Quantidade de orientações de grafos livres de circuitos direcionados cíclicos

Roberto Freitas Parente

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Ciência da computação
Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, Fevereiro de 2012

Quantidade de orientações de grafos livres de circuitos direcionados cíclicos

Esta dissertação contém as correções e alterações
sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa
realizada por Roberto Freitas Parente em 13/12/2011.
O original encontra-se disponível no Instituto de
Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Carlos Hoppen - UFRGS
- Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio - UFC

Agradecimentos

Agradeço à minha família representada pela minha "véa" Águida Freitas Parente e meu "véi" Francisco Antonio Camelo Parente, por sempre me apoiarem pensando no meu melhor.

Ao meu orientador Yoshiharu Kohayakawa pela paciência, dedicação, atenção, disponibilidade e exemplo de pesquisador a ser seguido por qualquer estudante que pense em seguir carreia acadêmica. Provavelmente nenhum outro teria sido tão bom orientador para mim.

Ao meu amigo Guilherme Mota (Guilérme), pois além da verdadeiríssima amizade também foi praticamente um co-orientador, sempre se disponibilizando para estudar junto, aprender junto, virar noites no laboratório. Sem sua ajuda a conclusão do mestrado seria muito mais complicada.

Ao Rafael Barbosa (Rafinha) que, assim como Guilherme, faz parte do trio cearense. Acima de tudo pela amizade sincera, pelas viradas de noite juntas no laboratório, saídas conjuntas, brigas dos três e sempre um apoiando ao outro. Com certeza foi muito mais fácil a mudança para São Paulo estando ao lado destes.

Às minhas amigas Natália Albuquerque (Peitão), Ana Haipek (Aninha) e Patrícia Factore (Tica), que sempre se dispuseram a estar ao meu lado para dar excelentes conselhos, jogar conversas foras e, principalmente, pela verdadeira amizade e carinho. Ademais, gostaria de ressaltar que com a chegada da Natália "Peito" se consagrou o quarteto nordestino (Eu, Rafinha, Guilérme e Naty Peito).

À projete liberdade capoeira, representada pelo Mestre Gladson, que por muitas vezes serviu com válvula de escape para as dificuldades do dia a dia e para subjetivar a vida.

Por fim, agradeço às diversas pessoas que conheci e suas contribuições, sejam na formação acadêmica ou na formação sócio-cultural, e a quem mais achar que deva estar aqui :-).

Quantidade de orientações de grafos livres de circuitos direcionados cíclicos

Resumo

Seja $\vec{H}$ uma orientação do grafo H. Alon e Yuster [The number of orientations having no fixed tournament, *Combinatorica*, **26** (2006), no. 1, 1–16] propuseram o problema de determinar ou estimar $D(n, m, \vec{H})$, a quantidade máxima de *orientações livres de* $\vec{H}$ de um grafo com n vértices e m arestas. Se substituirmos o máximo pelo 'máximo essencial', ou seja, consideramos o máximo sobre *quase todos* os grafos de n vértices e com m arestas, em oposição à *todos* deles, o problema é mais acessível. Mostramos que esse máximo essencial é $2^{o(m)}$ se $\vec{H}$ é o circuito direcionado cíclico $C_\ell^{\circlearrowright}$ de tamanho ℓ ($\ell \geq 3$), se $m \gg n^{1+1/(\ell-1)}$. Por outro lado, o mínimo essencial é $2^{(1-o(1))m}$, se $m \ll n^{1+1/(\ell-1)}$. O método de prova nos dá resultado da mesma natureza para grafos orientados bipartidos $\vec{H}$ que contêm circuito direcionado cíclico.

Palavras-chave: Grafos aleatórios, Lema da regularidade esparso, Orientações proibidas

The number of orientations with no directed cycle of a given length

Abstract

Let $\vec{H}$ be an orientation of a graph H. Alon and Yuster [The number of orientations having no fixed tournament, *Combinatorica*, **26** (2006), no. 1, 1–16] proposed the problem of determining or estimating $D(n, m, \vec{H})$, the maximum number of *$\vec{H}$-free orientations* a graph with n vertices and m edges may have. If we replace the maximum by 'essential maximum', that is, if we are allowed to consider the maximum over the *majority* of n-vertex graphs with m edges, as opposed to *all* of them, the problem becomes more accessible. We show that this essential maximum is $2^{o(m)}$ if $\vec{H}$ is the directed cycle $C_\ell^{\circlearrowright}$ of length ℓ ($\ell \geq 3$), as long as $m \gg n^{1+1/(\ell-1)}$. On the other hand, the corresponding essential minimum is $2^{(1-o(1))m}$ if $m \ll n^{1+1/(\ell-1)}$. The proof method yields results of the same nature for oriented bipartite graphs $\vec{H}$ that contain a directed cycle.

Keywords: Random graphs, sparse regularity lemma, forbidden orientations

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No presente trabalho, investigamos resultados na área de teoria extremal dos grafos. O problema pesquisado diz respeito a contar a quantidade de orientações de um grafo G sem que nenhuma destas orientações contenham um dado subgrafo direcionado $\vec{F}$. Como exemplo, veja a Figura 1.1.

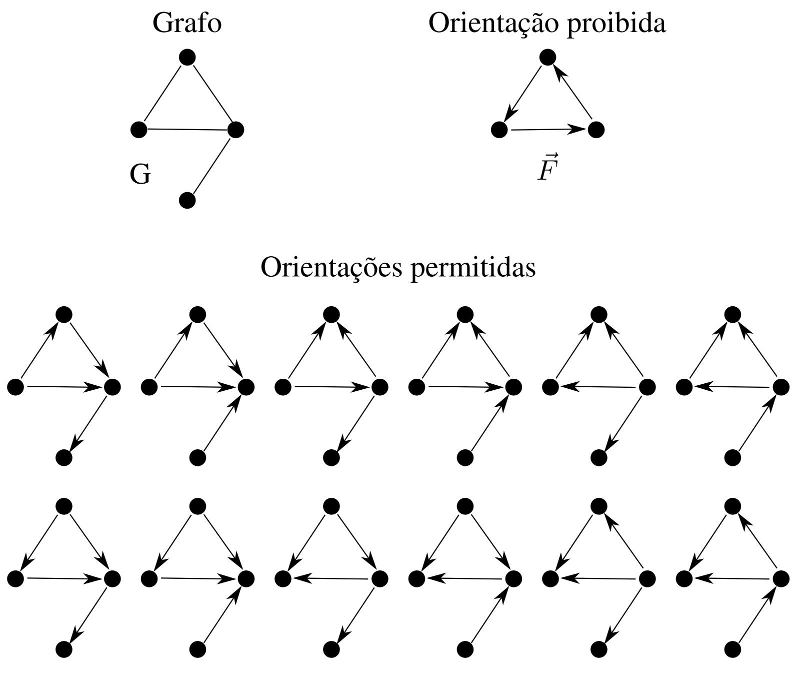

Figura 1.1: *Quantidade de orientações de G livres de $\vec{F}$*

Também estamos interessados em responder as seguintes perguntas: "dentre todos os grafos, qual grafo tem maior quantidade de orientações livres de $\vec{F}$?", "fixando a quantidade de vértices e arestas do grafo G, o que acontece com a quantidade de orientações permitidas?".

Nosso problema está diretamente relacionado aos resultados clássicos de Paul Turán [23], Paul Erdős e Arthur Stone [13].

Nossos resultados serão provados utilizando argumentos probabilísticos e, portanto, teremos versões determinísticas e probabilísticas dos resultados.

1.1 Um pouco de teoria de grafos

Agora apresentamos algumas definições gerais que serão utilizadas durante o texto. Porém, vale ressaltar que outras definições serão apresentadas no momento oportuno.

Um *grafo não direcionado* (ou *grafo*) G é um par ordenado $G = (V, E)$, onde $V = V(G)$ é um conjunto de elementos que denominamos *vértices* e $E = E(G)$ é um conjunto de pares não ordenados de vértices, denominados de *arestas não direcionadas* (ou, simplesmente, *arestas*). Um *grafo direcionado* (ou *digrafo*) $\vec{G}$ é um par $\vec{G} = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de pares ordenados de vértices, denominados *arestas direcionadas (ou arcos)*. Um grafo $G = (V, E)$ é dito *simples* quando os pares $\{i, i\}$, para todo $i \in V$, não pertencem ao conjunto de arestas e também não há arestas múltiplas. Denotamos por e_G (ou $e(G)$) a quantidade de arestas do grafo G e $v(G)$ a quantidade de vértices de G. Sejam G e H dois grafos (grafos direcionados), dizemos que H é *subgrafo* (*subgrafo direcionado*) de G se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$.

Dados dois vértices i e j, denota-se $\{i, j\}$ uma aresta não direcionada entre i e j e por (i, j) um arco de i para j. Dizemos que $\vec{G}$ é uma *orientação de* G se substituímos cada uma das arestas $\{i, j\} \in E(G)$ por um dos arcos (i, j) ou (j, i). Dizemos que G é o *grafo subjacente* de um $\vec{G}$ quando substituimos todos os arcos $(i, j) \in E(\vec{G})$ por arestas $\{i, j\}$.

Se X e Y são subconjuntos disjuntos de vértices de um grafo G, então $e_G(X, Y)$ define a quantidade de arestas entre X e Y em G. Se X e Y são subconjuntos disjuntos de vértices de um digrafo $\vec{G}$, então $e_{\vec{G}}(X, Y)$ define a quantidade de arcos de X para Y em $\vec{G}$. Dois vértices i, j são ditos *adjacentes* quando $\{i, j\} \in E$. Dizemos que um grafo é *conexo* se, para todo par de vértices $\{i, j\}$ existe um caminho de i para j, isto é, existe uma sequência de vértices tal que, de cada um de seus vértices, há uma aresta para o próximo vértice da sequência.

Um *isomorfismo* entre dois grafos G e H é uma bijeção $f : V(G) \to V(H)$ tal que dois vértices v e w são adjacentes em G se e somente se $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H. Dizemos que G

é *isomorfo* a H quando existe um um isomorfismo entre G e H. O mesmo ocorre para digrafos. Dizemos que um grafo G é *livre de* H se não contém nenhum subgrafo isomorfo a H.

Um *grafo completo* é um grafo simples em que todos os pares de vértices são arestas. Denotamos o grafo completo com n vértices por K_n.

O *número cromático* $\chi(G)$ é a menor quantidade de cores necessárias para colorir os vértices do grafo G sem que vértices adjacentes tenham cores iguais.

1.2 Subgrafos proibidos

Uma questão central em teoria extremal dos grafos é determinar a quantidade máxima de arestas que um grafo G pode ter sem que exista um subgrafo de G isomorfo a H. Denotamos por $\mathrm{ex}(n, H)$ a quantidade máxima de arestas que um grafo livre de H com n vértices pode ter. Um resultado clássico relacionado a esta pergunta, demonstrado em 1941 por Paul Turán [23], alavancou significativamente a teoria extremal de grafos.

Teorema 1 (Teorema de Turán [23]). *Para todo $k > 2$ e $n > 1$*

$$\mathrm{ex}(n, K_k) \leq \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Em 1946, Erdős e Stone [13] provaram um resultado equivalente para grafos H genéricos, que, na forma enunciada por Erdős e Simonovits [12] corresponde ao seguinte teorema.

Teorema 2 (Erdős–Simonovits [12]). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que se $n \geq n_0$, então*

$$\mathrm{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon\right) \binom{n}{2}.$$

1.3 Grafos aleatórios

A noção de grafos aleatórios e os métodos probabilísticos foram consolidados por Paul Erdős em 1947 ao provar um limitante inferior exponencial para os números de Ramsey [9]. O modelo introduzido por Erdős pode ser visto como escolher aleatoriamente um grafo com probabilidade uniforme dentre todos os grafos rotulados possíveis. Em outras palavras, definimos como um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde $\Omega = \mathcal{G}_n$ é o conjunto de todos os grafos rotulados com conjunto de vértice $[n] = \{1, \ldots, n\}$, e $\mathcal{F}$ é a família de todos os subconjuntos de Ω. Assim, para todo $G \in \mathcal{G}_n$

$$\mathbb{P}(G) = 2^{-\binom{n}{2}}.$$

Com o passar do tempo, diversos modelos de grafos aleatórios foram propostos. No presente trabalho, usaremos os dois modelos clássicos: *binomial* e *uniforme*. Seja p um número real, $0 \leq p \leq 1$, e n um inteiro positivo, o grafo aleatório binomial é denotado por $G_{n,p}$. A construção de um elemento do espaço de probabilidade é da seguinte forma: dado o conjunto de vértices $[n]$, para todo $i, j \in [n]$ a aresta $\{i, j\}$ é inserida com probabilidade p. Então, para um grafo $G \in \mathcal{G}_n$, com e_G arestas, temos

$$\mathbb{P}(G) = p^{e_G}(1-p)^{\binom{n}{2}-e_G}.$$

A principal vantagem do modelo binomial é a independência das arestas. Em contrapartida, o número de arestas não é fixo e varia de acordo com o valor esperado $\binom{n}{2}p$. Se desejamos trabalhar com um número fixo de arestas, é mais conveniente utilizarmos o modelo uniforme.

Seja n e m inteiros positivos tal que com $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$. O grafo aleatório uniforme é denotado por $G_{n,m}$. Nesse caso, temos $\Omega = \mathcal{G}_{n,m}$ a família de todos os grafos rotulados com conjunto de vértices $[n]$ e exatamente m arestas. Então, para todo grafo $G \in \mathcal{G}_{n,m}$, temos

$$\mathbb{P}(G) = \binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1}.$$

É sabido que os dois modelos são, em diversos casos, assintoticamente equivalentes, desde que $\binom{n}{2}p$ seja próximo de m. Os detalhes das definições e relações podem ser encontrados no Capítulo 1 de [15].

Propriedades de grafos aleatórios

Uma *propriedade de grafos* é uma família $\mathcal{Q}$ de subconjuntos de $\mathcal{G}_n$. Seja G um grafo com n vértices. Dizemos que G tem a propriedade $\mathcal{Q}$ se $G \in \mathcal{Q}$.

Dados G_1, $G_2 \in \mathcal{G}_n$ tal que G_1 é subgrafo de G_2, dizemos que uma propriedade de grafos $\mathcal{Q}$ é *crescente* se $G_1 \in \mathcal{Q}$ implica $G_2 \in \mathcal{Q}$. Analogamente, dizemos que uma propriedade de grafos $\mathcal{Q}$ é *decrescente* se $G_2 \in \mathcal{Q}$ implica $G_1 \in \mathcal{Q}$. Por fim, dizemos que uma propriedade de grafos é *monótona* se é crescente ou decrescente.

Um exemplo de propriedade de grafos é a conexidade. Seja $\mathcal{Q} \subset \mathcal{G}_n$ tal que se $G \in \mathcal{Q}$ então G é conexo. Por exemplo, seja $G_1 = (V, E)$ o grafo onde $V(G) = [n]$ e $\{i, j\} \in E(G)$ se $i < j$, para todo $i, j \in [n]$. Neste caso G_1 tem a propriedade $\mathcal{Q}$, isto é, $G_1 \in \mathcal{Q}$. Seja G_2 o grafo com o mesmo conjunto de vértices de G_1 e $E(G_2) = E(G_1) \setminus \bigcup_{i=2}^{n} \{1, i\}$. Observe que G_2 não tem a propriedade $\mathcal{Q}$, ou seja, $G_2 \notin \mathcal{Q}$. A propriedade $\mathcal{Q}$ é crescente, pois se G é conexo, ao adicionarmos novas arestas a G, o grafo continua conexo.

Seja $\mathcal{Q}$ uma propriedade de grafos. Dizemos que o grafo $G_{n,p} \in \mathcal{Q}$ *assintoticamente quase certamente* (a.q.c.) quando, para $G \in G_{n,p}$, temos

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(G \in \mathcal{Q}) = 1.$$

Uma das propriedade observada por Erdős e Rényi durante a investigação de grafos aleatórios é o que chamamos de funções limiar. Para várias propriedades de grafos, a probabilidade limite de que o grafo possua esta propriedade salta muito rapidamente de 0 para 1 ou vice-versa.

Seja $\mathcal{Q}$ uma propriedade crescente de grafos. Note que, a notação $f(n) \ll g(n)$ significa que dadas duas funções $f(n)$ e $g(n)$ temos que $f(n)/g(n) = 0$ quando $n \to \infty$.

A sequência $\overline{p} = \overline{p}(n)$ é chamada de *função limiar* se

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{Q}) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \ll \overline{p}; \\ 1, & \text{se } p \gg \overline{p}. \end{cases}$$

A função limiar $\overline{m} = \overline{m}(n)$ para o modelo uniforme é definida analogamente:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_{n,m} \in \mathcal{Q}) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \ll \overline{m}; \\ 1, & \text{se } m \gg \overline{m}. \end{cases}$$

Chamamos de *regime subcrítico* quando analisamos valores abaixo da função limiar e de *regime supercrítico* quando analisamos valores acima da função limiar.

Um exemplo de função limiar bem conhecido é a função para a propriedade de $G_{n,p}$ conter um grafo arbitrário H. A prova deste resultado pode ser encontrada no Capítulo 3 de [15]. Seja $m(H)$ a *densidade de* H dada por

$$m(H) = \max\left\{\frac{e_J}{v_J} : J \subset H, v_J > 0\right\}.$$

Teorema 3 ([15])**.** *Para um grafo* H *arbitrário com pelo menos uma aresta,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H \subset G_{n,p}) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \ll n^{-1/m(H)}, \\ 1, & \text{se } p \gg n^{-1/m(H)}. \end{cases}$$

É importante observar que alguns dos nossos resultados são provados utilizando o modelo binomial e outros utilizando o modelo uniforme. O seguinte resultado será útil para transportar resultados de $G_{n,p}$ para $G_{n,m}$. A prova deste teorema é obtida através da Desigualdade de Pittel e pode ser observada na terceira parte do Teorema 2.2 em [5, p. 35].

Lema 4 ([5])**.** *Se* $\mathcal{Q}$ *é uma propriedade de grafos e* $0 < p = m/\binom{n}{2} < 1$, *então*

$$\mathbb{P}(G_{n,m} \in \mathcal{Q}) \leq \left(3\sqrt{m}\right) \mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{Q}).$$

Seja $\mathcal{Q}$ uma propriedade de grafos, $G \in G_{n,p}$ ($G \in G_{n,m}$) e X uma variável aleatória relacionada à propriedade $\mathcal{Q}$. Em geral, quando desejamos mostrar que grafos aleatórios têm a propriedade $\mathcal{Q}$ a.q.c., provamos que com alta probabilidade X está concentrada no seu valor esperado. Conseguimos isso utilizando as desigualdades de concentração. Para nosso resultado utilizamos a *Desigualdade de Markov* e os *Limitantes de Chernoff*.

Lema 5 (Desigualdade de Markov)**.** *Se X é uma variável aleatória e $a > 0$, então*

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

Lema 6 (Limitantes de Chernoff)**.** *Se X é uma variável aleatória com distribuição binomial* $\mathrm{Bi}(n,p)$ *e $\lambda = np$, então, para $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}(X) + t) \leq e^{-\frac{t^2}{2(\lambda + t/3)}};$$

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}(X) - t) \leq e^{-\frac{t^2}{2\lambda}}.$$

Outras desigualdades de concentrações podem ser encontradas no Capítulo 2 de [15].

1.4 Problemas extremais de Turán em grafos aleatórios

Na Seção 1.2, enunciamos o problema de encontrar a quantidade máxima de arestas de um grafo livre de H com n vértices. Podemos abordar este problema de outra forma. Dado um grafo G, qual a quantidade máxima de arestas que um sugrafo de G livre de H pode ter? Definimos $\mathrm{ex}(G,H) = \max\{e(J) \colon H \not\subset J \subset G\}$. Observe que $\mathrm{ex}(K_n, H) = \mathrm{ex}(n, H)$, onde K_n é o grafo completo com n vértices. Tal forma de abordar o problema de Turán é adequada quando trabalhamos com grafos aleatórios. Em 1997, Kohayakawa, Łuczak e Rödl [17] propuseram uma conjectura (Teorema 8) sobre o número extremal de $G_{n,p}$, que em 2010 foi provada independentemente por Schacht [22] e Conlon e Gowers [7].

Definição 7 (2-densidade)**.** *Dado um grafo G com $v_G \geq 3$, definimos sua 2-densidade como*

$$m^{(2)}(G) = \max\left\{\frac{e_j - 1}{v_j - 2} \colon J \subset G, v_j \geq 3\right\}.$$

Teorema 8 (Schacht [22], Conlon–Gowers [7])**.** *Seja H um grafo com $e_H \geq 1$ e $v_H \geq 3$.*

Se $0 < p = p(n) < 1$ *e* $\lim_{n\to\infty} pn^{1/m^{(2)}(H)} = \infty$, *então a.q.c.* $G_{n,p}$ *satisfaz*

$$\mathrm{ex}(G_{n,p}, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) e(G_{n,p}).$$

1.5 O problema investigado

Seja $\vec{H}$ um grafo direcionado. Denotamos por $D(G, \vec{H})$ a quantidade de orientações de G livres de $\vec{H}$. Fazemos $D(n, \vec{H}) = \max\{D(G, \vec{H}) \colon G \in \mathcal{G}_n\}$, onde $\mathcal{G}_n$ é o conjunto de todos os grafos com n vértices.

Em 1974, Paul Erdős perguntou se é possível determinar ou estimar o valor de $D(n, \vec{H})$ para todo grafo direcionado $\vec{H}$ [10, p. 45]. Diversos pesquisadores vêm estudando algumas variações deste problema; veja por exemplo [1, 3, 4, 6, 11, 21]. Particularmente, Alon e Yuster [3] determinaram o valor exato de $D(n, T_k)$, onde T_k é o torneio com k vértices, i.e., uma orientação do grafo completo K_k. Além disso, sabemos o valor exato de $\mathrm{ex}(n, K_k)$ e eles mostraram que $D(n, T_k) = 2^{\mathrm{ex}(n,K_k)}$. Infelizmente, a prova não funciona para grafos genéricos. Porém algumas modificações na prova de [3] nos dão um limite superior assintótico para $D(n, \vec{H})$, onde $\vec{H}$ é uma orientação fixa de um grafo H genérico.

No artigo de Alon e Yuster [3], os seguintes problemas são propostos: (1) Para todo grafo direcionado $\vec{H}$ fixo, a asserção $D(n, \vec{H}) = 2^{\mathrm{ex}(n,H)}$ vale? (2) Determinar o valor de $D(n, m, T)$, o número máximo de orientações livres de um torneio T em um grafo com n vértices e m arestas.

Neste trabalho, investigamos o segundo problema, mas considerando circuitos direcionados em vez de torneios. Substituímos o máximo da definição de $D(n, m, \vec{H})$ pelo conceito de *máximo ε-essencial*, isto é, consideramos o máximo sobre quase todos os grafos com n vértices e m arestas em vez de todos os grafos do conjunto $\mathcal{G}_{n,m}$. Com isso, é natural trabalharmos com grafos aleatórios.

Definição 9 (máximo ε-essencial)**.** *Dados um conjunto finito X, uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$ e uma medida de probabilidade μ sobre X, o máximo ε-essencial (ou simplesmente máximo essencial) de f*

sobre X é dado por

$$\text{ess max}^{(\varepsilon)} \{f(x) \colon x \in X\} = \min_{X'} \max \left\{ f(x) \colon x \in X' \right\},$$

onde X' é tomado sobre todos os subconjuntos de X tais que $\mu(X \setminus X') \leq \varepsilon$.

Considerando o máximo essencial, definimos, para todo $\varepsilon > 0$,

$$D(n, m, \varepsilon, \vec{H}) = \min_{X} \max \left\{ D(G, \vec{H}) \colon G \in X \right\},$$

onde o mínimo é sobre todos os conjuntos de grafos $X \subset \mathcal{G}_{n,m}$ tais que $|X| \geq (1-\varepsilon)|\mathcal{G}_{n,m}|$. Observe que $D(n, m, 0, \vec{H}) = D(n, m, \vec{H})$.

O presente trabalho investiga o valor de $D(n, m, \varepsilon, \vec{H})$ quando H é um circuito. Denotamos por C_ℓ o circuito com ℓ vértices, onde $\ell \geq 3$. Seja $C_\ell^{\circlearrowright}$ o *circuito direcionado cíclico* com ℓ vértices, isto é, o grafo com conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, \ell\}$, os arcos $(i, i+1)$, para $i = 1, 2, \ldots, \ell - 1$ e o arco $(\ell, 1)$.

A ideia de utilizar o máximo ε-essencial é análisar a quantidade de orientações dentro de um conjunto onde os grafos são típicos, ou seja, eliminar os grafos que têm probabilidade muito baixa.

Provamos que, seja um circuito direcionado cíclico $C_\ell^{\circlearrowright}$ com ℓ vértices, para $\ell \geq 3$. Então para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ temos que

$$D(n, m, \varepsilon, C_\ell^{\circlearrowright}) = \begin{cases} 2^{o(m)}, & \text{se } m \gg n^{2 - \frac{1}{m^{(2)}(C_\ell)}}; \\ 2^{(1-o(1))m}, & \text{se } m \ll n^{2 - \frac{1}{m^{(2)}(C_\ell)}}. \end{cases}$$

Um exemplo que justifica a utilização do máximo ε-essencial é quando desejamos contar a quantidade máxima de orientações livres de $C_3^{\circlearrowright}$. Utilizando o máximo e fazendo $m = \lfloor n^2/4 \rfloor$ temos que a quantidade de orientações livres de $C_3^{\circlearrowright}$ será 2^m devido à existência do grafo bipartido completo. Porém este grafo é um caso muito particular.

É importante observar o comportamento de $D(n, m, \varepsilon, C_\ell^{\circlearrowright})$ quando modificamos o ε. Para o regime subcrítico, o caso interessante é quando ε tem valor próximo de 1, pois desta forma estamos analisando conjuntos com poucos grafos, o que torna mais difícil obtermos um grande número de orientações. Para o regime supercrítico é exatamente o oposto.

Combinando o método de prova usado no resultado acima com resultados de [19], podemos obter resultados similares sobre $D(n, m, \varepsilon, \vec{H})$ para grafos direcionados bipartidos $\vec{H}$.

Seja $d(H)$ a *degeneração* do grafo H: o menor inteiro d tal que existe uma ordenação $x_1, \dots, x_h$ dos vértices de H da forma que, para todo i, o vértice x_i tem no máximo d vizinhos no conjunto $x_1, \dots, x_{i-1}$. Assim, pode-se provar que, seja $\vec{H}$ uma orientação do grafo bipartido H que contém um circuito direcionado cíclico. Então para todo $\varepsilon \in (0,1)$ temos que

$$D(n, m, \varepsilon, \vec{H}) = \begin{cases} 2^{o(m)}, & \text{se } m \gg n^{2-\frac{1}{d(H)}}; \\ 2^{(1-o(1))m}, & \text{se } m \ll n^{2-\frac{1}{m^{(2)}(H)}}. \end{cases}$$

Além disso, se uma certa conjectura (o enunciado completo encontra-se como Conjectura 17 na página 16) é verdadeira, então podemos substituir o termo $d(H)$ pela 2-densidade.

$$D(n, m, \varepsilon, \vec{H}) = \begin{cases} 2^{o(m)}, & \text{se } m \gg n^{2-\frac{1}{m^{(2)}(H)}}; \\ 2^{(1-o(1))m}, & \text{se } m \ll n^{2-\frac{1}{m^{(2)}(H)}}. \end{cases}$$

Capítulo 2

Lema da Regularidade de Szemerédi

Muitas vezes em combinatória extremal precisamos utilizar ferramentas poderosas para obtermos resultados significativos sobre um determinado problema. Uma ferramenta muito importante para a área é o famoso Lema da Regularidade de Szemerédi.

O lema afirma que, dado um grafo suficientemente grande é possível particionar seu conjunto de vértices em um número limitado de partes (independente da quantidade de vértices) de modo que a distribuição de arestas em quase todos os pares dessa partição satisfaz uma propriedade de uniformidade.

Originalmente, Szemerédi provou o lema para grafos não direcionados. Porém, a prova para grafos direcionadas pode ser encontrada no trabalho de Alon e Shapira [2], que segue a mesma ideia da prova encontrada em [8]. Como nosso trabalho trata de grafos direcionados, vamos enunciar as definições, lemas e teoremas em suas versões direcionadas.

2.1 Grafos densos

Seja $\vec{G} = (V, E)$ um grafo direcionado e sejam A e B dois subconjuntos disjuntos de $V(\vec{G})$. Se A e B são não vazios, definimos a *densidade de arestas* de A para B como

$$d_{\vec{G}}(A, B) = \frac{e_{\vec{G}}(A, B)}{|A||B|}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, o par (A, B) é chamado de *ε-regular* se, para todos $X \subset A$ e $Y \subset B$ satisfazendo $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$, temos

$$|d_{\vec{G}}(X,Y) - d_{\vec{G}}(A,B)| \leq \varepsilon, \qquad |d_{\vec{G}}(Y,X) - d_{\vec{G}}(B,A)| \leq \varepsilon.$$

Assim, dizemos que um par (A,B) é regular se, para todos subconjuntos suficientemente grandes de A e B, a densidade entre tais conjuntos não difere muito da densidade entre A e B. Como dito anteriormente, o lema nos dá uma partição onde quase todos os pares são regulares. Esta partição é chamada de partição regular de um grafo.

Dado um digrafo $\vec{G}$, dizemos que $\{V_0, \ldots, V_k\}$ é uma *partição ε-regular* dos vértices se

- $|V_0| \leq \varepsilon|V(\vec{G})|$;
- $|V_1| = \ldots = |V_k|$;
- No máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares (v_i, v_j) não são ε-regulares, para $1 \leq i < j \leq k$.

Com estas definições, o Lema da Regularidade de Szemerédi para grafos direcionados é como segue.

Teorema 10 (Lema da Regularidade de Szémeredi [2]). *Sejam $\varepsilon > 0$ e m um inteiro positivo, existem constantes $M = M(m,\varepsilon) > 0$ e $n_0 = n_0(m,\varepsilon)$, tais que, para qualquer digrafo $\vec{G}$ de ordem $n > n_0$, existe uma partição ε-regular dos vértices de $\vec{G}$ em $k+1$ classes, com $m \leq k \leq M$.*

Um fato importante é que o lema só nos dá informações úteis sobre digrafos que são densos, ou seja, digrafos com $\Theta(n^2)$ arestas, pois caso o grafo tenha $o(n^2)$ arestas, o lema é satisfeito trivialmente.

É importante percebermos o papel das variáveis m e M. A variável m limita inferiormente a quantidade de classes da partição, fazendo com que a quantidade de vértices dentro de cada parte seja suficientemente pequena. Por outro lado, a variável M limita superiormente a quantidade de partes da partição, evitando a possibilidade de se obter uma partição ε-regular trivial.

Geralmente, os resultados relevantes não seguem direto do uso do Lema da Regularidade, mas usando-o em conjunto com outros resultados. Uma ótima referência sobre o Lema da Regularidade é a resenha de Komlós e Simonovits [20].

2.2 Grafos esparsos

Mencionamos na Seção 2.1, que para grafos com $o(n^2)$ arestas, o Lema da Regularidade de Szemerédi é satisfeito trivialmente e não nos dá nenhuma informação. Como dito na Seção 1.5, investigamos o problema de orientações para circuitos direcionados. Podemos observar, pelo Teorema 2, que um grafo livre de C_ℓ é esparso, da forma que não podemos trabalhar diretamente com o Lema da Regularidade clássico. Assim, na presente seção, apresentaremos uma versão do Lema da Regularidade de Szemerédi para grafos esparsos, observada e provada por Kohayakawa [16] e, independentemente, por Rödl (de acordo com Kohayakawa [16]).

Para apresentar o Lema da Regularidade para grafos esparsos são necessárias algumas definições similares as do caso denso, mas que captam informações mais precisas.

Sejam $0 < p \leq 1$, $\vec{H} = (V, E)$ um digrafo e A, B subconjuntos disjuntos dos vértices de $\vec{H}$. Se A e B são não vazios, definimos a *p-densidade* das arestas em $\vec{H}$ de A para B como

$$d_{\vec{H},p}(A,B) = \frac{e_{\vec{H}}(A,B)}{p|A||B|}.$$

Para $\varepsilon > 0$ e $0 < p \leq 1$, o par (A, B) é chamado de *$(\varepsilon, \vec{H}, p)$-regular* se, para todos $X \subset A$ e $Y \subset B$ tais que $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$, temos

$$|d_{\vec{H},p}(X,Y) - d_{\vec{H},p}(A,B)| \leq \varepsilon, \qquad |d_{\vec{H},p}(Y,X) - d_{\vec{H},p}(B,A)| \leq \varepsilon.$$

Ademais, se $\vec{H} = (A, B; E)$ é um grafo direcionado bipartido, então dizemos que o digrafo $\vec{H}$ é *(ε, p)-regular*, e se $|d_{\vec{H}}(X,Y) - d_{\vec{H}}(A,B)| \leq \varepsilon d_{\vec{H}}(A,B)$, dizemos que o grafo direcionado bipartido $\vec{H}$ é $(\varepsilon)_{XY}$-regular. Por fim, dizemos que $\vec{H}$ é (ε)-regular se é $(\varepsilon)_{XY}$-regular e $(\varepsilon)_{YX}$-regular.

Dado um digrafo $\vec{H}$, $\varepsilon > 0$, e $0 < p \leq 1$, a partição $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ é uma *partição uniforme* dos vértice de $\vec{H}$ se $|V_0| \leq \varepsilon n$ e $|V_1| = \ldots = |V_k|$. Dizemos que uma partição uniforme é uma *partição $(\varepsilon, \vec{H}, p)$-regular* se

- No máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares (v_i, v_j) não são $(\varepsilon, \vec{H}, p)$-regulares, para $1 \leq i < j \leq k$.

Definição 11 ((η, p)-uniformidade)**.** *Seja G um grafo com n vértices. Considere $0 \leq \eta \leq 1$ e $0 \leq p \leq 1$. Dizemos que G é (η, p)-uniforme se, para todos $X, Y \subset V(G)$ disjuntos tais que $|X| \geq \eta n$ e $|Y| \geq \eta n$, temos*

$$|e_G(X, Y) - p|X||Y|| \leq \eta p|X||Y|.$$

*Se, em vez de $|e_G(X, Y) - p|X||Y|| \leq \eta p|X||Y|$, temos somente $e_G(X, Y) \leq (1 + \eta)p|X||Y|$, então dizemos que G é (η, p)-*uniforme superior*.*

Teorema 12 (Lema da Regularidade de Székmeredi Esparso [16])**.** *Sejam $\varepsilon > 0$ e m inteiro positivo. Existem $n_0 = n_0(m, \varepsilon)$, $\eta = \eta(\varepsilon, m) > 0$ e $M = M(\varepsilon, m) \geq m$, tais que, para qualquer orientação $\vec{H}$ de um grafo H (η, p)-uniforme superior com $0 < p \leq 1$, existe uma partição $(\varepsilon, \vec{H}, p)$-regular dos vértices de $\vec{G}$ em $k + 1$ classes, com $m \leq k \leq M$.*

2.3 Lema de Imersão

O Lema da Regularidade de Szemerédi garante a existência de uma partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ dos vértices de um grafo. Uma ferramenta muito útil para representar esta partição em um grafo é o que chamamos de *grafo reduzido* da partição $\mathcal{P}$. As arestas desse grafo representam a densidade entre os pares de partes da partição.

Definição 13 (Grafo reduzido)**.** *Sejam $\vec{G}$ um digrafo com n vértices, constantes $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e $0 < p = p(n) \leq 1$, onde $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ é uma partição uniforme dos vértices de $\vec{G}$, com $k + 1$ partes. O grafo $\vec{R} = \vec{R}(\vec{G}, \varepsilon, \delta, \mathcal{P})$ é chamado de grafo reduzido com conjunto de vértices $[k]$, onde temos quatro tipos de ligações:*

- *Para todo $i, j \in [k]$, $\{i, j\}$ é uma aresta ruim ($i \bullet - - \bullet j$) se e somente se o par (V_i, V_j) não é $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular*

- *Para todo* $i, j \in [k]$, $\{i, j\}$ *é uma aresta simples* ($i \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet j$) *se e somente se o par* (V_i, V_j) *é* $(\varepsilon, \vec{G}, p)$*-regular com* $d_{\vec{G},p}(V_i, V_j) < \delta$ *e* $d_{\vec{G},p}(V_j, V_i) < \delta$

- *Para todo* $i, j \in [k]$, $\{i, j\}$ *é um arco* ($i\bullet \longrightarrow \bullet j$) *se e somente se o par* (V_i, V_j) *é* $(\varepsilon, \vec{G}, p)$*-regular com* $d_{\vec{G},p}(V_i, V_j) \geq \delta$ *e* $d_{\vec{G},p}(V_j, V_i) < \delta$

- *Para todo* $i, j \in [k]$, $\{i, j\}$ *é um arco duplo* ($i\bullet \longleftrightarrow \bullet j$) *se e somente se o par* (V_i, V_j) *é* $(\varepsilon, \vec{G}, p)$*-regular com* $d_{\vec{G},p}(V_i, V_j) \geq \delta$ *e* $d_{\vec{G},p}(V_j, V_i) \geq \delta$.

No caso em que $\mathcal{P}$ é $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular, a quantidade de arestas ruins em $\vec{R} = \vec{R}(\vec{G}, \varepsilon, \delta, \mathcal{P})$ é no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$. Outro conceito importante é o que chamamos de *explosão* de um grafo.

Definição 14 (Explosão). *Dados um grafo* H *e* n *um inteiro positivo, definimos a explosão* $H[n]$ *de* H *como sendo o grafo onde o conjunto de vértices é obtido através da substituição de cada vértice* v *de* H *por um conjunto* V_v *com* n *vértices e existe uma aresta entre os vértices* $v \in V_v$ *e* $w \in V_w$ *de* $H[n]$ *se e somente se* $\{v, w\}$ *é aresta em* H.

Como dito ao final de Seção 2.1, o uso do Lema da Regularidade de Szemerédi por si só, geralmente, não nos dá resultados substanciais. Uma ferramenta bem conhecida e bastante utilizada em conjunto com o Lema da Regularidade é o Lema de Imersão. Este lema garante a existência de um grafo H como subgrafo de um grafo G com determinadas propriedades. Utilizamos tais lemas para mostrar que, se um grafo reduzido $\vec{R}$, associado a uma partição de G, possui um grafo H como subgrafo, então G contém H como subgrafo.

Vamos analisar a relação entre grafos reduzidos e explosões. Seja $\vec{G}$ um digrafo que contém uma partição $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular $\mathcal{P} = \{V_0, \ldots, V_k\}$ de $V(\vec{G})$ e seja $\vec{R}$ o grafo reduzido associado a esta partição e R o seu subjacente. Seja $\mathcal{P}'$ a partição do subjacente do digrafo que gera $\mathcal{P}$ que utiliza-se dos mesmo vértices de $\mathcal{P}$. Observe que a explosão $R[n/k]$ de R é parecida com a partição $\mathcal{P}'$. Com esta intuição, podemos definir o conjunto das explosões regulares e definir a família dos grafos livres de H, que denotaremos por $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ e $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$, respectivamente.

Definição 15 (Explosões regulares). *Seja H um grafo, n, m inteiros positivos e $\varepsilon > 0$, dizemos que $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ é o conjunto das explosões (ε, G, p)-regulares, ou seja, é a família dos grafos G com mesmo conjunto de vértices de $H[n]$ tal que para cada arestas $\{i, j\}$ de H o par (V_i, V_j) é (ε, G, p)-regular com m arestas.*

Observe que a explosão $(\varepsilon, G, p)-$regular está definida para grafos não direcionados. Porém, ao garantirmos a regularidade para um grafo direcionado $\vec{G}$ podemos analisar as arestas deles desprezando suas orientações. Seja o par (V_i, V_j), $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular, observando apenas os arcos de $e_{\vec{G}}(V_i, V_j)$ e usando seu grafo subjacente, teremos um par (V_i', V_j') que é (ε, G, p)-regular. Isso se dá pelo fato de que os pares $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regulares têm suas arestas regularmente distribuídas tanto de V_i para V_j quanto de V_j para V_i.

Definição 16 (Explosões regulares ruins). *Sejam H um grafo, $\varepsilon > 0$ e n, m inteiros positivos. Denotamos como o conjunto das explosões ruins $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$ o conjunto de grafos em $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ que não contém subgrafos isomorfos a H.*

Quando falamos de Lema de Imersão, desejamos que, para um dado $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon) = \emptyset$. Porém, ao trabalharmos com o caso esparso do Lema da Regularidade de Szemerédi, não é verdade que todos os grafos de $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ contêm o grafo H. Porém desejamos que $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$ seja uma fração muito pequena de $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$. Conjectura-se que se tivermos m suficientemente grande e ε suficientemente pequeno, então isto acontece. Tal conjectura foi proposta por Kohayakawa, Łuczak e Rödl [17].

Conjectura 17 ([17]). *Seja H um grafo fixo. Para qualquer $\beta > 0$, existem constantes $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ e $n_0 > 0$ tais que, se $m \geq Cn^{2-1/m^{(2)}(H)}$, $n \geq n_0$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, então*

$$|\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)| \leq \beta^m \binom{n^2}{m}^{|E(H)|}.$$

Um exemplo da ligação entre o Lema da Regularidade de Szemerédi e Problemas Extremais de Turán em grafos aleatórios é dado pelo seguinte teorema

Teorema 18 (Gerke–Steger [14]). *Se H é um grafo fixo tal que $m^{(2)}(H) > 1$, então o Teorema 8 segue da conjectura 17.*

A Conjectura 17 foi provada para algumas famílias de grafos, por exemplo, florestas, circuitos, K_t, onde $t \in \{3, 4, 5, 6\}$. Uma ótima referência sobre o Lema da Regularidade de Szemerédi para grafos esparsos e também a demonstração da conjectura para alguns grafos específicos é a resenha escrita por Gerke e Steger [14].

Agora apresentaremos um resultado que relaciona o Lema da Regularidade Esparso, grafos aleatórios e a Conjectura 17. O lema afirma que, se a conjectura for verdadeira, então, com alta probabilidade, $G_{n,p}$ não contém grafos da família $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$. A prova do lema pode ser encontrada, separadamente, no Apêndice A.1.

Lema 19 (Gerke–Steger [14]). *Dado um grafo H com $m^{(2)}(H) > 1$, se a Conjectura 17 é válida, então, para todo $\delta > 0$ e $\mu > 0$, existem $\varepsilon_\delta = \varepsilon_\delta(\delta) > 0$, $C_\mu = C_\mu(\mu) > 0$ e n_0 tal que, para todo $n > n_0$, $p \geq C_\mu n^{-1/m^{(2)}(H)}$, temos que se $G \in G_{n,p}$, então*

$$\mathbb{P}\left(G \notin \bigcup_{n' \geq \mu n} \mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)\right) > 1 - e^{-n}.$$

Capítulo 3

Resultados

Neste capítulo, provaremos o nosso resultado principal. Decidimos separar a parte determinística da parte probabilística, pois torna mais fácil a compreensão, organização e extensão das ideias e resultados. Para isso, definimos algumas propriedades que os grafos devem satisfazer deterministicamente e com isso provamos nossos resultados. Posteriormente, provamos que essas propriedades ocorrem com alta probabilidade para o modelo binomial de grafos aleatórios.

Nosso resultado é uma função limiar para a quantidade de orientações de grafos livres de circuitos direcionados cíclicos. Desta forma, provaremos separadamente o regime subcrítico e o regime supercrítico. A prova do regime subcrítico é simples e direta e está apresentada na Seção 3.1. Na Seção 3.2 apresentamos as propriedades necessárias para o regime supercrítico, provamos dois lemas de imersão que são utilizados na prova do lema principal e calculamos a probabilidade de $G_{n,p}$ ter todas as propriedades para um determinado p. Na Seção 3.3, provamos o regime supercrítico e unimos o regime subcrítico com o regime supercrítico, obtendo o teorema

Teorema 20 (Kohayakawa–Mota–Parente [18]). *Seja $C_\ell^{\circlearrowright}$ um circuito direcionado cíclico, para $\ell \geq 3$. Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e $\delta \in (0,1)$, existem n_0, c e C tal que se $n \geq n_0$, então*

$$D(n,m,\varepsilon,C_\ell^{\circlearrowright}) \begin{cases} \leq 2^{\delta m}, & \text{se } m \geq Cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}; \\ \geq 2^{(1-\delta)m}, & \text{se } m \leq cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}. \end{cases}$$

3.1 Regime subcrítico

Nessa seção, provamos o regime subcrítico da função limiar apresentada no Teorema 20.

Lema 21 (Regime subcrítico)**.** *Seja $C_\ell^{\circlearrowright}$ um circuito direcionado cíclico, para $\ell \geq 3$. Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e $\delta \in (0,1)$, existem n_0 e $c > 0$ tal que se $n \geq n_0$ e $m \leq cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}$, então*

$$D(n,m,\varepsilon,C_\ell^{\circlearrowright}) \geq 2^{(1-\delta)m}.$$

Demonstração. Fixe $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$, $\ell \geq 3$, $n_0 \geq \ell$, e $C = \left(\frac{(1-\varepsilon)\delta}{2\ell(4\ell)^\ell}\right)^{\frac{1}{\ell-1}}$. Com isso, seja $n \geq n_0$ e $m \leq cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}$. Fixe $G \in G_{n,m}$. Inicialmente calcularemos a quantidade esperada de circuitos C_ℓ em G.

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto das ℓ-uplas $(v_1,\ldots,v_\ell)$ ordenadas, onde $v_i \in [n]$ para todo $1 \leq i < j \leq \ell$. Seja X a variável aleatória que representa a quantidade de C_ℓ em G, onde cada vértice de G tem um número inteiro positivo como rótulo. Sejam as variáveis indicadoras X_s, onde $s \in \mathcal{S}$, definidas como segue.

$$X_s = \begin{cases} 1, & \text{se G contém o circuito } (v_1,\ldots,v_\ell,v_1), \text{ onde } s = (v_1,\ldots,v_\ell); \\ 0, & \text{se G não contém o circuito } (v_1,\ldots,v_\ell,v_1), \text{ onde } s = (v_1,\ldots,v_\ell). \end{cases}$$

Assim $X = \sum_{s \in \mathcal{S}} (X_s)$, e pela linearidade da esperança, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E}\left(X_s\right); \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{P}\left(X_s = 1\right); \\
&\leq (n)_\ell \frac{\binom{\binom{n}{2} - \ell}{m - \ell}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}; \\
&= (n)_\ell \frac{\binom{m}{\ell}\binom{\binom{n}{2}}{m}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}\binom{\binom{n}{2}}{\ell}}; \\
&\leq n^\ell m^\ell \frac{(4\ell)^\ell}{n^{2\ell}}; \\
&= m^\ell \frac{(4\ell)^\ell}{n^\ell};
\end{aligned}$$

Dessa forma, a quantidade esperada de cópias de C_ℓ é no máximo $m^\ell \frac{(4\ell)^\ell}{n^\ell}$. Devemos analisar a probabilidade de G ter uma quantidade de cópias de C_ℓ com pelo menos $\frac{\delta}{\ell} m$. Utilizando a Desigualdade de Markov apresentada no Lema 5 temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq \frac{\delta m}{\ell}) &\leq \frac{E(X)\ell}{\delta m}; \\
&\leq \frac{\ell}{\delta m} m^\ell \frac{(4\ell)^\ell}{n^\ell}; \\
&\leq \frac{c^{\ell-1}\ell(4\ell)^\ell}{\delta}; \\
&= \frac{1-\varepsilon}{2}; \\
&< 1 - \varepsilon;
\end{aligned}$$

Assim, como estamos trabalhando com grafos aleatórios uniformes, pelo cálculo acima, temos que para subconjuntos de $\mathcal{G}_{n,m}$ com no mínimo $(1-\varepsilon)|\mathcal{G}_{n,m}|$ grafos existirá pelo menos um grafo cuja quantidade de C_ℓ é no máximo $(\delta m)/\ell$.

Seja um grafo cuja quantidade de C_ℓ é no máximo $(\delta m)/\ell$. Considere, sem perda de generalidade, que $v_1, \ldots, v_s$ são os vértices que estão em circuitos C_ℓ. Oriente as arestas da seguinte forma: Se a aresta v_i, v_j pertence a um C_ℓ então substitua-a por (v_i, v_j), para todo $1 \leq i < j \leq s$. Desta forma, restarão pelo menos $(1 - \frac{\delta}{\ell}\ell)m$ arestas sem orientação que podemos orientar de qualquer forma. Observe que existem outras orientações livres de $C_\ell^{\circlearrowright}$ das arestas que pertencem aos circuitos C_ℓ.

Desta forma, pela definição de $D(n, m, \varepsilon, C_\ell^{\circlearrowright})$ estamos usando subconjuntos com pelo menos $(1 - \varepsilon)|\mathcal{G}_{n,m}|$ elementos e, pelos argumentos acima, sempre haverá um grafo com a quantidade de C_ℓ no máximo $(\delta m)/\ell$, então temos que $D(n, m, \varepsilon, C_\ell^{\circlearrowright}) \geq 2^{(1-\delta)m}$ e o resultado está provado. $\square$

3.2 Resultados preliminares

Propriedades

Como dito anteriormente, para provar nosso regime supercrítico determinístico, serão necessárias as propriedades que seguem.

Propriedade 22. *Um grafo G com n vértices satisfaz* $\mathrm{IME}(H, \mu, \delta, p, \varepsilon)$ *se*

$$G \notin \bigcup_{n' \geq \mu n} \mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon).$$

Propriedade 23. *Um grafo G com n vértices satisfaz* $\mathrm{DISC}(\varepsilon, \delta, p)$ *se para todo $T \subset V(G)$ tal que $|T| \geq \varepsilon n$ vale*

$$\left| e_G(T) - \binom{|T|}{2} p \right| < \delta p \binom{|T|}{2}.$$

Propriedade 24. *Um grafo G com n vértices satisfaz* $\mathrm{DEG}(\delta, p)$ *se para todo $v \in V(G)$ temos que $|\deg(v) - np| < \delta np$.*

Propriedade 25. *Um grafo G com n vértices satisfaz* $\mathrm{EDGE}(\varepsilon, \delta, p)$ *se para todos A e B subconjuntos disjuntos de $V(G)$ tais que $|A| \geq \varepsilon n$ e $|B| \geq \varepsilon n$ vale*

$$|e_G(A, B) - |A||B|p| < \delta |A||B|p.$$

Propriedade 26. *Um grafo G com n vértices satisfaz* $\mathrm{REG}(\delta, \varepsilon, \eta, p, m, k, M)$ *se o seguinte vale.*

1. *Para toda orientação $\vec{G}$ de G, existe $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ uma partição $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular dos vértices de $\vec{G}$, onde $m \leq k \leq M$;*

2. *G é (η, p)-uniforme;*

3. *Seja $\vec{R} = \vec{R}(\vec{G}, \varepsilon, \delta, p, k)$ o reduzido associado a partição $\mathcal{P}$, $\vec{R}$ não contém arestas simples $(i \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, j)$, para todo $i, j \in V(R)$.*

Lemas de imersão

Agora vamos provar dois lemas de imersão que são essenciais. O Lema de Imersão I afirma que se um grafo reduzido associado a uma partição $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular tem um $C_\ell^{\circlearrowright}$ como subgrafo, então existe um $C_\ell^{\circlearrowright}$ no grafo direcionado $\vec{G}$. Esta prova pode ser observada no Lema 28. Para provar o Lema de Imersão I precisamos do resultado abaixo cuja prova encontra-se em [14].

Lema 27 ([14])**.** *Para todo $0 < \delta \leq 1/6$, existe C tal que qualquer grafo bipartido $B = (V_1; V_2, E)$ e (δ)-regular contém um subgrafo gerador (2δ)-regular com m arestas para todo m satisfazendo*

$$C(|V_1| + |V_2|) \leq m \leq |E(B)|.$$

Lema 28 (Lema de Imersão I)**.** *Sejam $\ell \geq 3$, k, n inteiros positivos e $\delta \in (0, 1/6)$, $\varepsilon \in (0, \delta/2)$, $p \in (0, 1]$, $0 < \mu < (1 - \varepsilon)/k$, e seja G um grafo com n vértices com a propriedade* $\mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, 2\varepsilon)$*, fixe $\vec{G}$ uma orientação de G, e $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ uma partição uniforme dos vértices de $\vec{G}$.*

Se o grafo reduzido $\vec{R} = \vec{R}(\vec{G}, \varepsilon, \delta, \mathcal{P})$ associado à $\mathcal{P}$ contém uma cópia de $C_\ell^{\circlearrowright}$, então $\vec{G}$ contém uma cópia de $C_\ell^{\circlearrowright}$.

Note que, no enunciado do lema acima não é necessário que a partição seja $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular, pois as arestas das cópias de $C_\ell^{\circlearrowright}$ em $\vec{R}$ vêm de pares regulares.

Demonstração. Considere as seguintes constantes.

$$n > 0; \qquad k > 0; \qquad \ell \geq 3; \qquad p \in (0, 1); \qquad \delta \in (0, 1/6); \qquad \varepsilon \in (0, \delta/2);$$

$$0 < \mu < (1 - \varepsilon)/k;$$

$$C \text{ obtida pela aplicação do Lema 27 com parâmeto } \varepsilon.$$

Seja G um grafo com n vértices que satisfaz a propriedade $\mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, 2\varepsilon)$ e $\vec{G}$ uma orientação de G e $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots V_l\}$ uma partição uniforme dos vértices de $\vec{G}$.

Seja $\vec{R} = \vec{R}(\vec{G}, \varepsilon, \delta, \mathcal{P})$ o grafo reduzido associado à partição $\mathcal{P}$ e suponha que contém um circuito direcionado cíclico $C_\ell^{\circlearrowright}$ formado pelos vértices $v_1, \ldots, v_\ell$. Pela definição de grafo reduzido, temos que cada aresta deste $C_\ell^{\circlearrowleft}$ corresponde a um par $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular (V_i, V_j) com pelo menos $\delta|V_i||V_j|p$ arestas de V_i para V_j, onde $1 < i < j \leq \ell$, e de V_ℓ para V_1.

Observe que um par (V_i, V_j) $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular também é (ε, G, p)-regular se utilizarmos o subgrafo subjacente referente somente aos arcos de V_i para V_j. Observe que $\delta|V_i||V_j|p \geq C(|V_i| + |V_j|)$ e $\delta|V_i||V_j|p \leq e_{\vec{G}}(X_i, Y_i)$. Assim, aplicando o Lema 27 a esse par, obtemos um par (2ε)-regular com exatamente $\delta|V_i||V_j|p$ arestas, onde originalmente tinham orientação de V_i para V_j. Repetindo esse procedimento para todos os pares correspondentes aos arcos de $C_\ell^{\circlearrowleft}$ temos que tais pares são (2ε)-regulares e obtemos um grafo, que é subgrafo de G, pertence a $\mathcal{G}(C_\ell, |V_1|, \delta|V_1|^2 p, 2\varepsilon)$. Como G satisfaz a propriedade $\mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, 2\varepsilon)$ e $|V_1| \geq n(1-\varepsilon)/k \geq \mu n$, então $G \notin \mathcal{F}(C_\ell, |V_1|, \delta|V_1|^2 p, 2\varepsilon)$ e assim, usando a orientação dada em $\vec{G}$, temos que $\vec{G}$ possui um subgrafo isomorfo a $C_\ell^{\circlearrowleft}$. $\square$

No Lema de Imersão II, nos preocupamos em procurar um arco duplo no grafo reduzido, pois caso isto aconteça podemos construir uma partição, a partir desse par, onde o grafo reduzido tem um $C_\ell^{\circlearrowleft}$ e assim, usando o lema anterior, o grafo direcionado original tem um circuito direcionado cíclico como subgrafo.

Para provar o lema de Imersão II precisamos definir dois digrafos. Definimos $\bar{C}_2^{\circlearrowleft}$ como o digrafo que tem 2 vértices e um arco-duplo ligando-os e $\bar{C}_3^{\circlearrowleft}$ como o digrafo com 3 vértices i, j, k, onde temos um arco de i para j, um arco duplo entre j e k, um arco de k para i. Graficamente, temos:

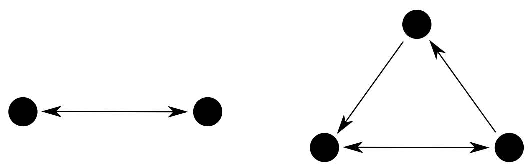

Figura 3.1: *$\bar{C}_2^{\circlearrowleft}$ e $\bar{C}_3^{\circlearrowleft}$*

Lema 29 (Lema de Imersão II). *Para inteiros $t \geq 1$, k, n e $\delta \in (0, 1/6)$, $\varepsilon \in (0, \delta/2t)$, $p \in (0, 1]$, $0 < \mu < (1-\varepsilon)/k$, seja G um grafo com n vértices com a propriedade $\mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta - \varepsilon, p, 2t\varepsilon)$, $\vec{G}$ uma orientação de G, $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ uma partição $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular dos vértices de $\vec{G}$ e $\vec{R}$ o grafo reduzido associado temos que*

1. Se $\bar{C}_2^{\circlearrowleft} \subset \vec{R}$, então $C_{2t}^{\circlearrowleft} \subset \vec{G}$;

2. Se $\bar{C}_3^{\circlearrowleft} \subset \vec{R}$*, então* $C_{2t+1}^{\circlearrowleft} \subset \vec{G}$*.*

Demonstração. Iremos provar somente o caso 2, pois a prova do caso 1 segue como consequência. Assim, sejam as constantes

$$n > 0; \qquad k > 0; \qquad t \geq 1; \qquad p \in (0,1); \qquad \delta \in (0, 1/6); \qquad \varepsilon \in (0, \delta/2t);$$
$$0 < \mu < (1-\varepsilon)/k; \qquad \ell = 2t+1.$$

Seja G um grafo com n vértices com a propriedade IME$(C_\ell, \mu, \delta - \varepsilon, p, 2t\varepsilon)$. Fixe $\vec{G}$ uma orientação de G e a partição $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots V_k\}$, onde $|V_0| \leq \varepsilon n$ e $|V_1| = \ldots |V_k|$. Seja $\vec{R} = \vec{R}(\vec{G}, \varepsilon, \delta, \mathcal{P})$ o grafo reduzido associado à partição $\mathcal{P}$.

Suponha que $\vec{R}$ contém $\bar{C}_3^{\circlearrowleft}$ formado pelos vértices v_u, v_i, v_j. Sem perda de generalidade, suponha que os vértices v_i, v_j são ligados pelo arco duplo, e que (v_j, v_u), (v_u, v_i) são os arcos de $\bar{C}_3^{\circlearrowleft}$ e que $t > 1$, pois caso contrário basta usar o Lema 28. Pela definição de grafo reduzido, temos que (v_i, v_j) corresponde, em $\vec{G}$, a um par $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular (V_i, V_j) com pelo menos $\delta|V_i||V_j|p$ arestas tanto de V_i para V_j quanto de V_j para V_i.

Particione V_i em $\mathcal{P}_i = \{V_i^1, \ldots, V_i^t\}$, onde $|V_i^1| = \ldots = |V_i^t|$, e o mesmo para V_j e V_u. Primeiro precisamos mostrar que os pares (V_i^r, V_j^s) são $(t\varepsilon, G, p)$-regulares, para todo $r, s \in [t]$. Seja $r, s \in [t]$ e $X \subset V_i^r$ e $Y \subset V_j^s$ com $|X| \geq t\varepsilon|V_i^r|$ e $|Y| \geq t\varepsilon|V_j^s|$. Assim, temos

$$\begin{aligned} |d_{\vec{G},p}(X,Y) - d_{\vec{G},p}(V_i^r, V_j^s)| &\leq |d_{\vec{G},p}(X,Y) - |d_{\vec{G},p}(V_i,V_j)| + |d_{\vec{G},p}(V_i,V_j) - d_{\vec{G},p}(V_i^r, V_j^s)| \\ &\leq 2\varepsilon \\ &\leq t\varepsilon, \end{aligned}$$

e o mesmo vale para $|d_{\vec{G},p}(Y,X) - d(V_j^s, V_i^r)|$. Com argumento análogo, para todos $A \in \mathcal{P}_i$, $B \in \mathcal{P}_j$ e $C \in \mathcal{P}_u$, os pares (A,B), (B,C) e (A,C) são $(t\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular.

Agora, para um arco (i,j) em $\vec{R}$, conseguimos construir um grafo reduzido que tenham arcos entre todos os pares ordenados (A,B), onde $A \in \mathcal{P}_i$ e $B \in \mathcal{P}_j$. Se $d_{\vec{G},p}(V_i, V_j) \geq \delta$, então $d_{\vec{G},p}(A,B) \geq \delta - \varepsilon$, pela definição de $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular.

Por fim, iremos construir uma partição que satisfaça as hipóteses do Lema 28. Como, $|V_i|$ não necessariamente é divisível por t, então coloquemos os vértices excedentes em V_0'. Observe que $|V_0'| \leq t\varepsilon(3n/k)$. Ademais, seja a partição $\mathcal{P}' = \{V_0'\} \cup \mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j \cup \mathcal{P}_u$ e $\vec{R}' = \vec{R}'(\vec{G}, t\varepsilon, \delta - \varepsilon, \mathcal{P}')$, o grafo regular associado à partição $\mathcal{P}'$, então existe pelo menos um $C_\ell^{\circlearrowright}$ em $\vec{R}'$ e, utilizando o Lema 28, concluímos que existe um $C_\ell^{\circlearrowright}$ em $\vec{G}$, o que prova nosso resultado. □

Probabilidades das propriedades em $G_{n,p}$

Lema 30. *Para todo $\delta \in (0,1)$, $\mu \in (0,1)$ e inteiro $\ell \geq 3$, existem n_0, $\gamma > 0$ e $C > 0$ tal que se $n > n_0$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$ e $G \in G_{n,p}$, então*

$$\mathbb{P}\left(G \in \mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, \gamma)\right) \geq 1 - e^{-n}$$

Demonstração. Fixe $\delta \in (0,1)$, $\mu \in (0,1)$, $\ell \geq 3$. Sejam $\gamma = \varepsilon_\delta$, $C = C_\mu$ e $n \geq= n_0$, onde ε_δ, C_μ e n_0 são obtidas pela aplicação do Lema 19 com parâmetros δ e μ. Por fim, seja $G \in G_{n,p}$. Observe que $m^{(2)}(C_\ell) = \frac{\ell}{\ell-1} > 1$ e que a Conjectura 17 é válida para circuitos. Dessa forma, pelo Lema 19 concluímos

$$\mathbb{P}\left(G \in \mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, \gamma)\right) \geq 1 - e^{-n}.$$

□

As provas de que as DISC, DEG, EDGE e (η, p)-uniformidade valem em $G_{n,p}$ com alta probabilidade utilizam a mesma ideia, ou seja, calculamos o valor esperado e utilizamos os Limitantes de Chernoff (Lema 6) para calcular a probabilidade. Para evitar redundância apresentamos somente do limite superior da prova da probabilidade da DISC ocorrer e omitiremos as demais.

Lema 31. *Para todo $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$, $C > 0$ e inteiro $\ell \geq 3$, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$ e $G \in G_{n,p}$ então*

$$\mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{DISC}(\varepsilon, \delta, p)\right) \leq 2e^{-n}$$

Demonstração. Fixe $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$, $C > 0$ e $\ell \geq 3$. Seja

$$n_0 = \left(\frac{24}{\varepsilon\delta^2 C}\right)^{\ell-1}$$

e $n > n_0$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$, $G \in G_{n,p}$ e seja $T \subset V(G)$ com $|T| \geq \varepsilon n$.

Seja a variável aleatória $X = e(G)$. Sabemos que $\mathbb{E}(X) = \binom{n}{2}p$. Fazendo $t = \delta\binom{|T|}{2}p$ e aplicando o Lema 6 (Chernoff) temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X \leq (1-\delta)\binom{|T|}{2}p\right) &\leq e^{-\frac{3\delta^2}{6+2\delta}\binom{|T|}{2}p} \\ &< e^{-\frac{\delta^2}{12}|T|^2 p}. \end{aligned}$$

Análogamente temos

$$\mathbb{P}\left(X \geq (1+\delta)\binom{|T|}{2}p\right) < e^{-\frac{\delta^2}{12}|T|^2 p}.$$

Assim, concluímos que

$$\mathbb{P}\left(\left|e_G(T) - \delta\binom{|T|}{2}p\right| \geq \binom{|T|}{2}p\right) < 2e^{-\frac{\delta^2}{12}|T|^2 p}. \tag{3.1}$$

Por fim, utilizamos o limite da união para calcular a probabilidade de G ter a propriedade DISC.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{DISC}(\delta)\right) &\leq \sum_{T \subset V(G)} \mathbb{P}\left(\left|e_G(T) - \delta\binom{|T|}{2}p\right| \geq \binom{|T|}{2}p\right) \\ &< 2^n \mathbb{P}\left(\left|e_G(T) - \delta\binom{|T|}{2}p\right| \geq \binom{|T|}{2}p\right) \\ &< e^n \mathbb{P}\left(\left|e_G(T) - \delta\binom{|T|}{2}p\right| \geq \binom{|T|}{2}p\right) \\ &< 2e^{-n}, \end{aligned}$$

onde o somatório é sobre todo os subconjuntos $T \subset V(G)$ tais que $|T| \geq \varepsilon n$, e a última desigualdade segue da escolha de n_0 e por (3.1).

Assim, o resultado segue. □

Lema 32. *Para todo $\delta \in (0,1)$, $C > 0$ e inteiro $\ell \geq 3$, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$ e $G \in G_{n,p}$ então*

$$\mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{DEG}(\delta, p)\right) \leq e^{-n}$$

Lema 33. *Para todo $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$, $C > 0$ e inteiro $\ell \geq 3$, existe n_0 se $n \geq n_0$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$ e $G \in G_{n,p}$ então*

$$\mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{EDGE}(\varepsilon, \delta, p)\right) \leq e^{-n}$$

Lema 34. *Para todo $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,\delta)$, $C > 0$ e inteiros $\ell \geq 3$, m, existe $\eta \in (0,1)$ e inteiros n_0, k, M tal que se $n \geq n_0$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$ e $G \in G_{n,p}$ então*

$$\mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{REG}(\delta, \varepsilon, p, m, k, M)\right) \leq e^{-n}$$

Demonstração. Sejam as constantes

$$\delta \in (0,1); \qquad \varepsilon \in (0,\delta); \qquad C > 0; \qquad \ell \geq 3; \qquad m > 0; \qquad n_1 = n_0(\varepsilon, m); \qquad k = k(\varepsilon, m);$$
$$M = M(\varepsilon, m).$$

onde $n_1(m,\varepsilon), k(m,\varepsilon)$ e $M(m,\varepsilon)$ foram obtidas pela aplicação do Lema 12 com parâmetros ε, m e

$$n_2 = \left(\frac{2k^2 + 2k^3}{C(1-2\delta)^2}\right)^{\ell-1}$$

Considere $n \geq n_0 \geq \max\{n_1, n_2\}$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$, $G \in G_{n,p}$ e $\vec{G}$ uma orientação de G. Pelo Lema 12, existe $\mathcal{P} = \{V_0, \ldots, V_k\}$ uma partição $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular dos vértices de $\vec{G}$, onde $m \leq k \leq M$, e seja $\vec{R} = \vec{R}(\vec{G}, \varepsilon, \delta, \mathcal{P})$ o grafo reduzido associado a essa partição.

Fixe vértices $i, j \in V(\vec{R})$. Agora vamos calcular a probabilidade dos vértices i, j serem conectados por uma aresta simples. Pela definição de grafo reduzido, se $\{i, j\}$ é uma aresta simples, então o par V_i, V_j é $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular com $e(V_i, V_j) < \delta|V_i||V_j|p$ e $e(V_j, V_i) < \delta|V_i||V_j|p$. Usando a mesma técnica do Lema 31 (valor esperado e Lema 6), temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(i \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet j \subset \vec{R}\right) &\leq \mathbb{P}\left(e(V_i, V_j) < 2\delta|V_i||V_j|p\right)\\ &< e^{-\frac{(1-2\delta)^2}{2k^2}n^2p}.\end{aligned}$$

Por fim, utilizando o limite da união e pela escolha de n_1, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{REG}(\delta, \varepsilon, p, m, k, M)\right) &\leq \sum_{1\leq i<j\leq e(\vec{R})} \mathbb{P}\left(i \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet j \subset \vec{R}\right)\\ &\leq \binom{k}{2}\mathbb{P}\left(e(V_i, V_j) < 2\delta|V_i||V_j|p\right)\\ &< e^{2\ln(k)-\frac{(1-2\delta)^2}{2k^2}n^2p}\\ &< e^{-n\left[\left(\frac{(1-2\delta)}{2k}\right)^2 Cn^{1/(\ell-1)}-\frac{2\ln(k)}{n}\right]}\\ &< e^{-n}\end{aligned}$$

e o lema está provado. □

3.3 Regime supercrítico

A prova do regime supercrítico da função limiar não é feita diretamente como no caso do regime subcrítico. Nesta seção apresentamos um lema determinístico que depende das propriedades apresentadas na Seção 3.2, utilizamos os lemas provados na Seção 3.2 que nos dão as probabilidades das propriedades acontecerem em $G_{n,p}$ e concluímos que, com alta probabilidade, $G_{n,p}$ as satisfaz. Ademais, utilizando o Lema 4, concluímos que o resultado é válido para $G_{n,m}$.

Lema 35 (Lema determinístico)**.** *Para todo $\gamma \in (0,1)$ e inteiro $\ell \geq 3$, existem constantes $\delta, \varepsilon, \mu, \eta$, e inteiros positivos m, k, M, n_0, e seja G um grafo com $n > n_0$ vértices temos que se G tem as propriedades* $\mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, 2\varepsilon)$, $\mathrm{DISC}(1/k, \delta, p)$, $\mathrm{DEG}(\delta, p)$, $\mathrm{EDGE}(1/k, \delta, p)$ *e* $\mathrm{REG}(\delta, \varepsilon, \eta, p, m, k, M)$, *com $0 < p = p(n) \leq 1$ e $\lim_{n\to\infty}(pn) = \infty$, então*

$$D(G, C_\ell^{\circlearrowright}) \leq 2^{\gamma p\binom{n}{2}}.$$

A prova a seguir utiliza ℓ ímpar, pois para o caso par a prova é simples e será comentada posteriormente.

A seguinte definição será útil. Dado G um grafo com n vértices, dizemos que $\vec{R} \in \mathcal{R}(G)$ se existe uma orientação de G livre de $C_\ell^{\circlearrowright}$ tal que $\vec{R}$ é o grafo reduzido associado a uma partião uniforme de $\vec{G}$. Dado $\vec{R} \in \mathcal{R}(G)$, definimos $D_{\vec{R}}(G, C_\ell^{\circlearrowright})$ a quantidade de orientações de G livres de $C_\ell^{\circlearrowright}$ que geram o grafo reduzido $\vec{R}$.

Prova do lema 35 para ℓ ímpar. Nossa prova é por redução ao absurdo. Fixe $\gamma \in (0,1)$, $t \geq 1$ e $\ell = 2t+1$. Seja, $0 < p = p(n) \leq 1$, onde $\lim_{x\to\infty}(np) = \infty$. Considere as seguintes constantes

- $\sigma \in (0, 1/2)$ tal que vale $5\sigma + 2H(\sigma) < \frac{\gamma}{2}$, onde $H(x)$ é a função binária da entropia.
- $\delta \in (0, \sigma/6)$;
- $0 < \varepsilon \leq \min\{\delta/2t, \gamma^3/4\}$;
- $m = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;
- n_0, k, M e η obtidas pela aplicação do Lema 12 com parâmetros ε e m;
- $0 < \mu < (1-\varepsilon)/k$;
- n_1 tal que se $n \geq n_1$ então $\frac{\log M}{np} < \varepsilon$;
- n_2 tal que se $n \geq n_2$ então $\frac{K^2 \log(2\delta p) + 2K^2 + \log K}{\delta n^2 p} < \delta$.

Por fim, fixe $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, $p = p(n)$ e seja G um grafo com n vértices que tem as propriedades $\mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, 2\varepsilon)$, $\mathrm{DISC}(1/k, \delta, p)$, $\mathrm{DEG}(\delta, p)$, $\mathrm{EDGE}(1/k, \delta, p)$ e $\mathrm{REG}(\delta, \varepsilon, \eta, p, m, k, M)$..

Suponha $D(G, C_\ell^{\circlearrowright}) > 2^{\gamma p n^2}$. Denotamos por $\mathcal{R}(G)$ o conjunto dos grafos reduzidos associados às orientações de G livres de $C_\ell^{\circlearrowright}$. Todo $\vec{R}_{(i)} \in \mathcal{R}(G)$, tem $k_{(i)}$ vértices, onde $m \leq k_{(i)} \leq M$. Seja $K = \max\{k_{(i)} : \vec{R}_{(i)} \in \mathcal{R}(G)\}$. Assim, cada grafo reduzido tem no máximo K vértices e temos no máximo $K 4^{\binom{K}{2}}$ grafos reduzidos diferentes, pois temos 4 possíveis tipos de arestas. Ademais, para cada grafo reduzido $\vec{R}$,

$$D_{\vec{R}}(G, C_\ell^{\circlearrowright}) \geq \frac{2^{\gamma n^2 p}}{K4^{\binom{K}{2}}}. \tag{3.2}$$

Agora, contaremos a quantidade de orientações que geram um grafo reduzido. Seja $\vec{R} = \vec{R}_{(i)}$ um grafo reduzido associado a uma partição regular de uma orientação de G. Denote $s = s_{(i)} = |V_1|/k_{(i)}$ e $k = k_{(i)}$. Observe que $1/k \leq 1/m \leq \varepsilon$.

- Possibilidades para:
  - Partições de $V(G)$: no máximo $M^n = 2^{n \log M}$;
  - Orientações das arestas internas de V_i, para $1 \leq i \leq k$: pela Propriedade DISC, temos no máximo $(1+\delta)p\binom{s}{2}k \leq (1+\delta)\varepsilon pn^2 \leq 2\varepsilon pn^2$ arestas internas de V_i, para $1 \leq i \leq k$, então temos no máximo $2^{2\varepsilon pn^2}$ orientações;
  - Orientações das arestas que incidem em algum vértice de V_0: pela Propriedade DEG, temos no máximo $(1+\delta)\varepsilon n^2 p \leq 2\varepsilon n^2 p$ arestas que incedem em V_0, então temos no máximo $2^{2\varepsilon n^2 p}$ orientações.

Fixe $i, j \in [k]$, Agora contaremos a quantidade de orientações que podem gerar uma aresta de cada tipo.

- $\{i, j\}$ define uma aresta simples: Pela Propriedade REG nosso grafo reduzido não tem $\{i, j\}$ como aresta simples, então não contribui com orientações.

- $\{i, j\}$ define uma aresta ruim: pela Propriedade EDGE temos no máximo $(1+\delta)s^2 p \leq 2s^2 p$ arestas entre duas partes, então temos no máximo $2^{2s^2 p}$ orientações;

- $\{i, j\}$ define um arco duplo: pela Propriedade EDGE temos no máximo $(1+\delta)s^2 p \leq 2s^2 p$ arestas entre duas partes, então temos no máximo $2^{2s^2 p}$ orientações;

- $\{i, j\}$ define um arco: pela Propriedade EDGE temos no máximo $(1+\delta)s^2 p$ arestas entre duas partes, mas pela definição de grafo reduzido, uma das partes tem de ter menos que $\delta s^2 p$

arestas. Assim temos no máximo a seguinte quantidade de orientações:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=0}^{(\delta s^2p)}\binom{s^2p(1+\delta)}{i} &\leq 2(\delta s^2p)\binom{s^2p(1+\delta)}{\delta s^2p(1+\delta)} && (3.3)\\
&\leq 2^{H(\delta)s^2p(1+\delta)}(2\delta s^2p) && (3.4)\\
&\leq 2^{2H(\delta)s^2p}(2\delta s^2p).
\end{aligned}
$$

Onde, na desigualdade (3.3), usamos o fato $\delta \leq 1/2$ e, na desigualdade (3.4), utilizamos a estimativa $\binom{a}{xa} < 2^{H(x)a}$ para $0 < x < 1$.

Por fim, contamos a quantidade de arestas de cada tipo. Pela definição de aresta ruim e partição $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular, temos no máximo $\varepsilon\binom{k}{2} \leq \varepsilon k^2$ arestas ruins em $\vec{R}$. A quantidade de arcos em $\vec{R}$ é, no máximo $\binom{k}{2} \leq k^2$ e seja $A(\vec{R})$ a quantidade de arcos duplos de $\vec{R}$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{R}}(G, C_\ell^{\circlearrowright}) &\leq 2^{n\log(M)}2^{2\varepsilon n^2p}2^{2\varepsilon n^2p}\left(2^{2s^2p}\right)^{\varepsilon k^2}\left(2^{2H(\delta)s^2p}2\delta s^2p\right)^{k^2}\left(2^{2s^2p}\right)^{A(\vec{R})}\\
&\leq 2^{n^2p\frac{\log(M)}{np}}2^{6\varepsilon n^2p}2^{2H(\delta)n^2p}\left(2\delta s^2p\right)^{k^2}2^{2s^2pA(\vec{R})}\\
&\leq 2^{7\varepsilon n^2p}2^{2H(\delta)n^2p}\left(2\delta s^2p\right)^{k^2}2^{2s^2pA(\vec{R})}\\
&\leq 2^{n^2p(4\delta+2H(\delta))}\left(2\delta s^2p\right)^{k^2}2^{2s^2pA(\vec{R})}, && (3.5)
\end{aligned}
$$

onde na primeira desigualdade usamos que $s = n/k$ e na segunda desigualdade usamos que $n \geq n_1$. Compondo (3.5) com (3.2)

$$
\begin{aligned}
\frac{2^{\gamma n^2p}}{K}4^{\binom{K}{2}} &\leq 2^{n^2p(4\delta+2H(\delta))}\left(2\delta s^2p\right)^{k^2}2^{2s^2pA(\vec{R})}\\
2^{\gamma n^2p} &\leq 2^{\log(K)}2^{2\binom{K}{2}}2^{n^2p(4\delta+2H(\delta))}\left(2\delta s^2p\right)^{k^2}2^{2s^2pA(\vec{R})}\\
&\leq 2^{n^2p(4\delta+2H(\delta))}2^{n^2p\left(\frac{k^2\log(2\delta s^2p)+2K^2+\log(K)}{n^2p}\right)}2^{2s^2pA(\vec{R})}\\
&\leq 2^{n^2p(5\delta+2H(\delta))}2^{2s^2pA(\vec{R})}\\
&\leq 2^{\frac{\gamma}{2}n^2p}2^{2s^2pA(\vec{R})}. && (3.6)
\end{aligned}
$$

onde na terceira desigualdade usamos que $n \geq n_2$ e a última segue da escolha inicial de σ e δ. Assim, por (3.6) e pela definição de s temos $A(\vec{R})2\frac{n^2p}{K^2} \geq \frac{\gamma}{2}n^2p$. Portanto,

$$\frac{A(\vec{R})}{k} \geq \frac{\gamma}{4}k.$$

Note que isso significa a média dos graus de $\vec{R}$ com relação a arcos duplos. Ademais, temos que existe um vértice u de $\vec{R}$ com no mínimo $\frac{\gamma}{4}k$ vizinhos através de um arco duplo como na figura abaixo.

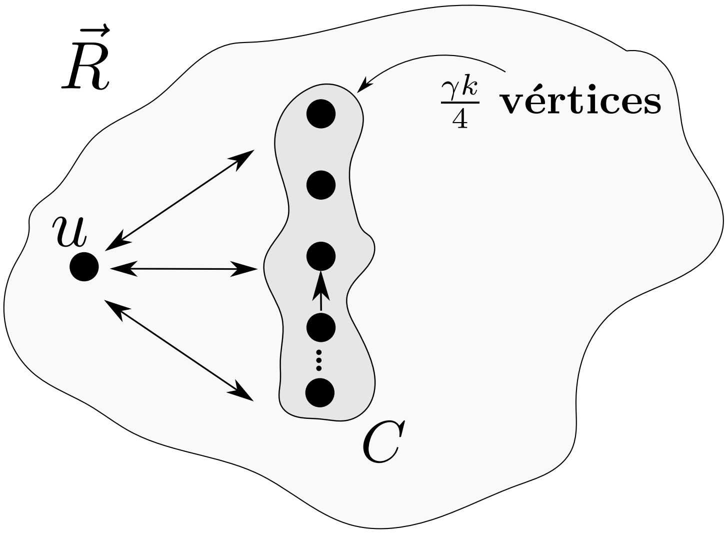

Figura 3.2: *Existe um vértice u com tal vizinhança*

Então existem $\binom{\frac{\gamma}{4}k}{2}$ pares de vértices no conjunto C da Figura 3.2 e, pela escolha de ε, temos

$$\binom{\frac{\gamma}{4}k}{2} > \varepsilon\binom{k}{2}.$$

Com isso, existe pelo menos um par de vértices em C que corresponde a um par $(\varepsilon, \vec{G}, p)$-regular no grafo $\vec{G}$ e então existe um $\bar{C}_3^{\circlearrowleft}$ e, pelo Lema 29, $\vec{G}$ contém $C_\ell^{\circlearrowleft}$, o que é um absurdo pela nossa suposição. Assim, concluímos que

$$D(G, C_\ell^{\circlearrowleft}) \leq 2^{\gamma p\binom{n}{2}},$$

e o lema está provado. $\square$

Para o caso onde ℓ é par, utilizando as mesmas constantes e o Lema 29 temos $A(\vec{R}) = 0$. Observe que $D(G, C_\ell^{\circlearrowright}) \leq 4^{\binom{K}{2}} D_{\vec{R}}(G, C_\ell^{\circlearrowright})$ e por (3.6) o resultado é verdadeiro.

Lema 36 (Lema probabilístico)**.** *Para todo $\gamma \in (0,1)$ e inteiro $\ell \geq 3$, existem C e n_0 tal que se $n > n_0$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$, e $G \in G_{n,p}$ então*

$$\mathbb{P}\left(D(G, C_\ell^{\circlearrowright}) > 2^{\gamma p \binom{n}{2}}\right) \leq 7e^{-n}.$$

Demonstração. Fixe $\gamma \in (0,1)$,$\xi \in (0, 1/k)$ e $\ell \geq 3$. Considere as constantes

- Obtemos δ, ε_0, μ, m e n_1 pela aplicação do Lema 35 com parâmetros γ e ℓ;
- Obtemos C, γ_1 e n_2 pela aplicação do Lema 30 com parâmetros ℓ, δ e μ;
- $\varepsilon \leq \min\{\gamma, \gamma_1, \varepsilon_0\}$;
- Obtemos η, k, M e n_3 pela aplicação do Lema 34 com parâmetros δ, ε, C, ℓ e m;
- Obtemos n_4 pela aplicação do lema 32 com parâmetros δ, C e ℓ;
- Obtemos n_5, e n_6 pela aplicação dos lemas 31, e 33 com parâmetros $1/k$, δ, C e ℓ.

Agora façamos $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$, $p \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$ e $G \in G_{n,p}$. Assim, denotamos o conjunto $PROP = \mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, \varepsilon) \cup \mathrm{DISC}(\delta) \cup \mathrm{DEG}(\delta) \cup \mathrm{EDGE}(\delta, p) \cup \mathrm{REG}(\delta, \varepsilon, p, m, k, M)$ e pelos lemas provados na Seção 3.2, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(D(G, C_\ell^{\circlearrowright}) > 2^{\gamma p \binom{n}{2}}\right) &\leq \mathbb{P}\left(G \notin PROP\right); \\
&\leq \mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{IME}(C_\ell, \mu, \delta, p, \gamma)\right) + \mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{DISC}(\delta)\right) + \mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{DEG}(\delta)\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{EDGE}(\delta, p)\right) + \mathbb{P}\left(G \notin \mathrm{REG}(\delta, \varepsilon, p, m, k, M)\right); \\
&\leq 7e^{-n}.
\end{aligned}$$

e o lema está provado. $\square$

Por fim, usaremos o Lema 4 para provar o regime subcrítico do nosso problema.

Lema 37 (Regime supercrítico)**.** *Para todo $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$ e $\ell \geq 3$, existem n_0 e $C > 0$ tal que se $n > n_0$ e $m \geq Cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}$, então*

$$D(n, m, \varepsilon, C_\ell^{\circlearrowright}) \leq 2^{\delta m}.$$

Demonstração. Fixe $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$ e $\ell \geq 3$. Obtemos n_1 e C pela aplicação do Lema 36 com parâmetros δ e ℓ. Seja n_2 tal que se $n \geq n_2$, então $n > \ln(21n) - \ln(\varepsilon)$, e seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Por fim, faça $n \geq n_0$, $m \geq Cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}$ e $p = m/\binom{n}{2}$.

Denotamos a propriedade de grafos $\mathcal{Q}$ tal que, se $G \in \mathcal{Q}$, então $D(G, C_\ell^{\circlearrowright}) \leq 2^{\delta\binom{n}{2}p}$. Seja $\mathbb{P}_m$ a medida de probabilidade no modelo de grafo aleatório uniforme $(G_{n,m})$ e $\mathbb{P}_p$ no modelo de grafo aleatório binomial $(G_{n,p})$.

Seja $G \in G_{n,m}$. Observe que $p = m/\binom{n}{2} \geq Cn^{-1+\frac{1}{\ell-1}}$. Assim, utilizando o Lema 36, concluímos que $\mathbb{P}_p(G \notin \mathcal{Q}) \leq 7e^{-n}$. Pelo Lema 4 e pela escolha de n_2, temos

$$\mathbb{P}_m(G \in \mathcal{Q}) > 1 - \varepsilon.$$

Como $\mathbb{P}_m$ é uma medida de probabilidade uniforme, então temos mais que $(1-\varepsilon)|\mathcal{G}_{n,m}|$ elementos de $\mathcal{G}_{n,m}$ com a propriedade $\mathcal{Q}$, assim, para qualquer conjunto obtido pelo máximo ε-essencial haverá pelo menos um grafo com a propriedade $\mathcal{Q}$ e nosso resultado segue pela nossa definição de $D(n, m, \varepsilon, C_\ell^{\circlearrowright})$. □

Prova do teorema principal

Agora usamos os Lemas 21 e 37 para provar o Teorema 20.

Teorema 20 (Kohayakawa–Mota–Parente [18])**.** *Seja $C_\ell^{\circlearrowright}$ um circuito direcionado cíclico, para $\ell \geq 3$.*

Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ *e* $\delta \in (0,1)$*, existem* n_0*,* c *e* C *tal que se* $n \geq n_0$*, então*

$$D(n,m,\varepsilon,C_\ell^{\circlearrowright}) \begin{cases} \leq 2^{\delta m}, & \text{se } m \geq Cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}; \\ \geq 2^{(1-\delta)m}, & \text{se } m \leq cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\delta \in (0,1)$ e $\ell \geq 3$. Considere as constantes

- Obtemos n_1 e c pela aplicação do Lema 21 com parâmetros δ, ε e ℓ.
- Obtemos n_2 e C pela aplicação do Lema 37 com parâmetros δ, ε e ℓ.

Por fim, faça $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Pelo Lema 21, temos que, se $m \leq cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}$, então $D(n,m,\varepsilon,C_\ell^{\circlearrowright}) \geq 2^{(1-\delta)m}$ e, pelo Lema 37, se $m \geq Cn^{1+\frac{1}{\ell-1}}$, então $D(n,m,\varepsilon,C_\ell^{\circlearrowright}) \leq 2^{\delta m}$. Então, o teorema está provado. $\square$

Capítulo 4

Conclusão

Sugestões para Pesquisas Futuras

O nosso resultado principal é uma função limiar para a quantidade de orientações livres de $C_\ell^{\circlearrowright}$. Uma sugestão bastante natural é conseguirmos estimar uma função limiar para a quantidade de orientações de um grafo genérico.

Mencionamos ao final da Seção 2.3 que usando a Conjectura 17 conseguimos generalizar o nosso resultado para grafos genéricos. Desta forma, é razoável e natural o estudo da conjectura.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Prova do Lema 19

Lema 19 (Gerke–Steger [14]). *Dado um grafo H com $m^{(2)}(H) > 1$, se a Conjectura 17 é válida, então, para todo $\delta > 0$ e $\mu > 0$, existem $\varepsilon_\delta = \varepsilon_\delta(\delta) > 0$, $C_\mu = C_\mu(\mu) > 0$ e n_0 tal que, para todo $n > n_0$, $p \geq C_\mu n^{-1/m^{(2)}(H)}$, temos que se $G \in G_{n,p}$, então*

$$\mathbb{P}\left(G \notin \bigcup_{n' \geq \mu n} \mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)\right) > 1 - e^{-n}.$$

Demonstração. Seja H um grafo fixo com $m^{(2)}(H) > 1$ e suponha que a Conjectura 17 é válida.

Sejam as seguintes constantes

$$\delta > 0; \qquad \beta = (\delta/e^2)^{|E(H)|}; \qquad \mu > 0; \qquad n_\delta = n_1(\beta, H);$$

$$\varepsilon_\delta = \varepsilon_0(\beta, H); \qquad C_\delta = C(\beta, H); \qquad C_\mu = C_\delta/(\delta\mu^2);$$

onde as contantes ε_0, C e n_1 são obtidas pela aplicação da Conjectura 17. Seja n_2 tal que se $n \geq n_2$ então

$$n > \frac{2\ln(n)(v_H + 1)}{e_H\left(C_\delta n^{-1/m^{(2)}(H)}\right)}$$

e $n_0 = \max\{n_2, n_\delta/\mu\}$. Por fim, faça $n \geq n_0$, $p \geq C_\mu n^{-1/m^{(2)}(H)}$ e $G \in G_{n,p}$.

Seja X a variável aleatória que conta a quantidade de subgrafos de G que pertencem ao conjunto $\bigcup_{n' \geq \mu n} \mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)$. Vamos mostrar que $\mathbb{E}(X) \leq e^{-n}$. Uma vez mostrado este fato, o resultado segue, pois, pela desigualdade de Markov, $\Pr(X > 0) \leq \mathbb{E}(X)$. Observe que

$$\mathbb{E}(X) \leq \sum_{n' \geq \mu n} n^{|V(H)|n'} p^{|E(H)|\delta n'^2 p} |\mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)|. \tag{A.1}$$

Precisamos limitar superiormente os termos que aparecem no somatório acima. Se $n' \geq \mu n$, então, para limitar $|\mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)|$, precisamos mostrar que $\delta n'^2 p \geq C_\delta n'^{2-1/m^{(2)}(H)}$, pois desta forma a Conjectura 17 nos dá um limite superior. Para tal, observe que temos $\mu n \geq n_\delta$ pela escolha de n_0, temos

$$\begin{aligned}
\delta n'^2 p &\geq \delta(\mu n)^2 p \\
&\geq \delta(\mu n)^2 C_\mu n^{-1/m^{(2)}(H)} \\
&\geq C_\delta n^{2-1/m^{(2)}(H)} \\
&\geq C_\delta n'^{2-1/m^{(2)}(H)}.
\end{aligned}$$

Assim, a Conjectura 17 nos diz que, para todo $n' \geq \mu n$,

$$|\mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)| \leq \left(\frac{\delta}{e^2}\right)^{|E(H)|\delta n'^2 p} \binom{n'^2}{\delta n'^2 p}^{|E(H)|}. \tag{A.2}$$

Sabendo que $\binom{n}{k} \leq (en/k)^k$, $m^{(2)}(H) > 1$, pela escolha de n_2 e substituindo (A.2) em (A.1), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &\leq \sum_{n' \geq \mu n} n^{|V(H)|n'} \left(\frac{\delta}{e^2} \frac{en'^2 p}{\delta n'^2 p}\right)^{|E(H)|\delta n'^2 p}; \\
&\leq n^{(|V(H)|+1)n} e^{-|E(H)|\delta \mu^2 n^2 p}; \\
&\leq e^{n\left((v_H+1)\ln(n) - n|E(H)|C_\delta n^{-1/m^{(2)}(H)}\right)}; \\
&\leq e^{(n \ln(n)(1-2))}; \\
&\leq e^{-n \ln(n)};
\end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

[1] V. E. Alekseev, *Range of values of entropy of hereditary classes of graphs*, Diskret. Mat. **4** (1992), no. 2, 148–157.

[2] N. Alon and A. Shapira, *Testing subgraphs in directed graphs*, J. Comput. System Sci. **69** (2004), no. 3, 353–382.

[3] N. Alon and R. Yuster, *The number of orientations having no fixed tournament*, Combinatorica **26** (2006), no. 1, 1–16.

[4] J. Balogh, *A remark on the number of edge colorings of graphs*, European J. Combin. **27** (2006), no. 4, 565–573.

[5] B. Bollobás, *Modern graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 184, Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] B. Bollobás and A. Thomason, *Hereditary and monotone properties of graphs*, The mathematics of Paul Erdős, II, Algorithms Combin., vol. 14, Springer, Berlin, 1997, pp. 70–78.

[7] D. Conlon and W. T. Gowers, *Combinatorial theorems in sparse random sets*, ArXiv e-prints (2010).

[8] R. Diestel, *Graph theory*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer-Verlag, New York, 2000.

[9] P. Erdös, *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292–294.

[10] P. Erdős, *Some new applications of probability methods to combinatorial analysis and graph theory*, Proceedings of the Fifth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1974) (Winnipeg, Man.), Utilitas Math., 1974, pp. 39–51. Congressus Numerantium, No. X.

[11] P. Erdős, P. Frankl, and V. Rödl, *The asymptotic number of graphs not containing a fixed subgraph and a problem for hypergraphs having no exponent*, Graphs and Combinatorics **2** (1986), 113–121, 10.1007/BF01788085.

[12] P. Erdős and M. Simonovits, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar **1** (1966), 51–57.

[13] P. Erdős and A. H. Stone, *On the structure of linear graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1087–1091.

[14] S. Gerke and A. Steger, *The sparse regularity lemma and its applications*, Surveys in combinatorics 2005, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 327, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, pp. 227–258.

[15] S. Janson, T. Łuczak, and A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[16] Y. Kohayakawa, *Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs*, Foundations of computational mathematics (Rio de Janeiro, 1997), Springer, Berlin, 1997, pp. 216–230.

[17] Y. Kohayakawa, T. Łuczak, and V. Rödl, *On K^4-free subgraphs of random graphs*, Combinatorica **17** (1997), no. 2, 173–213.

[18] Y. Kohayakawa, G. Mota, and R. Parente, *A note on counting orientations*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **37** (2011), no. 0, 3–8, LAGOS'11 – VI Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium.

[19] Y. Kohayakawa, V. Rödl, and M. Schacht, *The Turán theorem for random graphs*, Combin. Probab. Comput. **13** (2004), no. 1, 61–91.

[20] J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 2, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295–352.

[21] H. J. Prömel and A. Steger, *Excluding induced subgraphs. III. A general asymptotic*, Random Structures Algorithms **3** (1992), no. 1, 19–31.

[22] M. Schacht, *Extremal results for random discrete structures*, preprint, 2010.

[23] P. Turán, *Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie*, Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 436–452.