

**Problemas Computacionais  
em  
Teoria Topológica dos Grafos**

Rafael Veiga Pocai

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Ciência da Computação  
Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ferreira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, dezembro de 2015

# Problemas Computacionais em Teoria Topológica dos Grafos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 11/12/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Carlos Eduardo Ferreira (orientador) - IME-USP
- Pos Doc. César Israel Hernández-Vélez - IME-USP
- Prof. Dr. Luerbio Faria - UERJ

# Resumo

POCAI, R. V. **Problemas Computacionais em Teoria Topológica dos Grafos**. 2015. 120 f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

Este trabalho tem por objetivo estudar os problemas computacionais que surgem ao se relacionar grafos com superfícies bidimensionais, dando especial atenção aos problemas do número de cruzamentos mínimo no plano (CROSSING NUMBER) e a problemas relacionados ao desenho de grafos em livros. Apresentamos uma redução do problema MULTICUT para CROSSING NUMBER, além de um resultado de complexidade em grafos de comparabilidade baseado em um resultado conhecido para desenhos em livros.

**Palavras-chave:** número de cruzamentos, algoritmos de aproximação, número de páginas, grafos de comparabilidade, maxcut.



# Abstract

POCAI, R. V. **Computational Problems in Topological Graph Theory**. 2015. 120 f. Dissertation - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

The objective of this text is to study computational problems that emerge from the relation between graphs and bidimensional surfaces, giving special attention to the crossing number problem and graph drawings on books. We present a reduction from MULTICUT to CROSSING NUMBER, in addition to a complexity result on comparability graphs based on a known result about drawings on books.

**Keywords:** crossing number, approximation algorithms, book thickness, comparability graphs, maxcut.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
<b>2 Alguns Resultados Referentes ao Número de Cruzamentos no Plano</b>	<b>7</b>
2.1 Grafos completos e bipartidos completos . . . . .	7
2.2 Limitantes gerais . . . . .	8
2.3 Pesos nas arestas . . . . .	11
2.4 Teorema de Whitney . . . . .	12
<b>3 Calculando o Número Mínimo de Cruzamentos</b>	<b>15</b>
3.1 Valor exato . . . . .	15
3.2 Aproximabilidade . . . . .	17
<b>4 Desenhos em Livros</b>	<b>23</b>
4.1 Limitantes para o número de páginas . . . . .	23
4.2 Complexidade do problema do número de páginas . . . . .	26
4.3 Número de cruzamentos em um livro de $k$ páginas . . . . .	27
4.4 Ordem da espiral restrita . . . . .	30
<b>5 Uma Redução para MAXCUT</b>	<b>35</b>
<b>Conclusão</b>	<b>39</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>41</b>





# Lista de Figuras

1.1	Eliminando cruzamentos em desenhos não bons. . . . .	4
2.1	Desenho ótimo de $K_{5,6}$ com $2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$ cruzamentos. . . . .	8
2.2	Desenho ótimo de $K_8$ com $\frac{1}{4} \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 18$ cruzamentos. . . . .	9
2.3	Construindo $H$ a partir de um desenho $D$ de um grafo $G$ . . . . .	10
2.4	Redesenhando arestas paralelas. . . . .	12
2.5	O 2-corte está destacado em vermelho. . . . .	13
3.1	Considere que a linha mais grossa do desenho deva ser representada sem cruzamentos para que o desenho seja ótimo, e que, em qualquer destes desenhos, a face retangular apresentada esteja sempre presente. Isso pode ser obtido através de uma subdivisão de um grafo planar 3-conexo. Neste caso, a diferença no número de cruzamentos entre o desenho ótimo e o melhor desenho em que todos os cruzamentos envolvem a aresta $e$ pode ser grande. . . . .	16
3.2	Quadro e suas faces . . . . .	18
3.3	Suporte . . . . .	18
3.4	Adicionando suporte . . . . .	18
3.5	Caminho entre $u$ e $v$ cruzando o quadro . . . . .	20
3.6	Componentes de $G - F$ desenhadas nas faces do quadro . . . . .	20
4.1	Desenho sem restrições de $K_5$ em um livro de três páginas. Observe que algumas arestas passam pelas três páginas. . . . .	24
4.2	Desenho em três páginas respeitando as restrições impostas na Definição 5 . . . . .	24
4.3	Arestas em vermelho formam circuito hamiltoniano. . . . .	25
4.4	Triangulação a ser utilizada no desenho de $K_n$ . . . . .	26
4.5	Desenho de $K_6$ em um livro de três páginas. Aqui representamos o desenho em uma página através do desenho no interior de uma circunferência. . . . .	26
4.6	Grafo $H$ construído a partir de $C_5$ . Em vermelho estão as arestas do grafo original. . . . .	28
4.7	Mudança de posição de um dos caminhos ligando $v_i$ a $y$ . . . . .	29
4.8	Diferentes representações de grafos circulares. . . . .	31
4.9	A linha vermelha representa o ponto $p$ . Arcos em azul formam $G_1$ , verdes $G_2$ e amarelos $G_3$ . . . . .	32
5.1	Arestas explícitas do grafo construído a partir da instância $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $S = \{S_1 = \{x_1, x_2\}, S_2 = \{x_1, x_2, x_3\}, S_3 = \{x_3, x_4\}\}$ . Cada aresta em vermelho representa $M$ arestas. . . . .	36

5.2	A aresta em vermelho foi induzida por transitividade através do vértice $z$ . . . . .	37
5.3	Vértices azuis estão em $U$ e vermelhos não. As arestas verdes não pertencem ao corte.	37

# Lista de Tabelas

2.1	Número de cruzamentos de grafos completos e bipartidos completos. . . . .	8
2.2	A região cinza representa os valores de $m$ e $n$ para os quais a Conjectura de Zarankiewicz ainda não foi provada. Em destaque estão os menores grafos nesta situação. . . . .	9
2.3	Limitantes simples para o número de cruzamentos de um grafo $G$ de $n$ vértices e $m$ arestas. . . . .	11



# Introdução

Um dos mais conhecidos problemas que relacionam grafos e superfícies é o problema da planaridade. Kuratowski (Diestel, 2010), em 1930, caracterizou os grafos que podem ser desenhados no plano sem cruzamentos, sendo estes os grafos livres de subdivisões de  $K_5$  e  $K_{3,3}$ .

Apesar de nem todos os grafos poderem ser desenhados no plano sem cruzamentos, podemos nos perguntar qual é o seu “melhor” desenho, donde surgem muitos problemas computacionais, como por exemplo o problema do número mínimo de cruzamentos. Este problema tem aplicações no projeto de circuitos integrados como mostrado por Leighton (1984).

A questão foi introduzida por Turán (1977), inspirado em um problema real pelo qual passou em 1944, quando esteve em um campo de trabalho forçado próximo a Budapeste. Turán trabalhou numa fábrica de tijolos, empurrando carrinhos dos fornos aos armazéns. Os carrinhos circulavam sobre trilhos, e estes ligavam cada forno a cada armazém. O maior transtorno ocorria quando dois trilhos se cruzavam, pois não raramente os tijolos caíam nestes pontos. Isso levou Turán a pensar em qual seria a configuração que ligasse cada forno a cada armazém minimizando os cruzamentos.

O problema da fábrica de tijolos pode ser formalizado como sendo o cálculo do número mínimo de cruzamentos do grafo  $K_{n,m}$  quando desenhado no plano, onde temos  $n$  fornos e  $m$  armazéns. Em 1951, Turán levou o problema a Zarankiewicz (1954), que foi o primeiro a apresentar uma tentativa de solução.

Neste trabalho, também abordamos os problemas relacionados ao desenho de grafos sobre livros. Um livro, neste contexto, é um conjunto de semiplanos fechados unidos pelas bordas. Os semiplanos são chamados de páginas do livro, e suas bordas se unem no lugar onde as páginas são presas ao livro, sendo este chamado de espiral. Tomamos como medidas de qualidade do desenho o número de páginas necessário para desenhar o grafo sem cruzamentos, bem como o número mínimo de cruzamentos em um livro com número fixo de páginas. Vamos também limitar o desenho para que os vértices estejam na espiral e as arestas não a possam cruzar, pois se estas restrições não forem impostas, o problema torna-se mais fácil do que aparenta, como veremos.

Iniciamos com considerações preliminares sobre desenhos e cruzamentos, passando para o desenho de grafos no plano e em seguida em livros. Abordaremos tanto casos em que se conhecem resultados exatos, como algoritmos para buscar desenhos ótimos de grafos gerais e a complexidade computacional envolvida nesta tarefa. Além disso, estudaremos um resultado de complexidade não relacionado a desenhos de grafos, mas obtido a partir do conhecimento prévio deste assunto.



# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo definimos precisamente o que queremos dizer com “desenhos” e “cruzamentos”. As definições aqui apresentadas são inspiradas no trabalho de [Tutte \(1970\)](#). Em todo o texto, usaremos o termo “grafo” para nos referir a grafos conexos que sejam simples, ou seja, não possuam laços ou arestas paralelas. O termo “multigrafo” corresponderá a grafos conexos que podem possuir laços e arestas paralelas.

**Definição 1.** Um **desenho**  $D$  de um grafo  $G = (V, E)$  no plano relaciona cada vértice a um ponto de  $\mathbb{R}^2$  e cada aresta a um arco em  $\mathbb{R}^2$ , de tal forma que:

1. Para todo par de vértices  $u, v \in V$ ,  $D(u) \neq D(v)$ .
2. Para toda aresta  $e = uv \in E$ ,  $D(e)$  é a imagem da função  $g_e$ , em que  $g_e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um homeomorfismo tal que  $g_e(0) = D(u)$ ,  $g_e(1) = D(v)$  e  $\forall w \in V$ ,  $D(w) \notin g_e((0, 1))$ . Ou seja,  $D(e)$  é um caminho que liga os pontos correspondentes a  $u$  e  $v$ , sem passar por nenhum outro vértice.
3. Para todo par de arestas  $e, f \in E$ ,  $D(e)$  intersecta  $D(f)$  em um número finito de pontos.
4. Sejam  $e, f \in E$  arestas tais que o ponto  $p$  está no interior de  $D(e)$  e  $D(f)$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\delta < \epsilon$  e toda bola aberta  $B$  de raio  $\delta$  centrada em  $p$ ,  $D(f)$  intersecta todas as componentes conexas por caminhos de  $B \setminus D(e)$ .
5. Para quaisquer três arestas  $e, f, g \in E$ ,  $D(e) \cap D(f) \cap D(g) = \emptyset$ .

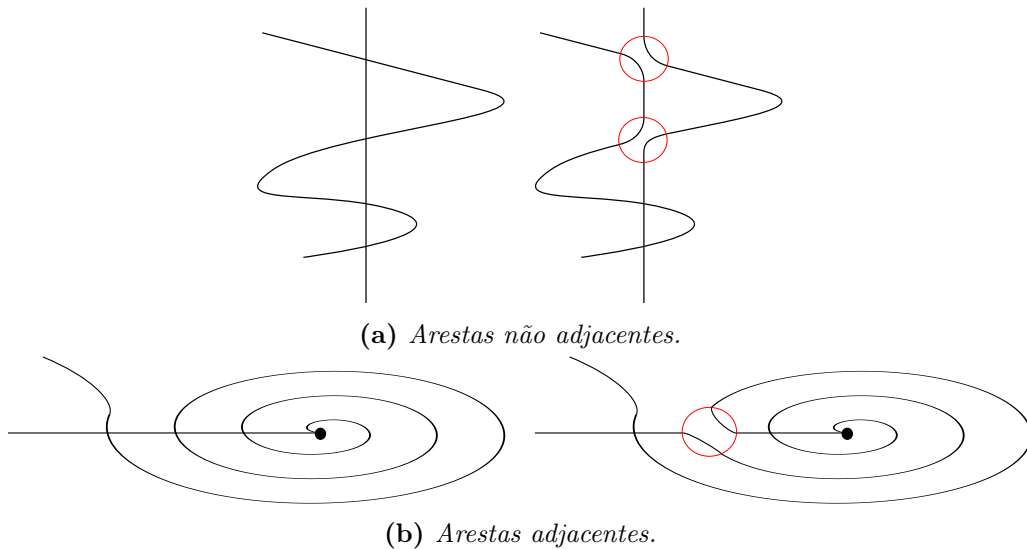
Denotamos por  $D(G)$  o conjunto de pontos  $p \in \mathbb{R}^2$  tais que  $p = D(v)$  para algum vértice  $v \in V$  ou  $p \in D(e)$  para alguma aresta  $e \in E$ .

“Componente conexa por caminhos” refere-se a um subconjunto  $C$  tal que para quaisquer pontos  $x, y \in C$ , existe um arco contido em  $C$  ligando  $x$  a  $y$ . Já quando usamos a expressão “interior de  $D(e)$ ”, estamos nos referindo à imagem de  $(0, 1)$  por  $g_e$ , e não ao conjunto de pontos interiores de  $g_e([0, 1])$  no plano. Este último é um conjunto vazio, pelo fato de  $g_e$  ser um homeomorfismo. Além disso, o desenho de uma aresta  $e$  é fechado, pelo fato de  $g_e$  ser contínua e  $[0, 1]$  ser compacto.

A propriedade do desenho de uma aresta de ser a imagem de um homeomorfismo impede que uma aresta cruze a si mesma. A definição de desenho também impede, através da quarta propriedade, que duas arestas se toquem tangencialmente, sem se cruzar. Já a última propriedade impede que três arestas se cruzem em um mesmo ponto.

**Definição 2.** Sejam  $G$  um grafo e  $D$  um desenho de  $G$ .

- Um **cruzamento** entre duas arestas  $e, f \in E(G)$  no desenho  $D$  é um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$  que está no interior de  $D(e)$  e de  $D(f)$ .
- O número de cruzamentos em  $D$ , denotado por  $cr(D)$ , é a soma do número de cruzamentos entre cada par de arestas.



**Figura 1.1:** *Eliminando cruzamentos em desenhos não bons.*

- No caso em que  $G$  possui pesos nas arestas dados por  $w$ , um cruzamento entre as arestas  $e$  e  $f$  contribui com  $w_e w_f$  no número de cruzamentos, onde  $w_e$  e  $w_f$  são os pesos de  $e$  e  $f$ , respectivamente.
- O mínimo  $cr(D)$  dentre todos os desenhos  $D$  de  $G$  é denotado por  $cr(G)$ . No caso de  $G$  possuir pesos dados por  $w$ , o valor é denotado por  $cr(G, w)$ . Quando não houver ambiguidade, denotamos  $cr(G, w)$  simplesmente por  $cr(G)$ .

No caso de um desenho  $D$  sem cruzamentos, dizemos que as componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus D(G)$  são suas **faces**. Há outras formas de definir cruzamentos e de contá-los. Por exemplo, pode-se contar o número de pares de arestas que se cruzam, desconsiderando múltiplos cruzamentos entre um mesmo par. Podemos também restringir o desenho das arestas a segmentos de reta, chamado de desenho **retilíneo**. O mínimo número de cruzamentos em um desenho retilíneo do grafo  $G$  é denotado por  $\bar{cr}(G)$ .

**Definição 3.** *Um desenho é dito **bom** se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo par de arestas  $e, f \in E$ ,  $e$  e  $f$  se cruzam no máximo uma vez.*
2. *Se as arestas  $e, f \in E$  são incidentes a um mesmo vértice, então elas não se cruzam.*

*Neste texto, diremos que um desenho é **ótimo** se ele minimiza o número de cruzamentos.*

Em grafos sem pesos nas arestas, um desenho com número mínimo de cruzamentos é sempre bom. De fato, no caso da primeira condição estar sendo violada pelas arestas  $e$  e  $f$ , sejam  $p$  e  $q$  dois pontos de cruzamento consecutivos. Podemos então trocar os caminhos percorridos pelas duas arestas entre  $p$  e  $q$ , alterando o desenho apenas em vizinhanças suficientemente pequenas de  $p$  e  $q$  (Figura 1.1a).

Já no caso em que  $e$  e  $f$  violam a segunda condição, seja  $p$  um dos pontos de cruzamento entre elas. Novamente, podemos alterar o desenho em uma pequena vizinhança de  $p$  e trocar os caminhos das duas arestas, evitando que se cruzem (Figura 1.1b).

A vizinhança acima utilizada pode ser tomada como uma bola fechada centrada em  $p$  que não intersecta vértices, outros cruzamentos ou arestas que não passam por  $p$ .

Deve-se observar que as alterações sugeridas para eliminar cruzamentos entre arestas adjacentes ou entre arestas que se cruzam mais de uma vez não podem ser feitas no caso de grafos com pesos nas arestas. Isso porque, se trocarmos os caminhos de duas arestas  $e$  e  $f$  de pesos  $w_e$  e  $w_f$  diferentes, o peso de outros cruzamentos além dos que estão sendo alterados pode mudar, o que faz com que



o número de cruzamentos após a alteração possa subir. Pelsmajer *et al.* (2008) apresentam um exemplo onde este problema ocorre.

Várias definições para desenhos e cruzamentos surgiram durante o estudo deste tema, sendo estas não necessariamente equivalentes. Pach e Tóth (2000) apresentam algumas definições dadas por diferentes autores, bem como relações entre elas.



## Capítulo 2

# Alguns Resultados Referentes ao Número de Cruzamentos no Plano

Neste capítulo apresentamos limitantes superiores e inferiores para o parâmetro  $cr$ , definido no capítulo anterior como o número mínimo de cruzamentos possível em um desenho no plano. Vamos apresentar conjecturas e resultados úteis para os capítulos seguintes.

### 2.1 Grafos completos e bipartidos completos

Em 1951, Turán apresentou seu problema da fábrica de tijolos a Zarankiewicz, que publicou sua “solução” em 1954 (Zarankiewicz, 1954). Neste trabalho, Zarankiewicz apresenta um desenho de  $K_{n,m}$ , conta seus cruzamentos, e “prova” que  $K_{n,m}$  não pode ser desenhado com menos. O desenho proposto é descrito a seguir e exemplificado pela Figura 2.1.

- Considere o plano com coordenadas cartesianas.
- Desenhe os  $n$  vértices da primeira parte sobre os inteiros do eixo  $x$ , entre as posições  $-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  e  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , pulando a posição  $(0, 0)$ .
- Desenhe os  $m$  vértices restantes sobre os inteiros do eixo  $y$ , entre as posições  $-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  e  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ , pulando a posição  $(0, 0)$ .
- Desenhe as arestas como segmentos de reta ligando os pontos correspondentes aos seus vértices.

Zarankiewicz afirmou que

$$cr(K_{n,m}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor, \quad (2.1)$$

que é exatamente o número de cruzamentos do desenho apresentado acima. Observe também que este desenho é retilíneo, ou seja, estabelece um limitante superior também para  $\bar{cr}(K_{n,m})$ .

Contudo, Ringel e Kainen (Guy, 1969) encontraram erros na prova do limitante inferior. A afirmação de que (2.1) vale ficou conhecida como Conjectura de Zarankiewicz (1954), e está em aberto até hoje. Alguns casos especiais foram provados, como para  $n, m \leq 6$  (Guy, 1969), para  $n = 3$  e  $m$  qualquer por Zarankiewicz, para  $n = 5$  e  $m$  qualquer por Kleitman (1970) e para  $n = 7$  e  $7 \leq m \leq 10$  por Woodall (1993). Kleitman (1976) também observou que, se a conjectura vale para  $K_{2n-1,m}$ , então também vale para  $K_{2n,m}$ , o que implica que temos apenas de procurar por contra-exemplos em que  $n$  e  $m$  são ambos ímpares.

Para o caso de  $K_n$ , também não se sabe o valor exato de  $cr(K_n)$  para todo  $n$ . Guy (1960) conjecturou que

$$cr(K_n) = \frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor. \quad (2.2)$$

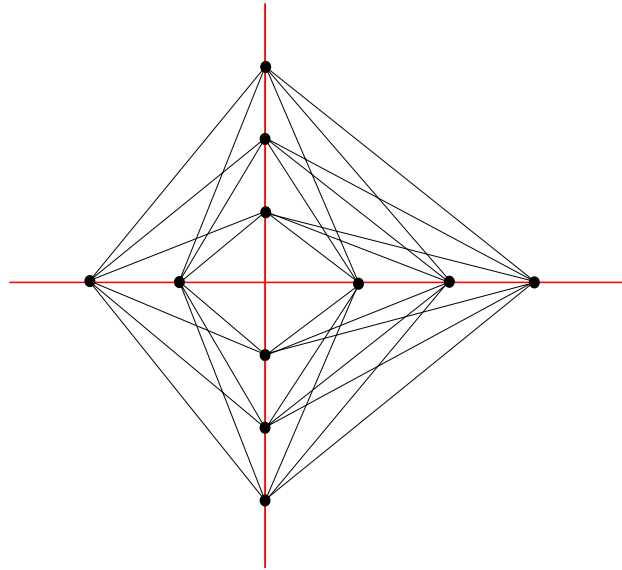


Figura 2.1: Desenho ótimo de  $K_{5,6}$  com  $2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$  cruzamentos.

	Limitante superior	Valores ótimos
$\mathbf{K}_{n,m}$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ Zarankiewicz (1954)	$n, m \leq 6$ Guy (1969) $n = 3$ Zarankiewicz (1954) $n = 5, 6$ Kleitman (1970) $n = 7, 8$ e $7 \leq m \leq 10$ Woodall (1993)
$\mathbf{K}_n$	$\frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ Blažek e Koman (1964)	$n \leq 10$ Guy (1972) $n \leq 12$ Pan e Richter (2007)

Tabela 2.1: Número de cruzamentos de grafos completos e bipartidos completos.

A conjectura foi provada válida pelo próprio Guy (1972) para  $n \leq 10$ , e para  $n \leq 12$  por Pan e Richter (2007) utilizando o computador. Posteriormente, McQuillan e Richter (2015) eliminaram o uso do computador na prova para uma classe de desenhos de  $K_{11}$ . McQuillan *et al.* (2015) investigaram o caso  $n = 13$ , mostrando que  $\text{cr}(K_{13}) \in \{219, 221, 223, 225\}$ . É sabido que (2.2) é um limitante superior válido (Blažek e Koman, 1964), fato demonstrado pela construção descrita a seguir:

- Assuma  $n = 2m$ .
- Desenhe  $m$  vértices sobre a circunferência de raio 1 e  $m$  vértices sobre a de raio 2, ambas centradas na origem, distribuindo-os de forma homogênea sobre as circunferências.
- Ligue os vértices internos por segmentos de reta, e os externos por curvas que passam somente por fora do círculo de raio 2 de forma a respeitar as restrições de um desenho bom.
- Ligue os vértices internos e externos pelo caminho mais curto.
- Para  $n = 2m - 1$ , faça a construção para  $2m$  e remova um vértice.

A Figura 2.2 exemplifica o desenho que leva à Conjectura de Guy. A Tabela 2.1 resume os resultados conhecidos para grafos completos e bipartidos completos, enquanto a Tabela 2.2 apresenta graficamente os resultados conhecidos para a Conjectura de Zarankiewicz.

## 2.2 Limitantes gerais

Apresentamos agora limitantes baseados apenas na quantidade de arestas. Para tanto, considere primeiramente um grafo planar  $G_p$  de  $n$  vértices e  $m \geq 3$  arestas. Para todo desenho  $D$  de  $G_p$  no

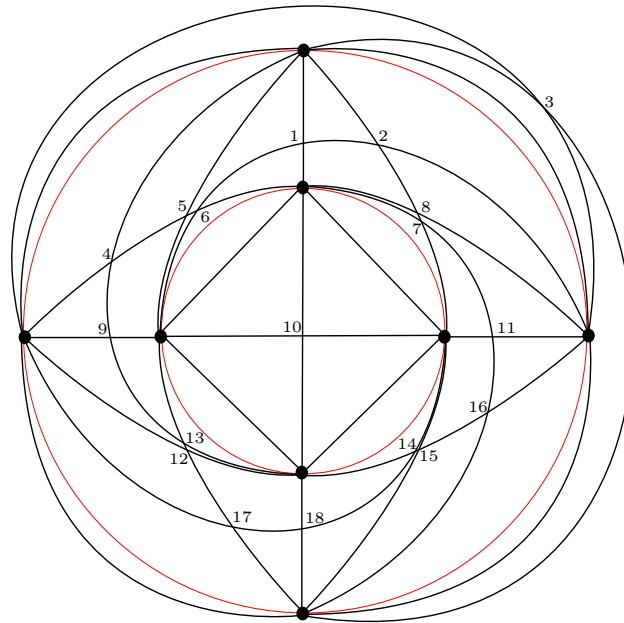
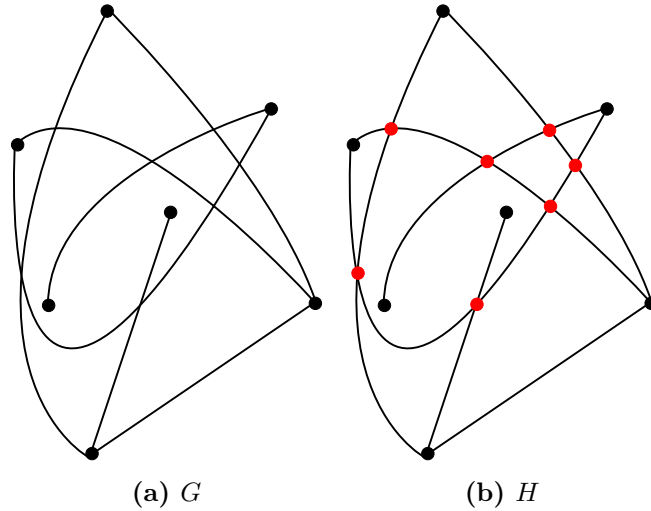


Figura 2.2: Desenho ótimo de  $K_8$  com  $\frac{1}{4} \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 18$  cruzamentos.

$m \ n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1	Grafos planares												
2													
3	Zarankiewicz (1954)												
4													
5	Kleitman (1970)												
6													
7	Woodall (1993)									$K_{7,11}$			
8													
9	$K_{11,7}$							$K_{9,9}$					
10													
11													
12													
⋮													

Tabela 2.2: A região cinza representa os valores de  $m$  e  $n$  para os quais a Conjectura de Zarankiewicz ainda não foi provada. Em destaque estão os menores grafos nesta situação.



**Figura 2.3:** Construindo  $H$  a partir de um desenho  $D$  de um grafo  $G$ .

plano sem cruzamentos, vale a igualdade

$$n - m + f = 2, \quad (2.3)$$

conhecida como fórmula de Euler (Diestel, 2010, capítulo 4), onde  $f$  é o número de faces do desenho, ou seja, o número de componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus D(G_p)$ . Cada face de  $D(G_p)$  é delimitada por pelo menos três arestas, e cada aresta está na fronteira de no máximo duas faces. Portanto, temos que vale

$$f \leq \frac{2m}{3}. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), obtemos

$$m \leq 3n - 6 \leq 3n. \quad (2.5)$$

Tome agora um grafo qualquer  $G$  de  $n$  vértices e  $m$  arestas, e  $D$  um desenho de  $G$ . Seja  $H$  o grafo obtido a partir do desenho  $D$  de  $G$  adicionando um vértice para cada cruzamento em  $D$ , dividindo as arestas envolvidas e ligando no novo vértice (veja Figura 2.3).

Observamos que  $|E(H)| = m + 2\text{cr}(D)$  e  $|V(H)| = n + \text{cr}(D)$ .  $H$  é planar, e portanto respeita (2.5), o que implica que  $m + 2\text{cr}(D) \leq 3(n + \text{cr}(D))$ , ou seja,  $\text{cr}(D) \geq m - 3n$ . Como  $G$  e  $D$  foram escolhidos arbitrariamente, temos então que para qualquer grafo  $G$  e qualquer desenho  $D$  de  $G$ , vale  $\text{cr}(D) \geq m - 3n$ .

Este limitante ainda pode ser aprimorado através de uma análise probabilística. Considere um grafo  $G$  qualquer,  $D$  um desenho bom de  $G$ ,  $U \subset V(G)$  escolhido uniformemente, de forma que cada vértice  $v \in V(G)$  está em  $U$  independentemente dos outros e com probabilidade  $p$ ,  $J = G[U]$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $U$ , e  $d'$  o desenho de  $J$  dado pela restrição de  $D$  a  $J$ . Vale que

$$\begin{aligned} \text{cr}(d') &\geq |E(J)| - 3|V(J)| \implies \\ \mathbb{E}(\text{cr}(d')) &\geq \mathbb{E}(|E(J)|) - 3\mathbb{E}(|V(J)|). \end{aligned}$$

Note que cada aresta de  $G$  pertence a  $E(J)$  com probabilidade  $p^2$ , pois uma aresta de  $G$  está em  $J$  se e somente se ambos os seus vértices também estão. Já cada cruzamento de  $D$  está em  $d'$  com probabilidade  $p^4$ , pois um cruzamento de  $D$  aparece em  $d'$  se e somente se as duas arestas envolvidas estão em  $J$ , e como o desenho  $D$  é bom, as probabilidades das arestas estarem em  $J$  são independentes. Como os vértices entram ou não em  $U$  independentemente, por linearidade da

<b>Limitantes inferiores</b>	$\text{cr}(G) \geq m - 3n$ $\text{cr}(G) \geq \frac{1}{29} \frac{m^3}{n^2}$	Ackerman (2013)
<b>Limitantes superiores</b>	$\text{cr}(G) \leq m^2 \leq n^4$ $\text{cr}(G) \leq \text{cr}(K_n) \leq \frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$	Blažek e Koman (1964)

**Tabela 2.3:** Limitantes simples para o número de cruzamentos de um grafo  $G$  de  $n$  vértices e  $m$  arestas.

esperança obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \text{cr}(D)p^4 &\geq \frac{m^2}{p} - \frac{3n}{p} \implies \\ \text{cr}(D) &\geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}. \end{aligned}$$

Esta desigualdade vale para qualquer escolha de probabilidade  $p$ . Em especial, tome  $p = \frac{9n}{2m}$ , assumindo que  $m \geq \frac{9n}{2}$ . Observando que esta desigualdade vale para todo desenho bom  $D$  de  $G$ , temos:

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{60.75} \frac{m^3}{n^2}. \quad (2.6)$$

A desigualdade (2.6) é conhecida como *Crossing Lemma*, e foi apresentada primeiramente por Ajtai *et al.* (1982) e independentemente por Leighton (1983). Ackerman (2013) mostrou que a constante pode ser melhorada para  $\frac{1}{29}$ .

Para um limitante superior simples em grafos quaisquer, podemos dispor os vértices sobre a circunferência de raio unitário, ligando os vértices adjacentes por linhas retas. Este desenho é retilíneo, e além disso cada par de arestas cruza no máximo uma vez. Assim, temos que para todo grafo  $G$  sem pesos nas arestas vale  $\text{cr}(G) \leq \bar{\text{cr}}(G) \leq |E(G)|^2 \leq |V(G)|^4$ .

Com os limitantes superiores e inferiores apresentados, podemos concluir sobre o comportamento assintótico de grafos completos e bipartidos completos que ambos crescem quadraticamente com o número de arestas, ou seja,  $\text{cr}(K_n) = \Theta(n^4)$  e  $\text{cr}(K_{n,n}) = \Theta(n^4)$ . Para tanto, observe que (2.6) implica que

$$\text{cr}(K_n) = \Omega\left(\frac{\binom{n}{2}^3}{n^2}\right) = \Omega\left(\frac{(n^2)^3}{n^2}\right) = \Omega(n^4)$$

e

$$\text{cr}(K_{n,n}) = \Omega\left(\frac{(n^2)^3}{(2n)^2}\right) = \Omega\left(\frac{(n^2)^3}{n^2}\right) = \Omega(n^4).$$

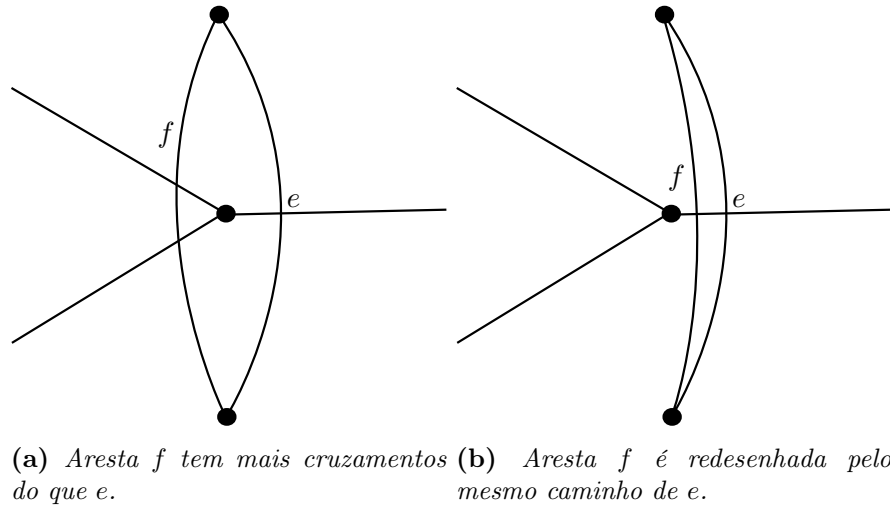
Sintetizamos os limitantes desta seção na Tabela 2.3.

## 2.3 Pesos nas arestas

Para facilitar a especificação de grafos, utilizamos pesos nas arestas ao invés de considerar multigrafos com muitas arestas paralelas. As arestas de peso unitário são chamadas **leves**, e as restantes de **pesadas**. Ocorre que se substituirmos as arestas com pesos por um número correspondente de arestas paralelas, o parâmetro  $\text{cr}$  não se altera.

**Lema 1.** *Seja  $G$  um grafo com pesos inteiros  $w$  nas arestas, e  $G'$  um multigrafo tal que  $V(G') = V(G)$  e para qualquer par de vértices  $u, v \in V(G')$ ,  $u$  e  $v$  são ligados por  $w_{uv}$  arestas em  $G'$  se e somente se são ligados por uma aresta de peso  $w_{uv}$  em  $G$ . Então,  $\text{cr}(G, w) = \text{cr}(G')$ .*

*Demonstração.* ( $\text{cr}(G, w) \geq \text{cr}(G')$ ) Podemos transformar um desenho de  $G$  em um desenho de  $G'$  com o mesmo número de cruzamentos, substituindo cada aresta  $e$  em  $G$  por  $w_e$  arestas paralelas de peso unitário. Para cada cruzamento de  $e$  com  $f$  no desenho de  $G$ , haverá  $w_e w_f$  cruzamentos no desenho correspondente de  $G'$ , e portanto  $\text{cr}(G') \leq \text{cr}(G, w)$ .



**Figura 2.4:** Redesenhando arestas paralelas.

(  $\text{cr}(G, w) \leq \text{cr}(G')$  ) Primeiramente observamos que  $G'$  tem um desenho ótimo em que quaisquer duas arestas paralelas  $e$  e  $f$  cruzam as mesmas arestas. Para provar esta afirmação, seja  $D$  um desenho ótimo de  $G'$ ,  $e, f \in E(G')$  arestas paralelas e  $\text{cr}_D(h)$  o número de cruzamentos de  $h$  em  $D$ , para qualquer aresta  $h \in E(G')$ . Temos que  $\text{cr}_D(e) = \text{cr}_D(f)$ , pois caso  $\text{cr}_D(e) < \text{cr}_D(f)$ , poderíamos redesenhar  $f$  paralelamente a  $e$ , e obteríamos um desenho com menos cruzamentos do que o ótimo (Figura 2.4). Logo, para qualquer conjunto de arestas paralelas  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , podemos redesenhar as arestas  $e_2, \dots, e_k$  paralelamente a  $e_1$ , e o número de cruzamentos não será alterado.

Dado um tal desenho ótimo de  $G'$ , obtemos um desenho de  $G$  substituindo cada conjunto de arestas paralelas  $e_1, \dots, e_k$  de  $G'$  por uma única aresta  $e$  de peso  $k$ . O desenho de  $G$  com pesos  $w$  assim gerado terá o mesmo número de cruzamentos do desenho de  $G'$ , e portanto  $\text{cr}(G, w) \leq \text{cr}(G')$ .  $\square$

Para obter um grafo  $G''$  a partir do multigrafo  $G'$  gerado pelo Lema 1, podemos substituir cada aresta por um caminho de comprimento dois. Claramente, temos que  $\text{cr}(G'') = \text{cr}(G')$ . Assim, para qualquer grafo  $G$  com pesos  $w$ , podemos obter um grafo  $G''$  sem pesos tal que  $\text{cr}(G'') = \text{cr}(G, w)$ . Se os pesos de  $G$  forem limitados polinomialmente no seu tamanho, então  $G''$  pode ser construído em tempo polinomial.

## 2.4 Teorema de Whitney

Um resultado importante sobre grafos planares, que será utilizado na próxima seção, é o Teorema de Whitney (Diestel, 2010, capítulo 4). Este teorema determina a unicidade de desenhos sem cruzamentos em grafos planares 3-conexos. Um grafo  $G$  é **3-conexo** se possuir pelo menos quatro vértices e se para qualquer par de vértices  $u, v \in V(G)$ ,  $G - u - v$  for conexo. Dizemos que dois desenhos sem cruzamentos são **equivalentes** se suas faces são definidas pelos mesmos circuitos.

**Teorema 1** (Whitney). *Se  $G$  é um grafo planar 3-conexo, então  $G$  possui um único desenho sem cruzamentos no plano, a menos de equivalências.*

*Demonstração(esboço).* Como  $G$  é, em especial, 2-conexo, todas as faces de seus desenhos são delimitadas por ciclos (Diestel, 2010, capítulo 4). Assuma que existem dois desenhos sem cruzamentos  $D_1$  e  $D_2$  de  $G$ , que o ciclo  $C$  seja fronteira de uma face em  $D_1$  mas não em  $D_2$ . Como  $C$  não delimita face em  $D_2$ , então  $G - C$  possui pelo menos duas componentes conexas,  $G_1$  e  $G_2$ . Observando agora o desenho  $D_1$ , podemos encontrar um 2-corte, como mostra a Figura 2.5.  $\square$

Observamos ainda que este teorema vale também para subdivisões de grafos 3-conexos.



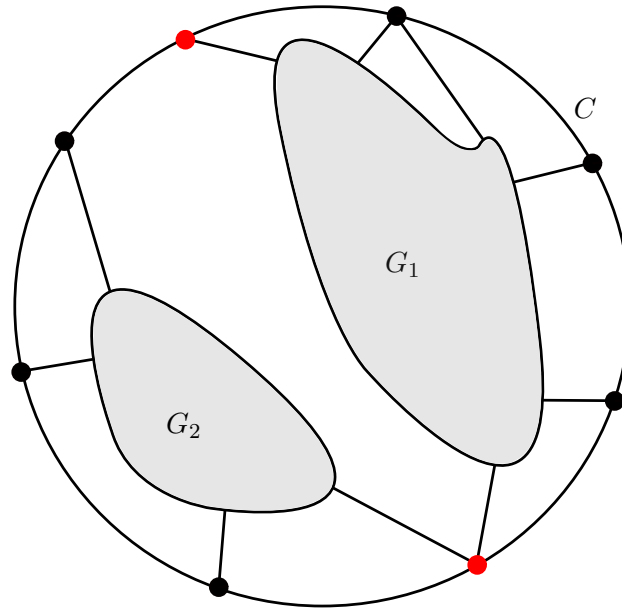


Figura 2.5: O 2-corte está destacado em vermelho.

**Corolário 1.** Se  $G$  é um grafo planar 3-conexo e  $G'$  uma subdivisão de  $G$ , então  $G'$  possui um único desenho sem cruzamentos no plano, a menos de equivalências.

*Demonstração.* Seja  $v \in V(G')$  um vértice tal que  $G' - v$  é desconexo. Se  $v \in V(G)$ , então  $G$  não seria 3-conexo. Já se  $v$  subdivide a aresta  $xy$  de  $G$ , então não haveria outro caminho ligando  $x$  a  $y$  senão a aresta  $xy$ , o que também contradiz o fato de  $G$  ser 3-conexo. Logo,  $G'$  é 2-conexo, e portanto todas as faces de seus desenhos são delimitadas por ciclos.

Assuma que  $G'$  possui um ciclo  $C'$  e desenhos sem cruzamentos  $D'_1$  e  $D'_2$  tais que  $C'$  delimita uma face em  $D'_1$  mas não em  $D'_2$ . Se  $C$  é o ciclo de  $G$  obtido substituindo os caminhos formados por vértices de grau dois pelas arestas originais em  $C'$ , e  $D_1$  e  $D_2$  desenhos de  $G$  gerados pelo mesmo processo a partir de  $D'_1$  e  $D'_2$ , então temos que  $C$  é fronteira de uma face em  $D_1$  mas não em  $D_2$ , contradizendo o Teorema 1.  $\square$



## Capítulo 3

# Calculando o Número Mínimo de Cruzamentos

O problema do número mínimo de cruzamentos (CROSSING NUMBER) consiste em, dado um grafo  $G$ , encontrar o menor inteiro  $k$  para o qual existe um desenho de  $G$  com  $k$  cruzamentos, ou seja, calcular  $\text{cr}(G)$ :

**Entrada:** Um grafo qualquer  $G$ .

**Saída:**  $\text{cr}(G)$ .

Neste capítulo estudamos a complexidade computacional envolvida na solução exata ou aproximada deste problema.

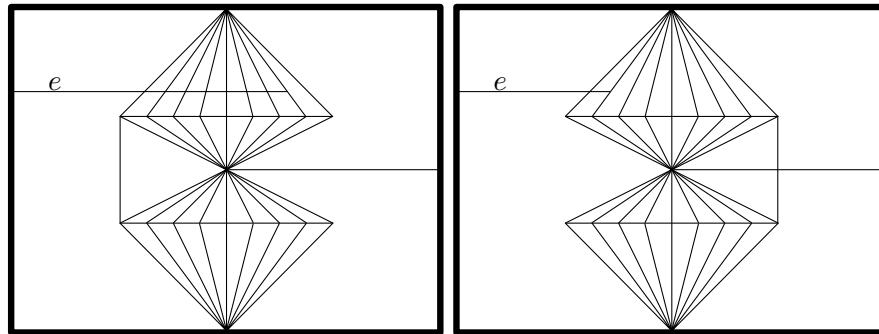
### 3.1 Valor exato

O problema CROSSING NUMBER foi provado NP-difícil por [Garey e Johnson \(1983\)](#), e posteriormente por [Hliněný \(2006\)](#) no caso restrito a grafos cúbicos. [Cabello e Mohar \(2013\)](#) provaram que CROSSING NUMBER também é NP-difícil no caso particular em que o grafo de entrada  $G$  é quase-planares. Um grafo  $G$  é **quase-planar** se existe  $e \in E(G)$  tal que  $G - e$  é planar.

[Gutwenger et al. \(2005\)](#) provaram que, dado um grafo planar  $G$  e uma aresta  $e$  não presente em  $G$ , pode-se calcular em tempo linear no tamanho de  $G$  o desenho sem cruzamentos  $d$  de  $G$  tal que, acrescentando-se a aresta  $e$  ao desenho  $d$ , o número de cruzamentos é mínimo. Isso pode parecer contraditório com o resultado de Cabello e Mohar citado no parágrafo anterior, porém há uma diferença. O algoritmo de Gutwenger et al. não calcula  $\text{cr}(G+e)$ , pois seu espaço de busca restringe-se aos desenhos em que  $G$  é representado sem cruzamentos. Ou seja, este algoritmo encontra o melhor desenho de  $G + e$  em que todos os cruzamentos envolvem a aresta  $e$ . No entanto, pode haver uma diferença arbitrariamente grande entre a resposta devolvida e  $\text{cr}(G)$ , como observado por [Hliněný e Salazar \(2007\)](#) e exemplificado na figura (3.1).

Se fixarmos o número  $k$  de cruzamentos, perguntando se um dado grafo  $G$  pode ser desenhado com no máximo  $k$  cruzamentos, então o problema se torna polinomialmente computável. O Algoritmo 1 é um exemplo de algoritmo polinomial para  $k$  fixo.

Analisamos agora a complexidade deste algoritmo. Para o teste de planaridade, podemos utilizar um algoritmo linear ([Hopcroft e Tarjan, 1974](#)). Chamemos de  $T(n, m, k)$  o tempo gasto para que o Algoritmo 1 execute tendo como entrada o número não negativo  $k$  e um grafo de  $n$  vértices e  $m$  arestas. Assumindo que o grafo de entrada é conexo, ou seja,  $m \geq n - 1$ , temos que:



(a) Todos os cruzamentos passam pela aresta  $e$ .

(b) Desenho ótimo.

**Figura 3.1:** Considere que a linha mais grossa do desenho deva ser representada sem cruzamentos para que o desenho seja ótimo, e que, em qualquer destes desenhos, a face retangular apresentada esteja sempre presente. Isso pode ser obtido através de uma subdivisão de um grafo planar 3-conexo. Neste caso, a diferença no número de cruzamentos entre o desenho ótimo e o melhor desenho em que todos os cruzamentos envolvem a aresta  $e$  pode ser grande.

---

**Algoritmo 1:** Cruzamentos( $G, k$ )

---

**Entrada:** Um grafo  $G$  e um inteiro não negativo  $k$ .

**Saída:**  $\text{cr}(G) \leq k$ ?

se  $G$  é planar então

  | devolva Sim.

senão

  | se  $k = 0$  então

    | devolva Não.

para cada par de arestas  $u_1u_2$  e  $v_1v_2$  em  $G$  faça

  Adicione um novo vértice  $x$ ;

  Substitua a aresta  $u_1u_2$  pelo caminho  $u_1xu_2$ , e a aresta  $v_1v_2$  pelo caminho  $v_1xv_2$ ;

  O grafo obtido é chamado  $G'$ ;

  se Cruzamentos( $G', k - 1$ ) retornar “Sim” então

    | devolva Sim.

devolva Não.

---

$$\begin{aligned}
 T(n, m, k) &\leq O(n + m) + \binom{m}{2} T(n, m + 2, k - 1) \\
 &\leq O(n + m) + \binom{m}{2} O(n + m + 2) + \binom{m}{2} \binom{m + 2}{2} T(n, m + 4, k - 2) \\
 &\quad \vdots \\
 &\leq O(n + m) + \binom{m}{2} O(n + m + 2) + \dots + \binom{m}{2} \binom{m + 2}{2} \dots \binom{m + 2(k - 2)}{2} O(n + m + 2(k - 1)) \\
 &\quad + \binom{m}{2} \binom{m + 2}{2} \dots \binom{m + 2(k - 1)}{2} T(n, m + 2k, 0) \\
 &= O\left(\binom{m}{2} \binom{m + 2}{2} \dots \binom{m + 2(k - 1)}{2} T(n, m + 2k, 0)\right).
 \end{aligned}$$

Como  $T(n, m, 0) = O(n + m)$ :

$$T(n, m, k) = O\left(\binom{m}{2} \binom{m + 2}{2} \dots \binom{m + 2(k - 1)}{2} O(n + m + 2k)\right) = n^{\Theta(k)}.$$

O Algoritmo 1, apesar de polinomial para  $k$  fixo, não implica que CROSSING NUMBER seja tratável para parametro fixo, pois o parâmetro  $k$  determina o grau do polinômio. Grohe (2004) mostrou um algoritmo de complexidade  $O(f(k)n^2)$ , em que  $f$  é computável, provando assim que CROSSING NUMBER é tratável por parâmetro fixo. Kawarabayashi e Reed (2007) forneceram um algoritmo linear para todo  $k$ , aprimorando o resultado de Grohe. Apesar disso, estes algoritmos não são práticos, pois suas respectivas complexidades crescem rapidamente com o valor de  $k$ .

## 3.2 Aproximabilidade

O melhor algoritmo de aproximação conhecido para CROSSING NUMBER é devido a Chuzhoy (2011), e possui fator de aproximação  $O(n^{\frac{9}{10}} \text{poly}(\Delta \log n))$ , onde  $\Delta$  é o grau máximo do grafo de entrada. Já Hliněný e Salazar (2007) mostraram que, no caso restrito a grafos quase-planares, pode-se usar o algoritmo de Gutwenger *et al.* (2005) para se obter uma  $\Delta$ -aproximação.

Cabello (2013) provou, através de uma redução a partir do problema do corte multiseparador mínimo (MULTIWAY CUT), que existe uma constante  $c > 1$  tal que o número de cruzamentos não pode ser aproximado por uma razão  $c$  em tempo polinomial, a menos que  $P=NP$ . O problema MULTIWAY CUT é definido como segue:

**Entrada:** Um grafo  $G = (V, E)$  com pesos nas arestas e um conjunto de vértices  $K \subset V$ .

**Saída:** Um conjunto de arestas  $F \in E$  de peso mínimo tal que para todo par de vértices  $u, v \in K$ ,  $G - F$  não contém caminhos entre  $u$  e  $v$ .

A redução de Cabello parte do caso especial de MULTIWAY CUT em que  $|K| = 3$ .

Apresentamos agora uma redução a partir do problema do multicorte mínimo (MULTICUT). Neste problema, é dado um grafo  $G$ , um conjunto  $K$  de pares de vértices de  $G$ , e procura-se um corte mínimo que separe os pares um a um:

**Entrada:** Um grafo  $G = (V, E)$  com pesos nas arestas e um conjunto de pares de vértices  $K \subset \{S \subset V : |S| = 2\}$ .

**Saída:** Um conjunto de arestas  $F \in E$  de peso mínimo tal que para todo par  $\{u, v\} \in K$ ,  $G - F$  não contém caminhos entre  $u$  e  $v$ .

Aqui, vamos assumir que os pares em  $K$  são disjuntos, ou seja, se  $\{u, v\}$  e  $\{x, y\}$  estão em  $K$ , então  $u, v \notin \{x, y\}$ . Utilizaremos na redução um grafo base, uma subdivisão de  $K_4$ . Este grafo é

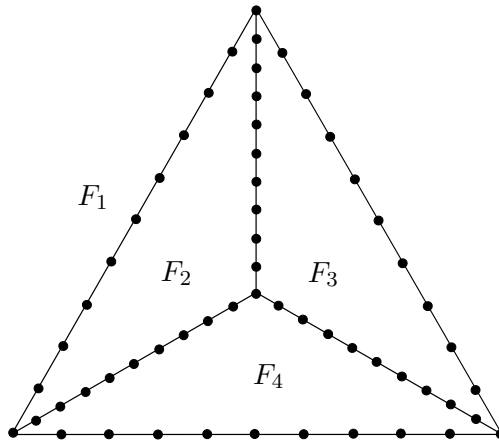


Figura 3.2: Quadro e suas faces

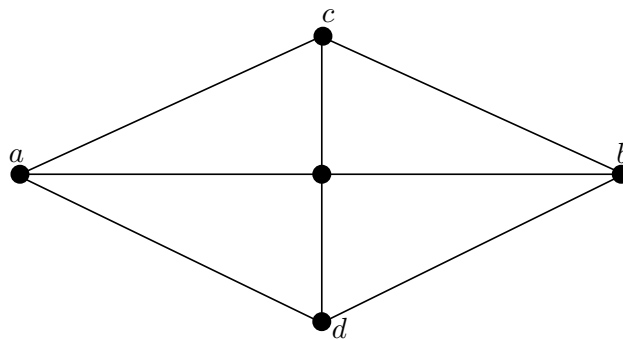


Figura 3.3: Suporte

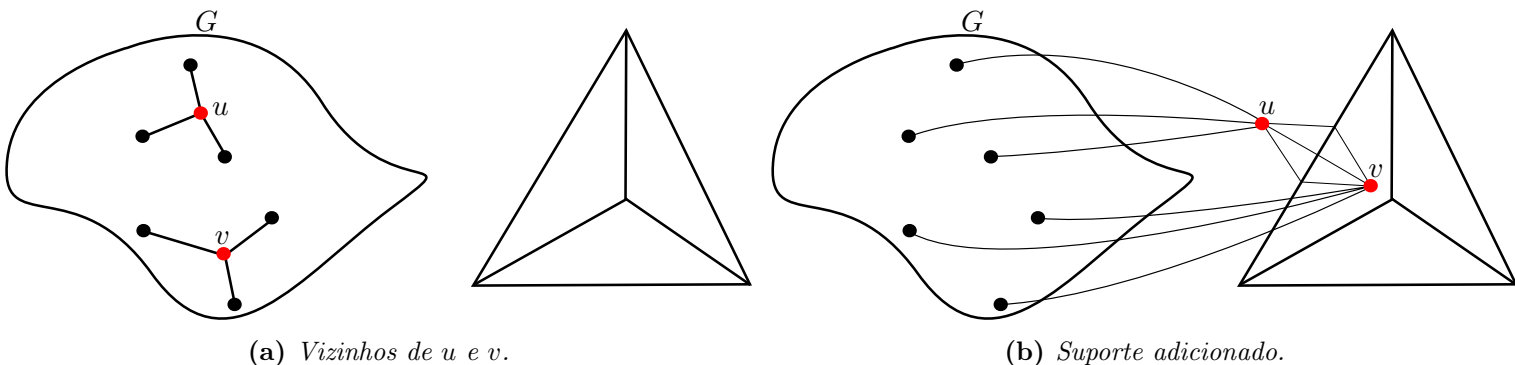
construído substituindo cada aresta de  $K_4$  por um caminho de comprimento dez. O grafo obtido será chamado de **quadro**, e é dado pela Figura 3.2.

Note que o quadro é uma subdivisão de um grafo 3-conexo, e pelo Corolário 1, qualquer desenho seu sem cruzamentos apresenta as mesmas faces. Utilizaremos também um grafo que servirá para garantir que cada par é separado pelo corte encontrado. Este grafo será chamado de **suporte**, e é dado pela Figura 3.3. Observe que este grafo é a roda (*wheel graph*) com cinco vértices.

Observe que o suporte também é um grafo 3-conexo, e pelo Teorema 1 o desenho apresentado é o único possível sem cruzamentos.

Dada uma instância de MULTICUT  $(G, K)$ , com  $k = |K| \leq 9$  e  $n = |V(G)|$ , criamos  $6^k$  instâncias de CROSSING NUMBER, como mostrado no Algoritmo 2. A restrição a  $k \leq 9$  é essencial, como ficará claro na demonstração do Lema 3.

Seja  $I$  o conjunto devolvido pelo Algoritmo 2 e  $H \in I$ . Um cruzamento entre duas arestas pesadas de  $H$  custa  $n^{10}$ . Já os cruzamentos entre arestas leves em um desenho ótimo, como mostrado na



(a) Vizinhos de  $u$  e  $v$ .

(b) Suporte adicionado.

Figura 3.4: Adicionando suporte

---

**Algoritmo 2:** Redução( $G, K$ )

---

**Entrada:** Uma instância  $(G, K)$  de MULTICUT tal que  $k = |K| \leq 9$  e os pares de  $K$  sejam disjuntos.

**Saída:** Um conjunto de  $6^k$  grafos.

$B$  gets( $V, E$ ), onde  $V = V(\text{quadro}) \dot{\cup} V(G)$  e  $E = E(\text{quadro}) \dot{\cup} E(G)$ , tal que as arestas provenientes do quadro têm peso  $n^5$ , enquanto as outras têm peso unitário;

$I \leftarrow \{B\}$ ;

**para cada**  $\{u, v\} \in K$  **faça**

$I' \leftarrow \emptyset$ ;

**para cada**  $G' \in I$  **faça**

**para cada** *par de faces do quadro* **faça**

Escolha uma aresta  $e$  de  $G'$  que separe as faces;

Substitua  $e$  por um suporte, ligando os vértices  $c$  e  $d$  do suporte nos vértices incidentes em  $e$ , como mostra a Figura 3.4, obtendo assim o grafo  $G''$ ;

Dê peso  $n^5$  às arestas do suporte;

Identifique  $u$  com  $a$  e  $v$  com  $b$ , onde  $a$  e  $b$  são as pontas do suporte recém adicionado;

$I' \leftarrow I' \cup \{G''\}$ .

$I \leftarrow I'$ .

**devolva**  $I$

---

Seção 2.2, totalizam um custo não superior a  $n^4$ .

O grafo  $H$  tem no máximo  $10 \times 6 + 8k$  arestas pesadas, e portanto todos os cruzamentos entre arestas leves e pesadas somam um custo máximo de  $(10 \times 6 + 8k)n^7$ . Como  $k \leq 9$ , então se  $n \geq 6 > \sqrt[3]{10 \times 6 + 8 \times 9} \geq \sqrt[3]{10 \times 6 + 8k}$ , o desenho de  $H$  com número mínimo de cruzamentos não contém cruzamentos entre arestas pesadas.

Para que não haja cruzamentos pesados, as pontas de cada suporte devem estar em faces diferentes do quadro. Isso faz com que o quadro particione o plano em quatro partes de tal forma que nenhuma parte contenha um par de  $K$  por inteiro. Nos resultados seguintes mostramos como obter um multicorte de  $G$  a partir dos desenhos ótimos dos elementos de  $I$ , e como obter um desenho de um dos  $6^k$  possíveis grafos de  $I$  a partir de um multicorte de  $G$ . Chamaremos de  $\mathbf{mcm}(G, K)$  o multicorte mínimo da instância  $(G, K)$ .

**Lema 2.** *Para qualquer grafo  $H \in I$ ,  $\mathbf{mcm}(G, K)n^5 \leq cr(H)$ .*

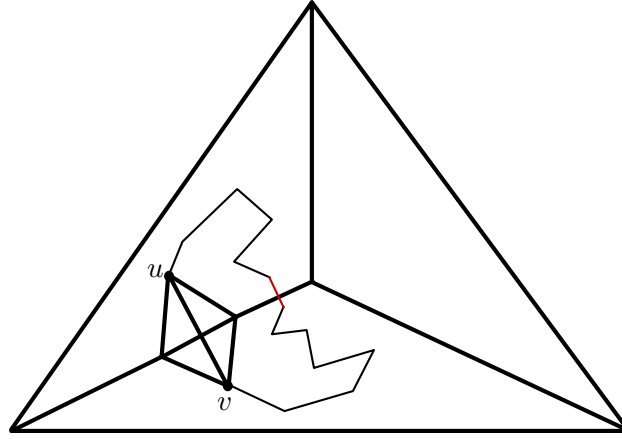
*Demonstração.* Como observado anteriormente, em um desenho ótimo de  $H$  não há cruzamentos entre arestas pesadas, e portanto as extremidades de cada suporte estão contidas dentro de faces distintas do quadro. Seja  $Q$  a imagem do quadro em  $\mathbb{R}^2$  através do desenho ótimo de  $H$ . Temos que as faces do quadro são as componentes conexas por caminhos de  $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ , e portanto, dado um par  $\{u, v\} \in K$ , todo caminho entre  $u$  e  $v$  cruza o quadro.

Sejam  $F \subset E(G)$  as arestas de  $G$  que cruzam o quadro. Como observado no parágrafo anterior,  $F$  é uma solução viável do multicorte de  $(G, K)$ , e portanto  $\mathbf{mcm}(G, K) \leq |F|$ . Como cada cruzamento entre uma aresta do quadro (pesada) e uma aresta de  $G$  (leve) tem peso  $n^5$ ,  $|F|n^5 \leq cr(H)$ . Portanto,  $\mathbf{mcm}(G, K)n^5 \leq cr(H)$ .  $\square$

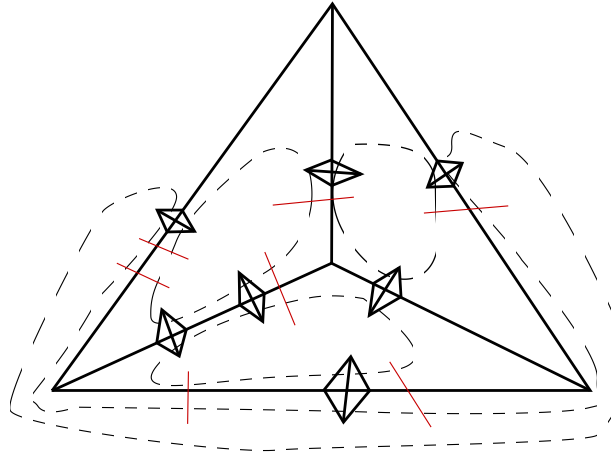
**Lema 3.** *Existe  $H \in I$  tal que  $\mathbf{mcm}(G, K)n^5 + n^4 \geq cr(H)$ .*

*Demonstração.* Seja  $F$  uma solução viável para a instância  $(G, K)$  de MULTICUT. Definimos o grafo  $G'$  de tal forma que  $V(G') = \{X : X \text{ é uma componente conexa de } G - F\}$  e  $XY \in E(G')$  se e somente se existem  $u \in X$  e  $v \in Y$  tais que  $\{u, v\} \in K$ . Como  $|E(G')| \leq |K|$  e estamos assumindo que  $|K| \leq 9$ , temos que  $|E(G')| \leq 9$ , e portanto o número cromático de  $G'$  é no máximo quatro.

Seja  $c : V(G') \rightarrow \{\text{Faces do quadro}\}$  uma coloração de  $G'$ . Sabemos que tal função existe porque um desenho do quadro no plano tem quatro faces, e estas são únicas. Seja  $H \in I$  tal que, para todo



**Figura 3.5:** Caminho entre  $u$  e  $v$  cruzando o quadro



**Figura 3.6:** Componentes de  $G - F$  desenhadas nas faces do quadro

par  $\{u, v\} \in K$ , o suporte de  $\{u, v\}$  em  $H$  esteja entre as faces  $c(X)$  e  $c(Y)$ , onde  $X$  é a componente de  $u$  e  $Y$  é a componente de  $y$  em  $G - F$ .

Desenhamos então os vértices de  $X$  dentro de  $c(X)$ , para toda componente  $X$  de  $G - F$ . Dessa forma, arestas que não pertencem ao corte  $F$  não precisam cruzar arestas pesadas. Além disso, cada aresta de  $F$  tem de cruzar o quadro apenas uma vez, pois para cada par de faces existe uma aresta do quadro que pertence ao bordo das duas. Portanto,  $\text{cr}(H) \leq \text{mcm}(G, K)n^5 + n^4$ .  $\square$

Seja  $\text{MULTICUT}_{\leq 9}$  o problema do multicorte mínimo restrito a instâncias com no máximo 9 pares a serem separados. Agora provamos que, caso tenhamos uma aproximação polinomial de fator constante  $\alpha$  para o problema  $\text{CROSSING NUMBER}$ , então podemos obter uma aproximação polinomial de razão arbitrariamente próxima a  $\alpha$  para o problema  $\text{MULTICUT}_{\leq 9}$ .

**Teorema 2.** *Se  $\mathcal{A}$  é uma  $\alpha$ -aproximação polinomial de  $\text{CROSSING NUMBER}$ , então existe uma  $\alpha(1 + \frac{1}{n})$ -aproximação polinomial para  $\text{MULTICUT}_{\leq 9}$ .*

*Demonstração.* Considere o Algoritmo 3. Sabemos pelo Lema 3 que existe  $H^* \in I$  tal que  $\text{cr}(H^*) \leq \text{mcm}(G, K)n^5 + n^4$ . Além disso, pelo Lema 2, vale que  $\text{cr}(H) \geq \text{mcm}(G, K)n^5$  para todo  $H \in I$ . Seja  $\hat{\text{cr}}(H)$  o valor devolvido por  $\mathcal{A}(H')$  e  $\widehat{\text{mcm}}(G, K) = \min_{H \in I} \frac{\hat{\text{cr}}(H)}{n^5}$  o valor devolvido pelo Algoritmo 3.



---

**Algoritmo 3:** Multicorte( $G, K$ )

---

**Entrada:** Uma instância  $(G, K)$  de MULTICUT em que  $G$  tem  $n$  vértices,  $k = |K| \leq 9$  e os pares de  $K$  são disjuntos.

**Saída:** Uma aproximação para  $\text{mcm}(G, K)$ .

$I \leftarrow \text{Redução}(G, K)$ ;

$cr \leftarrow \infty$ ;

**para cada**  $H \in I$  **faça**

$H' \leftarrow H$  substituindo cada aresta pesada por  $n^5$  arestas paralelas;

$cr' \leftarrow \mathcal{A}(H')$ ;

**se**  $cr' < cr$  **então**

$cr \leftarrow cr'$ .

**devolva**  $\frac{cr}{n^5}$ .

---

Temos que

$$\begin{aligned} \widehat{\text{mcm}}(G, K) &= \frac{\widehat{\text{cr}}(H)}{n^5} \text{ para algum } H \in I \\ &\geq \frac{\text{cr}(H)}{n^5} \\ &\geq \text{mcm}(G, K), \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} \widehat{\text{mcm}}(G, K) &= \min_{H \in I} \frac{\widehat{\text{cr}}(H)}{n^5} \\ &\leq \frac{\widehat{\text{cr}}(H^*)}{n^5} \\ &\leq \alpha \frac{\text{cr}(H^*)}{n^5} \quad (\text{pelo Lema 1}) \\ &\leq \alpha \text{mcm}(G, K) + \frac{\alpha}{n} \\ &= \alpha \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \text{mcm}(G, K). \end{aligned}$$

Para finalizar a prova, basta observar que se  $\mathcal{A}$  é polinomial no tamanho da entrada, então o Algoritmo 3 também o é. □

Para o problema utilizado na redução de Cabello, o MULTIWAY CUT com três terminais, conhece-se algoritmo de aproximação de razão  $\frac{7}{6}$  (Călinescu *et al.*, 2000), enquanto que o melhor algoritmo de aproximação para o MULTICUT tem razão de aproximação  $O(\log(k))$  (Garg *et al.*, 1996). Portanto, o Teorema 2 traz uma vantagem em potencial, caso seja provado algum resultado de inaproximabilidade para MULTICUT com número de pares  $k$  fixo.

Além disso, estender este resultado para que não seja necessário fixar o número de pares levaria a uma melhora no limitante de inaproximabilidade de CROSSING NUMBER. Isto porque, como provado por Chawla *et al.* (2006), assumindo a Conjectura dos Jogos Únicos, MULTICUT não pode ser aproximado por fator constante a menos que  $P=NP$ . A Conjectura dos Jogos Únicos é uma conjectura sobre a complexidade de certos problemas de satisfação de restrições, apresentada por Khot (2002), com inúmeras aplicações em aproximabilidade (Khot e Regev, 2008; Khot *et al.*, 2007).



## Capítulo 4

# Desenhos em Livros

O problema do número mínimo de páginas foi primeiramente apresentado por [Bernhart e Kainen \(1979\)](#), e consiste em desenhar um grafo em um “livro”, de tal forma que os vértices fiquem na espiral, as arestas nas páginas, e não haja cruzamentos. Como o problema tratado até agora, este também tem aplicações em VLSI ([Chung et al., 1987](#)).

**Definição 4.** *Um livro de  $k$  páginas é o espaço formado identificando-se  $k$  semi-planos fechados pela borda. A reta formada pelo encontro das bordas é chamada de espiral, e o interior dos semi-planos são as folhas ou páginas.*

Poderíamos considerar o problema de desenhar um grafo sem cruzamentos em um livro, de forma a minimizar o número de páginas, sem impor mais restrições à posição dos vértices e ao comportamento das arestas. Porém, se formos tão permissivos, o problema se torna fácil. Isso porque os grafos que podem ser desenhados sem cruzamentos em uma ou duas folhas são planares, pois uma folha é um semiplano fechado e um livro de duas folhas é o plano. Além disso, todos os grafos podem ser desenhados sem cruzamentos em três folhas.

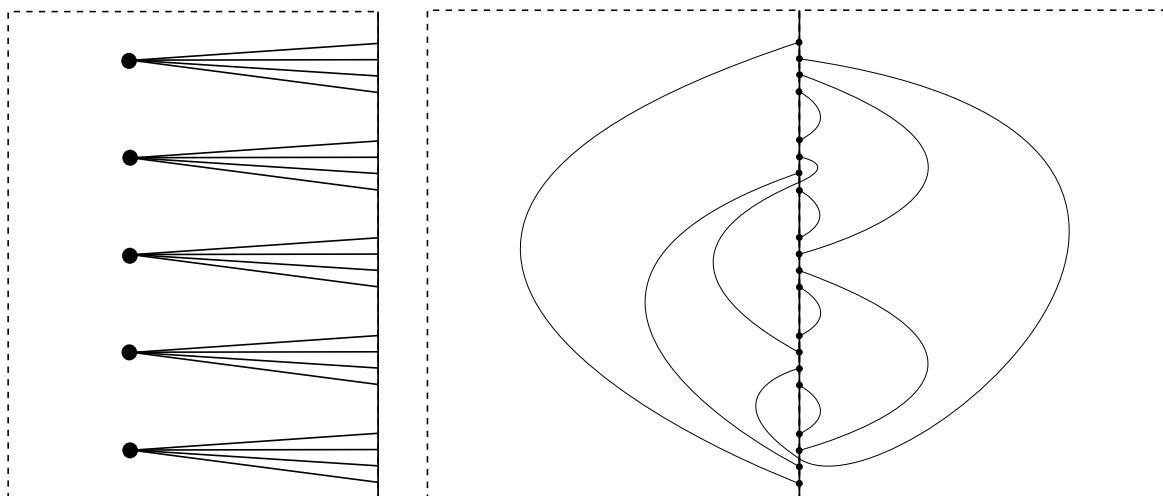
Mostramos agora como desenhar um grafo qualquer em três folhas. Primeiramente pomos todos os vértices em uma mesma folha sobre uma reta paralela à espiral, em ordem qualquer. Para cada vértice e para cada uma de suas arestas, desenhamos um caminho entre o vértice e a espiral. Considere agora apenas o plano formado pelas duas páginas restantes e pela espiral. Para cada aresta do grafo, teremos dois pontos, um proveniente de cada um de seus vértices, e para completar o desenho da aresta basta ligá-los. Portanto, nos resta a tarefa de desenhar um emparelhamento no plano. Esta tarefa é fácil, pois como um emparelhamento não contém ciclos, podemos completar as arestas uma a uma, e cada etapa nunca separa o plano em partes desconexas por caminhos. A Figura 4.1 ilustra o processo.

Assim, para tornar o problema mais interessante, vamos defini-lo de forma mais restrita, como apresentado a seguir:

**Definição 5.** *Um desenho de um grafo em um livro consiste em uma injeção do conjunto de vértices de  $G$  na espiral do livro, e do desenho de cada uma das arestas em uma única página. O problema do número de páginas do grafo  $G$ , *BOOK THICKNESS*, consiste em encontrar o número mínimo de páginas necessárias de um livro em que se pode desenhar  $G$  sem que haja cruzamentos entre as arestas. Denotamos este parâmetro de  $G$  por  $\text{bt}(G)$ .*

### 4.1 Limitantes para o número de páginas

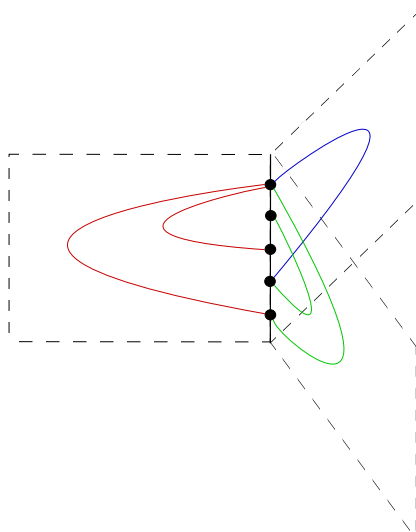
Buscamos agora limitantes superiores e inferiores para o parâmetro  $\text{bt}$ . Os resultados apresentados aqui são devidos a [Bernhart e Kainen \(1979\)](#). Um limitante superior simples para o número de páginas é dado se observamos que as arestas incidentes a um mesmo vértice podem ser desenhadas em uma mesma página sem gerar cruzamentos. Portanto, se chamarmos de  $\text{vc}(G)$  a menor cobertura



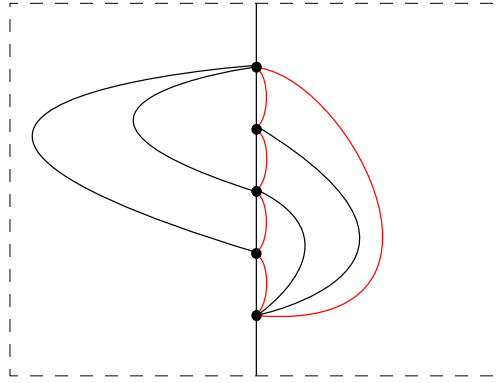
(a) A primeira página contém os vértices. As duas pontas de cada aresta vão até a espiral.

(b) Nas duas páginas restantes, ligamos as duas pontas de cada aresta. Os pontos sobre a espiral não representam vértices de  $K_5$ , mas a intersecção com as arestas vindas da primeira página.

**Figura 4.1:** Desenho sem restrições de  $K_5$  em um livro de três páginas. Observe que algumas arestas passam pelas três páginas.



**Figura 4.2:** Desenho em três páginas respeitando as restrições impostas na Definição 5



**Figura 4.3:** Arestas em vermelho formam circuito hamiltoniano.

de arestas por vértices do grafo  $G$ , temos que

$$\text{bt}(G) \leq \text{vc}(G).$$

Já para obter um limitante inferior, observamos primeiramente que um grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas tal que  $\text{bt}(G) = 1$  respeita a relação

$$m \leq 2n - 3. \quad (4.1)$$

Para provar esta relação, suponha que exista um grafo  $G$  como acima tal que  $m > 2n - 3$ . Observe que, se  $G$  pode ser desenhado sem cruzamentos em um livro com uma única página, então se desenharmos seus vértices sobre uma circunferência na mesma ordem em que aparecem na espiral, suas arestas podem ser desenhadas no interior da circunferência sem que se cruzem. Isso pode ser efetuado ligando-se as duas pontas da espiral, formando assim a circunferência.

Procedemos então desenhando  $G$  sem cruzamentos no plano, com seus vértices sobre uma circunferência e suas arestas no interior. Acrescentamos um novo vértice fora da circunferência e o ligamos a todos os outros vértices, formando o grafo  $G'$ . Este novo grafo é planar, e além disso  $|E(G')| = m + n > 3n - 3 = 3|V(G')| - 6$ , o que contradiz a inequação (2.5).

Além disso, em qualquer desenho sem cruzamentos em uma única página de um grafo maximal que pode ser desenhado como tal, temos  $n$  arestas formando um ciclo hamiltoniano, com  $n - 1$  arestas ligando os vértices paralelamente à espiral e uma aresta ligando o primeiro ao último vértice (Figura 4.3). Assim, como  $m \leq 2n - 3$ , no máximo  $n - 3$  não estão neste ciclo hamiltoniano.

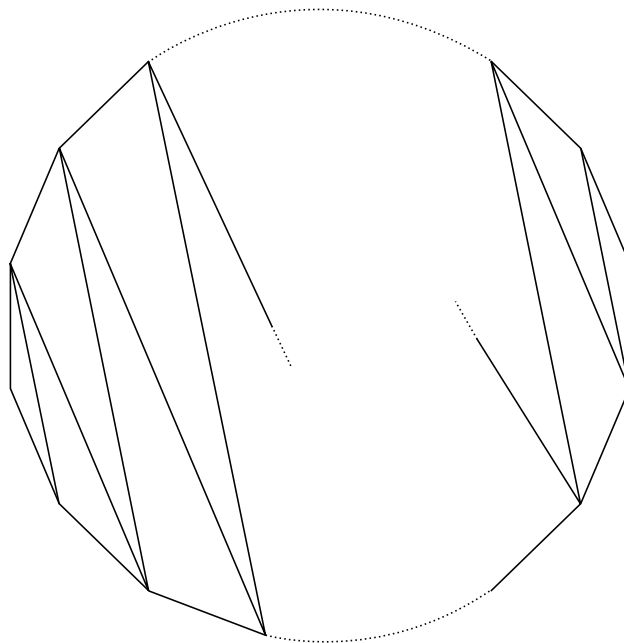
Temos então que para qualquer grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas, e qualquer desenho sem cruzamentos seu em um livro de  $k$  páginas,  $m \leq n + k(n - 3)$ , pois temos no máximo  $n - 3$  arestas por página, mais as arestas do possível ciclo hamiltoniano definido pela ordem dos vértices na espiral. Isso implica que, para todo grafo de  $n$  vértices e  $m$  arestas:

$$\text{bt}(G) \geq \left\lceil \frac{m - n}{n - 3} \right\rceil. \quad (4.2)$$

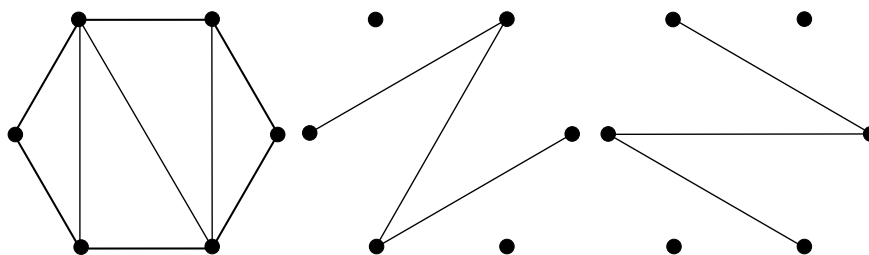
Em especial, para  $K_n$  com  $n \geq 4$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{bt}(K_n) &\geq \left\lceil \frac{\binom{n}{2} - n}{n - 3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que este resultado é justo, e para isso apresentamos uma forma de desenhar  $K_{2n}$  em  $n$  páginas sem cruzamentos. O desenho parte de uma triangulação de um polígono de  $2n$  lados, onde cada vértice do polígono representa um vértice de  $K_{2n}$ , e a ordem dos vértices na espiral é a mesma dada pela borda do polígono. A triangulação deve ser construída como mostra a Figura



**Figura 4.4:** Triangulação a ser utilizada no desenho de  $K_n$ .



**Figura 4.5:** Desenho de  $K_6$  em um livro de três páginas. Aqui representamos o desenho em uma página através do desenho no interior de uma circunferência.

#### 4.4.

Rotacionamos a triangulação  $n$  vezes, obtendo assim  $n$  triangulações diferentes, e desenhemos as arestas correspondentes a cada triangulação em uma página diferente. O circuito hamiltoniano dado pela ordem da espiral pode ser desenhado em qualquer uma das páginas.

Observa-se que uma diagonal presente em uma das triangulações não estará em nenhuma das outras  $n - 1$  triangulações, e portanto  $n(2n - 3) + 2n = \binom{2n}{2}$  arestas serão representadas. Logo, este é um desenho completo de  $K_{2n}$  em  $n$  páginas. Um exemplo é dado pela Figura 4.5. Já no caso de  $K_{2n-1}$ , basta eliminar um vértice do desenho de  $K_{2n}$ .

## 4.2 Complexidade do problema do número de páginas

Os grafos com número de páginas igual a dois são subgrafos de grafos planares hamiltonianos maximais (Bernhart e Kainen, 1979), pois dado um desenho em duas páginas, podemos adicionar arestas paralelamente à espiral até formar um ciclo, como mostra a Figura 4.3. Como decidir se um grafo planar maximal é hamiltoniano é NP-completo (Wigderson, 1982), então decidir se um grafo planar maximal pode ser desenhado em duas páginas também o é.

O fato exposto acima implica que o problema geral de encontrar o número de páginas de um grafo é NP-difícil, e além disso, não admite algoritmo de aproximação polinomial de fator estritamente menor do que  $\frac{3}{2}$ , a menos que  $P=NP$ . Isso porque, se tal algoritmo de aproximação existisse, então poderíamos decidir se um certo grafo qualquer pode ser desenhado em duas páginas, resolvendo assim um problema NP-completo. Destacamos esta observação a seguir.

**Proposição 1.** *BOOK THICKNESS não pode ser aproximado polinomialmente por razão estritamente menor do que  $\frac{3}{2}$ , a menos que  $P=NP$ .*  $\square$

### 4.3 Número de cruzamentos em um livro de $k$ páginas

Agora vamos considerar um outro problema. Considere um livro restrito a um certo número de páginas  $k$ , e então perguntamos qual o número mínimo de cruzamentos que um desenho de um grafo  $G$  pode ter neste livro restrito. Este parâmetro é denotado por  $\nu_k(G)$ .

Ábrego *et al.* (2013) provaram que o número de cruzamentos do grafo completo em duas páginas é exatamente o dado por (2.2). Ou seja, a Conjectura de Guy é verdadeira quando limitada a desenhos em que os vértices são representados por pontos colineares e as arestas não atravessam esta reta.

Na seção anterior, vimos que decidir se um grafo tem número de páginas menor ou igual a dois é NP-completo. Portanto, decidir se é possível desenhar um grafo em duas páginas sem cruzamentos é NP-Completo, e consequentemente calcular o número mínimo de cruzamentos em um livro de duas páginas é NP-difícil.

Além disso, esse problema é NP-difícil também para  $k = 1$ , o que foi provado por Masuda *et al.* (1987), através de uma redução a partir do problema LINEAR ARRANGEMENT:

**Entrada:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um número inteiro  $B$ .

**Pergunta:** Existe função bijetora  $f : V \rightarrow [|V|]$  tal que

$$\sum_{uv \in E(G)} |f(u) - f(v)| \leq B? \tag{4.3}$$

Apresentamos aqui uma redução mais simples e curta do que a de Masuda *et al.*

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas, com  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , e  $M = 4n^4$ . Observe que  $M$  é sempre par. Construimos o grafo  $H$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(H) &= V(G) \cup \{y\} \cup \bigcup_{i \in [n], l \in [M]} \{x_l^i\}; \\ E(H) &= E(G) \cup \bigcup_{i \in [n], l \in [M]} \{v_i x_l^i, x_l^i y\}. \end{aligned}$$

A Figura 4.6 exemplifica a construção.

**Lema 4.** *Se existe bijeção  $f : V(G) \rightarrow [n]$  tal que (4.3) é satisfeita, então*

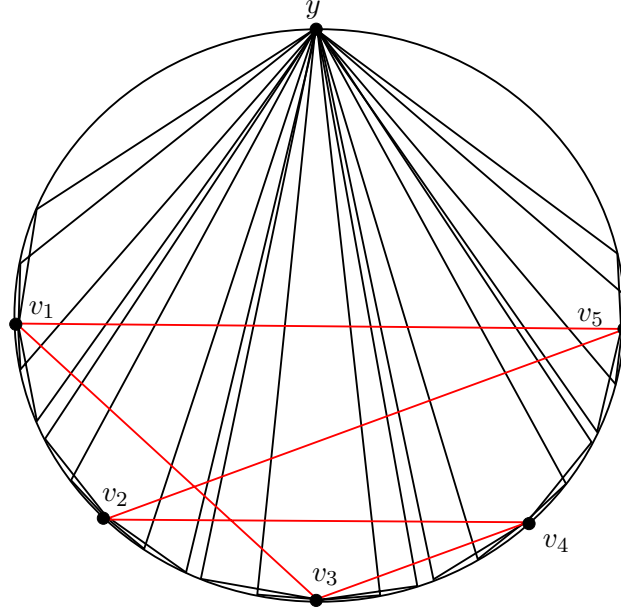
$$\nu_1(H) \leq 2n \binom{\frac{M}{2}}{2} + MB + n^4. \tag{4.4}$$

*Demonstração.* Basta mostrar uma permutação circular dos vértices que satisfaça (4.4). Seja  $v_i = f^{-1}(i)$  e considere a permutação que respeita a seguinte ordem:

$$y x_1^1 \dots x_{\frac{M}{2}}^1 v_1 x_{(\frac{M}{2}+1)}^1 \dots x_M^1 \dots x_1^n \dots x_{\frac{M}{2}}^n v_n x_{(\frac{M}{2}+1)}^n \dots x_M^n y.$$

Em um desenho satisfazendo esta permutação temos, para todo  $v_i \in V(G)$ ,  $\binom{\frac{M}{2}}{2}$  cruzamentos entre as arestas  $v x_l^i$  e  $x_l^i y$  para todo  $l \in [\frac{M}{2}]$ , e mais  $\binom{\frac{M}{2}}{2}$  cruzamentos entre as arestas  $v x_l^i$  e  $x_l^i y$  para todo  $l \in [\frac{M}{2} + 1..M]$ . Além disso, os cruzamentos entre as arestas de  $E(V)$  totalizam, no máximo,  $n^4$ .

Por fim, para cada aresta  $e = v_i v_j \in E(G)$ ,  $i < j$ , temos que  $e$  atravessa as arestas  $x_l^i y$  para todo  $l \in [\frac{M}{2} + 1..M]$ ,  $x_l^h y$  para todo  $h \in [i + 1..j - 1]$  e  $l \in [1..M]$ , e  $x_l^j y$  para todo  $l \in [1.. \frac{M}{2}]$ ,



**Figura 4.6:** Grafo  $H$  construído a partir de  $C_5$ . Em vermelho estão as arestas do grafo original.

totalizando  $M(j - i)$  cruzamentos. No total, temos no máximo  $2n\left(\frac{M}{2}\right) + MB + n^4$  cruzamentos, como queríamos.  $\square$

**Lema 5.** Se (4.4) é válida, então existe bijeção  $f : V(G) \rightarrow [n]$  que satisfaz (4.3).

*Demonstração.* Seja  $yv_1v_2 \dots v_ny$  a ordem em que os vértices de  $V(G)$  aparecem em um desenho de  $H$  que satisfaz (4.4). Definimos  $f$  como  $f(v_i) = i$ .

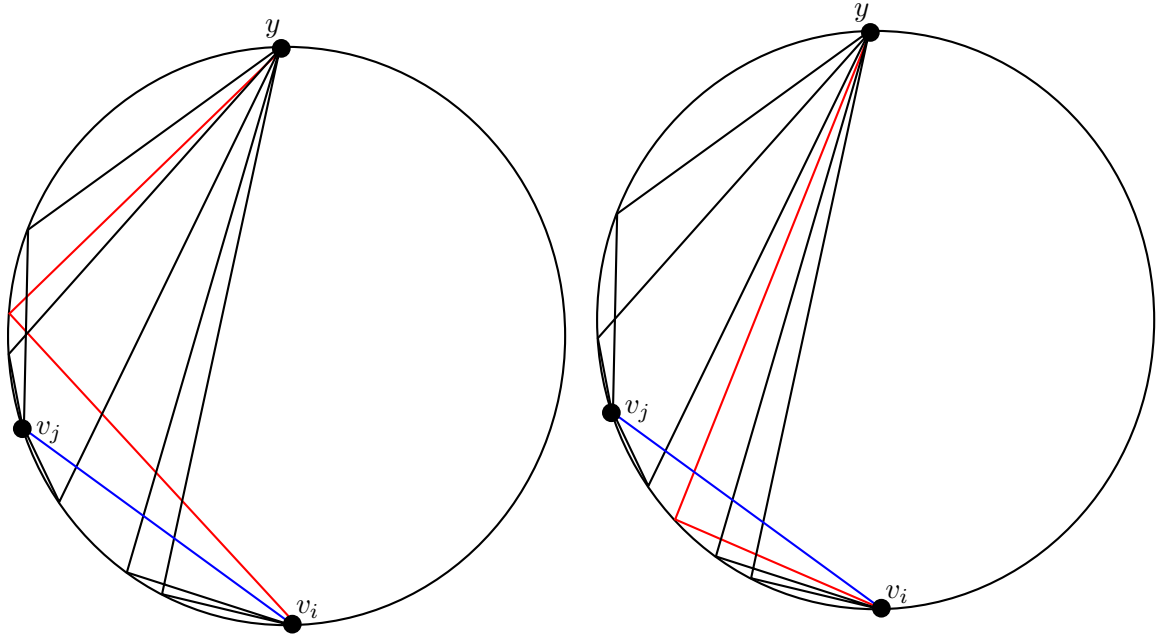
Para cada aresta  $e = v_i v_j \in E(G)$ ,  $i < j$ , temos que  $e$  atravessa pelo menos uma das arestas  $v_h x_l^h$  e  $x_l^h y$ , para todo  $h \in [i + 1..j - 1]$  e  $l \in [1..M]$ . Estes cruzamentos totalizam pelo menos

$$\left( \sum_{uv \in E(G)} M(|f(u) - f(v)| - 1) \right) = M \left( \sum_{uv \in E(G)} |f(u) - f(v)| \right) - Mm$$

Considere agora  $v_i \in V(G)$  e  $l \in [1..M]$ . Se  $x_l^i$  estiver entre os vértices  $v_j$  e  $v_{j+1}$ , onde  $j, j+1 \neq i$ , então a aresta  $v_i x_l^i$  cruza pelo menos uma vez com cada caminho entre  $v_h$  e  $y$ , para todo  $h \in [j + 1..i - 1]$ , caso  $j < i$ , ou  $h \in [i + 1..j]$ , caso  $j > i$ . Isso totaliza, no mínimo,  $M$  cruzamentos. Já se mudarmos a posição de  $x_l^i$  para entre  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$  (Figura 4.7), as arestas incidentes a  $x_l^i$  deixarão de cruzar outros caminhos que levam a  $y$  que não os os caminhos entre  $v_i$  e  $y$ , sendo que estes últimos já eram cruzados inicialmente. Alguns cruzamentos novos podem surgir, entre o caminho  $v_i x_l^i y$  e arestas de  $G$  incidentes a  $v_i$ , mas estes totalizam no máximo  $m < M$ , e portanto podemos fazer a mudança de posição de  $x_l^i$  sem aumentar o número de cruzamentos. Fazemos esta mudança para todos os vértices  $x_l^i$ ,  $i \in [n]$  e  $l \in [M]$ .

Contamos agora o número  $cr(v_i)$  de cruzamentos envolvendo os caminhos  $v_i x_l^i y$  e as arestas de  $G$  incidentes a  $v_i$ . Sejam  $M_e$  o número de vértices  $x_l^i$  entre  $v_{i-1}$  e  $v_i$ ,  $M_d = M - M_e$ ,  $d = d_G(v_i)$ ,  $d_e$  o número de arestas  $v_j v_i$ , onde  $j < i$ , e  $d_d = d - d_e$  o número de arestas  $v_j v_i$ , onde  $j > i$ . Assumimos,





(a) Caminho vermelho cruza com todos os caminhos entre  $v_j$  e  $y$ .

(b) Após a mudança, o caminho vermelho não cruza mais com caminhos ligando  $v_j$  a  $y$ , para  $j \neq i$ .

**Figura 4.7:** Mudança de posição de um dos caminhos ligando  $v_i$  a  $y$ .

sem perda de generalidade, que  $d_e \geq d_d$ , e denotamos  $\bar{d} = d_e - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} - d_d$ . Para  $d$  par, temos que:

$$\begin{aligned}
 \text{cr}(v_i) &= \left[ d_e M_e + \binom{M_e}{2} \right] + \left[ d_d M_d + \binom{M_d}{2} \right] \\
 &= \left[ \frac{d}{2} M_e + \binom{M_e + \bar{d}}{2} - \binom{\bar{d}}{2} \right] + \left[ \frac{d}{2} (M_d - \bar{d}) + \binom{M_d - \bar{d}}{2} + \binom{\bar{d}}{2} + d_d \bar{d} \right] \\
 &= \frac{d}{2} M_e + \binom{M_e + \bar{d}}{2} - \binom{\bar{d}}{2} + \frac{d}{2} M_d - \frac{d\bar{d}}{2} + \binom{M_d - \bar{d}}{2} + \binom{\bar{d}}{2} + \frac{d\bar{d}}{2} - \bar{d}^2 \\
 &= \frac{d}{2} M + \binom{M_e + \bar{d}}{2} + \binom{M_d - \bar{d}}{2} - \bar{d}^2 \\
 &\geq \frac{d}{2} M + 2 \binom{\frac{M}{2}}{2} - \frac{d^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Agora consideramos o caso em que  $d$  é ímpar. Do fato de que  $\lfloor \bar{d} \rfloor = d_e - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - d_d$ , temos:

$$\begin{aligned}
 \text{cr}(v_i) &= \left[ d_e M_e + \binom{M_e}{2} \right] + \left[ d_d M_d + \binom{M_d}{2} \right] \\
 &= \left[ \lfloor \frac{d}{2} \rfloor M_e + \binom{M_e + \lfloor \bar{d} \rfloor}{2} - \binom{\lfloor \bar{d} \rfloor}{2} \right] + \left[ \lfloor \frac{d}{2} \rfloor (M_d - \lfloor \bar{d} \rfloor) + \binom{M_d - \lfloor \bar{d} \rfloor}{2} + \binom{\lfloor \bar{d} \rfloor}{2} + d_d \lfloor \bar{d} \rfloor \right] \\
 &= \left[ \frac{d}{2} M_e + \binom{M_e + \lfloor \bar{d} \rfloor}{2} - \binom{\lfloor \bar{d} \rfloor}{2} \right] + \left[ \frac{d}{2} (M_d - \lfloor \bar{d} \rfloor) + \binom{M_d - \lfloor \bar{d} \rfloor}{2} + \binom{\lfloor \bar{d} \rfloor}{2} + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \lfloor \bar{d} \rfloor + \lfloor \bar{d} \rfloor^2 \right] \\
 &= \frac{d}{2} M + \binom{M_e + \lfloor \bar{d} \rfloor}{2} + \binom{M_d - \lfloor \bar{d} \rfloor}{2} - \lfloor \bar{d} \rfloor^2 \\
 &\geq \frac{d}{2} M + 2 \binom{\frac{M}{2}}{2} - \frac{d^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o número total de cruzamentos será pelo menos

$$\begin{aligned}
& M \left( \sum_{uv \in E(G)} |f(u) - f(v)| \right) - Mm + \sum_{v \in V(G)} \left( \frac{d_G(v)}{2} M + 2 \binom{\frac{M}{2}}{2} - \frac{d_G(v)^2}{4} \right) \\
&= 2n \binom{\frac{M}{2}}{2} + M \left( \sum_{uv \in E(G)} |f(u) - f(v)| \right) - \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)^2}{4} \\
&\geq 2n \binom{\frac{M}{2}}{2} + M \left( \sum_{uv \in E(G)} |f(u) - f(v)| \right) - n^4.
\end{aligned}$$

Assim, caso  $\left( \sum_{uv \in E(G)} |f(u) - f(v)| \right) \geq B+1$ , a inequação (4.4) não seria respeitada, pois  $M > 2n^4$  para  $n \geq 1$ . Logo,  $f$  satisfaz as condições do enunciado.  $\square$

Os dois lemas anteriores implicam o seguinte resultado.

**Teorema 3** (Masuda *et al.*). *Dado um grafo  $G$ , encontrar  $\nu_1(G)$  é NP-difícil.*  $\square$

## 4.4 Ordem da espiral restrita

Denotamos o problema de encontrar o número mínimo de páginas de  $G$ , dada uma ordem fixa  $\pi$  dos vértices na espiral, por  $\mathbf{bt}_\pi(G)$ . A partir desta ordem, construímos o **grafo de cruzamentos**  $G'$  de  $G$  com relação a  $\pi$  da seguinte forma:

- Os vértices de  $G'$  são as arestas de  $G$ .
- Dois vértices de  $G'$  são adjacentes se as respectivas arestas de  $G$  necessariamente se cruzam num desenho em uma página com os vértices na ordem  $\pi$ .

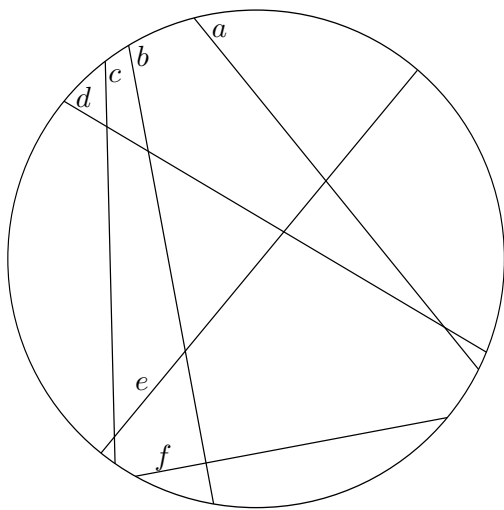
Duas arestas de  $G$  se cruzam em qualquer desenho em uma página com os vértices na ordem  $\pi$  quando as suas pontas aparecem alternadas em  $\pi$ . Por exemplo, se  $xy$  e  $uv$  são arestas de  $G$  e os vértices  $x, y, u, v$  aparecem na ordem  $x, u, y, v$  em  $\pi$ , então  $xy$  e  $uv$  sempre se cruzam, e portanto seus respectivos vértices serão adjacentes em  $G'$ . Além disso, os cruzamentos que não são desta forma podem ser evitados desenhando as arestas como semi-circunferências (Figura 4.8c).

A Figura 4.8 ilustra a construção de  $G'$ , onde as Figuras 4.8a e 4.8c representam um grafo desenhado em uma página, enquanto a Figura 4.8b apresenta o grafo de cruzamentos associado. Observa-se que o problema de calcular  $\mathbf{bt}_\pi(G)$  é equivalente a encontrar o número cromático de  $G'$ . Isso porque, dada uma coloração de  $G'$ , podemos desenhar as arestas correspondentes a cada cor em uma página. Visto que cada cor é um conjunto independente em  $G'$ , basta desenharmos as arestas como semi-circunferências para que o desenho não contenha cruzamentos. Explicitamos este ponto na seguinte proposição:

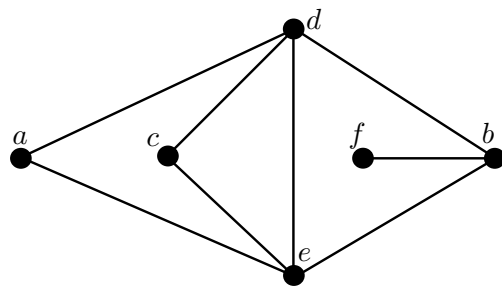
**Proposição 2.** *Seja  $G$  um grafo,  $\pi$  uma permutação circular de  $V(G)$  e  $G'$  o grafo de cruzamentos de  $G$  com relação a  $\pi$ . Então  $\mathbf{bt}_\pi(G) = \chi(G')$ .*  $\square$

Além disso, o grafo  $G'$  é um **grafo circular** (*circle graph*) (Unger, 1988). Grafos circulares são aqueles que podem ser representados por um modelo de cordas de uma circunferência, de tal forma que cada vértice é associado a uma corda e dois vértices são adjacentes se e somente se suas respectivas cordas se intersectam.

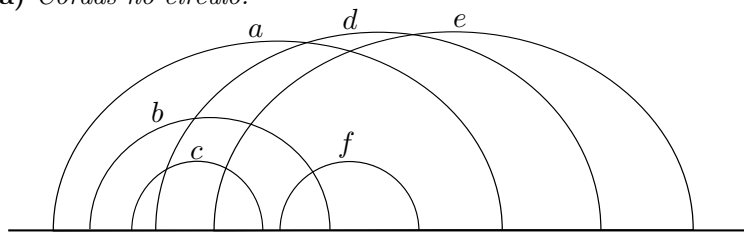
O desenho de um grafo qualquer em uma única página é uma das possíveis representações de um grafo circular, bastando ligar as pontas da espiral para formar a circunferência, da mesma forma como dito na Seção 4.1 e ilustrado nas Figuras 4.8a e 4.8c.



(a) Cordas no círculo.

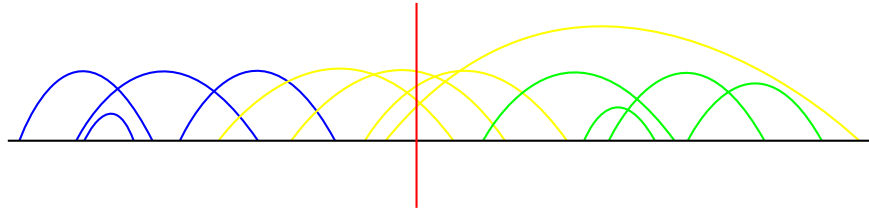


(b) Grafo de cruzamentos obtido a partir das Figura 4.8a e 4.8c, em que cada vértice representa uma corda, e cada aresta um cruzamento.



(c) Representação “cortando-se” a circunferência e esticando-a sobre uma reta. Também podemos ver esta representação como o desenho de um grafo em uma única página, com as arestas representadas através de semi-circunferências.

**Figura 4.8:** Diferentes representações de grafos circulares.



**Figura 4.9:** A linha vermelha representa o ponto  $p$ . Arcos em azul formam  $G_1$ , verdes  $G_2$  e amarelos  $G_3$ .

Alguns problemas NP-difíceis podem ser resolvidos em tempo polinomial se o grafo de entrada for circular. Tiskin (2015) mostrou um algoritmo que encontra uma clique máxima em tempo  $O(n \log^2 n)$ , enquanto Nash e Gregg (2010) desenvolveram um algoritmo de tempo  $O(n \min\{\alpha, d\})$  para o problema do conjunto independente onde  $\alpha$  é o tamanho do maior conjunto independente e  $d$  é um parâmetro do grafo chamado de densidade de arestas. Porém, o problema do número cromático se mantém NP-difícil nesta classe, como mostrado por Garey *et al.* (1980). Unger (1988) mostrou ainda que, para  $k \geq 4$ , decidir se existe uma  $k$ -coloração em um dado grafo circular é NP-completo.

Unger também conjecturou que seria possível encontrar uma  $2\omega$ -coloração de um grafo circular, onde  $\omega$  é o tamanho da maior clique, em tempo  $O(n \log n)$ . No entanto, esta afirmação foi provada falsa por Kostochka (1988). Posteriormente, Ageev (1996) apresentou um exemplo de grafo circular, com 220 vértices, livre de triângulos e cujo número cromático é 5. A relação entre o tamanho da maior clique e o número cromático em grafos circulares foi estudada e os limitantes apresentados a seguir foram obtidos. Seja  $f(\omega) = \max\{\chi(G) : G \text{ é circular e } \omega(G) \leq \omega\}$ . Kostochka (1988) mostrou que  $f(\omega) = \Omega(\omega \log \omega)$ , enquanto Černý (2007) limitou esta função superiormente mostrando a relação  $f(\omega) \leq 21 \cdot 2^\omega - 24\omega - 24$ .

Černý ainda apresentou um algoritmo polinomial de aproximação baseado na técnica de divisão e conquista cuja coloração devolvida utiliza no máximo  $O(\omega \log n)$  cores, tendo assim razão de aproximação menor ou igual a  $O(\log n)$ . O esboço do algoritmo é apresentado a seguir:

---

**Algoritmo 4:** Černý( $G$ )

---

**Entrada:** Um grafo circular  $G$ .

**Saída:** Uma coloração de  $G$ .

Tome  $G$  como sua representação através de cordas em uma circunferência;

Corte a circunferência em um ponto qualquer, transformando-a em um segmento de reta (Figura 4.8c);

Escolha o ponto  $p$  mais à esquerda no seguimento tal que no máximo  $\frac{n}{2}$  das cordas tenham ambas as pontas à direita de  $p$  (Figura 4.9);

$G_1 \leftarrow$  cordas cujas pontas estão à esquerda de  $p$ ;

$G_2 \leftarrow$  cordas cujas pontas estão à direita de  $p$ ;

$G_3 \leftarrow$  cordas com uma ponta à esquerda e outra à direita de  $p$ ;

$c \leftarrow$  coloração do grafo  $G_3$ ;

**devolva** Černý( $G_1$ )  $\cup$  Černý( $G_2$ )  $\cup c$ .

---

**Teorema 4** (Černý). *O Algoritmo 4 é uma  $O(\log n)$ -aproximação polinomial para a coloração de grafos circulares.*

*Demonstração.* Primeiramente, observamos que  $G_3$  é um grafo de permutação, e portanto pode ser colorido com  $\omega$  cores em tempo polinomial (Golumbic, 2004). Além disso, vértices de  $G_1$  não são adjacentes a vértices de  $G_2$  em  $G$ , e portanto os dois podem ter as mesmas cores. Logo, o número de cores utilizadas será menor ou igual a  $\omega$  vezes a altura da árvore de recursão, que é  $O(\log n)$ .  $\square$

Podemos também utilizar o algoritmo do conjunto independente máximo para elaborar um algoritmo de aproximação polinomial simples de mesma razão de aproximação para a coloração de

grafos circulares, e conseqüentemente, para o número de páginas mínimo em um desenho de ordem da espiral fixa de um grafo qualquer. Para tanto, considere o Algoritmo 5.

---

**Algoritmo 5:** Coloração gulosa( $G$ )

---

**Entrada:** Um grafo circular  $G$ .

**Saída:** Uma coleção de conjuntos independentes de  $G$  que cobre  $V(G)$ .

$c \leftarrow \emptyset$  ;

**enquanto**  $V(G) \neq \emptyset$  **faça**

$I \leftarrow$  maior conjunto independente em  $G$  ;  
 $G \leftarrow G \setminus I$  ;  
 $c \leftarrow c \cup \{I\}$ .

**devolva**  $c$ .

---

Dado que encontrar o conjunto independente máximo é polinomial, temos que o Algoritmo 5 também o é. Provamos agora que este algoritmo é uma  $O(\log n)$ -aproximação.

**Teorema 5.** *O Algoritmo 5 é uma  $O(\log n)$ -aproximação para o problema da coloração restrito a grafos circulares, onde  $n$  é o número de vértices do grafo.*

*Demonstração.* Seja  $\chi$  o número cromático do grafo circular  $G = (V, E)$ , e  $k$  o tamanho da coleção devolvida pelo Algoritmo 5. Temos que  $\chi \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ , o que implica que  $\alpha(G) \geq \frac{n}{\chi}$ . Logo, o algoritmo elimina pelo menos  $\frac{n}{\chi}$  vértices na primeira iteração. Além disso, como subgrafos de  $G$  têm número cromático menor ou igual a  $\chi$ , sabemos que no passo  $i$  o algoritmo pintará pelo menos  $\frac{|V(G_i)|}{\chi}$ .

Portanto, denotando por  $n_i$  o número de vértices restantes após  $i$  iterações:

$$\begin{aligned}
 n_0 &= n; \\
 n_i &\leq n_{i-1} - \frac{n_{i-1}}{\chi} \\
 &\leq n_{i-1} \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \\
 &\leq n_{i-2} \left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^2 \\
 &\vdots \\
 &\leq n_{i-i} \left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^i \\
 &= n \left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^i.
 \end{aligned}$$

Sabemos que, quando sobrarem apenas  $\chi$  vértices, podemos colorir os restantes com  $\chi$  cores. denotemos por  $i^*$  o menor inteiro tal que  $n_{i^*} \leq \chi$ . Podemos limitar superiormente  $k$  através de  $k \leq i^* + \chi$ .

Buscamos agora uma estimativa para  $i^*$ . Para isso, podemos encontrar um  $i$  tal que  $\chi \geq n \left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^i$ , pois assim temos que  $\chi \geq n_{i'}$  para todo  $i' \geq i$ , o que implica que  $i^* \leq i$ . Podemos

também assumir que  $\chi \geq 2$ , pois quando  $\chi = 1$  o algoritmo retorna a resposta ótima.

$$\begin{aligned}
 \chi &\geq n \left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^i \\
 &= n \left[\left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^\chi\right]^{\frac{i}{\chi}} \\
 &\geq n \left[\frac{1}{4}\right]^{\frac{i}{\chi}} \implies \\
 2^{2\frac{i}{\chi}} \chi &\geq n \implies \\
 2\frac{i}{\chi} + \log(\chi) &\geq \log n \implies \\
 i &\geq \chi \frac{\log n - \log(\chi)}{2}.
 \end{aligned}$$

Logo,  $i^* \leq \chi \frac{\log n - \log(\chi)}{2} + 1$ , e portanto  $k \leq \chi \left(1 + \frac{\log n - \log(\chi)}{2}\right) + 1$ .

Finalmente, obtemos a razão de aproximação do algoritmo:

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{\chi} &\leq 1 + \frac{\log n - \log(\chi)}{2} + \frac{1}{\chi} \\
 &= O(\log n).
 \end{aligned}$$

□

Pelo lado negativo, pode-se observar que o resultado de [Unger \(1988\)](#) implica que, a menos que  $P=NP$ , não existe algoritmo de aproximação polinomial de razão estritamente menor do que  $\frac{5}{4}$  para a coloração de grafos circulares. Isso porque, caso um algoritmo com tal razão de aproximação existisse, poderíamos utilizá-lo para decidir se um grafo circular dado possui uma 4-coloração ou não.

**Proposição 3.** *O problema da coloração em grafos circulares não pode ser aproximado polinomialmente por uma razão estritamente menor do que  $\frac{5}{4}$ , a menos que  $P=NP$ .* □

## Capítulo 5

# Uma Redução para MAXCUT

Neste capítulo obtemos um resultado de complexidade para o problema do corte máximo, restrito a uma classe específica de grafos. Apesar deste problema não ter uma relação direta com desenhos de grafos, o que é aqui apresentado é baseado em um resultado de complexidade conhecido para o problema de minimização de cruzamentos apresentado a seguir.

Considere o problema do desenho de grafos em livros apresentado no capítulo anterior. Dada a ordem em que os vértices aparecem na espiral de um livro, podemos fixar o número  $k$  de páginas e então minimizar os cruzamentos. No caso em que  $k = 1$ , não há o que fazer, pois a ordem dos vértices determina os cruzamentos. Mas para  $k \geq 2$ , temos a liberdade de decidir a página em que cada aresta repousa.

Tome um grafo qualquer  $G$ , uma permutação circular  $\pi$  de seus vértices e  $G'$  o grafo de cruzamentos de  $G$  com relação a  $\pi$ , como definido na Seção 4.4. Ao desenhar  $G$  em um livro de  $k$  páginas com seus vértices na ordem  $\pi$  na espiral, temos de escolher uma das páginas para cada aresta. Neste processo, um cruzamento surge sempre que desenharmos na mesma página duas arestas cujos respectivos vértices em  $G'$  são adjacentes. Portanto, minimizar o número de cruzamentos do desenho de  $G$  é equivalente a particionar os vértices de  $G'$  em  $k$  partes de forma a maximizar o número de arestas ligando vértices de partições diferentes. Ou seja, minimizar o número de cruzamentos é equivalente a encontrar um  $k$ -corte máximo de  $G'$  (Buchheim e Zheng, 2006).

Chamemos de SIMPLE MAXCUT o problema de encontrar o corte máximo em grafos sem pesos nas arestas. Masuda *et al.* (1990) provaram que minimizar o número de cruzamentos em um desenho em duas páginas com a ordem da espiral fixa é NP-difícil. Isso implica que SIMPLE MAXCUT em grafos circulares também o é, lembrando que o grafo de cruzamentos citado acima é sempre um grafo circular. Inspirando-nos na redução de Masuda *et al.*, podemos estender este resultado a grafos de comparabilidade.

Um grafo  $G = (V, E)$  é um **grafo de comparabilidade** (*comparability graph*) se existe uma relação de ordem parcial  $\prec$  sobre seus vértices tal que  $uv \in E$  se e somente se  $u \prec v$  ou  $v \prec u$ . Provaremos agora que SIMPLE MAXCUT é NP-difícil em grafos de comparabilidade. Para tanto apresentamos uma redução a partir do problema SET SPLITTING:

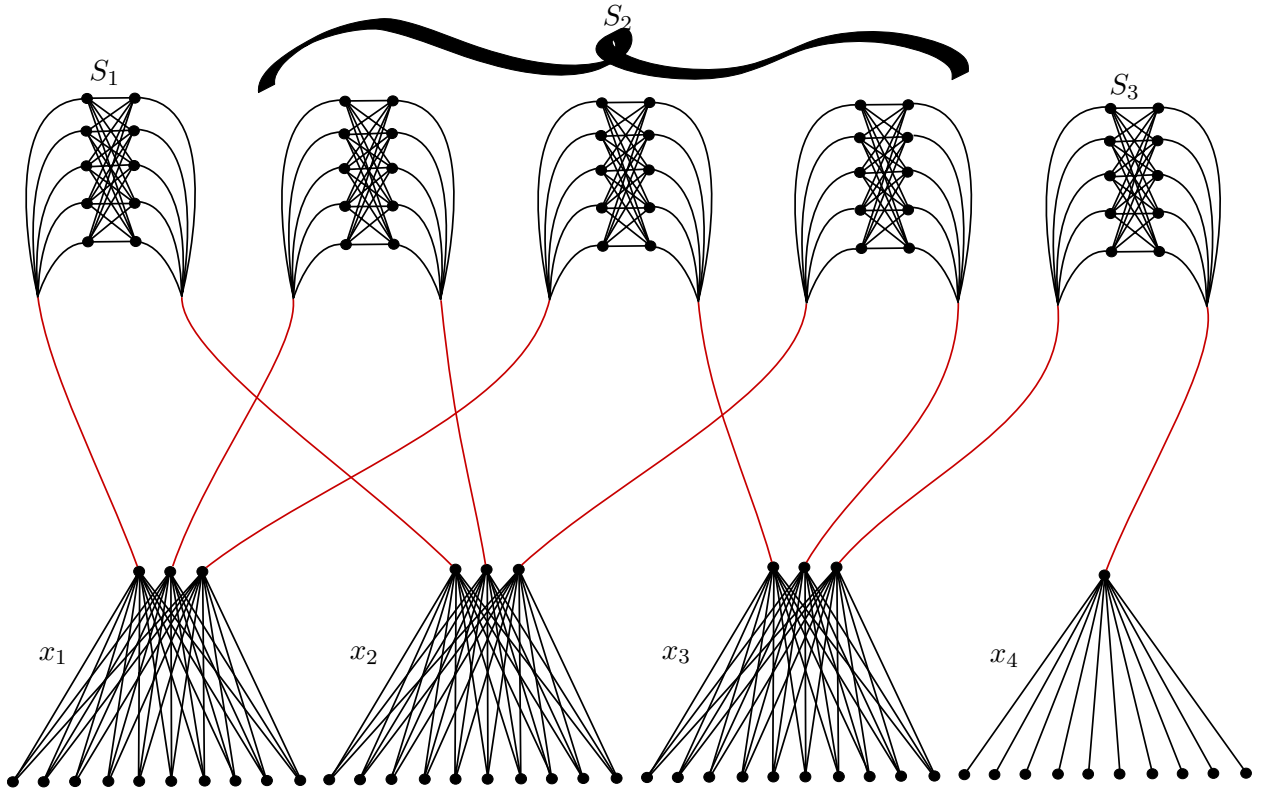
**Entrada:** Conjuntos  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  e  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\} \subset 2^X$ .

**Pergunta:** Existe uma partição  $X_1 \cup X_2 = X$  tal que  $S_j \cap X_1 \neq \emptyset$  e  $S_j \cap X_2 \neq \emptyset$  para todo elemento  $S_j \in S$ ?

Quando a instância  $(X, S)$  de SET SPLITTING admite tal partição, diremos que  $(X, S)$  é uma instância **afirmativa**.

SET SPLITTING se mantém NP-difícil mesmo quando  $S$  é restrito a conjuntos de dois e três elementos (Garey e Johnson, 1979). Seja  $(X, S)$  uma instância deste último caso, em que  $m = |X|$ ,  $n = |S|$ ,  $n_2 = |\{S_j \in S : |S_j| = 2\}|$  e  $n_3 = |\{S_j \in S : |S_j| = 3\}|$ , com  $n_2 + n_3 = n$ . Seja  $M = \binom{2n_2 + 6n_3}{2} + 1$ .

Vamos construir um grafo de comparabilidade  $G$  tal que a resposta de SIMPLE MAXCUT na instância  $G$  nos diz se  $(X, S)$  é uma instância afirmativa de SET SPLITTING ou não. Construimos



**Figura 5.1:** Arestas explícitas do grafo construído a partir da instância  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  e  $S = \{S_1 = \{x_1, x_2\}, S_2 = \{x_1, x_2, x_3\}, S_3 = \{x_3, x_4\}\}$ . Cada aresta em vermelho representa  $M$  arestas.

o conjunto de vértices  $V$  da seguinte forma:

- Para todo conjunto  $S_j \in S$  tal que  $S_j = \{x_p, x_q\}$ , criamos um grafo bipartido completo  $B_{pq}^j = (A_{pq}^j, A_{qp}^j)$ , com  $|A_{pq}^j| = |A_{qp}^j| = M$ .
- Para todo conjunto  $S_j \in S$  tal que  $S_j = \{x_p, x_q, x_r\}$ , criamos três grafos bipartidos completos  $B_{pq}^j = (A_{pq}^j, A_{qp}^j)$ ,  $B_{pr}^j = (A_{pr}^j, A_{rp}^j)$  e  $B_{qr}^j = (A_{qr}^j, A_{rq}^j)$ , com  $|A_{pq}^j| = |A_{pr}^j| = |A_{qp}^j| = |A_{qr}^j| = |A_{rp}^j| = |A_{rq}^j| = M$ .
- Para todo elemento  $x_p \in X$  e para todo  $S_j \in S$ :
  - Se  $S_j = \{x_p, x_q\}$ , criamos o vértice  $w_{pq}^j$ .
  - Se  $S_j = \{x_p, x_q, x_r\}$ , criamos os vértices  $w_{pq}^j$  e  $w_{pr}^j$ .
- Para todo elemento  $x_p \in X$ , criamos o conjunto de vértices  $Z_p$ , com  $|Z_p| = 2M$ .

Além disso, definimos uma relação de ordem parcial  $\prec$  em  $V$  como segue:

- Para todo  $B_{pq}^j = (A_{pq}^j, A_{qp}^j)$ , para todo  $u \in A_{pq}^j$  e  $v \in A_{qp}^j$ , definimos  $u \prec v$  se  $p < q$  e  $v \prec u$  se  $q < p$ .
- Para todo  $w_{pq}^j$  e  $u \in A_{pq}^j$ , definimos  $u \prec w_{pq}^j$  se  $p < q$  e  $w_{pq}^j \prec u$  se  $q < p$ .
- Para todo  $Z_p$ ,  $z \in Z_p$  e  $w_{pq}^j$ , definimos  $z \prec w_{pq}^j$  se  $p < q$  e  $w_{pq}^j \prec z$  se  $q < p$ .

Seja  $G = (V, E)$  o grafo de comparabilidade induzido por  $\prec$  em  $V$ . As arestas listadas acima serão chamadas de **explícitas**, e as outras de **implícitas**. As únicas arestas implícitas induzidas por  $\prec$  estão entre vértices  $w$  relacionados ao mesmo  $x \in X$ , por transitividade através de algum vértice  $z$ , como exemplificado pela Figura 5.2. Estas totalizam no máximo  $\binom{2n_2+6n_3}{2} = M - 1$  arestas. Seja  $K = M(n_3 + 1) - 1$  e  $mc = \max\{|\delta(U)| : U \subset V\}$ . A figura 5.1 mostra um exemplo de grafo construído como acima.



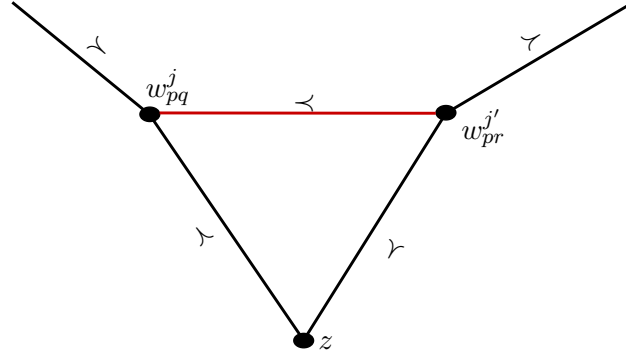


Figura 5.2: A aresta em vermelho foi induzida por transitividade através do vértice  $z$ .

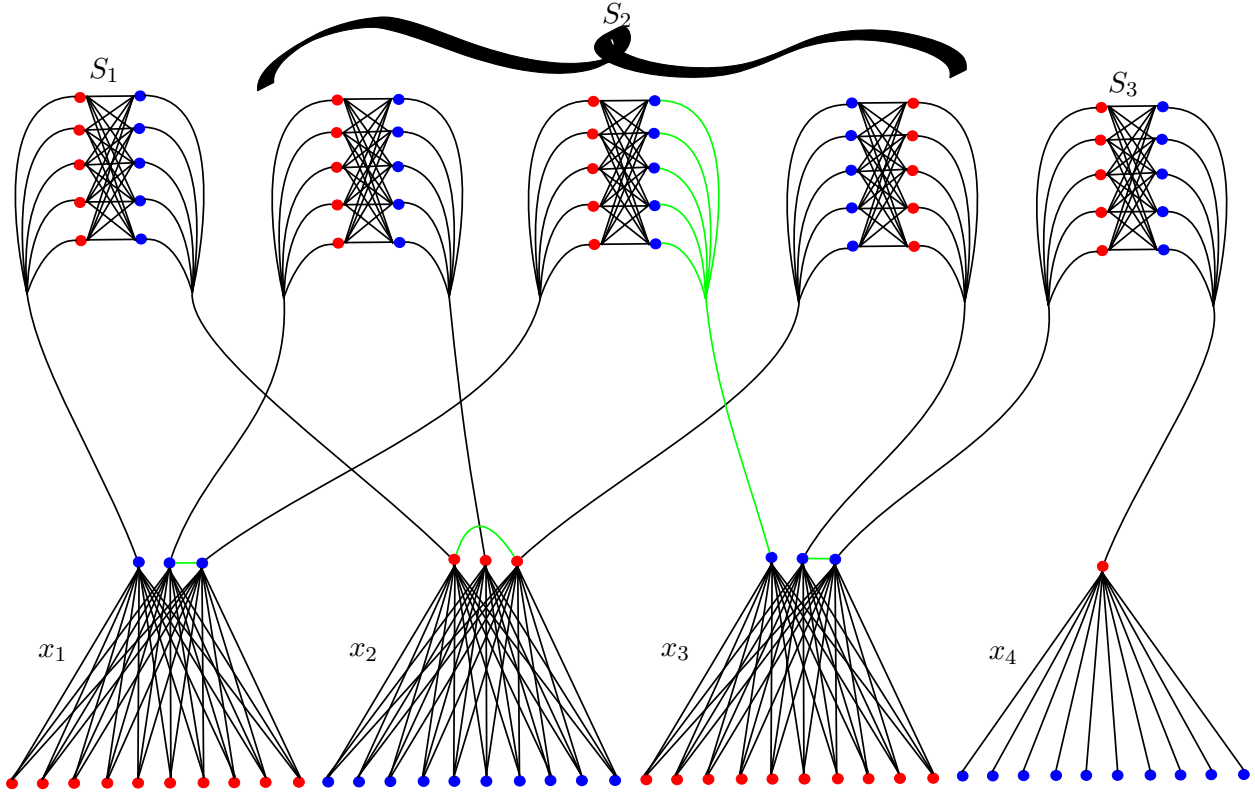


Figura 5.3: Vértices azuis estão em  $U$  e vermelhos não. As arestas verdes não pertencem ao corte.

**Lema 6.** Se  $(X, S)$  é um instância afirmativa de SET SPLITTING, então  $mc \geq |E| - K$ .

*Demonstração.* Seja  $X_1, X_2$  a partição de  $X$  que separa todos os conjuntos em  $S$ . Vamos construir um conjunto de vértices  $U$  tal que  $|\delta(U)| \geq |E| - K$ .

Começamos com  $U$  vazio. Para todo  $x_p \in X_1$  e todo  $w_{pq}^j$ , fazemos  $w_{pq}^j \in U$ . Já para todo  $x_p \in X_2$  e todo  $z \in Z_p$ , fazemos  $z \in U$ .

Além disso, para todo  $S_j = \{x_p, x_q\} \in S$  tal que  $x_p \in X_1$ , fazemos  $A_{qp}^j \subset U$ . Para todo  $S_j = \{x_p, x_q, x_r\} \in S$  tal que  $x_p \in X_1$  e  $x_q, x_r \in X_2$ , fazemos  $A_{qp}^j, A_{qr}^j, A_{rp}^j \subset U$ . Para todo  $S_j = \{x_p, x_q, x_r\} \in S$  tal que  $x_p, x_q \in X_1$ , fazemos  $A_{rp}^j, A_{rq}^j, A_{pq}^j \subset U$ . O corte é exemplificado pela Figura 5.3.

Todas as arestas explícitas estarão no corte, a menos de  $M$  arestas para cada conjunto de três elementos em  $S$ . Além disso, as arestas implícitas também não estarão no corte. Assim,

$$mc \geq |\delta(U)| \geq |E| - Mn_3 - \binom{2n_2 + 6n_3}{2} = |E| - M(n_3 + 1) + 1 = |E| - K.$$

□

**Lema 7.** *Se  $mc \geq |E| - K$ , então  $(X, S)$  é uma instância afirmativa de SET SPLITTING.*

*Demonstração.* Seja  $U \subset V$  tal que  $|\delta(U)| \geq |E| - K$ . Para todo  $x_p \in X$ , seja  $V_p = \{w_{pq}^j : S_j \in S, x_q \in X\}$ . Se  $|V_p \setminus U| \geq |V_p \cap U|$ , mudamos  $U$  de tal forma que  $Z_p \subset U$ . Caso contrário,  $z \notin U$  para todo  $z \in Z_p$ .

Agora, para cada  $x_p \in X$ , alteramos  $U$  para que, para todo  $w \in V_p$ ,  $w \in U$  se e somente se  $Z_p \cap U = \emptyset$ . O corte induzido por  $U$  só pode aumentar com esta operação, já que as ligações entre  $w$  e os vértices de  $Z_p$  representam mais da metade das arestas incidentes a  $t$ .

Seja  $B_{pq}^j$  qualquer. Modificamos  $U$  de tal forma que para todo  $u \in A_{pq}^j$ ,  $u \in U$  se e somente se  $|A_{qp}^j \setminus U| \geq |A_{qp}^j \cap U|$ . Depois, fazemos com que para todo  $u \in A_{qp}^j$ ,  $u \in U$  se e somente se  $A_{pq}^j \cap U = \emptyset$ . Repetimos esta operação para todos os subgrafos bipartidos completos  $B_{pq}^j$ .

Como cada uma destas operações não diminui o tamanho do corte, ainda temos que  $|\delta(U)| \geq |E| - K$ . Definimos então  $X_1 = \{x_p \in X : Z_p \cap U = \emptyset\}$  e  $X_2 = \{x_p \in X : Z_p \subset U\}$ . Contamos agora o número mínimo de arestas de fora do corte.

Para cada  $S_j = \{x_p, x_q, x_r\} \in S$ , se  $X_1, X_2$  não separa  $S_j$ , então para cada par  $\{x_p, x_q\}, \{x_p, x_r\}, \{x_q, x_r\}$ ,  $M$  arestas não pertencem ao corte, totalizando  $3M$  arestas de fora. Caso contrário, um dos pares  $\{x_p, x_q\}, \{x_p, x_r\}, \{x_q, x_r\}$  está inteiramente contido na mesma parte, e portanto pelo menos  $M$  arestas não estão no corte. Já no caso em que  $S_j = \{x_p, x_q\}$  e  $X_1, X_2$  não separa  $S_j$ , pelo menos  $M$  arestas não pertencem ao corte. Portanto, se  $n^-$  é o número de conjuntos em  $S$  que não são separados por  $X_1, X_2$ , então:

$$|\delta(U)| \leq |E| - n_3 M - n^- M = |E| - M(n_3 + n^-).$$

Logo, se  $n^- \geq 1$ , teríamos que

$$|\delta(U)| \leq |E| - M(n_3 + 1) = |E| - K - 1.$$

□

Como  $G$  pode claramente ser construído em tempo polinomial a partir de  $X$  e  $S$ , temos o seguinte teorema:

**Teorema 6.** *SIMPLE MAXCUT é NP-difícil em grafos de comparabilidade.*

□

# Conclusão

Neste trabalho estudamos problemas relacionados com desenhos de grafos, com o objetivo de minimizar o número de cruzamentos. Estes problemas, têm se mostrado resistentes às tentativas de solução. Apesar de serem conhecidos e estudados há décadas, pouco se sabe mesmo nos casos mais restritos.

Talvez um dos resultados mais impressionantes seja o obtido por [Cabello e Mohar \(2013\)](#), demonstrando que CROSSING NUMBER se mantém NP-difícil quando restrito à classe dos grafos quase-planares, isto é, grafos para os quais existe uma aresta que, se removida, resulta em um grafo planar. Este resultado ilustra bem a complexidade computacional envolvida na minimização de cruzamentos.

Do ponto de vista de aproximação, muito pouco é sabido. A distância entre os limites de inaproximabilidade e a razão de aproximação dos algoritmos conhecidos ainda é grande. Do lado negativo, apresentamos neste trabalho uma modificação do resultado de [Cabello \(2013\)](#), que apesar de não levar a um novo limitante, traz uma vantagem em potencial, ao utilizar como base o problema MULTICUT, que aparenta ser de mais difícil aproximação.

Como comentado anteriormente, aprimorar a redução apresentada aqui para que não se restrinja a um número fixo de pares a serem separados resultaria em uma melhora do limitante inferior de aproximação, pois sabe-se que, sob as hipóteses de que  $P \neq NP$  e da Conjectura dos Jogos Únicos, MULTICUT não pode ser aproximado por fator constante ([Chawla et al., 2006](#)).

Abordamos também os desenhos em livros, apresentando o problema em sua forma mais geral e alguns casos mais restritos. Novamente, sabe-se da dificuldade de resolver exatamente estes problemas, mas a sua aproximabilidade ainda é pouco conhecida. Neste contexto, apresentamos uma prova alternativa à apresentada por [Masuda et al. \(1987\)](#) para o caso do desenho em uma única página.

Por fim, adaptamos outro resultado de [Masuda et al. \(1990\)](#) sobre desenhos de grafos em livros, para mostrar a dificuldade de MAXCUT em grafos de comparabilidade. Este último capítulo exemplifica como o conhecimento sobre este assunto pode ser aplicado a outros problemas.



# Referências Bibliográficas

- Ábrego et al. (2013)** Bernardo M. Ábrego, Oswin Aichholzer, Silvia Fernandez-Merchant, Pedro Ramos e Gelasio Salazar. The 2-page crossing number of  $K_n$ . *Discrete and Computational Geometry*, 49(4):747–777. Citado na pág. 27
- Ackerman (2013)** Eyal Ackerman. On topological graphs with at most four crossings per edge. Manuscrito disponível em “<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?%doi=10.1.1.423.4749&rep=rep1&type=pdf>”, 2013. Citado na pág. 11
- Ageev (1996)** Alexander A. Ageev. A triangle-free circle graph with chromatic number 5. *Discrete Mathematics*, 152(1-3):295–298. Citado na pág. 32
- Ajtai et al. (1982)** Miklós Ajtai, Václav Chvátal, M. M. Newborn e Endre Szemerédi. Crossing-free subgraphs. *Theory and Practice of Combinatorics*, North Holland, 1982. Citado na pág. 11
- Bernhart e Kainen (1979)** Frank Bernhart e Paul C. Kainen. The book thickness of a graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(3):320–331. Citado na pág. 23, 26
- Blažek e Koman (1964)** J. Blažek e M. Koman. A minimal problem concerning complete plane graphs. *Theory of Graphs and Its Applications*, Academic Press, 1964. Citado na pág. 8, 11
- Buchheim e Zheng (2006)** Christoph Buchheim e Lanbo Zheng. Fixed linear crossing minimization by reduction to the maximum cut problem. *Lecture Notes in Computer Science*, 4112: 507–516. Citado na pág. 35
- Cabello (2013)** Sergio Cabello. Hardness of approximation for crossing number. *Discrete & Computational Geometry*, 49(2):348–358. Citado na pág. 17, 39
- Cabello e Mohar (2013)** Sergio Cabello e Bojan Mohar. Adding one edge to planar graphs makes crossing number and 1-planarity hard. *SIAM Journal on Computing*, 42(5):1803–1829. Citado na pág. 15, 39
- Călinescu et al. (2000)** Gruiă Călinescu, Howard Karloff e Yuval Rabani. An improved approximation algorithm for multiway cut. *Journal of Computer and System Sciences*, 60(3):564–574. Citado na pág. 21
- Černý (2007)** Jakub Černý. Coloring circle graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 29 (15):457–461. Citado na pág. 32
- Chawla et al. (2006)** Shuchi Chawla, Robert Krauthgamer, Ravi Kumar, Yuval Rabani e D. Sivakumar. On the hardness of approximating MULTICUT and SPARSEST-CUT. *Computational Complexity*, 15(2):94–114. Citado na pág. 21, 39
- Chung et al. (1987)** Fan R. K. Chung, Frank T. Leighton e Arnold L. Rosenberg. Embedding graphs in books: A layout problem with applications to vlsi design. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 8(1):33–58. Citado na pág. 23

- Chuzhoy (2011)** Julia Chuzhoy. An algorithm for the graph crossing number problem. Em *Proceedings of the forty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, páginas 303–312. Citado na pág. 17
- Diestel (2010)** Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag. Citado na pág. 1, 10, 12
- Garey e Johnson (1979)** Michael R. Garey e David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman. Citado na pág. 35
- Garey e Johnson (1983)** Michael R. Garey e David S. Johnson. Crossing number is NP-complete. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 4(3):312–316. Citado na pág. 15
- Garey et al. (1980)** Michael R. Garey, David S. Johnson, Gary L Miller e Christos H. Papadimitriou. The complexity of coloring circular arcs and chords. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 1(2):216–227. Citado na pág. 32
- Garg et al. (1996)** Naveen Garg, Vijay V. Vazirani e Mihalis Yannakakis. Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications. *SIAM Journal on Computing*, 25(2):235–251. Citado na pág. 21
- Golumbic (2004)** Martin Charles Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. North-Holland. Citado na pág. 32
- Grohe (2004)** Martin Grohe. Computing crossing number in quadratic time. *Journal of Computer and System Sciences*, 68(2):285–302. Citado na pág. 17
- Gutwenger et al. (2005)** Carsten Gutwenger, Petra Mutzel e René Weiskircher. Inserting an edge into a planar graph. *Algorithmica*, 41(4):289–308. Citado na pág. 15, 17
- Guy (1960)** Richard K. Guy. A combinatorial problem. *Nabla (Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society)*, 7:68–72. Citado na pág. 7
- Guy (1969)** Richard K. Guy. The decline and fall of Zarankiewicz’s theorem. *Proof Techniques in Graph Theory*. Academic Press, 1969. Citado na pág. 7, 8
- Guy (1972)** Richard K. Guy. Crossing numbers of graphs. *Lecture Notes in Mathematics*, 303:111–124. Citado na pág. 8
- Hliněný e Salazar (2007)** Petr Hliněný e Gelasio Salazar. On the crossing number of almost planar graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 4372:162–173. Citado na pág. 15, 17
- Hliněný (2006)** Petr Hliněný. Crossing number is hard for cubic graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 96(4):455–471. Citado na pág. 15
- Hopcroft e Tarjan (1974)** John Hopcroft e Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM*, 21(4):549–568. Citado na pág. 15
- Kawarabayashi e Reed (2007)** Ken-ichi Kawarabayashi e Bruce Reed. Computing crossing number in linear time. Em *Proceedings of the thirty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing*, páginas 382–390. Citado na pág. 17
- Khot (2002)** Subhash Khot. On the power of unique 2-prover 1-round games. Em *Proceedings of the thirty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing*, páginas 767–775. Citado na pág. 21
- Khot e Regev (2008)** Subhash Khot e Oded Regev. Vertex cover might be hard to approximate to within  $2 - \epsilon$ . *Journal of Computer and System Sciences*, 74(3):335–349. Citado na pág. 21

- Khot et al. (2007)** Subhash Khot, Guy Kindler, Elchanan Mossel e Ryan O’Donnell. Optimal inapproximability results for MAX-CUT and other 2-variable CSPs. *SIAM Journal on Computing*, 37(1):319–357. Citado na pág. 21
- Kleitman (1970)** Daniel J. Kleitman. The crossing number of  $K_{5,n}$ . *Journal of Combinatorial Theory*, 9(4):315–323. Citado na pág. 7, 8, 9
- Kleitman (1976)** Daniel J. Kleitman. A note on the parity of the numbers of crossings of a graph. *Journal of Combinatorial Theory*, 21(1):88–89. Citado na pág. 7
- Kostochka (1988)** Alexandr V. Kostochka. On upper bounds on chromatic numbers of braphs. *Trudy Inst. Mat.* Citado na pág. 32
- Leighton (1983)** Frank T. Leighton. *Complexity Issues in VLSI: Optimal Layouts for the Shuffle-Exchange Graph and Other Networks*. MIT Press. Citado na pág. 11
- Leighton (1984)** Frank T. Leighton. New lower bound techniques for vlsi. *Mathematical Systems Theory*, 17(1):47–70. Citado na pág. 1
- Masuda et al. (1987)** Sumio Masuda, Toshinobu Kashiwabara, Kazuo Nakajima e Toshio Fujisawa. On the crossing minimization of links in computer network layout. Relatório técnico, University of Maryland. Citado na pág. 27, 39
- Masuda et al. (1990)** Sumio Masuda, Kazuo Nakajima, Toshinobu Kashiwabara e Toshio Fujisawa. Crossing minimization in linear embeddings of graphs. *IEEE Transactions on Computers*, 39(1):124–127. Citado na pág. 35, 39
- McQuillan e Richter (2015)** Dan McQuillan e R. Bruce Richter. On the crossing number of  $K_n$  whithout computer assitance. *Journal of Graph Theory*. doi: 10.1002/jgt.21908. Citado na pág. 8
- McQuillan et al. (2015)** Dan McQuillan, Shengjun Pan e R. Bruce Richter. On the crossing number of  $K_{13}$ . *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 115:224–235. Citado na pág. 8
- Nash e Gregg (2010)** Nicholas Nash e David Gregg. An output sensitive algorithm for computing maximum independent set of a circle graph. *Information Processing Letters*, 110(16):630–634. Citado na pág. 32
- Pach e Tóth (2000)** János Pach e Géza Tóth. Which crossing number is it anyway? *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 80(2):225–246. Citado na pág. 5
- Pan e Richter (2007)** Shengjun Pan e R. Bruce Richter. The crossing number of  $K_{11}$  is 100. *Journal of Graph Theory*, 56(2):128–134. Citado na pág. 8
- Pelsmajer et al. (2008)** Michael J. Pelsmajer, Marcus Schaefer e Daniel Štefankovič. Odd crossing number and crossing number are not the same. *Discrete & Computational Geometry*, 39(1):442–454. Citado na pág. 5
- Tiskin (2015)** Alexander Tiskin. Fast distance multiplication of unit-monge matrices. *Algorithmica*, 71(4):859–888. Citado na pág. 32
- Turán (1977)** Paul Turán. A note of welcome. *Journal of Graph Theory*, 1(1):7–9. Citado na pág. 1
- Tutte (1970)** William T. Tutte. Toward a theory of crossing numbers. *Journal of Combinatorial Theory*, 8(1):45–53. Citado na pág. 3
- Unger (1988)** Walter Unger. On the k-colouring of circle-graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 294:61–72. Citado na pág. 30, 32, 34

- Wigderson (1982)** Avi Wigderson. The complexity of the hamiltonian circuit problem for maximal planar graphs. *Technical Report EECS*. Citado na pág. [26](#)
- Woodall (1993)** Douglas R. Woodall. Cyclic-order graphs and Zarankiewicz's crossing-number conjecture. *Journal of Graph Theory*, 17(6):657–671. Citado na pág. [7](#), [8](#), [9](#)
- Zarankiewicz (1954)** Kazimierz Zarankiewicz. On a problem of P. Turán concerning graphs. *Fundamenta Mathematicae*, 41(1):137–145. Citado na pág. [1](#), [7](#), [8](#), [9](#)