Uma Análise Espectral do Grafo com Clique Plantada

Félix Yowtang Liu

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências da Computação

Programa: Mestrado em Ciências da Computação

Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

São Paulo, janeiro de 2023

Uma Análise Espectral do Grafo com Clique Plantada

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 15/12/2022. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Simon Richard Griffiths - PUC RJ
- Prof. Dr. Carlos Hoppen - UFRGS

Agradecimentos

Agradeço ao prof. Yoshi, meu orientador, pelo seu voto de confiança, pela sua atenciosidade e toda a paciência ao longo do programa. Também agradeço profundamente ao prof. Carlos Hoppen e ao prof. Simon Griffiths, membros da banca, pelo seu encorajamento gracioso, pela sua viva disposição e pelos seus comentários pertinentes.

Gostaria também de agradecer aos demais professores do IME-USP com os quais tive contato, apesar de breve. Em especial, à prof. Yoshiko Wakabayashi, à prof. Cristina Gomes Fernandes, ao prof. Sinai Robins e ao prof. Marcel Kenji de Carli, por todo o seu ensino e principalmente pelo seu exemplo.

Continuo profundamente grato a todos os professores do DInf-UFPR, que foram responsáveis pela minha graduação. Em particular, agradeço ao prof. Renato Carmo, à prof. Laura Sánchez García, ao prof. Eduardo Jaques Spinosa e ao prof. Luiz Carlos Albini, sem os quais eu não estaria aqui.

Também agradeço aos meus colegas e amigos da UFPR, com os quais mantive contato nesse meio-tempo. Em especial ao Jomaro Rodrigues pelas conversas interessantes e entusiasmadas, à Ana Bovs e à Marcela Oliveira – que me ajudaram a ver que estava no caminho certo – e ao Bruno Meyer, que me alimentou o espírito de pesquisador.

Agradeço aos colegas e amigos que fiz no Laboratório de Otimização, Combinatória e Algoritmos, os quais têm todos a minha maior admiração. Sou certamente um pequenino entre vós. Agradeço ao Tiago Royer pela sua amizade, em nossas muitas conversas e em nossas muitas corridas. Agradeço também ao Gabriel Ferreira, ao Fabrício Machado e ao Nathan Proença, por sua camaradagem e seu sólido apoio.

Guardo no coração cada momento junto à ABU-IME que vivi durante esse tempo. Agradeço à Kelly, ao Bruno, ao William, à Shayenne, ao Gabriel, ao Emmanoel, ao Rony e à Lara, por cada compartilhamento, pelo companheirismo e pelos estudos. Foi com vocês que aprendi a estudar. E por vocês que pude entender como um cientista vive a sua vida de fé.

Também guardo com carinho tudo o que passei com os irmãos da Igreja Presbiteriana Vida Nova, que me acolheu, supriu e ofereceu um ótimo espaço para desenvolver-me durante todo esse começo de caminhada. Vocês são uma bela e verdadeira comunidade de fé. Agradeço à pr. Le Hui, à pb. Susan, ao pb. Zeca e ao pb. Tawei pelo seu terno cuidado; à tia Jully, à tia Teresa, à tia Simone e à Denise pela sua hospitalidade; à sra. Chou, cuja longeva experiência dividiu tantas vezes o banco comigo; e à sempre presente Helena, cujo coração é maior que o mundo.

Agradeço aos muitos adolescentes que acompanhei, que se tornaram tão grande parte da minha estadia: André e Raquel, Bruce, Chen e Vicente, Elisa e Kevin, Dani, Lelê e Gabi, Mimi e Dandan, e tantos outros mais. Sua curiosidade, energia e vivacidade sempre me alimentaram o ânimo. Vê-los crescer me foi um grande privilégio e uma grande alegria. Tenho muito orgulho de vocês.

Também agradeço aos muitos jovens com quem vivi, que foram minha força e inspiração: Gi, Isaque, Honda, Leo e Naty, Déh, Dani e Samu, Tã e Tifa, Judy, Jeanie, Jackson, Jonathan, Letícia, e tantos outros mais. Obrigado por me deixar invadir as suas vidas e vivê-las junto a vocês por alguns anos: Pela sua compreensão, pela sua solidariedade e pela sua generosidade. Vocês foram a âncora que eu precisava; referência para viver esta geração.

Sobretudo, devo a minha profunda gratidão à minha família, em quem sempre tive a segurança de encontrar apoio. Agradeço aos meus avós Lan Hsin Cheng e Lan Chen Yueh Mei, que em sua generosidade ofereceram sua casa, seu carinho, sua atenção, sua experiência e seu cuidado enquanto estive em São Paulo. Agradeço também a meu tio Lan, sua esposa Ângela e sua filha Laura, cuja hospitalidade me foi tão importante durante essa estadia. Sou grato aos meus pais Caio e Lan, que desde sempre estiveram comigo, acompanhando-me a cada passo, nos altos e baixos da vida. E sou grato pela minha querida irmã Larissa, cuja companhia indispensável e sua sensatez criteriosa sempre me mantiveram de pé.

Enfim, dou graças ao meu Senhor Jesus Cristo, em cuja vontade encontramos bons caminhos para percorrermos. Foi através dele que pude conhecer tantas pessoas; e foi por sua condução a cada passo desta pesquisa que pude começá-la, desenvolvê-la e concluí-la: Tudo devo a ele. Da descoberta do tema, passando pelo seu estudo, até os momentos finais desta jornada. Obrigado por dividir comigo um pouco de suas maravilhas e me conferir o privilégio de esmerar-me neste tão belo, ainda que singelo trabalho. O teu reino vem. Que o seu nome seja louvado para todo o sempre.

Resumo

LIU, F. Y. **Uma Análise Espectral do Grafo com Clique Plantada**. 2022. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

O grafo com clique plantada $G(n, p, k)$ é o grafo aleatório com n vértices em que cada aresta é incluída independentemente com probabilidade p e então um k-conjunto de seus vértices sorteado uniformemente é feito uma clique – a sua clique plantada. Tal modelo foi sugerido independentemente por Jerrum (1992) e Kučera (1995) para propor o problema da clique plantada, que consiste em encontrar a clique plantada de um grafo de $G(n, p, k)$.

Um primeiro avanço desde a sugestão do problema foi apresentado por Alon–Krivelevich–Sudakov (1998): Um algoritmo espectral de tempo polinomial que quase certamente encontra a clique plantada do $G(n, 1/2, k)$, com $k \geq 10\sqrt{n}$. Desde então foram encontrados outros algoritmos que resolvem o problema com $k = \Omega(\sqrt{n})$; mas o problema continua em aberto para $k = o(\sqrt{n})$. Devido a isso, tal fato já foi usado como suposição de intratabilidade em alguns trabalhos.

O algoritmo de Alon–Krivelevich–Sudakov depende de certas propriedades dos maiores autovalores de A e do autovetor associado ao seu segundo maior autovalor. Nadakuditi (2012) observou fenômenos semelhantes ao estudar a matriz $B = A - E$, onde E é esperança de A quando se considera $k = 0$. Enquanto a análise de Alon–Krivelevich–Sudakov não explicita motivos que expliquem o comportamento do espectro de A, Nadakuditi dá passos na direção de elucidar tais fenômenos ao mostrar uma relação entre B e uma classe particular de matrizes simétricas aleatórias de média zero – as chamadas matrizes de Wigner – cujo espectro é bem estudado.

A abordagem adotada por Nadakuditi foi descrita e exemplificada por Nadakuditi–Newman (2012), quando foi apresentada como uma forma de se estudar o espectro do chamado modelo de blocos estocástico, o qual generaliza muitos grafos aleatórios com estruturas plantadas.

Motivado pela abordagem de Nadakuditi–Newman, o presente trabalho mostra como os comportamentos dos espectros de A e de B podem ser explicados ao considerar essas matrizes como resultantes da aplicação de perturbações de posto um sobre matrizes de Wigner. Além de estudar tais matrizes da distribuição $G(n, p, k)$, matrizes análogas para uma variante com laços do grafo com clique plantada também são consideradas. Ademais, este trabalho oferece uma caracterização mais detalhada e completa do espectro dessas matrizes para o caso $k = O(\sqrt{n \log n})$ e $kq \geq c\sqrt{pqn}$, com $c > 3$; mostrando que com exceção de uns poucos dos maiores e menores autovalores, os demais quase certamente se distribuem seguindo uma distribuição semicircular – distribuição característica dos espectros de matrizes de Wigner.

Palavras-chave: clique escondida, análise espectral, lei semicircular, teoria de matrizes aleatórias, teoria de perturbação de matrizes.

Abstract

LIU, F. Y. **A Spectral Analysis of the Planted Clique Graph**. 2022. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

The planted clique graph $G(n, p, k)$ is the random graph on n vertices in which each edge is added independently with probability p and then a k-set of its vertices is chosen uniformly and made into a clique – the planted clique. This model was suggested independently by Jerrum (1992) and Kučera (1995) to describe the planted clique problem, which consists in recovering the planted clique of a graph drawn from $G(n, p, k)$.

A first development since the problem was proposed was provided by Alon–Krivelevich–Sudakov (1998): An efficient spectral algorithm that almost surely finds the planted clique of $G(n, 1/2, k)$, with $k \geq 10\sqrt{n}$. Since then, other algorithms were found for $k = \Omega(\sqrt{n})$; but the problem remains unsolved for $k = o(\sqrt{n})$; a fact that has been used as a hardness assumption in several works.

The algorithm presented by Alon–Krivelevich–Sudakov relies on the behavior of the largest eigenvalues of A and on properties of the eigenvector of its second largest eigenvalue. Similar phenomena was observed by Nadakuditi (2012) when considering the $B = A - E$ matrix, where E is the expected matrix of A with $k = 0$. While Alon–Krivelevich–Sudakov's analysis does not provide insights that explain the behavior of the spectrum of A, Nadakuditi takes some steps towards an explanation by showing a relationship between B and a particular class of zero-mean symmetric random matrices whose spectrum is well studied – the Wigner matrices.

The approach followed by Nadakuditi was described and exemplified by Nadakuditi–Newman (2012), when it was presented as a manner to study the spectrum of the so-called stochastic block model, which generalizes many random graphs with planted structures.

Inspired by Nadakuditi–Newman's approach, we show how the spectral behavior of A and B can be explained by regarding those matrices as the result of rank-one perturbations over Wigner matrices. Besides studying those matrices under the $G(n, p, k)$ distribution, we also consider analogous matrices for a variant with loops of the planted clique graph. Furthermore, we offer a more detailed and complete characterization of the spectrum of those matrices under $k = O(\sqrt{n \log n})$ and $kq \geq c\sqrt{pqn}$, with $c > 3$; showing that besides a few of the largest and smallest eigenvalues, all the others almost surely are distributed according to a semicircular law – which is the characteristic distribution of the spectra of Wigner matrices.

Keywords: hidden clique, spectral analysis, semicircle law, random matrix theory, matrix perturbation theory.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 O Problema da Clique 1
1.2 A Clique em Grafos Aleatórios 1
1.3 Grafos com Estruturas Plantadas 2
1.4 O Problema da Clique Plantada 2
1.5 O Espectro do Grafo com Clique Plantada 2
1.6 Contribuições do Presente Trabalho 3

2 Notação e Elementos Especiais **5**

2.1 Notação Elementar 5
2.2 O Número de Catalan 5
2.3 Comportamento Assintótico 5
2.4 Desigualdades Úteis 5
2.5 Teoria dos Grafos 6
2.6 Álgebra Linear 6

3 Teoria Espectral de Matrizes Simétricas **9**

3.1 Decomposição Espectral 9
3.2 Caracterizações Variacionais do Espectro 10

4 A Lei do Semicírculo de Wigner **13**

4.1 O Resultado Clássico 13
4.2 Matrizes de Wigner com Submatriz Anulada 14
4.2.1 Os Momentos da Distribuição Empírica 15
4.2.2 A Convergência da Distribuição Empírica 20
4.2.3 A Convergência do Raio Espectral 22

5 Atualizações de Posto Um **27**

5.1 Entrelaçamento Espectral 27
5.2 Perturbações Sucessivas e a Distribuição Semicírculo 31

6 Uma Análise Espectral da Clique Plantada **33**

6.1 A Clique Plantada com Laços 34
6.1.1 Limitando os autovalores do $\tilde{G}(n, p, k)$ 35
6.1.2 Os Maiores Autopares de $\tilde{G}(n, p, k)$ 35
6.1.3 O Segundo Maior Autopar de $\tilde{G}(n, p, k)$ 37

6.2 A Clique Plantada sem Laços 39
6.2.1 Limitando os autovalores de $G(n, p, k)$ 41
6.2.2 Os Maiores Autopares de $G(n, p, k)$ 42
6.2.3 O Segundo Maior Autopar de $G(n, p, k)$ 44

7 Discussão e Considerações Finais **47**

Referências Bibliográficas **49**

Capítulo 1

Introdução

1.1 O Problema da Clique

Uma clique num grafo é um subconjunto de vértices que induz um subgrafo completo: cada par de vértices do subconjunto é ligado por uma aresta. Problemas envolvendo cliques encontram-se entre problemas fundamentais para a Ciência da Computação Teórica: Decidir se um grafo contém uma clique de um dado tamanho é um dos vinte e um problemas NP-completos descritos no trabalho seminal de Karp [Kar72], enquanto encontrar uma maior clique é um problema NP-difícil já muito estudado, com vastas aplicações práticas em outras áreas do conhecimento.[1]

Um outro problema correlato é o de se computar ou estimar o tamanho $\omega(G)$ de uma maior clique de um grafo G, tarefa também NP-difícil. O melhor algoritmo de aproximação conhecido para essa quantidade possui garantia de desempenho $O(n/(\log n)^2)$, onde n é o número de vértices no grafo [BH92]; enquanto sabe-se que não há algoritmo de tempo polinomial que pode aproximar $\omega(G)$ a um fator melhor que $n^{1-\epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$, a menos que $P = NP$ [Hås99, Zuc07].

1.2 A Clique em Grafos Aleatórios

A intratabilidade em caso geral sugerida por essas observações incentivou o estudo de tais problemas considerando certas distribuições aleatórias de grafos (também chamadas de grafos aleatórios), como aconteceu a diversos problemas envolvendo outros aspectos estruturais em grafos.[2] Em particular, estudar tais distribuições e seus respectivos problemas pode vir a contornar o pessimismo apresentado pela análise de pior caso, uma vez que deixa de limitar a avaliação do desempenho de um algoritmo aos casos mais patológicos.[3]

O grafo aleatório de Erdős–Rényi $G(n,p)$ foi uma das primeiras distribuições consideradas para o estudo de diversos problemas estruturais em grafos. Trata-se da distribuição aleatória de grafos simples com n vértices em que cada aresta está presente com probabilidade $p = 1 - q$. Nessa distribuição, sabe-se que quase certamente $w(G)$ é $\lfloor r(n) \rfloor$ ou $\lceil r(n) \rceil$, onde $r(n) = (2 - o(1)) \log_{1/p} n$ é uma função que pode ser escrita explicitamente (cf. [Mat72, BE76]). Há um algoritmo simples de tempo polinomial capaz de encontrar quase certamente uma clique de tamanho $(1 - o(1)) \log_{1/p} n$ [GM75]; de modo que encontra-se facilmente em $G(n,p)$, quase certamente, uma clique com cerca de metade do tamanho da maior. O problema de se encontrar em $G(n,p)$ uma clique de tamanho $(1 + \epsilon) \log_{1/p} n$, para qualquer constante $\epsilon > 0$, permanece em aberto.

---

[1] [WH15] é uma resenha sobre o problema e apresenta vários apontamentos nesse quesito.
[2] Para uma lista de exemplos, veja [FM97] e suas referências.
[3] [Rou21] discute de forma mais aprofundada acerca da estratégia de estudar algoritmos considerando entradas distribuídas aleatoriamente.

1.3 Grafos com Estruturas Plantadas

Para muitos dos problemas estruturais, também são considerados grafos aleatórios definidos de modo a garantir que em todo grafo da distribuição há uma estrutura plantada que é de fato uma solução plausível para o problema. Tais grafos são chamados no presente trabalho de *grafos com estruturas plantadas*. Como exemplos de grafos com estruturas plantadas, podem ser mencionados a bisecção plantada [Bop87, JS98, CK01] e a k-coloração plantada [Kuč77, DF86, Tur88, BS95, AK97]. Muitos dos problemas estruturais podem também ser vistos como a busca por certas de partições de vértices; de modo que o problema da detecção de comunidades no chamado modelo de blocos estocástico, que tem sido alvo de muitos estudos recentes [Abb17], pode ser visto como uma generalização deles.

Ao estudar os problemas relacionados a essas distribuições, busca-se encontrar um algoritmo que recupere a solução plantada com probabilidade tendendo a 1 conforme $n \to \infty$. Condições que assegurem a otimalidade da solução plantada ou a sua unicidade são outras questões que costumam ser levantadas no estudo de grafos com estruturas plantadas.

1.4 O Problema da Clique Plantada

Um grafo com estrutura plantada relacionado ao problema da clique é o grafo com clique plantada $G(n, p, k)$, que é o principal objeto de estudo do presente trabalho. O grafo com clique plantada foi proposto de maneira independente por Jerrum [Jer92] e Kučera [Kuč95] e seus grafos são gerados da seguinte forma: Toma-se um grafo do $G(n, p)$, sorteia-se uniformemente um k-conjunto K de seus vértices e, então, são acrescentadas todas as arestas necessárias para que K seja uma clique. O conjunto K é a sua *clique plantada*.

O problema da clique plantada consiste em recuperar a clique plantada do $G(n, p, k)$. Uma primeira solução para esse problema foi apresentada por Alon–Krivelevich–Sudakov [AKS98] e se trata de um algoritmo espectral polinomial capaz de quase certamente recuperar a clique plantada do $G(n, 1/2, k)$ com $k \geq 10\sqrt{n}$. No mesmo artigo foi mostrado como esse algoritmo pode ser usado para resolver o caso $k = c\sqrt{n}$, para qualquer constante $c > 0$, ao preço de aumentar a complexidade de tempo por um fator $O(n^{2\log(10/c)+2})$.

Desde então, foram encontradas outras soluções para esse problema. Por exemplo, uma clique plantada de tamanho $k = \Omega(\sqrt{n})$ pode ser encontrada por outros métodos espectrais [McS01, Vu18, CO10], programação semi-definida [FK00] e métodos combinatórios [FR10, DGGP14]. Contudo, ainda não se sabe de um algoritmo que resolva o problema com $k = o(\sqrt{n})$, de forma que a dificuldade de se resolver esse caso já foi usada como suposição de dificuldade em alguns trabalhos [AAK+07, MV09, HK11, BR13, Dug14].

1.5 O Espectro do Grafo com Clique Plantada

O algoritmo apresentado por Alon–Krivelevich–Sudakov [AKS98] consiste em computar o autovetor associado ao segundo maior autovalor da matriz de adjacência A do grafo dado e então extrair dele quais vértices estão na clique plantada. O que justifica a consideração desse autovetor em específico é o fato de que quase certamente a maior parte de seu peso está na clique – isto é, os elementos em coordenadas correspondentes a vértices na clique plantada estão entre os de maior valor absoluto. Esse fato é provado naquele trabalho pelo estudo de características espectrais da matriz de adjacência do $G(n, 1/2, k)$ com $k \geq 10\sqrt{n}$. Em particular, foi demonstrado que, sob essas condições, quase certamente: (i) O maior autovalor de A é pelo menos $(1-o(1))n/2$; (ii) seu segundo maior autovalor está próximo de $k/2$; e (iii) os demais autovalores são no máximo $(1 + o(1))\sqrt{n}$. Contudo, as verificações apresentadas naquele trabalho não explicitam motivos para a emergência de tais fenômenos.

Nadakuditi [Nad12] indica que um fenômeno semelhante ao do segundo autovetor pode ser observado ao estudar uma variante com laços da clique plantada quando sua matriz de adjacência é comparada com a matriz de adjacência esperada de uma distribuição sem estruturas plantadas, tomada como referência. Neste caso, o $G(n, p)$ com laços foi tomado como tal referência.

Nadakuditi [Nad12] observou experimentalmente que, tomando $B = A - p\mathbb{1}\mathbb{1}^T$, onde $\mathbb{1}$ é o vetor de uns, quando $k/\sqrt{n} \to \beta$, se $\sqrt{p/q} < \beta < \infty$, então o autovetor v associado ao maior autovalor de B parece aproximar-se de um múltiplo do vetor indicador da clique plantada; enquanto com $\beta < \sqrt{p/q}$ o autovetor v parece não conter informação suficiente para a identificação da clique.

Seguindo uma abordagem semelhante, Nadakuditi e Newman [NN12] descrevem uma maneira de usar tal abordagem para estudar o espectro da matriz de adjacência do modelo de blocos estocástico, exemplificando o seu argumento ao aplicá-lo para o caso da bisecção plantada. Nesse ínterim, foi indicada uma relação íntima entre o espectro estudado e um resultado clássico da Teoria de Matrizes Aleatórias – a chamada Lei do Semicírculo de Wigner.

1.6 Contribuições do Presente Trabalho

O presente trabalho se propõe a explicitar motivos que expliquem os fenômenos observados por Alon, Krivelevich e Sudakov [AKS98]. Para isso, é usada a ideia sugerida por Nadakuditi [Nad12] de estudar os espectros das matrizes A e B adotando abordagem semelhante ao tratamento indicado por Nadakuditi–Newman [NN12]. Espera-se que essa investigação abra mais vias para determinar a dificuldade de resolução do problema no regime $k = \Omega(\sqrt{n})$.

O presente trabalho começa apresentando no Capítulo 2 a notação usada e alguns objetos matemáticos que serão particularmente úteis. Em seguida, no Capítulo 3, são descritos alguns resultados clássicos da Teoria Espectral de Matrizes Simétricas que são frequentemente usados durante o estudo espectral de grafos: a chamada Decomposição Espectral de matrizes simétricas e algumas caracterizações variacionais de seus autovalores.

Nos dois capítulos seguintes são produzidos resultados necessários para a análise à que o presente trabalho se propõe. No Capítulo 4, discorre-se brevemente sobre alguns resultados clássicos quanto a matrizes de Wigner e então são demonstrados resultados similares para o espectro de matrizes de Wigner com submatriz anulada, provando que de fato ele também se aproxima em probabilidade à Lei do Semicírculo e que quase certamente o seu raio também está restrito aos limites do semicírculo. Depois disso, atualizações de posto um são definidas no Capítulo 5, quando resultados quanto a essas perturbações sobre matrizes em cujos espectros figuram semicírculos são demonstrados.

Enfim, todos esses resultados são usados no Capítulo 6, quando os espectros das matrizes A e B do $G(n, p, k)$ e de sua variante com laços são estudados. Primeiramente, antes de se estudar as matrizes A e B de $G(n, p, k)$, matrizes análogas sob uma variante com laços do grafo com clique plantada são consideradas. A presença de laços em tal variante introduz uma certa simetria que permite uma análise mais fluida dos espectros. De fato, a análise do caso sem laços assemelha-se ao estudo da variante com laços, salvo alguns ajustes.

Nesse último capítulo, as matrizes estudadas serão vistas como o resultado da aplicação de atualizações de posto um sobre matrizes de Wigner com submatriz anulada, de onde será natural observar a relação da distribuição de seus espectros com o Semicírculo de Wigner e com o vetor indicador da clique plantada.

Mais especificamente, para ambas as variantes será mostrado que, com $k = o(n)$, a distribuição do espectro de B, com exceção de seu maior autovalor, se aproxima em probabilidade do Semicírculo de Wigner; e, com exceção dos seus dois maiores autovalores, o mesmo ocorre com a distribuição do espectro de A.

Ademais, será mostrado que, com $k = \omega(\sqrt{n})$ para a variante com laços e $kq \geq (c+2)\sqrt{pqn}$, com $c > 1$, para a variante sem laços, enquanto para qualquer $k = o(n)$ o maior autovalor de B é quase certamente próximo de kq, onde $q = 1 - p$, e o seu autovetor associado é quase certamente próximo do vetor indicador da clique; o mesmo acontece com o segundo maior autopar de A com $k = O(\sqrt{n \log n})$.

Capítulo 2

Notação e Elementos Especiais

Esta seção introduz notações, noções e elementos especiais usados ao longo do presente trabalho.

2.1 Notação Elementar

Se n é um número inteiro positivo, então $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$.

Um *multiconjunto* S é um par (C_S, mult_S) onde C_S é o *conjunto subjacente* de S e mult_S é uma função que atribui a cada elemento $x \in C_S$ um valor não-negativo, o qual é a *multiplicidade* de x em S. Define-se $S(x) := \mathrm{mult}_S(x)$. O tamanho de S é dado por $|S| := \sum_{x \in C_S} S(x)$.

2.2 O Número de Catalan

O n-ésimo *número de Catalan*, onde $n \geq 0$, é o número

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Dentre as suas muitas propriedades, serão usados no presente trabalho o fato que, para todo $n \geq 0$, tem-se que $C_n/C_{n+1} \leq 1/4$ e que $C_n \leq 4^n$.

Para um tratamento abrangente dos números de Catalan, veja, e.g., [Sta15], que oferece uma vasta coleção de suas propriedades e aplicações.

2.3 Comportamento Assintótico

Dadas $f(n)$ e $g(n)$ duas funções positivas, seja $L := \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)$. Então afirma-se que $f(n) = o(g(n))$ se e somente se $L = 0$; enquanto $f(n) = \omega(g(n))$ se e somente se $L = \infty$. Ademais, diz-se que $f(n) \sim g(n)$ se e somente se $L = 1$. Note que $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$.

Uma proposição $P(n)$ parametrizada por n vale *quase certamente* para uma dada distribuição aleatória se e somente se $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(P(n)) = 1$. Em todos os casos do presente trabalho, a distribuição aleatória subjacente à proposição será dada pelo contexto e estará implícita.

Ademais, uma sequência de variáveis aleatórias $(X_1, X_2, \dots)$ *converge em probabilidade* a um valor c se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| > \epsilon) = 0$.

2.4 Desigualdades Úteis

Em certas ocasiões, convém estudar o quanto uma variável aleatória distancia-se de sua média. Para isso, pode ser usada uma desigualdade como a de Markov, descrita a seguir.

Teorema 2.4.1 (A Desigualdade de Markov)**.** *Seja X uma variável aleatória não-negativa. Então para todo $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Uma desigualdade que oferece cotas mais justas que a oferecida pela desigualdade de Markov é a desigualdade de Chebyshev, descrita abaixo.

Teorema 2.4.2 (A Desigualdade de Chebyshev)**.** *Seja X uma variável aleatória tal que $\mathbb{E}[X] < \infty$. Então para todo $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Enfim, cotas ainda mais justas podem ser obtidas quando sabe-se que a variável aleatória distribui-se segundo a distribuição binomial $B(n, p)$, em que conta-se quantos de n eventos com probabilidade de sucesso p foram bem sucedidos.

Teorema 2.4.3 (Uma Cota de Chernoff)**.** *Seja $X \sim B(n, p)$. Então para todo $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(X - np > a) < e^{-2a^2/n} \text{ e } \mathbb{P}(X - np < -a) < e^{-2a^2/n}.$$

Para mais detalhes quanto às desigualdades de Markov e Chebyshev, veja, e.g., [Ros10, Cap. 8]. Quanto à cota de Chernoff, veja, e.g., [AS16, Ap. A].

2.5 Teoria dos Grafos

Um *grafo* G é um par $(V(G), E(G))$, em que os elementos do conjunto $V(G)$ são os *vértices* de G, enquanto os elementos de $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ são as *arestas* de G. Em ocasiões ao longo deste trabalho será permitida a presença de *laços*, isto é, arestas com ambas as extremidades no mesmo vértice. Nesses casos, será chamada de *aresta comum* qualquer aresta que não seja um laço. Denota-se por $|G| = |V(G)|$ o número de vértices de G e por $\|G\| = |E(G)|$ o número de arestas de G.

Um *passeio* w de comprimento n num grafo G é uma sequência de vértices $(w_1, \ldots, w_n)$ tal que $w_i w_{i+1} \in E(G)$, para todo $i \in [n-1]$. Diz-se que um passeio é *fechado* se $w_1 = w_n$. Associado a cada passeio w está o grafo formado apenas pelos vértices e pelas arestas envolvidos; e por vezes w será identificado com esse grafo, o que estará claro pelo contexto.

Um *subgrafo* H de G é um grafo tal que $E(H) \subseteq E(G)$. Um *grafo induzido pelas arestas* em $S \subseteq E(G)$ é o grafo (V_S, S), onde $V_S = \bigcup_{s \in S} s$. Um *grafo induzido pelos vértices* em $T \subseteq V(G)$ é o grafo (T, E_T), onde $E_T = E(G) \cap \{uv : (u, v) \in T^2\}$.

Um grafo G é dito *completo* se e somente se $E(G) = \binom{V(G)}{2}$, no caso do grafo simples; e se e somente se $E(G) = \{uv : (u, v) \in V(G)^2\}$, caso laços sejam permitidos. Dado um grafo G, uma clique é um subconjunto de $V(G)$ que induz um subgrafo completo em G.

2.6 Álgebra Linear

Denota-se por $M_{i,j}$ o elemento da matriz M que está na i-ésima linha e j-ésima coluna, enquanto v_i é o i-ésimo elemento do vetor v. Denota-se por $\mathbb{R}^n$ o espaço de todos os vetores reais de n elementos; e por $\mathbb{R}^{m \times n}$ o espaço de todas as matrizes reais $m \times n$. Em particular, denota-se por $\mathbb{S}^n$ o espaço de todas as matrizes simétricas $n \times n$.

A *matriz identidade* $n \times n$ é denotada por I. Além disso, e_i é o i-ésimo vetor canônico do $\mathbb{R}^n$. Seja $S \in 2^{[n]}$ um conjunto de inteiros. Então e_S é a matriz cuja i-ésima coluna é o vetor canônico e_{S_i}, onde S_i é o i-ésimo menor elemento de S. Ademais, defina $I_S := e_S e_S^T$.

O *vetor indicador* $\mathbb{1}_S$ de S é o vetor em que os elementos com índice em S são 1, enquanto todos os demais são 0; e o *vetor de uns* $\mathbb{1}$ é o vetor cujos elementos são todos 1.

Lembre que, dados dois vetores u e v, se θ é o ângulo interno entre eles, então

$$u^T v = \sum_i u_i v_i = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Seja M uma matriz $n \times n$. Sejam λ um escalar e v um vetor unitário. O par (λ, v) é um *autopar* de M se e somente se $Mv = \lambda v$. Nesse caso, diz-se que λ é um autovalor de M e v é um autovetor de M. O conjunto dos autovalores de M é denotado por $\mathrm{Spec}^*(M)$. O *espectro* da matriz M é o multiconjunto $\mathrm{Spec}(M) := (\mathbb{C}, \mathrm{mult}_M)$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos e $\mathrm{mult}_M(\lambda)$ é a multiplicidade de λ como raiz de $p_M := \det(\lambda I - M)$, o *polinômio característico* de M. Considere que $\mathrm{mult}_M(\lambda) = 0$ se e somente se λ não é um autovalor de M. Ademais, defina $M(\lambda) := \mathrm{mult}_M(\lambda)$.

Capítulo 3

Teoria Espectral de Matrizes Simétricas

Há resultados clássicos de Teoria Espectral para matrizes simétricas – quanto a seus valores característicos, como autovalores e autovetores – que são úteis para o presente trabalho. Tais resultados são apresentados brevemente no presente capítulo, que oferece suas respectivas provas, por completude.

A Seção 3.1 trata do chamado *Teorema Espectral*, usado para mostrar que matrizes simétricas são diagonalizáveis, possibilitando a sua *decomposição espectral*. Em seguida, são apresentados resultados que expressam os autovalores de matrizes simétricas como soluções de problemas de otimização (Seção 3.2).

3.1 Decomposição Espectral

O seguinte teorema é um resultado fundamental da Teoria Espectral de Matrizes Simétricas.

Teorema 3.1.1 (Teorema Espectral)**.** *Seja M uma matriz simétrica $n \times n$. Então*

a) Seus autovalores são todos reais; e

b) Existe base ortonormal do $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de M.

Devido a esse teorema, ao longo do presente trabalho é adotada a convenção de que uma matriz simétrica M tem autovalores $\lambda_1(M) \geq \cdots \geq \lambda_n(M)$ com respectivos autovetores $v_1(M), \ldots, v_n(M)$, os quais formam uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$. Quando a matriz M for evidente pelo contexto, ela poderá ser omitida da notação, permitindo referências aos autovalores λ_i e autovetores v_i de M.

Em decorrência desse teorema, todo vetor do $\mathbb{R}^n$ pode ser decomposto em termos de autovetores de qualquer dada matriz simétrica. Além disso, desse resultado é possível derivar a chamada *decomposição espectral* de uma matriz simétrica: Se $M \in \mathbb{S}^n$, então

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} — & v_1 & — \\ & \vdots & \\ — & v_n & — \end{pmatrix}}_{V^T},$$

onde V é uma matriz ortonormal cujas colunas são autovetores v_i de M; e D é uma matriz diagonal composta pelos autovalores λ_i correspondentes. Pode-se ver V^T como uma uma transformação que traduz vetores da base canônica para uma base de autovetores de M; enquanto a matriz V desempenha papel inverso. Na base de autovetores a ação de M é descrita pela matriz diagonal D. Em essência, o que se está expressando é que toda matriz simétrica pode ser descrita como uma matriz diagonal numa base ortogonal composta por seus autovetores.

Prova do Teorema 3.1.1. Para provar a), considere um autovalor complexo $\mu = a + bi$ de M com autovetor $u = x + yi$, onde x e y são vetores reais. Nesse caso, vale que $M\overline{u} = \overline{\mu}\,\overline{u}$, onde $\overline{\mu}$ é o conjugado de μ e $\overline{u}$ é o conjugado de u. Segue que $\overline{\mu}\,\overline{u}^T u = (M\overline{u})^T u = \overline{u}^T M u = \mu\overline{u}^T u$. Como $u \neq 0$, então $\mu = \overline{\mu}$; e assim μ é real. Logo, todas as n raízes do polinômio característico de M são reais.

Para matrizes de dimensão 1, b) é trivial. Suponha então que b) vale para toda matriz simétrica com dimensões $k \times k$, com $1 \leq k$, e seja M uma matriz simétrica $(k+1) \times (k+1)$.

Naturalmente, considerando seu polinômio característico, a matriz M possui ao menos um autopar real (μ, u). Seja $V^\perp$ o subespaço de $\mathbb{R}^{k+1}$ composto por vetores ortogonais a u; e seja S uma matriz cujas colunas formam uma base ortonormal de $V^\perp$. Note que para todo $v \in V^\perp$ vale que $SS^T v = v$. Além disso, se $v \in V^\perp$, então $(Mv)^T u = v^T M u = \mu_1 (u^T v) = 0$; e assim $Mv \in V^\perp$.

Considere a matriz $N = S^T M S$. Como N é simétrica de dimensões $k \times k$, então existe uma base ortonormal para $\mathbb{R}^k$ formada por autovetores de N. Se (λ, v) é um autopar de N, então $Sv \in V^\perp$ e $MSv \in V^\perp$. Assim, $MSv = SS^T MSv = SNv = \lambda Sv$; e então (λ, Sv) é um autopar de M.

Para todo $v \in \mathbb{R}^k$, vale que $Sv \in V^\perp$; e assim $Sv \neq u$. Além disso, se v e w são vetores do $\mathbb{R}^k$ tais que $v^T w = 0$, então $(Sv)^T (Sw) = v^T S^T S w = v^T w = 0$. Dessa forma, é possível usar os autovetores de N para obter uma base ortonormal de $V^\perp$ que, junto com u, formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^{k+1}$ formada por autovetores de M. □

3.2 Caracterizações Variacionais do Espectro

Ao estudar o espectro de uma matriz é interessante dispor de meios para computar os seus respectivos autovalores. Enquanto num caso geral só é possível caracterizar os autovalores de uma matriz M como as raízes do seu polinômio característico, quando $M \in \mathbb{S}^n$ pode-se também caracterizá-los como soluções de alguns problemas de otimização.

O raio espectral ρ_M de uma matriz M é uma caracterização como tal. Trata-se do maior valor absoluto dentre os seus autovalores, isto é,

$$\rho_M := \max_{i \in [n]} |\lambda_i(M)|$$

Se M é simétrica, pode-se mostrar que o raio espectral é também a maior razão entre os comprimentos de Mx e de x, considerando todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma, o raio espectral oferece alguma intuição quanto ao impacto máximo de M sobre vetores do $\mathbb{R}^n$.

Fato 3.2.1. *Se $M \in \mathbb{S}^n$, então*

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} = \rho_M.$$

Prova. Todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser decomposto como $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$, em termos de autovetores de M. Assim, tem-se que $\|Mx\|^2 = c_1^2 \lambda_1^2 + \cdots + c_n^2 \lambda_n^2$. Observe que

$$c_1^2 \lambda_1^2 + \cdots + c_n^2 \lambda_n^2 \leq \rho_M^2 (c_1^2 + \cdots + c_n^2);$$

e como $\|x\|^2 = c_1^2 + \cdots + c_n^2$, então $\|Mx\|^2 / \|x\|^2 \leq \rho_M^2$. Enfim, note que a igualdade é atingida ao se tomar como x o autovetor associado ao autovalor de valor absoluto igual a ρ_M e, assim, segue o resultado. □

É possível caminhar na direção de um resultado mais refinado através das seguintes considerações. Lembre que, para qualquer vetor unitário u, o valor de $u^T M u$ é igual a $\|Mu\| \cos\theta$, onde θ é o ângulo interno entre u e Mu. Se v é um autovetor associado ao autovalor λ tal que $|\lambda| = \rho_M$, então sabe-se que ele deve maximizar ou minimizar a expressão $u^T M u$ considerando apenas vetores unitários, uma vez que pelo Fato 3.2.1 segue que v maximiza $\|Mu\|$ e, pela definição de autopar, tomando $u = v$ tem-se que $|\cos\theta| = 1$.

Considere então o quociente de Rayleigh, dado por

$$R_M(x) := \frac{x^T M x}{x^T x},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Observe que esse quociente é invariante em relação a $\|x\|$, de tal forma que ao analisar essa função pode-se restringir o seu domínio aos vetores unitários.[1]

A intuição descrita acima motiva o uso do quociente de Rayleigh para obter a seguinte caracterização variacional para os autovalores de uma matriz.

Teorema 3.2.2 (Teorema de Rayleigh–Ritz)**.** *Seja $M \in \mathbb{S}^n$ e seja $S(i,j)$ o espaço ortogonal aos autovetores $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$, se $i \leq j$; ou o $\mathbb{R}^n$, caso contrário. Então*

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \max\{R_M(x) : x \in S(1, k-1) \text{ e } x \neq 0\} \\ &= \min\{R_M(x) : x \in S(k+1, n) \text{ e } x \neq 0\}. \end{aligned}$$

Prova. Pelo Teorema 3.1.1, todo $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser decomposto em termos dos autovetores de M como $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$. Então vale que $x^T M x = c_1^2 \lambda_1 + \cdots + c_n^2 \lambda_n$.

Suponha que $x \in S(1, k-1)$. Nesse caso $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$; e então

$$x^T M x = c_k^2 \lambda_k + \cdots + c_n^2 \lambda_n \leq \lambda_k (c_k^2 + \cdots + c_n^2) = \lambda_k \|x\|^2,$$

de onde tem-se que $R_M(x) \leq \lambda_k$; e tomando $x = v_k$ vale que $R_M(x) = \lambda_k$, provando a primeira igualdade. A prova da segunda igualdade segue de um raciocínio análogo. □

Uma vantagem do Teorema de Rayleigh–Ritz sobre o estudo do raio espectral é a de oferecer uma caracterização mais precisa de cada autovalor. Essa caracterização, contudo, requer conhecimento acerca de alguns autovetores da matriz caso se queira computar autovalores que não sejam o maior ou o menor do espectro. Ainda usando o quociente de Rayleigh, pode-se encontrar uma outra caracterização variacional dos autovalores que é livre desse requisito.

Teorema 3.2.3 (Teorema de Courant–Fischer)**.** *Seja $M \in \mathbb{S}^n$ e defina $\dim(U)$ como a dimensão do subespaço U do $\mathbb{R}^n$. Então, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,*

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \max_U \{\min_u \{R_M(u) : u \in U \text{ e } u \neq 0\} : \dim(U) = k\} \\ &= \min_U \{\max_u \{R_M(u) : u \in U \text{ e } u \neq 0\} : \dim(U) = n - k + 1\}, \end{aligned}$$

Prova. Se U é um subespaço de dimensão k, então sua interseção com o subespaço gerado pelos autovetores $v_k, \ldots, v_n$ não é zero. Assim, existe um vetor v não-nulo nessa interseção que pode ser escrito como $v = c_k v_k + \cdots + c_n v_n$, para o qual

$$R_M(v) = \frac{c_k^2 \lambda_k + \cdots + c_n^2 \lambda_n}{c_k^2 + \cdots + c_n^2} \leq \lambda_k.$$

Logo, $\min\{R_M(u) : u \in U \text{ e } u \neq 0\} \leq \lambda_k$ para todo U e então

$$\max\{\min\{R_M(u) : u \in U \text{ e } u \neq 0\} : \dim(U) = k\} \leq \lambda_k.$$

Por outro lado, seja V o subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$. Nesse caso, o Teorema de Rayleigh–Ritz mostra que $\min\{R_M(u) : u \in V \text{ e } u \neq 0\} = \lambda_k$; e então

$$\max\{\min\{R_M(u) : u \in U \text{ e } u \neq 0\} : \dim(U) = k\} \geq \lambda_k.$$

Aplicando um raciocínio análogo, prova-se também a segunda equação. □

[1] Para uma discussão aprofundada quanto às propriedades do quociente de Rayleigh e suas aplicações, veja, e.g., [Wil88, Par98].

Capítulo 4

A Lei do Semicírculo de Wigner

A Lei do Semicírculo de Wigner é um resultado clássico em Teoria de Matrizes Aleatórias. Informalmente, o teorema indica que, à medida que as dimensões de uma certa classe de matrizes aleatórias simétricas – as chamadas *matrizes de Wigner* – tendem a infinito, a distribuição dos autovalores dessas matrizes converge em certo sentido para uma distribuição determinística – o *semicírculo de Wigner*. Um teorema complementar acerca do raio espectral dessas matrizes torna o resultado mais robusto ao mostrar que quase certamente os autovalores se concentram nos limites do semicírculo. Na Seção 4.1, tais resultados são enunciados e conceitos a eles associados são definidos de maneira mais precisa.

O restante deste capítulo é dedicado à adaptação desses resultados a uma outra classe de matrizes aleatórias simétricas chamadas no presente trabalho de *matrizes de Wigner com submatriz anulada*. Tal classe de matrizes é definida com mais precisão na Seção 4.2, onde resultados obtidos quanto a elas são enunciados. Suas provas são apresentadas nas subseções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3.

4.1 O Resultado Clássico

Os resultados descritos nesta seção consideram a seguinte classe de matrizes.

Definição 4.1.1. *Seja M_n uma matriz simétrica aleatória $n \times n$ cujos elementos acima e na diagonal são variáveis aleatórias independentes. Sejam ξ e ζ duas distribuições aleatórias de média zero com* $\operatorname{Var}(\xi) = t < \infty$. *Diz-se que M_n é uma* matriz de Wigner *se e somente se, para todo $(i, j) \in [n]^2$,*

$$[M_n]_{i,j} \sim \begin{cases} \xi, \textit{ se } i \neq j; \textit{ ou} \\ \zeta, \textit{ caso contrário.} \end{cases}$$

É comum, num abuso de notação, se referir a uma sequência $M = (M_1, M_2, \dots)$ de matrizes de Wigner, todas com mesmos ξ e ζ, por "a matriz de Wigner M", como se os M_i representassem a evolução de uma única matriz de Wigner com dimensões crescentes.

Wigner [Wig55, Wig58] descreve um importante resultado quanto ao espectro dessa classe de matrizes, conhecido como a *Lei do Semicírculo de Wigner*. Esse resultado é bastante geral por considerar uma classe de matrizes abrangente, de modo que há muitos estudos acerca dele e de suas ramificações.[1] Esse resultado diz respeito à *distribuição empírica* das matrizes de Wigner, isto é, à medida de probabilidade

$$\mu_A := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i(A)},$$

onde A é uma matriz simétrica $n \times n$ e δ_a é um *delta de Dirac*, o qual é definido pela propriedade $\int f \, d\delta_a = f(a)$, para toda função contínua f com suporte compacto.

[1] Para um tratamento aprofundado dos resultados descritos nesta seção e assuntos relacionados, veja, e.g., [AGZ10, BS10, TV14].

Teorema 4.1.2 (Lei do Semicírculo de Wigner)**.** *Seja* $(M_1, M_2, \dots)$ *uma sequência de matrizes de Wigner com mesmos* ξ *e* ζ *tais que todos os seus momentos existem e são limitados, isto é, que* $\max\left\{\mathbb{E}[|\zeta|^d], \mathbb{E}[|\xi|^d]\right\} \leq r_d < \infty$*, para* $d \geq 1$*, com* r_d *independente de* n*. Para todo* $n \geq 1$*, defina* $W_n := \frac{1}{\sqrt{n}} M_n$*. Então para toda função contínua limitada* f *e para todo* $\epsilon > 0$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \int f\, d\mu_{W_n} - \int f\, d\sigma_t \right| > \epsilon \right) = 0,$$

onde σ_t *é o* semicírculo de Wigner*, a distribuição tal que*

$$\sigma_t(dx) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2}\, dx, & \text{se } x^2 \leq 4t; \text{ ou} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um teorema de Füredi–Komlós [FK81] limita o raio espectral de W_n, mostrando que quase certamente todos os autovalores de W_n estão no intervalo $(-2\sqrt{t} - \epsilon, 2\sqrt{t} + \epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$.

Teorema 4.1.3. *Sob as mesmas condições do Teorema 4.1.2, se todos os elementos de* M_n *possuem um limitante comum* L*, então para todo* $\epsilon > 0$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \rho_{W_n} - 2\sqrt{t} \right| > \epsilon \right) = 0.$$

4.2 Matrizes de Wigner com Submatriz Anulada

No presente trabalho a seguinte classe de matrizes é estudada.

Definição 4.2.1. *Seja* X_n *uma matriz simétrica aleatória* $n \times n$ *cujos elementos acima e na diagonal são variáveis aleatórias independentes. Sejam* ξ *e* ζ *duas distribuições aleatórias de média zero com* $\mathrm{Var}(\xi) = t < \infty$*; e seja* $Z_n \subseteq [n]$ *um conjunto de* z_n *índices. Diz-se que* X_n *é uma* matriz de Wigner com submatriz anulada *se e somente se, para todo* $(i,j) \in [n]^2$*,*

$$[X_n]_{i,j} \sim \begin{cases} 0, & \text{se } (i,j) \in Z_n^2; \text{ e} \\ \xi, & \text{se } (i,j) \notin Z_n^2 \text{ e } i \neq j; \text{ e} \\ \zeta, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pode-se ver X_n como uma matriz de Wigner em que a submatriz definida pelos elementos com ambos os índices em Z_n foi substituída pela matriz nula (por isso, "*com submatriz anulada*"). Dada uma sequência $(X_1, X_2, \dots)$ de matrizes de Wigner com submatriz anulada, defina $z(n) := z_n$.

A discrepância na definição das matrizes de Wigner com submatriz anulada em relação à definição usual para matrizes de Wigner impede que os resultados mencionados na seção anterior sejam aplicados diretamente. Contudo, pode-se adotar uma abordagem combinatória semelhante à de Wigner [Wig55, Wig58] para mostrar que, quando $z(n) = o(n)$, a distribuição empírica dessas matrizes também se aproxima da distribuição semicírculo.

Teorema 4.2.2. *Seja* $(X_1, X_2, \dots)$ *uma sequência de matrizes de Wigner com submatriz anulada tal que* $z(n) = o(n)$*, todas com os mesmos* ξ *e* ζ *tais que todos os seus momentos existem e são limitados, isto é, que* $\max\left\{\mathbb{E}[|\zeta|^d], \mathbb{E}[|\xi|^d]\right\} \leq r_d < \infty$*, para* $d \geq 1$*, com* r_d *independente de* n*. Defina* $Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}} X_n$*, para todo* $n \geq 1$*. Então conforme* $n \to \infty$*, para toda função contínua limitada* f *e todo* $\epsilon > 0$*, tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \int f\, d\mu_{Y_n} - \int f\, d\sigma_t \right| > \epsilon \right) = 0.$$

De forma similar aos resultados originais, pode-se mostrar que os autovalores estão quase certamente contidos no intervalo $(-2\sqrt{t} - \epsilon, 2\sqrt{t} + \epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$, uma vez que $\lambda_1(Y_n)$ e $\lambda_n(Y_n)$ aproximam-se, respectivamente, de $2\sqrt{t}$ e de $-2\sqrt{t}$.

Teorema 4.2.3. *Sob as mesmas condições do Teorema 4.2.2, se todo elemento de X_n possui um limitante comum L, então para todo $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\rho_{Y_n} - 2\sqrt{t}\Big| > \epsilon \Big) = 0.$$

A demonstração do Teorema 4.2.2 será através do seguinte teorema, a princípio mais fraco, que será usado num argumento com a aproximação de Weierstrass (Teorema 4.2.10).

Teorema 4.2.4. *Sob as mesmas condições do Teorema 4.2.2, para todo $\epsilon > 0$ e todo $d \geq 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigg|\int x^d \, d\mu_{Y_n} - \int x^d \, d\sigma_t \bigg| > \epsilon \bigg) = 0.$$

Em outras palavras, o Teorema 4.2.4 mostra que os momentos de μ_{Y_n} se aproximam dos momentos de σ_t. Isso é interessante para o presente trabalho, uma vez que a distribuição semicírculo é definida pelos seus momentos[2]; e o fato de que os momentos da distribuição empírica se aproximam dos do semicírculo sugere que talvez a própria distribuição empírica também convirja ao semicírculo de Wigner, como se verifica de fato.

4.2.1 Os Momentos da Distribuição Empírica

Nesta subseção serão usados $X := X_n$, $Y := Y_n$ e $Z := Z_n$, por simplicidade de notação.

Primeiramente, algumas observações quanto aos momentos de μ_Y e σ_t. Pode-se facilmente ver que se $Y = UDU^T$ é uma decomposição espectral de Y, então

$$\int x^d \, d\mu_Y = \frac{1}{n}\sum_i \lambda_i^d(Y) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(D^d) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(UD^dU^T) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d),$$

onde $\operatorname{Tr}(A)$ é o traço da matriz A, isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal. Quanto aos momentos de σ_t, pode-se usar o seguinte fato conhecido acerca da distribuição. Lembre que C_i é o i-ésimo número de Catalan, definido no Capítulo 2.

Fato 4.2.5. *Para todo $t > 0$ e inteiro $d \geq 0$,*

$$\int x^d \, d\sigma_t = \begin{cases} 0, \text{ se } d \text{ é ímpar; ou} \\ t^{d/2} C_{d/2}, \text{ se } d \text{ é par;} \end{cases}$$

Para provar o Teorema 4.2.4 pode-se então equivalentemente mostrar que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigg|\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\bigg| > \epsilon \bigg) = 0, \text{ se } d \text{ é ímpar; e}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigg|\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d) - t^{d/2}C_{d/2}\bigg| > \epsilon \bigg) = 0, \text{ se } d \text{ é par.}$$

Para isso, será mostrado que a esperança de $\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)$ tende ao d-ésimo momento de σ_t, enquanto a variância desse traço tende a zero, como afirmam os seguintes lemas. O Teorema 4.2.4 segue desses lemas e uma aplicação da desigualdade de Markov (2.4.1), como será visto ao fim desta seção.

Lema 4.2.6. *Sob as mesmas condições do Teorema 4.2.2, para todo $d \geq 0$ tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big] = \begin{cases} 0, \text{ se } d \text{ é ímpar; ou} \\ t^{d/2} C_{d/2}, \text{ se } d \text{ é par.} \end{cases}$$

[2] Isto é, a distribuição semicírculo é a única distribuição com os momentos que ela apresenta. Isso pode ser verificado ao se constatar que a distribuição semicírculo satisfaz a chamada *condição de Carleman*. Para mais detalhes, veja, e.g., [BS10].

Lema 4.2.7. *Sob as mesmas condições do Teorema 4.2.2, para todo $d \geq 0$ tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\Big(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big) = 0.$$

Como mencionado, a prova desses lemas segue uma abordagem combinatória muito semelhante à de Wigner [Wig55, Wig58].

Prova do Lema 4.2.6. O traço de Y pode ser visto em termos dos elementos de X, uma vez que

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n^{d/2+1}}\operatorname{Tr}(X^d)\Big] = \frac{1}{n^{d/2+1}}\sum_{i\in[n]^d}\mathbb{E}[X_i],$$

onde dado $i = (i_1, i_2, \dots, i_d) \in [n]^d$, define-se $X_i = X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\cdots X_{i_d,i_1}$. A última igualdade decorre do fato de que o traço é a soma dos elementos na diagonal principal da matriz; e na d-ésima potência de uma matriz o i-ésimo elemento da diagonal principal pode ser obtido somando-se todos os produtórios de d elementos da matriz cujas coordenadas formem um passeio fechado de i a i.

Considere o grafo completo K_n sobre o conjunto de vértices $[n]$ com um laço em cada vértice. Associe a cada $i \in [n]^d$ o passeio fechado $w_i = (i_1, i_2, \dots, i_d, i_1)$ em K_n. O grafo G_i é o subgrafo de K_n induzido pelas arestas de w_i.

Note que dado w_i, pode-se facilmente obter $\mathbb{E}[X_i]$: Sejam L_i os laços em G_i, C_i as arestas comuns de G_i, e Z_i as arestas de G_i com ambas as extremidades em Z. Denote por $w_i(e)$ a quantidade de vezes que w_i atravessa a aresta e. Se $Z_i \neq \varnothing$, então $\mathbb{E}[X_i] = 0$, uma vez que a esperança de qualquer elemento cujas coordenadas estão ambas em Z é zero. Se $Z_i = \varnothing$, então

$$\mathbb{E}[X_i] = \prod_{e\in L_i}\mathbb{E}[\zeta^{w_i(e)}]\prod_{e\in C_i}\mathbb{E}[\xi^{w_i(e)}] =: \Pi(i).$$

Note que se i e j são sequências isomorfas tais que $Z_i = Z_j = \varnothing$, então $\Pi(i) = \Pi(j)$. Além disso, se $s \in [n]^d$, então como $\Pi(s)$ é um produto de no máximo d termos limitados (lembre-se que $\max\{\mathbb{E}[|\zeta|^d], \mathbb{E}[|\xi|^d]\} \leq r_d < \infty$, para todo $d \geq 0$), seu valor também é limitado por cotas independentes de n.

Seja $\mathcal{S}_d$ o conjunto das sequências de comprimento d sem arestas em Z, onde sequências isomorfas são identificadas. Tem-se então que

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big] = \sum_{s\in\mathcal{S}_d}\Pi(s)\frac{|\{i\in[n]^d : i \simeq s, Z(w_i) = \varnothing\}|}{n^{d/2+1}}.$$

Precisa-se agora estimar, dado $s \in \mathcal{S}_d$, a quantidade de sequências $i \in [n]^d$ que satisfazem $i \simeq s$ e $Z(w_i) = \varnothing$. Defina $w := w_s$ e $G := G_s$. Pode-se obter uma cota inferior simples ao ignorar as sequências com elementos em Z, enquanto considerando todas as sequências encontra-se uma cota superior. Em outras palavras,

$$|\{i \in ([n]\setminus Z)^d : i \simeq s\}| \leq |\{i\in[n]^d : i \simeq s, Z(w_i) = \varnothing\}| \leq |\{i \in [n]^d : i \simeq s\}|.$$

Para ambas as cotas, basta contar a quantidade de maneiras que se pode atribuir aos vértices de G os rótulos disponíveis, isto é,

$$|\{i \in ([n]\setminus Z)^d : i \simeq s\}| = \frac{(n-z)!}{(n-z-|G|)!} \quad \text{e} \quad |\{i\in[n]^d : i \simeq s\}| = \frac{n!}{(n-|G|)!}.$$

Dessa forma, tem-se que

$$\sum_{s\in\mathcal{S}_d}\Pi(s)\frac{(n-z)!}{(n-z-|G|)!}\frac{1}{n^{d/2+1}} \leq \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big] \leq \sum_{s\in\mathcal{S}_d}\Pi(s)\frac{n!}{(n-|G|)!}\frac{1}{n^{d/2+1}}. \tag{4.1}$$

Note que se um passeio $w \in \mathcal{S}_d$ atravessa certa aresta e exatamente uma vez, então como $\mathbb{E}[Y_e] = 0$ tem-se que $\Pi(s) = 0$. Dessa forma, só é necessário considerar os grafos em que w atravessa cada aresta de G ao menos duas vezes. Como o comprimento de w é d, tem-se que $\|G\| \leq d/2$.

Suponha que d é ímpar. Como G é um grafo conexo, então $|G| \leq \|G\| + 1 \leq d/2 + 1$; e como d é ímpar, segue que $|G| \leq d/2 + 1/2$. Sabe-se que $\Pi(s)$ é limitado por cotas independentes de n. Além disso, uma vez que $\frac{(n-z)!}{(n-z-|G|)!} \sim (n-z)^{|G|}$ e $\frac{n!}{(n-|G|)!} \sim n^{|G|}$, os termos nos somatórios à esquerda e à direita em (4.1) são $O(1/\sqrt{n})$. Dessa forma, conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big] = 0, \text{ quando } d \text{ é ímpar.}$$

Assuma então que d é par. Observe que se w contém um laço ou atravessa alguma aresta mais que duas vezes, então $|G| \leq d/2$: Se w contém um laço, como G é conexo então $|G| < \|G\| + 1 \leq d/2 + 1$; e se w atravessa uma aresta e mais que duas vezes, tem-se que $\|G - e\| \leq (d-3)/2$; e então $\|G\| \leq (d-1)/2$, o que implica $|G| \leq d/2$.

Se $|G| \leq d/2$, os termos nos somatórios de (4.1) são $O(1/n)$. Resta então considerar apenas os termos cujos passeios de comprimento d induzem grafos conexos sem laços com $|G| > d/2$ vértices e em que cada aresta é atravessada exatamente duas vezes. Como cada aresta é atravessada exatamente duas vezes e o passeio tem comprimento d, então $\|G\| = d/2$. Ademais, como o grafo é conexo, então $d/2 < |G| \leq \|G\| + 1 = d/2 + 1$. Assim, segue que $|G| = d/2 + 1$. Dessa forma, segue que tais passeios induzem árvores. Denote o subconjunto de $\mathcal{S}_d$ correspondente a esses termos por $\mathcal{S}_d^{d/2+1}$. Para $s \in \mathcal{S}_d^{d/2+1}$, tem-se que

$$\frac{(n-z)!}{(n-z-|G|)!} \sim (n-z)^{d/2+1} \quad \text{e} \quad \frac{n!}{(n-|G|)!} \sim n^{d/2+1}.$$

Além disso, como cada aresta é atravessada exatamente duas vezes e G não tem laços, então $\Pi(s) = \prod_{e\in E(G)} \mathbb{E}[\xi^2] = t^{d/2}$. Dessa forma,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big] = t^{d/2}|\mathcal{S}_d^{d/2+1}|, \text{ quando } d \text{ é par.}$$

Enfim, resta enumerar o conjunto $\mathcal{S}_d^{d/2+1}$. Pode-se corresponder cada passeios deste conjunto a árvores ordenadas não-rotuladas com $d/2+1$ vértices, isto é, árvores enraizadas em que os filhos de cada nó são ordenados. O número de árvores como essas é conhecidamente $C_{d/2}$, o $(d/2)$-ésimo número de Catalan (veja, por exemplo, [Sta15]), de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big] = t^{d/2}C_{d/2}. \qquad \square$$

Prova do Lema 4.2.7. Das definições de variância e de Y segue que

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\Big(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big) &= \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{n^{d/2+1}}\operatorname{Tr}(X^d)\Big)^2\Big] - \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n^{d/2+1}}\operatorname{Tr}(X^d)\Big]^2 \\ &= \frac{1}{n^{d+2}}\big(\mathbb{E}[\operatorname{Tr}(X^d)^2] - \mathbb{E}[\operatorname{Tr}(X^d)]^2\big).\end{aligned}$$

Expandindo os traços como somatórios, tem-se que

$$\mathbb{E}[\operatorname{Tr}(X^d)^2] = \sum_{i,j\in[n]^d} \mathbb{E}[X_i X_j] \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[\operatorname{Tr}(X^d)]^2 = \sum_{i,j\in[n]^d} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j],$$

onde dado $i \in [n]^d$, defina $X_i = X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\cdots X_{i_d,i_1}$. Dessa forma,

$$\operatorname{Var}\Big(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\Big) = \frac{1}{n^{d+2}}\sum_{i,j\in[n]^d}\big(\mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]\big).$$

Considere o grafo completo K_n sobre o conjunto de vértices $[n]$ com um laço em cada vértice. Associe a cada $i \in [n]^d$ o passeio fechado $w_i = (i_1, i_2, \ldots, i_d, i_1)$. O grafo G_i é o subgrafo de K_n induzido pelas arestas de w_i. Dadas duas sequências $i, j \in [n]^d$, defina o grafo $G_{i,j}$ como o subgrafo de K_n induzido pelas arestas de w_i e de w_j.

Para todo $k \in [n]^d$, sejam L_k os laços de G_k, C_k as arestas comuns em G_k, e Z_k as arestas em G_k com ambas as extremidades em Z. Observe que dados w_i e w_j, pode-se obter $\Pi(i,j) := \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$: Se $Z_i \cup Z_j \neq \varnothing$, então certamente $\Pi(i,j) = 0$. Se $Z_i \cup Z_j = \varnothing$, note que, se i e j são disjuntos, então $\Pi(i,j) = 0$; enquanto que, se eles possuem aresta em comum,

$$\begin{aligned}\Pi(i,j) = &\prod_{e \in L_i \cup L_j} \mathbb{E}[\zeta^{w_i(e)+w_j(e)}] \prod_{e \in C_i \cup C_j} \mathbb{E}[\xi^{w_i(e)+w_j(e)}] \\ &- \prod_{e \in L_i} \mathbb{E}[\zeta^{w_i(e)}] \prod_{e \in C_i} \mathbb{E}[\xi^{w_i(e)}] \prod_{e \in L_j} \mathbb{E}[\zeta^{w_j(e)}] \prod_{e \in C_j} \mathbb{E}[\xi^{w_j(e)}].\end{aligned}$$

Ademais, se x e y são sequências respectivamente isomorfas a i e a j tais que nenhuma apresenta arestas em Z (i.e., $Z_x \cup Z_y \cup Z_i \cup Z_j = \varnothing$), então $\Pi(x,y) = \Pi(i,j)$. Seja $\mathcal{S}_{d,d}$ o conjunto de duplas $(r,s) \in ([n]^d)^2$ de sequências de comprimento d sem arestas em Z, onde as duplas isomorfas são identificadas. Defina $G := G_{r,s}$ e $w(e) := w_r(e) + w_s(e)$, para todo $e \in E(G)$. O valor de $\Pi(r,s)$ é limitado e independente de n, uma vez que pode-se ver $w(\cdot)$ como uma composição inteira de $2d$: tem-se que $\sum_{e \in G} w(e) = 2d$ e para todo $e \in G$ tem-se $1 \leq w_r(e), w_s(e) \leq d$. Como há um número finito dessas partições e os momentos de ξ e ζ são todos limitados, segue que é finito o valor

$$M = \max_{(r,s) \in \mathcal{S}_{d,d}} |\Pi(r,s)|.$$

Observe que pode-se escrever $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\right)$ como

$$\sum_{(r,s) \in \mathcal{S}_{d,d}} \Pi(r,s) \frac{|\{(i,j) \in [n]^{2d} : i \simeq r, j \simeq s, Z_i \cup Z_j = \varnothing\}|}{n^{d+2}}.$$

Precisa-se então estimar, dado $(r,s) \in \mathcal{S}_{d,d}$, quantas sequências $(i,j) \in [n]^{2d}$ satisfazem $i \simeq r$, $j \simeq s$ e $Z_i \cup Z_j = \varnothing$. Esse número pode ser estimado superiormente pela quantidade de rótulos diferentes que pode-se dar aos vértices de G considerando todo o conjunto $[n]$. Em outras palavras,

$$|\{(i,j) \in [n]^{2d} : i \simeq r, j \simeq s, Z_i \cup Z_j = \varnothing\}| \leq |\{(i,j) \in [n]^{2d} : i \simeq r, j \simeq s\}|;$$

e naturalmente, a quantidade à direita da desigualdade é igual a $\frac{n!}{(n-|G|)!} \leq n^{|G|}$. Resta estudar o valor de $|G|$.

Se $e \in E(G)$ é tal que $w(e) = 1$, então $\Pi(r,s) = 0$, uma vez que $\mathbb{E}[Y_e] = 0$. Assim, basta considerar as duplas cuja união dos passeios atravesse cada aresta do grafo ao menos duas vezes. Denote esse subconjunto das duplas por $\mathcal{S}^{w \geq 2}_{d,d}$. Como o grafo é conexo, cada aresta é atravessada ao menos duas vezes e cada passeio tem comprimento d, então $\|G\| \leq d$ e, assim, $|G| \leq d+1$. Dessa forma,

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^d)\right) \leq \sum_{(r,s) \in \mathcal{S}^{w \geq 2}_{d,d}} M \frac{n^{d+1}}{n^{d+2}} = \frac{1}{n} M\, |\mathcal{S}^{w \geq 2}_{d,d}|;$$

e como M e $|\mathcal{S}^{w \geq 2}_{d,d}|$ são limitados e independentes de n, a variância é zero quando $n \to \infty$. □

Agora pode-se provar o Teorema 4.2.4. Contudo, convém primeiro provar o seguinte fato um tanto mais geral que descreve uma condição suficiente para que uma sequência de variáveis aleatórias tenda em probabilidade a um dado valor.

Fato 4.2.8. *Se* $(X_1, X_2, \dots)$ *é uma sequência de variáveis aleatórias tal que* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = m$ *e* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$*, então, para todo* $\epsilon > 0$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - m| > \epsilon) = 0.$$

Prova do Fato 4.2.8. Pela desigualdade de Markov (2.4.1), tem-se que

$$\mathbb{P}(|X_n - m| > \epsilon) = \mathbb{P}\big((X_n - m)^2 > \epsilon^2\big) \leq \frac{\mathbb{E}[(X_n - m)^2]}{\epsilon^2}.$$

Lembre que a norma $L^p(\mathbb{P})$ de uma variável aleatória f, para todo inteiro $p > 0$, é definida como

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{P})} := \Big(\int f^p \, d\mathbb{P}\Big)^{1/p} = \mathbb{E}[f^p]^{1/p}$$

de tal forma que se pode reescrever

$$\mathbb{E}[(X_n - m)^2] = \|X_n - m\|^2_{L^2(\mathbb{P})}.$$

Pela desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned}\|X_n - m\|^2_{L^2(\mathbb{P})} &= \|X_n - \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_n] - m\|^2_{L^2(\mathbb{P})} \\ &\leq \big(\, \|X_n - \mathbb{E}[X_n]\|_{L^2(\mathbb{P})} + \|\mathbb{E}[X_n] - m\|_{L^2(\mathbb{P})}\,\big)^2.\end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}[X_n]$ e m são valores determinísticos, vê-se que

$$\|\mathbb{E}[X_n] - m\|_{L^2(\mathbb{P})} = |\mathbb{E}[X_n] - m|,$$

o que, por suposição, sabe-se que tende a zero conforme n tende a infinito. Quanto ao outro termo,

$$\|X_n - \mathbb{E}[X_n]\|_{L^2(\mathbb{P})} = \sqrt{\mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n])^2]} = \sqrt{\mathrm{Var}(X_n)},$$

cujo limite, também por suposição, é zero. Dessa forma, como

$$\mathbb{P}(|X_n - m| > \epsilon) \leq \frac{\big(\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)} + |\mathbb{E}[X_n] - m|\,\big)^2}{\epsilon^2};$$

e o lado direito da desigualdade é zero com $n \to \infty$, está provado o resultado. □

Prova do Teorema 4.2.4. Como foi visto no começo da Subseção 4.2.1, para provar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int x^d \, d\mu_Y - \int x^d \, d\sigma_t\Big| > \epsilon\Big) = 0,$$

para todo $\epsilon > 0$, pode-se equivalentemente mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(Y^d)\Big| > \epsilon\Big) = 0, \text{ se } d \text{ é ímpar; e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(Y^d) - t^{d/2} C_{d/2}\Big| > \epsilon\Big) = 0, \text{ se } d \text{ é par.}$$

Para ambos os casos, usando o Lema 4.2.6 e o Lema 4.2.7 vê-se que as condições do Fato 4.2.8 são satisfeitas, de onde segue o resultado. □

4.2.2 A Convergência da Distribuição Empírica

A prova do Teorema 4.2.2 segue do seguinte fato, que será usado no Capítulo 6. Lembramos que σ_t é o semicírculo de Wigner (Teorema 4.1.2).

Fato 4.2.9. *Se $\mu_1, \mu_2, \dots$ são medidas aleatórias sobre $\mathbb{R}$ dadas num mesmo espaço de probabilidade tais que $\mu_n(\mathbb{R}) \le 1$ para todo n e, para todo $\epsilon > 0$ e todos inteiros não-negativos d e e,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int x^{2d}\, d\mu_n\Big] \le C_d \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int x^e\, d\mu_n - \int x^e\, d\sigma_1\Big| > \epsilon\Big) = 0;$$

então para toda função contínua limitada f e todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int f\, d\mu_n - \int f\, d\sigma_1\Big| > \epsilon\Big) = 0.$$

Para a prova do Fato 4.2.9 será usado o Teorema da Aproximação de Weierstrass.

Teorema 4.2.10 (Teorema da Aproximação de Weierstrass)**.** *Se f é uma função real contínua num intervalo fechado $[a,b]$, então para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio p_ϵ tal que, para todo $a \le x \le b$,*

$$|f(x) - p_\epsilon(x)| < \epsilon.$$

Para uma prova do Teorema 4.2.10, veja por exemplo [Jac34].

Prova do Fato 4.2.9. Primeiramente, será mostrado que para $B > 4$ e qualquer $\hat{\epsilon} > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} |x|^d\, d\mu_n > \hat{\epsilon}\Big) = 0, \tag{4.2}$$

isto é, que a probabilidade dos valores maiores que $B > 4$ serem significativos no d-ésimo momento de μ_n se aproxima de zero conforme n tende a infinito.

Pela desigualdade de Markov,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} |x|^d\, d\mu_n > \hat{\epsilon}\Big) &\le \frac{1}{\hat{\epsilon}}\mathbb{E}\Big[\int_{|x|>B} |x|^d\, d\mu_n\Big] \\
&\le \frac{1}{\hat{\epsilon}}\mathbb{E}\Big[\int_{|x|>B} |x|^d \Big(\frac{|x|}{B}\Big)^d\, d\mu_n\Big] \\
&= \frac{1}{\hat{\epsilon}}\frac{\mathbb{E}[\int x^{2d}\, d\mu_n]}{B^d}.
\end{aligned}$$

Como foi dado que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\int x^{2d}\, d\mu_n] \le C_d$ e sabe-se que $C_d \le 4^d$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} |x|^d\, d\mu_n > \hat{\epsilon}\Big) \le \frac{1}{\hat{\epsilon}}\Big(\frac{4}{B}\Big)^d. \tag{4.3}$$

Essa desigualdade vale para todo inteiro $d \ge 0$. Considere o seu comportamento em relação a d. Note que com $B > 4$ o lado direito de (4.3) decai exponencialmente em d, tendendo a zero conforme $d \to \infty$. Por outro lado, os $\limsup$ à esquerda de (4.3) são não-decrescentes em d, uma vez que a função $|x|^d$ é estritamente crescente em d quando $|x| > 1$ e, assim, com $B \ge 1$,

$$\mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} |x|^{d_1}\, d\mu_n > \hat{\epsilon}\Big) \le \mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} |x|^{d_2}\, d\mu_n > \hat{\epsilon}\Big),$$

para todo $d_1 < d_2$. Assim, conclui-se que, com $B > 4$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} |x|^d\, d\mu_n > \hat{\epsilon}\Big) = 0.$$

Agora uma aproximação polinomial de f no intervalo $[-B, B]$ será usada para provar o teorema. Pelo Teorema 4.2.10, para todo $\delta > 0$ existe um polinômio p_δ tal que para todo $x \in [-B, B]$,

$$|f(x) - p_\delta(x)| < \delta.$$

Seja $B > 4$. Da desigualdade triangular, segue que

$$\left|\int f\, d\mu_n - \int f\, d\sigma_1\right| \leq \left|\int f\, d\mu_n - \int p_\delta\, d\mu_n\right| + \left|\int p_\delta\, d\mu_n - \int p_\delta\, d\sigma_1\right| + \left|\int p_\delta\, d\sigma_1 - \int f\, d\sigma_1\right|.$$

Quando $\left|\int f\, d\mu_n - \int f\, d\sigma_1\right| > \epsilon$, ao menos um dos termos à direita da desigualdade é maior que $\epsilon/3$. Pela cota da união vê-se então que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\left|\int f\, d\mu_n - \int f\, d\sigma_1\right| > \epsilon\Big) \leq\; &\mathbb{P}\Big(\left|\int f\, d\mu_n - \int p_\delta\, d\mu_n\right| > \epsilon/3\Big)\\ &+ \mathbb{P}\Big(\left|\int p_\delta\, d\mu_n - \int p_\delta\, d\sigma_1\right| > \epsilon/3\Big)\\ &+ \mathbb{P}\Big(\left|\int p_\delta\, d\sigma_1 - \int f\, d\sigma_1\right| > \epsilon/3\Big).\end{aligned}$$

Quando $\delta \leq \epsilon/3$, como σ_1 é uma medida de probabilidade e como por construção $|p_\delta - f| < \delta$ em $[-B, B]$ – o que inclui o suporte de σ_1 – o último termo dessa cota é identicamente nulo. Pelas suposições do enunciado, o segundo termo converge a zero conforme n tende a infinito. Resta observar o primeiro termo. Como

$$\left|\int f\, d\mu_n - \int p_\delta\, d\mu_n\right| \leq \int_{|x|>B} |f - p_\delta|\; d\mu_n + \int_{|x|\leq B} |f - p_\delta|\; d\mu_n,$$

pode-se estimar por uma cota da união que

$$\mathbb{P}\Big(\left|\int f\, d\mu_n - \int p_\delta\, d\mu_n\right| > \epsilon/3\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} |f - p_\delta|\; d\mu_n > \epsilon/6\Big) + \mathbb{P}\Big(\int_{|x|\leq B} |f - p_\delta|\; d\mu_n > \epsilon/6\Big).$$

Com $\delta \leq \epsilon/6$, como μ_n é tal que $\mu_n(\mathbb{R}) \leq 1$, a probabilidade referente ao caso $|x| \leq B$ é identicamente nula. Quanto aos $|x| > B$, note que como f é limitada por uma constante C, então $|f - p_\delta| \leq C + |p_\delta|$; e isso é no máximo $c\,|x|^d$ para alguma constante c, onde d é o grau de p_δ. Assim,

$$\mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} |f - p_\delta|\; d\mu_n > \epsilon/6\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\int_{|x|>B} c\,|x|^d\; d\mu_n > \epsilon/6\Big).$$

Usando (4.2), o termo à direita dessa desigualdade tende a zero conforme $n \to \infty$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\left|\int f\, d\mu_n - \int f\, d\sigma_1\right| > \epsilon\Big) = 0. \qquad \square$$

Prova do Teorema 4.2.2. Suponha que $t = 1$. Pelo Lema 4.2.6 e pelo Teorema 4.2.4 sabe-se que os μ_{Y_n} satisfazem as condições do Fato 4.2.9; e o teorema segue desse fato.

Por outro lado, caso $t \neq 1$ e $t > 0$, pode-se primeiro considerar a matriz $X'_n := t^{-1/2} X_n$ e a função $g : x \mapsto f(\sqrt{t}\, x)$. Para todo elemento não-nulo de X'_n fora da diagonal vale que

$$\mathrm{Var}([X'_n]_{i,j}) = \mathrm{Var}(t^{-1/2}[X_n]_{i,j}) = t^{-1}\,\mathrm{Var}(\xi) = 1.$$

Note que os X'_n são tais que se pode aplicar o Lema 4.2.6 e o Teorema 4.2.4. Ademais, se f é contínua limitada, a função g também o é. Desse modo, pelo Fato 4.2.9, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big| \int g \, d\mu_{Y_n'} - \int g \, d\sigma_1 \Big| > \epsilon \Big) = 0,$$

onde $Y_n' := n^{-1/2} X_n'$. O resultado enunciado segue disso, uma vez que pode-se substituir essas integrais pelas desejadas: Para a primeira integral, como $\lambda_i(Y_n') = t^{-1/2}\lambda_i(Y_n)$, tem-se

$$\int g \, d\mu_{Y_n'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\sqrt{t}\,\lambda_i(Y_n')) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i(Y_n)) = \int f \, d\mu_{Y_n}.$$

Quanto à segunda integral, tomando $x = \sqrt{t}\, y$ vê-se que

$$\begin{aligned} \int g \, d\sigma_1 &= \int_{-2}^{2} f(\sqrt{t}\, y) \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - y^2}\, dy \\ &= \int_{-2\sqrt{t}}^{2\sqrt{t}} f(x) \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2/t}\frac{1}{\sqrt{t}}\, dx \\ &= \int_{-2\sqrt{t}}^{2\sqrt{t}} f(x) \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2}\, dx = \int f \, d\sigma_t. \end{aligned}$$ □

4.2.3 A Convergência do Raio Espectral

Esta subseção é dedicada à prova do Teorema 4.2.3. Ao longo desta subseção serão usados $X := X_n$, $Y := Y_n$ e $Z := Z_n$, por simplicidade de notação. Além disso, será assumido sem perda de generalidade que $\mathrm{Var}(\xi) = t = 1$, uma vez que se a variância não for unitária, ao considerar primeiro a matriz $X' := t^{-1/2}X$, obtém-se o resultado desejado. Com efeito, para todo elemento não-nulo de X' fora da diagonal vale que

$$\mathrm{Var}(X_{i,j}') = \mathrm{Var}(t^{-1/2}X_{i,j}) = t^{-1}\,\mathrm{Var}(X_{i,j}) = 1;$$

e como $Y' := n^{-1/2}X'$ é tal que $\lambda_k(Y') = t^{-1/2}\lambda_k(Y)$, então para $k \in \{1, n\}$, tomando $\epsilon' = t^{-1/2}\epsilon$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\lambda_k(Y') - 2| > \epsilon') = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\lambda_k(Y) - 2\sqrt{t}\Big| > \epsilon \Big) = 0.$$

Observe que $L' := t^{-1/2}L \geq X_{i,j}'$; e como $L^2 \geq \mathrm{Var}(X_{i,j}) = t$, então $L' \geq 1$.

Uma das direções da desigualdade do Teorema 4.2.3 segue em decorrência da lei do semicírculo para matrizes de Wigner com submatriz anulada (isto é, do Teorema 4.2.2). A outra direção da desigualdade, contudo, requer uma prova mais envolvida. A direção com prova mais direta será tratada primeiro e em seguida será tratada a outra direção.

Lema 4.2.11. *Sob as condições do Teorema 4.2.3, se $t = 1$, então para todo $\epsilon > 0$ tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho_Y < 2 - \epsilon) = 0.$$

Prova. Seja f uma função contínua limitada com suporte em $[-2, -2+\epsilon] \cup [2-\epsilon, 2]$ e tal que $\int f \, d\sigma_1 = 1$. Se $\rho_Y < 2 - \epsilon$, então o suporte de μ_Y está contido em $(-2+\epsilon, 2-\epsilon)$; e portanto $\int f \, d\mu_Y = 0$. Dessa forma,

$$\mathbb{P}(\rho_Y < 2 - \epsilon) \leq \mathbb{P}\Big(\int f \, d\mu_Y = 0 \Big).$$

Como $\int f \, d\sigma_1 = 1$, tem-se que

$$\mathbb{P}\Big(\int f \, d\mu_Y = 0 \Big) \leq \mathbb{P}\Big(\Big| \int f \, d\mu_Y - \int f \, d\sigma_1 \Big| > 1/2 \Big).$$

Pelo Teorema 4.2.2, o termo à direita dessa desigualdade é zero com $n \to \infty$, de forma que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho_Y < 2 - \epsilon) = 0. \qquad \square$$

Teorema 4.2.12. *Sob as condições do Teorema 4.2.3, se $t = 1$, para todo $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$, tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho_Y > 2 + \delta n^{-1/6+\epsilon}) = 0.$$

Prova. Observe que para todo inteiro $d > 0$,

$$\rho_Y > 2 + \delta n^{-1/6+\epsilon} \implies \rho_Y^{2d} > (2 + \delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d} \implies \lambda_1^{2d} + \cdots + \lambda_n^{2d} > (2 + \delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d}.$$

Como $\mathrm{Tr}(Y^{2d}) = \sum_i \lambda_i^{2d}$, tem-se então que

$$\mathbb{P}(\rho_Y > 2 + \delta n^{-1/6+\epsilon}) \leq \mathbb{P}\big(\mathrm{Tr}(Y^{2d}) > (2 + \delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d}\big).$$

Aplicando a desigualdade de Markov (2.4.1) vê-se que

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{Tr}(Y^{2d}) > (2 + \delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d}\big) \leq \frac{\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})]}{(2 + \delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d}}. \tag{4.4}$$

A prova consiste em considerar o comportamento de $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})]$ em função de d para mostrar que pode-se tomar $d = d(n)$ de forma que o lado direito da desigualdade tenda a zero em função de n. A ideia dessa prova vem de Füredi–Komlós [FK81], que começa com uma abordagem semelhante à prova combinatória de Wigner para a lei do semicírculo [Wig55].

De maneira similar à da prova do Lema 4.2.6, pode-se ver o traço de Y^{2d} em termos dos elementos de X, uma vez que

$$\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})] = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n^d}\,\mathrm{Tr}(X^{2d})\Big] = \frac{1}{n^d} \sum_{i\in[n]^{2d}} \mathbb{E}[X_i],$$

onde dado $i = (i_1, i_2, \ldots, i_{2d}) \in [n]^{2d}$, defina $X_i = X_{i_1,i_2} X_{i_2,i_3} \cdots X_{i_{2d},i_1}$.

Considere o grafo completo K_n sobre o conjunto de vértices $[n]$ com um laço em cada vértice e associe a cada $i \in [n]^{2d}$ o passeio fechado $w_i = (i_1, i_2, \ldots, i_{2d}, i_1)$ em K_n. Defina G_i como o subgrafo de K_n induzido pelas arestas de w_i.

Seja Z_i as arestas de G_i com ambas as pontas em Z. Se uma sequência i é tal que $Z_i \neq \varnothing$, tem-se que $\mathbb{E}[X_i] = 0$. Naturalmente, se w_i e w_j são isomorfos tais que $Z_i \cup Z_j = \varnothing$, então $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_j]$.

Quaisquer passeios que atravessem alguma aresta exatamente uma vez podem ser ignorados porque sua esperança associada é zero. Seja então $\mathcal{S}_{2d}^v$ o conjunto das sequências $s \in [n]^{2d}$ em que $Z_s = \varnothing$, tal que w_s atravessa cada uma de suas arestas ao menos duas vezes e $|G_s| = v$, onde sequências isomorfas são identificadas, tomando por representante a sequência lexicograficamente menor. Por definição, tem-se que $|G_s| \leq \|G_s\| + 1 \leq d + 1$, o que permite escrever

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})] = \sum_{v=1}^{d+1} \sum_{s\in\mathcal{S}_{2d}^v} \mathbb{E}[X_s] \frac{|\{i \in [n]^{2d} : i \simeq s, Z(w_i) = \varnothing\}|}{n^{d+1}}.$$

Seja $s \in \mathcal{S}_{2d}^v$ e defina $G := G_s$ e $w := w_s$. Pode-se limitar $|\{i \in [n]^{2d} : i \simeq s, Z(w_i) = \varnothing\}|$ superiormente ignorando a restrição $Z(w_i) = \varnothing$. O valor é no máximo o número de maneiras distintas que se pode rotular os v vértices de G com valores em $[n]$, isto é, $\frac{n!}{(n-v)!} \leq n^v$. Assim, tem-se que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})] \leq \sum_{v=1}^{d+1} \frac{n^v}{n^{d+1}} \sum_{s\in\mathcal{S}_{2d}^v} \mathbb{E}[X_s].$$

Para limitar $\mathbb{E}[X_s]$, seja $w(e)$ a quantidade de vezes que w atravessa a aresta e e considere o conjunto C das arestas comuns de G. Para todo $e \in E(G)$, tem-se que $\mathbb{E}[X_e^{w(e)}] \leq L^{w(e)}$, uma vez que $X_e \leq L$. Em particular, para todo $e \in C$, como $w(e) \geq 2$ e $\mathrm{Var}(\xi) = t = 1$,

$$\mathbb{E}[X_e^{w(e)}] \leq \mathbb{E}[L^{w(e)-2} X_e^2] = L^{w(e)-2}\,\mathrm{Var}(\xi) = L^{w(e)-2}.$$

Ademais, G é conexo e tem v vértices, de modo que $|C| \geq v - 1$. Assim,

$$\mathbb{E}[X_s] = \prod_{e \in E(G) \setminus C} \mathbb{E}[X_e^{w(e)}] \prod_{e \in C} \mathbb{E}[X_e^{w(e)}] \leq \prod_{e \in E(G) \setminus C} L^{w(e)} \prod_{e \in C} L^{w(e)-2} = L^{|w|-2|C|} \leq L^{2d-2v+2};$$

de onde segue que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})] \leq \sum_{v=1}^{d+1} \left(\frac{L^2}{n}\right)^{d-v+1} |\mathcal{S}_{2d}^v|. \tag{4.5}$$

É preciso limitar o valor de $|\mathcal{S}_{2d}^v|$. Para isso, cada sequência será associada a um código distinto e tais códigos serão contados. Defina $T := T(s)$ como a árvore geradora de G tal que $w_{i-1}w_i \in E(T)$ se e somente se $w_i \notin \{w_1, \ldots, w_{i-1}\}$, para todo $1 < i \leq 2d$. Em outras palavras, para cada vértice $u \in V(G)$ inclua em T a primeira aresta em w que leva a u. Para a discussão que se segue, considere que $w_{2d+1} := w_1$.

Dado s, construa um código correpondente $c := c(s)$ da seguinte maneira.

1. Seja c uma sequência vazia.
2. Para i de 1 a $2d$, adicione um novo símbolo ao final de c, seguindo os seguintes critérios:
   (a) Na primeira aparição de uma aresta $w_i w_{i+1}$ que está em T, adicione um "+".
   (b) Na segunda aparição de uma aresta $w_i w_{i+1}$ que está em T, adicione um "$-$".
   (c) Em todos os demais casos, isto é, se a aresta $w_i w_{i+1}$ não está em T ou se ela já apareceu duas vezes em w, adicione "w_{i+1}", chamado de *sinal neutro*.
3. Devolva c.

Claramente, cada sequência de $\mathcal{S}_{2d}^v$ está associada a um código, de comprimento $2d$. Para mostrar que sequências distintas resultam em códigos distintos, observe como seria o processo de, dado c, recuperar a sua sequência s:

1. Sejam $\tilde{s}$ uma sequência, $\tilde{T}$ um grafo e dois inteiros ℓ e u.
2. Faça $\tilde{s} \leftarrow (1)$, $\tilde{T} \leftarrow (\{1\}, \varnothing)$, $\ell \leftarrow 1$ e $u \leftarrow 1$.
3. Para i de 1 a $2d$, adicione um elemento ao final de $\tilde{s}$, seguindo os seguintes critérios:
   (a) Se c_i é "+": Incremente ℓ. Então adicione o vértice ℓ e a aresta $u\ell$ a $\tilde{T}$ com rótulo "+", faça $u \leftarrow \ell$ e adicione ℓ.
   (b) Se c_i é "$-$": Remova o rótulo da aresta ux de $\tilde{T}$ correspondente a esse "$-$", faça $u \leftarrow x$ e adicione x.
   (c) Se c_i é um "x": Faça $u \leftarrow x$ e adicione x.
4. Devolva $\tilde{s}$.

Não é difícil ver que na sequência obtida por esse processo o valor da primeira posição e os das obtidas pelos passos 3a e 3c têm os valores corretos em relação a s. Resta descrever como determinar a aresta ux do passo 3b, o que só não é claro quando se tem mais de uma aresta ux marcada como "+" ao alcançar esse passo. Chame o "$-$" correspondente a um passo 3b em que isso ocorre de *sinal crítico*. É preciso ajustar c para tratar esses sinais críticos.

Chame de *sequência balanceada* toda sequência de "+" e "−" com o mesmo número de cada símbolo tal que em todo prefixo o número de "−" jamais ultrapassa o número de "+". Pode-se ver que toda sequência balanceada contígua corresponde a um passeio numa árvore em que se visita cada aresta exatamente duas vezes e termina-se no mesmo vértice em que se começou.

Seja $\tilde{c}$ o código c após remover todas as sequências balanceadas contíguas maximais. Para cada sinal crítico busque em $\tilde{c}$ o último "−" na sequência de "−"s que começa no sinal crítico. Chame esse último "−" de *sinal importante*. Se ux é a aresta que gerou esse sinal importante, substitua-o por "$-_x$". Como as arestas de uma sequência contígua de "−"s estão todas dentro de T e entre todo par de vértices numa árvore há um único caminho, isso resolve a ambiguidade encontrada diante de um sinal crítico.

Antes de estimar o número de códigos, seguem algumas observações quanto aos sinais importantes de c. Elas permitem concluir que o número de sinais importantes é menor que o número de sinais neutros.

- Sempre há algum sinal neutro antes do primeiro sinal importante de c; porque um sinal crítico só pode acontecer depois que w sair de T. Se uw_i e uw_j, com $i < j$, são duas arestas responsáveis por "+"s que caracterizam o sinal crítico, é necessário que w tenha um passeio de w_i para u anterior ao sinal crítico e que não passe por uw_i. Esse passeio, junto com a aresta uw_i, forma um circuito; e nele há uma aresta fora de T.

- Entre dois sinais importantes consecutivos u_1 e u_2 há sempre um sinal neutro. Suponha que não. Nesse caso, a sequência entre u_1 e u_2 descreve um segmento de w completamente dentro de T. Cada "+" nesse trecho tem seu "−" correspondente antes de chegar em u_2. Dessa maneira, em $\tilde{c}$ esse trecho é composto apenas por "−"s, o que não pode acontecer porque u_1 é um sinal importante, isto é, o último de uma sequência de "−"s em $\tilde{c}$.

- Há um sinal neutro depois do último sinal importante. Sejam uw_i e uw_j, com $i \neq j$, duas arestas responsáveis pelos "+"s que caracterizam o último sinal crítico e suponha o contrário. Suponha que uw_i é a aresta que leva ao sinal importante. Assim ao gerar o último sinal crítico w atravessa uw_i e desde então permanece completamente em T. Contudo, a partir desse ponto uw_i não pode ser mais atravessado (isso geraria um sinal neutro) e uw_j ainda precisa ser atravessado; o que significa que depois de atravessar uw_i existe em w um passeio que parte de w_i e atravessa uw_j sem passar por uw_i, o que só pode acontecer se w sair de T.

Pode-se enfim limitar o número de códigos correspondentes a sequências de $\mathcal{S}^v_{2d}$. Tomando os "$-_x$" como "−" e considerando apenas os "+" e "−" de c, vê-se que tais marcas formam uma sequência balanceada por construção; e sabe-se que há C_{v-1} dessas sequências [Sta15], com comprimento $2(v-1)$. Para acomodar esses "+" e "−", é necessário escolher $2(v-1)$ posições do total de $2d$, resultando em $\binom{2d}{2v-2}$ possibilidades. Para as demais $2d-2(v-1)$ posições, precisa-se escolher um símbolo em $[v]$, o que pode ser feito em no máximo $v^{2d-2(v-1)}$ maneiras distintas. Enfim, há não mais que $2d-2(v-1)$ sinais importantes, os quais adotam símbolos em $\{-_1, -_2, \dots -_v\}$, resultando em mais $v^{2d-2(v-1)}$ escolhas. Sob essas considerações, segue que

$$|\mathcal{S}^v_{2d}| \leq \binom{2d}{2v-2} v^{4(d+1-v)} C_{v-1}.$$

Aplicando isso à desigualdade (4.5), vê-se que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})] \leq \sum_{v=1}^{d+1} \left(\frac{L^2 v^4}{n}\right)^{d-v+1} \binom{2d}{2v-2} C_{v-1}.$$

Substituindo por $r = d - v + 1$ e observando que $d - r + 1 \leq d$, com $r \geq 1$, obtém-se

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})] \leq \sum_{r=0}^{d} \left(\frac{L^2(d-r+1)^4}{n}\right)^{r} \binom{2d}{2d-2r} C_{d-r} \leq \sum_{r=0}^{d} \left(\frac{L^2 d^4}{n}\right)^{r} \binom{2d}{2r} C_{d-r}$$

Esse somatório será estimado através de uma série geométrica. Defina

$$S(n,d,r) := \left(\frac{L^2d^4}{n}\right)^r \binom{2d}{2r} C_{d-r}.$$

Para $1 \le r \le d$, tem-se que

$$\frac{S(n,d,r)}{S(n,d,r-1)} = \frac{L^2d^4}{n}\frac{\binom{2d}{2r}}{\binom{2d}{2r-2}}\frac{C_{d-r}}{C_{d-r+1}}.$$

Expandindo os binômios, obtém-se

$$\frac{\binom{2d}{2r}}{\binom{2d}{2r-2}} = \frac{(2d)!(2r-2)!(2d-2r+2)!}{(2r)!(2d-2r)!(2d)!} = \frac{(2d-2r+2)(2d-2r+1)}{(2r)(2r-1)} \le 2d^2.$$

Além disso, como para todo $i \ge 0$, vale $C_i/C_{i+1} \le \frac{1}{4}$,

$$\frac{S(n,d,r)}{S(n,d,r-1)} \le \frac{2L^2d^6}{4n};$$

e então para todo r tem-se

$$S(n,d,r) \le \left(\frac{2L^2d^6}{4n}\right)^r S(n,d,0) = \left(\frac{2L^2d^6}{4n}\right)^r C_d.$$

Tomando um $d = d(n) \le L^{-1/3}n^{1/6}$, a razão dessa progressão é no máximo $1/2$. Como $C_d \le 2^{2d}$, segue que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})] \le \sum_{r=0}^{d} S(n,d,r) \le \sum_{r=0}^{d}\left(\frac{1}{2}\right)^r C_d \le \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^r C_d = 2C_d \le 2^{2d+1},$$

Enfim, pela desigualdade (4.4) e usando que $\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a+b}$,

$$\mathbb{P}\big(\,\mathrm{Tr}(Y)^{2d} > (2+\delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d}\big) \le \frac{\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y^{2d})]}{(2+\delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d}} \le \frac{n\cdot 2^{2d+1}}{(2+\delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d}} = 2n\left(1 - \frac{\delta n^{-1/6+\epsilon}}{2+\delta n^{-1/6+\epsilon}}\right)^{2d}.$$

Como para todo $x \ge 0$, tem-se que $1 - x \le e^{-x}$, então

$$\mathbb{P}\big(\,\mathrm{Tr}(Y)^{2d} > (2+\delta n^{-1/6+\epsilon})^{2d}\big) \le 2n\exp\left(-2d\,\frac{\delta n^{-1/6+\epsilon}}{2+\delta n^{-1/6+\epsilon}}\right).$$

Deseja-se que o lado direito da desigualdade tenda a zero quando $n \to \infty$. Para que isso aconteça com $d(n) \ge cn^{1/6}$, para algum $c > 0$, precisa-se que

$$\log 2n < 2cn^{1/6}\,\frac{\delta n^{-1/6+\epsilon}}{2+\delta n^{-1/6+\epsilon}};$$

o que acontece ao tomando-se

$$c > \frac{\log 2n}{2\delta n^{\epsilon}}\left(2+\delta n^{-1/6+\epsilon}\right).$$

O lado direito desta desigualdade tende a zero com $n \to \infty$, de modo que com n grande o suficiente pode-se tomar inteiros $cn^{1/6} \le d(n) \le L^{-1/3}n^{1/6}$, como desejado. □

Capítulo 5

Atualizações de Posto Um

Seja M uma matriz simétrica, $\alpha \neq 0$ um escalar e $u \neq 0$ um vetor unitário. Então a matriz $N := M + \alpha uu^T$ é uma *atualização de posto um* de M; e a matriz αuu^T é a sua *perturbação*. No presente trabalho, a matriz M é chamada de *matriz original* da atualização N; enquanto N é chamada de atualização *positiva* se $\alpha > 0$; e de *negativa*, se $\alpha < 0$.

O presente capítulo apresenta resultados que descrevem o comportamento do espectro de N em relação ao espectro de M através da medida definida por

$$\mu_{A,i,j} := \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{j} \delta_{\lambda_k(A)}, \text{ se } 1 \leq i \leq j \leq n; \text{ ou} \\ 0, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

onde i e j são inteiros e A é uma matriz simétrica $n \times n$; e do valor

$$\rho_{A,i,j} := \max_{i \leq k \leq j} |\lambda_k(A)| .$$

No presente trabalho, a medida $\mu_{A,i,j}$ é chamada de *distribuição parcial* de A, que corresponde à parte da distribuição empírica de A restrita aos autovalores $\lambda_i \geq \ldots \geq \lambda_j$; e o valor $\rho_{A,i,j}$ é chamado de *raio parcial* de A, que corresponde à maior magnitude dentre esses autovalores.

Partindo de um resultado apresentado por Bunch, Nielsen e Sorensen [BNS78], este capítulo começa mostrando na Seção 5.1 que, para atualizações positivas, a diferença entre o d-ésimo momento de $\mu_{M,i,j}$ e o de $\mu_{N,i+1,j}$ é limitada por $\rho_{M,i,j}$; e que, para atualizações negativas, $\mu_{M,i,j}$, $\mu_{N,i,j-1}$ e $\rho_{M,i,j}$ se relacionam de forma similar. Tais fatos são usados durante a Seção 5.2, que apresenta resultados quanto aos efeitos de atualizações de posto um sobre o espectro de matrizes cujas distribuições empíricas apresentam um semicírculo.

Os resultados da Seção 5.2 são usados no Capítulo 6, onde se estuda o efeito de sucessivas aplicações de perturbações de posto um sobre matrizes de Wigner com submatriz anulada.

5.1 Entrelaçamento Espectral

De Bunch–Nielsen–Sorensen [BNS78] é possível extrair o seguinte teorema e sua prova.

Teorema 5.1.1 (Entrelaçamento Espectral)**.** *Seja $N = M + \alpha uu^T$ uma atualização de posto um.*

- *Se $\alpha > 0$, então $\lambda_i(M) \leq \lambda_i(N) \leq \lambda_{i-1}(M)$, para todo $i \in [n]$, onde $\lambda_0(M) := \lambda_1(M) + \alpha$; e*
- *Se $\alpha < 0$, então $\lambda_{i+1}(M) \leq \lambda_i(N) \leq \lambda_i(M)$, para todo $i \in [n]$, onde $\lambda_{n+1}(M) := \lambda_n(M) + \alpha$.*

De fato, Bunch–Nielsen–Sorensen [BNS78] provê um resultado mais forte ao mostrar como obter todos os autopares da atualização de posto um a partir da perturbação e dos autopares da matriz original. Para os propósitos do presente trabalho, o aspecto de Bunch–Nielsen–Sorensen descrito no Teorema 5.1.1 basta.

Prova do Teorema 5.1.1. Seja $M = VDV^T$ uma decomposição espectral de M. Disso decorre que $N = V(D + \alpha zz^T)V^T = VXV^T$, onde $z := V^Tu$. Se $X = UWU^T$ é uma decomposição espectral de X, segue que $N = OWO^T$, onde $O = VU$. Assim, basta estudar a matriz X. Preliminarmente, convém considerar os três seguintes casos especiais.

1. Se $z = e_k$ (isto é, se $u = v_k(M)$), então $X = D + \alpha E_{\{k\}}$: O único efeito da atualização é somar α a $\lambda_k(M)$, de modo que nesse caso o teorema segue imediatamente.

2. Se z possui elementos nulos, então V e D podem ser reordenados de forma que

$$N = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \end{array}\right)}_{V} \Bigg[\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)}_{D} + \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \alpha\tilde{z}\tilde{z}^T & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{\alpha zz^T} \Bigg] \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \end{array}\right)^T}_{V^T};$$

   onde V_2 e D_2 correspondem aos autopares (λ_i, v_i) tais que $z_i = 0$; e $\tilde{z}$ é formado pelos elementos não-nulos de z. Nesse caso, basta estudar a matriz $\tilde{X} := D_1 + \alpha\tilde{z}\tilde{z}^T = \tilde{U}\tilde{W}\tilde{U}^T$, pois

$$N = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} V_1\tilde{U} & V_2 \end{array}\right)}_{O} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{W} & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)}_{W} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} V_1\tilde{U} & V_2 \end{array}\right)^T}_{O^T}.$$

3. Se para algum λ vale que $M(\lambda) > 1$, então V e D podem ser reordenados de forma que

$$M = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \end{array}\right)}_{V} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda I \end{array}\right)}_{D} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \end{array}\right)^T}_{V^T};$$

   onde V_2 contém todos os autovetores associados a λ. Nesse caso,

$$z = V^Tu = \begin{pmatrix} V_1^Tu \\ V_2^Tu \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

   Seja $h := (z_2 - \|z_2\| e_1)$. Então o refletor elementar $H := I - 2\|h\|^{-2} hh^T$ é tal que $Hz_2 = \|z_2\| e_1$. Não é difícil ver que a matriz $\tilde{V}$ obtida ao substituir V_2 por V_2H em V é ortonormal; e assim o espaço-coluna de V_2H é igual ao de V_2. Segue que $\tilde{V}D\tilde{V}$ é uma outra decomposição espectral de M, com a qual está associada um $z = \tilde{V}^Tu$ correspondente que possui zeros em $M(\lambda) - 1$ coordenadas associadas a λ; os quais podem ser tratados pelo caso acima.

Os casos 2 e 3 evidenciam autovalores comuns a M e a N; e é possível usá-los para reduzir o problema a considerar o espectro de uma matriz $\tilde{X} = D_1 + \alpha\tilde{z}\tilde{z}^T$, onde o vetor $\tilde{z}$ não possui elementos nulos e D_1 é uma matriz diagonal cujos autovalores são todos distintos. Os autovalores de $\tilde{X}$ se entrelaçam com os de D_1, como se verá a seguir; e então segue o teorema.

Seja (λ, v) um autopar de $\tilde{X}$. Como $\tilde{X}v = (D_1 + \alpha\tilde{z}\tilde{z}^T)v = \lambda v$, segue que

$$(\lambda I - D_1)v = \alpha(\tilde{z}^Tv)\,\tilde{z}. \tag{5.1}$$

Constata-se que $\lambda \notin \mathrm{Spec}^*(D_1)$: Se $\lambda = \lambda_i(D_1)$, então $\alpha(\tilde{z}^Tv)\,\tilde{z}_i = (\lambda - \lambda_i(D_1))v_i = 0$. Uma vez que $\tilde{z}$ não tem elementos nulos e $\alpha \neq 0$, segue que $\tilde{z}^Tv = 0$; e assim $(\lambda I - D_1)v = 0$. Como todos os valores na diagonal de D_1 são distintos, $(\lambda I - D_1)_{j,j} = 0$ se e somente se $j = i$. Assim, $v_j = 0$, para todo $j \neq i$; e então $v = v_ie_i$. Como $\tilde{z}^Tv = 0$, temos $\tilde{z}_iv_i = 0$, um absurdo.

Como $\lambda \notin \mathrm{Spec}^*(D_1)$, então a matriz $(\lambda I - D_1)$ é invertível. Multiplicando (5.1) à esquerda por $z^T(\lambda I - D_1)^{-1}$ segue que $\tilde{z}^T(\lambda I - D_1)^{-1}\tilde{z} = \alpha^{-1}$. Assim, é interessante estudar a função

$$s(\sigma) := \sum_{i \in [p]} \frac{\tilde{z}_i^2}{\sigma - \lambda_i(D_1)} = \tilde{z}^T(\sigma I - D_1)^{-1}\tilde{z}, \text{ onde } p = |\,\mathrm{Spec}(D_1)|.$$

A função s é tal que σ é autovalor de $\tilde{X}$ se e somente se $s(\sigma) = \alpha^{-1}$. Não é difícil ver que:

1. $\lim_{\sigma\to\infty} s(\sigma) = \lim_{\sigma\to-\infty} s(\sigma) = 0$;
2. $\lim_{\sigma\to\lambda_i(D_1)^+} s(\sigma) = \infty$ e $\lim_{\sigma\to\lambda_i(D_1)^-} s(\sigma) = -\infty$, para todo $i \in [p]$; e
3. $ds/d\sigma = -\sum_{i\in[p]} \tilde{z}_i^2(\sigma - \lambda_i(D_1))^{-2} < 0$, para todo $\sigma \notin \mathrm{Spec}^*(D_1)$.

Em outras palavras, $s(\sigma)$ apresenta assíntotas para todo $\sigma \in \mathrm{Spec}^*(D_1)$, tendendo a $-\infty$ pela esquerda das assíntotas e a ∞ pela direita. Além disso, a função é contínua e estritamente decrescente em todo intervalo sem assíntotas, tendendo a zero com $\sigma \to \infty$ e $\sigma \to -\infty$. Considerando essas propriedades, nota-se que os autovalores de $\tilde{X}$ se entrelaçam com os de D_1. □

O Teorema 5.1.1 pode ser usado para demonstrar o seguinte teorema, que expressa como, para todos inteiros i, j e $d \geq 0$ tais que $1 \leq i < j \leq n$, a diferença entre os d-ésimos momentos de $\mu_{M,i,j}$ e de $\mu_{N,i+1,j}$ é limitada em absoluto por um valor proporcional a $\rho_{M,i,j}^d/n$ quando N é uma atualização positiva.

Lema 5.1.2. *Seja N uma atualização de posto um positiva sobre $M \in \mathcal{S}^n$. Então para todos inteiros i, j e $d \geq 0$ tais que $1 \leq i < j \leq n$, definindo $\rho := \rho_{M,i,j}$, vale que*

$$0 \leq \int x^d \, d\mu_{M,i,j} - \int x^d \, d\mu_{N,i+1,j} \leq \frac{2\rho^d}{n}, \text{ se } d \text{ é par; e}$$
$$-\frac{\rho^d}{n} \leq \int x^d \, d\mu_{M,i,j} - \int x^d \, d\mu_{N,i+1,j} \leq \frac{\rho^d}{n}, \text{ se } d \text{ é ímpar.}$$

Como corolário do Lema 5.1.2, algo semelhante pode ser afirmado quanto à diferença entre os d-ésimos momentos de $\mu_{M,i,j}$ e de $\mu_{N,i,j-1}$ quando N é uma atualização negativa, como afirma o seguinte lema.

Lema 5.1.3. *Seja N uma atualização de posto um negativa sobre $M \in \mathcal{S}^n$. Então para todos inteiros i, j e $d \geq 0$ tais que $1 \leq i < j \leq n$, definindo $\rho := \rho_{M,i,j}$, temos*

$$0 \leq \int x^d \, d\mu_{M,i,j} - \int x^d \, d\mu_{N,i,j-1} \leq \frac{2\rho^d}{n}, \text{ se } d \text{ é par; e}$$
$$-\frac{\rho^d}{n} \leq \int x^d \, d\mu_{M,i,j} - \int x^d \, d\mu_{N,i,j-1} \leq \frac{\rho^d}{n}, \text{ se } d \text{ é ímpar.}$$

O Lema 5.1.2 decorre do seguinte fato quanto a diferenças entre elementos consecutivos em sequências não-crescentes.

Fato 5.1.4. *Seja $s_1 \geq \cdots \geq s_n$ uma sequência não-crescente de números reais. Seja S a soma dos termos de índice ímpar e P a soma dos termos de índice par.*

- *Se n é ímpar, então $s_n \leq S - P \leq s_1$.*
- *Se n é par, então $0 \leq S - P \leq s_1 - s_n$.*

Prova. Se n é ímpar, então

$$\begin{aligned} s_n &\leq (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4) + \cdots + s_n \\ &\leq s_1 + (s_3 - s_2) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) \leq s_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, se n é par, então

$$\begin{aligned} 0 &\leq (s_1 - s_2) + \cdots + (s_{n-1} - s_n) \\ &\leq s_1 + (s_3 - s_2) + \cdots + (s_{n-2} - s_{n-1}) - s_n \leq s_1 - s_n. \end{aligned}$$

□

O restante desta seção é dedicado às provas do Lema 5.1.2 e do Lema 5.1.3.

Prova do Lema 5.1.2. Pela definição de distribuição parcial, é verdade que

$$D := \int x^d \, d\mu_{M,i,j} - \int x^d \, d\mu_{N,i+1,j} = \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=i}^{j} \lambda_k(M)^d - \sum_{k=i+1}^{j} \lambda_k(N)^d \Big)$$

Seja $m := j - i + 1$. Pelo Teorema 5.1.1, a sequência

$$S := (s_1 = \lambda_i(M), s_2 = \lambda_{i+1}(N), s_3 = \lambda_{i+1}(M), \ldots, s_{2m} = \lambda_j(N), s_{2m+1} = \lambda_j(M))$$

é não-crescente. Se d é ímpar, então S permanece não-crescente mesmo ao elevar todos os elementos à d-ésima potência. Nesse caso, do Fato 5.1.4 segue que

$$-\frac{\rho^d}{n} \le \frac{\lambda_j(M)^d}{n} \le D \le \frac{\lambda_i(M)^d}{n} \le \frac{\rho^d}{n}.$$

Por outro lado, se d é par e $\lambda_j(M) \ge 0$, então pelo Fato 5.1.4 vale que

$$0 \le D \le \frac{\lambda_i(M)^d - \lambda_j(M)^d}{n} \le \frac{\rho^d}{n}.$$

Pela mesma lógica, obtém-se resultado semelhante quando d é par e $\lambda_i(M) \le 0$. Enfim, se d é par, $\lambda_i(M) > 0$ e $\lambda_j(M) < 0$, então existe um maior índice $k \in [2m+1]$ tal que $s_k > 0$. Seja $S^+ = (s_1^d, \ldots, s_k^d)$ e $S^- = (s_{2m+1}^d, \ldots, s_{k+1}^d)$. Como S tem comprimento ímpar, as paridades dos comprimentos de S^+ e de S^- são distintas. Aplicando o Fato 5.1.4 a S^+ e S^-, obtém-se que

$$0 \le \frac{s_\ell^d}{n} \le D \le \frac{s_1^d + s_{2m+1}^d - s_\ell^d}{n} \le \frac{2\rho^d}{n},$$

onde $\ell = k+1$, se k é par; e $\ell = k$, se k é ímpar. □

Prova do Lema 5.1.3. Suponha que $N = M + \alpha u u^T$, com $\alpha < 0$. Nesse caso, pode-se ver que $\tilde{N} := \tilde{M} + (-\alpha) u u^T$ é uma atualização positiva de $\tilde{M} := -M$. Pelo Lema 5.1.2, para todos inteiros a e b tais que $1 \le a < b \le n$, definindo $\sigma := \rho_{\tilde{M},a,b}$, tem-se que

$$0 < \int x^d \, d\mu_{\tilde{M},a,b} - \int x^d \, d\mu_{\tilde{N},a+1,b} < \frac{2\sigma^d}{n}, \text{ se } d \text{ é par; e}$$
$$-\frac{\sigma^d}{n} < \int x^d \, d\mu_{\tilde{M},a,b} - \int x^d \, d\mu_{\tilde{N},a+1,b} < \frac{\sigma^d}{n}, \text{ se } d \text{ é ímpar.}$$

Note que $\lambda_k(\tilde{M}) = -\lambda_{n-k+1}(M)$ e $\lambda_k(\tilde{N}) = -\lambda_{n-k+1}(N)$, para todo $k \in [n]$. Assim, tomando $a = n - j + 1$ e $b = n - i + 1$, é verdade que $\rho_{\tilde{M},a,b} = \rho_{M,i,j}$. Além disso, é verdade que

$$\int x^d \, d\mu_{\tilde{M},a,b} = \frac{1}{n} \sum_{k=a}^{b} \lambda_k(\tilde{M})^d = (-1)^d \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{j} \lambda_k(M)^d = (-1)^d \int x^d \, d\mu_{M,i,j}; \text{ e}$$
$$\int x^d \, d\mu_{\tilde{N},a+1,b} = \frac{1}{n} \sum_{k=a+1}^{b} \lambda_k(\tilde{N})^d = (-1)^d \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{j-1} \lambda_k(N)^d = (-1)^d \int x^d \, d\mu_{N,i,j-1};$$

e nesse caso conclui-se que

$$0 < \int x^d \, d\mu_{M,i,j} - \int x^d \, d\mu_{N,i,j-1} < \frac{2\rho^d}{n} \quad \text{ e } \quad -\frac{\rho^d}{n} < \int x^d \, d\mu_{M,i,j} - \int x^d \, d\mu_{N,i,j-1} < \frac{\rho^d}{n},$$

como se quer demonstrar. □

5.2 Perturbações Sucessivas e a Distribuição Semicírculo

Nesta seção, seja $(M_1, M_2, \dots)$ uma sequência de matrizes simétricas reais aleatórias M_n de dimensões $n \times n$ e seja $(N_1, N_2, \dots)$ tal que $N_n := M_n + \alpha_n u_n u_n^T$, onde ou $\alpha_n > 0$ para todo n, ou $\alpha_n < 0$ para todo n. Esta seção apresenta alguns resultados que serão usados na caracterização do espectro de atualizações de posto um que resultam da aplicação de perturbações sucessivas sobre uma matriz de Wigner com submatriz anulada.

Lema 5.2.1. *Defina $M := M_n$, $N := N_n$ e $\alpha := \alpha_n$. Se para inteiros $i \geq 1$ e $j \geq 0$ vale que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\rho_{M,i,n-j} - 2| > \epsilon) = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0; \tag{5.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int x^{2d}\, d\mu_{M,i,n-j}\Big] \leq C_d, \text{ para todo inteiro } d \geq 0; \text{ e} \tag{5.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int x^d\, d\mu_{M,i,n-j} - \int x^d\, d\sigma_1\Big| > \epsilon\Big) = 0, \text{ para todo inteiro } d \geq 0 \text{ e todo } \epsilon > 0; \tag{5.4}$$

então é verdade que, com $k = 1$ se $\alpha > 0$; e $k = 0$ se $\alpha < 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\rho_{N,i+k,n-j-1+k} - 2| > \epsilon) = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0; \tag{5.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int x^{2d}\, d\mu_{N,i+k,n-j-1+k}\Big] \leq C_d, \text{ para todo inteiro } d \geq 0; \text{ e} \tag{5.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int x^d\, d\mu_{N,i+k,n-j-1+k} - \int x^d\, d\sigma_1\Big| > \epsilon\Big) = 0, \text{ para todo inteiro } d \geq 0 \text{ e todo } \epsilon > 0. \tag{5.7}$$

O seguinte teorema decorre diretamente desse lema e de uma aplicação do Fato 4.2.9.

Teorema 5.2.2. *Sob as mesmas condições do Lema 5.2.1, para toda função contínua limitada f e todo $\epsilon > 0$ segue que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int f\, d\mu_{N,i+k,n-j-1+k} - \int f\, d\sigma_1\Big| > \epsilon\Big) = 0.$$

Uma consequência do Lema 5.2.1 é que, intuitivamente, se os M_n formam uma sequência de matrizes aleatórias cujas distribuições empíricas se aproximam da distribuição semicírculo, então ao aplicar i atualizações positivas e j atualizações negativas, o espectro parcial $\mu_{N_n,i+1,n-j}$ também se aproxima da distribuição semicírculo.

Em particular, o Lema 5.2.1 pode ser aplicado iterativamente para considerar os efeitos de aplicações sucessivas de atualizações de posto um sobre uma matriz de Wigner com submatriz anulada, como será visto no Capítulo 6.

O restante desta seção é dedicado à prova do Lema 5.2.1.

Prova do Lema 5.2.1. Primeiramente, convém observar que se o lema é verdadeiro com $\alpha > 0$, então uma prova para o lema com $\alpha < 0$ pode ser obtida por uma abordagem semelhante à usada durante a prova do Lema 5.1.3. O restante da prova, portanto, considerará que $\alpha > 0$.

Do Lema 5.1.2, para todo inteiro $d \geq 0$,

$$\int x^{2d}\, d\mu_{N,i+1,n-j} \leq \int x^{2d}\, d\mu_{M,i,n-j},$$

para todo $n > i + j$. Usando a desigualdade (5.3), obtém-se a desigualdade (5.6):

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int x^{2d}\, d\mu_{N,i+1,n-j}\Big] \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int x^{2d}\, d\mu_{M,i,n-j}\Big] \leq C_d,$$

Quanto à igualdade (5.5), através do Lema 5.1.2 pode-se afirmar que, para todo $d \geq 0$,

$$\left| \int x^d \, d\mu_{N,i+1,n-j} - \int x^d \, d\mu_{M,i,n-j} \right| < \frac{2\rho^d_{M,i,n-j}}{n},$$

para todo $n > i + j$. Se $\rho^d_{M,i,n-j} < C$, para alguma constante $C > 0$, então o lado direito dessa desigualdade tende a zero com $n \to \infty$. De fato, pela equação (5.2) é possível fixar um tal C de modo que isso ocorra quase certamente. Assim segue que, para todo $\epsilon > 0$ e todo inteiro $d \geq 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\Big(\left| \int x^d \, d\mu_{N,i+1,n-j} - \int x^d \, d\mu_{M,i,n-j} \right| > \epsilon \Big) = 0.$$

Por uma cota da união, para todo $\epsilon > 0$ e inteiro $d \geq 0$, vale que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\left| \int x^d \, d\mu_{N,i+1,n-j} - \int x^d \, d\sigma_1 \right| > \epsilon \Big) &\leq \mathbb{P}\Big(\left| \int x^d \, d\mu_{N,i+1,n-j} - \int x^d \, d\mu_{M,i,n-j} \right| > \epsilon/2 \Big) \\ &\quad + \mathbb{P}\Big(\left| \int x^d \, d\mu_{M,i,n-j} - \int x^d \, d\sigma_1 \right| > \epsilon/2 \Big). \end{aligned}$$

E assim, pela igualdade (5.4), como os termos à direita tendem a zero, segue a igualdade (5.7):

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\Big(\left| \int x^d \, d\mu_{N,i+1,n-j} - \int x^d \, d\sigma_1 \right| > \epsilon \Big) = 0.$$

Enfim, para a igualdade (5.7), do Teorema 5.1.1 tem-se que, para todo $n > i + j$,

$$\rho_{M,i,n-j} \geq \lambda_i(M) \geq \lambda_{i+1}(N) \geq \lambda_{n-j}(N) \geq \lambda_{n-j}(M) \geq -\rho_{M,i,n-j}.$$

Como pela equação (5.2) quase certamente $\rho_{M,i,n-j} < 2 + \epsilon$, segue a igualdade (5.5):

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|\rho_{N,i+1,n-j} - 2| > \epsilon) = 0. \qquad \square$$

Capítulo 6

Uma Análise Espectral da Clique Plantada

Seguindo uma abordagem sugerida por Nadakuditi–Newman [NN12], o espectro da matriz de adjacência A de um grafo aleatório sob consideração pode ser estudado através da matriz

$$B := A - \mathbb{E}[G_0],$$

onde $\mathbb{E}[G_0]$ é a matriz de adjacência esperada de um grafo aleatório G_0 a ser escolhido. Efetivamente, a ideia sugerida por Nadakuditi–Newman é considerar a distribuição de A como resultante de uma perturbação em relação a um grafo aleatório usado como referência.

Ainda seguindo Nadakuditi–Newman, nota-se que B é uma matriz aleatória que também pode ser expressada como uma perturbação em relação à sua média, isto é,

$$B = \mathbb{E}[B] + X,$$

de onde se pode ver que X é uma matriz aleatória simétrica cujos elementos têm todos média zero. Dependendo da escolha de A e de G_0, a matriz X assim obtida pertence a uma classe de matrizes cujo espectro é conhecido.

Enfim, também dependendo das distribuições consideradas, pode-se ter $\mathbb{E}[G_0]$ e $\mathbb{E}[B]$ como duas matrizes de posto baixo, que intuitivamente representam a introdução de pouca perturbação sobre o espectro de X. Assim, a matriz A pode ser vista como resultante de duas perturbações de posto baixo sobre X. Mais precisamente,

$$A = B + \mathbb{E}[G_0] = X + \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[G_0].$$

Nesse caso, espera-se que o espectro de A esteja intimamente relacionado ao espectro de X.

Nadakuditi e Newman [NN12] notam que essa abordagem pode ser usada para o estudo do espectro do modelo de blocos estocástico, enquanto Nadakuditi [Nad12] recorre a esse método ao considerar uma variante com laços do $G(n, p, k)$. Ambos os estudos aludem a resultados acerca de perturbações de posto baixo sobre certas matrizes de Wigner. Contudo, no caso particular do grafo com clique plantada, é possível considerar algumas propriedades particulares das perturbações de posto um (Capítulo 5) e seus efeitos sobre matrizes de Wigner com submatriz anulada (Capítulo 4) para o estudo do espectro dessa distribuição.

Por sua análise ser mais simples, uma variante do $G(n, p, k)$ com laços no caso $k = o(n)$ e $k = \omega(\sqrt{n})$ será considerada brevemente na Seção 6.1 como um estudo preliminar, motivando a maneira como o espectro do $G(n, p, k)$ será estudado. Isso suscitará intuições que serão consideradas durante o tratamento do caso sem laços original assumindo $k = O(\sqrt{n \log n})$ e $kq \geq (c + 2)\sqrt{pqn}$, com $c > 1$, que será discutido em seguida, na Seção 6.2.

6.1 A Clique Plantada com Laços

O grafo com clique plantada, como descrito no Capítulo 1, não contém laços. Incluir esses laços, contudo, permite a introdução de uma certa uniformidade; situação similar à presente no modelo de blocos estocástico: todos os elementos da matriz de adjacência com ambos os índices ou na clique plantada, ou fora dela, passam a ser identicamente distribuídos.

Uma aplicação direta da abordagem de Nadakuditi–Newman [NN12] para o estudo do espectro do modelo de blocos estocástico faz uso da conveniência proporcionada por essa uniformidade. Assim, será considerada a seguinte distribuição aleatória de grafos.

Definição 6.1.1 (Grafo com Clique Plantada e Laços $\tilde{G}(n,p,k)$)**.** *Sejam $n, k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq n$, e $p \in [0,1]$ fixo. Seja $\tilde{G}(n,p)$ o grafo aleatório com n vértices em que cada aresta e cada laço está presente com probabilidade p. Um grafo $G \sim \tilde{G}(n,p,k)$ é construído da seguinte maneira:*

1. *Tome um grafo aleatório $G_0 := G_0(G) \sim \tilde{G}(n,p)$.*
2. *Sorteie uniformemente ao acaso um k-conjunto de vértices $K := K(G) \sim_U \binom{V(G_0)}{k}$.*
3. *Tome $G := (V(G_0), E(G_0) \cup \{uv \in K^2\})$.*

O conjunto K é a clique plantada *de G.*

Note que o sorteio de K tem apenas o propósito de tornar incerta a localização da clique plantada: Para cada K, identificando grafos isomorfos, esta distribuição gera os mesmos grafos com as mesmas probabilidades. Desse modo, é possível estudar propriedades de $\tilde{G}(n,p,k)$ sem perda de generalidade ao considerar um K fixo.

Pode-se ver o $\tilde{G}(n,p,k)$ como uma variante com laços do grafo com clique plantada. De fato, é essa variante com laços que é considerada nos trabalhos de McSherry–Vu [McS01, Vu18] e de Nadakuditi [Nad12], nos quais o problema da clique plantada é visto como um caso particular da detecção de comunidades no modelo de blocos estocástico.

Tomando $\tilde{G}(n,p)$ como uma distribuição de referência para $\tilde{G}(n,p,k)$, por uma aplicação direta da abordagem de Nadakutidi–Newman obtém-se

$$A = B + \mathbb{E}[\tilde{G}(n,p)] \quad \text{e} \quad B = X + \mathbb{E}[B].$$

Note que uma vez que toda aresta de $\tilde{G}(n,p)$ está presente com probabilidade p, então $\mathbb{E}[\tilde{G}(n,p)]$ é a matriz $n \times n$ cujos elementos são todos p. Observe também que como para A vale que

$$A_{i,j} \sim \begin{cases} 1, \text{ se } (i,j) \in K^2; \text{ e} \\ \text{Be}(p), \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

então para a matriz B vale que

$$B_{i,j} \sim \begin{cases} q := 1-p, \text{ se } (i,j) \in K^2; \text{ e} \\ \text{Be}(p) - p, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

de modo que a esperança de B é dada por

$$\mathbb{E}[B]_{i,j} = \begin{cases} q, \text{ se } (i,j) \in K^2; \text{ e} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, as matrizes $\mathbb{E}[\tilde{G}(n,p)]$ e $\mathbb{E}[B]$ podem ser expressas como

$$\mathbb{E}[\tilde{G}(n,p)] = p\,\mathbb{1}\mathbb{1}^T = np\,xx^T \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[B] = q\,\mathbb{1}_K\mathbb{1}_K^T = kq\,yy^T,$$

onde $x = \mathbb{1}/\sqrt{n}$ é o vetor de uns normalizado e $y = \mathbb{1}_K/\sqrt{k}$ é o vetor indicador da clique normalizado. Observe que ambos x e y são vetores unitários. Dessa forma, tanto A quanto B são atualizações de posto um, uma vez que

$$A = B + np\, xx^T \quad \text{e} \quad B = X + kq\, yy^T.$$

Enfim, note que como $X = \mathbb{E}[B] - B$, então

$$X_{i,j} \sim \begin{cases} 0, \text{ se } (i,j) \in K^2; \text{ e} \\ \mathrm{Be}(p) - p, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, a matriz X é uma matriz de Wigner com submatriz anulada.

Sob essas considerações, nas subseções seguintes serão estudadas propriedades espectrais de A e de B no caso em que $k = o(n)$ e $k = \omega(\sqrt{n})$. Será mostrado que a distribuição da maior parte de seus espectros converge à distribuição semicírculo na Subseção 6.1.1, enquanto o maior autopar de cada matriz e o segundo maior autopar de A serão estudados respectivamente na Subseção 6.1.2 e na Subseção 6.1.3.

6.1.1 Limitando os autovalores do $\tilde{G}(n,p,k)$

Como X é uma matriz de Wigner com submatriz anulada, pode-se aplicar diretamente em B a teoria desenvolvida na Seção 5.2, de modo que o seguinte teorema é obtido por uma aplicação direta do Lema 5.2.1 e do Teorema 5.2.2. Lembre que, dados $1 \le i \le j \le n$, chamando de $\mathrm{Spec}_{M,i,j}$ o conjunto dos autovalores de M entre o seu i-ésimo e o j-ésimo maior (incluindo essas duas extremidades), então $\rho_{M,i,j}$ é o raio parcial de M – o maior valor absoluto dos autovalores em $\mathrm{Spec}_{M,i,j}$ – e $\mu_{M,i,j}$ é a distribuição parcial do espectro de M, na qual é atribuído o peso $1/n$ a cada autovalor em $\mathrm{Spec}_{M,i,j}$ e o peso 0 aos demais valores. Ademais, lembre que σ_t é o semicírculo de Wigner.

Teorema 6.1.2. *Seja $k = o(n)$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|\rho_{B/\sqrt{n},2,n} - 2\sqrt{pq}| > \epsilon\big) = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0; \text{ e}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int f\, d\mu_{B/\sqrt{n},2,n} - \int f\, d\sigma_{pq}\Big| > \epsilon\Big) = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Da mesma forma, considerando A como resultado de duas aplicações sucessivas de perturbações de posto um sobre X, obtém-se o seguinte teorema, que também segue diretamente do Lema 5.2.1 e do Teorema 5.2.2.

Teorema 6.1.3. *Seja $k = o(n)$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|\rho_{A/\sqrt{n},3,n} - 2\sqrt{pq}| > \epsilon\big) = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0; \text{ e}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int f\, d\mu_{A/\sqrt{n},3,n} - \int f\, d\sigma_{pq}\Big| > \epsilon\Big) = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Dessa maneira, sabe-se imediatamente que a maior parte das distribuições dos espectros de A e de B, quando devidamente normalizadas, convergem em probabilidade à distribuição semicírculo. Ademais, constata-se que a menos do maior autovalor de B é possível ver os demais como restritos aos limites do semicírculo; enquanto que o mesmo pode ser dito do espectro de A desconsiderando os seus dois maiores autovalores.

6.1.2 Os Maiores Autopares de $\tilde{G}(n,p,k)$

A descrição de B e de A como atualizações de posto um oferecem algumas intuições quanto aos seus maiores autopares. Ao decompor a transformação $Bv = Xv + \mathbb{E}[B]v = Xv + kq(y^Tv)y$, é de se suspeitar que quando o raio espectral de X é insignificante em relação aos efeitos de $\mathbb{E}[B]$, então $\|Xv\|$ é insignificante em relação a $\|\mathbb{E}[B]v\|$ e, assim, a ação de $\mathbb{E}[B]$ predomina sobre a de X na transformação B. Como visto no Capítulo 4, o raio espectral de X tende em probabilidade a $2\sqrt{pqn}$, enquanto não é difícil ver que (kq, y) é o único autopar de $\mathbb{E}[B]$ com autovalor não-nulo; de modo que é natural suspeitar que se kq for muito maior que $2\sqrt{pqn}$, então o maior autopar de B deve estar próximo de (kq, y).

O estudo sobre atualizações de posto um desenvolvido no Capítulo 5 permite verificar essa intuição, como se pode ver através do seguinte teorema, que limita $\lambda_1(B)$ e $y^T v_1(B)$.

Teorema 6.1.4. *Se $k = o(n)$ e $k = \omega(\sqrt{n})$, então:*

- *Quase certamente, $kq \leq \lambda_1(B) \leq (1 + o(1))kq$; e*
- *Quase certamente, $y^T v_1(B) \geq 1 - o(1)$.*

Prova. Pelo entrelaçamento (Teorema 5.1.1) vale que $\lambda_1(X) \leq \lambda_1(B) \leq \lambda_1(X) + kq$, enquanto pelo Teorema de Rayleigh–Ritz (Teorema 3.2.2) segue que $\lambda_1(B) \geq y^T By = kq$. Dessa forma,

$$\max\{\lambda_1(X), kq\} \leq \lambda_1(B) \leq \lambda_1(X) + kq. \tag{6.1}$$

Para todo $\epsilon > 0$, quase certamente $\rho_X \leq (2\sqrt{pq} + \epsilon)\sqrt{n}$ (Teorema 4.2.3). Por outro lado, como $k = \omega(\sqrt{n})$, para n grande o suficiente tem-se que $kq \geq (2\sqrt{pq} + \epsilon)\sqrt{n}$; e portanto $\rho_X = o(k)$. Assim, pela desigualdade (6.1) segue que quase certamente

$$kq \leq \lambda_1(B) \leq (1 + o(1))kq.$$

Usando $B = X + kq\, yy^T$ e uma desigualdade triangular, é fácil ver que

$$\lambda_1(B) = \|Bv_1(B)\| = \left\|Xv_1(B) + kq\, yy^T v_1(B)\right\| \leq \rho_X + kq(y^T v_1(B)).$$

Rearranjando os termos, segue que $y^T v_1(B) \geq (\lambda_1(B) - \rho_X)/(kq)$. Lembre que quase certamente $\rho_X = o(k)$ e que quase certamente $\lambda_1(B) \geq kq$. Então quase certamente $y^T v_1(B) \geq 1 - o(1)$. □

Aplicando um raciocínio similar a A é possível obter um resultado quanto ao seu maior autopar. O par (np, x) é o maior autopar de $\mathbb{E}[G_0] = np\, xx^T$ e o raio espectral de B é quase certamente algo próximo ao maior entre kq e $2\sqrt{pqn}$. Se $k = o(n)$, espera-se que o maior autopar de A esteja próximo de (np, x). De fato, adotando a mesma técnica usada acima na investigação do maior autopar de B, obtém-se o seguinte teorema.

Teorema 6.1.5. *Se $k = o(n)$, então:*

- *Quase certamente, $(1 - o(1))np \leq \lambda_1(A) \leq (1 + o(1))np$; e*
- *Quase certamente, $x^T v_1(A) \geq 1 - o(1)$.*

Prova. Por entrelaçamento (Teorema 5.1.1) vale que $\lambda_1(A) \leq \lambda_1(B) + np \leq \lambda_1(X) + kq + np$. Como pelo Teorema 4.2.3 quase certamente $\lambda_1(X) \leq o(n)$, então quase certamente $\lambda_1(A) \leq (1 + o(1))np$. Além disso, pelo Teorema de Rayleigh–Ritz (Teorema 3.2.2) tem-se $\lambda_1(A) \geq x^T Ax = d(G)$, o grau médio de G. Agora note que

$$d(G) = x^T Ax = \frac{1}{n} \sum_{(i,j) \in [n]^2} A_{i,j} = \frac{k^2 + M + 2N}{n},$$

onde $M \sim B(n - k, p)$ e $N \sim B(\binom{n}{2} - \binom{k}{2}, p)$. Por cotas de Chernoff (Teorema 2.4.3), segue que

$$\mathbb{P}(M < (n - k)p - \sqrt{n \log n}) < e^{-2 \log n}; \text{ e}$$

$$\mathbb{P}\left(N < \left(\binom{n}{2} - \binom{k}{2}\right)p - n\sqrt{\log n}\right) < e^{-4\log n}.$$

Usando uma cota da união, como $k = o(n)$, pode-se então afirmar que quase certamente

$$\begin{aligned} d(\tilde{G}) = \frac{k^2 + M + 2N}{n} &\geq \frac{1}{n}\left(k^2 + (n-k)p - \sqrt{n\log n} + 2\left(\binom{n}{2} - \binom{k}{2}\right)p - 2n\sqrt{\log n}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{k^2 q - \sqrt{n\log n} - 2n\sqrt{\log n}}{n^2 p}\right) np \geq (1 - o(1))np. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue que $\lambda_1(A) \geq d(G) \geq (1 - o(1))np$.

Da definição de A como atualização de posto um de B,

$$\lambda_1(A) = \|Av_1(A)\| = \|Bv_1(A) + np\, x^T v_1(A) x\| \leq \rho_B + np\, x^T v_1(A).$$

Rearranjando os termos, vale que $x^T v_1(A) \geq (\lambda_1(A) - \rho_B)/(np)$. Por entrelaçamento, tem-se que $\lambda_1(X) \leq \lambda_1(B) \leq \lambda_1(X) + kq$; e quase certamente $\lambda_1(X) = o(n)$. Ademais, $\rho_{B,2,n}$ também quase certamente é $o(n)$ (Teorema 6.1.2). Assim, quase certamente $\rho_B = o(n)$. Enfim, como quase certamente $\lambda_1(A) \geq (1 - o(1))np$, segue que quase certamente $x^T v_1(A) \geq 1 - o(1)$. □

6.1.3 O Segundo Maior Autopar de $\tilde{G}(n, p, k)$

Seja v um vetor não-nulo tal que $Av = Bv$. Nesse caso, da descrição de A como atualização de posto um de B tem-se que $x^T v = 0$. Espera-se que caso um tal v se aproxime de um dos autovetores de B com autovalor λ, ele também se aproxime de um autovetor de A com autovalor próximo a λ conforme $n \to \infty$.

Na seção anterior mostrou-se que (kq, y) se aproxima de $(\lambda_1(B), v_1(B))$. Nesse contexto, é natural estudar vetores que se aproximam de y. Uma vez que $x^T y = \sqrt{k/n}$, o componente de y ortogonal a x pode ser descrito como $z := y - \sqrt{k/n}\, x$, que claramente se aproxima de y quando $k = o(n)$. Esse é em essência o mesmo vetor usado na análise de Alon, Krivelevich e Sudakov [AKS98]. Dessa maneira, quando $k = o(n)$, o par (kq, z) deve se aproximar de algum autopar de A. Em particular, quando $k = o(n)$ e $k = \omega(\sqrt{n})$, espera-se que (kq, z) se aproxime de $(\lambda_2(A), v_2(A))$, uma vez que $\rho_{A,3,n}$ converge em probabilidade a $2\sqrt{pqn}$ e quase certamente $\lambda_1(A)$ está próximo de np. Essa intuição pode ser verificada através do seguinte teorema.

Teorema 6.1.6. *Seja $z := y - \sqrt{k/n}\, x$. Se $k = O(\sqrt{n\log n})$ e $k = \omega(\sqrt{n})$, então:*

- *Quase certamente, $(1 - o(1))kq \leq \lambda_2(A) \leq (1 + o(1))kq$; e*
- *Quase certamente, $z^T v_2(A) \geq 1 - o(1)$.*

Prova. Seja $z = c_1 v_1(A) + \cdots + c_n v_n(A)$ uma decomposição ortogonal de z, onde $c_i := z^T v_i(A)$. Esta demonstração começa mostrando que o comprimento de $\delta := z - c_2 v_2(A)$, isto é, do componente de z ortogonal a $v_2(A)$, é $o(1)$. Para isso, estuda-se o vetor $Az - kqz = Bz - kqz$.

Por definição, sabe-se que $z_i = (n-k)/(n\sqrt{k})$, se $i \in K(G)$; e $z_i = -k/(n\sqrt{k})$, caso contrário. Dessa forma, tem-se que

$$(Az - kqz)_i = (Bz - kqz)_i = \begin{cases} -kZ_i/(n\sqrt{k}), \text{ se } i \in K(G); \text{ e} \\ (n-k)Y_i/(n\sqrt{k}) - k(Z_i - kq)/(n\sqrt{k}), \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

onde $Y_i \sim B(k, p) - kp$, para todo $i \in K(G)$, e $Z_i \sim B(n-k, p) - (n-k)p$, para todo $i \in V(G)$. Por cotas de Chernoff (Teorema 2.4.3), vale que

$$\mathbb{P}(|Y_i| \leq \sqrt{k\log k}) \geq 1 - 2e^{-2\log k}; \text{ e}$$
$$\mathbb{P}(|Z_i| \leq \sqrt{n\log n}) \geq 1 - 2e^{-2\log n}.$$

Assim, quanto aos $i \in K(G)$, quase certamente

$$\sum_{i \in K(G)} (Az - kqz)_i^2 \leq \sum_{i \in K(G)} \left(\frac{k\sqrt{n \log n}}{n\sqrt{k}}\right)^2 = O(\log^2 n) = o(n).$$

Quanto aos $i \notin K(G)$, pode-se escrever

$$\sum_{i \notin K(G)} (Az - kqz)_i^2 = S_1 - S_2 + S_3, \text{ onde } S_1 := \frac{1}{n^2 k} \sum_{i \notin K(G)} \big(k(Z_i - kq)\big)^2;$$
$$S_2 := \frac{1}{n^2 k} \sum_{i \notin K(G)} 2k(n-k)Y_i(Z_i - kq); \text{ e}$$
$$S_3 := \frac{1}{n^2 k} \sum_{i \notin K(G)} \big((n-k)Y_i\big)^2.$$

Pelas cotas de Chernoff obtidas, lembrando que $k = O(\sqrt{n \log n})$, segue que quase certamente

$$S_1 = O\left(\frac{(n-k)k^2 n \log n}{n^2 k}\right) = o(n); \text{ e}$$
$$S_2 = O\left(\frac{k(n-k)^2\sqrt{k \log k}\sqrt{n \log n}}{n^2 k}\right) = o(n).$$

O valor S_3 restante será obtido ao estimar $Y := \sum_{i \notin K(G)} Y_i^2$ pela desigualdade de Chebyshev (Teorema 2.4.2). A média e a variância de cada um desses Y_i correspondem, respectivamente, ao segundo e quarto momentos centrais da distribuição $B(k, p)$, os quais são pqk e $O(k^2)$. Além disso, os Y_i de Y são todos independentes entre si. Segue que a esperança de Y é a soma $\mu := (n-k)pqk$ dessas esperanças, enquanto a sua variância é a soma das variâncias $O((n-k)k^2) = o(\mu k \log k)$. Disso decorre que

$$\mathbb{P}\big(|Y - \mu| \geq \sqrt{\mu k \log k}\big) \leq o(1);$$

e então quase certamente $S_3 \leq (n-k)^2(1+o(1))\mu/(n^2 k) = (1+o(1))pqn$. Dessa forma, conclui-se que $\|Az - kqz\|^2 \leq (1+o(1))pqn$.

Agora, da decomposição ortogonal de z segue que

$$\|Az - kqz\|^2 = \sum_{i \in [n]} c_i^2 \big(kq - \lambda_i(A)\big)^2 \geq \big(kq - \big(1+o(1)\big)2\sqrt{pqn}\big)^2 \|\delta\|^2,$$

onde a desigualdade segue do Teorema 6.1.6 e do Teorema 6.1.3, que descrevem o espectro de A a menos do seu segundo maior autovalor. Como $\|Az - kqz\|^2 \leq (1+o(1))pqn$, vale que

$$\|\delta\|^2 \leq \frac{(1+o(1))pqn}{(kq - (1+o(1))2\sqrt{pqn})^2} = o(1),$$

uma vez que $k = \omega(\sqrt{n})$. Dessa forma,

$$z^T v_2(A) = c_2 = \sqrt{\|z\|^2 - \|\delta\|^2} \geq 1 - o(1).$$

Para limitar $\lambda_2(A)$, nota-se que

$$(1+o(1))pqn \geq \|Az - kqz\|^2 \geq c_2^2(\lambda_2(A) - kq)^2 \geq (1-o(1))(\lambda_2(A) - kq)^2.$$

E então, rearranjando termos, é verdade que

$$|\lambda_2(A) - kq| \leq (1+o(1))\sqrt{pqn}. \qquad \square$$

6.2 A Clique Plantada sem Laços

A descrição da clique plantada dada por Kučera [Kuč95] é semelhante à obtida ao considerar a distribuição como caso particular do modelo de blocos estocástico, tendo por única diferença a ausência de laços. Jerrum [Jer92] oferece uma definição equivalente, descrevendo-a de maneira construtiva partindo do grafo aleatório de Erdős–Rényi $G(n, p)$, como dado pela seguinte definição.

Definição 6.2.1 (Grafo com Clique Plantada $G(n, p, k)$)**.** *Sejam $n, k \in \mathbb{Z}$, $1 \le k \le n$, e $p \in [0, 1]$ fixo. Seja $G(n, p)$ o grafo aleatório com n vértices em que cada aresta está presente com probabilidade p. Um grafo $G \sim G(n, p, k)$ é construído da seguinte maneira:*

1. *Tome um grafo aleatório $G_0 := G_0(G) \sim G(n, p)$.*
2. *Sorteie uniformemente ao acaso um k-conjunto de vértices $K := K(G) \sim_U \binom{V(G_0)}{k}$.*
3. *Tome $G := (V(G_0), E(G_0) \cup \binom{K}{2})$.*

O conjunto K é a clique plantada *de G.*

Assim como no caso com laços, note que o sorteio de K também serve apenas para tornar incerta a localização da clique plantada: Para cada K, identificando grafos isomorfos, esta distribuição gera os mesmos grafos com as mesmas probabilidades. Desse modo, ao estudar propriedades de $G(n, p, k)$, pode-se assumir sem perda de generalidade um K fixo.

Como já observado, um grafo do $G(n, p, k)$ pode ser visto como um grafo aleatório Erdős–Rényi $G(n, p)$ no qual um k-conjunto de vértices foi sorteado uniformemente e então foram acrescentadas todas as arestas necessárias para que tal k-conjunto seja uma clique.

Sabe-se que uma clique máxima do $G(n, p)$ quase certamente tem tamanho $\lfloor r(n) \rfloor$ ou $\lceil r(n) \rceil$, onde $r(n) = (2 - o(1)) \log_{1/p} n$ é uma função que pode ser escrita explicitamente (cf. [Mat72], [BE76]). Dessa forma, se $k = \omega(\log n)$, então quase certamente a clique plantada do $G(n, p, k)$ é a única maior clique do grafo.

Numa observação inicial, Kučera [Kuč95] notou que quando $k \ge c\sqrt{n \log n}$, para uma constante apropriada $c > 0$, tomar os vértices de maior grau torna possível recuperar a clique plantada com alta probabilidade: os graus dos vértices num grafo do $G(n, p)$ seguem uma distribuição binomial $B(n - 1, p)$, onde a probabilidade que um dado vértice tenha grau maior que $c\sqrt{n \log n}$ tende a zero conforme $n \to \infty$; e então incluir as arestas de $\binom{K}{2}$ faz com que os graus dos vértices na clique plantada quase certamente sejam os maiores do grafo.

Alon–Krivelevich–Sudakov [AKS98] ofereceu um primeiro avanço substancial desde que o problema da clique plantada foi proposto, mostrando um algoritmo polinomial capaz de quase certamente recuperar a clique plantada do $G(n, 1/2, k)$, com $k = \Omega(\sqrt{n})$. Esse resultado se fundamenta em algumas observações quanto ao espectro da matriz de adjacência do grafo com clique plantada. O seguinte teorema resume de forma mais precisa tais resultados de Alon–Krivelevich–Sudakov.

Teorema 6.2.2. *Seja $A := A(G(n, p, k))$. Se $k \ge 10\sqrt{n}$ e $k = O(\sqrt{n \log n})$, então:*

1. *Quase certamente, $\lambda_1(A) \ge (1 + o(1))n/2$;*
2. *Quase certamente, $\lambda_i(A) \le (1 + o(1))\sqrt{n}$, para todo $i \ge 3$;*
3. *Quase certamente, $|\lambda_2(A) - k/2| \le \sqrt{n/2}$; e*
4. *Se $z = n\,\mathbb{1}_K - k\,j$, então quase certamente $(z^T v_2(A))^2 \ge (59/60)\,\|z\|^2$.*

Os resultados presentes no Teorema 6.2.2 e suas respectivas provas podem ser generalizados para qualquer $p \in [0, 1]$ constante. O seguinte teorema oferece uma generalização como tal para os itens 1 e 2, referentes ao espectro de $G(n, p, k)$ a menos do seu segundo autovalor. A sua prova pode ser obtida por aplicação direta dos resultados da presente seção.

Teorema 6.2.3. *Seja $A := A(G(n,p,k))$. Se $k = o(n)$, então:*

- *Quase certamente, $\lambda_1(A) \geq (1 - o(1))np$; e*
- *Quase certamente, $\lambda_i(A) \leq (1 + o(1))2\sqrt{pqn}$, para todo $i \geq 3$.*

Uma generalização dos itens 3 e 4, referentes ao segundo maior autopar de A, será oferecida na Subseção 6.2.3. Para isso, será usada uma estratégia semelhante à adotada na Seção 6.1 durante o estudo da variante com laços sob a abordagem por modularidade.

Seja $A := A(G(n,p,k))$. Pela abordagem de Nadakuditi–Newman,

$$A = B + \mathbb{E}[G(n,p)] \quad \text{e} \quad B = X + \mathbb{E}[B].$$

A esperança $\mathbb{E}[G(n,p)]$ é a matriz cuja diagonal é zero e os demais elementos são todos p. Como para A vale que

$$A_{i,j} \sim \begin{cases} 0, \text{ se } i = j; \\ 1, \text{ se } (i,j) \in K^2; \text{ e} \\ \mathrm{Be}(p), \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

então segue que para a matriz B vale que

$$B_{i,j} \sim \begin{cases} 0, \text{ se } i = j; \\ q := 1 - p, \text{ se } (i,j) \in K^2; \text{ e} \\ \mathrm{Be}(p) - p, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

e, assim, a esperança de B é dada por

$$\mathbb{E}[B]_{i,j} = \begin{cases} q, \text{ se } i \neq j \text{ e } (i,j) \in K^2; \text{ e} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Dessa forma, pode-se expressar $\mathbb{E}[G(n,p)]$ e $\mathbb{E}[B]$ como

$$\mathbb{E}[G(n,p)] = p\,\mathbb{1}\mathbb{1}^T - pI = np\,xx^T - pI \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[B] = q\,\mathbb{1}_K\mathbb{1}_K^T - q\,I_K = kq\,yy^T - q\sum_{i \in K} e_i e_i^T,$$

onde $x := \mathbb{1}/\sqrt{n}$ é o vetor todos-um normalizado, $y := \mathbb{1}_K/\sqrt{k}$ é o vetor indicador da clique normalizado e e_i é o i-ésimo vetor canônico. Note que todos esses vetores são unitários, de modo que considerando que

$$A_p := A + pI = B + np\,xx^T \quad \text{e} \quad B = (X - q\,I_K) + kq\,yy^T =: X_q + kq\,yy^T$$

segue que A_p e B são resultados de atualizações de posto um. Ademais, note que como $X = B - \mathbb{E}[B]$, então

$$X_{i,j} \sim \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \text{ ou } (i,j) \in K^2; \text{ e} \\ \mathrm{Be}(p) - p, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

de modo que X é uma matriz de Wigner com submatriz anulada.

Sob essas considerações, será mostrado na Subseção 6.2.1 que, com $k = o(n)$, a distribuição da maior parte de seus espectros converge à distribuição semicírculo. Em seguida (Subseção 6.2.2), o maior autopar de cada matriz será estudado sob o regime $k = o(n)$ e $k \geq (c+2)\sqrt{pqn}$, com $c > 1$. Enfim, o segundo maior autopar de A será estudado considerando $k = O(\sqrt{n \log n})$ e $kq \geq (c+2)\sqrt{pqn}$, com $c > 1$ (Subseção 6.2.3).

6.2.1 Limitando os autovalores de $G(n,p,k)$

Como X é uma matriz de Wigner com submatriz anulada e qI_K pode ser decomposta como o somatório de perturbações de posto um, pode-se aplicar diretamente o Lema 5.2.1 e o Teorema 5.2.2 para se obter o seguinte teorema quanto ao espectro de B. Lembre que, dados $1 \leq i \leq j \leq n$, chamando de $\mathrm{Spec}_{M,i,j}$ o conjunto dos autovalores de M entre o seu i-ésimo e o j-ésimo maior (incluindo essas duas extremidades), então $\rho_{M,i,j}$ é o raio parcial de M – o maior valor absoluto dos autovalores em $\mathrm{Spec}_{M,i,j}$ – e $\mu_{M,i,j}$ é a distribuição parcial do espectro de M, na qual é atribuído o peso $1/n$ a cada autovalor em $\mathrm{Spec}_{M,i,j}$ e o peso 0 aos demais valores. Ademais, lembre que σ_t é o semicírculo de Wigner.

Teorema 6.2.4. *Seja $k = o(n)$. Então*

- *Para todo $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|\rho_{B/\sqrt{n},2,n-k} - 2\sqrt{pq}| > \epsilon\big) = 0$; e*
- *Para todo $\epsilon > 0$ e toda função contínua limitada f,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int f\, d\mu_{B/\sqrt{n},2,n-k} - \int f\, d\sigma_{pq}\Big| > \epsilon\Big) = 0.$$

Esse resultado, contudo, nada diz a respeito dos k menores autovalores. Para isso, pode-se seguir uma abordagem semelhante à de Füredi–Komlós [FK81], que resulta no seguinte teorema.

Teorema 6.2.5. *A menos de $\lambda_1(B)$, os autovalores de B estão restritos ao seguinte intervalo.*

$$\lambda_n(X) - q \leq \lambda_n(B) \leq \lambda_2(B) \leq \lambda_1(X).$$

Prova. Do Teorema de Courant–Fischer (Teorema 3.2.3), é verdade que

$$\lambda_2(B) = \min_{u\in\mathbb{R}^n} \max_{u^T v=0} \{v^T Bv : \|v\| = 1\}.$$

Tomando $u = y$, segue então que

$$\begin{aligned}
\lambda_2(B) &\leq \max_{y^T v=0} \{v^T Bv : \|v\| = 1\} \\
&= \max_{y^T v=0} \{v^T (X + kq\, yy^T - q\, e_K e_K^T)v : \|v\| = 1\} \\
&= \max_{y^T v=0} \{v^T Xv - q\, (e_K^T v)^2 : \|v\| = 1\} \\
&\leq \max_{y^T v=0} \{v^T Xv : \|v\| = 1\} \leq \lambda_1(X).
\end{aligned}$$

Por outro lado, também desse teorema segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_n(B) &= \min_{v}\{v^T Bv : \|v\| = 1\} \\
&= \min_{v}\{v^T (X + kq\, yy^T - q\, e_K e_K^T)v : \|v\| = 1\} \\
&\geq \min_{v}\{v^T Xv - q : \|v\| = 1\} \geq \lambda_n(X) - q,
\end{aligned}$$

como enunciado. □

O Teorema 4.2.3 mostra que quando $k = o(n)$, para todo $\epsilon > 0$ quase certamente tem-se que $|\rho_{X/\sqrt{n}} - 2\sqrt{pq}| \leq \epsilon$. Nesse caso, segue pelo Teorema 6.2.5 que $\rho_{B,2,n} \leq (1 + o(1))2\sqrt{pqn}$.

Por uma abordagem semelhante à adotada para o espectro de B, o seguinte teorema para o espectro de A_p é obtido através de uma aplicação direta do Lema 5.2.1 e do Teorema 5.2.2.

Teorema 6.2.6. *Seja $k = o(n)$. Então*

- *Para todo $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|\rho_{A_p/\sqrt{n},3,n-k} - 2\sqrt{pq}| > \epsilon\big) = 0$; e*
- *Para todo $\epsilon > 0$ e toda função contínua limitada f,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\int f\, d\mu_{A_p/\sqrt{n},3,n-k} - \int f\, d\sigma_{pq}\Big| > \epsilon\Big) = 0.$$

Mais uma vez, o resultado obtido não informa nada quanto aos k menores autovalores de A_p. Para isso, é possível aplicar entrelaçamento (Teorema 5.1.1) ao Teorema 6.2.5, o que resulta no seguinte teorema.

Teorema 6.2.7. *A menos de $\lambda_1(A_p)$ e $\lambda_2(A_p)$, os autovalores de A_p estão restritos ao seguinte intervalo.*

$$\lambda_1(X) \geq \lambda_2(B) \geq \lambda_3(A_p) \geq \lambda_n(A_p) \geq \lambda_n(B) \geq \lambda_n(X) - q.$$

Dessa forma, pelo mesmo silogismo aplicado anteriormente ao se considerar o valor de $\rho_{B,2,n}$, vê-se que, quando $k = o(n)$, tem-se que $\rho_{A_p,3,n} \leq (1+o(1))2\sqrt{pqn}$. Ademais, como para todo $i \in [n]$ é verdade que $\lambda_i(A_p) = \lambda_i(A) + p$, segue também que $\rho_{A,3,n} \leq (1+o(1))2\sqrt{pqn}$ quando $k = o(n)$.

6.2.2 Os Maiores Autopares de $G(n, p, k)$

A intuição desenvolvida no presente trabalho quanto ao maior autopar das matrizes da clique plantada com laços transporta-se naturalmente para a matriz B: espera-se que, conquanto o raio espectral de X_q seja insignificante em relação a kq, o efeito de $kq\, yy^T$ seja proeminente na transformação B; e assim o maior autopar de B esteja próximo de (kq, y). Tal intuição pode ser confirmada usando-se a mesma técnica aplicada na seção anterior. Contudo, uma cota mais justa para $\lambda_1(B)$ pode ser obtida ao se adotar uma abordagem semelhante à de Alon–Krivelevich–Sudakov [AKS98], que é o que será feito a seguir. Para isso, será usado o seguinte lema.

Lema 6.2.8. *Se $k = o(n)$, então quase certamente $\|X_q y\|^2 \leq (1 + o(1))pqn$.*

Prova. Da definição de X_q, tem-se que

$$\|X_q y\|^2 = \|Xy - q\, I_K y\|^2 = \frac{1}{k}\sum_{i\in[n]} (X\mathbb{1}_K - q\,\mathbb{1}_K)_i^2 =: \frac{1}{k}\sum_{i\in[n]} Y_i^2,$$

onde os Y_i são variáveis aleatórias tais que

$$Y_i \sim \begin{cases} -q, \text{ com } i \in K(G); \text{ e} \\ B(k,p) - kp, \text{ com } i \notin K(G), \end{cases}$$

uma vez que, por construção, quando $i \in K(G)$, na i-ésima linha de X as coordenadas correspondentes à clique contêm 0s enquanto a i-ésima posição de $\mathbb{1}_K$ é 1; e quando $i \in K(G)$ os k elementos correspondentes à clique na i-ésima linha de X são distribuídas como $\mathrm{Be}(p) - p$, enquanto a i-ésima posição de $\mathbb{1}_K$ é 0.

A soma dos quadrados dos Y_i com $i \in K(G)$ é kq^2, o que contribui à soma total apenas uma constante $q^2 = o(n)$. Quanto aos Y_i com $i \notin K(G)$, seja Y a soma dos Y_i^2 com $i \notin K(G)$. Note que a esperança e a variância de cada Y_i^2 com $i \notin K(G)$ (equivalentemente, os segundo e quarto momentos de $B(k,p) - kp$) são, respectivamente, pqk e $O(k^2)$. Como esses Y_i são todos independentes entre si, a esperança de Y é a soma $\mu := (n-k)pqk$ dessas esperanças, enquanto a sua variância é a soma das variâncias $O((n-k)k^2) = o(\mu k \log k)$. Dessa maneira, pela desigualdade de Chebyshev (Teorema 2.4.2),

$$\mathbb{P}\big(\,|Y - \mu| \geq \sqrt{\mu k \log k}\big) \leq o(1).$$

E então quase certamente $\|X_q y\|^2 \leq (1 + o(1))pqn$. □

O lema acima mostra que o comprimento de $X_q y$ é quase certamente menor que $\sqrt{(1+o(1))pqn}$. Pela definição de B em termos de X_q, sabe-se que $By - kqy = X_q y$. Além disso, a menos do maior autovalor vale que quase certamente todos os autovalores de B estão restritos ao intervalo de uma distribuição semicírculo de raio $2\sqrt{pqn}$. Usando essas duas informações, pode-se mostrar que a componente de kqy ortogonal a $\lambda_1(B)v_1(B)$ é pequena e, assim, que o maior autopar de B está próximo de (kq, y), como é provado pelo seguinte teorema.

Teorema 6.2.9. *Se $k = o(n)$ e $kq \geq (c+2)\sqrt{pqn}$, para algum $c > 1$, então para todo $1/c^2 < \epsilon < 1$ e todo $\alpha > 1/(1-\epsilon)$,*

- *Quase certamente, $|\lambda_1(B) - kq| \leq \sqrt{\alpha pqn}$; e*
- *Quase certamente, $(v_1(B)^T y)^2 \geq 1 - \epsilon$.*

Prova. Segue da descrição de B em termos de X_q e pelo Lema 6.2.8 que quase certamente

$$\|By - kqy\|^2 = \|X_q y\|^2 \leq (1+o(1))pqn.$$

Considere a decomposição $y = c_1 v_1(B) + \cdots + c_n v_n(B)$, onde $c_i = y^T v_i(B)$, para todo $i \in [n]$. Assim, quase certamente

$$\|By - kqy\|^2 = \sum_{i\in[n]} c_i^2 (kq - \lambda_i)^2 \geq \left(kq - (1+o(1))2\sqrt{pqn}\right)^2 \sum_{i>1} c_i^2,$$

onde a desigualdade segue do Teorema 6.1.2. Defina $\delta := c_2 v_2(B) + \cdots + c_n v_n(B)$. Usando as duas desigualdades obtidas acima, uma vez que $kq \geq (2+c)\sqrt{pqn}$, com $c > 1$, quase certamente

$$\|\delta\|^2 \leq \frac{(1+o(1))pqn}{\left(kq - (1+o(1))2\sqrt{pqn}\right)^2} \leq (1+o(1))\frac{1}{c^2} \leq \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 1/c^2$. Assim, segue que quase certamente

$$(v_1(B)^T y)^2 = c_1^2 = \|y\|^2 - \|\delta\|^2 \geq 1 - \epsilon;$$

e portanto quase certamente

$$(1+o(1))pqn \geq \|By - kqy\|^2 \geq c_1^2(\lambda_1 - kq)^2 \geq (1-\epsilon)(\lambda_1 - kq)^2.$$

Enfim, tomando $\epsilon < 1$ e rearranjando os termos tem-se que quase certamente

$$(\lambda_1 - kq)^2 \leq (1+o(1))\frac{1}{1-\epsilon} pqn \leq \alpha pqn,$$

para todo $\alpha > 1/(1-\epsilon)$; e então pode-se concluir que quase certamente

$$|\lambda_1 - kq| \leq \sqrt{\alpha pqn}.$$ □

Seguindo uma abordagem semelhante, vê-se que o maior autopar de A_p (e, por conseguinte, o maior de A), está próximo de (np, x).

Teorema 6.2.10. *Se $k = o(n)$ e $kq \geq (2+c)\sqrt{pqn}$, para algum $c > 1$, então*

- *Quase certamente, $(1 - o(1))np \leq \lambda_1(A_p) \leq (1+o(1))np$; e*
- *Quase certamente, $x^T v_1(A_p) \geq 1 - o(1)$.*

Prova. Por entrelaçamento (Teorema 5.1.1), pode-se afirmar que $\lambda_1(A_p) \leq np + \lambda_1(B)$. Usando o Teorema 6.2.9 e o fato que $k = o(n)$, segue que quase certamente

$$\lambda_1(A_p) \leq np + \lambda_1(B) = (1+o(1))np.$$

Além disso, usando o Teorema de Rayleigh–Ritz (Teorema 3.2.2), sabe-se que

$$S := x^T A_p x \leq v_1^T A_p v_1 = \lambda_1(A_p).$$

Decomponha S da seguinte maneira.

$$S = \frac{1}{n} \sum_{(i,j)\in[n]^2} A_{i,j} = \frac{1}{n}\left(\sum_{(i,j)\in K^2} A_{i,j} + \sum_{(i,j)\in[n]^2\setminus K^2} A_{i,j} \right) = \frac{k^2 + M + 2N}{n},$$

onde M é a soma dos elementos correspondentes a laços fora de K, enquanto N é a soma dos correspondentes a arestas comuns com extremidade fora de K.

Naturalmente, $M \sim B(n-k, p)$ e $N \sim B(\binom{n}{2} - \binom{k}{2}, p)$. Por cotas de Chernoff (Teorema 2.4.3),

$$\mathbb{P}\big(M < (n-k)p - \sqrt{n \log n}\big) < e^{-2\log n}; \text{ e}$$
$$\mathbb{P}\left(N < \left(\binom{n}{2} - \binom{k}{2}\right)p - n\sqrt{\log n}\right) < e^{-4\log n}.$$

Usando uma cota da união, como $k = o(n)$, pode-se então afirmar que quase certamente

$$\begin{aligned} S = \frac{k^2 + M + 2N}{n} &\geq \frac{1}{n}\left(k^2 + (n-k)p - \sqrt{n\log n} + 2\left(\binom{n}{2} - \binom{k}{2}\right)p - 2n\sqrt{\log n}\right) \\ &= (1 - o(1))np. \end{aligned}$$

Usando a descrição de A_p em termos de B, vê-se que

$$\lambda_1(A_p) = \|A_p v_1(A_p)\| = \|(B + np\, xx^T)v_1(A_p)\| \leq \rho_B + np\, x^T v_1(A_p).$$

Rearranjando os termos, vale que $x^T v_1(A_p) \geq (\lambda_1(A_p) - \rho_B)/(np)$. Pelo Teorema 6.2.4 e pelo Teorema 6.2.9 tem-se que tanto $\rho_{B,2,n}$ quanto $|\lambda_1(B)|$ são $o(n)$, enquanto foi demonstrado que $\lambda_1(A_p) \geq (1 - o(1))np$. Segue que $\rho_B = o(n)$; e assim $x^T v_1(A_p) \geq 1 - o(1)$. □

Enfim, do Teorema 6.2.10 segue o seguinte corolário quanto ao maior autopar de A.

Corolário 6.2.11. *Se $k = o(n)$ e $kq \geq (2+c)\sqrt{pqn}$, para algum $c > 1$, então*

- *Quase certamente, $(1 - o(1))np \leq \lambda_1(A) + p \leq (1 + o(1))np$; e*
- *Quase certamente, $x^T v_1(A) \geq 1 - o(1)$.*

6.2.3 O Segundo Maior Autopar de $G(n, p, k)$

Resgatando a intuição da seção anterior, o vetor $z := y - \sqrt{k/n}\, x$ é tal que $A_p z = Bz$; e como (kq, y) se aproxima do maior autopar de B, espera-se que (kq, z) se aproxime de algum autopar de A_p. Pode-se confirmar mais especificamente que (kq, z) se aproxima do segundo maior autopar de A_p (e, por conseguinte, de A) aplicando novamente a abordagem usada por Alon–Krivelevich–Sudakov [AKS98], como mostra a prova do seguinte teorema.

Teorema 6.2.12. *Se $k = O(\sqrt{n \log n})$ e $kq \geq (c+2)\sqrt{pqn}$, para algum $c > 1$, então para todo $1/c^2 < \epsilon < 1$ e todo $\alpha > 1/(1-\epsilon)$,*

- *Quase certamente, $|\lambda_2(A_p) - kq| \leq \sqrt{\alpha pqn}$; e*
- *Quase certamente, $(v_2(A_p)^T z)^2 \geq 1 - \epsilon$.*

Prova. Das definições de A_p e de z sabe-se que $A_p z = Bz$. Primeiramente, considere calcular o valor de $\|A_p z - kqz\|^2 = \|Bz - kqz\|^2$. Por definição, é verdade que

$$(Bz - kqz)_i = \big((B - kqI)(y - \sqrt{k/n}\, x)\big)_i = \begin{cases} -\big((n-k)q + kZ_i\big)/(n\sqrt{k}), \text{ se } i \in K; \text{ e} \\ \big((n-k)Y_i - kZ_i - k^2 q\big)/(n\sqrt{k}), \text{ se } i \notin K, \end{cases}$$

onde $Z_i \sim B(n-k, p) - (n-k)p$, se $i \in K$; $Z_i \sim B(n-k-1, p) - (n-k-1)p$, se $i \notin K$; e $Y_i \sim B(k, p) - kp$. Por cotas de Chernoff (Teorema 2.4.3), vale que

$$\mathbb{P}(|Y_i| \leq \sqrt{k \log k}) \geq 1 - 2e^{-2\log k}; \text{ e}$$
$$\mathbb{P}(|Z_i| \leq \sqrt{n \log n}) \geq 1 - 2e^{-2\log n}.$$

Dessa forma, para os $i \in K(G)$, segue que quase certamente

$$\begin{aligned} \sum_{i \in K} ((Bz - kqz)_i)^2 &\leq k \frac{\big((n-k)q + k\sqrt{n \log n}\big)^2}{n^2 k} \\ &= \frac{(n-k)^2 q^2 - 2k(n-k)q\sqrt{n\log n} + k^2 n \log n}{n^2} = o(n). \end{aligned}$$

Para $i \notin K$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i \notin K} ((Bz - kqz)_i)^2 = S_1 + S_2 + S_3, \text{ onde } S_1 &:= \frac{1}{n^2 k} \sum_{i \notin K} (-kZ_i - k^2 q)^2, \\ S_2 &:= \frac{1}{n^2 k} \sum_{i \notin K} 2(n-k) Y_i (-kZ_i - k^2 q), \\ S_3 &:= \frac{1}{n^2 k} \sum_{i \notin K} (n-k)^2 Y_i^2. \end{aligned}$$

Pelas cotas de Chernoff obtidas, segue que quase certamente

$$S_1 = O\Big(\frac{(n-k)n^2(\log n)^2}{n^2 k}\Big) = o(n); \text{ e}$$
$$S_2 = O\Big(\frac{(n-k)^2\sqrt{k \log k}\, n \log n}{n^2 k}\Big) = o(n).$$

Enfim, resta verificar que $S_3 = (1 + o(1))pqn$. Para isso, a desigualdade de Chebyshev (Teorema 2.4.2) será usada para estimar $Y := \sum_{i \notin K} Y_i^2$. A média e a variância de cada um desses Y_i correspondem, respectivamente, ao segundo e quarto momentos centrais da distribuição $B(k, p)$, os quais são pqk e $O(k^2)$. Além disso, os Y_i de Y são todos independentes entre si. Segue que a esperança de Y é a soma $\mu := pqk(n-k)$ dessas esperanças, enquanto a sua variância é a soma das variâncias $O(k^2(n-k))$. Pela desigualdade de Chebyshev (Teorema 2.4.2), tem-se que

$$\mathbb{P}(|Y - \mu| \geq \sqrt{\mu k \log k}) \leq o(1);$$

e então quase certamente $S_3 \leq (n-k)^2(1 + o(1))\mu/(n^2 k) = (1 + o(1))pqn$. Dessa forma, conclui-se que $\|A_p z - kqz\|^2 \leq (1 + o(1))pqn$.

Decompondo $z = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$, segue que

$$\|A_p z - kqz\|^2 = \sum_{i \in [n]} c_i^2 (kq - \lambda_i)^2 \geq (kq - (1 + o(1))2\sqrt{pqn})^2 \sum_{i \neq 2} c_i^2,$$

onde a desigualdade vale quase certamente, seguindo do Teorema 6.2.6 e do Teorema 6.2.10, após descartar o termo referente a λ_2. Tomando $\delta := z - c_2 v_2$ e usando as duas desigualdades obtidas quanto a $\|A_p z - kqz\|^2$, como $kq \geq (2+c)\sqrt{pqn}$, com $c > 1$, vê-se então que quase certamente

$$\|\delta\|^2 = \sum_{i \neq 2} c_i^2 \leq \frac{(1+o(1))pqn}{(kq - (1+o(1))2\sqrt{pqn})^2} \leq (1+o(1))\frac{1}{c^2} \leq \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 1/c^2$. Assim, segue que quase certamente

$$(v_2(A_p)^T z)^2 = c_2^2 = \|z\|^2 - \|\delta\|^2 \geq 1 - \epsilon;$$

e portanto quase certamente

$$(1+o(1))pqn \geq \|Az - kqz\|^2 \geq c_2^2(\lambda_2 - kq)^2 \geq (1-\epsilon)(\lambda_2 - kq)^2.$$

Enfim, tomando $\epsilon < 1$ e rearranjando os termos obtém-se

$$(\lambda_2 - kq)^2 \leq (1+o(1))\frac{1}{1-\epsilon}pqn \leq \alpha pqn,$$

para todo $\alpha > 1/(1-\epsilon)$; e então conclui-se que quase certamente

$$|\lambda_2 - kq| \leq \sqrt{\alpha pqn}. \qquad \square$$

Enfim, do Teorema 6.2.12 segue o seguinte corolário quanto ao segundo maior autopar de A.

Corolário 6.2.13. *Se $k = O(\sqrt{n \log n})$ e $kq \geq (c+2)\sqrt{pqn}$, para algum $c > 1$, então para todo $\epsilon > 1/c^2$ e todo $\alpha > 1/(1-\epsilon)$, então*

- *Quase certamente, $|\lambda_2(A) - kq + p| \leq \sqrt{\alpha pqn}$; e*
- *Quase certamente, $(v_2(A)^T z)^2 \geq 1 - \epsilon$.*

Capítulo 7

Discussão e Considerações Finais

No presente trabalho, a constatação de que a matriz de adjacência A do grafo com clique plantada pode ser vista como o resultado de sucessivas atualizações de posto um sobre uma matriz de Wigner com submatriz anulada permitiu observar como é natural a estreita relação entre o espectro de A com o semicírculo de Wigner, o vetor indicador da clique $\mathbb{1}_K$ e o vetor todos-um $\mathbb{1}$, oferecendo uma explicação para os fenômenos observados por Alon–Krivelevich–Sudakov [AKS98] e por Nadakuditi [Nad12].

Em particular, foi possível ver que tal relação é bastante explícita na variante com laços dessa distribuição, na qual A pode ser descrita diretamente como sendo a soma de uma matriz de Wigner com submatriz anulada e duas matrizes de posto um: Uma relacionada a $\mathbb{1}_K$ e outra relacionada a $\mathbb{1}$. Ademais, também foi possível observar que a matriz $B = A - p\,\mathbb{1}\mathbb{1}^T$, também estudada no presente trabalho, é melhor comportada.

Sob tais considerações, mostrou-se que, em ambas as variantes, com $k = o(n)$, a distribuição do espectro de B com exceção de seu maior autovalor se aproxima quase certamente do semicírculo de Wigner; e o mesmo ocorre com a distribuição do espectro de A com exceção de seus dois maiores autovalores. Além disso, foi mostrado que se kq está separado o suficiente do semicírculo, então o maior autopar de B e o segundo maior autopar de A estão ambos próximos de $(kq, \mathbb{1}_K/\sqrt{k})$. Em especial, para a variante sem laços mostrou-se que esse é o caso quando $kq \geq (c+2)\sqrt{pqn}$, para $c > 1$ constante.

Observando-se que quase certamente A e B apresentam em seus espectros um semicírculo de suporte próximo a $(-2\sqrt{pqn}, 2\sqrt{pqn})$, as cotas apresentadas no presente trabalho tornam-se muito brandas à medida que a distância de kq ao suporte do semicírculo decresce aproximando-se de $\sqrt{pqn}$. Uma indagação natural é a de que características espectrais interessantes são observáveis em $G(n, p, k)$ para valores de kq menores. É possível extrair informações quanto à clique plantada a partir das propriedades espectrais do $G(n, p, k)$ considerando-se valores de kq mais próximos do suporte do semicírculo?

Além da separação entre kq e o semicírculo, pode-se também considerar o impacto causado pelas atualizações de posto um sobre os autovetores da matriz de Wigner com submatriz anulada. Por resultados como os apresentados em O'Rourke–Vu–Wand [OVW16], sabe-se que para uma classe abrangente de matrizes de Wigner os autovetores comportam-se como se distribuídos uniformemente na esfera unitária (um fenômeno chamado *delocalização*). É natural esperar que o mesmo comportamento seja encontrado em matrizes de Wigner com submatriz anulada quando $k = o(n)$. Considerando-se que o efeito de atualizações de posto um sobre os autovetores de matrizes simétricas é conhecido (veja [BNS78]), é possível que informação relacionada à clique plantada seja observável nas distribuições dos autovetores de A e de B.

Talvez também seja interessante estudar características espectrais de grafos aleatórios com subgrafos aleatórios plantados: Aqueles em que sorteia-se uniformemente um k-conjunto K dentre n vértices e os torna um $G(k, p_i)$, adicionando as arestas fora de K com probabilidade p_o. Espera-se que para regimes em que a densidade do subgrafo plantado seja maior tais grafos apresentem resultados semelhantes aos encontrados no presente trabalho.

Referências Bibliográficas

[AAK$^+$07] Noga Alon, Alexandr Andoni, Tali Kaufman, Kevin Matulef, Ronitt Rubinfeld e Ning Xie. Testing k-wise and almost k-wise independence. Em *Proceedings of the 39th ACM Symposium on Theory of Computing*, páginas 496–505. ACM, New York, 2007. 2

[Abb17] Emmanuel Abbe. Community detection and stochastic block models: recent developments. *Journal of Machine Learning Research*, 18:Paper No. 177, 86, 2017. 2

[AGZ10] Greg W. Anderson, Alice Guionnet e Ofer Zeitouni. *An introduction to random matrices*, volume 118 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. 13

[AK97] Noga Alon e Nabil Kahale. A spectral technique for coloring random 3-colorable graphs. *SIAM Journal on Computing*, 26(6):1733–1748, 1997. 2

[AKS98] Noga Alon, Michael Krivelevich e Benny Sudakov. Finding a large hidden clique in a random graph. Em *Proceedings of the 8th International Conference on Random Structures & Algorithms*, volume 13, páginas 457–466, 1998. 2, 3, 37, 39, 42, 44, 47

[AS16] Noga Alon e Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, quarta edição, 2016. 6

[BE76] Béla Bollobás e Paul Erdős. Cliques in random graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 80(3):419–427, 1976. 1, 39

[BH92] Ravi Boppana e Magnús M. Halldórsson. Approximating maximum independent sets by excluding subgraphs. *BIT*, 32(2):180–196, 1992. 1

[BNS78] James R. Bunch, Christopher P. Nielsen e Danny C. Sorensen. Rank-one modification of the symmetric eigenproblem. *Numerische Mathematik*, 31(1):31–48, 1978. 27, 47

[Bop87] Ravi B. Boppana. Eigenvalues and graph bisection: An average-case analysis. Em *Proceedings of the 28th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, páginas 280–285. IEEE, 1987. 2

[BR13] Quentin Berthet e Philippe Rigollet. Optimal detection of sparse principal components in high dimension. *The Annals of Statistics*, 41(4):1780–1815, 2013. 2

[BS95] Avrim Blum e Joel Spencer. Coloring random and semi-random k-colorable graphs. *Journal of Algorithms*, 19(2):204–234, 1995. 2

[BS10] Zhidong Bai e Jack W. Silverstein. *Spectral analysis of large dimensional random matrices*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, segunda edição, 2010. 13, 15

[CK01] Anne Condon e Richard M. Karp. Algorithms for graph partitioning on the planted partition model. *Random Structures & Algorithms*, 18(2):116–140, 2001. 2

[CO10] Amin Coja-Oghlan. Graph partitioning via adaptive spectral techniques. *Combinatorics, Probability and Computing*, 19(2):227–284, 2010. 2

[DF86] Martin E. Dyer e Alan M. Frieze. Fast solution of some random NP-hard problems. Em *Proceedings of the 27th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, páginas 331–336. IEEE, 1986. 2

[DGGP14] Yael Dekel, Ori Gurel-Gurevich e Yuval Peres. Finding hidden cliques in linear time with high probability. *Combinatorics, Probability and Computing*, 23(1):29–49, 2014. 2

[Dug14] Shaddin Dughmi. On the hardness of signaling. Em *Proceedings of the 55th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, páginas 354–363. IEEE, 2014. 2

[FK81] Zontán Füredi e János Komlós. The eigenvalues of random symmetric matrices. *Combinatorica*, 1(3):233–241, 1981. 14, 23, 41

[FK00] Uriel Feige e Robert Krauthgamer. Finding and certifying a large hidden clique in a semirandom graph. *Random Structures & Algorithms*, 16(2):195–208, 2000. 2

[FM97] Alan Frieze e Colin J. H. McDiarmid. Algorithmic theory of random graphs. *Random Structures & Algorithms*, 10(1-2):5–42, 1997. 1

[FR10] Uriel Feige e Dorit Ron. Finding hidden cliques in linear time. Em *Proceedings of the 21st International Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms*, páginas 189–203. DMTCS, 2010. 2

[GM75] Geoffrey R. Grimmett e Colin J. H. McDiarmid. On colouring random graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 77:313–324, 1975. 1

[HK11] Elad Hazan e Robert Krauthgamer. How hard is it to approximate the best Nash equilibrium? *SIAM Journal on Computing*, 40(1):79–91, 2011. 2

[Hås99] Johan Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$. *Acta Mathematica*, 182(1):105–142, 1999. 1

[Jac34] Dunham Jackson. A Proof of Weierstrass's Theorem. *American Mathematical Monthly*, 41(5):309–312, 1934. 20

[Jer92] Mark Jerrum. Large cliques elude the metropolis process. *Random Structures & Algorithms*, 3(4):347–359, 1992. 2, 39

[JS98] Mark Jerrum e Gregory B. Sorkin. The Metropolis algorithm for graph bisection. *Discrete Applied Mathematics*, 82(1-3):155–175, 1998. 2

[Kar72] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. Em *Complexity of computer computations*, páginas 85–103. Springer, 1972. 1

[Kuč77] Luděk Kučera. Expected behavior of graph coloring algorithms. Em *Fundamentals of Computation Theory*, volume 56 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 447–451. Springer, 1977. 2

[Kuč95] Luděk Kučera. Expected complexity of graph partitioning problems. *Discrete Applied Mathematics*, 57(2-3):193–212, 1995. 2, 39

[Mat72] David W. Matula. The employee party problem. *Notices of the American Mathematical Society*, 19(2):A–382, 1972. 1, 39

[McS01] Frank McSherry. Spectral partitioning of random graphs. Em *Proceedings of the 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, páginas 529–537. IEEE, 2001. 2, 34

[MV09] Lorenz Minder e Dan Vilenchik. Small clique detection and approximate Nash equilibria. Em *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization*, volume 5687 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 673–685. Springer, 2009. 2

[Nad12] Raj Rao Nadakuditi. On hard limits of eigen-analysis based planted clique detection. Em *Proceedings of the 2012 IEEE Statistical Signal Processing Workshop*, páginas 129–132. IEEE, 2012. 2, 3, 33, 34, 47

[NN12] Raj Rao Nadakuditi e Mark E. J. Newman. Graph spectra and the detectability of community structure in networks. *Physical Review Letters*, 108(18):188701, 2012. 3, 33, 34

[OVW16] Sean O'Rourke, Van Vu e Ke Wang. Eigenvectors of random matrices: a survey. *Journal of Combinatorial Theory*, 144:361–442, 2016. 47

[Par98] Beresford N. Parlett. *The symmetric eigenvalue problem*, volume 20 de *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1998. Corrected reprint of the 1980 original. 11

[Ros10] Sheldon Ross. *A First Course in Probability*. Pearson Prentice Hall, oitava edição, 2010. 6

[Rou21] Tim Roughgarden. *Distributional Analysis*, página 167–188. Cambridge University Press, 2021. 1

[Sta15] Richard P. Stanley. *Catalan numbers*. Cambridge University Press, New York, 2015. 5, 17, 25

[Tur88] Jonathan S. Turner. Almost all k-colorable graphs are easy to color. *Journal of Algorithms*, 9(1):63–82, 1988. 2

[TV14] Terence Tao e Van Vu. Random matrices: the universality phenomenon for Wigner ensembles. Em *Modern aspects of random matrix theory*, volume 72 de *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, páginas 121–172. AMS, 2014. 13

[Vu18] Van Vu. A simple svd algorithm for finding hidden partitions. *Combinatorics, Probability and Computing*, 27(1):124–140, 2018. 2, 34

[WH15] Qinghua Wu e Jin-Kao Hao. A review on algorithms for maximum clique problems. *European Journal of Operational Research*, 242(3):693–709, 2015. 1

[Wig55] Eugene P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Annals of Mathematics (2)*, 62:548–564, 1955. 13, 14, 16, 23

[Wig58] Eugene P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics (2)*, 67:325–327, 1958. 13, 14, 16

[Wil88] James Hardy Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*. Monographs on Numerical Analysis. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1988. Oxford Science Publications. 11

[Zuc07] David Zuckerman. Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. *Theory of Computing*, 3:103–128, 2007. 1