

**Decomposição Sequencial a partir da
Sup-Representação de W -operadores**

Joel Edu Sánchez Castro

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Ciências da Computação
Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Fumio Hashimoto

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
da FAPESP e do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2013

Decomposição Sequencial a partir da Sup-Representação de W -operadores

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 15/03/2013. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ronaldo Fumio Hashimoto (orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Junior Barrera - IME - USP
- Prof. Dr. Peter Sussner - UNICAMP

Agradecimentos

Neste trabalho contribuíram inúmeras pessoas. Eu gostaria agradecer de maneira especial:

Ao meu orientador, o professor Ronaldo, pela paciência para me orientar, por ser um amigo e fazer do trabalho uma experiência ótima. Ao professor Junior, pelas orientações e apoio neste trabalho.

Aos meus pais e aos meus irmãos porque sempre me apoiaram de forma incondicional. A todos meus parentes porque me recebem de braços abertos quando eu volto a casa. Apesar da distância sempre tentaram estar presentes na minha vida.

Aos meus amigos com os que eu compartilhei experiências no IME e em São Paulo, todos contribuíram de diferentes maneiras neste trabalho. Obrigado a todos por fazer me sentir como se eu estivesse em casa.

Aos meus amigos que se encontram em Peru, pelas mensagens e o recebimento quando eu volto lá.

Agradeço à FAPESP e ao CNPq, pelo apoio financeiro para a realização do mestrado.

E finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente colaboraram com este trabalho.

A todos, meu muito obrigado

Resumo

Os W -operadores são operadores invariantes por translação e localmente definidos dentro de uma janela W . Devido a sua grande utilidade em análise de imagens, estes operadores foram extensamente pesquisados, sendo que uma abordagem para o seu estudo é a partir da Morfologia Matemática.

Uma propriedade interessante de W -operadores é que eles possuem uma sup-decomposição, ou seja, um W -operador pode ser decomposto em termos de uma família de operadores superadores que, por sua vez, são parametrizados por elementos da base desse W -operador. No entanto, a sup-decomposição tem uma estrutura intrinsecamente paralela que não permite uma implementação eficiente em máquinas de processamento sequencial.

Em um trabalho publicado em 2001, Hashimoto e Barrera formalizaram o problema de transformar a sup-decomposição em decomposições puramente sequenciais como um problema de encontrar soluções discretas de uma equação. Neste texto, estendemos o trabalho desenvolvido por eles. Estudamos e exploramos as propriedades matemáticas do problema, e desenvolvemos estratégias heurísticas para encontrar uma decomposição sequencial de um W -operador a partir de sua base que seja eficiente ao ser executado.

Palavras-chave: Morfologia matemática, W -operadores, Imagens binárias, Sup-Decomposição, Base de um W -Operador.

Abstract

W -operators are defined as operators which are translation invariant and locally defined within a finite window W . Due to their great contribution to image processing, these operators have been widely researched and used, specially in Mathematical Morphology.

An interesting property of W -operators is that they have a sup-decomposition in terms of a family of sup-generating operators, that are parameterized by their basis. However, the sup-decomposition has a parallel structure that is not efficient in sequential machines.

In a paper published in 2001, Hashimoto and Barrera formalized the problem of transforming sup-decompositions into purely sequential decompositions as a problem of finding discrete solutions of an equation. In this work, we extend Hashimoto and Barrera's approach. We study and explore mathematical properties of this problem and we elaborate heuristic strategies to find a sequential decomposition of a W -operator from its basis that can be executed efficiently.

Keywords: Mathematical Morphology, W -operators, Binary images, Sup-Decomposition, W -Operator basis.

Sumário

Lista de Abreviaturas	xi
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivos	2
1.3 Organização do trabalho	3
2 Fundamentos Matemáticos	5
2.1 Teoria dos Conjuntos	5
2.1.1 Noções Fundamentais de Conjunto	5
2.1.2 Operações com Conjuntos	6
2.1.3 Produto Cartesiano	6
2.1.4 Relações binárias	7
2.1.5 Funções	7
2.2 Teoria de Reticulados	8

2.2.1	Conjuntos Parcialmente Ordenados	8
2.2.2	Elementos Notáveis de um Conjunto Parcialmente Ordenado	8
2.2.3	Reticulados	9
2.3	Grupo Abeliano	10
2.4	Morfologia Matemática	10
2.4.1	Reticulado de Conjuntos $\mathcal{P}(E)$	10
2.4.2	Reticulado de Conjuntos $\mathcal{P}(W)$	11
2.4.3	Reticulado de Conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$	11
2.4.4	Reticulado de Coleção de Intervalos Maximais	12
2.4.5	Reticulado de Coleções de Intervalos Maximais de Extremidade Direita Fixa	13
2.4.6	O Reticulado dos W -Operadores	16
2.4.7	Isomorfismos de Reticulados	16
2.4.8	Propriedades da Base de um W -Operador	17
2.4.9	W -Operadores Crescentes	18
2.5	Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais	18
2.5.1	Algoritmo que encontra \mathbf{X}	18
2.5.2	Conjuntos viáveis para C	23
2.5.3	Algoritmo que encontra \mathbf{X} e C	24
2.6	Conversão da Sup-Decomposição para Decomposições Sequenciais	24
2.6.1	Complexidade Computacional de uma Decomposição Puramente Sequencial	27
3	Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais	29
3.1	Algoritmo que encontra \mathbf{X}	29
3.1.1	Propriedades do Limite Superior para \mathbf{X}	29

3.1.2	Limites Inferiores para \mathbf{X}	30
3.1.3	Algoritmo Proposto	34
3.1.4	Otimização do Algoritmo	36
3.2	Algoritmo para encontrar \mathbf{X} e C	42
3.3	Heurísticas de busca	43
3.3.1	Conjuntos Viáveis para C	43
3.3.2	Soluções para $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$	43
3.3.3	Algoritmo proposto utilizando heurísticas	44
3.4	Conclusão	44
4	Resultados experimentais	45
5	Conclusões	51
5.1	Resumo das Contribuições	51
5.2	Perspectivas futuras	52
	Referências Bibliográficas	55

Lista de Abreviaturas

PID	Processamento de imagens digitais.
MM	Morfologia Matemática.

Lista de Símbolos

$\mathcal{P}(W)$	Conjunto potência do conjunto W .
\oplus	Adição de Minkowski.
\ominus	Subtração de Minkowski.
δ_C	Dilatação pelo elemento estruturante C .
ε_C	Erosão pelo elemento estruturante C .
$[A, B]$	Intervalo de extremidades A e B que é um subconjunto de $\mathcal{P}(W)$.
$[X]$	Intervalo com extremidade direita fixa.
ψ	Operador morfológico.
\mathcal{X}	Elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$.
\mathbf{X}_W	Coleção de intervalos contidos em $\mathcal{P}(W)$.
$\mathbf{M}(\mathcal{X})$	Coleção de todos os intervalos maximais que estão contidos em \mathcal{X} .
$Max(\mathbf{X})$	Coleção de todos intervalos maximais de \mathbf{X} .
$\mathcal{U}(\mathbf{X})$	A coleção de todos elementos de $\mathcal{P}(W)$ que são elementos dos intervalos em \mathbf{X} .
$\mathcal{K}_W(\psi)$	O kernel o núcleo de um operador ψ .
$\mathcal{K}_W^{-1}(\mathcal{X})$	O mapeamento inverso ao kernel.
$\mathbf{B}_W(\psi)$	A base de ψ .
Π_W	Conjunto de todas as coleções de intervalos maximais contidos em $\mathcal{P}(W)$.
\mathcal{I}_W	Subconjunto de Π_W tal que a extremidade direita de seus elementos é W .
(Ψ_W, \leq)	Reticulado dos W -operadores.
$(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$	Reticulado da coleção de todas as subcoleções de $\mathcal{P}(W)$.
(Π_W, \leq)	Reticulado da coleção de intervalos maximais contidos em $\mathcal{P}(W)$.
(\mathcal{I}_W, \leq)	Sub-reticulado de coleções de extremidade direita fixa.
$\mathcal{W}(\cdot), \mathcal{W}^{-1}(\cdot)$	Isomorfismos de reticulado.
$\mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C}$	Limite superior das soluções na Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais.

$\Theta_W^{\mathbf{Y},C}$	Conjunto que tem os limites inferiores das soluções na Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais.
$\Phi_W^{\mathbf{Y},C}$	Conjunto que tem os limites inferiores das soluções na Equação.
$\Phi_W^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C}$	Conjunto otimizado de $\Phi_W^{\mathbf{Y},C}$.
$\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h), \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h)$	Partições da coleção $(\mathbf{Y} - h)$.
$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$	Intervalo de extremidades \mathbf{A} e \mathbf{B} que é um subconjunto de \mathcal{I}_W .
\mathfrak{X}	Subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{I}_W)$.

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de Hasse do Reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor azul o conjunto \mathbf{X}_W .	14
2.2	Isomorfismo de reticulado entre (\mathcal{I}_W, \leq) e $(\mathcal{I}_{W'/W}, \leq)$	14
2.3	Isomorfismos de reticulado entre (Ψ_W, \leq) , $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ e (Π_W, \leq)	17
2.4	Construção do conjunto $\mathbf{U}^{\mathbf{Y}, \mathcal{C}}$ nos diferentes reticulados	20
2.5	Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor vermelho o conjunto $\mathbf{U}^{\mathbf{Y}, \mathcal{C}}$	20
2.6	Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor azul os conjuntos \mathbf{Z} que pertencem a $\Theta^{\mathbf{Y}, \mathcal{C}}$	22
2.7	Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor verde todas as soluções da equação.	23
2.8	Um diagrama da árvore de representação.	26
3.1	Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor azul os elementos do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathcal{C}}$	32
3.2	Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor laranja o conjunto \mathfrak{X} .	36
4.1	Alguns exemplos de transformação da sup-decomposição para decomposições sequenciais. . . .	47
4.0	Alguns exemplos de transformação da sup-decomposição para decomposições sequenciais. . . .	48
4.-1	Alguns exemplos de transformação da sup-decomposição para decomposições sequenciais. . . .	49
5.1	Diagrama das árvores de decomposição. (a) Árvore de decomposição original; (b) Árvore de decomposição proposta	53

Lista de Tabelas

4.1	Tempo utilizado pelo algoritmo para encontrar representações sequenciais	46
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

O processamento de imagens digitais (PID) tornou-se uma atividade cada vez mais importante. Atualmente vivemos uma era na qual o uso do PID na vida cotidiana é praticamente indispensável, ele está presente em diversas atividades, desde tarefas simples como tirar fotografias digitais até as mais complexas como o processamento de imagens por satélite.

A Morfologia Matemática (MM) aplicada em subconjuntos (imagens binárias) pode ser entendida como uma linguagem formal construída a partir de uma família de operadores primitivos (erosões(ε) e dilatações(δ)) e um conjunto de operações (união, intersecção, complementação e composição). Podem existir várias frases desta linguagem para representar o mesmo operador morfológico. Por exemplo, uma abertura (operador morfológico) por um elemento estruturante A pode ser representada pelas seguintes frases: $\varepsilon_A \delta_A$, $(\varepsilon_A \delta_A)(\varepsilon_A \delta_A)$, e $(\varepsilon_A \delta_A)(\varepsilon_A \delta_A)(\varepsilon_A \delta_A)$.

Os W -operadores são operadores morfológicos que podem ser interpretados como transformações em imagens binárias, devido a sua grande utilidade foram extensamente pesquisados. A base de um W -operador é uma representação matemática única de cada operador no reticulado das coleções de intervalos maximais [Barrera e Salas, 1996]. Um problema central em análise de imagens binárias é o projeto de W -operadores. Uma técnica que tem sido utilizada com sucesso consiste em estimar a base de um operador “ótimo” (segundo um critério de minimização de erro estatístico) a partir de uma coleção de pares de imagens de entrada-saída [Barrera *et al.*, 1997].

Os primeiros resultados sobre decomposição de operadores foram introduzidos por Matheron [1975]. O Teorema de Representação de Matheron estabelece que um W -operador crescente pode ser expresso como o supremo de um conjunto de erosões, ou dualmente, como o ínfimo de um conjunto de dilatações. Barrera e Salas [1996] generalizaram este resultado mostrando que qualquer W -operador tem uma sup-representação e inf-representação, isto é, um W -operador pode ser decomposto em termos de uma família de operadores sup-geradores, ou dualmente, em termos de operadores inf-geradores parametrizados pela base do operador.

A sup-decomposição parametrizada pela base tem algumas propriedades muito interessantes: (i) ela caracteriza unicamente os W -operadores; e (ii) ela tem uma estrutura simples que permite a introdução de informação a priori para ser utilizada na estimação de operadores ótimos. No entanto, a sup-decomposição tem uma estrutura intrinsecamente paralela que não permite uma implementação eficiente em máquinas de processamento sequencial. Por exemplo, seja um elemento estruturante A , para representar o operador morfológico da abertura em máquinas sequenciais é mais eficiente usar a decomposição sequencial da abertura por A (isto é, $\varepsilon_A \delta_A$) do que utilizar sua sup-decomposição. Apesar de atualmente já ser possível utilizar máquinas com

processadores com mais que um núcleo ainda se faz necessário o estudo de algoritmos eficientes em máquinas sequenciais.

Hashimoto e Barrera [2001] formalizaram o problema de transformar a sup-decomposição em decomposições puramente sequenciais (quando elas existem) em um problema de encontrar soluções discretas de uma equação. Vamos chamar essa equação como Equação de Minkowski. Uma versão especializada deste problema é o problema clássico de encontrar decomposições sequenciais de dilatações e erosões [Hashimoto e Barrera, 2003, Hashimoto *et al.*, 2000, Xu, 1991].

Uma decomposição sequencial de um W -operador (usando dilatações e erosões) pode ser encontrada aplicando recursivamente soluções da Equação de Minkowski. Esta metodologia cria uma árvore de recursão criada pelas soluções da equação. Devido a que o número de soluções das equações pode ser exponencial, este problema se torna num problema de busca de soluções num espaço exponencial.

Neste trabalho de mestrado, estudamos e exploramos as propriedades matemáticas destas equações para encontrar uma decomposição de um W -operador que seja eficiente ao ser executado a partir de sua base. Para isso, exploramos como obter soluções da Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais e estratégias de busca para evitar uma busca exaustiva, como por exemplo, usar heurísticas de busca para resolver problemas de otimização.

1.1 Motivação

Atualmente, os recursos dos computadores têm uma capacidade impressionante de armazenamento e execução. No entanto, os recursos são finitos e devem ser usados de forma inteligente [Cormen *et al.*, 2001]. Apesar da computação paralela ter avançado muito nestes anos, a velocidade da execução dos algoritmos em máquinas paralelas continuam sendo limitadas pelas dependências e a sincronização dos processos executados paralelamente. Quando, os W -operadores crescentes são representados pela decomposição de Matheron, estes na maioria das vezes não têm a melhor complexidade computacional devido a sua estrutura intrinsecamente paralela, uma vez que a utilização desta estrutura sugere executar paralelamente o algoritmo da erosão para cada elemento da base do W -operador. Assim, a velocidade da execução do algoritmo depende da arquitetura do computador e do número de intervalos na base do operador, que dependendo do W -operador, este número pode ser muito grande.

Hashimoto e Barrera [2001] apresentaram um algoritmo que encontra decomposições puramente sequenciais de um W -operador crescente. No entanto, temos observado que o algoritmo proposto não é eficiente. Neste trabalho desenvolvemos algoritmos eficientes para encontrar soluções utilizando menos recursos computacionais.

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é encontrar uma representação puramente sequencial composta por dilatações e erosões para um W -operador crescente.

Estendemos o trabalho desenvolvido por [Hashimoto e Barrera, 2001] que procura uma decomposição puramente sequencial em W -operadores crescentes, pesquisando novas propriedades da equação de Minkowski, estratégias de busca e heurísticas para encontrar soluções de maneira eficiente.

1.3 Organização do trabalho

O texto desta dissertação está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos a base matemática para a compreensão do texto. No mesmo capítulo, é apresentado o estado da arte em MM com relação à decomposição dos W -operadores. Em seguida, no Capítulo 3, apresentamos uma metodologia para resolver a Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais. Mostramos que encontrar as soluções desta equação eficientemente é uma parte importante na decomposição sequencial de um W -operador. No Capítulo 4, apresentamos alguns resultados experimentais dos algoritmos desenvolvidos no estudo. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos as conclusões deste trabalho e discutimos possíveis extensões da metodologia apresentada.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo, iremos colocar algumas definições e propriedades para a compreensão do texto. Na Seção 2.1, apresentamos algumas definições e propriedades da teoria dos conjuntos. Na Seção 2.2, veremos definições e propriedades dos reticulados. Na Seção 2.3, apresentamos uma breve definição de grupo abeliano. Na Seção 2.4, veremos elementos da Morfologia Matemática e a relação dos W -operadores nos diferentes reticulados. Na Seção 2.5, veremos um método de solução da Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais. Na Seção 2.6, veremos a relação entre a Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais e a decomposição sequencial dos W -operadores.

O objetivo deste capítulo é apresentar todos os conceitos e definições do estado da arte da decomposição sequencial dos W -operadores. As demonstrações das propriedades e resultados não serão apresentadas, pois estas podem ser encontradas nas referências indicadas.

2.1 Teoria dos Conjuntos

A seguir apresentamos algumas propriedades da intersecção e da união entre conjuntos. As demonstrações destas propriedades podem ser encontradas em [Filho., 1980].

2.1.1 Noções Fundamentais de Conjunto

Um *conjunto* é uma coleção de objetos denominados *elementos*. Vamos representar os conjuntos com letras maiúsculas: A, B, C , etc., e os elementos com letras minúsculas: a, b, c , etc.

Podemos especificar um conjunto enumerando seus elementos ou descrevendo os seus elementos por uma condição. Por exemplo, o conjunto A dos números inteiros maiores que 0 e menores que 5 pode ser expresso por:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \text{ ou}$$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 5\}.$$

Definimos como *conjunto universo*, o conjunto de todos os objetos em questão, e como *conjunto vazio*, o conjunto que não contém nenhum elemento. Os conjuntos universo e vazio são denotados por U e \emptyset , respectivamente.

Se um elemento x do universo U *pertence* ao conjunto A escrevemos $x \in A$. Se x não pertence

a A , escrevemos $x \notin A$.

Um conjunto A é *igual* a um conjunto B , denotado por $A = B$, se os dois conjuntos contêm os mesmos elementos, caso contrário, eles são *diferentes*, denotado por $A \neq B$.

Um conjunto A está *contido* num conjunto B , denotado por $A \subseteq B$, se todos os elementos em A pertencem ao conjunto B , e dizemos que A é *subconjunto* de B . Se, além disso, B contém um elemento que não pertence a A , então dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B , denotado por $A \subset B$.

Um *conjunto finito* é um conjunto com um número finito de elementos. Se um conjunto não é finito, então é um *conjunto infinito*. A *cardinalidade* de um conjunto finito A , denotado por $|A|$, é o número de elementos pertencentes a A .

O *conjunto potência* de A , denotado por $\mathcal{P}(A)$, é definido por $\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq U : X \subseteq A\}$, ou seja, $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A . Note que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ e se $|A| = n$, então $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

2.1.2 Operações com Conjuntos

O *complemento* de A , denotado por A^c é o conjunto de todos os elementos em U que não pertencem a A , isto é,

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Dados dois conjuntos A e B , a *união* de A e B , denotada por $A \cup B$, é definida como o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou B , isto é,

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

A *união de n conjuntos* A_1, A_2, \dots, A_n , denotada por $\cup_{i=1}^n A_i$, é o conjunto de todos elementos que pertencem a pelo menos um destes n conjuntos, isto é,

$$\cup_{i=1}^n A_i = \{x : x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } x \in A_n\}.$$

Dados dois conjuntos A e B , a *interseção* de A e B , denotada por $A \cap B$, é definida como o conjunto de todos os elementos que pertencem tanto a A como a B , isto é,

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

A *interseção de n conjuntos* A_1, A_2, \dots, A_n , denotada por $\cap_{i=1}^n A_i$, é o conjunto de todos elementos que pertencem simultaneamente a todos estes n conjuntos, isto é,

$$\cap_{i=1}^n A_i = \{x : x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } \dots \text{ e } x \in A_n\}.$$

2.1.3 Produto Cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. O *produto cartesiano* de A e B , denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os *pares ordenados* (a, b) tais que a primeira coordenada a pertence a A e a segunda coordenada b pertence a B , isto é, $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Generalizando, dados n conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , o produto cartesiano destes n conjuntos é dado por

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2 \text{ e } \dots \text{ e } a_n \in A_n\}.$$

Seja $I = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de índices. Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma coleção de conjuntos indexados em I , então o *produto cartesiano de uma coleção de conjuntos*, denotado por $\prod_{i \in I} A_i$, é definido como:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2 \text{ e } \dots \text{ e } a_n \in A_n\}.$$

2.1.4 Relações binárias

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma *relação binária* R de um conjunto A com um conjunto B é um subconjunto de $A \times B$, isto é, $R \subseteq A \times B$. Dizemos que x está relacionado com y pela relação R , denotado por xRy , se, e somente se, $(x, y) \in R$, isto é, $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

Uma relação binária R sobre um conjunto A é *reflexiva* se, e somente se, para todo $x \in A$, temos que xRx .

Uma relação binária R sobre um conjunto A é *simétrica* se, e somente se, para todo $x, y \in A$, temos que se xRy então yRx .

Uma relação binária R sobre um conjunto A é *anti-simétrica* se, e somente se, para todo $x, y \in A$, temos que se xRy e yRx então $x = y$.

Uma relação binária R sobre um conjunto A é *transitiva* se, e somente se, para todo $x, y, z \in A$, temos que se xRy e yRz então xRz .

Uma relação binária sobre um conjunto A é uma *relação de equivalência* se, e somente se, ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Uma relação binária \leq sobre um conjunto não vazio A é uma *relação de ordem* se, e somente se, ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo 2.1. Dado um conjunto E , a relação de inclusão \subseteq no conjunto $\mathcal{P}(E)$ é uma relação de ordem, uma vez que a relação \subseteq no conjunto $\mathcal{P}(E)$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

A *inversa* de uma relação binária R de um conjunto A com um conjunto B é a relação binária R^{-1} de B com A definida como, para todo $x \in A$ e $y \in B$, $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$.

2.1.5 Funções

Uma relação binária $f \subseteq A \times B$ é uma *função* (ou mapeamento ou transformação) de um conjunto A em um outro conjunto B se para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que xfy . A função f de A em B é denotada $f : A \rightarrow B$, xfy é denotado $f(x) = y$, e y é chamado *imagem* de x pela função f .

Dada uma função $f : A \rightarrow B$, os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, *domínio*

e *contradomínio* da função f . Especificamente, o subconjunto $\{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ é chamado de *imagem da função* f , denotado por $f(A)$.

Uma função $f : A \rightarrow B$ é *injetora* se, e somente se, para quaisquer dois elementos distintos $x_1, x_2 \in A$ tem sempre imagens distintas em B , isto é,

$$x_1, x_2 \in A \text{ e } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Uma função $f : A \rightarrow B$ é *sobrejetora* se, e somente se, para todo $y \in B$, existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$, isto é,

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y.$$

Uma função $f : A \rightarrow B$ é *bijetora* se, e somente se, ela é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Dada uma função $f : A \rightarrow B$, a relação inversa f^{-1} de B em A é uma função se, e somente se, f é uma função bijetora. A função f^{-1} , se existe, é chamada função *inversa* de f .

Sejam os conjuntos A, B e C , e sejam as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$. Definimos a *composição da função f com a função g* a função $g \circ f : A \rightarrow C$, definida por

$$(g \circ f(x)) = g(f(x)), \forall x \in A,$$

e também chamada de *função composta de g e f* . Em geral, denotamos a composição de g e f por gf ou $g(f)$.

2.2 Teoria de Reticulados

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos e propriedades da Teoria de Reticulados [Birkhoff, 1967] que serão utilizados ao longo deste trabalho.

2.2.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Um *conjunto parcialmente ordenado* (ou *poset*, do inglês “partially ordered set”) é um conjunto A munido com uma relação de ordem \leq , denotado por (A, \leq) . Uma propriedade importante dos posets é que se (A, \leq) é um poset, então (A, \geq) também é um poset.

Exemplo 2.2. Se E é um conjunto tal que $|E| > 1$, então $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

2.2.2 Elementos Notáveis de um Conjunto Parcialmente Ordenado

2.2.2.1 Maior e Menor Elementos

Seja (A, \leq) um poset. $x \in A$ é chamado *menor elemento* de A se $x \leq y$ para todo $y \in A$. $x \in A$ é chamado *maior elemento* de A se $y \leq x$ para todo $y \in A$. Consequentemente, o menor e maior elemento de A , se existirem, são únicos.

Exemplo 2.3. O menor e o maior elemento do poset $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ são, respectivamente, \emptyset e E , uma vez que para todo elemento $X \in \mathcal{P}(E)$, verifica-se $\emptyset \subseteq X \subseteq E$.

2.2.2.2 Limitantes Superiores e Inferiores

Seja (A, \leq) um poset. Seja $X \subseteq A$. Todo elemento $u \in A$ é um *limitante superior* de X em A , se para todo $x \in X$ temos que $x \leq u$. Todo elemento $l \in A$ é um *limitante inferior* de X em A , se para todo $x \in X$ temos que $l \leq x$.

2.2.2.3 Supremo e Ínfimo

Sejam (A, \leq) um poset e $X \subseteq A$. Chama-se *supremo* de X em A , denotado por $\vee X$, o menor elemento dos limitantes superiores de X em A . Similarmente, chama-se *ínfimo* de X em A , denotado por $\wedge X$, o maior elemento dos limitantes inferiores de X em A .

Exemplo 2.4. O ínfimo e o supremo de um subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(E)$ são, respectivamente, $\cap\{X : X \in \mathcal{X}\}$ e $\cup\{X : X \in \mathcal{X}\}$.

Note que o supremo e o ínfimo de X não sempre existem, e eles não necessariamente pertencem a X .

2.2.3 Reticulados

Um poset (A, \leq) é um *reticulado* se, e somente se, qualquer conjunto de dois elementos x e y possui ínfimo e supremo em A , denotados respectivamente por $x \vee y$ e $x \wedge y$.

Um reticulado (A, \leq) é:

- *completo* se todo subconjunto X não vazio de A possui um ínfimo e um supremo em A . Qualquer reticulado completo possui um menor e maior elemento. Qualquer reticulado finito é completo.
- *distributivo* se, e somente se, $\forall x, y, z \in A$,

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ e}$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

- *complementado* se, e somente se, todos os elementos em A possuem complemento. Sejam \mathcal{O} e \mathcal{I} respectivamente o menor e maior elementos de A . O *complemento* de um elemento x no reticulado A , denotado por x^c , é um elemento em A tal que $x \vee x^c = \mathcal{I}$ e $x \wedge x^c = \mathcal{O}$.
- *booleano* se, e somente se, A é distributivo e complementado.

Exemplo 2.5. O poset $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um reticulado completo booleano, pois ele é completo, uma vez que qualquer subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tem um ínfimo e um supremo dados, respectivamente, por

$$\wedge \mathcal{X} = \cap\{X : X \in \mathcal{X}\} \text{ e}$$

$$\vee \mathcal{X} = \cup\{X : X \in \mathcal{X}\}.$$

É distributivo, uma vez que $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$,

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \text{ e}$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

E é complementado, uma vez que

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), X \cap X^c = \emptyset \text{ e } X \cup X^c = E.$$

Um *sub-reticulado* de um reticulado A é um conjunto $S \subseteq A$ tal que $\forall a, b \in S$,

$$a \wedge b \in S \text{ e } a \vee b \in S.$$

2.2.3.1 Isomorfismo de Reticulados

Sejam (A, \leq_A) e (B, \leq_B) dois reticulados. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função bijetora de A em B . A função f é um *isomorfismo de reticulado* de A em B se, e somente se, para todo $x, y \in A$, temos que

$$x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y).$$

2.3 Grupo Abeliano

Um conjunto G , munido com uma operação binária $+$ é um *grupo*, denotado por $(G, +)$, se satisfaz os seguintes axiomas:

- $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in G$;
- G contém um elemento e (chamado *elemento neutro*) tal que $e + a = a + e = a, \forall a \in G$;
- $\forall a \in G$, existe um elemento em G , denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = e$.

Se o grupo $(G, +)$ satisfaz $a + b = b + a$ para quaisquer $a, b \in G$, então G é chamado *grupo abeliano*.

2.4 Morfologia Matemática

Nesta seção, descrevemos os elementos necessários do estado da arte em MM no que se refere à decomposição dos W -operadores. Descrevemos as relações entre os reticulados apresentados, com ênfase na relação entre os W -operadores e sua base, isto é, o isomorfismo de reticulados entre o reticulado dos W -operadores e o reticulado das coleções de intervalos maximais, onde as bases dos W -operadores são representadas.

2.4.1 Reticulado de Conjuntos $\mathcal{P}(E)$

Seja E um conjunto não vazio. Vimos no Exemplo 2.5, que o poset $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um reticulado completo booleano [Birkhoff, 1967]. Nesta seção veremos algumas definições e propriedades deste reticulado.

Considere que o domínio E munido com uma operação de adição, denotada por $+$, forma um grupo abeliano $(E, +)$. O elemento neutro de $(E, +)$ também chamado de *origem* é denotado por o e o oposto de $x \in E$ é denotado por $-x$.

A *transposta* de um conjunto $X \in \mathcal{P}(E)$ é o subconjunto

$$X^t = \{x \in E : -x \in X\}.$$

A *translação* de um conjunto $X \in \mathcal{P}(E)$ por um elemento $h \in E$ (em relação a origem) é o subconjunto

$$X + h = \{x + h \in E : x \in X\}.$$

Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. A *adição e subtração de Minkowski* de X e Y são, respetivamente, os conjuntos $X \oplus Y \in \mathcal{P}(E)$ e $X \ominus Y \in \mathcal{P}(E)$ dados por

$$\begin{aligned} X \oplus Y &= \cup\{X + h : h \in Y\}, \text{ e} \\ X \ominus Y &= \cap\{X - h : h \in Y\}. \end{aligned}$$

Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Dizemos que Y é um *conjunto invariante*, ou simplesmente, um *invariante* de X se, e somente se, $X = (X \ominus Y) \oplus Y$.

2.4.2 Reticulado de Conjuntos $\mathcal{P}(W)$

Seja W um subconjunto finito não vazio de E . O par $(\mathcal{P}(W), \subseteq)$ é um sub-reticulado completo booleano de $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. O maior e o menor elementos de $\mathcal{P}(W)$ são, respetivamente, W e \emptyset . O ínfimo e o supremo de X e Y em $\mathcal{P}(W)$ são, respetivamente,

$$X \cap Y \text{ e } X \cup Y.$$

O complemento de $X \in \mathcal{P}(W)$ com respeito a W , denotado por X_W^c (ou, simplesmente X^c , quando não há risco de confusão) é definido por

$$X_W^c = \{x \in W : x \notin X\}.$$

Vamos representar subconjuntos de W por sucessões de \cdot 's, 0 's e 1 's, onde ' \cdot ' representa que o ponto não pertence a W , ' 0 ' representa que o ponto pertence a W mas não pertence ao subconjunto e ' 1 ' representa que o ponto pertence a W e também pertence ao subconjunto. Além disso, a origem $o \in E$ é representada por um caractere sublinhado. Por exemplo seja $W = \{(-2, 1), (-2, -1), (-1, 1), (-1, 0), (0, 1), (0, 0), (0, -1), (1, 1), (1, -1)\}$ e o subconjunto $A \subseteq W$ onde $A = \{(-2, 1), (-1, 1), (-1, 0), (0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$, então A é representado por

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cdot & 1 & \underline{1} & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1. \end{array}$$

2.4.3 Reticulado de Conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$

Seja $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ a coleção de todas subcoleções de $\mathcal{P}(W)$. Elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ serão denotados por letras caligráficas maiúsculas da forma $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$. O par $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ é um

reticulado completo booleano [Barrera e Salas, 1996], onde \subseteq é definido por

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \Leftrightarrow (X \in \mathcal{X} \Rightarrow Y \in \mathcal{Y}), \forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W)).$$

O maior e o menor elementos de $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ são, respectivamente, $\mathcal{P}(W)$ e \emptyset . O supremo e o ínfimo de \mathcal{X} e \mathcal{Y} em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} &= \{X \in \mathcal{P}(W) : X \in \mathcal{X} \text{ ou } X \in \mathcal{Y}\} \text{ e} \\ \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} &= \{X \in \mathcal{P}(W) : X \in \mathcal{X} \text{ e } X \in \mathcal{Y}\}. \end{aligned}$$

O complemento de $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ com respeito a $\mathcal{P}(W)$ é definido por

$$\mathcal{X}^c = \{X \in \mathcal{P}(W) : X \notin \mathcal{X}\}.$$

Para todo $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ e $h \in E$, $\mathcal{X} + h \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W + h))$ denota a translação de todos elementos de \mathcal{X} por h , ou seja,

$$\mathcal{X} + h = \{X + h \in \mathcal{P}(W + h) : X \in \mathcal{X}\}.$$

Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$. Se $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, então, para todo $h \in E$, $\mathcal{X} + h \subseteq \mathcal{Y} + h$.

2.4.4 Reticulado de Coleção de Intervalos Maximais

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(W)$ tais que $A \subseteq B$. Um *intervalo* de extremidades A e B , denotado por $[A, B]$, é um subconjunto de $\mathcal{P}(W)$ dado por

$$[A, B] = \{X \in \mathcal{P}(W) : A \subseteq X \subseteq B\}.$$

Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, *extremidades esquerda e direita* do intervalo $[A, B]$. Para todos os conjuntos A, B tais que $A \not\subseteq B$, o intervalo $[A, B]$ representa uma coleção vazia.

As coleções de intervalos contidos em $\mathcal{P}(W)$ serão denotados por letras maiúsculas em negrito como $\mathbf{A}_W, \mathbf{B}_W, \mathbf{C}_W, \dots$, ou, simplesmente, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$, se o conjunto W está claramente definido no contexto.

Seja \mathbf{X} uma coleção de intervalos contidos em $\mathcal{P}(W)$. Um intervalo $[A, B] \in \mathbf{X}$ é chamado *intervalo maximal* em \mathbf{X} se, e somente se, não existe um outro intervalo $[A', B'] \in \mathbf{X}$, distinto de $[A, B]$, tal que $[A, B] \subseteq [A', B']$.

A coleção de todos intervalos maximais de \mathbf{X} é denotada por $Max(\mathbf{X})$. É claro que, se todos intervalos em \mathbf{X} são maximais, então $\mathbf{X} = Max(\mathbf{X})$.

Seja \mathcal{X} um subconjunto de $\mathcal{P}(W)$. A coleção de todos intervalos maximais que estão contidos em \mathcal{X} é denotada por $\mathbf{M}(\mathcal{X})$, ou seja,

$$\mathbf{M}(\mathcal{X}) = Max(\{[A, B] \subseteq \mathcal{P}(W) : [A, B] \subseteq \mathcal{X}\}).$$

A coleção de todos elementos de $\mathcal{P}(W)$ que são elementos dos intervalos em \mathbf{X} , denotada por $\mathcal{U}(\mathbf{X})$, é definida por

$$\mathcal{U}(\mathbf{X}) = \{X \in \mathcal{P}(W) : X \in [A, B], [A, B] \in \mathbf{X}\}.$$

Devemos observar que $\mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}))$ não é necessariamente igual a $\text{Max}(\mathbf{X})$.

Exemplo 2.6. *Sejam $W = \underline{111}$ e $\mathcal{X} = \{0\underline{10}, 0\underline{11}, \underline{110}\}$, então $\mathbf{M}(\mathcal{X}) = \{[0\underline{10}, 0\underline{11}], [0\underline{10}, \underline{110}]\}$.*

Note que para qualquer $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(W)$, $\mathcal{U}(\mathbf{M}(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$. Assim, qualquer coleção $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(W)$ pode ser representada por intervalos maximais. Denotaremos por Π_W o conjunto $\{\mathbf{M}(\mathcal{X}) : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(W)\}$. Definimos a ordem parcial \leq sobre os elementos de Π_W , estabelecendo que, para todo $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Pi_W$,

$$\mathbf{X} \leq \mathbf{Y} \Leftrightarrow \forall [A, B] \in \mathbf{X}, \exists [A', B'] \in \mathbf{Y} : [A, B] \subseteq [A', B'].$$

O poset (Π_W, \leq) é um reticulado completo booleano [Barrera e Salas, 1996]. O supremo e o ínfimo de \mathbf{X} e \mathbf{Y} em Π_W verificam, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y} &= \mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}) \cup \mathcal{U}(\mathbf{Y})) \text{ e} \\ \mathbf{X} \sqcap \mathbf{Y} &= \mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{U}(\mathbf{Y})). \end{aligned}$$

O complemento de $\mathbf{X} \in \Pi_W$, denotado por $\overline{\mathbf{X}}$, é definido por $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{M}((\mathcal{U}(\mathbf{X}))^c)$.

Exemplo 2.7. *Sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Pi_W$, onde $W = \underline{111}$, $\mathbf{X} = \{[1\underline{00}, \underline{111}], [0\underline{11}, \underline{111}]\}$ e $\mathbf{Y} = \{[0\underline{01}, \underline{111}]\}$, então*

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y} &= \{[1\underline{00}, \underline{111}], [0\underline{01}, \underline{111}]\}, \\ \mathbf{X} \sqcap \mathbf{Y} &= \{[1\underline{01}, \underline{111}], [0\underline{11}, \underline{111}]\}, \\ \overline{\mathbf{X}} &= \{[0\underline{00}, 0\underline{01}], [0\underline{00}, 0\underline{10}]\}. \end{aligned}$$

2.4.5 Reticulado de Coleções de Intervalos Maximais de Extremidade Direita Fixa

Definimos o conjunto $\mathcal{I}_W \subseteq \Pi_W$ como o conjunto de todas coleções de intervalos maximais tal que a extremidade direita de qualquer intervalo é a janela W . Chamaremos qualquer coleção de intervalos maximais de \mathcal{I}_W por *coleção de extremidade direita fixa*.

Por simplicidade de notação, onde não há risco de confusão, denotaremos os intervalos $[A, W]$ de $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ por $[A]$.

Exemplo 2.8. *Seja $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$, onde $W = \underline{111}$ e $\mathbf{X}_W = \{[1\underline{10}, \underline{111}], [0\underline{11}, \underline{111}]\}$. \mathbf{X}_W pode ser rescrito como $\mathbf{X}_W = \{[1\underline{10}], [0\underline{11}]\}$. Na Figura 2.1, apresentamos o diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W e de cor azul a representação da coleção \mathbf{X}_W .*

2.4.5.1 Operações em Coleções de Intervalos Maximais de Extremidade Direita Fixa

Sejam $W, W' \in \mathcal{P}(E)$ tais que $W \subseteq W'$. Definimos o conjunto $\mathcal{I}_{W'/W} \subseteq \mathcal{I}_{W'}$ como $\mathcal{I}_{W'/W} = \{\mathbf{X} \in \mathcal{I}_{W'} : A' \subseteq W, \forall [A'] \in \mathbf{X}\}$. A seguinte proposição [Hashimoto e Barrera, 2001] mostra o isomorfismo de reticulado entre $\mathcal{I}_{W'/W}$ e \mathcal{I}_W .

Proposição 2.1. *Sejam $W', W \in \mathcal{P}(E)$ tais que $W \subseteq W'$. O mapeamento $\mathcal{W}(\cdot)$ de (\mathcal{I}_W, \leq) em $(\mathcal{I}_{W'/W}, \leq)$, definido por*

$$\mathcal{W}(\mathbf{X}_W) = \{[A'] \subseteq \mathcal{P}(W') : A' = A, [A] \in \mathbf{X}_W\}$$

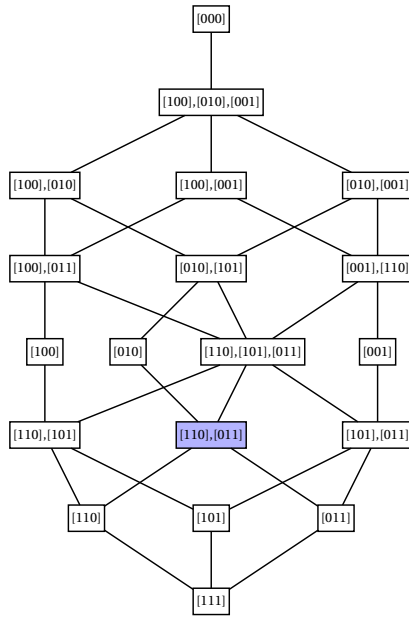


Figura 2.1: Diagrama de Hasse do Reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor azul o conjunto \mathbf{X}_W .

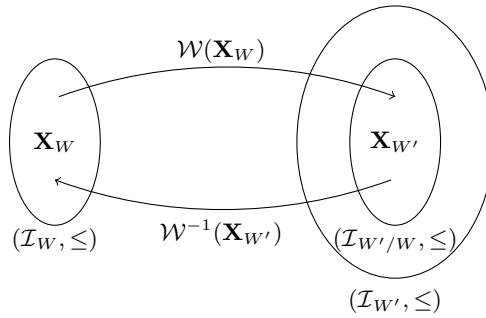


Figura 2.2: Isomorfismo de reticulado entre (\mathcal{I}_W, \leq) e $(\mathcal{I}_{W'/W}, \leq)$

constitui um isomorfismo de reticulado entre (\mathcal{I}_W, \leq) e $(\mathcal{I}_{W'/W}, \leq)$. A inversa do mapeamento $\mathcal{W}(\cdot)$ é o mapeamento $\mathcal{W}^{-1}(\cdot)$, de $\mathcal{I}_{W'/W}$ em \mathcal{I}_W , definido por

$$\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{X}_{W'}) = \{[A] \subseteq \mathcal{P}(W) : A = A', [A'] \in \mathbf{X}_{W'}\}.$$

Como consequência da Proposição 2.1, se $W \subseteq W'$, então podemos mudar a representação de uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$ para $\mathbf{X}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'/W} \subseteq \mathcal{I}_{W'}$, e vice-versa. A Figura 2.2 apresenta um diagrama que mostra graficamente o isomorfismo de reticulado entre os reticulados (\mathcal{I}_W, \leq) e $(\mathcal{I}_{W'/W}, \leq)$.

Exemplo 2.9. Sejam $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$, $\mathbf{X}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, onde $W = 111$, $W' = 11111$, $\mathbf{X}_W = \{[101], [010]\}$ e $\mathbf{X}_{W'} = \{[01010], [00100]\}$. Sejam $\mathcal{W}(\cdot)$, $\mathcal{W}^{-1}(\cdot)$ os isomorfismos de reticulado entre (\mathcal{I}_W, \leq) e $(\mathcal{I}_{W'/W}, \leq)$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{X}_W) &= \mathbf{X}_{W'}, \\ \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{X}_{W'}) &= \mathbf{X}_W. \end{aligned}$$

Para todo $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ e $h \in E$, $\mathbf{X} + h \in \mathcal{I}_{W+h}$ denota a translação de todos intervalos de \mathbf{X} por h , isto é,

$$\mathbf{X} + h = \{[A + h] \in \mathcal{I}_{W+h} : [A] \in \mathbf{X}\}.$$

Sejam $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. A *adição e subtração de Minkowski* de \mathbf{X} por C são, respectivamente, as coleções de intervalos maximais $\mathbf{X} \oplus C \in \mathcal{I}_{W \oplus C}$ e $\mathbf{X} \ominus C \in \mathcal{I}_{W \oplus C^t}$ dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \oplus C &= \sqcup \{(\mathbf{X} + h)_{W \oplus C} : h \in C\} \text{ e} \\ \mathbf{X} \ominus C &= \sqcap \{(\mathbf{X} - h)_{W \oplus C^t} : h \in C\}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.10. *Sejam $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$, $C \in \mathcal{P}(E)$, $h_1, h_2, h_3 \in E$, onde $W = \underline{111}$, $C = \underline{111}$, $\{h_1\} = \underline{100}$, $\{h_2\} = \underline{010}$, $\{h_3\} = \underline{001}$ e $\mathbf{X} = \{[\underline{100}], [\underline{011}]\}$, então $\mathbf{X} \oplus C$ pode ser construída como:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} + h_1)_{W \oplus C} &= \{[\underline{10000}], [\underline{01100}]\}, \\ (\mathbf{X} + h_2)_{W \oplus C} &= \{[\underline{01000}], [\underline{00110}]\}, \\ (\mathbf{X} + h_3)_{W \oplus C} &= \{[\underline{00100}], [\underline{00011}]\}, \\ \mathbf{X} \oplus C &= (\mathbf{X} + h_1)_{W \oplus C} \sqcup (\mathbf{X} + h_2)_{W \oplus C} \sqcup (\mathbf{X} + h_3)_{W \oplus C}, \\ \mathbf{X} \oplus C &= \{[\underline{10000}], [\underline{01000}], [\underline{00100}], [\underline{10011}]\}. \end{aligned}$$

De maneira similar, $\mathbf{X} \ominus C$ pode ser construída como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} - h_1)_{W \oplus C^t} &= \{[\underline{00100}], [\underline{00011}]\}, \\ (\mathbf{X} - h_2)_{W \oplus C^t} &= \{[\underline{01000}], [\underline{00110}]\}, \\ (\mathbf{X} - h_3)_{W \oplus C^t} &= \{[\underline{10000}], [\underline{01100}]\}, \\ \mathbf{X} \ominus C &= (\mathbf{X} - h_1)_{W \oplus C^t} \sqcap (\mathbf{X} - h_2)_{W \oplus C^t} \sqcap (\mathbf{X} - h_3)_{W \oplus C^t}, \\ \mathbf{X} \ominus C &= \{[\underline{01100}], [\underline{10110}], [\underline{11011}]\}. \end{aligned}$$

As seguintes proposições [Hashimoto e Barrera, 2001] apresentam propriedades para a adição e subtração de Minkowski.

Proposição 2.2. *Sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Se $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$, então $\mathbf{X} \oplus C \leq \mathbf{Y} \oplus C$ e $\mathbf{X} \ominus C \leq \mathbf{Y} \ominus C$.*

Proposição 2.3. *Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$, então $(\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y}) \oplus C = (\mathbf{X} \oplus C) \sqcup (\mathbf{Y} \oplus C)$.*

Proposição 2.4. *Se $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$, então, para qualquer $h \in E$, $\mathbf{X}_W \oplus C = (\mathbf{X} - h)_{W-h} \oplus C + h$.*

2.4.5.2 Coleção de Coleções de Intervalos Maximais

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{I}_W$ tais que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Um intervalo contido em \mathcal{I}_W de extremidades \mathbf{A} e \mathbf{B} é o elemento $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ de $\mathcal{P}(\mathcal{I}_W)$ dado por $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \{\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W : \mathbf{A} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{B}\}$. Os conjuntos \mathbf{A} e \mathbf{B} são chamados, respectivamente, as extremidades esquerda e direita do intervalo $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Para todos os pares (\mathbf{A}, \mathbf{B}) tais que $\mathbf{A} \not\leq \mathbf{B}$, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ representa a coleção vazia.

Subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathcal{I}_W)$ que são coleções de intervalos contidos em \mathcal{I}_W serão denotados por letras maiúsculas como $\mathfrak{A}_W, \mathfrak{B}_W, \mathfrak{C}_W, \dots$, ou, simplesmente, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$, se o conjunto W está claramente definido no contexto.

Dada uma coleção de intervalos \mathfrak{X} contidos em \mathcal{I}_W , um intervalo $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \mathfrak{X}$ é chamado *intervalo maximal* em \mathfrak{X} se, e somente se, não existe um outro intervalo $[\mathbf{A}', \mathbf{B}'] \in \mathfrak{X}$, distinto de $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, tal que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \subseteq [\mathbf{A}', \mathbf{B}']$.

Denotaremos por Ω_W a coleção de todas coleções de intervalos \mathfrak{X} tal que todos os intervalos $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \mathfrak{X}$ são maximais.

2.4.6 O Reticulado dos W -Operadores

Um mapeamento de $\mathcal{P}(E)$ em $\mathcal{P}(E)$ é chamado de *operador*. O conjunto de todos os operadores é denotado por Ψ . O conjunto Ψ herda a estrutura do reticulado completo booleano $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, quando definimos a relação de ordem \leq sobre os elementos Ψ como, para quaisquer $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1(X) \subseteq \psi_2(X), \forall X \in \mathcal{P}(E).$$

O supremo e ínfimo de dois operadores ψ_1 e ψ_2 são definidos, respectivamente, por

$$(\psi_1 \vee \psi_2)(X) = \psi_1(X) \cup \psi_2(X), \forall X \in \mathcal{P}(E) \text{ e}$$

$$(\psi_1 \wedge \psi_2)(X) = \psi_1(X) \cap \psi_2(X), \forall X \in \mathcal{P}(E).$$

Seja $C \in \mathcal{P}(E)$. A *dilatação* e *erosão* por C são os operadores δ_C e ε_C definidos, respectivamente, como, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$,

$$\delta_C(X) = X \oplus C \text{ e } \varepsilon_C(X) = X \ominus C.$$

O conjunto C é chamado *elemento estruturante* para os dois operadores.

O operador $\nu \in \Psi$ definido por $\nu(X) = X^c$, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, é chamado *operador de negação*.

O operador $\iota \in \Psi$, definido por $\iota(X) = X$, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, é chamado *operador identidade*. Observe que $\nu\nu = \iota$.

O *operador dual* de um operador ψ , denotado por ψ^* , é dado por $\psi^* = \nu\psi\nu$. Observamos que $(\psi^*)^* = \psi$, uma vez que $\nu\nu = \iota$.

Um operador $\psi \in \Psi$ é chamado *invariante por translação* (i.t.) se, e somente se, para todo $h \in E$ e $X \in \mathcal{P}(E)$, $\psi(X + h) = \psi(X) + h$.

Seja W um subconjunto finito de E . Um operador $\psi \in \Psi$ é chamado *localmente definido* (l.d.) na janela W se, e somente se, para todo $x \in E$ e $X \in \mathcal{P}(E)$, $x \in \psi(X) \Leftrightarrow x \in \psi(X \cap W + x)$.

Um operador $\psi \in \Psi$ é chamado um *W -operador* se, e somente se, ele é i.t. e l.d. em uma janela W . O conjunto de todos os W -operadores é denotado por Ψ_W . O par (Ψ_W, \leq) constitui um sub-reticulado do reticulado (Ψ, \leq) [Barrera e Salas, 1996].

2.4.7 Isomorfismos de Reticulados

Um resultado bastante interessante é que existe um isomorfismo entre os reticulados (Ψ_W, \leq) e (Π_W, \leq) [Hashimoto e Barrera, 2001]. Como consequência deste resultado, podemos afirmar

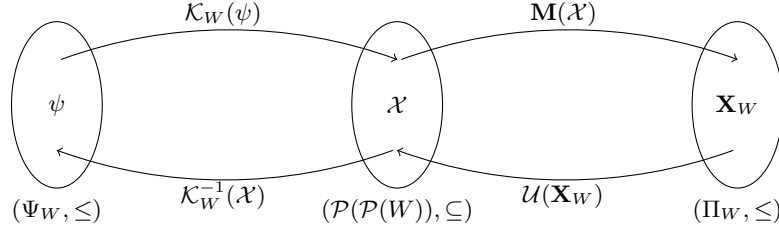


Figura 2.3: Isomorfismos de reticulados entre (Ψ_W, \leq) , $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ e (Π_W, \leq)

que cada W -operador está associado a uma coleção de intervalos maximais e vice-versa.

O núcleo ou *kernel* de um operador $\psi \in \Psi_W$ é o conjunto $\mathcal{K}_W(\psi) \in \mathcal{P}(W)$ dado por $\mathcal{K}_W(\psi) = \{X \in \mathcal{P}(W) : o \in \psi(X)\}$.

Proposição 2.5. O mapeamento $\mathbf{M}(\mathcal{K}_W(\cdot))$ de (Ψ_W, \leq) em (Π_W, \leq) constitui um isomorfismo de reticulados entre (Ψ_W, \leq) e (Π_W, \leq) . A inversa do mapeamento $\mathbf{M}(\mathcal{K}_W(\cdot))$ é o mapeamento $\mathcal{K}_W^{-1}(\mathcal{U}(\cdot))$, onde $\mathcal{K}_W^{-1}(\cdot)$ é definido como $\mathcal{K}_W^{-1}(\mathcal{X})(X) = \{x \in E : X - x \cap W \in \mathcal{X}\}$.

Como consequência desta proposição, para um W -operador $\psi \in \Psi_W$, o resultado do mapeamento $\mathbf{M}(\mathcal{K}_W(\psi))$ é a coleção de intervalos maximais que representa univocamente este operador. Por outro lado, dada uma coleção de intervalos maximais, existe um único W -operador associado a esta coleção. Devido a este fato, esta coleção de intervalos maximais é conhecida como a *base* de ψ , denotada por $\mathbf{B}_W(\psi) = \mathbf{M}(\mathcal{K}_W(\psi))$, ou simplesmente por $\mathbf{B}(\psi)$ se W está claramente definido no contexto. A Figura 2.3 apresenta um diagrama que mostra graficamente os isomorfismos de reticulados entre os reticulados (Ψ_W, \leq) , $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ e (Π_W, \leq) .

2.4.8 Propriedades da Base de um W -Operador

Nesta subseção apresentamos algumas propriedades da base de um W -operador.

Dado um operador $\psi \in \Psi_W$ e um elemento $h \in E$, o operador $\psi + h$ é localmente definido em $W + h$. O resultado seguinte [Barrera e Salas, 1996] mostra como construir a base de $\psi + h$ a partir da base de ψ .

Proposição 2.6. Se $\psi \in \Psi_W$ e $h \in E$, então $\mathbf{B}_{W+h}(\psi + h) = (\mathbf{B}_W(\psi)) - h$.

Dado um operador $\psi \in \Psi_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$, os operadores $\delta_C\psi$ e $\varepsilon_C\psi$ são localmente definidos, respectivamente, em $W \oplus C^t$ e $W \oplus C$ [Barrera e Salas, 1996]. A proposição seguinte [Barrera e Salas, 1996] mostra como construir as bases de $\delta_C\psi$ e $\varepsilon_C\psi$ a partir da base de ψ .

Proposição 2.7. Se $\psi \in \Psi_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{W \oplus C^t}(\delta_C\psi) &= \mathbf{B}_W(\psi) \oplus C^t, \\ \mathbf{B}_{W \oplus C}(\varepsilon_C\psi) &= \mathbf{B}_W(\psi) \ominus C^t. \end{aligned}$$

O resultado seguinte é uma consequência da Proposição 2.7 e do fato que $(\varepsilon_C\psi)^* = \delta_{C^t}\psi^*$ [Hashimoto e Barrera, 2001].

Proposição 2.8. *Sejam $\psi' \in \Psi_{W'}$, $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\psi \in \Psi_W$. Então, $\psi' = \varepsilon_{C^t}\psi$ se, e somente se, $\mathbf{B}_{W'}((\psi')^*) = \mathbf{B}_W(\psi^*) \oplus C^t$.*

Para finalizar, apresentamos uma propriedade [Barrera e Salas, 1996] que nos permite construir a base de um W -operador a partir de sua base.

Proposição 2.9. *Seja $I = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de índices. Seja $\psi \in \Psi_W$. Se $\mathbf{B}(\psi) = \{[A_i, B_i] : i \in I\}$, então a base de ψ^* é*

$$\mathbf{B}(\psi^*) = \overline{\sqcup\{[B_i^c, A_i^c] : i \in I\}}.$$

2.4.9 W -Operadores Crescentes

Um W -operador ψ é *crescente* se, e somente se, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$, se $X \subseteq Y$, então $\psi(X) \subseteq \psi(Y)$.

Como a base de um operador $\psi \in \Psi_W$ se simplifica no caso em que ψ é crescente, ou seja, a extremidade direita de todo intervalo na base de ψ é a própria janela W , então a Proposição 2.9 pode ser facilmente simplificada para o seguinte resultado [Hashimoto e Barrera, 2001].

Proposição 2.10. *Seja $I = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de índices. Seja $\psi \in \Psi_W$ um operador crescente. Se $\mathbf{B}(\psi) = \{[A_i, W] : i \in I\}$, então a base de ψ^* é*

$$\mathbf{B}_W(\psi^*) = \prod_{i \in I} \{[a, W] : a \in A_i\}.$$

2.5 Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais

Nesta seção, apresentamos os resultados de [Hashimoto e Barrera, 2001] para resolver a *Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais*, isto é:

Definição 2.1 (Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais). *Sejam W, W' e E conjuntos discretos finitos. Dado um conjunto $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, encontrar todas as soluções para $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$ tais que*

$$\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}.$$

Uma vez que $\mathbf{X} \oplus C^t \in \mathcal{I}_{W \oplus C^t}$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, então W e W' satisfazem $W \oplus C^t = W'$. Logo, Hashimoto e Barrera [2001] consideram $W = W' \ominus C^t$, uma vez que qualquer solução para \mathbf{X} na equação pode ser representada em $\mathcal{I}_{W' \ominus C^t}$.

Os autores dividiram a solução para este problema em duas partes e serão apresentadas nas seguintes subseções. A primeira parte é encontrar \mathbf{X} supondo que C é um dado de entrada a mais no problema, ou seja, dados \mathbf{Y} e C encontrar \mathbf{X} . Na segunda parte procura-se quais conjuntos C têm possibilidade de formar parte da solução, os autores chamaram esses conjuntos como *conjuntos viáveis para C* . Assim, para cada C viável se procura todas as soluções para \mathbf{X} .

2.5.1 Algoritmo que encontra \mathbf{X}

Nesta subseção, apresentamos os resultados dos autores para o problema de dados \mathbf{Y} e C , encontrar \mathbf{X} na Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais.

A seguir, apresentamos um exemplo deste problema.

Exemplo 2.11. Considere $W' = 11\underline{1}11$, e sejam $C = \underline{1}11$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01\underline{0}00], [00\underline{1}00], [000\underline{1}0]\}.$$

Uma solução da equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$ é $W = \underline{1}11$ e $\mathbf{X}_W = \{[0\underline{1}0]\}$.

Hashimoto e Barrera [2001] apresentaram uma técnica de solução para este problema que consta de três partes: encontrar o limite superior para \mathbf{X} na equação, encontrar os limites inferiores para \mathbf{X} na equação, e por último fazer uma busca exaustiva entre todas as soluções no intervalo determinado pelo limite superior e os limites inferiores. Nas seguintes subsubseções apresentamos essas partes.

2.5.1.1 Limite superior para \mathbf{X}

Nesta subseção, mostramos como encontrar o limite superior para \mathbf{X}_W na equação $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$. Seja $W'' = (W \oplus C^t) \oplus C$, note que $W \subseteq W''$, e sejam $\mathcal{W}(\cdot)$ e $\mathcal{W}^{-1}(\cdot)$ (ver Proposição 2.1) os isomorfismos de reticulado entre (\mathcal{I}_W, \leq) e $(\mathcal{I}_{W''/W}, \leq)$. Definimos a coleção de intervalos maximais $\mathbf{X}_{W''} \in \mathcal{I}_{W''}$ por

$$\mathbf{X}_{W''} = \mathcal{W}(\mathbf{X}_W).$$

No seguinte teorema, Hashimoto e Barrera [2001] mostram que se existe solução para \mathbf{X}_W , então, $\mathbf{X}_{W''} \leq \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$.

Teorema 2.1. Sejam $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, $C \in \mathcal{P}(E)$, $W \oplus C^t = W'$ e $W' \oplus C = W''$. Para todo $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$, se $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, então, $\mathbf{X}_{W''} \leq \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$.

Seja $\mathbf{U}_{W''} \in \mathcal{I}_{W''/W}$, definido por

$$\mathbf{U}_{W''} = \{[L] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t : \{[L]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\}.$$

Podemos observar que $\mathbf{U}_{W''}$ é construído a partir de $\mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$, então $\mathbf{U}_{W''} \leq \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$. Usando este fato, os autores mostram que para qualquer conjunto $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$, se $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, então $\mathbf{X}_W \leq \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{U}_{W''})$.

Por simplicidade de notação, vamos denotar como $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{I}_W$, o conjunto $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{U}_{W''})$. Dessa forma, apresentamos a Proposição 2.11 [Hashimoto e Barrera, 2001].

Proposição 2.11. Sejam $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Se $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então $\mathbf{X} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$.

Na Figura 2.4, mostramos os diferentes conjuntos que participam na construção do limite superior $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ com seus respectivos reticulados.

A seguir, apresentamos um exemplo da construção de $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$.

Exemplo 2.12. Considere $W' = 11\underline{1}11$, e sejam $C = \underline{1}11$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01\underline{0}00], [00\underline{1}00], [000\underline{1}0]\}.$$

Logo, $W = W' \ominus C^t = \underline{1}11$, $W'' = W' \oplus C = 11\underline{1}1111$,

$$\mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t = \{[000\underline{1}000], [001\underline{0}100][001\underline{0}010][010\underline{0}100]\},$$

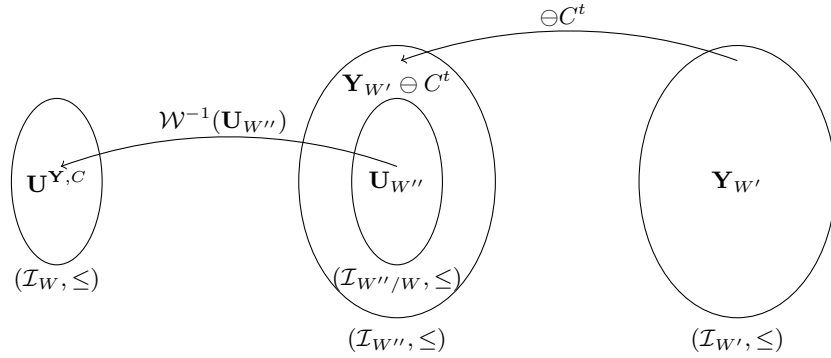


Figura 2.4: Construção do conjunto $U^{Y,C}$ nos diferentes reticulados

$$U_{W''} = \{[000\underline{1}000], [001\underline{0}100]\},$$

$$U^{Y,C} = \{[0\underline{1}0], [1\underline{0}1]\}.$$

Na Figura 2.5, apresentamos o conjunto $U^{Y,C}$ de cor vermelho no reticulado \mathcal{I}_W .

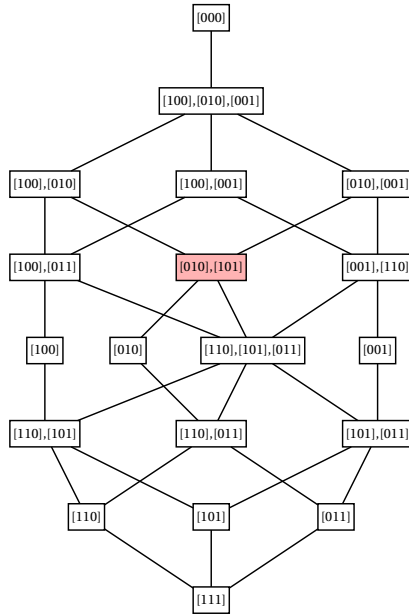


Figura 2.5: Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor vermelho o conjunto $U^{Y,C}$.

2.5.1.2 Limites inferiores para \mathbf{X}

Nesta subsecção, mostramos como encontrar os limites inferiores para \mathbf{X} na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. Hashimoto e Barrera [2001] construíram o conjunto $\Theta_W^{Y,C} \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_W)$ e mostraram que $\Theta_W^{Y,C}$ contém todos os limites inferiores para as soluções \mathbf{X} , ou seja, para todo $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$, tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, existe $\mathbf{Z} \in \Theta_W^{Y,C}$ tal que $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X}$.

O conjunto $\Theta_W^{Y,C}$ é construído a partir dos conjuntos $\mathbf{H}_W^C([A]) \in \mathcal{I}_W$. Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e

$\{[A]\} \in \mathcal{I}_{W'}$, $\mathbf{H}_W^C([A])$ é definido por

$$\mathbf{H}_W^C([A]) = \{[B] \subseteq \mathcal{P}(W) : B = A - c, B \subseteq W, c \in C^t\}.$$

Note que $\mathbf{H}_W^C([A]) \in \mathcal{I}_W$. A partir de $\mathbf{H}_W^C([A])$ definimos o conjunto $\Theta^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_W)$ por

$$\Theta^{\mathbf{Y},C} = \{\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\}, ([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{Y}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} \mathbf{H}_W^C([A])\}.$$

Observamos que $|\Theta^{\mathbf{Y},C}| \leq \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} |\mathbf{H}_W^C([A])| \leq |C|^{|\mathbf{Y}|}$.

A seguir, apresentamos uma proposição [Hashimoto e Barrera, 2001] que é consequência direta da definição de Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais.

Proposição 2.12. *Sejam $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Se $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então, para cada intervalo $[A] \in \mathbf{Y}$, existe um intervalo $[B] \in \mathbf{X}$ e um ponto $c \in C^t$ tal que $B + c = A$.*

O seguinte teorema [Hashimoto e Barrera, 2001] mostra que, se existe solução para a equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então, existe $\mathbf{Z} \in \Theta^{\mathbf{Y},C}$ tal que $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X}$ e $\mathbf{Z} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.

Teorema 2.2. *Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$. Para todo $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, existe $\mathbf{Z} \in \Theta^{\mathbf{Y},C}$ tal que $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X}$ e $\mathbf{Z} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.*

Como consequência do Teorema 2.2, temos que os limites inferiores para \mathbf{X} na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$ se encontram em $\Theta^{\mathbf{Y},C}$.

A seguir, apresentamos um exemplo da construção dos limites inferiores para \mathbf{X} .

Exemplo 2.13. *Considere $W' = 111\underline{1}1$, e sejam $C = 1\underline{1}1$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que*

$$\mathbf{Y} = \{[01\underline{0}00], [00\underline{1}00], [000\underline{1}0]\}.$$

Logo, $W = W' \ominus C^t = 1\underline{1}1$,

$$\mathbf{H}_W^C([01\underline{0}00]) = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0]\},$$

$$\mathbf{H}_W^C([00\underline{1}00]) = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0], [0\underline{0}1]\},$$

$$\mathbf{H}_W^C([000\underline{1}0]) = \{[0\underline{1}0], [0\underline{0}1]\}$$

$$\mathbf{Z}_1 = \{[0\underline{0}1], [1\underline{0}0]\}, \mathbf{Z}_2 = \{[0\underline{0}1], [0\underline{1}0]\}, \mathbf{Z}_3 = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0], [0\underline{0}1]\}$$

$$\mathbf{Z}_4 = \{[0\underline{1}0]\}, \mathbf{Z}_5 = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0]\}$$

$$\Theta^{\mathbf{Y},C} = \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5\}.$$

Na Figura 2.6, apresentamos todos os elementos do conjunto $\Theta^{\mathbf{Y},C}$ em cor azul.

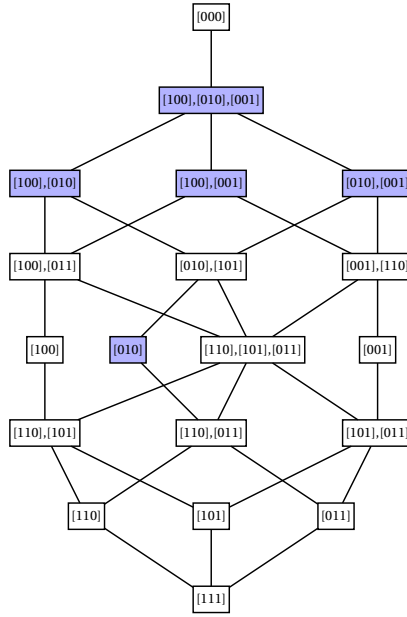


Figura 2.6: Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor azul os conjuntos \mathbf{Z} que pertencem a $\Theta^{\mathbf{Y},C}$.

2.5.1.3 Algoritmo que encontra todas as soluções para \mathbf{X}

Com os resultados das seções anteriores, os autores apresentam o Algoritmo Procura_X (veja o Algoritmo 1), este algoritmo encontra todas as soluções para $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ na equação $\mathbf{X} \oplus C = \mathbf{Y}$.

A seguir, apresentamos um exemplo da execução do algoritmo.

Exemplo 2.14. Considere $W' = 111\underline{1}1$, e sejam $C = 1\underline{1}1$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01\underline{0}00], [00\underline{1}00], [000\underline{1}0]\}.$$

Temos visto nos exemplos anteriores que $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ e $\Theta^{\mathbf{Y},C}$ são:

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \{[0\underline{1}0], [1\underline{0}1]\}.$$

$$\mathbf{Z}_1 = \{[0\underline{0}1], [1\underline{0}0]\}, \mathbf{Z}_2 = \{[0\underline{0}1], [0\underline{1}0]\}, \mathbf{Z}_3 = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0], [0\underline{0}1]\}$$

$$\mathbf{Z}_4 = \{[0\underline{1}0]\}, \mathbf{Z}_5 = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0]\}$$

$$\Theta^{\mathbf{Y},C} = \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5\}.$$

Uma vez que \mathbf{Z}_4 é a única coleção de intervalos maximais em $\Theta^{\mathbf{Y},C}$ que satisfaz $\mathbf{Z} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então, procuramos todas as coleções de intervalos maximais \mathbf{X} tal que $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$. Por tanto, todas as soluções da equação são:

$$\mathbf{X}_1 = \{[0\underline{1}0], [1\underline{0}1]\}, \mathbf{X}_2 = \{[0\underline{1}0]\}.$$

Na Figura 2.7, apresentamos todas as soluções da equação.

Algoritmo 1: Algoritmo Procura_X

Entrada: Um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ e uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$.

Saída: As coleções de intervalos maximais $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$, tais que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$ onde $W = (W' \ominus C^t)$.

```

1  $W'' \leftarrow W' \oplus C$ ;
2  $U^{\mathbf{Y},C} \leftarrow \mathcal{W}^{-1}(\{[L] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t : \{[L]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\})$ ;
3 para cada  $\mathbf{Z} \in \Theta^{\mathbf{Y},C}$  fazer
4   se  $\mathbf{Z} \oplus C^t = \mathbf{Y}$  então
5     para cada  $\mathbf{X}$  tal que  $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X} \leq U^{\mathbf{Y},C}$  fazer
6       se  $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$  então
7         devolva  $\mathbf{X}$ ;
8       fim
9     fim
10  fim
11 fim

```

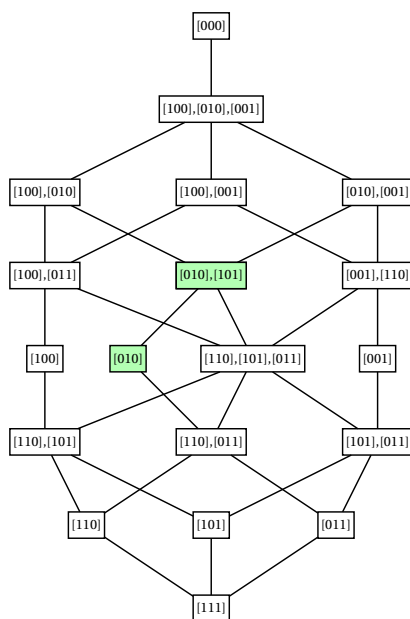


Figura 2.7: Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor verde todas as soluções da equação.

2.5.2 Conjuntos viáveis para C

Na subseção anterior, encontramos soluções para a Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais quando o conjunto C é um parâmetro fixo. Podemos ver que, dado \mathbf{Y} podem existir alguns subconjuntos $C \in \mathcal{P}(E)$ tais que a equação não tenha solução, assim, Hashimoto e Barrera [2001] definiram como *conjuntos viáveis* aqueles subconjuntos C tais que a equação tem pelo menos uma solução. A seguir, apresentamos a técnica que utilizam os autores para encontrar possíveis subconjuntos viáveis.

Primeiramente, definiremos alguns conjuntos. Sejam $\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W$ e $A \in \mathcal{P}(E)$. Definimos a função $\min(\mathbf{Z})$ como:

$$\min(\mathbf{Z}) = \min\{|A| : [A] \in \mathbf{Z}\}.$$

A seguir, definimos $\mathbf{Min}(\mathbf{Z}) \in \mathcal{I}_W$ como:

$$\mathbf{Min}(\mathbf{Z}) = \{[A] \in \mathbf{Z} : |A| = \min(\mathbf{Z})\}.$$

Por último, definimos o conjunto $S_A^{\mathbf{Z}} \in \mathcal{P}(E)$ como:

$$S_A^{\mathbf{Z}} = \{h \in \mathcal{P}(E) : [A - h, W] \in \mathbf{Z}\}.$$

A seguir, apresentamos um exemplo de como construir esses conjuntos.

Exemplo 2.15. Considere $W' = 11111$, $A \in \mathcal{P}(W)$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01\underline{000}], [00\underline{100}], [00\underline{010}], [00\underline{011]}\} \text{ e } A = 00\underline{100}$$

Então,

$$\min(\mathbf{Y}) = 1,$$

$$\mathbf{Min}(\mathbf{Y}) = \{[01\underline{000}], [00\underline{100}], [00\underline{010]}\},$$

$$S_A^{\mathbf{Y}} = 1\underline{11}.$$

Com os conjuntos definidos anteriormente, os autores apresentam o próximo teorema que fornece uma condição necessária para qualquer conjunto viável.

Teorema 2.3. Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$. Se C é um conjunto viável, então, para todo $[A] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y})$, existe $a \in E$ tal que $C + a \subseteq S_A^{\mathbf{Y}}$ e C é um invariante de $S_A^{\mathbf{Y}}$.

Observe que, dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, pela Proposição 2.4, temos que se C é um conjunto viável, então, para todo $h \in E$, $C + h$ também é um conjunto viável. Assim, para encontrar todos os conjuntos viáveis C , é suficiente encontrar um representante do conjunto viável para toda uma família de conjuntos viáveis que sejam translações do representante.

2.5.3 Algoritmo que encontra \mathbf{X} e C

Com os resultados das seções anteriores, [Hashimoto e Barrera, 2001] apresentam o Algoritmo Procura_Tudo (veja o Algoritmo 2) que recebe como entrada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, e obtém como saída todos os pares $(C, \mathbf{X}) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{I}_W$ tais que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.

2.6 Conversão da Sup-Decomposição para Decomposições Sequenciais

Dada a base de um W -operador ψ , estamos interessados em encontrar decomposições puramente sequenciais para ψ (quando estas existem). Denotaremos por Υ_W o conjunto de todos W -operadores que podem ser construídos por composições de erosões e dilatações. Observe que um operador em Υ_W é um operador crescente [Hashimoto e Barrera, 2001]. Note que o conjunto dos filtros alternados sequenciais [Serra e Vincent, 1992], localmente definidos em uma janela

Algoritmo 2: Algoritmo Procura_Tudo**Entrada:** Uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$.**Saída:** Pares $(C, \mathbf{X}) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{I}_W$, tais que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.

- 1 Seja $[A'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y})$ tal que, para cada $[D'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y})$, $|S_{A'}^{\mathbf{Y}}| \leq |S_{D'}^{\mathbf{Y}}|$;
- 2 **para todo** $C \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}}$ **fazer**
- 3 **se** C **é um invariante de** $S_{A'}^{\mathbf{Y}}$ **então**
- 4 seja $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\}$ a saída de Procura_X(C, \mathbf{Y});
- 5 para cada $i = 1, 2, \dots, n$ devolva o par (C, \mathbf{X}_i) ;
- 6 **fim**
- 7 **fin**

W , é um subconjunto de Υ_W . Dada a base de um operador $\psi \in \Upsilon_W$, é possível encontrar uma representação sequencial para ψ [Hashimoto e Barrera, 2001] da seguinte forma: Se ψ é um operador em Υ_W , então uma representação de ψ pode começar por uma dilatação ou uma erosão, ou seja, ψ pode ser reescrito como $\delta_C \psi_1$ ou $\varepsilon_C \psi_1$, onde $C \in \mathcal{P}(E)$.

Hashimoto e Barrera [2001] introduziram a Equação de Minkowski (veja a Seção 2.5) cujas soluções podem ser usadas para encontrar possíveis decomposições puramente sequenciais para ψ . Assim, seja $\psi \in \Upsilon_W$. Podemos construir a base de ψ^* a partir da base de ψ (veja a Proposição 2.10), então, dada a base de um operador $\psi \in \Upsilon_W$ que começa por uma dilatação (respectivamente, erosão), podemos, pela Proposição 2.7 (respectivamente, Proposição 2.8), encontrar uma representação de ψ resolvendo a Equação de Minkowski para $\mathbf{B}_W(\psi)$ (respectivamente, para $\mathbf{B}_W(\psi^*)$). Se qualquer das equações tem pelo menos uma solução, então ψ pode ter uma decomposição puramente sequencial. Além disso, se essas equações não têm solução, então ψ não tem nenhuma decomposição puramente sequencial.

Assim, podemos utilizar o Algoritmo Procura_Tudo (veja o Algoritmo 2) para $\mathbf{B}_W(\psi)$ (respectivamente, para $\mathbf{B}_W(\psi^*)$). Se (C, \mathbf{X}) é uma saída do procedimento *Procura_Tudo*($\mathbf{B}_W(\psi)$) (respectivamente, *Procura_Tudo*($\mathbf{B}_W(\psi^*)$)), então ψ pode ser reescrito como $\psi = \delta_C \psi_1$ (respectivamente, como $\psi = \varepsilon_C \psi_1$), onde ψ_1 é um W -operador crescente e $\mathbf{B}(\psi_1) = \mathbf{X}$ (respectivamente, $\mathbf{B}(\psi_1^*) = \mathbf{X}^*$).

Assim, dada a base de um operador $\psi \in \Upsilon_W$, Hashimoto e Barrera [2001] construíram uma árvore que representa o espaço de busca de todas as representações sequenciais possíveis de ψ da seguinte forma. A raiz é a base de ψ . Um nó é uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_W$. Se $\mathbf{Y} = \{\{\{o\}\}\}$, então \mathbf{Y} não tem filhos. Se $\mathbf{Y} = \{\{\{a\}\}\}$, $a \neq o$, então o filho de \mathbf{Y} é $\{\{\{o\}\}\}$ e a aresta que liga \mathbf{Y} e seus filhos é rotulada por $\delta_{\{-a\}}$. Caso contrário, construa \mathbf{Y}^* e encontre as soluções das equações $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$ e $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}^*$. Se (C, \mathbf{X}) é uma solução da equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então \mathbf{X} é um filho de \mathbf{Y} e a aresta que liga \mathbf{Y} a \mathbf{X} é rotulada por δ_C . Se (C, \mathbf{X}) é uma solução da equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}^*$, então \mathbf{X}^* é um filho de \mathbf{Y} e a aresta que liga \mathbf{Y} a \mathbf{X}^* é rotulada por ε_{C^t} . Chamaremos esta construção de *árvore de representação* do operador ψ (veja a Figura 2.8). Note que, dada a base de um operador $\psi \in \Upsilon_W$, os rótulos das arestas que estão no caminho da raiz a um nó $\mathbf{Y} = \{\{\{o\}\}\}$ forma uma representação sequencial de ψ .

Agora, vamos mostrar um exemplo de como a Equação de Minkowski pode ser usada para encontrar uma decomposição puramente sequencial de um W -operador crescente (se ela existir).

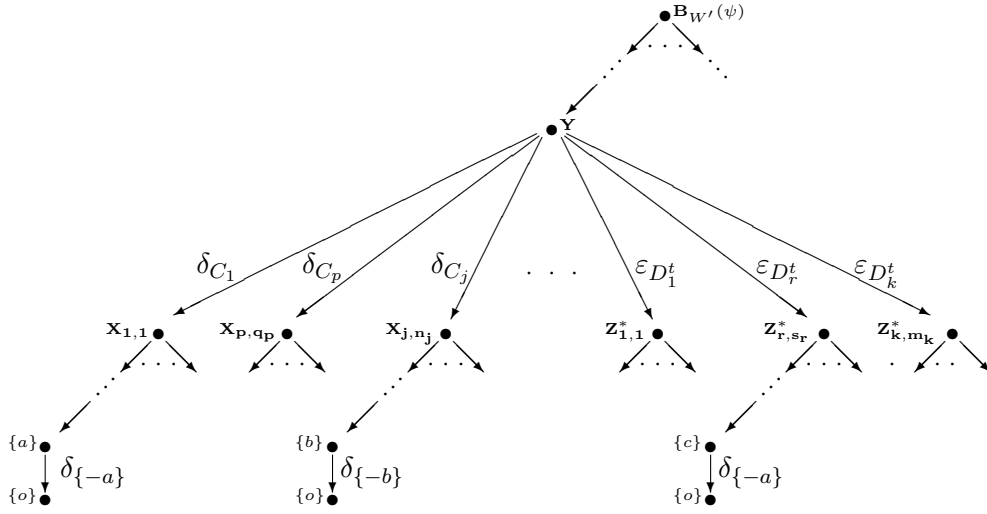


Figura 2.8: Um diagrama da árvore de representação.

Considere $W_0 = 11111$ e seja $\psi_0 \in \Psi_W$ tal que

$$\mathbf{B}_{W_0}(\psi_0) = \{[11100], [01110], [00111]\}.$$

Uma solução da equação $\mathbf{X}_{W_1} \oplus C_1^t = \mathbf{B}_{W_0}(\psi_0)$ é $C_1 = 111$ e $\mathbf{X}_{W_1} = \{[111]\}$. Assim, pela Proposição 2.7, $\psi_0 = \delta_{C_1}\psi_1$, onde $\mathbf{B}_{W_1}(\psi_1) = \mathbf{X}_{W_1}$. Agora, nós podemos tentar encontrar uma decomposição sequencial para ψ_1 procurando uma solução para a equação $\mathbf{X}_{W_2} \oplus C_1^t = \mathbf{B}_{W_1}(\psi_1)$. Mas, por inspeção, esta equação não tem solução. No entanto, a equação $\mathbf{X}_{W_2}^* \oplus C_1^t = \mathbf{B}_{W_1}(\psi_1^*)$, onde

$$\mathbf{B}_{W_1}(\psi_1^*) = \{[100], [010], [001]\},$$

tem uma solução com $W_2 = \{o\}$ e $\mathbf{X}_{W_2}^* = \{[\{o\}]\}$. Observe que $\mathbf{X}_{W_2}^*$ é a base do operador identidade, ou seja, $\mathbf{X}_{W_2}^* = \mathbf{B}_{W_2}(t)$. Assim, pela Proposição 2.8, $\psi_1 = \varepsilon_{C_1^t} t^* = \varepsilon_{C_1^t} t$. Portanto, uma decomposição sequencial para ψ_0 é $\psi_0 = \delta_{C_1} \varepsilon_{C_1}$.

No entanto, existem muitos operadores que não podem ser decompostos por uma sequência de dilatações e erosões. Como podemos ver no Exemplo 2.16.

Exemplo 2.16. Seja o operador $\psi \in \Psi_W$, onde $W = \{[1000]\}$, tal que

$$\mathbf{B}_W(\psi) = \{[1000], [0011]\}.$$

Vamos mostrar que ψ não pode ser decomposto por uma sequência de dilatações e erosões.

Por inspeção, podemos ver que não existe um conjunto C e uma coleção de intervalos máximos \mathbf{X} tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{B}_W(\psi)$.

Agora, vamos ver se para a base do operador dual de ψ existe alguma solução da Equação de Minkowski, assim

$$\mathbf{B}_W(\psi^*) = \{[1010], [1001]\}.$$

Por inspeção, para $\mathbf{B}_W(\psi^*)$ também não existe um conjunto C e uma coleção de intervalos máximos \mathbf{X} tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{B}_W(\psi^*)$.

Então podemos concluir que ψ não pode ser decomposto por uma sequência de dilatações e erosões.

2.6.1 Complexidade Computacional de uma Decomposição Puramente Sequencial

Sejam B_1, B_2, \dots, B_n os elementos estruturantes de uma decomposição puramente sequencial. Se usarmos as definições da dilatação e erosão, e executarmos os operadores da direita para a esquerda, e ainda, consideramos que a cardinalidade da imagem de entrada é constante a cada operação da dilatação ou erosão, então a complexidade para esta operação será $O(|B_1| + |B_2| + \dots + |B_n|)$.

Dessa forma, para encontrar a decomposição sequencial mais eficiente, procuramos na árvore de representação um caminho da raiz a uma folha em que a somatória da cardinalidade dos elementos estruturantes seja a menor possível.

Capítulo 3

Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais

Neste capítulo, apresentamos uma melhoria na metodologia para resolver a Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais proposta por [Hashimoto e Barrera, 2001], isto é, dado $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, encontrar as variáveis $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$ na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. Apresentamos algoritmos com melhor complexidade computacional que os algoritmos apresentados na Seção 2.5.

Primeiramente, na Seção 3.1, vamos apresentar um algoritmo que encontra todas as soluções para \mathbf{X} dados os conjuntos C e \mathbf{Y} . Utilizando esses resultados, na Seção 3.2, apresentamos um algoritmo que encontra todas as soluções para \mathbf{X} e C dado \mathbf{Y} . Embora os algoritmos apresentados tenham resultados bons, na Seção 3.3 apresentamos algumas heurísticas que melhoram a eficiência desses algoritmos. Finalmente, na Seção 3.4, apresentamos a conclusão deste capítulo.

3.1 Algoritmo que encontra \mathbf{X}

Nesta seção, apresentamos uma solução analítica que encontra todas as soluções para \mathbf{X} dados os conjuntos C e \mathbf{Y} na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. Na Subseção 3.1.1, mostramos novas propriedades do limite superior para todas as soluções de \mathbf{X} . Depois, na Subseção 3.1.2, apresentamos novos conjuntos e propriedades que servem para encontrar os limites inferiores para todas as soluções de \mathbf{X} . Utilizando esses resultados, na Subseção 3.1.3, apresentamos o algoritmo que encontra todas as soluções de \mathbf{X} . Embora a eficiência do novo algoritmo seja melhor comparado com o algoritmo de [Hashimoto e Barrera, 2001], a sua complexidade computacional continua sendo exponencial. Consequentemente, na Subseção 3.1.4, mostramos algumas otimizações que podem ser utilizadas na implementação do algoritmo.

3.1.1 Propriedades do Limite Superior para \mathbf{X}

Nesta seção, veremos algumas propriedades do conjunto $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{I}_W$ apresentado na Seção 2.5.1.1. Vimos que $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ é o limite superior para as soluções \mathbf{X} na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. Na proposição seguinte, mostramos que $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t \leq \mathbf{Y}$.

Proposição 3.1. *Sejam $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Então $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t \leq \mathbf{Y}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
[X, W'] \in \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t &\Rightarrow \exists [B, W] \in \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}, \exists h \in C^t : [X, W'] = [B + h, W'] && \text{(pela Proposição 2.12)} \\
&\Rightarrow \exists [B, W''] \in \mathbf{Y} \ominus C^t, B \subseteq W, \exists h \in C^t : [X, W'] = [B + h, W'] && \text{(pela definição de } \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}) \\
&\Rightarrow \exists [B, W''] \in \mathbf{Y} \ominus C^t, B \subseteq W, \exists h \in C^t, \exists [D, W' - h] \in \mathbf{Y} - h : && \\
&\quad [B, W''] \subseteq [D, W''], [X, W'] = [B + h, W'] && \text{(pela definição de } \mathbf{Y} \ominus C^t) \\
&\Rightarrow \exists [B, W''] \in \mathbf{Y} \ominus C^t, B \subseteq W, \exists h \in C^t, \exists [D, W' - h] \in \mathbf{Y} - h : && \\
&\quad [X, W'] = [B + h, W'] \subseteq [D, W' - h] + h && \text{(pela translação de intervalos)} \\
&\Rightarrow \exists h \in C^t, \exists [D + h, W'] \in \mathbf{Y} : [X, W'] \subseteq [D + h, W'] && \text{(pela translação de coleção de intervalos maximais)} \\
&\Rightarrow \exists [E, W'] \in \mathbf{Y} : [X, W'] \subseteq [E, W'] && (E = D + h)
\end{aligned}$$

Então, temos que para todo $[X, W'] \in \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t$, existe $[E, W'] \in \mathbf{Y}$ tal que $[X, W'] \subseteq [E, W']$. Logo, pela relação de ordem no reticulado $\mathcal{I}_{W'}$, $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t \leq \mathbf{Y}$. \square

Na proposição seguinte, mostramos que se existe $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$, tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ também é solução da equação.

Proposição 3.2. *Sejam $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Se existe $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y} &\Rightarrow \mathbf{X} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} && \text{(pela Proposição 2.11)} \\
&\Rightarrow \mathbf{X} \oplus C^t \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t && \text{(pela Proposição 2.2)} \\
&\Rightarrow \mathbf{X} \oplus C^t \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t \leq \mathbf{Y} && \text{(pela Proposição 3.1)} \\
&\Rightarrow \mathbf{Y} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t \leq \mathbf{Y} && \text{(uma vez que } \mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}) \\
&\Rightarrow \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t = \mathbf{Y}
\end{aligned}$$

Então, se existe $\mathbf{X} \in \mathcal{P}(W)$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. \square

Pela Proposição 3.2, podemos concluir que é suficiente comprovar se $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ é uma solução da equação para saber se a equação tem soluções.

3.1.2 Limites Inferiores para \mathbf{X}

Como vimos na Subseção 2.5.1.2, pelo Teorema 2.2, o conjunto $\Theta_W^{\mathbf{Y},C}$ contém os limites inferiores para $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. No entanto, pode existir um número grande de

elementos em $\Theta^{\mathbf{Y},C}$ que não são limites inferiores. Nesta seção, apresentamos o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$, que é muito parecido ao conjunto $\Theta^{\mathbf{Y},C}$, de menor ou igual cardinalidade que $\Theta^{\mathbf{Y},C}$ e contém os limites inferiores para todas as soluções de \mathbf{X} . Além disso, $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ possui outras propriedades que serão mostradas nesta subseção.

Para a construção de $\Phi^{\mathbf{Y},C}$, precisamos da seguinte definição. Sejam $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\{[A]\} \in \mathcal{I}_{W'}$. Definimos o conjunto $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) \in \mathcal{I}_W$ como:

$$\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) = \{[B] \subseteq \mathcal{P}(W) : \{[B]\} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}, B = A - c, c \in C^t\}.$$

Note que $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) \in \mathcal{I}_W$, uma vez que $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{I}_W$. A partir de $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$ definimos o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_W)$ por:

$$\Phi^{\mathbf{Y},C} = \{\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\}, ([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{Y}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])\}.$$

Observamos que $|\Phi^{\mathbf{Y},C}| \leq \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} |\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])| \leq |C|^{|\mathbf{Y}|}$.

A seguir, apresentamos um exemplo da construção dos conjuntos $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$ e $\Phi^{\mathbf{Y},C}$.

Exemplo 3.1. Considere $W' = 11\underline{1}11$, e sejam $C = 1\underline{1}1$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01\underline{0}00], [00\underline{1}00], [000\underline{1}0]\}.$$

Logo, $W = W' \ominus C^t = 1\underline{1}1$, temos visto no exemplo 2.12 que o limite superior para \mathbf{X} é

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \{[0\underline{1}0], [1\underline{0}1]\}.$$

A seguir, criamos os conjuntos $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}$ para cada intervalo de \mathbf{Y} .

$$\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([01\underline{0}00]) = \{[0\underline{1}0]\}, \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([00\underline{1}00]) = \{[0\underline{1}0]\}, \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([000\underline{1}0]) = \{[0\underline{1}0]\}$$

Finalmente, construímos o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ a partir dos conjuntos $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}$.

$$\mathbf{Z}_1 = \{[0\underline{1}0]\},$$

$$\Phi^{\mathbf{Y},C} = \{\mathbf{Z}_1\}.$$

Na Figura 3.1, podemos ver os elementos do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$.

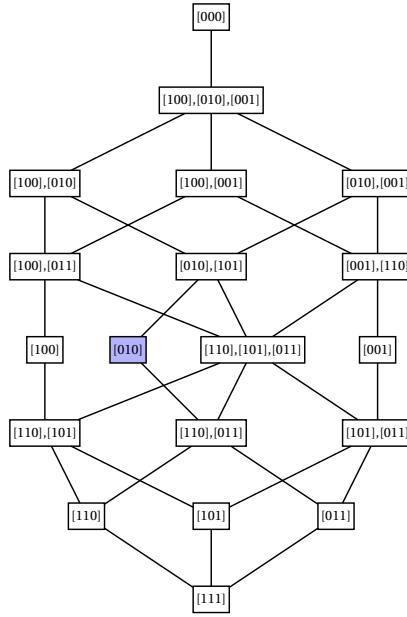


Figura 3.1: Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor azul os elementos do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$.

3.1.2.1 Propriedades dos conjuntos $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$ e $\Phi^{\mathbf{Y},C}$

A seguir, apresentamos proposições e teoremas dos conjuntos $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$ e $\Phi^{\mathbf{Y},C}$. A proposição seguinte, mostra que se existe solução para a Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais, então para todo $[A] \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$ não é vazio.

Proposição 3.3. *Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_W$. Se existe $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então para todo $[A] \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) \neq \emptyset$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y} &\Rightarrow \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t = \mathbf{Y} && \text{(pela Proposição 3.2)} \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists [B] \in \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}, \exists c \in C^t, B + c = A && \text{(pela Proposição 2.12)} \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists [B] \in \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}, \exists c \in C^t, B = A - c && \text{(pela adição em } E) \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists [B] \in \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) && \text{(pela definição de } \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])) \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

□

O teorema seguinte, mostra que se existe solução para a Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais, então qualquer conjunto $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$ também é solução.

Teorema 3.1. *Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_W$. Se existe $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então para todo $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$, $\mathbf{Z} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.*

Demonstração. Por um lado, vamos provar que para todo $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$, $\mathbf{Z} \oplus C^t \geq \mathbf{Y}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C} &\Rightarrow \exists([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{Y}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\} \\
&\hspace{15em} \text{(pela definição de } \Phi^{\mathbf{Y},C}\text{)} \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists [B] \in \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) : \{[B]\} \leq \mathbf{Z} \\
&\hspace{10em} \text{(pela Proposição 3.3 e pela relação de ordem no reticulado } \mathcal{I}_W\text{)} \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists \{[B]\} \leq \mathbf{Z}, \exists c \in C^t, B = A - c \\
&\hspace{15em} \text{(pela definição de } \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])\text{)} \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists \{[B]\} \leq \mathbf{Z}, \exists c \in C^t, A = B + c \hspace{10em} \text{(pela adição em } E\text{)} \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists \{[B]\} \leq \mathbf{Z}, \{[A]\} \leq \{[B]\} \oplus C^t \hspace{10em} \text{(uma vez que } c \in C^t\text{)} \\
&\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \{[A]\} \leq \mathbf{Z} \oplus C^t \\
&\hspace{10em} \text{(uma vez que } \{[B]\} \leq \mathbf{Z} \text{ e } \{[B]\} \oplus C^t \leq \mathbf{Z} \oplus C^t \text{ pela Proposição 2.2)} \\
&\Rightarrow \mathbf{Y} \leq \mathbf{Z} \oplus C^t. \hspace{10em} \text{(pela relação de ordem no reticulado } \mathcal{I}_W\text{)}
\end{aligned}$$

Por outro lado, vamos provar que para todo $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$, $\mathbf{Z} \oplus C^t \leq \mathbf{Y}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C} &\Rightarrow \exists([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{Y}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\} \\
&\hspace{15em} \text{(pela definição de } \Phi^{\mathbf{Y},C}\text{)} \\
&\Rightarrow \forall_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}, \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\} \hspace{10em} \text{(pela definição de } \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])\text{)} \\
&\Rightarrow \mathbf{Z} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \hspace{10em} \text{(pela relação de ordem no reticulado } \mathcal{I}_W\text{)} \\
&\Rightarrow \mathbf{Z} \oplus C^t \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t \hspace{10em} \text{(pela Proposição 2.2)} \\
&\Rightarrow \mathbf{Z} \oplus C^t \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t = \mathbf{Y} \hspace{10em} \text{(pela Proposição 3.2)} \\
&\Rightarrow \mathbf{Z} \oplus C^t \leq \mathbf{Y}
\end{aligned}$$

Então, podemos concluir que se existe $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então para todo $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$, $\mathbf{Z} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. \square

O teorema seguinte, mostra que todos os limites inferiores para as soluções \mathbf{X} da equação se encontram em $\Phi^{\mathbf{Y},C}$.

Teorema 3.2. *Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_W$. Para todo $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, existe $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$ tal que $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y} &\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists [B] \in \mathbf{X}, \exists c \in C^t, B + c = A && \text{(pela Proposição 2.12)} \\ &\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists [B] \in \mathbf{X}, \exists c \in C^t, B = A - c, \{[B]\} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \\ & && (\mathbf{X} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}, \text{ pela Proposição 2.11}) \\ &\Rightarrow \forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists [B] \in \mathbf{X}, [B] \in \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]). && \text{(pela definição de } \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) \text{)} \end{aligned}$$

Desta forma, $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, temos que $\forall [A] \in \mathbf{Y}, \exists [B] \in \mathbf{X}$ tal que $[B] \in \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$. Logo, para todo $[A] \in \mathbf{Y}$, seja $[B_A] \in \mathbf{X}$ tal que $[B_A] \in \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$. Vamos construir $\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{[A] \in \mathbf{Y}} \{[B_A]\}$$

Por construção, é fácil ver que $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$. Além disso, $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X}$, uma vez que \mathbf{Z} é o supremo de intervalos que pertencem a \mathbf{X} . Logo, para todo $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, existe $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$, tal que $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X}$. \square

A seguir, mostramos que para todo $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$ e para todo conjunto $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{Z} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$, \mathbf{X} é solução da Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais.

Teorema 3.3. *Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_W$. Se existe $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, então para todo $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$ e para todo $\mathbf{X} \in [\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}]$, $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \in [\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}] &\Rightarrow \mathbf{Z} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} && \text{(pela definição de intervalo)} \\ &\Rightarrow \mathbf{Z} \oplus C^t \leq \mathbf{X} \oplus C^t \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t && \text{(pela Proposição 2.2)} \\ &\Rightarrow \mathbf{Y} \leq \mathbf{X} \oplus C^t \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t && (\mathbf{Z} \oplus C^t = \mathbf{Y}, \text{ pelo Teorema 3.1}) \\ &\Rightarrow \mathbf{Y} \leq \mathbf{X} \oplus C^t \leq \mathbf{Y} && (\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t = \mathbf{Y}, \text{ pela Proposição 3.2}) \\ &\Rightarrow \mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

\square

3.1.3 Algoritmo Proposto

Nesta seção, vamos mostrar o Algoritmo Procura2_X (veja o Algoritmo 3) que encontra todas as soluções para a equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. Primeiramente, vamos verificar se existem soluções para a equação. Na Linha 2 do algoritmo, calculamos o limite superior para \mathbf{X} e na Linha 4 verificamos se $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ é uma solução da equação. Pela Proposição 3.2, se $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ não é uma solução, então não existe nenhuma solução. Comprovado que existem soluções, vamos calcular todas elas. Na Linha 9, é definido o conjunto $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{I}_W$ para cada intervalo $[A] \in \mathbf{Y}$, esses conjuntos são usados para a construção do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ na Linha 12. Pelos Teoremas 3.2 e

3.3, em $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ se encontram todos os limites inferiores e para qualquer $\mathbf{X} \in [\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}]$, $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$, temos que \mathbf{X} é uma solução. Finalmente, na Linha 14, o conjunto de todas as soluções da equação é representado por uma coleção de intervalos maximais $\mathfrak{X} \in \Omega_W$, isto é,

$$\mathfrak{X} = \{[\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}] \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_W) : \mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C} \text{ e } \exists \mathbf{Z}' \in \Phi^{\mathbf{Y},C}, \mathbf{Z}' < \mathbf{Z}\}.$$

Algoritmo 3: Algoritmo Procura2_X

Entrada: Um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ e uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$.

Saída: Coleção de intervalos $\mathfrak{X} \in \Omega_W$ que representa todas as soluções da equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.

```

1 /* Calcular limite superior */
2  $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \leftarrow \mathcal{W}^{-1}(\{[L] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t : \{[L]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\})$ ;
3 /* Verificar se existem soluções */
4 se  $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t \neq \mathbf{Y}$  então
5 |   Devolve não existe solução;
6 fim
7 /* Cálculo dos conjuntos  $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$  */
8 para cada  $[A] \in \mathbf{Y}$  hacer
9 |    $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) = \{[B] : \{[B]\} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}, B = A - c, c \in C^t\}$ ;
10 fim
11 /* Cálculo do conjunto  $\Phi^{\mathbf{Y},C}$  */
12  $\Phi^{\mathbf{Y},C} = \{\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\}, ([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{Y}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])\}$ ;
13 /* Construção de todas as soluções numa coleção de intervalos maximais  $\mathfrak{X} \in \Omega_W$  */
14  $\mathfrak{X} = \{[\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}] \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_W) : \mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C} \text{ e } \exists \mathbf{Z}' \in \Phi^{\mathbf{Y},C}, \mathbf{Z}' < \mathbf{Z}\}$ ;
15 devolva  $\mathfrak{X}$ ;
```

Claramente, pelas proposições e teoremas apresentadas nesta seção podemos ver que o Algoritmo Procura2_X (veja o Algoritmo 3) é mais eficiente que o Algoritmo Procura_X (veja o Algoritmo 1).

Exemplo 3.2. Considere $W' = 11\underline{1}11$, e sejam $C = 1\underline{1}1$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01\underline{0}00], [00\underline{1}00], [00\underline{0}10]\}.$$

Logo, $W = W' \ominus C^t = 1\underline{1}1$, temos visto no Exemplo 2.12 que o limite superior para \mathbf{X} é

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \{[0\underline{1}0], [1\underline{0}1]\}.$$

Depois, temos visto nos Exemplo 3.1 que

$$\Phi^{\mathbf{Y},C} = \{[0\underline{1}0]\}.$$

Em consequência, temos que

$$\mathfrak{X} = \{\{[0\underline{1}0]\}, \{[0\underline{1}0], [1\underline{0}1]\}\}.$$

Na Figura 3.2, podemos ver o conjunto \mathfrak{X} .

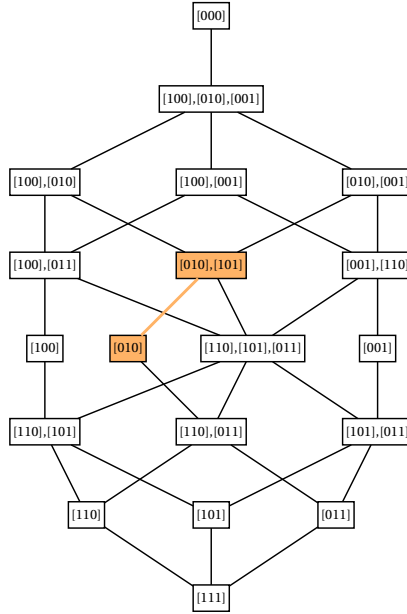


Figura 3.2: Diagrama de Hasse do reticulado \mathcal{I}_W com $W = 111$, de cor laranja o conjunto \mathfrak{X} .

3.1.4 Otimização do Algoritmo

Nesta seção, apresentamos algumas otimizações que reduzem a complexidade computacional do Algoritmo Procura2_X (veja o Algoritmo 3). Vamos mostrar uma maneira mais eficiente de construir o conjunto $\mathbf{U}^{\bar{\mathbf{Y}},C}$ e apresentamos o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C}$ que mantém as propriedades de $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ e é subconjunto de $\Phi^{\mathbf{Y},C}$.

3.1.4.1 Otimização do cálculo do conjunto $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$

Nesta subseção, vamos introduzir um resultado que reduz o número de operações para o cálculo do limite superior (veja a Subseção 2.5.1.1). No entanto, o limite superior continua sendo o mesmo, apresentamos uma melhoria na eficiência do seu cálculo. Temos que $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{I}_W$ é o limite superior para qualquer \mathbf{X} na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$, e seu cálculo é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{W''} &= \{[L] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t : \{[L]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\}, \\ \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} &= \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{U}_{W''}). \end{aligned}$$

Seja $h \in \mathcal{P}(E)$, vamos definir os conjuntos $\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h), \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) \in \mathcal{I}_{W''}$ que são partições de $(\mathbf{Y} - h)_{W''}$, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) &= \{(\{[A - h]\})_{W''} \in \mathcal{I}_{W''/W} : [A] \in \mathbf{Y}\} \text{ e} \\ \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) &= \{(\{[A - h]\})_{W''} \notin \mathcal{I}_{W''/W} : [A] \in \mathbf{Y}\}. \end{aligned}$$

Podemos observar que, $\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \in \mathcal{I}_{W''/W}$, $\mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) \notin \mathcal{I}_{W''/W}$, e $(\mathbf{Y} - h)_{W''} = \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h)$.

A seguir, apresentamos um exemplo da construção dos conjuntos $\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h)$ e $\mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h)$.

Exemplo 3.3. Considere $W' = 11111$, e sejam $C = 111$, $\{h\} = 001$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01000], [00100], [00010]\}.$$

Logo, $W = W' \ominus C^t = 111$, $W'' = W' \oplus C = 1111111$,

$$(\mathbf{Y} - h)_{W''} = \{[0100000], [0010000], [0001000]\},$$

$$\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) = \{[0010000], [0001000]\},$$

$$\mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) = \{[0100000]\}.$$

No Teorema 3.4, vamos mostrar que o limite superior pode ser calculado como:

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \sqcap \{\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h)) : h \in C^t\}.$$

Para isso precisamos da seguinte proposição.

Proposição 3.4. Sejam $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, $C \in \mathcal{P}(E)$, $W'' = W' \oplus C$. Então

$$[A] \in \sqcap \{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t\} \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \text{ se, e somente se,}$$

$$[A] \in \sqcap \{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t\} \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução na cardinalidade de C^t .

Caso base: $|C^t| = 1$. Seja $h \in C^t$, então $[A] \in \{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h)\}$ e $\{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}$ se, e somente se, $[A] \in \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h)$, uma vez que, para todo $[B] \in \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h)$, $[B] \notin \mathcal{I}_{W''/W}$ pela construção de $\mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h)$. Dessa forma, demonstramos a proposição para o caso base.

Passo indutivo: $|C^t| \geq 2$. Seja $c \in C^t$. Por hipótese de indução vamos supor que a proposição é verdadeira para $C^t \setminus \{c\}$ e $\{c\}$, isto é,

$$\begin{aligned} & [A] \in \sqcap \{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t \setminus \{c\}\} \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \\ \Leftrightarrow & [A] \in \sqcap \{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t \setminus \{c\}\} \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \text{ e} \\ & [A] \in \{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(c) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(c)\} \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \\ \Leftrightarrow & [A] \in \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(c) \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
& [A] \in \cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t\} \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \quad (\text{lado esquerdo da proposição}) \\
\Leftrightarrow & [A] \in (\cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t \setminus \{c\}\} \cap \{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(c) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(c)\}) \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \\
& \quad (\text{pela definição de conjuntos e ínfimo no reticulado } \mathcal{I}_{W''}) \\
\Leftrightarrow & \exists [P] \in \cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t \setminus \{c\}\} \text{ e } \exists [Q] \in \{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(c) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(c)\} \\
& \quad \text{tal que } \{[A]\} = \{[P]\} \cap \{[Q]\} \text{ e } \{[A]\}, \{[P]\}, \{[Q]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \\
& \quad (\text{pela definição de ínfimo no reticulado } \mathcal{I}_{W''/W}; \{[P]\}, \{[Q]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}) \\
\Leftrightarrow & \exists [P] \in \cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t \setminus \{c\}\} \text{ e } \exists [Q] \in \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(c) \\
& \quad \text{tal que } \{[A]\} = \{[P]\} \cap \{[Q]\} \text{ e } \{[A]\}, \{[P]\}, \{[Q]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \\
& \quad (\text{utilizando a hipótese de indução}) \\
\Leftrightarrow & [A] \in (\cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t \setminus \{c\}\} \cap \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(c)) \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W} \\
& \quad (\text{pela definição de ínfimo no reticulado } \mathcal{I}_{W''/W}) \\
\Leftrightarrow & [A] \in (\cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t\}) \text{ e } \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}. \\
& \quad (\text{pela definição de ínfimo no reticulado } \mathcal{I}_{W''/W})
\end{aligned}$$

Assim, fica demonstrada a proposição. \square

A seguir, apresentamos o Teorema 3.4 que mostra uma maneira mais eficiente de construir o conjunto $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$.

Teorema 3.4. *O limite superior $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{I}_W$ pode ser descrito como:*

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \cap\{\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h)) : h \in C^t\}.$$

Demonstração. Temos que a definição de $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{W''} &= \{[A] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t : \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\} \\
\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} &= \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{U}_{W''}).
\end{aligned}$$

Então $\mathbf{U}_{W''}$ pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{W''} &= \{[A] \in \mathbf{Y} \ominus C^t : \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\} && (\text{pela definição de } \mathbf{U}_{W''}) \\
&= \{[A] \in \cap\{(\mathbf{Y} - h)_{W' \oplus C} : h \in C^t\} : \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\} && (\text{pela subtração de Minkowski}) \\
&= \{[A] \in \cap\{(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \sqcup \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h)) : h \in C^t\} : \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\} && (\text{pela definição de } \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) \text{ e } \mathbf{S}^{\mathbf{Y}}(h)) \\
&= \{[A] \in \cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t\} : \{[A]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\} && (\text{pela Proposição 3.4}) \\
&= \cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t\}. && (\text{pela definição de ínfimo})
\end{aligned}$$

Então $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} &= \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{U}_{W''}) && (\text{pela definição de } \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}) \\
&= \mathcal{W}^{-1}(\cap\{\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) : h \in C^t\}) && (\text{pela definição de } \mathbf{U}_{W''} \text{ acima}) \\
&= \cap\{\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h)) : h \in C^t\}. && (\text{uma vez que } \mathcal{W}^{-1}(\cdot) \text{ é um isomorfismo de reticulado})
\end{aligned}$$

\square

A continuação, apresentamos o Algoritmo 4 que calcula o conjunto $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ utilizando o Teorema 3.4.

Algoritmo 4: Algoritmo Limite_superior

Entrada: Um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ e uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$.

Saída: $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \in \mathcal{I}_W$, que representa o limite superior para $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ na equação

$$\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}.$$

- 1 $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \leftarrow \{[o]\}$;
 - 2 **para cada** $h \in C^t$ **fazer**
 - 3 $\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h) = \{(\{[A - h]\})_{W''} \in \mathcal{I}_{W''/W} : [A] \in \mathbf{Y}\}$;
 - 4 $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \leftarrow \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \cap \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}(h))$;
 - 5 **fin**
 - 6 Devolve $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$;
-

O Algoritmo 4 é mais eficiente que o algoritmo proposto por [Hashimoto e Barrera, 2001], uma vez que, para cada $h \in C^t$ o número de intervalos em $\mathbf{R}(h)$ é menor ou igual ao número de intervalos em $(\mathbf{Y} - h)_{W''}$. Por causa dessa propriedade, a operação de ínfimo em reticulados é menos custosa. Além disso, é mais eficiente fazer as operações de ínfimo no reticulado \mathcal{I}_W que no reticulado $\mathcal{I}_{W''}$, uma vez que $W \subseteq W''$.

A seguir, apresentamos um exemplo da execução do Algoritmo 4.

Exemplo 3.4. Considere $W' = 11111$, e sejam $C = 111$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01000], [00100], [00010]\}.$$

Logo, $W = W' \ominus C^t = 111$, $W'' = W' \oplus C = 1111111$. Sejam $\{h_1\} = 100$, $\{h_2\} = 010$, $\{h_3\} = 001$.

$$\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_1) = \{[0001000], [0000100]\},$$

$$\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_2) = \{[0010000], [0001000], [0000100]\},$$

$$\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_3) = \{[0010000], [0001000]\}.$$

$$\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_1)) = \{[010], [001]\}$$

$$\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_2)) = \{[100], [010], [001]\},$$

$$\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_3)) = \{[100], [010]\}.$$

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_1)) \cap \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_2)) \cap \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(h_3)).$$

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \{[010], [001]\} \cap \{[100], [010], [001]\} \cap \{[100], [010]\}.$$

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \{[010], [101]\}.$$

3.1.4.2 Otimização do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$

O Algoritmo Procura2_X (veja o Algoritmo 3) filtra os conjuntos minimais em $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ para representar todas as soluções da equação em uma coleção de intervalos maximais. Então, somente

precisamos dos conjuntos minimais em $\Phi^{\mathbf{Y},C}$. Mais formalmente, um conjunto $\mathbf{P} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$ é minimal em $\Phi^{\mathbf{Y},C}$, se não existe $\mathbf{Q} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$ tal que $\mathbf{Q} < \mathbf{P}$. Nesta subseção, vamos mostrar uma técnica de pré-processamento que diminui o número de conjuntos não minimais em $\Phi^{\mathbf{Y},C}$.

Sejam $\mathbf{Y}, \mathbf{T} \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Definimos $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C} \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_W)$ como:

$$\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C} = \{\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{T}|} \{[B_i]\}, ([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{T}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{T}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])\}$$

Claramente, podemos ver que $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y},C} = \Phi^{\mathbf{Y},C}$. Utilizando este conjunto apresentamos o teorema seguinte, que mostra que podem existir conjuntos menores a $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ que contêm os mesmos elementos minimais que $\Phi^{\mathbf{Y},C}$.

Teorema 3.5. *Sejam $[P], [Q] \in \mathbf{Y}$. Se $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([P]) \subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([Q])$, então $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C}$ tem os mesmos elementos minimais que $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ e $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C} \subseteq \Phi^{\mathbf{Y},C}$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C} \subseteq \Phi^{\mathbf{Y},C}$. Seja $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C}$, então,

$$\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C} \Rightarrow \exists([B_1], \dots, [B_P], \dots, [B_{|\mathbf{Y}-1|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y} \setminus \{[Q]\}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}-1|} \{[B_i]\}$$

Seja $[B_P] \in \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([P])$. Uma vez que $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([P]) \subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([Q])$, então $[B_P] \in \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([Q])$. Portanto,

$$\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C} \Rightarrow \exists([B_1], \dots, [B_P], \dots, [B_{|\mathbf{Y}-1|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y} \setminus \{[Q]\}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) \text{ e } \exists[B_P] \in \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([Q])$$

$$\begin{aligned} & : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}-1|} \{[B_i]\} \sqcup \{[B_P]\} \\ & \text{(uma vez que } \{[B_P]\} \leq \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}-1|} \{[B_i]\} \text{ e pelo supremo no reticulado } \mathcal{I}_W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \exists([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{Y}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\} \\ & \text{(pela propriedade de supremo no reticulado } \mathcal{I}_W) \\ & \Rightarrow \mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}. \text{ (pela definição de } \Phi^{\mathbf{Y},C}) \end{aligned}$$

Uma vez que para todo $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C}$, $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$, então, $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C} \subseteq \Phi^{\mathbf{Y},C}$.

Agora, vamos provar que $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C}$ tem os mesmos elementos minimais que $\Phi^{\mathbf{Y},C}$.

Seja $\mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C}$, vamos mostrar que sempre existe $\mathbf{A} \in \Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{Y} \setminus \{[Q]\},C}$, tal que $\mathbf{A} \leq \mathbf{Z}$. Na prova, vamos a construir o conjunto \mathbf{A} utilizando os mesmos intervalos na construção do conjunto \mathbf{Z} .

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},C} &\Rightarrow \exists([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{Y}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|} \{[B_i]\} \\ &\hspace{20em} \text{(pela definição de } \Phi^{\mathbf{Y},C}\text{)} \\ &\Rightarrow \exists([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{Y}|-1}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{Y} \setminus \{[Q]\}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) : \mathbf{A} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{Y}|-1} \{[B_i]\}, \mathbf{A} \leq \mathbf{Z} \\ &\text{(uma vez que utilizamos os mesmos intervalos } [B_i] \text{ que são utilizados na definição de } \mathbf{Z}\text{)} \\ &\Rightarrow \mathbf{A} \in \Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{Y} \setminus \{[Q]\}, C}, \mathbf{A} \leq \mathbf{Z} \hspace{10em} \text{(pela definição de } \Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{Y} \setminus \{[Q]\}, C}\text{)} \end{aligned}$$

Então, se existem $[P], [Q] \in \mathbf{Y}$ e $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([P]) \subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([Q])$, então $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{Y} \setminus \{[Q]\}, C}$ tem os mesmos elementos minimais que $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ e $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{Y} \setminus \{[Q]\}, C} \subseteq \Phi^{\mathbf{Y},C}$. \square

Seja $\mathbf{T} \in \mathcal{I}_{W'}$ uma coleção de intervalos maximais que contém todos os elementos de \mathbf{Y} que satisfazem a seguinte condição: Para cada par de intervalos $[P], [Q] \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([P]) \not\subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([Q])$. Dessa maneira, pelo Teorema 3.5, podemos criar o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{T}, C}$, onde $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Y}$, e contém os mesmos limites inferiores que $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ sem alterar a completitude das soluções do algoritmo. Construir o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{T}, C}$ é menos custoso que construir o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$, uma vez que o número de intervalos que participam do produto cartesiano na construção do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ é $|\mathbf{Y}|$. No entanto, o número de intervalos que participam do produto cartesiano na construção do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{T}, C}$ é $|\mathbf{T}|$. Além disso, a cardinalidade do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{T}, C}$ é menor ou igual do que $\Phi^{\mathbf{Y},C}$, uma vez que $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{T}, C} \subseteq \Phi^{\mathbf{Y},C}$. Assim, $|\Phi^{\mathbf{Y},C}|$ é no máximo $|C|^{|\mathbf{Y}|}$ e $|\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{T}, C}|$ é no máximo $|C|^{|\mathbf{T}|}$.

3.1.4.3 Algoritmo proposto utilizando otimizações

Com as otimizações apresentadas nesta subseção apresentamos o Algoritmo Procura3_X (veja o Algoritmo 5) que é mais eficiente ao Algoritmo Procura2_X (veja o Algoritmo 3), que por sua vez é mais eficiente que o Algoritmo Procura_X (veja o Algoritmo 1).

A seguir, apresentamos um exemplo da construção do conjunto $\Phi^{\mathbf{Y}, \mathbf{T}, C}$.

Exemplo 3.5. Considere $W' = 111\underline{1}1$, e sejam $C = 1\underline{1}1$ e $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$, tais que

$$\mathbf{Y} = \{[01\underline{0}00], [00\underline{1}00], [000\underline{1}0]\}.$$

Logo, $W = W' \ominus C^t = 1\underline{1}1$, temos visto no exemplo 2.12 que o limite superior para \mathbf{X} é

$$\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} = \{[0\underline{1}0], [1\underline{0}1]\}.$$

A seguir, criamos os conjuntos $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}$ para cada intervalo de \mathbf{Y} .

$$\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([01\underline{0}00]) = \{[0\underline{1}0]\}, \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([00\underline{1}00]) = \{[0\underline{1}0]\}, \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([000\underline{1}0]) = \{[0\underline{1}0]\}$$

Logo, temos que $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([01\underline{000}]) \subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([00\underline{100}])$ e $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([01\underline{000}]) \subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([00\underline{010}])$, então

$$\mathbf{T} = \{[01\underline{000}]\}.$$

Finalmente, construímos o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C}$ a partir dos conjuntos $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}$ e \mathbf{T} .

$$\mathbf{Z}_1 = \{[0\underline{10}]\},$$

$$\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C} = \{\mathbf{Z}_1\}.$$

Algoritmo 5: Algoritmo Procura3_X

Entrada: Um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ e uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_W$.

Saída: Coleção de intervalos $\mathfrak{X} \in \Omega_W$ que representa todas as soluções da equação

$$\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}.$$

```

1 /* Calcular limite superior */
2  $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \leftarrow \text{Limite\_Superior}(\mathbf{Y}, C)$ ;
3 /* Verificar se existem soluções */
4 se  $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C} \oplus C^t \neq \mathbf{Y}$  então
5   | Devolve não existe solução;
6 fim
7 /* Cálculo dos conjuntos  $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$  */
8 para cada  $[A] \in \mathbf{Y}$  fazer
9   |  $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A]) = \{[B] : \{[B]\} \leq \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}, B = A - c, c \in C^t\}$ ;
10 fim
11 /* Filtragem dos intervalos em  $\mathbf{Y}$  */
12  $\mathbf{T} \leftarrow \emptyset$ ;
13 para cada  $[A] \in \mathbf{Y}$  fazer
14   | adicionar  $\leftarrow$  verdadeiro;
15   | para cada  $[B] \in \mathbf{Y}$  fazer
16     | se  $[A] \neq [B]$  e  $\mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([B]) \subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])$  então
17       | adicionar  $\leftarrow$  falso;
18     | fim
19   | fim
20   | se adicionar = verdadeiro então
21     |  $\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{T} \sqcup \{[A]\}$ ;
22   | fim
23 fim
24 /* Cálculo do conjunto  $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C}$  */
25  $\Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C} = \{\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W : \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{|\mathbf{T}|} \{[B_i]\}, ([B_1], [B_2], \dots, [B_{|\mathbf{T}|}]) \in \prod_{[A] \in \mathbf{T}} \mathbf{L}^{\mathbf{Y},C}([A])\}$ ;
26 /* Construção de todas as soluções numa coleção de intervalos maximais  $\mathfrak{X} \in \Omega_W$  */
27  $\mathfrak{X} = \{[\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}] \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_W) : \mathbf{Z} \in \Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C} \text{ e } \exists \mathbf{Z}' \in \Phi^{\mathbf{Y},\mathbf{T},C}, \mathbf{Z}' \subset \mathbf{Z}\}$ ;
28 devolva  $\mathfrak{X}$ ;

```

3.2 Algoritmo para encontrar \mathbf{X} e C

Nesta subsecção, apresentamos o Algoritmo Procura_Tudo2 (veja o Algoritmo 6) que encontra todas as soluções para \mathbf{X} e C na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. Este algoritmo é uma adaptação do

Algoritmo Procura_Tudo (veja o Algoritmo 2) utilizando o Algoritmo Procura3_X.

Algoritmo 6: Algoritmo Procura_Tudo2

Entrada: Uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$.

Saída: Pares $(C, \mathbf{X}) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{I}_W$, tais que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.

- 1 Seja $[A'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y})$ tal que, para cada $[D'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y})$, $|S_{A'}^{\mathbf{Y}}| \leq |S_{D'}^{\mathbf{Y}}|$;
 - 2 **para todo** $C \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}}$ **fazer**
 - 3 **se** C **é um invariante de** $S_{A'}^{\mathbf{Y}}$ **então**
 - 4 seja $\mathfrak{X} = \{[\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1], \dots, [\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n]\}$ a saída de Procura3_X(C, \mathbf{Y});
 - 5 para cada $i = 1, 2, \dots, n$ devolva o par (C, \mathbf{X}) tal que $\mathbf{X} \in [\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i]$;
 - 6 **fim**
 - 7 **fim**
-

Devemos observar que, o Algoritmo Procura_Tudo2 é mais eficiente que o Algoritmo Procura_Tudo, uma vez que na Subseção 3.1.4.3 mostramos que o Algoritmo Procura3_X é mais eficiente que o Algoritmo Procura_X.

3.3 Heurísticas de busca

A pesar do Algoritmo Procura_Tudo2 (veja o Algoritmo 6) ter melhorado a complexidade computacional comparado ao Algoritmo Procura_Tudo (veja o Algoritmo 2), a complexidade de busca continua sendo exponencial. Por isso vamos utilizar heurísticas para melhorar o tempo de execução e ao mesmo tempo conseguir bons resultados. Nesta seção, apresentamos um algoritmo que utiliza heurísticas de busca, e que foram implementadas fazendo pequenas modificações ao Algoritmo Procura_Tudo2.

3.3.1 Conjuntos Viáveis para C

Uma boa heurística para reduzir o espaço de busca dos elementos estruturantes possíveis para a decomposição, é considerar só os conjuntos $C \in \mathcal{P}(E)$ tais que $C \subseteq W_{3 \times 3}$, uma vez que são vários os conjuntos $C \not\subseteq W_{3 \times 3}$ que podem ser obtidos a partir de adições de Minkowski de conjuntos menores. Mais formalmente, seja $C \in \mathcal{P}(E)$, $C \not\subseteq W_{3 \times 3}$ e existe \mathbf{X} tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. Se $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_n$ tal que $C_1, C_2, \dots, C_n \subseteq W_{3 \times 3}$, então $\mathbf{X} \oplus C_1^t \oplus C_2^t \oplus \dots \oplus C_n^t = \mathbf{Y}$. Dessa maneira, reduzimos o espaço de busca para os conjuntos viáveis de C consideravelmente, uma vez que o número de conjuntos $C \subseteq W_{3 \times 3}$ é finito. Observe que, nem sempre podemos representar conjuntos $C \not\subseteq W_{3 \times 3}$ como produto de adições de Minkowski de conjuntos $C' \subseteq W_{3 \times 3}$.

3.3.2 Soluções para $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$

O Algoritmo Procura_Tudo2 (veja o Algoritmo 6) devolve pares (C, \mathbf{X}) tal que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. No entanto, o número de pares devolvido pelo algoritmo pode ser um número exponencial, uma vez que o número de coleções de intervalos maximais que se encontram no intervalo $[\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C}]$ pode ser muito grande. Uma proposta de heurística é reduzir o espaço de busca do algoritmo utilizando somente os limites inferiores e superiores como solução, isto é, devolver os pares (C, \mathbf{Z}) para cada intervalo $[\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C}] \in \mathfrak{X}$, e também devolver o par $(C, \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C})$. De fato, esta heurística limita nossa metodologia a soluções sub-ótimas, uma vez que não consideramos os conjuntos \mathbf{X} tais que $\mathbf{Z} < \mathbf{X} < \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C}$ para cada intervalo $[\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C}] \in \mathfrak{X}$. No entanto, vamos mostrar que esta

heurística é eficiente nos resultados experimentais, uma vez que para vários casos o número de soluções \mathbf{X} , tal que $\mathbf{Z} < \mathbf{X} < \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ é pequeno.

3.3.3 Algoritmo proposto utilizando heurísticas

Nesta subseção, apresentamos o Algoritmo Procura_Tudo3, que utiliza as heurísticas apresentadas nesta seção.

Algoritmo 7: Algoritmo Procura_Tudo3

Entrada: Uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y} \in \mathcal{I}_{W'}$.

Saída: Pares $(C, \mathbf{X}) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{I}_W$, tais que $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$.

- 1 Seja $[A'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y})$ tal que, para cada $[D'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y})$, $|S_{A'}^{\mathbf{Y}}| \leq |S_{D'}^{\mathbf{Y}}|$;
 - 2 **para todo** $C \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}}$ e $C \subseteq W_{3 \times 3}$ **fazer**
 - 3 **se** C é um invariante de $S_{A'}^{\mathbf{Y}}$ **então**
 - 4 seja $\mathfrak{X} = \{[\mathbf{Z}_1, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}], \dots, [\mathbf{Z}_n, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}]\}$ a saída de Procura3_X(C, \mathbf{Y});
 - 5 Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ devolva o par (C, \mathbf{Z}_i) ;
 - 6 devolva o par $(C, \mathbf{U}^{\mathbf{Y},C})$;
 - 7 **fim**
 - 8 **fin**
-

3.4 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos os algoritmos Procura3_X e Procura_Tudo2 que resolvem a Equação de Minkowski em coleção de intervalos maximais com maior eficiência que os algoritmos propostos por [Hashimoto e Barrera, 2001]. De fato, foi mostrada a completude das soluções da equação. Os algoritmos apresentados foram desenhados utilizando propriedades que exploram o fato de trabalhar no reticulado das coleções de intervalos maximais. Além disso, tentamos encontrar otimizações e heurísticas para melhorar a complexidade computacional e reduzir o tempo de execução dos algoritmos. Mostramos que o Algoritmo Procura_Tudo3 é um algoritmo que utiliza heurísticas e apresenta bons resultados, no entanto, pode que não encontre todas as soluções do problema. Embora os resultados foram bons, temos observado algumas propriedades que poderiam ser aproveitadas e serão apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 4

Resultados experimentais

A seguir apresentamos alguns resultados experimentais da execução do Algoritmo Procura_Tudo3 (veja o Algoritmo 7), em comparação com a execução do algoritmo proposto por [Hashimoto e Barrera, 2001] e a representação do W -operador utilizando a sup-decomposição. Estes experimentos foram realizados usando uma máquina com processador de 2.4 GHz Intel Core 2 Duo. O tempo da CPU é medido em horas(h), minutos (m) e segundos (s).

Sejam $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7$ os subconjuntos apresentados nas Figuras 4-1.a, 4-1.d, 4-1.f, 4-1.h, 4-1.j, 4-1.m e 4-1.o, respectivamente. Sejam $\psi_1, \psi_6 \in \Psi_{W_1}, \psi_2 \in \Psi_{W_2}, \psi_3 \in \Psi_{W_3}, \psi_4 \in \Psi_{W_4}, \psi_5 \in \Psi_{W_5}, \psi_7 \in \Psi_{W_6}, \psi_8 \in \Psi_{W_7}$, tais que $\mathbf{B}_{W_1}(\psi_1) = \{[A_1], \dots, [A_8]\}$, $\mathbf{B}_{W_1}(\psi_6) = \{[B_1], \dots, [B_9]\}$, $\mathbf{B}_{W_2}(\psi_2) = \{[D_1], \dots, [D_8]\}$, $\mathbf{B}_{W_3}(\psi_3) = \{[F_1], \dots, [F_{16}]\}$, $\mathbf{B}_{W_4}(\psi_4) = \{[G_1], \dots, [G_{27}]\}$, $\mathbf{B}_{W_5}(\psi_5) = \{[H_1], \dots, [H_{103}]\}$, $\mathbf{B}_{W_6}(\psi_7) = \{[I_1], \dots, [I_{38}]\}$, $\mathbf{B}_{W_7}(\psi_8) = \{[J_1], \dots, [J_{33}]\}$, onde A_1, A_2, \dots, A_8 e B_1, B_2, \dots, B_9 são os conjuntos de W_1 apresentados nas Figuras 4-1.b e 4-1.c, respectivamente; D_1, D_2, \dots, D_9 são os subconjuntos de W_2 apresentados na Figuras 4-1.e; F_1, F_2, \dots, F_{16} são os subconjuntos de W_3 apresentados na Figuras 4-1.g; G_1, G_2, \dots, G_{27} são os subconjuntos de W_4 apresentados na Figuras 4-1.i; H_1, H_2, \dots, H_{103} são os subconjuntos de W_5 apresentados na Figuras 4-1.k; I_1, I_2, \dots, I_{38} são os subconjuntos de W_6 apresentados na Figuras 4-1.n; e finalmente, J_1, J_2, \dots, J_{33} são os subconjuntos de W_7 apresentados na Figuras 4-1.p.

Aplicando-se o método discutido anteriormente, temos que as melhores representações sequenciais de $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7$ e ψ_8 são: $\psi_1 = \delta_{C_1} \varepsilon_{C_1}$, $\psi_2 = \delta_{C_{11}} \delta_{C_{12}} \varepsilon_{C_{11}} \varepsilon_{C_{12}}$, $\psi_3 = \varepsilon_{C_2} \delta_{C_3} \varepsilon_{C_3}$, $\psi_4 = \varepsilon_{C_4} \delta_{C_5} \varepsilon_{C_5}$, $\psi_5 = \delta_{C_6} \varepsilon_{C_4} \delta_{C_2}$, $\psi_6 = \delta_{C_7} \delta_{C_8} \delta_{C_9} \delta_{C_{10}} \varepsilon_{C_7} \varepsilon_{C_8} \varepsilon_{C_9} \varepsilon_{C_{10}}$, $\psi_7 = \delta_{C_6} \varepsilon_{C_5} \delta_{C_5}$, onde C_1, C_2, \dots, C_{12} são os conjuntos apresentados na Figura 4-1.q. Observe que, para ψ_8 o algoritmo não encontro uma decomposição sequencial.

A tabela 4.1 resume os resultados experimentais. Nesta tabela, usamos a seguinte notação:

$|B(\psi)|$: número de elementos estruturantes na sup-decomposição.

ND: número de deslocamentos, intersecções e uniões usando a sup-decomposição.

NS: número de soluções encontradas pelo algoritmo anterior.

NSN: número de soluções encontradas pelo algoritmo proposto.

NO: número de deslocamentos, intersecções e uniões usando a melhor solução encontrada pelo algoritmo anterior.

Operador	$ B(\psi) $	ND	NS	NSN	NO	NON	NE	NEN	T	NT
ψ_1	8	119	1	1	30	30	2	2	0.26s	0.30s
ψ_2	8	119	169	169	16	16	6	6	4.37s	1.12s
ψ_3	16	319	1	1	17	17	3	3	0.12s	0.03s
ψ_4	27	458	1	1	20	20	3	3	0.40s	0.05s
ψ_5	103	490	-	1	-	25	-	3	> 5h	0.50s
ψ_6	9	152	676	676	16	16	8	8	4m32s	4.25s
ψ_7	38	195	1	1	15	15	3	3	4m34s	0.18s
ψ_8	33	1758	-	0	-	-	-	-	> 5h	2m24s

Tabela 4.1: Tempo utilizado pelo algoritmo para encontrar representações sequenciais

NON: número de deslocamentos, intersecções e uniões usando a melhor solução encontrada pelo algoritmo proposto.

NE: número de elementos estruturantes na melhor solução pelo algoritmo anterior.

NEN: número de elementos estruturantes na melhor solução pelo algoritmo proposto.

T: tempo para o algoritmo anterior para encontrar todas representações sequenciais.

NT: tempo para o algoritmo proposto para encontrar todas representações sequenciais.

A Coluna 2 ($|B(\psi)|$) da Tabela 4.1 mostra o número de intervalos (ou equivalentemente, o número de EE's) na sup-decomposição do operador apresentado na Coluna 1 (Operador). Na Coluna 3 (ND), mostramos o número de deslocamentos, intersecções e uniões efetuados pelo operador se implementamos na forma de sua sup-decomposição. As Colunas 4 (NS) e 5 (NSN) apresentam o número de representações sequenciais encontradas pelos algoritmos. A melhor solução encontrada pelo algoritmo é uma solução que usa o menor número de operações (isto é, deslocamentos, intersecções e uniões). Nas Colunas 6 (NOA) e 7 (NOAN), apresentamos o número de operações da melhor solução. As Colunas 8 (NEA) e 9 (NEAN) mostram o número de elementos estruturantes na melhor solução. O tempo gasto pelos algoritmos para encontrar todas representações sequenciais são apresentadas nas Colunas 10 (T) e 11 (NT) da Tabela 4.1.

Os resultados apresentados mostram que o tempo de execução do algoritmo proposto foi reduzido notavelmente comparado ao algoritmo proposto por [Hashimoto e Barrera, 2001]. Além disso, as soluções encontradas são as mesmas para os dois algoritmos, por esta razão, podemos dizer que as heurísticas usadas no algoritmo resultam ser boas.

$$\begin{aligned}
 & W_1 = \begin{matrix} 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{matrix} \\
 & (a) \\
 & A_1 = \begin{matrix} 00000 \\ 00000 \\ 01110 \\ 01010 \\ 01110 \end{matrix} \quad A_2 = \begin{matrix} 01110 \\ 01010 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad A_3 = \begin{matrix} 00000 \\ 00000 \\ 11100 \\ 10100 \\ 11100 \end{matrix} \quad A_4 = \begin{matrix} 00000 \\ 11100 \\ 10100 \\ 11100 \\ 00000 \end{matrix} \quad A_5 = \begin{matrix} 11100 \\ 10100 \\ 11100 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad A_6 = \begin{matrix} 00000 \\ 00000 \\ 00111 \\ 00101 \\ 00111 \end{matrix} \quad A_7 = \begin{matrix} 00111 \\ 00101 \\ 00111 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad A_8 = \begin{matrix} 00000 \\ 00111 \\ 00101 \\ 00111 \\ 00000 \end{matrix} \\
 & (b) \\
 & B_1 = \begin{matrix} 00000 \\ 00000 \\ 01110 \\ 01110 \\ 01110 \end{matrix} \quad B_2 = \begin{matrix} 01110 \\ 01110 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad B_3 = \begin{matrix} 00000 \\ 00000 \\ 11100 \\ 11100 \\ 11100 \end{matrix} \quad B_4 = \begin{matrix} 00000 \\ 11100 \\ 11100 \\ 11100 \\ 00000 \end{matrix} \quad B_5 = \begin{matrix} 11100 \\ 11100 \\ 11100 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad B_6 = \begin{matrix} 00000 \\ 00000 \\ 00111 \\ 00111 \\ 00111 \end{matrix} \quad B_7 = \begin{matrix} 00111 \\ 00111 \\ 00000 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad B_8 = \begin{matrix} 00000 \\ 00111 \\ 00111 \\ 00111 \\ 00000 \end{matrix} \quad B_9 = \begin{matrix} 00000 \\ 01110 \\ 01110 \\ 01110 \\ 00000 \end{matrix} \\
 & (c) \\
 & W_2 = \begin{matrix} 1111. \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{matrix} \\
 & (d) \\
 & D_1 = \begin{matrix} 0000. \\ 01100 \\ 01110 \\ 01110 \\ 00000 \end{matrix} \quad D_2 = \begin{matrix} 0110. \\ 01110 \\ 01110 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad D_3 = \begin{matrix} 0000. \\ 00000 \\ 01100 \\ 01110 \\ 1110 \end{matrix} \quad D_4 = \begin{matrix} 0011. \\ 00111 \\ 00111 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad D_5 = \begin{matrix} 1100. \\ 11100 \\ 11100 \\ 00000 \\ 00000 \end{matrix} \quad D_6 = \begin{matrix} 0000. \\ 00000 \\ 00110 \\ 00111 \\ 0111 \end{matrix} \quad D_7 = \begin{matrix} 0000. \\ 11000 \\ 11100 \\ 11100 \\ 00000 \end{matrix} \quad D_8 = \begin{matrix} 0000. \\ 00110 \\ 00111 \\ 00111 \\ 00000 \end{matrix} \\
 & (e) \\
 & W_3 = \begin{matrix} 111111. \\ 1.1.1.1 \\ 111111 \end{matrix} \\
 & (f) \\
 & F_1 = \begin{matrix} 001111. \\ 0.1.1.1.0 \\ 111100 \end{matrix} \quad F_2 = \begin{matrix} 001111. \\ 0.1.1.1.0 \\ 101101 \end{matrix} \quad F_3 = \begin{matrix} 001111. \\ 0.1.1.1.0 \\ 011110 \end{matrix} \quad F_4 = \begin{matrix} 001111. \\ 0.1.1.1.0 \\ 001111 \end{matrix} \quad F_5 = \begin{matrix} 011110. \\ 0.1.1.1.0 \\ 111100 \end{matrix} \quad F_6 = \begin{matrix} 011110. \\ 0.1.1.1.0 \\ 101101 \end{matrix} \quad F_7 = \begin{matrix} 011110. \\ 0.1.1.1.0 \\ 011110 \end{matrix} \quad F_8 = \begin{matrix} 011110. \\ 0.1.1.1.0 \\ 001111 \end{matrix} \\
 & F_9 = \begin{matrix} 101101. \\ 0.1.1.1.0 \\ 111100 \end{matrix} \quad F_{10} = \begin{matrix} 101101. \\ 0.1.1.1.0 \\ 101101 \end{matrix} \quad F_{11} = \begin{matrix} 101101. \\ 0.1.1.1.0 \\ 011110 \end{matrix} \quad F_{12} = \begin{matrix} 101101. \\ 0.1.1.1.0 \\ 001111 \end{matrix} \quad F_{13} = \begin{matrix} 111100. \\ 0.1.1.1.0 \\ 111100 \end{matrix} \quad F_{14} = \begin{matrix} 111100. \\ 0.1.1.1.0 \\ 101101 \end{matrix} \quad F_{15} = \begin{matrix} 111100. \\ 0.1.1.1.0 \\ 011110 \end{matrix} \quad F_{16} = \begin{matrix} 111100. \\ 0.1.1.1.0 \\ 001111 \end{matrix} \\
 & (g) \\
 & W_4 = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 1. \dots 11. \\ \dots 1111.1 \\ 1.1111. \\ \dots 1111. \\ \dots 1.11. \\ \dots 1.11. \\ \dots 1.11. \\ \dots 1.11. \\ \dots 1.11. \end{matrix} \\
 & (h) \\
 & G_1 = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 100.0 \\ 1.0011. \\ \dots 111.0 \\ 0.11. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_2 = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 10. \\ \dots 100.0 \\ 0.0011. \\ \dots 011.0 \\ 0.11. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_3 = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 10. \\ \dots 100.0 \\ 0.0111. \\ \dots 011.0 \\ 0.11. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_4 = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 101.0 \\ 1.1010. \\ \dots 111.0 \\ 0.10. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_5 = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 11. \\ \dots 101.0 \\ 0.1010. \\ \dots 011.0 \\ 0.10. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_6 = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 10. \\ \dots 101.0 \\ 0.1110. \\ \dots 011.0 \\ 0.10. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_7 = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 100.0 \\ 1.0010. \\ \dots 111.0 \\ 0.10. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \\
 & G_8 = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 100.0 \\ 0.0010. \\ \dots 011.0 \\ 1.10. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \quad G_9 = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 10. \\ \dots 100.0 \\ 0.0110. \\ \dots 011.0 \\ 1.10. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \quad G_{10} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 01. \\ \dots 110.0 \\ 1.0011. \\ \dots 101.0 \\ 0.01. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{11} = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 11. \\ \dots 110.0 \\ 0.0011. \\ \dots 001.0 \\ 0.01. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{12} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 110.0 \\ 0.0111. \\ \dots 001.0 \\ 0.01. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{13} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 01. \\ \dots 100.1 \\ 1.1010. \\ \dots 101.0 \\ 0.00. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{14} = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 01. \\ \dots 100.1 \\ 0.1010. \\ \dots 001.0 \\ 0.00. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \\
 & G_{15} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 11. \\ \dots 111.0 \\ 0.1110. \\ \dots 001.0 \\ 0.00. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{16} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 01. \\ \dots 110.0 \\ 1.0010. \\ \dots 101.0 \\ 1.00. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \quad G_{17} = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 01. \\ \dots 110.0 \\ 0.0010. \\ \dots 001.0 \\ 1.00. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \quad G_{18} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 11. \\ \dots 110.0 \\ 0.0110. \\ \dots 001.0 \\ 1.00. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \quad G_{19} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 100.1 \\ 1.0010. \\ \dots 101.1 \\ 0.01. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{20} = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 100.1 \\ 0.0011. \\ \dots 001.1 \\ 0.01. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{21} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 10. \\ \dots 100.1 \\ 0.0011. \\ \dots 001.1 \\ 0.01. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \\
 & G_{22} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 101.1 \\ 1.1010. \\ \dots 101.1 \\ 0.00. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{23} = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 101.1 \\ 0.1010. \\ \dots 001.1 \\ 0.00. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{24} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 10. \\ \dots 101.1 \\ 0.1110. \\ \dots 001.1 \\ 0.00. \\ \dots 0. \dots \end{matrix} \quad G_{25} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 100.1 \\ 1.0010. \\ \dots 101.1 \\ 1.00. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \quad G_{26} = \begin{matrix} \dots 1 \dots \\ 0. \dots 00. \\ \dots 100.1 \\ 0.1001. \\ \dots 001.1 \\ 1.00. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \quad G_{27} = \begin{matrix} \dots 0 \dots \\ 0. \dots 10. \\ \dots 100.1 \\ 0.0110. \\ \dots 001.1 \\ 1.00. \\ \dots 1. \dots \end{matrix} \\
 & (i)
 \end{aligned}$$

Figura 4.1: Alguns exemplos de transformação da sup-decomposição para decomposições sequenciais.

$$W_5 = \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix} \quad (j)$$

$H_1 =$	$H_2 =$	$H_3 =$	$H_4 =$	$H_5 =$	$H_6 =$	$H_7 =$	$H_8 =$
$H_9 =$	$H_{10} =$	$H_{11} =$	$H_{12} =$	$H_{13} =$	$H_{14} =$	$H_{15} =$	$H_{16} =$
$H_{17} =$	$H_{18} =$	$H_{19} =$	$H_{20} =$	$H_{21} =$	$H_{22} =$	$H_{23} =$	$H_{24} =$
$H_{25} =$	$H_{26} =$	$H_{27} =$	$H_{28} =$	$H_{29} =$	$H_{30} =$	$H_{31} =$	$H_{32} =$
$H_{33} =$	$H_{34} =$	$H_{35} =$	$H_{36} =$	$H_{37} =$	$H_{38} =$	$H_{39} =$	$H_{40} =$
$H_{41} =$	$H_{42} =$	$H_{43} =$	$H_{44} =$	$H_{45} =$	$H_{46} =$	$H_{47} =$	$H_{48} =$
$H_{49} =$	$H_{50} =$	$H_{51} =$	$H_{52} =$	$H_{53} =$	$H_{54} =$	$H_{55} =$	$H_{56} =$
$H_{57} =$	$H_{58} =$	$H_{59} =$	$H_{60} =$	$H_{61} =$	$H_{62} =$	$H_{63} =$	$H_{64} =$
$H_{65} =$	$H_{66} =$	$H_{67} =$	$H_{68} =$	$H_{69} =$	$H_{70} =$	$H_{71} =$	$H_{72} =$
$H_{73} =$	$H_{74} =$	$H_{75} =$	$H_{76} =$	$H_{77} =$	$H_{78} =$	$H_{79} =$	$H_{80} =$
$H_{81} =$	$H_{82} =$	$H_{83} =$	$H_{84} =$	$H_{85} =$	$H_{86} =$	$H_{87} =$	$H_{88} =$
$H_{89} =$	$H_{90} =$	$H_{91} =$	$H_{92} =$	$H_{93} =$	$H_{94} =$	$H_{95} =$	$H_{96} =$
$H_{97} =$	$H_{98} =$	$H_{99} =$	$H_{100} =$	$H_{101} =$	$H_{102} =$	$H_{103} =$	

Figura 4.0: Alguns exemplos de transformação da sup-decomposição para decomposições sequenciais.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho estudamos a decomposição sequencial de um W -operador a partir da base do operador. Na Seção 5.1, mostramos as principais contribuições deste trabalho. Na Seção 5.2, propomos uma nova metodologia para a continuidade da pesquisa realizada neste trabalho.

5.1 Resumo das Contribuições

Neste trabalho, mostramos uma metodologia para encontrar uma representação sequencial de um W -operador dada sua base. No decorrer da pesquisa temos visto que a complexidade computacional do algoritmo proposto por [Hashimoto e Barrera, 2001] era grande, devido principalmente ao procedimento de encontrar soluções da Equação de Minkowski em Coleções de Intervalos Maximais, isto é, dado \mathbf{Y} , encontrar \mathbf{X} e C na equação $\mathbf{X} \oplus C^t = \mathbf{Y}$. É por isso que esta equação foi pesquisada em detalhe neste trabalho.

No Capítulo 3, mostramos uma nova metodologia para resolver a Equação de Minkowski em Coleções de Intervalos Maximais. No começo mostramos que o limite superior para as soluções \mathbf{X} (o conjunto $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ apresentado por [Hashimoto e Barrera, 2001]) possui propriedades importantes. Além de ser o limite superior, ele permite verificar se a equação tem soluções se, e somente se, ele é uma solução. Também apresentamos o conjunto $\Phi^{\mathbf{Y},C}$ que possui propriedades importantes, uma delas é que todos os elementos nesse conjunto são soluções da equação e outra propriedade é que todos os limites inferiores para qualquer solução \mathbf{X} estão em $\Phi^{\mathbf{Y},C}$. Uma vez que encontrar soluções para a equação tem uma complexidade exponencial, mostramos maneiras eficientes de criar os conjuntos $\mathbf{U}^{\mathbf{Y},C}$ e $\Phi^{\mathbf{Y},C}$. Por último, apresentamos heurísticas de busca que melhoram a eficiência dos nossos algoritmos. Todas essas contribuições se refletem nos resultados experimentais apresentados no Capítulo 4.

Apesar de ter implementado heurísticas de busca no algoritmo e dos bons resultados encontrados nos resultados experimentais. O Algoritmo Procura_Tudo3 (veja o Algoritmo 7) nem sempre encontra uma solução para nosso problema, ou seja, existem alguns W -operadores que podem ser representados por uma decomposição puramente sequencial, mas o algoritmo não encontra solução alguma, como foi mostrado no último resultado experimental. Isto acontece pelo fato de usar heurísticas de busca, não consideramos todas as possíveis soluções para a Equação de Minkowski em cada passo do algoritmo. De fato, isso limita nossa metodologia a soluções sob-ótimas. Existem perspectivas de solução para evitar esse problema e serão explicadas na próxima seção.

5.2 Perspectivas futuras

Temos visto no decorrer da pesquisa que a busca exaustiva é a única maneira de encontrar todas as soluções do problema, então, o Algoritmo Procura_Tudo2 (veja o Algoritmo 6) pode encontrar todas as soluções para nosso problema. No entanto, a árvore de busca criada pelo algoritmo é muito grande, uma vez que o número de soluções da Equação de Minkowski pode ser muito grande. Para resolver este problema estudamos outro tipo de árvore de decomposição sequencial utilizando uma nova metodologia baseada numa equação similar à Equação de Minkowski em Coleção de Intervalos Maximais. Vamos chamar ela de Equação de Minkowski em Intervalos de Coleções de Intervalos Maximais, isto é:

Definição 5.1 (Equação de Minkowski em Intervalos de Coleções de Intervalos Maximais). *Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{I}_{W'}$, tal que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Dado um intervalo $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_{W'})$ e um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$, encontrar todas as coleções de intervalos maximais $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ tais que*

$$\mathbf{X} \oplus C^t \in [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \quad (5.1)$$

Uma vez que $\mathbf{X} \oplus C^t \in \mathcal{I}_{W \oplus C^t}$ e todos os elementos em $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_{W'})$, então W e W' satisfazem $W \oplus C^t = W'$.

Se conseguirmos encontrar soluções para esta equação, podemos criar uma árvore de decomposição sequencial utilizando recursivamente as soluções encontradas para a Equação (5.1). Esta nova árvore é baseada na árvore de decomposição sequencial apresentada por [Hashimoto e Barrera, 2001], isto é, cada nó da árvore de decomposição é considerado como um intervalo de coleções de intervalos maximais. O nó raiz da árvore é composto pela base do W -operador e os nós restantes são soluções (recursivas) da Equação (5.1). Se uma folha desta árvore é um intervalo que contém a base do operador identidade, então o caminho do nó raiz até essa folha representa uma decomposição sequencial (usando dilatações e erosões) do W -operador. Esta árvore de decomposição sequencial tem a característica de ter muito menos nós comparado à árvore original como podemos observar na Figura 5.1.

Na Figura 5.1.a, mostramos uma árvore de decomposição sequencial utilizando a metodologia proposta por [Hashimoto e Barrera, 2001]. E na Figura 5.1.b, mostramos a árvore gerada utilizando a metodologia descrita nesta seção. Sejam \mathbf{Y} a base de um W -operador e C_1 um subconjunto as entradas do Algoritmo Procura3_X (veja o Algoritmo 5), então temos como saída uma coleção de intervalos \mathfrak{X} . Logo, seja $[\mathbf{Z}_1, \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C_1}] \in \mathfrak{X}$. Pelo Teorema 3.3, temos que para todo $\mathbf{X} \in [\mathbf{Z}_1, \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C_1}]$, $\mathbf{X} \oplus C_1 = \mathbf{Y}$. De fato, na árvore de decomposição original todos os conjuntos \mathbf{X} no intervalo são nós. No entanto, na árvore de decomposição proposta nesta seção consideramos todos esses nós somente como um nó, ou seja, $[\mathbf{Z}_1, \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C_1}]$ seria um nó de nossa árvore e a aresta que liga $[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}]$ e $[\mathbf{Z}_1, \mathbf{U}^{\mathbf{Y}, C_1}]$ é rotulada por δ_{C_1} . Similarmente podemos usar essa ideia para a encontrar soluções utilizando as bases duais. Sejam \mathbf{Y}^* a base dual de um W -operador e D_1 as entradas do Algoritmo Procura3_X. Seja $[\mathbf{Z}_2, \mathbf{U}_2^{\mathbf{Y}, D_1}]$ um intervalo da saída do algoritmo, então $[\mathbf{U}_2^{*\mathbf{Y}, D_1}, \mathbf{Z}_2^*]$ seria um nó de nossa árvore e a aresta que liga $[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}]$ e $[\mathbf{U}_2^{*\mathbf{Y}, D_1}, \mathbf{Z}_2^*]$ é rotulada por $\varepsilon_{D_1^t}$. Dessa maneira, esta metodologia poderia melhorar a complexidade de nosso problema, uma vez que o número de nós desta árvore seria muito menor em comparação com a árvore proposta por [Hashimoto e Barrera, 2001].

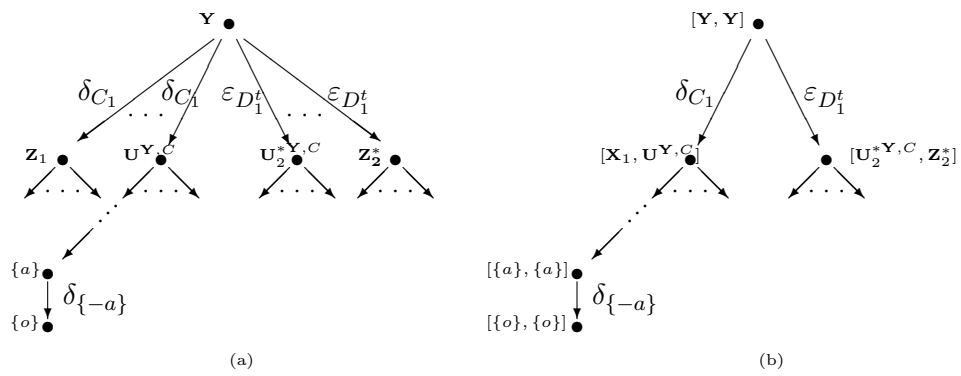


Figura 5.1: Diagrama das árvores de decomposição. (a) Árvore de decomposição original; (b) Árvore de decomposição proposta

Referências Bibliográficas

- Barrera e Salas(1996)** J. Barrera e G. P. Salas. Set Operations on Closed Intervals and Their Applications to the Automatic Programming of Morphological Machines. *Electronic Imaging*, 5(3):335–352. Citado na pág. [1](#), [12](#), [13](#), [16](#), [17](#), [18](#)
- Barrera et al.(1997)** J. Barrera, E. R. Dougherty, e N. S. Tomita. Automatic Programming of Binary Morphological Machines by Design of Statistically Optimal Operators in the Context of Computational Learning Theory. *Journal of Electronic Imaging*, 6(1):54–67. Citado na pág. [1](#)
- Birkhoff(1967)** G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. Citado na pág. [8](#), [10](#)
- Cormen et al.(2001)** Thomas H. Cormen, Clifford Stein, Ronald L. Rivest, e Charles E. Leiserson. *Introduction to Algorithms*. McGraw-Hill Higher Education, 2nd edição. ISBN 0070131511. Citado na pág. [2](#)
- Filho.(1980)** E. A. Filho. *Teoria Elementar dos Conjuntos*. Livraria Nobel S.A., São Paulo. Citado na pág. [5](#)
- Hashimoto e Barrera(2001)** R. F. Hashimoto e J. Barrera. From the Sup-Decomposition to Sequential Decompositions. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 15:197–216. Citado na pág. [2](#), [13](#), [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [20](#), [21](#), [23](#), [24](#), [25](#), [29](#), [39](#), [44](#), [45](#), [46](#), [51](#), [52](#)
- Hashimoto e Barrera(2003)** R. F. Hashimoto e J. Barrera. A Greedy Algorithm for Decomposing Convex Structuring Elements. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 18(3):269–289. Citado na pág. [2](#)
- Hashimoto et al.(2000)** R. F. Hashimoto, J. Barrera, e C. E. Ferreira. A Combinatorial Optimization Technique for the Sequential Decomposition of Erosions and Dilations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 13(1):17–33. Citado na pág. [2](#)
- Matheron(1975)** G. Georges Matheron. *Random sets and integral geometry*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, New York, London. ISBN 0-471-57621-2. URL <http://opac.inria.fr/record=b1086458>. Includes index. Citado na pág. [1](#)
- Serra e Vincent(1992)** J. Serra e L. Vincent. An Overview of Morphological Filtering. *Circuits Systems Signal Process*, 11(1):47–108. Citado na pág. [24](#)
- Xu(1991)** J. Xu. Decomposition of Convex Polygonal Morphological Structuring Elements into Neighborhood Subsets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(2):153–162. Citado na pág. [2](#)