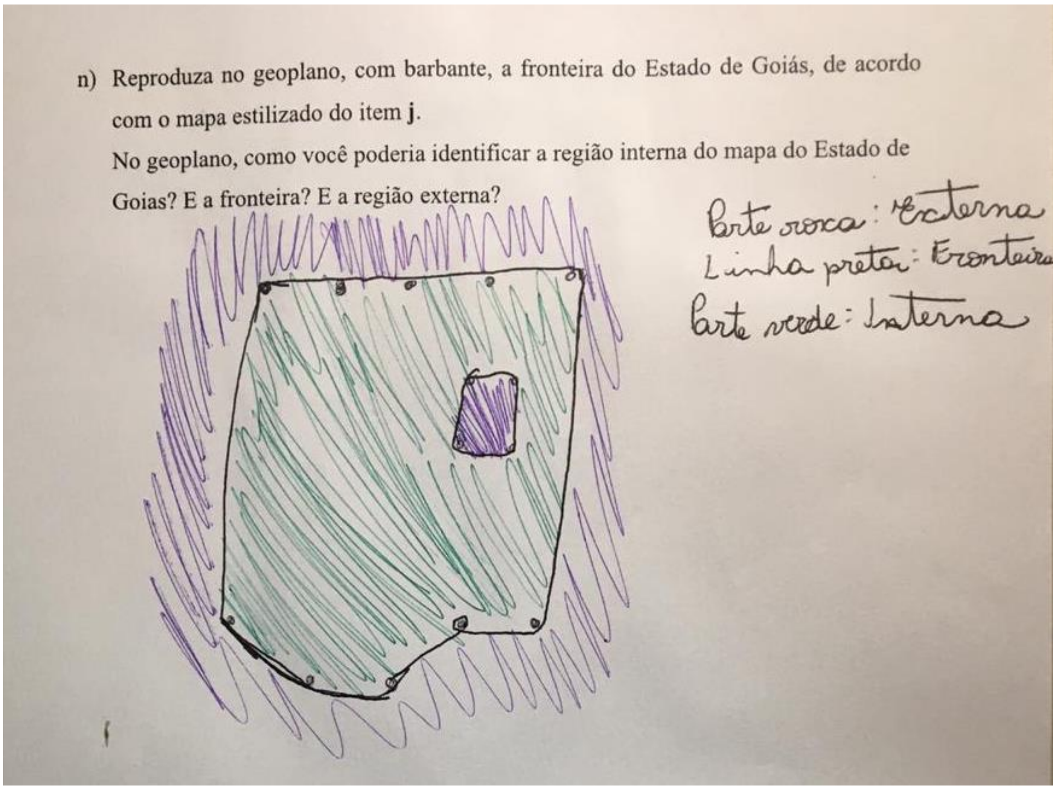
Com a tira de barbante P2 faz a representação do Estado de Goiás inicialmente considerando uma fronteira, em seguida, diz que não sabe se deveria ou não representar o Distrito Federal. Na sequência ele faz com o barbante a fronteira do Distrito Federal com o Estado de Goiás, ver Figura 79.

Figura 79 - Resposta ao item (n) – Atividade 1


Fonte: Autor.

Na folha de respostas o participante faz a representação estilizada do mapa de Goiás, considerando o Distrito Federal e faz também uma legenda para indicar as regiões interna, externa e as fronteiras, ver FIGURA 80.

Figura 80 - Resposta ao item (n) – Atividade 1



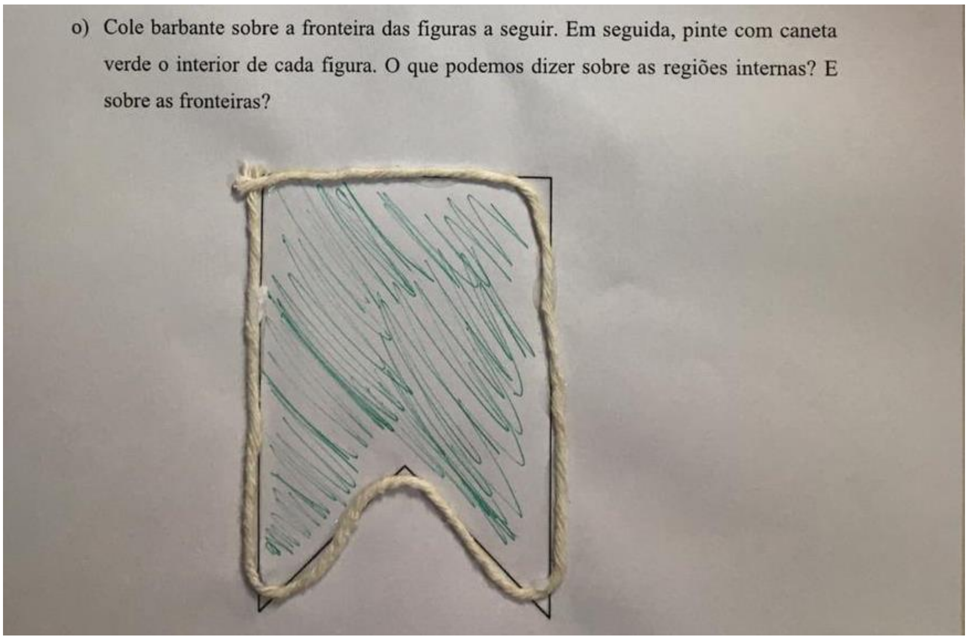

Fonte: Autor.

**Considerações**: P2 faz a representação de uma das fronteiras do Estado de Goiás utilizando o barbante e fica com dúvida quanto a representar ou não a fronteira do Estado com o Distrito Federal, optando em seguida por representar a fronteira. Importante lembrar que essa dúvida é semelhante a dúvida que este participante teve na atividade (j), revelando uma dificuldade no entendimento de figuras formadas por duas curvas, o que é de se esperar uma vez que esse tipo de figura não é trabalhado em sala de aula e em materiais didáticos.

**o) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir. Em seguida, pinte com caneta verde o interior de cada figura. O que podemos dizer sobre as regiões internas? E sobre as fronteiras?**

O participante lê o enunciado da questão, passa a cola sobre a fronteira da figura e em seguida passa o barbante. Ele repete o processo com a próxima figura. Ao terminar, pensa por algum tempo e verbaliza, “Eu não cheguei a nenhuma conclusão. Elas não têm parte externa dentro delas”. Em relação a fronteira, ele responde “A única coisa que eu pensei foi que a segunda imagem parece que encaixa com a primeira, a fronteira da segunda imagem encaixa com a primeira. E que as fronteiras são fechadas". Com a frase "Ela não têm parte externa dentro delas", P2 quer dizer que a figura não possui duas fronteiras. Já com a frase, "E que as fronteiras são fechadas", o participante quer dizer que as fronteiras são representadas por caminhos fechados.

Figura 81 - Resposta ao item (o) – Atividade 1




Fonte: Autor.

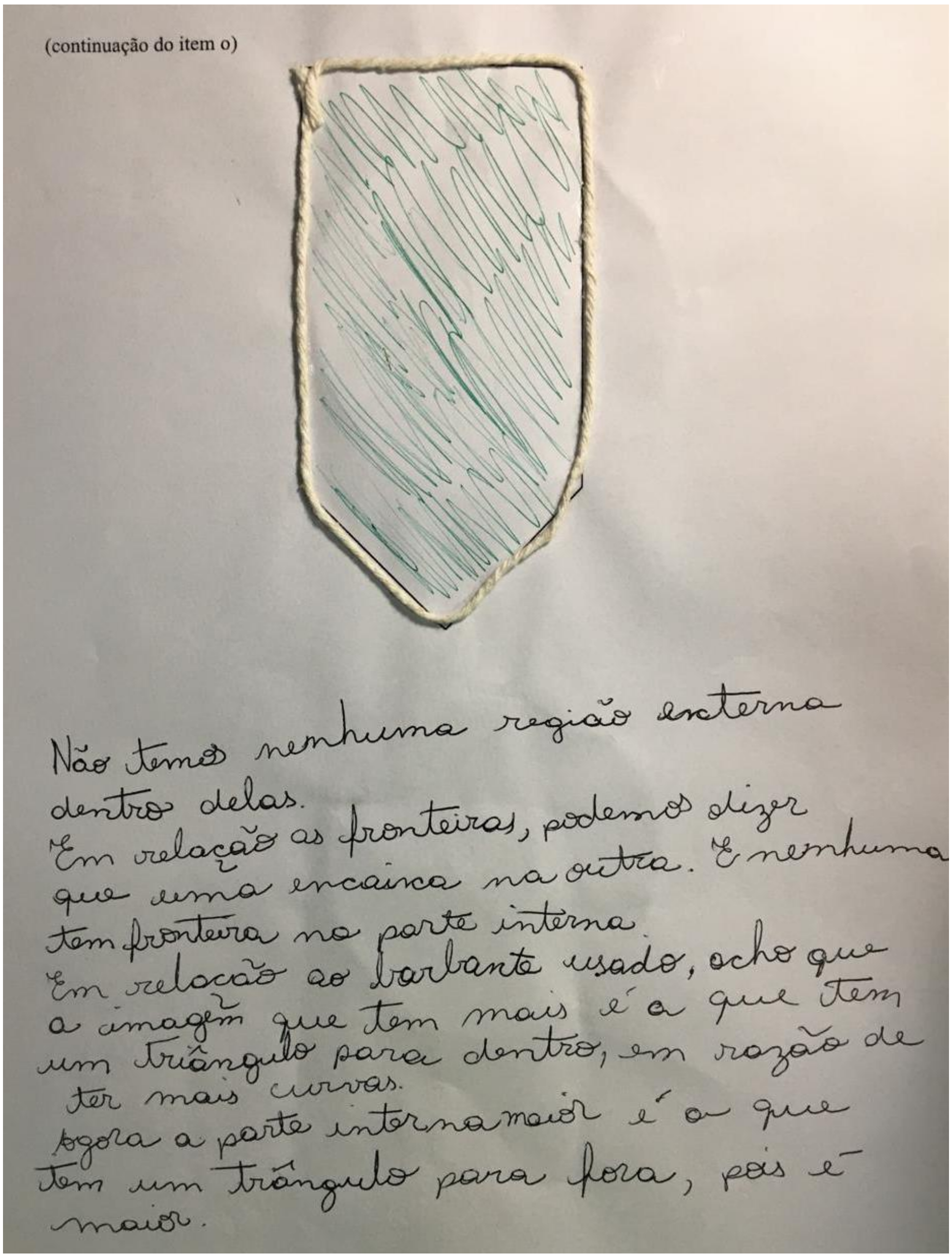
O entrevistador pergunta a P2 sobre qual figura utiliza mais barbante, ele responde, "Eu acho que a primeira pois ela tem mais curvas", ver FIGURA 80. O entrevistador pergunta novamente sobre as diferenças em relação as regiões internas ou as áreas. O participante diz novamente que ambas não possuem "buraco", então ele reformula a pergunta, se pintarmos ambas as regiões internas, qual gastaria mais tinta? O participante responde, "A figura com área maior é a que tem o triângulo para fora (referência a FIGURA 81). A que tem o triângulo para dentro é como se tivesse tirado uma parte dela. A que tem o triângulo para fora parece que tem um comprimento maior, ou como se tivesse adicionado um triângulo", ver FIGURA 80.

O participante utiliza como referência três vértices da figura, denominando-os por triângulo. Para o participante, há a figura com o "triângulo para dentro", ver FIGURA 80, e há a figura com o triângulo para fora, ver FIGURA 81.

Na folha de resposta P2 escreve, "Em relação a região interna, não temos nenhuma região externa dentro delas, em relação as fronteiras podemos dizer que uma encaixa na outra e nenhuma tem fronteira na parte interna. Em relação ao barbante utilizado, acho que a imagem que tem mais é a que tem o triângulo para dentro em razão de ter mais curvas. Parte interna, maior é a que tem o triângulo para fora pois é maior”.

Ao final, na fase de discussão, o entrevistador apresenta as ideias de comparação entre regiões internas e entre fronteiras, destacando que no caso da atividade, uma figura possui região interna maior que a outra, porém ambas possuem mesmo perímetro. Por fim, P2 faz uma consideração, “Eu lembrei do nome dessas figuras, uma chama côncava e outra convexa”.

Figura 82 - Resposta ao item (o) – Atividade 1




Fonte: Autor.

**Considerações:** P2 apresenta uma dificuldade em comparar as fronteiras e as regiões internas. As comparações apresentadas foram feitas por meio de estímulos do entrevistador. Assim como em outras atividades, o participante ao invés de comparar as duas figuras, apresenta características de cada figura.

Para P2, a o caminho mais comprido é o que possui "mais curvas", ou seja, P2 não tem sem seu repertório uma forma de comparar diferentes comprimentos, quando estes não possuem medida. Já a região interna o participante inicialmente não aponta diferenças, em seguida compara entre as figuras a região formada por três vértices de ambas as figuras, vértices estes que formam um triângulo. P2 utiliza o termo "região externa dentro...", o que indica que ele ainda não possui um entendimento claro sobre região interna e fronteira.

Vale lembrar que quando P2 utiliza o termo "buraco", este se refere a região interna da curva de menor comprimento da figura em questão.

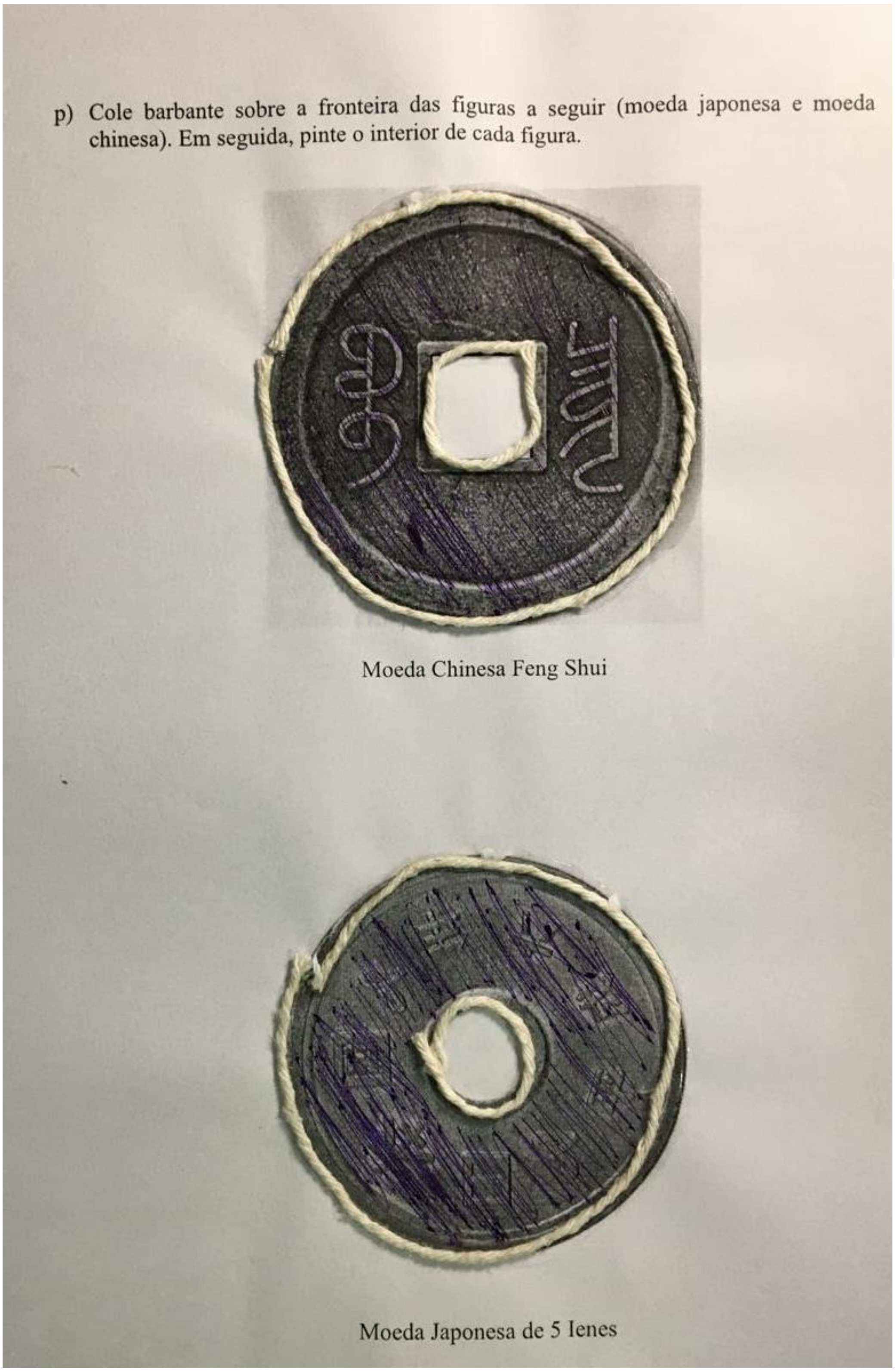
**p) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir (moeda japonesa e moeda chinesa). Em seguida, pinte o interior de cada figura.**

O participante lê o enunciado e pergunta, "Professor, tem duas fronteiras, essa parte que é o buraco e a parte de fora. Tem que contornar as duas?". O entrevistador sugere que ele leia novamente o enunciado. P2 lê e na sequência, passa cola sob as fronteiras das figuras, contorna elas com o barbante e na sequência pintam os respectivos interiores.

Antes de finalizar a atividade, o participante recorda ter visto uma das moedas nas aulas de história.

**Considerações:** Nesta atividade o participante apresenta insegurança em manipular as figuras formadas por duas curvas. Ele reconhece que a figuras são compostas por duas curvas, porém tem dificuldades de reconhecer as curvas como fronteiras. O que nos mostra que o conceito de fronteira não está claro para ele, necessitando de validação do entrevistador para saber se está correta ou não a resposta.

Figura 83 - Resposta ao item (p) – Atividade 1


p) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir (moeda japonesa e moeda chinesa). Em seguida, pinte o interior de cada figura.

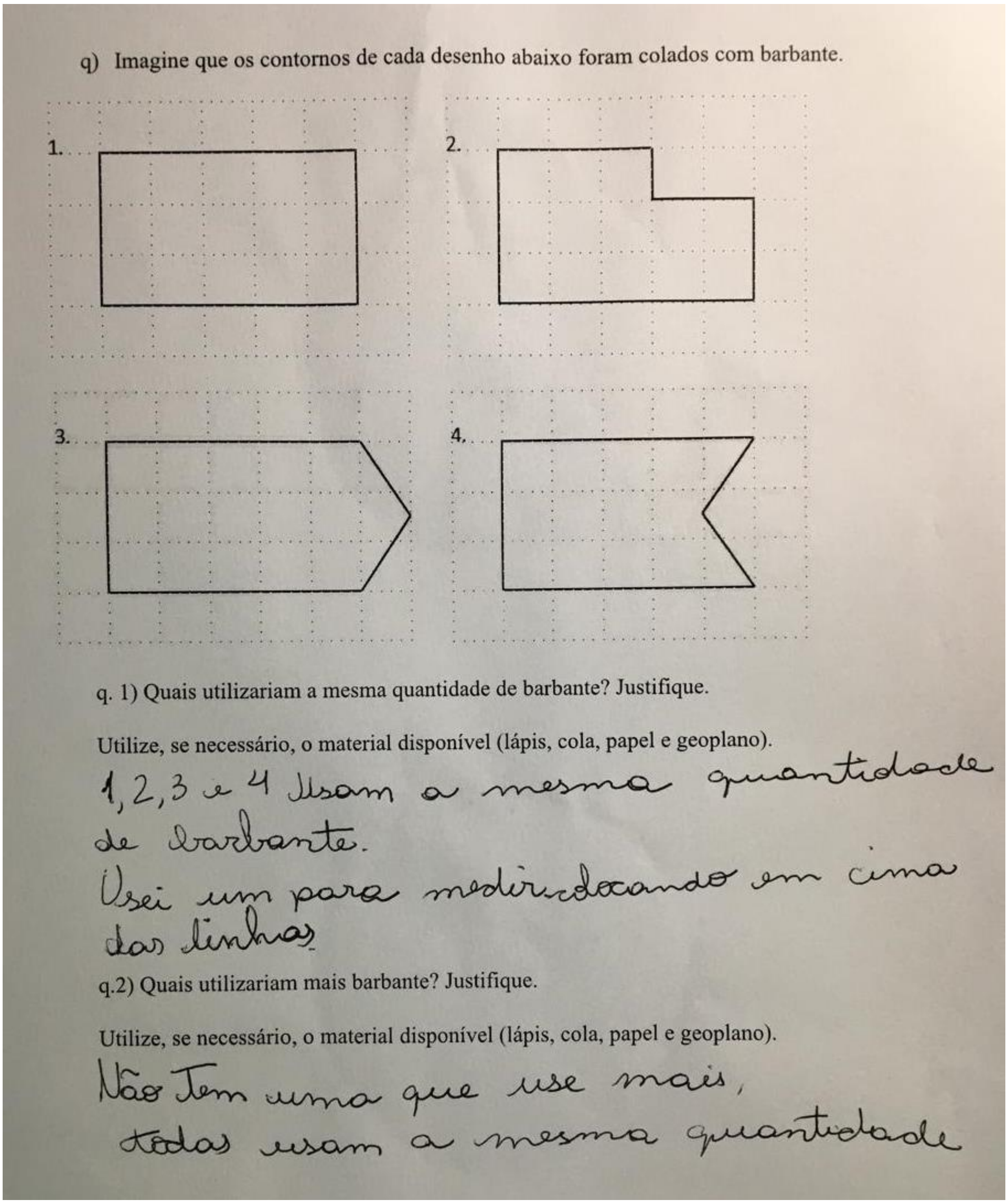
Moeda Chinesa Feng Shui

Moeda Japonesa de 5 Ienes

Fonte: Autor.

**q) Imagine que os contornos de cada desenho abaixo foram colados com barbante.**

Figura 84 - Resposta ao item (q) – Atividade 1




Fonte: Autor.

**q. 1) Quais utilizariam a mesma quantidade de barbante? Justifique.**

O participante lê o enunciado da atividade, pega uma tira de barbante e começa a medir o contorno das figuras 1, 2, 3 e 4, ver Figura 84. Após medir, P2 diz, “Professor, eu cheguei em uma resposta. Eu medi com um pedaço de barbante e se eu medi certo, todas deram a mesma quantidade de barbante". Na folha de questões P2 descreve que mediu colocando o barbante "em cima das linhas" das figuras.

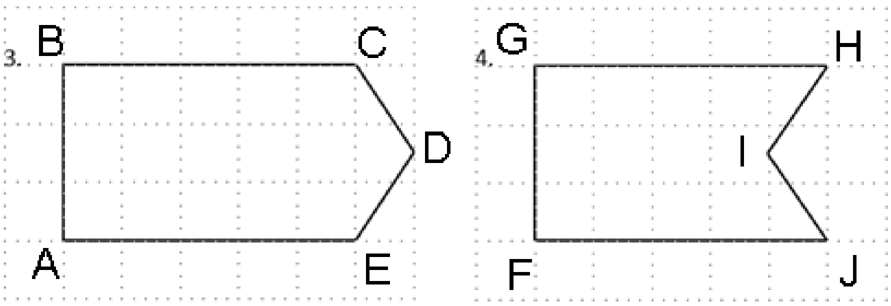
**q.2) Quais utilizariam mais barbante? Justifique. Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e Geoplano).**

O participante após ler o enunciado, faz a seguinte observação, ver FIGURA 84, "Não tem uma que utiliza mais, todas utilizam a mesma quantidade". O participante não faz mais observações e então iniciamos a fase de discussão.

O entrevistador analisa as figuras 1 e 2 junto com o participante, ver FIGURA 84. Ele sugere usar como unidade de medida o lado dos quadradinhos da própria malha sob a qual as figuras estão traçadas. Nas figuras 1 e 2 o entrevistador mostra que a medida do contorno das figuras coincide, ambas possuem 16 unidade de medida. O participante diz ter entendido e concorda com o procedimento.

Nessa fase de discussão, os vértices das figuras 1 e 3 foram mencionados algumas vezes. Para transcrever o diálogo feito de uma maneira mais clara e objetiva, nomearemos os vértices dessas figuras conforme apresentado na Figura 85.

Figura 85 – Figuras 3 e 4 da atividade (q) – Atividade 1




Fonte: Autor.

O entrevistador mostra para o participante que ao comparar as figuras 1 e 3, FIGURA 85, a medida dos lados CD e DE somados aparentam ter uma medida superior a medida do segmento CE. P2 concorda e verbaliza, "Eu medi e deu a mesma quantidade". O entrevistador fala sobre possíveis erros de imprecisão na forma de obter as medidas. Em seguida, ao retomar a comparação entre as figuras 1 e 3, P2 diz, "Se eu não tivesse passado o barbante, eu pensaria que seria maior", e completa dizendo que possui um motivo para que a figura 3 gaste mais barbante que a figura 1 e tem um motivo para pensar que a figura 1 não gaste mais barbante que a figura 3. Em seguida diz, “A razão para figura 3 gastar mais barbante é que tem um triângulo a mais, tipo, algo pra fora, como se tivéssemos acrescentado alguma coisa, por outro lado, pode ser que os lados que ficam pra fora (segmentos CD e DE) somado, resultam no segmento CE”. O entrevistador comenta sobre as condições de existência de um triângulo, o participante parece não entender e então o entrevistador diz que uma das condições de existência de um triângulo no plano é que a soma da medida de dois lados do triângulo deve ser maior que a medida do terceiro lado. P2 aparenta não conhecer essa condição, então o entrevistador sugere que P2 pegue 3 lápis (tamanhos parecidos) e forme um triângulo, em seguida, é sugerido a P2, formar um triângulo com 1 lápis e duas tampas de caneta, e assim P2 percebe que não são quaisquer 3 segmentos que formam um triângulo, aparentando entender assim a desigualdade triangular. Na sequência o entrevistador mostra que a medida do segmento CE é menor que a soma das medidas dos segmentos CD e DE, portanto a figura 3 precisa de mais barbante para ser formada que a figura 1. O entrevistador pergunta sobre a figura 4 e P2 diz que tanto a figura 3 como a figura 4 gastam a mesma quantidade de barbante.

Por fim, o entrevistador pergunta para P2 se o fato de as figuras não possuírem medida, dificultaram a atividade, P2 diz, “Posso dizer que é mais um desafio. Quando a gente só olha, a gente não tem muita noção, aí a gente tenta medir mais aí como o senhor disse, pode haver imprecisão, então é mais difícil sim com medida”.

Quando perguntado sobre o que achou da atividade, P2 verbaliza, “É uma atividade bem diferente, fazia muito tempo que eu não usava barbante, a última vez que usei barbante foi antes do Fundamental I e trouxe conhecimento sobre a questão de olhar e comparar tamanhos e a questão de descobrir se uma região é interior ou exterior, com pontos e semirretas”. Em seguida P2 declara não ter mais observações a serem feitas e assim a entrevista é encerrada.

**Considerações:** P2 utiliza o barbante para medir o contorno de cada figura (paradigma G0), mostrando que a concepção numérica ainda prevalece como estratégia de solução. Concluí que todas as figuras possuem perímetros iguais.

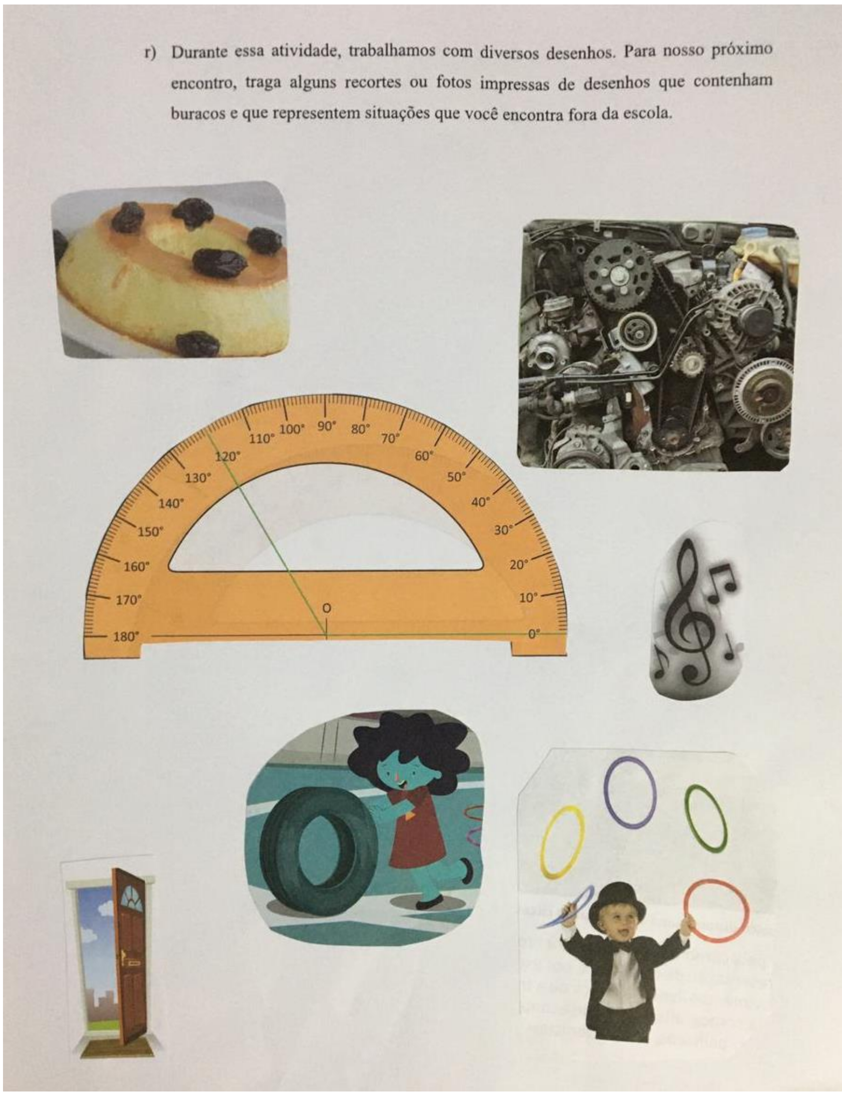
Feita uma discussão sobre imprecisões do processo de medição, P2 concorda que os perímetros das figuras são diferentes. Ao verificar uma possível solução, P2 utiliza o termo “desafio” para se referir a solução sem “uso de medidas”. Concluímos que P2 apresenta nenhuma intimidade em fazer comparações entre segmentos de diferentes comprimentos, assim como nas atividades anteriores, o que revela assim a falta de atividades em sala de aula que trabalhe o perímetro como grandeza.

r) **Durante essa atividade, trabalhamos com diversos desenhos. Para nosso próximo encontro, traga alguns recortes ou fotos impressas de desenhos que contenham buracos e que representem situações que você encontra fora da escola.**

Nesta atividade, o participante fica com a folha de respostas e após uma busca por desenhos que contenham buracos, ele seleciona as figuras para colar na folha de respostas, ver FIGURA 86.

O conjunto de figuras trazidas são interessantes pois misturam representações planas e tridimensionais. O que mostra um entendimento de figuras com "buracos" tanto no plano como no espaço tridimensional. Destaque para a figura da nota musical que é a única figura "plana" do conjunto apresentado.

Figura 86 - Resposta ao item (r) – Atividade 1




Fonte: Autor.

### 8.2.4. Participante P3

O terceiro participante (P3) cursa o 7º ano do Ensino Fundamental em um colégio da rede privada de ensino, localizado na zona leste de São Paulo, e que frequenta desde o 1º ano do Ensino Fundamental.

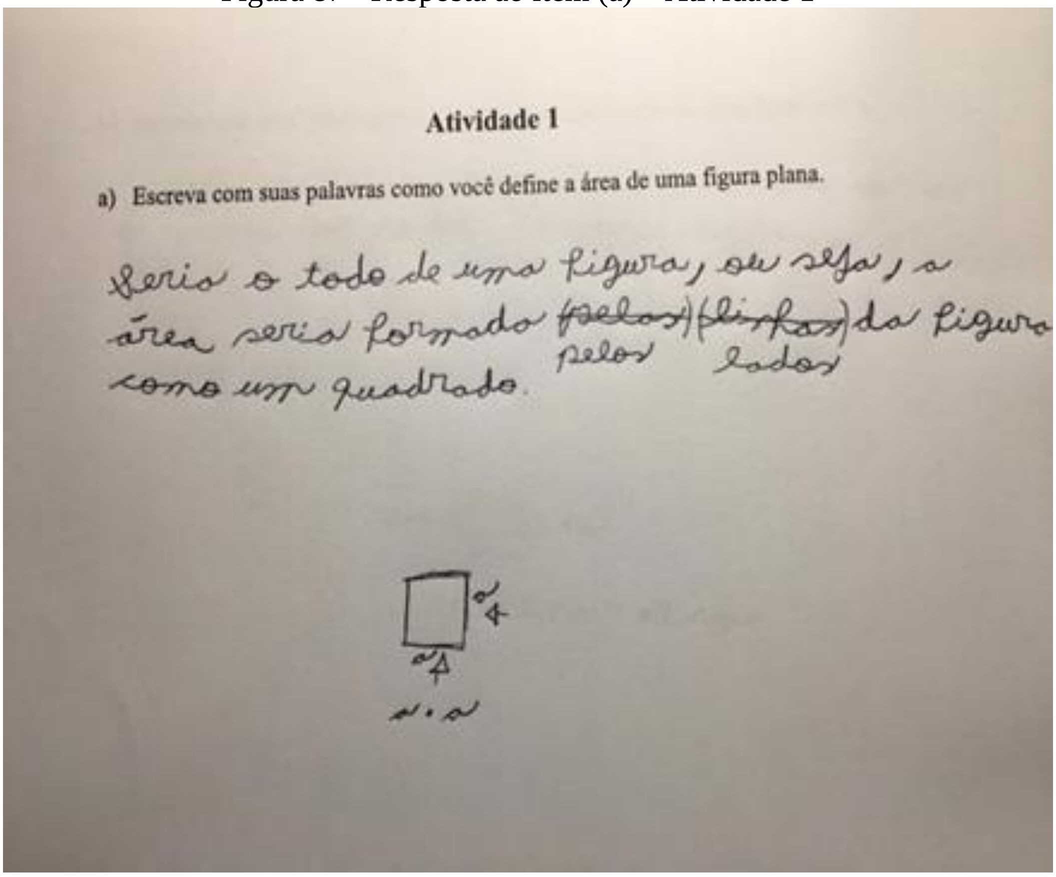
É um aluno dedicado, que ora ou outra questiona as soluções apresentadas para atividades propostos, procura estudar os conteúdos de Matemática antes de serem vistos em sala de aula e se interessa por Olimpíadas de Matemática e linguagem de programação.

A atividade 1 durou 4 horas e 16 minutos e a atividade 2, 3 horas e 40 minutos.

**a) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.**

P3 escreve (ver FIGURA 87) "Seria o todo de uma figura, ou seja, a área seria formada pelos lados da figura como um quadrado". Em seguida, desenha um quadrado (sem preenchimento) cujos lados são denominados $a$. Ele acrescenta à resposta "$a \cdot a$", fazendo referência à fórmula da área do quadrado. P3 finaliza a atividade dizendo, "Não veio muita coisa à minha cabeça nesse momento, é basicamente isso que escrevi".

Figura 87 - Resposta ao item (a) – Atividade 1


Atividade 1

a) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.

Seria o todo de uma figura, ou seja, a área seria formada ~~(pelos)~~ ~~(linhas)~~ da figura
pelos lados
como um quadrado.

a
a
$a \cdot a$

Fonte: Autor.

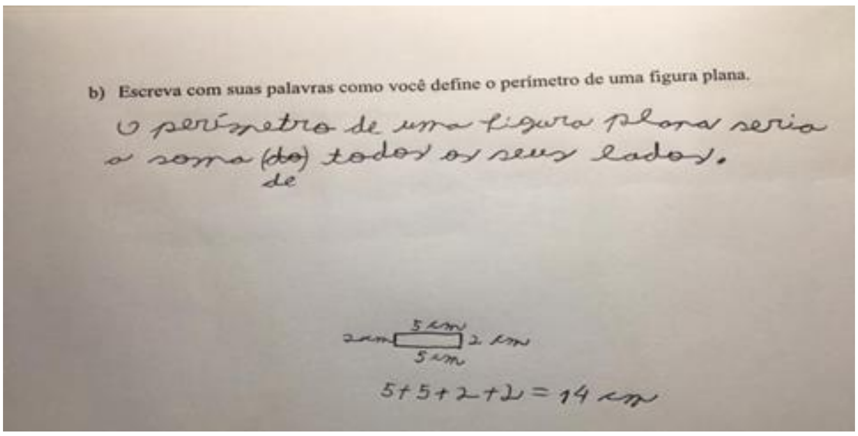
**Considerações:** P3 define área como o “todo de uma figura”, isto é, tudo que compõe uma figura plana, que pode ser entendido como a superfície limitada pela figura. Em seguida, P3 declara “área seria formada pelos lados da figura como um quadrado”, assim ele associa o “todo” de uma figura (objeto bidimensional) a seus “lados” (objeto unidimensional) e menciona o quadrado. Para P3, a área está relacionada à região interna de uma figura e seu contorno. Como único exemplo apresenta um quadrado, a medida dos lados e o produto entre os lados, simbolizando a área desse quadrado.

Em relação à definição de conceito de área, P3 apresenta uma concepção geométrica, relacionada à região interna e aos lados de um polígono e em sua representação figural surge a concepção numérica de área, indicado pelo produto da medida dos lados.

**b) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.**

P3 escreve na folha de respostas, ver FIGURA 88, “O perímetro de uma figura plana seria a soma de todos os seus lados”. Na sequência, faz um retângulo cujos lados medem 5cm e 2cm e diz que não há o que acrescentar à resposta e avança para a próxima atividade.

Figura 88 - Resposta ao item (b) – Atividade 1




Fonte: Autor.

**Considerações:** Na definição de perímetro apresentada, as concepções numérica e geométrica estão presentes pois, para P3, o perímetro é o resultado de uma soma, portanto um número obtido por um procedimento, e essa soma depende dos lados. Nenhuma concepção de grandeza foi mencionada.

**c) Observe e reproduza os caminhos a seguir utilizando os fios de barbante disponíveis. Em seguida, responda às questões.**

P3 inicia a atividade passando cola sobre os caminhos, colocando o barbante a partir de um ponto e seguindo o caminho até o ponto seguinte, onde cortou o barbante. Ele não demostrou intimidade em trabalhar com o material utilizado (cola, barbante e tesoura). Importante destacar que em nenhum momento, P3 utilizou o comprimento das figuras impressas na folha para calcular o tamanho da tira de barbante a ser colada.

**d) Há diferenças nos caminhos? Qual(is)?**

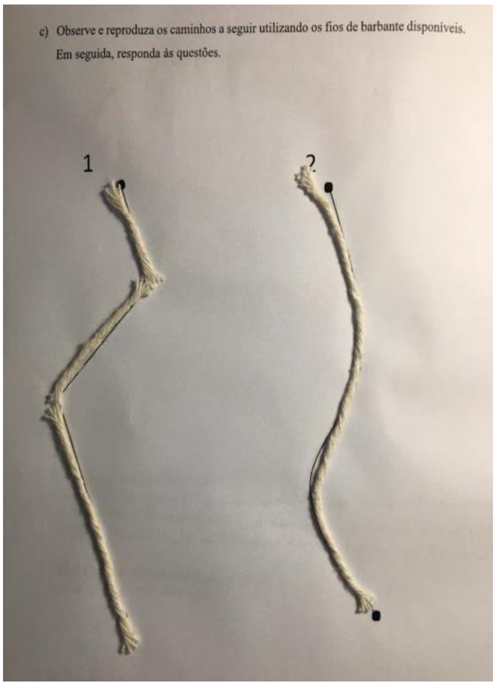
P3 comenta, ver FIGURA 89, “Esses caminhos são ondulados, tem bastante curvas, exceto a figura 1. A figura 4 parece que tem uma forma, as figuras 3 e 4 são formas de alguma coisa. Dá para gente olhar para elas e pensar em uma imagem”. A partir daí acontece o diálogo.

**Entrevistador:** Ao olhar as figuras 3 e 4, a imagem que lhe vem à mente possui preenchimento ou é formado só pelo contorno?

**P3**: Eu penso como se tivesse um preenchimento, como se o meio tivesse preenchido, para <u>me ajudar a formar a imagem</u>. (grifo nosso).

Sem novas considerações, P3 avança para a próxima atividade.

Figura 89 - Resposta ao item (c) – Atividade 1




Fonte: Autor.

e) **Algum caminho delimita uma região do plano?**

P3 lê o enunciado do item (e) e diz não ter entendido. O entrevistador pede para que ele veja a folha da atividade como a representação de um lugar do plano e imaginando que os caminhos 1, 2, 3 e 4 estejam contidos nesse plano, qual deles delimita uma região do plano? P3 verbaliza, "A tá, se tipo, os caminhos delimitam um espaço, se é fechado e tal. Tem né... tem a 3 e a 4, elas são fechadas, não são como a 1 e a 2 que são uma linha". Na sequência P3 escreve na folha de respostas, ver FIGURA 90, "Sim os caminhos 3 e 4".

Na fala de P3, percebemos que para ele, há uma diferença entre linha e caminho fechado. Embora durante a entrevista esse fato não tenha sido explorado, a hipótese que temos é de que para P3, uma linha seja um objeto unidimensional, já um caminho fechado, seja um objeto bidimensional.

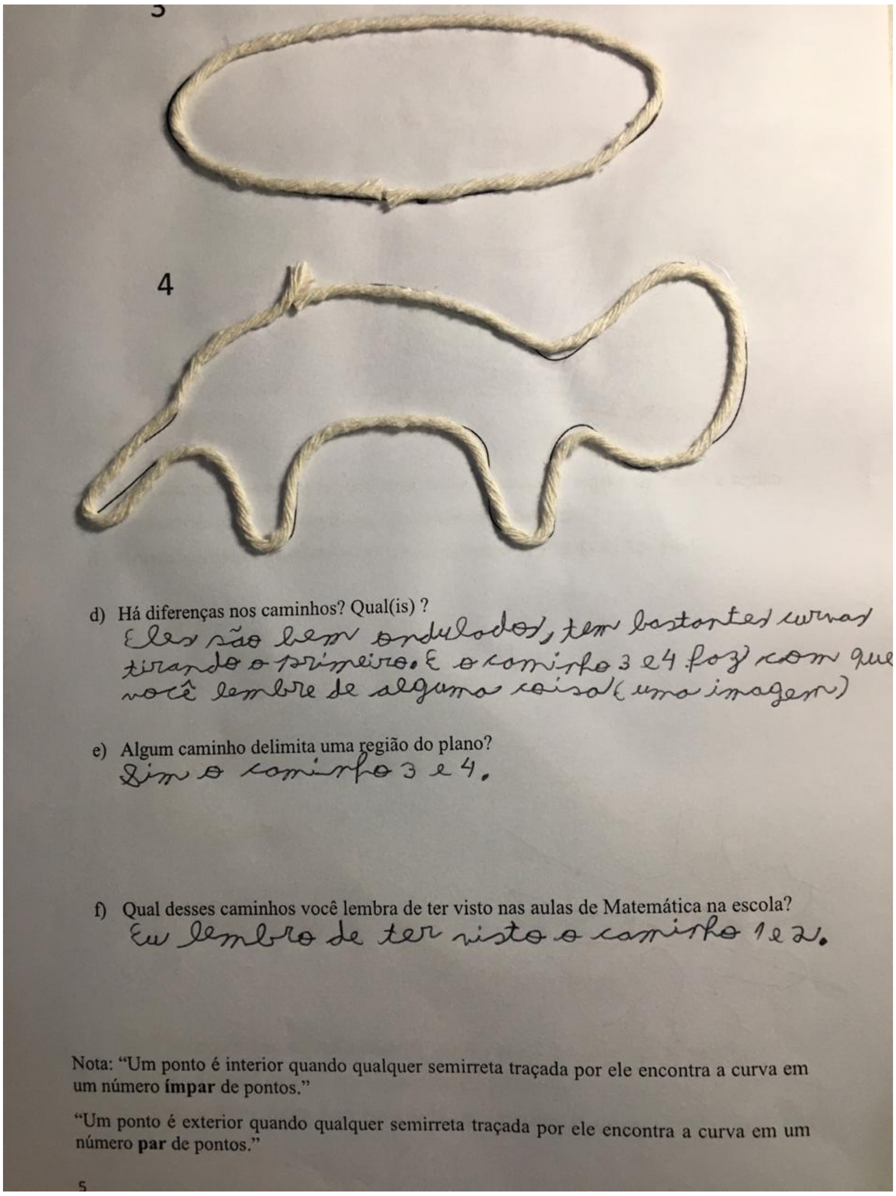
f) **Qual desses caminhos você lembra de ter visto nas aulas de Matemática na escola?**

Ao ler o enunciado, item (f), P3 revela que os caminhos 1 e 2 lembra de ter visto nas aulas de geometria, quando estudou ângulos, semirretas e retas. Em seguida escreve na folha de respostas, ver FIGURA 91, "Eu lembro de ter visto os caminhos 1 e 2".

**Considerações:** P3 revela que, para compreender melhor as figuras 3 e 4, imagina-as com preenchimento. Em seguida, se refere a curva fechada por "caminho" e curva aberta por "linha", mostrando assim que há barreiras que precisam ser vencidas para que se consiga ter um entendimento pleno sobre curva fechada.

A hipótese que temos é de que P3 associe dimensões diferentes entre curva aberta e curva fechada. A linha representa um objeto unidimensional, porém, a curva aberta presenta um objeto bidimensional, uma vez que ele menciona que "preenche" um caminho fechado para entendê-lo melhor.

Figura 90 - Resposta aos itens (c), (d), (e) e (f) – Atividade 1



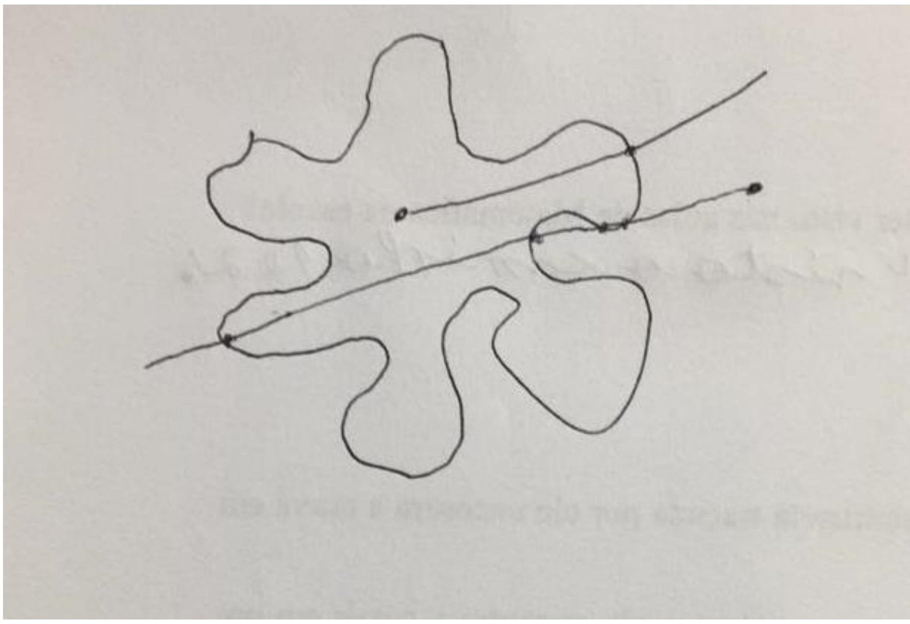

Fonte: Autor.

### Nota sobre regiões internas e regiões externas

P3 lê a nota e a definição apresentadas, o entrevistador pede que faça uma figura qualquer na folha de resposta, ver FIGURA 91, e marcasse dois pontos, um na região interna e outro na região externa à figura e que justificasse em seguida a posição dos pontos em relação a figura. P3 justifica utilizando a definição apresentada, qual ponto está no interior da figura e qual está no exterior.

Durante essa atividade foi possível notar que ao testar se um ponto é interior ou exterior a uma curva, P3 traça apenas uma semirreta e não "várias" semirretas. Acreditamos que ele não esteja familiarizado em trabalhar com definições e percebemos que há necessidade de esclarecer o significado de alguns quantificadores, como por exemplo o "qualquer". Importante destacar que como P3 cursa o 7º ano do Ensino Fundamental, julgamos natural que nessa fase, os alunos não estejam familiarizados em trabalhar com definições.

Figura 91 - Exemplo de pontos internos ou externos a uma figura - Atividade 1



Fonte: Autor.

g) **Você recebeu uma folha de papel que representa uma região limitada plana e alguns colares de barbante que representam curvas fechadas. Escolha dois desses colares e use-os sobre a folha, à vontade. Crie duas situações que você considera diferentes. Justifique.**

P3 pode utilizar até 2 colares de barbante em cada situação. Os colares são colocados sobre a folha de papel tamanho A3 e para cada uma das duas situações, ele registra com o celular, a disposição escolhida dos colares (ver FIGURA 92, 93 E 94).

**1ª situação**: Na primeira situação (ver FIGURA 92), P3 faz duas figuras que, segundo ele, são representações de um retângulo e de uma circunferência.

**2ª situação**: Para a segunda situação (ver FIGURA 93), P3 apresenta duas curvas, com uma delas semelhante a uma elipse. Para ele, os casos são diferenciados pelo tipo de curva e não pela posição em que essas curvas estão dispostas no plano.

Diante do resultado apresentado, o entrevistador propõe uma **3ª situação**, em que P3 é orientado a utilizar um terceiro par de colares de barbante e colocar um na região interna do outro (ver FIGURA 94) P3 faz um desenho das três situações na folha de respostas, ver FIGURA 95.

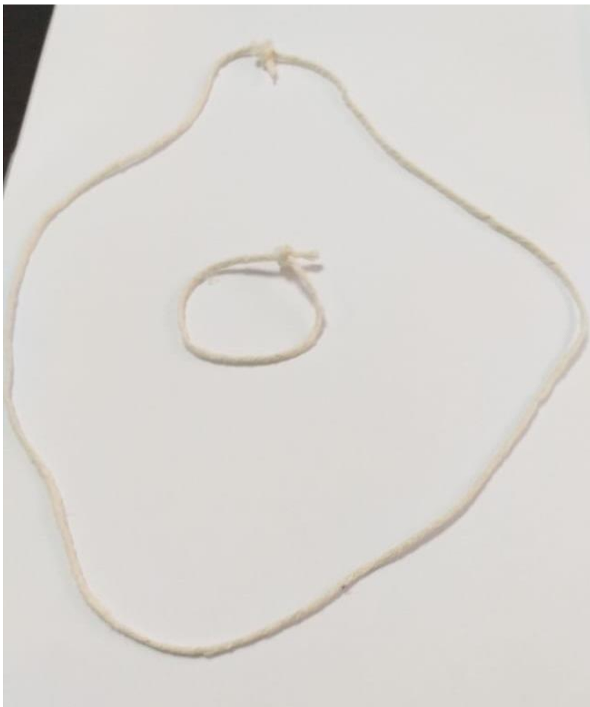
Figura 92 - Resposta ao item (g), 1ª situação – Atividade 1

Fonte: Autor.

Figura 93 - Resposta ao item (g), 2ª situação – Atividade 1

Fonte: Autor.

Figura 94 - Resposta ao item (g),3ª situação – Atividade 1



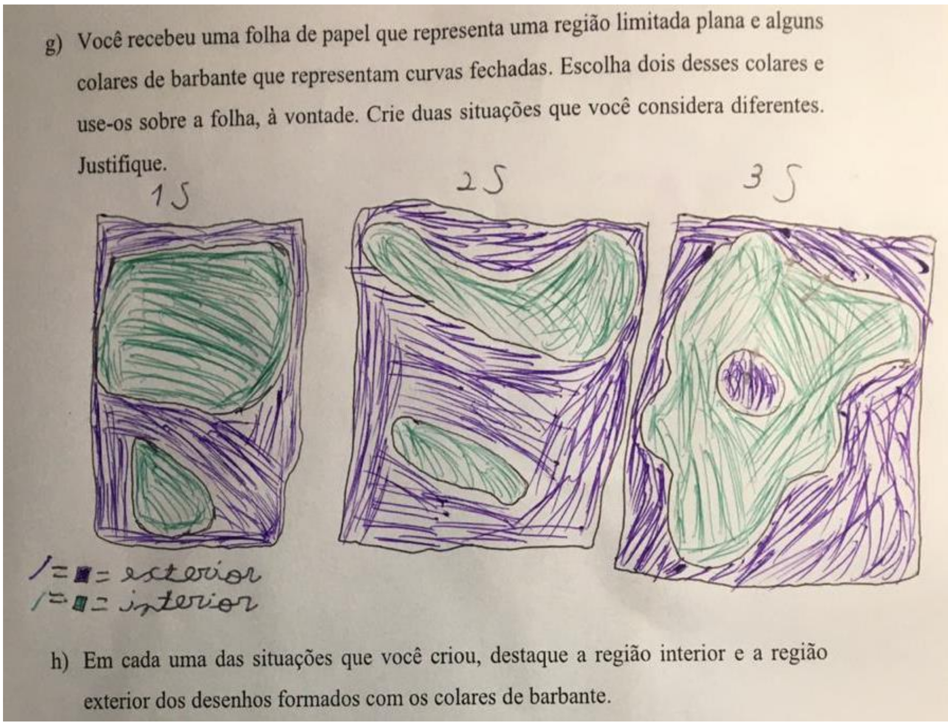
Fonte: Autor.

**h) Em cada uma das situações que você criou, destaque a região interior e a região exterior dos desenhos formados com os colares de barbante.**

P3 utiliza a caneta roxa para marcar a região externa das figuras e a caneta verde para destacar a região interna. Antes de iniciar essas marcações, P3 pergunta "tem o desenho que fiz, mas a parte exterior dele seria a parte de dentro do retângulo". O que P3 denomina por "retângulo" é a folha de papel A3 que representa uma parte do plano. O entrevistador pede para P3 fazer da forma que achar adequado.

As primeiras duas situações são pintadas por P3 sem que haja perguntas, porém, ao chegar à terceira situação, P3 comenta, "Na terceira situação <u>tem uma forma dentro de outra forma</u>, eu pinto as duas de verde?". (grifo nosso). O entrevistador pede para que seja utilizada a definição vista na nota anterior. P3 faz dois pontos, um na região compreendida entre as duas curvas e outro na região interna da curva de menor comprimento, ele traça uma semirreta a partir de cada ponto e verifica o número de interseções da semirreta com as curvas, assim pinta de verde a região compreendida entre as duas curvas e a região que falta pinta de roxo. Na fase de discussão, é sugerido para P3 que verifique diversas semirretas e não apenas uma. E que faça uma legenda para o significado das cores.

Figura 95 - Resposta ao item (h) – Atividade 1




Fonte: Autor.

**Considerações:** P3 apresenta nas duas situações, figuras conhecidas por retângulo e elipse. Apresenta também uma figura "não padronizada". P3 foi orientado a construir um terceiro caso e nesse, apresentou dificuldade localizar a região interna da figura pois para ele, se tratava de figuras sobrepostas, ou seja, ele entende uma curva plana como um objeto bidimensional, pois considera seu interior.

**i) O desenho a seguir representa um mapa estilizado do Estado de São Paulo.**

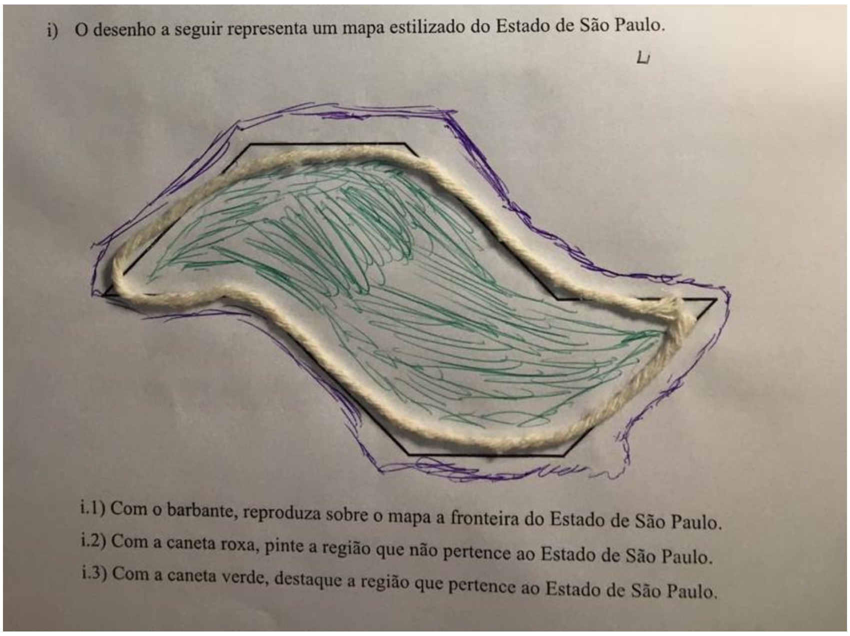
**i.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de São Paulo.**

**i.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de São Paulo.**

**i.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de São Paulo.**

P3 cola o barbante sobre o mapa, ver FIGURA 96, pinta a região interior de verde e na região externa à figura, faz um destaque em roxo "mínimo".

Figura 96 - Resposta ao item (g), 3ª situação – Atividade 1




Fonte: Autor.

**Considerações:** O mapa estilizado do Estado de São Paulo representa um polígono. Para esse tipo de figura, P3 não apresentou dificuldades em destacar fronteira, região interna e região externa.

**j) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado de Goiás e do Distrito Federal. Lembre-se que o Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás.**

**j.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de Goiás.**

Para facilitar a leitura, iremos nos referir ao Estado de Goiás apenas por Goiás, em todas as respostas daqui em diante.

Neste item, P3 passa o barbante na fronteira de Goiás, exceto sob a fronteira com o Distrito Federal, ver Figura 97.

Figura 97 - Resposta ao item (j), 3ª situação – Atividade 1


Fonte: Autor.

**j.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de Goiás.**

Com a caneta roxa, P3 pinta a região que não pertence a Goiás, ver FIGURA 97, deixando por último a parte do Distrito Federal e verbaliza “Eu pinto de roxo o Distrito Federal porque no enunciado já diz, o Distrito Federal não pertence a Goiás”.

**j.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de Goiás.**

P3 pinta a região interna de Goiás, ver FIGURA 97. Ao ser perguntado o motivo dele ter pintado o Distrito Federal de roxo, ele justifica dizendo que seguiu o enunciado da atividade. Na sequência, alguns questionamentos são feitos, segue abaixo.

**P3**: Professor, se o Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás, então eu tenho que colocar o barbante na fronteira do Distrito Federal?

**Entrevistador**: O que você acha?

**P3**: Na verdade professor, eu percebi que o Distrito Federal não fazia parte, só que eu nem tinha percebido que tinha que colar o barbante, agora com a pergunta eu fiquei meio na dúvida, porque ele está dentro do Estado de Goiás.

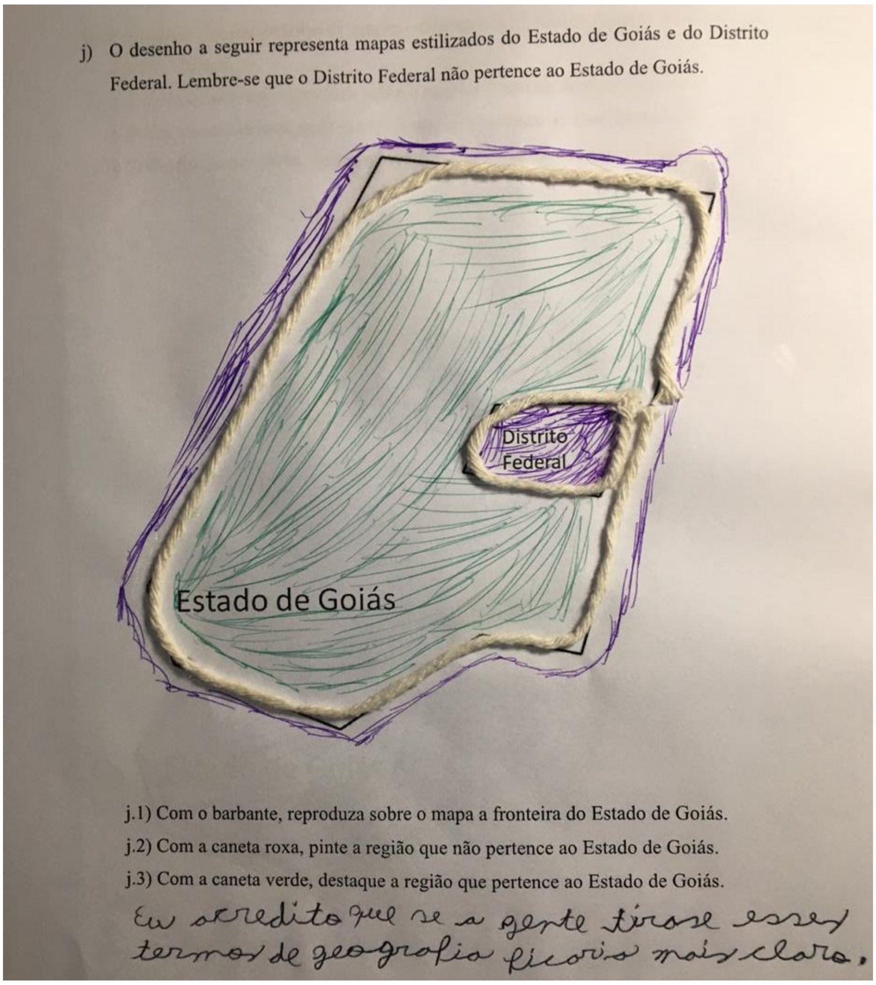
**Entrevistador**: O fato de termos uma figura formada por dois barbantes te atrapalhou?

**P3**: Se fosse qualquer figura geométrica seria difícil igualmente, só que se fala em fronteira, complica um pouco mais. Mas não complica tanto assim.

Na folha de respostas P3 faz o contorno com o barbante e escreve, ver FIGURA 98, “Eu acredito que se a gente tirasse esses termos da geografia ficaria mais clara”.

**Considerações:** Ao trabalhar com o mapa do Estado de São Paulo, P3 não apresenta dificuldades (destacar território do Estado, fronteira e região externa ao Estado). Já sob o mapa de Goiás, P3 deixa de marcar a fronteira que o Distrito Federal tem com Goiás. Percebemos que ao trabalharmos com figuras que possuem fronteira formada por duas curvas fechadas, o conhecimento sobre contorno, região interna e região externa é colocado em xeque. Trazendo à luz, eventuais dificuldades de entendimento desses conceitos. Essa discussão contribui com um melhor entendimento dos conceitos de fronteira e região interna.

Figura 98 - Resposta ao item (j) – Atividade 1




Fonte: Autor.

**k) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado brasileiro de Goiás e do Distrito Federal.**

**k.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Distrito Federal.**

**k.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Distrito Federal.**

**k.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Distrito Federal.**

Nessa atividade P3 destaca, fronteira (com o barbante), região interna e região externa do Distrito Federal. O entrevistador ao verificar que a região externa destacada fica limitada ao território do Estado de Goiás, coloca esse fato em discussão.

**Entrevistador**: Se estivéssemos com o mapa do Brasil em mãos e você tivesse que fazer essa atividade, a sua resposta seria a mesma ou você mudaria algo?".

**P3**: Eu continuaria pintando o Distrito Federal de verde, o barbante eu colocaria como eu fiz, a parte roxa eu não sei, porque assim, fora do Distrito Federal, o que está em volta já não faz parte do Distrito Federal, eu acho que não seria necessário pintar em volta do Estado de Goiás para dizer que não é o Distrito Federal.

**Entrevistador**: E se usássemos a representação de um globo terrestre, como você pintaria?

**P3**: Eu pintaria só a região do Distrito Federal de verde e que todo o resto do globo deveria ser pintado de roxo.

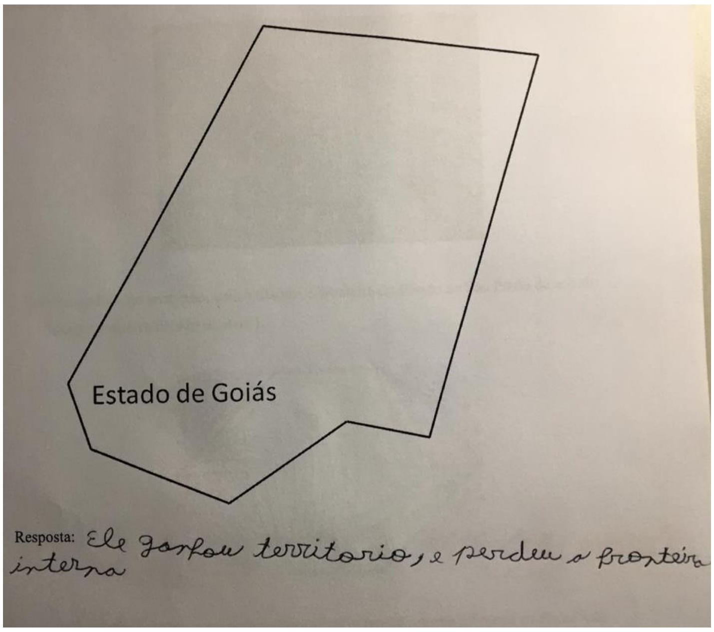
**Considerações:** P3 apresenta dificuldades em destacar a região externa do território de Goiás. O que indica que a ideia de região externa não está clara. O que nos parece contribuir para a dificuldade da resolução é o conceito de infinitude. Uma vez que o próprio participante revela que caso a representação fosse feita sobre um globo terrestre (superfície limitada), ele pintaria todo o globo, exceto o território do Distrito Federal.

Figura 99 - Resposta ao item (k) – Atividade 1


Fonte: Autor.

**l) Um aluno representou o Estado de Goiás conforme o mapa estilizado abaixo, sem o Distrito Federal. O que o Estado de Goiás ganharia ou perderia se o mapa estivesse correto?**

Figura 100 - Resposta ao item (l) – Atividade 1




Fonte: Autor.

P3 verbaliza,

> Bom, deixa eu pensar... se formos pensar realmente nos Estados, a parte do Distrito Federal, que não fazia parte do Estado de Goiás, agora faz parte, então não vai ter uma fronteira interior, ou uma parte de dentro que é exterior. Então o Estado de Goiás iria ganhar mais território, mas como nosso foco é as formas geométricas, ele perderia uma "fronteira interna" digamos assim. (P3). (grifo nosso).

E P3 escreve, "Ele ganhou território e perdeu a fronteira interna".

Na fase de discussão, o entrevistador conduz uma discussão sobre o aumento de território e fronteira e sobre a quantidade de barbante utilizada para fazer a fronteira do mapa correto e a quantidade utilizada para reproduzir a fronteira do mapa incorreto (sem o Distrito Federal).

Há também uma discussão sobre o termo "fronteira interna", nela o entrevistador apresenta a ideia de fronteira, mostrando que o termo "fronteira interna" poderia ser trocado nesse caso por fronteira.

**Considerações:** P3 faz a atividade e a dificuldade fica por conta da associação entre uma situação do dia a dia com a geometria, inclusive verbaliza isso. Fica surpreso que com mudanças em uma figura, a região interna da nova figura pode ser aumentada ao mesmo tempo em que a fronteira diminui. P3 utiliza os termos “fronteira interna” e “região exterior que fica na parte interna de Goiás”, o que mostra que ele possui uma ideia confusa de fronteira e região interna.

**O Geoplano é um material educativo, criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno em 1961. É formado por uma placa, geralmente de madeira, sobre a qual é marcada uma malha quadriculada ou pontilhada e, em cada um dos pontos da malha é fixado um pino. Com a ajuda de um barbante ou linha, pode-se "desenhar" sobre o Geoplano, utilizando os pinos.**

**Reproduza no Geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de São Paulo de acordo com o mapa estilizado do item (i).**

Figura 101 - Resposta ao item (m) no Geoplano – Atividade 1

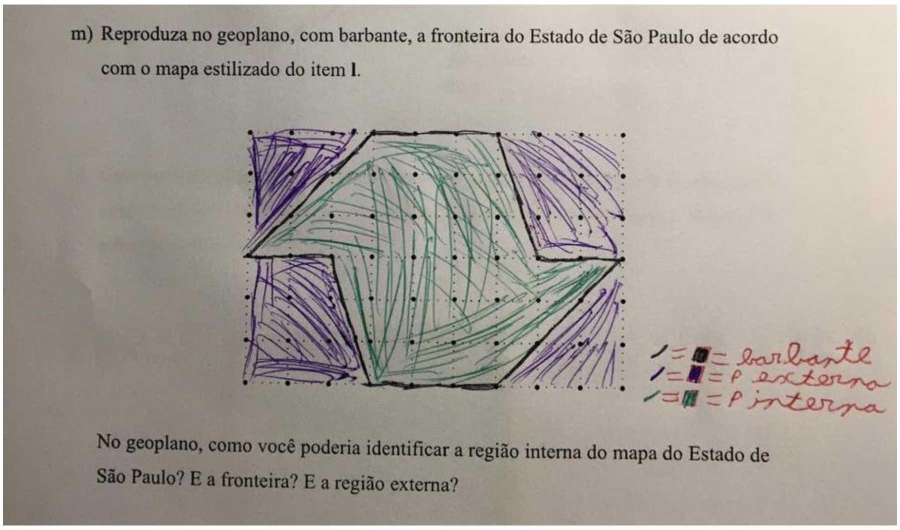

Fonte: Autor.

P3 inicia a atividade informando que não conhece o Geoplano e que nunca havia visto um. Ao iniciar a tarefa, P3 retira alguns pinos do lugar original para, com eles, tentar fazer o formato do mapa estilizado do Estado de São Paulo. Com uma certa dificuldade em passar o barbante entre os pinos, P3 termina e registra a atividade tirando uma foto com o próprio celular.

**No Geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de São Paulo? E a fronteira? E a região externa?**

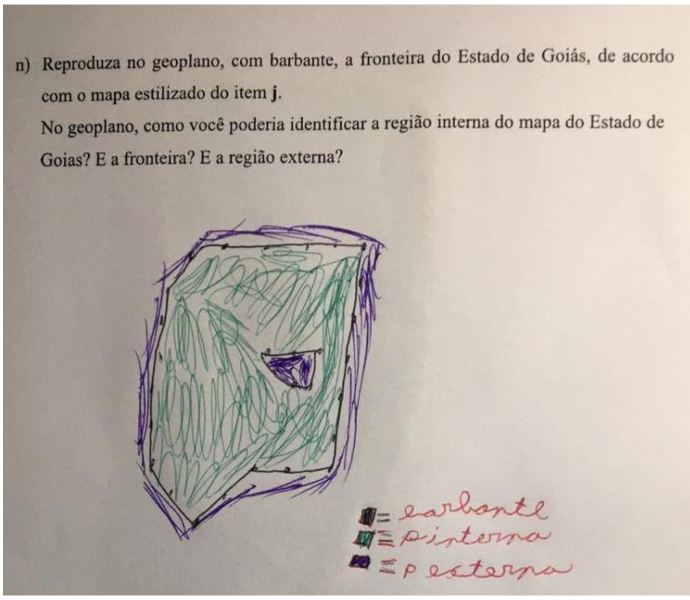
P3 diz “O barbante seria a fronteira, tudo que está dentro é a região interna e tudo que está fora é externo”.

Figura 102 - Resposta ao item (m), continuação – Atividade 1




Fonte: Autor.

Figura 103 - Resposta ao item (n) – Atividade 1



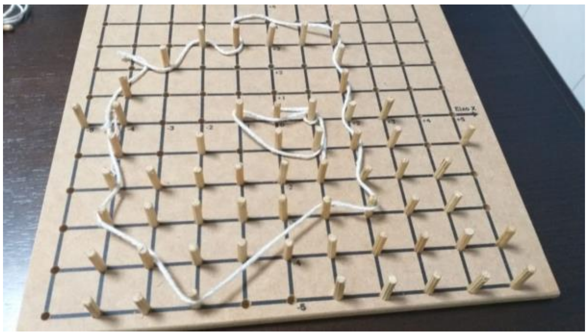

Fonte: Autor.

**Considerações:** P3 faz a atividade com dificuldades e sua representação não fica muito fiel. Acreditamos que se o encontro tivesse sido presencial, essas dificuldades teriam sido superadas com maior facilidade. P3 denomina a região interna ao mapa como sendo “a parte de dentro”, a região externa ao mapa é denominada por ele como “parte externa” e a fronteira é representada pelo barbante. Assim, neste mapa, P3 não apresenta dificuldades em trabalhar o contorno do mapa e reconhecê-lo como sendo o barbante.

m) **Reproduza no Geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de Goiás, de acordo com o mapa estilizado do item j.**

**No Geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de Goiás? E a fronteira? E a região externa?**

Figura 104 - Resposta ao item (n) no Geoplano – Atividade 1



Fonte: Autor.

A atividade inicia com alguns questionamentos de P3.

**P3**: Eu faço o Estado de Goiás e o Distrito Federal também?".

**Entrevistador**: É importante você reler o enunciado.

**P3**: Professor, eu deixei os pinos no formato do Estado de Goiás, eu devo fazer o Distrito Federal também ou não?

**Entrevistador**: O que você acha?

**P3**: O exercício diz para reproduzir com o barbante a fronteira do Estado de Goiás, então não diz nada sobre o Distrito Federal.

**Entrevistador**: Qual é a fronteira do Estado de Goiás?

**P3**: Ele tem uma fronteira externa que é envolta dele, e a fronteira interna". (grifo nosso).

P3 representa no Geoplano Goiás, ver FIGURA 104. Na sequência, ele faz a representação do mapa na folha de respostas, pinta utilizando corretamente as cores e faz uma legenda, ver FIGURA 103.

**Considerações:** P3 apresenta dificuldade em representar a fronteira de Goiás com o Distrito Federal. O que nos parece é que P3 possui uma ideia fixa de que uma figura possui apenas 1 fronteira.

n) **Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir. Em seguida, pinte com caneta verde o interior de cada figura. O que podemos dizer sobre as regiões internas? E sobre as fronteiras?**

P3 cola o barbante sobre a fronteira da figura, ver FIGURA 105, e pinta a região interna (mas deixa excesso de barbante). Na próxima, ver FIGURA 106, P3 cola o barbante sobre a fronteira e pinta a região interna.

P3 inicia comparando as fronteiras das duas figuras e verbaliza,

> A fronteira da primeira figura é praticamente a mesma que a da segunda. Parece que a fronteira da segunda é maior, mas se pegarmos uma ponta da primeira figura, conseguimos deixá-la com o mesmo formato que a fronteira da segunda figura. Pois parece que uma encaixa na outra, não sei se é apenas para mim que parece isso. (P3).

Ao ser perguntado por que as fronteiras são as mesmas, P3 revela que ao olhar a folha com as figuras, notou que a partir da fronteira da primeira figura, é possível modificá-la e "deixar no mesmo formato" que a fronteira da segunda figura.

Quanto à região interna, P3 verbaliza, "Parece que a região interna da segunda figura é maior, mesmo com a fronteira sendo praticamente idêntica".

O entrevistador pergunta, "Você acha que existe alguma relação entre a região interna e a fronteira? Se uma aumenta, necessariamente a outra aumentará também?". P3 responde, "Se a fronteira aumenta, visivelmente a parte interna muda, ela aumenta também, junto com a fronteira". P3 responde na folha de resposta, ver FIGURA 106, "Podemos dizer que a fronteira da segunda figura é maior que a primeira, e que a parte interna da segunda é maior que a da primeira porque se a fronteira da segunda é maior, a parte interna seria maior também".

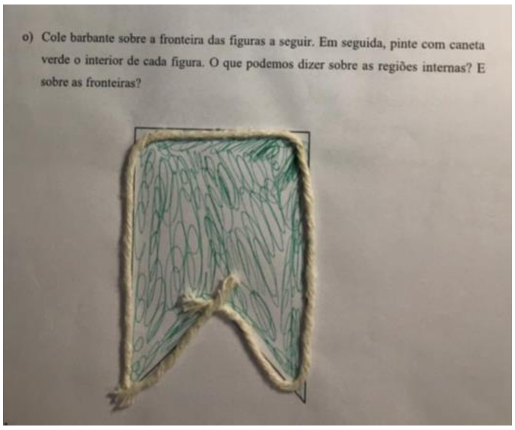
O entrevistador pergunta a P3 se ele mudou a resposta inicial, P3 responde, "Não, eu quis dizer que aparentemente a fronteira da primeira figura daria para formar a fronteira da segunda, não quer dizer que elas sejam iguais. Eu não acho que sejam iguais". Em seguida P3 diz que como a fronteira da segunda figura é maior do que a fronteira da primeira, a região interna também é maior". Sem novas considerações, a fase de discussão inicia e o entrevistador apresenta alguns exemplos de figuras que, quando modificadas, a fronteira aumenta, porém, a região interna diminui, e discute também as duas figuras da atividade, mostrando que as fronteiras possuem a mesma quantidade de barbante, porém a região interna da segunda figura é maior do que a região interna da primeira.

O entrevistador pergunta a P3, "Quando você afirma que se a fronteira aumenta a área também aumenta, quais figuras te ajudam nessa ideia? Para quais figuras essa afirmação é verdadeira?”. P3 responde, “Eu penso na figura do Estado de São Paulo, um quadrado e um retângulo” (grifo nosso).

**Considerações:** P3 reconhece a figura de maior área e afirma que a figura de mesma área possui maior perímetro, mesmo tendo vivenciado situações que contradizem essa ideia.

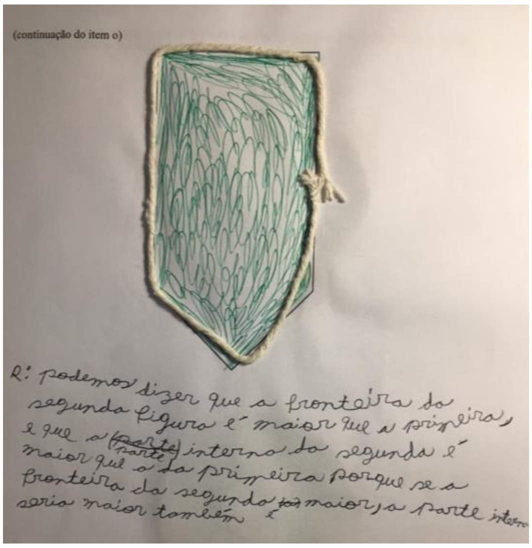
Na fase de discussão, P3 é apresentado a alguns exemplos de figuras que após sofrerem modificações, a região interna pode aumentar enquanto seu perímetro diminui e vice-versa. P3, ao fim da atividade, revela que a percepção de que a figura de maior área é também a figura de maior perímetro é reforçada por figuras como o mapa do Estado de São Paulo, quadrados e retângulos, (grifo nosso). Não foi perguntado a ele, mas ao que parece, P3 ao pensar em modificações, utiliza apenas a ideia de ampliação ou de redução de uma figura. Assim, alguns tipos de modificações precisam ser trabalhados.

Figura 105 - Resposta ao item (o) – Atividade 1




Fonte: Autor.

Figura 106 - Resposta ao item (o), continuação – Atividade 1



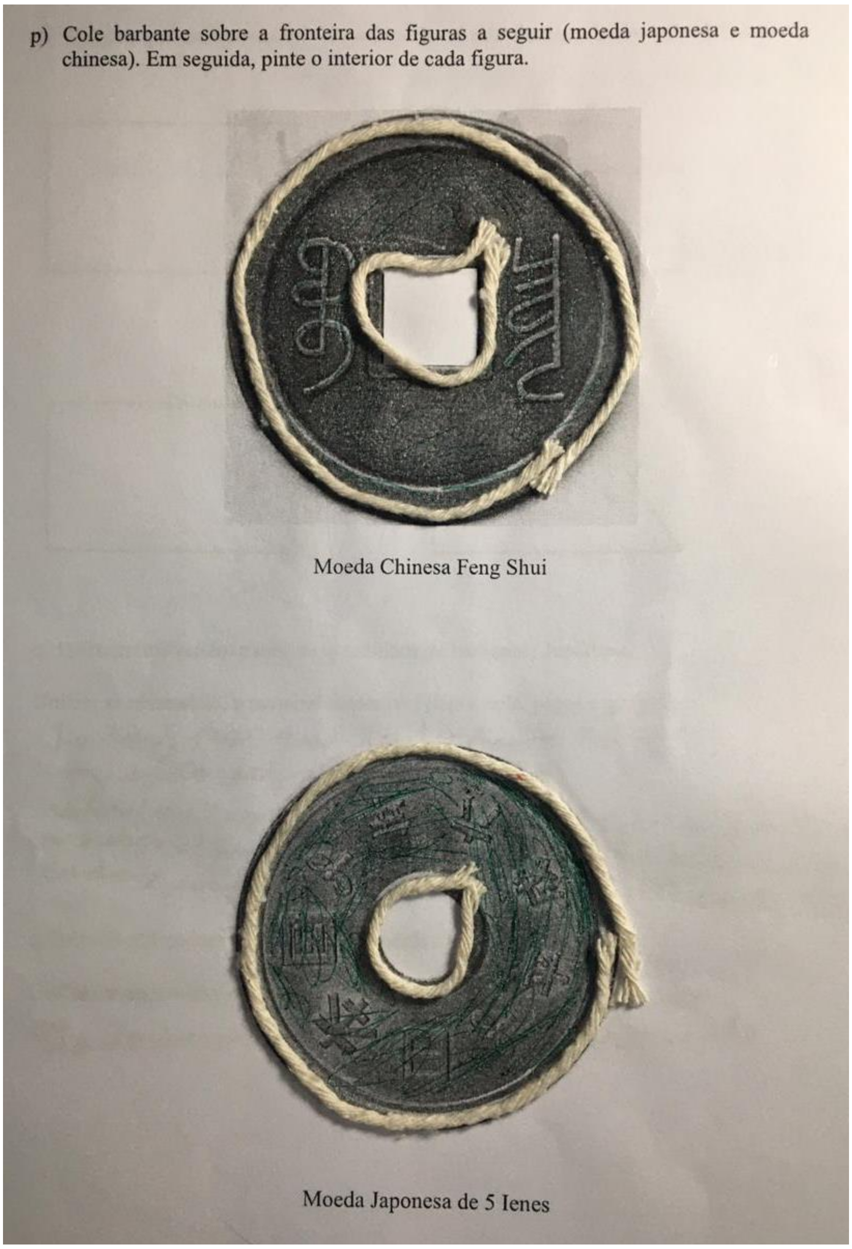

Fonte: Autor.

**o) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir (moeda japonesa e moeda chinesa). Em seguida, pinte o interior de cada figura.**

P3 inicia a atividade pintando a região interna das figuras e em seguida cola o barbante em seus respectivos contornos. Nessa colagem, acaba utilizando mais barbante do que o necessário. P3 diz não conhecer essas moedas.

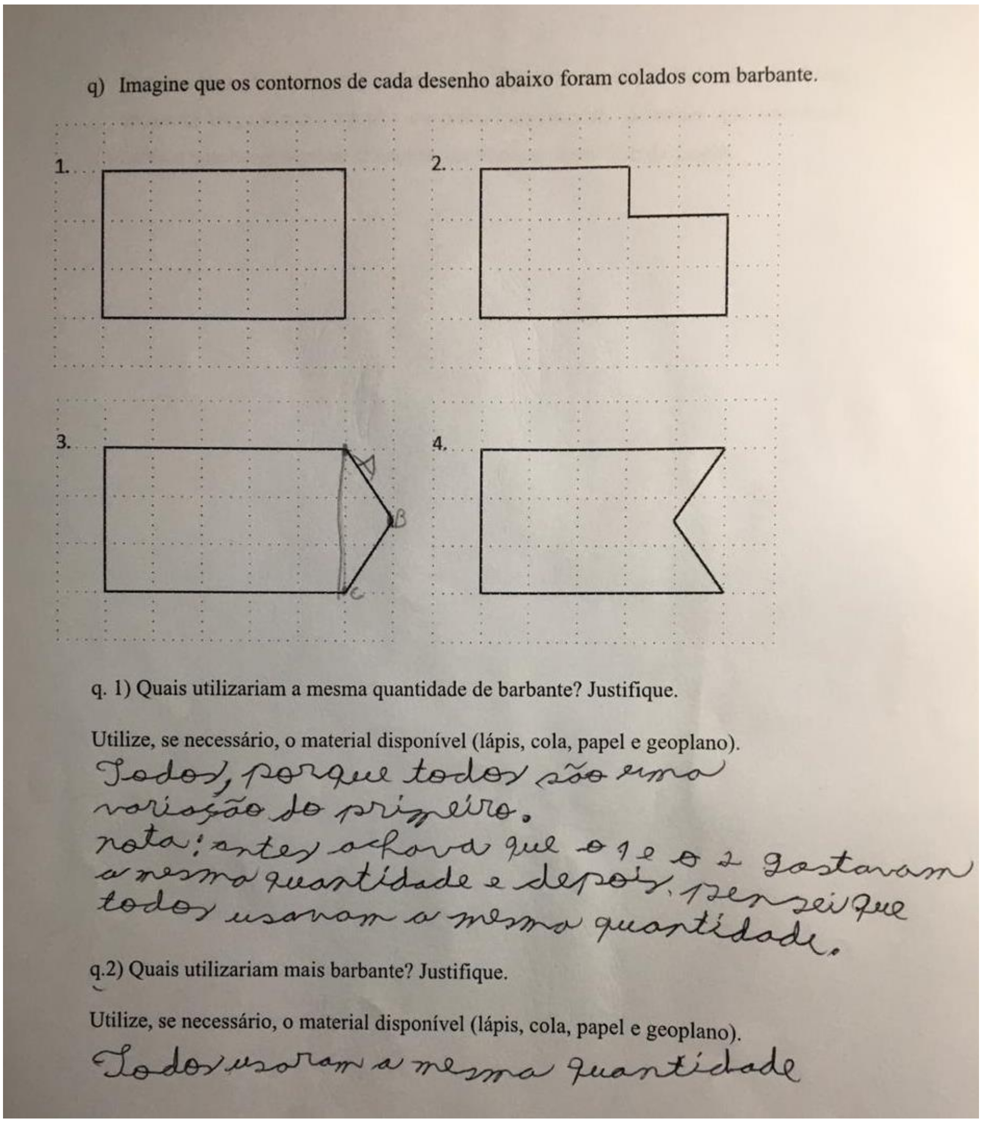
Ao contornar a face de cada moeda utilizando duas curvas fechadas, P3 mostra que compreende a uma figura formada por duas curvas e que a região interna dessa figura está compreendida entre essas duas curvas.

Figura 107 - Resposta ao item (p) – Atividade 1




Fonte: Autor.

Figura 108 - Resposta ao item (q) – Atividade 1



q) Imagine que os contornos de cada desenho abaixo foram colados com barbante.

1.

2.

3.

4.

q. 1) Quais utilizariam a mesma quantidade de barbante? Justifique.

Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e geoplano).

Todos, porque todos são uma variação do primeiro.
nota: antes achava que o 1 e o 2 gastavam a mesma quantidade e depois, pensei que todos usavam a mesma quantidade.

q.2) Quais utilizariam mais barbante? Justifique.

Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e geoplano).

Todos usaram a mesma quantidade

Fonte: Autor.

**p) Imagine que os contornos de cada desenho abaixo foram colados com barbante.**

**q. 1) Quais utilizariam a mesma quantidade de barbante? Justifique.**

**Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e Geoplano).**

P3 inicia a atividade afirmando que as figuras 3 e 4 possuem a mesma quantidade de barbante, pois foi a conclusão que teve em uma das atividades feitas anteriormente, ver FIGURA 108.

Quanto às figuras 1 e 2, ver FIGURA 108, P3 diz,

> Agora as figuras 1 e 2... a figura 1 eu acho que acaba utilizando mais barbante que a figura 2, bom... espera um pouco, agora está confuso. Na verdade, as duas utilizam a

> mesma quantidade, a figura 1 e a figura 2 utilizam a mesma quantidade de barbante, que é a linha. (P3).

Ao utilizar o termo "linha", P3 passa o dedo sobre o contorno da figura 2.

Quando solicitado a dar uma justificativa para as afirmações feitas, P3 diz,

> Inicialmente eu pensei que se a gente contar os quadradinhos da primeira fileira, na figura 1 tem 5, na figura 2 tem 3, o que me fez pensar que a figura 1 iria usar mais barbante, mas aí eu parei para pensar e descobri o seguinte, como eu não estou querendo os quadrados inteiros e sim só o barbante (que é a linha), o que foi feito? a linha desses dois quadrados desceu uma fileira, mas ainda continua sendo a mesma coisa. (P3).

Essa verbalização de P3 revela que apesar do objeto de interesse na atividade ser o comprimento do barbante (perímetro), ele leva em consideração a quantidade de "quadrados inteiros" (quadrados com seu interior preenchido), até perceber que precisaria comparar apenas a quantidade de barbante. Não é difícil perceber na verbalização de P3 que ele deixa de analisar as figuras de forma "bidimensional" e passa a analisá-las de forma "unidimensional" e entendendo que o barbante representa a linha (apesar do barbante não ser um objeto unidimensional), ou seja, P3 parece ter entendido a diferença entre fronteira e região interna, porém pensando em medida.

Ao analisar as figuras 3 e 4, P3 diz "A 1 e a 3 se você perceber, elas estão gastando a mesma coisa no começo, só que eles gastam mais alguns quadradinhos na frente com meio quadrado, eu acho que isso contaria como mais um quadradinho, ou pelo menos um pouquinho de um quadrado". Para tentar facilitar a interpretação, o entrevistador sugere a P3 que sejam marcados os vértices dos segmentos da figura 3. Na folha de resposta, P3 marca três vértices, nomeando-os A, B e C, ver FIGURA 108, e passa a comparar os segmentos AB e BC com o lado oposto. Nessa comparação, verbaliza,

> Bom, espera, será que a 3 e a 4 gastam a mesma quantidade que a 1 e a 2? É, eles gastam a mesma quantidade de barbante, não é? Acho que todas gastam a mesma quantidade. Veja, a diferença entre a figura 1 e 2 é que na 2 desceu uma fileira, agora na 3, o traço da esquerda, que está na vertical... pensa nele como um palito, quebrando ele, é só colocar na diagonal. (P3)

Na folha de respostas, P3 escreve, ver FIGURA 107, que todas as figuras gastam a mesma quantidade de barbante.

Na fase de discussão, o entrevistador pede que P3 faça um triângulo, utilizando os segmentos AB e BC e, com alguma dificuldade, P3 se recorda da desigualdade triangular (no

Ensino Fundamental a desigualdade triangular é trabalhada como “condição de existência de um triângulo no plano”).

Importante destacar que P3 parece conseguir diferenciar fronteira de região interna.

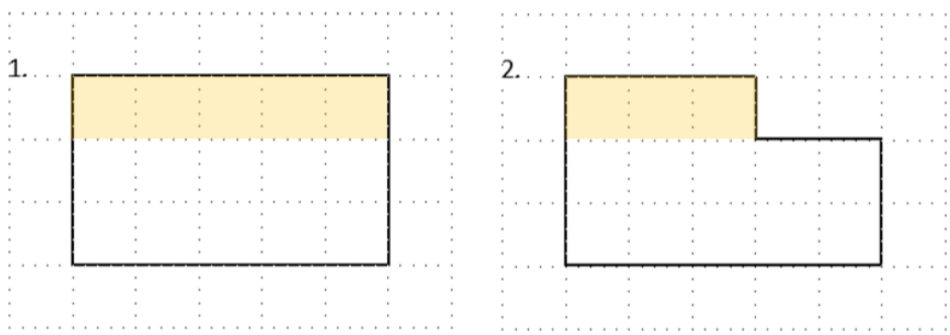
**q.2) Quais utilizariam mais barbante? Justifique. Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e Geoplano).**

P3 ao concluir que as figuras são variações da figura 1, ver FIGURA 108, responde, “Todos usaram a mesma quantidade”.

**Considerações:** P3 narra sua estratégia para decidir entre as figuras 1 e 2, qual possui utiliza mais barbante. Apesar de ele ter apenas verbalizado sua solução, apresentaremos a seguir uma simulação visual de sua solução, FIGURA 109 e 110.

Inicialmente, para P3, a figura 1 utiliza mais barbante do que a figura 2. Como justificativa, revela ter contado a quantidade de quadradinhos (com preenchimento) dispostos na “primeira fileira” de cada uma das figuras, ver FIGURA 109, obtendo 5 quadradinhos na figura 1 e 3 quadradinhos na figura 2, concluindo assim que a figura 1 utiliza mais barbante em seu contorno. Importante notar que P3, até este momento, utiliza a ideia de superfície para guiá-lo na ideia de contorno. Julgamos que não se trata de um equívoco entre os conceitos de área e de perímetro, mas sim, dificuldade em trabalhar com um objeto unidimensional, como o contorno de uma curva no plano. Embora tanto o contorno das figuras impressas na folha como o barbante não sejam verdadeiramente objetos unidimensionais, nesta atividade eles possuem o papel de representarem tais objetos e é por meio deles que acreditamos que P3 pudesse trabalhar também de forma concreta a ideia de contorno. Após o final das atividades, é conversado com P3 sobre a utilização desses objetos como representação de objetos unidimensionais.

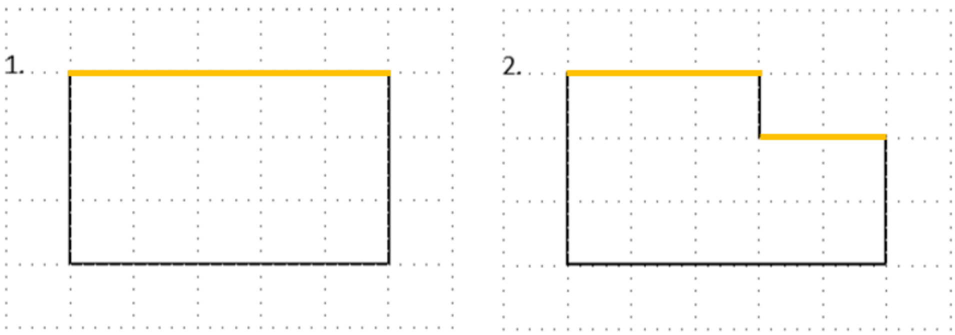
Figura 109 - Simulação da primeira resposta de P3, comparação entre os contornos das figuras 1 e 2 do item (q).




Fonte: Autor.

Ainda sobre a comparação entre os contornos das figuras 1 e 2, após a afirmação de que a figura 1 utiliza mais barbante do que a figura 2, P3 reflete por alguns segundos e muda sua resposta, passando a afirmar que, em ambas as figuras, a quantidade de barbante utilizada para cobrir os respectivos contornos é a mesma. Como justificativa, ver FIGURA 110, P3 argumenta que existe uma mudança na posição de algumas "linhas" da figura 2. Ao ser perguntado sobre a nova resposta, diz que "descobriu" que, para comparar os contornos, não necessitava pensar nos "quadradinhos inteiros" (menção aos quadradinhos da malha e respectivas regiões internas), mas apenas no barbante. Essa reflexão externada por P3 é importante, porque traz à luz uma visão interessante sobre a comparação entre contornos, que inicialmente P3 não conseguia desvincular da ideia de área, até que, em algum momento, essas ideias são desvinculadas e P3 passa a fazer a comparação entre os barbantes (contornos), sugerindo que em sua primeira resposta utiliza uma ideia "bidimensional" e, na segunda, passa a utilizar uma ideia "unidimensional".

Figura 110 - Simulação da segunda resposta de P3, comparação entre os contornos das figuras 1 e 2 do item (q).

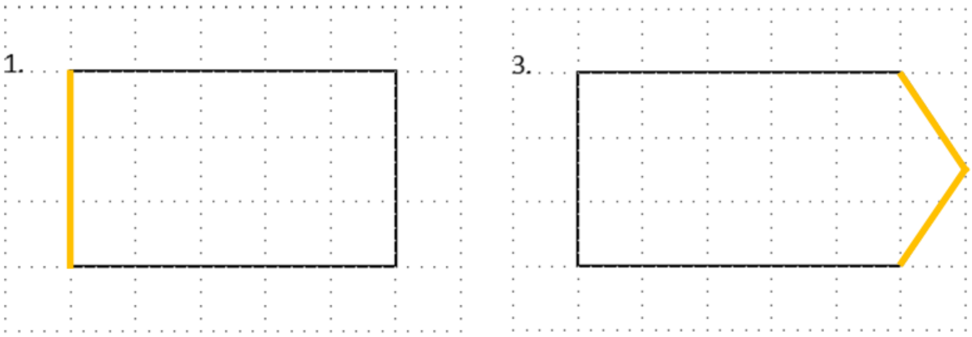



Fonte: Autor.

Sabendo que as figuras 3 e 4 utilizam a mesma quantidade de barbante, P3 passa a comparar as figuras 1 e 3, ver FIGURA 108. Inicialmente diz que a figura 3 possui ao menos "um quadradinho inteiro" a mais do que a figura 1, podendo indicar que retorna à ideia de área para comparar contorno, porém logo em seguida muda a resposta.

Para traduzir de forma visual o comentário de P3 na segunda comparação feita entre as figuras 1 e 3, apresentamos uma simulação de sua resposta, Figura 110, nesta P3 compara um lado da figura 1 (destacado em laranja) com dois lados da figura 2 (também destacados em laranja), isto é, ele passa a fazer comparações entre objetos unidimensionais, porém, conclui que ambos possuem mesmo comprimento. Sua justificativa é baseada numa analogia feita entre um lado da figura 1 (destacado na FIGURA 111) e um palito. Esse palito ao ser partido ao meio, resultaria no formato encontrado na figura 3.

Figura 111 - Simulação da primeira resposta de P3, comparação entre os contornos das figuras 1 e 3 do item (q).




Fonte: Autor.

P3 apresenta dificuldades em decidir qual das figuras possui maior perímetro, embora ele de fato comece a fazer comparações, ele busca ideias que o ajudem em situações concretas. O que nos leva a acreditar que experiências em que P3 pudesse fazer comparações com materiais manipuláveis pudesse “enriquecer” sua imagem de conceito ligada ao perímetro de uma figura plana.

Nesta atividade, a verbalização de P3 traz contribuições importantes para nossa tese, de que para resolver problemas de figuras unidimensionais, é utilizada uma ideia bidimensional. Isto é, ao resolver um problema de medida do contorno de uma curva fechada descrita no plano, há alunos que trabalham esse objeto como uma figura plana, e como não entendem o que é um contorno, utilizam a ideia de área.

q) **Durante essa atividade, trabalhamos com diversos desenhos. Para nosso próximo encontro, traga alguns recortes ou fotos impressas de desenhos que contenham buracos e que representem situações que você encontra fora da escola.**

Figura 112 - Resposta ao item (r) – Atividade 1

Fonte: Autor.

Figura 113 - Resposta ao item (r) – Atividade 1

Fonte: Autor.

Figura 114 - Resposta ao item (r), continuação – Atividade 1

Fonte: Autor.

No item (r), P3 é convidado a pesquisar figuras formadas por duas ou mais curvas que as delimitam e que representassem situações diferentes das vivenciadas na escola. P3 entrega, de forma impressa, 3 figuras, ver FIGURAS 112, 113 e 114. Os exemplos trazidos são um colar, uma rosquinha doce e um anel, todos ¨circulares¨ e “tridimensionais”, o que mostra que a busca feita por P3 ficou em figuras que denominamos “com buraco”, assim como apresentada na atividade (g).

### 8.2.5. Algumas conclusões, baseadas nas respostas apresentadas pelos participantes na Atividade 1

Nesta seção apresentaremos algumas conclusões baseadas nas respostas dos participantes P1, P2 e P3, apresentadas nas secções 8.2.2, 8.2.3 e 8.2.4.

Segundo Cornu (1981, apud Tall, 1988, p.1) "Dentro da atividade matemática, as noções matemáticas não são usadas apenas de acordo com sua definição formal, mas também por meio de representações mentais que podem diferir para diferentes pessoas[6] " (Tall, 1988, p.2, tradução nossa). O autor ainda revela que é possível um indivíduo utilizar corretamente definições formais, inclusive aplicar corretamente fórmulas matemáticas, porém, ao mesmo tempo pode desenvolver conflitos entre imagens de conceito diferentes.

Quanto a **definição de conceito de área**, o objetivo dessa atividade é propor que o participante apresente suas ideias referentes a definição de conceito de área de uma figura plana. Quando um indivíduo define verbalmente um objeto matemático, utilizando para isso suas próprias palavras, segundo Tall e Vinner (1981), à essa definição denominamos por definição de conceito. Normalmente a definição de conceito difere da definição matemática formal. Todos os participantes apresentaram concepções ligadas a aspectos geométricos, pois levaram em consideração o tipo de forma geométrica e a quantidade de lados. Também é apresentada a concepção numérica, pois os participantes relacionam a área a uma medida. A coleção de figuras apresentadas pelos participantes nos remete aos materiais didáticos de matemática (quadrado, retângulo e trapézio), que quase sempre, utilizam estas como exemplos, sobretudo na parte de Geometria. Pesquisadores como Fandiño e D'Amore denominam essa coleção de "figuras estereotipadas". Afirmam inclusive que o uso excessivo dessas pode contribuir para as *misconceptions* relacionada à área e ao perímetro. (Fandiño e D'Amore, 2016, pp.123-126). Todos os participantes relacionam a área como algo particular de cada figura plana, obtida cada uma, por uma fórmula. A concepção de grandeza não aparece na definição de conceito dos participantes, o que não significa que eles desconheçam as grandezas envolvidas com a área de uma figura plana, segundo Vinner (1991), a definição de conceito não é necessariamente tudo o que o indivíduo conhece sobre o objeto matemático, mas ela é "acionada" ao resolver uma tarefa.

---

[6] Within mathematical activity, mathematical notions are not only used according to their formal definition, but also through mental representations which may differ for different people.

Os trabalhos de Douady e Perrin-Clorian (1989), citada por Ferreira (2010, p.26), quanto a construção do conceito de área como grandeza serviram de inspiração para pesquisas relacionadas ao estudo do perímetro como grandeza. Boa parte dos trabalhos citados nesse texto, como Baltar (1996), Melo (2009), Ferreira (2010), Santos (2015) entre outros, foram desenvolvidos pelo Grupo Pró-Grandezas do Programa de Pós-Graduação em Educação (Núcleo de Didática de Conteúdos Específicos – Área de Matemática) da UFPE (Universidade Federal de Pernambuco). Assim, nos parece razoável analisarmos na **definição de conceito de perímetro** dos participantes, as concepções, numérica, geométrica e de grandeza.

Em relação à definição de conceito de perímetro, os três participantes apresentaram respostas muito semelhantes, todas parecidas com as definições encontradas em livros didáticos que buscam definir perímetro de polígonos convexos como, “A soma das medidas dos lados de um polígono é a medida do perímetro”. As definições apresentam as concepções numérica e geométrica, pois para P1, P2 e P3, o perímetro é uma medida. A concepção de grandeza não está contemplada na verbalização e na escrita feita pelos participantes.

Em relação aos conceitos de **caminhos abertos** e **caminhos fechados** (itens c, d, e, f), P1, P2 e P3 souberam distinguir os caminhos fechados dos caminhos abertos. Os participantes P1 e P3 revelam que ao verem um caminho fechado incluem a esse objeto o interior, isto é, não entendem um caminho fechado no plano como algo unidimensional e sim, bidimensional. P2 diz que quando o interior de um caminho fechado está pintado, ele considera o interior, no contrário, não considera. Assim, é possível percebermos que a ideia de perímetro como grandeza realmente não faz parte do repertório desses participantes. Esses resultados nos remete a Perrot et al. (1998), citada por Brito (2003, p.18), que afirma que se o processo de construção das grandezas geométricas for feito de forma insatisfatória nas escolas, esse pode reforçar nos alunos dificuldades conceituais de aprendizagem como:

- confundir área e perímetro, e contorno e superfície;
- confundir grandeza e a medida da grandeza;
- cálculo de área, perímetro por meio de fórmulas;
- acreditam que apenas segmentos de reta possuem comprimento;
- acreditam que apenas um conjunto restrito de polígono “particulares” possui área e perímetro.

No item **(g)**, o objetivo é convidar os participantes a criarem uma figura formada por duas curvas fechadas. Os três participantes apresentaram exemplos de figuras estereotipadas (quadrado, retângulo, trapézio, circunferência ou elipse), por meio de estímulos, P1, P2 e P3 criaram um exemplo utilizando duas curvas fechadas com uma delas totalmente colocada na região interna da outra. P1 e P3 apresentam dificuldades de entendimento e aceitação desse tipo de figura pois para eles, quando temos uma curva fechada no interior de outra curva fechada, eles entendem essa situação como uma sobreposição de figuras, ou seja, consideram a área como parte de cada curva, como mencionado anteriormente.

Nosso objetivo com os itens **(h)** e **(i)**, é convidar os participantes a distinguirem as regiões internas e externas das figuras planas criadas no item **(g)**. Para isso, P1, P2 e P3 utilizaram uma definição de ponto interno e ponto externo utilizada em SANGIORGI (1974), "Um ponto é interior quando qualquer semirreta traçada por ele encontra a curva em um número ímpar de pontos. Um ponto é exterior quando qualquer semirreta traçada por ele encontra a curva em um número par de pontos". SANGIORGI (1974). Durante a aplicação dessa atividade, essa definição não se mostrou suficiente pois P2 sugeriu um exemplo com um ponto localizado na fronteira de uma figura. Esse caso não é contemplado na definição apresentada. Assim, foi necessário que reescrevêssemos a definição, de forma que esse caso fosse considerado. Definição: Dada uma curva fechada, um ponto que não está sob a curva é interior quando qualquer semirreta traçada por ele atravessa a curva em um número ímpar de pontos. Um ponto é exterior quando qualquer semirreta traçada por ele atravessa a curva em um número par de pontos. É preciso destacar a definição apresentada não é uma definição formal, encontrada normalmente nos livros de Topologia pois a ideia é de que essa definição seja suficiente para casos "não exóticos".

Os três participantes não tiveram dificuldades em caracterizar as regiões internas e externas das figuras apresentadas por eles no item **(g)**, porém, apresentaram dificuldades para entender a figura formada por dois colares de barbantes (um inteiramente contido na região interna do outro), colocando em xeque os conhecimentos sobre região interna, região externa e fronteira. Notamos que esse tipo de figura possibilitou uma discussão sobre os conceitos de região interna, região externa, fronteira e sobre as dimensões desses objetos. Isso não ocorreu apenas na parte do item (**d**) do primeiro dia de atividade e sim ao longo desta toda. Com o uso desse tipo de figura, os participantes trouxeram à luz suas concepções sobre estes objetos geométricos, e assim contribuindo com essa investigação.

Em relação os itens (**j, k** e **l**), o objetivo é trabalhar os conceitos de região interna e região externa a uma curva, que denominamos por fronteira. Esses conceitos são trabalhados sob os paradigmas G0-G1 de Parzysz (2006), utilizando para isso, canetas coloridas para diferenciar as regiões e o barbante para demarcar a fronteira. Buscamos propor que os participantes trabalhassem com essas ideias no campo da Geografia, buscando trabalhar com o Estado de Goiás e aproveitando o fato de que o Distrito Federal não faz parte desse Estado. No item (**j**), P2 e P3 tiveram dificuldades em destacar a fronteira que o Estado de Goiás faz com o Distrito Federal, revelando assim uma dificuldade no entendimento de fronteira. Já no item (**k**), os participantes deveriam destacar a região interna, região externa e a fronteira do Distrito Federal, os três participantes desenvolvem a atividade sem dificuldades, porém, os três consideram o Estado de Goiás como um plano, pois apenas destacam ele como região externa ao Distrito Federal, assim, pode estar apresentando dificuldades no entendimento de infinitude do plano ou a atividade proposta pode não estar clara o suficiente.

Dessa forma, concluímos que P1, P2 e P3 precisam vivenciar mais experiências sob os paradigmas G0-G1, trabalhando com os conceitos de região interna, região externa e fronteira.

Em relação ao item **(l)**, os participantes deveriam relatar a mudança que ocorreria no território de Goiás caso o Distrito Federal não existisse. Todos os três destacaram que a região interna aumentaria. P1 e P2 não notaram que a fronteira de Goiás diminuiria. P3 relata que a fronteira diminuiria e revela que o termo fronteira deixa a atividade "mais difícil". P3 utiliza termos como "fronteira interna", "fronteira externa" e "região exterior que fica na parte interna", mostrando que ainda possui dificuldades no entendimento dos propostos dessa atividade. Vale destacar que o conjunto de atividades propostos neste primeiro dia, não tem como objetivo, trabalhar estes conceitos de forma definitiva.

Nos itens (**m** e **n**)**,** os participantes utilizam o Geoplano, que consiste em uma placa de madeira e sobre esta é fixada uma malha quadriculada onde em cada ponto dessa malha há um pino. Este material é bastante utilizado em atividades em sala de aula que visam desenvolver de forma concreta o conceito de perímetro. Dessa forma, os conceitos de região interna, região externa e fronteira, são trabalhados como grandeza, utilizando os paradigmas G0-G1. No Geoplano, P1, P2 e P3 representaram o mapa do Estado de São Paulo (atividade m) e o Estado de Goiás e o Distrito Federal (atividade n). Todos os participantes disseram que não conheciam o Geoplano e assim, apresentaram desconforto na utilização. P1, P2 e P3 não apresentaram dificuldades na atividade **m**, já na atividade **n**, os três apresentaram dificuldades para representar a fronteira que o Estado de Goiás com o Distrito Federal, mostrando que o entendimento sobre o conceito de fronteira não possui um bom entendimento. P1 e P2 se referem a região externa como "a parte de fora da fronteira" e região interna como "a parte interna da fronteira". Vale destacar novamente que nos parece que trabalhar com figuras que possuem buracos, naturalmente traz discussões sobre os conceitos de região interna, região externa e fronteira, o que contribui para um melhor entendimento de área e de perímetro como grandezas.

Em relação ao item (**o**), o objetivo é convidar os participantes a manipular, de forma concreta (utilizando papel e barbante), duas figuras planas de mesmo perímetro, mas de áreas diferentes, procurando favorecer assim um pensamento sob o paradigma G0-G1. Procuramos escolher figuras não usuais, mas que, ao mesmo tempo, fosse conhecida pelos participantes (formato de bandeirinhas de festa junina). P1, P2 e P3 apresentam bastantes dificuldades para fazer comparações entre fronteiras e regiões internas, ou seja, o pensamento destes quanto a área e ao perímetro sob o paradigma G0 não está bem estabelecido. Para os participantes pudessem fazer as comparações, foi necessário o estímulo do entrevistador. Os três participantes apresentam uma forte necessidade em utilizarem unidades de medidas. P1 e P2 conseguem destacar a figura que possui maior área e possuem dificuldades para comparar as fronteiras. P2 diz que o contorno que possui mais curvas é o mais cumprido. P3 diz que a figura que possui maior área é necessariamente a figura que possui maior perímetro e revela que essas ideias lhe são reforçadas por figuras como a silhueta do Estado de São Paulo, retângulos e quadrados. Ao final dessa atividade, nos fica claro que são necessárias mais atividades relacionadas a comparações entre fronteiras e regiões internas, ou seja, trabalharem área e perímetro como grandezas sob o paradigma G0, que nos parece ter sido negligenciado.

No item **(p)**, os participantes trabalharam, sob o paradigma G0, com duas figuras com buracos (lembrando que convencionamos chamar por figuras com buracos partes do plano delimitadas por duas curvas fechadas, uma delas contida completamente no interior da região delimitada pela outra curva fechada), a atividade é composta pela imagem da superfície da moeda Chinesa FengShui e a superfície da moeda japonesa de 5 Ienes, ambas com buraco. Os participantes colaram barbante sob as fronteiras dessas superfícies, em seguida, destacaram a região interna de ambas as superfícies, nenhum participante apresentou dificuldades. Importante destacar que esse tipo de atividade fez com que os participantes trabalhassem novamente com exemplos reais de figuras com buracos.

O objetivo do item **(q)** é propor para os participantes trabalharem com comparações entre fronteiras, sob o paradigma G1. Há um conjunto de materiais concretos que os participantes puderam utilizar e nenhum deles possui graduação (lápis, caneta, compasso, tesoura, apontador, canetas coloridas, barbante e Geoplano). P1 e P3 não utilizaram os materiais. P2 utilizou o barbante para medir o contorno de todas as figuras e assim concluiu que todas as figuras possuíam mesmo perímetro, resultado esse, levado pela imprecisão da aferição das medidas. P1, P2 e P3 buscam levar a atividade para campo numérico. P1 e P3 durante a atividade apresentam ideias errôneas ligadas à área e ao perímetro (a figura de maior área possui maior perímetro). P1 e P3 necessitam de estimulas para fazerem comparações entre as fronteiras. P1 apresenta muitas dificuldades e sem estímulos, não consegue concluir a atividade. P3 conclui que todas as figuras possuem mesmo perímetro, durante a resolução da atividade, nota que ao comparar os contornos, estava levando em consideração a regiões internas, passando em seguida a considerar apenas os contornos, mostrando assim que começou a diferenciar região interna de fronteira. Nenhum dos participantes resolveu a atividade de maneira satisfatória. Destacando que dentre os participantes, P1 cursa o 9.º ano do Ensino Fundamental.

No item **(r)**, os participantes fizeram pesquisas e trouxeram figuras que os remetessem a figura plana com buraco. Os três participantes apresentaram uma pouca variação de figuras. Mostrando assim uma limitação no repertório de figuras.

Em geral, foi possível notar que os participantes não apresentaram habilidade em fazer comparações entre figuras e apresentam, em muitos momentos, forte necessidade de utilização de medida (concepção numérica de perímetro), ou seja, o não entendimento do conceito de perímetro como grandeza parece não contribuir com um entendimento claro sobre o perímetro, Sinalizando assim a necessidade de que trabalhos utilizando as ideias de perímetro como grandeza sejam necessários, sobretudo, sob os paradigmas G0, G0-G1 e G1.

Na pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989), citadas por Teles (2009, p. 33), a concepção numérica é fortalecida por um tipo de abordagem de área que privilegia o uso de fórmulas, dando pouca ênfase nos aspectos geométricos, o que acaba contribuindo com o entendimento de área como um número, favorecendo, por exemplo, com equívocos como, dar pouca relevância as unidades de medida. Já nas concepções geométricas, o sujeito confunde a área com a figura, como possível consequência, é acreditar que qualquer modificação feita na figura, leva necessariamente a alterações em suas propriedades, como a área e o perímetro. Ainda segundo Teles (2009, p.33), a concepção geométrica favorece a ideia de que ao aumentarmos a área de uma figura plana, é subentendido que essa figura tenha sido ampliada, estabelecendo-se assim uma ideia de semelhança entre a figura antiga e a nova. E assim, área e perímetro variam necessariamente no mesmo sentido. É importante destacar que as concepções geométricas são reforçadas pelo uso da palavra “área” nas práticas sociais, associando área a um determinado espaço ocupado, como exemplos, “área de laser” e “área de serviço”. (TELES, 2009, p.33).

Fica evidente que P1, P2 e P3 apresentaram ao longo das atividades um conjunto figural limitado a um grupo de figuras como quadrado, retângulo, trapézio, circunferência e elipse, lembramos que segundo Sfar (1991), no processo de construção de um conceito, na fase de condensação, é comum que generalizações sejam feitas a partir dos objetos trabalhados na fase de interiorização, assim, se apenas um conjunto limitado de figuras é trabalhado, nos parece natural concluirmos que os conceitos trabalhados estarão comprometidos a esse conjunto limitado de figuras. Assim, é importante que para a construção do conceito de área e de perímetro, sejam trabalhadas um conjunto composto por figuras convexas, não convexas, não poligonais e até mesmo figuras com buraco, pois o trabalho com esse tipo de figura mostrou que pode contribuir com um melhor entendimento quanto aos conceitos de área e de perímetro como grandeza.

O participante P1 incluiu em suas considerações finais, críticas a forma na qual as aulas de Matemática, utilizando como comparativo o termo “dogma”, referindo-se ao fato de não existirem discussões e espaço de fala.

Sob à luz dos paradigmas Geométricos desenvolvidos por Parzysz (2006), que defende que as práticas pedagógicas, nas séries iniciais, devem evoluir de uma geometria concreta (G0) para uma geometria de demonstração (G2), consideramos que P1, P2 e P3 não articularam bem G0, G0-G1 e G1, no que se refere ao conceito de área e de perímetro como grandeza.

## 8.3.Resultados obtidos com a aplicação da Atividade 2

Nesta seção, apresentamos a análise dos dados obtidos com os protocolos dos três participantes, cujo objetivo é investigar concepções relacionadas às ideias de área e de perímetro de figuras planas dos participantes P1, P2 e P3.

### 8.3.1. Análise das respostas da Atividade 2

Com a Atividade 2, temos por objetivo continuar com a manipulação e compreensão dos conceitos de região interna e de fronteira, isto é, área e perímetro trabalhados como grandezas. Nesta atividade trabalharemos com unidades de medida não convencionais e o foco maior será dado ao conceito de área e região interna.

Neste conjunto de atividades, os participantes são convidados a trabalhar com figuras convexas e não convexas, figuras com buracos (vale lembrar que convencionamos chamar por figuras com buracos partes do plano delimitadas por duas curvas fechadas, uma delas contida completamente no interior da região delimitada pela outra curva fechada), figuras de mesmas medidas de área e diferentes perímetros, figuras de mesmo perímetro, mas com medida de área diferentes. Também nesse conjunto de atividades propomos trabalhar com nos paradigmas G0, G0-G1 e G1-G2, trabalhar com unidades de medida não usuais, tanto para área como para o perímetro. E ao final, procuramos documentar as definições de conceitos verbalizadas pelos participantes, ligadas a região interna, fronteira, área e perímetro.

Cada entrevistado tem à disposição, quadradinhos com lados medindo 3cm, triângulos isósceles com medidas 3 cm, 3 cm e $3\sqrt{2}$ cm, tiras de barbante, 1 Geoplano, cola, lápis, caneta preta, tesoura, compasso e folhas de sulfite A4. Tanto os triângulos como os quadradinhos foram feitos com papel canson e com um tamanho suficiente para que pudessem ser manipulados. Em testes anteriores, quadradinhos e triângulos com dimensões menores que as utilizadas, alguns alunos apresentaram dificuldades para manipular.

A atividade 2 inicia com o contato via o aplicativo Google Meet, assim como feito na atividade 1. Após feitos os ajustes necessários, o entrevistador inicia a gravação da entrevista, a partir desse momento o envelope destinado à atividade 2 é aberto.

A cada início de atividade, o participante lê em voz alta o enunciado e responde às atividades na ordem em que elas estão na pilha, não podendo pular atividades.

Não houve nenhum caso de atividade não respondida.

Assim como na atividade 1, alguns trechos transcritos foram grifados de verde.

Os participantes da atividade 1 também são os da atividade 2 dessa forma mantivemos as mesmas denominações apresentadas na atividade 1, isto é, o participante identificado como P1 continua sendo denominado por P1, o mesmo vale para P2 e P3.

### 8.3.2. Participante P1

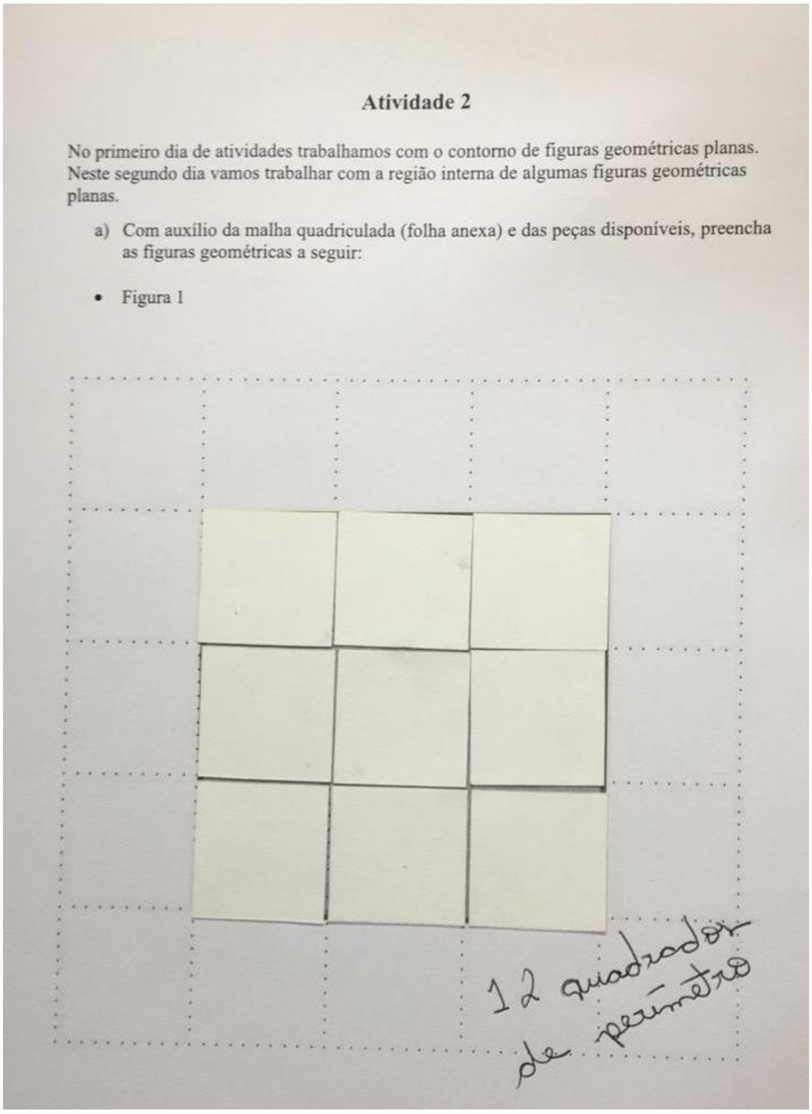
Tanto na Atividade 1 como na Atividade 2, a denominação de P1 foi dada para o mesmo participante, isto é, o participante denominado por P1 na Atividade 1 é o mesmo participante que denominamos nesta atividade por P1.

Essa atividade teve a duração de 4 horas e 30 minutos.

**a) Com auxílio da malha quadriculada (folha anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:**

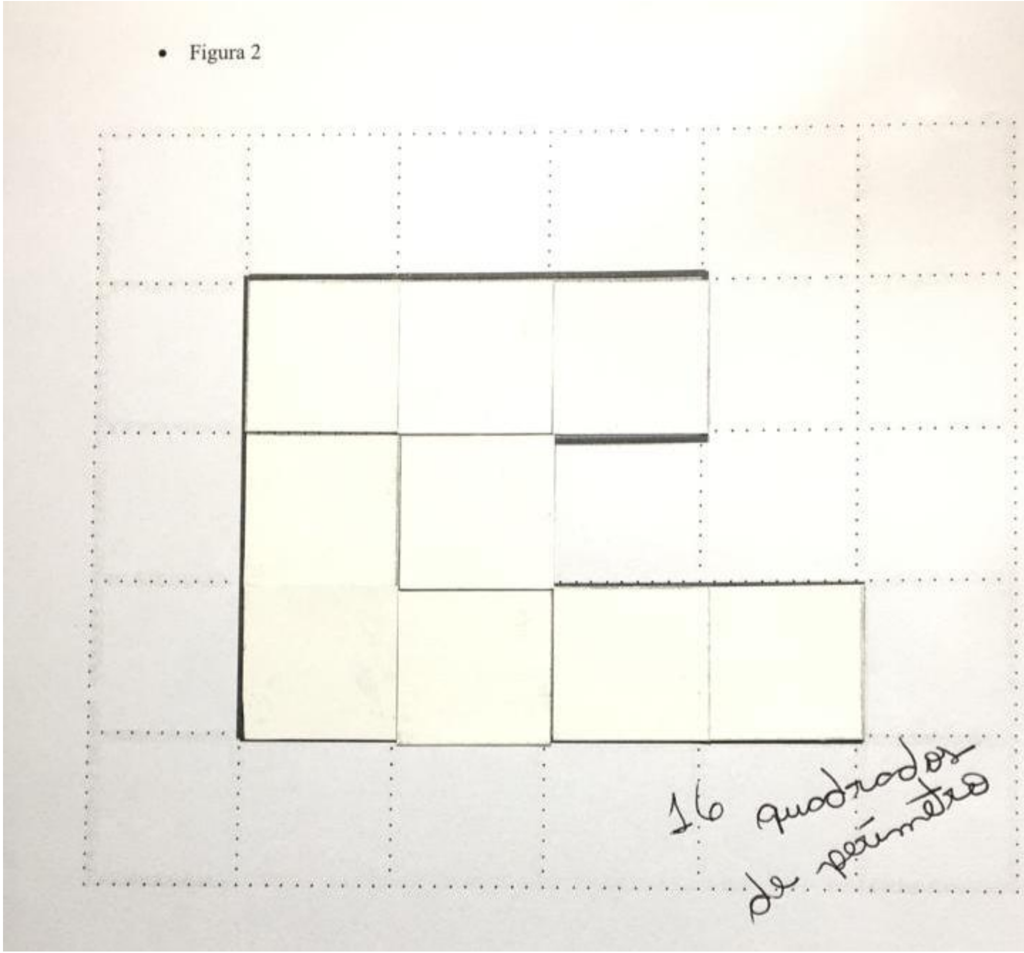
O participante preenche o interior de todas as figuras da atividade (a) colando os quadradinhos disponíveis nas respectivas figuras nas folhas de resposta, ver FIGURA 115, FIGURA 116, FIGURA 117 e FIGURA 118.

Figura 115 - Resposta ao item (a), Figura 1 – Atividade 2



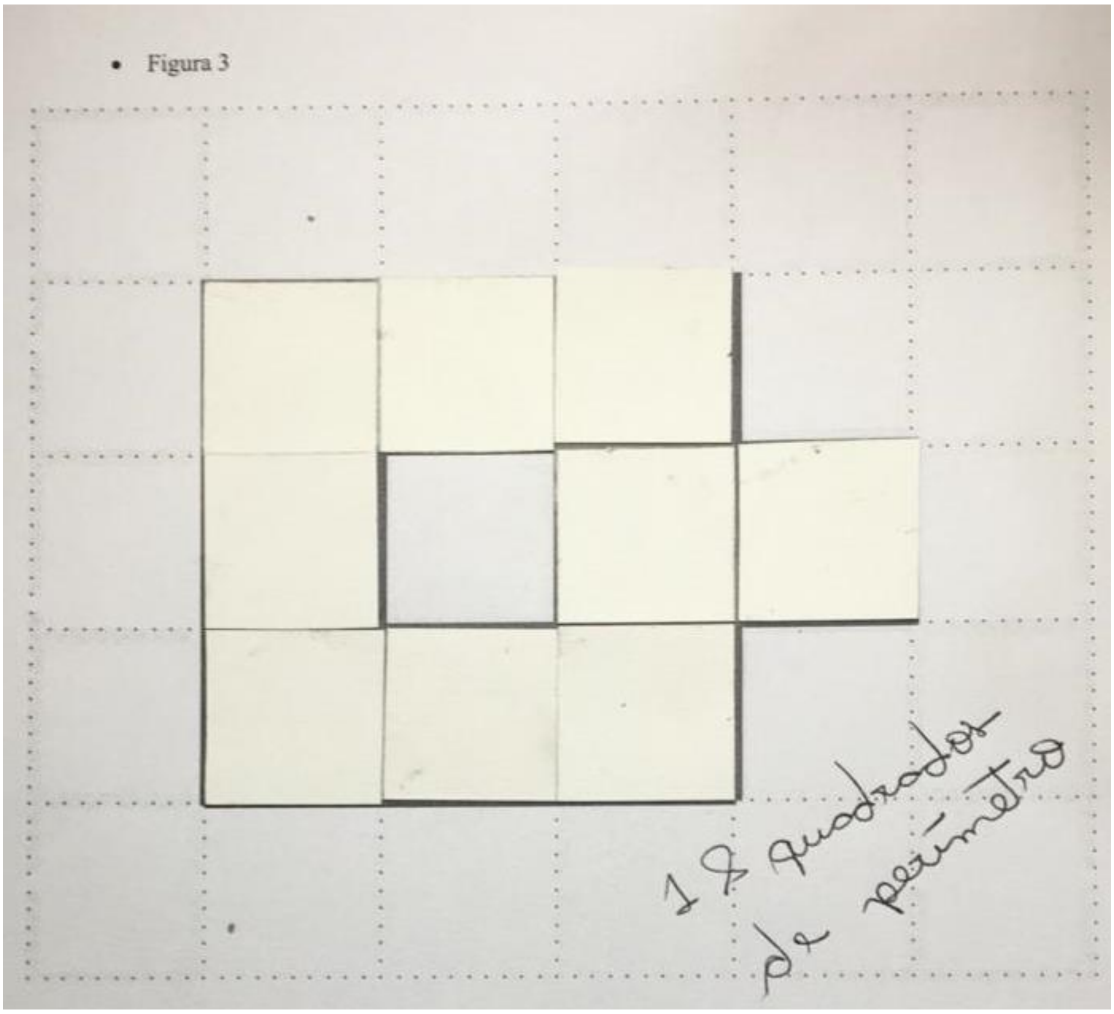

Fonte: Autor.

Figura 116 - Resposta ao item (a), Figura 2 – Atividade 2



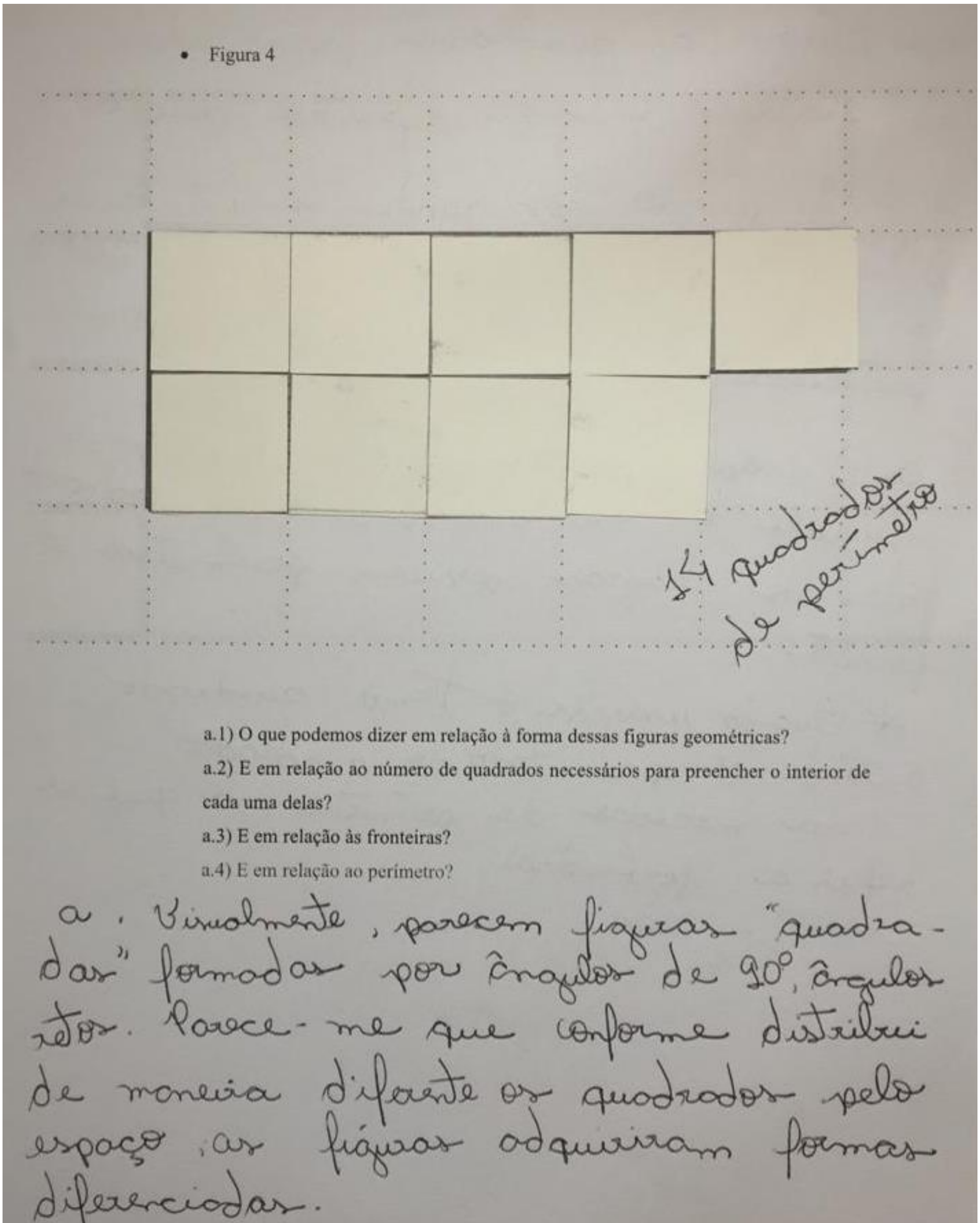

Fonte: Autor.

Figura 117 - Resposta ao item (a), Figura 3 – Atividade 2



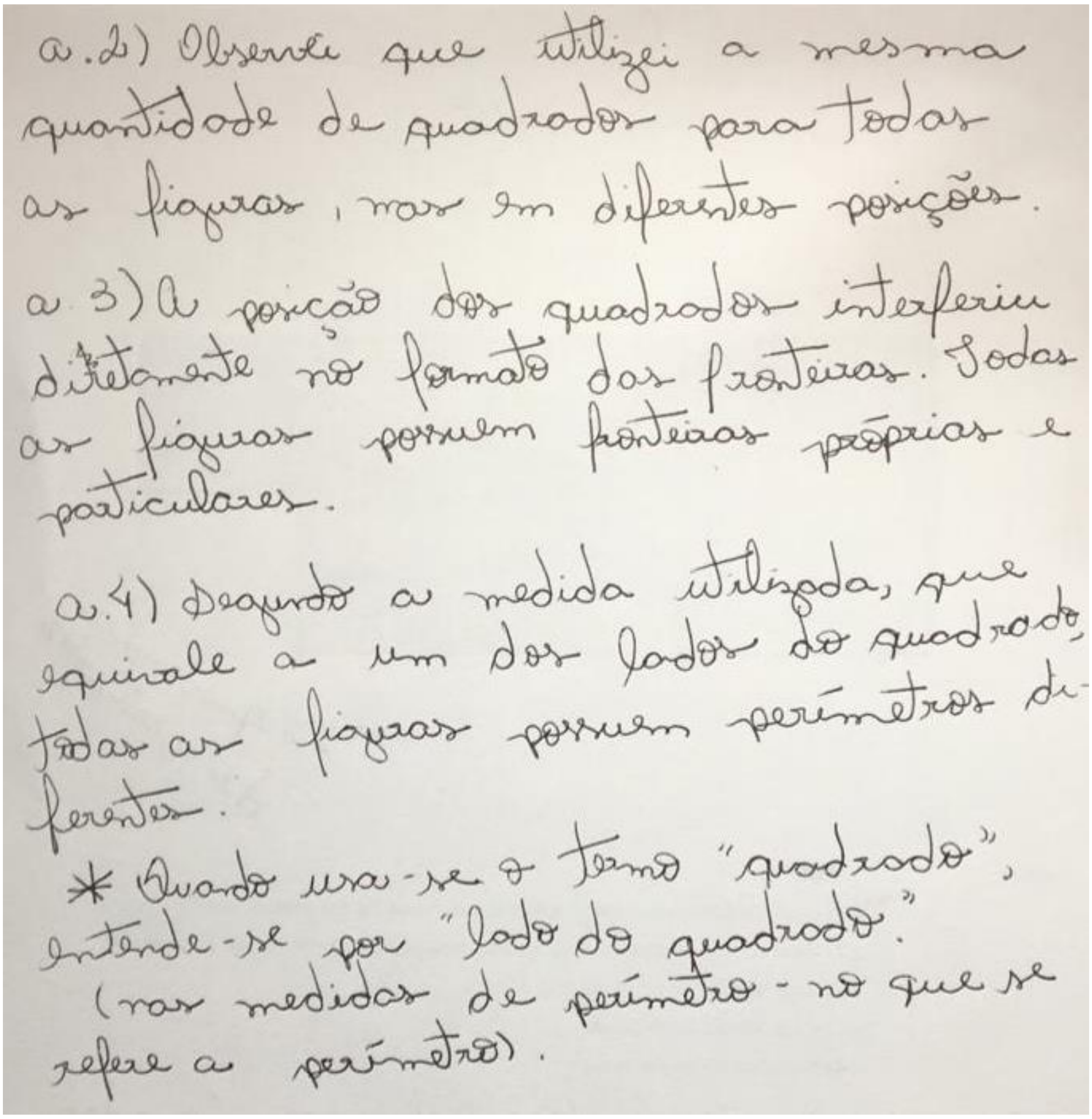

Fonte: Autor.

Figura 118 - Resposta ao item (a), Figura 4 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 119 - Resposta ao item (a), respostas de P1 – Atividade 2



a.2) Observe que utilizei a mesma quantidade de quadrados para todas as figuras, mas em diferentes posições.

a.3) A posição dos quadrados interferiu diretamente no formato das fronteiras. Todas as figuras possuem fronteiras próprias e particulares.

a.4) Segundo a medida utilizada, que equivale a um dos lados do quadrado, todas as figuras possuem perímetros diferentes.

* Quando usa-se o termo "quadrado", entende-se por "lado do quadrado". (nas medidas de perímetro - no que se refere a perímetro).

Fonte: Autor.

**a.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?**

P1 verbaliza, “A primeira ideia que tenho é que elas podem ser obtidas por quadrados, então já é diferente de um triângulo, que não podem ser preenchidos por quadrados como estes. É a primeira consideração que eu faço”. P1 então escreve na folha de respostas, ver FIGURA 118, “Visualmente, parecem figuras “quadradas” formadas por ângulos de 90º, <u>ângulos retos</u>, (grifo nosso). Parece-me que conforme distribui de maneira diferente os quadrados pelo espaço, as figuras adquiriram formas diferenciadas”. P1 faz mais considerações,

> Eu acho que algumas delas..., na verdade todas elas têm a mesma área porque todas elas foram preenchidas com nove quadradinhos. Por exemplo essa aqui, que foi a primeira que preenchi (ver FIGURA 115), ela é um quadrado convencional, todos quadradinhos estão alinhados, é um quadrado de três por três quadradinhos. Essa aqui por exemplo (ver FIGURA 117) é como se fosse a mesma imagem só que eu peguei esse quadradinho e coloquei ele aqui (a participante se refere ao buraco quadrado da figura) tirei o quadradinho, só que continuam com o mesmo número de quadradinhos. Essa daqui (ver FIGURA 116) é como se eu tivesse tirado um quadradinho daqui do lado e colocado aqui, então eu meio que estou apenas mudando a posição dos quadradinhos, mas continuam com nove quadradinhos. Essa aqui (ver FIGURA 118) é uma redistribuição do quadrado, só que ao invés de eu ter fileiras de três, tenho uma fileira de três e outra de quatro, um quadradinho ficou sobrando, não sei se posso dizer assim. Mas um quadradinho ficou sem par". (P1).

O entrevistador pergunta sobre a forma, o participante enfatiza que as figuras são diferentes, "formadas pela mesma quantidade de quadrados" e que são "formadas por diversos ângulos retos".

**a.2) E em relação ao número de quadrados necessários para preencher o interior de cada uma delas?**

Na folha de respostas o participante escreve, ver FIGURA 119, "Observei que utilizei a mesma quantidade de quadrados para todas as figuras, mas em diferentes posições".

**a.3) E em relação às fronteiras?**

Em relação às fronteiras P1 verbaliza, "Eu observei que elas formam diferentes fronteiras, por causa da distribuição dos quadrados. A fronteira dessa aqui (figura 3) é totalmente diferente dessa fronteira aqui por exemplo (figura 1). Eu posso até considerar que nessa tem essa fronteira aqui (figura 3), entre o espaço vazio. E essa aqui (figura 1), podemos considerar que a fronteira é o próprio contorno do quadrado, então, meio que elas formaram fronteiras totalmente diferentes, uma da outra". Em seguida o participante escreve na folha de respostas, ver FIGURA 119, "A posição dos quadrados interferiu diretamente no formato das fronteiras. Todas as figuras possuem fronteiras próprias e particulares".

**a.4) E em relação ao perímetro?**

O participante verbaliza,

> Eu posso concluir que elas têm a mesma área, mas perímetros diferentes, porque o perímetro está relacionado a fronteira né? Então como a distribuição está diferente... Eu acho que consigo até contar o perímetro dessas figuras. Por exemplo, se eu estabelecer o quadrado como unidade de medida, eu concluiria que essa figura tem 12 quadrados de perímetro. (P1).

O entrevistador sugere que o participante marque o valor do perímetro nas folhas. P1 concorda e verbaliza,

> Vou colocar aqui, 12 quadrados de perímetro (figura 1). Essa aqui (figura 2) tem uma outra quantidade, vou contar... Ela tem 16 quadrados de perímetro. Essa aqui (figura 3) tem 14 de perímetro, sem contar a parte interior (ele quis dizer do buraco), só que seu eu fosse considerar que aqui também é a fronteira, aí eu teria que contar como perímetro também. (P1).

O participante fica em silêncio e o entrevistador pergunta, "O que você acha?". P1 diz,

> Se o perímetro é todo contorno da figura, então eu acho que conta sim. Então vou contar de novo... dá 18. Agora a última figura (figura 4), ela tem 14 quadrados de perímetro". Por fim, para responder à questão o participante utiliza as medidas, ver Figura 5, "Segundo a medida utilizada, que equivale a um dos lados do quadrado, todas as figuras possuem perímetro diferentes. (P1).

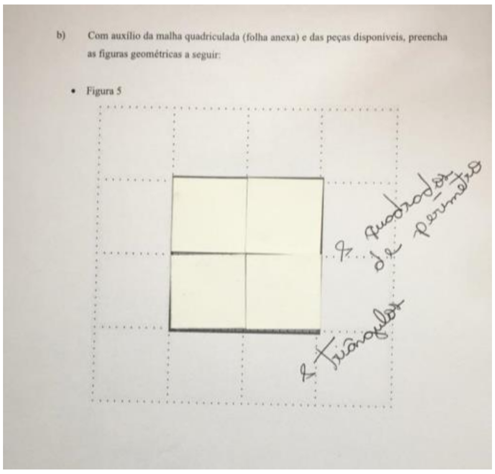
Antes de finalizar, o entrevistador pergunta a P1 sobre o do termo "quadrados de perímetro', ele diz, "é lado né?". Em seguida discutisse sobre a diferença entre a unidade de medida de comprimento e unidade de medida de área. Após a discussão, o participante faz uma nota, ver FIGURA 119, "Quando se usa o termo "quadrado", entende-se por "lado do quadrado" (nas medidas de perímetro, no que se refere a perímetro)".

**Comentário:** P1 articulou ideias sob o paradigma G0, efetuando comparações entre as regiões internas e fronteiras. Ainda nessa atividade, P1 atinge o objetivo da atividade, identificando as figuras de mesma área e concluindo que os perímetros são diferentes. Esses resultados foram obtidos por P1 utilizando para isso uma unidade de medida não usual que consideramos estar sob o paradigma G1, esse tipo de estratégia tem relação com a concepção numérica de perímetro. P1 utiliza o termo "quadrados de perímetro", para se referir a unidade de medida utilizada, apresentando assim dificuldades no entendimento de unidades de medida de comprimento, sobretudo, nas unidades de medidas não usuais, caso desta atividade. Para P1, cada quadradinho da atividade (utilizado como unidade de medida de área) serve como unidade de medida de comprimento.

**b) Com auxílio da malha quadriculada (folha anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:**

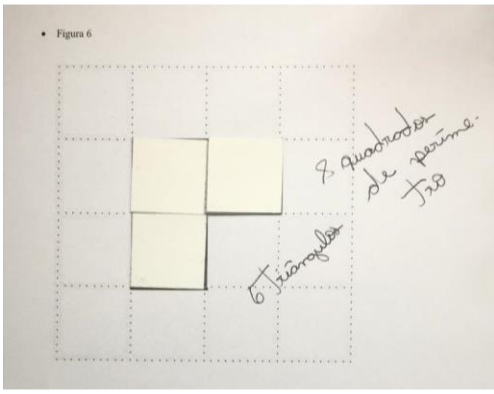
O participante preenche o interior de algumas figuras, embora ele devesse utilizar apenas triângulos para cobrir as figuras, ele acabou utilizando quadradinhos e triângulos, FIGURA 120, FIGURA 121, FIGURA 122 e FIGURA 123.

Figura 120 - Resposta ao item (b), Figura 5 – Atividade 2



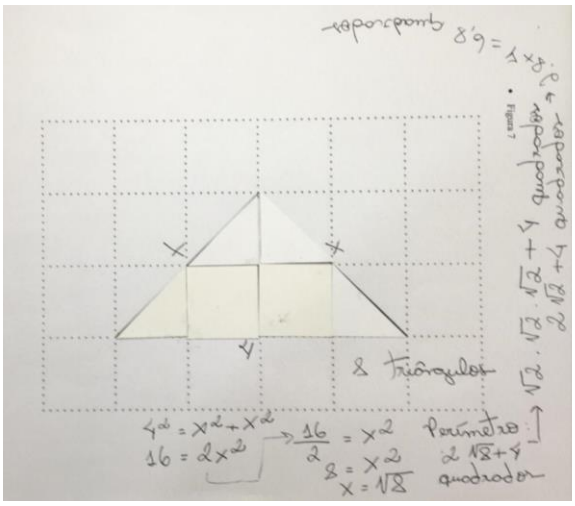

Fonte: Autor.

Figura 121 - Resposta ao item (a), Figura 6 – Atividade 2



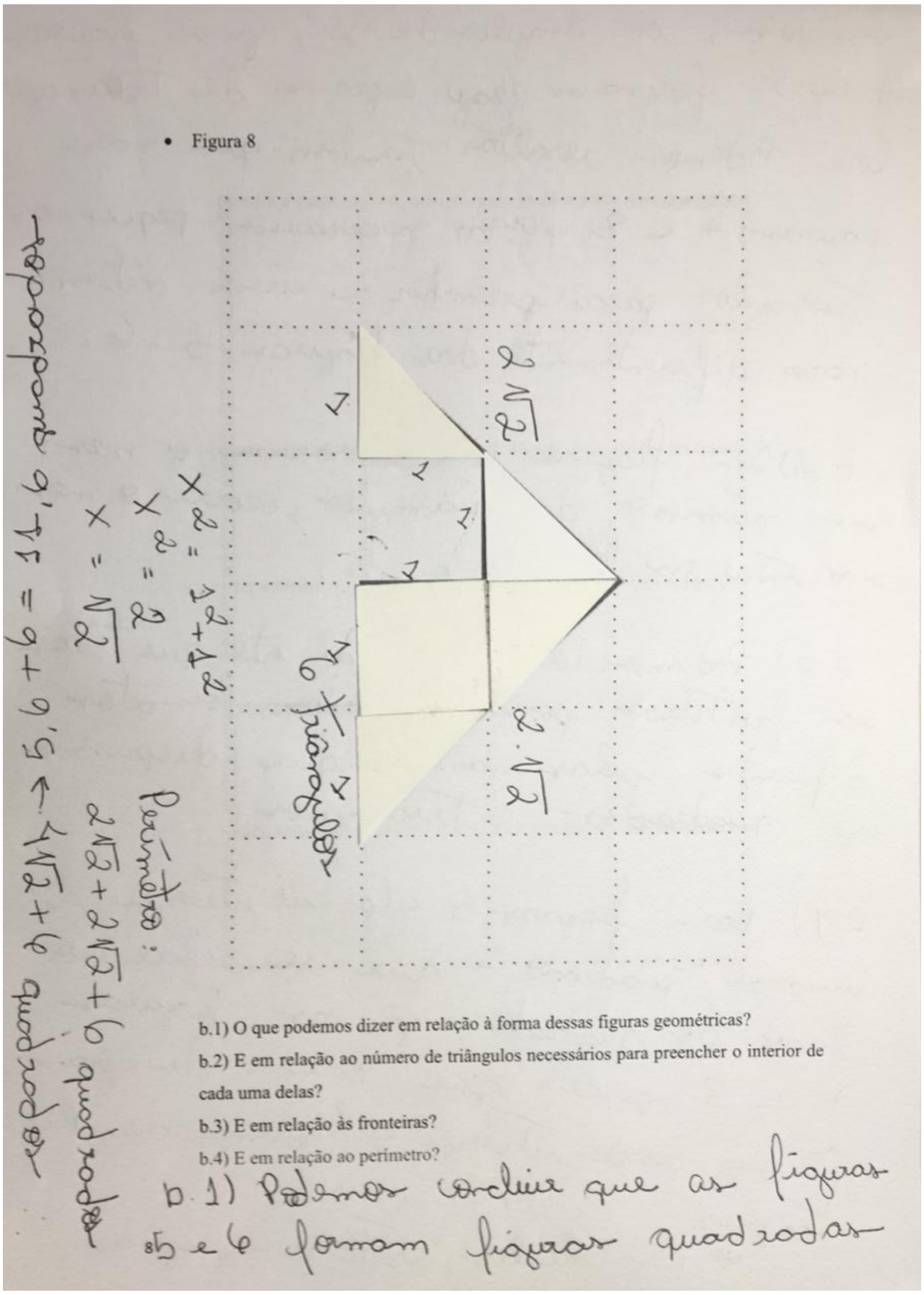

Fonte: Autor.

Figura 122 - Resposta ao item (a), Figura 7 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 123 - Resposta ao item (a), Figura 8 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 124 - Resposta ao item (b), resposta de P1 – Atividade 2

ou seja, com ângulos de 90°; já as figuras 7 e 8 formam ~~fraç~~ espécies de triângulos. Podemos ressaltar também que nas figuras 7 e 8 foram necessários pequenos triângulos para preencher a área determinada, diferentemente das figuras 5 e 6.

b.2) As figuras 5 e 7 usariam o mesmo número de triângulos, ocorre o mesmo entre as figuras 6 e 8.

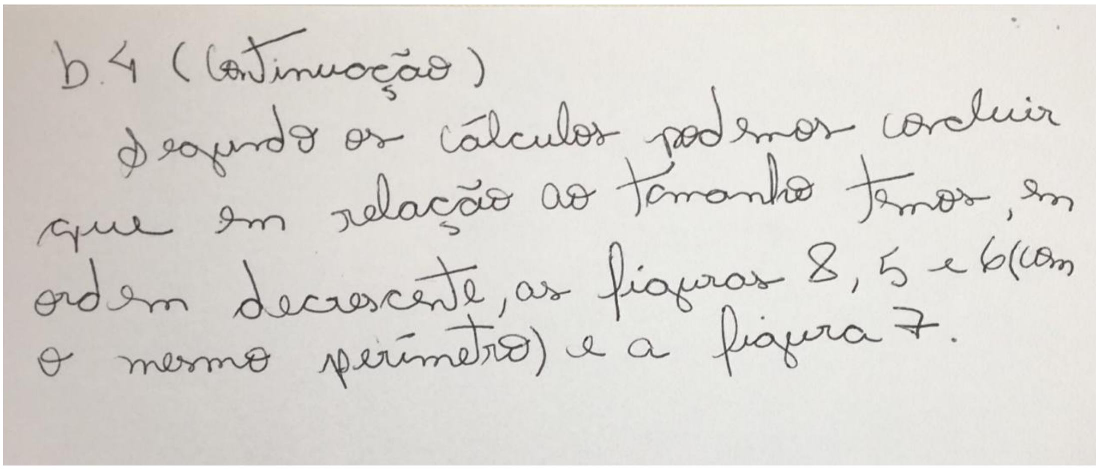
b.3) Podemos concluir visualmente que todas as fronteiras possuem ~~todas~~ formatos diferentes pela maneira que dispusemos os quadrados e triângulos.

b.4) Nas figuras 5 e 6 eu utilizei a unidade "quadrado" - que se refere ao lado do quadrado - já nas figuras 7 e 8 percebi que haviam diagonais e por isso utilizei o Teorema de Pitágoras.

* Os cálculos estão nas figuras..

Fonte: Autor.

Figura 125 - Resposta ao item (b), resposta de P1 (continuação) – Atividade 2


b.4 (continuação)
Segundo os cálculos podemos concluir
que em relação ao tamanho temos, em
ordem decrescente, as figuras 8, 5 e 6 (com
o mesmo perímetro) e a figura 7.

Fonte: Autor.

**b.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?**

Inicialmente P1 pergunta, “E só em relação a elas mesmas né? Não preciso comparar com as figuras do item anterior... que a gente já fez?”. O entrevistador confirma. P1 responde,

> Então eu acho que elas têm número de... é... as áreas são diferentes, uma das outras e o formato também, que é o que a questão está perguntando. Aqui a gente tem uma figura formada só por quadrados (figura 6), e aqui também, só por quadrados (figura 5), você vê que em uma tiraram o quadrado, o quadrado que a outra tem (ele compara as figuras 5 e 6), então é mais ou menos isso, a gente vê que o quadrado que tem em uma, não tem na outra (ele se refere as figuras 5 e 6). Então uma tem um quadrado de área a menos. Já essas duas (ele compara as figuras 7 e 8) são triângulos né, é uma outra forma geométrica e a gente pode concluir com elas que essa aqui (figura 7) tem um quadrado a mais que essa (figura 8). Então, se fosse comparar, essa (figura 8) tem um quadrado a menos na área em relação a essa (figura 7). E comparando essa figura quadrada (figura 5) com essa triangular (figura 7), elas têm a mesma área, porque dois triângulos formam um quadrado, então a gente pode concluir que aqui (figura 7) a gente tem quatro quadrados e aqui (figura 5) também. Então a gente pode concluir que elas têm a mesma área apesar de serem figuras geométricas diferentes. (P1).

Em relação as figuras 6 e 8 o participante concluí que,

> Elas têm a mesma área, são formadas por 3 quadrados, essa é formada por dois pares de triângulo e um quadrado (referência a figura 8). Então a gente pode concluir que essas duas aqui tem a mesma área (figuras 5 e 7) e essas duas tem a mesma área (6 e 8). (P1).

Após a discussão, o participante responde as questões.

Em relação a questão (b.1) o participante escreve, “Podemos concluir que as figuras 5 e 6 formam figuras quadradas ou seja, com ângulos de 90º, já as figuras 7 e 8 formam espécies de triângulos. Podemos ressaltar também que nas figuras 7 e 8 foram necessários pequenos triângulos para preencher a área determinada, diferentemente das figuras 5 e 6”. Ver FIGURA 123 e FIGURA 124.

**b.2) E em relação ao número de triângulos necessários para preencher o interior de cada uma delas?**

P1 descreve, ver FIGURA 124, “As figuras 5 e 7 usariam o mesmo número de triângulos, ocorre o mesmo entre as figuras 6 e 8”. Para resolução, P1 faz alguns cálculos mentais, inclusive as conversões entre quadradinhos e triângulos utilizados.

**b.3) E em relação às fronteiras?**

O participante diz, “Acho que vou fazer a mesma coisa que fiz no outro exercício, vou tentar estabelecer uma unidade de medida. Aqui então, se eu fosse estabelecer uma unidade de medida, seria 8 lados de quadrado, aqui nessa figura (figura 5)”. O participante marca na folha de respostas, ao lado da figura 5, “8 quadrados de perímetro”. Em seguida, analisa a figura 6 e verbaliza, “Eu também usaria 8 quadrados de perímetro”, em seguida, escreve na folha de respostas, ver Figura 6, “8 quadrados de perímetro”. Na sequência, pega a folha de respostas com a figura 7, vira a folha de forma a deixar a hipotenusa do triângulo alinha horizontalmente com a mesa em que escreve, ver FIGURA 123. Ao analisar a figura 7, verbaliza, “Aqui é um processo diferente né? Não vou poder usar a mesma unidade de medida porque são triângulos”. P1 analisa a figura e pergunta, “Eu poderia considerar que aqui é um ângulo reto?” (fazendo referência ao ângulo oposto a hipotenusa do triângulo, ver FIGURA 122). Sem obter uma resposta, ele verbaliza, “É porque eu tentaria aplicar o Teorema de Pitágoras para ter uma medida exata, não necessariamente para ter um número, mas para ter uma forma de resolver”. Em seguida o participante verbaliza, “Eu poderia considerar que esses dois lados são iguais? Porque formam ângulos iguais pelo que me parece então consequentemente seriam lados iguais. Bom, como não sei, vou chamar os dois lados de x, aí vou resolver pelo teorema”.

Utilizando o Teorema de Pitágoras e considerando que a hipotenusa do triângulo tem 4 unidades, ele conclui, ver FIGURA 122, que o valor de x é igual a $\boldsymbol{\sqrt{8}}$. Assim, afirma que o perímetro do triângulo é $\boldsymbol{2\sqrt{8}}$ **+ 4 quadrados**.

O participante pega a folha com a figura 8, muda a posição da folha, ver FIGURA 123, em seguida verbaliza, “Eu poderia utilizar esse mesmo pensamento mas só que numa escala menor, já que essa aqui não tem o triângulo completo, por exemplo, eu usaria que esse lado aqui, usando a mesma unidade de medida, já que estou usando lado de quadrado e não o quadrado (ele faz se refere a calcular a medida da diagonal de um dos triângulos que ela colocou sobre a figura, ver FIGURA 123), então eu mediria um lado do quadrado (ele aponta para um lado do quadrado), aqui outro (ele aponta para o outro lado do quadrado) e esse aqui seria a hipotenusa desse triângulo" (ele aponta para a diagonal do quadrado). O participante então denomina como sendo x a medida da hipotenusa do quadrado e utilizando o Teorema de Pitágoras, P1 conclui que $\mathbf{x}$ é igual a $\sqrt{\mathbf{2}}$, ver FIGURA 123. Em seguida, P1 conclui que um lado possui medida $\mathbf{2\sqrt{2}}$ e o outro também tem medida $\mathbf{2\sqrt{2}}$ e marca nos lados de cada quadrado o número 1, ao final conclui que o perímetro da figura é $\mathbf{4\sqrt{2}+6,}$ ver FIGURA 123. O participante para poder comparar os perímetros, volta para a atividade anterior com o objetivo de fatorar e poder comparar os valores obtidos entre os dois perímetros. Em seguida no item (b.3), ver FIGURA 124, "Podemos concluir visivelmente que todas as fronteias possuem formatos diferentes pela maneira que dispusemos os quadrados e triângulos".

**b.4) E em relação ao perímetro?**

Ao analisar as figuras 7 e 8, P1 verbaliza,

> O que eu estou pensando em fazer é... pode ser que fique confuso né, porque também é número, mas se a gente fosse considerar que é a mesma medida e considerar valendo 1 por exemplo, a gente pode concluir que esse aqui (figura 8), tem quatro vezes um que seria quatro e esse aqui (figura 7) tem duas vezes um, e ai querendo ou não, esse aqui (figura 7) tem a metade desse (figura 8), independentemente do valor de $\sqrt{\mathbf{2}}$.(P1).

Em seguida P1 verifica que para comparar, ela precisará considerar mais algumas medidas e então pensa em um valor aproximado para $\sqrt{\mathbf{2}}$ e pergunta se poderia calcular o valor aproximado, o entrevistador confirma que sim. Sem uso de calculadora ele decide usar 1,4 como aproximação para $\sqrt{\mathbf{2}}$ (o participante percebe que 1,5 é uma aproximação ruim e testa 1,4) e recalcula os perímetros das figuras 7 e 8, ver Figuras 8 e 9. No cálculo do perímetro da figura 7 ele verbaliza,

> Seria igual a 6,8 aproximadamente, da medida que estou usando, que no caso são quadrados, que a gente considera lados do quadrado, que a gente considera quando estamos falando de perímetro. E aqui (figura 8), 4 vezes 1,2, dá 5,6 mais 6, seria igual, aproximadamente, a 11,6 quadrados, na medida que estou usando, ver Figura 9. (P1).

O participante fica em dúvida se pode comparar os perímetros obtidos pois dois deles foram obtidos de forma aproximada. O entrevistador comenta sobre o número $\sqrt{\mathbf{2}}$ e a necessidade de usar uma aproximação decimal. Ao final P1 diz, "Então no caso de comparar qual é a maior entre elas, usando a aproximação, eu não erraria né?", o entrevistador confirma.

P1 faz uma observação, "Só que eu estou vendo a nomenclatura que utilizei aqui, eu estava utilizando triângulos, para comparar, eu medi em triângulos porque tinha triângulos, então eu posso considerar outra medida? Por que estávamos falando de lado de quadrado né?". P1 notou que tinham dois tipos de unidades, lado de triângulo e lado de quadrado. O entrevistador relembra os passos que foram feitos até o momento e ao final o participante verbaliza, "Entendi. Aqui quando eu estava falando de triângulos, eu estava falando da área da figura, não tem nada a ver com perímetro".

Na folha de respostas o participante escreve, ver FIGURA 124 e FIGURA 125, "Nas figuras 5 e 6 eu utilizei a unidade "quadrado", que se refere ao lado do quadrado, já nas figuras 7 e 8 percebi que havia diagonais e por isso utilizei o Teorema de Pitágoras. Os cálculos estão nas figuras". O entrevistador pergunta qual a conclusão e então P1 escreve, "Segundo os cálculos podemos concluir que em relação ao tamanho temos, em ordem decrescente, as figuras 8, 5 e 6 (com o mesmo perímetro) e a figura 7".

Como consideração final o entrevistador pergunta para P1 sobre as dificuldades, ele responde,

> Quando eu estava usando o quadrado como unidade de medida, eu só estava usando o quadrado, então estava bem mais fácil. Quando eu comecei a usar o triângulo também, eu meio que construí essa linha de raciocínio, então é mais complicado quando você constrói uma linha de raciocínio com duas vertentes, no caso, a medida do triângulo e a medida do quadrado, então você tem que continuar seguindo essa linha, se você começar a pensar em outra coisa, em outro tipo de medida, você simplesmente se perde né? Porque você está começando a construir, aquele tipo de pensamento, então eu acho que foi isso que aconteceu, porque eu estava confundindo com a medida da área inclusive, eu estava pensando na área ainda, mas depois que eu entendi que eram coisas diferentes, o perímetro e a área, aí eu consegui separar e eu entendi. Eu acho que o principal fator para eu ter me confundido foi o fato de eu ter usado o triângulo tanto para medir área quanto para medir o perímetro, então meio que causou essa confusão, eu usei a mesma unidade para medir grandezas diferentes, foi aí, exatamente nesse ponto que eu me confundi. Quando eu ouço triangulo ou quadrado, eu já penso automaticamente na forma, na forma geométrica triângulo preenchido já, eu não penso no contorno do triângulo ou como se fossem coisas diferentes a área e o contorno ou perímetro, penso em uma coisa só, agora meio que a gente está separando essas coisas e utilizando de maneiras diferentes. Eu acredito que eu estou mudando esses conceitos de figura geométrica. (P1).

O participante finaliza a resposta dizendo,

> A figura geométrica vem sido introduzida desde de cedo né, quando a gente aprende os nomes, quantidade de lados, mas a gente não para pra pensar nessas diferenças e em outras diferenças também que existem, então a gente meio que usa as figuras geométricas só como ela mesmo, sabe, para outras coisas, não estuda ela em si, a figura geométrica em si, eu acho que isso atrapalha um pouco nesse pensamento,

mas aí, é com exercícios como esse que a gente vai, não é... destruindo esse conceito que a gente tem, mas aprimorando, de uma maneira positiva. (P2). (Grifo nosso).

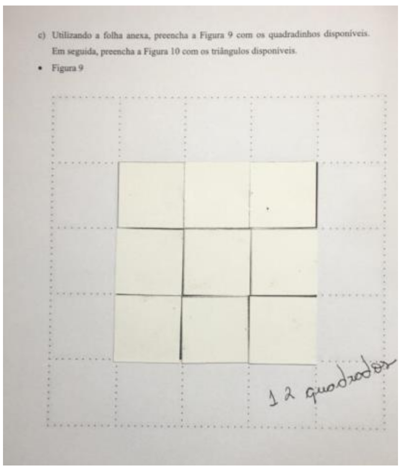
**Considerações:** P1 identifica corretamente as figuras de mesma área e de perímetros diferentes. Ele apresenta necessidade de estabelecer uma medida para que assim efetue comparações. P1 percebe que faz confusão entre os conceitos de região interna e fronteira (utiliza os quadradinhos e suas respectivas regiões internas como unidade de medida de comprimento), na fase de discussão, esses elementos são discutidos com o entrevistador. Percebemos que P1 não tem familiaridade com o uso de unidades de medida de área não convencionais e que as estratégias mencionadas para responder a atividade estão ligadas aos paradigmas G0-G1.

É importante destacar que o participante se incomoda com a posição que o triângulo é apresentado na folha e então gira (FIGURA 122 e 123) ela de forma a trabalhar com o triângulo em uma posição normalmente utilizada nos materiais didáticos. P1 comete um equívoco ao transformar o valor $\mathbf{2\sqrt{8}+4}$ em um número decimal, comente um equívoco e obtém o valor (incorreto), “6,8 quadrados”.

c) **Utilizando a folha anexa, preencha a figura 9 com os quadradinhos disponíveis. Em seguida, preencha a figura 10 com os triângulos disponíveis.**

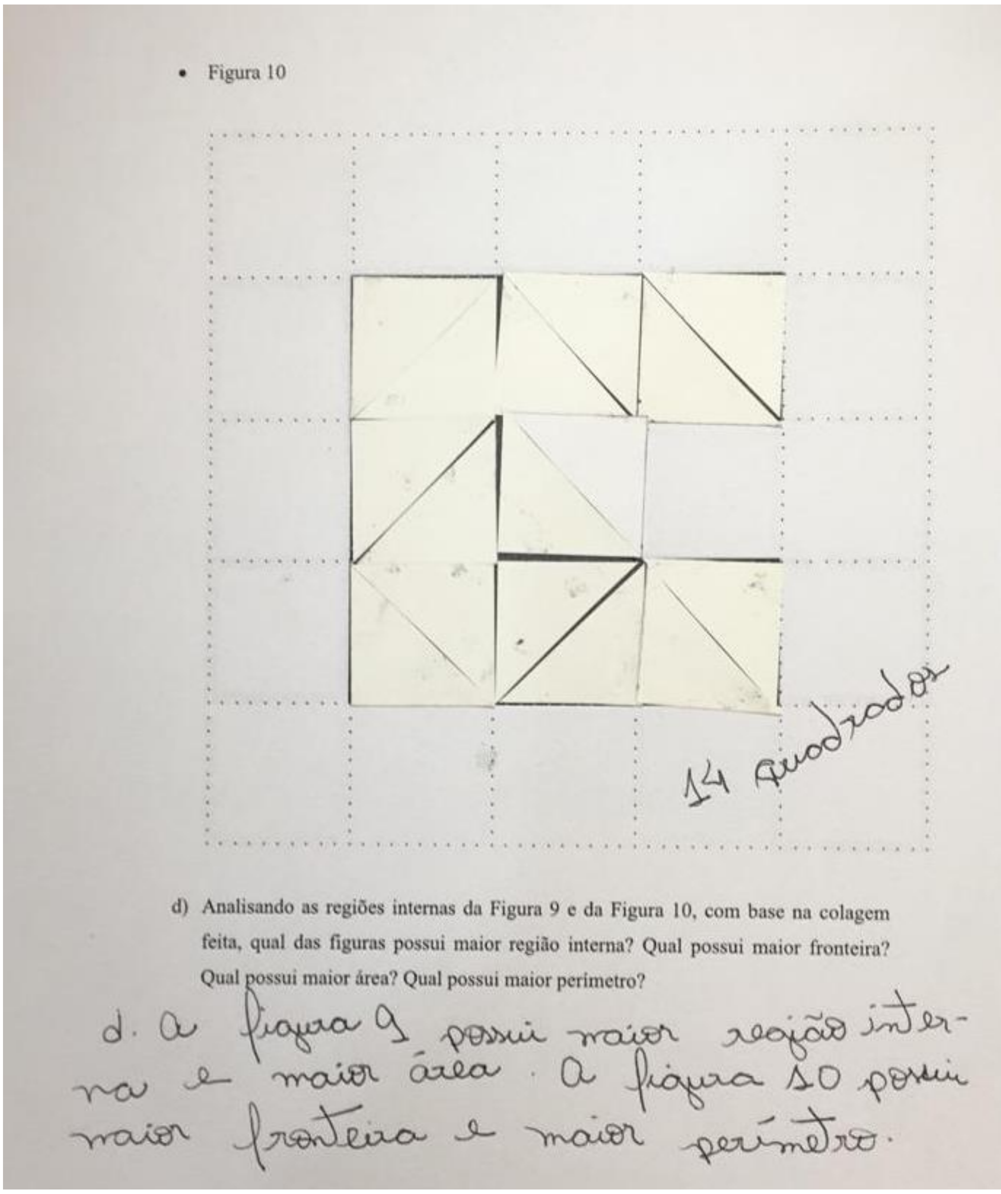
O participante preenche a figura 9 utilizando os quadradinhos disponíveis em seguida preenche a figura 10 utilizando os triângulos, ver FIGURAS 126 e 127.
Nessa atividade, P1 ao colar as unidades de medida, calcula ambas as áreas (figura 9 e 10) convertendo as unidades de área triângulo na unidade de área quadradinho sempre fazendo as conversões por meio de cálculos mentais.

Figura 126 - Resposta ao item (c), Figura 9 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 127 - Resposta ao item (b), Figura 10 – Atividade 2




Fonte: Autor.

**d) Analisando as regiões internas da figura 9 e da figura 10, com base na colagem feita, qual das figuras possui maior região interna? Qual possui maior fronteira? Qual possui maior área? Qual possui maior perímetro?**

O participante verbaliza, "Região interna está diretamente relacionada a área. Analisando essas figuras, primeiramente a figura 9 (ver FIGURA 126) posso concluir que ele tem 9 quadradinhos e a figura 10 tem 8 (ver FIGURA 127) está faltando 1 aqui, então tem 8 quadradinhos. Considerando que cada dois triângulos é um quadrado". Na folha de respostas o P1 responde, ver FIGURA 127, A figura 9 possui maior região interna e maior área. A figura 10 possui maior fronteira e maior perímetro. Eu vou usar de novo a medida... a unidade de medida que eu tinha usado no exercício anterior. Então a figura 9 tem 12 lados de quadrados da fronteira, de perímetro. E a figura 10 possui 14 quadrados, lados de quadrados. Então a figura 10 possui maior fronteira. E tá perguntando também qual possui maior perímetro, então vou considerar que a figura 10 possui tanto maior fronteira como maior perímetro, porque praticamente é a mesma coisa né? A fronteira é o contorno e o perímetro é a medida do contorno, é quando a gente mede né? Então vou colocar que possui maior fronteira e maior perímetro. (P1).

**Considerações (atividades c e d):** Nessas atividades, o participante apresenta um entendimento superior ao que vinha apresentando quanto aos conceitos de área e perímetro, assim como região interna e fronteira. Distingue as grandezas (comprimento e região interna) de suas respectivas medidas (perímetro e área). Conjectura que a figura de maior região interna é a mesma figura de maior área e que a figura com maior fronteira é a mesma que de maior perímetro. Ao apresentar as respostas, P1 não utilizou “quadrados de perímetro” ou “triângulos de perímetro”.

Durante a atividade, P1 não fez comparações/sobreposições, ele se sente confiante apenas com a utilização de unidade de medida. O que reforça nossa sugestão de que atividades de comparações sejam trabalhados ao longo do Ensino Fundamental, utilizando para isso, materiais manipulativos, favorecendo assim, um trabalho sob o paradigma G0 de Parzysz (1996).

**e) Com auxílio do Geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no Geoplano os formatos a seguir.**

**e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.**

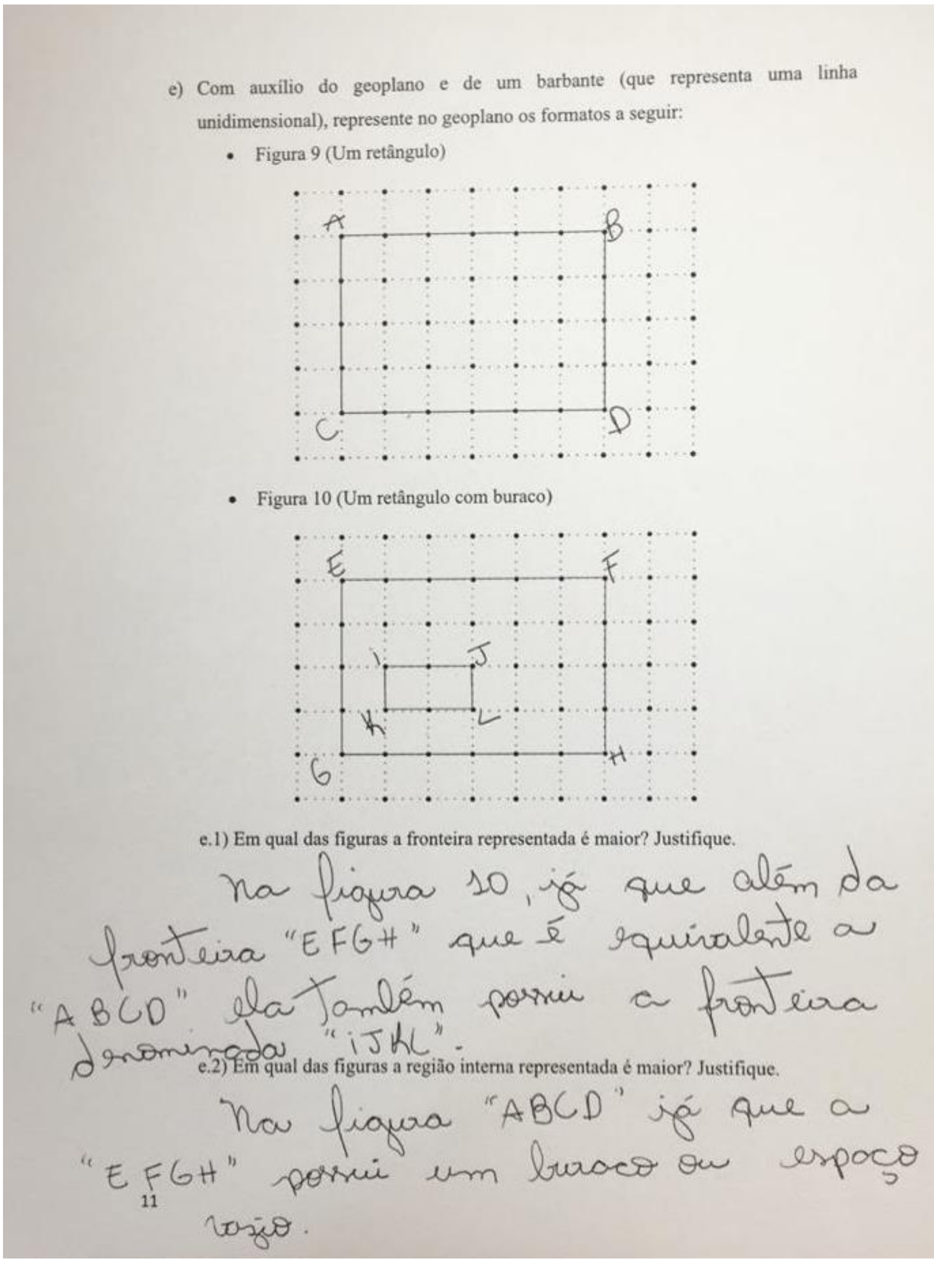
Ao ler o enunciado em voz alta P1 diz, “Então a fronteira maior é da figura 10 porque a gente tem também essa fronteira interna (ele aponta para o contorno do buraco da figura 10), FIGURA 128. É meio estranho esse termo né? Fronteira interna”. Em seguida há uma discussão sobre o uso do termo estar correto ou não. Dessa discussão, surge a ideia de nomear os vértices das figuras, o que ajudaria na comparação das fronteiras. Na folha de respostas P1 nomeia cada um dos vértices das figuras 9 e 10 e responde, ver FIGURA 128 “Na figura 10, já que além da fronteira “EFGH” que é equivalente a “ABCD”, ela também possui a fronteira denominada “IJKL”.

**e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.**

O participante verbaliza, “Na figura 9, já que na figura 10 tem um espaço vazio, é... um buraco”. Na folha de respostas ela escreve, FIGURA 128, “Na figura ABCD já que a figura EFGH possui um buraco ou espaço vazio”.

**Considerações:** P1 fez comparações entre as grandezas comprimento e área. Identificou as semelhanças e as diferenças entre as figuras 9 e 10. Utiliza o termo “fronteira interna” e em seguida se autocorrige, mostrando assim um amadurecimento na ideia de fronteira, região interna e região externa de uma figura plana. Contudo, podemos concluir até o momento, baseados em Parzysz (2006), que P1 e, nesta atividade, apresenta de forma organizada justificativas perceptivo-dedutivas, característica dos paradigmas G0-G1.

Figura 128 - Resposta ao item (e), figura 9 e figura 10 – Atividade 2


e) Com auxílio do geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no geoplano os formatos a seguir:

- Figura 9 (Um retângulo)

A B C D

- Figura 10 (Um retângulo com buraco)

E F I J K L G H

e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

Na figura 10, já que além da fronteira “EFGH” que é equivalente a “ABCD” ela também possui a fronteira denominada “IJKL”.

e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

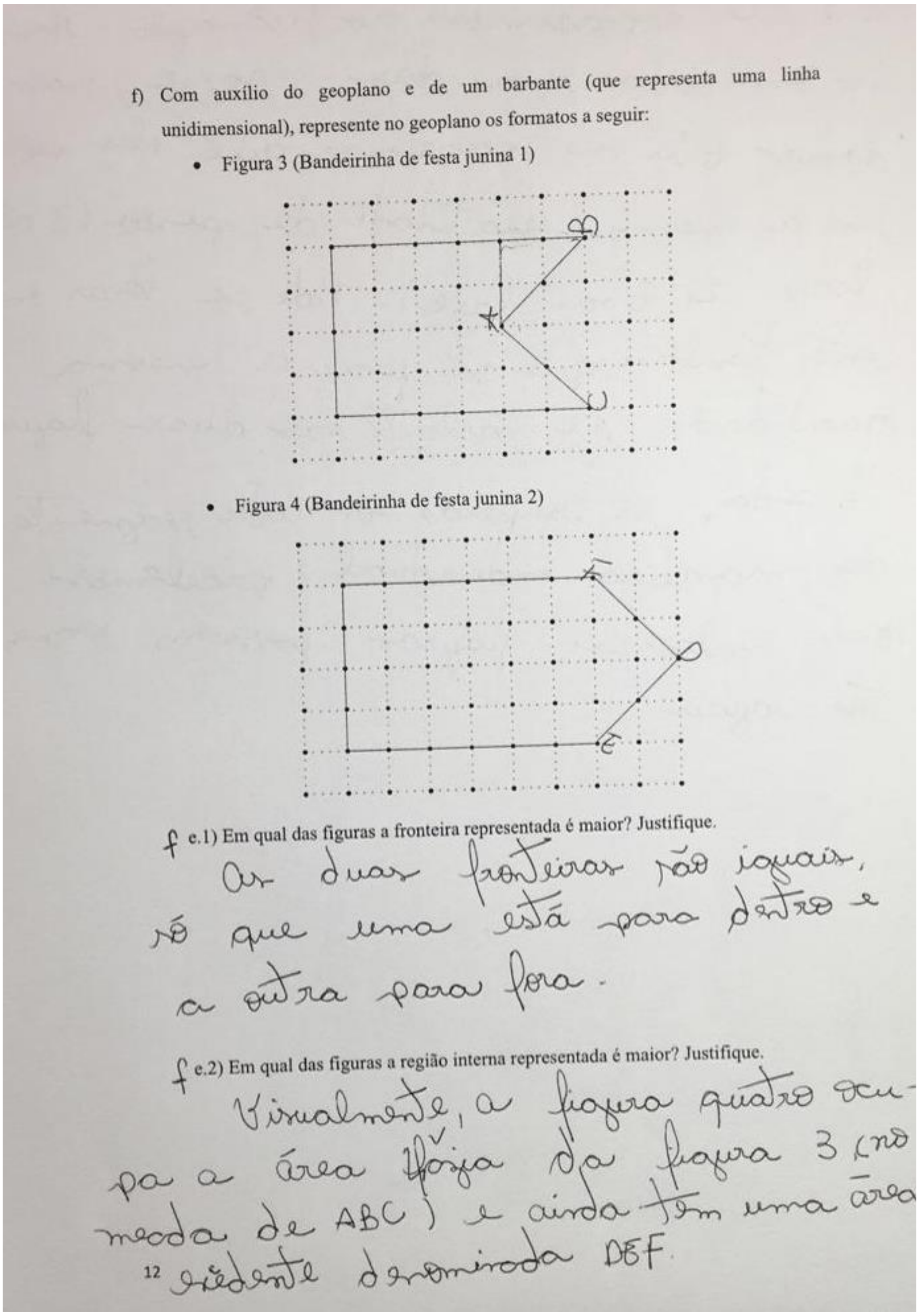
Na figura “ABCD” já que a “EFGH” possui um buraco ou espaço vazio.

11

Fonte: Autor.

**f) Com auxílio do Geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no Geoplano os formatos a seguir:**

Figura 129 - Resposta ao item (f), figura 3 e figura 4 – Atividade 2


f) Com auxílio do geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no geoplano os formatos a seguir:

- Figura 3 (Bandeirinha de festa junina 1)

- Figura 4 (Bandeirinha de festa junina 2)

f e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

As duas fronteiras são iguais, só que uma está para dentro e a outra para fora.

f e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

Visualmente, a figura quatro ocupa a área toda da figura 3 (nomeada de ABC) e ainda tem uma área excedente denominada DEF.

12

Fonte: Autor.

Figura 130 - Resposta ao item (f), resposta de P1 – Atividade 2

e.1 Se repararmos no triângulo forma-
do em cada uma das imagens, nos
"damos conta" ou percebemos que eles possu-
em a mesma quantidade de pinos (3 no
lado e 5 na base). Pode-se levar em
conta também que se usa a mesma
quantidade de barbante nas duas figuras.
E ainda, se compararmos cada segmento
de maneira individual, percebemos
que ambas as figuras possuem segmen-
tos iguais.

Fonte: Autor.

**f.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.**

O participante responde verbalizando, "Eu acho que as fronteiras das duas figuras são iguais, só que uma está para dentro e a outra está para fora, assim, visualmente falando". Na folha de resposta P1 escreve, ver FIGURA 129, "As duas fronteiras são iguais, só que um está para dentro e a outra para fora".

O entrevistador pergunta a P1 se ele consegue justificar a afirmação feita e apontar semelhanças e diferenças entre as figuras. P1 verbaliza, "Bom, para mim, uma figura é concava e a outra é convexa essa é a diferença entre elas e formam o mesmo triângulo, aqui (P1 aponta para a figura 3, ver FIGURA 129) passa por três pinos, depois três pinos e a base seria cinco pinos e aqui (o participante aponta para a figura 4, ver FIGURA 129) também, é a mesma figura geométrica". O entrevistador sugere que ele comparasse o comprimento dos segmentos entre as duas figuras, sem que fosse necessário estabelecer uma unidade de medida. Ele verbaliza,

> Ok! Inclusive essas duas bandeirinhas se encaixam né? Se elas se encaixarem, aqui vai formar um losango (P1 se refere a sobrepor as figuras). Eu posso justificar dizendo que posso comparar cada segmento individualmente, dá para notar que eles têm os mesmos segmentos, só que dois em direções opostas. Posso justificar dizendo sobre os pinos e posso justificar dizendo sobre o barbante, que eu percebi quando eu estava fazendo no Geoplano que eles são iguais, gastam a mesma quantidade, eu só mudei a direção do barbante quando eu estava fazendo. (P1).

Na folha de respostas o participante escreve, ver FIGURA 120,

> Se repararmos no triângulo formado em cada uma das imagens, nos "damos conta" ou percebemos que eles possuem a mesma quantidade de pinos (3 no lado e 5 na base). Pode-se levar em conta também que se usa a mesma quantidade de barbante nas duas figuras. E ainda, se compararmos cada segmento de maneira individual, percebemos que ambas as figuras possuem segmentos iguais. (P1).

**f.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.**

Ao ler em voz alta a questão, P1 inicia a resolução verbalizando,

> Eu estou pensando na mesma coisa que pensei na outra vez (ele se refere a atividade do 1º encontro), que essa figura 4, a bandeirinha de festa junina 2, ver Figura 15, tem área maior porque além dela preencher esse espaço aqui (o participante se refere ao triângulo formado pelos vértice A, B e C da figura 3) ele tem esse triângulo para fora (o participante aponta para o triângulo que pode ser formado pelos vértice D, E e F da figura 4).(P1).

O entrevistador sugere que ela nomeie os vértices das figuras 3 e 4. P1 nomeia alguns vértices e responde na folha de respostas, "Visualmente a figura quatro ocupa a área vazia da figura 3 (nomeada por ABC) e ainda tem uma área excedente denominada DEF".

No final, durante a discussão, o entrevistador ressaltou que a distância entre os pinos no Geoplano nas direções horizontais e verticais, podem ser consideradas as mesmas num modelo ideal, porém na direção diagonal, as distâncias não são as mesmas que na vertical ou horizontal. P1 diz, "Entendi, se imaginarmos um triângulo, aqui seria a hipotenusa (ele gesticula com a caneta, formando um triângulo cuja hipotenusa seja o segmento AB), eu entendi".

**Considerações:** P1 por meio de comparações, reconhece as figuras com fronteiras iguais, utilizando para isso, uma percepção visual. Parece razoável concluirmos que sob a influência do movimento feito com as mãos para fazer os contornos, P1 caracteriza como diferença entre as fronteiras, os segmentos que estão "para dentro" e em uma figura e "para fora" em outra, revelando assim, dificuldade de expressar matematicamente as situações apresentadas. Quando a comparação entre as áreas, item (f.2), P1 reconhece que já havia feito uma atividade parecida no primeiro dia de atividade (Atividade 1) e assim, segundo ele mesmo, a justificativa continua sendo a mesma, a figura 4 possui área maior pois tem como acréscimo, as áreas dos triângulos ABC e DEF, mostrando assim que confunde os conceitos de figura e área delimitada pela figura. Podemos concluir que P1 consegue articular justificativas sob os paradigmas, G0 (utilizando a quantidade de barbante) e G1 (comparando segmentos das figuras).

g) **Pense em duas figuras geométricas planas e denomine-as Figura A e Figura B. Apresente um exemplo de situação em que a fronteira da Figura A é maior do que a fronteira da Figura B, porém a região interna da Figura A é menor do que a região interna da Figura B. Utilize o material disponível (papel, cola, barbante, lápis ou Geoplano).**

Inicialmente P1 verbaliza,

> Um pensamento que eu tive é de que, por exemplo, para que meu exemplo funcione, uma das figuras tem que ter um buraco né? E aí, consequentemente, a fronteira vai ser maior e a área ou a parte interna vai ser menor. É um exemplo parecido com que a gente fez com o barbante. (P1).

Em seguida o participante faz dois pares de desenhos na folha de repostas, ver FIGURA 131, e registra na folha de respostas,

> Qualquer figura com buraco possui fronteira maior e parte interna menor do que ela própria sem o buraco. Eu poderia fazer isso com qualquer tipo de figura. Por exemplo, se eu desenhasse um retângulo com qualquer tipo de buraco no meio, a fronteira dele seria maior, só que a área interna menor. (P1).

Em seguida, o entrevistador pergunta se o participante conseguiria pensar em outro exemplo, além de figuras com buraco. Ele responde, “Sim, o caso das bandeirinhas. Se eu pegasse uma figura e mudasse a direção dos segmentos dela, provavelmente eu conseguiria deixar ela com uma fronteira igual, mas com área interna maior ou menor”. Na folha de respostas o participante escreve, ver FIGURA 132,

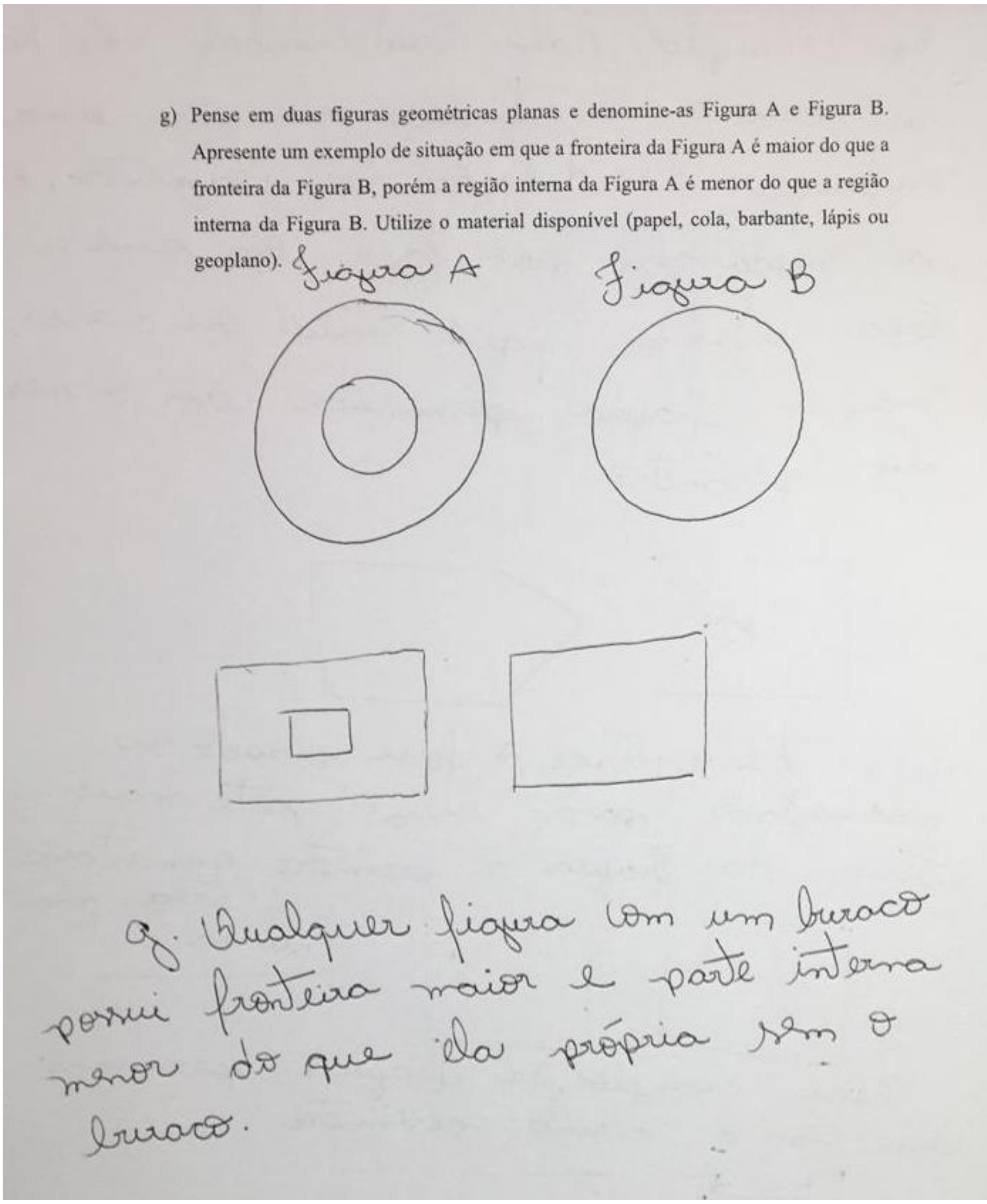
> No exemplo das bandeirinhas não há um buraco na figura, mas sim uma mudança de direção nos segmentos, essa mudança pode fazer com que a área interna fique maior ou menor, mas a figura permanece com o mesmo perímetro. (P1).

Após apresentar o exemplo das bandeirinhas, P1 nota que os perímetros das duas bandeirinhas são iguais e parte para uma nova tentativa. Logo abaixo do exemplo das bandeirinhas, ele desenha duas figuras, um hexágono e um retângulo, ver FIGURA 132 e verbaliza, “Eu pensei no exemplo de uma cerca, por exemplo, se a gente desenhar um “retângulo”, mas faltando esse espaço aqui a gente teria uma figura com menor área, ou menor parte interna, mas com maior perímetro... não, não, com o mesmo perímetro, essa figura teria menor área e mesmo perímetro. Eu acho que para ter diferença, eu teria que acrescentar uma parte que tem duas partes, para ficar com um maior perímetro”, então ela faz um novo desenho, um par de polígonos, um octógono e um retângulo (um ao lado do outro), ver FIGURA 132. P1 se refere a fazer uma mudança em um dos lados do retângulo de tal forma que fossem necessários acrescentar dois lados para fechar o contorno da figura. Ele verbaliza, “Agora esse aqui tem maior perímetro e menor área.” P1 então aponta para o par de figuras desenhadas anteriormente (hexágono e retângulo) e diz, “Esse aqui é como se eu tivesse dobrado, então não mudou o perímetro”.  O entrevistador sugere que ele registre na folha de respostas as observações feitas.

Ao analisar o próprio desenho feito (par de bandeirinhas), o participante encontra uma forma de fazer uma transformação em uma das figuras de tal maneira que o perímetro de uma aumente, mantendo a diferença entre a área das figuras. Durante a explicação do participante, o entrevistador sugere que alguns vértices sejam nomeados, o participante nomeia e escreve na folha de respostas, ver FIGURA 132, “Se o vértice A fosse puxado ou movimentado para uma parte mais interna da figura, o perímetro aumentaria e a área diminuiria.”

No par de exemplos, hexágono e retângulo, ver FIGURA 132, o participante escreve, “Nesse exemplo, as figuras permanecem com o mesmo perímetro”. E para finalizar a questão, ele escreve uma observação no par octógono e retângulo, “Além da diferença do segmento $\overline{AB}$ ainda há dois pequenos segmentos sobrando.”

Figura 131 - Resposta ao item (g) – Atividade 2



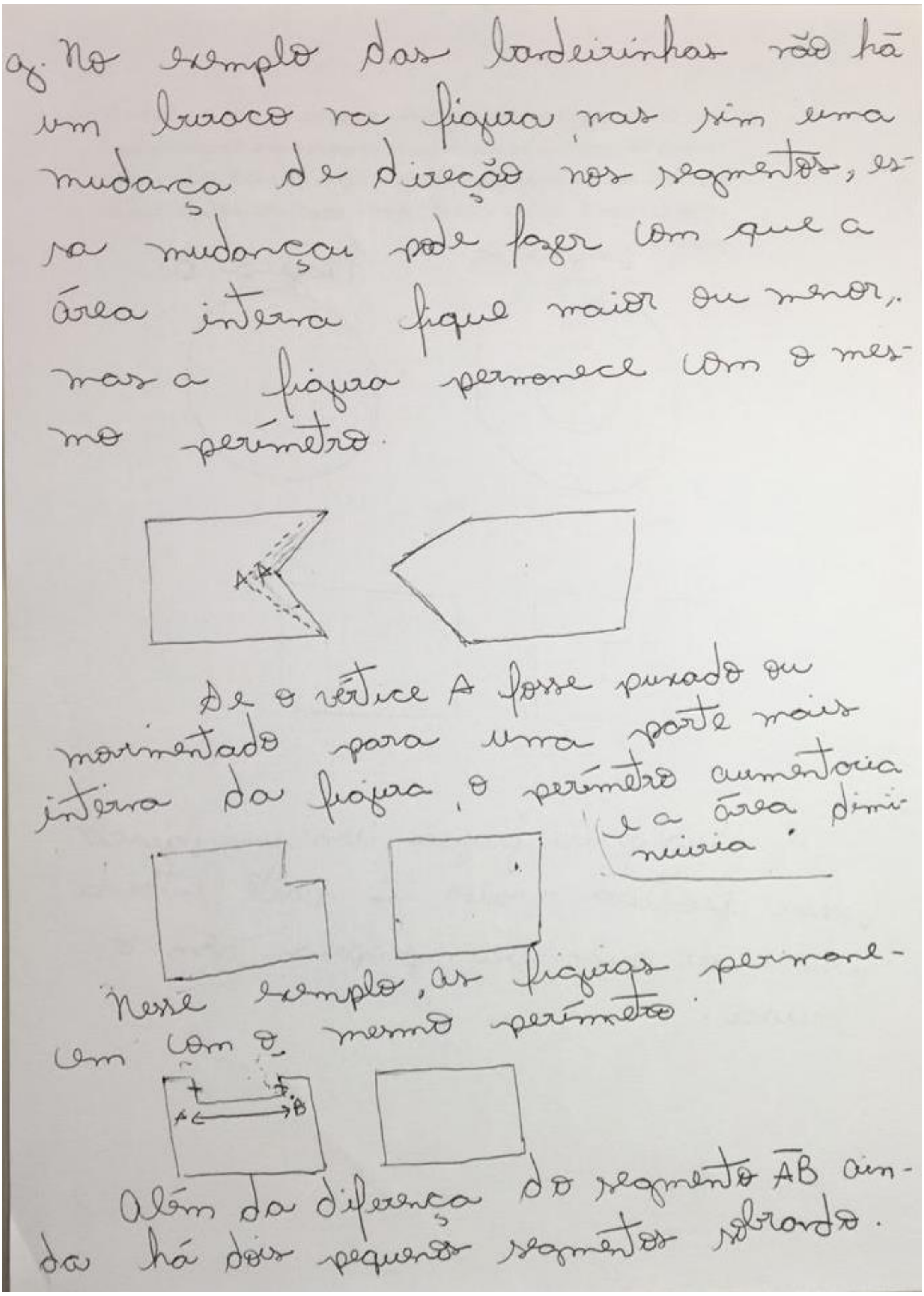
g) Pense em duas figuras geométricas planas e denomine-as Figura A e Figura B. Apresente um exemplo de situação em que a fronteira da Figura A é maior do que a fronteira da Figura B, porém a região interna da Figura A é menor do que a região interna da Figura B. Utilize o material disponível (papel, cola, barbante, lápis ou geoplano).



g. Qualquer figura com um buraco possui fronteira maior e parte interna menor do que ela própria sem o buraco.

Fonte: Autor.

Figura 132 - Resposta ao item (g), respostas de P1 – Atividade 2



g) No exemplo das bandeirinhas não há um buraco na figura, mas sim uma mudança de direção nos segmentos, essa mudança pode fazer com que a área interna fique maior ou menor, mas a figura permanece com o mesmo perímetro.

Se o vértice A fosse puxado ou movimentado para uma parte mais interna da figura, o perímetro aumentaria e a área diminuiria.

Nesse exemplo, as figuras permanecem com o mesmo perímetro.

Além da diferença do segmento $\overline{AB}$ ainda há dois pequenos segmentos sobrando.

Fonte: Autor.

**Considerações:** P1 inicia apresentando um exemplo de duas figuras equivalentes cuja figura de menor região interna é a de maior fronteira. Em seguida apresenta um exemplo onde compara duas figuras, uma delas possuindo um "buraco" e busca generalizar, afirmando que basta pegar inicialmente duas figuras congruentes e em uma delas, fazer um buraco, com isso uma terá área menor que a outra e a figura de menor região interna será de maior fronteira. Vale ressaltar alguns pontos referentes a solução apresentada. Essa atividade é inspirada nos estudos de D'Amore e Fandiño (2006), que ao pesquisar um grupo de alunos e professores, verificou que estes tendem a concordarem com a ideia de que se o perímetro de uma figura é menor que o perímetro de outra figura, necessariamente o mesmo irá ocorrer com a área. Os pesquisadores apontam duas causas para essa *misconception,* um repertório figural muito limitado, reduzido a polígonos convexos e transformações de figuras apenas feitas por homotetias. Podemos perceber que o trabalho com figuras que contenham buracos, além de favorecer um estudo sobre área e perímetro como grandezas, favorece também a quebra dessa *misconception*.

Outro ponto que merece destaque é que o participante demonstra nessa atividade, e ao longo das atividades anteriores, se restringir a apresentar figuras "bem-comportadas" como quadrados, retângulos, triângulos ou circunferências ou combinações destas, quando há liberdade de se apresentar exemplos de figuras planas. Não por coincidência, este é o conjunto de figuras que são mais trabalhadas em livros didáticos, sobretudo ao longo do Ensino Fundamental.

Ao pensar em uma figura com buraco, P1 imagina o buraco no "centro" da figura, buscando de certa forma levar para a figura uma simetria, típica das figuras planas mais trabalhadas no Ensino Fundamental (quadrado, retângulo, triângulo, trapézio e circunferência).

Ainda sobre a resposta do participante, o entrevistador busca verificar se este consegue apresentar outro tipo de resposta, sem utilizar figuras com buracos. Esta é importante para verificar se o participante se valeu apenas da ideia de figuras com buraco ou se ele consegue articular outros tipos de exemplos. E a sequência de respostas apresentadas por ele é interessante.

No primeiro exemplo, sem utilizar figuras com buraco, o participante cita duas figuras que embora tenham áreas diferentes, possuem o mesmo perímetro. E então ele reformula e chega em um segundo exemplo, que novamente mostra duas figuras com áreas diferentes, mas com mesmo perímetro. No terceiro exemplo, ele consegue apresentar um par de figuras de tal maneira que a figura de maior área, é a de menor perímetro. Além disso, ele descreve um processo que poderia gerar outros exemplos semelhantes. Em seguida, retorna para o primeiro exemplo apresentado e percebe que com uma pequena alteração da figura, pode obter um novo exemplo.

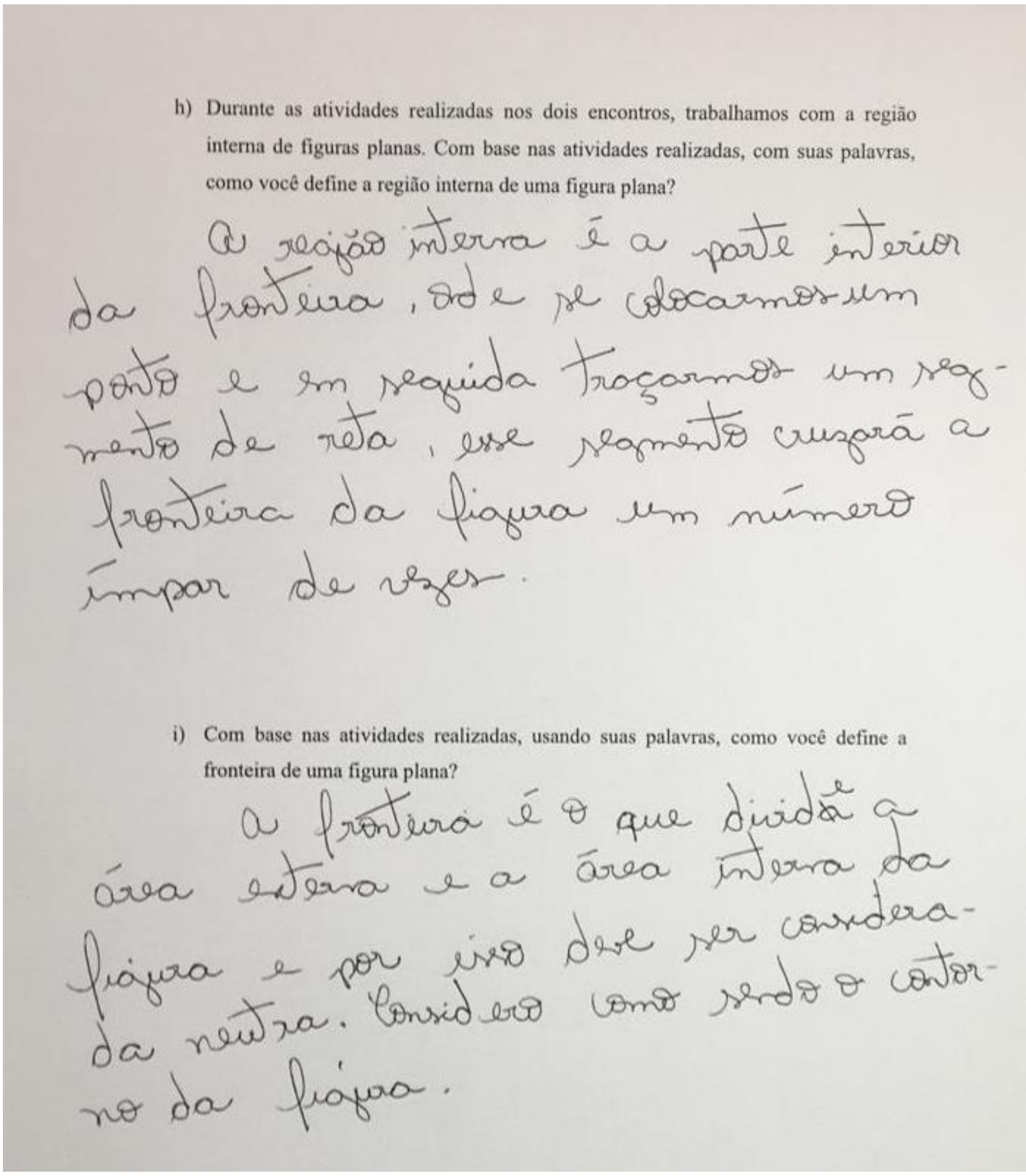
As respostas do participante mostram que ele consegue articular uma geometria não axiomática, paradigmas G0 e G1. Interessante notar que o participante inicia as atividades com muita dificuldade em fazer articulações sob os paradigmas G0 e G1 e muitas vezes tenta articular respostas no paradigma G2, porém com muita dificuldade.

**h) Durante as atividades realizadas nos dois encontros, trabalhamos com a região interna de figuras planas. Com base nas atividades realizadas, com suas palavras, como você define a região interna de uma figura plana?**

O participante escreve na folha de respostas, ver FIGURA 133, “A região interna é a parte interior da fronteira, onde se colocarmos um ponto e em seguida traçarmos um segmento de reta, esse segmento cruzará a fronteira da figura um número ímpar de vezes”.

Como consideração ele verbaliza, “Principalmente quando a figura não é convencional, ela tem por exemplo, um buraco no meio, seria mais apropriado usar esse tipo de definição, usando segmento de reta, seria um jeito certeiro, vamos dizer assim, de saber se o ponto é interior ou exterior a figura”.

Figura 133 - Resposta aos itens (h) e (i) – Atividade 2



h) Durante as atividades realizadas nos dois encontros, trabalhamos com a região interna de figuras planas. Com base nas atividades realizadas, com suas palavras, como você define a região interna de uma figura plana?

A região interna é a parte interior da fronteira, onde se colocarmos um ponto e em seguida traçarmos um segmento de reta, esse segmento cruzará a fronteira da figura um número ímpar de vezes.

i) Com base nas atividades realizadas, usando suas palavras, como você define a fronteira de uma figura plana?

A fronteira é o que divide a área externa e a área interna da figura e por isso deve ser considerada neutra. Considero como sendo o contorno da figura.

Fonte: Autor.

**Considerações:** Os elementos associados ao conceito de região interna de uma figura plana, evocados por P1, estão ligados à elementos de definição, como ponto interno de uma região (denominado pelo participante como parte interior da fronteira), apresentados na Atividade 1 e trabalhados ao longo das atividades propostas.

Durante a Atividade 1, esse mesmo participante apresentou o exemplo de uma situação em que um ponto foi escolhido na fronteira de uma figura, fato esse que não está contemplado na definição apresentada por SANGIORGI (1974), fazendo que complementássemos essa definição.

i) **Com base nas atividades realizadas, usando suas palavras, como você define a fronteira de uma figura plana?**

O participante registra na folha de respostas, ver FIGURA 133, “A fronteira é o que divide a área externa e a área interna da figura e por isso deve ser considerada neutra. Considero como sendo o contorno da figura”.

**Considerações:** Os elementos que aparecem na imagem de conceito evocada pelo participante, relacionada a fronteira de uma figura plana, estão associadas a uma “região” neutro, que não faz parte nem da região interna, nem da região externa de uma figura plana. Isto é, a fronteira de uma figura plana é algo concreto, com espessura. Essa ideia pode ser reforçada quando por exemplo, P1 demarca no papel, utilizando lápis, a fronteira de uma figura plana ou trabalha com esse conceito de forma concreta, como por exemplo, utilizando um barbante. A ideia de fronteira apresentada pelo participante é confundida com a realidade, traduzindo assim um pensamento sob o paradigma G0. É razoável admitirmos que esse tipo de ideia se trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, poderia favorecer a transição entre os paradigmas G1 (Geometria espaço-gráfica) e G2 (Geometria de demonstração), nos anos finais. No caso do participante, esta transição ainda deve ser feita. P1 utiliza o termo área como sinônimo de região interna, mostrando assim, que essas ideias precisam ser mais trabalhadas.

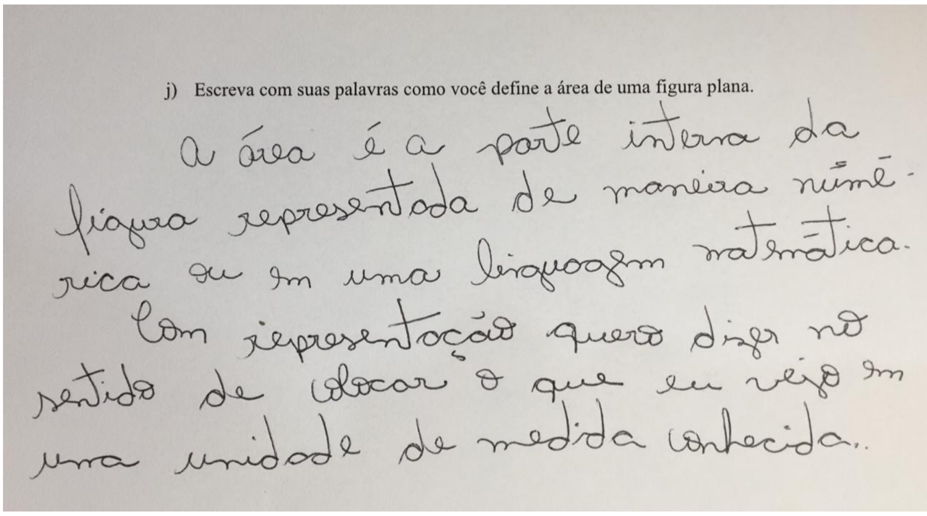
j) **Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.**

Ao ler o enunciado, P1 escreve na folha de respostas, “A área é a parte interna da figura representada de maneira numérica ou em uma linguagem matemática.”

Em seguida, verbaliza, “De uma maneira imaginária, eu considero que as coisas planas são meio que como um buraco no espaço e o que a gente chama de perímetro é exatamente o perímetro desse buraco no espaço”.

Ao ser perguntado sobre o significado de “representação”, ele acrescenta a resposta, “Com representação quero dizer no sentido de colocar o que eu vejo em uma unidade de medida conhecida”.

Figura 134 - Resposta ao item (j) – Atividade 2


j) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.

a área é a parte interna da figura representada de maneira numérica ou em uma linguagem matemática. Com representação quero dizer no sentido de colocar o que eu vejo em uma unidade de medida conhecida.

Fonte: Autor.

**Considerações:** Em relação a área de uma figura plana, os elementos que aparecem na definição de conceito estão relacionados a concepção numérica (a área é o resultado de uma medida), concepção geométrica (a área está relacionada a região interna de uma figura) e a concepção de grandeza não é contemplada. Há de se observar que na imagem de conceito de P1, área se confunde a região interna.

Na Atividade 1, a atividade (a), primeira atividade, o participante responde a mesma pergunta e apresenta a imagem de conceito de área que traz consigo antes do conjunto de atividades. Relembramos que nesta primeira atividade o participante escreveu na folha de respostas, “A área de uma figura plana é calculada de acordo com a quantidade de lados que ela possui. A área também pode ser considerada a parte interna da figura. Existem diferentes fórmulas para calcular a medida da área das diferentes figuras”.

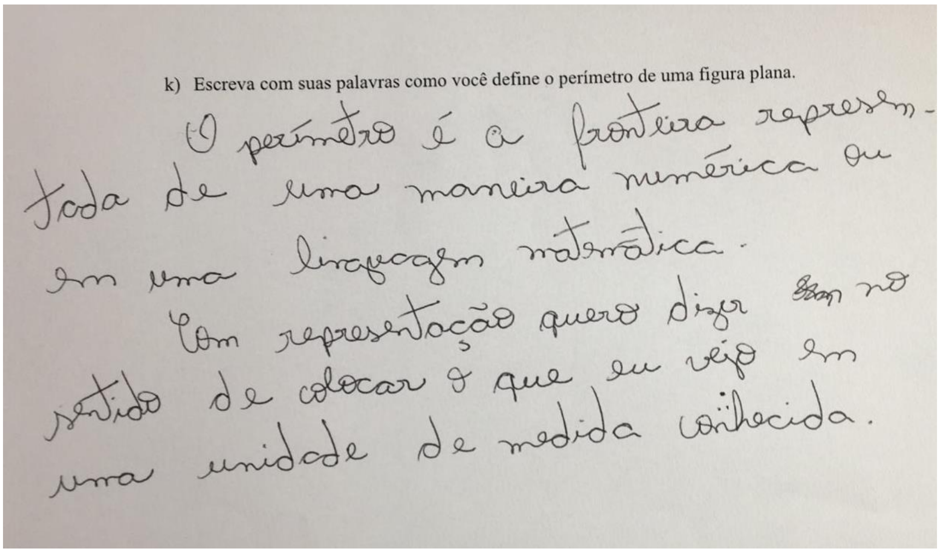
É possível perceber que há uma mudança significativa no entendimento do conceito de área após o conjunto de Atividades 1 e 2. De acordo com a definição de conceito “atual”, apresentada por P1, podemos destacar que,

- o conceito de área deixou de ser exclusivo a figuras planas que possuem lado;
- na atividade 1 o participante define área utilizando para isso um conjunto de procedimentos, associando uma coleção de figuras planas a suas respectivas fórmulas para cálculo de área. Na atividade 2 o participante estrutura uma definição.
- associação da área com a região interna
- associação da área com uma unidade de medida.

Podemos destacar ainda que na imagem de conceitos de área do participante, fica a ideia de que área é obtida por meio de uma unidade de medida padrão. Cremos assim que mais atividades devessem ser propostas utilizando unidades de medida não convencionais e unidades de medida convencionais, propondo reflexões sobre a importância da utilização de uma e de outra.

**k) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.**

Figura 135 - Resposta ao item (g) – Atividade 2


k) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.

O perímetro é a fronteira represen-tada de uma maneira numérica ou em uma linguagem matemática.

Com representação quero dizer no sentido de colocar o que eu vejo em uma unidade de medida conhecida.

Fonte: Autor.

Como resposta, P1 escreve,

> O perímetro é a fronteira representada de uma maneira numérica ou em uma linguagem matemática.” Em seguida ele verbaliza, “Quando eu vejo um quadrado, eu já vejo a fronteira dele, ou o contorno dele. Agora quando eu quero o perímetro, eu quero saber em número quanto que é a fronteira, entendeu? Quanto que mede em centímetro... eu coloco uma medida, uma unidade de medida, para que eu possa comparar mesmo, medir é comparar. (P1).

**Considerações:** Os elementos que aparecem na definição de conceito do participante, referentes ao perímetro de uma figura plana, estão relacionados a concepção numérica (o perímetro é um número que representa a medida da fronteira), concepção geométrica (o perímetro tem relação com a fronteira) e a concepção de grandeza não é contemplada.

Defendemos neste texto, que na definição de conceito de perímetro, as concepções numérica, geométrica e de grandeza sejam contempladas. O que sugere um bom entendimento do conceito de perímetro.

Na Atividade 1, na atividade (b), o participante responde a mesma pergunta e assim apresenta a definição de conceito de perímetro que traz consigo, nesta ocasião, o participante registrou na folha de respostas a seguinte definição, “O perímetro pode ser definido como a soma de todos os lados”.

Ao fazermos um comparativo entre as respostas, é nítida a mudança no entendimento do conceito de perímetro, destacamos,

- o conceito de perímetro deixou de ser exclusivamente relacionado a figuras planas que possuem lado;
- associação do perímetro com o contorno;
- associação do perímetro com uma unidade de medida.

Destacamos ainda que na imagem de conceito de P1, fica a ideia de que perímetro é obtido por meio de uma unidade de medida padrão. Assim como apresentado no caso do conceito de área. É importante que mais atividades de perímetro, utilizando unidade de medida não convencionais sejam trabalhadas pelo participante.

**Considerações finais da atividade 2**

Com o fim da atividade, o entrevistador faz algumas perguntas adicionais, como, “Comparando as figuras 7 e 8, é possível decidir qual delas tem maior perímetro sem utilizar unidade de medida? Qual o nível de dificuldade?”. P1 responde,

> Não seria difícil porque eu consigo ver que esse perímetro (figura 7) é maior que este, (figura 8) porque por exemplo, no lugar que eu tenho um lado de quadrado, na figura 7 tem 3, por causa do buraco. Não seria difícil. É, esse seria mais um exemplo né? De figura que aumenta o perímetro e diminuí a área. (P1).

Entrevistador pergunta, “No primeiro dia de atividade, você definiu área e perímetro de uma maneira diferente da definição que apresentou hoje, a que você atribui essa mudança?”. P1 responde,

> Para mim, se o senhor perguntasse na atividade 1 o que é área ou perímetro, eu não conseguiria falar sem dar um exemplo, eu teria que pensar num exemplo palpável, não sei se a gente pode dizer assim, para que eu pudesse representar, então eu meio que não explicaria nada, só representaria o que é, então eu não estaria explicando e sim representando, dando exemplos. E agora eu consigo definir, mais ou menos eu acredito, o que seja, independente da figura. Dependendo da figura o perímetro vai ser isso e a área vai ser isso. Com certeza eu fiquei bem mais livre do que antes, porque antes eu nem sabia eu acho explicar o que é, eu só sabia o que era, não sabia explicar ou colocar no papel em palavras, aí eu acho que aprimorou a ideia de perímetro e área na minha cabeça, agora eu consigo meio que mais ou menos colocar em palavras. Acho que dificilmente a gente vai encontrar figuras perfeitas na natureza, então a gente faz meio que uma representação ideal do que seria, uma certa figura, uma certa coisa da natureza, inclusive eu acho que a gente se inspirou na natureza para fazer essas figuras, só que a gente foi adaptando elas, para ficar mais

fácil de calcular ou para representar essas formas, formas exatas. Porque eu acho que na natureza nada é tão exato assim, do jeito que a gente imagina... na matemática sim, porque são números, número é exato, na natureza é muito difícil encontrar um ângulo certinho com noventa graus, uma coisa perfeitamente redonda ou perfeitamente quadrada, a não ser que essa coisa tenha sido feita por seres humanos, aí sim pode ser que ela chegue perto do que a gente considera ideal. Mas eu acho que mesmo assim é meio que impossível chegar no que a gente idealiza. Eu tinha medo, mas agora eu estou gostando dessa parte da matemática onde a gente pode escrever o que a gente acha, e não só colocar número. (P1). (Grifo nosso).

O entrevistado pede para que P1 faça as considerações finais sobre os dois dias de atividades, P1 diz,

> Eu já venho falando o que eu achei desse processo, eu realmente consegui ter uma outra visão da Matemática, de áreas, da Geometria principalmente, que é o que a gente trabalhou. Então, por exemplo, Geometria normalmente é uma parte pequena do material e a gente trabalhava com outras coisas mais... coisas mais numéricas, não sei se posso usar esse termo, mas com bastante número na Matemática e a Geometria, uma parte é observação, uma coisa mais abstrata, mas eu acho que isso também faz parte da Matemática, não é como se a Geometria fosse outra ciência, também faz parte da Matemática, então eu acho que a gente deveria abordar esse tipo de coisa, que graças a essa oportunidade eu tive a oportunidade de lidar um pouco melhor com a Matemática abstrata, antes disso eu nem tinha noção, quando aparecia eu ficava com medo, eu queria representar por números, que é o que eu sabia trabalhar, meio que eu já tinha as ferramentas na minha mão mas eu não sabia usar, porque nunca precisei na verdade, usar a matemática abstrata, os números já bastavam para gente resolver os problemas do material. Eu gostei bastante porque estimula, eu acho, a pensar, não é só decorar, é o que você acha, é o que você vê. (P1).

**Considerações:** Diante das ideias apresentadas por P1, na atividade 2, este conseguiu refletir e interagir com atividades diferentes do que ele tem acostumado a trabalhar em sala de aula. Há uma evolução clara no entendimento dos conceitos de região interna, fronteira, área e perímetro, mas não suficiente. As atividades proporcionaram ao participante uma nova visão da Matemática, denominado por ele como “matemática onde a gente pode escrever o que a gente acha, e não só colocar número”, isto é, a interação e discussão durante as atividades é vista como um lado da Matemática não explorado. Algumas das falas apresentadas durante as atividades nos remete a algumas ideias do professor Ubiratan D’Ambrosio, denominadas por ele e conhecidas como engaiolamento. O Professor em uma aula inaugural, no Instituto Federal de Pouso Alegre, profere,

> A matemática não pode ser uma ciência engaiolada, fechada, quadrada e que não dá oportunidade para o aluno ser criativo. Queremos pessoas criativas. Precisamos de quem pense o novo e o ensino, a educação e, em particular a educação matemática, é capaz de ajudar no desenvolvimento dessa criatividade. (Fonte: http://memoria.poa.ifsuldeminas.edu.br/index.php?option=com_content&view=article&id=1544:aula-magna&catid=34:geral&Itemid=63 acessado em 29/12/2020).

Essas ideias do Professor Ubiratan são enfatizadas por retratarem de forma muito presente o que foi percebido, em alguns momentos narrado pelo próprio participante, durante a aplicação das atividades 1 e 2. Em resumo, um participante que diz gostar de matemática, compartilhou suas ideias durante os dois dias de atividade, se esforçou para alcançar os objetivos das atividades propostas, apresenta um grande potencial, mas que está “engaiolado” e em alguns momentos sente dificuldade para “abandonar a gaiola” pois se sente seguro nela. Apresentou durante os dois dias de atividades, pouca criatividade na resolução das tarefas, dificuldade em se expressar matematicamente e limitou-se a utilizar uma coleção restrita de figuras geométricas. Ao final do conjunto de atividades, reconhece esse “engaiolamento” e aos poucos experimenta alguns voos fora da gaiola.

### 8.3.3. Participante P2

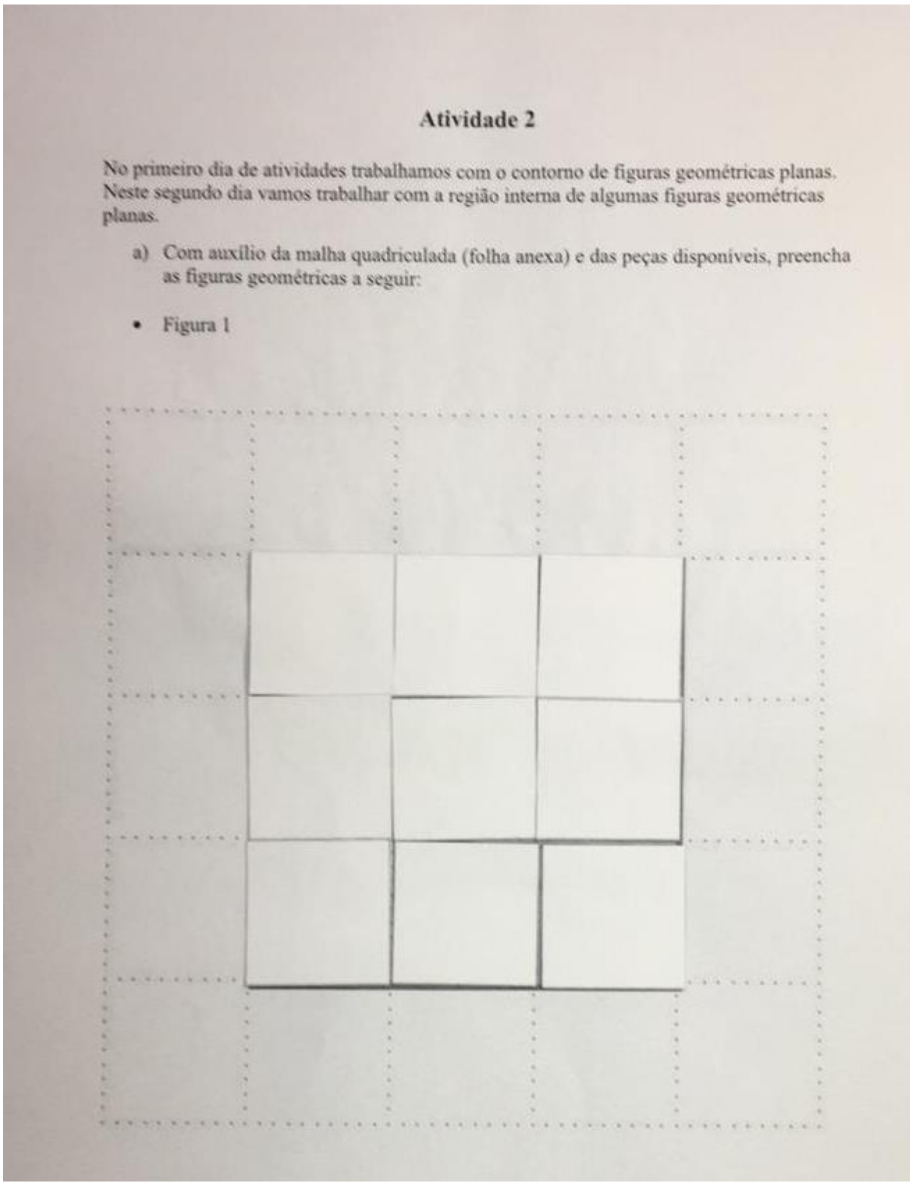
Tanto na Atividade 1 como na Atividade 2, a denominação de P2 foi dada para o mesmo participante, isto é, o participante denominado por P2 na Atividade 1 é o mesmo participante que denominamos nesta atividade por P2.

Essa atividade teve a duração de 5 horas e 34 minutos.

**a) Com auxílio da malha quadriculada (folha anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:**

O participante lê o enunciado da atividade e pergunta "É só para colar?". O entrevistador lê o enunciado da atividade e então o participante inicia as colagens.

Figura 136 - Resposta ao item (a), figura 1 – Atividade 2

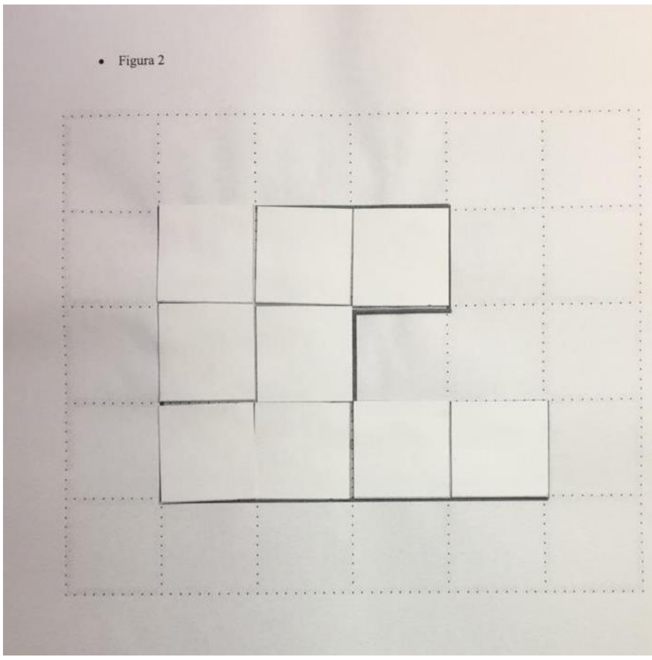



Fonte: Autor.

**a.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?**

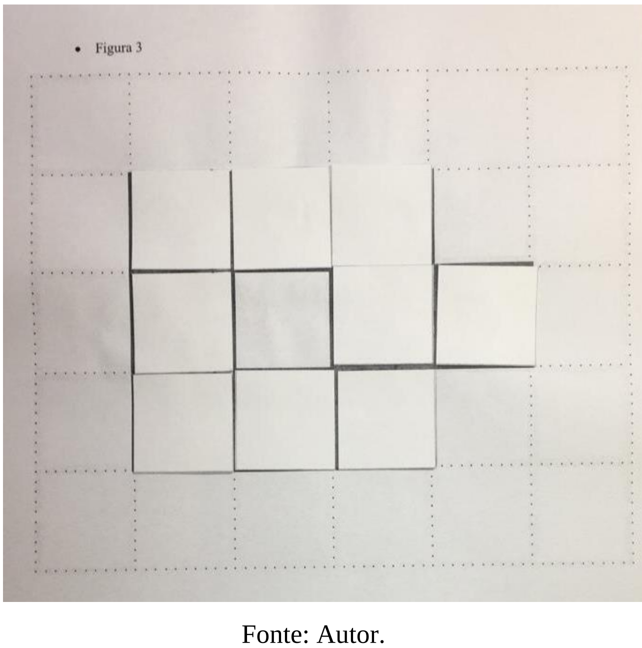
Após alguns minutos pensando, P2 diz, "Professor, não consegui pensar em muita coisa, apenas em coisas obvias, como, todas figuras possuem linhas paralelas". (grifo nosso). Na folha de respostas ele basicamente escreve a mesma ideia.

Figura 137 - Resposta ao item (a), figura 2 – Atividade 2



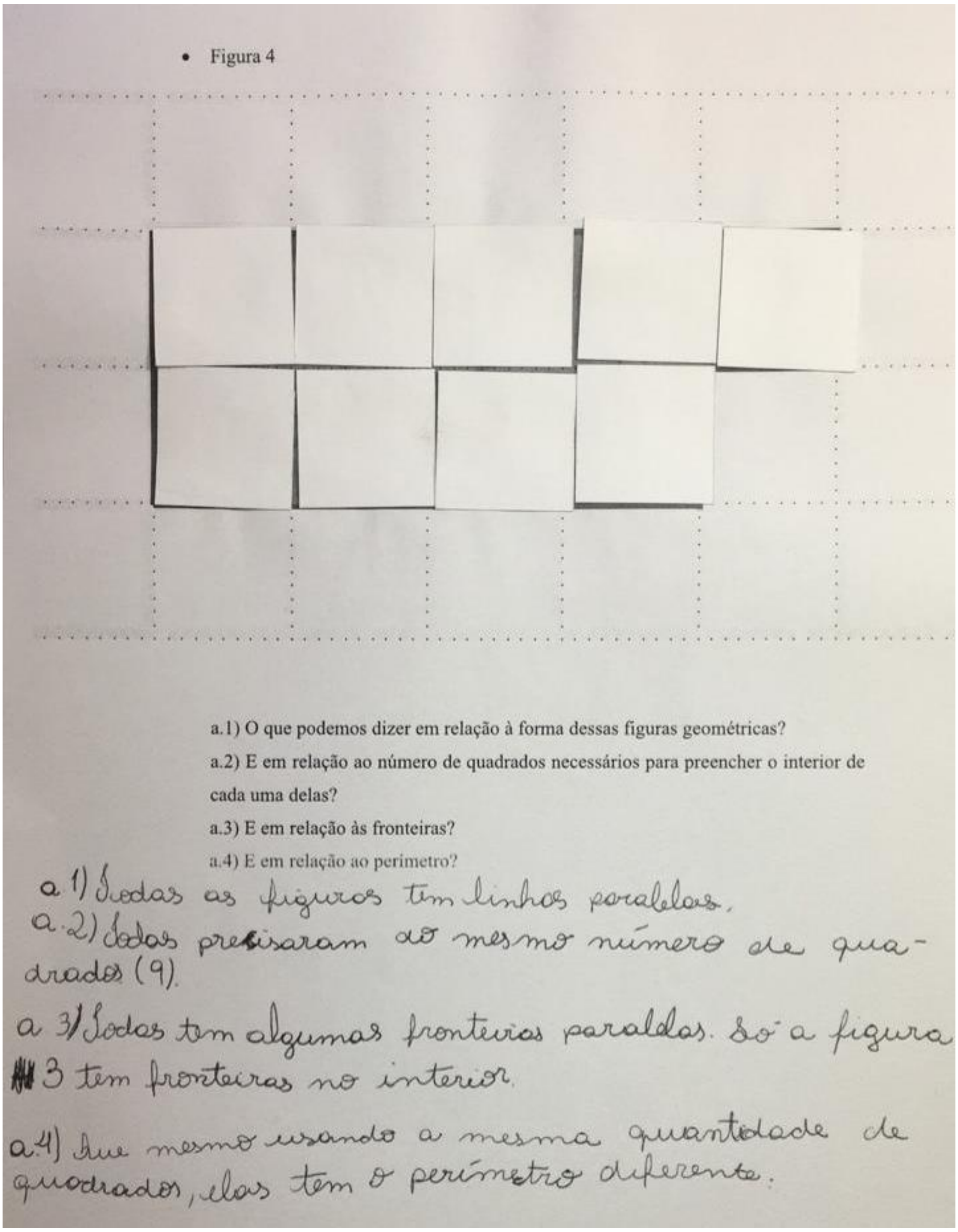

Fonte: Autor.

Figura 138 - Resposta ao item (a), figura 3 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 139 - Resposta ao item (a), figura 4 – Atividade 2




Fonte: Autor.

**a.2) E em relação ao número de quadrados necessários para preencher o interior de cada uma delas?**

Neste item, P2 retorna as folhas e conta a quantidade de quadradinhos que utilizou e conclui que todas as figuras possuem a mesma quantidade, no caso nove.

**a.3) E em relação às fronteiras?**

Após ler o enunciado, o participante escreve na folha de respostas, “Todas tem algumas fronteiras paralelas. Só a figura 3 tem fronteiras no interior”.

**a.4) E em relação ao perímetro?**

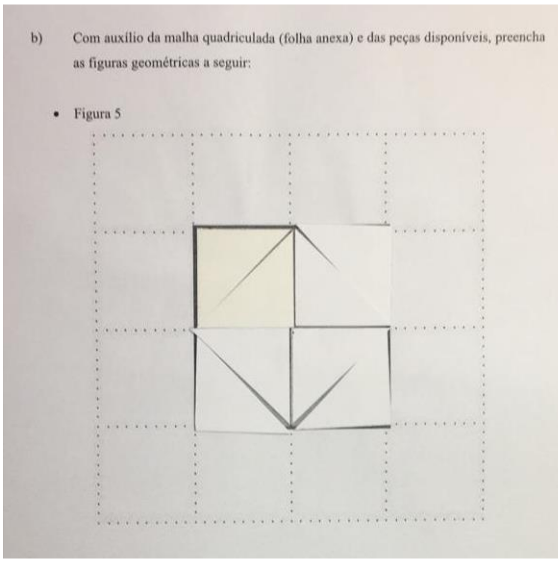
Neste item da atividade, o participante lê o enunciado, retorna às figuras e com os dedos, conta vai contando lado por lado dos quadradinhos, pensa por alguns minutos e verbaliza, “As figuras possuem a mesma quantidade de quadradinhos, mas os perímetros são diferentes”, na folha de respostas ele responde praticamente a mesma coisa.

**Comentário:** P1 calcula medida da área de cada figura contando o número de unidades de medida, tocando em cada um dos quadradinhos colados. Nota que as figuras possuem mesma medida de área, mas fronteiras diferentes. Já em relação a comparação entre as fronteiras, o participante não as faz, destaca que as figuras possuem linhas (segmentos de reta) paralelos, repetindo o que já havia dito antes. Para P1, até esse momento, fronteira e o perímetro parecem não estar relacionados. Embora já tivesse ocorrido uma discussão sobre os termos “fronteira interna” e “fronteira externa”, P1 ainda se utiliza dessas nomenclaturas.

b) **Com auxílio da malha quadriculada (folha anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:**

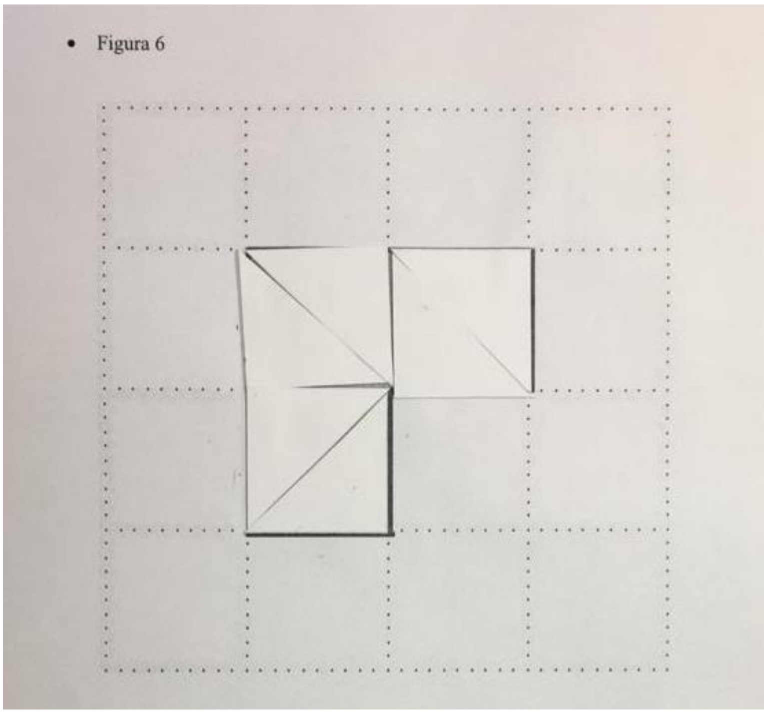
Ao ler o enunciado, P2 cola os triângulos no interior das figuras 5, 6, 7 e 8, ver FIGURA 140, FIGURA 141, FIGURA 142 e FIGURA 143.

Figura 140 - Resposta ao item (b), figura 5 – Atividade 2



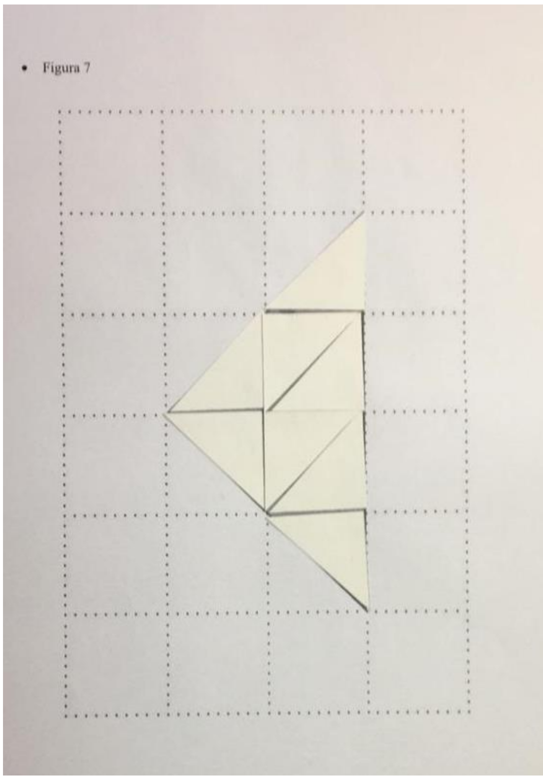

Fonte: Autor.

Figura 141 - Resposta ao item (b), figura 6 – Atividade 2



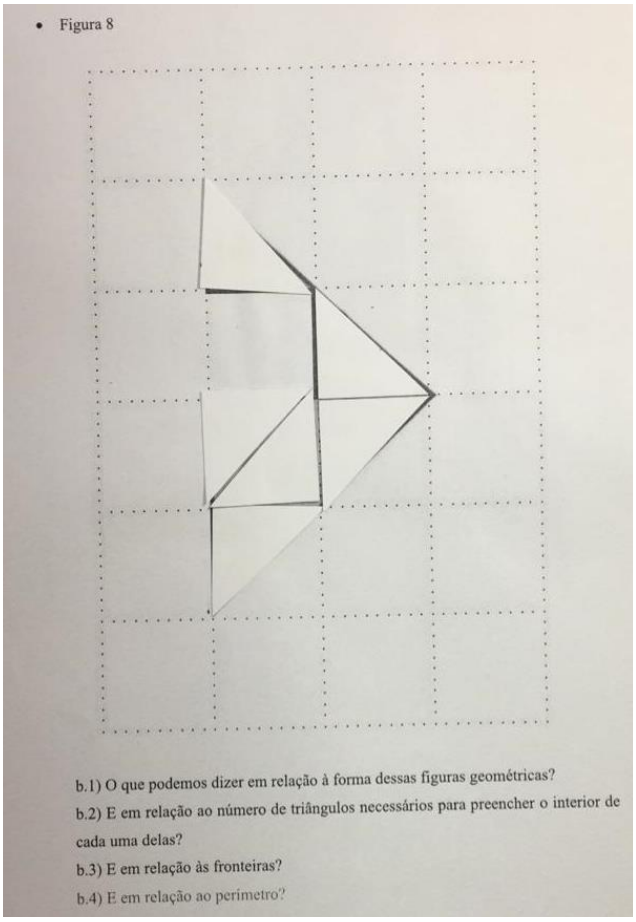

Fonte: Autor.

Figura 142 - Resposta ao item (b), figura 7 – Atividade 2



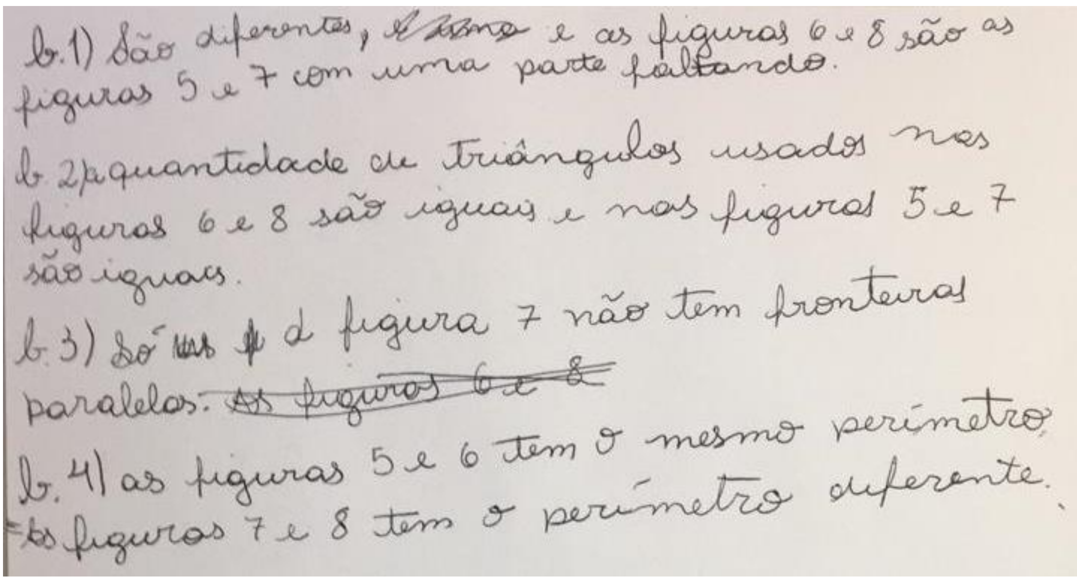

Fonte: Autor.

Figura 143 - Resposta ao item (b), figura 8 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 144 - Resposta ao item (b), respostas de P2 – Atividade 2




Fonte: Autor.

**b.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?**

Após colocar os triângulos, P2 lê o enunciado e analisa as figuras 5, 6, 7 e 8. Ele diz, “As figuras são diferentes, as figuras 6 e 8 são concavas. As figuras 5 e 7 parecem que estão faltando uma parte”. P1 pensa mais um pouco e na folha de respostas escreve, ver FIGURA 134, “São diferentes e as figuras 6 e 8 são as figuras 5 e 7 com uma parte faltando”. Isto é, além das figuras serem diferentes, para P2, os pares de figuras 5 e 6, 7 e 8 são iguais, porém, nas figuras 7 e 8 faltam uma “parte”.

**b.2) E em relação ao número de triângulos necessários para preencher o interior de cada uma delas?**

Neste item, o participante com auxílio da caneta, conta cada um dos triângulos e conclui que as figuras 6 e 8 possuem a mesma quantidade de triângulos, o mesmo ocorre com as figuras 5 e 7, ver FIGURA 144.

**b.3) E em relação às fronteiras?**

Em relação as fronteiras, após alguns minutos pensando, o participante chega à conclusão de que apenas a figura 7 não possui fronteiras paralelas. Na folha de respostas escreve, ver FIGURA 144, “Só a figura 7 não tem fronteiras paralelas”. O participante continua escrevendo sobre as figuras 6 e 8, porém desiste. Quando perguntado sobre o que havia notado nestas figuras, o participante não revela.

**b.4) E em relação ao perímetro?**

O participante ao ler esse item, retorna às folhas com cada uma das figuras e com auxílio da caneta, começa a contar o lado das figuras coladas. Ele conclui que as figuras 5 e 6 possuem o mesmo perímetro e as figuras 7 e 8 possuem perímetros diferentes, ver FIGURA 144.

Na fase de discussão, o entrevistador ressalta que as figuras 5 e 6 possuem o mesmo perímetro embora não sejam a mesma figura.

Ainda na fase de discussão, o entrevistador pergunta para P2, dentre as figuras 7 e 8, qual tem o maior perímetro, P2 verbaliza, “As figuras não possuem medida então eu não sei se está certo o que estou pensando, eu acho que a figura 8 tem maior perímetro”. Ao ser perguntado sobre uma justificativa para essa resposta, P2 responde, “Como as figuras não possuem medida, eu chutei um número. Como no triângulo, um lado é maior, esse lado pensei em 1 como medida e os outros lados em pensei em um número menor, quando eu fiz as contas, a figura 8 ficou com perímetro maior".

**Considerações:** Quanto à forma das figuras da atividade, caracteriza um pentágono como um "triângulo com uma parte faltando". Embora o participante possa ter sido influenciado em sua resposta pelos triângulos colados no interior das figuras, há de se pensar se esse tipo de ideia causa algum tipo de confusão no entendimento de figuras não poligonais, pois para ele, por exemplo, a figura 8 não é reconhecida com um heptágono e sim como um triângulo com uma parte faltante. P2 aparenta não entender os triângulos como unidades de medida pois inicialmente o participante destaca que há um par de figuras "iguais" a menos de "partes faltantes", porém, ao analisar o interior das figuras, ele necessita fazer uma contagem para saber qual tem mais triângulos colados. Quanto as fronteiras, P2 destaca que há figuras que não possuem linhas paralelas, continuando a ideia da atividade (a). Já ao analisar o perímetro, ele destaca que não há medidas, porém, para contornar essa ausência, atribui valores, utilizando assim uma ideia de medida, revelando que não entende o perímetro como uma grandeza e que fronteira de uma figura e perímetro, para ele, são conceitos que não se relacionam.

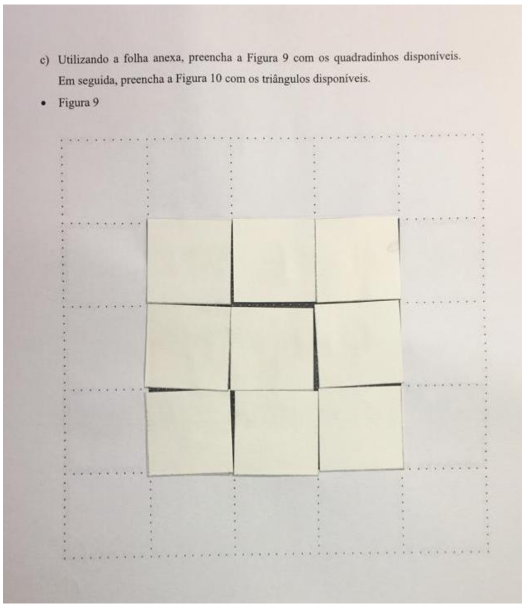
Há de se destacar que a ideia de perímetro para esse participante está ligada a concepção numérica (atividade 1) e ainda que levemos ele a refletir sobre o comprimento das fronteiras, sem uso de medida, isto é, como grandeza, a ideia de unidade de medida se sobressai a ideia de comparação.

c) **Utilizando a folha anexa, preencha a figura 9 com os quadradinhos disponíveis. Em seguida, preencha a figura 10 com os triângulos disponíveis.**

P2 cola os quadradinhos na figura 9 preenchendo assim o interior da figura, o mesmo é realizado usando os triângulos na figura 10.

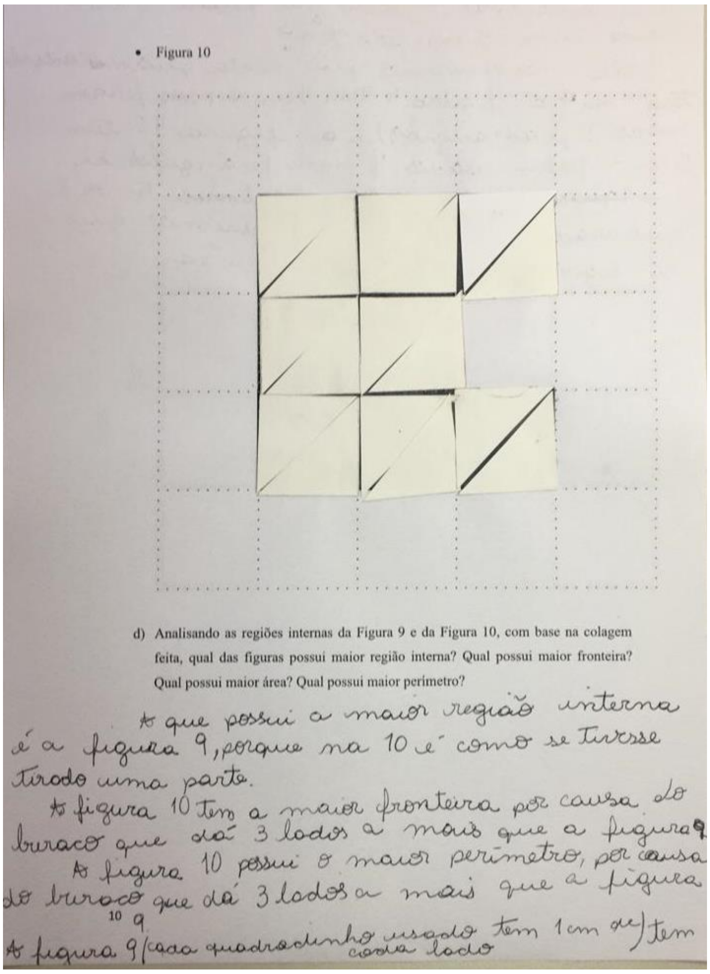
Na colagem dos triângulos na figura 10, podemos destacar a simetria em que o participante posiciona os triângulos.

Figura 145 - Resposta ao item (c), figura 9 – Atividade 2



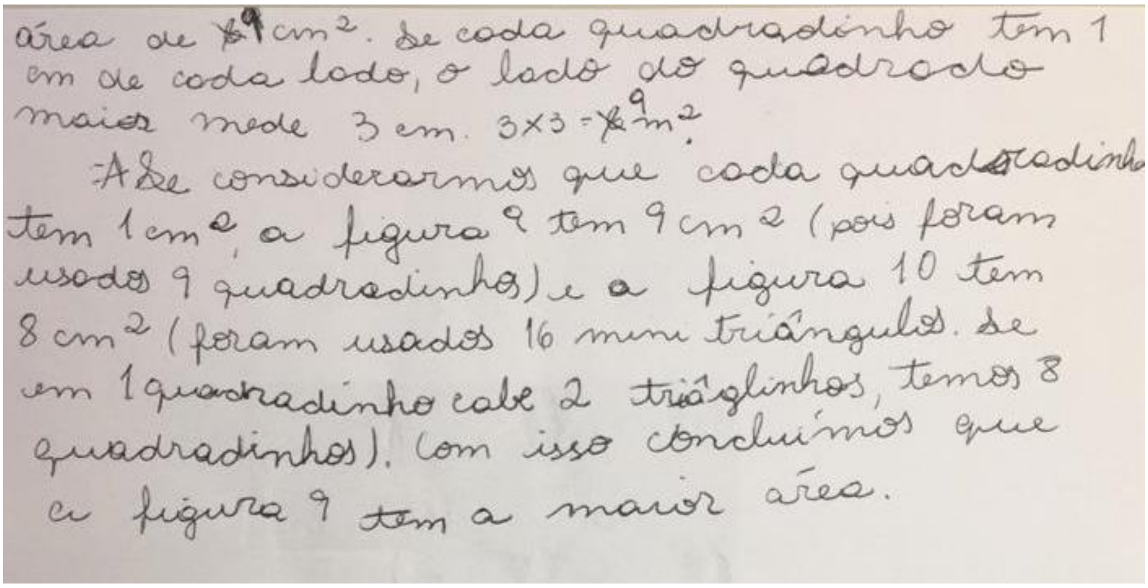

Fonte: Autor.

Figura 146 - Resposta aos itens (c) - figura 10 e (d) – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 147 - Resposta ao item (d) – Atividade 2


área de ~~8~~ 9 cm². Se cada quadradinho tem 1
cm de cada lado, o lado do quadrado
maior mede 3 cm. 3×3 = ~~8~~ 9 m².
~~A~~ Se considerarmos que cada quadradinho
tem 1 cm², a figura 9 tem 9 cm² (pois foram
usados 9 quadradinhos) e a figura 10 tem
8 cm² (foram usados 16 mini triângulos. Se
em 1 quadradinho cabe 2 triâglinhos, temos 8
quadradinhos). Com isso concluímos que
a figura 9 tem a maior área.

Fonte: Autor.

**d) Analisando as regiões internas da figura 9 e da figura 10, com base na colagem feita, qual das figuras possui maior região interna? Qual possui maior fronteira? Qual possui maior área? Qual possui maior perímetro?**

O participante lê o enunciado, pensa por alguns minutos e pergunta, “Professor eu preciso justificar a minha escolha?”. O entrevistador responde que sim. Após alguns minutos pensando, P2 pergunta, “Professor, fronteira é a mesma coisa que perímetro?”. O entrevistador pergunta sobre o entendimento dele (P2) sobre fronteira e perímetro e tem como resposta, “Para mim fronteira é a mesma coisa que perímetro”, em seguida ele para e complementa, “Ah! Eu acho que fronteira é só um lado né? Não é a soma dos lados né?”. O entrevistador então fala sobre a diferença entre fronteira e perímetro (grandeza e medida). Após a explicação o participante diz, “Fronteira, por exemplo, está perguntando qual tem a maior fronteira, mas como eu faço isso? Se for do jeito que eu estou pensando é a mesma coisa que perímetro, somar as laterais, não sei se é isso”. O entrevistador sugere que o participante compare o comprimento de alguns objetos sem a necessidade de unidade de medida, por exemplo, a altura entre as pessoas que moram com P2. O participante apresenta dificuldade para diferenciar fronteira e perímetro, especificamente, entender a ideia de grandeza. Após a discussão, o participante responde na folha de resposta, “A que possui a maior região interna é a figura 9, porque na 10 é como se tivesse tirado uma parte. A figura 10 tem a maior fronteira por causa do buraco que dá 3 lados a mais que a figura 9. A figura 10 possui o maior perímetro por causa do buraco que dá 3 lados a mais que a figura 9”.

Em seguida o participante verbaliza, “Professor, sobre a pergunta de qual possui a maior área. Eu sei qual é a área do quadrado, lado vezes lado, agora, tipo a figura 10, ela tem esse buraco então eu não sei como que faz, não sei calcular área de figuras assim”. O entrevistador então pergunta como ela calcularia a área da figura 9, ver FIGURA 145. P2 inicialmente diz que não há uma medida então ele pensa e diz que pode atribuir uma medida arbitrária e escreve na folha, ver FIGURA 146, “A figura 9, cada quadradinho usado tem 1cm de cada lado, tem área de 9 cm2. Se cada quadradinho tem 1 cm de cada lado, o lado do quadrado maior mede 3cm, 3 x 3 = 9m$^2$”. Na descrição de P2, quadrado maior é como ele denominou a figura 9.

O entrevistador pergunta ao participante a quantidade de quadradinhos colados na figura 9, o participante responde surpreso 9. O entrevistador comenta sobre a relação entre o número obtido por ele e o número de quadradinhos colados. Em seguida o participante diz que utilizando essas ideias daria para medir a área da figura 10 e verbaliza, “Dá para calcular a área da figura 10 contando os quadradinhos, no caso a gente utiliza os triângulos, mas dois triângulos juntos formam um quadrado, então é só a gente contar os quadrados para calcular a área da figura 10”. O participante analisa a figura 10 e diz, a área é 8. Na folha de respostas o participante escreve, ver FIGURA 147,

> Se considerarmos que cada quadradinho tem 1cm$^2$, a figura 9 tem 9cm$^2$ (pois foram usados 9 quadradinhos) e a figura 10 tem 8 cm$^2$ (foram usados 16 mini triângulos, se em 1 quadradinho cabe 2 triangulinhos, temos 8 quadradinhos). Com isso concluímos que a figura 9 tem a maior área. (P2).

Antes de passar para a próxima atividade, o entrevistador ressalta os conceitos trabalhados na atividade como fronteira, região interna, perímetro, área e unidades de medida.

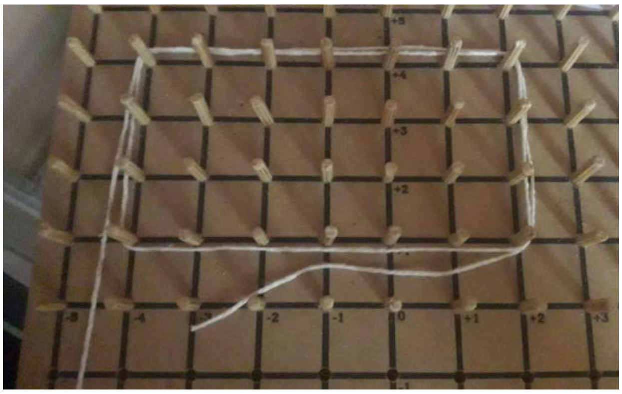
**Considerações:** No início da atividade o participante diz ter dúvidas quanto aos conceitos de fronteira e perímetro, inclusive revelando que para ele, fronteira e perímetro são iguais, isto é, ambos conceitos são representados por um número. Também podemos perceber que o participante em alguns momentos associa fronteira com lado, até a intervenção do entrevistador que discute a diferença entre figuras formadas por linhas poligonais e as que não são formadas. Em relação a área das figuras, P2 mostra não entender o conceito de unidade de medida de área pois não consegue associar a área das figuras 9 e 10 aos quadradinhos e triângulos colados no interior dessas figuras, chegando a calcular a medida da área da figura 9 efetuando o produto da medida dos lados, mostrando assim uma necessidade de trabalhar atividades de área sob o paradigma G0 de Parzysz (2006). Inclusive declara que apenas sabe calcular a área de um quadrado e não de uma figura “faltando um pedaço”, como a figura 10. Ou seja, o participante não interpretar a figura 9 e 10 como figuras que estão decompostas por quadrados e por triângulos, ainda que o participante tenha interagido com essa decomposição por meio de colagens. Para resolver esse problema, ele adota uma medida arbitrária e após a discussão com o entrevistador, consegue calcular medida da área da figura 10.

Nesta atividade, a fase de discussão precisou ser feita inicialmente pois o participante apresentou dificuldades já no início. Com tudo, é possível notar a necessidade que o participante tem em trabalhar mais vezes com as ideias de área e de perímetro nos paradigmas G0, G0-G1de Parzysz (2006), assim como feito nesta atividade, pois as ideias tanto de área como de perímetro estão limitadas ao uso de fórmulas que servem para o caso de figuras poligonais planas.

e) **Com auxílio do Geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no Geoplano os formatos a seguir.**

O participante faz as duas figuras no Geoplano utilizando o barbante. Para representar a figura 10 ele opta em fazer a fronteira com uma tira de barbante, segundo ele, para não desperdiçar barbante, ver FIGURA 148 e FIGURA 149.

Figura 148 - Resposta ao item (e), figura 9 no Geoplano – Atividade 2

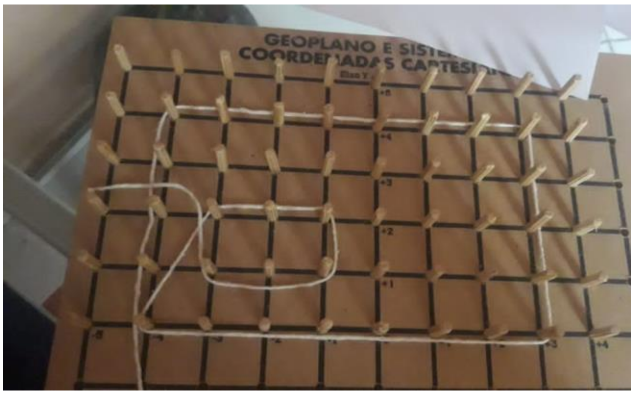


Fonte: Autor.

**e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.**

Ao ler o enunciado em voz alta, P2 escreve na folha de respostas, ver FIGURA 150 “A figura 10 o buraco dá quatro lados a mais que a figura 9”. Sem fazer observações o participante passa para o item seguinte.

Figura 149 - Resposta ao item (e), figura 10 no Geoplano – Atividade 2



Fonte: Autor.

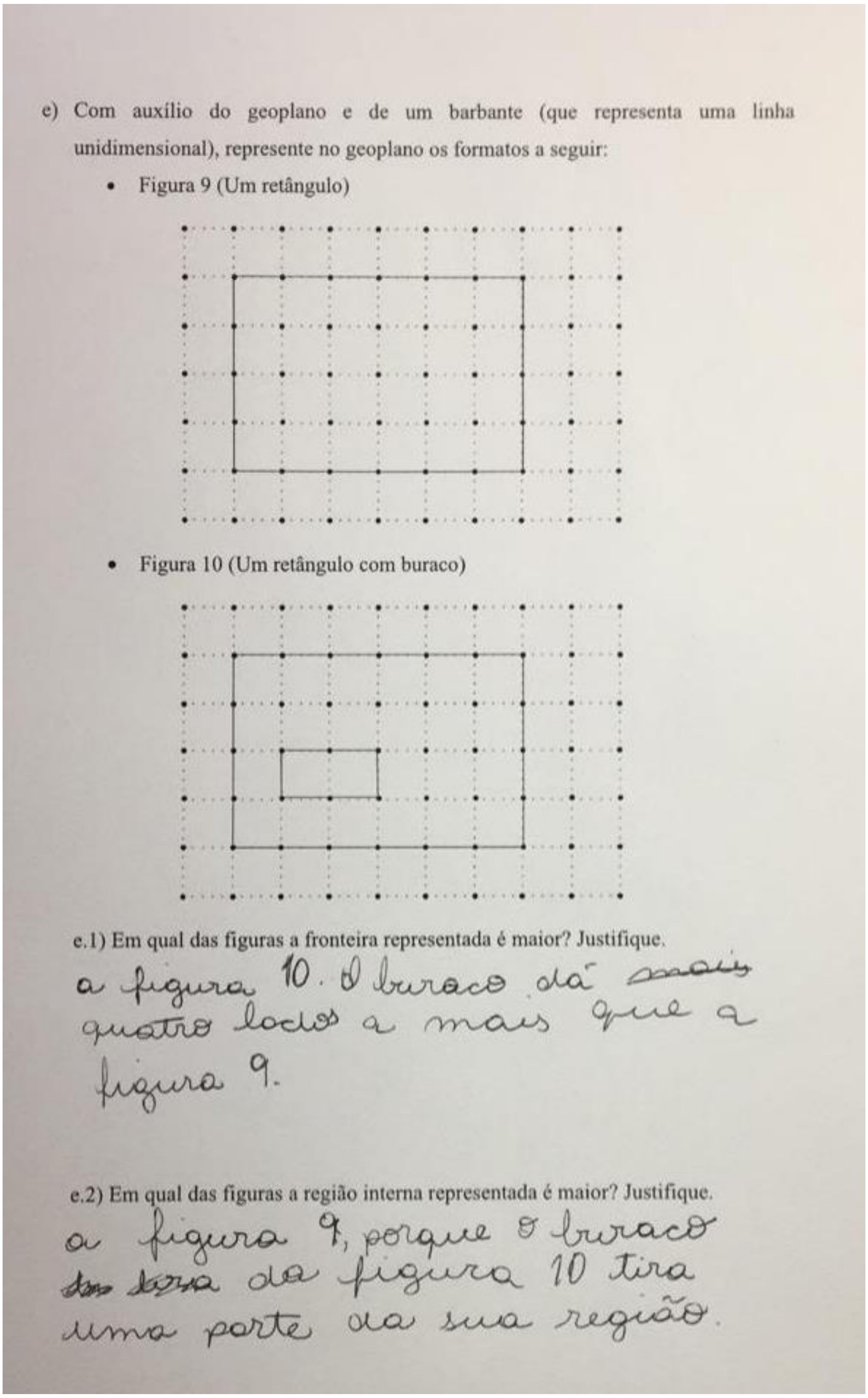
**e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.**

No item (e.2), P2 escreve na folha de respostas, “A figura 9 porque o buraco da figura 10 tira uma parte da sua região”, ver FIGURA 150.

**Considerações:** P2 representa as figuras 9 e 10 no Geoplano, ver FIGURA 148 e FIGURA 149, e consegue comparar a regiões internas das figuras 9 e 10, identificando a figura 9 como a de menor região interna. Como justificativa, ele utiliza o fato de a figura possuir um “buraco” (região interna da curva de menor comprimento da figura). Em relação as fronteiras, P2 as compara e como a fronteira da figura 9 aparentemente, segundo P2, possui o mesmo comprimento que parte da fronteira da figura 10, P2 conclui que a figura 10 possui maior fronteira. Nessa atividade, nota-se que o participante não recorre a medidas, utilizando assim, algumas comparações para auxiliar em suas conclusões.

Essa atividade promove algumas reflexões quanto aos conceitos de área e de perímetro, ambos como grandezas e utilizando para isso, figuras compostas por mais de uma curva fechada. Dessa forma, os casos de figuras planas quando comparadas, possuem mesmo perímetro e áreas diferentes e vice-versa, são trabalhados de forma simples. Promovendo novas experiências e buscando ampliar o conjunto figural do participante. Como consequência, temos a fuga do senso comum, na qual afirma-se que entre duas figuras planas, a de maior perímetro necessariamente é a de maior área e vice-versa.

Figura 150 - Resposta ao item (e), subitens e1. e e.2 – Atividade 2



e) Com auxílio do geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no geoplano os formatos a seguir:

- Figura 9 (Um retângulo)

- Figura 10 (Um retângulo com buraco)

e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

a figura 10. O buraco dá ~~mais~~ quatro lados a mais que a figura 9.

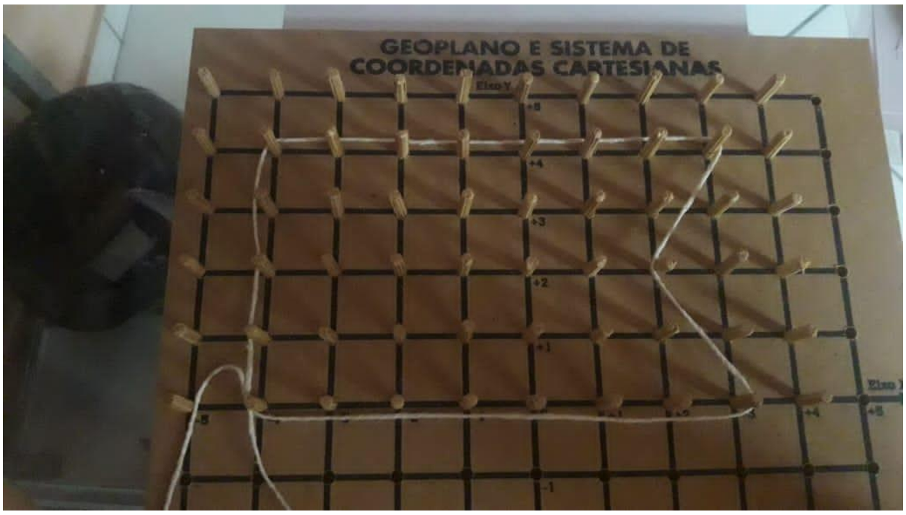
e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

a figura 9, porque o buraco ~~[illegible]~~ da figura 10 tira uma parte da sua região.

Fonte: Autor.

f) **Com auxílio do Geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no Geoplano os formatos a seguir:**

Figura 151 - Resposta ao item (f), figura 3 no Geoplano – Atividade 2



Fonte: Autor.

Figura 152 - Resposta ao item (f), figura 4 no Geoplano – Atividade 2

Fonte: Autor.

**f.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.**

O participante lê o enunciado em seguida escreve na folha de respostas, “As duas figuras têm a fronteira de mesmo tamanho, uma tem um triângulo voltado para dentro e outra para fora”. Ao ler em voz alta a resposta, o entrevistador pede uma justificativa para a resposta dada. O participante menciona que ao manipular o barbante para formar as figuras no Geoplano, foi possível notar que a quantidade de barbante havia sido a mesma. Para isso ele utilizou 2 pinos como referência. Ao formar a figura 3, ver FIGURA 153, o participante notou que ao tirar o barbante que passava por um vértice (chamado de A, ver FIGURA 153), para formar a figura 4, ele transportou o barbante para o outro vértice (ponto B, ver FIGURA 153), assim concluí que as fronteiras gastam a mesma quantidade de barbante. Na folha de respostas ele complementa sua resposta, "Quando eu fiz a figura 4, eu só mudei o vértice A para onde o vértice B está". Importante destacar que os vértices foram nomeados conforme sugestão do entrevistador para facilitar a comunicação. P2 apresenta ideias sob o paradigma G0, para efetuar comparações entre áreas e perímetros como grandezas.

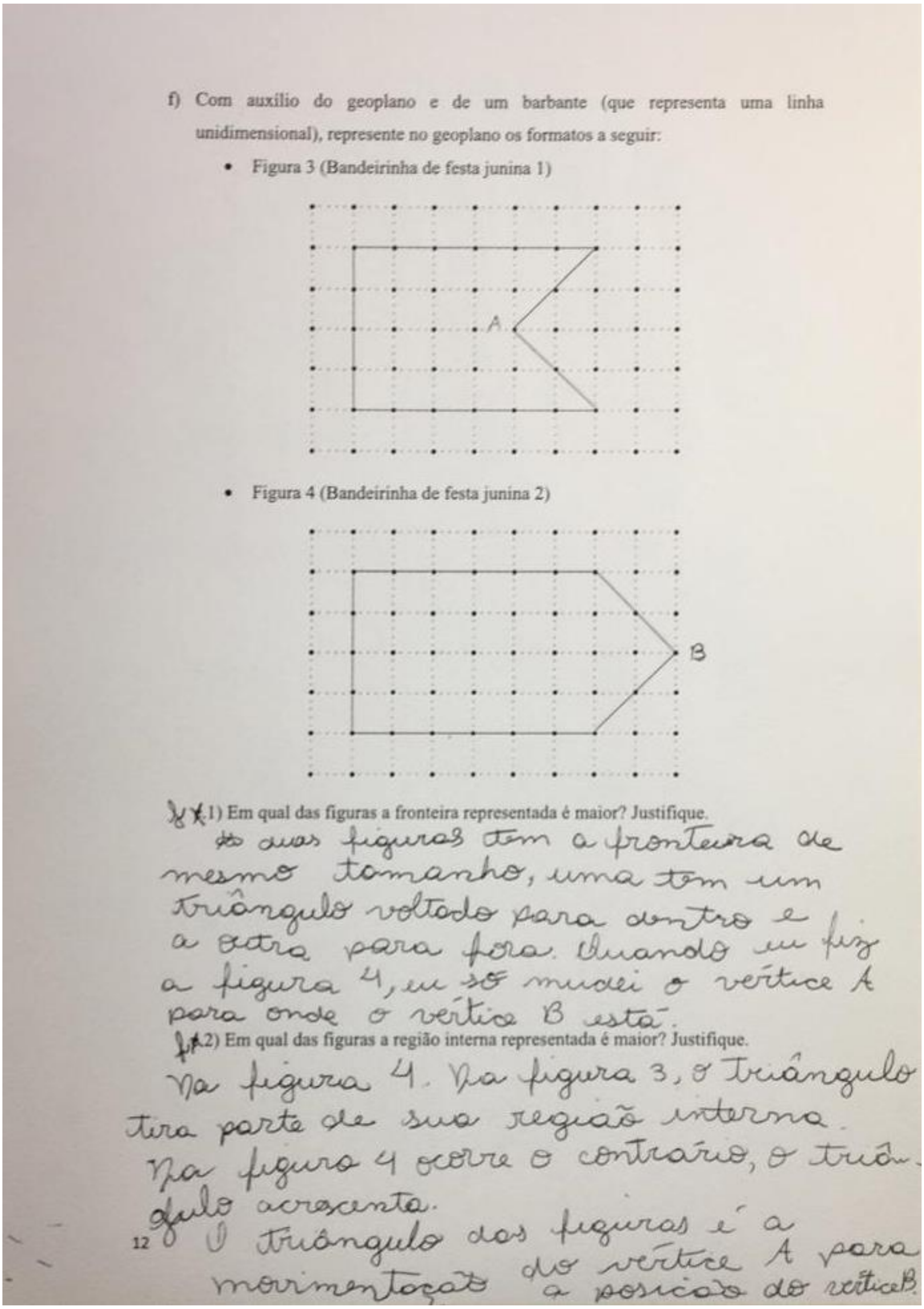
**f.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.**

Neste item P2 escreve na folha de respostas, ver FIGURA 153, "Na figura 4. Na figura 3, o triângulo tira parte de sua região interna. Na figura 4 ocorre o contrário, o triângulo acrescenta. O triângulo das figuras é a movimentação do vértice A para a posição do vértice B".

Ao final o entrevistador destaca que entre as figuras 9 e 10, a figura 9 tem maior região interna, por outro lado, em relação a fronteira, a figura 10 possui a fronteira com maior comprimento. Já entre as figuras 3 e 4, elas possuem fronteiras de mesmo comprimento, mas regiões internas diferentes. Mostrando assim, conseguir trabalhar sob o paradigma G0.

**Considerações:** P2 por meio de comparações, reconhece as figuras com fronteiras iguais, utilizando para isso, uma percepção visual (paradigma G0). Utiliza termos como "triângulo voltado para dentro" e "triângulo voltado para fora". Quando a comparação entre as áreas, item (f.2), P1 reconhece qual figura possui maior área, justificando para isso, uma ideia de comparação e decomposição das figuras, mostrando assim, saber articular essas ideias sob os paradigmas G0-G1.

Figura 153 - Resposta ao item (f), subitens f1. e f.2 – Atividade 2


f) Com auxílio do geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no geoplano os formatos a seguir:

- Figura 3 (Bandeirinha de festa junina 1)

A

- Figura 4 (Bandeirinha de festa junina 2)

B

f.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

As duas figuras tem a fronteira de mesmo tamanho, uma tem um triângulo voltado para dentro e a outra para fora. Quando eu fiz a figura 4, eu só mudei o vértice A para onde o vértice B está.

f.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

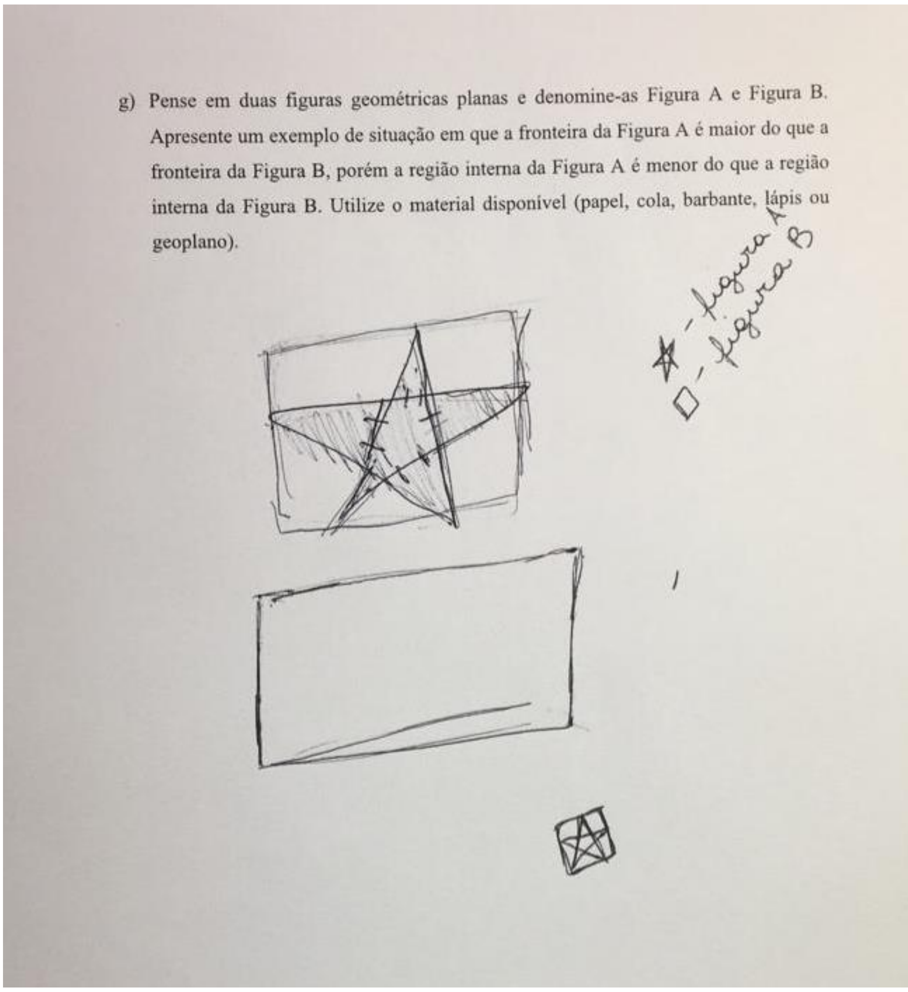
Na figura 4. Na figura 3, o triângulo tira parte de sua região interna. Na figura 4 ocorre o contrário, o triângulo acrescenta.

12

O triângulo das figuras é a movimentação do vértice A para a posição do vértice B.

Fonte: Autor.

Figura 154 - Resposta ao item (g) – Atividade 2




Fonte: Autor.

**g) Pense em duas figuras geométricas planas e denomine-as Figura A e Figura B. Apresente um exemplo de situação em que a fronteira da Figura A é maior do que a fronteira da Figura B, porém a região interna da Figura A é menor do que a região interna da Figura B. Utilize o material disponível (papel, cola, barbante, lápis ou Geoplano).**

P2 lê a atividade, pensa por alguns minutos e diz que pensou em uma estrela e em um quadrado, com a estrela inscrita no quadrado. Ele desenha na folha de respostas, ver FIGURA 154. O entrevistador pede para o participante justificar a resposta apresentada. P2 diz que algumas linhas da estrela não podem ser consideradas, ele marca na folha de respostas as linhas usando traços (pentágono), ver FIGURA 154. Ele pensa por alguns minutos e diz que não saberia justificar pois as figuras desenhadas não estão “perfeitas” e em seguida diz, “Se cada lado da estrela tiver 1cm, nós teríamos 10 cm de perímetro. E se cada lado do quadrado medisse 2 cm teríamos 8 cm de perímetro. Não sei se consegui explicar de forma clara”. Na sequência, o participante avança para a questão seguinte.

**Considerações:** Nesta atividade o participante imagina duas figuras, a figura A representada por uma estrela de 5 pontas e a figura B representada por um quadrado, destacando que o quadrado feito se assemelha a um retângulo. Isto é, o participante aceita a afirmação como verdadeira e elabora um exemplo.

Ao comparar a área das figuras, o participante sobrepõe as figuras mentalmente e em seguida passa para o papel, essa comparação é interessante pois mostra que o participante comparou, sob o paradigma G0-G1, região interna de cada figura e pode concluir facilmente que medida da área da figura A é menor que da figura B.

O participante não consegue justificar que a fronteira da figura A é maior que a fronteira da figura B, ainda que fosse possível utilizar materiais como papel, barbante, lápis ou Geoplano. Ele então associa uma medida a cada lado da estrela e também ao quadrado e dessa forma concluí que o perímetro da estrela é maior que o perímetro do quadrado.

Ao final da atividade o entrevistador menciona que seria possível sobrepor as fronteiras uma tira de barbante e assim poderia decidir qual das fronteiras é a maior.

Pode-se perceber que o participante parte de figuras poligonais e acaba se valendo da ideia de que quantos mais lados tem uma figura, maior será seu contorno, o que não é necessariamente verdade.

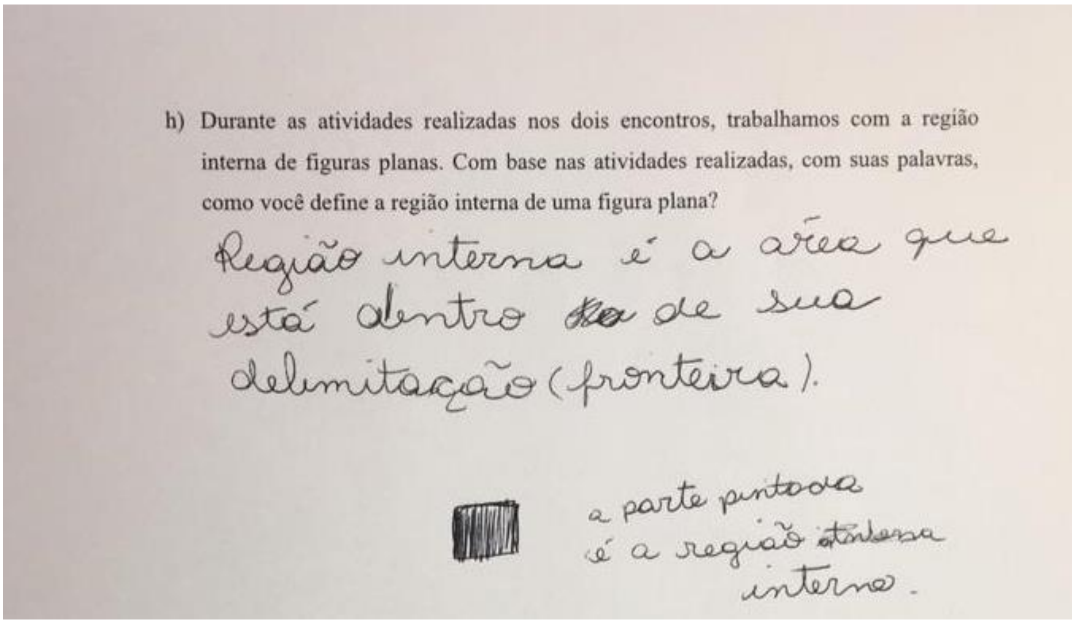
Interessante notar que ao comparar a região interna das figuras a ideia de sobrepô-las foi utilizada por P2, porém ao comparar as fronteiras, ele não se vale da ideia de comparar e parte para uma estratégia numérica, atribuindo medidas. O que nos mostra que a experiência com as atividades trabalhadas até aqui, não foram suficientes para que o conceito de grandeza fosse construído pelo participante. Há a necessidade de se trabalhar esses conceitos sob o paradigma G0-G1 com atividades que estimule o participante a comparar fronteiras (contornos) de figuras planas como grandezas, sem a necessidade de adotar uma medida. Também é importante destacar que o conjunto figural de P2 aparentemente foi ampliado e já não consiste mais em apenas figuras convexas.

**h) Durante as atividades realizadas nos dois encontros, trabalhamos com a região interna de figuras planas. Com base nas atividades realizadas, com suas palavras, como você define a região interna de uma figura plana?**

Ao ler a atividade, o participante escreve na folha de respostas, ver FIGURA 155, “Região interna é a área que está dentro de sua delimitação (fronteira)”. Em seguida ele apresenta, na folha de resposta, o exemplo de um quadrado cujo interior está pintado (região interna), ao lado da figura escreve, “a parte pintada é a região interna”. Na sequência ele passa para a próxima atividade.

**Considerações:** Nessa atividade P2 evoca a imagem de conceito de região interna de uma figura plana. Há de se destacar que em sua resposta, o termo “área” é utilizado, porém como um sinônimo de superfície, que é um significado que foge do conceito formal de área. Um exemplo desse tipo de uso é a expressão popular “Vende-se esta área”.

Figura 155 – Resposta ao item (h) – Atividade 2



h) Durante as atividades realizadas nos dois encontros, trabalhamos com a região interna de figuras planas. Com base nas atividades realizadas, com suas palavras, como você define a região interna de uma figura plana?

Região interna é a área que está dentro de sua delimitação (fronteira).

a parte pintada é a região interna.

Fonte: Autor.

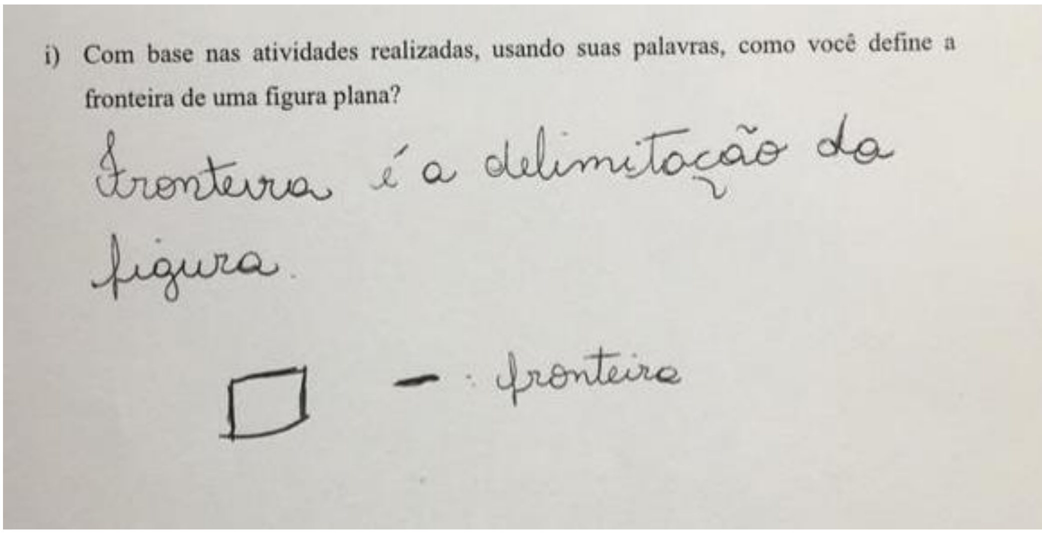
i) **Com base nas atividades realizadas, usando suas palavras, como você define a fronteira de uma figura plana?**

Nesta atividade, o participante lê o enunciado e escreve na folha de resposta, ver FIGURA 156, “Fronteira é a delimitação da figura”. Na sequência ele lê a resposta em voz alta e com a caneta faz o contorno de um quadrado na folha de respostas.

**Considerações:** A imagem de conceito de fronteira de uma figura plana evocada pelo participante, está ligada a delimitação da figura, com uma representação figural da fronteira de um quadrado. A figura do quadrado é recorrente nas respostas do participante.

Destacamos que para o participante, a fronteira faz parte da região interna, pois segundo ele, a fronteira "é a delimitação da figura" quando na verdade a fronteira delimita a região interna de uma figura. Assim, há uma necessidade de se trabalhar a ideia de fronteira sob os paradigmas G0-G1 e a partir daí, intercalar com atividades sob o paradigma G2.

Figura 156 – Resposta ao item (i) – Atividade 2




Fonte: Autor.

**j) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.**

Nesta atividade o participante evoca sua imagem de conceito de área de figura plana, ver FIGURA 157,

> A área do quadrado, por exemplo, é lado vezes lado (LxL). Ou, como aprendi hoje, o tanto de quadradinhos que cabe no quadrado maior. Por exemplo, no desenho coube 4 quadradinhos de 1cm$^2$, ou seja, a área do quadrado maior é 4 cm$^2$. A área é quase a mesma coisa que a região interna, só que a gente não calcula a região interna. (P2).

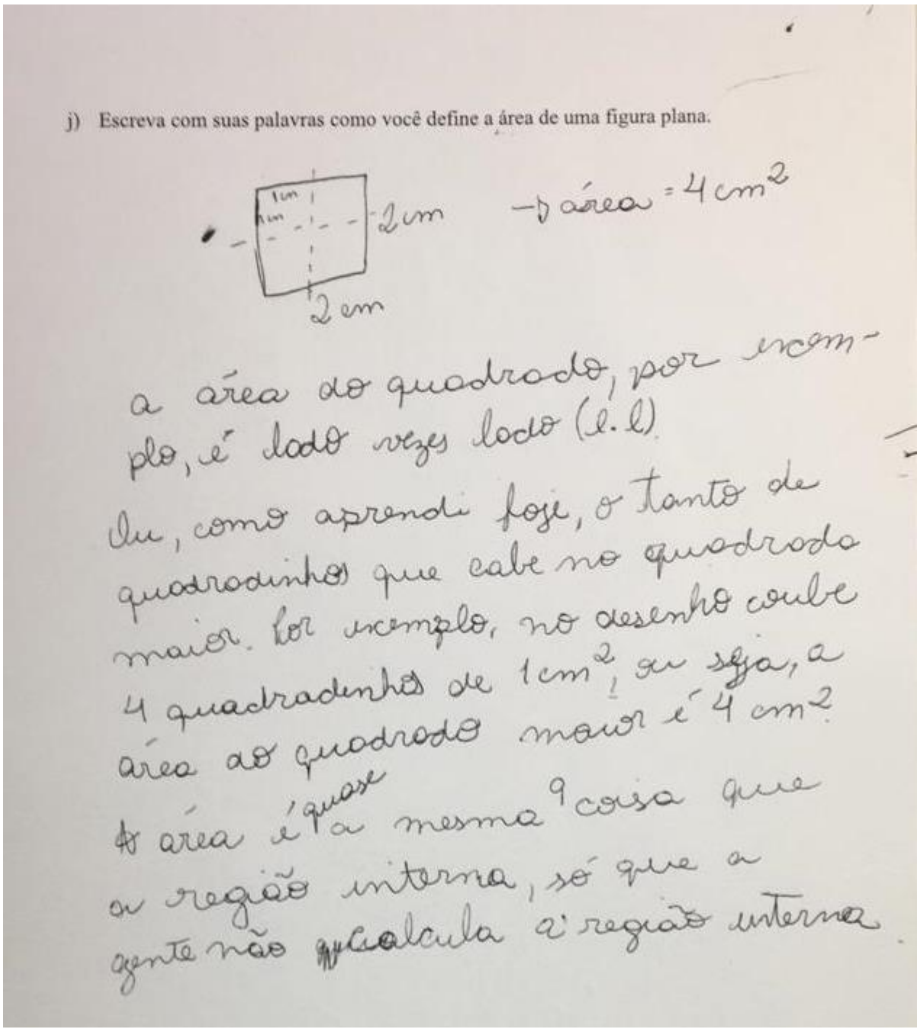
O participante também inclui em sua resposta, uma representação figural, ver FIGURA 157, na qual ele faz a representação de um quadrado cujos lados medem 2cm e utilizando linhas tracejadas, decompõem esse quadrado em 4 quadrados com medida de lado de 1cm.

Na imagem de conceito, o quadrado surge novamente, revelando ser a primeira figura na qual o participante recorre, isto é, para o participante uma figura que generaliza o conceito de área é um quadrado, seguido a fórmula para obter-se a medida da área da região delimitada pelo quadrado. É uma resposta até aqui muito semelhante a resposta apresentada no primeiro dia de atividade em que a diferença está na ideia de compor o quadrado por 4 quadrados cuja medida de lado é 1 cm. O participante escreve a medida da área desse quadrado por como 4cm$^2$, resultado do produto dos lados (2 cm).

Ainda nessa imagem de conceito, o participante inclui a ideia de que a medida da área está relacionada a quantidade de quadrados de 1cm que cabem na figura, mencionando que foi o que aprendeu neste dia de atividade.

Embora a ideia de área apresentada pelo participante não esteja limitada a apenas figuras poligonais e suas respectivas fórmulas, com as atividades desse segundo dia a imagem de conceito do participante inclui novos elementos e carece de mais oportunidades de discussão para que o conceito de área de figura plana fique claro.

Figura 157 - Resposta ao item (j) – Atividade 2



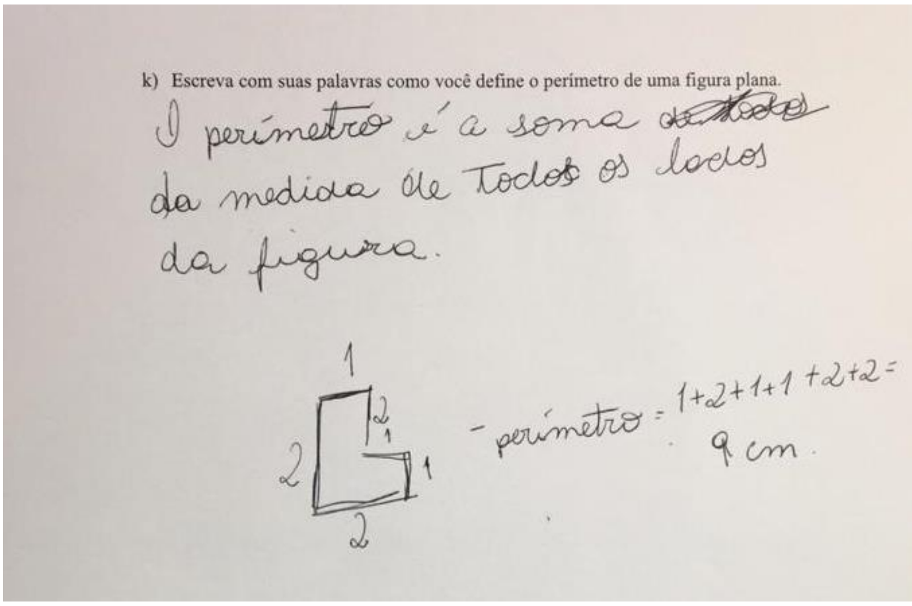

Fonte: Autor.

**k) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.**

Na atividade que fecha este segundo dia de atividades, o participante descreve sua imagem de conceito relacionada ao perímetro de uma figura plana. Na folha de respostas ele escreve, ver FIGURA 158,

"O perímetro é a soma da medida de todos os lados da figura". Após a resposta, o participante faz o desenho de um hexágono e coloca a medida de cada lado. Na sequência o participante lê a resposta e o entrevistador pergunta sobre o caso das figuras que não possuem lados. O participante escreve na folha de respostas, ver FIGURA 159, "Continuação: Se a figura não tiver lado, a gente pode, por exemplo, medir com um barbante e depois medir o barbante... ou medir o tamanho da sua delimitação".

Figura 158 - Resposta ao item (k) – Atividade 2

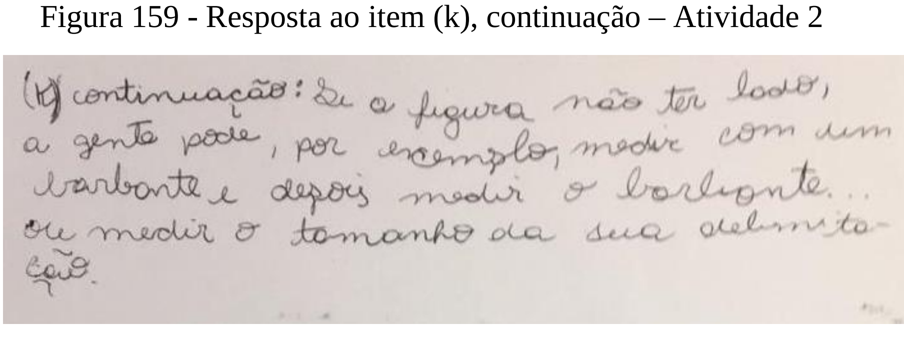

k) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.

O perímetro é a soma ~~de todos~~ da medida de todos os lados da figura.

- perímetro = 1+2+1+1 +2+2 = 9 cm.

Fonte: Autor.

Figura 159 - Resposta ao item (k), continuação – Atividade 2


(k) continuação: Se a figura não ter lado, a gente pode, por exemplo, medir com um barbante e depois medir o barbante... ou medir o tamanho da sua delimitação.

Fonte: Autor.

**Considerações:** A definição de conceito de perímetro evocada por P2 é dividida em duas partes, uma definição para o caso de figuras poligonais fechadas e outro para figuras não poligonais (estimulada pelo entrevistador). Para o caso de polígonos P2 defini perímetro como sendo a "soma da medida de todos os lados da figura". Isto é, apresenta concepções numéricas e concepções geométricas, assim como foi apresentada na Atividade 1. Neste texto, defendemos que na definição de conceito de perímetro, as concepções numéricas, geométricas e de grandezas sejam apresentadas, o que pode nos indicar um bom entendimento do conceito de perímetro.

Voltando a definição de conceito de perímetro apresentada por P2, no caso em que uma figura plana não possua lados, o perímetro será a medida do barbante utilizado para medir a delimitação da figura. Isto é, P2 tem o perímetro como a medida da delimitação da figura, para o caso em que a figura não seja um polígono. Embora ele não saiba como é possível obter essa medida, na definição ele inclui um procedimento de obtenção do perímetro, utilizando para isso o barbante.

Podemos perceber que para P2, no caso do perímetro, há uma distinção entre as figuras que podem ser medidas "facilmente" por serem compostas por segmentos de reta (polígonos) e as figuras que não possuem lados (que é apresentada por meio de estímulo do entrevistador) e essas são tratadas de forma diferente pela dificuldade na obtenção da medida de seu contorno. Para P2 essa dificuldade é superada com auxílio do barbante, que é utilizado para se medir o contorno de uma figura, uma vez obtida essa medida, deve-se apenas medir a quantidade de barbante utilizada e assim tem-se o perímetro da figura. Assim, o perímetro de uma figura passa a ser a medida do contorno dessa figura. E o barbante tem uma importância ímpar na resposta do participante pois ele é a forma concreta de se entender o perímetro como uma grandeza, isto é, o perímetro que poderia ser definido como o comprimento do contorno de uma figura, é definido pelo participante como o comprimento do barbante, sendo o barbante o "representante" do contorno da figura, e essa representação é obtida comparando-se o comprimento do contorno da figura com uma tira de barbante. Essa ideia, que podemos dizer que esteja sob o paradigma G0-G1 e que provavelmente tenha sido influenciada pelo conjunto de atividades trabalhadas pelo participante, precisaria ser mais bem discutida e trabalhada a fim de se construir uma definição sob o paradigma G2.

**Considerações finais da atividade 2**

Ao fim da última atividade, P2 diz,

> Essas atividades que a gente fez, mudou a minha visão dessa parte da matemática. Foi uma nova forma de conhecer esses outros lados, me tirou algumas dúvidas que eu nem sabia que eu tinha. Eu nunca tinha visto fronteira, quando eu aprendi área e perímetro, no meu material não tinha fronteira e nem região interna. (P2).

Antes de finalizar a entrevista, P2 diz concordar que essa parte da matemática deveria ser mais aprofundada. O que P2 quer dizer com aprofundamento, é incluir o estudo de fronteira e região interna.

**Considerações:** Em relação ao conceito de perímetro, o participante apresenta uma ideia ainda muito ligada a concepção numérica, apresentando dificuldade em fazer comparações entre fronteiras, após algumas atividades a ideia de comparação começa a ficar mais natural para ele, porém o conjunto de atividades não foi suficiente para que ele construísse a ideia de perímetro sob o paradigma G2 por exemplo. A dependência de materiais concretos, o excesso de utilização de medida e o uso de um conjunto restrito de figuras geométricas representadas por polígonos (quadrado na grande maioria das vezes) mostram a dificuldade do participante em trabalhar sob os paradigmas G1. É de se esperar que nessa fase do Ensino Fundamental, essas ideias pudessem ser naturais aos estudantes.

Em relação ao conceito de área, o participante tem uma ideia inicial limitada a área do quadrado e do retângulo e suas fórmulas para obtenção da medida dessas áreas. As ideias de área como a quantidade de vezes que uma unidade cabe em sua região interna não foi reconhecida por ele. Uma vez apresentada essas ideias, a ideia de comparar regiões internas utilizando sobreposição também foi necessário ser discutida.

O que é possível observar durante as atividades que o participante não traz consigo a ideia de grandeza e essa ausência dificulta a resolução das atividades pois quando havia a necessidade de se comparar fronteiras ou regiões internas quando estas não contavam com unidades de medida, o participante recorria a métodos que o levava a obtenção de medidas, chegando a estabelecer medidas próprias.

Após algumas atividades, o participante consegue fazer comparações entre regiões internas por meio de sobreposição, porém em relação a fronteira, o participante apresentou maior dificuldade em comparar fronteiras utilizando-se da ideia de sobrepô-las, a fim de descobrir a maior delas.

### 8.3.4. Participante P3

Tanto na Atividade 1 como na Atividade 2, a denominação de P3 foi dada para o mesmo participante, isto é, o participante denominado por P3 na Atividade 1 é o mesmo participante que denominamos nesta atividade por P3.

Essa atividade teve a duração de 3 horas e 40 minutos.

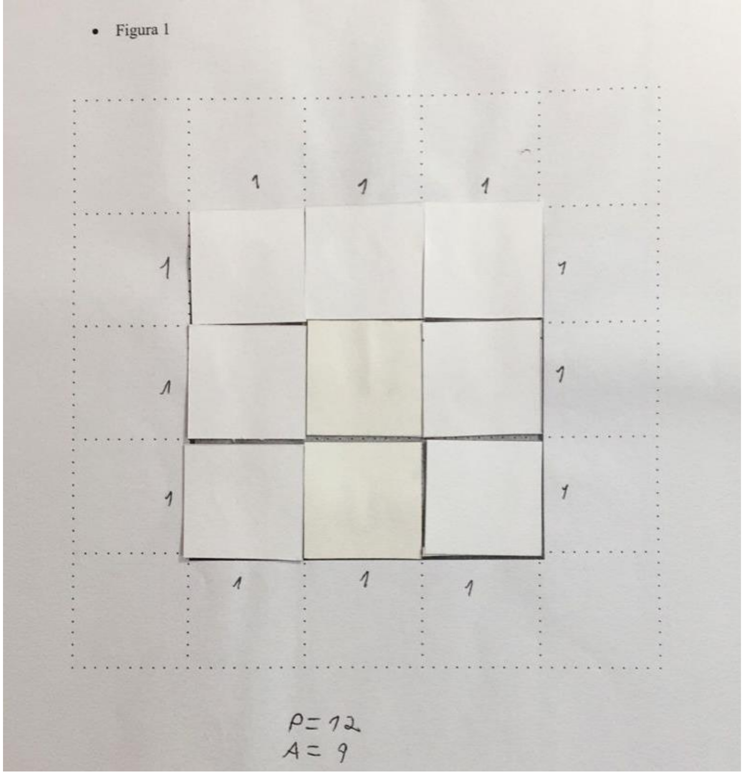
Antes de iniciar a Atividade 2, P3 faz algumas considerações sobre a Atividade 1.

> Bom, minha concepção de Matemática mudou, antes eu achava que Matemática só envolvia números, agora vejo que tem problemas que não precisamos de cálculo para resolver ou de certa forma, podemos reduzir o número de cálculos que temos que fazer. Inclusive em um problema de olímpiada de Matemática, sobre perímetro, as ideias da atividade passada me ajudaram muito a resolver o problema. É um problema que mostra 5 terrenos com formato retangular, cada um com um tipo de cerca, por meio de comparações, o objetivo é encontrar a cerca de maior comprimento. (P3).

O problema descrito por P3 faz parte de um conjunto de problemas de treinamento para a Olimpíada Canguru. Após as considerações, P3 inicia a atividade.

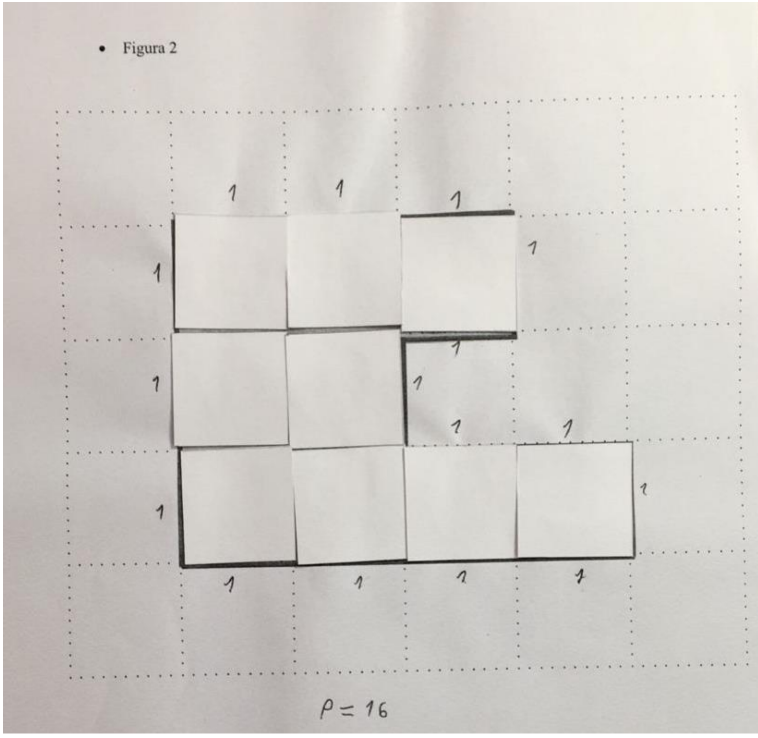
a) **Com auxílio da malha quadriculada (folha anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:**

Figura 160 - Resposta ao item (a), figura 1 – Atividade 2



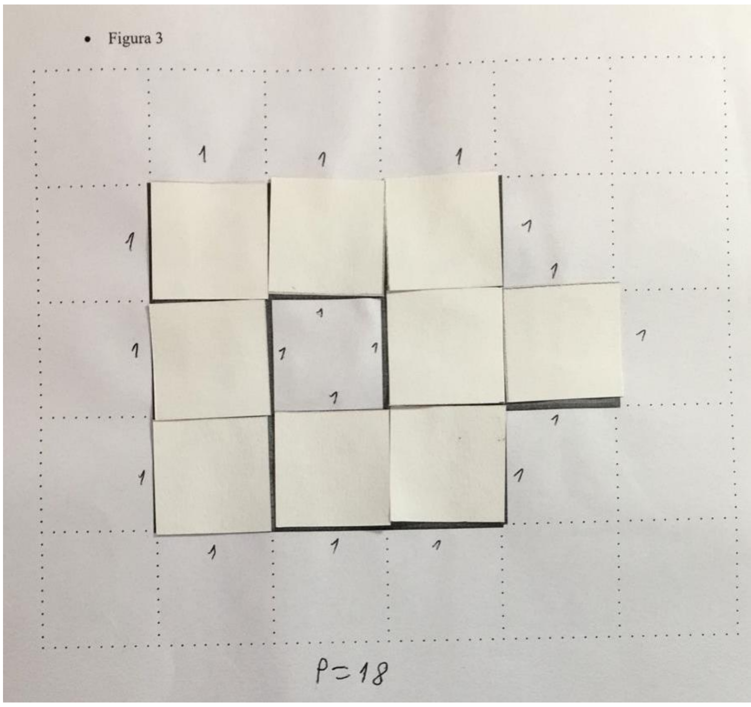

Fonte: Autor.

Figura 161 - Resposta ao item (a), figura 2 – Atividade 2



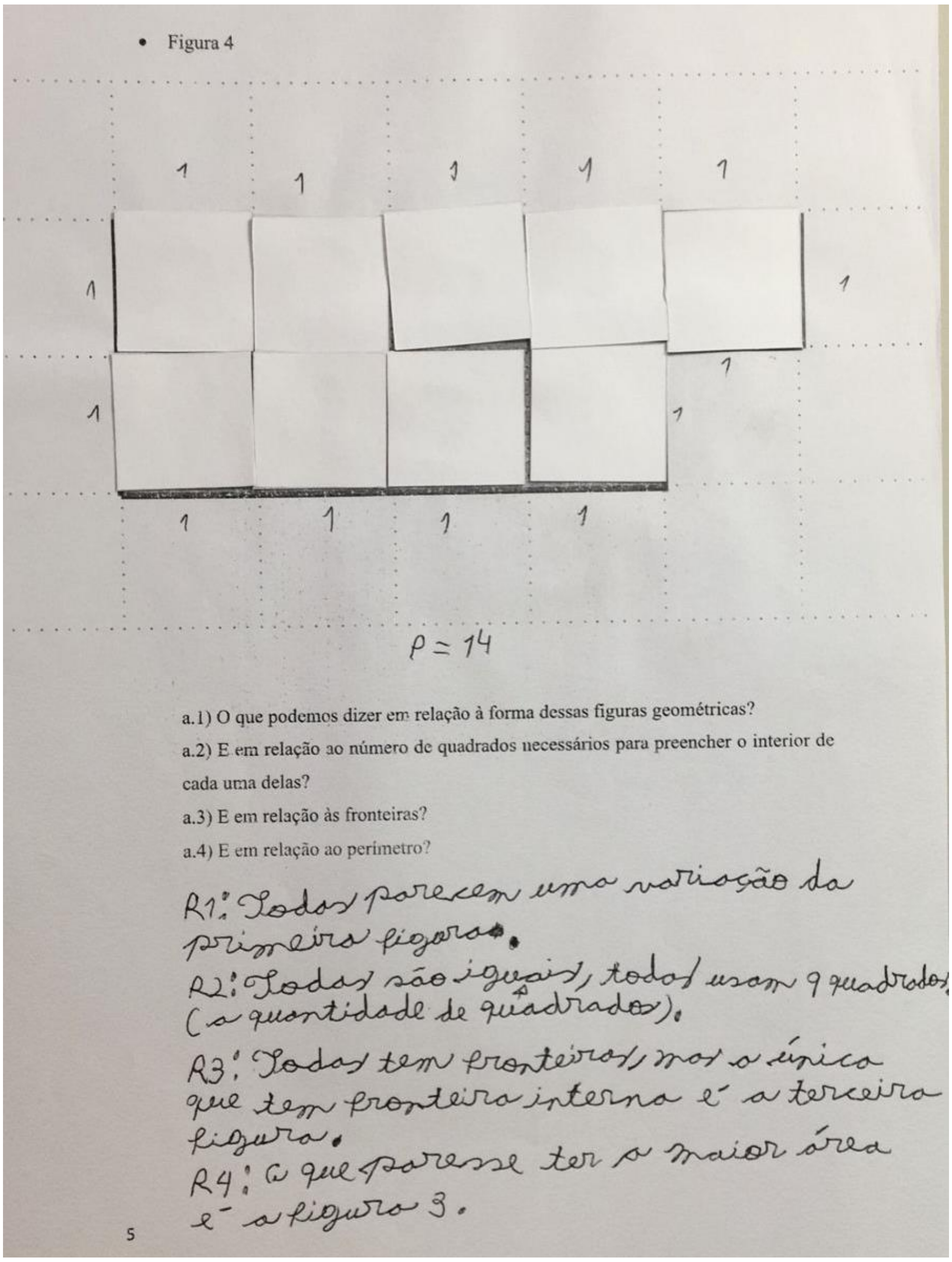

Fonte: Autor.

Figura 162 - Resposta ao item (a), figura 3 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 163 - Resposta ao item (a), figura 4 – Atividade 2




Fonte: Autor.

P3 abre um saquinho onde estão guardados os quadradinhos a serem utilizados e inicia a colagem, ver FIGURA 160, FIGURA 161, FIGURA 162 e FIGURA 163. Ao terminar, ele comenta que não se lembra da última vez que utilizou cola em uma atividade em sala de aula.

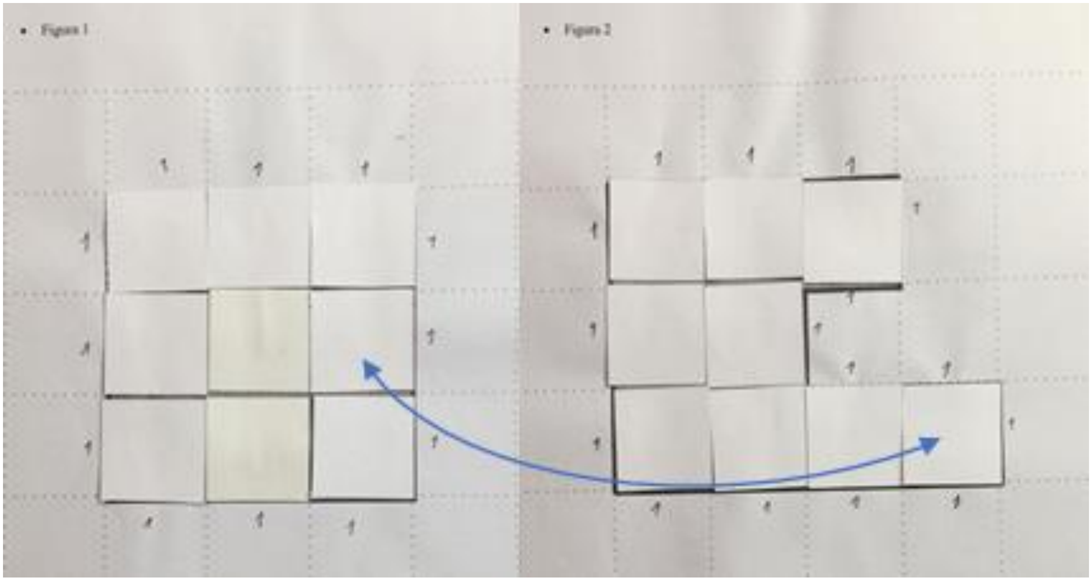
**a.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?**

P3 inicia a resposta a (a.1) dizendo,

> As três primeiras figuras parecem ser iguais, pois tem um quadrado de diferença. Por exemplo, a figura 1 é um quadrado completo, já a figura 2, tem um quadradinho que está aqui na figura 1, mas que na figura 2 ele mudou para cá. Na figura 3 é quase a mesma coisa, o quadradinho do centro se move para frente. A figura 4, parece que não, mas é como se ela fosse também uma variação da primeira. Todas usam 9 quadradinhos e a figura 4 também usa 9 quadradinhos. É como se todos fossem a mesma figura, mas com forma diferente. (P2). (grifo nosso).

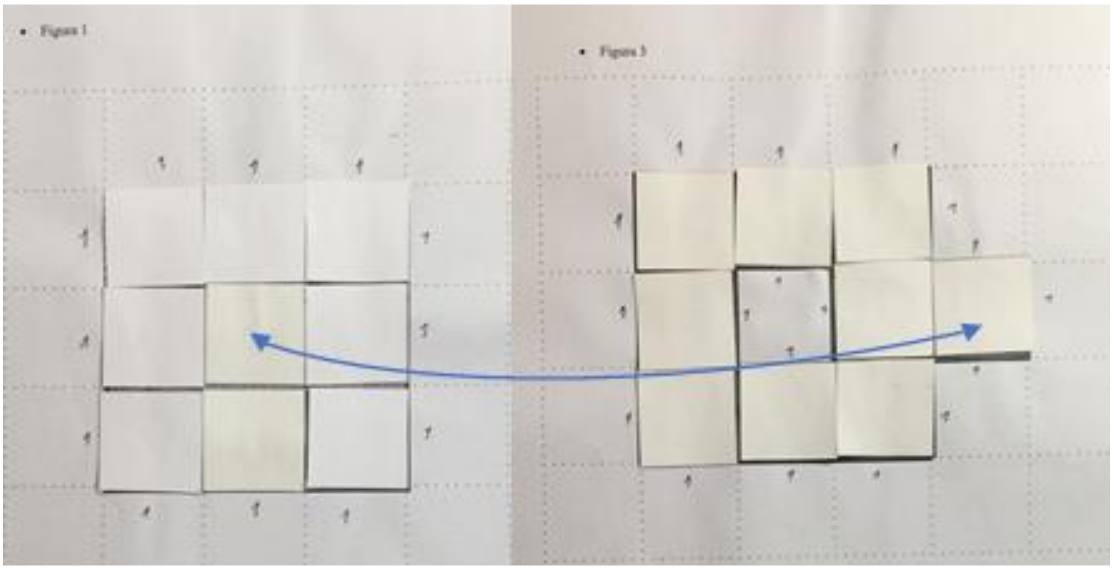
Para ajudar no entendimento da resposta de P3, apresentamos duas figuras que representam as comparações feitas por ele, entre as figuras do subitem (a.1), ver FIGURA 164 e FIGURA 165.

Figura 164 - Simulação da diferença entre as figuras 1 e 2 do item (a) apontada por P3 - Atividade 2



Fonte: Autor.

Figura 165 - Simulação da diferença entre as figuras 1 e 3 do item (a) apontada por P3 - Atividade 2



Fonte: Autor.

No subitem (a.1), o objetivo é que se possa diferenciar figuras convexas de não convexas, porém, a partir do quadrado (figura 1), P3 compara a disposição dos quadradinhos colados sobre as regiões internas das figuras e afirma que as figuras "são as mesmas" pois apesar do formato, são compostas pela mesma quantidade de quadradinhos. Isto é, para ele, se duas figuras são preenchidas pela mesma quantidade de quadradinhos, elas são "as mesmas", o que nos leva a acreditar que são ideias conflitantes.

**a.2) E em relação ao número de quadrados necessários para preencher o interior de cada uma delas?**

P3 afirma, "Todas são iguais, todas usam 9 quadrados (a quantidade de quadrados)". Reafirmando a ideia de que figuras pavimentadas pela mesma quantidade de quadradinhos, na concepção de P3, são figuras "iguais", ou seja, P3 confunde área com região interna. Vale a pena relembrar que ele, durante a atividade 1, classificou duas figuras planas de mesmo perímetro como iguais. Pode ser que a concepção de que figuras de mesma área sejam iguais esteja apoiada em sua experiência com perímetro, ou vice-versa.

**a.3) E em relação às fronteiras?**

P3 verbaliza "Todas têm fronteiras, mas a única que tem fronteira interna é a terceira figura". Como a comparação não foi relacionada ao comprimento das fronteiras, o entrevistador pergunta, “Caso cada figura representasse uma região e você tivesse que cercar cada uma delas, qual das figuras você acredita que utilizaria mais cerca?”. P3 analisa as figuras e diz “Eu acredito que a figura 3, porque além da cerca externa tem a cerca interna”.

Ao justificar a escolha da figura 3 como a de maior fronteira, P3 menciona o fato dela apresentar um “buraco” (figura formada por duas curvas fechadas, uma na região interna da outra), o que pode não ser verdade. Assim, fica como questão que há necessidade de serem feitas mais atividades, em sala de aula, que peçam a comparação de figuras, com e sem ¨buraco¨, e que incluam exemplos em que a figura de menor fronteira tenha “buraco”.

**a.4) E em relação ao perímetro?**

P3 diz “É meio difícil falar alguma coisa sobre o perímetro. Mas a princípio, a figura que teria maior perímetro, aparentemente seria a figura 4”. O entrevistador questiona a dificuldade mencionada e P3 diz “É porque depende do formato da figura né? Tem figura que pode ser mais difícil de determinar o perímetro”. Na sequência, P3 comenta a estratégia adotada para calcular cada perímetro. Uma vez que não foram apresentadas explicitamente as medidas, revela ter adotado o valor 1 cm como a medida do lado de cada quadradinho que foi colado na folha. Com auxílio do lápis, vai apontando para o lado de cada quadradinho das respectivas figuras e contabiliza a medida. Em seguida, P3 marca na folha, no canto inferior, o valor encontrado do perímetro, não incluindo nessas anotações a unidade de medida, ver FIGURA 160, FIGURA 161, FIGURA 162 e FIGURA 163.

Após ter efetuado os cálculos de cada perímetro, P3 verbaliza que a figura com maior perímetro é a figura 3. Porém, na resposta escrita, ele comete um equívoco e escreve “área” ao invés de “perímetro”.

Na fase de discussão, o entrevistador comenta sobre a forma inadequada de denominar uma fronteira por “fronteira interna” ou “fronteira externa”. Ao fim da discussão, P3 justifica o uso “Eu entendi, mas é que para mim é mais fácil utilizar esses termos pois assim sei qual fronteira estamos tratando”.

Comentário: Nos subitens (a.1 e a.2), ao comparar o formato das figuras, P3 evoca imagens de conceitos contraditórias ao afirmar que figuras formadas pela mesma quantidade de quadradinhos são iguais apesar de não possuírem o mesmo formato. Esse tipo de conflito, é um exemplo do que denomina Tall & Vinner (1981) por fator de conflito potencial, isto é, quando duas “partes” da imagem de conceito evocadas são conflitantes.

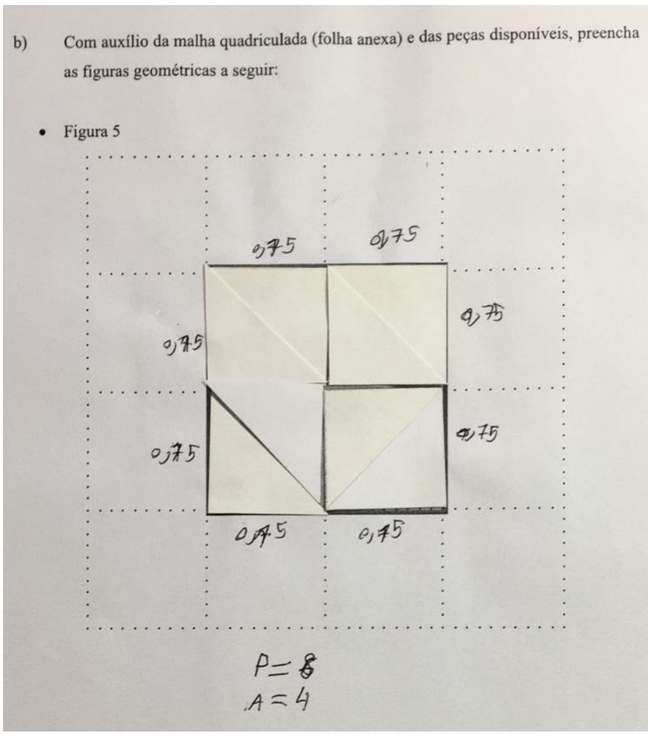
Na fase de discussão, P3 se mostra surpreso ao perceber que figuras planas diferentes podem ter mesma medida de área.

P3 possui dificuldade em diferenciar a região interna de uma figura plana do seu formato. Na comparação entre as fronteiras das figuras, P3 destaca o fato da figura 3 possuir fronteira "interna" e as demais não. Ao ser estimulado a comparar as fronteiras de acordo com os respectivos comprimentos, P3 destaca que a figura 3 possui "duas fronteiras, uma interna e outra externa" e por isso essa é a figura com maior fronteira. Em relação ao perímetro, P3 sente necessidade de associar a medida de 1 cm ao lado do quadradinho. Assim, P3 não mostra saber a relação entre a figura de maior fronteira com a figura de maior perímetro. P3 também apresenta dificuldades na utilização do termo fronteira, quando solicitado para comparar as fronteiras, P3 diz não conseguir fazer comparações, porém, quando sugerido pensar em uma cerca, ele consegue desenvolver a atividade.

**b) Com auxílio da malha quadriculada (folha anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:**

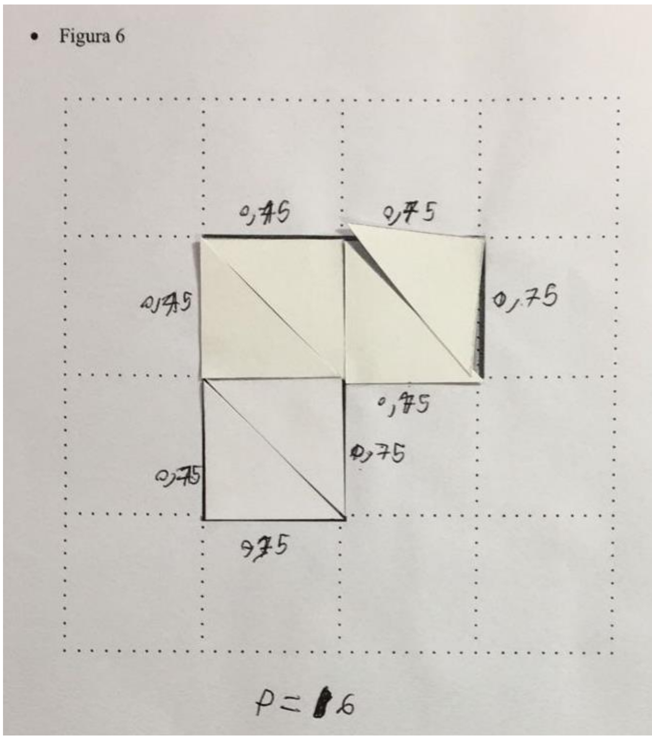
Ao iniciar o item (b), P3 abre um saquinho onde estão disponíveis diversos triangulinhos. Lê o enunciado e inicia a colagem, sem apresentar dificuldade para colá-los na malha quadrada.

Figura 166 - Resposta ao item (b), figura 5 – Atividade 2



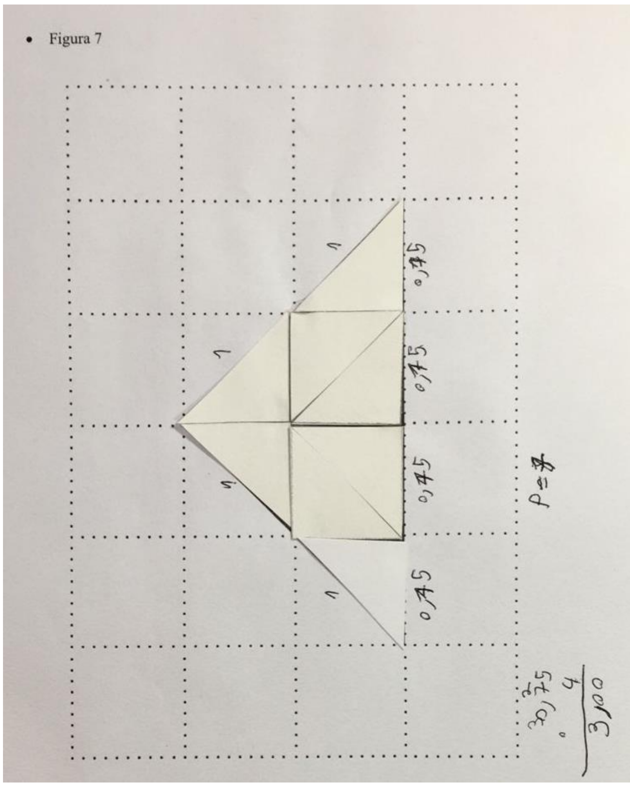
Fonte: Autor.

Figura 167 - Resposta ao item (b), figura 6 – Atividade 2



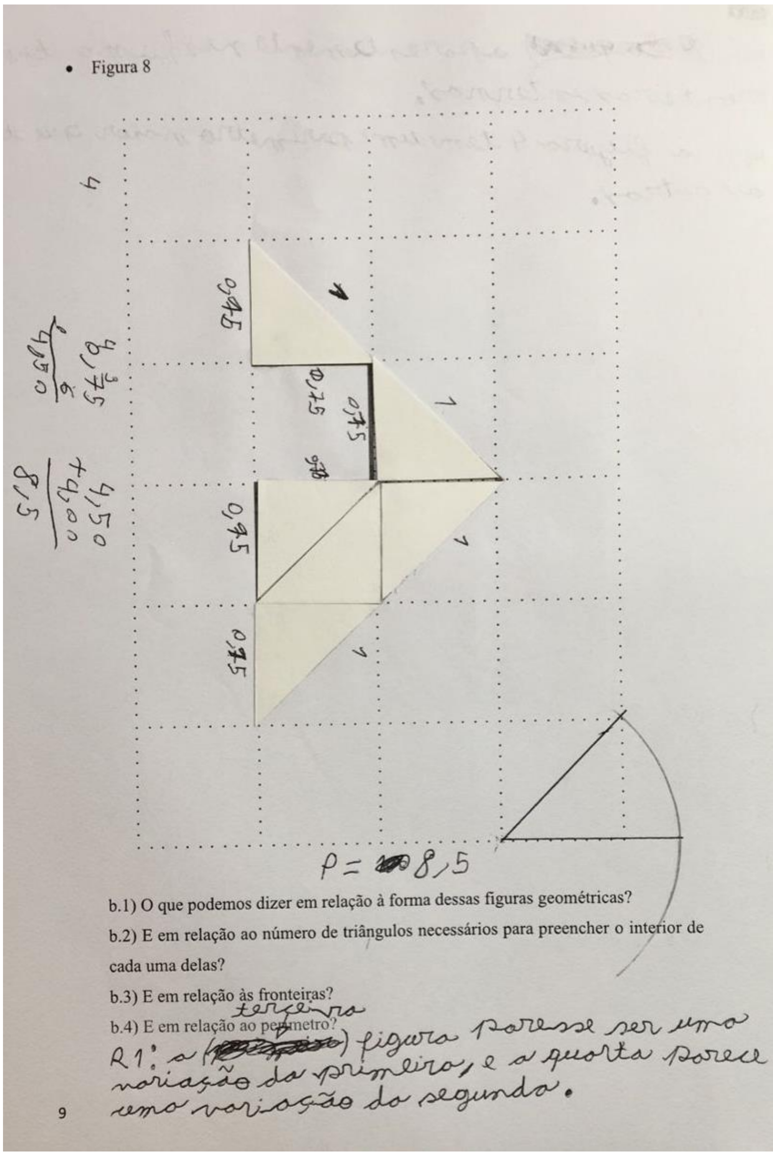

Fonte: Autor.

Figura 168 - Resposta ao item (b), figura 7 – Atividade 2



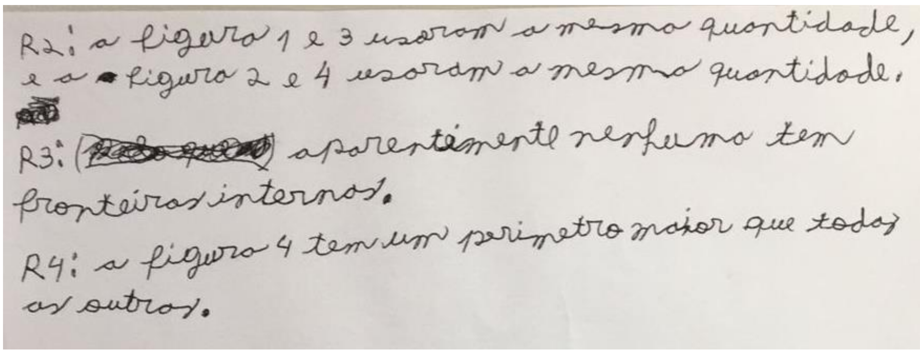
Fonte: Autor.

Figura 169 - Resposta ao item (b), figura 8 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 170 - Resposta ao item (b), continuação – Atividade 2


R2: a figura 1 e 3 usaram a mesma quantidade, e a figura 2 e 4 usaram a mesma quantidade.

R3: aparentemente nenhuma tem fronteiras internas.

R4: a figura 4 tem um perimetro maior que todas as outras.

Fonte: Autor.

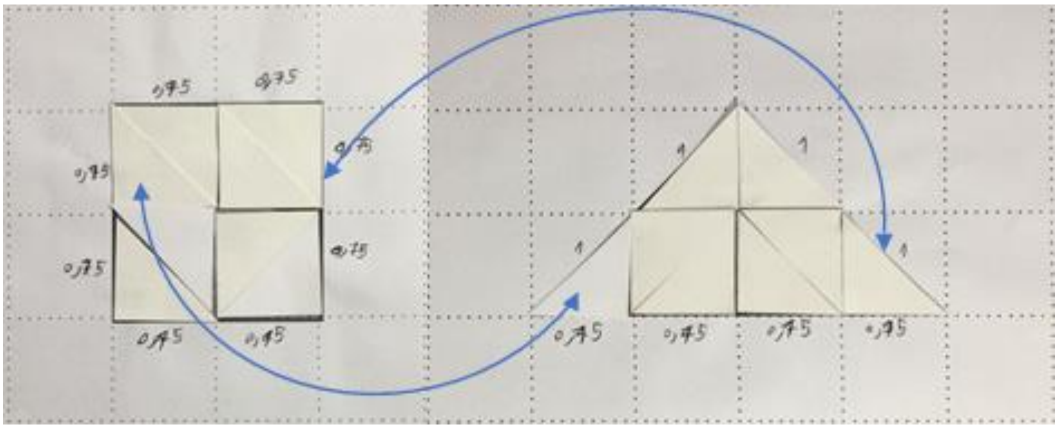
**b.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?**

Em relação ao formato das figuras, P3 verbaliza

> Parece com o exercício anterior, veja, se juntarmos dois triângulos, formamos um quadrado, então, se você parar para pensar, todas elas exceto a segunda, são variações da primeira. Com a primeira figura formamos a terceira, é só pegarmos um triângulo daqui e colocarmos do lado. Depois pegamos metade desse quadrado e colocamos ao lado. A quarta figura parece com a terceira... é quase igual, só que sem esse quadrado aqui. Se tivesse esse quadrado elas seriam iguais. (P3).

Uma simulação da comparação apontada por P3, entre as figuras 5 e 7, pode ser observada na Figura 14. Para ele, a partir de dois triângulos retirados da figura 5, é possível chegarmos à figura 7.

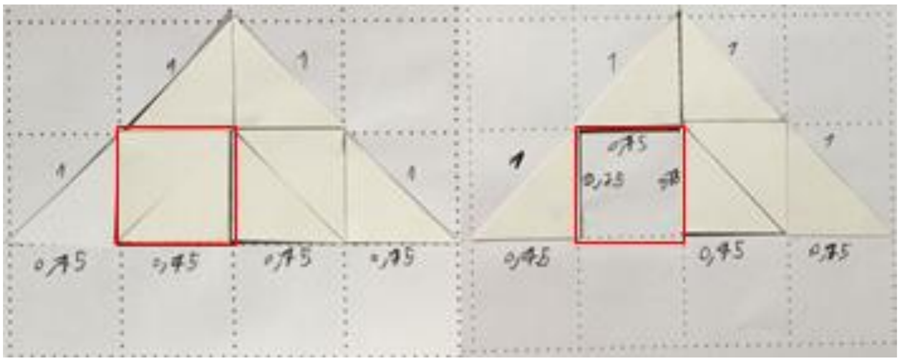
Figura 171 - Simulação da diferença entre as Figuras 5 (à esquerda) e a Figura 7 do item (b) apontada por P3 - Atividade 2



Fonte: Autor.

A FIGURA 174 representa uma simulação da comparação entre as figuras 7 e 8. Para P3, as figuras são "quase iguais", a diferença é "um quadrado formado por dois triângulos".

Figura 172 - Simulação da diferença entre as Figuras 7 (à esquerda) e a Figura 8 do item (b) apontada por P3 - Atividade 2



Fonte: Autor.

**b.2) E em relação ao número de triângulos necessários para preencher o interior de cada uma delas?**

Durante a resposta deste subitem, P3 faz as comparações solicitadas, porém utiliza a numeração do item (a), assim, as figuras referidas por 1, 2, 3 e 4 são, respectivamente, as figuras, 5, 6, 7 e 8.

Ao ler o enunciado, P3 coloca à sua frente as 4 folhas onde estão as figuras e faz a contagem dos triângulos. Em seguida, P3 verbaliza "A figura 3 é uma variação da figura 1 pois elas usam a mesma quantidade de triângulos. A figura 2 e 4 usaram a mesma quantidade", ver FIGURA 170.

**b.3) E em relação às fronteiras?**

Quanto à fronteira, P3 verbaliza "Bom, podemos dizer que aparentemente nenhuma delas tem fronteiras internas" e preenche a folha de resposta, ver FIGURA 170.

**b.4) E em relação ao perímetro?**

Em relação ao perímetro, P3 diz

> Se eu for usar a mesma tática que usei, cada lado teria 1 cm, então o perímetro da terceira figura daria 8, da primeira figura daria 8 também, a segunda figura tem perímetro 8. A última figura tem perímetro igual a 10. Então aparentemente a figura 8 tem o maior perímetro... a figura 8 é a figura 4 do item b. (P3).

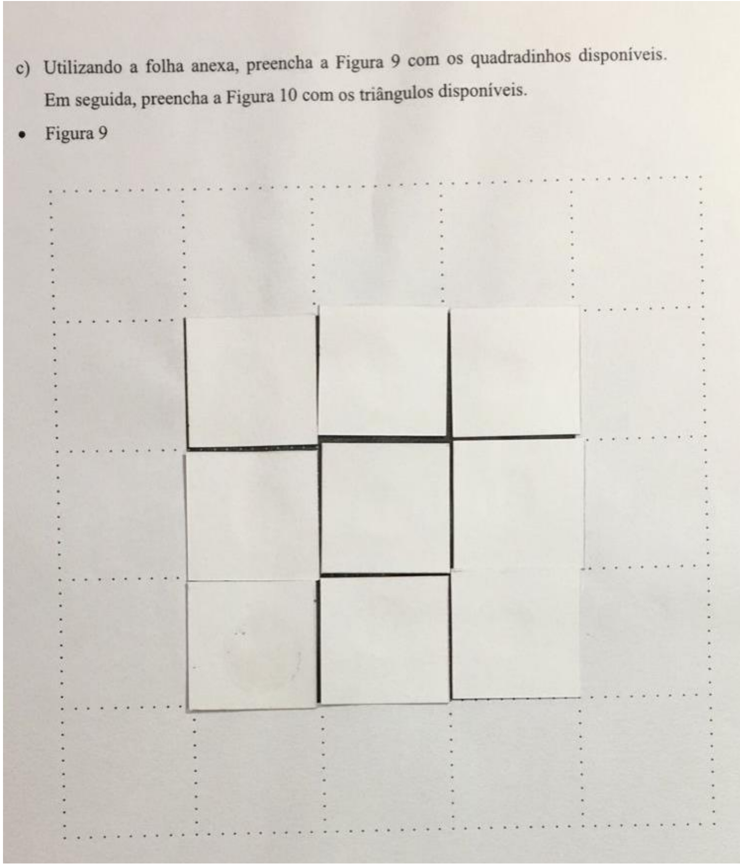
Na fase de discussão, o entrevistador instrui P3 a traçar a diagonal de um dos quadradinhos da malha e, com auxílio de um compasso (disponibilizado desde o início), P3 compara os comprimentos da diagonal e do lado do quadradinho da malha, ver FIGURA 169. P3 percebe que a medida da diagonal "tem valor um pouco maior" do que a medida do lado do quadrado. P3 revê a própria estratégia e decide atribuir 1cm como medida para as diagonais dos quadrados e 0,75 cm, "uma medida um pouco menor", como medida do lado do quadrado, recalcula o perímetro das figuras e conclui que a figura 8 permanece como a figura de maior perímetro, ver FIGURA 170.

**Considerações:** P3 inicialmente acredita que a diagonal de um quadrado tem medida equivalente à medida do lado. Vale destacar que P3 não tem conhecimento do Teorema de Pitágoras, que é normalmente estudado no 8º ano do Ensino Fundamental II. Apesar disso, em nenhum momento P3 utilizou, de forma espontânea, o compasso para fazer comparações.

Interessante notar que, no item (a), P3, ao comparar as fronteiras, conclui que a figura de maior contorno é a que possui “fronteira interna”. No item (b), P3 apenas verifica se as figuras possuem “fronteira interna”.

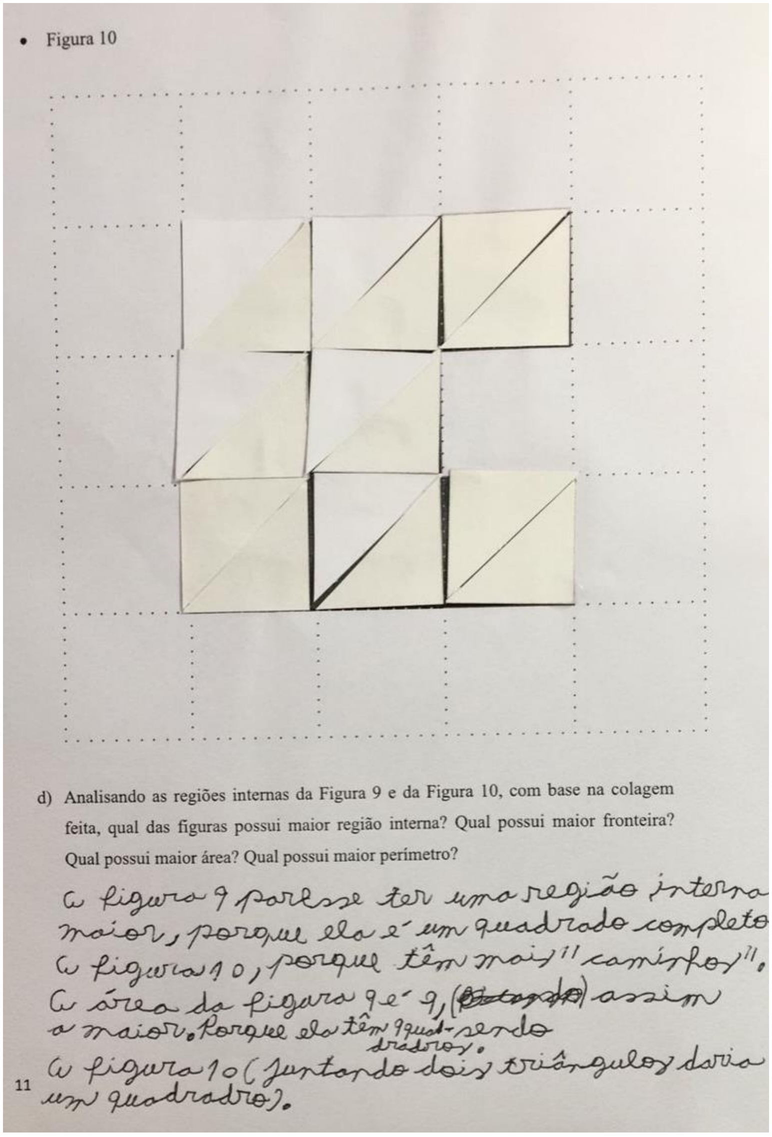
c) **Utilizando a folha anexa, preencha a figura 9 com os quadradinhos disponíveis. Em seguida, preencha a figura 10 com os triângulos disponíveis.**

Figura 173 - Resposta ao item (c), figura 9 – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 174 - Resposta aos itens (c), figura 10 e (d) – Atividade 2




Fonte: Autor.

P3 preenche as figuras 9 e 10 e comenta que uma figura possui o dobro de figuras do que a outra, em seguida avança para o item (d).

d) **Analisando as regiões internas da figura 9 e da figura 10, com base na colagem feita, qual das figuras possui maior região interna? Qual possui maior fronteira? Qual possui maior área? Qual possui maior perímetro?**

Na comparação das regiões internas das figuras 9 e 10, P3 verbaliza “A figura 9 parece ter uma região interna maior, porque ela é um quadrado completo. Já a figura 10 falta um quadrado nela para ela ficar completa”. Apesar de não termos feito um questionamento sobre o significado de “figura completa”, utilizado por P3, temos como hipótese que figuras não convexas são, para ele, “figuras não completas”.

Quanto à comparação entre as fronteiras das figuras do item (d), P3 diz

> Eu acho que é a figura 10, pois como a gente já tinha visto antes, se cada lado mede 1cm e tem um quadrado faltando, esse quadrado libera mais 3 cm, então é a figura 10, pois ela vai ter um perímetro maior. É como se quanto mais curvas, maior o perímetro. (P3).

O entrevistador pergunta o que ele quer dizer com curvas, P3 diz que são os "espaços que faltam ser completados". Isto é, P3 parece perceber que quanto maior for o comprimento da fronteira, maior será o perímetro.

Em relação à comparação entre as áreas das figuras 9 e 10, P3 comenta

> Bom a área é lado vezes lado, na primeira figura, supondo que seja um quadrado, cada lado possui a mesma medida, então temos três vezes três que é 9, a figura 9 possui área 9. E a área da figura 10 é... deixa eu pensar... professor, <u>qualquer lado que eu escolher eu posso fazer lado vezes lado</u>? Se eu pego esses dois lados, dá 9 também, mas se eu pegar esses lados aqui daria 3. (P3). (grifo nosso).

Essa fala de P3 merece destaque, pois nela é revelado que até este momento da entrevista, P3 não estava associando a pavimentação das figuras com suas respectivas áreas. O grifo (nosso) destaca a dificuldade de P3 em calcular a medida da área de uma figura não convexa e, talvez, uma interpretação limitada do que sejam a ¨base¨ e a ¨largura¨ de um retângulo, por exemplo.

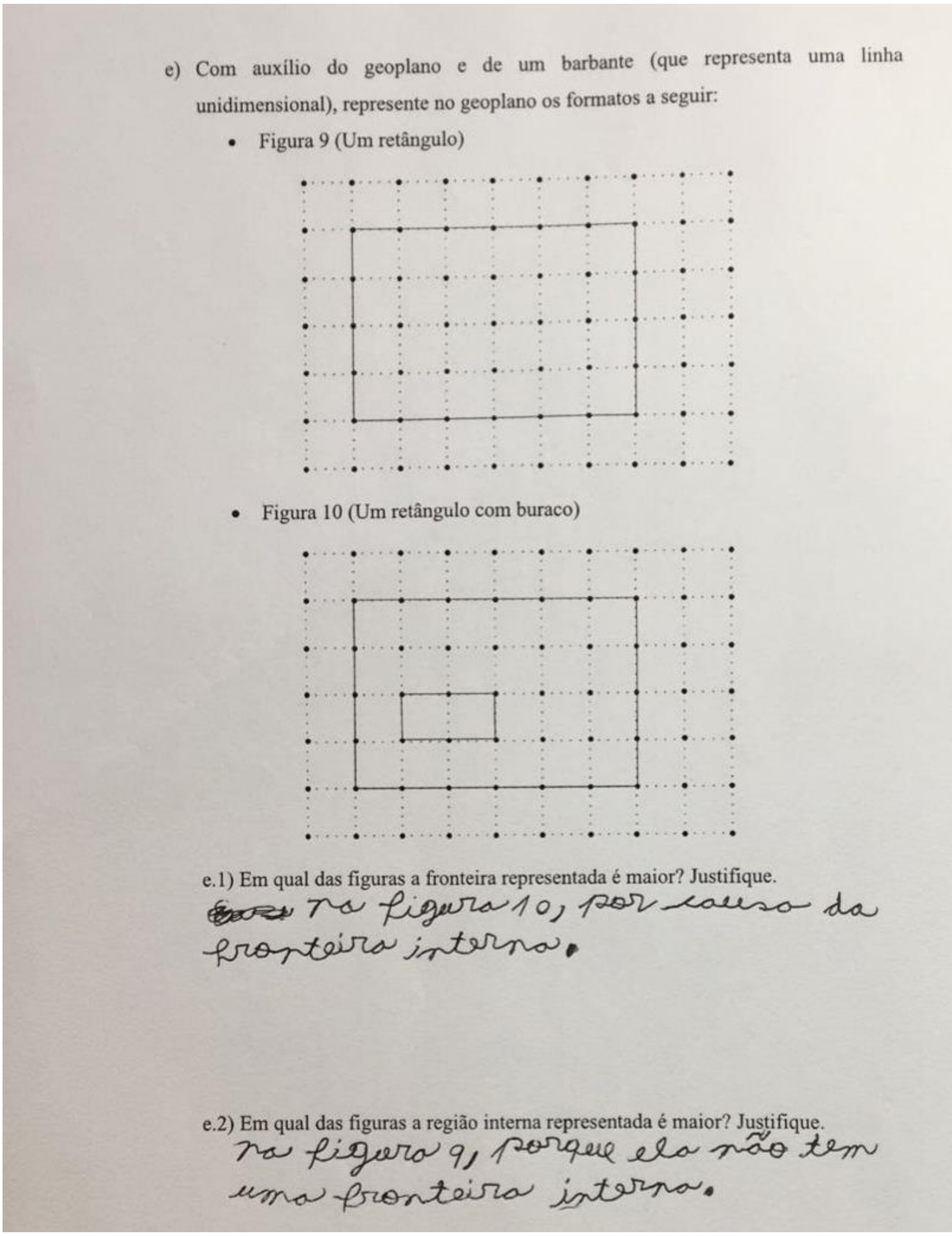
Diante da dificuldade de P3, o entrevistador pede que P3 calcule a medida da área de um quadradinho, em seguida, calcule a medida da área do quadrado da figura 9 e compare esse valor com a quantidade de quadradinhos que pavimentou a figura 9. P3 verbaliza "Ah nossa! Agora entendi, eu não sabia disso. Então na área da figura 10 é 8".

Sobre o perímetro, P3 comenta "A figura 10 possui maior perímetro pois a gente já tinha concluído isso. Esse espaço que falta é um quadrado que pode ser formado por dois triângulos". P3 parece associar maior fronteira com maior perímetro, mas, de qualquer forma, usa a decomposição do quadrado.

**Considerações:** P3 passa a entender que dentre um conjunto de figuras planas, a que possui "maior fronteira" é a de maior perímetro, ideia que não foi utilizada por ele no item (a). P3 revelou não ter associado, até esta fase da entrevista, a relação entre área de uma figura plana e a pavimentação dessa figura, apresentando assim, uma possível dificuldade de entendimento de unidade de medida de área.

**e) Com auxílio do Geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no Geoplano os formatos a seguir.**

Figura 175 - Resposta ao item (e), figura 9 e figura 10 – Atividade 2



e) Com auxílio do geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no geoplano os formatos a seguir:

- Figura 9 (Um retângulo)
- Figura 10 (Um retângulo com buraco)

e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

na figura 10, por causa da fronteira interna.

e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

na figura 9, porque ela não tem uma fronteira interna.

Fonte: Autor.

Figura 176 - Resposta ao item (e), figura 9 no Geoplano – Atividade 2


Fonte: Autor.

P3 pega o barbante e o Geoplano, faz a representação da figura 9, faz um registro fotográfico e, em seguida, faz o mesmo com a figura 10.

**e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.**

Ao ler as perguntas dos subitens (e.1) e (e.2), P3 responde que a figura 10 é a com maior fronteira e maior região interna. Como justificativa, destaca que a figura 10 possui “uma fronteira interna”, o que faz essa fronteira possuir maior comprimento e a região interna seja menor. Após o comentário, P3 responde o subitem (e.1), ver FIGURA 177.

Figura 177 - Resposta ao item (e), figura 10 no Geoplano – Atividade 2


Fonte: Autor.

**e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.**

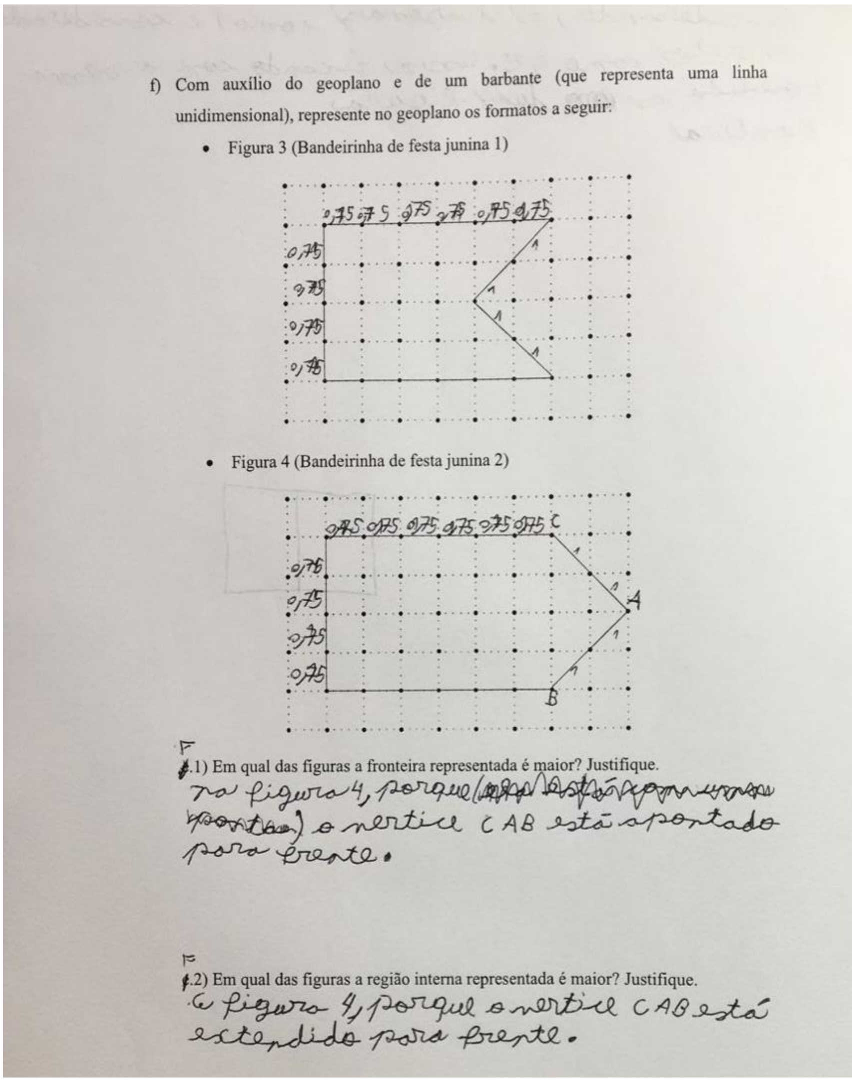
P3 destaca que a diferença entre as figuras é uma “fronteira interna” que a figura 10 possui, o que não ocorre com a figura 9 e conclui que a figura 9 possui maior região interna, ver FIGURA 177.

**Considerações:** P3 apresenta maior habilidade na manipulação com o Geoplano, comparada a utilização na Atividade 1. Consegue comparar as fronteiras e as regiões internas. Lembramos que na Atividade 1, P3 teve dificuldade para representar figuras com “buraco” no Geoplano. P3 mostra justificativas baseadas em comparações, sem necessidade de utilização de unidade de medida, ou seja, apresenta que consegue articular ideias baseadas nos paradigmas G0-G1.

**f) Com auxílio do Geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no Geoplano os formatos a seguir:**

P3 repete a estratégia usada no item (e), faz a representação da figura 3 no Geoplano, ver Figura 178, faz o registro fotográfico e, em seguida, faz o mesmo para a figura 4, ver FIGURA 179.

Figura 178 - Resposta ao item (f) – Atividade 2




Fonte: Autor.

Figura 179 - Resposta ao item (f), figura 3 no Geoplano – Atividade 2


Fonte: Autor.

Figura 180 - Resposta ao item (f), figura 4 no Geoplano – Atividade 2


Fonte: Autor.

**f.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.**

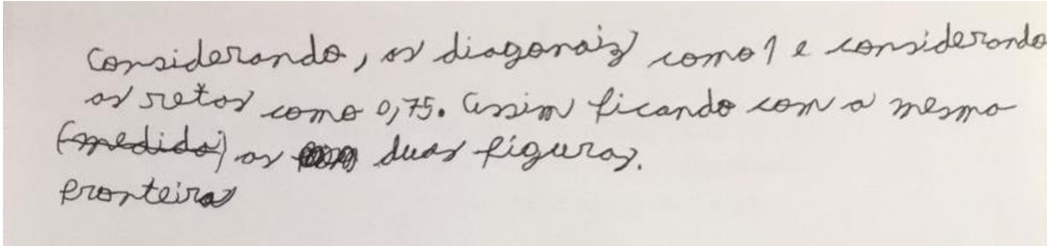
Ao ler o enunciado do subitem (f.1), P3 fica alguns segundos pensando, lê novamente o enunciado e pronúncia em voz alta a palavra “fronteira”. P3 começa a analisar os segmentos e, por sugestão do entrevistador, nomeia 3 vértices da figura 4 por A, B e C. P3 afirma que a figura de maior fronteira é a figura 4, pois “CAB está apontando para frente”. O que ele quer dizer é que a região interna da figura 4 é maior do que a da figura 3. E responde na folha de resposta, ver FIGURA 180.

**f.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.**

P3 responde “bom, na figura 4 o vértice CAB está estendido para frente, então ela possui maior região interna”, ver FIGURA 181.

Na fase de discussão, o entrevistador pergunta sobre a comparação entre as fronteiras, P3 verifica as figuras 3 e 4, lê o enunciado do subitem (f.1) e verbaliza “Ah professor, eu considerei os quadradinhos da região interna”. Isto é, P3 reconhece que pensou em área ao invés de pensar no contorno e começa a comparar as fronteiras. Para isso, volta à ideia de atribuir valores e conclui que a fronteira das duas figuras tem o mesmo comprimento. Na folha de resposta, P3 acrescenta essa consideração, ver FIGURA 181.

Figura 181 - Resposta ao item (f), nova resposta de P3 – Atividade 2



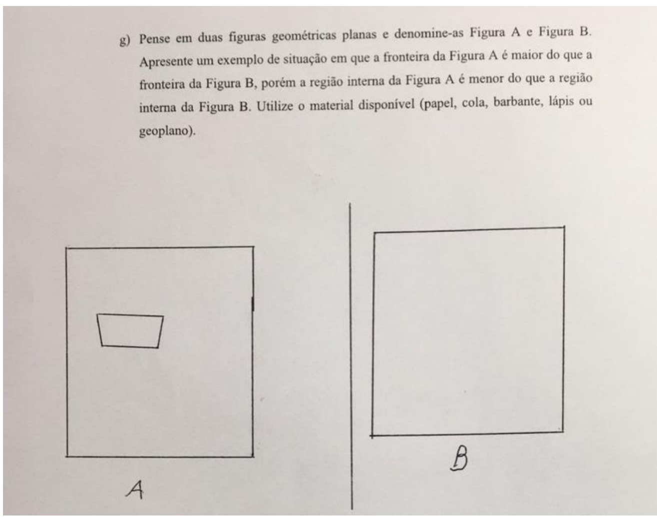

Fonte: Autor.

**Considerações:** Ao comparar as fronteiras das figuras 3 e 4, P3 novamente considera a região interna das figuras. Estimulado, percebe isso e refaz sua resposta do item (f.1). Ao comparar apenas as fronteiras, apresenta dificuldade em comparar os segmentos transversais das figuras e volta a associar uma medida para os segmentos, respeitando as utilizadas no item (b). Cada lado de um quadradinho da malha ¨mede¨ 0,75 cm e cada segmento que é diagonal de um quadradinho, ¨mede¨ 1cm.

Para P3, na comparação entre duas figuras, a ideia de que a figura de maior perímetro é a figura de maior área parece ser "forte", ainda que algumas discussões tenham sido feitas.

**g) Pense em duas figuras geométricas planas e denomine-as Figura A e Figura B. Apresente um exemplo de situação em que a fronteira da Figura A é maior do que a fronteira da Figura B, porém a região interna da Figura A é menor do que a região interna da Figura B. Utilize o material disponível (papel, cola, barbante, lápis ou Geoplano).**

Figura 182 - Resposta ao item (g) no Geoplano – Atividade 2



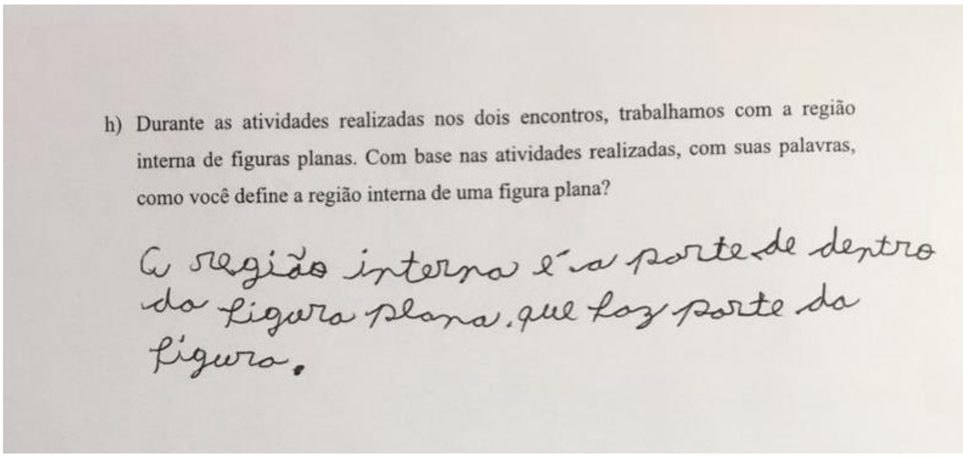

Fonte: Autor.

P3 diz “Ah, eu já sei, basta eu fazer a mesma figura só que colocar na figura A uma fronteira interna”. Na folha de resposta, P3 desenha as duas figuras, ver FIGURA 182, usando a régua graduada (dele mesmo) e procura fazer retângulos com medidas de lados 6 cm e 6,5 cm.

**Considerações:** Na resolução do item (g), P3 percebe que, ao fazer um “buraco” em uma figura, o perímetro aumenta e a medida da área diminui. Como solução, P3 faz duas figuras congruentes, uma delas faz um “buraco”. Percebemos que as atividades contribuíram com um aumento em seu conjunto figural, expandindo-o para além das figuras tradicionais como quadrado, triângulo e retângulo; porém, é necessário cuidado com a ideia de que se alterarmos o perímetro de uma figura plana, a medida da área também se altera e vice-versa, bem como generalizações do tipo, uma figura com buraco possui fronteira maior que uma outra figura sem.

**h) Durante as atividades realizadas nos dois encontros, trabalhamos com a região interna de figuras planas. Com base nas atividades realizadas, com suas palavras, como você define a região interna de uma figura plana?**

Figura 183 - Resposta ao item (h) – Atividade 2



h) Durante as atividades realizadas nos dois encontros, trabalhamos com a região interna de figuras planas. Com base nas atividades realizadas, com suas palavras, como você define a região interna de uma figura plana?

A região interna é a parte de dentro da figura plana. que faz parte da figura.

Fonte: Autor.

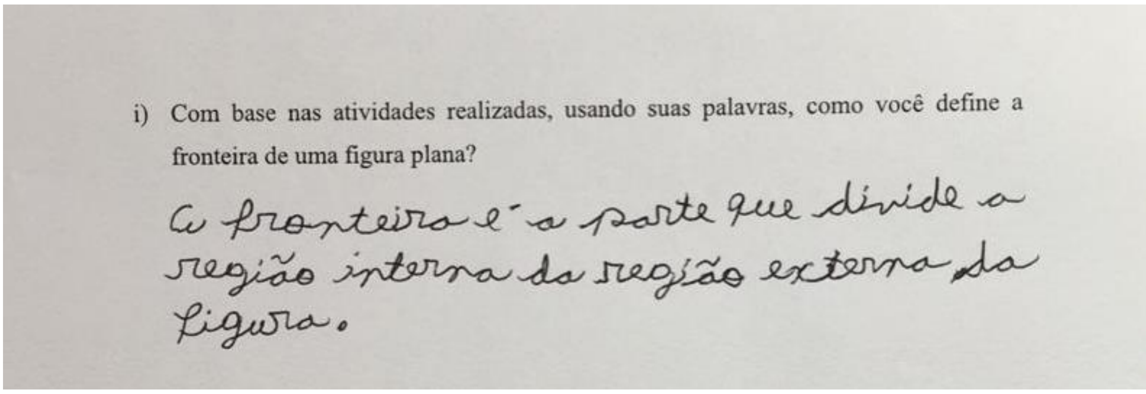
P3 verbaliza “Região interna... a região interna é a parte de dentro da figura... é a parte que pertence a figura”. P3 escreve “A região interna é a parte de dentro da figura plana, que faz parte da figura”. P3 não faz considerações e passa para a próxima atividade.

**Considerações:** A imagem de conceito de região interna de figura plana evocada pelo participante, está ligada ao interior da figura. Para P3, região interna é o que está na “parte de dentro da figura”; porém, o que percebemos é que se temos duas curvas planas, C1 e C2, com

C2 totalmente contida na região limitada por C1, para P3, C1 é que distingue o que está no interior da região do que não está, pois P3 caracteriza C2 como "fronteira interna" ao longo das Atividades 1 e 2, o que mostra que essas ideias ainda precisam ser trabalhadas.

i) **Com base nas atividades realizadas, usando suas palavras, como você define a fronteira de uma figura plana?**

Figura 184 - Resposta ao item (i) – Atividade 2


i) Com base nas atividades realizadas, usando suas palavras, como você define a fronteira de uma figura plana?

A fronteira é a parte que divide a região interna da região externa da figura.

Fonte: Autor.

P3 comenta

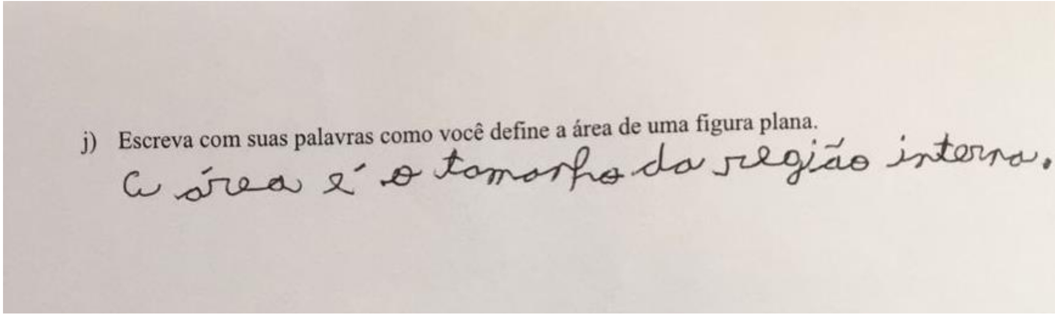
> A fronteira é o contrário da região interna, é a região de fora da figura, é a parte que não pertence à figura... Professor, quando ele diz fronteira, ele está se referindo à linha, à reta, tipo como a gente estava fazendo antes ou a parte de fora? (P2).

O entrevistador pergunta "como a gente trabalhou fronteira nas atividades?". P3 pensa por alguns segundos e diz "A fronteira é a parte que divide a região interna da região externa da figura". Na folha de resposta, P3 escreve "A fronteira é a parte que divide a região interna da região externa da figura", ver FIGURA 184.

**Considerações:** Inicialmente, P3 considera a fronteira de uma figura plana como o complementar de região interna, "o contrário de região interna", algo que fica "fora da figura". Ao validar sua resposta com o entrevistador, este pede que P3 se recorde das situações em que o termo fronteira foi utilizado nas atividades anteriores. P3 muda sua definição e passa a descrever fronteira como "a parte que divide a região interna da região externa da figura", o que, novamente, considera que a parte da fronteira que fica no interior de uma região, não faz parte da fronteira dessa região.

**j) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.**

Figura 185 - Resposta ao item (j) – Atividade 2




Fonte: Autor.

P3 diz “Deixa eu pensar... deixa eu ver como eu posso expressar em palavras... além de ser a multiplicação dos lados, deixa eu ver uma outra forma de explicar”. P3 responde na folha, “A área seria o tamanho da região interna”.

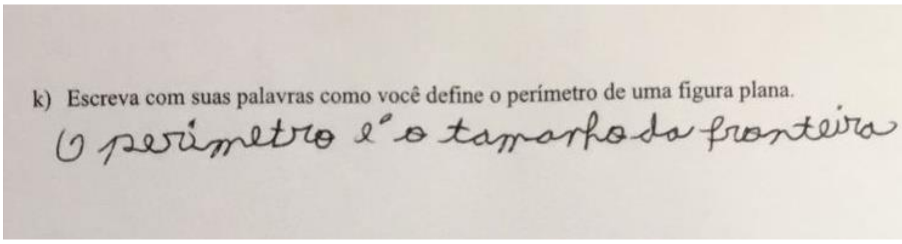
**Considerações:** No início da atividade 1, P3 define área de uma figura plana como “O todo de uma figura, ou seja, a medida da área seria formada pelos lados da figura como um quadrado”. Ao final da Atividade 2, a definição conceito de P3 passa a ser “Área é o tamanho da região interna”, ou seja, para P3, a medida da área de uma figura plana é a medida de sua região interna. Importante destacar que, nessa nova definição, P3 não menciona “lados”, ou seja, na experiência vivida percebeu que há figuras que não são caracterizadas por lados.

A definição de conceito de área que P3 tinha, inicialmente, era ligada às concepções numérica e geométrica e se limitava a polígonos regulares convexos. Após o conjunto de Atividades 1 e 2, as ideias mudaram e, tanto a concepção numérica como a concepção geométrica se sobressaem, porém, na definição apresentada, P3 busca uma generalização maior, acrescentando figuras também não poligonais, pois nessa nova definição, o termo ¨lados¨ não são citados. A ideia de grandeza não aparece na definição de conceito de P3. Ou seja, o conjunto de atividades vivenciadas por P3 não foram suficientes para acrescentar à definição de conceito de área, imagens ligadas a concepções de grandeza.

O que percebemos é que P3 em muitos momentos, não consegue fazer comparações por meio de grandezas, buscando recorrer na maioria das vezes a medida.

**k) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.**

Figura 186 - Resposta ao item (k) – Atividade 2




Fonte: Autor.

Em relação à definição de conceito de perímetro, P3 verbaliza, “Bom, o perímetro é o tamanho da fronteira”, e escreve, “O perímetro é o tamanho da fronteira”. O entrevistador pergunta, “O que você quer dizer com tamanho?”, P3 responde, “Ah é o quanto mede”.

**Considerações:** Resgatando na atividade 1 a definição de conceito de perímetro de P3, temos, “é a soma de todos os seus lados”. Ao final da intervenção, a definição de conceito de P3 é o “tamanho da fronteira” que, segundo ele, é a medida da fronteira.

Assim como ocorreu mudança na definição de conceito de área de uma figura plana, P3 deixa de apresentar uma definição de conceito de perímetro que considera apenas figuras poligonais e passa para a ideia mais geral, correta, de “tamanho da fronteira”. Fica, então, a questão de saber se a intervenção foi suficiente para P3 caracterizar a fronteira corretamente.

P3 apresenta, em sua definição de conceito de perímetro, a concepção numérica, isto é, perímetro é uma medida. E apresenta também a concepção geométrica, que é representada pela ideia de fronteira. As ideias de grandeza não são mencionadas.

**Considerações finais:** Ao final da atividade, o entrevistador agradece a colaboração de P3 e pergunta se pode responder algumas perguntas. P3 sinaliza que sim e o entrevistador pergunta “Ao trabalhar as figuras 7 e 8, item (b), foram as únicas folhas em que você inverteu o lado da folha, você trabalhou com a folha na horizontal e não na vertical, tem algum motivo para isso?”. P3 responde “O triângulo tem uma base, eu prefiro a base virada para mim. Do jeito que estava na folha, me incomoda um pouco.”

Na sequência a entrevista é encerrada, pois a bateria do celular de P3 se esgota.

### 8.3.5. Algumas conclusões, baseadas nas respostas apresentadas pelos participantes na Atividade 2

Nesta seção apresentaremos algumas conclusões baseadas nas respostas dos participantes P1, P2 e P3, apresentadas nas secções 8.3.2, 8.3.3 e 8.3.4.

Lembrando que os participantes que responderam a Atividade 1 são os mesmos que responderam a Atividade 2 e mantivemos a mesma identificação, isto é, o participante 1 (P1), por exemplo, também foi denominado por P1 na Atividade 2, o mesmo vale para os demais participantes.

Na atividade que iniciada no segundo dia, aplicada 7 dias após a atividade 1, os participantes são convidados a pavimentar quatro figuras planas sob uma malha quadriculada, impressas em folha de tamanho A4, utilizando para isso, como unidade de medida, peças quadriculadas (2cm de lado), feitas de papel canson. A medida do lado do quadradinho pode ser utilizada como unidade de medida de comprimento, esses quadradinhos serão utilizados ainda em outras atividades, bem como um conjunto de triângulos, feitos do mesmo material.

No item **(a),** os participantes deveriam reconhecer as figuras que possuem mesma medida de área e de perímetro, utilizando os quadradinhos como unidade de medida de área. P1 compara a quantidade de quadradinhos (unidades de medida), para identificar as figuras de maior área e de maior perímetro e apresenta confusão entre unidades de medida de área e unidade de comprimento. P2 e P3 apresentam dificuldades em fazer comparações entre fronteiras, P3 aparenta ter dificuldades com o termo “fronteira” e desenvolve melhor a atividade quando utilizado o termo “cerca”. Todos os participantes conseguem apresentar uma solução correta da atividade, se valendo das concepções numéricas, isto é, buscando estabelecer unidades de medida. P1 apresenta uma articulação da atividade sob o paradigma G0-G1, P2 e P3 mostram respostas que articulam com o paradigma G0. Nos subitens (a.1 e a.2), ao comparar o formato das figuras, P3 evoca imagens de conceitos contraditórias ao afirmar que figuras formadas pela mesma quantidade de quadradinhos são iguais apesar de não possuírem o mesmo formato (confunde área com superfície). Esse tipo de conflito, é um exemplo do que denomina Tall & Vinner (1981) por *fator de conflito potencial*, isto é, quando duas “partes” da imagem de conceito evocadas são conflitantes. Na fase de discussão, P3 se mostra surpreso ao perceber que figuras planas diferentes podem ter mesma medida de área. P2 e P3 confundem perímetro com uma superfície. Fica claro que mais atividades são necessárias, inclusive com situações em que figuras que possuem buracos possuam perímetro menor do que figuras sem buraco, buscando evitar assim, que os participantes criem *misconceptions* ligadas ao fato de figuras com buracos possuírem sempre perímetro maior que figuras sem buracos.

Em relação ao item **(b)**, nenhum dos participantes se valeram de efetuar sobreposições para decidir o maior perímetro dentre o conjunto de figuras, o que prevaleceu foi a concepção numérica, explicitada pela necessidade de adotar uma unidade de medida. Os participantes não apresentaram dificuldades em identificar as figuras de mesma medida de área. P1 mostrou confundir região interna e fronteira, porém percebe sozinho, denominado por Tall & Vinner (1981) por *fator de conflito potencial*, e na fase de discussão da entrevista esses elementos foram discutidos com o entrevistador, posteriormente P1 diz ter entendido a diferença. P2 e P3 tratam um pentágono como um triângulo que falta uma parte e apresentam dificuldades em relacionar fronteira com perímetro.

Nos itens **(c)** e **(d)**, os participantes deveriam pavimentar diferentes figuras (convexas e não convexas) utilizando para isso, quadradinhos de papel. No item **(c)**, nenhum participante apresentou dificuldades. Em relação ao item **(d)**, P1 apresenta um melhor entendimento entre área e região interna, perímetro e fronteira. P2 e P3 apresentaram dificuldades no entendimento de unidade de medida de área pois mesmo pavimento figuras não convexas, mostraram não conseguir calcular as áreas. Na fase de discussão, o entrevistador propõe uma discussão sobre esses elementos e tanto P2 como P3 se mostram surpresos ao perceberem que a quantidade de quadradinhos utilizados para pavimentar as figuras, é o valor da medida de área das respectivas figuras. Percebemos que os participantes precisam vivenciar mais experiências ligadas a pavimentação de diferentes tipos de figuras, trabalhadas sob o paradigma G0.

Utilizamos o Geoplano nos itens **(e)** e **(f)**, para que os participantes trabalhassem com o conceito de fronteira, sob os paradigmas G0-G1, utilizando para isso, barbante e figuras convexas e não convexas (com buraco). Como objetivo, P1, P2 e P3 deveriam comparar o perímetro das figuras. Os três participantes denominam a fronteira de uma figura com buraco por “fronteira interna” e “fronteira externa”. P1, P2 e P3 conseguem destacar as figuras de maior perímetro sem recorrer a utilização de unidades de medida. P1 reflete sobre o termos utilizados por ela, “fronteira interna” e “fronteira externa” assim como destacamos anteriormente, esse fato pode ser denominado com *fator de conflito potencial*, Tall & Vinner (1981), P1 deixa de utilizar estes termos. Em geral, observamos que os participantes conseguiram articular bem ideias sob os paradigmas G0-G1, possuem dificuldades em expressar de forma matemática; P1 utiliza a expressão “ocupa a área vazia”, os três participantes se referem a uma região de uma figura (bandeirinhas de festa junina) por “triângulo para dentro” e “triângulo para fora. P3 nota que ao comparar as fronteiras, estava considerando a região interna das respectivas figuras. Os três participantes buscaram utilizar unidades de medida ao comparar segmentos transversais, mesmo com materiais como o compasso disponível para utilização. Destacamos que no enunciado da **atividade (e)**, utilizamos o termo “retângulo com buraco” ao invés de região retangular com um buraco.

No item **(g)**, inspirada em D’Amore (2015), os participantes deveriam citar um exemplo de duas figuras geométricas planas A e B, de maneira que a região interna de A seja maior que a de B, e a fronteira da figura B seja maior que a de A. P1 e P2 apresentam como exemplo, uma figura sem buraco e comparam com uma figura com buraco. Ambos buscam generalizar essas ideias, P1 afirma “Qualquer figura com um buraco possui fronteira maior e parte interna menor do que ela própria sem o buraco”, segundo Sfard (1991), podemos caracterizar essa fase por condensação. Com isso, julgamos ser importante os participantes possam ter experiências com a manipulação de figuras com diversidade de tipos e que pudessem comparar figuras em que uma figura com buraco não tivesse área menor que outra sem buraco, trabalhando a mesma ideia com o perímetro, comparando figuras com buraco e figuras sem buraco sendo a figura de menor perímetro a figura com buraco. A de destacarmos que P1 apresenta um novo exemplo, para a mesma atividade, sem utilizar figuras com buraco, mostrando assim que seu conjunto figural realmente foi ampliado.

O objetivo com o item **(h)** é que os participantes apresentem a definição de conceito relacionada ao conceito de região interna. P1 apresenta como parte de sua imagem de conceito elementos de definição de ponto interior e região. P2 e P3 apresentam uma imagem de conceito ligada a “parte de dentro da figura”, a essa região citada, P2 inclui a fronteira da figura. O que nos leva a considerar que esses participantes devam trabalhar mais este elemento em G0, G1 e G2, de forma alternada.

Quanto o item **(i)**, o objetivo é verificar a definição de conceito dos participantes em relação ao conceito de fronteira de uma figura plana. P1 e P3 apresentam definições parecidas, ligadas a um lugar que divide a região externa da região interna, ou seja, um lugar neutro. P2 diz que fronteira é a delimitação de uma figura.

No item **(j)**, P1, P2 e P3 voltam a descrever a definição de conceito de área de figura plana, porém, tento passado pelas Atividades 1 e 2. Na imagem de conceito dos três participantes, os elementos apresentados estão relacionados a concepção numérica e a concepção geométrica, a concepção de grandeza não foi contemplada. Porém, fica nítido perceber que houve uma mudança significativa no entendimento do conceito de área após o conjunto de atividades aplicadas. O conceito de área de figura plana não é mais exclusivo a figuras planas poligonais e nem ligado a ideia de que medida da área é obtida apenas por meio de um conjunto de procedimentos. Os três participantes mostram elementos que indicam uma confusão entre o conceito de área e de região interna. Assim, esses alunos devem trabalhar com mais atividades referentes a área e ao perímetro, trabalhados como grandezas.

A atividade 2 é finalizada com ao item **(k)**, onde P1, P2 e P3 apresentam novamente a definição de conceito de perímetro de uma figura plana e assim como na atividade 1, as concepções numéricas de área bem como concepções geométricas surgem na definição de conceito dos três participantes, já a concepção de grandeza não foi mencionada. Porém, é possível reconhecer que a qualidade das respostas apresentadas. P1, P2 e P3 não associam exclusivamente o perímetro com a medida de figuras que possuem lados, os três associam perímetro ao contorno da figura e a uma unidade de medida padrão. P2 apresenta uma definição de conceito dividida em duas partes, um referente a figuras com lados e outra a figuras que não possuem lados e está apoiado ao uso do barbante para medição, ou seja, o barbante é a forma concreta de contorno da figura. Para se construir uma definição de perímetro, serão necessárias mais atividades trabalhadas sob o paradigma G1.

Sob à luz dos paradigmas Geométricos desenvolvidos por Parzysz (2006), verificamos que houve uma melhora significativa em relação aos três participantes.

Ao final desse conjunto de atividades, P1, de forma espontânea, externa que as atividades propostas lhe mostraram uma “Matemática diferente” da vivenciada em sala de aula. Ele se refere ao fato de refletir sobre atividades que “não usam números” e pela oportunidade de discussão a cada atividade. P1 percebe que lhe falta algo para poder resolver as atividades apresentadas, reconhece que está “engaiolado” e em alguns momentos sente dificuldade para “abandonar a gaiola”, pois se sente seguro nela.

### 8.3.6. Conclusões, baseadas nas análises das Atividades 1 e 2.

Ao final da aplicação das Atividades 1 e 2, podemos revisitar as concepções dos participantes trazidas à luz durante as entrevistas, identificar falhas das Atividades, sugerir melhorias e reestruturações e até mesmo colocar questões de pesquisa que não estão necessariamente ligadas à nossa.

Lembramos que para a elaboração e a aplicação das Atividades 1 e 2 seguimos os preceitos da entrevista reflexiva, (secção 6.3), porém, o fato de terem sido feitas on-line e inicialmente os participantes já apresentarem dificuldades, podemos considerar que cada encontro foi parecido com uma aula informal gravada. Vale ressaltar que em cada atividade, os participantes, dependendo das respostas apresentadas, iam sendo encaminhados as respostas de cada atividade, quando isso não era possível, uma possível solução era discutida. Utilizamos como referencial teórico os constructos Imagem de Conceito e Definição de Conceito, propostos por Tall e Vinner (1981) e os Paradigmas Geométricos desenvolvidos por Bernard Parzysz (2006), cujas ideias centrais podem ser encontradas no capítulo 5.

Na Atividade 1, P1, P2 e P3 apresentam suas concepções quanto aos conceitos de região interna ou superfície e fronteira de figuras planas. Durante toda a atividade, nenhum dos participantes fez comparações/sobreposições de forma espontânea e apresentaram forte dependência do uso de medidas para resolver as atividades, mostraram desconhecer o uso do compasso (como um objeto que transfere segmentos) e do Geoplano.

Nos itens **(a)** e **(b)**, os participantes dão suas definições de conceito de área de figura plana e de perímetro de figura plana. P1 e P2 apresentam uma definição estruturada pelo número de lados de polígonos (regulares e convexos), muito semelhante com a forma na qual esses conceitos são apresentados em materiais didáticos. P3 tenta definir área de uma forma mais geral, porém fica limitado à área do quadrado. Todos os participantes apresentaram concepções geométricas e numéricas e, em geral, de maneira não muita clara.

Quanto aos itens **(c)**, **(d)**, **(e)** e **(f)**, nenhum dos participantes soube diferenciar as curvas abertas das curvas fechadas.

Ao final do item **(f)**, e antes de iniciar o item **(g)**, as definições de ponto interno e ponto externo são apresentadas a P1, P2 e P3. Essas definições não se mostraram suficientes, pois P1 apontou pontos que se localizam sobre uma curva fechada, todos os participantes apresentaram dificuldade em interpretar o quantificador “qualquer”. Ao utilizar a definição apresentada, dado um ponto no plano, todos os participantes traçavam uma única semirreta, o que trouxe dúvidas para identificar se o ponto estava no interior ou no exterior de uma curva fechada plana. Colocamos como questão aberta para novas pesquisas a criação de abordagens com os quantificadores.

Nas atividades **(g)** e **(h)**, nenhum dos participantes apresentou 2 situações distintas ao receberem os pares de colares de barbante, a resposta comum foi colocar os colares de forma disjunta. Todos precisaram ser estimulados a apresentar uma situação em que um colar de barbante está contido na região interna delimitada pelo outro colar. Essa situação incomodou P1 e P3, que se manifestaram dizendo que era uma situação em que havia sobreposição de figuras (item **h**), isto é, os colares de barbante, que representam curvas unidimensionais, eram percebidos, por esses dois participantes, em conjunto com as superfícies planas que delimitam. Trazendo à tona a dificuldade de compreender objetos unidimensionais. Somando-se a essa dificuldade, houve a de se trabalhar com uma figura com "buraco".

Quanto ao item (**i**), todos fizeram a atividade sem apresentar dificuldades.

Em relação à atividade **(j)**, P2 e P3 tiveram dificuldades em destacar a fronteira de Goiás, mesmo marcando o Distrito Federal como contido na região exterior a Goiás.

Na atividade **(k)**, os participantes deveriam demarcar a fronteira do Distrito Federal com barbante e destacar suas regiões interna e externa. P1, P2 e P3 destacam apenas Goiás, mostrando dificuldade na compreensão de infinitude do plano.

No item **(l)**, P2 e P3 apontam apenas para o ganho de área, caso o mapa do Estado de Goiás fosse representado sem o Distrito Federal. Não percebem a diminuição do comprimento da fronteira. Como sugestão para uma próxima atividade, esse item poderia fazer menção à quantidade de barbante, trabalhando assim de forma mais concreta a ideia de diminuição do perímetro e de aumento da medida da área de Goiás.

Em relação aos itens **(m)** e **(n)**, P1, P2 e P3 manipulam bem o Geoplano, ferramenta que nenhum deles conhecia. No item **(m)**, que trabalha com o mapa estilizado do Estado de São Paulo, os participantes não apresentaram dificuldade. No item **(n)**, cuja representação trabalhada é o mapa de Goiás, todos os participantes apresentaram dificuldade em representar a fronteira do Distrito Federal, mostrando, com isso, dúvidas quando ao conceito de fronteira, sobretudo nas ideias de região interna e região externa.

No item **(o)**, P2 e P3 apresentam dificuldade em comparar a fronteira das figuras, P2 chega a afirmar que "não consegue pensar em nada". Tanto P2 quanto P3 não distinguem figuras convexas de não convexas. P3 afirma que a figura de maior contorno é a de maior área, embora em algum momento achasse que as fronteiras tivessem o mesmo comprimento. P1 consegue fazer as comparações entre região interna e fronteira e, ao final da atividade, revela que comparar as fronteiras é mais difícil do que comparar as áreas e, como justificativa, afirma “porque é muito visível”. Essa afirmação de P1 corrobora nossa hipótese de que estes participantes têm dificuldade em trabalhar com objetos unidimensionais. Certos dessa possível dificuldade, procuramos trabalhar ao longo da Atividade 1 com o barbante, que tem função de representar um objeto unidimensional e, assim, trabalhamos sob o paradigma G0-G1 de Parzysz (2006). Aos leitores que porventura se inspirarem nesse item para trabalhar em sala de aula, salientamos que em algum momento a representação de curvas unidimensional por objetos concretos, como barbante, linha, corda, fio, arame (objetos que possuem espessura) devem ser trabalhados posteriormente sob o paradigma G2, geometria de demonstração. Como sugestão para essa atividade, ambas as figuras poderiam ter seus tamanhos aumentados, para que o barbante seja colado com maior facilidade e maior exatidão, favorecendo assim a comparação entre o uso em cada uma das fronteiras. E assim como foi feito nessa aplicação, as figuras precisam estar em folhas separadas, favorecendo a comparação.

Quanto a item **(p)**, os participantes não apresentaram dificuldade. Alguns não conheciam as moedas japonesa e chinesa.

Em relação ao item **(q)**, P1, P2 e P3 apresentam dificuldade ao resolvê-lo, relatando que o fato de terem que fazer comparações entre figuras, sem uso de medida, deixa a atividade difícil. Todos tiveram dificuldade em verificar, entre as figuras 1 e 3, qual utiliza mais barbante no contorno. Todos, em algum momento da resolução, passaram pela ideia de que a figura de maior área tem maior perímetro. P2 é o único que tem a ideia de utilizar o barbante para comparar as fronteiras, porém chega à conclusão de que todas utilizam a mesma quantidade de barbante. P1, ao ser estimulado, utiliza a desigualdade triangular e, com isso, concluí que a figura 3 possui fronteira maior do que a figura 1. Todos se impressionam ao verificarem que é possível resolver corretamente a atividade sem o auxílio de medida.

Ainda em relação ao item **(q)**, torna-se preocupante o fato de os participantes não conseguirem fazer comparações, mesmo com auxílio de materiais concretos, como o compasso e o Geoplano.

O item **(r)** é uma atividade em que os participantes precisam pesquisar figuras com buraco e foi realizada pelos três participantes após a entrevista.

Em relação à **Atividade 2**, os mesmos três participantes da Atividade 1 apresentam “novas concepções” quanto aos conceitos de região interna ou superfície e fronteira. Utilizamos o adjetivo “novo”, pois, P1, P2 e P3 trazem consigo a experiência vivenciada ao longo da Atividade 1.

No item **(a)**, P1, P2, P3 não apresentam intimidade ao trabalhar com medidas fora do padrão, como utilizar o lado de um dos quadradinhos como unidade de medida. Destaque para P1 que apresenta uma confusão entre utilizar o lado do quadradinho como unidade de medida e a área do quadradinho. Isso porque P1 tem dificuldade em diferenciar o contorno do quadradinho de sua medida de área. P3, por exemplo, afirma que figuras que são preenchidas pela mesma quantidade de quadradinhos são "quase as mesmas figuras". De forma espontânea, nenhum dos participantes destacou que as figuras possuem mesma medida de área, porém perímetros diferentes.

Quanto ao item **(b)**, P1, P2 e P3 não diferenciaram as figuras quanto à convexidade. De forma espontânea, não notaram que trabalharam com figuras de mesma medida de área e perímetros diferentes. Todos tiveram dificuldades em utilizar, como unidade de medida, a diagonal do quadradinho. P1 se valeu do Teorema de Pitágoras para calcular a medida da diagonal. P3 foi orientado a utilizar um compasso para comparar a diagonal do quadradinho e seu lado. Nenhum dos participantes destacou que dentre as figuras apresentadas, a figura de maior fronteira também é a figura de maior perímetro. P1, por exemplo, calcula o perímetro das figuras e, a partir daí, conclui qual a figura de maior fronteira. Ao trabalharem com as figuras 7 e 8, os três participantes deixam a folha na horizontal e P3 diz que para ele é mais fácil trabalhar quando a base do triângulo está na horizontal.

Nos itens **(c)** e **(d)**, apenas P1 verbaliza que, no conjunto de figuras, a de maior área também é a de maior região interna, o mesmo para a fronteira e o perímetro. P2 e P3 afirmaram não saber calcular a medida da área da figura 10 e, a partir daí, percebem que o ladrilhamento que estavam fazendo se relaciona com a medida da área da figura. Um ponto fraco desses itens da Atividade 2 é o fato de que as figuras com "buraco" tinham menor área do que as demais figuras e também tinham o maior perímetro, criando a falsa percepção de que esse tipo de figura sempre será a de menor área e maior perímetro, ao ser comparada com outras figuras que não possuem "buraco", por exemplo.

Em relação aos itens **(e)** e **(f)**, os três participantes não tiveram dificuldade em resolver o item **(e)**, mas no item **(f)**, P1 e P2 conseguem comparar as fronteiras sem necessidade de atribuir medidas, P3 atribui medida aos segmentos e, a partir daí, consegue resolver a atividade. P3 também apresentou a ideia de que a figura de maior área possui maior perímetro, o que posteriormente foi corrigido por ele mesmo.

No item **(g)**, os participantes são convidados a dar um exemplo de duas figuras de maneira que uma tenha medida de área maior do que a outra e, ao mesmo tempo, valesse o inverso para o perímetro. P1 e P3 apresentam como exemplo um par de figuras em que uma delas possui buraco. P2 faz um retângulo e uma estrela, o que mostra que o conjunto figural trazido por eles, que era limitado por um conjunto de figuras poligonais regulares e convexas, é ampliado para figuras não convexas e que podem ser modificadas não apenas utilizando uma ampliação ou redução da figura, tipo uma homotetia.

Importante destacar que essa atividade (g) possibilitou que dois participantes verbalizassem claramente, de forma espontânea, que no objeto "caminho fechado", na concepção deles, a região interna faz parte deste objeto. Ou seja, para estes participantes um caminho fechado é bidimensional e não unidimensional.

Quanto ao item **(h)**, os participantes são convidados a definir região interna de uma figura plana. P1 utiliza as definições de ponto interno e ponto externo apresentadas na Atividade 1 para definir região interna, P2 e P3 denominam região interna como "parte de dentro da figura".

No item **(i)**, P1, P2 e P3 são convidados a definir fronteira de uma figura plana. P1 diz "é o que divide a área externa e a área interna", P2 define como "delimitação da figura", P3 verbaliza "é a parte que divide a região interna da região externa da figura".

No item **(j)**, os participantes são convidados novamente a dar definição de conceito de área de uma figura plana. Assim como na Atividade 1, os participantes apresentam as concepções geométrica e numérica, porém a qualidade das respostas e a clareza com que P1, P2 e P3 apresentam definições de conceito individuais ligadas às concepções numéricas e concepções geométricas, porém concepções ligadas à grandeza não foram mencionadas, o que revela que mais atividades devem ser propostas. O mesmo ocorre com o item **(k)**, em que P1, P2 e P3 são convidados a dar, após a intervenção, definição de conceito de perímetro de uma figura plana.

Os participantes não apresentaram, em suas Imagens de Conceito, concepções ligadas à área e ao perímetro como grandezas. Essas ideias nos pareceram fazer falta para que pudessem desenvolver melhor as atividades, uma vez que mostraram que, ao sentirem dificuldade, partem para estratégias ligadas às concepções numéricas, buscando formas de medir (por vezes se frustrando). O fato das ideias sobre área e perímetro não estarem bem elaboradas pelos participantes, junto com o fato de entenderem uma curva fechada como uma superfície, parece favorecer um entendimento errôneo de que área e perímetro possuem mesma dimensão. Isso é externado pelos participantes desde o início da atividade 1. Por outro lado, é possível observar um melhor entendimento dos conceitos de área e de perímetro como grandezas ao longo das atividades 1 e 2. Em muitos momentos, as discussões foram naturalmente levantadas e propostas pelos participantes, devido ao uso de figuras com “buracos”, que mostrou ter um bom potencial para discussões sobre região interna, região externa, fronteira, área e perímetro. Essas discussões surgiram em momentos em que foi necessário pensar em estratégias para resolver situações em G0 (por exemplo, efetuar comparações simples) e também quando foi necessário elaborar soluções em G1- G2 (por exemplo, mostrar que um ponto está ou não no interior de uma figura).

Importante destacar que duas atividades aplicadas em 2 dias se mostraram insuficientes para mudar concepções que estão “enraizadas” por anos e precisam ser evocadas para serem discutidas e superadas. Quanto ao nosso referencial teórico, os Paradigmas de Parzysz (2006) nos inspiraram na elaboração do conjunto de atividades apresentadas e o que percebemos é que os participantes se mostraram, por vezes, fora de G1 e G2. Por exemplo, todos apresentaram muita dificuldade para trabalhar com materiais concretos e para fazer comparações, mesmo que fosse possível fazer sobreposições ou até mesmo comparações visuais. O que nos leva a concluir que esses participantes não articulam bem uma geometria de observação e uma geometria de demonstração. Assim como já apresentado anteriormente, os três participantes nas atividades 1 e 2 não apresentaram uma definição de conceito que contemplasse concepções geométrica, numérica e de grandeza, o que nos permite concluir que mais experiências com o conceito de área e de perímetro como grandezas devem ser vivenciadas pelos alunos ao longo do Ensino Fundamental.

Voltamos a lembrar que as Atividades foram aplicadas de forma remota junto ao fato do longo tempo de duração, podem ter prejudicado a qualidade da “entrevista" e da coleta de informações, se comparada a uma forma presencial.

Sugerimos que as atividades sejam aplicadas em no mínimo 5 encontros, com duração máxima de 1h para cada um e em diferentes dias para que haja tempo de reflexões, tanto para os participantes como para o “entrevistador”. Também sugerimos que sejam incluídos itens em que os participantes possam trabalhar com réguas não graduadas, compasso e Geoplano, de forma a estimular o hábito de comparar grandezas sem necessidade de medida. Também julgamos necessário os participantes manipularem algum material semelhante a arames (que representem caminhos abertos e caminhos fechados, planos e não planos).

## 9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, destacamos os pontos relevantes que se colocaram durante a realização de nosso trabalho.

Essa pesquisa teve como objetivo propor um conjunto de atividades que possam contribuir com uma maior diversidade de ideias ligadas às imagens de conceito individuais, referentes à área e ao perímetro de figuras planas (trabalhados como grandeza), de alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais. E nos propusemos a investigar as concepções desses alunos referente aos conceitos de área e de perímetro de figuras planas durante a aplicação de um conjunto de atividades. Escolhemos como fundamentação teórica as ideias de Imagem de Conceito e de Definição de Conceito, defendidas por Tall e Vinner (1981) e os quatro Paradigmas Geométricos desenvolvidos por Bernard Parzysz (2006).

Como a aplicação das atividades coincidiu com o período de distanciamento social, devido à pandemia de COVID-19, a proposta que tínhamos elaborado, de aplicar as atividades utilizando o formato de entrevista reflexiva, foi adaptada e, de certa forma enriquecida, para que o conjunto de atividades fosse aplicado on-line. Por mais que tenhamos tentado seguir os preceitos da entrevista reflexiva, entendemos posteriormente que o que foi realizado se aproximou de uma aula individual on-line, seja pelo formato, seja pelo fato de os entrevistados terem apresentado dificuldades no início das atividades e terem sido, em muitas oportunidades, encaminhados as respectivas soluções.

Durante a atividade 1 percebemos que 2 participantes declararam que ao identificarem um caminho fechado, eles automaticamente consideram o interior desse caminho como parte do caminho, ou seja, para estes, um retângulo e uma superfície retangular "são os mesmos objetos", o que nos traz à luz, possíveis entendimentos de porquê área e perímetro são confundidos uma vez que estes possuem, por exemplo, dimensões diferentes.

Sobre este tipo de situação, foi possível perceber que uma figura que possua o que chamamos de "buraco" provocou naturalmente discussões, desde o início da aplicação da atividade, sobre os conceitos de região interna, região externa, fronteira e sobre as dimensões desses objetos. A manipulação desses tipos de figura possibilitou analisar o desenvolvimento dos conceitos de área e de perímetro como grandezas dos participantes, pois ao longo das atividades, estes se questionaram sobre como expressavam esses conceitos e à medida que o entendimento "melhorava" a forma de expressar esses objetos também ficou mais clara. Podemos destacar que figuras planas com "buraco", por desafiarem os participantes a buscar um maior entendimento sobre região interna, região externa e fronteira, faz com que naturalmente a geometria de observação e a geometria de demonstração sejam trabalhadas.

As definições de conceito apresentadas pelos participantes não contemplaram concepções de grandeza e ao longo das atividades foi possível verificar que nas atividades em que os participantes deveriam identificar figuras de maior fronteira ou maior região interna, mostraram uma dificuldade ímpar por parte destes, que sempre que possível recorreram a "criar" unidades de medida, ainda que simples comparações ou sobreposições fossem suficientes para resolver os itens das atividades, o que nos leva a refletir se atividades sob o paradigma G1 tem sido negligenciado ao longo do Ensino Fundamental.

Por se tratar de participantes do 7.º ano e 9.º ano do Ensino Fundamental, esperávamos que estes pudessem desenvolver bem as atividades sob o paradigma G1, o que não ocorreu, mostrando assim dificuldades em trabalhar com materiais concretos como cola, barbante e Geoplano. Era esperado que os participantes soubessem manipular compasso (material escolar utilizado ao longo do Ensino Fundamental) e o que percebemos é que nenhum dos participantes soube utilizá-lo para efetuar comparações entre segmentos de reta. Muitos momentos em que o uso do compasso, por exemplo, ajudaria, os participantes buscaram formas algébricas de resolução ou simplesmente não souberam responder, evidenciando a falta de uma maior habilidade com atividades em G0.

Quanto ao nosso referencial teórico, os Paradigmas de Parzysz (2006), os participantes apresentaram dificuldades em G1 e G2, sobretudo em G1, ou seja, atividades que poderiam ser respondidas utilizando sobreposição de segmentos ou regiões internas, foram feitas por meio de unidades de medida improvisadas pelos participantes. O uso de que convencionamos chamar de figuras com buracos (figura composta por pelo menos duas curvas planas fechadas onde uma está no interior da outra), trouxe à luz as concepções dos participantes em relação aos conceitos de região interna (área como grandeza) e fronteira (perímetro como grandeza), proporcionando discussões sobre estes elementos geométricos.

Todos os participantes também apresentaram dificuldades em diferenciar área de região interna e perímetro de fronteira. Na atividade 1 foi possível notar que os participantes, sempre que solicitados, apresentaram ideias ou exemplos a um conjunto limitado de figuras como quadrado, retângulo, triângulo, circunferência e elipse. Ao longo da atividade 2, dois participantes mostraram que não associavam o processo de pavimentação de uma figura com sua medida de área e os três participantes começaram a desenvolver a ideia de comparações entre regiões internas e fronteiras. Ficou nítido ao fim da atividade 2 que os participantes mudaram a ideia, limitada, de área e de perímetro de figuras planas que carregavam consigo, porém não suficiente para que as concepções de grandeza ligadas à área e ao perímetro aparecessem nas definições de conceito apresentadas individualmente. Porém percebermos que as concepções de área e de perímetro ficaram mais sofisticadas.

Segundo Sfard (2009), a construção de um conceito passa pelas etapas de internalização e condensação. Ainda segundo a autora, é na fase de condensação que o aluno passa a fazer generalizações, comparações e combinações com outros processos. É na condensação que nasce o conceito. Assim, torna-se importante que, nessas etapas, alunos do Ensino Fundamental trabalhem com um conjunto com uma grande diversidade de figuras, inclusos figuras com buracos pelos motivos apresentados nesta sessão, sob os paradigmas G0, G1 e G2, sobretudo em G1 com as concepções de grandeza desses elementos geométricos. Na contramão, destacamos que o conjunto figural apresentado pelos participantes, durante as atividades 1 e 2, se mostraram restritos a figuras normalmente encontradas em livros didáticos (quadrado, triângulo, retângulo, trapézio, circunferência e elipse). Esse conjunto restrito de figuras que os participantes mostraram conhecer pode acarretar generalizações particulares, a partir de propriedades particulares dessas figuras. Por exemplo, considerar área apenas de figuras que possuem lado. Percebemos ao longo das atividades que figuras com curvas ou não convexas faziam com que os participantes separassem, ainda que mentalmente, as figuras que "fazem parte da geometria ensinada" no colégio das figuras que "não fazem parte da geometria ensinada" no colégio. Contribuindo assim com uma visão distorcida da Matemática.

Destacamos que a discussão permitida sobre as atividades e sobre a Matemática envolvida, durante a aplicação destas, para nossa surpresa, causou estranhamento aos participantes. Por conta dessas discussões sem julgamentos, e sobre estar certo ou estar errado, foi comum ouvirmos "não sabia que poderia fazer isso sem números", "eu me sinto mais livre", "uma ciência que não se questiona não é uma ciência, é um dogma", essas ideias nos remeteram às ideias do Professor Ubiratan D'Ambrosio (2021), quanto ao termo "engaiolamento", utilizado por ele. "(...) Por isso eu introduzo o conceito das gaiolas epistemológicas. Você tem um conhecimento que se desenvolve dentro de uma gaiola, e quem controla a gaiola é engaiolado (...)".

Em relação às contribuições de nossa pesquisa, para o Ensino de área e de perímetro de figuras planas, diante dos resultados obtidos na análise dos resultados das 1 e 2, nos acende um sinal de alerta para o fato de alunos do Ensino Fundamental, anos finais, apresentarem concepções de área e de perímetro limitadas a um conjunto restrito de figuras poligonais convexas, ideias estas ligadas a concepções numéricas e geométrica, não apresentando concepções ligadas a grandeza e esse resultado pode ser a consequência da negligência de atividades que trabalhassem área e perímetro como grandezas sob os paradigmas G0, G1 e G2, sobretudo G1, Parzysy (2006). Segundo Sfard (2009), a construção de um conceito passa pelas etapas de internalização e condensação, assim, é importante que nessas etapas, alunos do Ensino Fundamental trabalhem com um conjunto diverso de figuras, incluindo figuras com buracos, sob os paradigmas G0, G1 e G2, sobretudo em G1 e buscando trabalhar as concepções de grandeza desses elementos geométricos em atividade de interesse dos alunos. Esse texto também traz à luz, o relato de três alunos do Ensino Fundamental, anos finais, que se surpreenderam em trabalhar com área e com perímetro como grandezas e utilizando figuras não convencionais (geralmente não trabalhadas na Escola Básica), ao fim das atividades, esses alunos não só mudaram a visão deles em relação a esses objetos da geometria, mas também mudaram a visão que possuíam da Matemática.

Consideramos importante que mais trabalhos sejam realizados e voltados a ouvir as concepções dos participantes em relação à área e ao perímetro de figuras planas.

Quanto as atividades 1 e 2 aplicadas, essas se mostram muito longas para serem aplicadas em dois dias, assim, encorajamos que sejam aplicadas em no mínimo 5 encontros. Percebemos a necessidade de que seja incluído atividades iniciais elaboradas de forma que o participante trabalhe com o compasso, barbante, cola, Geoplano etc.

Ficou evidente para nós que mais atividades devem ser trabalhadas em G1, até que as ideias de comparação estejam melhor entendidas, e propondo comparações entre figuras que possuem buracos e figuras sem buracos, incluindo casos em que figuras com buraco tenham perímetro menor que figuras sem buraco e figuras com buraco tenham área maior que figuras sem buraco, evitando assim generalizações que encaminhem a *misconceptions*.

Ao propor atividades em G1, recomendamos que sejam propostas atividades que promovam comparações simples entre segmentos, utilizando barbante, também utilizando compasso e incluindo atividades em que curvas fechadas sejam “bastante” trabalhadas no Geoplano.

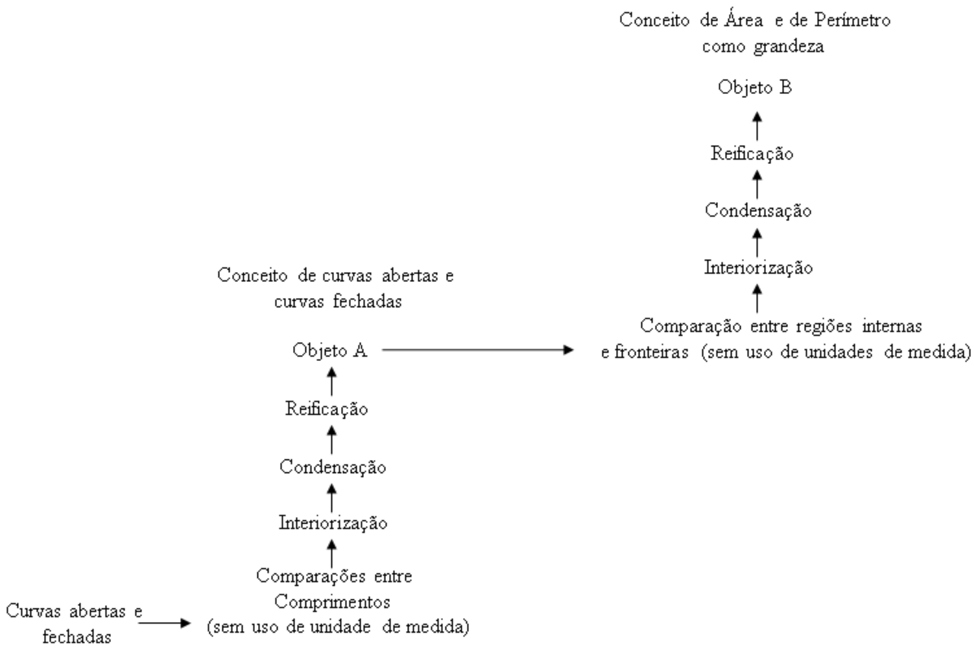
### 9.1.1. Proposta de atividades para trabalho de área e de perímetros como grandezas

Apresentamos a seguir, ver FIGURA 187, um diagrama que pode auxiliar na elaboração de atividades que trabalhem os conceitos de área e de perímetro com base nos estudos de Sfard (1991), que defende que o processo de criação de um conceito matemático ocorre em três fases distintas: **interiorização**, **condensação** e **reificação**. A interiorização envolve a familiarização do estudante com os processos que levam à criação de um novo conceito matemático, utilizando operações em objetos matemáticos para organizá-lo. Exemplos práticos, a comparação do comprimento de curvas fechadas planas para conceber o conceito de perímetro.

Na fase de condensação, o estudante começa a pensar no processo como um todo, realizando generalizações e compactando sequências de operações. É nessa fase que o conceito começa a nascer, como entender que o perímetro é um caso particular da grandeza comprimento.

A reificação é uma fase em que o indivíduo é capaz de "ver" o conceito como um objeto e aplicá-lo a diferentes contextos matemáticos, marcando o início da interiorização de conceitos de nível mais alto. No entanto, essa fase é desafiadora e exige esforço, podendo ocorrer de forma súbita. Uma vez reificado, o conceito pode ser aplicado a outros objetos matemáticos, ampliando sua compreensão e aplicabilidade, como por exemplo, relacionar a medida da área de uma figura plana com sua superfície em diferentes tipos de figuras.

Figura 187 – Diagrama para trabalho com conceito de área e de perímetro




Fonte: Autor.

Sugerimos que curvas abertas e fechadas sejam inicialmente trabalhadas (diversificando os tipos de formas), sob o paradigma G-G1, sem utilização de unidades de medida e instrumentos que possuam graduação, favorecendo assim a comparação entre essas curvas. Julgamos necessário nesse momento o uso do Geoplano para que os estudantes possam ter uma representação inicial de um objeto de dimensão 1. Assim, não recomendamos trabalhar com curvas fechadas apenas somente sobre superfícies como folhas de papel, que podem contribuir para uma ideia bidimensional dessas curvas (dar a ideia de que seu interior é preenchido). Também sugerimos trabalhar essas curvas com materiais mais rígidos, como o arame por exemplo.

Em um segundo momento, recomendamos o trabalho com curvas fechadas e sua região interna (diversificando os tipos de formas, incluindo figuras com “buracos”). Mais uma vez, buscando favorecer comparação entre as áreas e os perímetros, sem a necessidade de utilização de unidades de medida.

Com estas considerações, deixamos, como produto final desta Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, um conjunto de atividades que podem ser usadas em salas de aula de Matemática da Educação Básica, para alavancar ideias relacionadas à área e ao perímetro de figuras planas.

## 10. REFERÊNCIAS


BARBOSA C. P. **Desenvolvendo o pensamento geométrico nos anos iniciais do ensino fundamental: uma proposta de ensino para professores e formadores de professores**. 186.f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2011.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação, (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF.

COSTA A. P., SANTOS M. C. Níveis de pensamento geométrico de alunos do Ensino Médio do Estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. EM TEIA, vol.7, no3, 2016.

EVES, H. Introdução à história da matemática: 1ª Edição. Campinas, Editora da Unicamp: 2004.

D'AMORE, B. et al. Primeiros elementos de semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

D'AMORE, B.; FANDIÑO, M.I. **Relaciones entre Área y perímetro**: **Convicciones de maestros y de estudiantes**. Relime, pp. 39-68, 2006.

DIAS, M. S. S. **Um Estudo da Demonstração no Contexto da Licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico**. 214f. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

FACCO, S. R. **A Construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais.** 191.f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

FERREIRA, L. F. D. **Conceito de área: uma proposta sob a ótica de ensino-aprendizagem**. 185.f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

KAWAMOTO, M. **Habilidades de visualização em Geometria espacial: um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio**. 180.f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2016.

LORENZATO S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista** - SBEM, vol. 4, p. 3-13. Florianópolis, 1995.

MELO, M. M. C de. **Efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de perímetro**. 197.f. Dissertação de Mestrado em Educação – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

PARZYSZ, B. **La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs de écoles: de quois s'agit-it? Quaderni di Ricerca in Didattica**, Italia, v. 17, p. 128-151, 2006.

SANGIORGI, OSVALDO Caderno de exercícios e estudo dirigido – Matemática, Edição do Professor v.7, Editora Nacional, 1974.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, v.22, p1-36, 1991.

SZYMANSKI, H. A entrevista na pesquisa em educação: a prática reflexiva. 1. ed. Brasília: Liber Livro, 2004.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, New York, n.12, p. 151-169, may, 1981.

TALL, D.; Concept image and concept definition. **Senior Secondary Mathematics Education**, Inglaterra, p. 37-41, jan, 1988.

USISKIN, Z. (1982). Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry. Final report of the CDASSG Project. Chicago: Univ. of Chicago.

AMBROSIO, U., (2021) Revista de Educação Matemática – Setembro de 2021 – Ubiratan D'Ambrosio e a Decolonialidade na Etonomatmática. 19/04/2023. Disponível em: http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/173/1732457002/html/index.html

WAGNER, E., (2016) PAPMEM – Janeiro de 2016 – Tópicos de História da Matemática. YouTube, 27/01/2016. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Dry7PtAC_4Q&t=2536s

# Anexos

## ANEXO 1 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Participantes/oficina)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário/a, da pesquisa intitulada **Concepções de área e de perímetro de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental**, que tem como pesquisador/a responsável Fernando Siqueira Vieira Lima, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado/a por Prof. Dra. Vera Helena Giusti de Souza, os quais podem ser contatados pelo e-mail fsvlima@ime.usp.br ou telefone 11-99140-0122. O presente trabalho tem por objetivos: investigar a imagem e as convicções que o(a) aluno(a) da Educação Básica possui a respeito dos conceitos de área e de perímetro. Minha participação consistirá em responder um questionário. Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

São Paulo, _____de _________________________ de 2020

_______________________________________________________________

Nome e Assinatura

**ANEXO 2 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Colégio)**

Eu compreendo os direitos dos participantes da pesquisa: **Concepções de área e de perímetro de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental**, orientada por Prof. Dra. Vera Helena Giusti de Souza, e que tem como pesquisador/a responsável Fernando Siqueira Vieira Lima, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, os quais podem ser contatados/as pelo e-mail fsvlima@ime.usp.br ou telefone 11-99140-0122. Na qualidade de responsável pela ______________________________________________________________ (nome da escola ou instituição), autorizo a participação de _________________________________________________________(estudantes/professores/ coordenadores) na mencionada pesquisa e compreendo como e porque esse estudo está sendo realizado. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

São Paulo, _____de ________________________ de 2020

___________________________________________________________________

Nome, Cargo e Assinatura do responsável

## ANEXO 3 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Responsável)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ___________________________________________________________, RG ______________________________, declaro saber da participação de meu/minha filho/a ________________________________________________ na pesquisa **Concepções de área e de perímetro de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental**, desenvolvida junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelo/a pesquisador/a Fernando Siqueira Vieira Lima, orientado/a por Prof. Dra. Vera Helena Giusti de Souza, os/as quais podem ser contatados/as pelo e-mail fsvlima@ime.usp.br ou telefone 11-99140-0122. O presente trabalho tem por objetivos: investigar a imagem e as convicções que o(a) aluno(a) da Escola Básica possui a respeito dos conceitos de área e de perímetro, e os instrumentos utilizados são: câmera fotográfica (fotografar apenas o material manipulado pelo entrevistado), gravador de áudio e vídeo e um observador que fará anotações a respeito do que for verbalizado, bem como gestos, sentimentos e material utilizado. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os/as responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

São Paulo, _____de _________________________ de 2020

____________________________________________________________________

Nome, Assinatura do responsável

**ANEXO 4 – Atividade 1: Sugestões de respostas**

## Atividade 1

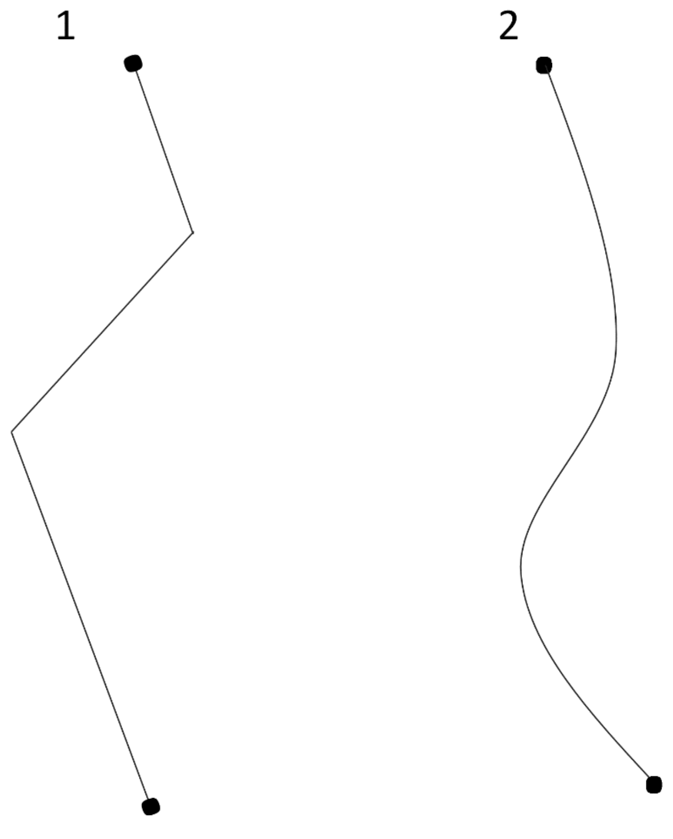
a) Escreva com suas palavras como você define a área de uma figura plana.

**Resposta pessoal.**

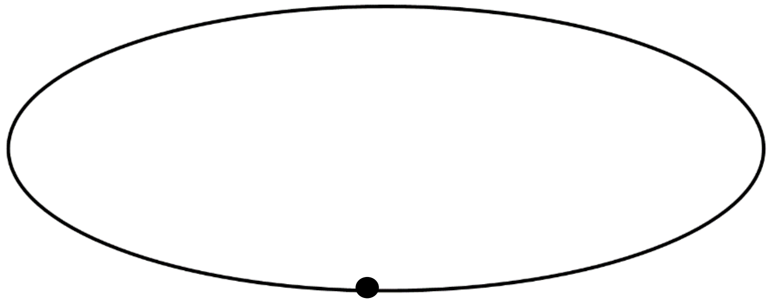
b) Escreva com suas palavras como você define o perímetro de uma figura plana.

**Resposta pessoal.**

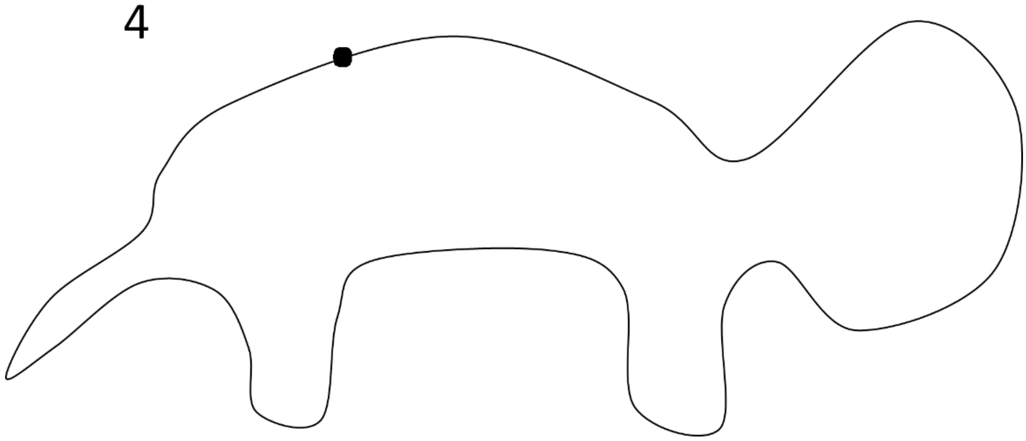
c) Observe e reproduza os caminhos a seguir utilizando os fios de barbante disponíveis. Em seguida, responda às questões.



3



4



d) Há diferenças nos caminhos? Qual(is) ?

**Resposta: As figuras 1 e 2 são abertas, já as figuras 3 e 4 são fechadas.**

e) Algum caminho delimita uma região do plano?

**Resposta: Nas figuras 3 e 4.**

f) Qual desses caminhos você lembra de ter visto nas aulas de Matemática na escola?

**Resposta pessoal.**

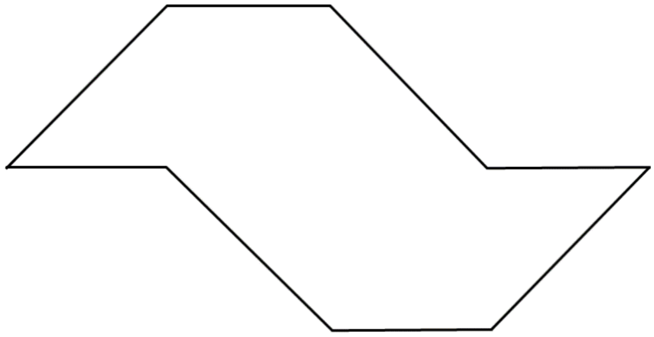
g) Você recebeu uma folha de papel que representa uma região limitada plana e alguns colares de barbante que representam curvas fechadas. Escolha dois desses colares e use-os sobre a folha, à vontade. Crie duas dessas situações e que você considera diferentes. Justifique.

**Resposta pessoal. Espera-se que o entrevistado posicione um colar na região interna formada pelo outro colar.**

h) Em cada uma das situações que você criou, destaque a região interior e a região exterior dos desenhos formados com os colares de barbante.

**Resposta pessoal.**

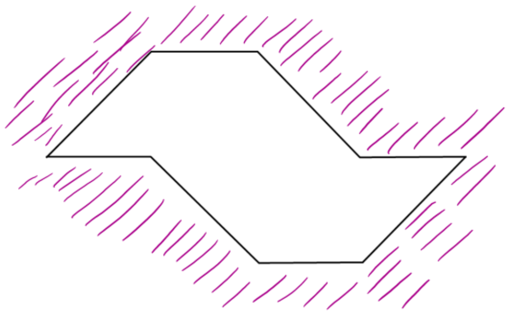
i) O desenho a seguir representa um mapa estilizado do Estado de São Paulo.



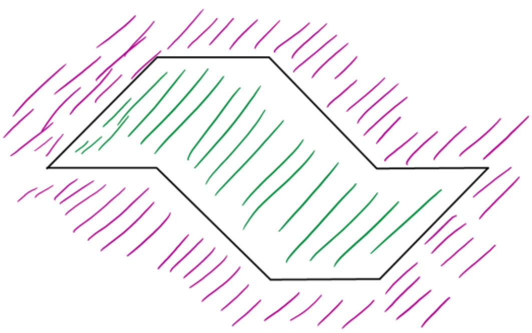
i.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de São Paulo.

**Resposta pessoal.**

i.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de São Paulo.



i.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de São Paulo.



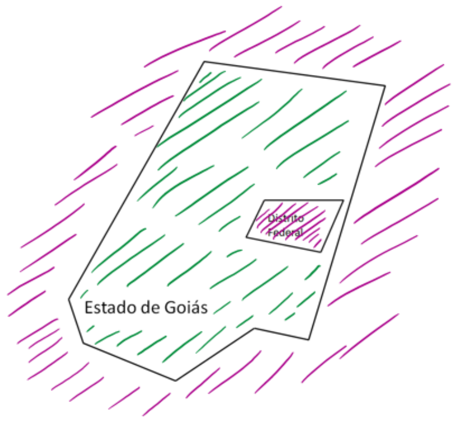
j) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado de Goiás e do Distrito Federal. Lembre-se que o Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás.


j.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Estado de Goiás.

**Resposta pessoal.**

j.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Estado de Goiás.


j.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Estado de Goiás.

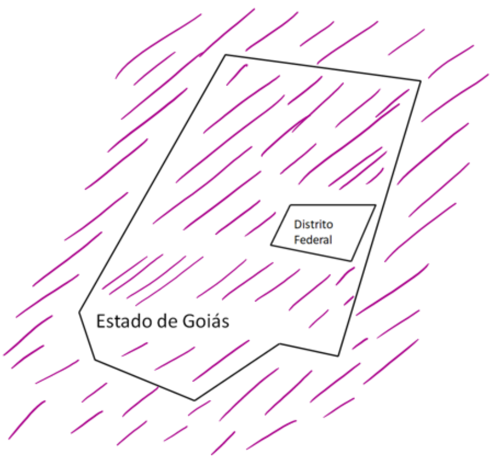


k) O desenho a seguir representa mapas estilizados do Estado brasileiro de Goiás e do Distrito Federal.


k.1) Com o barbante, reproduza sobre o mapa a fronteira do Distrito Federal.

**Resposta pessoal.**

k.2) Com a caneta roxa, pinte a região que não pertence ao Distrito Federal.

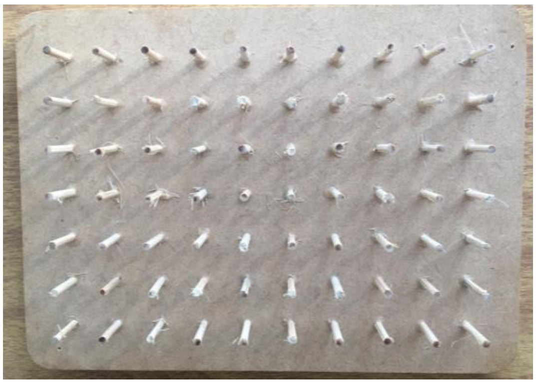



k.3) Com a caneta verde, destaque a região que pertence ao Distrito Federal.

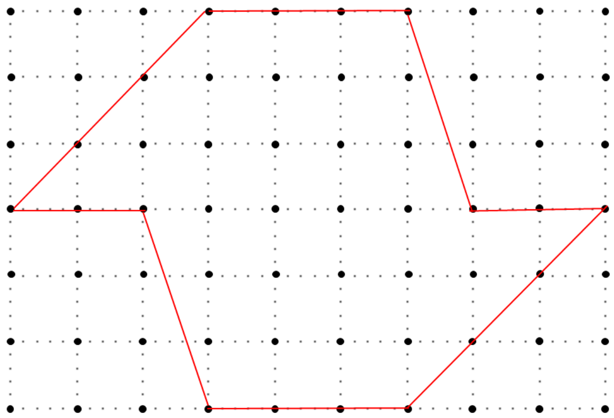
l) Um aluno representou o Estado de Goiás conforme o mapa estilizado abaixo, sem o Distrito Federal. O que o Estado de Goiás ganharia ou perderia se o mapa estivesse correto?


**Resposta: Esperasse que o entrevistado aponte para o ganho territorial e a diminuição da fronteira.**

O Geoplano é um material educativo, criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno em 1961. É formado por uma placa, geralmente de madeira, sobre a qual é marcada uma malha quadriculada ou pontilhada e, em cada um dos pontos da malha é fixado um pino. Com a ajuda de um barbante ou linha, pode-se "desenhar" sobre o Geoplano, utilizando os pinos.



m) Reproduza no Geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de São Paulo de acordo com o mapa estilizado do item l.



No Geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de São Paulo? E a fronteira? E a região externa?

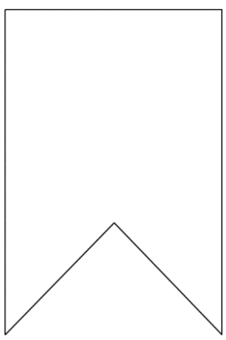
**Resposta: Esperasse que o entrevistado apresente o barbante como fronteira do Estado de São Paulo e a região interna do barbante como região interna do mapa. A região que não compõem a região interna e que não contém a fronteira, podemos denominar como região externa.**

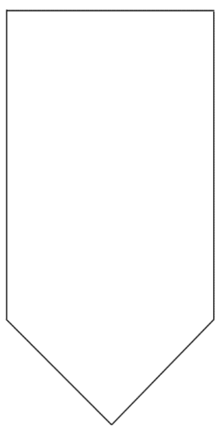
n) Reproduza no Geoplano, com barbante, a fronteira do Estado de Goiás, de acordo com o mapa estilizado o item m.

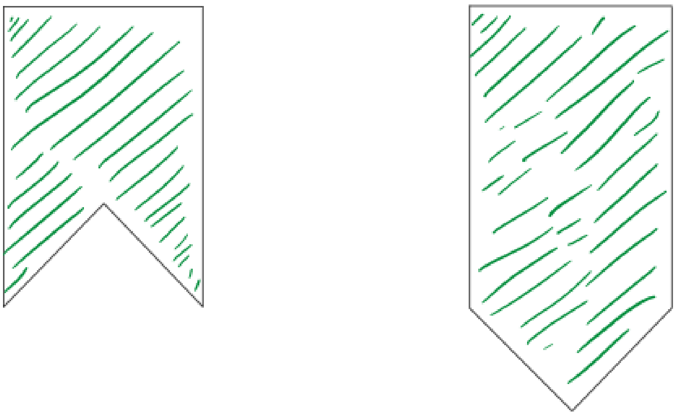
No Geoplano, como você poderia identificar a região interna do mapa do Estado de Goias? E a fronteira? E a região externa?

**Resposta: Esperasse que o entrevistado apresente o mapa estilizado do Estado de Goiás, reproduzindo também a fronteiro que Goiás faz com o Distrito Federal. Destacando que o interior do Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás.**

o) Cole barbante sobre a fronteira das figuras a seguir. Em seguida, pinte com caneta verde o interior de cada figura.







O que podemos dizer sobre as regiões internas? E sobre as fronteiras?

**Resposta: Esperasse que o entrevistado sobreponha as figuras para identificar a que possui maior área. Utilizando também sobreposição, compare a fronteira das figuras, concluindo que ambas possuem mesma fronteira.**

p) Cole barbante sobre a fronteira das figuras seguir (moeda japonesa e moeda chinesa). Em seguida, indique o interior de cada figura.

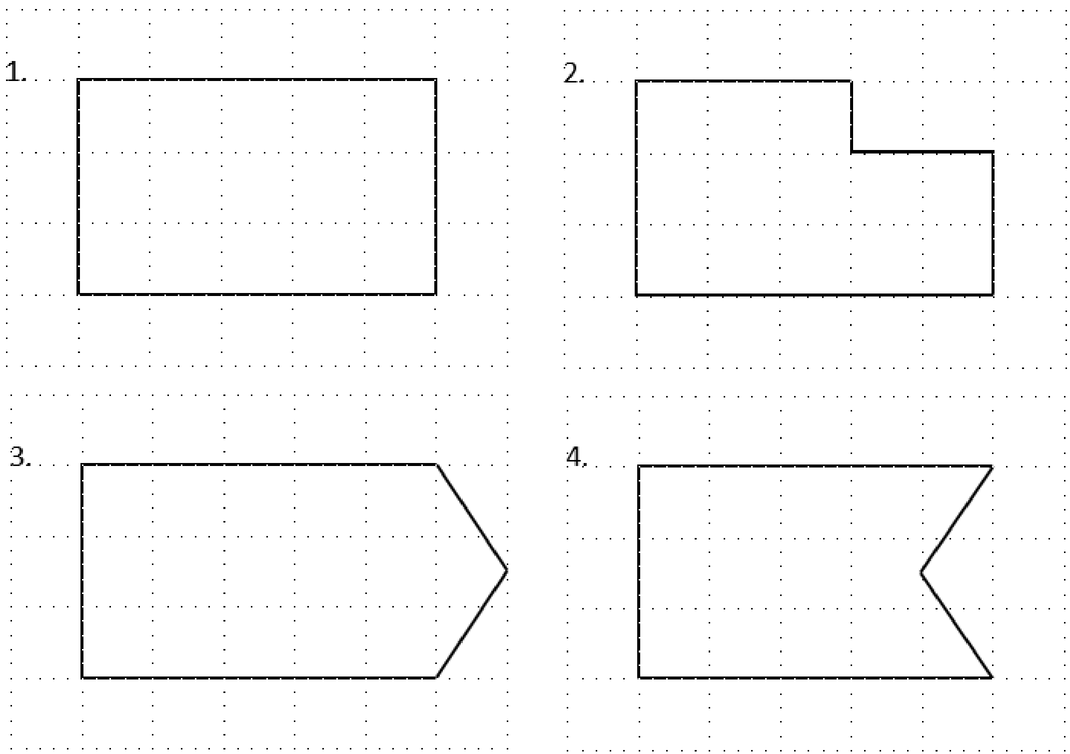
Moeda Chinesa Feng Shui

**Resposta: Esperasse que o entrevistado cole sobre o barbante sobre a figura, marcado suas fronteiras corretamente.**

Moeda Japonesa de 5 Ienes

**Resposta: Esperasse que o entrevistado cole sobre o barbante sobre a figura, marcado suas fronteiras corretamente.**

q) Imagine que os contornos de cada desenho abaixo foram colados com barbante.




q.1) Quais utilizariam a mesma quantidade de barbante? Justifique.

Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e Geoplano).

**Resposta: As figuras 1 e 2 utilizam a mesma quantidade de barbante, é possível identificar esse fato utilizando de várias formas, uma delas é perceber que essas figuras possuem 16 unidades de medida.**

q.2) Quais utilizariam mais barbante? Justifique.

Utilize, se necessário, o material disponível (lápis, cola, papel e Geoplano).

**Resposta: As figuras 3 e 4 utilizam a mesma quantidade de barbante, é possível identificar esse fato por meio de comparações entre os lados.**

r) Durante essa atividade, trabalhamos com diversos desenhos. Para nosso próximo encontro, traga alguns recortes ou fotos impressas de desenhos que contenham buracos e que representem situações que você encontra fora da escola.

**Resposta pessoal.**

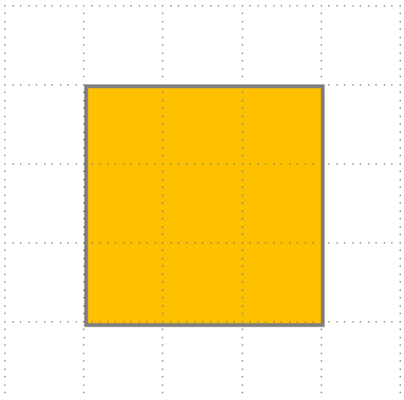
**ANEXO 5 – Atividade 1: Sugestões de respostas**

## Atividade 2

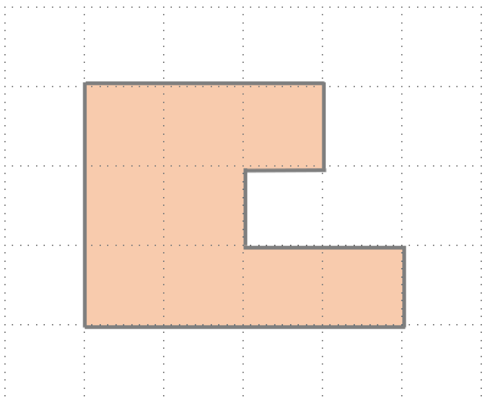
No primeiro dia de atividades trabalhamos um com o contorno de figuras geométricas planas, neste segundo dia vamos trabalhar com a região interna de algumas figuras geométricas planas.

a) Com auxílio da malha quadriculada (folha anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:

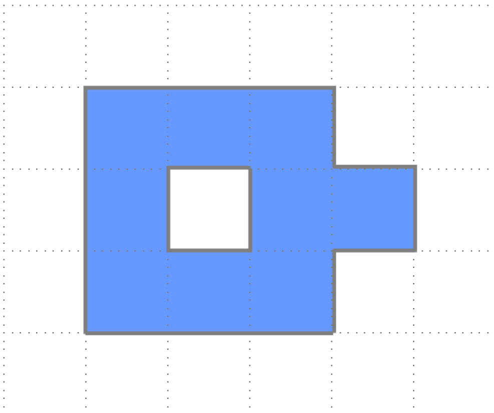
- Figura 1



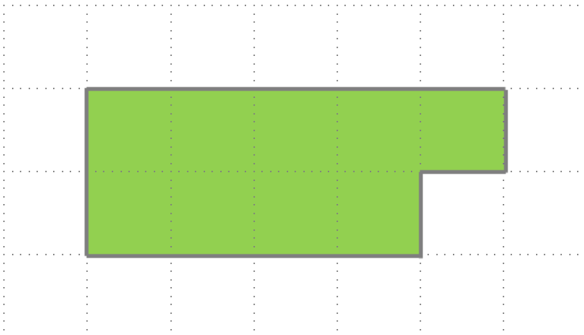
- Figura 2



- Figura 3



- Figura 4



a.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?

**Resposta: Espera-se que o entrevistado destaque que as figuras possuem formas diferentes, há figuras convexas e não convexas.**

a.2) E em relação ao número de quadrados necessários para preencher cada uma delas?

**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar que:**

- **Figura 1: Área = 9 quadradinhos.**
- **Figura 2: Área = 9 quadradinhos.**
- **Figura 3: Área = 9 quadradinhos.**
- **Figura 4: Área = 9 quadradinhos.**
- **Figura 5: Área = 9 quadradinhos.**

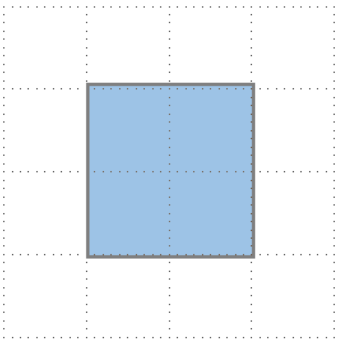
a.3) E em relação as fronteiras?

**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar que:**

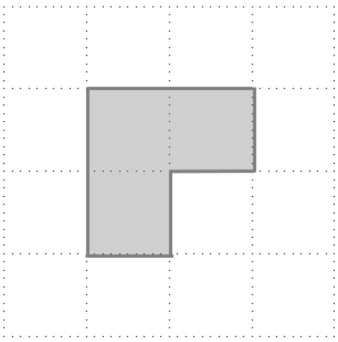
- **Figura 1: Fronteira = 12 u.m.**
- **Figura 2: Fronteira = 16 u.m.**
- **Figura 3: Fronteira = 18 u.m.**
- **Figura 4: Fronteira = 18 u.m.**
- **Figura 5: Fronteira = 14 u.m.**

b) Com auxílio da malha quadriculada (anexa) e das peças disponíveis, preencha as figuras geométricas a seguir:

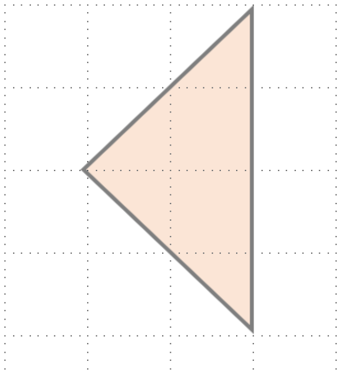
- Figura 5



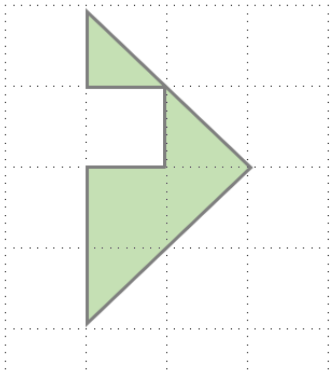
- Figura 6



- Figura 7



- Figura 8



b.1) O que podemos dizer em relação à forma dessas figuras geométricas?

**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar que há figuras convexas e não convexas.**

b.2) E em relação ao número de triângulos necessários para preencher cada uma delas?

**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar que há figuras convexas e não convexas.**

b.3) E em relação as fronteiras?

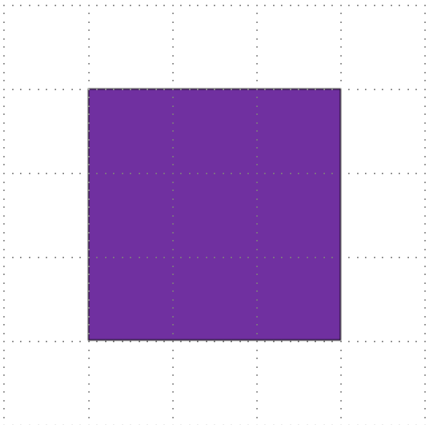
**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar que:**

- **Figura 5: Fronteira = 8 u.m.**
- **Figura 6: Fronteira = 8 u.m.**
- **Figura 7: Fronteira = 4 u.m + 4 m.d.**
- **Figura 8: Fronteira = 6 u.m + 4 m.d.**

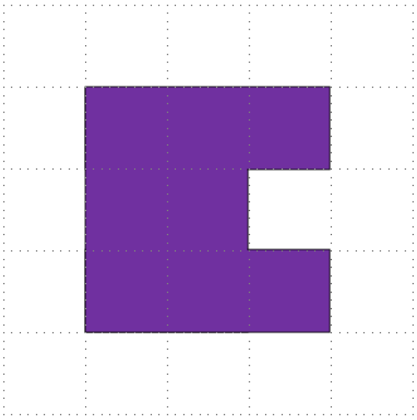
**Utilizamos u.m para unidade de medida que tem como base, o lado de 1 quadradinho da malha. Já m.d é a unidade de medida que tem como base, o lado de um triângulinho. É possível perceber que figuras de mesma medida de área não possuem mesma medida de perímetro.**

c) Utilizando a folha anexa, preencha a Figura 9 com os quadradinhos disponíveis, em seguida, preencha a Figura 10 com os triangulinhos disponíveis.

- Figura 9



- Figura 10

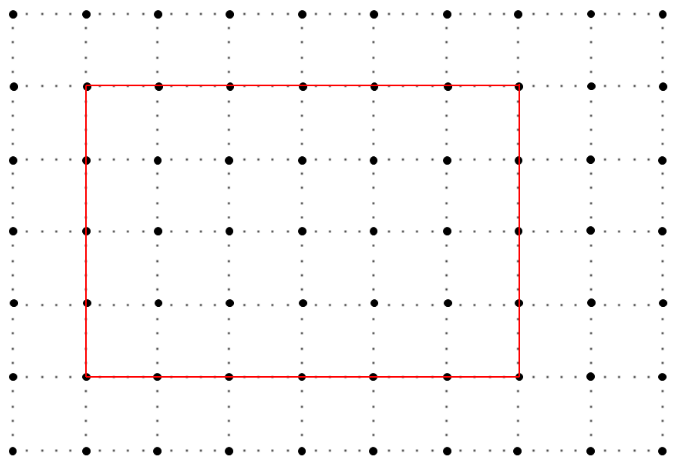


d) Analisando a região interna da Figura 9 e da Figura 10, com base na colagem feita, qual das figuras possui maior região interna? E qual possui maior fronteira?

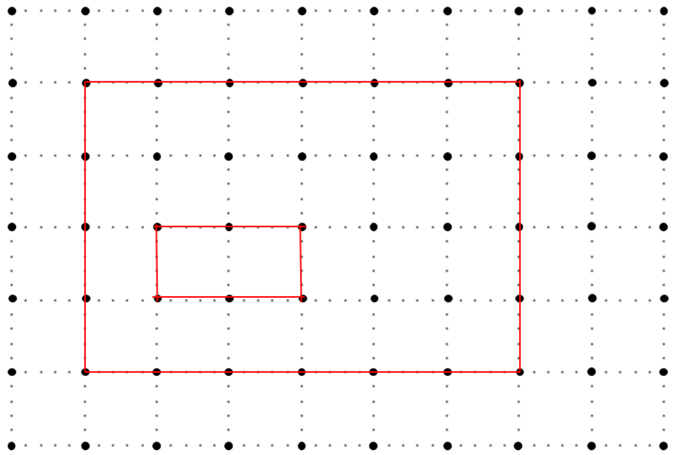
**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar, por meio comparação visual ou sobreposição, que a Figura 9 possui região interna maior e que a Figura 10 possui maior fronteira.**

e) Com auxílio do Geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no Geoplano os formatos a seguir:

- Figura 9 (Um retângulo)



- Figura 10 (Um retângulo no interior de um retângulo)



d.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

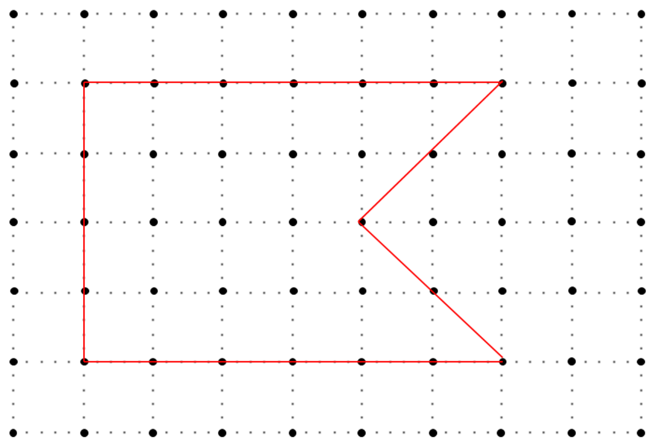
**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar, por meio comparação visual ou sobreposição, que a Figura 9 possui fronteira menor que a Figura 10.**

d.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

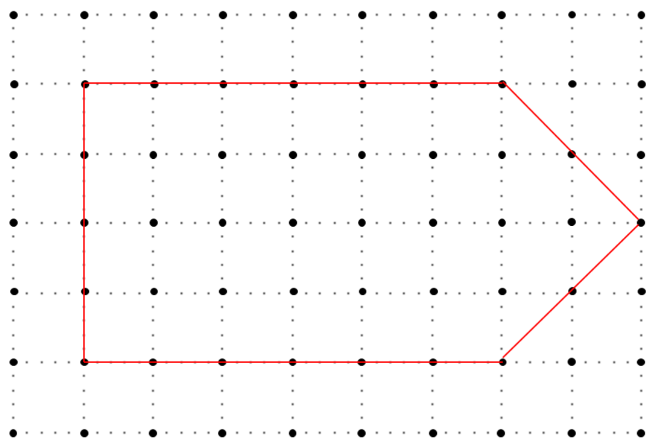
**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar, por meio comparação visual ou sobreposição, que a Figura 9 possui maior região interna que a Figura 10.**

f) Com auxílio do Geoplano e de um barbante (que representa uma linha unidimensional), represente no Geoplano os formatos a seguir:

- Figura 3 (Bandeirinha de festa junina 1)



- Figura 4 (Bandeirinha de festa junina 2)



e.1) Em qual das figuras a fronteira representada é maior? Justifique.

**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar, por meio comparação visual ou sobreposição, ambas figuras possuem mesmo tamanho de fronteira.**

e.2) Em qual das figuras a região interna representada é maior? Justifique.

**Resposta: Espera-se que o entrevistado consiga identificar, por meio comparação visual ou sobreposição, que a Figura 4 possui maior região interna.**

g) Pensando em duas figuras geométricas planas, denominado as por Figura A e Figura B. Apresente um exemplo de situação onde a fronteira da Figura A seja maior que a fronteira da Figura B, porém, a região interna da Figura A seja menor que a região interna da Figura B. Utilize o material disponível (papel, cola, barbante, lápis ou Geoplano).

**Resposta: Resposta Pessoal.**

h) Durante as atividades realizadas nos encontros, trabalhamos com a região interna das figuras planas. Com base nas atividades realizadas, com suas palavras, como você definiria a região interna de uma figura plana?

**Resposta: Resposta Pessoal.**

i) Com base nas atividades realizadas, usando suas palavras, como você definiria a fronteira de uma figura plana?

**Resposta: Resposta Pessoal.**