UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JEAN CARLO PAES ROCATELLI

Flexibilidade numérica: um estudo sobre o significado, a pertinência e algumas propostas

São Paulo

2022

JEAN CARLO PAES ROCATELLI

Flexibilidade numérica: um estudo sobre o significado, a pertinência e algumas propostas

Versão original da dissertação apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientadora: Profa. Dra. Barbara Corominas Valerio

São Paulo

2022

RESUMO

ROCATELLI, J. C. P. **Flexibilidade numérica: um estudo sobre o significado, a pertinência e algumas propostas**. 2022. 93 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Com o objetivo de apresentar uma definição para ‘Flexibilidade Numérica’, esta dissertação foi desenvolvida a partir de uma análise de alguns contextos em que este conceito foi apresentado, principalmente nas citações feitas por Jo Boaler em seus livros sobre Mentalidades Matemáticas. Com estas análises, um segundo objetivo foi apresentar atividades que possibilitem a evolução da Flexibilidade Numérica em alunos do Ensino Básico. A partir de uma proposta de concepção inicial que se apoia nos conceitos de Senso Numérico (na visão de Stanislas Dehaene) e de proceitos (na visão de Eddie Gray e David Tall), foram desenvolvidas duas oficinas com professores do Ensino Básico e alunos dos cursos de licenciatura em matemática e pedagogia, em que atividades foram desenvolvidas destacando características desta primeira concepção. A partir das vivências e considerações destes participantes com cada uma das atividades, foi possível propor uma definição como produto desta pesquisa, que reúne as experiências dos participantes e aspectos teóricos relacionados à Flexibilidade Numérica. Para a interpretação dos acontecimentos destas oficinas, foram utilizados princípios da hermenêutica objetiva, de modo que as análises pudessem ser feitas de maneira consistente e com liberdade para reflexões. Por fim, é apresentada a conclusão de que a Flexibilidade Numérica pode ser definida como uma habilidade humana, relacionada ao cálculo, ao senso numérico e a transição entre representações de conceitos e processos, e que, ainda, as atividades propostas oferecem boas oportunidades para que estudantes de diferentes anos do Ensino Fundamental possam desenvolver esta habilidade.

Palavras-chave: Flexibilidade numérica; senso numérico; proceitos; cálculo mental.

ABSTRACT

ROCATELLI, J. C. P. **Number flexibity: a study about the meaning, the pertinence and some proposals**. 2022. 93 p. Thesis (Master) - Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo.

To introduce a definition of ‘Number Flexibility’, this thesis was developed from an analysis of some contexts in which this concept was stated, mainly in the citations made by Jo Boaler in her books about Mathematical Mindset. In addition, a second objective is to present activities that make possible the evolution of Number Flexibility with elementary school students. Starting with a proposal of a conception based on the concepts of Number Sense (in the vision of Stanislas Dehaene) and of procepts (in the vision of Eddie Gray and David Tall), two workshops were developed with elementary school teachers, and math and pedagogy undergraduates, in which activities were developed highlighting this first conception. With the experience and considerations of these participants about the activities, it was possible to propose a definition as a product of this research, assembling the experience of the participants and theoretical aspects related to Number Flexibility. For the interpretation of the events of these workshops, it was used principels from Objective Hermeneutics to make the analysis consistent and ensure liberty for reflections. At last, it is presented the conclusion that Number Flexibility can be defined as a human ability, related to calculation, number sense, and the transition between representations of concepts and processes, and still, the activities that were introduced offered good opportunities for elementary school students to develop this ability.

Keywords: Number flexibility; number sense; procepts; mental calculation.

GLOSSÁRIO[1]

Cognição intuitiva: Tipo de cognição que é aceito diretamente sem a sensação de que qualquer justificativa é exigida**.**

Entidade conceitual: Objeto que pode ser manipulado como o início de um procedimento mental.

Fato numérico: Noções elementares sobre os números, que habitualmente exigem memorização para se resolver outros cálculos – por exemplo, as tabuadas ou algumas somas de números de um único algarismo.

Objeto conceitual: Algo sobre o qual as pessoas pensam, desenvolvem ideias e refletem.

Procedimentos: Algoritmos utilizados para que alguns processos sejam implementados**.**

Proceito elementar: Amálgama de três componentes: um processo que produz um objeto, e um símbolo que representa tanto o processo, como o objeto.

Proceito: Coleção de proceitos elementares que um mesmo símbolo possui.

Processo. Representação cognitiva de uma operação matemática – como o processo de adição, processo de multiplicação etc.

Senso Numérico: é uma intuição especial que nos ajuda a dar sentido aos números e a matemática.

Símbolos: Algo que possa ser reconhecido pelos sentidos.

---

[1] Este glossário é uma sugestão feita pelos membros da banca de qualificação desta dissertação, para que as definições utilizadas neste texto pudessem ser facilmente acessadas quando necessário. Vários destes conceitos possuem definições variadas – deste modo, as que estão aqui apresentadas, representam nossas escolhas para esta dissertação.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sempre fui[2] curioso sobre como a matemática se tornou algo naturalmente simples no meu imaginário. Desde os meus primeiros anos, os números e as formas me trouxeram encantamento, mas essa não era a sensação da maioria dos meus colegas - aliás, poucos eram os que também se divertiam com a matemática e seus desafios.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, eu gostava de estudar, sem fazer uma grande distinção entre as disciplinas. Eu ficava ansioso pelas aulas de ciência, cheias de curiosidades, mas também gostava de matemática e língua portuguesa - a segunda em especial, já que ler era o meu hobby favorito. Eu tinha bons resultados nas aulas de matemática e resolvia a maioria dos exercícios corretamente, mas sem demonstrar uma preferência por esta disciplina.

E não digo isso para contar sobre um possível bom desempenho acadêmico. Quero apenas procurar primeiras hipóteses sobre um questionamento que motivou a realização desta pesquisa – "Como eu desenvolvi uma boa relação com a matemática?". As primeiras reflexões sobre essa questão foram feitas na 6ª série, quando eu descobri que havia ganhado uma Menção Honrosa na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Eu comecei a achar que era um gênio da matemática! Deste momento em diante, comecei a dizer que a matemática era a minha disciplina favorita, e estudava para cada prova com muito mais engajamento.

Nos anos que se seguiram, meu contato com a matemática se tornou cada vez mais intenso, até chegar ao campo da educação na licenciatura e, posteriormente, no mestrado - do qual essa dissertação é o produto. Mas todo esse desenvolvimento na matemática não é relevante para a discussão que será aqui proposta, justamente porque esses aprofundamentos só vieram depois de eu conseguir exibir, em uma Olimpíada, que o que eu tinha aprendido até então era suficientemente sólido para os

[2] Por trazer motivações pessoais, o início desta introdução será escrito em primeira pessoa. No entanto, uma parte da introdução, bem como o restante da dissertação será escrito em terceira pessoa, em razão do trabalho coletivo desenvolvido com a Profª. Dra. Barbara Corominas Valerio, orientadora deste projeto de pesquisa.

parâmetros da avaliação. E esses aprendizados foram feitos de alguma forma entre os meus primeiros 11 anos de vida, que antecederam aquela prova.

Levantei uma série de hipóteses ao longo da minha vida: Os hábitos de leitura desde cedo, que me levaram a uma criticidade que possa ter sido importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático; os relatos da minha mãe que adorava me incentivar a desenhar e contar bolinhas e pauzinhos desde pequeno; um talento inato com a matemática, que garantiu um aprendizado fácil e significativo. Uma série de ideias que foram ganhando contornos científicos e, por fim, sendo validadas ou invalidadas.

Nesta dissertação, pretendo discorrer sobre um tema que me parece relacionado a este questionamento, possivelmente sendo uma razão para o meu desenvolvimento na matemática. De qualquer forma, independente da relação que isso possa ter tido com esta motivação pessoal, considero o tema extremamente relevante no cenário educacional que estamos inseridos, como será apresentado nos próximos capítulos. Assim, essa escolha foi feita com o intuito de aprofundar algumas discussões sobre tópicos de educação matemática.

O meu contato com este tema, a Flexibilidade Numérica, se inicia em 2017 com a leitura do livro Mentalidades Matemáticas, de autoria de Jo Boaler, professora e pesquisadora da Escola de Pós-Graduação em Educação de Stanford. O quarto capítulo da primeira edição brasileira do livro, tem como título “Criando mentalidades matemáticas: a importância da flexibilidade com os números”. Em minha primeira leitura, achei o texto apresentado muito interessante e motivador – o que não difere muito da minha opinião sobre os demais capítulos.

Em poucas palavras, é possível dizer que a Flexibilidade Numérica é uma habilidade, uma característica humana, que pode ser desenvolvida e que é caracterizada pela capacidade de manipular objetos matemáticos, como números e expressões, a partir de uma transição entre símbolos, representações e valores. Ao longo do texto, este termo será definido de maneira rigorosa, o que inclusive é um dos meus objetivos com esta pesquisa. De toda forma, este é um resumo minimamente satisfatório para que seja possível continuar a leitura desta introdução com fluidez antes do início dos apontamentos teóricos.

Em 2018, meu segundo contato com o a Flexibilidade Numérica aconteceu em um evento sobre o projeto Mentalidades Matemáticas no Colégio Sidarta, em que alguns professores, pesquisadores e autores de livros didáticos acompanharam as aulas de matemática de diversas turmas do Ensino Fundamental (I e II) e Médio. Participando do evento, percebi que uma grande parte das atividades propostas, principalmente no Ensino Fundamental I, citava explicitamente a “Flexibilidade Numérica” como um dos objetivos de aprendizagem. Com o desenrolar destas atividades, fiquei animado com os comentários feitos pelos alunos, que apresentavam ideias muito criativas - pelo menos, a meu ver - ao utilizar números e operações.

Isto foi suficiente para aumentar a minha curiosidade sobre a Flexibilidade Numérica e me incentivar a pesquisá-la. Resumindo, consigo então listar três motivos para essa escolha: parecer interessante do ponto de vista pedagógico, a partir das observações feitas no evento e na leitura do livro; ser um tema em discussão, com poucas referências e podendo assim, oferecer um caminho promissor de desenvolvimento de pesquisa (tanto para essa dissertação, como para os meus próximos objetivos de pesquisa); e ainda, estar relacionado com a minha inquietação inicial, que existe desde a minha infância, como apresentado anteriormente.

Neste cenário, cabe então discutir um ponto chave desta pesquisa: **O que é Flexibilidade Numérica?** Não encontramos[3] uma definição precisa deste termo nos trabalhos de Boaler e em suas referências, mesmo com um uso recorrente nos textos que sustentam suas abordagens. O significado de Flexibilidade Numérica, nestes textos aparece apenas através de alguns exemplos, sendo apoiado na definição da palavra flexibilidade, esta sim definida em dicionários e conhecida culturalmente em outros contextos.

---

[3] A partir deste ponto, o texto será apresentado em terceira pessoa, fazendo referência ao trabalho coletivo desenvolvido com a Profª. Dra. Barbara Corominas Valerio, orientadora deste projeto de pesquisa.

Nesta dissertação, nos esforçaremos para apresentar uma definição conectando estes exemplos aos referenciais teóricos, acreditando que este exercício amplia as possibilidades de trabalho com a Flexibilidade Numérica. Com isso, o nosso primeiro objetivo de pesquisa é apresentar a Flexibilidade Numérica como um construto, com uma definição precisa e uma justificativa para essa concepção, acrescentando nossas visões e reflexões para este campo de pesquisa. De toda forma, é importante destacar que, mesmo que tenhamos nos apoiado nos trabalhos desenvolvidos por outros pesquisadores para definir Flexibilidade Numérica, essa definição não corresponde necessariamente às ideias dos autores que utilizaram este termo anteriormente.

Estando ainda inserido no contexto de um Mestrado Profissional, julgamos importante que essa pesquisa gere frutos que possam ser aproveitados na sala de aula, apresentando ideias e ferramentas que sejam relevantes para alunos, professores, pais ou outras pessoas que tenham uma relação com o desenvolvimento dos saberes matemáticos na educação básica. Por isso, temos ainda outra pergunta secundária a ser respondida a partir desta pesquisa: **Quais são as possibilidades práticas para a sala de aula, na visão de alguns professores e licenciandos, quando a Flexibilidade Numérica é vista como uma habilidade a ser desenvolvida?**

Assim, além de apresentar uma definição, também temos como objetivo avaliar as potencialidades da Flexibilidade Numérica no contexto da sala de aula, levando em consideração a opinião de professores e licenciandos que participaram das nossas intervenções no desenvolvimento desta pesquisa. Ouvir pessoas envolvidas com a Educação Básica neste processo será significativo para entendermos necessidades relacionadas ao tema, e nos dar subsídio para pensar em ferramentas que podem ser apresentadas ao longo deste texto.

Com os objetivos traçados, julgamos ser necessário fazer ainda algumas observações sobre a pertinência do tema. Alguns textos já discutem a necessidade de apresentar a matemática, desde os primeiros anos, de uma maneira conceitual – e com citação à palavra “flexibilidade”. Por exemplo, Boaler (2016) discorre sobre um experimento desenvolvido por Eddie Gray e David Tall com alunos de 13 anos:

> Todos os alunos receberam problemas numéricos, tais como somar ou subtrair dois números. Os pesquisadores encontraram uma diferença importante entre os alunos com baixo e alto rendimento. Os alunos com alto rendimento resolviam as perguntas usando o que é conhecido como senso numérico – eles interagiam com os números de maneira flexível e conceitual. Os alunos com baixo rendimento não empregavam o senso numérico e pareciam acreditar que seu papel era recordar e usar um método-padrão mesmo quando isso era difícil de fazer. (BOALER, 2018, p. 33).

Mais ainda, o desenvolvimento de práticas voltadas para a flexibilidade numérica se mostra importante justamente por se pautar na atribuição de significados e no estudo conceitual dos números e da matemática, o que é relacionado aos alunos de alto rendimento na citação de Boaler. Estes objetivos estão em consonância, inclusive, com documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (2018):

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. (BRASIL, 2018, p. 268)

Bem como com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997):

> O aprendizado de procedimentos é, por vezes, considerado como algo espontâneo, dependente das habilidades individuais. Ensinam-se procedimentos acreditando estar se ensinando conceitos; a realização de um procedimento adequado passa, então, a ser interpretada como o aprendizado do conceito. O exemplo mais evidente dessa abordagem ocorre no ensino das operações: o fato de uma criança saber resolver contas de adição não necessariamente corresponde à compreensão do conceito de adição. (BRASIL, 1997, p. 52)

Com isto, entendemos que a pesquisa que será apresentada nesta dissertação é pertinente e relevante, principalmente para os professores da Educação Básica e para os alunos que, de alguma forma, tenham contato com atividades que incentivam o desenvolvimento da Flexibilidade Numérica. Em resumo, para finalizar esta introdução, temos que as nossas perguntas de pesquisa são:

- O que é Flexibilidade Numérica?
- Quais são as possibilidades práticas para a sala de aula, na visão de alguns professores e licenciandos, quando a Flexibilidade Numérica é vista como uma habilidade a ser desenvolvida?

E com essas perguntas, esperamos atingir os seguintes objetivos:

- Compreender como os termos “Flexibilidade” e “Flexibilidade Numérica” têm sido utilizados na literatura da educação matemática, conseguindo assim construir uma definição para Flexibilidade Numérica que contemple ideias que nos parecem fundamentais nestes textos, ao mesmo tempo que dialogam com as nossas reflexões acerca do tema.
- Apresentar propostas de atividades e intervenções que valorizem o que definiremos como Flexibilidade Numérica.
- Avaliar como a Flexibilidade Numérica pode se relacionar com ideias presentes em parâmetros curriculares, o que nos leva a questionamentos sobre como ela pode já estar presente nas salas de aula.

No próximo capítulo apresentaremos a nossa fundamentação teórica, discutindo os conceitos que serão importantes para a construção de uma noção inicial do significado de Flexibilidade Numérica.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Noção de Proceito[4]

Antes de apresentarmos uma definição para proceito, precisamos primeiro estabelecer algumas ideias preliminares. Inicialmente, é interessante observar que uma motivação para esta discussão é a ambiguidade das notações matemáticas, que simbolizam ao mesmo tempo conceitos e processos[5]. Por exemplo, a representação 9 - 3 carrega uma série de interpretações distintas: ao mesmo tempo que ela simboliza o número 6, resultado do cálculo em questão, ela também representa uma série de processos que podem levar a este resultado. O processo de subtração pode ser desenvolvido a partir de uma contagem decrescente de 3 unidades a partir do 9, a partir de uma contagem crescente do 3 até o 9, observando quantas unidades os dois números possuem de diferença, a partir de um fato matemático[6] previamente estabelecido, entre outros. Todos esses processos e significados estão representados por um mesmo conjunto de símbolos.

As frações são bons exemplos para estas considerações. Veja que 5/12 pode representar a divisão de 5 por 12, ao mesmo tempo que possui um significado inerente a qualquer processo: 5/12 como o número 5/12. E em diferentes contextos, é natural que se façam escolhas para interpretar esse conjunto de símbolos, o que pode ser algo simples para muitos indivíduos. No entanto, escolher a interpretação que 5/12 possui dentro de cada contexto envolve reconhecer que existem diferentes interpretações e, mais do que isso, conhecer algumas destas possibilidades. Exatamente por isso, o termo proceito é apresentado aqui: com esta palavra, procura-se estabelecer a reunião entre estes processos e conceitos.

Com isso, podemos apresentar uma primeira noção que será importante para a construção da definição de proceito. Um *proceito elementar* é a amálgama de três

---

[4] [4] Do inglês, “procept”. No Brasil, o termo já tem sido utilizado como proceito por outros pesquisadores (Carmo e Igliori, 2017; Soares e Cury, 2017).
[5] O termo *processo*, nesta dissertação, será definido como a representação cognitiva de uma operação matemática – como o processo de adição, processo de multiplicação etc.
[6] Noções elementares sobre os números, que habitualmente exigem memorização para se resolver outros cálculos – por exemplo, as tabuadas ou algumas somas de números de um único algarismo.

componentes: um **processo** que produz um **objeto**, e um **símbolo** que representa tanto o processo, como o objeto (TALL e GRAY, 1994, p. 121, tradução nossa[7]). Tome como exemplo o conjunto de símbolos “10 - 7”, em que é possível reconhecer o processo de subtrair 7 unidades do número 10, bem como o objeto que pode ser interpretado como uma subtração que resulta em 3.

E finalmente, um *proceito* consiste em uma coleção de proceitos elementares que um mesmo símbolo possui (TALL e GRAY, 1994, p. 121, tradução nossa[8]). E é exatamente esta noção que nos incentivou a trazer a teoria desenvolvida por Tall e Gray para a discussão de Flexibilidade Numérica. A partir deste ponto, é possível reconhecer em cada proceito uma infinidade de processos e conceitos que permitem escolhas, que podem ser mais ou menos vantajosas dentro de cada cenário.

> Neste sentido, podemos falar do proceito 6. Ele inclui o processo de contar 6 e uma coleção de outras representações, como 3 + 3, 4 + 2, 2 + 4, 2 x 3, 8 - 2 e assim por diante. Todos estes símbolos podem ser considerados para representar um mesmo objeto, e ainda indicar as maneiras flexíveis em que 6 pode ser decomposto e recomposto utilizando diferentes processos. (TALL e GRAY, 1994, p. 121, tradução nossa[9]).

Perceba que ao descrever a noção de proceito, os autores se apoiam constantemente nos símbolos, colocando-os como uma parte essencial da teoria, já que são justamente eles que permitem as relações entre processos e conceitos distintos. Para Tall e Gray (1994, p. 119), os *símbolos* são tidos como algo que pode ser reconhecido pelos sentidos, e por isto, a palavra falada “seis”, bem como o algarismo escrito “6”, por exemplo, são símbolos, já que podem ser lidos ou ouvidos.

Com essa concepção de símbolo, perceba que até mesmo crianças que ainda não dominam as representações escritas dos números e de símbolos matemáticos usuais

---

[7] Texto original: “An *elementary procept* is the amalgam of three components: a *process* that produces a mathematical *object*, and a *symbol* that represents either the process or the object.”
[8] Texto original: “A *procept* consists of a collection of elementary procepts that have the same object.”
[9] Texto original: “In this sense we can talk about the procept 6. It includes the process of counting 6 and a collection of other representations such as 3 + 3, 4 + 2, 2 + 4, 2 x 3, 8 - 2 and so on. All of these symbols may be considered to represent the same object, yet indicate the flexible way in which 6 may be decomposed and recomposed using different processes.”

(=, + e -, por exemplo), já podem reconhecer alguns proceitos elementares para alguns símbolos específicos. Por exemplo, o proceito 3 pode ser interpretado como 1 + 2 ou 2 + 1 mesmo antes da representação escrita dos algarismos. Ele ainda pode ser reconhecido como o processo de contar algum conjunto de elementos, atribuindo ao 3, por exemplo, o processo de quantificar.

Isto é especialmente interessante para que possamos reconhecer a interpretação de proceitos (e consequentemente, a Flexibilidade Numérica) como uma qualidade que já pode ser reconhecida nos primeiros anos de vida. Com isso, ser flexível[10] com os números não é uma característica dos que possuem conhecimentos formais de registros escritos, mas sim de todos que são capazes de fazer relações a partir dos símbolos conhecidos, sejam escritos ou orais.

As relações, em especial, têm um papel fundamental dentro desta teoria. Encontrar diferentes proceitos elementares de um mesmo proceito, é relacionar estes proceitos elementares usando o proceito como o objeto de transição. Essa concepção permite entender a noção de proceito como parte da aquisição numérica e, consequentemente, como uma parte fundamental do desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Segundo Kamii (2012, p. 18), o número é a relação criada mentalmente por cada indivíduo. Independentemente de como esta relação é desenvolvida (por meio da comparação de conjuntos de objetos, por meio do reconhecimento de um processo que leva a um resultado específico etc.), ela é parte de uma série de outras relações que levam à reflexão e, posteriormente, a produção de um novo conhecimento - como um número, por exemplo.

Um último ponto que pode ser relevante para que possamos compreender a noção de proceito é a palavra objeto, utilizada como uma das três partes centrais da definição

[10] Adotaremos que ser flexível com os números é a qualidade daqueles que possuem Flexibilidade Numérica em um grau avançado, dentro dos parâmetros escolhidos. Apresentaremos a Flexibilidade Numérica, mais a frente com o referencial teórico bem estabelecido, como uma habilidade que toda pessoa possui. Ainda assim, nos parece natural, na linguagem, que se utilize o adjetivo flexível para caracterizar alguém que tenha um desenvolvimento superior – assim como todo humano possui flexibilidade em algum nível, mas ainda caracterizamos como flexíveis principalmente os ginastas, atletas etc. Este exemplo só não é adequado para a ordem de grandeza de indivíduos com tais características – acreditamos que a grande maioria dos indivíduos possam ser flexíveis com os números, não sendo algo restrito a um pequeno grupo específico.

de proceito elementar. Tall e Gray (1994) estabelecem uma conexão entre conceito e objeto, na medida que citam Greeno (1983), que define uma *entidade conceitual* como um objeto que pode ser manipulado como o início de um procedimento mental (tradução nossa[11]).

Primeiramente, existe uma diferença entre procedimentos e processos. Para Tall e Gray (1994), os procedimentos são algoritmos utilizados para que alguns processos sejam implementados, na medida que os processos, como já citado anteriormente, são representações cognitivas de uma operação matemática. Dessa forma, um objeto que possa ser utilizado para um procedimento mental (ou seja, para a implementação de algum processo) é o que Greeno (1983) caracteriza como entidade conceitual. É notável que a noção de conceito é importante dentro desta teoria, até mesmo porque ela faz parte da construção da nomenclatura adotada (proceito). No entanto, isso pode não ser suficiente para que entendamos o que é apresentado como objeto.

Para Brizuela (2001), um *objeto conceitual* é uma coisa sobre a qual as crianças pensam, desenvolvem ideias e refletem. Mesmo que esta não seja uma definição adotada pelos autores da noção de proceito, julgamos essa concepção como pertinente e coerente dentro da teoria, atribuindo um significado muito similar ao que é apresentado (implicitamente) nos textos sobre o assunto. Poderíamos inclusive sugerir uma ampliação desta noção de objeto conceitual, sugerindo que ela se extenda para além das crianças - um objeto conceitual, da maneira que é apresentado, pode ser suficiente para desenvolver ideias e gerar reflexão em jovens e adultos. Por fim, ainda reafirmamos a escolha desta definição por outros dois motivos: i) ela é apresentada em um trabalho sobre o estudo e exploração de notações, o que é intimamente relacionado aos símbolos, fundamentais na teoria de Tall e Gray e ii) ao utilizar as palavras “objetos conceituais”, Brizuela (2001) une duas palavras que são adotadas de maneira muito próxima no texto, mas sem uma distinção clara.

[11] Texto original: Greeno (1983) defines a "conceptual entity" as a cognitive object that can be manipulated as the input to a mental procedure.

2.2 Senso Numérico

Senso numérico, um conceito muito mais popular na pesquisa em Educação Matemática em comparação à Flexibilidade Numérica, possui muitas definições diferentes, como aponta Berch (2005). Em um artigo publicado no Journal of Learning Disabilities, Berch apresenta 30 ideias que são pressupostas para o Senso Numérico, compilando uma série de características atribuídas por diferentes autores. Para esta dissertação, no entanto, escolhemos utilizar apenas uma definição, apresentada pelo neurocientista Stanislas Dehaene, de modo que fosse mais simples propor as próximas discussões e reflexões acerca do tema, sem a necessidade de operar com uma gama muito grande de variáveis teóricas.

O senso numérico, como apresentado por Dehaene (1997, p. ix, tradução nossa[12]), é uma *intuição especial que nos ajuda a dar sentido aos números e a matemática*. Ele é intrínseco à estrutura cerebral dos indivíduos que o desenvolvem e, para o autor, não é sequer uma característica unicamente humana - outros animais também desenvolvem intuições numéricas que são relevantes até para a própria sobrevivência.

Perceba que com esta definição, o autor não diz que o senso numérico é responsável pelo significado que damos aos números, mas sim um fator auxiliar neste processo, assim como vários outros fatores influenciam as nossas relações com os números – sejam eles sociais, culturais, biológicos etc. Esta intuição se refere a capacidade de levantar hipóteses sem uma análise rigorosa, de ter um palpite baseado em vivências próprias com os números ainda que uma reflexão mais sofisticada não tenha ainda se iniciado.

Nos parece natural uma relação primeira entre o senso numérico e a infância, momento em que são desenvolvidas uma série de hipóteses em relação aos números e quantidades. No entanto, o senso numérico prevalece durante todo o desenvolvimento matemático, sem distinção de idade - inclusive, a própria definição não faz distinções deste tipo.

[12] Texto original: "(...), a special intuition that helps us make sense of numbers and mathematics"

Do mesmo modo que uma criança pode desenvolver seu senso numérico a partir de afirmações numéricas mais simples, utilizando a comparação de números naturais, a quantificação de conjuntos de objetos, o reconhecimento de provável e improvável, entre outros, um adulto pode ter o seu desenvolvimento relacionado a comparação de estruturas mais sofisticadas, percepção de convergências e divergências em séries, validação de conjecturas, dentre outras possibilidades.[13]

Uma dúvida natural ao interpretar o senso numérico a partir desta definição é entender o que significa a intuitividade dentro da matemática. Reconhecemos inicialmente que algoritmos no geral não são intuitivos, já que eles exigem uma formalização para garantir coerência com o sistema de numeração, com o significado da operação e, até mesmo, para que seja consistente com os conjuntos numéricos em que ele está inserido. No entanto, para além dos algoritmos, qual é o limite entre intuitivo e não intuitivo?

Fischbein (1994, p. 233) propõe uma discussão interessante acerca do tema, considerando que a matemática, como uma atividade humana, possui três componentes básicos: o formal, o algorítmico e o intuitivo. Em especial, o aspecto intuitivo é descrito de uma forma pertinente ao que gostaríamos de apresentar neste texto.

> Uma cognição intuitiva é um tipo de cognição que é aceito diretamente sem a sensação de que qualquer justificativa é exigida. Uma cognição intuitiva é caracterizada, primeiramente, por uma (aparente) auto-evidência. Nós aceitamos como auto-evidentes, afirmações como: "O todo é maior que suas partes." "Passando por um ponto fora de uma reta, é possível desenhar apenas uma reta paralela." "O caminho mais curto entre dois pontos é uma linha reta". (FISCHBEIN, 1994, p. 232, tradução nossa[14]).

---

[13] É importante ressaltar que apesar desta afirmação, que foi feita com o objetivo de incentivar uma reflexão sobre como o senso numérico pode sempre alcançar níveis mais e mais elevados, não estamos de maneira alguma relacionando o nível de complexidade dos conceitos matemáticos com a idade dos indivíduos que os estudam.

[14] Texto original: An intuitive cognition is a kind of cognition that is accepted directly without the feeling that any kind of justification is required. An intuitive cognition is then characterized, first of all, by (apparent) self-evidence. We accept as self-evident, statements like: "The whole is bigger than any of its parts." "Through a

É notável que ao se basear em auto-evidências, é possível ser induzido a conclusões matemáticas válidas ou até mesmo a conclusões equivocadas, e o aspecto formal é responsável por delimitar isso. No entanto, o aspecto intuitivo tem um impacto decisivo em nossas interpretações e estratégias (FISCHBEIN, 1994, p. 233).

Isso se relaciona profundamente com o que propomos como Flexibilidade Numérica. Antes mesmo da formalização, desenvolver conhecimentos matemáticos que permitam auto-evidências mais assertivas é interessante na medida que os números ganham significados e permitem uma interação mais casual, sem a necessidade (em um primeiro momento) de aspectos formais ou algorítmicos para que aquele conhecimento seja tido como (possivelmente) verdadeiro.

E defendemos ainda que levantar hipóteses a partir de noções intuitivas é uma ação completamente matemática e cotidiana na construção do conhecimento. Ao descobrir uma nova conjectura, ter um palpite sobre a sua validade determina exatamente quais são os seus próximos passos ao estudá-la: parecendo verdadeira, procura-se ferramentas para uma demonstração; parecendo falsa, procura-se um contra-exemplo que invalide o problema. Mais ainda, essa intuição é passível de mudanças e de evolução – por exemplo, após falhar algumas vezes na tentativa de uma demonstração de alguma conjectura, é possível mudar a própria postura e iniciar a busca por um contra-exemplo, sem ter necessariamente alguma referência formal que justifique esta mudança de posicionamento frente ao problema. E pensar constantemente sobre uma mesma conjectura, pode ser suficiente para que os palpites tenham viéses mais profundos e que, de alguma forma, esses palpites pareçam mais próximos da verdade lógica por trás desta afirmação.

Berch (2005) ainda faz um destaque importante, argumentando que o senso numérico não pode ser ensinado de maneira fragmentada ou a partir de textos instrucionais, com atividades designadas especificamente para este propósito. Concordando com Greeno (1991), argumenta que é mais frutífero desenvolver o senso numérico como

---

point outside a line one may draw a parallel and only one to that line." "The shortest way between two points is a straight line."

um subproduto de outros aprendizados, sem que o senso numérico seja o objetivo de uma atividade específica.

Isto é condizente com as propostas de Boaler (2015, p. 10), que ao apresentar atividades importantes para o desenvolvimento do senso numérico e dos fatos matemáticos, apresenta a seguinte introdução:

> Os professores devem ajudar os alunos a desenvolver fatos matemáticos encorajando-os a usar e explorar os números, assim como a trabalhar com eles, ao invés da mera ênfase nos fatos ou do uso de “testes cronometrados”. Quando os alunos executam atividades numéricas significativas, memorizam fatos matemáticos ao mesmo tempo em que compreendem os números e a matemática. Em vez de memorizar e ter horror à matemática, eles apreciam e aprendem uma matemática significativa.

Adotaremos estas mesmas concepções sobre a Flexibilidade Numérica, que deve estar inserida em um contexto mais amplo de investigação, não sendo diretamente ensinada a partir de algumas propostas de atividades ou sequências didáticas. Os fatos matemáticos supracitados são, inclusive, uma parte considerável do que consideramos como senso numérico, podendo ser aprendidos e desenvolvidos até que sejam incorporados de maneira intuitiva – afirmar que $3 + 4 = 7$ pode ser algo intuitivo após alguns aprendizados sobre a adição, na medida que não precisamos mais de uma justificativa para revalidar esta sentença matemática.

3 PRIMEIRAS IDEIAS SOBRE FLEXIBILIDADE NUMÉRICA

Durante nossas reflexões sobre a construção de um significado para Flexibilidade Numérica, reconhecemos que ela se refere a uma qualidade humana, tal como a destreza, a atenção ou a própria flexibilidade. Desse modo, mesmo que não estejamos discutindo uma maneira de mensurar essa qualidade, é possível entendê-la como uma característica de cada indivíduo e que aparece para cada um em alguma escala. É evidente que, tal como os exemplos de qualidades supracitados, a Flexibilidade Numérica também é algo que pode ser desenvolvido e não é dado em uma escala binária (possui ou não possui), sendo possível então dizer que alguém demonstra ter mais ou menos Flexibilidade Numérica.

Para Boaler (2016), um aluno que resolve 21 - 6 reconhecendo que o resultado deste cálculo é equivalente a 20 - 5, demonstra encarar os números com flexibilidade e senso numérico. Em contrapartida, um aluno que resolve 21 - 6 contando regressivamente a partir do 21 pode mostrar uma necessidade de se ater aos procedimentos formais já aprendidos anteriormente, mesmo quando eles não são necessários. Podemos encontrar mais justificativas para a escolha do 21 – 6 ao invés do 20 – 5, como por exemplo, 20 - 5 não ser, de alguma forma, mais intuitivo para os alunos que contam regressivamente – e veja que isso não impede que eles ainda possam interagir com os números com flexibilidade em outros cálculos. No entanto, sem entrar no mérito das motivações destes alunos hipotéticos, essa introdução nos oferece uma primeira orientação sobre ao que a autora se refere quando fala sobre Flexibilidade Numérica.

Utilizando a definição proposta por Dehaene, introduzimos o Senso Numérico como uma primeira parte deste conceito maior, chamado Flexibilidade Numérica. Intencionalmente, escolher o Senso Numérico a partir desta definição específica e inseri-lo como parte da nossa noção inicial de Flexibilidade Numérica foram escolhas feitas para evitar uma concepção completamente formal deste conceito - a ideia de intuição traz consigo uma subjetividade que julgamos necessária. Uma criança que ainda não compreenda completamente o Sistema de Numeração Decimal, ou ainda que não reconheça todos os algarismos ou outros símbolos recorrentemente utilizados na matemática da educação infantil já pode demonstrar Flexibilidade

Numérica em algum grau, seja organizando objetos ou identificando alguma ordenação por meio de quantidades, por exemplo.

Sustentando a ideia inicial de apresentar a Flexibilidade Numérica como uma qualidade que cada indivíduo possui em certo grau, é possível entender as primeiras ideias das crianças sobre os números como possibilidades de primeiros indicadores do senso numérico. Assim, ao considerar a intuição como parte da Flexibilidade Numérica, podemos reconhecê-la em ações mais primitivas, mas ainda extremamente importantes e necessárias para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático[15]. Conjecturar que algum conjunto possui mais ou menos elementos do que outro, mesmo sem o conhecimento de ferramentas que permitam a validação desta hipótese (como a contagem), já é significativo dentro deste contexto.

Não é interessante, no entanto, pensar apenas no senso numérico como referencial para a Flexibilidade Numérica, pois isto ainda não é suficiente para justificar o exemplo de Boaler (2016) que citamos anteriormente. Possuir e desenvolver uma intuição que auxilia a compreensão dos números e da matemática não implica necessariamente no reconhecimento de propriedades numéricas, tais como 21 - 6 = 20 - 5, ou quaisquer outras que possam ser úteis para realizar cálculos ou reconhecer quantidades.

Por conta disto, um outro conceito que foi apresentado por nós como parte necessária para a definição de Flexibilidade Numérica é o proceito. Perceba que, para o nosso exemplo, o 21 - 6 e o 20 - 5 são duas representações relacionadas ao 15, o que coloca a concepção de proceito mais próxima do nosso objetivo ao definir Flexibilidade Numérica. Reconhecemos a importância desse acréscimo para que i) possamos incluir na definição as representações simbólicas e os cálculos que se apoiam nessa estrutura e para que ii) consigamos incluir também formalizações e registros, permitindo assim um viés mais rigoroso acerca do tema.

Em resumo, apresentamos preliminarmente a Flexibilidade Numérica como uma **habilidade humana caracterizada pelo senso numérico e pela capacidade de**

---

[15] O conhecimento lógico-matemático consiste na coordenação de relações. Por exemplo, ao coordenar as relações de *igual*, *diferente*, e *mais*, a criança se torna apta a deduzir que há mais contas no mundo do que contas vermelhas e que há mais animais do que vacas. (KAMII, 2012, p. 19).

transição entre representações conceituais e processuais de um mesmo símbolo. Estas duas características se fazem necessárias, mas ao nosso ver, sem uma determinação de grau em que cada uma deva se manifestar. Assim, uma pessoa pode dominar uma quantidade ampla de ferramentas que auxiliem no reconhecimento de proceitos distintos, ao mesmo tempo que não possui um senso numérico robusto. De maneira análoga, alguém pode ter um senso numérico bastante desenvolvido, sem conseguir relacionar muitos proceitos elementares de um mesmo símbolo. Essas duas características se complementam e cada uma pode ser útil no fortalecimento da outra, ampliando assim a Flexibilidade Numérica.

Como consequência, concluímos que estabelecer uma medida para a Flexibilidade Numérica de um indivíduo é equivalente a avaliar cada uma dessas duas habilidades que podem ser dadas em maior ou menor grau, determinando a importância de cada uma dentro deste conceito. No entanto, não julgamos ser necessário estabelecer esses critérios a princípio, e nem ao menos interessante para os objetivos que apresentamos nesta pesquisa.

4 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Ao levantar discussões sobre métodos e procedimentos de pesquisa, duas ideias sempre fizeram parte das nossas considerações. Primeiro, que esta seria uma pesquisa de cunho qualitativo, principalmente se levamos em consideração a nossa questão norteadora principal[16], que terá como resposta uma definição, construída a partir de todas as intervenções e dados coletados ao longo dos anos de desenvolvimento deste texto.

Uma segunda ideia importante é que este texto deveria ser sumariamente construído a partir de reflexões e interpretações, levando em consideração a leitura de uma série de textos que versem sobre a Flexibilidade Numérica em alguns contextos, e as experiências com professores e licenciandos que de alguma forma tenham feito parte de alguma das nossas fases de pesquisa.

Com essas ideias em mente, exploramos metodologias variadas com o intuito de encontrar procedimentos que colocassem a leitura, a interpretação e a reflexão como protagonistas. Estes são tópicos importantes de qualquer metodologia de pesquisa, mas por vezes ficam envolvidos em vários passos que devem ser seguidos de forma pouco maleável para que se atenda aos requisitos necessários para que a pesquisa seja confiável e possa refletir o recorte da realidade a qual se propõe estudar. No nosso caso, queríamos que o ato de ler e interpretar fosse mais aberto, e que orientações e métodos nos ajudassem exatamente a construir reflexões de forma assertiva, e não que guiassem nossas intervenções de forma rígida.

Com isso, nos aproximamos de métodos e teorias que colocam a hermenêutica como centro da pesquisa. Queremos apresentar neste capítulo algumas das ideias que nos motivaram a trilhar este caminho, explicando ainda como cada uma dessas ideias se relacionam com as nossas ações, e quais das orientações dentro desse campo de metodologias tomarão forma nesta dissertação, principalmente no modo como lemos, interpretamos e construímos reflexões a partir de cada leitura e cada intervenção concluída.

---

[16] O que é Flexibilidade Numérica?

Primeiramente, pode ser interessante explicar de que forma estamos significando a palavra hermenêutica. Por vezes, ela já foi relacionada à interpretação de textos religiosos e filosóficos, e atualmente possui muitas definições distintas e algumas bifurcações (hermenêutica crítica, hermenêutica metodológica, dentre outras). Neste texto, entenderemos a hermenêutica de uma forma elementar, como a ciência da interpretação no geral, o que será suficiente para investigarmos o que é a hermenêutica a partir de uma visão metodológica. Em especial, compreender a hermenêutica desta forma tem muita relação com a origem desta palavra, o que é explicitado neste trecho de um artigo que relaciona educação, linguagem e hermenêutica:

> A palavra hermenêutico, que é relativa à hermenêutica, está originariamente articulada ao nome de Hermes, que na mitologia grega é o mensageiro dos deuses. Hermes é aquele que traz a mensagem do destino, que expõe a notícia na medida em que consegue escutar a mensagem. Ele cumpre a tarefa de traduzir a mensagem divina para os humanos e de traduzir a mensagem humana para os deuses. O que, portanto, Hermes traduz não é a mensagem, mas seu sentido. Em outras palavras, Hermes é um tradutor de sentidos. Assim, ao traduzir, Hermes torna familiar aquilo que é estranho. Faz exatamente o que, em certa medida, fazem os professores: interpretar, traduzir e expressar. Eis o desígnio hermenêutico de Hermes; eis a tarefa docente. (SICHELERO, 2019).

Com isso, falar sobre a hermenêutica significa falar sobre a interpretação do mundo, das interações humanas e das ideias que decorrem de determinadas ações. Esta interpretação, que no geral é feita a partir de textos em suas mais diversas formas, tem como fim revelar a realidade que existe por trás do objeto de estudo. Nosso objetivo ao utilizar a hermenêutica, portanto, é encontrar possíveis significados para a Flexibilidade Numérica, primeiramente nos textos que apresentam este conceito, e posteriormente nas relações dos professores com questões que se relacionam ao tema.

> A hermenêutica pode ser compreendida como a maneira pela qual interpretamos algo no movimento que interessa e constitui o ser humano, de formar-se e educar-se. A interpretação decorre de um texto, um gesto, uma atitude, uma palavra de abertura e relação com o outro, que é capaz de se comunicar, de interagir. A

> hermenêutica busca uma reflexão e uma compreensão sobre aquilo que vemos, lemos, vivenciamos, criando uma cultura imersa em diferentes tradições e experiências. (SIDI e CONTE, 2017, p. 1945).

Dito isso, dentro do leque de opções de abordagens de pesquisa que se apoiam na hermenêutica, escolhemos a hermenêutica objetiva para nos orientar. Esta é uma variante desenvolvida por Ulrich Oevermann, que tem como uma de suas premissas que os textos, em suas mais diversas formas, materializam sentidos que foram atribuídos a algo específico no mundo – no nosso caso, ao conceito que estamos explorando.

> A finalidade da análise "hermenêutica objetiva" é descortinar a lógica entre as estruturas de reprodução social e as estruturas de transformação, reveladas em um texto, elaborado a partir de procedimentos de coletas de dados de pesquisa qualitativa, como pesquisa de campo, entrevistas e transcrição de gravação de situações observadas para serem analisadas, como as interações presentes em sala de aula. (VILELA e NAPOLES, 2010, p. 306).

Nos debruçaremos então, a partir desta abordagem de pesquisa, sobre os registros dos acontecimentos de duas oficinas realizadas com alunos de licenciatura e professores do ensino básico. Apresentamos uma ideia inicial sobre Flexibilidade Numérica em ambas as oficinas, bem como algumas atividades que destacam este conceito, de acordo com as nossas leituras iniciais sobre o tema. Com isso, esperamos entender como os participantes interagem com a nossa concepção inicial proposta (De forma positiva? Com ressalvas?), além de avaliar o que eles reconhecem como potencialidade da Flexibilidade Numérica para o trabalho em sala de aula, tentando responder assim a nossa outra pergunta motivadora[17].

É importante esclarecer que ao adotar tal abordagem, seguiremos orientações metodológicas que auxiliam no processo de interpretação dos registros de acordo com os fatos que aconteceram na situação que está sendo investigada. A partir destas orientações, espera-se que seja possível reconstruir estruturalmente as oficinas para

[17] Quais são as possibilidades práticas para a sala de aula, na visão de alguns professores e licenciandos, quando a Flexibilidade Numérica é vista como uma habilidade a ser desenvolvida?

compreender as interações que ali ocorreram, interações estas que podem nos dar pistas sobre as respostas das perguntas que almejamos responder.

De acordo com o texto de Napoles e Vilela (2008), o autor Andréas Wernet enumera essas orientações que devem nortear os caminhos a serem percorridos neste processo de reflexão e interpretação. De início, é importante dizer que toda a análise é feita de forma sequencial, de modo a valorizar como uma ação pode ter encaminhado outra – apresentar uma noção de Flexibilidade Numérica, durante a oficina, antes de apresentar atividades ou exemplos do que esse conceito pode significar, faz com que as interações entre os participantes (o que nos inclui) sejam diferentes de um cenário hipotético em que a noção é apresentada apenas ao final do evento, ou até mesmo em algum momento intermediário. Levar em consideração a sequência dos fatos, de acordo com a sequência do que foi registrado, permite uma interpretação mais coerente e fidedigna.

Dentro da análise sequencial, as orientações fazem referência à *independência de contexto*, a *literalidade*, a *sequência*, a *substancialidade da informação* e a *parcimônia*, que foram as traduções (do alemão) adotadas por Napoles e Vilela (2008) para palavras/termos que descrevem estas orientações. Sobre a *independência de contexto*, é importante que a análise dos registros seja feita de forma a apenas considerar o que ocorreu no evento e está registrado, ignorando em um primeiro momento informações anteriores.

> É o texto escrito que deve revelar o sentido da situação analisada. Cada passagem do registro deve ser esclarecida com a pergunta: o que está explicitado aqui? Esse princípio não quer dizer que o contexto não tem importância para o entendimento da situação analisada, mas apenas que não é apropriado naquele momento. O que se defende com essa operação é que o exame do contexto só é significativo após o desvendamento do que foi registrado fora do contexto. (VILELA e NAPOLES, 2008, p. 12).

Sobre a *literalidade*, observa-se a importância de se tentar interpretar o que foi registrado, da forma que foi registrado – afinal, se o registro foi feito de determinada forma, é necessário se entender o porquê. Sobre a *sequência*, tem-se a valorização de uma análise completa, sem ignorar partes do que foi registrado ou partes do que aconteceu – cada ocorrência, seguindo estes princípios, é importante para que se interprete a ocorrência seguinte. Este princípio pode parecer similar ao que dizemos sobre análise sequencial há pouco, mas existe uma diferença. Enquanto, dentro da hermenêutica objetiva, analisamos os registros de forma sequencial, o que diz sobre a ordem da análise, o princípio da *sequência* faz referência a completude, a importância de não se deixar nenhuma parte dos registros ou dos acontecimentos de fora da análise.

Sobre a *substancialidade da informação*, espera-se que os registros possam ser interpretados levando em consideração todas as diferentes leituras possíveis – afinal, toda leitura pode levar a bifurcações de ideias. O clássico livro Dom Casmurro, de Machado de Assis, é comumente interpretado de formas diferentes em relação à traição de uma personagem, mesmo que o texto seja idêntico para as diferentes interpretações. Hipóteses são levantadas durante a análise dos registros, e quando são igualmente válidas, devem ambas fazer parte da discussão. Em uma passagem sobre a substancialidade da informação, Napoles e Vilela (2008) ainda sugerem que para esta orientação é importante uma equipe de intérpretes, trabalhando em uma mesma pesquisa. Evidentemente isso elevaria as nossas possibilidades de análise, mas não foi possível dentro das limitações que tivemos no desenvolvimento desta pesquisa – e com isso, seremos os únicos dois responsáveis pela interpretação dos registros, sendo ainda mais criteriosos para que nossas análises sejam coerentes.

Por fim, sobre a *parcimônia*, espera-se que a análise se atenha ao que está registrado, sem uma busca por explicações exteriores ou complementares. O registro e os acontecimentos do evento devem ser suficientes para análise, e complementos devem fazer parte de conclusões, ou interpretações posteriores à finalização da análise dos registros.

A partir desses princípios analisaremos as interações de ambas as oficinas, e tentaremos com isso construir a nossa definição de Flexibilidade Numérica, e ainda analisar suas potencialidades em sala de aula. Essas construções serão feitas a partir de dois únicos eventos e, com isso, não queremos construir generalizações, algo que inclusive não é proposto dentro de pesquisas que se apoiam na hermenêutica objetiva. Queremos, no lugar disso, construir uma definição coerente, que seja útil, que inspire e possa ter algum impacto positivo na relação de alunos de diferentes faixas etárias com os números.

> A hermenêutica enquanto atitude de pesquisa e metodologia no campo da educação oferece valiosos recursos para a interpretação textual e discursiva, bem como amplia e aprofunda visões de mundo, tendo como foco os contextos de interação que se quer (re)conhecer na realidade vital. (SIDI e CONTE, 2017, p. 1952).

Para nós, as oficinas foram ambientes para explorar a Flexibilidade Numérica com outras pessoas, que de alguma forma estão envolvidas com a educação e que, assim como nós, podem encontrar possibilidades enriquecedoras em meio a uma série de ideias apresentadas. Interpretar como esses participantes vivenciaram estas experiências é o que vai nos ajudar a construir uma definição, dentre várias possíveis, que faz sentido para um determinado grupo e que, com isso, pode fazer para alguns outros – seja na sua forma integral, ou como um ponto de partida. Dito isso, encontrar a hermenêutica objetiva para nos orientar na construção desta dissertação, foi uma felicidade, já que ela tem uma forte relação com a educação e com o ato de refletir criticamente.

5 ATIVIDADES

> Não é tanto a partir das actividades práticas que os alunos aprendem, mas a partir da reflexão que realizam sobre o que fizeram durante essas actividades práticas. A aprendizagem decorre assim, sobretudo, não de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela actividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da actividade que realizou. (PONTE, 2005, p. 15).

Iniciar um capítulo de uma dissertação de mestrado com uma citação pode não ser a escolha mais elegante. Por outro lado, após a leitura deste trecho escrito pelo professor português João Pedro da Ponte, começar de qualquer outra forma nos pareceria insuficiente. Neste capítulo, apresentaremos as atividades que fizeram parte da nossa oficina, que por consequência, são atividades que ao nosso ver, são algumas possíveis referências do que pode ser feito para se desenvolver a Flexibilidade Numérica. E concordando com a citação do início de capítulo, acreditamos que cada uma destas atividades sejam pontos de partida para que reflexões importantes sejam feitas, reflexões que são as verdadeiras responsáveis pelo desenvolvimento de cada um na habilidade que estamos discutindo aqui.

Ressaltamos que ao entender a Flexibilidade Numérica como uma habilidade que pode ser desenvolvida continuamente durante toda a vida, poderíamos apresentar atividades adequadas para qualquer idade ou ano escolar. No entanto, escolhemos introduzir atividades que fossem adequadas para o Ensino Básico, em especial para o primeiro ciclo do Ensino Fundamental, por acreditar que este é um momento escolar promissor para intervenções deste tipo.

Ao finalizar qualquer uma destas atividades, esperamos que os alunos possam se desenvolver na Flexibilidade Numérica que estamos defendendo, o que inevitavelmente será feito de acordo com a força das reflexões de cada um. Uma mesma atividade pode ser uma grande abertura para uma relação mais flexível com os números para um aluno, enquanto pode significar muito pouco para outro, a depender de todo o contexto em que a atividade aconteceu dentro de uma sala de aula e dos conhecimentos que cada um possui ao iniciar estas investigações.

Estas atividades estão sendo descritas aqui por que são importantes para a parte experimental da nossa pesquisa – fizeram parte das oficinas que desenvolvemos com professores e alunos da licenciatura para avaliar algumas questões sobre Flexibilidade Numérica. Para além disso, entendemos que as atividades podem ser inclusive boas oportunidades de exemplificar algumas ideias apresentadas no nosso referencial teórico, além de oferecer ao leitor algumas ideias do que pode ser desenvolvido quando falamos sobre Flexibilidade Numérica.

Vale ressaltar que sabemos que existem discussões sobre o que é uma atividade, um desafio, um problema ou um exercício na matemática, e não queremos nos estender neste debate ao longo deste texto. De toda forma, vamos nos referir às intervenções que estamos propondo como atividades, acreditando que essa escolha não faça uma diferença significativa na leitura e interpretação do que apresentamos.

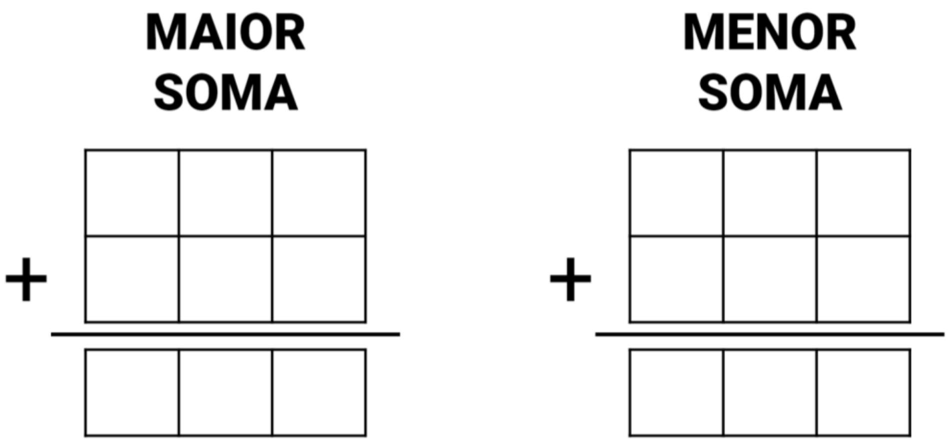
Ainda assim, é importante dizer que nos preocupamos com algumas características das atividades propostas. Primeiramente, todas as atividades possuem ao menos dois caminhos para a construção de uma solução (e a maioria delas, muito mais do que dois). Além disso, todas foram construídas com a expectativa de que não fosse conhecido pelos participantes um processo/procedimento que permitisse a resolução de forma imediata, exigindo assim a construção novas estratégias para cada uma das atividades.

5.1 Descrição das atividades

5.1.1 Maior e menor soma, maior e menor diferença

Nesta atividade, que estamos chamando de “Maior e menor soma, maior e menor diferença”, o desafio é construir 2 números de 3 algarismos, usando exatamente uma vez cada um dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, como na dupla de números 345 e 162, por exemplo. O primeiro objetivo é manipular estes algarismos para que a soma dos dois números formados seja a maior possível, enquanto existem outros três objetivos adicionais similares ao primeiro (encontrar a menor soma, a maior diferença e a menor diferença positiva).

Figura 1: Atividade “Maior e menor soma, maior e menor diferença”



Fonte: Autores

O senso numérico é fortemente destacado nesta atividade, na medida que cada participante pode ser levado a alguma hipótese inicial sobre a distribuição dos números de acordo com as suas próprias experiências com os números. Pessoas mais familiarizadas com o sistema decimal podem achar intuitivo que os maiores algarismos (5 e 6) devem ocupar a ordem das centenas para se encontrar a maior soma, enquanto outras podem precisar de alguns testes para chegar a essa conclusão. Os conhecimentos e as experiências de cada indivíduo que determinam quais ideias serão intuitivas na solução de um problema – dito de outra forma, o senso numérico que cada um possui é o que determinará quais ideias serão imediatamente acionadas após a compreensão da atividade, o que levará a formulação de hipóteses, testes e consequentemente a uma solução.

A noção de proceitos também não deixa de estar presente, mesmo que de forma sutil nesta atividade. Lembrando que pela definição apresentada por Tall e Gray, um proceito elementar é a amálgama de três componentes: um *processo* que produz um *objeto*, e um símbolo que representa tanto o processo, como o objeto. Neste caso, 642 + 531 e 542 + 631 são ambos proceitos elementares de 1173, que é a solução para a maior soma possível. Ambas as representações possuem símbolos que carregam um processo (a soma) e um objeto (o “1173”, ou ainda a ideia do “maior resultado possível” neste contexto). Transitar entre estes proceitos elementares é, ainda, algo bastante natural dada a estrutura da atividade – e veja que existem ainda outros proceitos elementares a partir de outras trocas de algarismos.

Analisando a atividade e suas possíveis soluções, vemos que para encontrar a maior soma, basta que os algarismos que representam números maiores estejam na ordem das centenas, que os intermediários estejam na ordem das dezenas e que os menores estejam na ordem das unidades, de forma a garantir que as centenas sejam as maiores possíveis (já que valem 10 e 100 vezes mais que as dezenas e as unidades, respectivamente). Seguindo estas orientações, é possível que se encontre algumas soluções distintas, já que 642 + 531, 542 + 631 ou 641 + 532, por exemplo, são somas que cumprem esta regra. Para o caso da menor soma, o desenvolvimento é análogo, apenas trocando algarismos que valem menos (1 e 2) para a ordem das centenas e algarismos que valem mais (5 e 6) para a ordem das unidades. Um exemplo de solução é 135 + 246 = 381.

Para a maior diferença, necessariamente queremos a maior distância entre dois números em uma reta numérica, o que pode ser dado pela subtração do maior número possível (654) pelo menor número possível (123), resultando em 654 – 123 = 531. Para a menor diferença, o desafio fica mais interessante por conta da exigência do resultado ser um número natural. Neste caso, queremos encontrar os dois números mais próximos na reta numérica. Inicialmente, sabemos que os algarismos da ordem das centenas precisam ser consecutivos para que a diferença seja menor do que 100. Além disso, queremos que o número com a maior centena seja o menor possível com os algarismos restantes e que o número com a menor centena seja o maior possível – assim, a diferença será a menor possível. Veja na tabela 1 como é possível organizar essas informações.

Tabela 1: Possíveis resultados para a menor diferença na atividade.

Algarismos das centenas	Maior número de 2 algarismos com algarismos restantes	Menor número de 2 algarismos com algarismos restantes	Números com os 3 algarismos	Diferença
1 e 2	65	34	234 e 165	234 – 165 = 69
2 e 3	65	14	314 e 265	314 – 265 = 49
3 e 4	65	12	412 e 365	412 – 365 = 47
4 e 5	63	12	512 e 463	512 – 463 = 49
5 e 6	43	12	612 e 543	612 – 543 = 69

Fonte: Autores

Com isso, conclui-se que a menor diferença natural possível dentro das regras desta atividade é o 47, dado pela diferença entre 412 e 365. Esta solução envolve, ao nosso ver, estruturas e ideias matemáticas mais sofisticadas, o que pode ser interessante para que a atividade também seja desafiadora para participantes que tenham mais segurança com características do nosso sistema de numeração.

5.1.2 Os 4 quatros

Ao desenvolver a atividade “Os 4 quatros”, o objetivo é representar os números de 1 a 20 utilizando exatamente e somente quatro vezes o algarismo 4 e operações matemáticas variadas. No livro “O Homem que Calculava”, o autor Malba Tahan (pseudônimo de Julio Cesar de Mello e Souza) apresenta este problema pelas palavras de Beremiz, o protagonista da história. Ao se deparar com uma tenda de um mercador intitulada “Os quatro quatros”, ele se anima dizendo que é possível formar qualquer número empregando quatro quatros. No apêndice da edição [18] que consultamos deste livro, existem considerações sobre a possibilidade de escrever qualquer número de 1 a 100, desde que dadas algumas liberdades como a utilização de raízes quadradas e da operação fatorial. Neste apêndice, inclusive, o problema é anunciado de forma mais rigorosa pelos revisores: “Escrever, com quatro quatros e sinais matemáticos, uma expressão que seja igual a um número inteiro dado. Na expressão não pode figurar (além dos quatro quatros) nenhum algarismo ou letra ou símbolo algébrico que envolva letra, tais como: log., lim. etc.”

Na maneira que escolhemos enunciar o problema, no entanto, não levamos em consideração quais operações estavam sendo utilizadas – com isso, o logaritmo, os limites, ou quaisquer outros conceitos que sejam utilizados com exatamente e apenas quatro quatros nos parece coerente. Com isso, excluímos raízes cúbicas por conta do algarismo 3 do índice, mas permitimos raízes quartas já que o índice consta então como um número 4. Para raízes quadradas, que são comumente anunciadas sem um índice, sugerimos que os alunos avaliem se é um recurso válido ou não.

[18] Editora Record de 2014, 86ª edição.

A relação desta atividade com a Flexibilidade Numérica nos parece bastante direta – o senso numérico é essencial para a escolha das operações e da disposição dos números, e a noção de proceitos se faz presente justamente pela grande quantidade de proceitos elementares que são encontrados para cada número de 1 a 20. Dentre todos os proceitos elementares de 12, nesta atividade se procura especificamente aqueles que podem ser construídos a partir de um processo que use apenas quatro algarismos '4'. Da maneira que enunciamos, a Flexibilidade Numérica não é dada de forma binária em cada indivíduo e pode ser desenvolvida continuamente. Descobrir novos proceitos elementares de alguns números, ao mesmo tempo que se exercita estratégias para o estabelecimento destes e outros proceitos nos parece uma boa maneira de desenvolver a capacidade de transicionar entre representações conceituais e processuais de um mesmo símbolo e, assim, de desenvolver a Flexibilidade Numérica.

5.1.3 Desafios alfanuméricos

Existe uma quantidade significativa de desafios alfanuméricos em diferentes línguas. Neste tipo de atividade, o objetivo é substituir cada letra por um algarismo, de modo que o cálculo formado após estas trocas seja coerente com a operação, no geral no Sistema de Numeração de Decimal. Cada letra representa um algarismo diferente, e uma letra que se repete no desafio representa o mesmo algarismo todas as vezes. O exemplo que escolhemos para apresentar aos participantes usa as palavras "amar" e "casar", apresentadas na operação AMAR + AMAR + AMAR = CASAR.

Figura 2: Atividade "Desafios alfanuméricos".

$$\begin{array}{r} \mathbf{A\,M\,A\,R} \\ \mathbf{A\,M\,A\,R} \\ +\ \mathbf{A\,M\,A\,R} \\ \hline \mathbf{C\,A\,S\,A\,R} \end{array}$$

Fonte: Autores.

A escolha deste exemplo, dentre os vários possíveis, foi feita por conta das estruturas que são formadas ao se resolver este exemplo – e não por conta do significado das palavras, ou da intenção romântica que possa ter motivado o autor deste desafio alfanumérico específico. O algarismo da unidade, da dezena e do milhar é idêntico nas parcelas e no resultado desta adição, o que leva a considerações interessantes sobre o Sistema de Numeração Decimal. Estas considerações, que discutiremos aqui, aparecem em vários outros desafios alfanuméricos, mas a recorrência que acontece neste exemplo (em 3 ordens) faz com que a atividade seja acessível, e ainda revele o que gostaríamos de apresentar.

Uma primeira observação que pode ser feita tem relação com a ordem das unidades destes números representados por AMAR e CASAR. Como ambas as palavras terminam com R, o algarismo da unidade de ambas deve ser o mesmo, e com isso, já reduzimos as possibilidades para R. Observando a tabela abaixo, veja que apenas com os algarismos 0 e 5 o cálculo permance coerente, e com isso, já temos certeza que R = 0 ou R = 5.

Tabela 2: Análise de possibilidades para R no desafio alfanumérico apresentado.

R	R + R + R	Algarismo da unidade
0	0	0
1	3	3
2	6	6
3	9	9
4	12	2
5	15	5
6	18	8
7	21	1
8	24	4
9	27	7

Fonte: Autores.

Se R = 0, podemos seguir para a ordem das dezenas com um raciocínio similar, já que A + A + A = A e a soma na ordem das unidades não chegou a uma dezena. Neste caso, como letras diferentes representam algarismos diferentes, teremos que A = 5 e, com isso, como 5 + 5 + 5 = 15, temos que M + M + M + 1 = S, para levar em consideração a centena alcançada com os algarismos 5 na ordem das dezenas. Podemos propor então que M = 2 e S = 7, e encontrar uma possível solução deste problema: 5250 + 5250 + 5250 = 15750. Outra possibilidade seria propor M = 1 e S = 3, mas isso geraria uma incoerência – como na ordem da unidade de milhar temos novamente 5 + 5 + 5, temos que C necessariamente representa o 1, ocupando a ordem da dezena de milhar. Com isso, M também não poderia ser igual a 1. Ainda, M não pode ser maior ou igual a 3, já que 3 + 3 + 3 + 1 = 10, o que faria com que a operação na ordem das unidades de milhar fosse incoerente, já que encontraríamos A + A + A + 1 = 1A ou A + A + A + 2 = 1A, o que não é possível para A = 5.

Se R = 5, outra possibilidade para R, teríamos que R + R + R = 15 e, com isso, precisamos considerar A + A + A + 1 de modo que o resultado desta operação leve a um número com algarismo da unidade igual a A. Infelizmente, isto não é possível como pode ser visto na tabela abaixo.

Tabela 3: Análise de possibilidades para A no desafio alfanumérico apresentado.

A	A + A + A + 1	Algarismo da unidade
0	1	0
1	4	4
2	7	7
3	10	0
4	13	3
5	16	6
6	19	9
7	22	2
8	25	5
9	28	8

Fonte: Autores.

Deste modo, a única solução possível para este desafio alfanumérico é 5250 + 5250 + 5250 = 15750. Escolhemos um caminho para apresentar a solução deste problema, mas existem vários outros, como a tentativa e erro com testes para alguns valores de forma não necessariamente organizada.

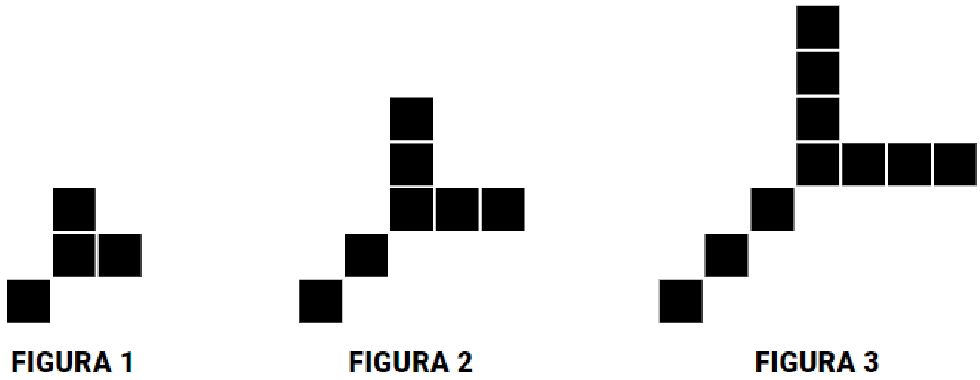
O senso numérico e a noção de proceitos fazem parte destas soluções. O primeiro, novamente por conta das concepções intuitivas que surgem ao longo da construção de uma resposta – pode ser intuitivo que C = 1 ou C = 2, por exemplo, o que nos levaria a um ponto de partida diferente da solução que apresentamos anteriormente. Se considerar A = 0 ou R = 0 logo de início também poderia ser uma noção intuitiva a partir de conhecimentos prévios, já que 0 + 0 + 0 = 0. Nesse caso, assim como afirmamos que noções intuitivas podem ser úteis para o estabelecimento de hipóteses e para a definição de fatos numéricos, também dissemos como elas podem levar a concepções incorretas, como neste caso poderia ter sido incorreto pensar que A ou R não poderia ser 5 já que 5 + 5 + 5 = 15, desconsiderando assim características do sistema decimal, já que as letras representam algarismos que, juntos, formam números que possuem uma estrutura definida na adição.

A noção de proceitos aparece neste desafio de uma forma mais tímida, já que o objetivo central da atividade não envolve a transição entre um proceito elementar e outro, mas sim determinar um proceito elementar específico a partir de algumas características – no caso, um proceito do número representado por CASAR que seja resultado da adição representada por AMAR + AMAR + AMAR, com estas letras sendo algarismos. Veja que o exemplo que estamos propondo possui uma única solução, mas qualquer exemplo de desafio alfanumérico que possuísse mais de uma solução já levantaria novamente a ideia da transição entre proceitos elementares que destacamos neste trabalho. Estas transições, inclusive, são feitas a partir da avaliação de características do sistema decimal, de modo que posicionar cada algarismo envolve uma avaliação de toda a estrutura de adição em questão. De toda forma, escolhemos não apresentar um exemplo com mais de uma solução para que a discussão sobre as ideias matemáticas levantadas fosse mais interessante e acessível, entendendo que destacar como existem exemplos com mais de uma solução (e o que isso significa) seria suficiente para que a noção de proceitos fosse compreendida aqui.

5.1.4 Padrões de crescimento

Em uma outra atividade que chamamos de Padrões de Crescimento, a dinâmica consiste em uma investigação de uma sequência apresentada a partir de uma representação visual. Ao comparar a figura 1 com a figura 2, e posteriormente a figura 2 com a figura 3, é possível fazer algumas observações que sirvam para se tentar descrever uma regra que determina como será a próxima figura – e mais do que isso, como será e quantos quadradinhos terá uma figura qualquer, como a figura 100 ou a figura 1000.

Figura 3: Padrões de crescimento

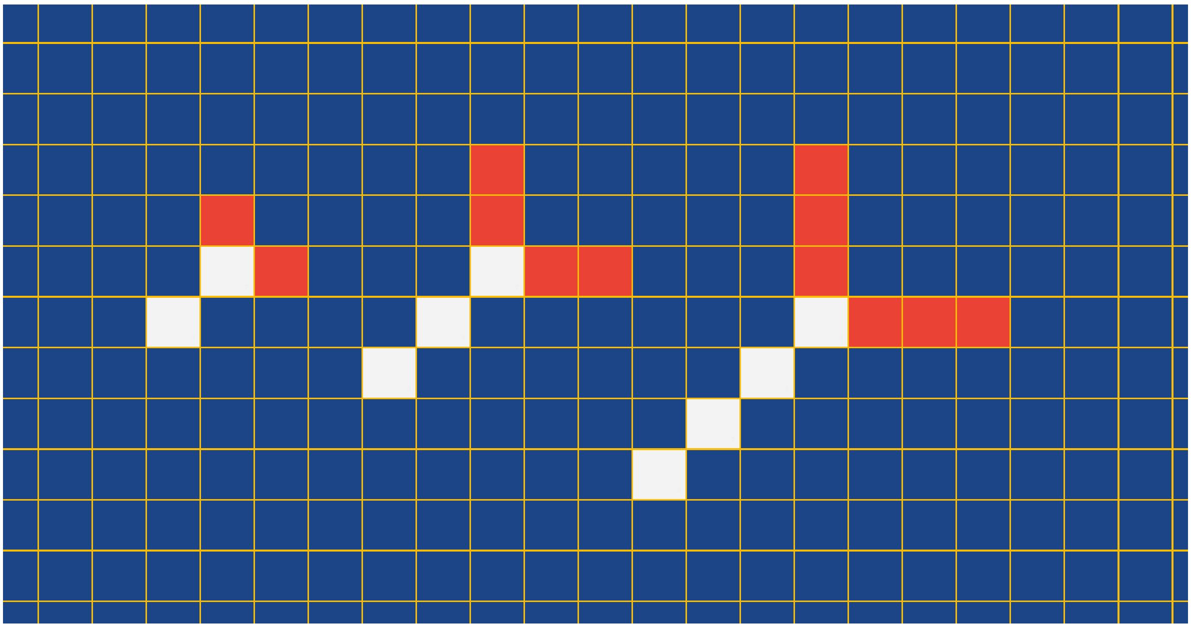


Fonte: Autores.

Ao trabalhar com esta atividade nas oficinas, tentamos não trazer a ideia de que o objetivo era determinar uma função ou uma fórmula que descrevesse a sequência, algo que seria interessante, mas poderia ser um fator de dificuldade. Com o intuito de garantir um engajamento de todos os participantes das oficinas, independente da relação que cada um possui com a matemática, sugerimos que a sequência fosse apenas investigada e que tentassem descrever como seria a figura 6 e quantos quadradinhos compõe a figura 100. Com isso, ao mesmo tempo que valorizamos a característica visual desta atividade, questionando o formato de uma determinada figura para que se observe como ela se comporta neste “crescimento”, ainda trouxemos uma questão algébrica que pode tanto ser resolvida a partir da construção de uma fórmula, como a partir de algum cálculo que leve em consideração o que foi observado em cada figura. Esses vários caminhos para determinar uma solução, que se apoiam em ferramentas de diferentes graus de sofisticação, faz com que a atividade, ao nosso ver, seja mais democrática e possível de trabalhar em diferentes anos escolares.

Mais ainda, a variedade de soluções faz com que diferentes fórmulas de crescimento (ou cálculos para determinar o número de quadradinhos) sejam encontradas, o que nos leva novamente ao conceito de proceitos. É possível, por exemplo, perceber que a primeira figura possui 4 quadradinhos e a cada nova figura, novos 3 quadradinhos são adicionados, o que nos leva a uma fórmula do tipo 4 + 3 (n - 1). Ainda, uma outra forma de expressar esta mesma fórmula pode ser dada por 1 + 3n, se imaginamos que a figura 0 possui 1 um único quadradinho. Ainda, seria razoável observar este crescimento de outras formas, como (n + 1) + 2n, caso o padrão seja compreendido da maneira representada na imagem abaixo.

Figura 4: Um possível padrão de crescimento que poderia ser interpretado pela fórmula (n+1)+2n



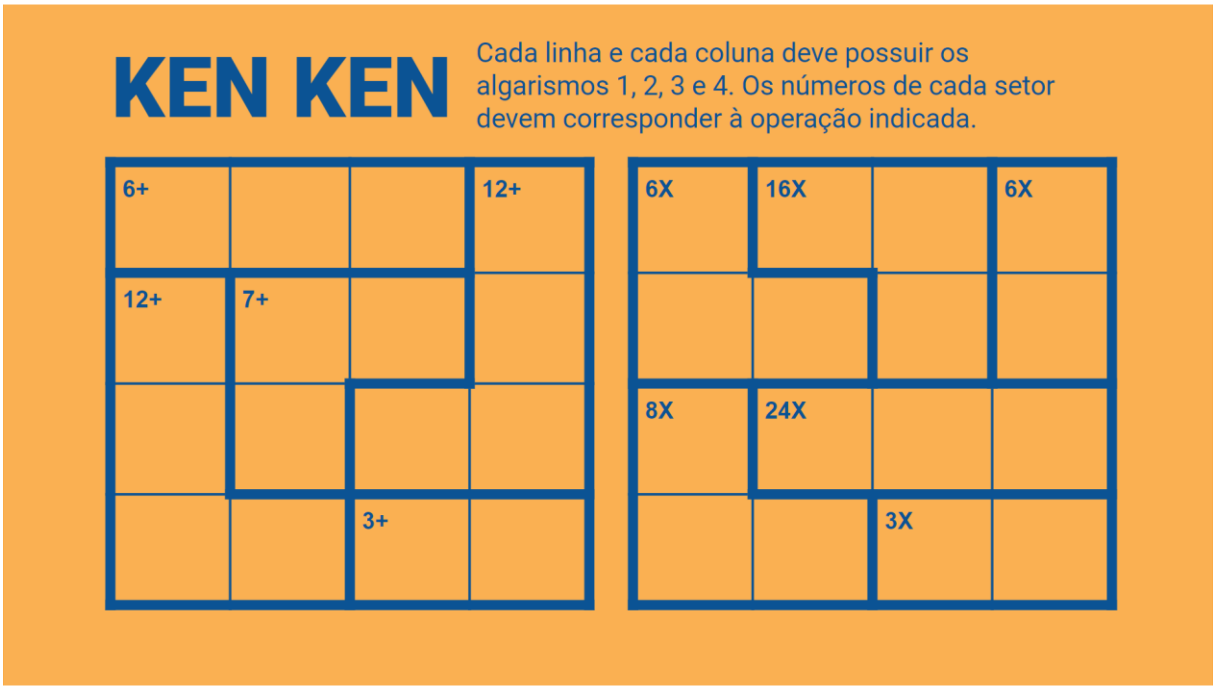
Fonte: Autores.

Todas essas fórmulas representam um mesmo objeto matemático de formas diferentes, podendo todas serem relacionadas ao símbolo “3n + 1”, após algumas manipulações. Escrevendo de outra maneira, todas são proceitos elementares do proceito 3n + 1, o que nos mostra neste exemplo como o conceito de proceitos pode ser amplo. Evidentemente, caso alguém queira responder quantos quadradinhos possui a figura 100 sem se apoiar no uso de fórmulas, isso pode ser feito também a partir de um 4 + 3 x 99 ou 1 + 3 x 100, de modo que ao operar dessa forma, se encontram proceitos elementares variados relacionados ao 301. Para além da noção de proceitos, o senso numérico é fundamental na compreensão do crescimento – a maneira que cada indivíduo enxerga este crescimento e como cada um aborda a atividade tem uma relação direta com os conhecimentos que cada um possui e com as noções intuitivas que surgem ao se observar as 3 figuras iniciais. Veja que até o reconhecimento de que existe um crescimento pode ser intuitivo para pessoas que já tenham vivenciado atividades similares, enquanto para outros as figuras podem inicialmente apenas parecer 3 figuras isoladas, o que influencia como cada um vai pensar na atividade e, consequentemente, quais conhecimentos matemáticos serão mobilizados para se determinar uma possível solução.

5.1.5 Ken Ken

Ken Ken é um quebra-cabeça que apresenta uma dinâmica similar ao Sudoku (aos que conhecem, essa pode ser uma boa referência), ao mesmo tempo que se apoia em operações matemáticas. O quebra-cabeça é desenvolvido em uma tabela com a mesma quantidade de linhas e colunas, com algumas divisões setoriais e alguns números sempre indicados em conjunto com uma operação matemática.

Figura 5: Atividade Ken Ken



Fonte: Autores.

Nesta atividade, o desafio é distribuir números 1, 2, 3 e 4, de forma que eles não se repitam em nenhuma linha e nenhuma coluna. Além disso, cada setor (veja a imagem acima) possui um número e um símbolo de alguma operação matemática[19]. Os números distribuídos dentro de cada setor, se combinados de acordo com a operação em destaque, devem resultar exatamente no número daquele setor. Assim, um setor indicado por 6+ deve ter números distribuídos de forma que a soma de todos eles seja igual a 6, assim como um setor indicado por 24X deve ter números que, quando multiplicados, resultem em 24.

Além de ser uma boa abordagem para que se discutam todos os proceitos elementares de um símbolo dentro de algumas restrições (uma operação e a quantidade de números no setor), esta atividade ainda destaca características do senso numérico, na medida que ideias sobre o posicionamento de algum número em um quadrado específico pode ter relação com o que cada um acha que caberia ali. Um setor de três espaços indicado por 7+, por exemplo, pode ter os números 1, 2 e 4 ou 1, 3 e 3 ou ainda 2, 2 e 3 em sua composição, o que mostra que 1+2+4, 1+3+3 e 2+2+3 são todos proceitos elementares de 7. A escolha de algum destes grupos de números, no entanto, tem relação com o formato deste setor e com quais números se espera usar em outros espaços, o que pode ser decidido de acordo com a intuição de cada um sobre quais números serão necessários para compor o resultado de outros setores. Evidentemente esta tarefa pode ser feita de maneira formal, sem recorrer a palpites sobre as posições, mas ainda se apoiando no senso numérico necessário para determinar todos os proceitos elementares de cada caso.

5.1.6 Conversas Numéricas

Em algumas leituras que fizemos tentando entender o que significa Flexibilidade Numérica, nos deparamos com várias propostas de dinâmicas e atividades que poderiam levar os alunos a desenvolver esta habilidade. Uma dinâmica simples e, ao nosso ver, muito interessante que aparece em alguns destes trabalhos é a que pode ser chamada de Conversas Numéricas. Humphreys e Parker (2015) descrevem as conversas numéricas como “uma prática na qual os estudantes resolvem mentalmente problemas de cálculo e falam sobre suas estratégias”. De maneira geral, os alunos são convidados a resolver mentalmente alguma conta e, em um segundo momento,

[19] No geral, adição e multiplicação, mas com algumas restrições é possível utilizar outras operações.

compartilhar a própria solução verbalmente enquanto o professor faz os registros das ideias apresentadas. Boaler (2015) também discorre sobre o tema:

> As Conversas Numéricas são o começo perfeito para toda aula de matemática. Não se comparam a nenhum outro método que eu conheça. Muitas atividades de matemática importantes requerem muito planejamento e uma hora de tempo de ensino, mas as Conversas Numéricas são diferentes. Em um espaço de tempo muito curto (15 minutos, aproximadamente), os professores podem proporcionar aos alunos algumas das maiores oportunidades – podem mudar sua visão da matemática, ensinar-lhes senso numérico, auxiliá-los a desenvolver competências matemáticas e, ao mesmo tempo, engajá-los em uma matemática aberta e criativa. (Boaler, 2015, p. xii).

Não acreditamos que exista uma atividade perfeita, muito menos uma dinâmica perfeita para todo início de uma aula de matemática. De toda forma, este pequeno trecho nos parece informativo acerca das potencialidades das Conversas Numéricas, inclusive para uma das nossas referências principais na construção de uma noção inicial para Flexibilidade Numérica. Para conduzir as Conversas Numéricas, nos apoiamos nos procedimentos adotados por Humphreys e Parker (2015), autoras de um livro que propõe uma discussão profunda sobre Conversas Numéricas. De forma resumida, as orientações que utilizamos (e que apresentamos na oficina) são as seguintes:

1. Todos guardam papel e lápis. O professor então apresenta um problema para a discussão.
2. Quando os alunos terminam, levantam polegares. Inicie a discussão quando a maioria dos polegares estiver erguida.
3. Primeiro, anote na lousa todas as respostas. Em seguida, procure voluntários para defenderem alguma solução.
4. Abra para perguntas e palpites sobre a solução. Talvez você precise fazer algumas dessas perguntas no início.
5. Encerre quando o tempo pré-determinado acabar. As conversas numéricas podem se estender por bastante tempo.

Para além desse método apresentado de forma enumerada para guiar a execução de uma dinâmica de conversas numéricas, as autoras ainda apresentam algumas ideias e alguns princípios que podem ser úteis para que o professor se prepare e se sinta seguro com a dinâmica. Novamente, fizemos um recorte destas ideias, destacando o que nos pareceu mais importante. Estas ideias foram apresentadas na oficina assim como estão apresentadas a seguir.

- Fique tranquilo com o tempo de espera. Nem todos estão preparados para compartilhar ainda.
- Cresça os desafios gradualmente. Começar com pontinhos[20] é uma boa alternativa.
- Ouça de verdade (e não tente adivinhar o que as crianças estão pensando).
- Exercite o hábito de registrar pensamentos.
- Incentive que os alunos conversem entre si nos momentos de impasse.
- Incentive que se expressem com clareza (inclusive matemática).
- Valorize múltiplas respostas (inclusive as erradas) e mostre que os algoritmos não são nem sempre necessários.

Existe uma discussão por trás de cada uma dessas ideias e procedimentos, o que é feito de forma clara e organizada por Humphreys e Parker (2015). Não avançaremos nesta discussão aqui, voltando a alguma questão apenas quando for necessário para especificar algo que tenha ocorrido em alguma das oficinas. Escolhemos seguir estes procedimentos porque, de modo geral, eles são interessantes quando pensamos na Flexibilidade Numérica – destacam o senso numérico e diferentes proceitos de um mesmo símbolo, na medida que cálculos são desenvolvidos de várias formas distintas por participantes diferentes.

[20] Conversas numéricas que consistem na contagem de uma quantidade de pontos em um cartão que é mostrado rapidamente aos participantes. Nas oficinas, desenvolvemos este tipo específico de conversas numéricas, e com isso, descreveremos mais à frente suas espeficidades e quais são os resultados esperados.

5.2 Considerações sobre as atividades

Nestas últimas seções, apresentamos várias atividades que, como tentamos defender, são boas oportunidades de desenvolver a Flexibilidade Numérica, ao menos segundo a nossa noção inicial. Avaliar cada atividade observando como o senso numérico e a noção de proceitos influenciam no desenvolvimento dos objetivos em cada caso nos traz segurança sobre como apresentamos esta primeira concepção – nos parece coerente, observando as atividades, que estamos falando sobre uma habilidade que de fato pode ser continuamente desenvolvida, que impacta nas nossas escolhas frente a um desafio matemático e que possibilita uma construção de uma relação positiva com os números, à medida que esta habilidade é desenvolvida.

De toda forma, definir Flexibilidade Numérica é o nosso principal objetivo nesta pesquisa, e escolhemos refletir sobre o tema também levando em consideração como alunos de licenciatura e professores do ensino básico se relacionam com esta primeira noção e com as atividades que estamos propondo. Para isso, duas oficinas foram desenvolvidas e serão apresentadas no capítulo a seguir, com as experiências sendo relatadas levando em consideração os princípios que apresentamos no capítulo sobre procedimentos de pesquisa.

Antes de seguir para as oficinas, entretanto, ainda queremos apresentar uma última escolha que não nos leve a uma incoerência lógica na construção da nossa definição. Para isso, gostaríamos de propor um resumo de como caminhamos com esta pesquisa. No início do trabalho, apresentamos o que chamamos de Flexibilidade Numérica e discorremos sobre as teorias que sustentam a nossa concepção inicial. Neste capítulo, baseado nesta concepção, apresentamos uma série de atividades que destacam os conceitos que levamos em consideração. Em nossas conclusões, queremos trazer uma definição de Flexibilidade Numérica, levando em consideração o que trabalhamos até aqui e as considerações dos participantes durante as nossas oficinas.

Levando esses três momentos em consideração, entendemos então que a partir de agora não podemos mais nos apoiar na nossa noção inicial. Ela foi apresentada aos participantes da oficina, e as atividades, como explicamos, destacam exatamente o que esperávamos que fosse desenvolvido quando pensamos na Flexibilidade Numérica a partir das nossas ideias iniciais. Ao não se apoiar mais nesta primeira ideia, o processo se torna contínuo – Esboçamos uma concepção, construímos atividades a partir deste esboço, vivenciamos as atividades com participantes das oficinas, fizemos reflexões e construímos uma definição baseado nestas reflexões que, necessariamente, se apoiam nos primeiros dois momentos, já que elas foram construídas sobre a estrutura da nossa concepção inicial e das atividades.

Se não fizéssemos essa escolha, poderíamos fragilizar a nossa definição – as atividades escolhidas não destacam necessariamente a nossa futura definição de Flexibilidade Numérica, já que foram construídas unicamente a partir da nossa concepção inicial. Se admitíssemos que, o que temos até aqui, já representa a Flexibilidade Numérica, então nada mais precisaria ser feito. Com isso, a partir das atividades que apresentamos e das interações com os participantes nas oficinas que construiremos o que será a nossa definição de Flexibilidade Numérica, e encerremos assim esta pesquisa de forma coerente com o que trouxemos até aqui. Vale destacar que isso não significa que os proceitos e o senso numérico serão abandonados daqui para frente – pelo contrário, estes são conceitos que estão aqui para nos apoiar, para atribuir nomenclaturas à ideias que julgamos importantes anteriormente e que, possivelmente ainda serão. De toda forma, nos demos a liberdade de escolher usá-los ou não de acordo com o que será descrito no capítulo a seguir.

6 OFICINAS

Neste capítulo, descreveremos duas oficinas que foram realizadas apresentando a nossa concepção inicial para Flexibilidade Numérica, bem como algumas atividades (dentre a lista de atividades que descrevemos anteriormente). Além disso, ainda reservamos um tempo de cada oficina para conversar sobre a sala de aula e sobre as expectativas com as aulas de matemática na visão de cada participante, o que julgamos valioso para as vivências de cada um.

A primeira oficina aconteceu de forma presencial, e assim esperávamos que também fosse a segunda, o que infelizmente não foi possível com os acontecimentos de 2020 e 2021 relacionados à pandemia de Covid-19. Aguardamos um longo período acreditando que logo seria possível retornar às atividades habituais, mas com o tempo entendemos que precisaríamos rever nossas expectativas e adequar a nossa pesquisa para que também pudesse ser desenvolvida de forma virtual, garantindo assim o distanciamento social e a segurança dos participantes. De toda forma, podemos adiantar que ficamos satisfeitos com ambos os formatos, e que o tempo de espera para a segunda oficina acabou sendo positivo: tivemos tempo para nos acostumar com novas ferramentas e novas possibilidades do ensino remoto, um conhecimento que não era necessariamente tão sólido antes de vivermos muitas experiências (fora desta pesquisa) nesta modalidade de ensino. Dado este recorte de tempo, apresentamos então os detalhes sobre cada oficina para que, posteriormente, possamos refletir sobre os acontecimentos para a construção da nossa definição de Flexibilidade Numérica e para tentar responder as nossas outras questões norteadoras.

6.1 Oficina presencial

No dia 28 de setembro de 2019, ministramos uma oficina no CAEM com o título “Quebra-cabeças, conversas numéricas e um caminho para a Flexibilidade Numérica”. Com duração de 4 horas, o objetivo da oficina foi apresentar ideias relacionadas à Flexibilidade Numérica, bem como algumas atividades que possibilitam o contato com esta habilidade. Nesta seção, pretendemos descrever partes desta oficina e algumas análises feitas a partir das participações.

Oferecer esta oficina como parte da nossa pesquisa foi bastante natural, já que no início das nossas discussões, estávamos muito inclinados a trabalhar com a formação de professores. É notável que não abandonamos o foco nos professores, mas com a amplitude de possibilidades deste tema, preferimos nos concentrar em estudar a Flexibilidade Numérica como conceito para que, em um futuro, tenhamos mais referências – momento em que poderemos pensar com profundidade na formação de professores, na relação dos alunos com a habilidade ou em outras propostas de atividades, por exemplo.

Participaram da oficina professores da rede pública e privada e alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IME USP, totalizando 17 participantes. Destes, 10 eram professores atuantes (no momento da oficina), sendo que 1 trabalhava no Ensino Fundamental I, 4 no Ensino Fundamental II, 4 no Ensino Médio e 1 professor que não se enquadrou em nenhuma destas três opções. Dos 9 professores do Ensino Básico, 3 são da rede pública e 6 da rede privada. A oficina foi organizada em quatro partes:

1. Discussão sobre as aulas de matemática e a Flexibilidade Numérica;
2. Conversas Numéricas;
3. Outras atividades;
4. Questionário sobre a oficina.

Começamos a primeira parte da oficina conversando brevemente sobre como os professores descreveriam o aluno ideal nas aulas de matemática. Não acreditamos que exista um “aluno perfeito” ou um “aluno ideal” em qualquer contexto, o que foi explicado aos participantes. De todo modo, formulamos a questão assim para que os participantes pudessem refletir sobre quais habilidades eles gostariam que seus alunos desenvolvessem (matemáticas ou sociais) para que as aulas pudessem ser aproveitadas ao máximo para potencializar os conhecimentos de cada um.

Com este início, pretendíamos inclusive entender quais dessas características podem ter alguma relação com a Flexibilidade Numérica e, dessa forma, destacamos que a pergunta se referia a um aluno ideal nas aulas de matemática. Mesmo com essa delimitação, nas respostas podem ter sido considerados comportamentos e hábitos que não estão diretamente relacionados ao desenvolvimento do raciocínio matemático, mas que sinalizam algumas expectativas dos participantes da oficina. Segue a lista de características listadas pelos participantes.

- Curioso;
- Que possui fundamentos (que sabe conteúdos);
- Criativo;
- Interessado;
- Persistente;
- Sem medo de errar;
- Questionador;
- Assíduo;
- Pertence à escola;
- Participativo;
- Cooperativo;
- Colaborativo;
- Educado.

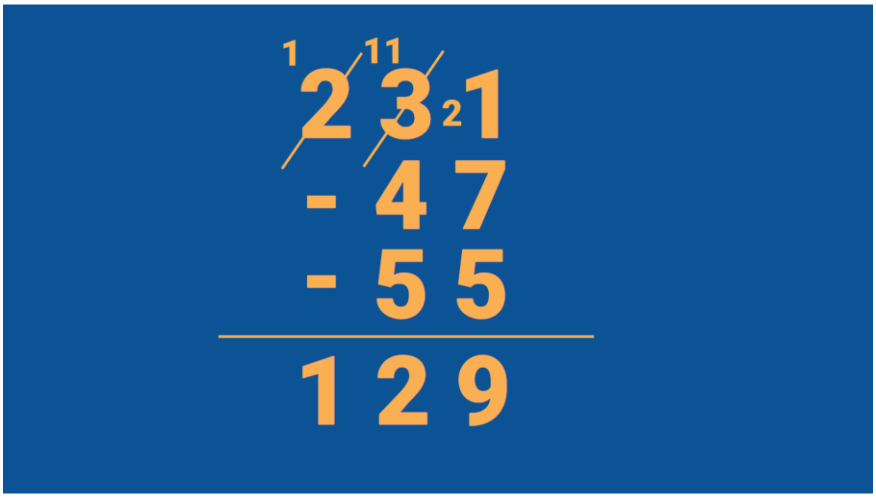
Alguns participantes, ao final dessa construção coletiva de características, trouxeram que elas são importantes para que caminhos para o aprendizado sejam abertos, e que mesmo sem necessariamente estarem relacionadas à matemática, influenciam no modo que cada um se desenvolve na matemática e em todas as outras áreas do conhecimento. Ainda foi levantado que ao avaliar quem é o aluno ideal nas aulas de matemática, devemos levar em consideração quem é o avaliador, já que é ele quem determina a métrica que será utilizada para definir quais alunos alcançaram determinado parâmetro.

Ao final da discussão os professores ainda trouxeram questões específicas da matemática, levantando ideias sobre a matemática ser considerada uma linguagem ou um conjunto de técnicas, e que essas concepções são relevantes para se definir quem é este aluno ideal. No intermédio da discussão, não tentamos definir se a matemática é ou não uma linguagem, principalmente por isso fazer parte de um campo de estudo da filosofia matemática da qual não somos estudiosos. De toda forma, validamos que são ideias essenciais para construirmos este aluno ideal e, com isso, como devemos construir uma aula de matemática para que se possa desenvolver estas características.

Em seguida, dando continuidade à oficina, trouxemos uma nova pergunta: “Saber fazer contas ou entender as contas?”. Com esta pergunta, esperávamos que os participantes refletissem sobre o papel dos algoritmos, do cálculo mental e da compreensão dos significados das operações matemáticas que estão sendo estudadas. Os participantes, aparentemente em um consenso, legitimaram a utilização dos algoritmos com a ressalva de que a compreensão do significado das operações e o entendimento sobre a validade e o funcionamento dos algoritmos deva ser também atingida. Com isso, ficou como resposta à nossa pergunta de que saber fazer as contas e entender as contas são ambas capacidades importantes.

Seguimos a oficina com um exemplo de cálculo que nos pareceu um bom exemplo para encerrar esta discussão – este exemplo havia sido planejado previamente, e de fato corrobora com as ideias que foram destacadas no nosso último questionamento. O cálculo apresentado destacou uma situação interessante que foi narrada por uma professora do Instituto de Matemática e Estatística, quando um conhecido recebeu a informação de que um cálculo desenvolvido por ele havia sido feito de forma incorreta por não seguir o algoritmo tradicional da subtração.

Figura 6: Exemplo de subtração desenvolvida por um aluno hipotético em fase escolar.



Fonte: Autores.

Na situação acima, dois números (47 e 55) deveriam ser subtraídos de um primeiro (231), o que poderia ser feito a partir de duas subtrações consecutivas, mas foi feito por este aluno a partir de uma leitura diferente do algoritmo tradicional da subtração. Ele faz uma troca de 2 dezenas para 20 unidades, conseguindo assim 21 unidades para subtrair 7 e 5, o que resulta em 9 unidades ao final. Em seguida, 1 centena é transformada em 10 dezenas para que seja possível subtrair 4 e 5 dezenas, o que resulta em 2 dezenas e, por fim, sobra 1 centena, o que leva ao resultado 129.

Quando escolhemos este exemplo para apresentar, o que mais nos encantou foi o fato de este pequeno cálculo mostrar ideias importantes do sistema decimal e do algoritmo da subtração. O entendimento de que 100 unidades equivalem a 10 dezenas, que equivalem a 1 centena, e o uso desse entendimento para usar o algoritmo da subtração de uma forma diferente, subtraindo dois números simultaneamente pode ser um bom indicativo de que o algoritmo foi compreendido. As trocas neste algoritmo, várias vezes apresentadas como “empréstimos”, são feitas na medida adequada para que os dois números em cada ordem possam ser subtraídos. Apresentamos este exemplo aos participantes, relacionando então com o que eles haviam respondido na última pergunta – um exemplo de cálculo que pode mostrar o entendimento de como se faz uma conta e como esta conta (algoritmo) funciona. Todas as reações foram de aprovação ao que foi feito pelo estudante, e um participante reprovou a atitude de quem avaliou o cálculo como incorreto.

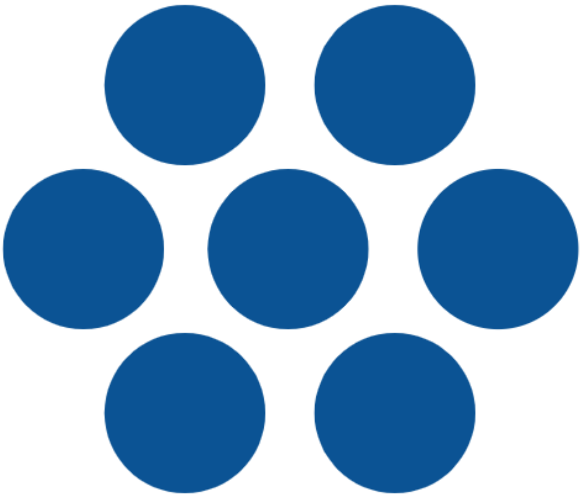
Saindo do exemplo, apresentamos então uma primeira noção de flexibilidade numérica – conceito este, que era desconhecido pela maioria dos participantes da oficina. Para não nos prendermos à conceitos específicos (proceitos e senso numérico) durante a explicação, tentamos apresentar uma versão simplificada desta concepção, mas que ainda trouxesse as ideias que estávamos sustentando. Vale lembrar que o nosso objetivo é construir a definição de Flexibilidade Numérica considerando como os professores interagem com as atividades e com as questões apresentadas, e não considerando a forma que apresentamos a Flexibilidade Numérica. Por isso tomamos a liberdade de fazer esta simplificação para que o andamento da oficina fosse mais fluído e não ficássemos presos em discussões teóricas que poderiam significar pouco sem uma experimentação com atividades que destacassem o que queríamos mostrar. Dito isso, no evento, apresentamos a Flexibilidade Numérica como uma qualidade de quem compreende os números de maneira conceitual e flexível. De maneira geral, isso é dado por:

- Desenvolvimento do senso numérico, com reconhecimento de quantidades e atribuição de significado às operações.
- Reconhecimento das relações entre procedimentos e conceitos, e dos significados de diferentes notações.

Veja que o senso numérico, bem como a noção de proceito estão presentes no texto, ainda que apresentados de uma forma diferente da que fizemos nesta dissertação, para que cada um dos conceitos fosse apresentado de forma exemplificada. Para o senso numérico, usamos o reconhecimento de quantidades e a atribuição de significados como algumas possíveis ideias intuitivas, e para a noção de proceitos, usamos a relação entre procedimentos e conceitos, que posteriormente exemplificamos com a operação 7 – 3 = 4, de maneira similar à que apresentamos os proceitos no nosso capítulo de referencial teórico. Após esta apresentação, os professores não fizeram muitos comentários, apenas sinalizaram compreender o que estávamos explicando.

Na segunda parte da oficina, fizemos algumas Conversas Numéricas. Seguindo os procedimentos adotados por Humphreys e Parker (2015), fizemos uma sequência de duas conversas numéricas: uma primeira com um cartão de pontos e uma segunda com a multiplicação 18x5. Na primeira, após poucos segundos de visualização, os participantes deveriam indicar a quantidade de pontos da figura 7 e explicar como eles agruparam e contaram os pontos – sem que fosse possível ver a figura novamente. Fizemos representações na lousa seguindo fielmente o que cada participante disse – assim, respostas como “um círculo em volta de um ponto” e “um hexágono em volta de um ponto” foram representadas de maneira diferente, mesmo que a escolha e agrupamento dos pontos tenha sido semelhante. As Figuras de 8 a 11 são algumas de 13 soluções encontradas e a Figura 6 mostra uma foto da lousa, com todos os registros apresentados, tanto para os que viram 6 pontos na imagem, como para os que viram 7 pontos.

Figura 7: Cartão de pontos



Fonte: Humphreys e Parker (2005).

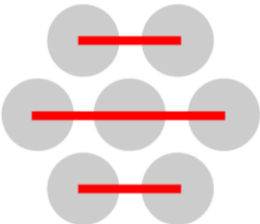
Figura 8: Solução 1 do Cartão de Pontos

Fonte: Autor

Figura 9: Solução 2 do Cartão de Pontos

Fonte: Autor

Figura 10: Solução 3 do Cartão de Pontos

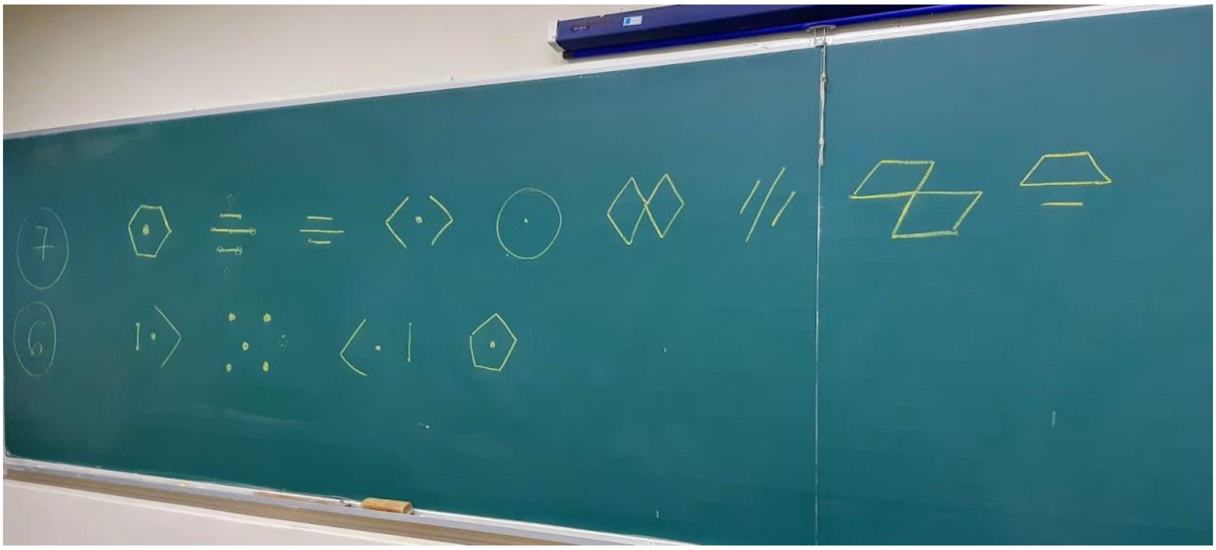


Fonte: Autor

Figura 11: Solução 4 do Cartão de Pontos

Fonte: Autor

Figura 12: Todos os registros feitos na Conversa Numérica com um cartão de pontos.

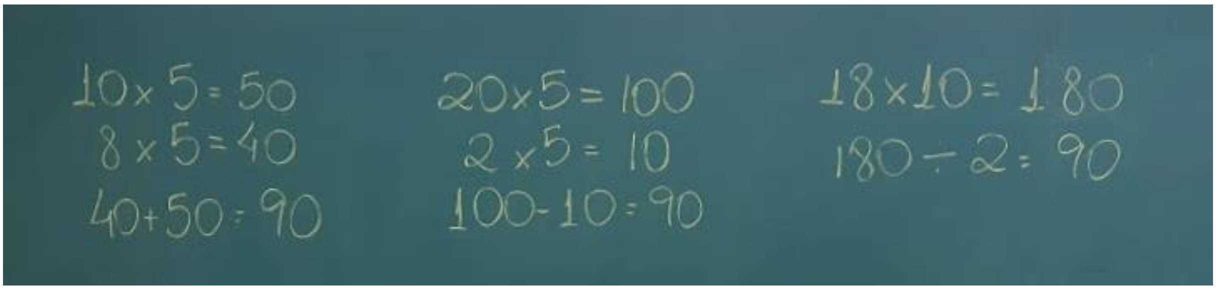


Fonte: Autores.

Este exercício foi feito para que o grupo percebesse: i) a dinâmica das Conversas Numéricas e ii) o foco na valorização de soluções distintas e não no resultado. Foram 9 representações de participantes que visualizaram 7 pontos, enquanto 4 participantes disseram ver 6 pontos. O modo que cada representação foi feita seguiu o que foi falado por cada um: “Um traço em cima”, “Três formando uma seta no lado” ou “Três linhas na diagonal” foram algumas das várias frases que representam ideias que estão desenhadas acima. Ao final, apresentamos novamente a imagem inicial para que todos pudessem conferir como os pontos estavam dispostos de fato, momento em que alguns participantes que viram 6 pontos quiseram justificar o motivo da escolha incorreta. Neste momento, ouvimos as justificativas e valorizamos todas as soluções, independentemente do erro ou do acerto, destacando que neste e em muitos casos, o erro é uma oportunidade para um bom debate matemático.

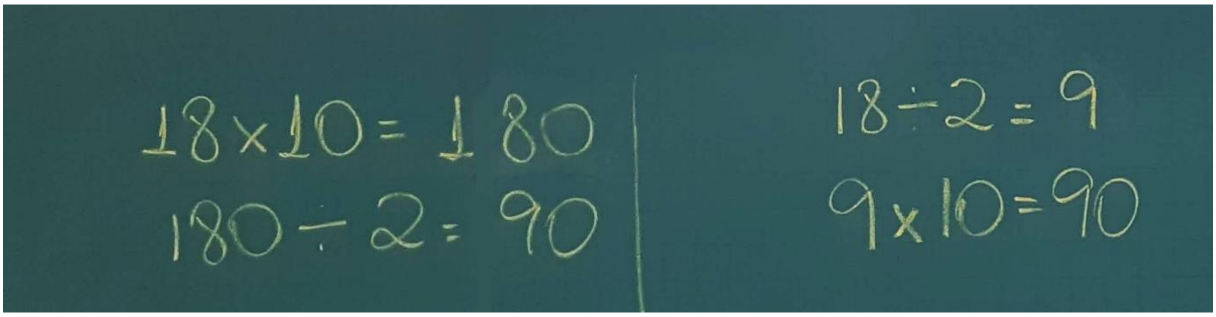
Em seguida, propusemos a multiplicação 18 x 5 para que eles pensassem em alguma solução e, depois de um tempo, compartilhassem. De maneira análoga, registramos as respostas de acordo com o que cada participante descreveu. Foram 7 soluções distintas que destacaram propriedades da multiplicação, além do algoritmo usual e do significado da operação. As 7 soluções, da forma que registramos na lousa, podem ser vistas nas figuras 13, 14 e 15.

Figura 13: Primeira parte dos registros da conversa numérica para a operação 18 x 5.



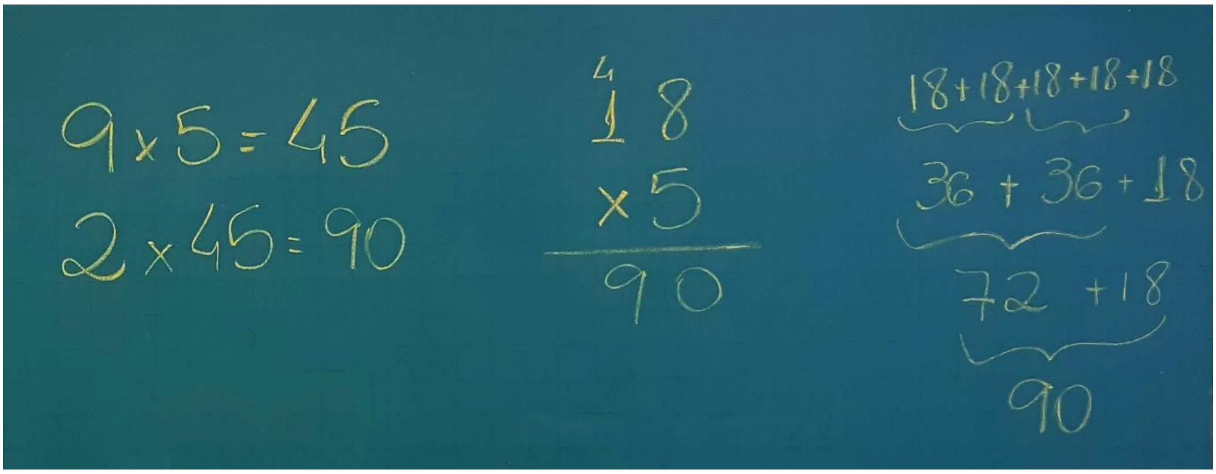
Fonte: Autores.

Figura 14: Segunda parte dos registros da conversa numérica para a operação 18 x 5.



Fonte: Autores.

Figura 15: Terceira parte dos registros da conversa numérica para a operação 18 x 5.



Fonte: Autores.

Discutimos brevemente cada uma das soluções, avaliando quais propriedades foram utilizadas em cada caso, e quais ideias importantes poderiam ser destacadas em cada cálculo, como a decomposição dos números, os múltiplos de 10 e o algoritmo da multiplicação. Alguns participantes se manifestaram contando que descobriram novas possibilidades e estratégias ao ver esta variedade de soluções, o que é esperado quando realizamos uma conversa numérica. Encerramos mostrando algumas possibilidades de reconhecer propriedades geométricas em algumas destas soluções, relacionando a multiplicação ao conceito de medida de área, o que foi feito apenas a título de curiosidade para mostrar como é possível propor investigações ainda mais sofisticadas a partir desta mesma dinâmica. Demos ainda algumas outras possibilidades para ampliar o repertório de possibilidades dos professores com as conversas numéricas, como apresentar a frase “A soma de dois números pares é sempre par”, de modo que o objetivo neste tipo de conversa numérica é apresentar artifícios que mostrem a validade desta frase.

Dando sequência à oficina, desenvolvemos três atividades com os participantes, dentre a lista apresentada no capítulo anterior. Iniciamos com a atividade “Maior e menor soma, maior e menor diferença”, em que o objetivo foi encontrar a maior soma, a menor soma, a maior diferença e a menor diferença utilizando os algarismos de 1 a 6 para compor dois números de três algarismos. Encontrar a maior soma (642 + 531), a menor soma (135 + 246) e a maior diferença (654 – 123) foram tarefas simples, resolvidas em poucos minutos por todos os participantes. Por outro lado, descobrir a menor diferença foi bastante desafiador para o grupo e gerou uma série de debates interessantes, principalmente porque vários participantes escolheram intuitivamente 642 – 531 = 111, que não é a resposta correta por não levar em consideração alguns aspectos da subtração. Foram desenvolvidos vários testes que levaram a resultados como 111, 78, 49, 71, 89 e finalmente o 47, que é a menor diferença. Contamos que de fato este era o menor resultado possível e demos um tempo para que tentassem justificar, o que aconteceu por alguns participantes posteriormente.

A segunda atividade foi o desafio “Os Quatro 4s”, em que os participantes precisaram representar os números de 1 a 20 utilizando exatamente e somente quatro vezes o algarismo 4 e operações matemáticas variadas. Foi um momento de muito debate e construção coletiva, com os participantes trabalhando em grupo para encontrar todos os resultados. Questionamentos foram levantados ao longo da atividade sobre o uso da raiz quadrada (que possui um índice 2 escondido), sobre o uso de logaritmos e de outras operações. Assim como dissemos antes, deixamos que todos investigassem usando os recursos que preferissem, sem restringir qualquer possibilidade criativa.

Depois de um tempo de investigação, pedimos que os participantes narrassem suas soluções favoritas, e registramos estas soluções na lousa. Durante estas anotações, conversamos sobre quais recursos foram utilizados e quais descobertas foram interessantes, socializando assim as descobertas de cada um. Perceber que, por exemplo, 4! (operação fatorial [21]) equivale a 24, levou a uma nova série de possibilidades já que a partir de um único 4, com a operação certa, era possível ter

[21] N! = N x (N – 1) x ... x 3 x 2 x 1. Mais formalmente, podemos dizer que N! = N x (N – 1)! para N > 1 e 1! = 0! = 1.

um número diferente. O equivalente foi dito sobre a raiz quadrada que, de forma prática, permitia o uso de um 2 ao invés de um 4 na investigação de novos números. Este momento do debate foi bastante animado, o que demonstrou certa empolgação dos participantes com a atividade.

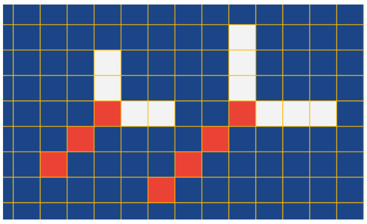
Figura 16: Slide utilizado para apresentar a atividade “Padrões de crescimento”

Fonte: Autores.

Na terceira atividade, que chamamos de “Padrões de Crescimento”, os participantes investigaram uma sequência de figuras em que a quantidade de quadradinhos de cada termo aumenta em relação ao termo anterior. Com isso, tentaram estabelecer o formato e a quantidade de quadradinhos para algumas figuras específicas desta sequência, avaliando apenas as três primeiras. Ressaltamos ao apresentar esta atividade no capítulo anterior que a solução pode ser dada a partir da construção de uma fórmula que determina a quantidade de quadradinhos para uma figura n qualquer, assim como uma análise numérica para uma figura específica, sem apoio da álgebra. Ambas as abordagens levam a resultados coerentes e sustentam ideias similares, então por isso apresentamos a atividade de forma que não limitássemos qual caminho seria seguido. De toda forma, todos os participantes da oficina que apresentaram suas respostas construíram fórmulas para a quantidade de quadradinhos para uma figura n, e por isso os resultados estão apresentados aqui desta forma.

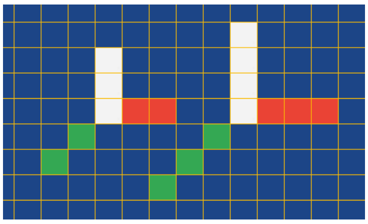
Todos os participantes, após alguns cálculos chegaram à fórmula 3n + 1, mas por caminhos distintos. A maneira como cada um observou o padrão de crescimento leva a um entendimento distinto dessa fórmula – que por mais parecidos que possam ser estas representações, todas trazem uma ideia diferente. Para a figura 17, se encontrou a fórmula 2n + (n + 1), para a figura 18 a fórmula (n + 1) + n + n, e por fim a figura 19 levou à fórmula 1 + n + n + n. Durante a oficina, pedimos que os participantes dessem atenção a estes detalhes para explicar suas soluções, com a intenção de revelar as representações distintas de um mesmo 3n + 1, em especial querendo mostrar como um único conjunto de símbolos pode trazer tantos processos e conceitos distintos.

Figura 17: Possível visualização do padrão de crescimento.



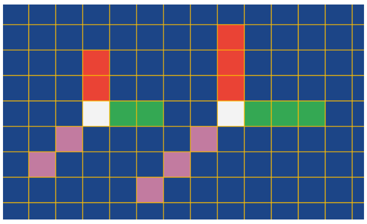
Fonte: Autores

Figura 18: Outra possível visualização do padrão de crescimento.



Fonte: Autores

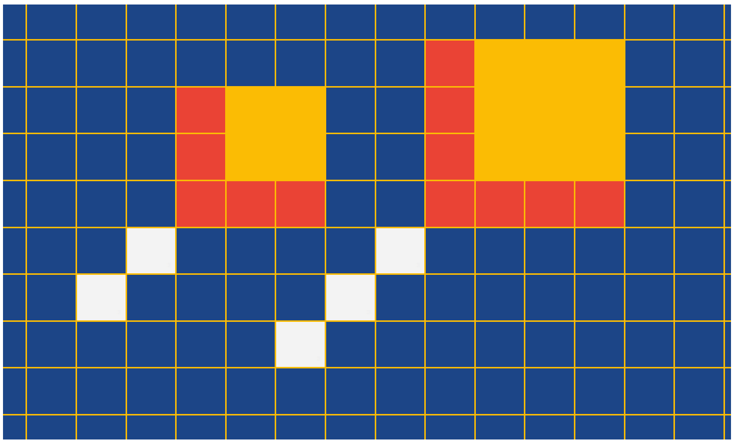
Figura 19: Outra possível visualização do padrão de crescimento.



Fonte: Autores

Para encerrar a atividade, ainda apresentamos uma outra possibilidade que se apoia em um recurso distinto dos que foram utilizados anteriormente (a completude de uma parte da figura para encontrar algo conhecido, no caso um quadrado). A observação deste padrão nos levaria a fórmula $(n + 1)^2 - n^2 + n$, que é ainda um novo proceito elementar do proceito 3n + 1. A apresentação deste exemplo foi feita apenas à título de curiosidade para mostrar como esta atividade pode trazer relações algébricas ainda mais sofisticadas – e veja que outros exemplos ainda poderiam ser encontrados, seja completando outras partes da figura, como até mesmo movendo quadradinhos de uma posição à outra para se determinar uma nova fórmula geral.

Figura 18: Outra possível visualização do padrão de crescimento.



Fonte: Autores.

Ao final da oficina, entregamos um documento com perguntas aos participantes e pedimos para que respondessem, de modo que os dados pudessem utilizados nesta dissertação de forma a enriquecer nossas análises. Neste questionário, descobrimos que dos 17 presentes, apenas 1 conhecia o termo “Flexibilidade Numérica” previamente, enquanto 5 disseram já propor atividades similares às apresentadas, que traziam recursos e desenvolviam habilidades análogas. Depois da oficina, 14 disseram que com certeza apresentarão atividades neste formato, enquanto os outros 3 se mostraram propensos a isso – pedimos para que marcassem esta informação em uma escala de 0 a 5, em que 0 indicava “nunca” e 5 “com certeza”; obtivemos 14 respostas “5”, duas respostas “4” e uma resposta “3”.

Apresentamos também uma série de habilidades, retiradas da BNCC, pedindo para que os participantes avaliassem quais delas eram desenvolvidas com as atividades apresentadas. Pretendíamos, com esta pergunta, avaliar que tipos de conhecimento os participantes reconheciam nas atividades apresentadas na oficina, conseguindo assim cercar de uma forma mais aprimorada a nossa definição de Flexibilidade Numérica. Podendo apresentar quaisquer habilidades, escolhemos alguns objetos de conhecimento que são apresentadas na BNCC no Ensino Fundamental I, acreditando que fosse mais intuitivo para os participantes opinarem sobre habilidades que, parte deles, já conhecem por serem trabalhadas no ensino regular. Além disso, avaliar estas habilidades nos ajuda a entender a Flexibilidade Numérica de uma forma mais palpável na sala de aula, já que procuramos uma relação com o que é discutido atualmente (2021) nos currículos escolares. Os resultados podem ser observados na tabela abaixo:

Tabela 4: Habilidades da BNCC reconhecidas pelos participantes nas atividades da oficina presencial.

Habilidade	**Número de participantes que acreditam que a habilidade tenha sido desenvolvida.**	**%**
Reconhecimento dos números	12	70,6
Quantificação de objetos	5	29,4
Reconhecimento do Sistema Decimal	13	76,5
Compreensão de diferentes significados das operações	13	76,5
Reconhecimento de regularidades em sequências	13	76,5
Composição e decomposição de números	17	100
Fatos básicos das operações	14	82,4
Procedimentos de cálculo	8	47,0
Relação de igualdade	13	76,5
Comparação entre números	7	41,2
Relações entre as operações	9	52,9
Investigação de padrões	14	82,4

Fonte: Autores.

Além disso, ainda perguntamos o que foi mais interessante na oficina e o que os participantes não gostaram, abrindo assim um espaço para que comentassem livremente sobre a experiência. Respondendo o que mais gostaram, recebemos as respostas que seguem – os textos foram registrados nesta dissertação exatamente da mesma forma que foram indicados pelos participantes, sem correções gramaticais ou adaptações.

- “Escutar as outras formas de raciocínio dos colegas e as próprias atividades. “Saber que os alunos têm diferentes pensamentos para resolver um problema e que é importante saber como eles pensam e reconhecer as facilidades e dificuldades dos alunos”.”
- “As atividades lúdicas.”
- “Exemplificação de atividades que trabalham a flexibilidade numérica.”

- “Conhecer assuntos que não tinha conhecimento, relembrar outros e poder aprimorar executando as tarefas.”
- “As diferentes formas que podemos trabalhar em sala de aula. Proporcionando aos alunos diferentes experiências, além de permitir enxergar os números de outra forma.”
- “Todo o conteúdo foi interessante.”
- “Tudo muito bom.”
- “A troca de pensamentos entre os colegas e professores. Perceber que essa metodologia pode ser aplicada em diferentes faixas etárias.”
- “Oportunizar os alunos de pensarem sobre os números e suas diferentes interpretações.”
- “Algumas atividades nunca vistas que são interessantes.”
- “Uma perspectiva diferente do que podemos fazer em sala de aula.”
- “As diferentes formas de se resolver um mesmo problema, quando compartilhadas com os colegas.”
- “O desafio dos 4 quatros se mostrou como a atividade mais intrigante da aula.”
- “As atividades lúdicas.”
- “Todas as apresentadas.”
- “As atividades em que tivemos que responder oralmente nos tira do conforto.”

E como resposta da pergunta sobre o que menos gostaram, recebemos respostas destacando principalmente a falta de tempo para que todas as atividades fossem desenvolvidas. No início da oficina, oferecemos aos participantes um conjunto de folhas para que registrassem suas ideias, com algumas instruções sobre as atividades programadas. Duas atividades (“Ken Ken” e “Desafios alfanuméricos”) não foram realizadas por conta do tempo, e ao final apenas contamos o que seria desenvolvido em cada uma, sem de fato experimentar e investigar como fizemos nas atividades anteriores. Seguem as respostas no questionário sobre o que os participantes menos gostaram:

- “Não teve tempo para tudo. Talvez se forem em dois dias, uma metade em cada.”
- “Faltou tempo para terminar.”

- “Gostei de tudo.”
- “O tempo para realização e conclusão de todas as atividades.”
- “Pouco tempo.”
- “Gostei de tudo.”
- “Tempo curto.”
- “Precisava de mais tempo.”
- “Gostei de tudo. Queria ter tido mais tempo...”
- “Gostaria que tivessemos mais tempo para o restante das atividades.”
- “Foi muito rápido”
- “Foi tudo legal.”

Após a aplicação do questionário, encerramos a oficina e nos despedimos dos participantes. Registramos nesta seção todos os acontecimentos que foram relevantes, mostrando a sequência dos eventos e trazendo interpretações quando julgamos fazer sentido, seguindo assim as orientações metodológicas da Hermenêutica Objetiva. Na próxima seção vamos destacar alguns comentários levando em consideração os acontecimentos desta oficina que nos influenciaram na construção da nossa definição de Flexibilidade Numérica, e na resposta das nossas outras questões norteadoras.

6.2 Comentários sobre a oficina presencial

No início da oficina, levantamos questões sobre um aluno hipoteticamente ideal nas aulas de matemática e, de modo geral, entendemos que os participantes levantaram características que ultrapassam a matemática e não versam necessariamente sobre algo específico dos conteúdos que estamos discutindo aqui. De toda forma, palavras como “questionador”, “curioso”, “sem medo de errar”, “criativo” e “persistente” são característica que aparecem em algumas literaturas e são apresentadas como relevantes para o aprendizado da matemática – por exemplo, Boaler (2016) utiliza exaustivamente estas cinco expressões para orientar boas práticas na sala de aula. Uma possível interpretação para isso é que os participantes avaliam que a postura dos alunos na aula de matemática é, talvez, mais importante para o aprendizado do que conhecimentos prévios, ainda que “saber conteúdos” também tenha sido citado.

Outra interpretação pode ser que os participantes caminharam para questões que ultrapassam às aulas de matemática, mesmo que isso tenha sido delimitado, o que revela alguns anseios dos professores que estão na sala de aula. “Pertença à escola”, “assíduo” e “educado” são expectativas que apareceram nas respostas e que escolhemos não relacionar ao tema discutido nesta dissertação – o que não implica que não estejam relacionados de alguma forma, apenas que nos parecem distantes da Flexibilidade Numérica a partir das reflexões feitas até aqui e que, ao nosso ver, representam problemas no sistema educacional que fogem do âmbito desta pesquisa.

Sobre as atividades, de início vemos por exemplo que nas conversas numéricas, várias propriedades foram destacadas que fazem relação direta a quantidade variada de proceitos elementares do 90, para além do 18 x 5 que foi como iniciamos a atividade. Observando as soluções apresentadas pelos participantes, escrevemos aqui cada resposta de forma mais rigorosa, após uma interpretação feita durante a oficina, para que esses proceitos elementares ficassem destacados.

Solução 1:

18 x 5 = (10 + 8) x 5 = (10 x 5) + (8 x 5) = 50 + 40 = 90

Solução 2:

18 x 5 = (20 – 2) x 5 = (20 x 5) – (2 x 5) = 100 – 10 = 90

Solução 3:

18 x 5 = 18 x (10 / 2) = (18 x 10) / 2 = 180 / 2 = 90

Solução 4:

18 x 5 = (9 x 2) x 5 = 9 x (2 x 5) = 9 x 10 = 90

Solução 5:

18 x 5 = (2 x 9) x 5 = 2 x (9 x 5) = 2 x 45 = 90

Solução 6:

Utilizando o algoritmo tradicional da multiplicação.

Solução 7:

18 x 5 = (18 + 18) + (18 + 18) + 18 = (36 + 36) + 18 = 72 + 18 = 90

Perceba que as soluções fazem referência constante às propriedades associativas e comutativas da adição e da multiplicação, explorando ainda em alguns momentos a propriedade distributiva. Características do sistema decimal também estão presentes a partir de algumas transformações que foram feitas para simplificar alguns cálculos – como por exemplo a solução 3, que exibe uma multiplicação pelo número 10 e em seguida uma divisão por 2, operações que foram mais intuitivas para o participante em comparação à multiplicação por 5, o que conseguimos relacionar à definição que utilizamos para senso numérico. Mais do que isso, ao avaliar os vários proceitos elementares do número 90 a partir desta ótica, podemos avaliar como as propriedades das operações matemáticas também podem ser compreendidas e estudadas a partir das atividades propostas, desde que junto com a investigação também exista uma formalização em sala de aula. Isso nos dá alguma informação sobre potencialidades da Flexibilidade Numérica em sala de aula. Vale destacar, por fim, que uma solução factível seria 18 x 5 = 90, se alguém reconhecesse facilmente que 18 x 5 é um proceito elementar de 90. Com isso, queremos deixar claro que do jeito que estamos apresentando a Flexibilidade Numérica, não necessariamente precisamos passar por um caminho para chegar de 18 x 5 ao 90, já que ambos se relacionam à um mesmo símbolo – a escolha de acrescentar ou não um processo a esta operação é o que depende das experiências e do senso numérico de cada um.

Sobre a atividade "Maior e menor soma, maior e menor diferença", nos atentamos ao fato de que descobrir a menor diferença foi desafiador para grande parte dos participantes, até mesmo para os que tinham formação específica em matemática. Este exemplo foi bastante significativo para validarmos a concepção de que o senso numérico e a flexibilidade numérica estão em constante desenvolvimento, mesmo para conceitos mais elementares. A intuição matemática, mesmo tendo um papel facilitador na compreensão de processos e formulação de procedimentos, pode levar muito comumente à contradições, como aponta Fischbein (1994). A escolha da diferença 642 – 531 = 111 foi feita por vários participantes como primeira tentativa, enquanto foi vista como incorreta logo de início por outros – o senso numérico de cada participante levou à abordagens distintas de um mesmo problema. Veja que não estamos em nenhum momento dizendo que os participantes que chegaram a 111 possuem um senso numérico menos desenvolvido que os demais, apenas que foram intuitivamente levados a uma solução incorreta de acordo com as suas experiências prévias. A evolução do senso numérico não está relacionada à assertividade, mas sim à ampliação de conhecimentos e experiências com os números.

Avaliando as respostas do questionário, o que mais nos chamou a atenção foram as classificações das habilidades citadas. Todos os participantes reconheceram a composição e a decomposição de números como habilidade desenvolvida com as atividades apresentadas, o que tem uma relação direta à forma como apresentamos Flexibilidade Numérica – encontrar um proceito elementar de um determinado proceito passa muitas vezes por essa composição e decomposição, não necessariamente em múltiplos de 10 como é comumente apresentado em livros didáticos. “Investigação de padrões” e “Fatos básicos das operações” também foram habilidades observadas por 14 dos 17 participantes, nos dando indícios de que essas também são habilidades relacionadas à Flexibilidade Numérica.

As habilidades menos citadas foram “Quantificação de objetos”, “Comparação entre números” e “Procedimentos de cálculo”, ainda que tenham aparecido para alguns participantes (5 de 17, 7 de 17 e 8 de 17, respectivamente). Nossa sensação é de que, de alguma forma, todas essas habilidades possam ter sido abordadas em maior ou menor grau enquanto apresentamos essas atividades, no entanto o que aparece mais vezes deve ser entendido como o principal para a nossa análise ao definir a Flexibilidade Numérica. Cada uma das atividades apresentadas destacam uma série de conhecimentos que podem ir além da Flexibilidade Numérica – garantimos, ao apresentá-las, que são relacionadas à nossa concepção inicial, mas não podemos dizer de nenhuma forma que se limitam a isso. Com isso, habilidades mais citadas podem ter ficado mais evidentes por aparecerem em mais momentos da oficina, seja no desenvolvimento das atividades, seja nas discussões que existiram em torno de cada uma.

Por fim, fizemos algumas reflexões sobre a maneira que apresentamos a Flexibilidade Numérica durante a oficina. Com intuito de simplificar uma discussão que poderia ser excessivamente teórica, trocamos a forma de enunciar o senso numérico e noção de proceitos. Retomando, na oficina foram enunciados da seguinte forma:

- Desenvolvimento do senso numérico, com reconhecimento de quantidades e atribuição de significado às operações.
- Reconhecimento das relações entre procedimentos e conceitos, e dos significados de diferentes notações.

Após a oficina, observando inclusive as respostas do questionário, acreditamos que a apresentação do senso numérico deveria ser feita de outra forma. Tentamos trazer exemplos de noções intuitivas (significado de operações, reconhecimento de quantidades) para não fugir da nossa definição de senso numérico apresentando-a como uma intuição, mas estes não foram exemplos adequados, já que até mesmo essas ideias podem não ser necessariamente intuitivas para alguém. No questionário, por exemplo, não foram todos os participantes que reconheceram o significado das operações como uma habilidade desenvolvida, então relacioná-la no texto da nossa concepção inicial nos pareceu incorreto. Com isso, resolvemos manter o texto mais próximo do que estávamos discutindo anteriormente, sem tentar simplificar ou evitar uma conversa mais teórica, entendendo que isso poderia inclusive ser útil e trazer boas reflexões aos participantes. Desse modo, reconstruímos estes dois enunciados da seguinte forma:

- Senso numérico: Reconhecimento de quantidade e intuição numérica.
- Reconhecimento das relações entre procedimentos e conceitos, e dos significados de diferentes notações.

Na oficina virtual, que será descrita na próxima seção, já apresentamos a noção inicial neste novo formato. Encerramos assim então nossas considerações sobre a oficina presencial e, a seguir, nos concentraremos em trazer detalhes sobre a oficina realizada no ambiente virtual.

6.3 Oficina virtual

Nos dias 26 de fevereiro de 2021 e 12 de março de 2021, ministramos uma segunda oficina com bolsistas do subprojeto de Pedagogia do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) da USP, e com as coordenadoras do subprojeto. Os bolsitas eram alunos do curso de pedagogia da FE-USP e da FFCLRP. Foram dois encontros com duração de 2 horas cada, novamente com o título “Quebra-cabeças, conversas numéricas e um caminho para a Flexibilidade Numérica”. Nosso objetivo, assim como antes, foi apresentar ideias relacionadas à Flexibilidade Numérica, bem como algumas atividades em que podemos reconhecer o desenvolvimento dessa habilidade (de acordo com a nossa concepção inicial). Nesta seção pretendemos descrever brevemente esta oficina, tendo em vista que ela tem formato e interações similares à primeira, ainda que em um ambiente diferente (virtual).

Foram 17 participantes no primeiro dia da oficina e 13 participantes no segundo dia, sendo que todos que participaram do segundo dia também participaram do primeiro. Destes participantes, 2 eram coordenadoras do subprojeto de pedagogia do Pibid USP, enquanto todos os demais eram bolsistas do programa. Seguimos uma estrutura similar à oficina anterior para esta versão virtual, apenas reorganizando as discussões para que fossem realizadas em 2 encontros. No primeiro dia, organizamos a oficina em 2 partes e um questionário:

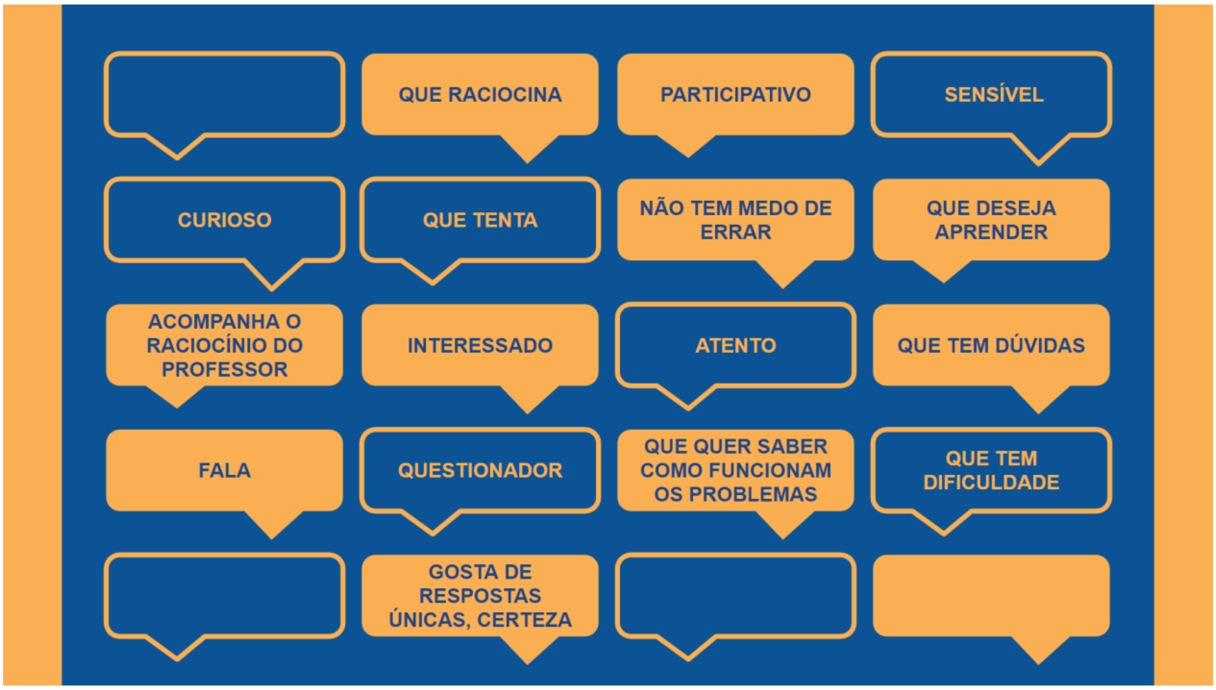
1. Discussão sobre as aulas de matemática e a Flexibilidade Numérica;
2. Quebra-Cabeças numéricos (atividades).
3. Questionário sobre a oficina.

No dia 2, seguimos com a oficina em mais duas partes e outro questionários:

1. Conversas Numéricas;
2. Quebra-cabeças numéricos (atividades).
3. Questionário sobre a oficina.

Iniciamos novamente a oficina discutindo sobre um aluno ideal hipotético, levando em consideração uma construção coletiva de características, fazendo o registro de todos os comentários que foram feitos pelos participantes. Anotamos nos slides a contribuição de cada um, o que pode ser observado na figura 19.

Figura 19: Slide com contribuições dos participantes sobre um aluno ideal hipotético nas aulas de matemática.



Fonte: Autores.

Na questão seguinte sobre “Saber fazer contas ou entender as contas?”, recebemos novamente respostas que validam a importância destas duas habilidades. Desta vez, no entanto, alguns participantes disseram acreditar que entender é mais importante que saber fazer, construindo uma hierarquia. Concordamos com a importância de ambas, sem atribuir uma relevância maior a alguma, mas concordando e aceitando os comentários de forma livre. Quando apresentamos o exemplo de cálculo com duas subtrações sendo resolvidas em um único algoritmo, alguns ainda ressaltaram como este exemplo mostra a importância das duas habilidades.

Neste primeiro dia de oficina, escolhemos as atividades “Os 4 quatros” e “Desafios alfanuméricos” para desenvolver com os participantes. Para a primeira, novamente pedimos que os participantes se organizassem para encontrar maneiras de escrever os números de 1 a 20 utilizando apenas e exatamente quatro algarismos 4 e operações variadas. No ambiente virtual, as interações foram feitas majoritariamente através do chat da plataforma de chamada de vídeo que utilizamos, e dessa forma, as respostas foram sendo enviadas continuamente – sempre que recebíamos uma nova resposta, ela era registrada no slide, visível para todos. Na figura 20 é possível visualizar as respostas que foram apresentadas pelos participantes. Recebemos uma grande quantidade de soluções, com uma boa participação de todos durante a atividade.

Figura 20: Soluções apresentadas pelos participantes para a atividade “Os 4 quatros”.

1	2	3	4	5	6	7	8
(4 + 4)/(4 + 4)	(4 x 4)/(4 + 4)	(4 + 4 + 4)/4	4/√(4) + 4/√(4)	((4 x 4) + 4)/4	√4 + 4 - 4 + 4	√4 x 4 + 4/(- 4)	4 x 4 - 4 - 4
(4/4) - 4 + 4		((4 x 4) - 4)/4				(4 + 4) - (4/4)	4/4 x 4 + 4
							4 x 4 - (4 + 4)

9	10	11	12	13	14	15	16
(4/4) + 4 + 4	4 x 4 - 4 - √(4)	44/(√(4x4))	(4 - 4/4) x 4	4!/√4 + 4/4	4 x 4 - 4 + √4	4 x 4 - 4/4	(4 x 4) + 4 - 4
						4 x 4 + 4/(- 4)	4 x 4 x 4/4
							(4 x 4) + (4 - 4)

17	18	19	20				
4 x 4 - 4/(-4)	4/√(4) + 4 x 4	4! - 4 - 4/4	√(4 x 4) x 4 + 4				
			4^(4/√(4)) + 4				

Fonte: Autores.

Veja que nas soluções foram empregadas raízes quadradas e a operação de fatorial, tópicos de discussão na oficina presencial. Quando apresentaram uma primeira solução usando cada uma dessas operações, ressaltamos como não definimos quais operações poderiam ser utilizadas e que, com isso, eles tinham liberdade de escolher o que era válido ou não. A partir da primeira resposta com uma determinada operação, outras foram naturalmente sendo apresentadas por outros participantes, o que mostra como a descoberta de uma nova possibilidade depois do compartilhamento amplia as estratégias para todos. Ao final da atividade, contamos que várias outras operações poderiam ter aparecido, e que isso pode ser delimitado de acordo com o grupo que está desenvolvendo a atividade – inclusive, pensando na sala de aula, a quantidade de operações disponíveis pode ser de acordo com as operações que o professor espera que sejam discutidas em aula.

Na atividade “Desafios alfanuméricos”, os participantes precisaram descobrir qual algarismo cada letra representava para que o cálculo AMAR + AMAR + AMAR = CASAR desse certo. Apresentamos esta atividade apenas na oficina virtual e ela aconteceu em um intervalo de tempo pequeno, para que o horário combinado com os participantes fosse seguido. De toda forma, em cerca de 15 minutos conseguimos explorar o desafio proposto com os participantes, apresentando e dando tempo para que encontrassem soluções possíveis. Recebemos algumas soluções e testamos cada uma delas conjuntamente, avaliando o que não funcionava e por qual motivo. Ao final, demos um tempo para que os participantes tentassem verificar que a solução correta encontrada era a única possível, mas não chegamos a uma conclusão definitiva – apenas alguns apontamentos interessantes do ponto de vista matemático, como o fato de apenas os algarismos 0 ou 5 serem possíveis de ocupar a posição da letra R.

Ao final desta atividade, enviamos um formulário online para que os participantes respondessem com suas impressões. Dos 17 participantes do primeiro dia, 11 responderam e desses 11, 10 disseram nunca ter ouvido falar sobre flexibilidade numérica, enquanto o outro participante respondeu que não tem certeza. Ainda assim, 5 disseram já ter apresentado atividades deste tipo em algum contexto de aula (seja como professor, como estagiário ou monitor), enquanto 4 disseram nunca ter apresentado e 2 não demonstraram ter certeza sobre ter ou não apresentado atividades que destacassem habilidades similares.

Na sequência, foi perguntado no formulário se após esta discussão eles teriam interesse em levar atividades que destacam as habilidades desenvolvidas para a sala de aula, e as respostas poderiam ser dadas em uma escala de 0 (nunca) a 5 (com certeza). Foram sete respostas no 5 desta escala, duas respostas no 4, uma no 3 e uma no 2. A frente desta pergunta, pedimos ainda que justificassem esta escolha e todas as respostas no 5 ou 4 da escala fizeram referência ao aspecto lúdico das atividades ou à importância de destacar as habilidades matemáticas que foram abordadas. A única resposta com o número 2 da escala teve como justificativa uma insegurança do participante, que disse não se sentir confortável ainda para ensinar matemática para crianças.

Sobre as habilidades desenvolvidas na BNCC, desta vez com a oficina dividida em duas partes, conseguimos explorar o que havia sido abordado em cada um dos encontros, levando em consideração as atividades que aconteceram em cada um dos dias. Neste primeiro dia, apresentamos as mesmas habilidades da oficina anterior, pedindo para que os participantes marcassem todas as opções que haviam sido desenvolvidas com as atividades propostas. Uma tabela com esses dados pode ser encontrada abaixo:

Tabela 5: Habilidades da BNCC reconhecidas pelos participantes nas atividades do primeiro dia da oficina virtual.

Habilidade	Número de participantes que acreditam que a habilidade tenha sido desenvolvida.	%
Reconhecimento dos números	10	90,9
Quantificação de objetos	8	72,7
Reconhecimento do Sistema Decimal	9	81,8
Compreensão de diferentes significados das operações	10	90,9
Reconhecimento de regularidades em sequências	11	100
Composição e decomposição de números	9	81,8
Fatos básicos das operações	10	90,9
Procedimentos de cálculo	9	81,8
Relação de igualdade	10	90,9
Comparação entre números	11	100
Relações entre as operações	10	90,9
Investigação de padrões	11	100

Fonte: Autores.

Veja que todas as habilidades foram citadas ao menos por 8 participantes, o que mostra como este grupo reconheceu uma pluralidade de habilidades sendo desenvolvidas em cada uma das atividades. De toda forma, isso nos surpreendeu, e nos fez levantar questionamentos sobre como interpretar estes dados para o entendimento sobre o que é Flexibilidade Numérica, já que neste momento do trabalho estamos tentando limitar o conceito para que ele seja coerente com o que fizemos até aqui. No questionário que foi aplicado no segundo dia limitamos as opções de resposta de cada participante para que conseguíssemos assim perceber o que foi mais marcante para cada um, como será apresentado mais a frente. Acreditamos que essa ação poderia nos dar informações relevantes, principalmente quando os dados forem comparados com os que foram levantados no primeiro questionário. Dando sequência, questionados sobre o que mais gostaram na oficina, as respostas foram diversas e podem ser vistas abaixo, da maneira que foram escritas pelos participantes:

- “As atividades propostas.”
- “A segunda atividade, sobre relacionar as letras aos números”
- “Conhecer sobre o termo e entender a aplicação por meio das atividades ajudou bastante a solidificar o conceito na mente.“
- “A curiosidade despertada em nós para resolver os desafios e perceber as inúmeras possibilidades de resolução.”
- “As atividades, pois exemplificaram o que é a flexibilização numérica e fizeram com que experimentassemos dessa maneira de resolução.”
- “Fazer as atividades que eu não havia tido contato anteriormente.“
- “Observar as possibilidades infinitas da matemática, no sentido de descobrir várias formas diversas de aprender sobre os números.”
- “Como o modo mecânico que aprendi na escola foi o grande fator da dificuldade de entender a matemática. Aprendi a copiar e não entender.”
- “Os desafios numéricos e atividades propostas. Além de envolvente, fez com que pudéssemos compreender na prática a temática da oficina. A comunicação tbm foi ótima, nos deixou a vontade e "com vontade" de contribuir "sem medo de errar".”
- “Esta eu participei de forma assíncrona, mas gostei de abrir a mente pras possibilidades que se pode ter na matemática, A flexibilização que ela pode proporcionar, achava antes que era algo muito padrão, tem esse jeito de realizar esse cálculo e você deve segui-lo, muitas vezes continua assim, mas tem a possibilidade de olhar de outra forma.”
- “Perceber minhas dificuldades na área matemática.”

Ainda, sobre o que não gostaram na oficina, seguem as respostas que no geral mostram a satisfação dos participantes:

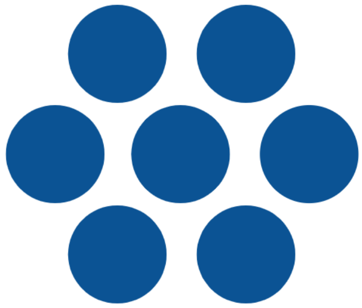
- Nenhuma crítica.

- Que ela acabou.
- Nada.
- Gostaria de mais tempo e mais desafios
- Não tenho críticas.
- A proposta da segunda atividade para saber quais números aquelas letras representavam. E também da dinâmica trazida pelos professores com calma e clareza.
- Posso dizer que gostei de tudo. Talvez presencialmente tivesse sido ainda mais espontâneo. Porém os oficineiros propuseram um espaço muito legal de diálogo.
- Gostei de tudo.
- Não consegui pensar em nada desagradável.
- Não há algo que me recorde de não ter gostado.
- Nada.

E dessa forma encerramos este primeiro dia da oficina virtual, fazendo o convite para que todos que participaram retornassem para o próximo encontro, que aconteceria duas semanas após este primeiro. Nas despedidas, recebemos muitos comentários narrando a satisfação com a oficina, e alguns participantes já sinalizaram que estavam animados para participar do segundo dia.

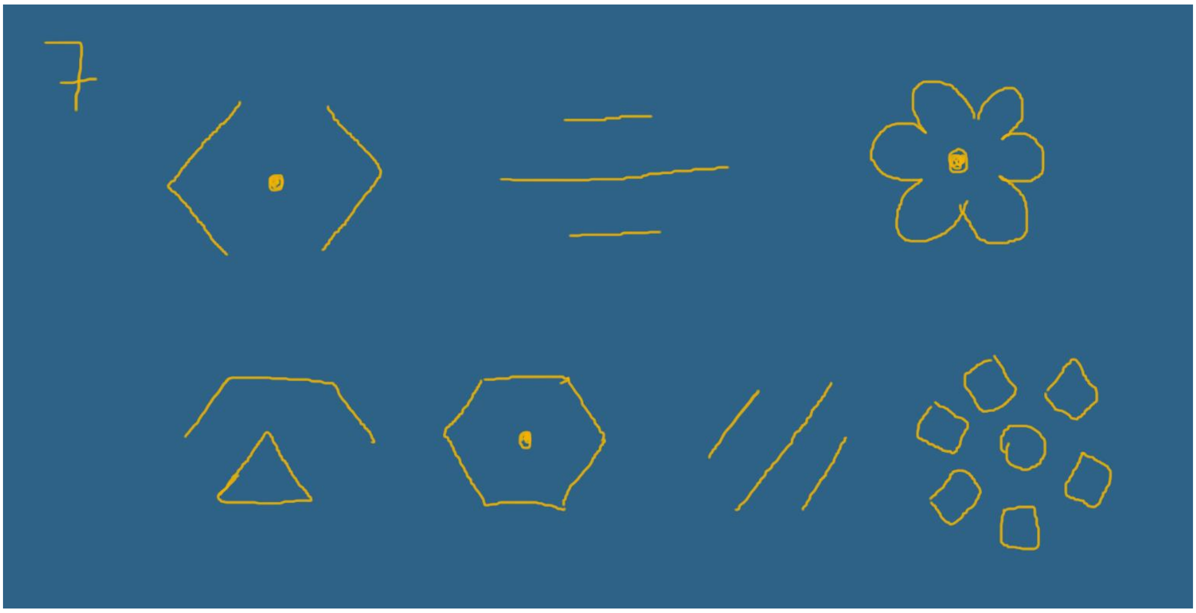
No nosso segundo encontro, 14 dias após o primeiro, recebemos 13 participantes, sendo que todos haviam participado do primeiro dia – dessa forma, partimos do princípio de que todos os presentes tinham ideias sobre o que era Flexibilidade Numérica, a partir do que apresentamos como noção inicial e das atividades que foram propostas. Iniciamos com as conversas numéricas, na mesma sequência da oficina presencial – primeiro uma versão de contar pontinhos para explicar a dinâmica, depois de uma operação matemática (18x5). Para a dinâmica dos pontinhos, os participantes nos contaram como visualizaram as bolinhas do cartão de pontos da figura 21, dizendo inclusive quantos pontinhos existiam na imagem.

Figura 21: Cartão de pontos



Fonte: Humphreys e Parker (2005).

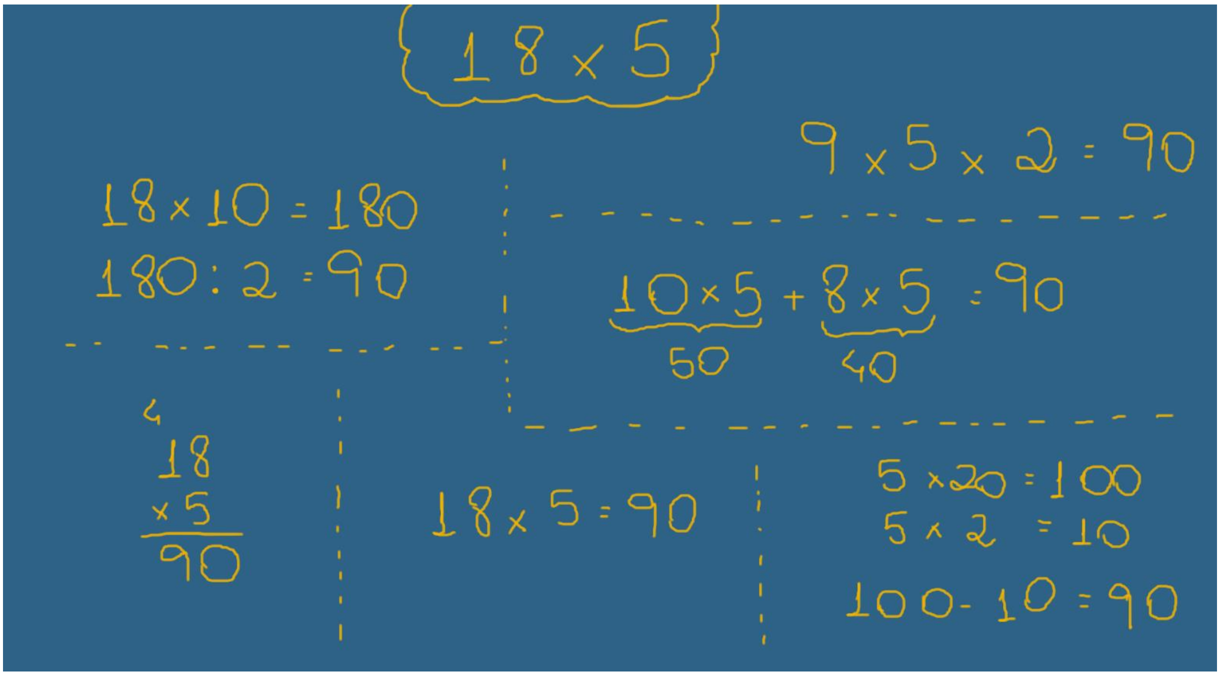
Figura 22: Soluções apresentadas para a Conversa Numérica de pontinhos.



Fonte: Autores.

Ao contrário da oficina presencial, todos os participantes que se manifestaram visualizaram 7 pontinhos, o que nos levou apenas há representações coerentes do cartão de pontos – o que não é necessariamente positivo. Destacamos como a criatividade e a ludicidade possuem espaço neste tipo de atividade, já que perceber uma flor ou um ventilador são respostas igualmente corretas e que demonstram uma percepção diferente e possível desta organização de pontos. Para a segunda conversa numérica, em que eles precisaram encontrar soluções para 18x5, algumas respostas interessantes apareceram e foram registradas no quadro abaixo.

Figura 23: Soluções apresentadas para a Conversa Numérica da operação 18x5.



Fonte: Autores.

Veja que um dos participantes disse que pensou em 18 x 5 = 90 de uma forma direta, sem um processo envolvido, o que é completamente possível (e válido). De toda forma, aceitamos esta resposta para valorizar inclusive este aspecto, mesmo com vontade de incentivá-lo a detalhar a maneira que pensou. Ao mesmo tempo que valorizamos qualquer processo, insistir neste detalhamento pode dar a ideia de que conhecer um fato numérico como 18 x 5 não é algo válido dentro do que estamos apresentando como Flexibilidade Numérica. Com isso, validamos este raciocínio e reforçamos com os participantes que todo e qualquer processo é válido, inclusive este.

Em seguida desenvolvemos as atividades “Maior e menor soma, maior e menor diferença” e “Padrões de crescimento”, de forma que as ações foram muito similares às descritas anteriormente na oficina presencial. Determinar a maior soma, a menor soma e a maior diferença foram tarefas simples, enquanto a menor diferença exigiu alguns testes dos participantes que foram se aproximando da solução enquanto estudavam o algoritmo da subtração. Para os padrões de crescimento, a única diferença significativa foi um apoio maior nos números, sem a utilização de termos algébricos – ao invés de pensar sobre a figura n, pensaram mais na figura 100, o que levou o grupo a resultados igualmente coerentes e com caminhos, assim como antes, bem distintos. Dito isso, não nos estenderemos nesta descrição para não deixar este texto repetitivo, mas salientamos que as interações e visualizações foram muito próximas às descritas duas seções atrás, de modo que a sequência do que ocorreu pode ser entendida da mesma forma que no texto anterior.

Após a última atividade, enviamos novamente um questionário aos participantes com apenas 3 perguntas, dado que algumas já haviam sido respondidas no questionário anterior. Ao todo, recebemos 10 respostas. Iniciamos perguntando aos participantes o que eles diriam que é Flexibilidade Numérica após os nossos 2 encontros. Recebemos como resposta as seguintes descrições:

- “É o princípio de que todos os números ou conceitos possuem flexibilidade. Desta forma, os debates, a partir de hipóteses levantadas, podem ser reconhecidas sobre as diferentes relações entre as operações.”
- “Creio ser a liberdade que a matemática oferece, em suas variadas formas, e que proporciona a criação de diversas adaptações para sua compreensão.”
- “Flexibilidade Numérica seria a capacidade de se relacionar com números e operações numéricas de forma investigativa e exploratória; reconhecer e formular o raciocínio por detrás da operação numérica.”
- “É a habilidade de não seguir um padrão único de raciocínio matemático para chegar a um resultado. É a capacidade de compreender os números e as operações por diferentes vias. Está muito ligada à liberdade de ter um raciocínio flexível o ao senso investigativo por parte dos alunos.”
- “Poder resolver problemas numéricos de várias maneiras.”
- “É descobrir várias formas de se chegar a um mesmo resultado.”
- “Trata-se de diferentes formas de resolver questões numéricas, que podem ou não se afastar dos métodos convencionais. É entender que existem inúmeras possibilidades ao se trabalhar com os números.”
- “Construção de entendimentos matemáticos de maneira não superficial.”
- “É reconhecer na matemática várias formas de se chegar a um único resultado.”
- “Maneiras diferentes de se chegar a um resultado, a um pensamento, e que dá abertura para o acerto não somente por uma única forma pré-pensada, muitas vezes pelo(a) professor(a).”

Em seguida, novamente questionamos sobre as habilidades que foram desenvolvidas durante a oficina, mas desta vez pedindo aos participantes que escolhessem apenas três opções. No questionário anterior, como todas as habilidades foram citadas várias vezes, tentamos assim valorizar o que foi mais marcante para cada um – dessa forma, é possível que um participante tenha visto mais do que 3 habilidades sendo desenvolvidas no nosso encontro, mas ainda assim escolheu apenas 3, dando preferência às habilidades que estiveram em destaque. Como resposta, recebemos:

Tabela 6: Habilidades da BNCC reconhecidas pelos participantes nas atividades do segundo dia da oficina virtual.

Habilidade	Número de participantes que acreditam que a habilidade tenha sido desenvolvida.	%
Reconhecimento dos números	2	20
Quantificação de objetos	0	0
Reconhecimento do Sistema Decimal	0	0
Compreensão de diferentes significados das operações	7	70
Reconhecimento de regularidades em sequências	1	10
Composição e decomposição de números	1	10
Fatos básicos das operações	3	30
Procedimentos de cálculo	3	30
Relação de igualdade	1	10
Comparação entre números	0	0
Relações entre as operações	5	50
Investigação de padrões	7	70

Fonte: Autores.

Veja que a compreensão de diferentes significados das operações, a investigação de padrões e a relação entre as operações ficaram em destaque para os professores, o que é inclusive condizente com as atividades que foram discutidas neste segundo encontro, que valorizaram o cálculo mental, o algoritmo e a investigação de padrões. De toda forma, nos atentaremos também às habilidades que não foram citadas por nenhum participante (Quantificação de objetos, reconhecimento do sistema decimal e comparação entre números), entendendo que essas características podem estar mais distantes da nossa definição.

Ao final, demos um espaço para que os participantes fizessem quaisquer comentários sobre a oficina, acreditando que esse espaço poderia trazer contribuições valiosas, ainda que não delimitássemos sobre o que deveriam falar. Recebemos os seguintes comentários:

- “A oficina me proporcionou um maior horizonte sobre o ensino da matemática. Tendo em vista as minhas experiências anteriores, ainda na educação básica, percebo que sempre fui influenciada a pensar de determinada forma ou aos moldes dos processos pela professora. Acredito que os meus "traumas" relacionados a matéria sejam frutos desta imposição e poda das diferentes maneiras de se raciocinar ao enfrentar problemas matemáticos. Portanto, sair da minha zona de conforto me fez refletir sobre a minha formação como indivíduo e futura educadora. Muito obrigada.”
- “Excelente oficina, gostaria de ver mais.”
- “O trabalho é incrível, gostaria de manter contato para futuras trocas.”
- “Gostaria de parabenizar pela oficina pois mesmo no contexto em que estamos, sem contato presencial, foi uma experiência muito envolvente e despertou minha atenção e interesse do início ao fim. Foi muito bom conhecer sobre essa habilidade e seu impacto no ensino de exatas. Com certeza serei intencional no ensino disso aos meus futuros alunos, justamente por entender a sua importância. Por fim quero dizer que consegui matar um pouco da minha saudade de matemática. Sempre tive muito interesse nas exatas e ciências e no seu ensino nos primeiros anos. Por isso me senti contemplada nessa questão, pois até o momento não havia visto nada relacionado (ainda). Dito isso, deixo registrado meu interesse em futuros eventos, projetos ou pesquisas para os quais eu possa participar ou contribuir, relacionadas ao tema.”
- “Foi maravilhosa! Para os professores é muito bom ter claro que existem vários caminhos para um resultado e que se deve trabalhar esses caminhos, permitir a discussão sobre esses caminhos com os alunos.”
- “Muito interessante perceber formas diferentes de raciocínio, saindo do padrão único que eu aprendi.”

- “Gostaria de agradecer imensamente ao Jean e a Bárbara por proporcionarem essa oficina. Foi muito importante pensar e repensar as formas de ensinar matemática.”
- “Se quando eu estudava matemática na escola, pudesse experienciar essas diferentes formas de raciocínio, o aprendizado seria mais fácil, e atualmente eu não teria tanta dificuldade na área.”
- “Achei muito interessante, deu abertura para pensar sobre a flexibilidade, não só numérica, mas de aprendizagens e realizações.”

Finalizamos dessa forma esta segunda oficina, que foi a última a ser considerada para o desenvolvimento desta dissertação. Acreditamos que o impacto das atividades e das ideias propostas tenha sido positivo, tanto para a nossa pesquisa como para os que participaram, que saíram com novas ideias para as aulas de matemática.

6.4 Comentários sobre a oficina virtual

Analisando a oficina virtual isoladamente, um dos pontos que mais nos chamou atenção foram as habilidades citadas em cada um dos encontros. Para efeito de comparação, colocamos na tabela 7 as habilidades citadas no primeiro e no segundo dia. Importante ressaltar que no primeiro os 11 participantes que responderam o questionário poderiam citar quantas habilidades quisessem, enquanto no segundo encontro pedimos que escolhessem as três que ficavam em mais evidência com o decorrer das atividades. O conteúdo de cada um dos encontros também é relevante, já que as citações foram feitas a partir do que foi discutido naquele dia. No primeiro dia da oficina, além da apresentação teórica, realizamos as atividades “Os 4 quatros” e “Desafios alfanuméricos”, enquanto no segundo dia fizemos as atividades “Conversas Numéricas”, “Padrões de crescimento” e “Maior e menor soma, maior e menor diferença”.

Tabela 7: Habilidades da BNCC citadas pelos participantes no primeiro e segundo dia de oficina – comparação.

Habilidade	**Quantidade de citações no primeiro dia (livre)**	**Quantidade de citações no segundo dia (até 3 por participante)**
Reconhecimento dos números	10	2
Quantificação de objetos	8	0
Reconhecimento do Sistema Decimal	9	0
Compreensão de diferentes significados das operações	10	7
Reconhecimento de regularidades em sequências	11	1
Composição e decomposição de números	9	1
Fatos básicos das operações	10	3
Procedimentos de cálculo	9	3
Relação de igualdade	10	1
Comparação entre números	11	0
Relações entre as operações	10	5
Investigação de padrões	11	7

Fonte: Autores.

Percebe-se que as habilidades “Investigação de padrões” e “Compreensão de diferentes significados das operações” ficaram em destaque em ambos os dias. No segundo dia, em especial, todas as habilidades que se referem diretamente às operações matemáticas foram mais citadas (“Fatos básicos das operações”, “relações entre as operações” e “procedimentos de cálculo”). No primeiro dia, estas mesmas habilidades ainda foram citadas no mínimo por 10 dos 11 participantes, com exceção da habilidade “Procedimentos de cálculo”.

Isto é uma informação relevante para a definição de Flexibilidade Numérica que será apresentada mais a frente – as operações e os cálculos ficam em destaque quando apresentamos atividades que desenvolvem o senso numérico e a noção de proceitos, o que é coerente com as definições destes dois conceitos. Características sobre o sistema de numeração decimal, sobre a quantificação, sobre decomposição de números, dentre outras, ficaram em segundo plano, na medida que nesta oficina virtual a Flexibilidade Numérica foi entendida primariamente como uma habilidade relacionada ao ato de calcular.

A habilidade “Quantificação de objetos”, por outro lado, não foi citada por ninguém no segundo dia e foi a única habilidade não citada por 3 participantes no primeiro, o que nos indica uma baixa relação com as atividades e com a Flexibilidade Numérica no geral. Uma outra habilidade que pode chamar atenção é a “Reconhecimento de regularidades em sequências” que aparece em destaque no primeiro dia, mas é pouco percebida no segundo.

Entendemos que isso está diretamente relacionado às atividades apresentadas em cada dia – enquanto no segundo, nenhuma atividade destacou especificamente alguma sequência, no primeiro realizamos a atividade “Padrões de crescimento” que coloca o conceito de sequências em foco. Mesmo que isso possa parecer um ponto fora da curva, não deixa de ser uma informação relevante, assim como foi na primeira oficina. Da mesma maneira, como foram apresentadas várias atividades que destacam habilidades distintas, é natural que algumas destas habilidades possam não estar relacionadas aos conceitos de senso numérico e proceito. Desse modo, perceber o que não é destacado pelos participantes continuamente, nos motra quais são as habilidades que são particulares a alguma atividade específica, enquanto o que é destacado continuamente é justamente o que procuramos utilizar para conceituar a Flexibilidade Numérica.

Para além das habilidades citadas pelos participantes, a maneira livre como cada um explicou o que é Flexibilidade Numérica ao final do nosso segundo encontro também nos trouxe reflexões importantes. Mais da metade das respostas fazem menção a jeitos diferentes de se resolver um cálculo, como se a Flexibilidade Numérica fosse a habilidade de seguir caminhos distintos para se determinar um mesmo resultado. De fato, isso se relaciona profundamente com o que acreditamos que seja a Flexibilidade Numérica e com a forma que a apresentamos primitivamente neste texto – a ideia de proceitos faz referência justamente aos vários processos e conceitos que levam a um mesmo resultado.

Por outro lado, é importante tomar cuidado ao seguir esta ideia, já que se pensarmos que a Flexibilidade Numérica é a habilidade de se resolver cálculos de diferentes maneiras, uma pessoa que conhecesse 5 algoritmos diferentes da adição poderia ser considerada bastante flexível com os números, ainda que não desse nenhum significado aos valores, procedimentos e processos ali envolvidos. É importante que exista uma avaliação sobre como estes resultados são determinados, ainda que não tenhamos a intenção de hierarquizar processos e procedimentos. Dito isso, ter estas respostas no questionário nos faz pensar que de fato a multiplicidade de formas de se resolver algum cálculo deve ser destacado na definição de Flexibilidade Numérica, e que a noção de proceitos, como apresentamos, talvez não seja suficiente para destacar esta ideia.

No início deste texto, apresentamos a Flexibilidade Numérica como uma habilidade humana caracterizada pelo senso numérico e pela capacidade de transição entre representações conceituais e processuais de um mesmo símbolo. Como discutimos até aqui, esta transição faz referência a capacidade de entender que um símbolo, um número qualquer, pode ser representado de diversas formas que estão relacionadas. Entendemos até aqui que esta transição é justamente o que oferece liberdade para se pensar em algum cálculo a partir de óticas variadas, levando assim a possibilidades distintas de resolução. No entanto, não destacamos esta interpretação na nossa noção inicial, eventualmente até por não ter uma intenção inicial de limitar a Flexibilidade Numérica ao resolver contas. Por outro lado, todas as atividades que apresentamos têm este foco – e perceba que calcular de maneira criativa, com o apoio do que entendemos como Flexibilidade Numérica, para se resolver problemas variados e explorar atividades de maneira significativa é essencialmente o que procuramos, desde as motivações iniciais. Dito isso, destacar o cálculo como parte do que chamamos de Flexibilidade Numérica, nos parece fazer sentido e será levado em consideração na definição.

Por fim, podemos usar o formato em que esta oficina aconteceu para discutir algumas questões sobre o cálculo mental. Durante a exploração de todas as atividades, com exceção das conversas numéricas, sugerimos que os participantes estivessem com lápis e papel para que pudessem fazer registros. Por outro lado, não sabemos como cada participante trabalhou individualmente, já que não estávamos em um mesmo ambiente observando o desenvolvimento das atividades. Sabemos que os registros foram importantes na oficina presencial e que o uso de papel foi recorrente, no entanto cálculos mentais poderiam ser suficientes para se resolver a maioria das atividades, o que depende de cada indivíduo.

Refletir sobre isso nos coloca na posição de relacionar a Flexibilidade Numérica e o cálculo mental. É notório que estes são conceitos que possuem uma relação forte, no entanto entendemos que carregam abordagens diferentes sobre o que significa manipular os números para se obter determinado objetivo. Já defendemos que a Flexibilidade Numérica não é algo que pode ser ensinado, e que as interações com os números, da maneira que entendemos o conceito, devem ser feitas com liberdade e sem nenhuma categorização. Ao falar sobre senso numérico ou sobre proceitos, não estamos definindo métodos ou categorias de procedimentos que possam ser úteis para determinados tipos de cálculo.

Tomemos como exemplo alguém que queira determinar o produto da operação 31 x 42. Determinar este resultado é algo que pode ser feito de muitas maneiras, e existem muitos métodos que são notoriamente eficientes para cumprir esta tarefa. Se não pensarmos no cálculo mental, existe o algoritmo tradicional da multiplicação, e se refletirmos sobre maneiras de calcular mentalmente este resultado pode ser que se conclua que decomposições como 30 x 42 + 42 ou 31 x 40 + 31 x 2 sejam maneiras também eficientes para se encontrar o produto 1302.

Seguindo em outra direção, ao tratar sobre Flexibilidade Numérica, não queremos nos ater a nenhum método, o que é comumente feito com o cálculo mental. Em algumas leituras, percebemos que existe um esforço para se categorizar métodos empregados no cálculo mental, por vezes com uma avaliação sobre a eficiência de cada um para diferentes operações (Hartnett, 2007; Heirdsfield e Cooper, 2004; Rodrigues e Santos, 2019). Esta não é a regra, já que existem também estudos sobre cálculo mental que se afastem dos métodos (Threlfall, 2002), mas queremos ter certeza que ao definir Flexibilidade Numérica, estamos nos distanciando da ideia de velocidade na resolução de um cálculo e das regras pré-estabelecidas.

Mais ainda, não estamos sequer nos limitando ao que é desenvolvido mentalmente. Quando pensamos sobre o cálculo, descobrir e investigar algoritmos que envolvam representações escritas, ou manipular algum determinado material são ações que conversam com o que apresentamos como Flexibilidade Numérica, ainda que não sejam processos exclusivamente mentais. Com isso, acreditamos que a Flexibilidade Numérica seja uma habilidade que pode auxiliar no cálculo mental, bem como em outras ações que podem ser igualmente importantes e úteis no desenvolvimento numérico.

Dito isso, apesar das similaridades, entendemos que a Flexibilidade Numérica é um conceito distinto ao cálculo mental, ainda que se relacionem, assim como tantos outros. Ainda que o cálculo mental tenha sido um recurso importante no desenvolvimento das atividades na oficina virtual, ele representa apenas parte do que foi feito.

7 CONCLUSÕES

Relembrando, no início do texto apresentamos a Flexibilidade Numérica como uma habilidade humana caracterizada pelo senso numérico e pela capacidade de transição entre representações conceituais e processuais de um mesmo símbolo. De maneira geral, pretendíamos apresentar a Flexibilidade Numérica como uma habilidade que fosse uma união destes dois conceitos, do modo que cada um foi apresentado.

Por outro lado, uma das reflexões importantes que fizemos após a segunda oficina foi a relação entre o que estávamos apresentando, o ato de calcular e as operações matemáticas. Sendo o senso numérico um conceito amplo e que abrange diferentes áreas e situações matemáticas, e sendo o proceito capaz de relacionar fundamentos variados da matemática a partir das relações simbólicas, entendemos que da maneira que apresentamos a Flexibilidade Numérica, não criamos limitações que a restringisse aos cálculos com operações variadas. Isto foi positivo, já que reconhecer a necessidade dessa limitação veio como consequência das reflexões posteriores às oficinas – a abertura que foi dada poderia ter nos levado a diferentes caminhos, sendo este apenas um deles, que é o que está de acordo com a nossa abordagem metodológica.

Com isso, definimos finalmente a Flexibilidade Numérica da seguinte forma:

Flexibilidade Numérica é a habilidade que consiste em operar com números a partir do senso numérico e da capacidade de transição entre representações conceituais e processuais de um mesmo símbolo.

Ressaltamos que mantemos as características que citamos para a Flexibilidade Numérica: pode ser desenvolvida continuamente à medida que se desenvolve o senso numérico e a capacidade de transição entre proceitos, e o quão flexível uma pessoa é com os números é dado pela maneira que ela opera com cada um destes dois conceitos primários, que sustentam o que chamamos de Flexibilidade Numérica.

Colocar o ato de calcular nesta definição de fato é um limitante, e acreditamos que isto é positivo dentro deste contexto. Por um lado, poderíamos apresentar uma

Flexibilidade Numérica que se relacionasse a outras áreas da matemática para além das operações matemáticas, de certo modo dando mais abrangência ao que apresentamos. Por outro, ao não limitarmos, poderíamos ter um conceito que, de tão amplo, teria pouca ou nenhuma utilidade. Uma definição que envolve certas restrições nos permite refletir e apresentar propostas de maneira mais assertiva, sem que seja necessário se preocupar com uma quantidade muito grande de ideias e teorias envolvidas.

Reforçamos isso porque nos ocorre constantemente como o conceito poderia ser ampliado para outras áreas da matemática, como por exemplo, a geometria, que possui uma série de simbologias e representações, além de noções intuitivas importantes (que não chamaríamos de senso numérico, mas ainda seria um conceito similar). Acreditamos que estas ideias poderiam ser desenvolvidas de maneira muito interessante com um outro foco desde o início, que não estivesse tão preocupado com os números, como buscamos aqui. Com isso, imaginamos que explorações que caminham para além do numérico seriam possíveis, com suas devidas adaptações, mesmo que não tenham sido exploradas ao longo das nossas intervenções e leituras.

Todas as atividades que apresentamos aqui (Maior e menor soma, maior e menor diferença; os 4 quatros; desafios alfanuméricos; padrões de crescimento; ken ken; conversas numéricas) continuam sendo referências para a Flexibilidade Numérica, mesmo com a modificação na definição. Anteriormente, apresentamos estas atividades mostrando como elas se relacionam aos significados de senso numérico e de proceitos, e como todas estão relacionadas a operações matemáticas, nenhuma deixa de ser uma maneira de se exercitar a Flexibilidade Numérica a partir da nossa nova restrição. Ressaltamos isso para esclarecer que estas ainda são boas opções de atividades, ao nosso ver, quando se pretende levar este conceito para a sala de aula. Além disso, nos preocupamos durante toda a pesquisa em oferecer nesta dissertação produtos que possam servir de referência para trabalhos que serão desenvolvidos em aula para qualquer professor que tenha lido o texto – e com isso, reiteramos como estas atividades convergem para este objetivo.

Ainda sobre as atividades, para além da matemática e da pluralidade de soluções, elas foram escolhidas de modo a se valorizar a interação entre os participantes da oficina, o trabalho em grupo, a curiosidade sobre um desafio não necessariamente imediato, dentre outras características que julgamos ser importantes. Estas características não são estritamente necessárias para que uma atividade possa ser um produto de exercício da Flexibilidade Numérica, são apenas as que escolhemos por estarem de acordo com determinadas crenças que possuímos sobre o aprendizado. Não estamos discutindo nesta dissertação quais são essas características, mas de toda forma deixamos o convite para a leitura de textos da nossa referência bibliográfica que nos inspiraram a pesquisar sobre a Flexibilidade Numérica, em especial os que destacam as Mentalidades Matemáticas, onde estas características são discutidas com maior profundidade.

De todo modo, podemos dizer que existem inúmeras atividades que servem para o propósito do exercício da Flexibilidade Numérica que não destacam necessariamente o trabalho em grupo ou a curiosidade, por exemplo. A atividade dos 4 quatros poderia ser desenvolvida individualmente, de modo que se pedisse que cada aluno descobrisse duas maneiras diferentes de se encontrar todos os números entre 0 e 10. Esta abordagem seria suficiente para se trabalhar o senso numérico e as transições entre representações proceituais, sem que nenhum compartilhamento fosse feito entre pares em uma sala de aula. Dito de outra forma, esta abordagem seria suficiente para se destacar a Flexibilidade Numérica. A escolha do melhor formato e das características de uma atividade devem ser feitas de acordo com os propósitos e referências de cada professor, de modo que a Flexibilidade Numérica não seja um conceito restrito a alguns tipos específicos de intervenções.

Relacionando a Flexibilidade Numérica à BNCC, que é o documento que orienta os currículos que são adotados no Brasil enquanto escrevemos esta dissertação, defendemos que existe uma forte relação entre os objetivos destacados no documento para o desenvolvimento numérico dos estudantes e a nossa proposta de definição de Flexibilidade Numérica. Ideias como “equivalência”, “representação” e até mesmo “aproximação”, que são classificadas como fundamentais para o Ensino Fundamental, são exploradas quando operamos a partir do senso numérico e das transições entre proceitos elementares. De origem, a Flexibilidade Numérica está relacionada a representações de valores equivalentes e à transição entre estas representações, com manipulações numéricas que são feitas livremente para se chegar a um determinado objetivo. Falando especificamente sobre os cálculos, o documento traz o seguinte trecho:

> No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras. (BRASIL, 2018, p. 268).

Ao falar sobre diferentes estratégias, valoriza-se as distintas maneiras de se obter um determinado resultado. Não existe uma restrição sobre algoritmos tradicionais ou sobre estratégias específicas de cálculo mental. No lugar, existe uma expectativa sobre a pluralidade – o que reforçamos destacando ainda a possibilidade de construção de algoritmos próprios, estratégias de cálculo mental variadas e criativas e que coloquem o aluno como protagonista da ação de calcular, e não como um executor de técnicas conhecidas e estabelecidas.

Para que fosse possível relacionar ainda mais a Flexibilidade Numérica aos currículos, as habilidades citadas pelos professores aos finais da oficina foram escolhidas a partir dos objetos de conhecimento da BNCC, apenas com algumas generalizações para que elas pudessem ser referências para mais de um ano escolar. Escolhendo o que foi destacado pelos participantes das oficinas (“Compreensão de diferentes significados das operações”, “Composição e decomposição de números”, “Fatos básicos das operações”, “Procedimentos de cálculo”, “Relações entre as operações” e “Investigação de padrões”), podemos relacioná-los aos objetos de conhecimento de cada ano do primeiro ciclo do Ensino Fundamental.

Na BNCC, no primeiro ano temos os objetos de conhecimento “Construção de fatos básicos da adição”, “Composição e decomposição de números naturais” e “Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências”. No segundo ano, “Composição e decomposição de números naturais (até 1000)”, “Construção de fatos fundamentais da adição e da subtração”, “Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar)” e “Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas”.

No terceiro ano, “Composição e decomposição de números naturais”, “Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação”, “Procedimentos de cálculo (mental e escrito) com números naturais: adição e subtração”, “Problemas envolvendo significados da adição e da subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades”, “Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida” e “Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas”. No quarto ano, “Composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adições e multiplicações por potências de 10”, “Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais”, “Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida” e “Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão”.

Além destes, que originaram o que chamamos de habilidades nos formulários das oficinas, uma série de outros objetos de conhecimento poderiam ser relacionados a estes destaques. Além disso, alguns outros ainda poderiam destacar conceitos relacionados à Flexibilidade Numérica, já que se relacionam a habilidades citadas durante a oficina. Apenas não consideramos aqui por não terem sido os mais citados - fizemos um recorte para que o texto não fique demasiadamente longo e, possivelmente, monótono.

Encerramos as nossas conclusões destacando que não estamos tentando criar um tipo de conhecimento, mas sim argumentar que a reunião do senso numérico e dos proceitos a partir da visão que colocamos aqui para a Flexibilidade Numérica pode ser poderosa, principalmente se colocada em primeiro plano nas aulas de matemática. No questionário da primeira oficina, ao perguntar o que os participantes menos gostaram, recebemos apenas dois tipos de respostas: “Faltou tempo” ou “Nada”. Por outro lado, as perguntas sobre o que foi mais interessante revelaram um interesse genuíno em valorizar a diversidade de soluções e a liberdade de manipulação dos números.

Acreditamos, depois de todas investigações e reflexões, que é exatamente isto que a Flexibilidade Numérica oferece: um desenvolvimento numérico a partir da sofisticação da intuição matemática, ao mesmo tempo que proporciona uma série de relações entre números, conceitos e processos. Investir na Flexibilidade Numérica é investir nessas duas características, que já existem na sala de aula e em uma série de atividades, mas que, ao nosso ver, podem ser trabalhadas conjuntamente e como prioridade em alguns momentos.

REFERÊNCIAS

BERCH, Daniel B. **Making Sense of Number Sense:** Implications for Children With Mathematical Disabilities. Journal of Learning Disabilities, vol. 38, no. 4, 2005, p. 333 – 339.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 12 de junho de 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 12 de junho de 2018.

BRIZUELA, Bárbara M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Ed 1. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BOALER, Jo. **Mentalidades Matemáticas:** estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Ed 1. Porto Alegre: Penso, 2018.

BOALER, Jo; CONFER, Amanda; WILLIAMS, Cathy. **Fluência sem medo:** Pesquisas mostram as melhores formas de aprender fatos matemáticos. Youcubed, 2015.

CARMO, Paulo F. do; IGLIORI, Sonia B. C. **Noções de pensamento matemático avançado utilizados em pesquisas na área de educação matemática**. Revista de Produção Discente em Educação Matemática, vol. 6, n.1, 2017, pp. 109 – 120.

DEHAENE, Stanislas. **The number sense**: How the mind creates mathematics. Ed 1. Nova York: Oxford University Press, 1997.

FISCHBEIN, Efraim. **The Interaction between the Formal, the Algorithmic, and the Intuitive Components in a Mathematical Activity**. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Holanda: Kluwer Academic, 1994, p. 231 – 245.

GRAY, Eddie M; TALL, O. David. **Duality, Ambiguity, and Flexibility:** A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 25, n. 2, 1994, p. 116–124.

GREENO, James G. **Conceptual Entities**. Pittsburgh Univ., PA. Learning Research and Development Center, Washington, D.C.: ERIC Clearinghouse, 1983.

GREENO, James. G. **Number sense as situated knowing in a conceptual domain**. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 22, 1991, 170 – 218.

HARTNETT, Judy. **Categorisation of Mental Computation Strategies to Support Teaching and to Encourage Classroom Dialogue**. Mathematics: Essential Research, Essential Practice, vol. 1, 2007, p. 275 – 284.

HEIRDSFIELD, Ann M.; COOPER, Tom J. **Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: case studies of flexible and inflexible computers**, The Journal of Mathematical Behavior, vol. 23, 2004, p. 443 – 463.

HUMPREYS, Cathy; PARKER, Ruth. **Conversas Numéricas**: estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática. Ed 1. Porto Alegre: Penso, 2019.

KAMII, Constance. **A Criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos. Ed. 39. Campinas: Papirus, 2012.

PONTE, João P. **Gestão curricular em Matemática**. O professor e o desenvolvimento curricular. Ed GTI. Lisboa, 2005. p. 11 – 34.

SANTOS, Sónia; RODRIGUES, Margarida. **O desenvolvimento da flexibilidade do cálculo multiplicativo em alunos do 3º ano.** Bolema, Rio Claro (SP), vol. 33, n. 64, 2019, p. 542 – 567.

SICHELERO, Junior Jonas. **Linguagem, hermenêutica e educação**. Revista Brasileira de Educação, vol. 24, 2019.

SOARES, Gabriel de O.; CURY, Helena N. **As ideias de David Tall em um mapeamento de artigos de periódicos brasileiros**. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, vol. 2, n. 1, 2017, p. 1 – 16.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Ed 86. Rio de Janeiro: Record, 2014.

THRELFALL, J. **Flexible Mental Calculation.** Educational Studies in Mathematic, vol. 50, 2002, p. 29 – 47.

VILELA, Rita Amelia T.; NOACK-NAPOLIS, J. **A pesquisa sociológica "hermenêutica objetiva" novas perspectivas para análise da realidade educacional e das práticas pedagógicas.** 31ª Reunião Anual da Anped, 2008, Caxambu - MG. Constituição Brasileira, direitos humanos e educação. Rio de Janeiro: ANPEd, 2008, vol. 01, p. 01 – 19.