Passeio aleatório unidimensional com ramificação em um meio aleatório K-periódico

Josué Macário de Figueiredo Rocha

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **PROBABILIDADE**
Orientador: **Prof. Dr. Fábio Prates Machado**

São Paulo, 17 de Setembro de 2001

O autor recebeu auxílio financeiro da CNPQ. Processo 133164/1998-5

Dedicatória

Ao meu avô, **José de Figueiredo**,
pelos livros deixados na sala.

Ao meu pai, **Macário *Ivo* de Brito Rocha**,
pelos livros, pelas palavras e pela cobrança.

À minha avó, **Maria Nadege Fulco de Figueiredo**,
por ter transmitido continuamente e onde quer que estivesse que na vida é mais importante ter bons princípios do que quaisquer fins.

Ao meu irmão **Virgílio Macário de Figueiredo Rocha** *e às minhas mães,* **Célia Figueiredo, Leda Fulco de Figueiredo e Lúcia Fulco de Figueiredo**,
pela eterna torcida e infinita dedicação.

Aos **Amigos** *que encontrei ou escolhi*
e aos **bons Professores** *que, por sorte, tive.*

Agradecimentos

Agradeço a todos os meus familiares que são tão numerosos quanto maravilhosos e em especial às minhas mães.

"Tia Luceni", obrigado por não ter desejado o reconhecimento imediato da minha geração exigindo, além do que constava nos livros didáticos, que nos ensinassem valores familiares e princípios de cidadania. Madre Feitosa, obrigado por ser tão grandiosa e por me tratar como um príncipe.

Ao grande Prof. Robson Branco por me mostrar o poder da Matemática e como estudá-la de forma construtiva. Aos grandes professores Geovani e Rogério Porto por terem feito o mesmo com a Física.

Aos amigos que tenho em Recife (não ousarei enumerá-los). Aos amigos e aos bons professores que encontrei na Universidade Federal de Pernambuco.

Profa. Cristina, Prof. Cribari, Prof. Gauss e Prof. Klauss, obrigado por toda a receptividade, torcida e incentivo em meus primeiros estudos sobre estatística e em minha transição para a USP.

Agradeço ao Prof. Ednaldo Ernesto e ao *"Dr. Luiz"* por não admitirem o meu afastamento da Matemática e me redirecionarem não só com elogios, mas *provando por* $a + b$ que eu deveria estudá-la e praticá-la.

Aos amigos e aos bons professores que encontrei na USP e na cidade de São Paulo (não ousarei enumerá-los). Ao meu orientador, Prof. Fábio Prates Machado, pelo apoio, ensino e amizade. Ao prof. Serguei Yu. Popov pela receptividade e esclarecimentos fundamentais neste estudo.

Gisela, obrigado por ser tão especial para mim.

Ao meu amigo Charles Casimiro Cavalcante por também admirar geometria e álgebra na época em que estudávamos para olimpíadas de Matemática e, desde então, sempre ter estado presente dispondo de sua atenção, amizade, inteligência e humildade para discutirmos idéias ou dividirmos alegrias. Meu eterno obrigado ao meu eterno Mestre, Prof. Ednaldo Ernesto, pela sua grandiosidade, por ser tão importante para a Matemática que existe em seus ex-alunos, por mostrar toda a poesia escondida na rainha das ciências e por transmitir a sua inexplicável humildade. Muito obrigado por vocês me suportarem.

Em fim, sou imensamente grato aos meus amigos. No fim, são só vocês que importam ... desde o começo.

Resumo

Neste trabalho estudamos um passeio aleatório, unidimensional com ramificação em $\mathbb{Z}_+$ em um meio aleatório não identicamente distribuído. Definimos recorrência e transiência para este processo e apresentamos um critério de classificação.

Abstract

We study a "supercritical" branching random walk on $\mathbb{Z}_+$ in a one-dimensional non-i.i.d. random environment, which considers both the branching mechanism and the step transition. Criteria of (strong) recurrence and transience are presented for this model.

Índice

Dedicatória **ii**

Agradecimentos **iii**

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Introdução **1**

1.1 Descrição do Modelo 2

1.2 Recorrência e Transiência neste Processo 5

2 As Funções h e H **8**

2.1 Definição 8

2.2 Algumas Características 9

3 Recorrência x Transiência **18**

3.1 Principais Resultados 19

3.2 Um Lema Importante 20

3.3 A Condição Suficiente 22

3.4 A Condição Necessária 24

Referências Bibliográficas **31**

Capítulo 1

Introdução

Estudamos aqui um processo markoviano a tempo discreto que consiste em passeios aleatórios com ramificação sobre $\mathbb{Z}_+$. Tanto os parâmetros dos passeios, quanto os parâmetros das ramificações são vetores aleatórios tomados de forma periódica a partir de um conjunto de k distribuições de probabilidade sobre o espaço destes vetores.

Modelos similares são estudados em Bailon et al.[1], Menshikov et al.[11], Fleischmann e Greven[3], Greven e den Holander[5] e Révész[13]. Nos artigos Bailon et al.[1] e Greven e den Holander[5] são considerados sistemas com infinitas partículas e são obtidos resultados sobre a densidade global (local) de partículas. O limite de sistemas finitos com o número de incrementos de sítios são estudados em [3]. O principal objeto de estudo naquele trabalho é o tamanho da população total. Passeios aleatórios com ramificação em meio aleatório multi-dimensional são considerados em den Holander et al.[2] e Révész[13]. A densidade local de partículas é estudada em Révész[13], enquanto o foco principal de den Holander et al.[2] é recorrência e transiência.

Nos modelos descritos em Bailon et al.[1], Fleischmann e Greven[3], Greven e den Holander[5] e Révész[13] o meio aleatório leva em consideração apenas o mecanismo de ramificação. Passeio aleatório, unidimensional e com ramificação em meio aleatório identicamente distribuído e que leva em consideração tanto o mecanismo de ramificação como a transição entre sítios é visto em Menshikov et al.[11], onde também se tem uma classificação com respeito à recorrência e transiência. O presente trabalho consiste em generalizar os resultados de Menshikov et al.[11] para um meio aleatório não identicamente distribuído e se baseia em Machado e Popov [9].

Nossa principal ferramenta é o método de funções de Lyapunov que possibilita

analisar o processo quanto à sua definição de transiência e recorrência de forma indireta, através do comportamento de funções definidas sobre o espaço onde o processo está definido. Embora não tratemos de outras aplicações do método de funções de Lyapunov neste trabalho, encontra-se na literatura exemplos de sua aplicação para o estudo de questões como taxa de convergência ao equilíbrio e estabilidade com relação aos parâmetros do processo. Veja por exemplo Fayolle et al. [4].

Em Comets, Menshikov e Popov[10] aplica-se este método para alguns processos markovianos sem ramificação em meio aleatório. Adaptações deste método para modelos com ramificação são encontrados em Menshikov et al.[11], Karpelevich et al.[6], Karpelevich e Suhov[7] e Menshikov e Volkov[12]; Também encontra-se em Karpelevich e Suhov[8] trabalho relacionado para o caso de espaço e tempo contínuos.

1.1 Descrição do Modelo

O processo aqui estudado se dá em tempo discreto e consiste no deslocamento de partículas que se ramificam nos sítios de $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sem disputa de espaço e com as seguintes características:

(1) Estando em um sítio $x \neq 0$, num instante t, cada partícula gera pelo menos uma partícula filha e desaparece do processo.

(2) Cada partícula gerada desloca-se aleatoriamente para um dos sítios vizinhos mais próximos ou permanece em x e, assim, chega-se a uma nova disposição de partículas no instante $t + 1$ do processo.

(3) Cada partícula gera uma quantidade aleatória de filhas cuja distribuição de probabilidade r depende somente da sua localização $x \in \mathbb{Z}_+$ e onde:

   (i) $r_i(x)$ é a probabilidade de uma partícula, estando no sítio x, gerar i partículas filhas, para $i = 1, 2, \ldots$, isto é, temos:

$$r_i(x) := P(\textit{gerar i filhas} \mid \textit{encontra-se na posição } x), \quad i = 1, 2, \ldots$$

(ii) Naturalmente, por ser r uma distribuição de probabilidade, temos para todo $x \in \mathbb{Z}_+$:

$$r_i(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} r_i(x) = 1$$

(iii) $r(x) := \sum_{i=1}^{\infty} i r_i(x) < \infty$, para todo $x \neq 0$.

(4) Cada partícula filha gerada se encontrará no instante $t+1$ em um sítio x_{t+1} de acordo com uma distribuição de probabilidade P, que só depende da localização x_t da partícula mãe no instante t e onde, para todo sítio $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} p_x &= P(x_{t+1} = x - 1 \mid x_t = x) \\ s_x &= P(x_{t+1} = x \mid x_t = x) \\ q_x &= P(x_{t+1} = x + 1 \mid x_t = x) \\ e \quad p_x &+ s_x + q_x = 1 \end{aligned}$$

(5) O sítio zero possui as seguintes características :

$$s_0 = 1 \quad \text{e} \quad r_1(0) = 1$$

(6) Os processos de geração de filhas e de transição entre os sítios são independentes entre as partículas.

(7) Seja M o conjunto de todas as seqüências $\xi = (p^\xi, s^\xi, q^\xi, r_1^\xi, r_2^\xi, r_3^\xi, \ldots)$ tais que

$$p^\xi + s^\xi + q^\xi = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} r_i^\xi = 1 \quad e \quad r^\xi := \sum_{i=1}^{\infty} i r_i^\xi < \infty,$$

e $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots, \tilde{Q}_k$, k distribuições de probabilidade sobre o conjunto M, satisfazendo:

- **Condição I :** $\tilde{Q}_i(\xi \in M : p^\xi q^\xi = 0) = 0$, **para todo** i;
- **Condição II :** $\tilde{Q}_i(\xi \in M : r^\xi > 1) > 0$, **para algum** i.

Previamente ao início do processo, é associado a cada sítio $x \neq 0$ em Z_+ um vetor $\xi_x = (p^{\xi_x}, s^{\xi_x}, q^{\xi_x}, r_1^{\xi_x}, r_2^{\xi_x}, r_3^{\xi_x}, \ldots)$, elemento do conjunto M, gerado pela distribuição $\tilde{Q}_i$ se x é escrito da forma $nk + i$ com $n \in Z_+$ e $1 \leq i \leq k$.

Associado ξ_x ao sítio x, faz-se

$$p_x = p^{\xi_x}, \quad q_x = q^{\xi_x}, \quad s_x = s^{\xi_x} \quad e \quad r_i(x) = r_i^{\xi_x}.$$

Seja uma seqüência de variáveis aleatórias $\boldsymbol{\xi}= \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, $\xi_i \in M$ com as seguintes propriedades:

P1) Para qualquer $n \geq 0$ e $1 \leq i \leq k$ a variável aleatória ξ_{nk+i} possui distribuição $\tilde{Q}_i$;

P2) $(\xi_{nk+1}, \xi_{nk+2}, \ldots, \xi_{nk+N})$, com N e $n \in Z_+$, é uma seqüência ergódica estacionária;

P3) Se $\mathbf{P}\{\xi_{x_i} \in A_i\} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, então $\mathbf{P}\{\xi_{x_1} \in A_1, \ldots, \xi_{x_N} \in A_N\} > 0$ para quaisquer $x_1, \ldots, x_N \in Z_+$ e $A_1, \ldots, A_N \subset M$.

Esta seqüência chamamos de meio aleatório.

(8) Fixado o meio $\boldsymbol{\xi}:= \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, o processo inicia-se com uma única partícula em um sítio $x_o \neq 0$.

Assim, pela propriedade P1, ao sítio 1 é associado um vetor $\xi_1 \in M$ gerado pela distribuição $\tilde{Q}_1$, ao sítio 2 é associado um vetor $\xi_2 \in M$ gerado pela distribuição $\tilde{Q}_2$, ... e ao sítio k é associado um vetor $\xi_k \in M$ gerado pela distribuição $\tilde{Q}_k$. Ao sítio $k+1$ é associado um vetor $\xi_{k+1} \in M$ gerado, novamente, pela distribuição $\tilde{Q}_1$ e assim sucessivamente.

É neste sentido que o meio é periódico.

Desta forma, fixa-se o meio $\boldsymbol{\xi}= \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ onde se desenvolverá o processo.

Com o meio $\boldsymbol{\xi}$ determinado, o processo inicia-se com uma única partícula em um sítio $x_0 \neq 0$ e este representa o seu estado inicial. Esta partícula desaparecerá do processo após produzir no mínimo uma partícula filha segundo a distribuição $\tilde{r}$ determinada por ξ_{x_0}, vetor associado a x_0 pela distribuição $\tilde{Q}_i$ correspondente. Cada partícula desta primeira geração se deslocará de forma independente e sem disputa de espaço, para um dos sítios vizinhos, $x_0 - 1$ ou $x_0 + 1$, ou permanecerá em x_0 segundo as respectivas probabilidades p_{x_0}, q_{x_0} e s_{x_0}, também determinadas por ξ_{x_0}.

Dispostas em $x_0 - 1$, x_0 e $x_0 + 1$, esta primeira geração, agora, caracterizará o estado do processo em $t = 2$.

O espaço de estados deste processo é o conjunto

$$\mathbb{Z}_+ \cup {\mathbb{Z}_+}^2 \cup {\mathbb{Z}_+}^3 \cdots$$

Um elemento deste conjunto, digamos

$$(x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^{N(t)}),$$

determina que no instante t a i-ésima partícula se localiza na posição x_t^i, onde $N(t)$ é o número total de partículas neste instante.

Notemos que, para todo sítio $x \in \mathbb{Z}_+$, $r_0(x) = 0$, pois

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x) = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{Z}_+,$$

isto é, toda partícula é substituída por pelo menos uma partícula filha. Assim, $N(t)$ é não decrescente e $r^{\xi_x} \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}_+$.

Pela **condição II**, para algum i, $\tilde{Q}_i(\xi \in M : r^{\xi} > 1) > 0$. Como esta distribuição associa vetores aos sítios de $\mathbb{Z}_+$ que pertencem ao conjunto $\{i, k+i, 2k+i, \ldots\} \subset \mathbb{Z}_+$, por Borel-Cantelli, sabemos que, com probabilidade um, a uma quantidade infinita de sítios serão associados vetores ξ_x tais que $r^{\xi_x} > 1$. Assim, havendo sítio onde $r^{\xi_x} > 1$, o processo mostra-se hábil em produzir ramificação.

Independente do estado inicial do processo, cada sítio de $\mathbb{Z}_+$ possui probabilidade de ser visitado, após algum tempo. Isto é garantido pela **condição I**.

Se uma partícula desloca-se para o estado $\mathbf{0}$, devemos entender que a mesma é "congelada", não morrendo ou produzindo partículas descendentes no decorrer do processo. Mas, na verdade, $s_{\mathbf{0}} = 1$ e $r_1(\mathbf{0}) = 1$.

1.2 Recorrência e Transiência neste Processo

Chamando de $N^x(t)$ o número de partículas que se encontram no sítio x no instante t, vemos que $N^{\mathbf{0}}(t)$ é não decrescente, então o limite

$$\nu = \lim_{t \to \infty} N^0(t) \quad ,$$

que pode assumir valor infinito, existe para toda realização do processo.

Claramente, ν é uma variável aleatória discreta não negativa.

Neste momento podemos definir recorrência e transiência para este processo. A mesma definição foi usada em Comets et al. [11].

Definição 1.2.1 *Dizemos que o Processo é :*

- *Recorrente, se* $P\{\nu \geq 1\} = 1$*;*
- *Fortemente Recorrente , se é recorrente e* $E\nu < \infty$*;*
- *Transiente, se* $P\{\nu \geq 1\} < 1$*;*
- *Fortemente Transiente, se é transiente e* $E\nu < \infty$*.*

A classificação do processo quanto à *recorrência* e *transiência*, segundo a definição acima, é independente do estado inicial.

Para vermos isto, suponhamos que existe um ponto inicial x_0 tal que, sendo esta a posição inicial do processo, seja positiva a probabilidade de termos $\nu = 0$, isto é, $P_{x_0}\{\nu = 0\} > 0$ e portanto $P_{x_0}\{\nu \geq 1\} < 1$.

Para qualquer outro ponto não nulo $x_i \in \mathbb{Z}_+$ que fosse o sítio inicial do processo, a **condição I** garante ser positiva a probabilidade para que, após algum tempo, haja uma única partícula em x_0. Indiquemos esta probabilidade por $P_{x_i}^{x_0}$.

Mas

$$P_{x_i}\{\nu = 0\} \geq P_{x_i}^{x_0} P_{x_0}\{\nu = 0\} > 0 \quad \Rightarrow \quad P_{x_i}\{\nu = 0\} > 0,$$

assim, se existe tal x_0 então ν tem probabilidade positiva de assumir valor nulo qualquer que seja o ponto inicial do processo.

Caso contrário, se existe um ponto x_0 tal que $P_{x_0}\{\nu = 0\} = 0$ e consequentemente $P_{x_0}\{\nu \geq 1\} = 1$, isto será válido para qualquer outro ponto inicial x_i.

Assim, se para um determinado sítio x_0 temos $P_{x_0}\{\nu \geq 1\} < 1$, então, independente do ponto inicial, $P\{\nu \geq 1\} < 1$. Da mesma forma, se para um determinado sítio x_0 temos $P_{x_0}\{\nu \geq 1\} = 1$, então $P\{\nu \geq 1\} = 1$.

Suponhamos, agora, que existe x_0 tal que, se esta for a posição inicial do processo, seja infinita a esperança da variável ν, isto é, $E_{x_0}\nu = \infty$.

Isto será válido para qualquer outro ponto inicial não nulo x_i pois

$$E_{x_i}\nu \geq P_{x_i}^{x_0} E_{x_0}\nu = \infty$$

Caso contrário, se existe um ponto x_0 tal que $E_{x_0}\nu < \infty$, isto será válido para qualquer outro ponto inicial x_i.

Assim, se para um determinado sítio x_0 temos $E_{x_0}\nu = \infty$, então, independente do ponto inicial, $E\nu = \infty$. Da mesma forma, se para um determinado sítio x_0 temos $E_{x_0}\nu < \infty$, então $E\nu < \infty$.

Logo, a classificação do processo quanto à *recorrência* ou *transiência* é independente do seu estado inicial.

Capítulo 2

As Funções h e H

As funções definidas a seguir são de fundamental importância para a construção dos principais resultados deste estudo.

2.1 Definição

Definição 2.1.1 *Para todo $\xi \in M$, seja*

$$h^{\xi}(\lambda) = \frac{1}{q^{\xi}}\left(\frac{1}{r^{\xi}} - s^{\xi} - \frac{p^{\xi}}{\lambda}\right), \quad \textit{para} \quad 0 < \lambda \leq \infty \tag{2.1}$$

e, para λ real, $i = 1, 2, \ldots, k$

$$H_i(\lambda) = \begin{cases} \inf\limits_{\xi \in suppQ_i} h^{\xi}(\lambda) & \lambda > 0 \\ \\ -\infty & \lambda \leqslant 0 \end{cases} . \tag{2.2}$$

2.2 Algumas Características

Lema 2.2.1 (i) $\mathcal{D}_i := \{\lambda \in \mathbb{R} : H_i(\lambda) \geq 0\}$ *só pode assumir uma das duas formas:*

$$\mathcal{D}_i = \emptyset$$
$$\mathcal{D}_i = [c_i, \infty) \quad para \quad algum \quad c_i > 0.$$

(ii) *Existe* $\mathbf{c} > 0$ *tal que para todo* $\lambda < \mathbf{c}$ *temos* $H_i(\lambda) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

(iii) *A função* H_i *é contínua e não decrescente em* $\mathcal{D}_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Corolário 2.2.1 *A função* $\mathcal{H} := H_k \circ \cdots \circ H_1$ *é contínua e não decrescente em* $\mathcal{D} := \{\lambda : \mathcal{H}(\lambda) \geq 0\}$ *que, como* $\mathcal{D}_i$, *só pode ser vazio ou da forma* $[\lambda_0, \infty)$, *para algum* $\lambda_0 > 0$.

As demonstrações destas afirmações servem não só como esclarecimento, mas para nos ajudar a entender melhor o comportamento de h e H, o que nos torna mais íntimos dessas funções.

Prova do Lema 2.2.1

(i) Por definição, se $\lambda \leq 0$ então $H_i(\lambda) = -\infty$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$. Isto indica que, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, $\mathcal{D}_i \subset (0, \infty)$

Teremos $\mathcal{D}_i = \emptyset$ quando, por exemplo, para qualquer $\lambda \in (0, \infty)$ exista um conjunto $A_\lambda := \{\xi : h^\xi(\lambda) < 0\}$ tal que $Q_i\{A_\lambda\} > 0$. Desta forma, teremos $H_i(\lambda) < 0$ para todo $\lambda > 0$ e, conseqüentemente, $\mathcal{D}_i$ será vazio.

Exemplo:

Neste exemplo veremos que $\mathcal{D}_i$ será vazio porque $H_i(\lambda)$ é não só negativo para qualquer $\lambda \in (0, \infty)$, mas igual a $-\infty$. Suponha que para algum i, Q_i seja a distribuição sobre o conjunto $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ onde:

$$
\begin{aligned}
p^{\xi_n} &= \frac{1}{2} \\
q^{\xi_n} &= \frac{1}{2^n} \\
s^{\xi_n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \\
r^{\xi_n} &= \frac{n}{\frac{1}{2} + n s^{\xi_n}} \\
\text{e} \quad Q_i\{\xi_n\} &= 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Pela definição de ξ_n, vemos ser satisfeita a **condição II** para Q_i.

Mostremos que $r_n^{\xi} > 1$ para todo inteiro positivo n.

Para todo $n \geq 1$, observa-se que

$$
\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2^n} > 0
$$

e portanto

$$
\frac{n}{\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2^n}} > 1,
$$

mas

$$
\frac{n}{\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2^n}} = \frac{n}{\frac{1}{2} + n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right)} = \frac{n}{\frac{1}{2} + n s^{\xi_n}} = r^{\xi_n}
$$

isto é, $r^{\xi_n} > 1$.

Para esta distribuição temos que

$$
\begin{aligned}
h^{\xi_n}(\lambda) &= \frac{1}{q^{\xi_n}} \left(\frac{1}{r^{\xi_n}} - s^{\xi_n} - \frac{p^{\xi_n}}{\lambda} \right) \\
h^{\xi_n}(\lambda) &= 2^n \left(\frac{\frac{1}{2} + n s^{\xi_n}}{n} - s^{\xi_n} - \frac{p^{\xi_n}}{\lambda} \right) \\
h^{\xi_n}(\lambda) &= 2^n \left(\frac{1}{2n} + s^{\xi_n} - s^{\xi_n} - \frac{p^{\xi_n}}{\lambda} \right) \\
h^{\xi_n}(\lambda) &= 2^n \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2\lambda} \right) \\
h^{\xi_n}(\lambda) &= 2^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\lambda} \right)
\end{aligned}
$$

Vejamos que sob estas condições temos $\mathcal{D}_i = \emptyset$, como dissemos, sendo $H_i(\lambda)$ não só negativo para qualquer $\lambda \in (0, \infty)$, mas igual a $-\infty$.

Deve-se ter para quaisquer $\lambda \in (0, \infty)$ e $\rho \in (-\infty, 0)$ um conjunto $A_\lambda^\rho := \{\xi : h^\xi(\lambda) < \rho\}$ tal que $Q_i\{A_\lambda^\rho\} > 0$, pois assim $H_i(\lambda) = -\infty$ para todo $\lambda > 0$ e, conseqüentemente, $\mathcal{D}_i$ será vazio.

Sabemos que para quaisquer $\lambda \in (0, \infty)$ e $\rho \in (-\infty, 0)$ existem

$$n_1 := [\lambda + 1] \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{\lambda}\right) < 0$$

e n_2 de tal modo que

$$2^{n_2 - 1}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{\lambda}\right) < \rho$$

Isto implica

$$2^{N_2 - 1}\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{\lambda}\right) \quad < \quad 2^{n_2 - 1}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{\lambda}\right) < \rho, \quad \forall N_1 > n_1 \quad e \quad N_2 > n_2$$

Definindo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ vemos que

$$h^{\xi_{n_0}}(\lambda) = 2^{n_0 - 1}\left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{\lambda}\right) < \rho$$

e como

$$\rho > h^{\xi_{n_0}}(\lambda) > h^{\xi_{n_0+1}}(\lambda) > h^{\xi_{n_0+2}}(\lambda) > h^{\xi_{n_0+3}}(\lambda) > \cdots$$

identificamos o conjunto $A_\lambda^\rho = \{\xi_{n_0}, \xi_{n_0+1}, \ldots\}$ onde

$$\begin{aligned} Q(A_\lambda^\rho) &= \sum_{n_0}^{\infty} Q(\xi_n) \\ &= \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0+1}} + \cdots \\ &= 2^{1-n_0} > 0 \end{aligned}$$

Logo, para todo $\lambda \in (0, \infty)$, $H_i(\lambda) = -\infty$ e, conseqüentemente, $\mathcal{D}_i = \emptyset$

Não sendo vazio, mostremos que $\mathcal{D}_i$ será um subconjunto próprio de $(0,\infty)$ irrestrito à direita, para $i = 1,\dots,k$ – isto é, $\mathcal{D}_i \subsetneq (0,\infty)$ e $\mathcal{D}_i \neq \emptyset$ – mostrando que existe $\lambda \in (0,\infty)$ e $\lambda \notin \mathcal{D}_i$.

Para $i = 1,\dots,k$, seja $\xi \in suppQ_i$ onde $p^\xi \neq 0$ e $q^\xi \neq 0$.

Se $\lambda \in (0,\infty)$ tal que

$$0 < \lambda < \frac{p^\xi}{\left|\frac{1}{r^\xi} - s^\xi\right|}$$

temos

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(\frac{1}{r^\xi} - s^\xi\right) < p^\xi \\
&\frac{1}{r^\xi} - s^\xi - \frac{p^\xi}{\lambda} < 0 \\
&\frac{1}{q^\xi}\left(\frac{1}{r^\xi} - s^\xi - \frac{p^\xi}{\lambda}\right) < 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $h^\xi(\lambda) < 0$ e conseqüentemente $H_i(\lambda) < 0$ e $\lambda \notin \mathcal{D}_i$. Logo $\mathcal{D}_i \subsetneq (0,\infty)$.

Sendo $\mathcal{D}_i \neq \emptyset$, seja λ_1 um elemento qualquer deste conjunto e $\lambda_2 > \lambda_1$. Assim

$$\frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\lambda_1} < -\frac{1}{\lambda_2}$$

e, para qualquer $\xi = (p^\xi, s^\xi, q^\xi, r_1^\xi, r_2^\xi, \dots)$, pertencendo ao suporte da distribuição Q_i, temos:

$$-\frac{p^\xi}{\lambda_1} \leq -\frac{p^\xi}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q^\xi}\left(\frac{1}{r^\xi} - s^\xi - \frac{p^\xi}{\lambda_1}\right) \leq \frac{1}{q^\xi}\left(\frac{1}{r^\xi} - s^\xi - \frac{p^\xi}{\lambda_2}\right)$$

ou seja,

$$h^\xi(\lambda_1) \leq h^\xi(\lambda_2) \quad \forall \xi \in suppQ_i \tag{2.3}$$

e portanto

$$0 \leq H_i(\lambda_1) \leq H_i(\lambda_2) \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Comprovamos assim que se $\lambda_1 \in \mathcal{D}_i$

$$\forall \lambda_2 > \lambda_1 \quad \text{temos} \quad \lambda_2 \in \mathcal{D}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

ou seja, para todo i, se não é vazio, $\mathcal{D}_i$ é irrestrito à direita.

Embora seja subconjunto próprio de $(0, \infty)$ e irrestrito à direita, vejamos que não se pode ter $\mathcal{D}_i = (c_i, \infty)$ para algum $c_i > 0$. Desta forma, não sendo vazio, $\mathcal{D}_i = [c_i, \infty) \subset (0, \infty)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Suponha que $\mathcal{D}_i \neq \emptyset$ e seja $\mathcal{D}_i^{\mathcal{C}}$ o complementar de $\mathcal{D}_i$ em relação ao conjunto dos números reais.

Para um elemento $\lambda \in \mathcal{D}_i^{\mathcal{C}}$ onde $\lambda > 0$, mostremos que existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $\lambda + \epsilon \in \mathcal{D}_i^{\mathcal{C}}$.

Como

$$\lambda \in \mathcal{D}_i^{\mathcal{C}} \quad \Rightarrow \quad H_i(\lambda) < 0$$

e como $\lambda > 0$

$$\exists \xi \in suppQ_i \quad \text{tal que} \quad h^{\xi}(\lambda) < 0.$$

Fixado ξ, a função h^{ξ} é contínua em $(0, \infty)$ e, como visto em (2.3), comporta-se não decrescente em $(0, \infty)$. Assim, existindo λ positivo que torna $h^{\xi}(\lambda) < 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$h^{\xi}(\lambda) \leq h^{\xi}(\lambda + \epsilon) < 0.$$

Mas se $h^{\xi}(\lambda + \epsilon) < 0$, então

$$H_i(\lambda + \epsilon) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \epsilon \in \mathcal{D}_i^{\mathcal{C}}.$$

Sendo $\mathcal{D}_i^{\mathcal{C}}$ aberto em $\mathbb{R}$, o seu complementar, o conjunto $\mathcal{D}_i$, é necessariamente da forma $[c_i, \infty)$.

Assim, para $i = 1, \ldots, k$, se $\mathcal{D}_i \neq \emptyset$ então $\mathcal{D}_i$ será subconjunto de $(0, \infty)$ da forma $[c_i, \infty)$, para algum $c_i > 0$.

(ii) Como vimos no item (i), podemos ter $\mathcal{D}_i = \emptyset$ ou $\mathcal{D}_i = [c_i, \infty)$, para algum $c_i > 0$.

Se $\mathcal{D}_i = \emptyset$, então $H_i(\lambda) < 0$ para todo $\lambda \in (0, \infty)$ e portanto

$$\forall c_i \in (0, \infty) \quad \text{temos} \quad H_i(\lambda) < 0 \quad \text{se} \quad \lambda < c_i.$$

Se $\mathcal{D}_i = [c_i, \infty)$, então $H_i(\lambda) < 0 \quad \text{se} \quad \lambda < c_i$.

Assim, vemos facilmente que definindo $\mathbf{c} = \underset{1 \leqslant i \leqslant k}{MIN} \{c_i : \mathcal{D}_i \neq \emptyset\}$

$$H_i(\lambda) < 0 \quad \text{para todo} \quad \lambda < \mathbf{c} \quad \text{e} \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

pois, neste caso, para $i = 1, \ldots, k$, $\lambda \notin \mathcal{D}_i$ e portanto torna H_i negativa.

(iii) Sobre o comportamento e continuidade da função H_i em $\mathcal{D}_i$, pensemos na situação em que $\mathcal{D}_i = [c_i, \infty)$ para algum $c_i > 0$, já que se $\mathcal{D}_i = \emptyset$ não temos nada a provar.

Para demonstrarmos o comportamento de H_i em $\mathcal{D}_i$, sejam $\lambda_1 < \lambda_2$ dois números reais não necessariamente pertencentes a $\mathcal{D}_i$.

Se $\lambda_1 \leq 0$ temos $H_i(\lambda_1) = -\infty$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ e portanto

$$H_i(\lambda_1) \leq H_i(\lambda_2)$$

Caso contrário, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $\forall \xi \in suppQ_i$ e $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, por (2.3), temos

$$h^\xi(\lambda_1) \leq h^\xi(\lambda_2) \quad \Rightarrow \quad H_i(\lambda_1) \leq H_i(\lambda_2)$$

Em síntese, para dois números reais λ_1 e λ_2

$$\text{se} \quad \lambda_1 < \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad H_i(\lambda_1) \leq H_i(\lambda_2) \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Logo, H_i é **não decrescente** em $\mathbb{R}$ e portanto o é particularmente em $\mathcal{D}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Provemos a continuidade de H_i em $\mathcal{D}_i$, para qualquer i.

Sabemos que, para um dado $\xi \in M$, h^ξ é uma função contínua e não decrescente em $(0, \infty)$. Além disso, como

$$(h^\xi(\lambda))' = \frac{p^\xi}{q^\xi \lambda^2} > 0 \quad \forall \lambda \in (0, \infty),$$

isto é, sendo sua derivada positiva e decrescente em $(0, \infty)$, h^ξ é côncava para todo $\xi \in M$. Desta forma, cada função h^ξ determina um conjunto convexo, a região plana

$$\mathcal{S}^\xi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y \leq h^\xi(x)\},$$

que é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ situados não acima do gráfico desta função.

Qualquer que seja $i = 1, 2, \ldots, k$, notemos que

I) Para todo $x > 0$, se $H_i(x) > -\infty$, então $(x, H_i(x)) \in \mathcal{S}^\xi \quad \forall \xi \in suppQ_i$, pois $H_i(x) \leq h^\xi(x)$ para todo ξ pertencente ao suporte da distribuição Q_i.

II) Se um elemento $(x, y_1) \in \mathcal{S}^\xi$ então, para todo $y_2 < y_1$, $(x, y_2) \in \mathcal{S}^\xi$, pois $y_2 < y_1 < h^\xi(x)$. Isto é, $\mathcal{S}^\xi$ não é limitada inferiormente.

Por I e II podemos afirmar que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y \leq H_i(x)\} \subset \mathcal{S}^\xi \quad \forall \xi \in suppQ_i, \tag{2.4}$$

pois, qualquer que seja $x > 0$, $H_i(x) \leq h^\xi(x) \quad \forall \xi \in suppQ_i$.

Logo, definindo

$$\mathcal{S}_i = \bigcap_{\xi \in suppQ_i} \mathcal{S}^\xi,$$

segue de 2.4 que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y \leq H_i(x)\} \subseteq \mathcal{S}_i. \tag{2.5}$$

Além disso, notemos que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > H_i(x)\} \cap \mathcal{S}_i = \emptyset, \tag{2.6}$$

já que, se$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x > 0$ e $y > H_i(x)$, existe $\xi^* \in suppQ_i$ onde

$$H_i(x) \leq h^{\xi^*}(x) < y$$

e, portanto,

$$(x, y) \notin \mathcal{S}^{\xi^*} \quad \Rightarrow \quad (x, y) \notin \mathcal{S}_i.$$

Por 2.5 e 2.6, o gráfico de H_i está contido na fronteira de $\mathcal{S}_i$ e limita superiormente esta região. $\mathcal{S}_i$ é um conjunto convexo por ser a intersecção de conjuntos

convexos e constitui o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x > 0$, situados não acima do gráfico da função H_i.

Assim, a função H_i **é contínua** para todo i em $\mathcal{D}_i$, pois, caso contrário, a região $\mathcal{S}$ não seria um conjunto convexo.

Prova do Corolário 2.2.1

A função $\mathcal{H}$ é claramente contínua e não decrescente em $\mathcal{D}$ por ser uma função composta de funções contínuas e não decrescentes.

Quanto a $\mathcal{D}$, notemos que para $\mathcal{H}(\lambda)$, $\lambda \in (0, \infty)$, ser não negativa devemos ter

$$(H_i \circ \cdots \circ H_1)(\lambda) \quad \in \quad \mathcal{D}_{i+1} \quad , \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k-1$$

já que, se $(H_i \circ \cdots \circ H_1)(\lambda) \notin \mathcal{D}_{i+1}$, para algum $i = 1, 2, \ldots, k-1$, teremos

$$(H_{i+1} \circ H_i \circ \cdots \circ H_1)(\lambda) < 0$$

e portanto

$$\begin{aligned} &(H_{i+2} \circ H_{i+1} \circ H_i \circ \cdots \circ H_1)(\lambda) = -\infty \\ &\vdots \\ &(H_k \circ \cdots \circ H_{i+1} \circ H_i \circ \cdots \circ H_1)(\lambda) = -\infty \quad , \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{H}(\lambda) < 0.$$

Naturalmente, temos que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_1$, pois, como vimos acima, se $\lambda \in \mathcal{D}$ devemos ter $H_1(\lambda) > 0$ (caso $i = 1$) e portanto $\lambda \in \mathcal{D}_1$.

Pensemos inicialmente no caso em que $k = 2$ para entendermos que $\mathcal{D}$ só pode ser vazio ou da forma $[\lambda_0, \infty)$, para algum $\lambda_0 > 0$.

Para $k = 2$, $\mathcal{D}$ equivale ao conjunto $\{\lambda \in \mathcal{D}_1 : H_1(\lambda) \in \mathcal{D}_2\}$. Analisemos dois casos:

1) $\mathcal{D}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{D}_2 = \emptyset$.

   Se $\mathcal{D}_1 = \emptyset$, então $\mathcal{D} = \emptyset$, já que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$.

   Se $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, então, para todo λ, $(H_2 \circ H_1)(\lambda) < 0$, pois $H_1(\lambda) \notin \mathcal{D}_2$.

   Assim, neste caso, $\mathcal{D} = \emptyset$.

2) $\mathcal{D}_1 = [c_1, \infty) \subset (0, \infty)$ e $\mathcal{D}_2 = [c_2, \infty) \subset (0, \infty)$.

2.1) Se $H_1(\lambda) < c_2 \quad \forall \lambda \in \mathcal{D}_1$, então
$H_1(\lambda) \notin \mathcal{D}_2$ e portanto $(H_2 \circ H_1)(\lambda) < 0$.
Assim, neste caso, $\mathcal{D} = \emptyset$.

2.2) Se $H_1(\lambda) \geq c_2 \quad \forall \lambda \in \mathcal{D}_1$, ou seja, $H_1\{\mathcal{D}_1\} \subset \mathcal{D}_2$, então
para todo $\lambda \in \mathcal{D}_1$, $(H_2 \circ H_1)(\lambda) \geq 0$.
Assim, neste caso, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$.

2.3) Se $H_1(\lambda_1) < c_2 < H_1(\lambda_2)$ para alguns valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{D}_1$ supondo $c_1 \leq \lambda_1 < \lambda_2$, então, pela continuidade e comportamento da função H_1, existe um elemento $\lambda_0 \in \mathcal{D}_1$, onde $c_1 \leq \lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$, tal que $H_1(\lambda_0) = c_2$ e

$$\forall \lambda < \lambda_0 \quad \Rightarrow \quad H_1(\lambda) < c_2$$

$$\forall \lambda > \lambda_0 \quad \Rightarrow \quad H_1(\lambda) \geq c_2$$

Isto é, existe um elemento mínimo, λ_0, em $\mathcal{D}_1$ de tal forma que $H_1(\lambda_0) = c_2$.
Assim, neste caso, $\mathcal{D} = [\lambda_0, \infty)$.

De 1 e 2 obtemos que $\mathcal{D} = \emptyset$ ou $\mathcal{D} = [\lambda_0, \infty)$ para algum $\lambda_0 \geq c_1$.

Suponha que isto seja válido para $k-1$, isto é, o subconjunto de $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$ tal que, se $\lambda \in \mathcal{D}$, $(H_{k-1} \circ \cdots \circ H_1)(\lambda) \geq 0$ é vazio ou da forma $[\lambda_0, \infty)$ para algum $\lambda_0 \geq c_1$.

Como sabemos, a função $H_{k-1} \circ \cdots \circ H_1$ é contínua e não decrescente; características também observadas na função H_1.

Como supomos, para a função $H_{k-1} \circ \cdots \circ H_1$, não há valores λ tais que $(H_{k-1} \circ \cdots \circ H_1)(\lambda) \geq 0$ ou este conjunto de valores é da forma $[\lambda_0, \infty) \subset [0, \infty)$. Da mesma forma, para a função H_1, D_1 é vazio ou igual a $[c_1, \infty) \subset [0, \infty)$.

Finalmente, para a função H_k, D_k é vazio ou da forma $[c_k, \infty) \subset [0, \infty)$; similarmente, para a função H_2 , D_2 é vazio ou igual a $[c_2, \infty) \subset [0, \infty)$.

Usando raciocínio análogo ao utilizado em 1 e 2 acima, identificando a função $H_{k-1} \circ \cdots \circ H_1$ com H_1 e a função H_k com H_2, segue por indução que, para todo k inteiro positivo, $\mathcal{D} = \{\lambda : \mathcal{H}(\lambda) \geq 0\}$ é vazio ou da forma $[\lambda_0, \infty)$ para algum $\lambda_0 > 0$.

Capítulo 3

Recorrência x Transiência

Segundo a nossa definição, um dado processo terá comportamento recorrente ou transiente (forte ou não) dependendo somente do meio ξ onde o mesmo se desenvolve, já que, como vimos, a sua classificação não sofre influência da posição inicial da primeira partícula.

A nossa classificação diz respeito à probabilidade de partículas serem captadas no sítio 0 e à média do número de partículas que se encontram neste sítio após decorrido um tempo infinito - "a intensidade com que partículas são capturadas" .

Intuitivamente sabemos que os valores p_x e q_x são, conjuntamente, responsáveis pela média do número de partículas que se deslocam para a direita ou para a esquerda, respectivamente, caracterizando a deriva no meio aleatório. Assim, influem fundamentalmente para a classificação de um processo.

Mas, como perceber esta e todas as influências necessárias através das distribuições Q_i que são responsáveis pelo meio aleatório gerado? Como isto pode ser percebido através das funções h e H?

Os teoremas 3.1.1 e 3.1.2 a seguir constituem o resultado principal deste estudo que é uma forma de classificar o processo.

3.1 Principais Resultados

Teorema 3.1.1 *Para que* $\mathbf{E}\nu$ *seja finita (P-a.s.), é* ***necessário*** *e* ***suficiente*** *que existam* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ *tais que*

$$\lambda_{i+1} \leq H_i(\lambda_i) \tag{3.1}$$

para $i = 1, \ldots, k-1$, *e*

$$\lambda_1 \leq H_k(\lambda_k) \tag{3.2}$$

Além disso,

(i) *se* $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i < 1$ *então o processo é* ***fortemente transiente*** $\mathbf{P}$*-q.c.;*

(ii) *se* $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i > 1$ *então o processo é* ***fortemente recorrente*** $\mathbf{P}$*-q.c.*

Teorema 3.1.2 *Não havendo solução para as equações 3.1 e 3.2, o processo é classificado como* ***recorrente*** *(não fortemente) P-a.s.*

Lema 3.1.1 *Quaisquer que sejam os valores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ *satisfazendo 3.1 e 3.2, não se verifica* $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

A demonstração do teorema 3.1.2 constitui uma adaptação direta do teorema 4.3 em Comets et al.[11].

Segundo os teoremas acima, temos, por exclusão, que o processo não pode ser classificado como **transiente** - não fortemente.

3.2 Um Lema Importante

Antes de expormos a demonstração dos resultados recém enunciados, faremos uso dos teoremas *2.1* e *2.2* apresentados em Comets et al.[11] e aqui enunciados pelo seguinte lema.

Lema 3.2.1 *Para $E\nu$ ser finita é* ***necessário*** *que exista uma função positiva $f(x)$ tal que para todo $x \neq 0$*

$$p(x)f(x-1) + s(x)f(x) + q(x)f(x+1) = \frac{f(x)}{r(x)} \tag{3.3}$$

É ***suficiente*** *para $E\nu$ ser finita que exista uma função positiva $f(x)$ tal que para todo $x \neq 0$*

$$p(x)f(x-1) + s(x)f(x) + q(x)f(x+1) \leq \frac{f(x)}{r(x)} \tag{3.4}$$

Além disso:

Se $f(x) \to 0$ com $x \to \infty$, então o processo é ***fortemente transiente****.*

Se $f(x) \to \infty$ com $x \to \infty$, então o processo é ***fortemente recorrente****.*

Prova do Lema 3.1.1

Sabemos que se $r^\xi \geq 1, \forall\, \xi \in M$, então:

$$\frac{1}{r^\xi} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^\xi} \leq p^\xi + s^\xi + q^\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q^\xi}\left(\frac{1}{r^\xi} - s^\xi - p^\xi\right) \leq 1 \quad \forall\, \xi \in M,$$

isto é

$$h^\xi(1) \leq 1 \quad \forall\, \xi \in M$$

o que torna

$$H_i(1) \leq 1 \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{3.5}$$

Além disso, para algum $j_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ temos

$$Q_{j_0}\{\xi \in M : r^\xi > 1\} > 0$$

e assim existe $\xi^* \in suppQ_{j_0}$ tal que $r^{\xi^*} > 1$, o que torna, segundo procedimento análogo,

$$h^{\xi^*}(1) < 1$$

e portanto

$$H_{j_0}(1) < 1.$$

Tendo isto em mente, suponha que existam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ satisfazendo as condições do teorema 3.1 e com $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Assim, teríamos obrigatoriamente só dois casos possíveis:

1º caso: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 1$.

Sendo $\lambda_{k+1} = \lambda_1$ e $j_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $Q_{j_0}\{\xi \in M : r^{\xi} > 1\} > 0$, vemos não ser possível $\lambda_{j_0+1} = 1$ pois

$$\lambda_{j_0+1} \leq H_{j_0}(\lambda_{j_0}) < 1;$$

2º caso: *Existiriam* $i, j \in \{1, 2 \ldots, k\}$ *tais que* $\lambda_i < 1$ *e* $\lambda_j > 1$ *com* $i \neq j$.

Se $\lambda_i < 1$, por 2.3 e 3.5, sabemos que

$$h^{\xi}(\lambda_i) \leq h^{\xi}(1) \quad \Rightarrow \quad H_i(\lambda_i) \leq H_i(1) \leq 1 \quad \forall \xi \in M,$$

e sendo

$$\lambda_{i+1} \leq H_i(\lambda_i) \leq 1,$$

temos

$$\lambda_i < 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{i+1} \leq 1.$$

Segundo procedimento análogo, teríamos que

$$\lambda_{i+1} \leq 1 \Rightarrow \lambda_{i+2} \leq 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda_k \leq 1 \Rightarrow \lambda_1 \leq 1 \cdots \Rightarrow \lambda_{i-1} \leq 1.$$

Isto é, uma contradição, pois não haveria $\lambda_j > 1$ como suposto.

3.3 A Condição Suficiente

Vejamos porque a existência de solução para 3.1 e 3.2 é condição suficiente para que tenhamos $\mathsf{E}\nu < \infty$.

Nossa estratégia será mostrar que uma solução qualquer de 3.1 e 3.2 implica na existência de uma função f satisfazendo 3.3 e portanto, como afirma o lema 3.2.1, $\mathsf{E}\nu$ será finita.

Suponhamos que exista tal solução e seja $x = nk + j$ um sítio *não nulo* de $\mathbb{Z}_+$ onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e $1 \leq j \leq k$.

Sendo $\lambda_{j+1} \leq H_j(\lambda_j)$, sabemos que para todo $\xi \in suppQ$

$$\lambda_{j+1} \leqslant \frac{1}{q^\xi(x)}\left(\frac{1}{r^\xi(x)} - s^\xi(x) - \frac{p^\xi(x)}{\lambda_j}\right), \quad onde \quad \lambda_{j+1} = \lambda_1 \quad se \quad j = k,$$

e portanto

$$p^\xi(x) + s^\xi(x)\lambda_j + q^\xi(x)\lambda_j\lambda_{j+1} \leqslant \frac{\lambda_j}{r^\xi(x)}.$$

Multiplicando ambos os membros da inequação acima pelo termo positivo

$$(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n \prod_{i=1}^{j-1}\lambda_i \quad onde \quad \prod_{i=1}^{j-1}\lambda_i = 1 \quad se \quad j = 1,$$

temos

$$p^\xi(x)(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n \prod_{i=1}^{j-1}\lambda_i + s^\xi(x)(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n(\prod_{i=1}^{j-1}\lambda_i)\lambda_j +$$
$$+ q^\xi(x)(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n(\prod_{i=1}^{j-1}\lambda_i)\lambda_j\lambda_{j+1} \leqslant \frac{(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n(\prod_{i=1}^{j-1}\lambda_i)\lambda_j}{r^\xi(x)}$$

ou seja,

$$p^\xi(x)(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n \prod_{i=1}^{j-1}\lambda_i + s^\xi(x)(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n \prod_{i=1}^{j}\lambda_i +$$
$$+ q^\xi(x)(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n \prod_{i=1}^{j+1}\lambda_i \leqslant \frac{(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i)^n \prod_{i=1}^{j}\lambda_i}{r^\xi(x)} \quad \forall x \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.6}$$

Isto nos conduz a identificar a seguinte função positiva

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x = 0 \\ (\prod_{i=1}^{k} \lambda_i)^n \prod_{i=1}^{j} \lambda_i & se \quad x \neq 0 \quad onde \quad x = nk + j \quad com \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad e \quad 1 \leqslant j \leqslant k \end{cases}$$

que satisfaz 3.3 para todo $\xi \in suppQ$, pois vemos em 3.6 que

$$p^{\xi}(x)f(x-1) + s^{\xi}(x)f(x) + q^{\xi}(x)f(x+1) \leq \frac{f(x)}{r^{\xi}(x)}.$$

Assim, dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ solução de 3.3 e 3.4, a função acima, construída com essa solução, satisfaz 4.2 o que garante ser finita $\mathsf{E}\nu$.

Além disso,

$$\text{se} \quad \prod_{i=1}^{k} \lambda_i < 1 \quad \text{o processo é } \boldsymbol{fortemente\ transiente};$$

$$\text{se} \quad \prod_{i=1}^{k} \lambda_i > 1 \quad \text{o processo é } \boldsymbol{fortemente\ recorrente}.$$

Prova

Supondo que haja uma solução para 3.1 e 3.2 e sabendo que não se verifica $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, mostremos que:

$$\text{se} \quad \prod_{i=1}^{k} \lambda_i < 1 \Rightarrow f(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\text{se} \quad \prod_{i=1}^{k} \lambda_i > 1 \Rightarrow f(x) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Sejam $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{m}$, respectivamente, o elemento máximo e o elemento mínimo do conjunto

$$\{\lambda_1, \prod_{i=1}^{2} \lambda_i, \ldots, \prod_{i=1}^{k} \lambda_i\}$$

construído, assim como a função f, a partir desta solução.

Para $x > 0$, sabemos que

$$0 \quad < \quad (\prod_{i=1}^{k} \lambda_i)^n \boldsymbol{m} \quad \leq \quad f(x) \quad \leq \quad (\prod_{i=1}^{k} \lambda_i)^n \mathcal{M}$$

Onde $x = nk + j$ com $n \in \mathbb{Z}_+$ e $1 \leq j \leq k$.

Se $x \to \infty$ então $n \to \infty$ e portanto

$$\text{se} \quad \prod_{i=1}^{k} \lambda_i < 1 \quad \Rightarrow \quad (\prod_{i=1}^{k} \lambda_i)^n \mathcal{M} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0;$$

$$\text{se} \quad \prod_{i=1}^{k} \lambda_i > 1 \quad \Rightarrow \quad (\prod_{i=1}^{k} \lambda_i)^n \boldsymbol{m} \xrightarrow{x\to\infty} \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty.$$

3.4 A Condição Necessária

Demonstraremos que a existência de solução para 3.1 e 3.2 é condição necessária para que $E\nu$ seja finita, como foi enunciado no teorema 3.1.1.

Para isso, suponha por absurdo que $E\nu < \infty$ mas que não existam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ satisfazendo 3.1 e 3.2.

Pelo lema 3.2.1, sendo $E\nu < \infty$, existirá uma função positiva f que satisfaz 3.3. Esta função pode ser determinada pela seqüência de quocientes

$$\rho_{x+1} = \frac{f(x+1)}{f(x)}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

juntamente, é claro, com o valor de $f(0)$.

Assim, para os sítios $x = 1, 2, 3, \ldots$ temos

$$p(x)f(x-1) + s(x)f(x) + q(x)f(x+1) = \frac{f(x)}{r(x)} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{p(x)f(x-1)}{f(x)} + \frac{s(x)f(x)}{f(x)} + \frac{q(x)f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(x)}{r(x)f(x)} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{q(x)f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{r(x)} - s(x) - \frac{p(x)f(x-1)}{f(x)} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{q(x)} \left(\frac{1}{r(x)} - s(x) - \frac{p(x)}{f(x)/f(x-1)} \right)$$

Lembrando que para o sítio x, segundo o meio $\boldsymbol{\xi}$ fixado, temos

$$p(x) = p^{\xi_x}, \quad s(x) = s^{\xi_x}, \quad q(x) = q^{\xi_x} \quad \text{e} \quad r(x) = r^{\xi_x},$$

resulta que

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{q^{\xi_x}} \left(\frac{1}{r^{\xi_x}} - s^{\xi_x} - \frac{p^{\xi_x}}{f(x)/f(x-1)} \right),$$

isto é,

$$\rho_{x+1} = \frac{1}{q^{\xi_x}} \left(\frac{1}{r^{\xi_x}} - s^{\xi_x} - \frac{p^{\xi_x}}{\rho_x} \right)$$

$$\rho_{x+1} = h^{\xi_x}(\rho_x), \quad x = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.8}$$

Por esta relação recorrente, a seqüência positiva $\{\rho_x\}_{x \in \mathbb{N}}$ pode ser determinada por $f(0)$ e o meio $\boldsymbol{\xi}$.

Nossa meta é mostrar que caso não haja solução para 3.1 e 3.2, não existe uma seqüência positiva $\{\rho_x\}_{x \in \mathbb{N}}$ como em 3.7. Isto, por sua vez, implica na inexistência de uma função positiva f satisfazendo 3.3 e, pelo Lema 3.2.1, $E\nu = \infty$, produzindo uma contradição.

Assim, podemos afirmar que, se $E\nu < \infty$, então teremos necessariamente uma solução para 3.1 e 3.2.

Para tanto, precisamos de algumas definições e teoremas.

Definição 3.4.1 *Chamaremos de $\{\beta_j^i\}$, $i = 1, \ldots, k$, $j \geq 1$ a seqüência*

$$\beta_1^1, \beta_1^2, \ldots, \beta_1^k, \ \beta_2^1, \beta_2^2, \ldots, \beta_2^k, \ \beta_3^1, \beta_3^2, \ldots, \beta_3^k, \ldots$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_j^{i+1} &= H_i(\beta_j^i), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \beta_{j+1}^1 &= H_k(\beta_j^k) \end{aligned}$$

Teorema 3.4.1 *Se para uma escolha de $0 < \beta_1^1 \leq \infty$ a seqüência $\{\beta_j^i\}$ possuir todos os termos positivos então há solução para 3.1 e 3.2.*

Prova.

Suponha os termos da seqüência $\{\beta_j^i\}$ positivos.

A sub-seqüência $\{\beta_j^1\}_{j\geq 1}$ é tal que

$$\beta_{j+1}^1 = \mathcal{H}(\beta_j^1),$$

pela definição da seqüência $\{\beta_j^i\}$.

Naturalmente, a sub-seqüência $\{\beta_j^1\}_{j\geq 1}$ pode se comportar como estritamente decrescente ou não.

Se a sub-seqüência positiva $\{\beta_j^1\}_{j\geq 1}$ for estritamente decrescente, então existe

$$\lim_{j\to\infty} \beta_j^1 = \beta^*.$$

Como $\mathcal{D} = [\lambda_0; \infty)$ para algum $\lambda_0 > 0$ então $\mathcal{D}$ é fechado e portanto $\beta^* \in \mathcal{D}$.

Segundo as características de $\mathcal{H}$ citadas no corolário 2.2.1, temos que

$$\beta^* = \mathcal{H}(\beta^*).$$

De fato. Supondo o contrário, $|\mathcal{H}(\beta^*) - \beta^*| > 2\epsilon > 0$, como $\lim_{j\to\infty} \beta_j^1 = \beta^*$ e a função $\mathcal{H}$ é contínua, existe $\boldsymbol{j}$ tal que

$$\left|\mathcal{H}(\beta^*) - \mathcal{H}(\beta_{\boldsymbol{j}}^1)\right| < \epsilon \quad \text{e} \quad \beta_{\boldsymbol{j}}^1 - \beta^* < \epsilon.$$

Notando que $\mathcal{H}(\beta_{\boldsymbol{j}}^1) = \beta_{\boldsymbol{j}+1}^1$, temos

$$|\mathcal{H}(\beta^*) - \beta^*| > 2\epsilon > 0, \quad \left|\mathcal{H}(\beta^*) - \beta_{\boldsymbol{j}+1}^1\right| < \epsilon \quad \text{e} \quad \beta_{\boldsymbol{j}}^1 - \beta^* < \epsilon$$

e assim,

$$|\mathcal{H}(\beta^*) - \beta^*| - \left|\mathcal{H}(\beta^*) - \beta_{\boldsymbol{j}+1}^1\right| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$$

mas

$$\left|(\mathcal{H}(\beta^*) - \beta^*) - (\mathcal{H}(\beta^*) - \beta_{\boldsymbol{j}+1}^1)\right| \quad \geq \quad |\mathcal{H}(\beta^*) - \beta^*| - \left|\mathcal{H}(\beta^*) - \beta_{\boldsymbol{j}+1}^1\right| \quad > \quad \epsilon.$$

e portanto

$$\begin{aligned} &\left|\mathcal{H}(\beta^*) - \beta^* - \mathcal{H}(\beta^*) + \beta_{\boldsymbol{j}+1}^1\right| > \epsilon \\ &\left|\beta_{\boldsymbol{j}+1}^1 - \beta^*\right| > \epsilon. \end{aligned}$$

Tendo-se

$$\left|\beta^1_{\boldsymbol{j}+1} - \beta^*\right| > \epsilon \quad \text{e} \quad \beta^1_{\boldsymbol{j}} - \beta^* < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \beta^1_{\boldsymbol{j}+1} < \beta^* \quad \text{ou} \quad \beta^1_{\boldsymbol{j}} < \beta^1_{\boldsymbol{j}+1},$$

em ambos os casos uma contradição, pois supomos $\{\beta^1_j\}$ positiva e estritamente decrescente.

Então, sendo $\beta^* = \mathcal{H}(\beta^*)$, o conjunto de valores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta^* \\ \lambda_i &= H_{i-1} \circ \cdots \circ H_1(\beta^*) \end{aligned}$$

satisfaz as equações 3.1 e 3.2 pois, por construção, temos não só $\lambda_i \leq H_{i-1}(\lambda_{i-1})$ para $i = 2, \ldots, k$, mas $\lambda_i = H_{i-1}(\lambda_{i-1})$. Como $H_k(\lambda_k) = H_k \circ \cdots \circ H_1(\beta^*) = \mathcal{H}(\beta^*) = \beta^*$, também temos $\lambda_1 = \mathcal{H}(\lambda_2)$.

Não sendo $\{\beta^1_j\}$ estritamente decrescente teremos

$$\beta^1_{\boldsymbol{j}} \leqslant \beta^1_{\boldsymbol{j}+1} \text{ para algum } \boldsymbol{j} \geq 1$$

Neste caso temos como possível solução

$$\lambda_i = \beta^i_{\boldsymbol{j}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

De fato. Por construção e pela definição de $\{\beta^1_j\}$, temos

$$\lambda_i = \beta^i_{\boldsymbol{j}} = H_{i-1}(\beta^{i-1}_{\boldsymbol{j}})$$

e como $\lambda_{i-1} = \beta^{i-1}_{\boldsymbol{j}}$,

$$\lambda_i = H_{i-1}(\lambda_{i-1}) \text{ para } i = 2, \ldots, k$$

Sendo $\lambda_1 = \beta^1_{\boldsymbol{j}} \leqslant \beta^1_{\boldsymbol{j}+1}$ e $\beta^1_{\boldsymbol{j}+1} = H_k(\beta^k_{\boldsymbol{j}}) = H_k(\lambda_k)$, temos

$$\lambda_1 \leq H_k(\lambda_k).$$

Corolário 3.4.1 *Não havendo uma solução para 3.1 e 3.2, qualquer que seja a escolha de* $0 < \beta^1_1 \leq \infty$ *haverá um elemento negativo na seqüência*

$$\beta^1_1, \beta^2_1, \ldots, \beta^k_1, \beta^1_2, \beta^2_2, \ldots, \beta^k_2, \beta^1_3, \beta^2_3, \ldots, \beta^k_3, \ldots \tag{3.9}$$

Prova. : Imediata.

Teorema 3.4.2 *Se na seqüência $\{\beta_j^i\}$, onde $\beta_1^1 = \infty$, há um termo negativo então não existe uma seqüência positiva $\{\rho_x\}_{x\in\mathbb{N}}$ como em 3.7, qualquer que seja o meio $\boldsymbol{\xi}$.*

Prova.

Como sabemos, a seqüência $\{\beta_j^i\}$ é construída recursivamente a partir de $\beta_1^1 = \infty$ por aplicações das funções H_i. Chamaremos de $\{\bar{\beta}_j^i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ e $j \geq 1$, uma seqüência resultante de $\{\beta_j^i\}$ onde

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_1^1 &= \beta_1^1 = \infty \\
\bar{\beta}_j^{i+1} &= h^{\xi_x}(\bar{\beta_j^i}) \ , \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \\
\bar{\beta}_{j+1}^1 &= h^{\xi_x}(\bar{\beta}_j^k) \ ,
\end{aligned}$$

sendo x o sítio $k(j-1)+i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ e $j = 1, 2, \ldots$

Como se vê, a seqüência $\{\bar{\beta}_j^i\}$ depende de um meio $\boldsymbol{\xi}$= $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$. Entretanto, qualquer que seja o meio $\boldsymbol{\xi}$, temos

$$h^{\xi_1}(\bar{\beta}_1^1) \geq H_1(\beta_1^1), \text{ ou seja } , \bar{\beta}_1^2 \geq \beta_1^2 \ .$$

Isto se dá pela própria definição de H_i, para todo i, e porque se tem $\bar{\beta}_1^1 = \beta_1^1$. Conseqüentemente, sendo $\bar{\beta}_1^2 \geq \beta_1^2$, temos

$$h^{\xi_2}(\bar{\beta}_1^2) \geq H_2(\beta_1^2) \quad , \text{ ou seja } , \quad \bar{\beta}_1^3 \geq \beta_1^3 \ .$$

Por indução, é fácil ver que, qualquer que seja o meio $\boldsymbol{\xi}$, a seqüência $\{\bar{\beta}_j^i\}$ majora tanto $\{\beta_j^i\}$ como toda seqüência $\{\alpha_j^i\}$, também dependente do mesmo meio $\boldsymbol{\xi}$, onde

$$\begin{aligned}
&0 < \alpha_1^1 \leq \infty \ , \\
&\alpha_j^{i+1} = h^{\xi_x}(\alpha_j^i) \ , \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \\
&\alpha_{j+1}^1 = h^{\xi_x}(\alpha_j^k),
\end{aligned}$$

sendo x o sítio $k(j-1)+i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ e $j = 1, 2, \ldots$

Pois sendo $\alpha_1^1 \leq \bar{\beta}_1^1$ e pela monotonicidade da função h, qualquer que seja o meio $\boldsymbol{\xi}$, temos

$$h^{\xi_1}(\alpha_1^1) \leq h^{\xi_1}(\bar{\beta}_1^1), \text{ ou seja } , \quad \alpha_1^2 \leq \bar{\beta}_1^2 \ ,$$

e portanto

$$\alpha_1^n \leq \bar{\beta}_1^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Com isto em mente, suponha ser $N = k\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}$ a posição do primeiro termo negativo na seqüência $\{\beta_j^i\}$, com $\beta_1^1 = \infty$.

Fixado um $\epsilon > 0$, defina

$$A_N^{(\epsilon)} := \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}) \in M^{N-1} : h^{\xi_n}(\bar{\beta}_j^i) \leq H_i(\beta_j^i) + \epsilon\}.$$

sendo $0 < n < N$, com $n = k(j-1) + i$ onde $j \geq 1$ e $1 \leq i \leq k$,

Suponha um meio $\boldsymbol{\xi}= (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ onde $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}) \in A_N^{(\epsilon)}$ de forma que $0 < \epsilon <| \beta_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{i}} |$, isto é, $\epsilon > 0$ e $\beta_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{i}} + \epsilon < 0$. Neste caso, temos $\bar{\beta}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{i}} < 0$ pois

$$\bar{\beta}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{i}} \quad = \quad h^{\xi_{N-1}}(\beta_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{i}-1}) \quad \leq \quad H_{\boldsymbol{i}-1}(\beta_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{i}-1}) + \epsilon \quad = \quad \beta_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{i}} + \epsilon \quad < \quad 0$$

onde

$$\beta_j^{i-1} = \begin{cases} \beta_j^{i-1} & se \quad 1 < i \leqslant k \\ \beta_{j-1}^k & se \quad i = 1 \end{cases}$$

Conseqüentemente, sabendo que $\{\bar{\beta}_j^i\}$ majora $\{\alpha_j^i\}$ qualquer que seja $0 < \alpha_1^1 \leq \infty$, também temos $\alpha_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{i}} < 0$.

Assim, para um processo desenvolvendo-se em tal meio, teríamos $\rho_N < 0$ para quaisquer valores de $f(0)$ e $f(1)$, pois a seqüência $\{\rho_x\}_{x\in\mathbb{N}}$ é idêntica à seqüência $\{\alpha_j^i\}$ com $\alpha_1^1 = \frac{f(1)}{f(0)}$.

Evidentemente, não podemos garantir que exatamente ρ_N será negativo. Certamente isto ocorre se o meio $\boldsymbol{\xi}$ dispor elementos ξ_x nos sítio de $\mathbb{Z}_+$ de tal forma que $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}) \in A_N^{(\epsilon)}$ para um ϵ suficientemente pequeno.

No entanto, para evidenciar a existência de um termo negativo em qualquer seqüência $\{\rho_x\}_{x\in\mathbb{N}}$ com $0 < \rho_1 \leq +\infty$ é suficiente mostrar que, qualquer que seja o meio $\boldsymbol{\xi}$ onde se desenvolva o processo, existe um inteiro $0 \leq \tau < \infty$ e $\tau/k \in \mathbb{Z}_+$ de forma que $(\xi_{\tau+1}, \xi_{\tau+2}, \ldots, \xi_{\tau+(N-1)}) \in A_{\tau+N}^{(\epsilon)}$. Assim, para quaisquer valores de $f(0)$ e $f(1)$, teríamos $\rho_{k\tau+1} < \infty$ e portanto $\rho_{k\tau+N} < 0$. Para este fim, vejamos:

Para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer sítio $n = k(j-1) + i$, com $0 < n < N$, seja $A_n^\epsilon := \{\xi \in M : h^\xi(\beta_j^i) \leq H_i(\beta_j^i) + \epsilon\}$. Particularmente para $n = 1$, se $\xi_1 \in A_1^\epsilon$ então não só

$$h^{\xi_1}(\beta_1^1) \leq H_1(\beta_1^1) + \epsilon$$

mas

$$h^{\xi_1}(\bar{\beta}_1^1) \leq H_1(\beta_1^1) + \epsilon,$$

pois $\beta_1^1 = \bar{\beta}_1^1$.

Segundo a definição de H_i, para quaisquer $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$, temos que

$$\mathbf{P}\{\xi \in M : h^{\xi}(\lambda) \leq H_i(\lambda) + \epsilon\} > 0,$$

Para todo $n = k(j-1)+i$, com $0 < n < N$, $j \geq 1$ e $1 \leq i \leq k$, fazendo $\lambda = \beta_j^i > 0$, qualquer que seja $\epsilon > 0$ temos

$$\mathbf{P}\{\xi_i \in M : h^{\xi_i}(\beta_j^i) \leq H_i(\beta_j^i) + \epsilon\} > 0,$$

isto é,

$$\mathbf{P}\{\xi_i \in A_n^{\epsilon}\} > 0$$

e pela propriedade P3 temos que

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in A_1^{\epsilon}, \ldots, \xi_{N-1} \in A_{N-1}^{\epsilon}\} > 0.$$

Assim, para ϵ suficientemente pequeno, temos

$$\mathbf{P}\{A_N^{(\epsilon)}\} > 0.$$

Como temos $\mathbf{P}\{A_N^{(\epsilon)}\} > 0$ para ϵ suficientemente pequeno, a propriedade P2, que possui qualquer meio $\boldsymbol{\xi}$, garante a existência de τ como desejado. Isto é,

$$(\xi_{\tau+1}, \xi_{\tau+2}, \ldots, \xi_{\tau+(N-1)}) \in A_{\tau+N}^{(\epsilon)}$$

para algum inteiro $0 \leq \tau < \infty$ qualquer que seja o meio $\boldsymbol{\xi}$ onde se desenvolverá o processo.

Desta forma, fica provado que, *se na seqüência $\{\beta_j^i\}$, onde $\beta_1^1 = \infty$, há um termo negativo então não existe uma seqüência positiva $\{\rho_x\}_{x\in\mathbb{N}}$ como em 3.7 qualquer que seja o meio $\boldsymbol{\xi}$.*

Assim, se $E\nu < \infty$ teremos **necessariamente** uma solução para 3.1 e 3.2 , pois caso contrário, como visto no Corolário 3.4.1 , haveria um termo negativo na seqüência $\{\beta_j^i\}$ qualquer que fosse o valor de β_1^1 (em particular para $\beta_1^1 = \infty$) e, pelo Teorema 3.4.2, não haveria uma seqüência positiva $\{\rho_x\}_{x\in\mathbb{N}}$ como em 3.7. A inexistência de tal seqüência implica em não haver uma função positiva f satisfazendo 3.3 no lema 3.2.1 e assim sendo, por este mesmo lema, deveríamos ter $E\nu = \infty$: uma contradição.

Referências Bibliográficas

[1] J. B. Baillon, Ph. Clément, A. Greven, and F. den Hollander. A variational approach to branching random walk in random environment. *Ann. Probab.*, 21(1):290–317, 1993.

[2] F. den Hollander, M. V. Menshikov, and S. Yu. Popov. A note on transience vs. recurrence for branching random walk in a random environment. *J. Statist. Phys.*, 95(3/4):587–614, 1999.

[3] K. Fleischmann and A. Greven. Localization and selection in a mean field branching random walk in a random environment. *Ann. Probab.*, 20(4):2141–2163, 1992.

[4] M. Menshikov G. Fayolle, V. Malyshev. *Topics in the contructive theory of countable Markov chains.* Cambridge University Press, 1995.

[5] A. Greven and F. den Hollander. Branching random walk in random in a random environment; phase transition for local and global growth rates. *Probab. Theory Relat.*, Fields 91(2):195–249, 1992.

[6] F. I. Karpelevich, M. Ya. Kelbert, and Yu. M. Suhov. The boundedness of branching Markov processes. In M. Freidlin, editor, *The Dynkin Festschrift. Markov Processes and their Applications*, number 34 in Progress in probability, pages 143–153. Birkhauser, Boston, 1994.

[7] F. I. Karpelevich and Yu. M. Suhov. A criterion of bouddedness of discrete branching random walk. In K. Atreya and P. Jagers, editors, *Classical and*

Modern Branching Processes, number 84 in IMA volumes and mathematics and its applications, pages 141–156. Springer-Verlag, New York, 1996.

[8] F. I. Karpelevich and Yu. M. Suhov. Boundedness of one-dimensional branching markov processes. *J. Appl. Math. Stochastic Anal*, 10(4):307–332, 1997.

[9] F. Machado and S. Yu. Popov. Branching random walk in a markovian random environment. *Journal of Applied Probability*, 37(4):1157 – 1163, 2001.

[10] F. Comets M. V. Menshikov and S. Yu. Popov. Lyapunov functions for random walks and strings in random environment. *Ann. Probab.*, 26(4):1433–1445, 1998.

[11] F. Comets M. V. Menshikov and S. Yu. Popov. One-dimensional branching random walk in random environment: a classification. *Markov Process Relat.*, Fields 4(4):465–477, 1998.

[12] M. V. Menshikov and S. E. Volkov. Branching markov chains: qualitative characteristics. *Markov Processes Relat.*, Fields 3(2):225–241, 1997.

[13] P. Révész. Supercritical branching random walk in d-dimensional random environment. *Applied Statistical Science*, III:41–51, 1998.