

Uma conjectura de Erdős e Hajnal

Rodrigo Aparecido Enju

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, novembro de 2022

Uma conjectura de Erdős e Hajnal

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 31/1/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Lucas Colucci Cavalcante de Souza - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Cristiane Maria Sato - UFABC

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, prof. Yoshiharu pela ajuda e paciência durante meu mestrado.

Agradeço aos meus melhores amigos, André, Larissa e Lucas pela companhia e pela ajuda ao longo de minha graduação e mestrado.

Agradeço à minha família pelo apoio.

Agradeço ao Gabriel e ao Tássio pela ajuda ao longo da pesquisa, em problemas que não sabia resolver, assim como por direções de como continuar.

Agradeço à Giulia, por me coorientar em minha conclusão da graduação e com isso indiretamente me encaminhar para a decisão de ingressar no mestrado.

Agradeço aos meus amigos da USP.

Resumo

ENJU, R. A. **Uma conjectura de Erdős e Hajnal**. 2022. 56f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Um resultado de Erdős demonstra a existência de grafos com número cromático e cintura arbitrariamente grandes. Temos então que um clique suficientemente grande contém um grafo com número cromático e cintura grandes como subgrafo, porém muitos grafos de interesse não necessariamente contém cliques grandes, então é interessante encontrar outra condição que garanta a existência de subgrafos com número cromático e cintura grandes. Uma conjectura de Erdős e Hajnal diz que todo grafo com número cromático suficientemente grande contém um subgrafo com número cromático e cintura grandes. O objetivo deste trabalho é estudar tal conjectura.

O texto começa com uma breve apresentação de construções livres de triângulos. Em particular, é demonstrada uma construção de Codenotti, Pudlák e Resta, por meio de planos projetivos.

O tópico principal do texto começa com uma demonstração de Rödl de que todo grafo com número cromático suficientemente grande contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático grande. Em sequência, apresentamos uma demonstração de que grafos com número cromático suficientemente grande contém algum circuito ímpar grande.

Apresentaremos também um resultado de Mohar e Wu, que demonstra que a família dos grafos de Kneser respeita a conjectura de Erdős e Hajnal. Outro resultado apresentado é de Gábor Tardos, demonstrando que a família dos *shift graphs* respeita a conjectura de Erdős e Hajnal. E por fim apresentaremos algumas breves contribuições sobre os *type graphs*, mostrando casos que respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal.

Palavras-chave: número cromático, cintura, grafo de Kneser, shift graph, type graph.

Abstract

ENJU R. A. **An Erdős-Hajnal conjecture**. 2022. 56f. Thesis - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

A result by Erdős shows that there exist graphs with arbitrarily large chromatic number and girth. Thus a sufficiently large clique contains a subgraph with large chromatic number and girth, but many graphs do not have a large clique, hence it is interesting to find a different condition that guarantees the existence of a subgraph with large chromatic number and girth. A conjecture by Erdős and Hajnal states that every graph with sufficiently large chromatic number contains a subgraph with large chromatic number and girth. The objective of this text is to study this conjecture.

The text begins with a brief discussion of triangle-free constructions. In particular, we show a construction by Codenotti, Pudlák and Resta, based on projective planes.

The main topic begins with a proof by Rödl, that every graph with sufficiently large chromatic number contains a triangle-free subgraph with large chromatic number. We follow with a proof that every graph with sufficiently large chromatic number contains a large odd cycle.

We then show a result by Mohar and Wu, which shows that the Kneser graphs respect the Erdős-Hajnal conjecture. Another result by Gábor Tardos proves that shift graphs also respect the Erdős-Hajnal conjecture. Finally, we show some brief contributions about type graphs, showing some cases that follow the Erdős-Hajnal conjecture.

Keywords: chromatic number, girth, Kneser graph, shift graph, type graph.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Considerações Iniciais	3
2.1 Construção livre de triângulos	3
2.1.1 Construção por Planos Projetivos	3
2.2 Lema Local de Lovász	6
2.3 Grafos Livres de Triângulos	9
2.4 Número cromático na demonstração de Rödl	11
2.5 Grafos com Circuitos Ímpares Grandes	12
3 Grafos de Kneser	15
3.1 Número cromático	16
3.2 Prova da conjectura de Erdős e Hajnal para grafos de Kneser	18
4 <i>Shift Graphs</i>	31
4.1 Número Cromático	33
4.2 Esboço da prova	35
4.3 Prova da conjectura de Erdős e Hajnal para <i>shift graphs</i>	35
4.4 Número cromático para a demonstração	43
4.5 <i>Type Graphs</i>	44
4.6 Considerações Adicionais	49
4.6.1 Grafos linha	49
4.6.2 Type Graphs	50
5 Considerações Finais	53
Bibliografia	55

Lista de Figuras

2.1	O plano projetivo de ordem 2, conhecido como o plano de Fano.	4
2.2	Em um circuito de comprimento 4, temos que p e p' pertencem às retas l e l' simultaneamente, o que não pode ocorrer pela definição de planos projetivos.	4
2.3	Um triângulo que não é um circuito dirigido em D (esquerda) corresponde a um circuito de comprimento 4 no grafo de incidência (direita).	5
2.4	Para cada vértice v , definimos o subgrafo $L(v, G)$	9
2.5	Cada aresta entre v e $v_i \in L(v, G)$ recebe a cor de v_i na coloração de $L(v, G)$	10
2.6	Se $v_1v_2v_3$ é um triângulo em $(V(G_0), E_i)$, os vértices v_1 e v_2 recebem a mesma cor em $L(v_3, G_0)$, e logo v_1v_2 é uma aresta monocromática em $L(v_3, G_0)$	11
2.7	Se $2i+1 \in J$ ou $j-2i+1 \in J$, podemos determinar um circuito ímpar de comprimento pelo menos $2r + 1$	14
3.1	Grafo de Kneser $KG(5, 2)$, isomorfo ao grafo de Petersen.	15
3.2	<i>Blow-up</i> de K_2 de potência 3.	16
3.3	Hemisfério aberto H_x em S^2	17
3.4	Hemisférios disjuntos H_{x^*} e H_{-x^*} contendo os r -conjuntos A e B , respectivamente.	18
3.5	O <i>blow-up</i> de cada vértice contém alguma cor que ocorre pelo menos m/k vezes.	19
3.6	Um vértice de G (esquerda), e um vértice de H (direita).	24
3.7	Projeção de um vértice de $KG(nt, rt - x)$ em $[n]$	25
4.1	O <i>shift graph</i> S_4	31
4.2	Alguns vértices de S_5^2	31
4.3	Um grafo G (esquerda) e seu grafo linha $L(G)$ (direita).	32
4.4	Um digrafo D (esquerda) e seu digrafo linha $L(D)$ (direita).	32
4.5	Arcos de cor i e j chegam em v , logo a cor de v contém 1 nas posições i e j	34
4.6	Cada vértice de D é colorido com um subconjunto distinto de $\lceil \log_2(n) \rceil$, atribuídos em ordem não-crescente de tamanho segundo a ordem dos vértices de D	34
4.7	A i -ésima entrada da cor de um vértice é 1 se nele entram pelo menos d arcos de cor i	36
4.8	Um vértice de D com d arcos de mesma cor entrando e saindo corresponde a um $K_{d,d}$ monocromático em $L(D)$	37
4.9	Aplicações sucessivas do Lema 4.3.1.	43
4.10	A coloração de H corresponde a uma t -coloração de $L^r(D)$ sem $K_{d,d}$ monocromático, e por meio de aplicações sucessivas do Lema, obtemos uma t' -coloração de $L^0(D)$ sem $K_{d',d'}$ monocromático.	43
4.11	O <i>type</i> dos conjuntos A_1 e A_2 , assumindo que $a < b < c < d < e$	45

4.12 Alguns vértices de um *type graph* com *type* $(1, 2, 3, 1, 2)$ 45

4.13 Um vértice da forma (s_i, s_j) 46

4.14 Adjacência de vértices (s_i, s_j) e (s_j, s_k) 47

4.15 Um vértice $(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_t})$ 48

4.16 Adjacência de vértices da forma $(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_t})$ e $(s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_t})$ 48

4.17 Um vértice de grau 4 em G corresponde a um clique de tamanho 4 em $L(G)$ 50

4.18 Sequências de vértices adjacentes não se “alinham” da mesma forma que nos demais casos. 50

4.19 Divisão do conjunto de um vértice em blocos alternados de tamanhos r e r' 51

4.20 Usando as sequências s_i e s'_i , os blocos dos conjuntos dos vértices se alinham corretamente. 51

Capítulo 1

Introdução

Uma possível abordagem para o estudo de grafos é por meio de seu número cromático e de sua cintura, parâmetros que dão informações sobre a estrutura global dos grafos.

Definição 1.0.1. *Uma coloração de um grafo é uma atribuição de classes (chamadas de “cores”) para seus vértices. Uma coloração é dita própria se toda aresta tem extremidades de cores distintas.*

Definição 1.0.2. *O número cromático de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é o menor número de cores necessárias para colorir propriamente os vértices de G .*

Definição 1.0.3. *A cintura de um grafo G , denotada por $g(G)$, é o comprimento de um menor circuito de G .*

Um exemplo fundamental de grafos com número cromático grande são os grafos completos, grafos em que todo par de vértices são adjacentes, e logo cada vértice precisa de uma cor única. Então uma forma simples de aumentar o número cromático de um grafo é inserir novas arestas, e teremos que o número cromático se aproxima do número de vértices conforme o grafo se aproxima de um grafo completo.

Dessa forma, parece natural que, para um grafo ter número cromático grande, ele contenha uma grande concentração de arestas.

Por outro lado, grafos com cintura grande têm baixa concentração de arestas, pois seus circuitos não podem conter cordas que gerem circuitos pequenos. Dessa forma temos que, localmente, um grafo de cintura grande se assemelha a uma árvore.

Pode parecer intuitivo que um grafo com número cromático grande tenha cintura pequena ou vice-versa. Porém tal intuição está incorreta, e temos que existem grafos com número cromático e cintura arbitrariamente grandes.

Um primeiro passo para mostrar que existem grafos com número cromático e cintura arbitrariamente grandes é mostrar que existem grafos com número cromático arbitrariamente grande e livres de triângulos, ou seja, com cintura pelo menos 4. Exemplos de construções de grafos livres de triângulos e com número cromático arbitrariamente grande incluem as construções de W. Tutte [8] e A. Zykov [23], a construção de Mycielski [20], e uma construção baseada em planos projetivos [7].

Erdős mostrou que existem grafos com número cromático e cintura arbitrariamente grandes [9].

Teorema 1.0.4. *Para todo par de inteiros $k, g > 0$, existe um grafo de ordem k^{3g} com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .*

Uma forma de interpretar o teorema de Erdős é, existe um inteiro $n_0 = n_0(k, g)$ tal que todo K_n com $n \geq n_0$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . Temos então que se um grafo contém um clique de tamanho suficientemente grande, o grafo contém um subgrafo com número cromático e cintura grandes.

Porém, diversos grafos de interesse não contém cliques grandes. Portanto, é interessante procurar outra condição que garanta a existência de subgrafos com número cromático e cintura grandes.

Em [10], Erdős e Hajnal propõem a seguinte conjectura.

Conjectura 1 (Erdős e Hajnal, 1969). *Para todo par de inteiros positivos k e g , existe um inteiro $f(k, g)$ tal que todo grafo G com $\chi(G) \geq f(k, g)$ contém um subgrafo H com $\chi(H) \geq k$ e $g(H) \geq g$.*

Ou seja, para garantir a existência de um subgrafo com número cromático e cintura grandes, basta que o número cromático do grafo seja suficientemente grande.

Podemos dizer que a conjectura é uma generalização do teorema de Erdős, no sentido de que não precisamos de um clique grande para garantir a existência de um subgrafo com número cromático e cintura grandes, bastando apenas que o grafo “se comporte como um clique”, ou seja, que tenha número cromático suficientemente grande para garantir a existência de um subgrafo com número cromático e cintura grandes.

Neste trabalho, estudaremos alguns resultados sobre famílias de grafos para as quais é conhecido que a conjectura de Erdős e Hajnal é verdadeira. Mostraremos que, para qualquer k , existe $f(k, 4)$ [21], ou seja, que a conjectura de Erdős e Hajnal é verdadeira se $g = 4$. Assim como mostraremos que, para qualquer g , existe $f(3, g)$.

No capítulo 3 mostraremos que os grafos de Kneser respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal [17], especificamente mostraremos que grafos de Kneser suficientemente grandes contém *blow-ups* de grafos de Kneser menores como subgrafos, e usando o Lema Local de Lovász mostraremos que *blow-ups* de grafos de Kneser contém subgrafos com número cromático e cintura grandes.

No capítulo 4 mostraremos que os *shift graphs* respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal [22] por meio do Lema Local de Lovász usando um método semelhante, porém não idêntico, ao usado com os grafos de Kneser. Assim como apresentaremos alguns breves resultados sobre os *type graphs*, grafos que generalizam os *shift graphs*. Em particular, mostraremos algumas famílias de *type graphs* que respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal.

Capítulo 2

Considerações Iniciais

2.1 Construção livre de triângulos

Um primeiro passo para o estudo de grafos com número cromático e cintura grandes é considerar a existência de grafos livres de triângulos e com número cromático grande.

Algumas construções bastante conhecidas incluem a construção de Tutte [8], a construção de Zykov [23], e a construção de Mycielski [20]. Uma construção menos conhecida usa planos projetivos.

2.1.1 Construção por Planos Projetivos

Uma construção de Codenotti, Pudlák, e Resta de grafos livres de triângulos e número cromático grande faz uso de planos projetivos [7].

Um plano projetivo é definido por um par de conjuntos abstratos (P, L) , onde P é chamado de conjunto de pontos e L é chamado de conjunto de retas, e são tais que:

1. Dados dois pontos de P , existe exatamente uma reta de L que contém os dois pontos.
2. Dadas duas retas de L , existe exatamente um ponto de P contido em ambas retas.
3. Existe um conjunto de quatro pontos de P tal que nenhuma reta de L contém mais do que dois destes pontos.

Note que os plano projetivos não são euclidianos.

Dizemos que um plano projetivo finito é de ordem n se cada ponto está contido em exatamente $n + 1$ retas.

Em um plano projetivo finito de ordem n , cada reta contém exatamente $n + 1$ pontos, pois dada uma reta l e um ponto $p \notin l$, temos $n + 1$ retas distintas passando por p , e cada uma dessas retas intersecta l , logo l contém pelo menos $n + 1$ pontos. E caso l contenha um $(n + 2)$ -ésimo ponto, então deve existir uma reta passando por tal ponto e por p , contradição com o fato de que p está contido em exatamente $n + 1$ retas.

Um plano projetivo finito de ordem n contém $n^2 + n + 1$ pontos e $n^2 + n + 1$ retas. Seja um ponto p e considere as $n + 1$ retas que contém p . Temos que todo ponto do plano projetivo está contido em uma das retas que contém p , e cada reta contém $n + 1$ pontos, logo cada reta que passa por p contém n pontos diferentes de p . Portanto temos $n(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$ pontos. De

forma semelhante, tome uma reta l e considere os $n + 1$ pontos contidos em l . Por cada ponto de l passam $n + 1$ retas, e toda reta intersecta l , logo temos $n(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$ retas.

Sabe-se que existem planos projetivos para qualquer ordem da forma p^m , onde p é um primo.

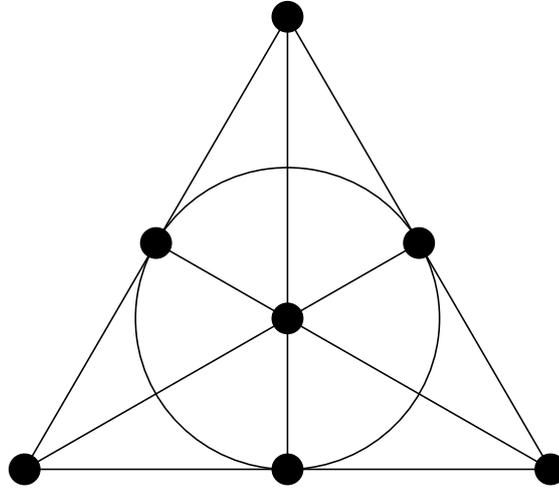


Figura 2.1: O plano projetivo de ordem 2, conhecido como o plano de Fano.

O grafo de incidência de um plano projetivo (P, L) é um grafo bipartido com conjunto de vértices $P \cup L$ e arestas pl , onde $p \in P$ é um ponto que pertence à reta $l \in L$. Note que não existem circuitos de comprimento 4, de fato, o menor circuito do grafo de incidência de um plano projetivo tem comprimento 6.

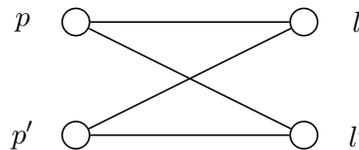


Figura 2.2: Em um circuito de comprimento 4, temos que p e p' pertencem às retas l e l' simultaneamente, o que não pode ocorrer pela definição de planos projetivos.

A construção de um grafo G livre de triângulos e com número cromático grande é feita da seguinte forma. Seja (P, L) um plano projetivo de ordem n , e seja G_I seu grafo de incidência. Defina G como o grafo cujo conjunto de vértices são os pares (p, l) , onde $p \in P$ é um ponto de $l \in L$. Tomando uma ordenação total arbitrária dos vértices de G , dois vértices (p, l) e (p', l') são adjacentes se $p \neq p', l \neq l', (p, l) < (p', l')$ e $p \in l'$. Mostraremos um limitante superior para o número de independência de G , para tanto usaremos um digrafo D tal que G é o grafo subjacente de um subdigrafo de D .

O digrafo D mencionado acima tem os pares (p, l) como vértices, e existe um arco de (p, l) para (p', l') se $p \neq p', l \neq l'$ e $p \in l'$. Os triângulos de D são circuitos dirigidos, pois caso contrário tais triângulos corresponderiam a circuitos de comprimento 4 no grafo de incidência (veja Figura 2.3).

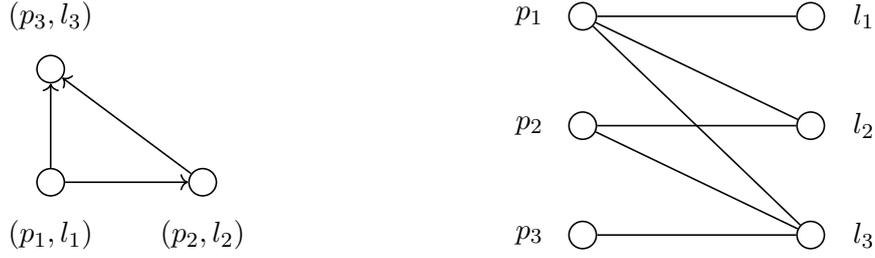


Figura 2.3: Um triângulo que não é um circuito dirigido em D (esquerda) corresponde a um circuito de comprimento 4 no grafo de incidência (direita).

Para mostrar que G é livre de triângulos, suponha por contradição que G contém um triângulo formado pelos vértices (p_1, l_1) , (p_2, l_2) e (p_3, l_3) . Sem perda de generalidade, digamos que $(p_1, l_1) < (p_2, l_2) < (p_3, l_3)$. Pela definição de G , temos que $p_1 \in l_2$, $p_1 \in l_3$ e $p_2 \in l_3$. Então em D temos que existe um arco de (p_1, l_1) para (p_2, l_2) , de (p_1, l_1) para (p_3, l_3) e de (p_2, l_2) para (p_3, l_3) , uma contradição, pois o triângulo formado não é um circuito dirigido.

Associamos ao digrafo D uma matriz M indexada pelos vértices (p, l) em ordem crescente, onde

$$M_{(p,l),(p',l')} = \begin{cases} 1 & (p, l) = (p', l') \\ -1 & (p, l)(p', l') \text{ é um arco} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que a diagonal principal de M é composta apenas por entradas 1, logo o posto de M é maior ou igual ao tamanho do maior conjunto independente, pois tal conjunto corresponde a uma submatriz identidade de M .

Mostraremos que o posto de M é limitado superiormente por $2(n^2 + n + 1)$. Escrevemos $M = AB$, onde A e B são matrizes, como definidas a seguir.

A matriz A tem linhas indexadas pelos vértices de D e colunas indexadas pelos vértices de G_I , onde

$$A_{(p,l),v} = \begin{cases} 1 & v = l \\ -1 & v = p \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A matriz B tem linhas indexadas pelos vértices de G_I e colunas indexadas pelos vértices de D , onde

$$B_{v,(p,l)} = \begin{cases} 1 & v = l \text{ ou } v \in l \setminus p \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos então que

$$(AB)_{(p,l),(p',l')} = \sum_{v \in V(G_I)} A_{(p,l),v} B_{v,(p',l')} = B_{l,(p',l')} - B_{p,(p',l')},$$

pois temos que o termo $A_{(p,l),v}$ não é igual a zero apenas nos casos $v = l$ e $v = p$, e assim a soma é igual a $A_{(p,l),l} B_{l,(p',l')} + A_{(p,l),p} B_{p,(p',l')} = B_{l,(p',l')} - B_{p,(p',l')}$. Segue que $M = AB$. Portanto, as colunas

de M são combinações lineares das colunas de A , e logo o posto de M é limitado superiormente pelo número de colunas de A , que é igual a $|V(G_I)| = |P| + |L| = 2(n^2 + n + 1)$.

Considere apenas o triângulo superior de M , e preencha o triângulo inferior de forma simétrica. Denotamos a nova matriz por M_G , as linhas e colunas de M_G são indexadas por $V(D) = V(G)$.

Note que

$$(M_G)_{(p,l),(p',l')} = \begin{cases} 1 & (p,l) = (p',l') \\ -1 & (p,l)(p',l') \text{ é uma aresta em } G \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, G é o grafo subjacente de um subdigrafo de D . As colunas de M_G correspondentes a um conjunto independente de G correspondem a colunas linearmente independentes de M . Então temos que $\alpha(G)$ é limitado superiormente pelo posto de M , que por sua vez, é limitado por $2(n^2 + n + 1)$.

Como $|V(G)| = (n^2 + n + 1)(n + 1)$ e $\alpha(G) \leq 2(n^2 + n + 1)$, temos que $\chi(G) \geq (n + 1)/2$. Então temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *O grafo construído, como descrito acima, a partir de um plano projetivo de ordem $2^{\lceil \log_2 k \rceil + 1}$ tem número cromático pelo menos k e é livre de triângulos.*

Como sabemos que existem planos projetivos de ordem potência de primo, então tomando ordem $n = 2^{\lceil \log_2 k \rceil + 1}$, temos que existem um plano projetivo de ordem n , e o grafo construído a partir deste plano projetivo tem número cromático pelo menos k e é livre de triângulos.

Ao comparar com o grafo encontrado pelo Teorema 1.0.4, temos que a construção por planos projetivos encontra um grafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k com uma quantidade menor de vértices.

O grafo encontrado pelo teorema de Erdős tem k^{12} vértices, e o grafo construído a partir do plano projetivo tem $O(n^3)$ vértices, e temos que $n = O(k)$, logo o grafo tem $O(k^3)$ vértices.

2.2 Lema Local de Lovász

Um teorema que será usado nos próximos capítulos é o Lema Local de Lovász, um importante resultado probabilístico enunciado a seguir, e demonstrado com base na prova de Alon e Spencer [2].

Teorema 2.2.1 (Lema Local de Lovász). *Seja $\{A_1, \dots, A_n\}$ um conjunto finito de eventos em um espaço de probabilidade arbitrário, e seja $D = (V, E)$ um digrafo tal que V é o conjunto de eventos e cada evento A_i é mutuamente independente de seus não-vizinhos. Dizemos que D é o digrafo de dependência dos eventos A_1, \dots, A_n . Se existe uma função real $x : \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow (0, 1)$ tal que*

$$\mathbb{P}(A_i) \leq x(A_i) \prod_{(i,j) \in E} (1 - x(A_j)) \quad \forall i \in [1, n],$$

então

$$\mathbb{P}(\overline{A_1} \wedge \dots \wedge \overline{A_n}) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x(A_i)).$$

Em particular, a probabilidade de nenhum evento de $\{A_1, \dots, A_n\}$ ocorrer é positiva.

Demonstração. (Teorema 2.2.1) Provaremos por indução em $|S|$ que para qualquer $S \subset \{1, \dots, n\}$ e qualquer $i \notin S$, vale que

$$\mathbb{P} \left(A_i \left| \bigwedge_{j \in S} \overline{A_j} \right. \right) \leq x(A_i).$$

O caso base $|S| = 0$ vale, pois $\mathbb{P}(A_i) \leq x(A_i)$. Então, para a hipótese de indução, suponha que $|S| > 0$. Seja $S_1 = \{j \in S : (i, j) \in E\}$ e $S_2 = S \setminus S_1$.

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(A_i \wedge \bigwedge_{j \in S} \overline{A_j} \right) &= \mathbb{P} \left(A_i \left| \bigwedge_{j \in S} \overline{A_j} \right. \right) \mathbb{P} \left(\bigwedge_{j \in S} \overline{A_j} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(A_i \left| \bigwedge_{j \in S} \overline{A_j} \right. \right) \mathbb{P} \left(\bigwedge_{j \in S_1} \overline{A_j} \left| \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right. \right) \mathbb{P} \left(\bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathbb{P} \left(A_i \wedge \bigwedge_{j \in S} \overline{A_j} \right) = \mathbb{P} \left(A_i \wedge \bigwedge_{j \in S_1} \overline{A_j} \left| \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right. \right) \mathbb{P} \left(\bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right).$$

Por hipótese de indução, temos que

$$\mathbb{P} \left(A_i \left| \bigwedge_{j \in S} \overline{A_j} \right. \right) = \frac{\mathbb{P} \left(A_i \wedge \bigwedge_{j \in S_1} \overline{A_j} \left| \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right. \right)}{\mathbb{P} \left(\bigwedge_{j \in S_1} \overline{A_j} \left| \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right. \right)}. \quad (2.1)$$

Como A_i é mutuamente independente de todos os eventos com índice em S_2 , temos o seguinte limitante para o numerador de (2.1).

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(A_i \wedge \bigwedge_{j \in S_1} \overline{A_j} \left| \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right. \right) &\leq \mathbb{P} \left(A_i \left| \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right. \right) \\ &= \mathbb{P}(A_i) \\ &\leq x(A_i) \prod_{(i,j) \in E} (1 - x(A_j)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Podemos encontrar um limitante para o denominador de (2.1) por hipótese de indução. Digamos que $S_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$. Se $r = 0$, então o denominador é 1, e logo concluímos a indução. Caso contrário,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\overline{A_{j_1}} \wedge \overline{A_{j_2}} \wedge \cdots \wedge \overline{A_{j_r}} \mid \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right) \\
&= \left[1 - \mathbb{P} \left(A_{j_1} \mid \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right) \right] \left[1 - \mathbb{P} \left(A_{j_2} \mid \overline{A_{j_1}} \wedge \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right) \right] \cdots \\
& \quad \cdots \left[1 - \mathbb{P} \left(A_{j_r} \mid \overline{A_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{A_{j_{r-1}}} \wedge \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right) \right] \\
&\geq (1 - x(A_{j_1}))(1 - x(A_{j_2})) \cdots (1 - x(A_{j_r})) \\
&\geq \prod_{(i,j) \in E} (1 - x(A_j)).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Aplicando as inequações (2.2) e (2.3) em (2.1), temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(A_i \mid \bigwedge_{j \in S} \overline{A_j} \right) &= \frac{\mathbb{P} \left(A_i \wedge \bigwedge_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right)}{\mathbb{P} \left(\bigwedge_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigwedge_{l \in S_2} \overline{A_l} \right)} \\
&\leq x(A_i).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos a indução. E para completar a prova do Lema Local de Lovász, basta fazer

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(\bigwedge_{i=1}^n \overline{A_i} \right) &= (1 - \mathbb{P}(A_1))(1 - \mathbb{P}(A_2 | \overline{A_1})) \cdots (1 - \mathbb{P}(A_n | \overline{A_1} \wedge \cdots \wedge \overline{A_{n-1}})) \\
&\geq \prod_{i=1}^n (1 - x(A_i)).
\end{aligned}$$

□

O Lema Local de Lovász permite provar a existência de estruturas de forma não-constructiva, mostrando que a probabilidade de tais estruturas existirem são estritamente positivas, mesmo que muito pequenas.

Em muitos casos, queremos provar a existência de estruturas muito complexas, de forma que uma prova constructiva não é uma opção viável. O Lema Local de Lovász nos permite remover muitas especificidades do problema, permitindo procurar uma prova sem as dificuldades inerentes de uma prova constructiva. Uma desvantagem do Lema Local de Lovász é, por se tratar de uma prova não-constructiva, não obtemos um exemplo ou uma forma de construir a estrutura que buscamos ao provar sua existência. Porém existem versões algorítmicas do Lema Local de Lovász, em particular, existe uma versão constructiva por Moser e Tardos [19].

2.3 Grafos Livres de Triângulos

Um possível primeiro passo para o estudo da conjectura de Erdős e Hajnal é fixar cada parâmetro com um valor não-trivial mais simples. Consideraremos os casos em que $g = 4$, ou seja, que os subgrafos que procuramos são livres de triângulos, e os casos em que $k = 3$, ou seja, que os subgrafos contenham algum circuito ímpar.

Em [21] Rödl demonstrou que, para todo inteiro k , existe um inteiro $f(k)$ tal que todo grafo com número cromático pelo menos $f(k)$ contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k .

Teorema 2.3.1. *Para todo inteiro k , existe um inteiro $f(k)$ tal que todo grafo G com $\chi(G) \geq f(k)$ contém um subgrafo livre de triângulos H com $\chi(H) \geq k$.*

Em termos da conjectura de Erdős e Hajnal, o Teorema 2.3.1 mostra que $f(k, 4)$ existe para todo k . A prova de Rödl é bastante sucinta, feita por meio de uma indução finita. Apresentaremos tal prova a seguir.

Mostraremos que, para todo par de inteiros m e k , existe um inteiro $\phi(m, k)$ tal que todo grafo com número cromático pelo menos $\phi(m, k)$ contém um subgrafo livre de triângulos com número cromático pelo menos k ou contém um clique de tamanho m . E pelo teorema de Erdős, existe um m tal que K_m contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k . Então tomando m adequado, todo grafo com número cromático pelo menos $\phi(m, k)$ contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k .

Lema 2.3.2. *Para todo par de inteiros m e k , existe um inteiro $\phi(m, k)$ tal que todo grafo com número cromático pelo menos $\phi(m, k)$ contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k , ou contém um clique de tamanho m .*

Demonstração. (Lema 2.3.2) Provaremos por indução em m . Claramente $\phi(2, k) = 2$ para todo k , pois todo grafo com número cromático pelo menos 2 contém um K_2 .

Dado um grafo $G = (V, E)$ e uma ordenação $<$ de seus vértices, seja $L(v, G)$ o grafo induzido pelos vizinhos à esquerda de v em G , ou seja, induzido pelos vértices adjacentes a v e menores que v na ordenação $<$.

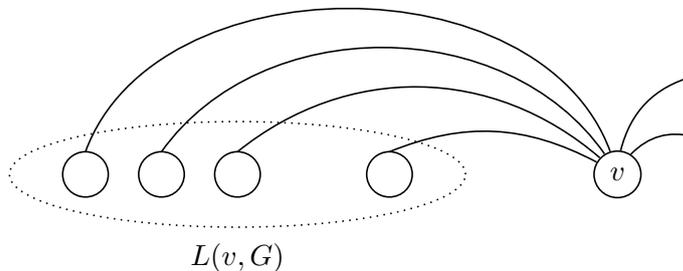


Figura 2.4: Para cada vértice v , definimos o subgrafo $L(v, G)$.

Suponha que $\phi(m - 1, k)$ existe. Então seja G_0 um grafo tal que

$$\chi(G_0) = (k - 1)^{\phi(m-1, k)-1} + 1 =: \phi(m, k).$$

Seja $<$ uma ordenação dos vértices de G_0 . Consideraremos os dois seguintes casos, se para algum v temos que $\chi(L(v, G_0)) \geq \phi(m-1, k)$, ou se $\chi(L(v, G_0)) \leq \phi(m-1, k) - 1$ para todo v .

No caso de $\chi(L(v, G_0)) \geq \phi(m-1, k)$ para algum v , por hipótese de indução, temos que $L(v, G_0)$ contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k , ou contém um clique de tamanho $m-1$.

Se $L(v, G_0)$ contém um clique de tamanho $m-1$, então G_0 contém um clique de tamanho m , pois v é adjacente a todos os vértices de $L(v, G_0)$, em particular é adjacente a todos os vértices do clique de tamanho $m-1$. E se $L(v, G_0)$ contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k , como $L(v, G_0)$ é subgrafo de G_0 , então G_0 contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k .

No caso $\chi(L(v, G_0)) \leq \phi(m-1, k) - 1$ para todo $v \in G_0$, considere uma l -coloração de cada $L(v, G_0)$, onde $l \leq \phi(m-1, k) - 1$. Seja B_i^v o conjunto de vértices de $L(v, G_0)$ de cor i , com $i \leq l$. Então $\cup_{i=1}^l B_i^v$ é o conjunto de vértices de $L(v, G_0)$.

Considere a seguinte partição de $E(G_0)$.

$$E(G_0) = E_1 \cup \dots \cup E_{\phi(m-1, k)-1},$$

$$E_i = \{\{v_j, v\} : v_j \in B_i^v, v \in V(G_0)\}.$$

Ou seja, uma aresta $\{v_j, v\}$, onde $v_j < v$, está na parte E_i se v_j recebeu a cor i na l -coloração de $L(v, G_0)$.

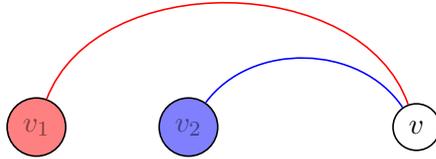


Figura 2.5: Cada aresta entre v e $v_i \in L(v, G)$ recebe a cor de v_i na coloração de $L(v, G)$.

Mostraremos que existe i tal que $\chi(V(G_0), E_i) \geq k$. Suponha que $\chi(V(G_0), E_i) \leq k-1$ para todo i . Podemos colorir os vértices de G_0 usando vetores da seguinte forma, cada vértice v de G_0 é colorido com um vetor w tal que w_i é a cor atribuída ao vértice v na $(k-1)$ -coloração de $\chi(V(G_0), E_i)$. Tal coloração de G_0 é própria, e usa no máximo $(k-1)^{\phi(m-1, k)-1}$ cores, contradição com o fato de que $\chi(G_0) = (k-1)^{\phi(m-1, k)-1} + 1$. Portanto existe algum i tal que $\chi(V(G_0), E_i) \geq k$.

Basta mostrar que $(V(G_0), E_i)$ é livre de triângulos. Suponha por contradição que existem vértices v_1, v_2, v_3 que formam um triângulo em $(V(G_0), E_i)$, sem perda de generalidade digamos que $v_1 < v_2 < v_3$. Como $v_1, v_2 < v_3$, temos que $v_1, v_2 \in L(v_3, G_0)$, e como $v_1, v_2 \in (V(G_0), E_i)$, temos que v_1 e v_2 receberam a cor i na coloração de $L(v_3, G_0)$, contradição pois a aresta $v_1 v_2$ está em $L(v_3, G_0)$, e logo v_1 e v_2 não podem receber a mesma cor. Portanto $(V(G_0), E_i)$ é livre de triângulos.

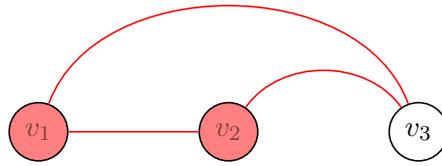


Figura 2.6: Se $v_1v_2v_3$ é um triângulo em $(V(G_0), E_i)$, os vértices v_1 e v_2 recebem a mesma cor em $L(v_3, G_0)$, e logo v_1v_2 é uma aresta monocromática em $L(v_3, G_0)$.

Logo para algum i , temos que $(V(G_0), E_i)$ é livre de triângulos e tem número cromático pelo menos k .

Portanto, temos que para todo m, k , existe um inteiro $\phi(m, k)$ tal que todo grafo com número cromático pelo menos $\phi(m, k)$ contém um subgrafo livre de triângulos com número cromático pelo menos k ou contém um clique de tamanho m . \square

Demonstração. (Teorema 2.3.1)

Seja k o parâmetro do teorema. Pelo teorema de Erdős, existe um grafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k , então seja m o número de vértices de um menor grafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k .

Pelo Lema 2.3.2, existe um inteiro $\phi(m, k)$ tal que todo grafo com número cromático pelo menos $\phi(m, k)$ contém um subgrafo livre de triângulos com número cromático pelo menos k , ou contém um clique de tamanho m .

Pela escolha de m , um clique de tamanho m contém um subgrafo livre de triângulos com número cromático pelo menos k . Logo todo grafo com número cromático pelo menos $\phi(m, k)$ contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k . \square

Temos então que a conjectura de Erdős e Hajnal vale para $g = 4$, ou seja, $f(k, 4)$ existe para todo k . A conjectura está em aberto para $g > 4$.

2.4 Número cromático na demonstração de Rödl

Na seção anterior, mostramos que existe um inteiro $\phi(m, k)$ tal que todo grafo com número cromático pelo menos $\phi(m, k)$ contém um subgrafo livre de triângulos com número cromático pelo menos k , ou contém um clique de tamanho m . E tomando um valor conveniente de m , mostramos que todo grafo com número cromático pelo menos $\phi(m, k)$ contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k .

Temos então que $f(k, 4) \leq \phi(m, k)$. É interessante determinar o valor de $\phi(m, k)$, para termos um limitante superior para $f(k, 4)$.

Usaremos a notação de flechas de Knuth [15], definida a seguir.

Definição 2.4.1. Para inteiros a, b e n , temos que

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} ab & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n \geq 1 \text{ e } b = 0 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) & \text{se } n \geq 1 \text{ e } b \geq 1. \end{cases}$$

Ou seja, $a \uparrow^0 b = ab$, $a \uparrow b$ representa a exponenciação a^b , e

$$a \uparrow^n b = a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^{n-1} \dots \uparrow^{n-1} a))$$

onde a operação \uparrow^{n-1} é aplicada b vezes. Em particular, note que

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow (a \uparrow (a \uparrow \dots \uparrow a))}_b = \underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_b.$$

Temos que m deve ser tal que K_m contém um subgrafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k . Temos pela construção por planos projetivos [7] que existe um grafo livre de triângulos e com número cromático pelo menos k com $O(k^3)$ vértices, em particular, podemos tomar $m = 2k^3$.

Sabemos que $\phi(2, k) = 2$, e

$$\phi(m, k) = (k - 1)^{\phi(m-1, k) - 1} + 1.$$

Ao expandir o expoente $\phi(m - 1, k) - 1$, temos

$$\begin{aligned} \phi(m - 1, k) - 1 &= (k - 1)^{\phi(m-2, k) - 1} + 1 - 1 \\ &= (k - 1)^{\phi(m-2, k) - 1}. \end{aligned}$$

Logo, ao abrir a recorrência, temos que

$$\phi(m, k) = (k - 1)^{(k-1)^{\dots(k-1)^{\phi(2, k) - 1}}} + 1,$$

onde $k - 1$ ocorre $m - 2$ vezes, e $\phi(2, k) - 1 = 1$. Portanto, temos que $\phi(m, k) = 1 + (k - 1) \uparrow\uparrow m - 2$. Temos então que $f(k, 4) \leq 1 + (k - 1) \uparrow\uparrow (2k^3 - 2)$.

2.5 Grafos com Circuitos Ímpares Grandes

Outra possível forma de estudar a conjectura de Erdős e Hajnal é fixar o valor de k . Em particular, consideraremos o caso em que $k = 3$, ou seja, queremos garantir a existência de um subgrafo H com cintura grande e número cromático pelo menos 3. Note que como H deve ter número cromático pelo menos 3, então H deve conter um circuito ímpar, e como H deve ter cintura grande, tal circuito ímpar deve ser grande.

Portanto, para mostrar que um grafo G contém um subgrafo com cintura grande e número cromático pelo menos 3, basta mostrar que G contém um circuito ímpar grande.

Considere o seguinte resultado de Erdős [11].

Teorema 2.5.1. *Se todo circuito ímpar de um grafo G tem comprimento no máximo $2r - 1$, então $\chi(G) \leq 2r$.*

Demonstraremos o Teorema 2.5.1 de acordo com a prova de Erdős detalhada por Bollobás em [5].

Lema 2.5.2. *Seja G um grafo 2-conexo contendo um circuito ímpar. Seja C um circuito par em G . Então existem vértices $x, y \in C$ e um caminho P entre x e y independente de C tal que $d_C(x, y) \not\equiv d_P(x, y) \pmod{2}$, onde $d_H(x, y)$ denota a distância entre x e y em H .*

Demonstração. (Lema 2.5.2) Existe um circuito ímpar que intersecta C em pelo menos 2 vértices, pois existe um circuito ímpar em G , e caso tal circuito não intersecte C em pelo menos 2 vértices, como temos que G é 2-conexo, existem 2 caminhos distintos que conectam o circuito ímpar e C . Denote um tal circuito por $D = x_1, x_2, \dots, x_{2l+1}$. Tome

$$V(C) \cap V(D) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r} : 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq 2l+1\}, \quad r \geq 2.$$

Suponha por contradição que a afirmação do lema seja falsa. Ou seja, a distância entre x_{i_j} e $x_{i_{j+1}}$ por C e a distância por D tem a mesma paridade. E note que $d_D(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) = i_{j+1} - i_j$. Então temos

$$d_C(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \equiv i_{j+1} - i_j \pmod{2}, \quad 1 \leq j < r,$$

e

$$d_C(x_{i_r}, x_{i_1}) \equiv i_1 - i_r + 1 \pmod{2}.$$

Somando as congruências acima, temos que o lado esquerdo é 0, pois C é um circuito par, e o lado direito é 1, uma contradição. Portanto, para algum par de vértices x, y de C e algum caminho P entre x e y independente de C , temos que $d_C(x, y) \not\equiv d_P(x, y) \pmod{2}$. \square

Demonstração. (Teorema 2.5.1) A demonstração será feita por contraexemplo minimal. Suponha que o teorema não seja verdadeiro, e seja G um grafo de menor ordem que é contraexemplo para o teorema. Ou seja, todo circuito ímpar de G tem comprimento no máximo $2r - 1$, mas $\chi(G) > 2r$.

Para todo vértice $x \in V(G)$ temos que $\chi(G - x) = 2r$, pois $|G - x| < |G|$ e todo circuito ímpar de $G - x$ tem comprimento no máximo $2r - 1$. Logo $\delta(G) \geq 2r$, pois como para qualquer vértice x removido de G , o número cromático se reduz para $2r$, então ao adicionar x de volta ao grafo, o número cromático deve aumentar, indicando que x é adjacente a todas as $2r$ cores, e logo adjacente a pelo menos $2r$ vértices. Seja $Q = x_1, x_2, \dots, x_q$ um caminho mais longo em G . Logo $\Gamma(x_1) \subset \{x_2, x_3, \dots, x_q\}$. Sejam

$$J = \{i : x_i \in \Gamma(x_1)\},$$

e

$$j = \max(J).$$

Então $|J| \geq 2r$, pois como Q é um caminho mais longo em G , todo vizinho de x_1 está em Q , e para todo $i \geq r$, temos que $2i + 1 \notin J$ e $j - 2i + 1 \notin J$ (veja Figura 2.7). O grafo G contém o circuito $C = x_1, x_2, \dots, x_j$, logo j é par. Então $j \geq 4r$, pois todo índice ímpar a partir de $2r + 1$ não pode estar em J , e todo índice ímpar até $j - 2r + 1$ não pode estar em J , e como J contém pelo menos $2r$ elementos, o maior elemento de J é pelo menos $4r$.

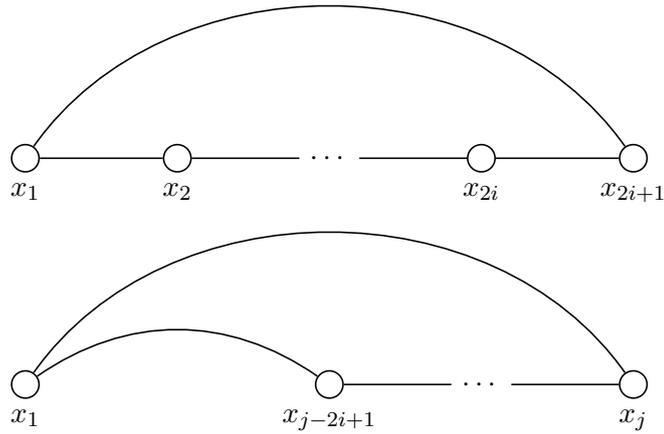


Figura 2.7: Se $2i + 1 \in J$ ou $j - 2i + 1 \in J$, podemos determinar um circuito ímpar de comprimento pelo menos $2r + 1$.

Renomeamos os vértices de C de forma que $C = y_1 y_2 \cdots y_j$. Pelo Lema 2.5.2, existe um caminho P de comprimento p entre dois vértices de C , sem perda de generalidade, digamos que os dois vértices são y_1 e y_l , e $p \not\equiv l \pmod{2}$. Então $y_1 y_2 \cdots y_l P y_1$ e $y_l y_{l+1} \cdots y_1 P y_l$ são circuitos ímpares, e a soma de seus comprimentos é pelo menos $4r + 2$, logo algum dos circuitos ímpares tem comprimento pelo menos $2r + 1$, uma contradição. \square

Pelo Teorema 2.5.1, todo grafo G com $\chi(G) \geq 2r + 1$ contém um circuito ímpar de comprimento pelo menos $2r + 1$. Então em termos da conjectura de Erdős e Hajnal, temos que $f(3, 2r + 1) \leq 2r + 1$. De fato, temos que $f(3, 2r + 1) = 2r + 1$ pois claramente K_{2r} não contém um circuito ímpar de comprimento pelo menos $2r + 1$, portanto nem todo grafo com número cromático $2r$ contém um circuito ímpar de comprimento pelo menos $2r + 1$.

Note que ao tomar um valor par de g , queremos um circuito ímpar de comprimento pelo menos $2r$, o que é equivalente a procurar um circuito ímpar de comprimento pelo menos $2r + 1$, logo temos que $f(3, 2r) = f(3, 2r + 1)$.

Capítulo 3

Grafos de Kneser

Definição 3.0.1. Um grafo de Kneser de parâmetros n e r , denotado $KG(n, r)$, é um grafo cujos vértices são todos os r -subconjuntos de $[n]$, e dois vértices v e w são adjacentes se $v \cap w = \emptyset$.

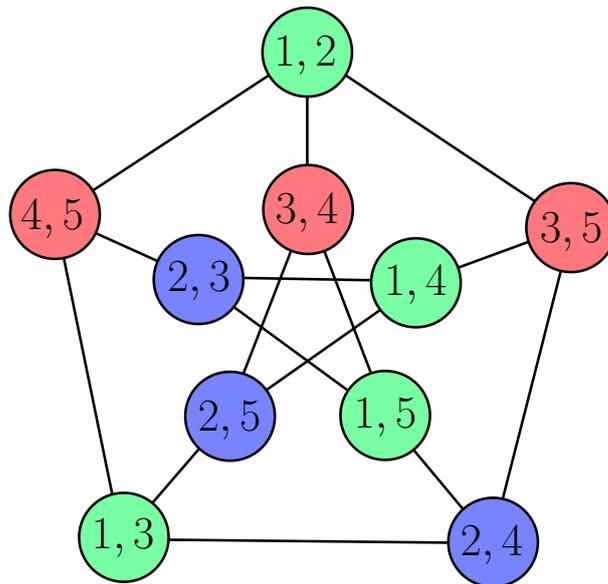


Figura 3.1: Grafo de Kneser $KG(5, 2)$, isomorfo ao grafo de Petersen.

Bojan Mohar e Hehui Wu demonstraram em [17] que a conjectura de Erdős e Hajnal é verdadeira para os grafos de Kneser. A seguir serão apresentadas algumas noções preliminares, seguidas pela demonstração do resultado de Mohar e Wu.

Definição 3.0.2. Seja G um grafo. O blow-up de G de potência m , denotado por $G^{(m)}$, é um grafo obtido de G substituindo cada vértice por um conjunto independente de tamanho m , e para cada aresta xy de G , temos um grafo bipartido completo $K_{m,m}$ entre os m -conjuntos correspondentes aos vértices x e y . O conjunto independente de tamanho m obtido de um vértice é chamado de blow-up do vértice, e o grafo bipartido completo obtido a partir de uma aresta é chamado de blow-up da aresta.

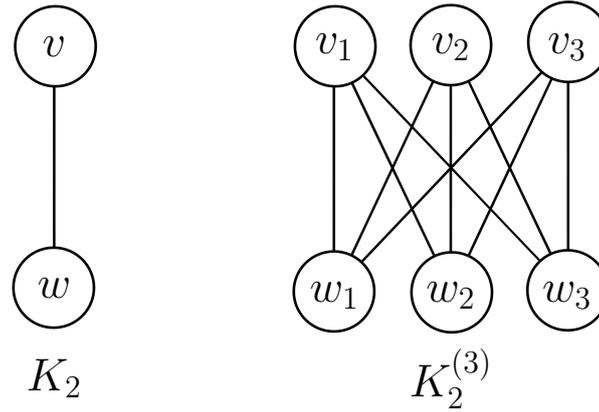


Figura 3.2: Blow-up de K_2 de potência 3.

3.1 Número cromático

Afirmção 3.1.1. O número cromático de $KG(n, r) = n - 2r + 2$ se $n \geq 2r$, e 1 caso contrário.

Se $n < 2r$, quaisquer dois r -subconjuntos de $[n]$ contêm um elemento em comum, e logo o grafo $KG(n, r)$ não contém arestas. Portanto $\chi(KG(n, r)) = 1$.

Se $n \geq 2r$, podemos colorir $KG(n, r)$ com $n - 2r + 2$ cores da seguinte forma.

$$\text{cor}(v) = \begin{cases} \min(v) & \text{se } \min(v) < n - 2r + 2 \\ n - 2r + 2 & \text{se } \min(v) \geq n - 2r + 2. \end{cases}$$

Para cada cor $\min(v)$, $\min(v) < n - 2r + 2$, o conjunto de vértices coloridos com a cor $\min(v)$ é independente, pois todos os vértices compartilham o elemento $\min(v)$. E o conjunto de vértices coloridos com a cor $n - 2r + 2$ é independente, pois todo vértice é um r -subconjunto de $[n - 2r + 2, n]$, ou seja, um r -subconjunto de um conjunto de tamanho $2r - 1$, e logo pelo princípio da casa dos pombos, todo par de vértices tem algum elemento em comum.

Então $\chi(KG(n, r)) \leq n - 2r + 2$. Kneser conjecturou que $\chi(KG(n, r)) = n - 2r + 2$ [14], e a conjectura foi provada por Lovász [16], por meio do teorema de Borsuk-Ulam [6].

Definição 3.1.2. A d -esfera unitária S^d é o conjunto de pontos $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x| = 1\}$.

Teorema 3.1.3 (Borsuk-Ulam). Para toda função contínua $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ da d -esfera para o d -espaço, existem pontos antípodas x^* e $-x^*$ que são mapeados no mesmo ponto $f(x^*) = f(-x^*)$.

A prova será baseada na versão em Aigner e Ziegler [1], e faz uso da versão de Greene do teorema de Borsuk-Ulam [13] a seguir.

Teorema 3.1.4. Se a d -esfera S^d é coberta por $d + 1$ conjuntos U_1, U_2, \dots, U_{d+1} , tal que os primeiros d conjuntos U_1, \dots, U_d são abertos ou fechados, então algum dos $d + 1$ conjuntos contém pontos antípodas x^* e $-x^*$.

Considere a seguinte formulação topológica do problema de colorir os vértices de $KG(n, r)$ usando apenas $n - 2r + 1$ cores.

Seja $d = n - 2r$. Considere $2r + d$ pontos em posição geral na esfera S^{d+1} , e seja $V(n, r)$ o conjunto de todos os r -subconjuntos dos $2r + d$ pontos na esfera. Suponha que os elementos de $V(n, r)$ estejam particionados em $d + 1$ classes, $V(n, r) = V_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} V_{d+1}$.

Para $i = 1, \dots, d + 1$, tome

$$O_i = \{x \in S^{d+1} : \text{O hemisfério aberto } H_x \text{ com polo } x \text{ contém os pontos de algum } r\text{-conjunto de } V_i\}.$$

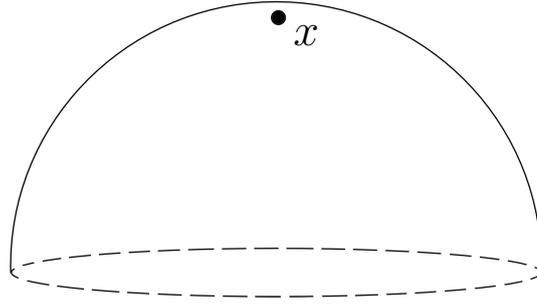


Figura 3.3: Hemisfério aberto H_x em S^2 .

Note que cada O_i é um conjunto aberto, e o conjunto fechado $C = S^{d+1} \setminus (O_1 \cup \cdots \cup O_{d+1})$, junto com os conjuntos O_i , com $i = 1, \dots, d + 1$ cobrem S^{d+1} . Pelo Teorema 3.1.4, algum dos conjuntos O_i ou C contém pontos antípodas x^* e $-x^*$.

Mostraremos que o conjunto C não pode conter pontos antípodas. Suponha que C contenha pontos antípodas x^* e $-x^*$. Pela definição do conjunto C , o hemisfério H_{x^*} contém no máximo $r - 1$ pontos, pois caso contrário o hemisfério com polo x^* conteria os pontos de um r -conjunto de V_i para algum i , e logo $x^* \notin C$. De mesma forma, o hemisfério H_{-x^*} contém no máximo $r - 1$ pontos.

Portanto, temos que pelo menos $n - 2r + 2 = d + 2$ pontos estão em $\overline{H_{x^*}} \cap \overline{H_{-x^*}}$, ou seja, $d + 2$ pontos estão em um mesmo plano que contém a origem, uma contradição, pois os pontos estão em posição geral.

Portanto, algum conjunto O_i contém pontos antípodas x^* e $-x^*$, e logo existem r -conjuntos $A, B \in V_i$, com $A \in H_{x^*}$ e $B \in H_{-x^*}$, e como H_{x^*} e H_{-x^*} são disjuntos, temos que A e B são disjuntos.

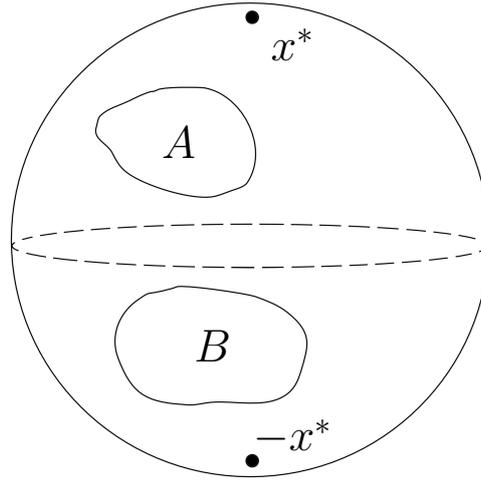


Figura 3.4: Hemisférios disjuntos H_{x^*} e H_{-x^*} contendo os r -conjuntos A e B , respectivamente.

Então concluímos que existem vértices A e B adjacentes que recebem a mesma cor. Logo não existe uma coloração própria com $d + 1 = n - 2 + 1$ cores.

Então temos que $\chi(KG(n, r)) \geq n - 2r + 2$. Portanto $\chi(KG(n, r)) = n - 2r + 2$.

3.2 Prova da conjectura de Erdős e Hajnal para grafos de Kneser

Mostraremos que os grafos de Kneser respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal.

A prova será feita da seguinte forma, mostraremos por meio do Lema Local de Lovász que se um grafo tem número cromático pelo menos k , então um *blow-up* com potência suficientemente grande do grafo contém um subgrafo com cintura grande e número cromático pelo menos k .

Mostraremos também que *blow-ups* de grafos de Kneser são subgrafos de grafos de Kneser maiores.

Então concluiremos que grafos de Kneser com número cromático suficientemente grande contém *blow-ups* de grafos de Kneser menores, que por sua vez contém um subgrafo com número cromático e cintura grandes.

Teorema 3.2.1 (Mohar e Wu [17]). *Suponha que G é um grafo com $\Delta(G) \leq \Delta$ e $\chi(G) \geq k$ para algum k suficientemente grande. Suponha que m é um inteiro maior que $k(k\Delta)^{2g-4}$. Então existe um subgrafo H de $G^{(m)}$ com cintura maior que g e número cromático maior que k .*

Para demonstrar o Teorema 3.2.1, usaremos o seguinte lema.

Lema 3.2.2. *Dado um grafo G com $\chi(G) > k$, seja H um subgrafo de $G^{(m)}$. Suponha que para toda aresta ab de G , e quaisquer subconjuntos X, Y contidos nos *blow-ups* de a e b respectivamente, com $|X| \geq \frac{m}{k}$ e $|Y| \geq \frac{m}{k}$, existe uma aresta entre X e Y em H . Então $\chi(H) > k$.*

Demonstração. (Lema 3.2.2) Seja G um grafo com $\chi(G) > k$, e seja H um subgrafo de $G^{(m)}$ tal que para toda aresta ab de G e quaisquer subconjuntos X, Y contidos no *blow-up* de a e b , respectivamente, com $|X| \geq \frac{m}{k}$ e $|Y| \geq \frac{m}{k}$, existe uma aresta entre X e Y em H . Por simplicidade, suponha que k divide m . Para cada vértice a de G , seja a_H o *blow-up* de a , ou seja, a_H é o conjunto de m vértices correspondentes ao vértice a em $G^{(m)}$.

Suponha por contradição que H pode ser colorido com até k cores, e fixe uma k coloração de H . Como a_H tem m vértices e H pode ser colorido com k cores, pelo princípio da casa dos pombos alguma cor é usada pelo menos m/k vezes em cada a_H . Então para cada vértice a de G , seja $c(a)$ uma cor que ocorre pelo menos m/k vezes em a_H na coloração fixada.

Para cada aresta ab de G , seja A o conjunto de vértices de a_H de cor $c(a)$ e seja B o conjunto de vértices de b_H de cor $c(b)$. Então temos que $|A| \geq m/k$ e $|B| \geq m/k$, e logo pela escolha de H , existe uma aresta entre A e B . Logo $c(a)$ é diferente de $c(b)$.

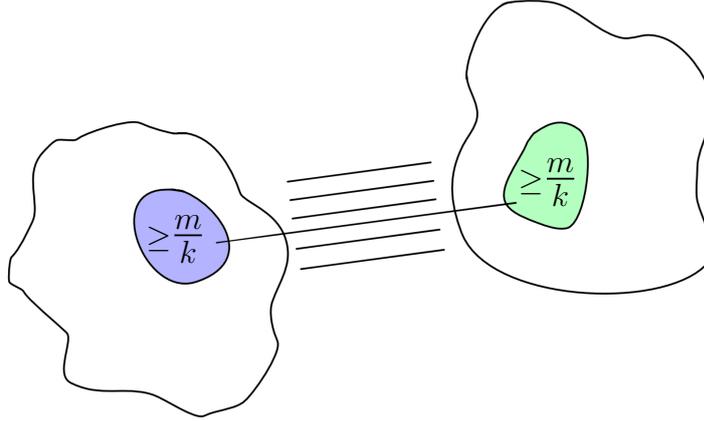


Figura 3.5: O blow-up de cada vértice contém alguma cor que ocorre pelo menos m/k vezes.

Temos portanto que para cada aresta ab de G , a cor $c(a)$ é diferente da cor $c(b)$, então podemos colorir cada vértice a de G com a cor $c(a)$ e obteremos uma k -coloração de G . Contradição, pois temos que $\chi(G) > k$.

Portanto, H não pode ser colorido com apenas k cores. □

Demonstração. (Teorema 3.2.1)

Seja $k > 1000$, $s := m/k$, $\lambda := 1/4g$ e $p := s^{\lambda-1}$. Seja H um subgrafo aleatório de $G^{(m)}$, onde cada aresta é escolhida independentemente com probabilidade p .

Para cada circuito C de comprimento no máximo g em $G^{(m)}$, seja A_C o evento de todas as arestas de C estarem em H . A probabilidade de A_C é a probabilidade de cada aresta de C ser escolhida, portanto temos que $\mathbb{P}(A_C) = p^{|C|} = s^{(\lambda-1)|C|}$. Se para todo C vale que $\overline{A_C}$, então a cintura de H é maior que g .

Seja B um subgrafo do blow-up de uma aresta de G isomorfo a $K_{s,s}$. Seja A_B o evento de H não conter nenhuma aresta de B . Temos que $\mathbb{P}(A_B) = (1-p)^{s^2} \leq e^{-ps^2} = e^{-s^{1+\lambda}}$. Se para todo B vale que $\overline{A_B}$, então para cada aresta ab de G e quaisquer subconjuntos X, Y contidos nos blow-ups de a e b respectivamente, com $|X| \geq s$ e $|Y| \geq s$, existe uma aresta entre X e Y em H .

Queremos mostrar que existe um subgrafo H de $G^{(m)}$ onde vale $\overline{A_C}$ para todo circuito C com $|C| \leq g$ e vale $\overline{A_B}$ para todo $B \cong K_{s,s}$. Então mostraremos que

$$\mathbb{P} \left(\left(\bigwedge_{|C| \leq g} \overline{A_C} \right) \wedge \left(\bigwedge_{B \cong K_{s,s}} \overline{A_B} \right) \right) > 0. \quad (3.1)$$

Mostraremos que (3.1) vale usando o lema local de Lovász.

Seja \mathcal{A} a união do conjunto dos eventos A_C para $|C| \leq g$ com o conjunto dos eventos A_B para B isomorfo a $K_{s,s}$. Queremos mostrar que para cada $A \in \mathcal{A}$, existe $y(A) \in (0, 1)$ tal que

$$\mathbb{P}(A) \leq y(A) \prod_{D \in \Gamma(A)} (1 - y(D)) \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

onde $\Gamma(A)$ é o conjunto dos eventos que não são independentes de A .

Primeiramente, analisaremos o número de eventos que não são independentes de cada evento A_C e cada evento A_B .

Considere um circuito C com $|C| \leq g$. Como $\Delta(G^{(m)}) \leq m\Delta$, então C compartilha arestas com no máximo $|C|(m\Delta)^{j-2} = |C|(sk\Delta)^{j-2}$ circuitos de comprimento j em $G^{(m)}$, assim como compartilha arestas com no máximo $|C|\binom{m}{s}^2$ cópias de $K_{s,s}$.

Logo cada evento A_C não é independente de no máximo $|C|(sk\Delta)^{j-2}$ outros eventos A_{C_j} , onde C_j é um circuito de comprimento j , e não é independente de no máximo $|C|\binom{m}{s}^2$ eventos A_B com B isomorfo a $K_{s,s}$.

Considere uma cópia B de $K_{s,s}$. Existem no máximo $s^2(sk\Delta)^{j-2}$ circuitos de comprimento j em $G^{(m)}$ que compartilham arestas com B , e existem no máximo $\binom{m}{s}^2$ cópias de $K_{s,s}$ que compartilham arestas com B .

Logo cada evento A_B não é independente de no máximo $s^2(sk\Delta)^{j-2}$ eventos A_C onde C é um circuito de comprimento j , e não é independente de no máximo $\binom{m}{s}^2$ eventos A_{B_s} , onde B_s é isomorfo a $K_{s,s}$.

Para cada circuito C com $|C| \leq g$, seja $y_{|C|} := y(A_C) = \mathbb{P}(A_C)^{1-\lambda} = s^{-(1-\lambda)^2|C|} < s^{(2\lambda-1)|C|}$, e seja $y_0 := y(A_B) = e^{-0.5s^{1+\lambda}} \approx \mathbb{P}(A_B)^{0.5}$.

Note que como $s > (k\Delta)^{2g-4}$, então claramente $s > 3.4$, e logo $y_0 \leq 0.19$. Como $|C| \geq 3$ e $|C| \leq g$, note também que

$$y_{|C|} < s^{(2\lambda-1)|C|} = \frac{1}{s^{|C|-|C|/2g}} \leq \frac{1}{s^{3-0.5}},$$

e logo temos que $y_{|C|} \leq 0.19$.

Queremos mostrar que

$$\mathbb{P}(A_C) \leq y_{|C|} \prod_{D \in \Gamma(A_C)} (1 - y(D)),$$

$$\mathbb{P}(A_B) \leq y_0 \prod_{D \in \Gamma(A_B)} (1 - y(D)).$$

Como para cada evento A temos que $y(A) \in (0, 1)$, e sabemos um limitante superior para o número de eventos que não são independentes de A , temos que

$$\left(\prod_{3 \leq j \leq g} (1 - y_j)^{|C|(sk\Delta)^{j-2}} \right) (1 - y_0)^{|C|\binom{m}{s}^2} \leq \prod_{D \in \Gamma(A_C)} (1 - y(D)),$$

$$\left(\prod_{3 \leq j \leq g} (1 - y_j)^{s^2(sk\Delta)^{j-2}} \right) (1 - y_0)^{\binom{m}{s}^2} \leq \prod_{D \in \Gamma(A_B)} (1 - y(D)).$$

Então basta mostrar que

$$\mathbb{P}(A_C) \leq y_{|C|} \left(\prod_{3 \leq j \leq g} (1 - y_j)^{|C|(sk\Delta)^{j-2}} \right) (1 - y_0)^{|C| \binom{m}{s}^2}, \quad (3.2)$$

$$\mathbb{P}(A_B) \leq y_0 \left(\prod_{3 \leq j \leq g} (1 - y_j)^{s^2(sk\Delta)^{j-2}} \right) (1 - y_0)^{\binom{m}{s}^2}. \quad (3.3)$$

Para simplificar os cálculos, tomaremos o logaritmo das desigualdades.

Primeiramente, consideremos a desigualdade (3.2). Como $\mathbb{P}(A_C) = s^{(\lambda-1)|C|}$, o logaritmo da desigualdade (3.2) é

$$(\lambda - 1)|C| \log(s) \leq \log(y_{|C|}) + \sum_{3 \leq j \leq g} |C|(sk\Delta)^{j-2} \log(1 - y_j) + |C| \binom{m}{s}^2 \log(1 - y_0).$$

Como $\log(y_{|C|}) = -(1 - \lambda)^2|C| \log(s)$, temos que

$$(\lambda - 1) \log(s) \leq -(1 - \lambda)^2 \log(s) + \sum_{3 \leq j \leq g} (sk\Delta)^{j-2} \log(1 - y_j) + \binom{m}{s}^2 \log(1 - y_0).$$

Somando $(1 - \lambda)^2 \log(s)$ aos dois lados da inequação, obtemos

$$(\lambda^2 - \lambda) \log(s) \leq \sum_{3 \leq j \leq g} (sk\Delta)^{j-2} \log(1 - y_j) + \binom{m}{s}^2 \log(1 - y_0).$$

Por conveniência, podemos multiplicar a inequação por -1 , e temos

$$(\lambda - \lambda^2) \log(s) \geq - \sum_{3 \leq j \leq g} (sk\Delta)^{j-2} \log(1 - y_j) - \binom{m}{s}^2 \log(1 - y_0).$$

Note que $0.9 \log(1-z) > -z$ para $0 < z \leq 0.19$, então $-\log(1-z) < z/0.9$, e temos que $y_0 \leq 0.19$ e $y_j \leq 0.19$, então basta mostrar que

$$\lambda(1 - \lambda) \log(s) \geq \sum_{3 \leq j \leq g} (sk\Delta)^{j-2} \frac{y_j}{0.9} + \binom{m}{s}^2 \frac{y_0}{0.9}.$$

Como $y_j = s^{-(1-\lambda)^2 j}$ e $y_0 = e^{-0.5s^{1+\lambda}}$,

$$0.9\lambda(1 - \lambda) \log(s) \geq \sum_{3 \leq j \leq g} (sk\Delta)^{j-2} s^{-(1-\lambda)^2 j} + \binom{m}{s}^2 e^{-0.5s^{1+\lambda}},$$

e como $s^{-(1-\lambda)^2 j} < s^{(2\lambda-1)j}$, para mostrar que a desigualdade (3.2) vale, basta mostrar que

$$0.9\lambda(1 - \lambda) \log(s) \geq \sum_{3 \leq j \leq g} s^{(2\lambda-1)j} (sk\Delta)^{j-2} + e^{-0.5s^{1+\lambda}} \binom{m}{s}^2. \quad (3.4)$$

Agora consideraremos a desigualdade (3.3). Tomamos o logaritmo da desigualdade (3.3), e como $\mathbb{P}(A_B) \leq e^{-s^{1+\lambda}}$, temos que

$$-s^{1+\lambda} \leq -0.5s^{1+\lambda} + \sum_{3 \leq j \leq g} s^2(sk\Delta)^{j-2} \log(1 - y_j) + \binom{m}{k}^2 \log(1 - y_0).$$

De forma semelhante à inequação anterior, podemos somar $0.5s^{1+\lambda}$ aos dois lados da inequação e multiplicar por -1 , e obtemos

$$0.5s^{1+\lambda} \geq - \sum_{3 \leq j \leq g} s^2(sk\Delta)^{j-2} \log(1 - y_j) - \binom{m}{k}^2 \log(1 - y_0).$$

Como $-\log(1 - z) < z/0.9$ para $0 < z \leq 0.19$, e temos que $y_0 \leq 0.19$ e $y_j \leq 0.19$, então basta mostrar que

$$0.5s^{1+\lambda} \geq \sum_{3 \leq j \leq g} s^2(sk\Delta)^{j-2} \frac{y_j}{0.9} + \binom{m}{k}^2 \frac{y_0}{0.9},$$

e temos que $y_j = s^{-(1-\lambda)^2j}$ e $y_0 = e^{-0.5s^{1+\lambda}}$, assim

$$0.45s^{1+\lambda} \geq \sum_{3 \leq j \leq g} s^2(sk\Delta)^{j-2} s^{-(1-\lambda)^2j} + \binom{m}{k}^2 e^{-0.5s^{1+\lambda}}.$$

Como $s^{-(1-\lambda)^2j} < s^{(2\lambda-1)j}$, para mostrar que a desigualdade (3.3) vale, basta mostrar que

$$0.4s^{1+\lambda} \geq \sum_{3 \leq j \leq g} s^{(2\lambda-1)j} s^2(sk\Delta)^{j-2} + e^{-0.5s^{1+\lambda}} \binom{sk}{s}^2. \quad (3.5)$$

Portanto, para concluir a aplicação do lema local, basta mostrar que as desigualdades (3.4) e (3.5) valem.

Temos o seguinte limitante superior para a somatória da inequação (3.5).

$$\begin{aligned} \sum_{3 \leq j \leq g} s^{(2\lambda-1)j} s^2(sk\Delta)^{j-2} &= \sum_{3 \leq j \leq g} s^{2\lambda j} (k\Delta)^{j-2} \\ &= \sum_{3 \leq j \leq g-1} s^{2\lambda j} (k\Delta)^{j-2} + s^{2\lambda g} (k\Delta)^{g-2} \\ &= \frac{s^{2\lambda 3} k\Delta ((s^{2\lambda} k\Delta)^{g-3} - 1)}{s^{2\lambda} k\Delta - 1} + s^{2\lambda g} (k\Delta)^{g-2} \\ &< \frac{s^{2\lambda g} (k\Delta)^{g-2}}{s^{2\lambda} k\Delta - 1} + s^{2\lambda g} (k\Delta)^{g-2} \\ &< \frac{s^{2\lambda g} (k\Delta)^{g-2}}{10} + s^{2\lambda g} (k\Delta)^{g-2} \\ &= 1.1s^{2\lambda g} (k\Delta)^{g-2} \\ &= 1.1s^{0.5} (k\Delta)^{g-2}. \end{aligned}$$

Como $s = m/k > k(k\Delta)^{2g-4}/k = (k\Delta)^{2g-4}$, temos que $s^{0.5} > (k\Delta)^{g-2}$, e logo temos que $1.1s^{0.5}(k\Delta)^{g-2} < 1.1s^{0.5}s^{0.5}$. Portanto,

$$\sum_{3 \leq j \leq g} s^{(2\lambda-1)j} s^2(sk\Delta)^{j-2} < 1.1s.$$

Concluimos também o seguinte limitante superior para a somatória da inequação (3.4).

$$\sum_{3 \leq j \leq g} s^{(2\lambda-1)j} (sk\Delta)^{j-2} < 1.1s^{-1}.$$

Mostraremos agora um limitante superior para o termo comum $e^{-0.5s^{1+\lambda}} \binom{sk}{s}^2$.

Como $\binom{sk}{s}^2 < (ek)^{2s}$, temos que

$$\begin{aligned} e^{-0.5s^{1+\lambda}} \binom{sk}{s}^2 &< \left(e^{-0.5s^\lambda} (ek)^2 \right)^s \\ &= \left(e^{-0.5s^\lambda + 2 + 2\log(k)} \right)^s. \end{aligned}$$

Temos que $s > (k\Delta)^{2g-4}$, logo $s^\lambda > (k\Delta)^{\frac{2g-4}{4g}}$, e como $g \geq 4$, temos que $(k\Delta)^{\frac{2g-4}{4g}} \geq (k\Delta)^{1/4}$.

Note que $(k\Delta)^{1/4} > 4(1 + \log(k))$, pois temos pelo teorema de Brooks que $\Delta \geq k$, logo temos que $(k\Delta)^{1/4} \geq (k^2)^{1/4} = k^{1/2}$, e como temos que $k > 1000$, então $k^{1/2} > 4(1 + \log(k))$.

Então

$$\begin{aligned} \left(e^{-0.5s^\lambda + 2 + 2\log(k)} \right)^s &< \left(e^{-0.5(4+4\log(k)) + 2 + 2\log(k)} \right)^s \\ &= (e^0)^s \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto $e^{-0.5s^{1+\lambda}} \binom{sk}{s}^2 < 1$.

Para concluir que as desigualdade (3.4) e (3.5) valem, basta mostrar que

$$0.9\lambda(1 - \lambda) \log(s) \geq 1.1s^{-1} + 1$$

e

$$0.4s^{1+\lambda} \geq 1.1s + 1.$$

Temos que $s > (k\Delta)^{2g-4}$, e é razoável supor que $g \geq 4$.

Então para a primeira inequação, note que $s^{-1} < 22^{-1}$, e logo $1.1s^{-1} + 1 \leq 1.1/22 + 1 = 1.05$.

Logo basta mostrar que

$$\lambda \log(s) \geq \frac{1.05}{0.9(1 - \lambda)}.$$

Como $\lambda = 1/4g$, temos que $(1 - \lambda) = (4g - 1)/4g$, e logo

$$\frac{1.05}{0.9(1 - \lambda)} = \frac{1.05}{0.9} \frac{4g}{4g - 1}.$$

Como $g \geq 4$, temos que $4g/(4g - 1) \leq 16/(16 - 1) = 16/15$, então para mostrar a primeira inequação, basta mostrar que

$$\lambda \log(s) \geq \frac{1.05}{0.9} \frac{16}{15} \approx 1.244.$$

Então basta que $\log(s) \geq 4g \cdot 1.25 = 5g$. Ou seja, basta que $s \geq e^{5g}$. Como temos que $k > 1000$, então $k\Delta \geq e^5$, e logo

$$\begin{aligned} s &> (k\Delta)^{2g-4} \\ &\geq (e^5)^{2g-4} \\ &= e^{10g-20} \end{aligned}$$

Logo, basta que $e^{10g-20} \geq e^{5g}$, ou seja, que $e^{5g} \geq e^{20}$. E como temos que $g \geq 4$, a primeira inequação é verdadeira se k é suficientemente grande.

Para mostrar a segunda inequação, note que $0.1s > 1$, logo $1.2s > 1.1s + 1$, então basta mostrar que $0.4s^{1+\lambda} \geq 1.2s$. Ou seja, basta mostrar que $s^\lambda \geq 3$.

Como $s > (k\Delta)^{2g-4}$ e $\lambda = 1/4g$, basta que

$$(k\Delta)^{2g-4} \geq 3^{4g} = 81^g.$$

Se $k, \Delta \geq 9$, e como $g \geq 4$, a segunda inequação é verdadeira.

Portanto com probabilidade positiva, o subgrafo H de $G^{(m)}$ não contém circuitos de comprimento no máximo g e contém pelo menos uma aresta de cada $K_{s,s}$. E temos pelo Lema 3.2.2 que $\chi(H) > k$, portanto H tem número cromático maior que k e cintura maior que g . \square

Mostraremos agora que grafos de Kneser suficientemente grandes contém *blow-ups* de grafos de Kneser menores com potência grande.

Teorema 3.2.3 (Mohar e Wu [18]). *Sejam n, r, t e x inteiros não-negativos tais que $0 < r < n$ e $x < rt$. O grafo de Kneser $KG(nt, rt - x)$ contém o blow-up de $KG(n, r)$ com potência $\binom{r(t-1)}{x}$ como subgrafo. Ademais se $x < t$, $KG(nt, rt - x)$ contém o blow-up de $KG(n, r)$ com potência $\binom{rt}{x}$, e se $x = t$, contém o blow-up de $KG(n, r)$ com potência $\binom{rt}{x} - r$.*

Demonstração. (Teorema 3.2.3) Seja $G = KG(nt, rt - x)$ e $H = KG(n, r)$. Podemos representar os vértices de G como os subconjuntos de tamanho $(rt - x)$ de $[n] \times [t]$, e os vértices de H como os subconjuntos de tamanho r de $[n]$.

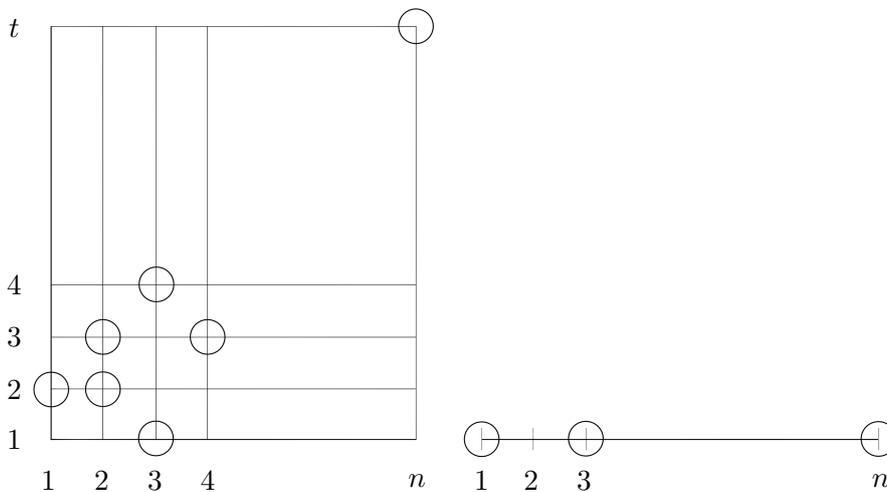


Figura 3.6: Um vértice de G (esquerda), e um vértice de H (direita).

Dado um vértice $A \in V(G)$, seja $f(A) = \{a \in [n] : (a, b) \in A \text{ para algum } b \in [t]\}$, ou seja, $f(A)$ é a projeção de A em $[n]$.

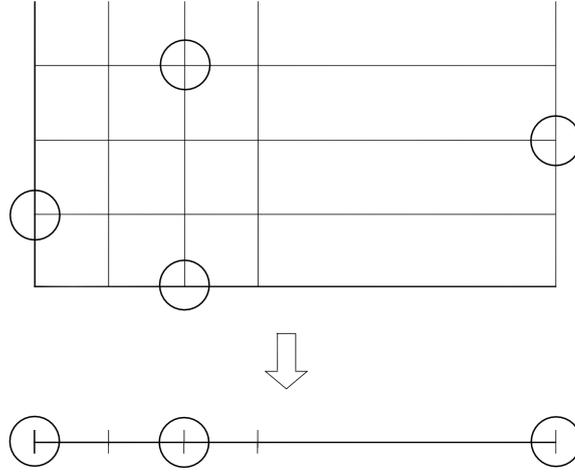


Figura 3.7: *Projeção de um vértice de $KG(nt, rt - x)$ em $[n]$.*

Note que se para dois vértices A, B de G , temos que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$, então $A \cap B = \emptyset$. Logo, se $|f(A)| = |f(B)| = r$ e $f(A)$ e $f(B)$ são adjacentes em H , então A e B são adjacentes em G . Para cada vértice $X \in V(H)$, se $f(A) = X$ para algum vértice A de G , então A é um subconjunto de $X \times [t]$.

Se $x < t$, como $A \subset X \times [t]$ é um conjunto de tamanho $rt - x$, pelo princípio da casa dos pombos, temos que $f(A) = X$. Então existem $\binom{rt}{x}$ vértices de G que são projetados em X por f . Temos então que G contém o *blow-up* de H de potência $\binom{rt}{x}$.

Se $x = t$, dentre os possíveis $(rt - x)$ -subconjuntos de $X \times [t]$ temos r casos onde $f(A) \neq X$, no caso, os subconjuntos que contém todos os elementos de $(X \setminus v) \times [t]$ para cada $v \in X$. Portanto, temos que G contém o *blow-up* de H de potência $\binom{rt}{x} - r$.

No caso geral, podemos considerar os $(rt - x)$ -subconjuntos de $X \times [t]$ que contém todos os elementos de $X \times \{1\}$. Nesse caso, claramente $f(A) = X$ e temos $\binom{rt-r}{(rt-x)-r} = \binom{r(t-1)}{r(t-1)-x} = \binom{r(t-1)}{x}$ tais subconjuntos. Portanto, G contém o *blow-up* de H de potência $\binom{r(t-1)}{x}$. \square

Afirmção 3.2.4. *Se $a_1 \geq a_2$, o grafo de Kneser $G_1 = KG(a_1, b)$ contém $G_2 = KG(a_2, b)$ como subgrafo.*

Demonstração. (Afirmção 3.2.4) Os vértices de G_2 são os b -subconjuntos de $[a_2]$, e como $a_1 \geq a_2$, todo vértice de G_2 é um b -subconjunto de $[a_1]$. Logo todo vértice de G_2 tem um vértice equivalente em G_1 , e se dois vértices são adjacentes em G_2 , os vértices equivalentes em G_1 são adjacentes. \square

Corolário 3.2.5. *A conjectura de Erdős e Hajnal é verdadeira para os grafos de Kneser.*

Demonstração. (Corolário 3.2.5) Sejam k e g os parâmetros da conjectura de Erdős e Hajnal, e seja x um inteiro tal que $x \geq 14gk^2 \log(k)$ e $x \geq k^{4g}$. Mostraremos que todo grafo de Kneser $KG(2n, n - 2x)$, para algum n , contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . E assim, mostraremos que todo grafo de Kneser com número cromático pelo menos $4x + 2$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Primeiramente, mostraremos que se todo grafo de Kneser $KG(2n, n - 2x)$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g , então todo grafo de Kneser com número cromático pelo menos $4x + 2$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Suponha que $KG(2n, n - 2x)$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . Seja $G_0 = KG(a, b)$ um grafo de Kneser tal que $\chi(G_0) \geq 4x + 2$, e seja n tal que $n - 2x = b$. Ou seja, G_0 é o grafo de Kneser $KG(a, n - 2x)$. Note que como $4x + 2 \leq \chi(G_0)$, e pela Afirmação 3.1.1 temos que $\chi(G_0) = a - 2n + 4x + 2$, então $4x + 2 \leq a - 2n + 4x + 2$, e portanto $a \geq 2n$.

Se $a = 2n$ então $G_0 = KG(2n, n - 2x)$, e portanto contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . Caso contrário temos que $a > 2n$, então pela Afirmação 3.2.4, o grafo de Kneser $KG(a, n - 2x)$ contém $KG(2n, n - 2x)$ como subgrafo, e logo contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Agora basta provar que $KG(2n, n - 2x)$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Consideraremos separadamente os casos $n > x/(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k})$ e $n \leq x/(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k})$.

No caso $n > x/(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k})$, seja $G = KG(2n, n - 2x)$ e seja $t = x/k$. Pelo Teorema 3.2.3, temos que G contém o *blow-up* de $H := KG(2n/t, (n - x)/t)$ com potência $m = \binom{(n-x)(t-1)/t}{x}$. Por simplicidade, vamos assumir que os resultados das divisões são inteiros. Cada vértice de H tem grau $\binom{(n+x)/t}{(n-x)/t} = \binom{(n+x)/t}{2x/t}$, que é limitado superiormente por

$$\begin{aligned} \Delta &:= \left(\frac{(n+x)/t}{2x/t}\right)^{2x/t} \\ &= \left(\frac{nk}{x} + k\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Temos que G contém $H^{(m)}$ como subgrafo. Vamos mostrar que $H^{(m)}$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g usando o Teorema 3.2.1. Como sabemos que $\chi(H) = 2k + 2 \geq k$, basta mostrar que $m \geq k(k\Delta)^{2g-4}$.

Seja z tal que $\frac{n}{x} = 2 + 2z$. Temos que $z > \frac{1}{k}$, pois

$$\begin{aligned} 2 + 2z &= n/x \\ &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{k-1}{2k}\right)^{-1} \\ &= \frac{2k}{k-1}. \end{aligned}$$

Logo $1 + z > k/(k-1) = 1 + 1/(k-1)$, e portanto $z > 1/(k-1) > 1/k$.

Temos as três seguintes desigualdades, demonstradas a seguir.

$$\frac{n-x}{x} \times \frac{t-1}{t} \geq 1 + z. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{x} + 1\right)^{2k(2g-4)} &= (3 + 2z)^{2k(2g-4)} \\ &< (1 + z)^{x/2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$k^{2g(2k+1)} < (1 + z)^{x/2}. \quad (3.8)$$

Para mostrar a desigualdade (3.6), temos que

$$\begin{aligned} \frac{n-x}{x} \times \frac{t-1}{t} &= \left(\frac{n}{x} - 1\right) \left(1 - \frac{1}{t}\right) \\ &= 1 + 2z - \frac{1+2z}{t}. \end{aligned}$$

Então, queremos mostrar que

$$1 + 2z - \frac{1+2z}{t} \geq 1 + z,$$

equivalentemente, queremos mostrar que

$$z \geq \frac{1+2z}{t}.$$

Como $t, z > 0$, então basta mostrar que

$$t \geq \frac{1+2z}{z}.$$

Temos que $t = x/k$ e $k > 1/z$, então basta que

$$\frac{x}{k} \geq k + 2.$$

Como $x \geq 14gk^2 \log(k)$, então $x/k > k + 2$ e logo a desigualdade (3.6) vale.

Para a desigualdade (3.7) temos que $(3 + 2z)^{2k(2g-4)} < (3 + 3z)^{4kg} = 3^{4kg}(1 + z)^{4kg}$, então basta mostrar que

$$3^{4kg}(1 + z)^{4kg} < (1 + z)^{x/2}.$$

Equivalentemente, basta mostrar que

$$3^{4kg} < (1 + z)^{x/2-4kg}.$$

Como $\frac{1}{k} < z$, temos que

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{x/2-4kg} < (1 + z)^{x/2-4kg},$$

e como $x \geq 14gk^2 \log(k)$, então

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{7gk^2 \log(k) - 4kg} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{x/2-4kg}.$$

Logo, basta mostrar que

$$\begin{aligned} 3^{4kg} &< \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{7gk^2 \log(k) - 4kg} \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{kg(7k \log(k) - 4)}. \end{aligned}$$

Equivalentemente, basta mostrar que

$$3^4 < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{7k \log(k) - 4}.$$

Temos que $2k \log(k) > 4$ para $k \geq 2$, então

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{7k \log(k) - 4} &> \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{7k \log(k) - 2k \log(k)} \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{5k \log(k)}. \end{aligned}$$

Note que $(1 + \frac{1}{k})^{2k} > e$ para todo $k \geq 1$, logo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{5k \log(k)} &= \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2k}\right)^{2.5 \log(k)} \\ &> e^{2.5 \log(k)}. \end{aligned}$$

Portanto, basta que $3^4 < e^{2.5 \log(k)}$, o que ocorre para todo $k \geq 6$. Portanto a desigualdade (3.7) vale.

Para a desigualdade (3.8), como $e < (1 + 1/k)^{k+1}$ para todo $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} k^{2g(2k+1)} &= e^{2g(2k+1) \log(k)} \\ &< \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{(k+1)2g(2k+1) \log(k)} \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{(2k^2+3k+1)2g \log(k)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{k} < z$, temos que

$$k^{2g(2k+1)} < (1 + z)^{(2k^2+3k+1)2g \log(k)}.$$

Para $k \geq 3$, temos que $2k^2 + 3k + 1 < 3.5k^2$, então

$$\begin{aligned} k^{2g(2k+1)} &< (1 + z)^{(2k^2+3k+1)2g \log(k)} \\ &< (1 + z)^{(3.5k^2)2g \log(k)} \\ &= (1 + z)^{7gk^2 \log(k)} \\ &\leq (1 + z)^{x/2}. \end{aligned}$$

Portanto a desigualdade (3.8) vale.

Mostraremos que $m \geq k(k\Delta)^{2g-4}$.

$$\begin{aligned} k(k\Delta)^{2g-4} &= k^{2g-3} \left(\frac{nk}{x} + k \right)^{2k(2g-4)} \\ &= k^{2g-3} k^{2k(2g-4)} \left(\frac{n}{x} + 1 \right)^{2k(2g-4)} \\ &= k^{2g(2k+1)-8k-3} \left(\frac{n}{x} + 1 \right)^{2k(2g-4)} \\ &< k^{2g(2k+1)} \left(\frac{n}{x} + 1 \right)^{2k(2g-4)}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.7), temos que

$$k^{2g(2k+1)} \left(\frac{n}{x} + 1 \right)^{2k(2g-4)} < k^{2g(2k+1)} (1+z)^{x/2}.$$

Pela desigualdade (3.6), temos que

$$k^{2g(2k+1)} (1+z)^{x/2} < (1+z)^{x/2} (1+z)^{x/2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} k(k\Delta)^{2g-4} &< (1+z)^{x/2} (1+z)^{x/2} \\ &= (1+z)^x. \end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.8), temos que

$$(1+z)^x \leq \left(\frac{(n-x)(t-1)/t}{x} \right)^x.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} k(k\Delta)^{2g-4} &< \left(\frac{(n-x)(t-1)/t}{x} \right)^x \\ &\leq \left(\frac{(n-x)(t-1)/t}{x} \right) = m. \end{aligned}$$

Então $m \geq k(k\Delta)^{2g-4}$, e concluímos o caso $n > x/(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k})$.

No caso $n \leq x/(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k})$, temos que $n - 2x \leq n/k$. Mostraremos que $KG(2n, n - 2x)$ contém o grafo de Kneser $KG(k, 1) = K_k$ como subgrafo, e ademais, se x é grande então $KG(2n, n - 2x)$ contém um *blow-up* de K_k com potência grande.

Como $n - 2x \leq n/k$, é possível separar $2n$ em k blocos de tamanho $2n/k$, e cada bloco contém pelo menos $n - 2x$ elementos. Então é possível tomar vértices formados apenas por elementos de cada bloco. Especificamente, podemos tomar os seguintes conjuntos de vértices.

$$V_i = \left\{ v \in V : j \in \left[(i-1)\frac{2n}{k} + 1, i\frac{2n}{k} \right] \forall j \in v \right\}.$$

Ou seja, cada conjunto V_i contém os vértices formados apenas por elementos do i -ésimo bloco, ou seja, formados apenas por elementos de $[(i-1)2n/k + 1, i2n/k]$. Logo cada conjunto corresponde a $\binom{2n/k}{n-2x}$ vértices de $KG(2n, n - 2x)$, e vértices de conjuntos distintos são adjacentes, pois seus

conjuntos claramente tem interseção vazia. Então temos k conjuntos de vértices, cada conjunto com $m := \binom{2n/k}{n-2x}$ vértices, e todo par de vértices de conjuntos distintos são adjacentes. Portanto temos um *blow-up* de K_k com potência m .

Se $m \geq k(k\Delta)^{2g-4}$, onde $\Delta := \Delta(K_k) = k - 1$, então pelo Teorema 3.2.1 o *blow-up* de K_k com potência m contém um subgrafo com número cromático maior que k e cintura maior que g .

Portanto basta mostrar que para x suficientemente grande, vale que $m \geq k(k\Delta)^{2g-4}$.

Temos que $x \geq k^{4g}$, e é razoável supor que $n - 2x > 0$. Então

$$\begin{aligned} m &= \binom{2n/k}{n-2x} \\ &\geq 2n/k \\ &\geq 4x/k \\ &\geq 4k^{4g}/k \\ &= 4k^{4g-1} \\ &> k^{4g-7} \\ &= k(k^2)^{2g-4} \\ &> k(k(k-1))^{2g-4} = k(k\Delta)^{2g-4}. \end{aligned}$$

Logo concluímos o caso $n \leq x/(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k})$.

Portanto, se $x \geq 14gk^2 \log(k)$ e $x \geq k^{4g}$, um grafo de Kneser $KG(2n, n - 2x)$ contém um subgrafo com número cromático maior que k e cintura maior que g . \square

Então todo grafo de Kneser com número cromático pelo menos $4x + 2$, onde $x \geq 14gk^2 \log(k)$ e $x \geq k^{4g}$, contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Portanto, para os grafos de Kneser temos que $f(k, g) \leq 4x + 2$, onde $x \geq 14gk^2 \log(k)$ e $x \geq k^{4g}$.

Capítulo 4

Shift Graphs

Definição 4.0.1. Um shift graph de parâmetro n , denotado S_n , é um grafo cujos vértices são os pares ordenados (a, b) , onde $1 \leq a < b \leq n$, e dois vértices (a, b) e (c, d) são adjacentes se $b = c$ ou se $a = d$.

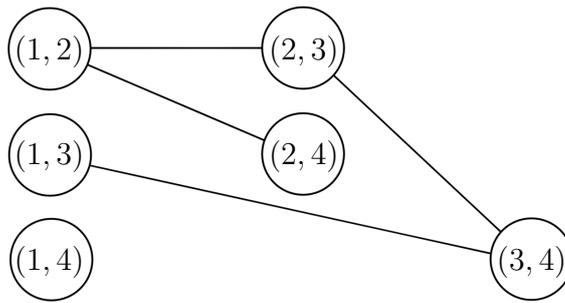


Figura 4.1: O shift graph S_4 .

Definição 4.0.2. Um shift graph de parâmetro n e ordem r , denotado S_n^r , é um grafo cujos vértices são as $(r + 1)$ -uplas $(a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r)$, onde $1 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_{r-1} < a_r \leq n$, e dois vértices $a = (a_0, \dots, a_r)$ e $b = (b_0, \dots, b_r)$ são adjacentes se os r primeiros elementos de um vértice coincidem com os r últimos elementos do outro vértice, ou seja, se $(a_1, \dots, a_r) = (b_0, \dots, b_{r-1})$ ou $(a_0, \dots, a_{r-1}) = (b_1, \dots, b_r)$.

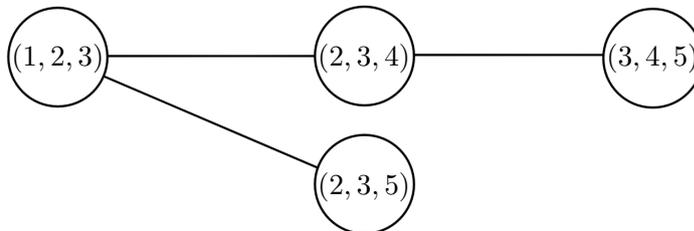


Figura 4.2: Alguns vértices de S_5^2 .

Definição 4.0.3. Dado um grafo G , o grafo linha de G , denotado por $L(G)$, é o grafo definido da seguinte forma

$$V(L(G)) = E(G)$$

$$E(L(G)) = \{vw : v, w \in E(G) \text{ e } |v \cap w| = 1\},$$

ou seja, os vértices do grafo $L(G)$ são as arestas de G , e dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se as arestas correspondentes em G têm um vértice em comum.

Ademais, o digrafo linha $L(D)$ de um digrafo D é definido da seguinte forma

$$V(L(D)) = A(D)$$

$$A(L(D)) = \{vw : v, w \in A(D) \text{ e } vw \text{ é um caminho dirigido em } D\},$$

ou seja, os vértices de $L(D)$ são os arcos de D , e vw é um arco em $L(D)$ se existe um vértice x em D tal que o arco v entra em x , e o arco w saia de x .

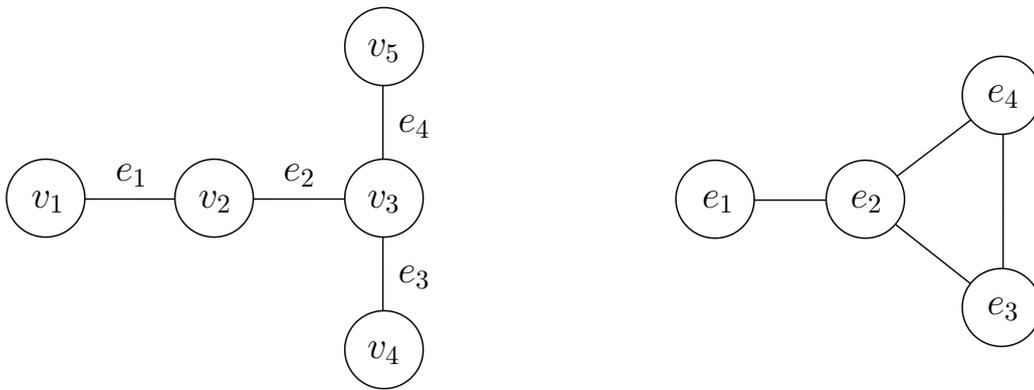


Figura 4.3: Um grafo G (esquerda) e seu grafo linha $L(G)$ (direita).

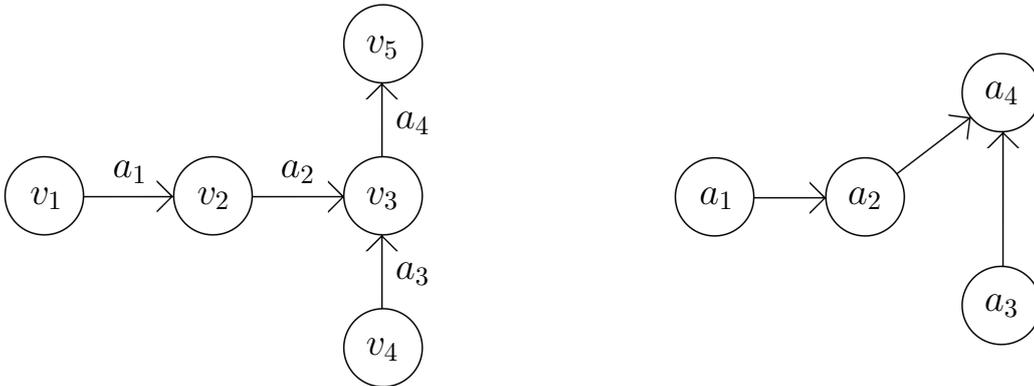


Figura 4.4: Um digrafo D (esquerda) e seu digrafo linha $L(D)$ (direita).

Seja $L^1(G) := L(G)$, e para todo $r > 1$ seja $L^r(G) := L(L^{r-1}(G))$. Denotamos $S_n^0 := K_n$ e $L^0(G) := G$.

Em busca de um contraexemplo para conjectura de Erdős e Hajnal, Gábor Tardos e Bartosz Walczak pesquisaram os *shift graphs* de ordem r , porém concluindo que não são um contraexemplo. Portanto, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.0.4. *A família dos shift graphs de ordem r respeita a conjectura de Erdős e Hajnal para n tal que $n \geq t'(2d' - 1) + 1$, onde t' é $2^{2^{\dots 2^k}}$, em que a torre de exponenciais contém r números 2,*

e d' é $n^\theta k 2^k 2^{2^k} \dots 2^{2^{\dots 2^k}}$, onde temos todas as torres de exponenciais com 1 até $r - 1$ números 2. [22]

4.1 Número Cromático

Afirmção 4.1.1. *O número cromático do shift graph S_n é $\lceil \log_2(n) \rceil$.*

Para demonstrar a Afirmção 4.1.1, considere a seguinte afirmação.

Afirmção 4.1.2. *Seja D uma orientação transitiva de K_n . Então o shift graph S_n^r é o grafo subjacente de $L^r(D)$.*

Demonstração. (Afirmção 4.1.2) Demonstraremos por indução em r . Seja $V(D) = \{1, 2, \dots, n\}$, onde para cada $i < j$, existe um arco de i para j . Mostraremos que o grafo subjacente de $L(D)$ é igual a S_n^1 .

Denotemos por (i, j) os arcos de D , onde $i < j$. Logo os vértices de $L(D)$ são os pares (i, j) com $i < j$. E para cada $1 \leq i < j < k \leq n$, existe em D um arco de i para j e um arco de j para k . Logo em $L(D)$ existe um arco de (i, j) para (j, k) . Temos então que

$$V(L(D)) = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$A(L(D)) = \{(i, j)(j, k) : 1 \leq i < j < k \leq n\}.$$

Temos que S_n^1 tem como conjunto de vértices os pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$. E dois vértices (a, b) e (c, d) são adjacentes se $a = d$ ou $b = c$. Logo temos que

$$V(S_n^1) = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$E(S_n^1) = \{(i, j), (j, k) : 1 \leq i < j < k \leq n\}.$$

Temos portanto que $L(D)$ e S_n^1 são “quase isomorfos”, exceto pelo fato de que $L(D)$ é direcionado, portanto S_n^1 é o grafo subjacente de $L(D)$.

De forma semelhante, mostraremos que S_n^r é o grafo subjacente de $L^r(D)$ para $r > 1$. Suponha por hipótese de indução que S_n^{r-1} é o grafo subjacente de $L^{r-1}(D)$. Temos que $L^r(D) = L(L^{r-1}(D))$, e como temos que $L^{r-1}(D)$ é uma orientação de S_n^{r-1} , sabemos que os vértices de $L^{r-1}(D)$ são as r -uplas (v_0, \dots, v_{r-1}) , onde $1 \leq v_0 < \dots < v_{r-1} \leq n$, e para cada escolha de $1 \leq v_0 < \dots < v_r \leq n$, existe um arco de (v_0, \dots, v_{r-1}) para (v_1, \dots, v_r) .

Para cada sequência $1 \leq v_0 < \dots < v_r \leq n$, denote por (v_0, \dots, v_r) o arco de (v_0, \dots, v_{r-1}) para (v_1, \dots, v_r) em $L^{r-1}(D)$. Logo $L(L^{r-1}(D))$ tem como vértices as $(r + 1)$ -uplas (v_0, \dots, v_r) , onde $1 \leq v_0 < \dots < v_r \leq n$.

Temos que para cada $1 \leq v_0 < \dots < v_{r+1} \leq n$, existe em $L^{r-1}(D)$ um arco de (v_0, \dots, v_{r-1}) para (v_1, \dots, v_r) e um arco de (v_1, \dots, v_r) para (v_2, \dots, v_{r+1}) . Portanto em $L(L^{r-1}(D))$, para cada $1 \leq v_0 < \dots < v_{r+1} \leq n$ existe um arco de (v_0, \dots, v_r) para (v_1, \dots, v_{r+1}) . Logo

$$V(L^r(D)) = \{(v_0, \dots, v_r) : 1 \leq v_0 < \dots < v_r \leq n\},$$

$$A(L^r(D)) = \{(v_0, \dots, v_r)(v_1, \dots, v_{r+1}) : 1 \leq v_0 < \dots < v_{r+1} \leq n\}.$$

Os vértices de S_n^r são as $(r + 1)$ -uplas (v_0, v_1, \dots, v_r) , onde $1 \leq v_0 < v_1 < \dots < v_r \leq n$. E para cada $1 \leq v_0 < v_1 < \dots < v_r < v_{r+1} \leq n$, os vértices (v_0, \dots, v_r) e (v_1, \dots, v_{r+1}) são adjacentes. Então

$$V(S_n^r) = \{(v_0, v_1, \dots, v_r) : 1 \leq v_0 < \dots < v_r \leq n\},$$

$$E(S_n^r) = \{(v_0, v_1, \dots, v_r), (v_1, v_2, \dots, v_{r+1}) : 1 \leq v_0 < \dots < v_{r+1} \leq n\}.$$

Temos portanto que S_n^r é o grafo subjacente de $L^r(D)$. □

Podemos então demonstrar que o número cromático de S_n é $\lceil \log_2(n) \rceil$.

Demonstração. (Afirmção 4.1.1) Seja D uma orientação transitiva de K_n . Pela Afirmção 4.1.2, temos que S_n é o grafo subjacente de $L(D)$.

Para mostrar que $\chi(S_n) \geq \lceil \log_2(n) \rceil$, suponha por contradição que S_n pode ser colorido usando no máximo $\lceil \log_2(n) \rceil - 1$ cores e tome uma $(\lceil \log_2(n) \rceil - 1)$ -coloração de S_n . Tal coloração dos vértices de S_n corresponde a uma $(\lceil \log_2(n) \rceil - 1)$ -coloração dos arcos de D . Para cada vértice de D atribua um vetor binário tal que cada entrada corresponda a uma das $\lceil \log_2(n) \rceil - 1$ cores dos arcos, e cada entrada tem valor 1 se algum arco da cor correspondente chega no vértice, e 0 caso contrário.

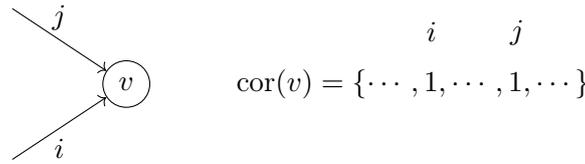


Figura 4.5: Arcos de cor i e j chegam em v , logo a cor de v contém 1 nas posições i e j .

Temos que tal coloração é própria, pois caso exista um arco vw monocromático em D , temos que existe um arco que chega em v com a mesma cor do arco entre v e w , o que não é possível, pois tal configuração é um arco monocromático em $L(D)$. Temos que tal coloração usa $2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1} < n$ cores, contradição, pois D é um digrafo completo, e logo precisa de n cores.

Para mostrar que $\chi(S_n) \leq \lceil \log_2(n) \rceil$, considere a seguinte coloração de D . Sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vértices de D em ordem topológica. E sejam A_1, \dots, A_m os subconjuntos de $[\lceil \log_2(n) \rceil]$ em ordem não-crescente de tamanho, ou seja, se $i > j$, então $|A_i| \leq |A_j|$.

Para cada vértice v_i , atribua o conjunto A_i . Colorimos cada arco $v_i v_j$ de D com um elemento de $A_i \setminus A_j$. Note que é sempre possível escolher um tal elemento, pois caso $|A_i| > |A_j|$, claramente existe algum elemento de A_i que não pertence a A_j , e caso $|A_i| = |A_j|$, temos que $A_i \neq A_j$, e logo existe algum elemento em $A_i \setminus A_j$.

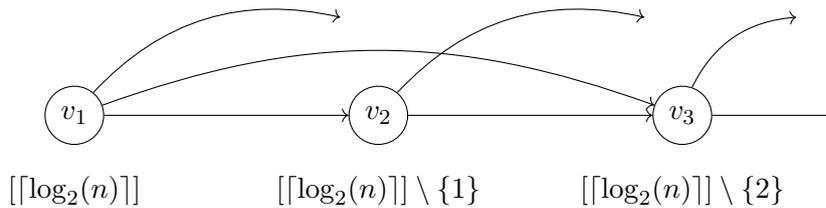


Figura 4.6: Cada vértice de D é colorido com um subconjunto distinto de $[\lceil \log_2(n) \rceil]$, atribuídos em ordem não-crescente de tamanho segundo a ordem dos vértices de D .

Note que em nenhum vértice entram e saem arcos de uma mesma cor, pois todo arco que entra em um vértice v_i não pertence ao conjunto A_i , e todo arco que sai de v_i pertence ao conjunto A_i .

A atribuição anterior corresponde a uma $\lceil \log_2(n) \rceil$ -coloração própria dos vértices de $L(D)$. E logo corresponde a uma $\lceil \log_2(n) \rceil$ -coloração própria dos vértices de S_n .

Portanto, concluímos que $\chi(S_n) = \lceil \log_2(n) \rceil$. □

De forma geral, o número cromático de S_n^r é $(1 + o(1)) \log_2 \log_2 \cdots \log_2(n)$, onde o logaritmo é tomado r vezes [12].

4.2 Esboço da prova

A seguir, um esboço da demonstração de que os *shift graphs* respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal. Usando o Lema Local de Lovász, mostraremos que existe um subgrafo H de S_n^r tal que H tem cintura grande e contém pelo menos uma aresta de cada $K_{d,d}$ de S_n^r , onde d é $o(n)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que H é um subgrafo gerador de S_n^r .

Queremos mostrar que o número cromático de H não é limitado por uma constante, ou seja, que $\chi(H) \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Mostraremos que se existe uma t -coloração de S_n^r sem $K_{d,d}$ monocromático, então existe uma 2^t -coloração de S_n^{r-1} sem $K_{td,td}$ monocromático. E logo existe uma 2^{2^t} -coloração de S_n^{r-2} sem $K_{2^t td, 2^t td}$ monocromático, e assim sucessivamente.

Uma coloração própria de H é uma coloração de S_n^r sem $K_{d,d}$ monocromático. Então se H tem número cromático limitado por constante, em particular, existem constantes t' e d' tais que S_n^0 pode ser colorido com t' cores sem $K_{d',d'}$ monocromático para todo n .

Mas como S_n^0 é isomorfo ao K_n , então temos constantes t' e d' tais que existe uma t' -coloração de K_n sem $K_{d',d'}$ monocromático para todo n . Contradição, pois se $n \geq t'(2d' - 1) + 1$, alguma cor ocorre pelo menos $2d'$ vezes, e note que todo conjunto de $2d'$ vértices de K_n contém um $K_{d',d'}$, logo temos um $K_{d',d'}$ monocromático. Portanto o número cromático de H não é limitado por uma constante.

4.3 Prova da conjectura de Erdős e Hajnal para *shift graphs*

Os grafos bipartidos completos que consideraremos nesta seção serão tais que todos os arcos estarão direcionados em um mesmo sentido, ou seja, em um $K_{a,b}$, com partes A e B , todo arco vai de A para B ou de B para A .

Lema 4.3.1. *Seja D um grafo dirigido. Se $L(D)$ pode ser colorido com t cores sem $K_{d,d}$ monocromático, então D pode ser colorido com 2^t cores sem $K_{td,td}$ dirigido monocromático.*

Demonstração. (Lema 4.3.1) Considere uma t -coloração de $L(D)$ sem $K_{d,d}$ monocromático. Tal coloração corresponde a uma coloração dos arcos de D com t cores.

Considere a seguinte coloração dos vértices de D . Cada vértice é colorido com um vetor binário de t entradas, correspondentes às t cores dos arcos, onde cada entrada é 1 caso entrem pelo menos d arcos da cor correspondente, e 0 caso contrário.

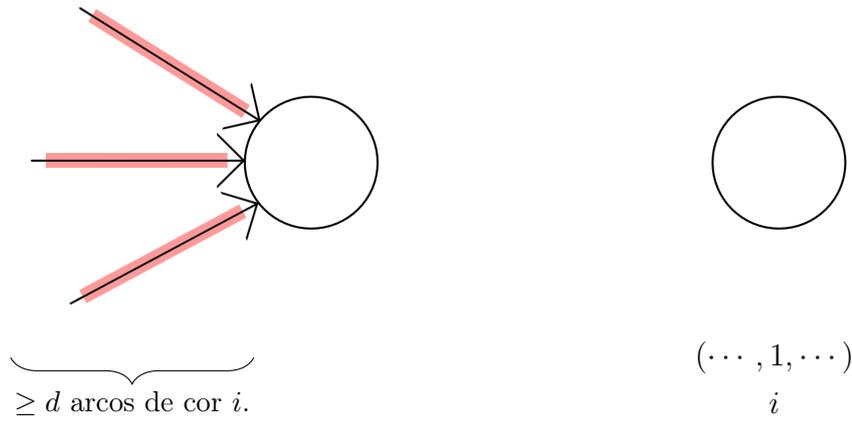


Figura 4.7: A i -ésima entrada da cor de um vértice é 1 se nele entram pelo menos d arcos de cor i .

Mostraremos que esta coloração é tal como descrita pelo lema, ou seja, é uma 2^t -coloração de D sem $K_{td,td}$ monocromático. Claramente, temos no máximo 2^t cores. Então basta mostrar que tal coloração não contém $K_{td,td}$ monocromático. Suponha por contradição que existe $K_{td,td}$ monocromático de cor v , e digamos que os arcos vão do conjunto de vértices A para o conjunto de vértices B .

Seja k o número de entradas 0 em v . Para cada vértice de B , sabemos que chegam no máximo $d-1$ arcos com cada uma das k cores de entrada 0 em v , pois caso contrário tal cor não teria entrada 0 em v . Logo, no máximo $kt(d-1)$ arcos do $K_{td,td}$ tem uma das k cores de entrada 0. Portanto, temos pelo menos $t^2d^2 - kt(d-1) = td(td - k(d-1))$ arcos com uma das $t-k$ cores de entrada 1 em v .

Como temos $|A| = td$ e $td(td - k(d-1))$ arcos com uma das cores de entrada 1, pelo princípio da casa dos pombos, de algum vértice de A saem pelo menos $td - k(d-1) = d(t-k) + k$ arcos com uma das cores de entrada 1. E como temos $t-k$ cores com entrada 1, alguma delas ocorre pelo menos $d + k/(t-k)$ vezes.

Temos portanto que de algum vértice de A saem pelo menos d arcos com uma cor de entrada 1, e entram pelo menos d arcos da mesma cor (pois tal cor tem entrada 1 em v). Tal configuração corresponde a um $K_{d,d}$ monocromático em $L(D)$, contradição.

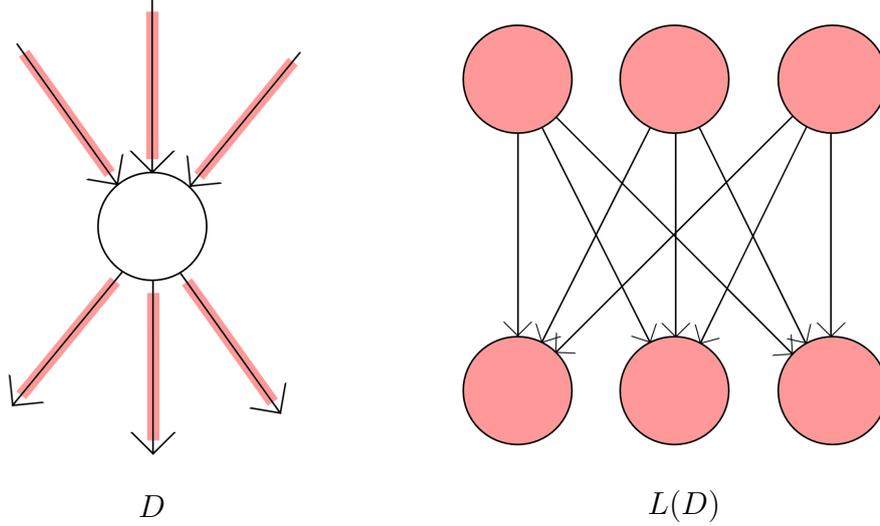


Figura 4.8: Um vértice de D com d arcos de mesma cor entrando e saindo corresponde a um $K_{d,d}$ monocromático em $L(D)$.

Note que $t = k$ (ou seja, v é composto apenas de zeros) não ocorre, pois em cada vértice de B entram td arcos de t possíveis cores, logo alguma cor ocorre pelo menos d vezes, contradizendo o fato de que v é composto apenas de zeros. \square

Lema 4.3.2. *Existe um subgrafo H de S_n^r com cintura maior que g e contendo pelo menos uma aresta de cada $K_{d,d}$ de S_n^r para n suficientemente grande.*

$$\frac{\log(\log(n))}{\log(n)} \leq \frac{g-2}{4g(g-1.75)},$$

$$n \geq \exp\left(\frac{(g-1)(g-1.75)16g^2}{0.9(g-2)(4g-1)}\right),$$

$$n^{\theta(0.25+\lambda)} \geq \frac{g+1}{0.45},$$

onde $\theta = (g-2)/(g-1.75)$ e $\lambda = 1/4g$.

Demonstração. (Lema 4.3.2) Seja $\lambda = 1/4g$, $\theta = (g-2)/(g-1.75)$, $d = n^\theta$ e $p = d^{\lambda-1}$. Seja H um subgrafo aleatório de S_n^r em que cada aresta é escolhida com probabilidade p , e seja $\Delta = \Delta(S_n^r)$. Demonstraremos usando o Lema Local de Lovász que com probabilidade positiva o subgrafo H tem cintura maior que g e contém uma aresta de cada $K_{d,d}$.

Para cada circuito C de S_n^r com $|C| \leq g$, seja A_C o evento de todas as arestas de C estarem em H . Então temos que

$$\mathbb{P}(A_C) = p^{|C|}.$$

Para cada subgrafo B isomorfo a $K_{d,d}$ de S_n^r , seja A_B o evento de nenhuma aresta de B estar em H . Então

$$\mathbb{P}(A_B) = (1-p)^{d^2} \leq e^{-pd^2} = e^{-d^{1+\lambda}}.$$

Cada circuito C compartilha aresta com no máximo $|C|\Delta^{j-2}$ circuitos de comprimento j , e compartilha aresta com no máximo $|C|\binom{\Delta}{d}^2$ subgrafos B isomorfos a $K_{d,d}$.

Cada subgrafo B compartilha aresta com no máximo $d^2\Delta^{j-2}$ circuitos de comprimento j , e compartilha aresta com no máximo $\binom{\Delta}{d}^2$ subgrafos isomorfos a $K_{d,d}$.

Sejam $y_{|C|} = \mathbb{P}(A_C)^{1-\lambda}$ e $y_0 = y(B) = e^{-0.5d^{1+\lambda}}$. Note que $\theta \geq 0.8$, e claramente $n \geq 5$, logo $d = n^\theta \geq 5^{0.8} > 3.4$, e logo temos que $y_0 \leq 0.19$. Note também que $p = d^{-(1-\lambda)}$, então

$$y_{|C|} = d^{-(1-\lambda)^2|C|} = \frac{1}{d^{(1-\lambda)^2|C|}} \leq \frac{1}{d^{3(1-1/12)^2}}.$$

Logo temos que $y_{|C|} \leq 0.19$.

Queremos mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_C) &\leq y_{|C|} \left(\prod_{3 \leq j \leq g} (1 - y_j)^{|C|\Delta^{j-2}} \right) (1 - y_0)^{|C|\binom{\Delta}{d}^2}, \\ \mathbb{P}(A_B) &\leq y_0 \left(\prod_{3 \leq j \leq g} (1 - y_j)^{d^2\Delta^{j-2}} \right) (1 - y_0)^{\binom{\Delta}{d}^2}. \end{aligned}$$

Note que $\Delta < n$, portanto basta mostrar que

$$\mathbb{P}(A_C) \leq y_{|C|} \left(\prod_{3 \leq j \leq g} (1 - y_j)^{|C|n^{j-2}} \right) (1 - y_0)^{|C|\binom{n}{d}^2}, \quad (4.1)$$

$$\mathbb{P}(A_B) \leq y_0 \left(\prod_{3 \leq j \leq g} (1 - y_j)^{d^2n^{j-2}} \right) (1 - y_0)^{\binom{n}{d}^2}. \quad (4.2)$$

Para mostrar a inequação (4.1), tomamos seu logaritmo

$$\log(\mathbb{P}(A_C)) \leq \log(\mathbb{P}(A_C)^{1-\lambda}) + \sum_{3 \leq j \leq g} |C|n^{j-2} \log(1 - y_j) + |C| \binom{n}{d}^2 \log(1 - y_0).$$

Então basta mostrar que

$$|C|(\lambda - 1) \log(d) \leq -(1 - \lambda)^2 |C| \log(d) + \sum_{3 \leq j \leq g} |C|n^{j-2} \log(1 - y_j) + |C| \binom{n}{d}^2 \log(1 - y_0).$$

Podemos dividir todos os termos por $|C|$ para obter

$$(\lambda - 1) \log(d) \leq -(1 - \lambda)^2 \log(d) + \sum_{3 \leq j \leq g} n^{j-2} \log(1 - y_j) + \binom{n}{d}^2 \log(1 - y_0).$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$(\lambda - \lambda^2) \log(d) \geq - \sum_{3 \leq j \leq g} n^{j-2} \log(1 - y_j) - \binom{n}{d}^2 \log(1 - y_0).$$

Note que $0.9 \log(1-z) > -z$ para $0 < z < 0.19$, então $-\log(1-z) < z/0.9$, e temos que $y_0 \leq 0.19$ e $y_j \leq 0.19$, então basta mostrar que

$$\lambda(1-\lambda)\log(d) \geq \sum_{3 \leq j \leq g} n^{j-2} \frac{y_j}{0.9} + \binom{n}{d}^2 \frac{y_0}{0.9},$$

ou seja,

$$0.9\lambda(1-\lambda)\log(d) \geq \sum_{3 \leq j \leq g} n^{j-2} d^{-(1-\lambda)^2 j} + \binom{n}{d}^2 e^{-0.5d^{1+\lambda}}.$$

Como $d^{-(1-\lambda)^2 j} < d^{(2\lambda-1)j}$, temos

$$0.9\lambda(1-\lambda)\log(d) \geq \sum_{3 \leq j \leq g} n^{j-2} d^{(2\lambda-1)j} + \binom{n}{d}^2 e^{-0.5d^{1+\lambda}}. \quad (4.3)$$

Portanto, para mostrar a inequação (4.1), basta mostrar a inequação (4.3). Consideraremos separadamente os dois termos do lado direito da inequação (4.3).

Como temos que $\binom{n}{d}^2 < \left(\frac{en}{d}\right)^{2d}$, então

$$\begin{aligned} \binom{n}{d}^2 e^{-0.5d^{1+\lambda}} &< \left(\frac{en}{d}\right)^{2d} e^{-0.5d^{1+\lambda}} \\ &= \left(\frac{e^2 n^2}{d^2} e^{-0.5d^\lambda}\right)^d. \end{aligned}$$

Como $d = n^\theta$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^2 n^2}{d^2} e^{-0.5d^\lambda}\right)^d &= \left(\frac{e^2 n^2}{n^{2\theta}} e^{-0.5d^\lambda}\right)^d \\ &= \left(e^2 (n^{1-\theta})^2 e^{-0.5d^\lambda}\right)^d \\ &= \left(\frac{n^{2-2\theta}}{e^{0.5d^\lambda-2}}\right)^d. \end{aligned}$$

Como $g \geq 3$, temos que $\theta \geq 0.8$, logo

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^{2-2\theta}}{e^{0.5d^\lambda-2}}\right)^d &\leq \left(\frac{n^{0.4}}{e^{0.5d^\lambda-2}}\right)^d \\ &= \left(\frac{n^{0.4}}{e^{0.5n^{\theta\lambda}-2}}\right)^d \end{aligned}$$

Se n é tal que

$$\theta\lambda = \frac{g-2}{4g(g-1.75)} \geq \frac{\log(\log(n))}{\log(n)},$$

então

$$e^{0.5n^{\theta\lambda}-2} \geq n^{0.4},$$

pois temos que

$$\begin{aligned} n^{\theta\lambda} &\geq \log(n) \\ &= 0.8 \log(n) + 0.2 \log(n). \end{aligned}$$

Note que para tal n , temos que $0.2 \log(n) \geq 4$, logo

$$n^{\theta\lambda} \geq 0.8 \log(n) + 4.$$

Ou seja, temos que

$$0.5n^{\theta\lambda} - 2 \geq 0.4 \log(n),$$

e logo temos que

$$e^{0.5n^{\theta\lambda}-2} \geq n^{0.4}.$$

Então

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^{0.4}}{e^{0.5n^{\theta\lambda}-2}} \right)^d &\leq 1^d \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\binom{n}{d}^2 e^{-0.5d^{1+\lambda}} < 1. \quad (4.4)$$

Como $\lambda g = 1/4$ e $n = d^{1/\theta}$, temos também que

$$\begin{aligned} \sum_{3 \leq j \leq g} n^{j-2} d^{(2\lambda-1)j} &< g n^{g-2} d^{(2\lambda-1)g} \\ &\leq g d^{(g-2)/\theta} d^{(2\lambda-1)g} \\ &= g d^{g-1.75} d^{2\lambda g-g} \\ &= g d^{-1.75} d^{2\lambda g} \\ &= g d^{-1.75} d^{0.5} \\ &= g d^{-1.25}. \end{aligned}$$

Então concluímos que

$$\sum_{3 \leq j \leq g} n^{j-2} d^{(2\lambda-1)j} < g d^{-1.25}. \quad (4.5)$$

Aplicando (4.4) e (4.5) na inequação (4.3), temos que para mostrar a inequação (4.1), basta que

$$0.9\lambda(1-\lambda) \log(d) \geq g d^{-1.25} + 1.$$

Como $d^{-1.25} \leq 1$ para todo $d \geq 1$, basta que

$$0.9\lambda(1-\lambda)\log(d) \geq g+1.$$

Logo, se também temos que

$$\begin{aligned} n &\geq \exp\left(\frac{g-1}{0.9\lambda(1-\lambda)\theta}\right) \\ &= \exp\left(\frac{(g-1)(g-1.75)16g^2}{0.9(g-2)(4g-1)}\right), \end{aligned}$$

então a desigualdade (4.1) é verdadeira.

De forma semelhante, para mostrar (4.2), tomamos o logaritmo,

$$\log(\mathbb{P}(A_B)) \leq \log(y_0) + \sum_{3 \leq j \leq g} d^2 n^{j-2} \log(1-y_j) + \binom{n}{d}^2 \log(1-y_0).$$

Então basta mostrar que

$$-d^{1+\lambda} \leq -0.5d^{1+\lambda} + \sum_{3 \leq j \leq g} d^2 n^{j-2} \log(1-y_j) + \binom{n}{d}^2 \log(1-y_0).$$

Reordenando os termos, obtemos

$$0.5d^{1+\lambda} \geq - \sum_{3 \leq j \leq g} d^2 n^{j-2} \log(1-y_j) - \binom{n}{d}^2 \log(1-y_0).$$

Como $-\log(1-z) < z/0.9$ para $0 < z \leq 0.19$, e temos que $y_0 \leq 0.19$ e $y_j \leq 0.19$, então basta mostrar que

$$0.5d^{1+\lambda} \geq \sum_{3 \leq j \leq g} d^2 n^{j-2} \frac{y_j}{0.9} + \binom{n}{d}^2 \frac{y_0}{0.9},$$

ou seja,

$$0.45d^{1+\lambda} \geq \sum_{3 \leq j \leq g} d^2 n^{j-2} d^{-(1-\lambda)^2 j} + \binom{n}{d}^2 e^{-0.5d^{1+\lambda}}.$$

Como $d^{-(1-\lambda)^2 j} < d^{(2\lambda-1)j}$, basta que

$$0.45d^{1+\lambda} \geq \sum_{3 \leq j \leq g} d^2 n^{j-2} d^{(2\lambda-1)j} + \binom{n}{d}^2 e^{-0.5d^{1+\lambda}}. \quad (4.6)$$

Logo para mostrar (4.2), basta mostrar que (4.6) vale.

Por (4.5), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{3 \leq j \leq g} d^2 n^{j-2} d^{(2\lambda-1)j} &= d^2 \sum_{3 \leq j \leq g} n^{j-2} d^{(2\lambda-1)j} \\ &\leq d^2 g d^{-1.25} \\ &= g d^{0.75}. \end{aligned}$$

Por (4.4), temos que

$$\binom{n}{d}^2 e^{-0.5d^{1+\lambda}} < 1.$$

Então para mostrar (4.6), basta que

$$0.45d^{1+\lambda} \geq gd^{0.75} + 1.$$

Como $d^{0.75} \geq 1$ para todo $d \geq 1$, então basta que

$$\begin{aligned} 0.45d^{1+\lambda} &\geq gd^{0.75} + d^{0.75} \\ &= (g+1)d^{0.75}. \end{aligned}$$

Logo, se

$$d^{0.25+\lambda} = n^{\theta(0.25+\lambda)} \geq \frac{g+1}{0.45},$$

então a inequação (4.2) é verdadeira.

Logo temos que as inequações (4.1) e (4.2) são verdadeiras para n suficientemente grande. Portanto, pelo Lema Local de Lovász, a probabilidade de nenhum dos eventos A_C e A_B ocorrerem é positiva, ou seja, existe um subgrafo de S_n^r com cintura maior que g e com pelo menos uma aresta de cada $K_{d,d}$. □

Afirmção 4.3.3. *Se $a_1 \geq a_2$, então o shift graph $G_1 = S_{a_1}^r$ contém $G_2 = S_{a_2}^r$ como subgrafo.*

Demonstração. (Afirmção 4.3.3) Os vértices de G_2 são os $(r+1)$ -subconjuntos de $[a_2]$, e como $a_1 \geq a_2$, todo vértice de G_2 é um $(r+1)$ -subconjunto de $[a_1]$. Logo todo vértice de G_2 tem um vértice equivalente em G_1 , e se dois vértices são adjacentes em G_2 , os vértices equivalentes em G_1 são adjacentes. □

Mostraremos agora que os *shift graphs* de ordem r respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal.

Demonstração. (Teorema 4.0.4) Seja D uma orientação transitiva de K_n , e sejam k, g os parâmetros da conjectura de Erdős e Hajnal.

Pela Afirmção 4.3.3, S_{n-1}^r é subgrafo de S_n^r , logo $\chi(S_{n-1}^r) \leq \chi(S_n^r)$, então basta mostrar que existe algum $n_0 := n_0(k, g)$ tal que $S_{n_0}^r$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g , e assim todo *shift graph* de ordem r com número cromático maior que $\chi(S_{n_0}^r)$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Pelo Lema 4.3.2, existe um subgrafo de S_n^r com cintura maior que g e que contém pelo menos uma aresta de cada $K_{d,d}$. Seja H um tal subgrafo de S_n^r . Suponha por contradição que o número cromático de H é limitado por uma constante t , logo uma coloração própria de H corresponde a uma t -coloração de S_n^r sem $K_{d,d}$ monocromático, e portanto, pela Afirmção 4.1.2, corresponde a uma t -coloração de $L^r(D)$ sem $K_{d,d}$ monocromático.

Pelo Lema 4.3.1, existe uma 2^t -coloração de $L^{r-1}(D)$ sem $K_{td,td}$ monocromático. Aplicando o lema novamente, temos que existe uma 2^{2^t} -coloração de $L^{r-2}(D)$ sem $K_{2^t td, 2^t td}$ monocromático.

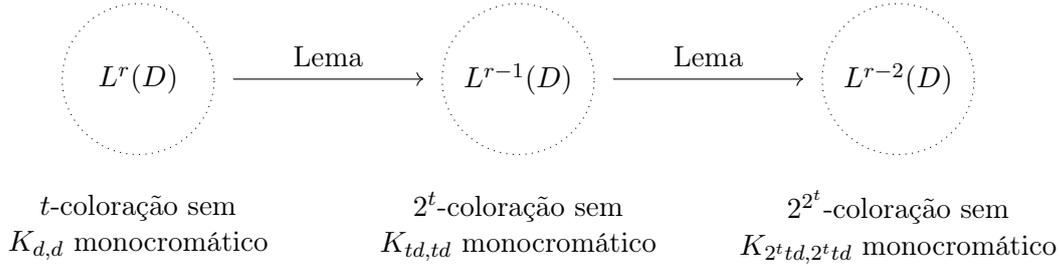


Figura 4.9: Aplicações sucessivas do Lema 4.3.1.

Aplicando o lema r vezes temos que existe uma t' -coloração de $L^0(D)$ sem $K_{d',d'}$ monocromático, para algum t' e algum d' .

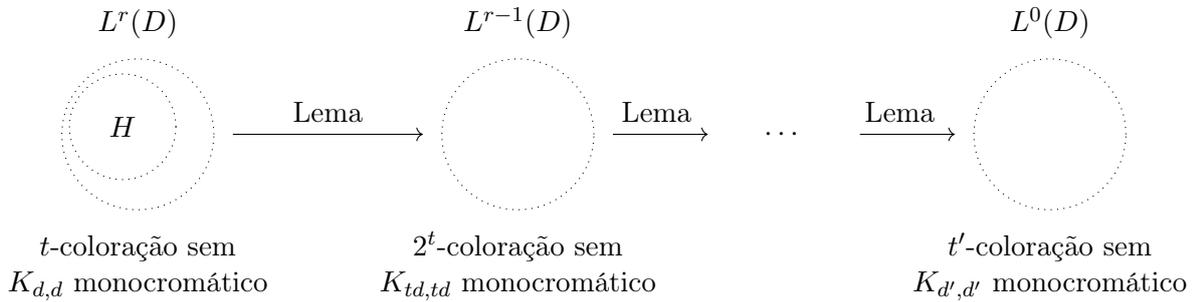


Figura 4.10: A coloração de H corresponde a uma t -coloração de $L^r(D)$ sem $K_{d,d}$ monocromático, e por meio de aplicações sucessivas do Lema, obtemos uma t' -coloração de $L^0(D)$ sem $K_{d',d'}$ monocromático.

Mas $L^0(D) = D$, e note que todo conjunto de $2d'$ vértices de D é um $K_{d',d'}$, então concluímos que existe uma t' coloração de D tal que nenhuma cor ocorre $2d'$ vezes, uma contradição pois se $n \geq t'(2d' - 1) + 1$, pelo princípio da casa dos pombos, alguma cor ocorre pelo menos $2d'$ vezes.

Portanto o número cromático de H não é limitado por constante. Em particular, se n é suficientemente grande e tomarmos $t := k$, o número cromático de H é pelo menos k . \square

4.4 Número cromático para a demonstração

Na seção anterior mostramos que a conjectura de Erdős e Hajnal é verdadeira para os *shift graphs* de ordem r se o parâmetro n é suficientemente grande. Mostraremos a seguir um limitante para n , e um limitante para o número cromático $f(k, g)$ para a família dos *shift graphs* de ordem r .

O Lema 4.3.2 requer n tal que

$$\frac{\log(\log(n))}{\log(n)} \leq \frac{g-2}{4g(g-1.75)}, \quad (4.7)$$

$$n \geq \exp\left(\frac{(g-1)(g-1.75)16g^2}{0.9(g-2)(4g-1)}\right), \quad (4.8)$$

$$n^{\theta(0.25+\lambda)} \geq \frac{g+1}{0.45}, \quad (4.9)$$

onde $\theta = (g-2)/(g-1.75)$ e $\lambda = 1/4g$.

O Teorema 4.0.4 requer n tal que

$$n \geq t'(2d' - 1) + 1, \quad (4.10)$$

onde t' é

$$2^{2^{\dots 2^k}},$$

em que a torre de exponenciais contém r' números 2, e d' é

$$n^\theta k 2^k 2^{2^k} \dots 2^{2^{\dots 2^k}},$$

onde temos todas as torres de exponenciais com 1 até $r - 1$ números 2.

Para a inequação (4.7), basta que $n \geq e^{e^g}$ e $g \geq 5$.

Para a inequação (4.8), como para $g \geq 5$ temos que

$$e^g \geq \frac{(g-1)(g-1.75)16g^2}{0.9(g-2)(4g-1)},$$

então se $n \geq e^{e^g}$ e $g \geq 5$, temos que a inequação (4.8) é verdadeira.

Para a inequação (4.9), como para todo $g \geq 3$, temos que $0.2 \leq \theta(0.25 + \lambda) \leq 0.25$, então basta que $n^{0.2} \geq (g+1)/0.45$. E como $e^{e^g} \geq ((g+1)/0.45)^5$ para $g \geq 3$, temos que se $n \geq e^{e^g}$, então $n^{0.2} \geq (g+1)/0.45$.

Portanto temos que se $n \geq e^{e^g}$ e $g \geq 5$, as inequações (4.7), (4.8) e (4.9) são verdadeiras.

Para a inequação (4.10), é suficiente que $n \geq 2t'd'$, ou seja, basta que

$$n \geq \left(2k2^k2^{2^k} \dots 2^{2^{\dots 2^k}}\right)^{4g-7},$$

onde temos todas as torres de exponenciais com 1 até r números 2.

Temos que o número cromático de S_n^r é $(1 + o(1)) \log_2 \log_2 \dots \log_2(n)$, onde o logaritmo é tomado r vezes [12], logo para que os *shift graphs* de ordem r contenham um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g , é suficiente que número cromático de S_n^r seja pelo menos $(1 + o(1)) \log_2 \log_2 \dots \log_2(n)$, em que $n \geq e^{e^g}$ e $n \geq \left(2k2^k2^{2^k} \dots 2^{2^{\dots 2^k}}\right)^{4g-7}$, onde temos todas as torres de exponenciais com 1 até r números 2.

Portanto, temos que para os *shift graphs* de ordem r , $f(k, g) \leq (1 + o(1)) \log_2 \log_2 \dots \log_2(n)$, onde o logaritmo é tomado r vezes e $n \geq \max \left(e^{e^g}, \left(2k2^k2^{2^k} \dots 2^{2^{\dots 2^k}}\right)^{4g-7} \right)$.

4.5 Type Graphs

Dois vértices de um *shift graph* são adjacentes se suas “extremidades” coincidem. Os *type graphs* generalizam os *shift graphs*, de forma que dois vértices são adjacentes se os elementos de seus conjuntos respeitam um padrão de pertinência, dizemos que tal padrão é um *type*.

Definição 4.5.1. *Sejam A_1, A_2 m -subconjuntos de $[n]$. O type do par (A_1, A_2) , denotado $\tau(A_1, A_2)$, é a sequência (z_1, z_2, \dots, z_l) , onde $l := |A_1 \cup A_2|$ e*

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } (A_1 \cup A_2)_i \in A_1 \setminus A_2 \\ 2 & \text{se } (A_1 \cup A_2)_i \in A_2 \setminus A_1 \\ 3 & \text{se } (A_1 \cup A_2)_i \in A_1 \cap A_2, \end{cases}$$

onde $(A_1 \cup A_2)_i$ é o i -ésimo elemento de $A_1 \cup A_2$ em ordem crescente. Dizemos que l é o comprimento e m é a largura do type.

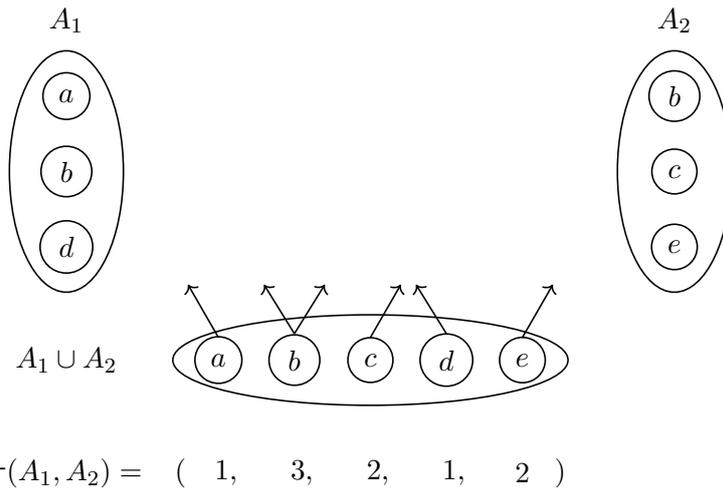


Figura 4.11: O type dos conjuntos A_1 e A_2 , assumindo que $a < b < c < d < e$.

Na figura 4.11, temos que $m = 3$ e $l = 5$. Note que $m = |\{i : z_i \in \{1, 3\}\}| = |\{i : z_i \in \{2, 3\}\}|$.

Definição 4.5.2. Um type graph $G(n, \tau)$, onde τ é um type de comprimento l e largura m , é um grafo cujos vértices são os m -subconjuntos de $[n]$, e dois vértices v e w são adjacentes se e somente se $\tau(v, w) = \tau$ ou $\tau(w, v) = \tau$.

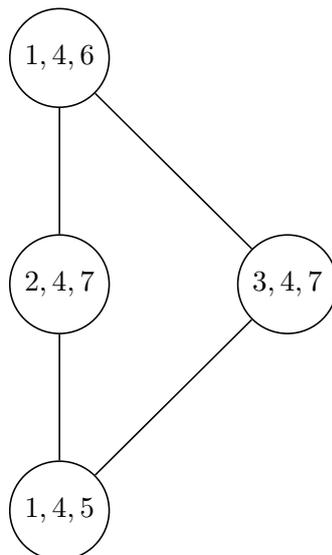


Figura 4.12: Alguns vértices de um type graph com type $(1, 2, 3, 1, 2)$.

O type graph $G(n, (1, 3, 2))$ é isomorfo ao shift graph S_n , e o type graph $G(n, (1, 3, \dots, 3, 2))$, com r números 3, é isomorfo ao shift graph S_n^r .

Uma generalização natural dos *shift graphs*, proposta em [4], são os *type graphs* cujos *types* são como o definido a seguir.

Definição 4.5.3. O *type* $\sigma_{a,b}$ é a sequência composta por a números 1, seguidos por b números 3, seguidos por a números 2.

Note que o *type* $\sigma_{a,b}$ tem comprimento $2a + b$ e largura $a + b$.

Definição 4.5.4. Seja A um conjunto ordenável. Denote por $\min_i(A)$ o conjunto dos i menores elementos de A .

Analogamente, denote por $\max_i(A)$ o conjunto dos i maiores elementos de A .

Afirmção 4.5.5. Para todo *type* τ e $a_1 \geq a_2$, o *type graph* $G_1 = G(a_1, \tau)$ contém $G_2 = G(a_2, \tau)$ como subgrafo.

Demonstração. (Afirmção 4.5.5) Os vértices de G_2 são os m -subconjuntos de $[a_2]$, onde m é a largura de τ , e como $a_1 \geq a_2$, todo vértice de G_2 é um m -subconjunto de $[a_1]$. Logo todo vértice de G_2 tem um vértice equivalente em G_1 , e se dois vértices de G_2 são adjacentes, os vértices equivalentes em G_1 são adjacentes. \square

Teorema 4.5.6. Se $a \geq b$, o *type graph* $G(a(n - 1) + b, \sigma_{a,b})$ contém um subgrafo isomorfo ao *shift graph* S_n .

Demonstração. (Teorema 4.5.6) Sejam a, b fixos, $a \geq b$, e seja $G = G(a(n - 1) + b, \sigma_{a,b})$. Considere as sequências

$$s_i = (i - 1)a + 1, (i - 1)a + 2, \dots, (i - 1)a + b, \quad i \in [1, n]$$

$$t_i = (i - 1)a + b + 1, (i - 1)a + b + 2, \dots, ia, \quad i \in [1, n - 1].$$

Ou seja, s_i é a sequência composta por todos os elementos de $(i - 1)a + 1$ até $(i - 1)a + b$, e t_i é a sequência composta por todos os elementos de $(i - 1)a + b + 1$ até ia .

Denote por (s_i, s_j) , para $1 \leq i < j \leq n$, os vértices de G da forma

$$s_i, t_i, s_j = ((i - 1)a + 1, \dots, ia, (j - 1)a + 1, \dots, (j - 1)a + b).$$

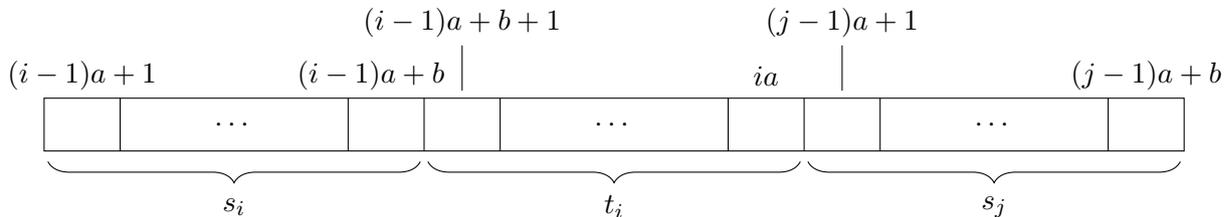


Figura 4.13: Um vértice da forma (s_i, s_j) .

Seja H o subgrafo induzido pelos vértices (s_i, s_j) , $1 \leq i < j \leq n$. Note que dois vértices (s_i, s_j) e (s_k, s_l) são adjacentes se $s_i = s_l$ ou $s_j = s_k$, ou seja, se $i = l$ ou $j = k$.

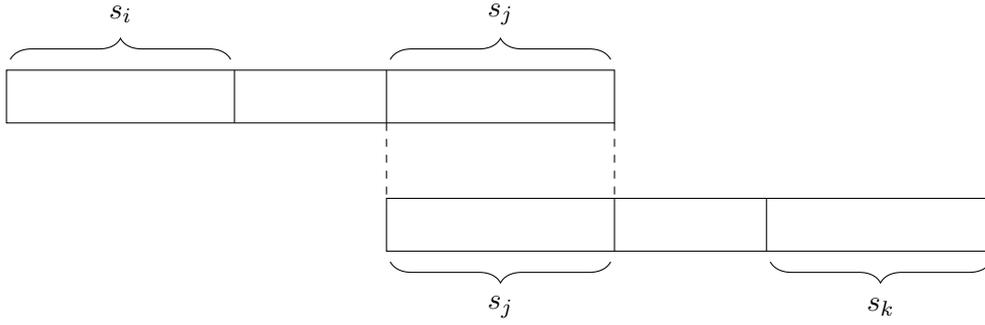


Figura 4.14: Adjacência de vértices (s_i, s_j) e (s_j, s_k) .

Temos que H é um grafo cujos vértices são os pares (s_i, s_j) , com $1 \leq i < j \leq n$, e dois vértices são adjacentes se o maior elemento de um vértice coincide com o menor elemento do outro vértice. Logo H pode ser definido como

$$V(H) = \{(s_i, s_j) : 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$E(H) = \{vw : v, w \in V(H), \max(v) = \min(w)\}.$$

Note que o *shift graph* S_n é definido como

$$V(S_n) = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$E(S_n) = \{vw : v, w \in V(S_n), \max(v) = \min(w)\}.$$

Temos portanto que H é isomorfo a S_n . Logo, temos que G contém o *shift graph* S_n como subgrafo. \square

Corolário 4.5.7. *Se $a \geq b$, a família dos type graphs com type $\sigma_{a,b}$ respeita a conjectura de Erdős e Hajnal.*

Demonstração. (Corolário 4.5.7) Sejam k, g os parâmetros da conjectura de Erdős e Hajnal. Seja n_0 o menor inteiro tal que S_{n_0} contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Tome $\sigma_{a,b}$ fixo, com $a \geq b$, e seja $n := a(n_0 - 1) + b$. Pelo Teorema 4.5.6, o *type graph* $G(n, \sigma_{a,b})$ contém S_{n_0} como subgrafo, e logo contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Pela Afirmação 4.5.5, todo grafo $G(N, \sigma_{a,b})$ com $N \geq n$ contém $G(n, \sigma_{a,b})$ como subgrafo, e assim, todo *type graph* com type $\sigma_{a,b}$ e com número cromático maior que $\chi(G(n, \sigma_{a,b}))$ contém $G(n, \sigma_{a,b})$, e logo contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . \square

Teorema 4.5.8. *Se d é divisor comum de a e b , então o type graph $G(dn, \sigma_{a,b})$ contém o type graph $G(n, \sigma_{a/d, b/d})$ como subgrafo.*

Demonstração. (Teorema 4.5.8) Sejam a, b e d inteiros fixos, onde d é divisor comum de a e b , e seja $G = G(dn, \sigma_{a,b})$.

Considere as sequências

$$s_i = (i - 1)d + 1, (i - 1)d + 2, \dots, id, \quad i \in [1, n].$$

Ou seja, s_i é a sequência composta por todos os elementos de $(i - 1)d + 1$ até id . Seja H o subgrafo induzido pelos vértices $(s_{i_1}, \dots, s_{i_t})$, onde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n$ e $t = (a + b)/d$.

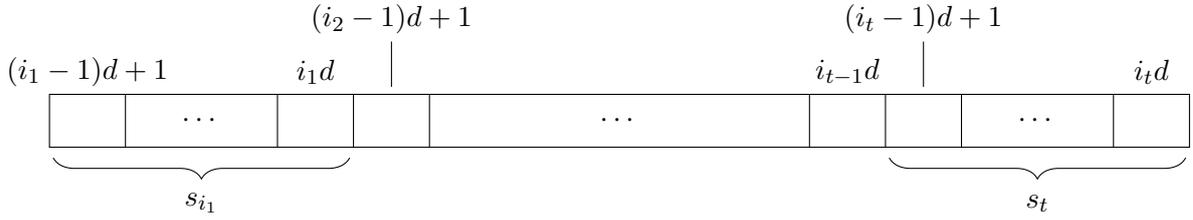


Figura 4.15: Um vértice $(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_t})$.

Note que dois vértices $(s_{i_1}, \dots, s_{i_t})$ e $(s_{j_1}, \dots, s_{j_t})$ são adjacentes se os b/d maiores elementos de um vértice coincidem com os b/d menores elementos do outro vértice.

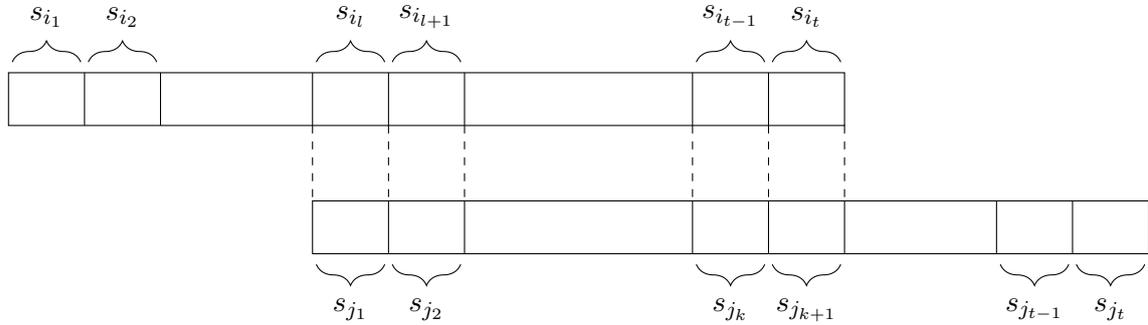


Figura 4.16: Adjacência de vértices da forma $(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_t})$ e $(s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_t})$.

Equivalentemente, temos que H é isomorfo a

$$V(H') = \binom{[n]}{t}$$

$$E(H') = \{vw : v, w \in V(H), \max_{b/d}(v) = \min_{b/d}(w)\}.$$

Note que o *type graph* $G(n, \sigma_{a/d, b/d})$ é

$$V(G(n, \sigma_{a/d, b/d})) = \binom{[n]}{\frac{a+b}{d}} = \binom{[n]}{t}$$

$$E(G(n, \sigma_{a/d, b/d})) = \{vw : v, w \in V(G(n, \sigma_{a/d, b/d})), \max_{b/d}(v) = \min_{b/d}(w)\}.$$

Portanto, temos que H é isomorfo ao *type graph* $G(n, \sigma_{a/d, b/d})$. □

Corolário 4.5.9. *Se a divide b , então a família dos type graphs com type $\sigma_{a,b}$ respeita a conjectura de Erdős e Hajnal.*

Demonstração. (Corolário 4.5.9) Sejam k e g os parâmetros da conjectura de Erdős e Hajnal, tome a e b fixos, onde a divide b , e seja $r := b/a$. Pelo Teorema 4.0.4, temos que os *shift graphs* de ordem $r - 1$ respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal, então seja n_0 o menor inteiro tal que $S_{n_0}^{r-1}$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Pelo Teorema 4.5.8, o *type graph* $G(an_0, \sigma_{a,b})$ contém o *type graph* $G(n_0, \sigma_{a/a, b/a}) = G(n_0, \sigma_{1,r})$ como subgrafo. Note que o *type graph* $G(n_0, \sigma_{1,r})$ é isomorfo ao *shift graph* $S_{n_0}^{r-1}$, e logo pela escolha

de n_0 , temos que $G(n_0, \sigma_{1,r})$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Portanto, $G(an_0, \sigma_{a,b})$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . E pela Afirmação 4.5.5, todo *type graph* $G(n, \sigma_{a,b})$ com $n \geq an_0$ contém $G(an_0, \sigma_{a,b})$ como subgrafo, e conseqüentemente, todo *type graph* com *type* $\sigma_{a,b}$ e com número cromático maior que $\chi(G(an_0, \sigma_{a,b}))$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . \square

Afirmação 4.5.10. *O type graph $G(an, \sigma_{a,0})$ contém K_n como subgrafo.*

Demonstração. (Afirmação 4.5.10) Seja $G = G(an, \sigma_{a,0})$. Considere os vértices

$$v_i = (a(i-1) + 1, a(i-1) + 2, \dots, ai), i \in [1, n].$$

Temos que $v_1 = (1, 2, \dots, a)$, $v_2 = (a+1, a+2, \dots, 2a)$, e assim por diante. Então para todo $i \neq j$, temos que os vértices v_i e v_j são adjacentes, e logo o conjunto de vértices v_1, \dots, v_n induzem um K_n . \square

Corolário 4.5.11. *Se τ é o type $\sigma_{a,0}$, então a família dos type graphs com type τ respeita a conjectura de Erdős e Hajnal.*

Demonstração. (Corolário 4.5.11) Sejam k e g os parâmetros da conjectura de Erdős e Hajnal, e seja n o menor inteiro tal que existe um grafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Pela Afirmação 4.5.10, o *type graph* $G(an, \tau)$ contém K_n como subgrafo, e logo contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . Pela Afirmação 4.5.5, todo *type graph* $G(N, \tau)$, com $N \geq n$, contém $G(an, \tau)$ como subgrafo, então todo *type graph* com *type* τ e número cromático maior que $\chi(G(an, \tau))$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . \square

Note que um *type graph* com *type* $\sigma_{0,b}$ não contém arestas, logo não faz sentido estudar este caso no contexto da conjectura de Erdős e Hajnal.

4.6 Considerações Adicionais

4.6.1 Grafos linha

A demonstração do Teorema 4.0.4 faz uso do fato que a família dos *shift graphs* de ordem r são grafos linha direcionados da família dos *shift graphs* de ordem $r-1$. No caso de grafos linha não direcionados, podemos mostrar de forma geral que se uma família respeita a conjectura de Erdős e Hajnal, então a família dos grafos linha também respeita a conjectura de Erdős e Hajnal.

Fato 4.6.1. *Seja \mathcal{L} uma família de grafos que respeita a conjectura de Erdős e Hajnal. Então a família de grafos $L(\mathcal{L}) := \{L(G) : G \in \mathcal{L}\}$ respeita a conjectura de Erdős e Hajnal.*

Demonstração. (Fato 4.6.1) Sejam k, g os parâmetros da conjectura de Erdős e Hajnal. Seja M o tamanho de um menor grafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g .

Temos que $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$, o que segue diretamente de uma coloração gulosa, e como \mathcal{L} respeita a conjectura de Erdős e Hajnal, o número cromático de \mathcal{L} não é limitado por uma constante, e logo o grau máximo de \mathcal{L} não é limitado por uma constante.

Pelo teorema de Vizing, temos que $\chi'(G) = \Delta$ ou $\chi'(G) = \Delta + 1$. E temos que $\chi'(G) = \chi(L(G))$. E como o grau máximo de \mathcal{L} não é limitado por constante, o número cromático de $L(\mathcal{L})$ não é limitado por constante.

Logo todo grafo $L(G)$ de $L(\mathcal{L})$ com número cromático pelo menos $M + 1$ corresponde a um grafo G de \mathcal{L} tal que $\Delta(G) \geq M$, e um vértice de grau pelo menos M em G corresponde a um clique de tamanho pelo menos M em $L(G)$.

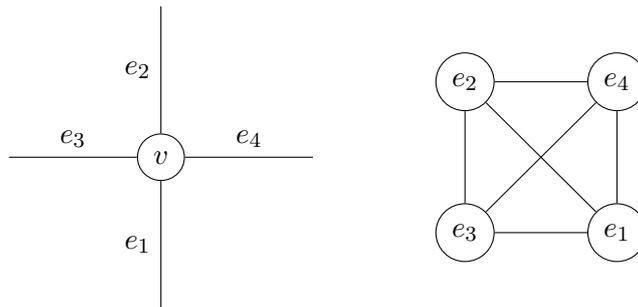


Figura 4.17: Um vértice de grau 4 em G corresponde a um clique de tamanho 4 em $L(G)$.

Portanto pela escolha de M , $L(G)$ contém um subgrafo com número cromático pelo menos k e cintura pelo menos g . □

4.6.2 Type Graphs

No caso de *type graphs* com *type* $\sigma_{a,b}$, onde $b > a$ e $b \bmod a > 0$, não é possível fazer uma “compressão” das sequências em blocos de mesmo tamanho de forma direta, como nos demais casos, pois caso os conjuntos sejam separados em blocos de tamanho a , ao final restará um bloco de tamanho $b \bmod a$, e assim os blocos não se alinham corretamente.

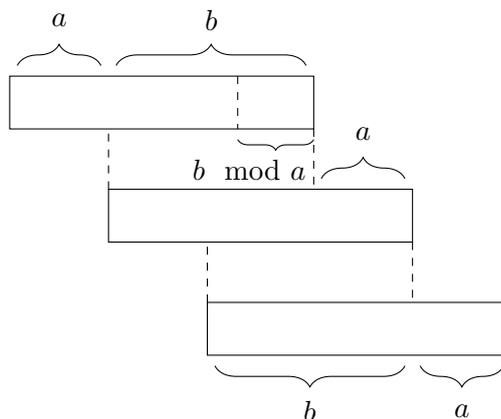


Figura 4.18: Sequências de vértices adjacentes não se “alinham” da mesma forma que nos demais casos.

Então consideraremos $b > a$ e $b \bmod a > 0$. Mostraremos a seguir que a famílias dos *type graphs* com *type* $\sigma_{a,b}$ contém a família dos *type graphs* com *type* $\sigma_{2,t}$, para algum t ímpar.

Sejam $r := b \bmod a$ e $r' := a - r$. Podemos separar o conjunto em sequências de tamanho r e r' alternadamente, começando por uma sequência de tamanho r .

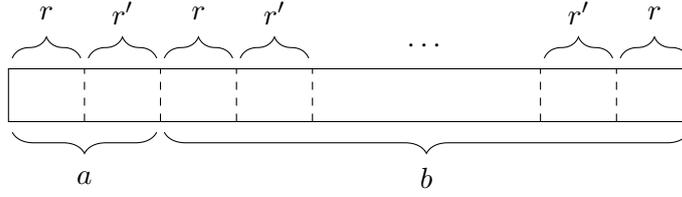


Figura 4.19: Divisão do conjunto de um vértice em blocos alternados de tamanhos r e r' .

Seja $R := \max(r, r')$. Considere as sequências

$$s_i = (i-1)R + 1, (i-1)R + 2, \dots, (i-1)R + r,$$

$$s'_i = (i-1)R + 1, (i-1)R + 2, \dots, (i-1)R + r'.$$

Note que para toda sequência $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n$, temos que $s_{i_1}, s'_{i_2}, s_{i_3}, s'_{i_4}, \dots, s_{i_t}$ é um vértice de $G(nR, \sigma_{a,b})$. Seja H o subgrafo induzido por tais vértices.

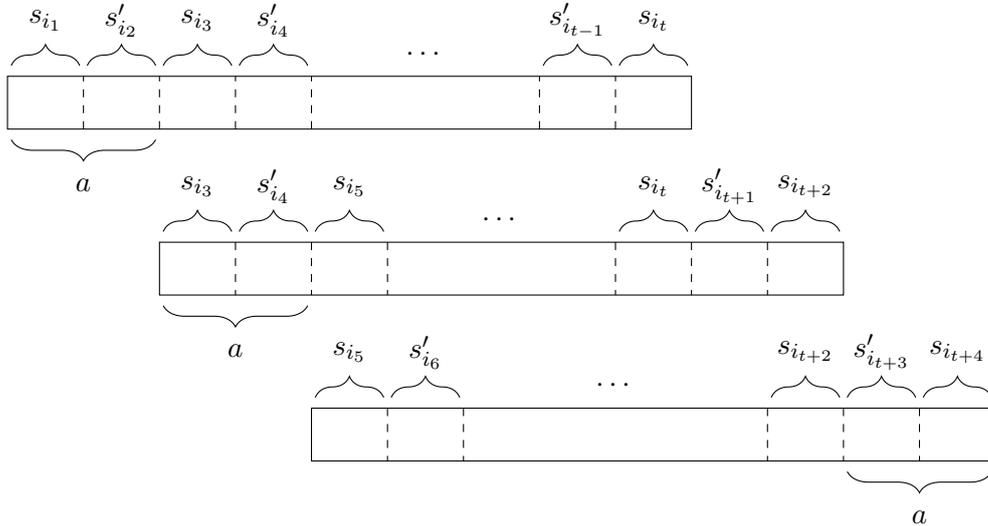


Figura 4.20: Usando as sequências s_i e s'_i , os blocos dos conjuntos dos vértices se alinham corretamente.

Seja $d := \lfloor b/a \rfloor$. Note que dois vértices de H são adjacentes se os $2d+1$ menores blocos de um dos vértices coincidem com os $2d+1$ maiores blocos do outro vértice. Então H é isomorfo a

$$V(H') = \binom{[n]}{2d+3}$$

$$E(H') = \{vw : v, w \in V(H), \max_{2d+1}(v) = \min_{2d+1}(w)\}.$$

O *type graph* $G(n, \sigma_{2,2t+1})$ é

$$V(G(n, \sigma_{2,2t+1})) = \binom{[n]}{2t+3}$$

$$E(G(n, \sigma_{2,2t+1})) = \{vw : v, w \in V(G(n, \sigma_{2,2t+1})), \max_{2t+1}(v) = \min_{2t+1}(w)\}.$$

Então temos que $G(nR, \sigma_{a,b})$ contém $G(n, \sigma_{2,2d+1})$ como subgrafo. Logo temos que se todo *type graph* com *type* da forma $\sigma_{2,t}$, com t ímpar, respeita a conjectura de Erdős e Hajnal, então a conjectura vale para todo *type graph* com *type* $\sigma_{a,b}$.

Capítulo 5

Considerações Finais

Buscar propriedades globais que garantam a existência de subgrafos de interesse é um importante e recorrente tópico em combinatória. A conjectura de Erdős e Hajnal pode mostrar que mesmo uma estrutura bastante complexa como os grafos com número cromático e cintura grandes podem ser garantidas por uma propriedade mais simples.

Segue um breve resumo dos capítulos anteriores. No Capítulo 2 vimos alguns exemplos de construções de grafos livres de triângulos e com número cromático alto, especificamente, vimos em detalhes a construção por planos projetivos [7]. Vimos também dois casos “base” para a conjectura de Erdős e Hajnal, no sentido de que caso uma indução seja possível sobre os dois parâmetros, os casos com os menores valores de k e g foram provados. Em particular, se $g = 4$ (ou seja, se queremos subgrafos livres de triângulos), a conjectura é verdadeira [21], e se $k = 3$ (ou seja, se queremos subgrafos com circuitos ímpares), a conjectura é verdadeira.

No Capítulo 3 vimos que a família dos grafos de Kneser respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal [17]. Em particular mostramos por meio do Lema Local de Lovász que *blow-ups* suficientemente grandes de grafos de Kneser contém subgrafos com número cromático e cintura grandes, e também mostramos que *blow-ups* de grafos de Kneser são subgrafos de grafos de Kneser maiores.

No Capítulo 4 vimos que a família dos *shift graphs* de ordem r respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal [22]. Consideramos também os *type graphs*, apresentamos alguns breves resultados mostrando que para *types* particulares, a conjectura de Erdős e Hajnal é verdadeira para os *type graphs*.

A conjectura de Erdős e Hajnal permanece em aberto, e assim, é interessante o estudo de outras famílias de grafos. Uma possibilidade é procurar famílias de *type graphs* que respeitam a conjectura de Erdős e Hajnal com diferentes *types*.

Outra possibilidade é considerar o número cromático fracionário, denotado por χ_f , uma generalização do número cromático em que podemos colorir os vértices usando quantidades reais de cores. Mohar e Wu demonstraram em [17] a versão fracionária do teorema de Rödl.

No contexto do número cromático fracionário, uma questão natural é considerar a seguinte variação da conjectura de Erdős e Hajnal, proposta por Mohar e Wu em [17].

Conjectura 2. *Para todo par de inteiros positivos k e g , existe um inteiro $f(k, g)$ tal que todo grafo G com $\chi_f(G) \geq f(k, g)$ contém um subgrafo H com $\chi_f(H) \geq k$ e $g(H) \geq g$.*

O estudo da conjectura de Erdős e Hajnal restrita a famílias específicas de grafos nos fornece um caminho para entender a relação entre o número cromático dos grafos e a existência de subgrafos de

interesse. Assim, auxilia no entendimento da conjectura como um todo. E dessa forma, apresenta um possível caminho para avançar com o estudo da conjectura, e com o estudo do número cromático e sua relação com as demais áreas da combinatória.

O autor tomou conhecimento de [3] durante a fase de produção da versão final deste texto.

Bibliografia

- [1] Martin Aigner, Günter M Ziegler, Karl H Hofmann, and Paul Erdős, *Proofs from The Book*, vol. 274, Springer, 2010. [16](#)
- [2] Noga Alon and Joel H Spencer, *The probabilistic method*, John Wiley & Sons, 2004. [6](#)
- [3] Christian Avart, Bill Kay, Christian Reiher, and Vojtěch Rödl, *The chromatic number of finite type-graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **122** (2017), 877–896. [54](#)
- [4] Christian Avart, Tomasz Łuczak, and Vojtěch Rödl, *On generalized shift graphs*, Fundamenta Mathematicae **2** (2014), no. 226, 173–199. MR 3224120 [46](#)
- [5] Béla Bollobás, *Extremal graph theory*, Courier Corporation, 2004. [12](#)
- [6] Karol Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae **20** (1933), no. 1, 177–190. [16](#)
- [7] Bruno Codenotti, Pavel Pudlák, and Giovanni Resta, *Some structural properties of low-rank matrices related to computational complexity*, Theoretical Computer Science **235** (2000), no. 1, 89–107. MR 1765967 [1](#), [3](#), [12](#), [53](#)
- [8] Blanche Descartes, *A three colour problem*, Eureka **9** (1947), no. 21, 24–25. [1](#), [3](#)
- [9] Paul Erdős, *Graph theory and probability*, Canadian Journal of Mathematics **11** (1959), 34–38. [1](#)
- [10] ———, *Problems and results in combinatorial analysis and graph theory*, Proof Techniques in Graph Theory (ed. F. Harary), Academic Press, New York, 1969, pp. 27–35. [2](#)
- [11] Paul Erdős and András Hajnal, *On chromatic number of graphs and set-systems*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica **17** (1966), no. 1-2, 61–99. MR 193025 [12](#)
- [12] ———, *On chromatic number of infinite graphs*, Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966), Academic Press, New York, 1968, pp. 83–98. MR 0263693 [35](#), [44](#)
- [13] Joshua E Greene, *A new short proof of Kneser’s conjecture*, The American mathematical monthly **109** (2002), no. 10, 918–920. MR 1941810 [16](#)
- [14] Martin Kneser, *Aufgabe 360*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **2** (1955), no. 27, 3–16. [16](#)
- [15] Donald E Knuth, *Mathematics and computer science: coping with finiteness*, Science (New York, NY) **194** (1976), no. 4271, 1235–1242. MR 534161 [11](#)

- [16] László Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **25** (1978), no. 3, 319–324. MR 514625 [16](#)
- [17] Bojan Mohar and Hehui Wu, *Triangle-free subgraphs with large fractional chromatic number*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **49** (2015), 661–666. [2](#), [15](#), [18](#), [53](#)
- [18] ———, *Dichromatic number and fractional chromatic number*, Forum of Mathematics, Sigma, vol. 4, Cambridge University Press, 2016. MR 3593495 [24](#)
- [19] Robin A Moser and Gábor Tardos, *A constructive proof of the general lovász local lemma*, Journal of the ACM (JACM) **57** (2010), no. 2, 1–15. [8](#)
- [20] Jan Mycielski, *Sur le coloriage des graphes*, Colloq. Math, vol. 3, 1955, pp. 161–162. [1](#), [3](#)
- [21] Vojtěch Rödl, *On the chromatic number of subgraphs of a given graph*, Proceedings of the American Mathematical Society **64** (1977), no. 2, 370–371. MR 469806 [2](#), [9](#), [53](#)
- [22] Gábor Tardos and Bartosz Walczak, *On an Erdős-Hajnal conjecture*, Apresentado durante o evento Combinatorics: Extremal, Probabilistic and Additive, São Paulo, 2018. [2](#), [33](#), [53](#)
- [23] Alexander A Zykov, *On some properties of linear complexes*, Matematicheskii sbornik **66** (1949), no. 2, 163–188. MR 0035428 [1](#), [3](#)