

**Convergência de modelos
de
armadilhas no hipercubo**

Paulo Henrique de Souza Lima

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Estatística**

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes**

Esta dissertação é parte do projeto Temático FAPESP

"Modelagem Estocástica de

Sistemas Interagentes"

(Processo número 04/07276-2)

São Paulo, janeiro de 2007

O autor agradece à FAPESP pelo apoio financeiro (Processo N. 04/13009-7).

Resumo

Derivamos resultados para o Modelo de Armadilhas de Bouchaud no hiper-cubo a baixa temperatura. Este é um passeio aleatório simples simétrico em tempo contínuo que espera um tempo exponencial com taxa aleatória com distribuição no domínio de atração de uma lei estável de expoente $\alpha < 1$. Os resultados recaem sobre o processo limite chamado K -processo, basicamente, um processo Markoviano em um espaço de estados enumerável que entra em qualquer conjunto finito com distribuição uniforme.

Abstract

We derive results for the Bouchaud trap model in the hypercube at low temperature. This is a continuous-time simple symmetric random walk on hypercube that waits an exponential time with a random rate with distribution in the domain of attraction of a stable law of exponent $\alpha < 1$. The results arise to a scaling limit called K -process, roughly, a Markov process in a denumerable state space which enters finite sets with uniform distribution.

Índice

1	Introdução	2
2	Modelo de Armadilhas de Bouchaud	5
2.1	Modelo de Armadilhas de Bouchaud no Hipercubo d -dimensional	7
3	K-Processo	9
3.1	Características interessantes do K -processo	11
4	Convergência do Passeio Aleatório Simples no Hipercubo d-dimensional ao K-processo	13
4.1	Acoplamento entre $X_t^{d,\mathcal{M}}$ e $Y_t^{\mathcal{M}}$	16
4.2	Acoplamento entre X_t^d e $X_t^{d,\mathcal{M}}$	18
4.3	Resultado Final	25
5	Convergência do MAB ao K-processo	31
5.1	Reescalamiento do MAB	33
	Referências Bibliográficas	36

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos a convergência do passeio aleatório no hipercubo ao K -processo [10]. Este surge a partir de um limite de escala do passeio aleatório no grafo completo com tempo médio de espera somável sobre os sítios do grafo, uniformemente no volume (veja Definição 3.1). Note que não existe um limite de escala para o passeio simples no grafo completo, pois não seria possível saltar uniformemente em uma quantidade infinita de estados sendo eles indistinguíveis. No entanto, o fato de o tempo de espera médio nos vértices do grafo completo ser somável permite a existência do processo limite.

A motivação inicial dos limites de escala de modelos de armadilhas (veja Seção 2) é um fenômeno chamado de envelhecimento, fenômeno exibido por vidros de spins [12]. O envelhecimento pode ser definido como uma certa relação de escala obedecida por correlações entre estados do sistema em tempos longos, mais precisamente, dizemos que há envelhecimento se \exists uma função de duas coordenadas $F(t_w, t_w + \theta.t_w)$ que mensura o comportamento do sistema no instante $t_w(1 + \theta)$ após passado o tempo t_w tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t_w, t_w + \theta.t_w) = \mathcal{F}(\theta)$$

existe e é não trivial. A função F pode tomar diversas formas, por exemplo, em [13] F é uma função da probabilidade do sistema estar no mesmo estado no intervalo de tempo $[t_w, t_w(1 + \theta)]$, em [9] é a probabilidade de dois passeios independentes estarem no mesmo sítio após o instante $t_w(1 + \theta)$ quando estavam no mesmo sítio no instante t_w .

Este fenômeno tem sido intensivamente estudado experimentalmente, numericamente e teoricamente por físicos, em particular no contexto de sistemas de vidros de spin [12], porém a literatura matemática é ainda relativamente pequena. Diversos modelos e dinâmicas surgiram para modelar o fenômeno, Edwards-Anderson [7], Sherrington e Kirkpatrick [14], Derrida's Random Energy Model (REM) [6]. Em [4], Bouchaud apresentou uma dinâmica simplificada que preserva a propriedade de envelhecimento. Trata-se de passeios aleatórios espacialmente não homogêneos em tempo contínuo, cujas taxas formam uma família de variáveis aleatórias independentes e de mesma distribuição F de cauda pesada. No presente estudo, mostramos que o Modelo de Bouchaud no Grafo Completo pode ser uma boa aproximação para o mesmo modelo no hipercubo pelo fato de as duas dinâmicas possuírem o mesmo processo limite, o K -processo [10].

A princípio o envelhecimento pode ser formulado em termos de correlações temporais de sistema limite. A estratégia adotada primeiramente em [9] foi obter o processo limite para então estudar o envelhecimento para um modelo de armadilhas em \mathbb{Z} . Em [10], o K -processo surge naturalmente como limite de escala do no grafo completo.

Neste trabalho, estabelecemos o limite fraco para o modelo de armadilhas no hipercubo quando o volume tende a infinito, supondo primeiramente, nos capítulos 3 e 4, que os tempos de salto esperados em cada sítio do hipercubo têm soma convergente quando o volume tende a infinito. No capítulo 5, discutimos a

extensão do argumento para o caso em que os tempos de salto esperados mencionados acima convergem para um conjunto de tempos esperados somável quando o volume tende a infinito.

A redação deste trabalho pressupõe o conhecimento introdutório do leitor sobre Processos Estocásticos. É recomendável alguma familiaridade com processos de Levy e convergência de processos, para uma melhor compreensão veja [21-23] de [9] e [8] respectivamente. O texto está dividido em seis seções, a Introdução, a apresentação do Modelo de Armadilhas de Bouchaud, a apresentação do K -processo, o resultado sobre a convergência do passeio aleatório simples ao K -processo quando as taxas estão fixas e finalmente a convergência do Modelo de Bouchaud ao K -processo (taxas aleatórias).

Capítulo 2

Modelo de Armadilhas de Bouchaud

Os ingredientes básicos do Modelo de Armadilhas de Bouchaud (MAB) são um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de vértices \mathcal{V} e elos \mathcal{E} , um meio $\tau = (\tau_x)_{x \in \mathcal{V}}$, $\tau_x > 0$ e um parâmetro positivo $a \in [0, 1]$. Trata-se de um passeio aleatório com espaço de estado \mathcal{V} , estado inicial $0 \in \mathcal{V}$ e saltos de tempo exponencial que dependem de τ . O meio τ_x $x \in \mathcal{V}$ refere-se à profundidade do estado x , quanto maior, maior é o tempo gasto pelo passeio em x até o próximo salto. Define-se MAB por um Processo de Markov em tempo contínuo em \mathcal{V} com taxa de saltos dada por

$$w_{x,y} = \begin{cases} \nu \tau_x^{-(1-a)} \cdot \tau_y^a, & \text{se } \{x, y\} \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

O parâmetro ν controla a velocidade e não influi nas propriedades da dinâmica do processo. O parâmetro a influi na dependência do tempo de espera e probabilidade de salto em x pelas profundidades de seus vizinhos. No caso em que $a = 0$, a taxa de espera no estado x é exatamente $1/\tau_x$ e o processo salta uniformemente

na vizinhança de x , e portanto independente da profundidade de seus vizinhos. No outro extremo, se $a = 1$, a taxa de espera em x é $\sum_{y:\{x,y\}\in\mathcal{E}} \gamma_y$ - independente de γ_x e a medida de salto aos vizinhos é diretamente proporcional à profundidade do vizinho, ou seja, os estados com alta profundidade (armadilhas) atraem o processo.

O meio τ pode ser definido como uma medida

$$\tau = \sum_{x \in \mathcal{V}} \tau_x \cdot \delta_x.$$

No texto original[4] o meio das armadilhas é escrito na forma de uma medida de Gibbs

$$\tau = \sum_{x \in \mathcal{V}} e^{\beta \cdot E_x} \cdot \delta_x,$$

onde β está associado ao inverso da temperatura do sistema, quanto maior, mais lenta a dinâmica e E_x é chamado de energia do estado x , quanto menor, maior é o tempo de espera neste estado. Note que τ é uma medida reversível para o passeio aleatório.

Este processo é chamado de modelo armadilhas pelo fato de assumir que o meio $(\tau_x)_{x \in \mathcal{V}}$ é altamente não homogêneo. Ao supor que $(\tau_x)_{x \in \mathcal{V}}$ é uma família de variáveis aleatórias independentes com distribuição de cauda pesada, em \mathbb{Z}^d alguns poucos estados terão tempos de espera comparáveis com a soma dos tempos de espera dos demais estados já visitados; isso fará com que a cadeia permaneça nestes estados quase todo o tempo; estas são as chamadas armadilhas. A distribuição de τ_x é tal que

$$\mathbb{P}[\tau_x > 0] = 1, \quad \mathbb{P}[\tau_0 > t] = \frac{L(t)}{t^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (2.2)$$

e L é uma função de pequena variação no infinito. O parâmetro α está

relacionado com β da seguinte forma:

$$\mathbb{P}[\tau_x > t] \approx t^{-\alpha} = t^{-1/\beta} = \mathbb{P}[e^{-\beta E_x} > t],$$

E_x são v.a. independentes de distribuição Exponencial de média 1.

2.1 Modelo de Armadilhas de Bouchaud no Hipercubo d -dimensional

No presente estudo, estamos interessados na análise do comportamento do Modelo de Armadilhas de Bouchaud no hipercubo d -dimensional no caso em que $a = 0$, ou seja, quando o processo está em x espera um tempo exponencial de média τ_x e salta uniformemente entre seus vizinhos. A cadeia imersa é, portanto, o processo aleatório simples simétrico no hipercubo. A seguir definimos o grafo do hipercubo d -dimensional e a dinâmica induzida pelo MAB com tais parâmetros.

A cada vértice x do hipercubo d -dimensional é associado $(x(1), x(2), \dots, x(d)) \in \{0, 1\}^d$ de forma que a cada um dos d vizinhos de x , denote x' , tem a ele associado $(x'(1), x'(2), \dots, x'(d)) \in \{0, 1\}^d$ tal que $\sum_{i=1}^d |x(i) - x'(i)| = 1$. A Figura 2.1 representa graficamente tal bijeção.

Definição 2.1 *O hipercubo d -dimensional é um grafo definido por*

$$\mathcal{H}_d = (\mathcal{V}_d, \mathcal{E}_d),$$

onde

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_d = \{0, 1\}^d,$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_d = \{(x, x' \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{V}_d : |x - x'| = 1)\},$$

onde $|x - x'| = \sum_{i=1}^d |x(i) - x'(i)|$ a distância de Hamming de \mathcal{V}_n .

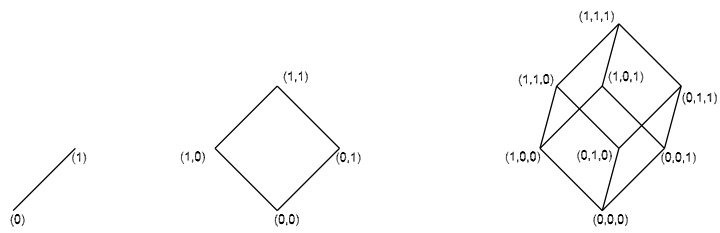


Figura 2.1: Representação Gráfica de um Hiper cubo d -dimensional

Capítulo 3

K -Processo

Definição 3.1 Como em [10], o K -processo $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ com parâmetro $\gamma = \{\gamma_x : \gamma_x > 0, x \in \mathbb{N}^*, \sum_x \gamma_x < \infty\}$ é um passeio aleatório em tempo contínuo e estado de estados $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots, \infty\}$ caracterizado por:

1. As trajetórias de Y são càdlàg;¹
2. Y tem a propriedade forte de Markov;
3. Ao começar por $i \in \mathbb{N}$, Y espera por um tempo exponencial de média γ_i antes de saltar;
4. Ao começar por ∞ , para qualquer conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$, temos $\tau_A < \infty$ quase certamente, onde

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0 : Y(t) \in A\},$$

com $\inf \emptyset = \infty$, e a lei de $Y(\tau_A)$ é uniforme em A .

¹càdlàg: Continue a droite, limite a gauche (contínua à direita e com limite à esquerda)

Construtivamente, o K -processo pode ser obtido como um limite do acoplamento de passeios aleatórios no grafo completo quando o número de estados diverge para $+\infty$. O passeio aleatório simples (veja Definição 4.1) no grafo completo (veja Definição 4.2) com M estados e taxas de espera $\{\gamma_x : x \in \{1, 2, \dots, M\}\}$ é um processo de saltos com taxa $1/(\gamma_x \cdot M)$ a cada um dos vizinhos do estado x . Por uma questão técnica, para que as trajetórias do processo limite tenha trajetórias contínua à direita, insere-se o estado ∞ de passagem instantânea entre os saltos do processo.

A seguir exibiremos uma construção direta do K -processo, ela começa com a definição de Γ , um subordinador estável Γ que mensura o tempo gasto pelo processo, por isso, chamado de relógio. Temos:

$$Y_t^y = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq t < \gamma(y) \cdot T_0, \\ x, & \text{se } \Gamma(\sigma_j^{(x)} -) \leq t < \Gamma(\sigma_j^{(x)}), \text{ para algum } 1 \leq j < \infty, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde y é o estado inicial do processo e Γ é a função relógio definida por

$$\Gamma(t) = \gamma(y)T_0 + \sum_{x=1}^{\infty} \gamma(x) \sum_{i=1}^{N_t^{(x)}} T_i^{(x)}, \quad (3.2)$$

onde, por convenção, $\sum_{i=1}^0 T_i^{(x)} = 0$ para todo x , $\mathcal{N} = \{(N_t^{(x)})_{t \geq 0}, x \in \mathbb{N}^*\}$ é uma família de i.i.d. processos de Poisson de taxa 1, com $\sigma_j^{(x)}$ o j -ésimo evento de $N^{(x)}$, e $\mathcal{T} = \{T_0; T_i^{(x)} i \geq 1, x \in \mathbb{N}^*\}$ é uma família de i.i.d. variáveis aleatórias exponenciais de taxa 1, com \mathcal{N} e \mathcal{T} independentes. A Figura 3.1 ilustra as definições.

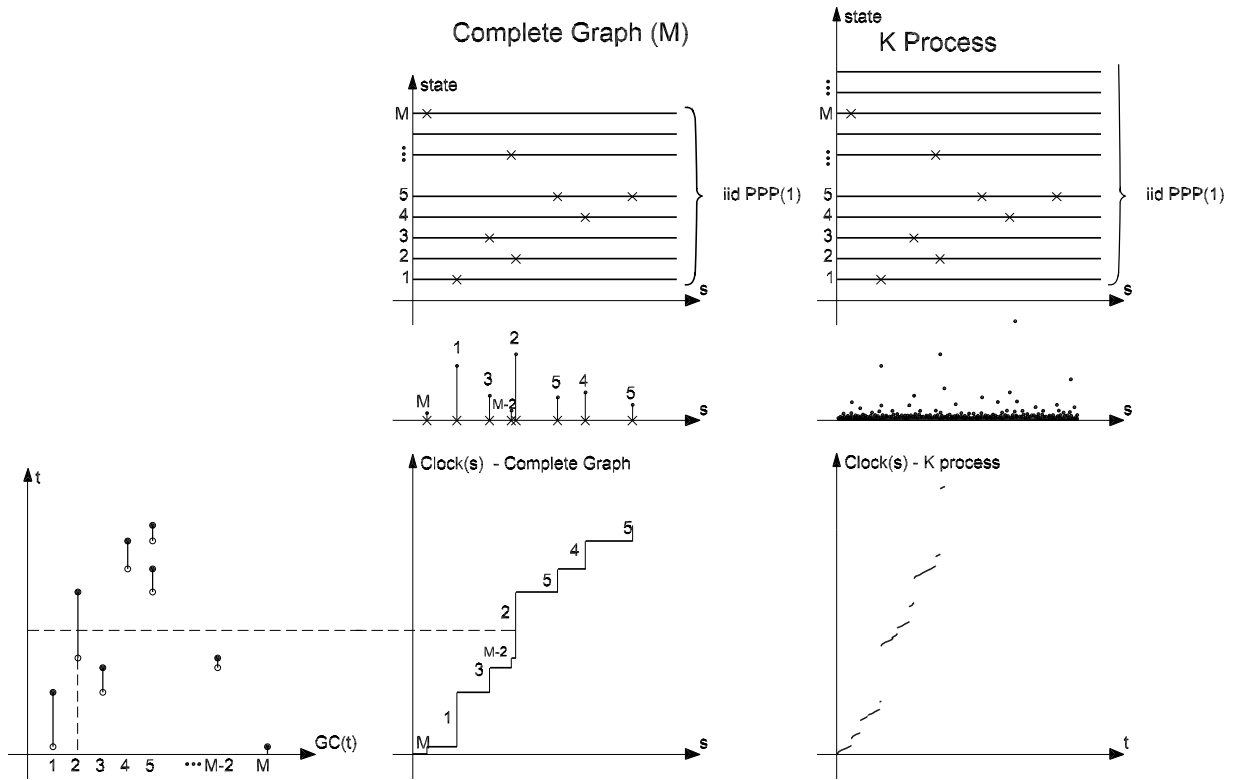


Figura 3.1: Construção Probabilística do K -processo

3.1 Características interessantes do K -processo

Um uso especial, importante nesta dissertação, é quando γ_x é dada pelos incrementos em $[0, 1]$ de um subordinador estável com índice α dado em (5.2).

Propriedades do processo:

1. X_t é não decrescente;
2. X_t é Markoviano;
3. X_t é singular, ou seja,

$$P[X_t \in \mathcal{D}] = 1, \forall t \in [0, \infty);$$

4. Trajetórias do tipo funções de Cantor (contínuas, não decrescentes, derivada de Lebesgue-quase sempre nula);
5. O estado ∞ é fictício no sentido de Lévy ([11]), isto é, Y passa tempo zero em ∞ a cada visita; o conjunto de tempos em que Y visita ∞ é um conjunto de Cantor (perfeito, com interior vazio) com medida de Lebesgue nula.

Capítulo 4

Convergência do Passeio Aleatório Simples no Hipercubo d -dimensional ao K -processo

A seguir definimos os processos envolvidos na convergência.

Definição 4.1 Chamamos de *Passeio Aleatório Simples (PAS)* no grafo $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ em tempo contínuo com taxas $(\gamma_x^{-1})_{x \in \mathcal{V}}$ o processo com taxas de salto do estado x ao y dadas por

$$w_{x,y} = \frac{G(x)}{\gamma_x}, \quad \{x, y\} \in \mathcal{E}.$$

onde $G(x)$ é o número de vizinhos do vértice x .

Definição 4.2 Seja V um conjunto, o Grafo completo de E é a dupla (V, E) do conjunto de vértices V e conjunto de elos $\{\{x, y\} : x \neq y, x, y \in V\}$

Denotaremos o PAS no hipercubo d -dimensional por X^d e o PAS no Grafo Completo de \mathcal{M} por $Y^{\mathcal{M}}$.

Associaremos as taxas $(\gamma_{d,x}^{-1})_{x \in \mathcal{V}_d}$ aos vértices do hipercubo da seguinte forma. Seja $(\beta_a)_{a \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável densa em $[0, 1]$ e a cada β_a uma taxa $\bar{\gamma}_a^{-1}$. Seja Φ_d a função que associa a cada vértice do hipercubo d -dimensional o intervalo $I_{d,x} = [\frac{\bar{x}}{2^d}, \frac{\bar{x}+1}{2^d})$, onde \bar{x} é o inteiro associado à expansão diádica associada ao vértice x . Então, para todo $x \in \mathcal{V}_d$ temos

$$\gamma_{d,x} = \sup_{\beta_a \in I_{d,x}} \bar{\gamma}_a.$$

A Figura 4.1 ilustra as definições acima.

Como a família $(\beta_a)_{a \in \mathbb{N}}$ é densa em $[0, 1]$, o conjunto $\{a : \beta_a \in I_{d,x}\}$ não é vazio e portanto $\gamma_{d,x}$ está bem definida. Como a seqüência $(I_{d,x})_{d \in \mathbb{N}}$ é uma família decrescente de intervalos encaixantes, $\gamma_{d+1,x} \leq \gamma_{d,x}$, e portanto $(\gamma_{d,x})_{d \in \mathbb{N}}$ forma uma seqüência de elementos positivos e não crescente. Concluimos que $(\gamma_{d,x})_{d \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência convergente. No texto que segue abandonaremos os rótulos (x_1, x_2, \dots, x_d) ao nos referirmos aos vértices de X^d . Utilizaremos os números naturais $1, 2, \dots, 2^d$ sendo n o n -ésimo estado de X^d com o maior tempo de espera médio. Desta forma, γ_x , $x \in \{1, 2, \dots, 2^d\}$ formam uma seqüência decrescente. Estamos interessados nas famílias $(\gamma_x)_{x \in \mathbb{N}}$ somáveis.

Definição 4.3 *Denotaremos por $X^{d,\mathcal{M}}$ o PAS no Hipercubo d -dimensional restrito ao conjunto \mathcal{M} dos M estados com maior tempo de espera médio.*

Note que pelo fato de $X^{d,\mathcal{M}}$ ser apenas uma restrição de X^d , ele é Markoviano.

No Teorema 4.2, obtemos uma convergência do Passeio Aleatório no Hipercubo d -dimensional ao K -processo. Para que tenhamos a convergência, devemos esperar, pela propriedade 4 da Definição 3.1 do K -processo, que o tempo de retorno a um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$ seja finito quase certamente e que a entrada

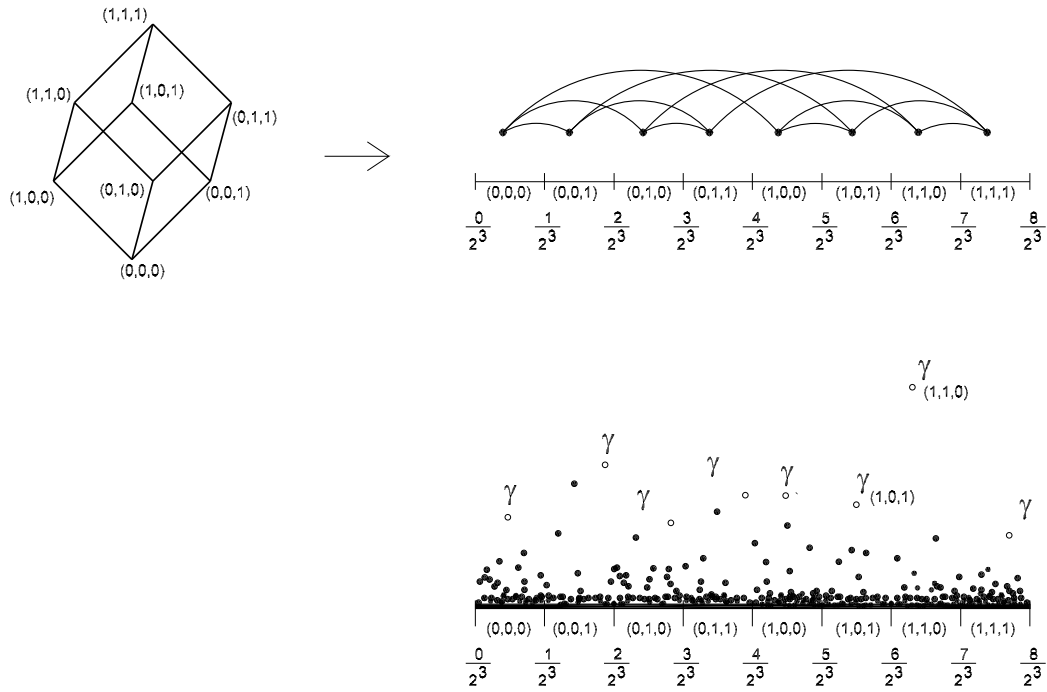


Figura 4.1: Representação gráfica das taxas de um hiper-cubo tridimensional

à A tenha distribuição uniforme. Possíveis problemas poderiam ocorrer em X^d para que estas propriedades não valessem:

1. A lei de entrada a um conjunto finito A pelo processo X^d estar longe da distribuição uniforme. É de esperar que X^d tenha entradas uniformes pelo fato de sua medida invariante ser a uniforme? A resposta é não. O PAS sobre o polígono de n vértices também tem medida invariante uniforme, porém existem conjuntos finitos, por exemplo um conjunto formado por três vértices consecutivos, tais que a lei de primeira entrada está longe da uniforme.
2. Outro possível problema que faria com que X^d não convirja ao K -processo seria o fato de o tempo gasto para voltar a um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$

explodir quando o volume do hipercubo cresce. Isto poderia acontecer se existissem regiões do hipercubo em que o tempo de saída desta região divergisse quando o volume do hipercubo cresce, por exemplo, se o passeio aleatório tiver trajetórias com muitos saltos em sítios com tempo de espera grandes.

A estratégia da prova da Proposição 4.2 é a comparação entre o PAS no hipercubo d -dimensional (X^d) com o PAS no hipercubo d -dimensional restrito a M estados ($X^{d,\mathcal{M}}$) - Proposição 4.2, onde obtemos que o tempo fora de \mathcal{M} é suficientemente pequeno. E então compará-lo ao PAS sobre o grafo completo com M estados ($Y^{\mathcal{M}}$) - Proposição 4.1, onde obtemos que com alta probabilidade os dois processos permanecem juntos, e portanto, o hipercubo tem entradas com lei aproximadamente uniforme. Finalmente, em [10] a comparação de $Y^{\mathcal{M}}$ com o K -processo finaliza o argumento da convergência de X^d ao K -processo.

Tanto a Proposição 4.1 quanto a Proposição 4.2 estão fortemente baseadas no Lema 4.1 (Corolário 1.5 de [2]) e esta é a única propriedade do Hipercubo que é utilizada para a prova do Teorema 4.2.

4.1 Acoplamento entre $X_t^{d,\mathcal{M}}$ e $Y_t^{\mathcal{M}}$

Denotaremos por $(p_{ij}^{(d)})_{i,j \in \mathcal{M}}$ a matriz de transição da cadeia imersa de $X^{d,\mathcal{M}}$, trata-se de um passeio aleatório simples no hipercubo restrito a \mathcal{M} . Seja

$$p^* = \min_{i,j \in \mathcal{M}} p_{ij}^{(d)}. \quad (4.1)$$

Acopla-se $X_t^{d,\mathcal{M}}$ e $Y_t^{\mathcal{M}}$ de tal forma que se no instante t $X_t^{d,\mathcal{M}} = Y_t^{\mathcal{M}}$ então o tempo de espera até o próximo salto é o mesmo nos dois processos e saltam ao

mesmo estado com probabilidade máxima. Esta probabilidade é maior ou igual a

$$M.p^*. \tag{4.2}$$

A seguir, enunciamos um resultado chave para este trabalho indicando de maneira bastante precisa que os saltos de $X^{d,\mathcal{M}}$ são aproximadamente uniformes.

Lema 4.1 (*BenArous, Gayraud - Corolário 1.5*) *Seja $\mathcal{M} \subset S_d$ tal que $2^M \leq d_0(d)$. Então, para todo $\sigma \notin \mathcal{M}$, a medida de entrada a \mathcal{M} começando de σ é, assintoticamente, a medida uniforme em \mathcal{M} : Existem constantes $0 < c^-$ e $c^+ < \infty$ tais que, para todo $\eta \in \mathcal{M}$,*

$$\frac{1}{M} \left(1 - \frac{c^-}{(\log d)^2} \right) \leq H_{\mathcal{M}}(\sigma, \eta) \leq \frac{1}{M} \left(1 + \frac{c^+}{(\log d)^2} \right)$$

onde, para $\sigma \in S_N - \mathcal{M}$,

$$H_{\mathcal{M}}(\sigma, \eta) := \mathbb{P}[\tau_{\eta}^{\sigma} < \tau_{\mathcal{M}-\eta}^{\sigma}], \quad \eta \in \mathcal{M},$$

$$d_0 := O\left(\frac{d}{\log d}\right),$$

e

$$\tau_A^{\sigma} = \inf\{t > 0 : X_t^d \in A | X_0^d = \sigma\}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{V}_d, \quad A \subset \mathcal{V}_d. \tag{4.3}$$

Como consequência, conforme a dimensão d do hipercubo cresce, a lei de entrada do processo no conjunto \mathcal{M} dos M estados com maior tempo de espera médio se aproxima da lei uniforme.

Proposição 4.1 *Tome $T > 0$ e $2^M \leq d_0(d)$ e suponha que $X^{d,\mathcal{M}}(0) = Y^{\mathcal{M}}(0)$, então*

$$\mathbb{P}[X^{d,\mathcal{M}}(t) = Y^{\mathcal{M}}(t), t \in [0, T]] \geq e^{-\frac{C.T}{\log^2 d \cdot \bar{\gamma}_{\mathcal{M}}}}.$$

para alguma constante $C > 0$, onde $\bar{\gamma}_{\mathcal{M}} = \min_{x \in \mathcal{M}} \gamma_x$.

Demonstração.

Seja $N(T)$ a quantidade de saltos no processo $Y^{\mathcal{M}}$ no intervalo $[0, T]$, e $t_1, \dots, t_{N(T)}$ os instantes de salto. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X^{d, \mathcal{M}}(t) = Y^{\mathcal{M}}(t), t \in [0, T] | N(T) = k] &= \\ \mathbb{P}[X^{d, \mathcal{M}}(t_i+) = Y^{\mathcal{M}}(t_i+), i = 1, \dots, k | N(T) = k] &\geq \\ & (M.p^*)^k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Onde a última desigualdade segue do fato dos saltos serem independentes e da equação (4.2). Mas, pelo Lema 4.1, como $2^M \leq d_0(d)$, $\exists c^- > 0$ tal que

$$M.p^* \geq M \cdot \left(\frac{1}{M} - \frac{c^-}{M \cdot \log^2 d} \right) = 1 - \frac{c^-}{\log^2 d}. \quad (4.5)$$

Como vale (4.4), (4.5), a quantidade a direita de (4.4) é decrescente em k e a menor taxa de espera dos estados de \mathcal{M} é γ_M ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X^{d, \mathcal{M}}(t) = Y^{\mathcal{M}}(t), t \in [0, T]] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[X^{d, \mathcal{M}}(t) = Y^{\mathcal{M}}(t), t \in [0, T] | N(T) = k] \cdot \mathbb{P}[N(T) = k] \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)^k \cdot \frac{e^{-T/\gamma_M} (T/\gamma_M)^k}{k!} \\ &\geq e^{\frac{-c^- \cdot T}{\gamma_M \cdot \log^2 d}}. \end{aligned}$$

□

4.2 Acoplamento entre X_t^d e $X_t^{d, \mathcal{M}}$

Acopla-se X_t^d e $X_t^{d, \mathcal{M}}$ de tal forma que a seqüência de visitas a \mathcal{M} seja a mesma nos dois processos. Para isto, basta definirmos por onde X^d passeia entre duas visitas a \mathcal{M} adicionando trechos independentes de 'excursões' fora deste conjunto.

Proposição 4.2 *Para cada $d \in \mathbb{N}$, $2^M \leq d_0(d)$ a probabilidade de existir $\lambda_d(t)$ contínua tal que para todo $T > 0$*

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{d, \mathcal{M}} - X_{\lambda_d(t)}^d| < \delta_K$$

é limitada inferiormente por

$$\left[1 - \frac{K}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)\right]^{T.K. \left(C^-(d).p^* \sum_{j=1}^{K-1} \gamma_j + \left(\frac{c^-.K}{\gamma_K \cdot \log^2 d}\right)\right)^{-1}}.$$

para $C^-(d) = \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)$, onde δ_K é o diâmetro do conjunto $\{K, K+1, K+2, \dots\}$.

Demonstração.

Considere a seguinte notação:

(4.6)

- τ_k^A o instante da k -ésima entrada de $X^{d, \mathcal{M}}$ ao conjunto $A \subset \mathcal{M}$;
- τ_k^{*A} o tempo até a k -ésima saída;
- ξ_k^A o tempo gasto por X_t^d até o k -ésimo salto no conjunto $A \subset \mathcal{M}$;
- ξ_k^{*A} o tempo até a k -ésima saída.

As Figuras 4.2, 4.3 ilustram as definições.

Suponha que a cada visita ao conjunto $\{1, 2, \dots, K\}$, existe pelo menos uma visita ao conjunto $\{K+1, K+2, \dots, M\}$ (Veja Lema 4.2 para a probabilidade deste evento). Neste caso, $(\tau_{j+1}^k - \tau_j^{*K}) > 0 \forall j \geq 1$ e portanto a função $\lambda_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida por:

$$\lambda_d(t) = \begin{cases} \xi_j^K + (t - \tau_j^K), & \text{se } t < T, \tau_j^K < t \leq \tau_j^{*K}, \text{ para algum } j \in \mathbb{N}, \\ \xi_j^{*K} + \frac{(t - \tau_j^{*K})(\xi_{j+1}^K - \xi_j^{*K})}{(\tau_{j+1}^k - \tau_j^{*K})} & \text{se } t < T, \tau_j^{*K} < t \leq \tau_{j+1}^K, \text{ para algum } j \in \mathbb{N} \\ \xi_N^K + (t - \tau_N^K), & \text{se } t \geq T, \end{cases} \quad (4.7)$$

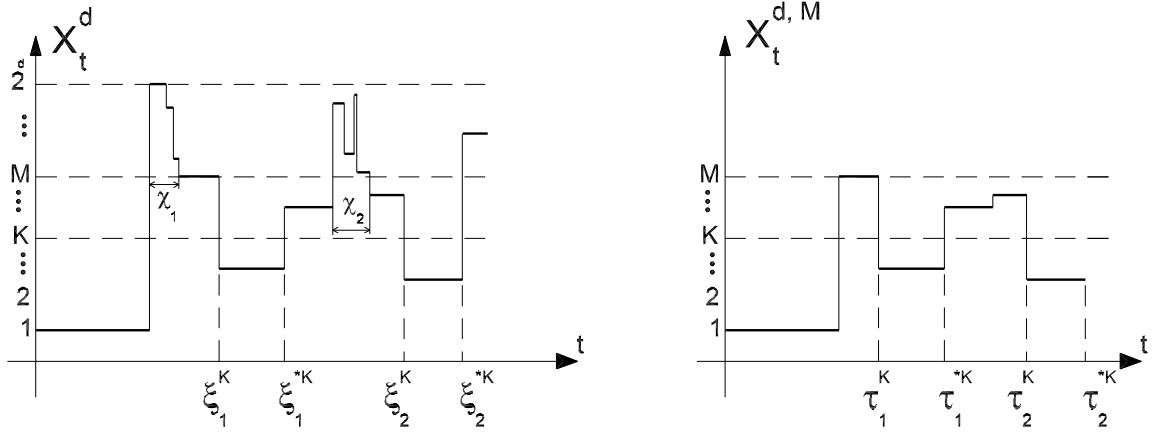


Figura 4.2: Representação Gráfica de uma Trajetória de $X_t^{d,M}$ e X_t^d

onde $N = \min\{j : \tau_j^{*K} > T\}$.

A função $\lambda_d(t)$ é definida de forma que para todo $t \in [0, T]$ tal que $X_t^{d,M} \in \{1, 2, \dots, K\}$ tem-se $X_t^{M,d} = X_{\lambda_d(t)}^d$. Portanto, até o instante T , a distância máxima entre os dois processos é δ_K , ou seja,

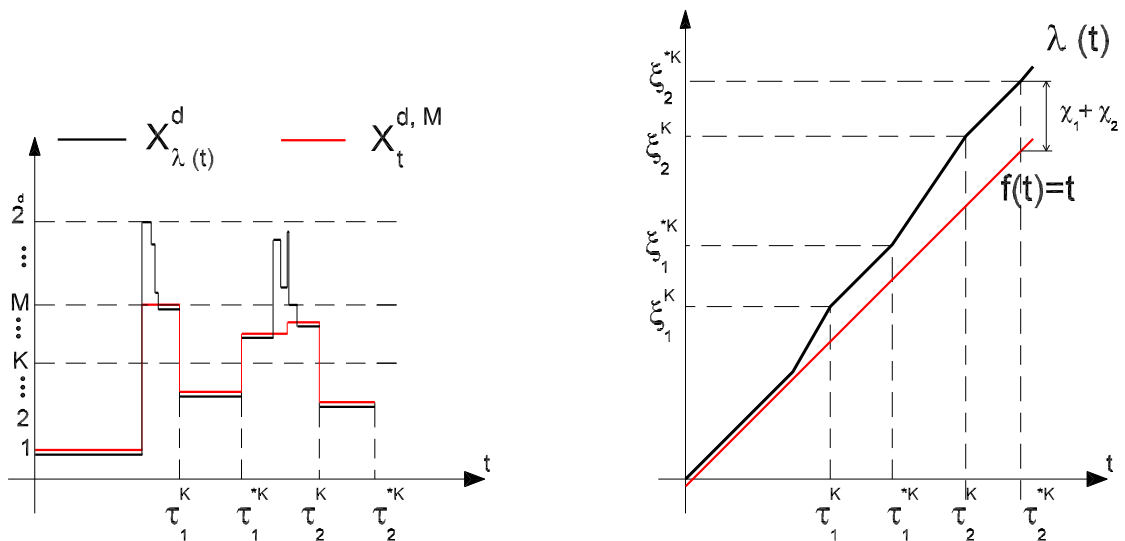


Figura 4.3: Representação Gráfica da Função $\lambda_d(t)$

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{d, \mathcal{M}} - X_{\lambda(t)}^d| \leq \delta_K,$$

onde δ_K é o diâmetro do conjunto $\{K + 1, K + 2, \dots\}$. O Lema 4.2 finaliza o argumento.

□

O Lema a seguir versa sobre a probabilidade de λ_d estar bem definida.

Lema 4.2 *Denote por A o evento em que até o instante T entre quaisquer duas entradas ao conjunto $\{1, \dots, K\}$, existe pelo menos uma visita ao conjunto $\{K + 1, K + 2, \dots, M\}$ pelo processo X^d . Então,*

$$\mathbb{P}[A] \geq \left[1 - \frac{K}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d} \right) \right]^{T.K. \left(C^-(d).p^* \sum_{j=1}^{K-1} \gamma_j + \left(\frac{c^- . K}{\gamma_K . \log^2 d} \right) \right)^{-1}}, \quad (4.8)$$

para $C^-(d) = \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d} \right)$.

Seja N o número de saltos do processo $X^{d, \mathcal{K}}$, ao conjunto $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ até o instante T e A_i o evento em que entre a i -ésima e $(i + 1)$ -ésima visitas à \mathcal{K} o processo X^d tenha visitado $\{K + 1, K + 2, \dots, M\}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \sum_{n \geq 1} \sum_{u_1, \dots, u_n \in \mathcal{K}} \mathbb{P}[A|N = n, U_1 = u_1, \dots, U_n = u_n] \\ &\quad \cdot \mathbb{P}[U_1 = u_1, \dots, U_n = u_n | N = n] \mathbb{P}[N = n] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Note que

$$\mathbb{P}[A|N = n, U_1 = u_1, \dots, U_n = u_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i | U_i = u_i], \quad (4.10)$$

em que $\mathbb{P}[A_i | U_i = u_i]$ é a probabilidade de o processo X^d saindo de u_i visitar $\{K + 1, K + 2, \dots, M\}$ antes de \mathcal{K} . Dado um evento E , denotaremos por E^c o evento complementar de E . Temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_i^c|U_i = u_i] &= \mathbb{P}[\cup_{x \in \mathcal{K}} V_x | U_i = u_i] \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{K}} \mathbb{P}[V_x | U_i = u_i],\end{aligned}$$

onde V_x é o evento em que o processo entra em \mathcal{M} pelo estado x . Pelo Lema 4.1,

$$\mathbb{P}[V_x] \leq \frac{1}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right),$$

portanto,

$$\mathbb{P}[A_i|U_i = u_i] \geq 1 - \sum_{x \in \mathcal{K}} \frac{1}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right) = \left[1 - \frac{K}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)\right] \quad (4.11)$$

Note que o lado direito de (4.11) não depende de u_i . Por (4.9), (4.10) e (4.11) temos

$$\mathbb{P}[A] \geq \sum_{n \geq 1} \left[1 - \frac{K}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)\right]^n \mathbb{P}[N = n] = \mathbb{E}\left[\left[1 - \frac{K}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)\right]^N\right]$$

Pela desigualdade de Jensen obtemos:

$$\mathbb{P}[A] \geq \left[1 - \frac{K}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)\right]^{\mathbb{E}[N]}. \quad (4.12)$$

Resta-nos estimar $\mathbb{E}[N]$. Isto será feito por comparação com um processo de renovação. Seja $W^{\mathcal{K}}$ um processo em \mathcal{K} com tempos de espera γ_k e probabilidade de transição

$$\begin{aligned}p_{ij} &= p^*, & i, j, \in \mathcal{K}, & j < K, \\ p_{ik} &= 1 - kp^*, & i \in \mathcal{K}.\end{aligned}$$

onde p^* é como em (4.1). Seja N' o número de saltos de W^k até o instante T .

Como $\gamma_K = \min_{x \in \mathcal{K}} \gamma_x$, temos que

$$N' \stackrel{D}{\geq} N. \quad (4.13)$$

($\stackrel{D}{\geq}$ denota a dominação estocástica). Como p_i não depende de i , N' é um processo de renovação. Seja U o tempo entre renovações, pelo Teorema da Renovação, $\mathbb{E}[N'] = T/\mathbb{E}[U]$. Mas,

$$\mathbb{E}[U] = \sum_{j \in \mathcal{K}} p_{ij} \gamma_j = p^* \sum_{j=1}^{K-1} \gamma_j + (1 - Kp^*) \gamma_K,$$

Pelo Lema 4.1,

$$\frac{1}{K} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d} \right) \leq p^* \leq \frac{1}{K} \left(1 + \frac{c^+}{\log^2 d} \right),$$

portanto,

$$\mathbb{E}[N'] = \frac{T}{\mathbb{E}[U]} = T \cdot \left(\frac{1}{K} C^-(d) \cdot p^* \sum_{j=1}^{K-1} \gamma_j + \left(\frac{c^-}{\log^2 d} \right) \gamma_K \right)^{-1}, \quad (4.14)$$

com $C^-(d) = \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d} \right)$.

Finalmente, por (4.12) e (4.13), (4.14) temos

$$\mathbb{P}[A] \geq \left[1 - \frac{K}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d} \right) \right]^{T \cdot K \cdot \left(C^-(d) \cdot p^* \sum_{j=1}^{K-1} \gamma_j + \left(\frac{c^- \cdot K}{\gamma_K \cdot \log^2 d} \right) \right)^{-1}}.$$

□

O Lema a seguir versa sobre o tempo de X^d fora de \mathcal{M} até o instante T .

Lema 4.3 *Seja T' o tempo que o processo X^d passa fora de \mathcal{M} entre duas visitas ao conjunto $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ com distribuição inicial de $X^d(0)$ dada por π , então*

$$\mathbb{E}[T'] \leq \sum_{x > M} \gamma_x \cdot C_2(d).$$

onde $C_2(d)$ é uma função de d tal que $C_2(d) \rightarrow 1$, quando $d \rightarrow \infty$.

Demonstração.

$$\mathbb{E}[T'] \leq \mathbb{E}[\tilde{T}'],$$

onde \tilde{T}' é o tempo que o processo X^d com distribuição do estado inicial π passa fora de \mathcal{M} entre duas visitas ao conjunto $\{1\}$.

$$\mathbb{E}[\tilde{T}'] = \sum_{z \geq 1} \pi_z \mathbb{E}[\tilde{T}' | X^d(0) = z] = \sum_{z \geq 1} \pi_z \mathbb{E}\left[\sum_{x > M} \sum_{i=1}^{N_{x,1}^z} T_{i,x}\right],$$

onde $N_{x,y}^z$ é o número de visitas a x entre visitas ao estado y quando o processo começa por z e $T_{i,x}$ é o tempo gasto na i -ésima visita ao estado x . Pela igualdade de Wald,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x > M} \sum_{i=1}^{N_{x,1}^z} T_{i,x}\right] = \sum_{x > M} \gamma_x \mathbb{E}[N_{x,1}^z].$$

Considere $A_{y,A}^x = \{\omega : \tau_{\{y\}}^x(\omega) < \tau_{A-\{y\}}^x(\omega)\}$ o evento no qual o processo X^d ao sair de x entra no conjunto $A \cup \{y\}$ pelo estado y , para $x, y \in \mathcal{V}_d$ e $A \subset \mathcal{V}_d$, onde τ_A^η é como em (4.3). A seguir, condicionaremos $\mathbb{E}[N_{x,1}^z]$ aos eventos $A_{1,\{x\}}^z$ e seu complementar $(A_{1,\{x\}}^z)^c$.

$$\mathbb{E}[N_{x,1}^z] = \mathbb{E}[N_{x,1}^z | A_{1,\{x\}}^z] \cdot \mathbb{P}[A_{1,\{x\}}^z] + \mathbb{E}[N_{x,1}^z | (A_{1,\{x\}}^z)^c] \cdot \mathbb{P}[(A_{1,\{x\}}^z)^c]. \quad (4.15)$$

Note que $\mathbb{E}[N_{x,1}^z | A_{1,\{x\}}^z] = 0$, que $\mathbb{E}[N_{x,1}^z | (A_{1,\{x\}}^z)^c] = 1 + \mathbb{E}[N_{x,1}^x]$, $\mathbb{P}[A_{1,\{x\}}^z]$ é estimado pelo Lema 4.1 e que

$$\mathbb{E}[N_{x,1}^x] = \mathbb{E}[N_{x,1}^x | A_{1,\{x\}}^x] \cdot \mathbb{P}[A_{1,\{x\}}^x] + \mathbb{E}[N_{x,1}^x | (A_{1,\{x\}}^x)^c] \cdot \mathbb{P}[(A_{1,\{x\}}^x)^c].$$

Note que $\mathbb{E}[N_{x,1}^x | A_{1,\{x\}}^x] = 0$, $\mathbb{E}[N_{x,1}^x | (A_{1,\{x\}}^x)^c] = 1 + \mathbb{E}[N_{x,1}^x]$ e que $\mathbb{P}[A_{1,\{x\}}^x]$ é estimado pelo Lema 4.1. Obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{x,1}^x] &\leq 0 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c^+}{\log^2 d}\right) \cdot \mathbb{E}[N_{x,1}^x] \Rightarrow \\ \mathbb{E}[N_{x,1}^x] &\leq \frac{1}{2} \frac{C(d)}{\left(1 - \frac{C(d)}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $C(d) = \left(1 + \frac{c^+}{\log^2 d}\right)$. Por (4.15) e (4.16),

$$\mathbb{E}[N_{x,1}^z] \leq 0 + \left[1 + \frac{1}{2} \frac{C(d)}{\left(1 - \frac{C(d)}{2}\right)}\right] \cdot \frac{C(d)}{2} := C_2(d). \quad (4.17)$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}[T'] \leq \sum_{z \geq 1} \pi_z \sum_{x > M} \gamma_x \cdot C_2(d) = \sum_{x > M} \gamma_x \cdot C_2(d).$$

□

4.3 Resultado Final

Seja $D_{\mathbb{R}}[0, \infty)$ o conjunto das funções contínuas a direita $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e com limites a esquerda em \mathbb{R} , Λ o conjunto das funções contínuas Lipschitzianas tal que

$$\gamma(\lambda) = \sup_{s > t \geq 0} \left| \log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right| < \infty. \quad (4.18)$$

Definição 4.4 (Referência: [8]) A métrica de Skorohod é definida por

$$d(x, y) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty e^{-u} d(x, y, \lambda, u) du \right], \quad (4.19)$$

onde

$$d(x, y, \lambda, u) := \sup_{t \geq 0} |x(t \wedge u) - y(\lambda(t) \wedge u)| \wedge 1. \quad (4.20)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-u} d(x, y, \lambda, u) du &= \int_0^{T_\epsilon} e^{-u} d(x, y, \lambda, u) du + \int_{T_\epsilon}^\infty e^{-u} d(x, y, \lambda, u) du \\ &\leq \int_0^{T_\epsilon} e^{-u} d(x, y, \lambda, u) du + e^{-T_\epsilon} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Teorema 4.1 [10] Na norma de Skorohod,

$$Y^{\mathcal{M}} \Rightarrow Y_t, \text{ quando } |\mathcal{M}| \rightarrow \infty,$$

onde \Rightarrow indica convergência em distribuição.

Teorema 4.2 Dado $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[d(X^d, Y) > \epsilon] \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0,$$

onde d designa a métrica de Skorohod (Definição 4.4).

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[d(X^d, Y) > \epsilon] &\leq \mathbb{P}[d(X^d, X^{d, \mathcal{M}}) > \epsilon/3] \\ &+ \mathbb{P}[d(X^{d, \mathcal{M}}, Y^{\mathcal{M}}) > \epsilon/3] \\ &+ \mathbb{P}[d(Y^{\mathcal{M}}, Y) > \epsilon/3]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.1, $\mathbb{P}[d(Y^{\mathcal{M}}, Y) > \epsilon/3] \rightarrow 0$ quando $M = |\mathcal{M}| \rightarrow \infty$.

A seguir, estimaremos $\mathbb{P}[d(X^d, X^{d, \mathcal{M}}) \geq \epsilon/6]$. Pela Proposição 4.1, até o instante $T_\epsilon = -\log(\epsilon/6)$, os processos X^d e $X^{d, \mathcal{M}}$ permanecem juntos com probabilidade superior a

$$e^{-\frac{T_\epsilon \cdot C \cdot M}{\log^2 d \cdot \gamma_{|\mathcal{M}|}}}.$$

Sob este evento os dois processos coincidem ponto a ponto. Tome a função $\lambda \equiv$ identidade, ela satisfaz (4.18) e $\gamma(\lambda) = 0$. Temos

$$\begin{aligned} d(X^d, X^{d, \mathcal{M}}, \lambda, t) &= 0, & 0 < t < T_\epsilon \text{ e} \\ d(X^d, X^{d, \mathcal{M}}, \lambda, t) &\leq \int_{T_\epsilon}^{\infty} e^{-u} = \epsilon/6 & t > T_\epsilon. \end{aligned}$$

Por (4.19), obtemos

$$\mathbb{P}[d(X^d, X^{d,\mathcal{M}}) \leq \epsilon/3] \geq e^{-\frac{T_\epsilon \cdot C \cdot M}{\log^2 d \cdot \gamma_{|M|}}} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 1.$$

Resta estimarmos $\mathbb{P}[d(X^{d,\mathcal{M}}, Y^{\mathcal{M}}) > \epsilon/3]$. Tome λ_d como em (4.7) da Proposição 4.2 e utilize as notações de (4.6). Temos que λ_d é Lipschitziana.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[d(X^{d,\mathcal{M}}, Y^{\mathcal{M}}) > \epsilon/3] &= \mathbb{P}[\max(\gamma(\lambda_d), \int_0^\infty e^{-u} d(X^{d,\mathcal{M}}, Y^{\mathcal{M}}, \lambda_d, u) du) > \epsilon/3] \\ &\leq \mathbb{P}[\gamma(\lambda_d) > \epsilon/3] + \mathbb{P}[\int_0^\infty e^{-u} d(X^{d,\mathcal{M}}, Y^{\mathcal{M}}, \lambda_d, u) du > \epsilon/3]. \end{aligned}$$

Analogamente ao argumento acima, para estimarmos $d(X^{d,\mathcal{M}}, Y^{\mathcal{M}}, \lambda_d, u)$ basta olharmos para os processos $X^{d,\mathcal{M}}$ e $Y^{\mathcal{M}}$ até o instante T_ϵ . Pela Proposição 4.2, tome $T = T_\epsilon$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[d(X^{d,\mathcal{M}}, Y^{\mathcal{M}}, \lambda_d, T_\epsilon) < \epsilon/3] &\geq \mathbb{P}[\exists \lambda_d : \sup_{0 < t < T_\epsilon} |X^{d,\mathcal{M}}(t) - Y^{\mathcal{M}}(\lambda_d(t))| < K_\epsilon] \\ &\geq \left[1 - \frac{K_\epsilon}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)\right]^{T \cdot K_\epsilon \cdot \left(C^-(d) \cdot p^* \sum_{j=1}^{K_\epsilon-1} \gamma_j + \left(\frac{c^- K_\epsilon}{\gamma_{K_\epsilon} \cdot \log^2 d}\right)\right)^{-1} \\ &\xrightarrow{M \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty} 1, \end{aligned}$$

onde $K_\epsilon = \min\{K : \delta_k < \epsilon/3\}$.

A seguir, estimaremos $\mathbb{P}[\gamma(\lambda_d) > \epsilon/3]$. Note que

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda_d) &:= \sup_{s > t \geq 0} \left| \log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right| \\ &= \max_{1 \leq j \leq N_T} \log \frac{(\xi_{j+1}^K - \xi_j^{*K})}{(\tau_{j+1}^K - \tau_j^{*K})}, \end{aligned}$$

onde $N_T = \min\{j : \tau_j^{*K} > T\}$, ou seja, N_T é o número de saltos do processo $X^{d,K}$ até o instante T .

Observe que $A_j := (\xi_{j+1}^K - \xi_j^{*K})$ é o tempo gasto pelo processo X^d no conjunto $\{K+1, K+2, \dots, d\}$ entre a j -ésima e $(j+1)$ -ésima entrada ao conjunto

\mathcal{K} e $B_j := (\tau_{j+1}^K - \tau_j^{*K})$ é o tempo gasto pelo processo $X^{d,\mathcal{M}}$ no conjunto $\{K + 1, K + 2, \dots, M\}$ entre a j -ésima e $(j + 1)$ -ésima entrada ao conjunto \mathcal{K} .

Temos,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left[\max_{1 \leq j \leq N_T} \log \frac{A_j}{B_j} > \epsilon/3\right] = \\
& \sum_{n \geq 1} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathcal{K}} \mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^n \log \frac{A_j}{B_j} > \epsilon/3 \mid X_{(0)}^{d,\mathcal{K}} = x_0, X_{(1)}^{d,\mathcal{K}} = x_1, \dots, X_{(n)}^{d,\mathcal{K}} = x_n, N_T = n\right] \\
& \mathbb{P}\left[X_{(0)}^{d,\mathcal{K}} = x_0, X_{(1)}^{d,\mathcal{K}} = x_1, \dots, X_{(n)}^{d,\mathcal{K}} = x_n, N_T = n\right] \\
& \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathcal{K}} \sum_{j=1}^n \mathbb{P}\left[\log \frac{A_j}{B_j} > \epsilon/3 \mid X_{(j-1)}^{d,\mathcal{K}} = x_{j-1}\right] \\
& \mathbb{P}\left[X_{(0)}^{d,\mathcal{K}} = x_0, X_{(1)}^{d,\mathcal{K}} = x_1, \dots, X_{(n)}^{d,\mathcal{K}} = x_n, N_T = n\right].
\end{aligned}$$

Mas, note que $A_j = B_j + T_j$, onde T_j é o tempo gasto pelo processo $X^{d,\mathcal{M}}$ no conjunto $\{M + 1, M + 2, \dots, d\}$ na j -ésima entrada ao conjunto \mathcal{K} , portanto,

$$\mathbb{P}\left[\log \frac{A_j}{B_j} > \epsilon/3 \mid X_{(j-1)}^{d,\mathcal{K}} = x_{j-1}\right] \leq \mathbb{P}\left[T_j > \epsilon/3 B_j \mid X_{(j-1)}^{d,\mathcal{K}} = x_{j-1}\right]$$

No que segue, sem perda de generalidade, tome $j = 1$. Como $\mathbb{E}[T_1] \rightarrow 0$ quando $M \rightarrow \infty$, a massa de sua distribuição se aproxima de zero quando $M \rightarrow \infty$. Dado $\delta > 0$, considere δ_T suficientemente pequeno e M suficientemente grande tal que

$$\mathbb{P}[T_1 > \delta_T] < \delta/2.$$

Suponha que exista para M suficientemente grande tal que

$$\mathbb{P}[B_1 > \delta_T/\epsilon \mid X_{(0)}^{d,\mathcal{K}} = x_0] > 1 - \delta/2. \tag{4.22}$$

Mas se $T_1 < \delta_T$ e $B_1 > \delta_T/\epsilon$, então, $T_1/B_1 < \epsilon$. E pelas condições acima, obtemos que

$$\mathbb{P}[T_1/B_1 < \epsilon \mid X_{(0)}^{d,\mathcal{K}} = x_0] > 1 - \delta.$$

Portanto, resta mostrarmos que vale (4.22). Note que B_1 é dominado estocasticamente por B_W , o tempo em que o processo $(W_t)_{t \geq 0}$ passa em $\{K+1, \dots, M\}$ até atingir \mathcal{K} , onde $W_0 = x_0$ e $(W_t)_{t \geq 0}$ é o processo estocástico em tempo contínuo em que espera um tempo exponencial de média γ_x em $x \in \mathcal{M}$ e salta a y com probabilidade

$$p^*, \quad \text{se } y \notin \mathcal{K}$$

$$\frac{1 - (M - K)p^*}{K}, \quad \text{caso contrário,}$$

onde $p^* = \min_{i,j \in \mathcal{M}} p_{i,j}$, na qual $(p_{i,j})_{i,j \in \mathcal{M}}$ é a matriz de transição do processo $X^{d,M}$. Pelo Lema 4.1,

$$p^* \geq \frac{1}{M} \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d} \right).$$

Observe que

$$B_W = \sum_{x=K+1}^M \sum_{i=1}^{N'_x} T'_{i,x} \gamma_x,$$

onde N'_x é o número de saltos ao estado x até o processo W atingir \mathcal{K} e $T'_{i,x}$ são v.a.i.i.d. de distribuição exponencial de média 1. Note que para todo $x \in \{K+1, \dots, M\}$, N'_x tem distribuição geométrica de média

$$\frac{1}{1 - p^*},$$

e que o número de saltos até atingir \mathcal{K} tem distribuição geométrica de média

$$\frac{1}{\left(1 - \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d} \right) - \frac{K}{M} \right)}$$

crescente em M , ou seja, a probabilidade de o processo W saltar ao conjunto $\mathcal{M} - \mathcal{K}$ antes de saltar ao conjunto \mathcal{K} converge a zero quando M cresce. Portanto, a probabilidade de B_W assumir o valor zero converge a zero quando M cresce.

Obtemos, finalmente, que dado $\delta > 0$, a probabilidade de B_W ser maior que δ é tão grande quanto se queira ao tomar M suficientemente grande.

Obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\max_{1 \leq j \leq N_T} \log \frac{A_j}{B_j} > \epsilon/3\right] &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathcal{K}} n \cdot \frac{\log(1 + C'(d, M))}{\epsilon/3} \\
&\quad \mathbb{P}[X_{(0)}^{d, \mathcal{K}} = x_0, X_{(1)}^{d, \mathcal{K}} = x_1, \dots, X_{(n)}^{d, \mathcal{K}} = x_n, N_T = n] \\
&= \delta_{\epsilon/3} \cdot \sum_{n \geq 1} n \cdot \mathbb{P}[N_T = n] \\
&= \delta_{\epsilon/3} \cdot \mathbb{E}[N_T].
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Resta estimarmos $\mathbb{E}[N_T]$. Veja (4.13), (4.14) no Lema 4.2.

Temos

$$\mathbb{E}[N_T] \leq T \cdot \left(\frac{1}{K} C^-(d) \cdot p^* \sum_{j=1}^{K-1} \gamma_j + \left(\frac{c^-}{\log^2 d} \right) \gamma_K \right)^{-1}, \tag{4.24}$$

com $C^-(d) = \left(1 - \frac{c^-}{\log^2 d}\right)$. Note que $\mathbb{E}[N_T]$ é limitado superiormente quando $d \rightarrow \infty$ e $M \rightarrow \infty$.

Finalmente por (4.24) e (4.23),

$$\mathbb{P}\left[\max_{1 \leq j \leq N_T} \log \frac{A_j}{B_j} > \epsilon/3\right]$$

é tão pequeno quando se queira para d e M suficientemente grandes, como precisávamos.

□

Capítulo 5

Convergência do MAB ao K -processo

Neste capítulo estudamos a convergência de um PAS no hipercubo d -dimensional ao K -processo, onde as taxas $\gamma^{(d)}$ convergem a uma família enumerável de taxas γ somáveis, onde a convergência significa que para toda seqüência de estados $(x(d))_{d \in \mathcal{V}_d}$ tal que

$$|x'(d) - x'(d+1)| < \frac{1}{2^d},$$

temos que $\gamma_{x(d)}^{(d)}$ é convergente a algum valor de γ , onde $x'(d)$ é a expansão diádica no intervalo $[0, 1]$ associado ao vértice x do hipercubo d -dimensional.

Como consequência, pela Proposição 3.1 de [9], como as taxas do Modelo de Armadilhas de Bouchaud são convergentes em uma escala apropriada, obtemos que em uma escala correta o MAB no hipercubo converge ao K -processo.

Considere H^d um PAS no hipercubo d -dimensional com taxas $(\gamma_x^{(d)})_{x \in \mathcal{V}_d}$ convergentes a γ somável. Rotule os estados do hipercubo como citado no início do Capítulo 4. Então,

Teorema 5.1 *Dado $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}[d(H^d, Y) > \epsilon] \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0,$$

onde d designa a métrica de Skorohod (Definição 4.4).

Demonstração.

A prova é análoga à do Teorema 4.2. As estimativas dos Lemas 4.3 e 4.2 são mantidas. Pelo fato de as taxas de $X^{d, \mathcal{M}}$ serem diferentes das taxas do $Y^{\mathcal{M}}$, na utilização da Proposição 4.1 devemos apenas ajustar os tempos de espera por funções λ_d . Considere a seguinte notação:

- $\delta_0 = 0$ e δ_j o instante do j -ésimo salto de $X^{d, \mathcal{M}}$;
- $\eta_0 = 0$ e η_j o instante do j -ésimo salto de $Y^{\mathcal{M}}$, $k \in \mathbb{N}$.

Seja $\lambda_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$\lambda_d(t) = \begin{cases} \delta_k + (t - \eta_k) \frac{(\delta_{j+1} - \delta_j)}{(\eta_{j+1} - \eta_j)}, & \text{se } t < \min(T, T^*), \eta_j < t \leq \eta_{j+1}, \text{ para algum } j \in \mathbb{N}, \\ \delta_{j^*} - \eta_{j^*} + t & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $T^* = \inf\{t : X^{d, \mathcal{M}} = Y^{\mathcal{M}}\}$ e $j^* = \min\{j : X_{\delta_j}^{d, \mathcal{M}} = Y_{\eta_j}^{\mathcal{M}}\}$. A Figura 5.1 ilustra as definições. Pelo Lema 4.2 quando $d \rightarrow \infty$, $T^* \rightarrow \infty$, então, sob a norma de Skorohod, basta compararmos $X^{d, \mathcal{M}}$ e $Y^{\mathcal{M}}$ até o instante T . Porém, como as taxas dos estados \mathcal{M} convergem, o tempo de espera $(\delta_{j+1} - \delta_j)$ convergem quase certamente a $(\eta_{j+1} - \eta_j)$, o que implica que a condição (4.18) é respeitada. Obtém-se então, que na norma de Skorohod $X^{d, \mathcal{M}}$ converge a $Y^{\mathcal{M}}$ quando $d \rightarrow \infty$ em probabilidade. Quanto ao uso da Proposição 4.2, não há modificações.

□

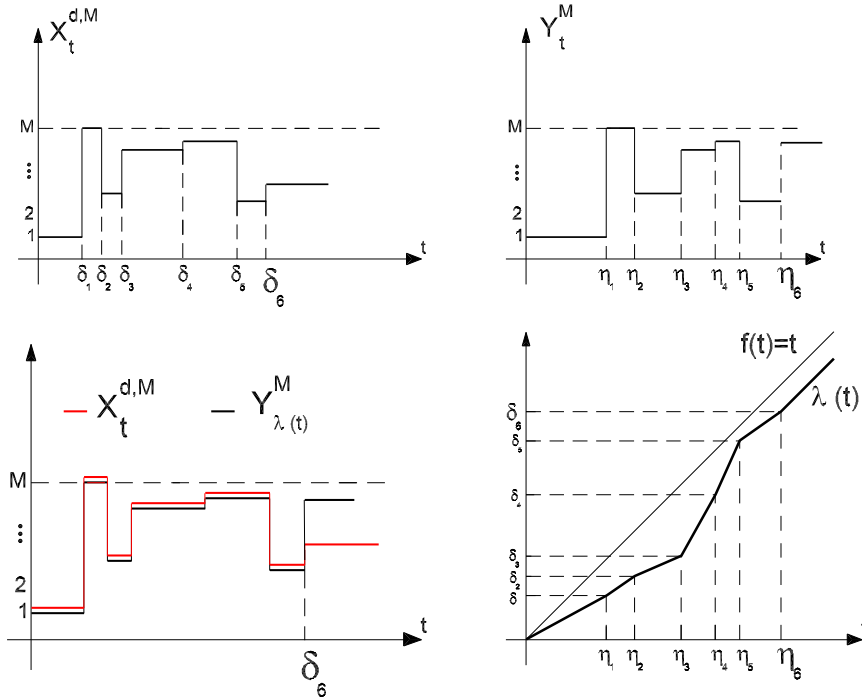


Figura 5.1: Representação Gráfica da Função $\lambda_d(t)$

5.1 Reescalamiento do MAB

Nesta seção obtemos a convergência na escala apropriada, no sentido apropriado, do MAB ao K -processo. O resultado está estabelecido no Teorema 5.2, mas poderia ser estendido a qualquer modelo cujas taxas convirjam a taxas somáveis em um reescalamiento apropriado.

Começaremos por descrever como associar τ , os tempos médio de espera do Modelo de Bouchaud aos vértices do hipercubo, cuja distribuição é dada por (2.2). Para maiores detalhes sobre as próximas afirmações, veja a Seção 3 de [9]. Considere um Processo de Lévy $Y = \{Y_x, x \in [0, 1)\}$, $Y_0 = 0$ com incrementos independentes e estacionários tal que

$$\mathbb{E}[e^{ir(Y_{x+x_0}-Y_{x_0})}] = e^{\alpha x \int_0^\infty (e^{itw}-1)w^{-1-\alpha}dw}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 0.$$

Para qualquer $x \geq 0$. É possível representar Y em termos de uma medida aleatória

$$Y = \sum_{j \geq 1} \gamma_j \delta_{x_j},$$

onde $\{(x_j, \gamma_j), j \geq 1\}$ são eventos de um Processo Pontual de Poisson não homogêneo em $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$ com densidade $dy \alpha w^{-(1+\alpha)} dw$. Seja

$$V_{x^d}^{(d)} = \max_{j: x_j \in I_{x^d}^{(d)}} \gamma_j, \quad x^d \in \mathcal{V}^d,$$

onde $I_{x^d}^{(d)}$ é o intervalo associado à expansão diádica de x^d no intervalo $[0, 1]$. Tome

$$\bar{\gamma}_{x^d}^{(d)} = g_d(V_{x^d}^{(d)}) \tag{5.2}$$

e

$$c_d = (\inf\{t \geq 0 : \mathbb{P}[\tau_0 > t] < 1/2^d\})^{-1},$$

onde g_d é definida como segue. Seja $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo

$$\mathbb{P}[V_1 > G(x)] = \mathbb{P}[\tau_0 > x], \quad \forall x \geq 0,$$

e $g_d : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definido por

$$g_d(x) = c_d G^{-1}(2^{d/\alpha} x), \quad \forall x \geq 0,$$

onde τ_0 é como em (2.2). Pela Proposição 3.1 de [9],

$$c_d \cdot \tau_0 \approx \bar{\gamma}, \tag{5.3}$$

onde \approx significa igualdade de distribuições e quase certamente

$$\bar{\gamma} \rightarrow \gamma, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < \infty. \tag{5.4}$$

onde \rightarrow significa a convergência vaga (Veja Seção 3 de [9]).

Teorema 5.2 *Seja $(\tilde{X}^d(c_d.t))_{t>0}$ um MAB no hipercubo d -dimensional, então, dado $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}[d(X^d(c_d.t), Y(t)) > \epsilon] \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0,$$

onde d designa a métrica de Skorohod (Definição 4.4).

O resultado segue de (5.3), (5.4) e Teorema 5.1.

Referências Bibliográficas

- [1] Ben Arous, G.; Cerný, J. (2006) Dynamics of trap models, *Lecture Notes for Les Houches Summer School 'Mathematical statistical physics'*
- [2] Ben Arous, G.; Gayrard, V. (2006) Elementary potential theory on the hypercube, <http://www.arxiv.org/math.PR/0611178>
- [3] Bertoin, J. (1996) Lévy Processes, Cambridge University Press
- [4] Bouchaud, J.P. (1992) Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems, *J. Phys. I France* **2**, 1705-1713
- [5] Bouchaud, J. P.; Cugliandolo, L.; Kurchan, J.; Mezard, M. (1998) *Out-of-equilibrium dynamics in spin-glasses and other glassy systems. In Spin-Glasses and Random Fields*, A. P. Young, ed. (World Scientific, Singapore).
- [6] Derrida, B. (1980) Random-energy model: limit of a family of disordered models, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 79-82
- [7] Edwards, S; Anderson, P.W. (1975) Theory of spin glasses, *J. Phys. F* **5**, 965-974
- [8] Ethier, S.N.; Kurtz, T.G. (1986) Markov processes. Characterization and convergence. Wiley

- [9] Fontes, L.R.G.; Isopi, M; Newman, C. M. (2002) Random walks with strongly inhomogeneous rates and singular diffusions: convergence, localization and aging in one dimension, *Ann. Probab.* **30**, 579-604
- [10] Fontes, L.R.G.; Mathieu, P. (2005) K-processes, scaling limit and aging for the Bouchaud trap model, <http://www.arxiv.org/math.PR/0603198>.
- [11] Lèvy, P. (1951) Systèmes markoviens et stationnaires. Cas dénombrable, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3)**68**, 327-381
- [12] Nordblad, P; Svedlindh, P. (1998) *Spin Glasses and Random Fields*, ed. A. P. Young (World Scientific, Sigapore), 1-27; e Bouchaud, J.-P; Cugliandolo, L.F.; Kurchan, J.; Mezard, M., *ibid.*, 161-223.
- [13] Rinn, B.; Mass, P.; Bouchaud, J.P. (2000) Multiple scaling regimes in simple aging models, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5403-5406
- [14] Sherrington,D; Kirkpatrick,S. (1975) Solvable model of a spin-glass, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1792-1796