

**Modelos de Crescimento com
Catástrofes Uniformes**

Joan Jesus Amaya Triana

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Fábio Prates Machado

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES/CNPq

São Paulo, Março 2022

Modelos de Crescimento com Catástrofes Uniformes

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela
Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho,
realizada em 09/03/2022.

Comissão julgadora:

- Prof. Dr. Fábio Prates Machado-(Presidente) - USP
- Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes - USP
- Prof. Dr. Valdivino Vargas Junior - UFG
- Prof. Dr. Rinaldo Schinazi - U.Colorado
- Prof. Dr. Alejandro Roldan Correa - U.Antioquia

A minha filha Isis que em breve nascerá.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Fábio Prates, pela confiança, paciência, pelo valioso tempo que me deu ao longo da elaboração deste trabalho e por compartilhar seu conhecimento comigo.

A Rinaldo Schinazi, Valdivino Vargas e Alejandro Roldan por suas sugestões para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do IME-USP que tive o prazer de conhecer e aprender deles.

Aos meus colegas e amigos da pós-graduação pela companhia e discussões. Em particular, a Magno Tairone.

A minha esposa, Morgana Valle, pelo companheirismo, cumplicidade e amor que sempre tem tido comigo desde o momento que nos conhecemos.

Aos meus pais Jesus Amaya e Clara Triana, meu irmão Yeferson Amaya e aos meus sobrinhos pelo amor, incentivos e apoio incondicional.

À Capes e CNPq (processo 141307/2019 – 6) pelo apoio financeiro.

Resumo

Amaya.J. **Modelos de Crescimento com Catástrofes Uniformes**. São Paulo, 2022. 63p. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

As populações são frequentemente expostas a eventos catastróficos que podem causar a eliminação massiva de seus indivíduos. Uma Catástrofe pode destruir instantaneamente toda a população ou apenas uma parte dela. Após uma catástrofe ter acontecido, os sobreviventes podem reagir de diferentes maneiras, uma delas é se dispersar para tentar criar colônias. Recentemente Junior *et al* [7, 9] analisaram diferentes esquemas de dispersão em populações sujeitas à catástrofes geométricas (a catástrofe atinge os indivíduos de forma sequencial e seus efeitos param assim que o primeiro indivíduo sobrevive), e estudaram como esses esquemas impactam na sobrevivência da população comparando-o com o cenário no qual não se tem dispersão. Nesta tese, introduzimos uma variação dos modelos estudados por Junior *et al* [7, 9]. Tal variação foi considerar catástrofes uniformes (uma porção eliminatória da população é escolhida uniformemente). Obtemos para esses modelos condições de sobrevivência, probabilidade de extinção e tempo médio de sobrevivência quando os processos morrem quase certamente. Comparamos como o tipo de catástrofe (geométrica ou uniforme) e estratégia de dispersão ajuda que a população tenha maior probabilidade de sobrevivência; e no caso que a população morre com probabilidade 1, independentemente do tipo de catástrofe e estratégia de dispersão, comparamos como o tipo de catástrofe prolonga (em média) o tempo de existência da população.

Palavras-chave

Catástrofe, uniforme, dispersão, sobrevivência.

Abstract

Amaya.J. **Growth models with uniform catastrophes**. São Paulo, 2022. 63p. PhD. Thesis. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

Populations are often exposed to catastrophic events that can cause the massive elimination of their individuals. A Catastrophe can instantly destroy the entire population or just a part of it. After a catastrophe has happened, survivors can react in different ways, one of which is to disperse to try to create colonies. Recently Junior *et al* [7, 9] analyzed different dispersion schemes in populations subject to geometric catastrophes (catastrophe hits individuals sequentially and its effects stop as soon as the first individual survives), and studied how these schemes impact the survival of the population, comparing it with the scenario in which there is no dispersion. In this thesis, we introduce a variation of the models studied by Junior *et al* [7, 9]. Such variation was to consider uniform catastrophes (an eliminatory portion of the population is uniformly chosen). For these models we obtain survival conditions, extinction probabilities and average survival time when processes die almost certainly. We compare how the type of catastrophe (geometric or uniform) and dispersion strategy helps the population to have a higher probability of survival; and in the case that the population dies with probability 1, irrespective of the type of catastrophe and dispersion strategy, we compare how the type of catastrophe prolongs (on average) the population's lifetime.

Keywords

Catastrophic, uniform, disperse, survival

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Considerações Iniciais	7
1.2	Contribuições	8
2	Catástrofe Uniforme	9
2.1	Modelo com catástrofe uniforme	11
2.2	Modelos com catástrofe uniforme e dispersão	12
2.3	Catástrofe geométrica vs catástrofe uniforme	15
	Caso $d = 2$	15
	Caso $d = 3$	21
2.4	Provas	25
3	Cotas para o alcance Máximo	37
3.1	Cotas para os modelos $C_d^O(\lambda, p)$ e $C_d^i(\lambda, p)$	38
3.1.1	Modelo $C_d^O(\lambda, p)$	38
3.1.2	Modelo $C_d^i(\lambda, p)$	40
3.2	Provas	41
4	Tempo de extinção	52
4.1	Tempo de extinção para $C_d^O(\lambda)$ e $C_d^i(\lambda)$	53
4.2	Comparando Catástrofes	54
	Caso $d = 2$	54
	Caso $d = 3$	56
4.3	Provas	57
	Referências Bibliográficas	60
A	APÊNDICE A - Funções	62
A.1	Função Transcendente de Lerch	62
A.2	Função de Gauss	62
A.3	Função W de Lambert	63

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

As populações são frequentemente expostas a eventos catastróficos que podem causar a eliminação massiva de seus indivíduos, por exemplo, a destruição do habitat, desastres ambientais, epidemias, etc. Uma catástrofe pode destruir instantaneamente toda a população ou apenas uma parte dela. Após uma catástrofe ter acontecido os sobreviventes (quando existirem) adotam diferentes tipos de estratégias, como por exemplo, migrar a novos locais para iniciar uma nova colônia ou ficar no mesmo lugar e reiniciar a colônia. Para tentar explicar o comportamento de tais populações modelos estocásticos têm sido propostos, em particular, processos de Markov em tempo contínuo.

Na maioria de situações práticas, a catástrofe elimina só uma parte da população. Brockwell *et al* [4] considerou modelos de Markov para o crescimento de populações sujeito a três diferentes tipos de catástrofes onde os sobreviventes se dispersam após o colapso, a saber: catástrofes binomias onde os indivíduos da população são expostos simultaneamente ao efeito catastrófico; catástrofes geométricas onde os indivíduos são atingidos sequencialmente até que o primeiro indivíduo sobrevive; e catástrofes uniformes onde uma porção dos indivíduos é eliminada e escolhida de forma uniforme. Artalejo *et al* [3], por outro lado considerou que os sobreviventes permanecem juntos na mesma colônia, isto é, não existe dispersão, e no momento que a população se extingue ela é reiniciada.

Schinazi [14], Machado *et al* [12, 13] e Junior *et al* [7, 8, 9] estudaram modelos onde os indivíduos sobreviventes após uma catástrofe ter acontecido tentam criar novas colônias. Eles consideram diferentes tipos de catástrofe (binomial e/ou geométrica) e diferentes formas nas quais os indivíduos se dispersam. Especificamente, Junior *et al* [9] estudaram um de tais modelos onde o tipo de catástrofe é geométrica e consideraram três diferentes tipos de estratégias de dispersão. Dependendo do tipo de estratégia adotada pelos indivíduos sobreviventes, a probabilidade de sobrevivência da população irá ser maior ou menor (a depender da taxa com que novos indivíduos eram criados e da força da catástrofe).

1.2 Contribuições

Nesta tese, introduzimos uma variação dos modelos de crescimento populacional estudados por Junior *et al* [7, 9]. Obtivemos condições para a sobrevivência de tais modelos, sua probabilidade de extinção para dimensões baixas (2 e 3), assim como o tempo médio de sobrevivência quando os processos morrem quase certamente. Além disso, comparamos os resultados obtidos no nosso modelo com o modelo análogo estudado por Junior *et al* [7, 9], e obtivemos com isso condições nas quais um ou outro tipo de catástrofe e dispersão pode chegar a ser mais desastrosa para a sobrevivência da população.

A tese está organizada da seguinte maneira.

No Capítulo 2 introduzimos o modelo que estudamos. Na dinâmica de tal modelo consideramos catástrofes uniformes. Num primeiro momento obtivemos a distribuição do número de indivíduos que sobrevivem após uma catástrofe e antes deles adotarem algum tipo de estratégia de dispersão, assim como sua função geradora de probabilidade e primeiro momento. Posteriormente de forma análoga ao feito por Junior *et al* [9], definimos modelos com catástrofes uniformes e dispersão (de dois tipos diferentes), para os quais foram determinadas condições para a sobrevivência e sua respectiva probabilidade de extinção. Na última parte, fizemos comparações de nossos resultados e os mostrados por Junior *et al* [9] enquanto a sobrevivência.

No Capítulo 3 obtivemos cotas para a distribuição e valor esperado do tempo de extinção de um processo de ramificação a tempo discreto. As cotas obtidas foram usadas na obtenção de cotas para o alcance máximo das colônias criadas nos modelos estudados por Junior *et al* [9].

No Capítulo 4 para nossos modelos, no caso em que os processos morrem quase certamente, obtivemos o tempo esperado para a extinção (em dimensão 2 e 3). Além disso, na região onde tanto nossos modelos como os modelos em Junior *et al* [7] morrem com probabilidade 1, obtivemos condições que determinam quando certa catástrofe e estratégia de dispersão prolonga mais a existência da população (em média).

Catástrofe Uniforme

As populações são frequentemente expostas a eventos catastróficos que podem causar a eliminação massiva de seus indivíduos, por exemplo, destruição do habitat, desastre ambiental, epidemias, etc. Uma catástrofe pode instantaneamente destruir toda a população ou apenas uma parte dela. Para modelar tais eventos, se assume que quando uma população é atingida por uma catástrofe, seu tamanho se reduz seguindo alguma lei de probabilidade.

Para catástrofes que atingem os indivíduos sequencialmente e os efeitos de um desastre param assim que o primeiro indivíduo sobrevive, se existe algum sobrevivente, o modelo apropriado é assumir uma lei de probabilidade geométrica. Isto é, se no instante de tempo que uma catástrofe atinge a população o tamanho da população é i , esta é reduzida a j com probabilidade

$$\mu_{ij}^g = \begin{cases} (1-p)^i, & j = 0 \\ p(1-p)^{i-j}, & 1 \leq j \leq i, \end{cases}$$

onde $0 < p < 1$. A forma μ_{ij}^g representa o que chamamos catástrofe geométrica. A catástrofe geométrica pode corresponder a casos onde o declínio da população é interrompido quando qualquer indivíduo sobrevive ao evento catastrófico. Este pode ser apropriado para algumas formas de epidemias ou quando a catástrofe tem um efeito de propagação sequencial como no caso de modelos predador-presa (o predador mata até ficar satisfeito).

Um outro tipo de catástrofe é onde uma porção eliminatória da população é escolhida uniformemente. Isto é, se num instante de tempo uma catástrofe atinge a população e seu tamanho é i , esta é reduzida a j com probabilidade

$$\mu_{ij} = \frac{1}{i}, j \in \{0, 1, 2, \dots, i-1\}.$$

Junior *et al* [8] consideraram modelos de crescimento estocástico para representar dinâmicas populacionais sujeitas a catástrofes geométricas. Eles analisaram diferentes tipos de dispersão após a catástrofe, para estudar como essas diferenças impactam na viabilidade de sobrevivência da população e compará-las com o caso no qual não existe

dispersão. Para tais modelos de crescimento com dispersão populacional, inicialmente tem-se o grafo infinito \mathbb{T}_d^+ (a árvore homogênea onde a origem tem grau d), no qual todos os vértices estão vazios, com exceção da origem, onde há uma única colônia com um único indivíduo. O número de indivíduos na colônia nascem seguindo um processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$. A cada colônia é associado um tempo exponencial de média 1 que indica quando uma catástrofe geométrica atinge a colônia. Os indivíduos que sobrevivem a catástrofe se dispersam entre os d vértices vizinhos mais longe da raiz para tentar criar novas colônias. Entre os vértices que vão ao mesmo vértice para criar uma nova colônia nele, apenas um consegue, os outros morrem. Assim, quando a catástrofe acontece numa colônia, a colônia é substituída por $0, 1, \dots, d$ colônias. Aqui vamos considerar somente dois tipos de dispersão (estudadas por Junior *et al* [8]):

- *Dispersão ótima dos indivíduos*, da esquerda para direita, com o objetivo de criar o maior número possível de novas colônias. Se r indivíduos sobrevivem a catástrofe, então o número de novas colônias criadas é igual a $\min\{r, d\}$. Esse processo é denotado como $C_d^O(\lambda, p)$.
- *Dispersão independente* dos indivíduos, cada indivíduo que sobrevive a catástrofe escolhe aleatoriamente um vértice vizinho e tenta criar uma nova colônia nele. Quando a quantidade de sobreviventes é r , a probabilidade de ter $y \leq \min\{r, d\}$ vértices colonizados é

$$\frac{T(r, y)}{d^r} \binom{d}{y},$$

onde

$$T(r, y) = \sum_{i=0}^y \left[(-1)^i \binom{y}{i} (y-i)^r \right]$$

é o número de funções sobrejetoras $f : A \rightarrow B$, com $|A| = r$ e $|B| = y$. Tal processo é denotado como $C_d^i(\lambda, p)$.

Os processos $C_d^O(\lambda, p)$ e $C_d^i(\lambda, p)$ são processos de Markov em tempo contínuo com espaço de estados $\mathbb{N}_0^{\mathbb{T}_d^+}$. Para cada um desses processos se diz que sobrevive se com probabilidade positiva existem colônias em qualquer instante de tempo. Caso contrário, se diz que o processo morre.

Teorema 2.1 (Junior *et al* [8]) *Seja ψ_d^O e ψ_d^i a probabilidade de extinção do processo $C_d^O(\lambda, p)$ e $C_d^i(\lambda, p)$, respectivamente. Então*

1. $\psi_2^O < 1$ se, e somente se $p > \frac{1}{\lambda+1}$.
2. $\psi_3^O < 1$ se, e somente se $p > \frac{\lambda+1}{2\lambda^2+2\lambda+2}$.
3. $\psi_2^i < 1$ se, e somente se $p > \frac{\lambda+2}{\lambda^2+2\lambda+2}$.

$$4. \psi_3^i < 1 \text{ se, e somente se } p > \frac{\lambda + 3}{2\lambda^2 + 3\lambda + 3}.$$

Vamos considerar uma variação dos modelos de crescimento populacional estudados por Junior *et al* [8] e descritos anteriormente. Tal variação será considerar catástrofes uniformes em vez de geométricas. Primeiro vamos obter a distribuição do número de sobreviventes numa colônia após uma catástrofe uniforme ter acontecido. Posteriormente, considerando dispersão ótima e independente, após uma catástrofe uniforme ter acontecido, obtemos condições para a sobrevivência assim como a probabilidade de extinção (para $d = 2$ e $d = 3$). Finalmente comparamos quando uma catástrofe geométrica é mais desastrosa que uma uniforme (ou vice-versa) tendo presente o tipo de dispersão (ótima e uniforme) na região de parâmetros (p, λ) .

2.1 Modelo com catástrofe uniforme

O processo inicia com uma colônia na raiz de \mathbb{T}_d^+ , com um só indivíduo. O número de indivíduos na colônia nascem seguindo um processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$. A cada colônia é associado um tempo exponencial de média 1 que indica quando uma catástrofe uniforme atinge a colônia. Os indivíduos que sobrevivem a catástrofe se dispersam entre os d vértices vizinhos mais longe da raiz para tentar criar novas colônias. Entre os vértices que vão ao mesmo vértice para criar uma nova colônia nele, apenas um consegue, os outros morrem. Assim, quando a catástrofe acontece numa colônia, a colônia é substituída por $0, 1, \dots, d$ colônias.

No seguinte resultado estabelecemos a distribuição, função geradora de probabilidade e valor esperado do número de indivíduos que sobrevivem numa colônia após uma catástrofe uniforme, onde N é a v.a que indica tal número.

Teorema 2.2 *Suponha que indivíduos numa colônia nascem seguindo um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, que o tempo para uma catástrofe acontecer segue uma v.a. exponencial de taxa 1 e a catástrofe segue uma distribuição uniforme. Então*

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \frac{1}{\lambda + 1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^n \Phi \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}, 1, n + 1 \right), \\ E(s^N) &= \frac{\ln(1 - \lambda(s - 1))}{\lambda(1 - s)}, e \\ E(N) &= \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

onde $\Phi \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}, 1, n + 1 \right)$ é a Função Transcendente de Lerch (ver Apêndice A.1).

Observação 2.3 Note que a distribuição de N depende unicamente de λ , contrário ao caso em que o tipo de catástrofe for geométrica onde a distribuição de N depende tanto de λ como do parâmetro p da distribuição geométrica (ver Junior *et al* [9]).

2.2 Modelos com catástrofe uniforme e dispersão

Sejam $C_d^O(\lambda)$ e $C_d^i(\lambda)$ os processos que tem catástrofes uniformes com dispersão ótima e independente, respectivamente. Os processos $C_d^O(\lambda)$ e $C_d^i(\lambda)$ são processos de Markov em tempo contínuo com espaço de estados $\mathbb{N}_0^{\mathbb{T}^d}$.

Denotaremos por $\psi_d^{O,u}$ e $\psi_d^{i,u}$ a probabilidade de extinção para $C_d^i(\lambda)$ e $C_d^O(\lambda)$, respectivamente. Para cada um destes processos, se diz que sobrevive se com probabilidade positiva existem colônias em todo instante de tempo, caso contrario se diz que o processo morre. Usando argumento de acoplamento pode se observar que a probabilidade de extinção $\psi_d^{O,u}$ e $\psi_d^{i,u}$ são funções não-crescentes de d e λ .

Note também (assim como em Junior *et al* [8]), que a dispersão ótima maximiza o número de colônias sempre que houver indivíduos que sobreviveram à última catástrofe. Assim, para todo $d \geq 2$

$$\psi_d^{O,u} \leq \psi_d^{i,u}.$$

Os seguinte resultados apresentam condições necessárias e suficientes para a sobrevivência da população dos processos $C_d^i(\lambda)$ e $C_d^O(\lambda)$, respectivamente, para todo $d \geq 2$.

Observação 2.4 A função W no Teorema 2.5 é a Função W de Lambert (ver Apêndice A.3). No Teorema 2.6 a função ${}_2F_1$ é a Função Hipergeométrica de Gauss (ver Apêndice A.2).

Teorema 2.5 O processo $C_d^i(\lambda)$ sobrevive ($\psi_d^{i,u} < 1$) se, e somente se

$$\lambda > -\frac{d^2}{d-1} W\left(-\frac{d-1}{d} e^{\frac{1-d}{d}}\right) - d.$$

Teorema 2.6 O processo $C_d^O(\lambda)$ sobrevive ($\psi_d^{O,u} < 1$) se, e somente se

$${}_2F_1\left(3, d+2; d+3; \frac{\lambda}{\lambda+1}\right) < \frac{(\lambda-2)(d+2)(\lambda+1)^{d+2}}{2\lambda^{d+1}}.$$

Os seguintes resultados apresentam condições necessárias e suficientes para a sobrevivência dos processos $C_2^O(\lambda)$, $C_2^i(\lambda)$, $C_3^O(\lambda)$ e $C_3^i(\lambda)$, assim como sua respectiva probabilidade de extinção.

Teorema 2.7 *O processo $C_2^O(\lambda)$ sobrevive ($\psi_2^{O,u} < 1$) se, e somente se*

$$\lambda(\lambda + 2) - 3(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) > 0.$$

Além disso,

$$\psi_2^{O,u} = \min \left\{ 1, \frac{(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda + 2) - 2(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1)} \right\}.$$

Do teorema anterior, temos que existe transição de fase (em λ) para o modelo $C_2^O(\lambda)$. Denotaremos por λ_2^O o parâmetro crítico na transição de fase, isto é

$$\lambda_2^O = \inf\{\lambda : C_2^O(\lambda) \text{ sobrevive}\}.$$

O valor crítico λ_2^O é a solução positiva da equação $\lambda(\lambda + 2) - 3(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) = 0$ (usando Newton-Raphson $\lambda_2^O \approx 4.063871036$)

Teorema 2.8 *O processo $C_2^i(\lambda)$ sobrevive ($\psi_2^{i,u} < 1$) se, e somente se*

$$\lambda > -4W\left(-\frac{1}{2e^{1/2}}\right) - 2.$$

Além disso,

$$\psi_2^{i,u} = \min \left\{ 1, \frac{\ln(\lambda + 1)}{\lambda - \ln\left(\frac{(1 + \lambda/2)^4}{\lambda + 1}\right)} \right\}$$

Do teorema anterior, temos que existe transição de fase (em λ) para o modelo $C_2^i(\lambda)$. Denotaremos por λ_2^i o parâmetro crítico na transição de fase, isto é

$$\lambda_2^i = \inf\{\lambda : C_2^i(\lambda) \text{ sobrevive}\}.$$

O valor crítico λ_2^i é a solução positiva da equação $-4W\left(-\frac{1}{2e^{1/2}}\right) - 2 = 0$ (usando Newton-Raphson $\lambda_2^i \approx 5.025724834$).

Teorema 2.9 *O processo $C_3^O(\lambda)$ sobrevive ($\psi_3^{O,u} < 1$) se, e somente se*

$$\lambda(4\lambda^2 + 15\lambda + 10) - 12(\lambda + 1)^2\ln(\lambda + 1) > 0.$$

Além disso,

$$\psi_3^{O,u} = \min \left\{ 1, \frac{\lambda + 1}{a} \left[\sqrt{b} + 2(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) - \lambda(\lambda + 2) \right] \right\},$$

onde

$$a = \lambda(2\lambda^2 + 9\lambda + 6) - 6(\lambda + 1)^2 \ln(\lambda + 1) e$$

$$b = \lambda^2(\lambda + 2)^2 + 2\lambda(3\lambda + 2) \ln(\lambda + 1) - 16(\lambda + 1) \ln(\lambda + 1).$$

Do teorema anterior, temos que existe transição de fase (em λ) para o modelo $C_3^O(\lambda)$. Denotaremos por λ_3^O o parâmetro crítico na transição de fase, isto é

$$\lambda_3^O = \inf\{\lambda : C_3^O(\lambda) \text{ sobrevive}\}.$$

O valor crítico λ_3^O é a solução positiva da equação $\lambda(\lambda + 2) - 3(\lambda + 1) \ln(\lambda + 1) = 0$ (usando Newton-Raphson $\lambda_3^O \approx 2.691617602$).

Teorema 2.10 *O processo $C_3^i(\lambda)$ sobrevive ($\psi_3^{i,u} < 1$) se, e somente se*

$$\lambda > -\frac{9}{2}W\left(-\frac{1}{3e^{2/3}}\right) - 3.$$

Além disso

$$\psi_3^{i,u} = \min\left\{1, \frac{1}{2a} \left(-b + \sqrt{b^2 + 8\lambda a p_0}\right)\right\},$$

onde

$$a = 9 \ln\left(\frac{3(2\lambda + 3)(\lambda + 1)}{(\lambda + 3)^2}\right) - 11\lambda p_0 + 2\lambda,$$

$$b = 9 \ln\left(\frac{3(\lambda + 1)}{2\lambda + 3}\right) - 5\lambda p_0 + 2\lambda e$$

$$p_0 = \frac{\ln(\lambda + 1)}{\lambda}.$$

Do teorema anterior, temos que existe transição de fase (em λ) para o modelo $C_3^i(\lambda)$. Denotaremos por λ_3^i o parâmetro crítico na transição de fase, isto é

$$\lambda_3^i = \inf\{\lambda : C_3^i(\lambda) \text{ sobrevive}\}.$$

O valor crítico λ_3^i é a solução positiva da equação $-\frac{9}{2}W\left(-\frac{1}{3e^{(2/3)}}\right) - 3 = 0$ (usando Newton-Raphson $\lambda_3^i \approx 3.432098523$).

Como em Junior *et al* [8], temos que se $d = \infty$ o único modelo que faz sentido é o modelo com dispersão ótima, o qual corresponde ao caso em que não se tem restrição espacial e onde cada indivíduo que sobrevive a catástrofe cria uma nova colônia independentemente de todo o demais. Neste caso, quando $d = \infty$, pela Proposição 4.5 em Machado *et al* [12] e o Teorema 2.2, a probabilidade de extinção é a menor solução não

negativa (em $[0, 1]$) da equação

$$\ln(1 - \lambda(1 - s)) = \lambda s(1 - s).$$

Além disso, quando $E(N) < 1$ ou equivalentemente $\lambda < 2$, o número de colônias criadas é

$$\frac{1}{1 - E(N)} = \frac{2}{2 - \lambda}.$$

2.3 Catástrofe geométrica vs catástrofe uniforme

Vamos estudar quando uma catástrofe uniforme pode ser mais devastadora que uma geométrica (ou vise versa) e qual estratégia de dispersão é a mais adequada ($d = 2$ e $d = 3$).

Caso $d = 2$

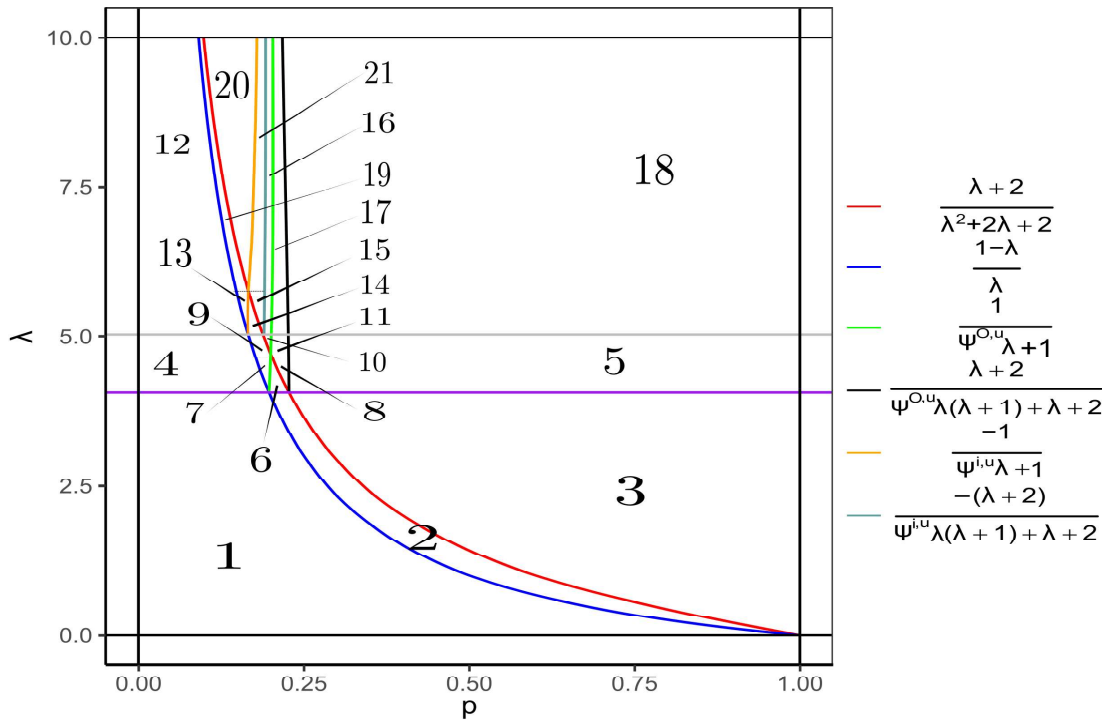


Figura 2.1: Comparação catástrofe uniforme e geométrica, $d = 2$

Denotaremos por λ_r a solução da equação $\psi_2^i = \frac{1}{\lambda\psi_2^{O,u} + 1}$ e, por λ_s a solução da equação $\psi_2^i = \frac{1}{\lambda\psi_2^{i,u} + 1}$.

A continuação especificamos como cada tipo de catástrofe e dispersão, no caso em que $d = 2$, influencia na sobrevivência ou morte da população em cada uma das regiões da Figura 2.1. As regiões na Figura 2.1 são determinadas usando as condições de

sobrevivência dos processo $C_2^i(\lambda, p)$, $C_2^O(\lambda, p)$, $C_2^O(\lambda)$ e $C_2^i(\lambda)$ e comparando as probabilidades de extinção de cada um dos processos.

Teorema 2.11 (Junior et al [8]) *A probabilidade de extinção do modelo $C_2^O(\lambda, p)$ é*

$$\psi_2^O = \min \left\{ 1, \frac{1-p}{\lambda p} \right\}.$$

A probabilidade de extinção do modelo $C_2^i(\lambda, p)$ é

$$\psi_2^O = \min \left\{ 1, \frac{(1-p)(\lambda+2)}{\lambda p(\lambda+1)} \right\}.$$

Note que

1. $\psi_2^O < \psi_2^{O,u}$ se, e somente se

$$p > \frac{1}{\lambda \psi_2^{O,u} + 1}.$$

2. $\psi_2^i < \psi_2^{O,u}$ se, e somente se

$$p > \frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda+1)\psi_2^{O,u} + \lambda+2}.$$

3. $\psi_2^O < \psi_2^{i,u}$ se, e somente se

$$p > \frac{1}{\lambda \psi_2^{i,u} + 1}.$$

4. $\psi_2^i < \psi_2^{i,u}$ se, e somente se

$$p > \frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda+1)\psi_2^{i,u} + \lambda+2}.$$

Portanto,

- Para $0 < \lambda \leq \lambda_0$
 - Se $p \in \left(0, \frac{1-\lambda}{\lambda} \right]$ (região 1), então

$$\psi_2^O = \psi_2^i = \psi_2^{i,u} = \psi_2^{O,u} = 1.$$

Independentemente do tipo de catástrofe e a estratégia de dispersão a população morre com probabilidade 1.

- Se $p \in \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}, \frac{\lambda+2}{\lambda^2+2\lambda+2} \right]$ (região 2), então

$$\psi_2^O < \psi_2^i = \psi_2^{O,u} = \psi_2^{i,u} = 1.$$

A população sobrevive com probabilidade positiva se o tipo de catástrofe for a geométrica e a estratégia de dispersão for a ótima.

- Se $p \in \left(\frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}, 1 \right)$ (região 3), então

$$\psi_2^0 \leq \psi_2^i < \psi_2^{O,u} = \psi_2^{i,u} = 1.$$

A população sobrevive com probabilidade positiva se o tipo de catástrofe for a geométrica. Aqui a melhor estratégia é se dispersar de maneira ótima.

- Para $\lambda_0 < \lambda \leq -4W \left(-\frac{1}{2e^{1/2}} \right) - 2$

- Se $p \in \left(0, \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right]$ (região 4), então

$$\psi_2^{O,u} < \psi_2^O = \psi_2^i = \psi_2^{i,u} = 1.$$

Tem-se probabilidade positiva de sobrevivência unicamente no caso que o tipo de catástrofe for a uniforme e a estratégia de dispersão for a ótima.

- Se $p \in \left(\frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)\psi_2^{O,u} + \lambda + 2}, 1 \right)$ (região 5), então

$$\psi_2^O < \psi_2^i < \psi_2^{O,u} < \psi_2^{i,u} = 1.$$

Com probabilidade 1 a população morre quando o tipo de catástrofe é uniforme e os sobreviventes se dispersarem de forma independente. Além disso, catástrofe do tipo geométrica aumenta a probabilidade de sobrevivência sendo maior no caso que se toma como estratégia a dispersão ótima.

- Para $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_r$

- Se $p \in \left(\frac{1}{\lambda\psi_2^{O,u} + 1}, \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2} \right]$ (região 6), então

$$\psi_2^O < \psi_2^{O,u} < \psi_2^i = \psi_2^{i,u} = 1.$$

A população sobrevive com probabilidade positiva se a estratégia de dispersão for a ótima, embora se o tipo de catástrofe for geométrica a probabilidade é maior. Além disso, com probabilidade 1 a população morre quando se dispersa de forma independente.

$$- \text{ Se } p \in \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda\psi_2^{O,u} + 1} \right] \text{ (região 7), então}$$

$$\psi_2^{O,u} < \psi_2^O < \psi_2^i = \psi_2^{i,u} = 1.$$

A população sobrevive com probabilidade positiva se a estratégia de dispersão é a ótima, embora se o tipo de catástrofe for a uniforme a probabilidade é maior.

$$- \text{ Se } p \in \left(\frac{\lambda+2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}, \frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda+1)\psi_2^{O,u} + \lambda+2} \right] \text{ (região 8), então}$$

$$\psi_2^O < \psi_2^{O,u} \leq \psi_2^i < \psi_2^{i,u} = 1.$$

A população morre com probabilidade 1 se o tipo de catástrofe for uniforme e a estratégia de dispersão for a independente. A melhor estratégia é a dispersão ótima, sendo que a probabilidade de sobrevivência é maior se o tipo de catástrofe for a geométrica.

$$\bullet \text{ Para } \lambda_r < \lambda \leq -4W \left(-\frac{1}{2e^{1/2}} \right) - 2$$

$$- p \in \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}, \frac{\lambda+2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2} \right] \text{ (região 9), então}$$

$$\psi_2^{O,u} \leq \psi_2^O < \psi_2^i = \psi_2^{i,u} = 1.$$

A população sobrevive com probabilidade positiva se a estratégia de dispersão é a ótima, embora se o tipo de catástrofe for uniforme tal probabilidade é maior. Além disso, com probabilidade 1 a população morre quando se dispersa de forma independente.

$$- \text{ Se } p \in \left(\frac{\lambda+2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}, \frac{1}{\lambda\psi_2^{O,u} + 1} \right] \text{ (região 10), então}$$

$$\psi_2^{O,u} \leq \psi_2^O \leq \psi_2^i < \psi_2^{i,u} = 1.$$

A população morre com probabilidade 1 se o tipo de catástrofe for uniforme e os indivíduos se dispersarem de forma independente. Além disso, a dispersão ótima aumenta a probabilidade de sobrevivência, sendo que quando o tipo de catástrofe é uniforme a probabilidade de sobrevivência é maior.

$$- \text{ Se } p \in \left(\frac{1}{\lambda \psi_2^{O,u} + 1}, \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)\psi_2^{O,u} + \lambda + 2} \right] \text{ (região 11), então}$$

$$\psi_2^O < \psi_2^{O,u} \leq \psi_2^i < \psi_2^{i,u} = 1.$$

A população morre com probabilidade 1 se o tipo de catástrofe for uniforme e os indivíduos se dispersarem de forma independente. Além disso, a dispersão ótima aumenta a probabilidade de sobrevivência, sendo que uma catástrofe do tipo geométrica dá a maior chance de sobrevivência.

$$\bullet \text{ Para } \lambda > -4W \left(-\frac{1}{2e^{1/2}} \right) - 2$$

$$- \text{ Se } p \in \left(0, \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right] \text{ (região 12), então}$$

$$\psi_2^{O,u} \leq \psi_2^{i,u} < \psi_2^O = \psi_2^i = 1.$$

O tipo de catástrofe uniforme garante probabilidade positiva de sobrevivência da população, enquanto um tipo de catástrofe geométrica elimina toda a população com probabilidade 1.

$$- \text{ Se } p \in \left(\frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)\psi_2^{i,u} + \lambda + 2}, \frac{1}{\lambda \psi_2^{O,u} + 1} \right] \text{ (região 16). então}$$

$$\psi_2^{O,u} \leq \psi_2^O \leq \psi_2^i < \psi_2^{i,u} < 1.$$

Nesta região independentemente do tipo de catástrofe e a estratégia de dispersão a população sobrevive com probabilidade positiva. Além disso, uma dispersão ótima aumenta a probabilidade de sobrevivência, mais ainda, uma catástrofe do tipo uniforme é menos desastrosa para a população.

$$- \text{ Se } p \in \left(\frac{1}{\psi_2^{O,u}\lambda + 1}, \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)\psi_2^{O,u} + \lambda + 2} \right] \text{ (região 17) então}$$

$$\psi_2^O < \psi_2^{O,u} < \psi_2^i < \psi_2^{i,u} < 1.$$

Independentemente do tipo de catástrofe e a estratégia de dispersão a população sobrevive com probabilidade positiva. Além disso, uma dispersão ótima é a melhor estratégia, mais ainda, uma catástrofe do tipo geométrica dá a maior probabilidade de sobrevivência.

– Se $p \in \left(\frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)\psi_2^{O,u} + \lambda + 2}, 1 \right)$ (região 18), então

$$\psi_2^O < \psi_2^i < \psi_2^{O,u} < \psi_2^{i,u} < 1.$$

Nesta região independentemente do tipo de catástrofe e a estratégia de dispersão a população sobrevive com probabilidade positiva, mas uma catástrofe do tipo geométrica e estratégia de dispersão ótima garante uma probabilidade maior de sobrevivência.

• Para $-4W\left(-\frac{1}{2e^{1/2}}\right) - 2 < \lambda \leq \lambda_s$

– Se $p \in \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda\psi_2^{i,u} + 1} \right]$ (região 13), então

$$\psi_2^{O,u} \leq \psi_2^{i,u} \leq \psi_2^O < \psi_2^i = 1.$$

A população morre com probabilidade 1 se o tipo de catástrofe for geométrica e a estratégia de dispersão for a independente. Além disso, uma catástrofe do tipo uniforme aumenta a probabilidade de sobrevivência, mais ainda a probabilidade é maior se a estratégia de dispersão for a ótima.

– Se $p \in \left(\frac{1}{\lambda\psi_2^{i,u} + 1}, \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2} \right]$ (região 14), então

$$\psi_2^{O,u} \leq \psi_2^O < \psi_2^{i,u} < \psi_2^i = 1.$$

Nesta região a população morre com probabilidade 1 se o tipo de catástrofe for geométrica e a estratégia de dispersão for a independente. Além disso, a melhor estratégia para a sobrevivência é uma dispersão ótima, mais ainda a probabilidade de sobrevivência é maior se o tipo de catástrofe for uniforme.

– Se $p \in \left(\frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}, \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)\psi_2^{i,u} + \lambda + 2} \right]$ (região 15), então

$$\psi_2^{O,u} < \psi_2^O < \psi_2^{i,u} < \psi_2^i < 1.$$

A população sobrevive com probabilidade positiva independentemente do tipo de catástrofe e o tipo de estratégia. A estratégia que aumenta a probabilidade de sobrevivência é a ótima, mais ainda, é maior se o tipo de catástrofe for a uniforme.

• Para $\lambda > \lambda_s$

– Se $p \in \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}, \frac{\lambda+2}{\lambda^2+2\lambda+2} \right]$ (região 19), então

$$\psi_2^{O,u} \leq \psi_2^{i,u} \leq \psi_2^O < \psi_2^i = 1.$$

A população morre com probabilidade 1 quando o tipo de catástrofe for geométrica. Além disso, um tipo de catástrofe uniforme aumenta a probabilidade de sobrevivência.

– Se $p \in \left(\frac{\lambda+2}{\lambda^2+2\lambda+2}, \frac{1}{\lambda\psi_2^{i,u}+1} \right]$ (região 20), então

$$\psi_2^{O,u} < \psi_2^{i,u} < \psi_2^O < \psi_2^i < 1.$$

Independentemente do tipo de catástrofe e estratégia de dispersão a população sobrevive com probabilidade positiva. Mas uma catástrofe uniforme garante uma maior probabilidade de sobrevivência.

– Se $p \in \left(\frac{1}{\lambda\psi_2^{i,u}+1}, \frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda+1)\psi_2^{i,u}+\lambda+2} \right]$ (região 21), então

$$\psi_2^{O,u} \leq \psi_2^O < \psi_2^{i,u} < \psi_2^i < 1.$$

Independentemente do tipo de catástrofe e estratégia a população sobrevive com probabilidade positiva, mas é maior a probabilidade de sobrevivência quando os indivíduos se dispersam de forma ótima.

Caso $d = 3$

A continuação especificamos como cada tipo de catástrofe e dispersão, no caso em que $d = 3$, influencia na sobrevivência ou morte da população em cada uma das regiões da Figura 2.2. As regiões na Figura 2.2 são determinadas usando as condições de sobrevivência dos processos $C_3^O(\lambda, p)$, $C_3^i(\lambda, p)$, $C_3^O(\lambda)$ e $C_3^i(\lambda)$ e comparando as probabilidades de extinção de cada um dos processos.

Teorema 2.12 (Junior et al [8]) *A probabilidade de extinção do modelo $C_3^O(\lambda, p)$ é*

$$\psi_3^O = \min \left\{ 1, \frac{\lambda+1}{2\lambda} \left[-1 + \sqrt{\frac{\lambda p + 4 - 3p}{(\lambda+1)p}} \right] \right\}.$$

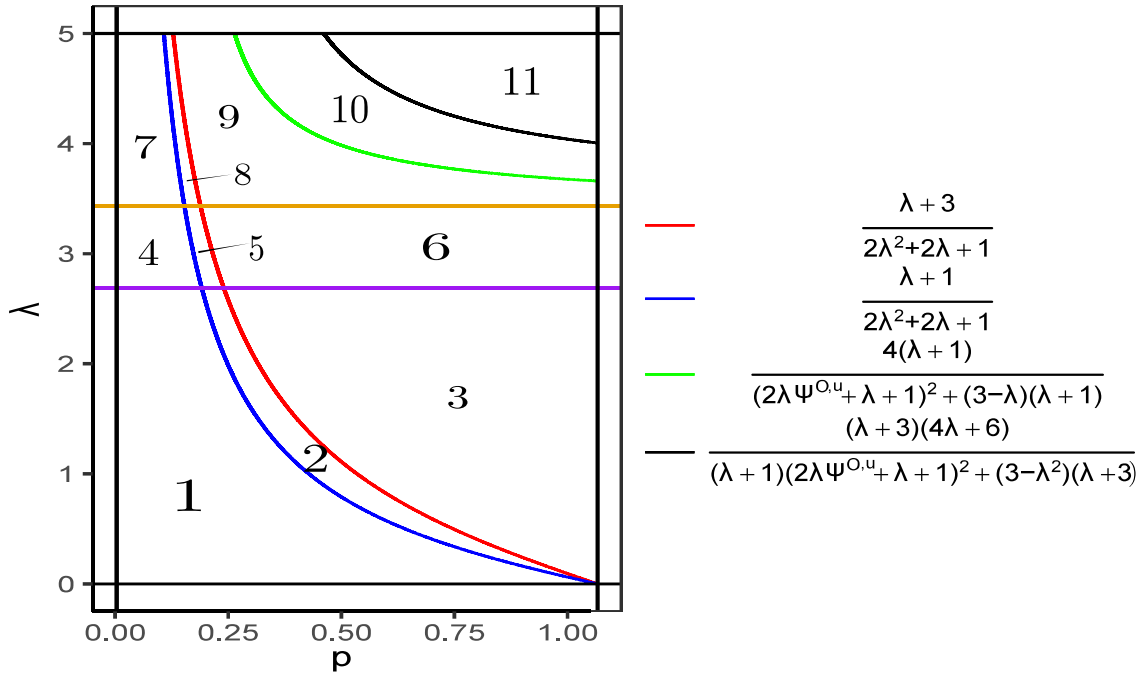


Figura 2.2: Comparação catástrofe uniforme e geométrica, $d = 3$

A probabilidade de extinção do modelo $C_3^i(\lambda, p)$ é

$$\psi_3^i = \min \left\{ 1, \frac{1}{2\lambda} \left[-(\lambda+3) + \sqrt{\frac{(\lambda+3)(p\lambda^2 + 4\lambda + 6 - 3p)}{p(\lambda+1)}} \right] \right\}.$$

Note que

1. $\psi_3^O < \psi_3^{O,u}$ se, e somente se

$$p > \frac{4(\lambda+1)}{(2\lambda\psi_3^{O,u} + \lambda + 1)^2 + (3-\lambda)(\lambda+1)},$$

2. $\psi_3^i < \psi_3^{O,u}$ se, e somente se

$$p > \frac{(\lambda+3)(4\lambda+6)}{(2\lambda^u\psi_3^O + \lambda + 1)^2(\lambda+1) + (3-\lambda^2)(\lambda+3)},$$

3. $\psi_3^O < \psi_3^{i,u}$ se, e somente se

$$p > \frac{4(\lambda+1)}{(2\lambda\psi_3^{i,u} + \lambda + 1)^2 + (3-\lambda)(\lambda+1)},$$

4. $\Psi_3^i < \Psi_3^{i,u}$ se, e somente se

$$p > \frac{(\lambda + 3)(4\lambda + 6)}{(2\lambda\Psi_3^{i,u} + \lambda + 1)^2(\lambda + 1) + (3 - \lambda^2)(\lambda + 3)}.$$

Portanto,

• Para $0 < \lambda \leq \lambda_i$

– Se $p \in \left(0, \frac{\lambda + 1}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}\right]$ (região 1), então

$$\Psi_3^O = \Psi_3^i = \Psi_3^{O,u} = \Psi_3^{i,u} = 1.$$

Independentemente do tipo de catástrofe e dispersão a população morre com probabilidade 1.

– Se $p \in \left(\frac{\lambda + 1}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}, \frac{\lambda + 3}{2\lambda^2 + 3\lambda + 3}\right]$ (região 2), então

$$\Psi_3^O < \Psi_3^i = \Psi_3^{O,u} = \Psi_3^{i,u} = 1.$$

A população sobrevive unicamente se o tipo de catástrofe for a geométrica e a estratégia de dispersão é ótima.

– Se $p \in \left(\frac{\lambda + 3}{2\lambda^2 + 3\lambda + 3}, 1\right)$ (região 3), então

$$\Psi_3^O \leq \Psi_3^i < \Psi_3^{i,u} = \Psi_3^{O,u} = 1.$$

Nesta região a população sobrevive com probabilidade positiva se a catástrofe for geométrica. No caso que o tipo de catástrofe for uniforme a população morre com probabilidade 1.

• Para $\lambda_i < \lambda \leq -\frac{9}{2}W\left(-\frac{1}{3e^{2/3}}\right) - 3$

– Se $p \in \left(0, \frac{\lambda + 1}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}\right]$ (região 4), então

$$\Psi_3^{O,u} < \Psi_3^{i,u} = \Psi_3^i = \Psi_3^O = 1.$$

A população sobrevive unicamente se o tipo de catástrofe for uniforme e a estratégia de dispersão for a ótima.

– Se $p \in \left(\frac{\lambda + 1}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}, \frac{\lambda + 3}{2\lambda^2 + 3\lambda + 3}\right]$ (região 5), então

$$\Psi_3^{O,u} \leq \Psi_3^O < \Psi_3^i = \Psi_3^{i,u} = 1.$$

Com probabilidade 1 a população morre quando se dispersa de forma independente. A melhor estratégia é a dispersão ótima, sendo que uma catástrofe do tipo uniforme tem maior probabilidade de sobrevivência.

- Se $p \in \left(\frac{\lambda + 3}{2\lambda^2 + 3\lambda + 3}, 1 \right)$ (região 6), então

$$\Psi_3^{O,u} \leq \Psi_3^O \leq \Psi_3^i < \Psi_3^{i,u} = 1.$$

A população morre com probabilidade 1 quando se dispersa de forma independente e o tipo de catástrofe é uniforme. A melhor estratégia é a dispersão ótima, sendo que uma catástrofe do tipo uniforme tem maior probabilidade de sobrevivência.

- Para $\lambda > -\frac{9}{2}W\left(-\frac{1}{3e^{2/3}}\right) - 3$

- Se $p \in \left(0, \frac{\lambda + 1}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1} \right]$ (região 7), então

$$\Psi_3^{O,u} \leq \Psi_3^{i,u} < \Psi_3^O = \Psi_3^i = 1.$$

Nesta região uma catástrofe uniforme da probabilidade positiva de sobrevivência da população, enquanto que uma catástrofe geométrica elimina toda a população com probabilidade 1.

- Se $p \in \left(\frac{\lambda + 1}{2\lambda + 2\lambda + 1}, \frac{\lambda + 3}{2\lambda^2 + 3\lambda + 3} \right]$ (região 8), então

$$\Psi_3^{O,u} \leq \Psi_3^O < \Psi_3^{i,u} < \Psi_3^i = 1.$$

A população morre com probabilidade 1 se o tipo de catástrofe for geométrica e a estratégia de dispersão é independente. Além disso, uma catástrofe do tipo uniforme aumenta a probabilidade de sobrevivência.

- Se $p \in \left(\frac{\lambda + 3}{2\lambda^2 + 3\lambda + 3}, \frac{4(\lambda + 1)}{(2\lambda\Psi_3^{O,u} + \lambda + 1)^2 + (3 - \lambda)(\lambda + 1)} \right]$ (região 9), então

$$\Psi_3^{O,u} \leq \Psi_3^O \leq \Psi_3^i < \Psi_3^{i,u} < 1.$$

Independentemente do tipo de catástrofe e dispersão, a população tem probabilidade positiva de sobreviver.

- Se $p \in \left(\frac{4(\lambda + 1)}{(2\lambda\Psi_3^{O,u} + \lambda + 1)^2 + (3 - \lambda)(\lambda + 1)}, \frac{(\lambda + 3)(4\lambda + 6)}{(\lambda + 1)[(2\lambda\Psi_3^{O,u} + \lambda + 1)^2 + (3 - \lambda^2)]} \right]$ (região 10), então

$$\Psi_3^O < \Psi_3^{O,u} < \Psi_3^i < \Psi_3^{i,u} < 1.$$

Independentemente do tipo de catástrofe e dispersão, a população tem probabilidade positiva de sobreviver. A população sobrevive com maior probabilidade se a catástrofe for do tipo uniforme.

– Se $p \in \left(\frac{(\lambda + 3)(4\lambda + 6)}{(\lambda + 1)[(2\lambda\psi_3^{O,u} + \lambda + 1)^2 + (3 - \lambda^2)]}, 1 \right)$ (região 11), então

$$\psi_3^{O,u} \leq \psi_3^O \leq \psi_3^i < \psi_3^{i,u} < 1.$$

Nesta região todos os processos tem uma probabilidade positiva de sobreviver. A população sobrevive com maior probabilidade se a catástrofe for do tipo geométrico.

2.4 Provas

Prova do Teorema 2.2. Os indivíduos numa colônia nascem seguindo um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, denotado $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, temos

$$P(X_t = x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!}, \quad x \in \{1, 2, \dots\}.$$

Quando uma catástrofe uniforme acontece na colônia, esta atinge os indivíduos, de forma tal que se no momento da catástrofe existem x indivíduos, com probabilidade $1/x$ sobrevivem $0, 1, 2, \dots$ ou $x - 1$ indivíduos. Isto é, $N|X_T \sim U_D\{0, 1, \dots, X_T - 1\}$, ou escrito de uma outra forma

$$P(N = n|X_T) = \frac{1}{X_T}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, X_T - 1\}.$$

Em geral, a distribuição do número de sobreviventes nos tempos que acontece uma catástrofe é

$$P(N = n) = \int_0^\infty P(N = n|T = t) f_T(t) dt,$$

onde

$$P(N = n|T = t) = \sum_{j=n+1}^{\infty} P(X_t = j|T = t) P(N = n|X_t = j, T = t).$$

Para $n = 0$, e aplicando o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
P(N=0) &= \int_0^\infty e^{-t} \sum_{j=1}^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \frac{1}{j} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} \frac{1}{j+1} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{(j+1)!} dt, \\
&= \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda^j}{(j+1)!} \int_0^\infty e^{-t(\lambda+1)} t^j dt \\
&= \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda^j}{(j+1)!} \frac{\Gamma(j+1)}{(\lambda+1)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \sum_{j=0}^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^j j!}{(j+1)!} = \frac{1}{\lambda+1} \sum_{j=0}^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^j}{j+1} \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \left[-\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{\lambda+1}\right)}{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \right] \quad \left(\ln(1-x) = \sum_{j=0}^\infty \frac{x^{j+1}}{j+1}, \quad |x| < 1. \right) \\
&= \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda},
\end{aligned}$$

para $N = n, n \geq 1$, e aplicando novamente o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
P(N=n) &= \int_0^\infty e^{-t} \sum_{j=n+1}^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \frac{1}{j} dt = \frac{1}{\lambda+1} \sum_{j=n}^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^j}{j+1} \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n \sum_{j=0}^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^j}{(j+(n+1))!} \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n \Phi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, n+1\right),
\end{aligned}$$

onde $\Gamma(n)$ é a Função Gamma e $\Phi(z, s, \alpha)$ é a Função Transcendente de Lerch.

Daí, fazendo $x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ e usando a forma integral da Função de Lerch e o

Teorema de Fubini, a função geradora de probabilidade de N é,

$$\begin{aligned}
E(s^N) &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(N = n) \\
&= P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} s^n P(N = n) \\
&= P(N = 0) + \frac{1}{\lambda + 1} \sum_{n=1}^{\infty} s^n x^n \Phi(x, 1, n + 1) \\
&= P(N = 0) + \frac{1}{\lambda + 1} \sum_{n=1}^{\infty} (sx)^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{1 - xe^{-t}} dt \\
&= P(N = 0) + \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \sum_{n=1}^{\infty} (xse^{-t})^n dt \\
&= P(N = 0) + \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \frac{xse^{-t}}{1 - xse^{-t}} dt \\
&= P(N = 0) + \frac{xs}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1 - xe^{-t})(1 - xse^{-t})} dt \\
&= P(N = 0) + \frac{xs}{\lambda + 1} \frac{s \ln(1 - x) - \ln(1 - sx)}{(s - 1)sx^2},
\end{aligned}$$

onde a última integral se obtêm fazendo $u = e^t$ e aplicando frações parciais. Substituindo x , $P(N = 0)$ e simplificando, obtemos

$$E(s^N) = \frac{\ln(1 - \lambda(s - 1))}{\lambda(1 - s)}.$$

Que tem derivada,

$$\frac{d}{ds} E(s^N) = \frac{[\lambda(s - 1) - 1] \ln(1 + \lambda(1 - s)) + \lambda(1 - s)}{\lambda(s - 1)^2 [\lambda(s - 1) - 1]},$$

logo,

$$E(N) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{d}{ds} E(s^N) = \frac{\lambda}{2}.$$

□

Prova do Teorema 2.5 Da Proposição 4.3 de Machado *et al* [12]

$$\Psi_d^{i,u} < 1 \text{ se, e somente se } E \left[\left(\frac{d-1}{d} \right)^N \right] < \frac{d-1}{d}.$$

Pelo Teorema 2.2

$$E \left[\left(\frac{d-1}{d} \right)^N \right] = \frac{d \ln \left(\frac{\lambda+d}{d} \right)}{\lambda}.$$

Assim $\Psi_d^{i,u} < 1$ se, e somente se $\frac{d^2}{d-1} \ln \left(\frac{\lambda+d}{d} \right) < \lambda$. Vamos solucionar primeiro a equação $\frac{d^2}{d-1} \ln \left(\frac{\lambda+d}{d} \right) = \lambda$. Usando a Função W de Lambert

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d-1} \ln \left(\frac{\lambda+d}{d} \right) &= \lambda \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda+d}{d} &= e^{\frac{d-1}{d^2} \lambda} \\ \Leftrightarrow (\lambda+d) e^{-\frac{d-1}{d^2} \lambda} &= d \\ \Leftrightarrow -\frac{d-1}{d^2} (\lambda+d) e^{-\frac{d-1}{d^2} \lambda + \frac{d(1-d)}{d^2}} &= -\frac{d-1}{d} e^{\frac{d(1-d)}{d^2}} \\ \Leftrightarrow -\frac{d-1}{d^2} (\lambda+d) &= W \left(-\frac{d-1}{d} e^{\frac{1-d}{d}} \right) \end{aligned}$$

Portanto $\Psi_d^{i,u} < 1$ se, e somente se $\lambda > -\frac{d^2}{d-1} W \left(-\frac{d-1}{d} e^{\frac{1-d}{d}} \right) - d$. \square

A fim de provar os Teoremas 2.6, 2.7 e 2.9 definimos o seguinte processo auxiliar.

Processo auxiliar $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ para $C_d^O(\lambda)$

Considere o modelo $C_d^O(\lambda)$. Definamos $Z_0^O = 1$ sendo o número de colônias presentes no instante de tempo 0 em $C_d^O(\lambda)$. Assim entra em colapso um número aleatório de colônias, chamadas Z_1^O , serão criadas. Esta é a primeira geração, cada uma destas colônias da nascimento (em diferentes instantes de tempo) a um número aleatório de novas colônias. Isto é Z_2^O , a segunda geração. Em geral, para $n \geq 1$, se $Z_{n-1}^O = 0$ então $Z_n^O = 0$. Por outro lado, se $Z_{n-1}^O \geq 1$, então Z_n^O é o número de colônias criadas pela $(n-1)$ -ésima geração de colônias. Do fato que o número de novas colônias criadas por diferentes colônias após uma catástrofe são independentes e tem a mesma distribuição, podemos afirmar que $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação. Note que o processo $C_d^O(\lambda)$ morre se, e somente se $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ morre. A distribuição de novas colônias em $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ é dada por

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^k \Phi \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, k+1 \right) & , 0 \leq k < d \\ 1 - \frac{1}{\lambda+1} \sum_{i=0}^{d-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^i \Phi \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, i+1 \right) & , k = d. \end{cases}$$

Prova do Teorema 2.6 A função geradora de probabilidade do processo $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ é

$$g(s) = \frac{1}{\lambda + 1} \sum_{k=0}^d s^k \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^k \Phi \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}, 1, k + 1 \right).$$

Fazendo $x = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$, temos

$$g'(1) = \sum_{k=1}^d k p_k = \sum_{k=1}^{d-1} [k - d] p_k + d[1 - p_0] = \frac{1}{\lambda + 1} \sum_{k=1}^{d-1} [k - d] x^k \Phi(x, 1, k + 1) + d[1 - p_0]$$

Usando a representação de $\Phi(x, 1, n + 1)$ em termos da Função Beta Incompleta

$$\Phi(x, 1, k + 1) = \frac{1}{x^{k+1}} B(k + 1; 0; x)$$

e a representação em forma de integral da Função Beta Incompleta

$$B(v; u; x) = x^v \int_0^1 t^{v-1} (1 - xt)^{u-1} dt,$$

e aplicando o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} g'(1) &= \frac{1}{\lambda + 1} \sum_{k=1}^{d-1} [k - d] x^k \int_0^1 \frac{t^k}{1 - xt} dt + d[1 - p_0] \\ &= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^1 \frac{1}{1 - xt} \sum_{k=1}^{d-1} [k - d] (xt)^k dt + d[1 - p_0] \\ &= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^1 \frac{1}{1 - xt} \left[-\frac{tx(t^d x^d - dtx + d - 1)}{(tx - 1)^2} \right] dt + d[1 - p_0] \\ &= -\frac{x^{d+1}}{\lambda + 1} \int_0^1 \frac{t^{d+1}}{(1 - xt)(tx - 1)^2} dt + \frac{dx^2}{\lambda + 1} \int_0^1 \frac{t^2}{(1 - xt)(tx - 1)^2} dt \\ &\quad - \frac{(d - 1)x}{\lambda + 1} \int_0^1 \frac{t}{(1 - xt)(tx - 1)^2} dt + d[1 - p_0]. \end{aligned}$$

Mas,

$$\int \frac{t^{d+1}}{(1 - xt)(tx - 1)^2} dt = \frac{t^{d+1} {}_2F_1(3, d + 2; d + 3; tx)}{d + 2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
g'(1) &= -\frac{\lambda^{d+1}}{(\lambda+1)^{d+2}} \frac{{}_2F_1\left(3, d+2; d+3; \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)}{d+2} + \frac{d\lambda^2}{(\lambda+1)^3} \frac{{}_2F_1\left(3, 3; 4; \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)}{3} \\
&\quad - \frac{(d-1)\lambda}{(\lambda+1)^2} \frac{{}_2F_1\left(3, 2; 3; \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)}{2} + d \left(1 - \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda}\right) \\
&= -\frac{\lambda^{d+1}}{(\lambda+1)^{d+2}} \frac{{}_2F_1\left(3, d+2; d+3; \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)}{d+2} + \frac{d[\lambda(\lambda-2) + 2\ln(\lambda+1)]}{2\lambda} \\
&\quad - \frac{(d-1)\lambda}{2} + d \left(\frac{\lambda - \ln(\lambda+1)}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Logo, o processo $C_d^O(\lambda)$ sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se

$${}_2F_1\left(3, d+2; d+3; \frac{\lambda}{\lambda+1}\right) < \frac{(\lambda-2)(d+2)(\lambda+1)^{d+2}}{2\lambda^{d+1}}.$$

□

Prova do Teorema 2.7 Consideremos o modelo auxiliar $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$. Então o modelo $C_2^O(\lambda)$ morre se, e somente se $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ morre. A distribuição de novas colônias em $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ é dada por

$$\begin{aligned}
p_0 &= P(N=0) = \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} \\
p_1 &= P(N=1) = \frac{(\lambda+1)\ln(\lambda+1) - \lambda}{\lambda(\lambda+1)} \\
p_2 &= P(N=2) = 1 - p_0 - p_1 = \frac{\lambda(\lambda+2) - 2(\lambda+1)\ln(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)}.
\end{aligned}$$

Além disso, sua função geradora de probabilidade é $g(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2$ e o número médio de novas colônias criadas é $g'(1) = p_1 + 2p_2$, isto é

$$g'(1) = \frac{\lambda(2\lambda+3) - 3(\lambda+1)\ln(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)}.$$

Logo, a probabilidade de extinção é menor do que 1 se, e somente se

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda(2\lambda+3) - 3(\lambda+1)\ln(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)} > 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda(2\lambda+3) - \lambda^2 - \lambda - 3(\lambda+1)\ln(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)} > 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda(\lambda+2) - 3(\lambda+1)\ln(\lambda+1) > 0.
\end{aligned}$$

Para obter a probabilidade de extinção, devemos obter a menor raiz positiva da equação $g(s) = s$. Pelo Lema 4.1 parte (iii) de Junior *et al* [8], tal solução é p_0/p_2 e portanto o resultado se segue. \square

Prova do Teorema 2.8. A condição para ter probabilidade de sobrevivência positiva, é uma aplicação do Teorema 2.5. Neste caso, como $d = 2$

$$\psi_2^{i,u} < 1 \text{ se, e somente se } \lambda > -4W\left(-\frac{1}{2}e^{-1/2}\right) - 2.$$

Para obter a probabilidade de extinção, vamos considerar a Proposição 4.4 de Machado *et al* [12]. Como $d = 2$, $\psi_2^{i,u}$ é a menor solução não negativa de

$$\sum_{y=0}^2 \left[s^y \binom{2}{y} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{T(n,y)}{2^n} P(N=n) \right] = s,$$

onde

$$T(n,y) = \sum_{i=0}^y \left[(-1)^i \binom{y}{i} (y-i)^n \right].$$

Seja $x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$, então para obter $\psi_2^{i,u}$ vamos solucionar a equação

$$P(N=0) + 2s \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\lambda+1} x^n \Phi(x, 1, n+1) + s^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{2^n} \frac{1}{\lambda+1} x^n \Phi(x, 1, n+1) = s.$$

Note que a equação anterior pode ser reescrita como

$$P(N=0) + s \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\lambda+1} \Phi(x, 1, n+1) - 1 \right] + s^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{2^n} x^n \frac{1}{\lambda+1} \Phi(x, 1, n+1) = 0,$$

ou equivalentemente

$$(s-1) \left(s \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{2^n} x^n \frac{1}{\lambda+1} \Phi(x, 1, n+1) - P(N=0) \right) = 0.$$

Mas, usando a forma integral da Função de Lerch e o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{2^n} x^n \frac{1}{\lambda + 1} \Phi(x, 1, n + 1) &= \frac{1}{\lambda + 1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{2^n} x^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{1 - xe^{-t}} dt \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{2^n}\right) x^n e^{-nt} dt \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \left[\sum_{n=2}^{\infty} (xe^{-t})^n - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{xe^{-t}}{2}\right)^n \right] dt \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \left[\frac{(xe^{-t})^2}{1 - xe^{-t}} - 2 \frac{\left(\frac{xe^{-t}}{2}\right)^2}{1 - \frac{xe^{-t}}{2}} \right] dt \\
&= \frac{x^2}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \frac{e^{-2t}}{(1 - xe^{-t})(2 - xe^{-t})} dt \\
&= \frac{x^2}{\lambda + 1} \frac{\frac{x}{1-x} + 3 \ln(1-x) - 4 \ln(2-x) + \ln(16)}{x^3} \\
&= \frac{\lambda + 3 \ln\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right) - 4 \ln\left(2 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right) + \ln(16)}{\lambda} \\
&= \frac{\lambda - \ln\left(\frac{(1 + \lambda/2)^4}{\lambda + 1}\right)}{\lambda}
\end{aligned}$$

Portanto

$$s = \frac{P(N=0)}{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{2^n} x^n \frac{1}{\lambda + 1} \Phi(x, 1, n + 1)} = \frac{\ln(\lambda + 1)}{\lambda - \ln\left(\frac{(1 + \lambda/2)^4}{\lambda + 1}\right)}.$$

□

Prova do Teorema 2.9. Consideremos o modelo auxiliar $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$. Então o modelo $C_3^O(\lambda)$ morre se, e somente se $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ morre. A distribuição de novas colônias em $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ é dada por

$$\begin{aligned}
p_0 = P(N=0) &= \frac{\ln(\lambda + 1)}{\lambda} \\
p_1 = P(N=1) &= \frac{(\lambda + 1) \ln(\lambda + 1) - \lambda}{\lambda(\lambda + 1)} \\
p_2 = P(N=2) &= \frac{2(\lambda + 1)^2 \ln(\lambda + 1) - \lambda(3\lambda + 2)}{2\lambda(\lambda + 1)^2} \\
p_3 = P(N=3) &= \frac{\lambda(2\lambda^2 + 9\lambda + 6) - 6(\lambda + 1)^2 \ln(\lambda + 1)}{2\lambda(\lambda + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Além disso, sua função geradora de probabilidade é $g(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3$ e o

número médio de colônias criadas é $g'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3$, isto é

$$g'(1) = \frac{\lambda(6\lambda^2 + 19\lambda + 12) - 12(\lambda + 1)^2 \ln(\lambda + 1)}{2\lambda(\lambda + 1)^2}.$$

Logo, a probabilidade de extinção é menor do que 1 se, e somente se

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(6\lambda^2 + 19\lambda + 12) - 12(\lambda + 1)^2 \ln(\lambda + 1)}{2\lambda(\lambda + 1)^2} &> 1 \\ \Leftrightarrow \lambda(4\lambda^2 + 15\lambda + 10) - 12(\lambda + 1)^2 \ln(\lambda + 1) &> 0 \end{aligned}$$

Para obter a probabilidade de extinção $\psi_3^{O,u}$, devemos obter a menor raiz positiva da equação $g(s) = s$. Pelo Lema 4.1 parte (ii) de Junior *et al* [8], tal solução é

$$\psi_3^{O,u} = \frac{1}{2} \left[-1 - \frac{p_2}{p_3} + \sqrt{\left(1 + \frac{p_2}{p_3}\right)^2 + \frac{4p_0}{p_3}} \right]$$

e portanto o resultado se segue. □

Prova do Teorema 2.10 A condição para ter probabilidade de sobrevivência positiva, é uma aplicação do Teorema 2.5. Neste caso, como $d = 3$

$$\psi_3^{i,u} < 1 \text{ se, e somente se } \lambda > -\frac{9}{2}W\left(-\frac{1}{3}e^{-2/3}\right) - 3.$$

Para obter a probabilidade de extinção, vamos considerar a Proposição 4.4. de Machado *et al* [12]. Como $d = 3$, $\psi_3^{i,u}$ é a menor solução não negativa de

$$\sum_{y=0}^3 \left[s^y \binom{3}{y} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{T(n,y)}{3^n} P(N = n) \right] = s,$$

onde

$$T(n,y) = \sum_{i=0}^y \left[(-1)^y \binom{y}{i} (y-i)^n \right].$$

Seja $x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$, então para obter $\psi_3^{j,u}$ vamos solucionar a equação

$$\begin{aligned} P(N=0) + 3s \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{\lambda+1} x^n \Phi(x, 1, n+1) \\ + 3s^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n} \frac{1}{\lambda+1} x^n \Phi(x, 1, n+1) \\ + s^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3^n} \frac{1}{\lambda+1} x^n \Phi(x, 1, n+1) = s \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3^n} \frac{1}{\lambda+1} x^n \Phi(x, 1, n+1), \\ y &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n} \frac{1}{\lambda+1} x^n \Phi(x, 1, n+1) \text{ e} \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{\lambda+1} x^n \Phi(x, 1, n+1), \end{aligned}$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$p_0 + s(3v - 1) + 3ys^2 + zs^3 = 0$$

ou equivalentemente

$$(s-1)[zs^2 + (3y+z)s - p_0] = 0.$$

Mas, usando a forma integral da Função de Lerch e o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n} \frac{1}{\lambda + 1} x^n \Phi(x, 1, n + 1) \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n} x^n e^{-nt} dt \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3} xe^{-t} \right)^n - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} xe^{-t} \right)^n \right] dt \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \left[\frac{\left(\frac{2}{3} xe^{-t} \right)^2}{1 - \frac{2}{3} xe^{-t}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{3} xe^{-t} \right)^2}{1 - \frac{1}{3} xe^{-t}} \right] dt \\
&= \frac{2x^2}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-3t}}{(1 - xe^{-t})(3 - xe^{-t})(3 - 2xe^{-t})} dt \\
&= \frac{2x^2}{\lambda + 1} \left[\frac{-3 \ln(3 - 2x) + \ln(1 - x) + 3 \ln(3 - x)}{2x^3} \right] \\
&= - \frac{3 \ln \left(\frac{2\lambda + 3}{\lambda + 1} \right) - 3 \ln \left(\frac{\lambda + 3}{\lambda + 1} \right) + \ln \left(\frac{1}{\lambda + 1} \right)}{\lambda} \\
&= p_0 + \frac{3 \ln \left(\frac{\lambda + 3}{2\lambda + 3} \right)}{\lambda}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3^n} \frac{1}{\lambda + 1} x^n \Phi(x, 1, n + 1) \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3^n} x^n e^{-nt} dt \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \left[\sum_{n=3}^{\infty} (xe^{-t})^n - 3 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}xe^{-t}\right)^n + 3 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}xe^{-t}\right)^n \right] \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \left[\frac{(xe^{-t})^3}{1 - xe^{-t}} - 3 \frac{\left(\frac{2}{3}xe^{-t}\right)^3}{1 - \frac{2}{3}xe^{-t}} + 3 \frac{\left(\frac{1}{3}xe^{-t}\right)^3}{1 - \frac{1}{3}xe^{-t}} \right] dt \\
&= \frac{1}{\lambda + 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - xe^{-t}} \frac{2x^3 e^{-3t}}{(3 - 2xe^{-t})(1 - xe^{-t})(3 - xe^{-t})} dt \\
&= \frac{2x^3}{\lambda + 1} \left[\frac{9 \ln(3)}{4x^4} - \frac{\frac{2x}{x-1} + 18 \ln(3 - 2x) - 11 \ln(1 - x) - 9 \ln(3 - x)}{4x^4} \right] \\
&= \frac{9 \ln\left(\frac{3(2\lambda + 3)}{\lambda + 1}\right) - 18 \ln\left(\frac{\lambda + 3}{\lambda + 1}\right) + 11 \ln\left(\frac{1}{\lambda + 1}\right) + 2\lambda}{2\lambda} \\
&= \frac{9}{2\lambda} \ln\left(\frac{3(2\lambda + 3)(\lambda + 1)}{(\lambda + 3)^2}\right) - \frac{11}{2} p_0 + 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
s &= \frac{-(3z + y) + \sqrt{(3b + c)^2 + 4cp_0}}{2z} \\
&= \frac{1}{2} \left[-1 - \frac{3y}{z} + \sqrt{\left(1 + \frac{3y}{z}\right)^2 + \frac{4p_0}{z}} \right]
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de z e y se segue o resultado. □

Cotas para o alcance Máximo

Vamos obter cotas para o tempo de extinção de um processo de ramificação a tempo discreto com função geradora de probabilidade dos descendentes $g(s)$. Lefevre *et al* [11] construíram cotas superiores e inferiores de uso prático para $g(s)$ fazendo uso da família de funções fracionais lineares com a mesma média $m = g'(1)$. Uma função fracionar linear com a mesma média $m = g'(1)$ tem a forma

$$f(s; m, c) = 1 - m(1 - c) + \frac{m(1 - c^2)s}{1 - cs},$$

onde $m = g'(1) = f'(1; m, c)$ e $0 \leq c < 1$; $f(s; m, c)$ é função geradora de probabilidade se e somente se $m(1 - c) \leq 1$. Denotando $\alpha = \lfloor \frac{m+k}{m} \rfloor$ e $\beta = \lfloor \frac{m}{1-p_0} \rfloor$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a parte inteira e $k = g''(1)$, as cotas superior e inferior obtidas por Lefevre *et al* [11] para $g(s)$ são as funções geradoras de probabilidade lineares $f(s; m, c_l)$ e $f(s; m, c_u)$, respectivamente, onde

$$c_l = \frac{\alpha(\alpha - 1)m + k}{\alpha(\alpha + 1)m}$$

$$c_u = \frac{p_0 - 1 + \frac{2m}{\beta+1}}{p_0 - 1 + \frac{2m}{\beta}}$$

Teorema 3.1 *Seja $g(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$ uma função geradora de probabilidade com média $m = g'(1) < 1$ e $k = g''(1) < \infty$, e seja T o tempo de extinção de um processo de ramificação a tempo discreto com função geradora de probabilidade $g(s)$. Então,*

$$\frac{[1 - m^n][\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) + 2m(1 - m)]}{(\beta + 1)[\beta(p_0 - 1) + 2m] - 2m^2 - m^n\beta[(\beta + 1)(p_0 - 1) + 2m]} \leq P(T \leq n)$$

$$\leq \frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k](1 - m^n)}{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k] - m^n[\alpha(\alpha - 1)m + k]}$$

Teorema 3.2 *Seja $g(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$ uma função geradora de probabilidade com média $m = g'(1) < 1$ e $k = g''(1) < \infty$, e seja T o tempo de extinção de um processo de*

ramificação a tempo discreto com função geradora de probabilidade $g(s)$. Então,

$$E(T) \geq 1 + \frac{(1-m)(2m\alpha - k)}{m\alpha^2 - \alpha m + k} \frac{\ln\left(\frac{\alpha(1-m)(\alpha+1)}{\alpha^2 + \alpha(1-2m) + k}\right)}{\ln(m)}$$

e

$$E(T) \leq 1 + \frac{2m^2}{\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) + 2m} + \frac{2m(1-m)}{\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1)} \frac{\ln\left(\frac{[1-m][\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) + 2m]}{\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) - 2m(m-1)}\right)}{\ln(m)}$$

Observação 3.3 Agresti [1] obteve cotas para a distribuição e o valor médio do tempo de extinção, mas as cotas que acabamos de obter são melhores, pois usamos as cotas para $g(s)$ obtidas por Lefevre et al [11] as quais são melhores que as obtidas por Agresti (ver Property 1 em [11]). Por outro lado, no caso em que $\beta = 1$ a cota inferior obtida coincide com a cota obtida por Agresti; e se $(m+k)/k$ é um inteiro, a cota superior coincide com a cota superior obtida por Agresti.

3.1 Cotas para os modelos $C_d^O(\lambda, p)$ e $C_d^i(\lambda, p)$

Seja M_d^O e M_d^i v.a que indicam a distância da origem de \mathbb{T}_d^+ ao vértice mais distante de onde alguma colônia foi no modelo $C_d^O(\lambda, p)$ e $C_d^i(\lambda, p)$, respectivamente. Usando o Teorema 3.1 vamos obter cotas para $P(M_d^O \leq n)$ e $P(M_d^i \leq n)$.

A distribuição de probabilidade do número de sobreviventes após uma catástrofe geométrica (mas antes da dispersão) é dada por

$$P(N = 0) = b, \quad P(N = n) = ac^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde

$$b = \frac{1-p}{\lambda p + 1}, \quad a = \frac{(\lambda+1)p}{\lambda(\lambda p + 1)} \quad \text{y} \quad c = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Para detalhes ver Machado et al em [12, Sect. 2.2].

3.1.1 Modelo $C_d^O(\lambda, p)$

Antes de obter as cotas para $P(M_d^O \leq n)$, mostramos o seguinte resultado que dá uma condição necessária e suficiente para a sobrevivência com probabilidade positiva do processo $C_d^O(\lambda, p)$ para todo $d \geq 2$, pois Junior et al [8] consideram unicamente os casos em que $d = 2$ e $d = 3$.

Teorema 3.4 *O processo $C_d^O(\lambda, p)$ sobrevive ($\Psi_d^O < 1$) se, e somente se*

$$p > \frac{1}{(\lambda + 1)^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^d \right] - \lambda}.$$

Substituindo os valores obtidos na Proposição 3.10 (ver a Seção Provas) no Teorema 3.1, é possível obter cotas para o alcance máximo para qualquer $d \geq 2$. Aqui por simplicidade nos cálculos, mostramos explicitamente o caso $d = 2$ e $d = 3$.

Proposição 3.5 *Considere o modelo $C_2^O(\lambda, p)$. Então*

$$\begin{aligned} \frac{[p\lambda^2 + 3\lambda(p-1) + p - 1] \left[1 - \left[\frac{p(2\lambda+1)}{p\lambda+1} \right]^{n+1} \right]}{\lambda(p\lambda+1) \left[\frac{p(2\lambda+1)}{p\lambda+1} \right]^{n+1} + p\lambda^2 + 3\lambda(p-1) + p - 1} &\leq P(M_2^O \leq n) \\ &\leq \frac{(1-p)(2\lambda+1) \left[1 - \left[\frac{p(2\lambda+1)}{p\lambda+1} \right]^{n+1} \right]}{\lambda(p\lambda+1) \left[\frac{p(2\lambda+1)}{p\lambda+1} \right]^{n+1} - (1-p)(2\lambda+1)}. \end{aligned}$$

Proposição 3.6 *Considere o modelo $C_3^O(\lambda, p)$. Logo, uma cota superior para a distribuição de M_3^O é dada por*

- se $0 < \lambda < \frac{\sqrt{13}+1}{6}$ e sendo $w = (3\lambda^2 + 3\lambda + 1)[p\lambda^2 + \lambda(1-p) - p + 1]$,

$$P(M_3^O \leq n) \leq \frac{w \left[\left[\frac{p(3\lambda^2+3\lambda+1)}{(\lambda+1)(p\lambda+1)} \right]^{n+1} - 1 \right]}{\lambda(\lambda+1)(3\lambda+1)(p\lambda+1) \left[\frac{p(3\lambda^2+3\lambda+1)}{(\lambda+1)(p\lambda+1)} \right]^{n+1} - w}; \quad (3-1)$$

- se $\lambda \geq \frac{\sqrt{13}+1}{6}$ e sendo $w = (3-2p)(3\lambda^2 + 3\lambda + 1)$,

$$P(M_3^O \leq n) \leq \frac{w \left[\left[\frac{p(3\lambda^2+3\lambda+1)}{(\lambda+1)(p\lambda+1)} \right]^{n+1} - 1 \right]}{(6\lambda^2 + 4\lambda + 1)(p\lambda+1) \left[\frac{p(3\lambda^2+3\lambda+1)}{(\lambda+1)(p\lambda+1)} \right]^{n+1} - w}; \quad (3-2)$$

e uma cota inferior para distribuição de M_3^O é dada por

- se $0 < \lambda < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e sendo $w = 4p\lambda^4 + \lambda^3(9p-5) + \lambda^2(10p-9) + 5\lambda(p-1) +$

$p - 1$,

$$P(M_3^O \leq n) \geq \frac{w \left[1 - \left[\frac{p(3\lambda^2 + 3\lambda + 1)}{(\lambda + 1)(p\lambda + 1)} \right]^{n+1} \right]}{\lambda(\lambda + 1)(2\lambda + 1)(p\lambda + 1) \left[\frac{p(3\lambda^2 + 3\lambda + 1)}{(\lambda + 1)(p\lambda + 1)} \right]^{n+1} + w}; \quad (3-3)$$

- se $\lambda \geq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ e sendo $w = 3p\lambda^4 + 3\lambda^2(3p - 2) + 3\lambda^2(4p - 3) + 3\lambda(2p - 1) + p$,

$$P(M_3^O \leq n) \geq \frac{w \left[1 - \left[\frac{p(3\lambda^2 + 3\lambda + 1)}{(\lambda + 1)(p\lambda + 1)} \right]^{n+1} \right]}{(\lambda + 1)(3\lambda^2 - 1)(p\lambda + 1) \left[\frac{p(3\lambda^2 + 3\lambda + 1)}{(\lambda + 1)(p\lambda + 1)} \right]^{n+1} + w} \quad (3-4)$$

3.1.2 Modelo $C_d^i(\lambda, p)$

Antes de obter as cotas para $P(M_d^i \leq n)$, mostramos o seguinte resultado que dá uma condição necessária e suficiente para a sobrevivência com probabilidade positiva do processo $C_d^i(\lambda, p)$ para todo $d \geq 2$, pois Junior *et al* [8] consideram unicamente os casos em que $d = 2$ e $d = 3$.

Teorema 3.7 *O processo $C_d^i(\lambda, p)$ sobrevive ($\psi_d^i < 1$) se, e somente se*

$$p > \frac{\lambda + d}{\lambda^2(d - 1) + \lambda d + d}.$$

É possível obter cotas para o alcance máximo para qualquer $d \geq 2$. Aqui por simplicidade nos cálculos, mostramos explicitamente o caso $d = 2$ e $d = 3$.

Proposição 3.8 *Considere o modelo $C_2^i(\lambda, p)$. Então*

$$P(M_2^i \geq n) \geq \frac{[p\lambda^3 + \lambda^2(4p - 3) + 8\lambda(p - 1) + 4(p - 1)] \left[1 - \left[\frac{2p(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda p + 1)} \right]^{n+1} \right]}{p\lambda^3 + \lambda^2(4p - 3) + 8\lambda(p - 1) + 4(p - 1) + \lambda(\lambda + 2)(\lambda p + 1) \left[\frac{2p(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda p + 1)} \right]^{n+1}}$$

e

$$P(M_2^i \leq n) \leq \frac{2(1 - p)(\lambda + 1) \left[\left[\frac{2p(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda p + 1)} \right]^{n+1} - 1 \right]}{\lambda(p\lambda + 1) \left[\frac{2p(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda p + 1)} \right]^{n+1} - 2(1 - p)(\lambda + 1)}$$

Proposição 3.9 *Considere o modelo $C_3^i(\lambda, p)$. Então*

- se $0 < \lambda < 3$

$$P(M_3^i \leq n) \geq \frac{[4p\lambda^3 + \lambda^2(9p-5) + 18\lambda(p-1) + 9(p-1)] \left[1 - \left[\frac{3p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(p\lambda+1)} \right]^{n+1} \right]}{4p\lambda^3 + \lambda^2(9p-5) + 18\lambda(p-1) + 9(p-1) + 2\lambda(\lambda+3)(p\lambda+1) \left[\frac{3p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(p\lambda+1)} \right]^{n+1}}$$

- se $\lambda \geq 3$

$$P(M_3^i \leq n) \geq \frac{[p\lambda^3 + \lambda^2(3p-2) + 3\lambda(3p-2) + 3p] \left[1 - \left[\frac{3p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(\lambda p+1)} \right]^{n+1} \right]}{p\lambda^3 + \lambda^2(3p-2) + 3\lambda(3p-2) + 3p + (\lambda+1)(\lambda+3)(p\lambda+1) \left[\frac{3p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(\lambda p+1)} \right]^{n+1}}$$

e

- se $0 < \lambda < 3/2$

$$P(M_i^3 \leq n) \leq \frac{[2p\lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda(1-p) + 9(1-p)] \left[\left[\frac{3p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(\lambda p+1)} \right]^{n+1} - 1 \right]}{2\lambda(\lambda+3)(\lambda p+1) \left[\frac{3p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(\lambda p+1)} \right]^{n+1} - [2p\lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda(1-p) + 9(1-p)]}$$

- se $\lambda \geq 3/2$

$$P(M_3^i \leq n) \leq \frac{3[\lambda(p-2) + 2p-3] \left[1 - \left[\frac{3p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(\lambda p+1)} \right]^{n+1} \right]}{(4\lambda+3)(p\lambda+1) \left[\frac{3p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(\lambda p+1)} \right]^{n+1} + 3[\lambda(p-2) + 2p-3]}$$

3.2 Provas

Prova do Teorema 3.1. Sabemos que

$$f(s; m, c_l) \leq g(s) \leq f(s; m, c_u).$$

Por outro lado, Senata [15] mostrou que se f e g são dois funções geradoras de probabilidade tais que $f(s) \leq g(s)$ para todo $s \in [0, 1]$, então $f_n(s) \leq g_n(s)$ (f_n é a n -ésima composição da função f . No caso fracionar linear tem-se uma expressão explícita para f_n , ver Agresti [1, pag. 329]) para todo inteiro positivo n , para $s \in [0, 1]$. Portanto,

$$f_n(0; m, c_l) \leq P(T \leq n) \leq f_n(0; m, c_u)$$

Vamos obter primeiro $f_n(0; m, c_u)$. Temos que

$$b = m(1 - c_u)^2 = m \left(1 - \frac{\alpha(\alpha - 1)m + k}{\alpha(\alpha + 1)m} \right)^2 = \frac{(2\alpha m - k)^2}{m\alpha^2(\alpha + 1)^2}$$

Por outro lado, a solução da equação $f(s; m, c_u) = s$ é (ver Agresti[1, pag.324])

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{1 - m(1 - c_u)^2 - c_u}{c_u(1 - c_u)} \\ &= \frac{1 - \frac{(2\alpha m - k)^2}{m\alpha^2(\alpha + 1)^2} - \frac{\alpha(\alpha - 1)m + k}{\alpha(\alpha + 1)m}}{\left(\frac{\alpha(\alpha - 1)m + k}{\alpha(\alpha + 1)m} \right) \left(1 - \frac{\alpha(\alpha - 1)m + k}{\alpha(\alpha + 1)m} \right)} \\ &= \frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k]}{\alpha(\alpha - 1)m + k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} s_0 - 1 &= \frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k]}{\alpha(\alpha - 1)m + k} - 1 \\ &= \frac{(2m\alpha - k)(1 - m)}{\alpha(\alpha - 1)m + k} \\ s_0 - m^n &= \frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k]}{\alpha(\alpha - 1)m + k} - m^n \\ &= \frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k] - m^n[\alpha(\alpha - 1)m + k]}{\alpha(\alpha - 1)m + k} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_n(0; m, c_u) &= 1 - \frac{m^n(s_0 - 1)}{s_0 - m^n} \\ &= 1 - \frac{m^n \frac{(2m\alpha - k)(1 - m)}{\alpha(\alpha - 1)m + k}}{\frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k] - m^n[\alpha(\alpha - 1)m + k]}{\alpha(\alpha - 1)m + k}} \\ &= 1 - \frac{m^n(2m\alpha - k)(1 - m)}{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k] - m^n[\alpha(\alpha - 1)m + k]} \\ &= \frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k](1 - m^n)}{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k] - m^n[\alpha(\alpha - 1)m + k]} \end{aligned}$$

Vamos obter agora $f_n(0; m, c_l)$. Temos que

$$\begin{aligned}
 b &= m(1 - c_l)^2 \\
 &= m \left(1 - \frac{p_0 - 1 + \frac{2m}{\beta+1}}{p_0 - 1 + \frac{2m}{\beta}} \right)^2 \\
 &= m \left(1 - \frac{\beta[(\beta+1)(p_0 - 1) + 2m]}{[\beta+1][\beta(p_0 - 1) + 2m]} \right)^2 \\
 &= m \left(\frac{2m}{[\beta+1][\beta(p_0 - 1) + 2m]} \right)^2 \\
 &= \frac{4m^3}{(\beta+1)^2[\beta(p_0 - 1) + 2m]^2}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, a solução da equação $f(s; m, c_l) = s$ é

$$\begin{aligned}
 s_0 &= \frac{1 - m(1 - c_l)^2 - c_l}{c_l(1 - c_l)} \\
 &= \frac{1 - \frac{4m^3}{(\beta+1)^2[\beta(p_0 - 1) + 2m]^2} - \frac{\beta[\beta(p_0 - 1) + 2m + p_0 - 1]}{(\beta+1)[\beta(p_0 - 1) + 2m]}}{\left(\frac{\beta[\beta(p_0 - 1) + 2m + p_0 - 1]}{(\beta+1)[\beta(p_0 - 1) + 2m]} \right) \left(\frac{2m}{[\beta+1][\beta(p_0 - 1) + 2m]} \right)} \\
 &= \frac{\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) - 2m(m - 1)}{\beta[(\beta+1)(p_0 - 1) + 2m]}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 s_0 - 1 &= \frac{\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) - 2m(m - 1)}{\beta[(\beta+1)(p_0 - 1) + 2m]} - 1 \\
 &= \frac{2m(1 - m)}{\beta[(\beta+1)(p_0 - 1) + 2m]} \\
 s_0 - m^n &= \frac{\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) - 2m(m - 1)}{\beta[(\beta+1)(p_0 - 1) + 2m]} - m^n \\
 &= \frac{(\beta+1)[\beta(p_0 - 1) + 2m] - 2m^2 - m^n\beta[(\beta+1)(p_0 - 1) + 2m]}{\beta[(\beta+1)(p_0 - 1) + 2m]}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 f_n(0; m, c_l) &= 1 - \frac{m^n(s_0 - 1)}{s_0 - m^n} \\
 &= 1 - \frac{2m(1 - m)}{\frac{\beta[(\beta + 1)(p_0 - 1) + 2m]}{(\beta + 1)[\beta(p_0 - 1) + 2m] - 2m^2 - m^n\beta[(\beta + 1)(p_0 - 1) + 2m]}} \\
 &= 1 - \frac{m^n 2m(1 - m)}{(\beta + 1)[\beta(p_0 - 1) + 2m] - 2m^2 - m^n\beta[(\beta + 1)(p_0 - 1) + 2m]} \\
 &= \frac{[1 - m^n][\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) + 2m(1 - m)]}{(\beta + 1)[\beta(p_0 - 1) + 2m] - 2m^2 - m^n\beta[(\beta + 1)(p_0 - 1) + 2m]}
 \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
 \frac{[1 - m^n][\beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) + 2m(1 - m)]}{(\beta + 1)[\beta(p_0 - 1) + 2m] - 2m^2 - m^n\beta[(\beta + 1)(p_0 - 1) + 2m]} &\leq P(T \leq n) \\
 &\leq \frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k](1 - m^n)}{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k] - m^n[\alpha(\alpha - 1)m + k]}
 \end{aligned}$$

□

Prova do Teorema 3.2. Temos que $E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - g_n(0)]$, e como $m < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 - f_n(0; m, c_u)] \leq E(T) \leq \sum_{n=0}^{\infty} [1 - f_n(0; m, c_l)].$$

Por outro lado, Seneta [15] mostrou que se $M > 0$, $\tau > 0$ e $s < 1$

$$\frac{\ln(1 - \tau s^M)}{\ln(s)} \leq \sum_{j=M}^{\infty} \frac{\tau s^j}{1 - \tau s^j} \leq \frac{\tau s^M}{1 - \tau s^M} + \frac{\ln(1 - \tau s^M)}{\ln(s)}.$$

Seja $r = \frac{m[\alpha^2 + \alpha(1 - 2m) + k]}{\alpha(\alpha - 1)m + k}$, então

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} [1 - f_n(0; m, c_u)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[r - 1]m^n}{r - m^n} \\
 &= [r - 1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{r - m^n} \\
 &= 1 + [r - 1] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/r)m^n}{1 - (1/r)m^n} \\
 &\geq 1 + [r - 1] \frac{\ln(1 - (1/r)m)}{\ln(m)}.
 \end{aligned}$$

Seja $w = \beta^2(p_0 - 1) + \beta(2m + p_0 - 1) + 2m(1 - m)$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} [1 - f_n(0; m, c_l)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{w[1 - m^n]}{w - m^n[w - 2m(1 - m)]} \right] \\
&= \left[\frac{w}{w - 2m(1 - m)} - 1 \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{\frac{w}{w - 2m(1 - m)} - m^n} \\
&= \left[\frac{2m(1 - m)}{w - 2m(1 - m)} \right] \left[\frac{\frac{w - 2m(1 - m)}{w}}{1 - \frac{w - 2m(1 - m)}{w}} \right] + \frac{2m(1 - m)}{w - 2m(1 - m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{w - 2m(1 - m)}{w} m^n}{1 - \frac{w - 2m(1 - m)}{w} m^n} \\
&\leq 1 + \frac{2m(1 - m)}{w - 2m(1 - m)} \left[\frac{\frac{w - 2m(1 - m)}{w}}{1 - \frac{w - 2m(1 - m)}{w}} + \frac{\ln \left(1 - \frac{w - 2m(1 - m)}{w} m \right)}{\ln(m)} \right] \\
&= 1 + \frac{2m^2}{w + 2m^2} + \frac{2m(1 - m)}{w - 2m(1 - m)} \frac{\ln \left(1 - \frac{w - 2m(1 - m)}{w} m \right)}{\ln(m)}
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de w e r , obtêm-se o resultado. \square

Prova do Teorema 3.4. Como em Junior *et al* [8] para o processo $C_d^O(\lambda, p)$ defina $Z_0^O = 1$ como o número de colônias presentes no instante de tempo 0 em $C_d^O(\lambda, p)$. Tão pronto uma catástrofe geométrica acontece, um número de colônias aleatório, chamado Z_1^O , são criadas. Esta é a primeira geração. Cada um destas novas colônias da nascimento (em diferentes tempos) a um número aleatório de novas colônias. Isto é Z_2^O , a segunda geração. En geral, para $n \geq 1$, se $Z_{n-1}^O = 0$ então $Z_n^O = 0$. Por outro lado, se $Z_{n-1}^O \geq 1$, então Z_n^O é o número de colônias geradas pelo $(n - 1)$ -ésima geração de colônias. O fato do número de descendentes de diferentes colônias ser independentes e ter a mesma distribuição, faz que $\{Z_n^O\}_{n \leq 0}$ seja um processo de ramificação. Claramente $C_d^O(\lambda, p)$ morre se, e somente se $\{Z_n^O\}_{n \in \mathbb{N}}$ morre e a distribuição do número de descendentes de $\{Z_n^O\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$p_k = \begin{cases} b & , k = 0 \\ ac^k & , 1 \leq k < d \\ 1 - b - \frac{ac(1 - c^d)}{1 - c} & , k = d. \end{cases}$$

Além disso, sua função geradora de probabilidade é $g(s) = \sum_{k=0}^d s^k p_k$ e

$$\begin{aligned}
 g'(1) &= \sum_{k=1}^d k p_k = \sum_{k=1}^{d-1} k p_k + d[1 - p_0] - d \sum_{k=1}^{d-1} p_k \\
 &= \sum_{k=1}^{d-1} [k - d] p_k + d[1 - p_0] \\
 &= a \sum_{k=1}^{d-1} [k - d] c^k + d[1 - b] \\
 &= \frac{ac(cd - d + 1) - ac^d}{(1 - c)^2} + d[1 - b] \\
 &= \frac{p(\lambda + 1)^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^d \right]}{\lambda p + 1}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o processo $C_d^O(\lambda, p)$ sobrevive se, e somente se

$$\frac{p(\lambda + 1)^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^d \right]}{\lambda p + 1} > 1,$$

ou equivalentemente

$$p > \frac{1}{(\lambda + 1)^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^d \right] - \lambda}.$$

□

Proposição 3.10 *Considere o processo auxiliar $\{Z_n^O\}$, com função geradora de probabilidade $g(s)$, para o processo $C_d^O(\lambda, p)$. Então*

$$\begin{aligned}
m = g'(1) &= \frac{p(\lambda+1)^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^d \right]}{\lambda p + 1}, \\
k = g''(1) &= \frac{2p(\lambda+1)^2 \left[\lambda - (\lambda+d) \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^d \right]}{p\lambda + 1}, \\
\alpha &= \left[\frac{(2\lambda + 2d + 1) \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^d - 2\lambda - 1}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^d - 1} \right] e \\
\beta &= \left[(\lambda+1) \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^d \right) \right].
\end{aligned}$$

Prova. O valor de $m = g'(1)$ foi obtido no Teorema 3.4. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
k = g''(1) &= \sum_{k=2}^d k(k-1)p_k \\
&= \sum_{k=2}^{d-1} [k(k-1) - d(d-1)]p_k + d(d-1)[1 - p_0 - p_1] \\
&= a \sum_{k=2}^{d-1} [k(k-1) - d(d-1)]c^k + d(d-1)[1 - b - ac],
\end{aligned}$$

substituindo os valores de a, b e c ,

$$k = g''(1) = \frac{2p(\lambda+1) \left(\lambda - (\lambda+d) \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^d \right)}{p\lambda + 1}.$$

Substituindo os valores de m, k e $p_0 = b$ em $\alpha = \lfloor \frac{m+k}{m} \rfloor$ e $\beta = \lfloor \frac{m}{1-p_0} \rfloor$, se obtêm os resultados faltantes. \square

Observação 3.11 A distribuição do número de descendentes do processo auxiliar na prova do Teorema 3.4

1. se $d = 2$ é dada por

$$p_0 = P(N = 0) = b, \quad p_1 = P(N = 1) = ac, \quad p_2 = P(N = 2) = 1 - b - ac;$$

2. se $d = 3$ é dada por

$$\begin{aligned} p_0 &= P(N = 0) = b, & p_1 &= P(N = 1) = ac, \\ p_2 &= P(N = 2) = ac^2, & p_3 &= P(N = 3) = 1 - b - ac - ac^2. \end{aligned}$$

Prova da Proposição 3.5. Pelo Teorema 3.4 o processo $C_2^O(\lambda, p)$ morre com probabilidade 1 se, e somente se $p < \frac{1}{\lambda + 1}$.

A função geradora de probabilidade do processo auxiliar $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ é $g(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2$. Pela Proposição 3.10 temos

$$\begin{aligned} m &= g'(1) = \frac{p(2\lambda + 1)}{\lambda p + 1}, \\ k &= g''(1) = \frac{2p\lambda}{p\lambda + 1}, \\ \alpha &= \left\lfloor \frac{m+k}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4\lambda + 1}{2\lambda + 1} \right\rfloor = 1, \quad \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

e

$$\beta = \left\lfloor \frac{m}{1-p_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} \right\rfloor = 1, \quad \forall \lambda > 0.$$

Logo, substituindo estas quantidades no Teorema 3.1 obtemos o resultado. \square

Prova da Proposição 3.6. Para o processo auxiliar $\{Z_n^O\}_{n \geq 0}$ a função geradora de probabilidade é $g(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + p_3s^3$. Logo, pela Proposição 3.10

$$\begin{aligned} m &= g'(1) = \frac{p(3\lambda^2 + 3\lambda + 1)}{(\lambda + 1)(\lambda p + 1)} \\ k &= g''(1) = \frac{2p\lambda(3\lambda + 1)}{(\lambda + 1)(\lambda p + 1)}, \end{aligned}$$

e pelo Teorema 3.4 o processo morre se, e somente se

$$p < \frac{(\lambda + 1)(\lambda p + 1)}{3\lambda^2 + 3\lambda + 1}.$$

Por outro lado temos

$$\alpha = \left\lfloor \frac{9\lambda^2 + 5\lambda + 1}{3\lambda^2 + 3\lambda + 1} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \lambda < \frac{\sqrt{13} + 1}{6} \\ 2, & \text{se } \lambda \geq \frac{\sqrt{13} + 1}{6}. \end{cases}$$

Usando o Teorema 3.1 vemos que se $0 < \lambda < \frac{\sqrt{13}+1}{6}$

$$P(M_3^O \leq n) \leq \frac{m[k-2(m-1)](1-m^{n+1})}{km^{n+1}-m[k-2(m-1)]},$$

logo substituindo os valores de k e m , obtemos (3-1).

Como antes, aplicando o Teorema 3.1 vemos que se $\lambda \geq \frac{\sqrt{13}+1}{6}$

$$P(M_3^O \leq n) \leq \frac{m[k-2(2m-3)](m^{n+1}-1)}{m^{n+1}(k+2m)-m[k-2(2m-3)]},$$

logo substituindo os valores de k e m , obtemos (3-2).

Para obter a cota inferior, note que

$$\beta = \left\lfloor \frac{3\lambda^2 + 3\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \lambda < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 2, & \text{se } \lambda \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

Novamente usando a Proposição 3.1 vemos que se $0 < \lambda < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$P(M_3^O \leq n) \geq \frac{[m^2 - 2m - p_0 + 1](1 - m^{n+1})}{m^{n+1}(m + p_0 - 1) + m^2 - 2m - p_0 + 1},$$

logo substituindo os valores de m e p_0 , obtemos (3-3).

Como nos casos anteriores usando a Proposição 3.1 vemos que se $\lambda \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$P(M_3^O \leq n) \geq \frac{[m^2 - 3m - 3(p_0 - 1)](1 - m^{n+1})}{m^{n+1}[2m + 3(p_0 - 1)] + m^2 - 3m - 3(p_0 - 1)}$$

logo substituindo os valores de m e p_0 , obtemos (3-4). □

Prova do Teorema 3.7. Pela Proposição 4.3 de Machado *et al* [12], temos que o processo sobrevive se, e somente se

$$E \left[\left(\frac{d-1}{d} \right) \right] < \frac{d-1}{d},$$

mas

$$E[s^N] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(N = k) = b + a \sum_{k=1}^{\infty} (sc)^k = \frac{sc(a-b) + b}{1-sc}.$$

Portanto, o processo sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se

$$\frac{\lambda(dp - 2p + 1) + d - p}{(\lambda + d)(\lambda p + 1)} < \frac{d - 1}{d}$$

ou equivalentemente

$$p > \frac{\lambda + d}{\lambda^2(d - 1) + \lambda d + d}.$$

□

Observação 3.12 *Pela Proposição 4.3 de Machado et al [12], temos que o processo $C_d^i(\lambda, p)$ olhando para as colônias criadas, se comporta como um processo de ramificação a tempo discreto com função geradora de probabilidade $g(s)$ tal que*

$$m = g'(1) = d \left(1 - E \left(\left(\frac{d-1}{d} \right)^N \right) \right) = \frac{dp(\lambda + 1)^2}{(\lambda + d)(p\lambda + 1)} e$$

$$k = g''(1) = d(d-1) \left(1 - 2E \left(\left(\frac{d-1}{d} \right)^N \right) + E \left(\left(\frac{d-2}{d} \right)^N \right) \right) = \frac{2dp\lambda(d-1)(\lambda + 1)^2}{(\lambda + d)(2\lambda + d)(p\lambda + 1)}.$$

Portanto,

$$\alpha = \left\lfloor \frac{m+k}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d(2\lambda + 1)}{2\lambda + d} \right\rfloor$$

e

$$\beta = \left\lfloor \frac{m}{1-p_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d(\lambda + 1)}{\lambda + d} \right\rfloor.$$

Prova da Proposição 3.8. Pelo Teorema 3.7 o processo morre se, e somente se

$$p < \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}.$$

Além disso, pela Observação 3.12

$$m = g'(1) = \frac{2p(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda p + 1)},$$

$$k = g''(1) = \frac{2p\lambda(\lambda + 1)}{(\lambda + 2)(\lambda p + 1)},$$

$$\alpha = \left\lfloor \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} \right\rfloor = 1, \forall \lambda > 0$$

e

$$\beta = \left\lfloor \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2} \right\rfloor = 1, \forall \lambda > 0.$$

Logo substituindo, essas quantidades no Teorema 3.1, obtemos o resultado. \square

Prova da Proposição 3.9. Pelo Teorema 3.7 o processo morre se, e somente se

$$p < \frac{\lambda+3}{2\lambda^2+3\lambda+3}.$$

Além disso, pela Observação 3.12

$$m = \frac{2p(\lambda+1)^2}{(\lambda+2)(\lambda p+1)}$$

$$k = \frac{12\lambda p(\lambda+1)^2}{(\lambda+3)(2\lambda+3)(\lambda p+1)}.$$

Por outro lado temos

$$\alpha = \left\lfloor \frac{m+k}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6\lambda+3}{2\lambda+3} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \lambda < 3/2 \\ 2, & \text{se } \lambda \geq 3/2 \end{cases}$$

e

$$\beta = \left\lfloor \frac{m}{1+p_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6\lambda+3}{2\lambda+3} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \lambda < 3 \\ 2, & \text{se } \lambda \geq 3. \end{cases}$$

Logo, considerando cada um dos casos, e substituindo os valores de m, k, α e β no Teorema 3.1, obtemos o resultado. \square

Tempo de extinção

Anteriormente obtivemos condições para a sobrevivência de uma população sujeita a catástrofes uniformes com dispersão ótima ou independente, assim como a probabilidade de extinção quando $d = 2$ e $d = 3$. Além disso, comparamos quando uma catástrofe geométrica (estudada por Junior *et al* [8]) pode ser mais devastadora que uma uniforme e que estratégia de dispersão é melhor (Nos casos $d = 2$ e $d = 3$).

É bom notar que tanto em $d = 2$ como em $d = 3$ existe uma região dos parâmetros onde a população morre com probabilidade 1 independentemente do tipo de catástrofe e dispersão adotada, e não é possível determinar que catástrofe é mais devastadora e qual estratégia de dispersão é a melhor para prolongar a existência da população. Portanto, como em Junior *et al* [8] vamos determinar o tempo médio de extinção de uma catástrofe uniforme com dispersão ótima e independente (casos $d = 2$ e $d = 3$) para poder comparar com o caso em que a catástrofe é geométrica e poder determinar que catástrofe é mais devastadora e qual estratégia prolonga mais o tempo de existência da população.

O seguinte teorema resume os resultados obtidos por Junior *et al* [7] para o tempo médio de extinção dos modelos $C_d^O(\lambda, p)$ e $C_d^i(\lambda, p)$ (para $d = 2$ e $d = 3$) no caso que os processos morrem com probabilidade 1.

Teorema 4.1 (Junior, V *et al* [7]) *Seja τ_d^O o tempo de extinção do processo $C_d^O(\lambda, p)$ e τ_d^i o tempo de extinção do processo $C_d^i(\lambda, p)$.*

1. Se $p < \frac{1}{\lambda + 1}$, então $E[\tau_2^O] = \left(1 + \frac{1}{\lambda p}\right) \ln \left(\frac{1-p}{1-p-\lambda p}\right)$
2. Se $p = \frac{1}{\lambda + 1}$, então $E[\tau_2^O] = \infty$.
3. Se $p < \frac{\lambda + 1}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}$, então

$$E[\tau_3^O] = \frac{\lambda p + 1}{\lambda p} \sqrt{\frac{p(\lambda + 1)}{4 + \lambda p - 3p}} \ln \left(\frac{(2 - 2p - \lambda p)\sqrt{p(\lambda + 1)} + \lambda p\sqrt{4 + \lambda p - 3p}}{(2 - 2p - \lambda p)\sqrt{p(\lambda + 1)} - \lambda p\sqrt{4 + \lambda p - 3p}} \right)$$

4. Se $p = \frac{\lambda + 1}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}$, então $E[\tau_3^O] = \infty$.

5. Se $p < \frac{\lambda+2}{\lambda^2+2\lambda+2}$, então

$$E[\tau_2^i] = \frac{(\lambda+2)(\lambda p+1)}{\lambda p(\lambda+1)} \ln \left(\frac{(1-p)(\lambda+2)}{\lambda+2-p(\lambda^2+2\lambda+2)} \right).$$

6. Se $p = \frac{\lambda+2}{\lambda^2+2\lambda+2}$, então $E[\tau_2^i] = \infty$.

7. Se $p < \frac{\lambda+3}{2\lambda^2+3\lambda+3}$, então

$$E[\tau_3^i] = \frac{(\lambda p+1)(2\lambda+3)(\lambda+3)}{2h(\lambda,p)} \ln \left(\frac{g(\lambda,p)+h(\lambda,p)}{g(\lambda,p)-h(\lambda,p)} \right)$$

onde

$$g(\lambda,p) = (\lambda+3)(2\lambda+3-3\lambda p-3p-\lambda^2 p)$$

e

$$h(\lambda,p) = \lambda \sqrt{p(\lambda+1)(p\lambda^2+4\lambda+6-3p)(\lambda+3)}.$$

8. Se $p = \frac{\lambda+3}{2\lambda^2+3\lambda+3}$, então $E[\tau_3^i] = \infty$.

4.1 Tempo de extinção para $C_d^O(\lambda)$ e $C_d^i(\lambda)$

Nos seguintes resultados obtemos o tempo médio de extinção quando os processos $C_2^O(\lambda)$ e $C_d^i(\lambda)$ morrem quase certamente, para $d = 2$ e $d = 3$.

Proposição 4.2 *Seja $\tau_d^{O,u}$ o tempo de extinção do processo $C_d^O(\lambda)$.*

(i) Se $\lambda(\lambda+2) - 3(\lambda+1)\ln(\lambda+1) < 0$, então

$$E[\tau_2^{O,u}] = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+2) - 2(\lambda+1)\ln(\lambda+1)} \ln \left(\frac{(\lambda+1)\ln(\lambda+1)}{3(\lambda+1)\ln(\lambda+1) - \lambda(\lambda+2)} \right).$$

Se $\lambda(\lambda+2) - 3(\lambda+1)\ln(\lambda+1) = 0$, então $E[\tau_2^{O,u}] = \infty$.

(ii) Se $\lambda(4\lambda^2 + 15\lambda + 10) - 12(\lambda+1)^2\ln(\lambda+1) < 0$ e fazendo $w = \sqrt{\lambda^2(\lambda+2)^2 + 2\lambda(3\lambda+2)\ln(\lambda+1) - 8(\lambda+1)^2\ln^2(\lambda+1)}$, então

$$E[\tau_3^{O,u}] = \frac{\lambda(\lambda+1)}{w} \ln \left(\frac{4(\lambda+1)\ln(\lambda+1) - \lambda(\lambda+2) + w}{4(\lambda+1)\ln(\lambda+1) - \lambda(\lambda+2) - w} \right).$$

Se $\lambda(4\lambda^2 + 15\lambda + 10) - 12(\lambda+1)^2\ln(\lambda+1) = 0$, então $E[\tau_3^{O,u}] = \infty$.

Proposição 4.3 *Seja $\tau_d^{i,u}$ o tempo de extinção do processo $C_d^i(\lambda)$.*

(i) Se $\lambda < -4W\left(-\frac{1}{2e^{1/2}}\right) - 2$, então

$$E[\tau_2^{i,u}] = \frac{\lambda}{\ln\left(\frac{(\lambda+2)^4}{16(\lambda+1)}\right) - \lambda} \ln\left(\frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda - \ln\left(\frac{(\lambda+2)^4}{16(\lambda+1)^2}\right)}\right).$$

Se $\lambda = -4W\left(-\frac{1}{2e^{1/2}}\right) - 2$, então $E[\tau_2^{i,u}] = \infty$.

(ii) Se $\lambda < -\frac{9}{2}W\left(-\frac{1}{3e^{2/3}}\right) - 3$ e fazendo

$$w = \sqrt{8 \ln(\lambda+1) \left[2\lambda - \ln\left(\frac{(\lambda+1)^2(\lambda+3)^8}{[3(2\lambda+3)]^9}\right) + \left[2\lambda + \ln\left(\frac{3^9(\lambda+1)^4}{(2\lambda+3)^9}\right) \right]^2 \right]},$$

então

$$E[\tau_3^{i,u}] = \frac{2\lambda}{w} \ln\left(\frac{9 \ln\left(\frac{(2\lambda+3)^2}{3}\right) - 2\lambda + w}{9 \ln\left(\frac{(2\lambda+3)^2}{3}\right) - 2\lambda - w}\right).$$

Se $\lambda = -\frac{9}{2}W\left(-\frac{1}{3e^{2/3}}\right) - 3$, então $E[\tau_3^{i,u}] = \infty$.

4.2 Comparando Catástrofes

Nesta seção determinamos as regiões do espaço (p, λ) onde uma catástrofe geométrica ou uniforme e qual tipo de dispersão prolongam mais o tempo médio de existência da população. Para tal vamos comparar $E[\tau_d^O], E[\tau_d^i], E[\tau_d^{O,u}]$ e $E[\tau_d^{i,u}]$ na região onde $\Psi_d^O = \Psi_d^i = \Psi_d^{O,u} = \Psi_d^{i,u} = 1$, para os casos $d = 2$ e $d = 3$.

Caso $d = 2$

As seguintes regiões são mostradas na Figura 4.1.

- Na região onde $E[\tau_2^{O,u}] > E[\tau_2^O]$ (região 1) temos

$$E[\tau_2^i] \leq E[\tau_2^O] < E[\tau_2^{i,u}] \leq E[\tau_2^{O,u}] < \infty.$$

Um tipo de catástrofe uniforme prolonga em media um tempo maior a vida da população.

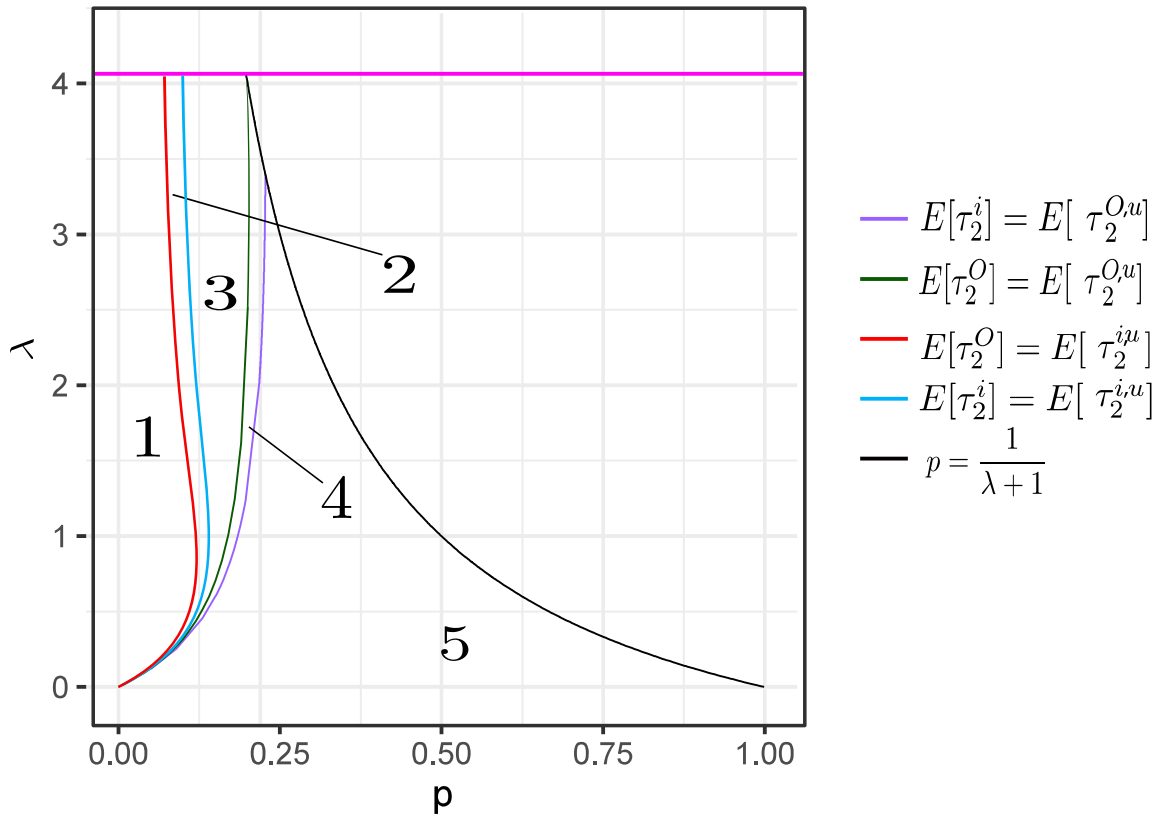


Figura 4.1: Comparação catástrofe uniforme e geométrica na região onde a morte é quase certa, $d = 2$

- Na região onde $(E[\tau_2^O] \geq E[\tau_2^{i,u}]) \cap (E[\tau_2^{i,u}] > E[\tau_2^i])$ (região 2) temos

$$E[\tau_2^i] < E[\tau_2^{i,u}] \leq E[\tau_2^O] < E[\tau_2^{O,u}] < \infty.$$

Uma catástrofe uniforme onde os indivíduos se dispersam de forma ótima prolonga mais tempo (em média) a existência da população. Quando o tipo de catástrofe for geométrica e os indivíduos se dispersam de forma independente a população vive menos tempo (em média) que em qualquer outro caso.

- Na região onde $(E[\tau_2^{O,u}] > E[\tau_2^O]) \cap (E[\tau_2^i] \geq E[\tau_2^{i,u}])$ (região 3) temos

$$E[\tau_2^{i,u}] \leq E[\tau_2^i] \leq E[\tau_2^O] < E[\tau_2^{O,u}] < \infty.$$

Se dispersar de forma ótima ajuda a prolongar o tempo (em média) de vida da população, sendo maior no caso quando o tipo de catástrofe é uniforme. Por outro lado, se a catástrofe for independente e o tipo de catástrofe for geométrica, a população viverá (em média) menos tempo.

- Na região $(E[\tau_2^O] \geq E[\tau_2^{O,u}]) \cap (E[\tau_2^{O,u}] \geq E[\tau_2^i])$ (região 4) temos

$$E[\tau_2^{i,u}] \leq E[\tau_2^i] \leq E[\tau_2^{O,u}] \leq E[\tau_2^O] < \infty$$

Se dispersar de forma ótima ajuda a prolongar o tempo (em média) de vida da população, sendo maior no caso quando o tipo de catástrofe é geométrica. Por outro lado, se a catástrofe for independente e o tipo de catástrofe for uniforme, a população vivera (em média) menos tempo.

- Na região $E[\tau_2^i] > E[\tau_2^{O,u}]$ (região 5) temos

$$E[\tau_2^{i,u}] \leq E[\tau_2^{O,u}] \leq E[\tau_2^i] \leq E[\tau_2^O] < \infty$$

Uma catástrofe do tipo geométrica aumenta o tempo (em média) de vida da população.

Caso $d = 3$

Neste caso, na região onde todos os processos morrem quase-certamente, temos que $E[\tau_3^i] \geq E[\tau_3^{i,u}]$ e $E[\tau_3^O] \geq E[\tau_3^{O,u}]$.

As seguintes regiões são mostradas na Figura 4.2.

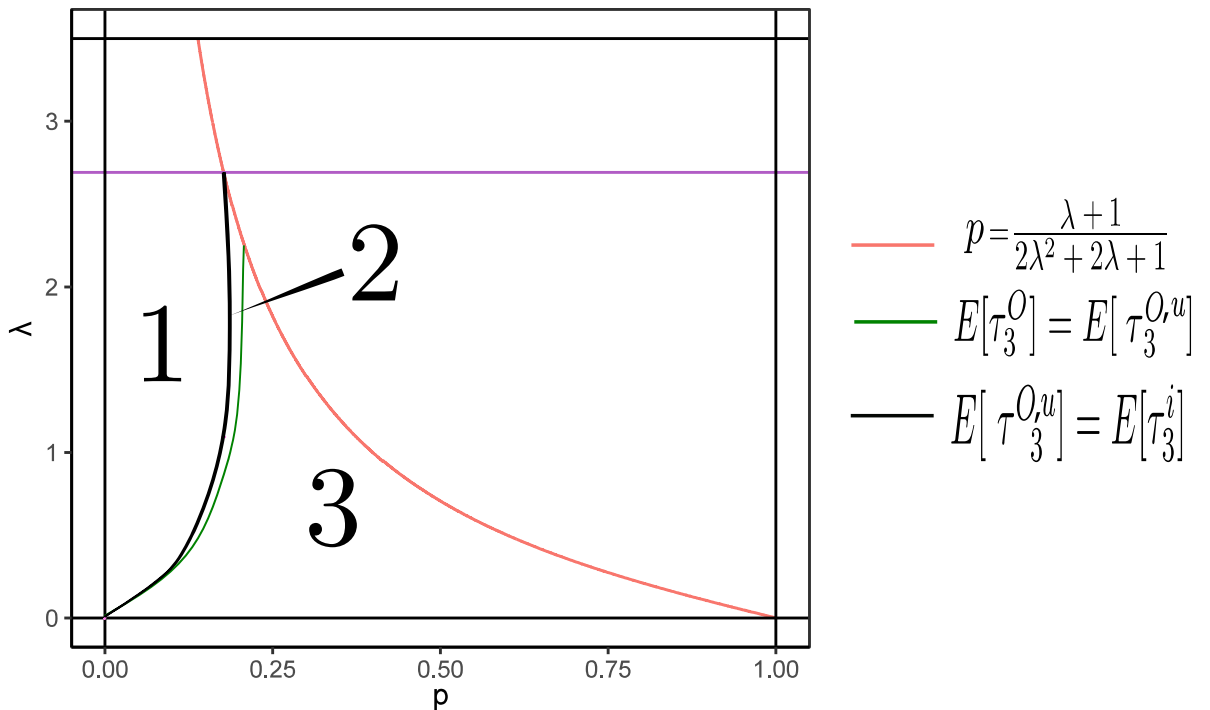


Figura 4.2: Comparação catástrofe uniforme e geométrica na região onde a morte é quase certa, $d = 3$

- Na região $E[\tau_3^{O,u}] > E[\tau_3^O]$ (região 1) temos

$$E[\tau_3^{i,u}] \leq E[\tau_3^i] \leq E[\tau_3^O] < E[\tau_3^{O,u}] < \infty$$

Se dispersar de forma ótima ajuda a prolongar o tempo (em média) de vida da população, sendo maior no caso em que o tipo de catástrofe é uniforme. Quando o tipo de catástrofe for uniforme e os indivíduos se dispersam de forma independente a população vive menos tempo (em média) que em qualquer outro caso.

- Na região $(E[\tau_3^{i,u}] \leq E[\tau_3^O]) \cap (E[\tau_3^{O,u}] \geq E[\tau_3^i])$ (região 2) temos

$$E[\tau_3^{i,u}] \leq E[\tau_3^i] \leq E[\tau_3^{O,u}] \leq E[\tau_3^O] < \infty.$$

Quando os indivíduos se dispersam de forma ótima o tempo (em média) de vida da população se prolonga mais, sendo maior quando o tipo de catástrofe for geométrica. Se a catástrofe for do tipo uniforme e a estratégia de dispersão adotada for a independente faz com que o tempo (em média) de vida da população seja o menor.

- Na região $E[\tau_3^i] < E[\tau_3^{O,u}]$ (região 3) temos

$$E[\tau_3^{i,u}] \leq E[\tau_3^{O,u}] \leq E[\tau_3^i] \leq E[\tau_3^O] < \infty.$$

Um tipo de catástrofe geométrica prolonga um tempo (em média) maior a vida da população.

4.3 Provas

Prova da Proposição 4.2. Seja Z_t o número de colônias no tempo t do modelo $C_d^O(\lambda)$. Note que Z_t é um processo de ramificação a tempo contínuo com $Z_0 = 1$. Cada colônia em Z_t sobrevive um tempo exponencial de taxa 1 e imediatamente produz $k \leq d$ colônias com probabilidade p_k dada por

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k \Phi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, k+1\right) & , 0 \leq k < d \\ 1 - \frac{1}{\lambda+1} \sum_{i=0}^{d-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^i \Phi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, i+1\right) & , k = d. \end{cases}$$

Além disso, $\tau_d^{O,u} = \inf\{t > 0 : Z_t = 0\}$.

- Para $d = 2$, temos

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\ln(\lambda + 1)}{\lambda} \\ p_1 &= \frac{(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) - \lambda}{\lambda(\lambda + 1)} e \\ p_2 &= \frac{\lambda(\lambda + 2) - 2(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda + 1)}. \end{aligned}$$

Também, a condição $\lambda(\lambda + 2) - 3(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) < 0$ é equivalente $p_1 + 2p_2 < 1$. Então, pelo Lema 4.1(i) em Junior *et al* [7],

$$\begin{aligned} E[\tau_2^{O,u}] &= \frac{1}{p_2} \ln\left(\frac{p_0}{p_0 - p_2}\right) \\ &= \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda + 2) - 2(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1)} \ln\left(\frac{(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1)}{3(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) - \lambda(\lambda + 2)}\right). \end{aligned}$$

Quando $\lambda(\lambda + 2) - 3(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) = 0$, temos $p_1 + 2p_2 = 1$. Então pelo Lema 4.1(i) em Junior *et al* [7], temos que $E[\tau_2^{O,u}] = \infty$.

- Para $d = 3$, temos

$$\begin{aligned} p_0 &= P(N = 0) = \frac{\ln(\lambda + 1)}{\lambda} \\ p_1 &= P(N = 1) = \frac{(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) - \lambda}{\lambda(\lambda + 1)} \\ p_2 &= P(N = 2) = \frac{2(\lambda + 1)^2\ln(\lambda + 1) - \lambda(3\lambda + 2)}{2\lambda(\lambda + 1)^2} \\ p_3 &= P(N = 3) = \frac{\lambda(2\lambda^2 + 9\lambda + 6) - 6(\lambda + 1)^2\ln(\lambda + 1)}{2\lambda(\lambda + 1)^2}. \end{aligned}$$

Também, a condição $\lambda(4\lambda^2 + 15\lambda + 10) - 12(\lambda + 1)^2\ln(\lambda + 1) < 0$ é equivalente $p_1 + 2p_2 + 3p_3 < 1$, Então, pelo Lema 4.1(ii) em Junior *et al* [7],

$$\begin{aligned} E[\tau_3^{O,u}] &= \frac{1}{\sqrt{4p_0p_3 + (p_2 + p_3)^2}} \ln\left[\frac{2p_0 - p_2 - p_3 + \sqrt{4p_0p_3 + (p_2 + p_3)^2}}{2p_0 - p_2 - p_3 - \sqrt{4p_0p_3 + (p_2 + p_3)^2}}\right] \\ &= \frac{\lambda(\lambda + 1)}{w} \ln\left(\frac{4(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) - \lambda(\lambda + 2) + w}{4(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1) - \lambda(\lambda + 2) - w}\right), \end{aligned}$$

onde $w = \sqrt{\lambda^2(\lambda + 2)^2 + 2\lambda(3\lambda + 2)\ln(\lambda + 1) - 8(\lambda + 1)^2\ln^2(\lambda + 1)}$.

Quando $\lambda(4\lambda^2 + 15\lambda + 10) - 12(\lambda + 1)^2\ln(\lambda + 1) = 0$, temos $p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1$. Então, pelo Lema 4.1(ii) em Junior *et al* [7], temos que $E[\tau_3^{O,u}] = \infty$.

□

Prova da Proposição 4.3. A prova é análoga a prova da Proposição 4.2. Neste caso

$$p_k = \begin{cases} \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} & , k = 0 \\ \frac{1}{\lambda+1} \binom{d}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{T(n,k)}{d^n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n \Phi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, n+1\right) & , 1 \leq k \leq d-1. \\ 1 - \sum_{j=0}^{d-1} p_j & , k = d. \end{cases}$$

- Para $d = 2$, temos

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} \\ p_1 &= \frac{2 \ln\left(\frac{(\lambda+2)^2}{4(\lambda+1)}\right)}{\lambda} e \\ p_2 &= \frac{\ln\left(\frac{(\lambda+2)^4}{16(\lambda+1)}\right) - \lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

- Para $d = 3$, temos

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} \\ p_1 &= \frac{3 \ln\left(\frac{(2\lambda+3)^3}{27(\lambda+1)^2}\right)}{2\lambda} \\ p_2 &= \frac{3 \ln\left(\frac{(\lambda+1)(\lambda+3)^3}{(2\lambda+3)^3}\right)}{\lambda} e \\ p_3 &= \frac{2\lambda - \ln\left(\frac{(\lambda+3)^{18}(\lambda+1)^2}{27^3(2\lambda+3)^9}\right)}{2\lambda}. \end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] AGRESTI, A. **Bounds on the extinction time distribution of branching process.** *Advances in Applied Probability*, 6(2):322–335, 1974.
- [2] AOMOTO, K.; KITA, M. **Theory of Hypergeometric Functions.** Springer, 2011.
- [3] ARTALEJO, J.; ECONOMOU, A.; LOPEZ-HERRERO, M. **Evaluating growth measures in an immigration process subject to binomial and geometric catastrophes.** *Mathematical Biosciences and Engineering*, 4(4):573–594, 2007.
- [4] BROCKWELL, P.; GANI, J.; RESNICK, S. **Birth, immigration and catastrophe process.** *Advances in Applied Probability*, 14(4):709–731, 1982.
- [5] CORLESS, R.; GONNET, G.; HARE, D.; JEFFREY, D.; KNUTH, D. **On the lambert w function.** *Advances in Computational Mathematics*, 5:329–359, 1996.
- [6] GUILLERA, J.; SONDOU, J. **Double integrals and finite products for some classical constants via analytic continuations of lerch's transcendent.** *Ramanujan J*, 16:247–270.
- [7] JUNIOR, V.; MACHADO, F.; ROLDAN, A. **Extinction time in growth models subject to geometric catstrophes.** *arXiv:2109.10997*.
- [8] JUNIOR, V.; MACHADO, F.; ROLDAN, A. **Dispersion as a survival strategy.** *Journal of Statistical Physics*, 164(4):937–951, 2016.
- [9] JUNIOR, V.; MACHADO, F.; ROLDAN, A. **Evaluating dispersion strategies in growth models subject to geometric catastrophes.** *Journal of Statistical Physics*, 183(30):1–15, 2021.
- [10] KHEYFITS, A. **Another incarnation of the lambert w function.** *Trabalho em progresso*.
- [11] LEFEVRE, C.; HALLIN, M.; MARAYAN, P. **On fractional linear bounds for probability generating functions.** *Journal of Applied Probability*, 23(4):904–913, 1986.

- [12] MACHADO, F.; ROLDAN, A.; JUNIOR, V. **Colonization and collapse on homogeneous trees.** *Journal of Statistical Physics*, 173:1386–1407, 2018.
- [13] MACHADO, F.; ROLDAN, A.; SCHINAZI, B. **Colonization and collapse.** *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat*, 14:719–731, 2017.
- [14] SCHINAZI, R. **Does random dispersion help survival?** *Journal of Statistical Physics*, 159(1):101–107, 2015.
- [15] SENETA, E. **On the transiente behaviour of a poisson branching process.** *Journal of the Australian Mathematical Society*, 7(4):465–480, 1967.

APÊNDICE A - Funções

A.1 Função Transcendente de Lerch

A função transcendente de Lerch (função zeta de Hurwitz-Lerch) é definida por meio da serie de potencias

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(a+n)^s},$$

sempre que

$$a \neq 0, -1, -2, \dots; \quad |z| < 1; \quad |z| = 1, \operatorname{Re}(s) > 1.$$

A restrição nos valores de a garante que todos os termos da serie no lado direito são finitos. A serie é convergente se $|z| < 1$, independentemente do valor de s , ou se $|z| = 1$ e $\operatorname{Re}(s) > 1$. Para outros valores de z, s, a , a função $\Phi(z, s, a)$ é definida por continuação analítica. Em particular

$$\Phi(z, s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - ze^{-x}} dx,$$

sempre que

$$\operatorname{Re}(a) > 0, \quad z \in \mathbb{C} - [1, \infty) \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

A prova da representação em forma integral pode ser encontrada em Guillera e Sondow [6].

A.2 Função de Gauss

A função de Gauss é definida como

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1,$$

onde a, b, c são números reais tais que $c \neq 0, -1, -2, \dots$, $(a)_n$ é o coeficiente Pochhammer e é definido

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), \quad (a)_0 = 1.$$

A função hipergeométrica de Gauss tem a seguinte representação integral

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-1} dt.$$

Uma prova da representação integral pode ser encontrada em Aomoto *et al* [2].

A.3 Função W de Lambert

A função W de Lambert é definida como a função que satisfaz

$$z = W(z)e^{W(z)},$$

onde z é qualquer número complexo. Essa função é multivaluada.

Se x é real, então para $-1/e \leq x < 0$ existem dois possíveis valores reais de $W(x)$. Frequentemente se denota o ramo que satisfaz $W(x) \geq -1$ por $W_0(x)$ ou simplesmente $W(x)$ quando não existe possibilidade de confusão, e o ramo que satisfaz $W(x) \leq -1$ por $W_{-1}(x)$. $W_0(x)$ é referido como ramo principal da função W .

Uma das aplicações da função W é na solução de algumas equações que possuem exponenciais. Para tal, a estratégia consiste em reescrever a equação na forma $y = xe^x$, isto é, $y = xe^x \Rightarrow y = W(x)$

Para mais informações sobre a função W de Lambert ver por exemplo Corless *et al* [5] ou Kheyfits [10].