

**Um modelo Bayesiano
semi-paramétrico para o
monitoramento “on-line” de
qualidade de Taguchi
para atributos**

Miriam Harumi Tsunemi

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Luís Gustavo Esteves

Co-Orientador: Prof. Dr. Sergio Wechsler

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES/CNPq

São Paulo, abril de 2009

Um modelo Bayesiano semi-paramétrico para o monitoramento “on-line” de qualidade de Taguchi para atributos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Miriam Harumi Tsunemi e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Luís Gustavo Esteves (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. José Galvão Leite - IME-USP.
- Profa.Dra. Linda Lee Ho - EP-USP.
- Prof. Dr. Josemar Rodrigues - ICMC-USP
- Prof. Dr. Franscisco Louzada Neto - UFSCar

Agradecimentos

À Deus por me abençoar desde o momento que nasci.

Aos meus pais, que me apoiaram incondicionalmente em todo esse período.

Ao prof. Dr Luís Gustavo Esteves pela enorme paciência e extrema dedicação.

Aos meus primos Akemi e Mario Sato que me acolheram, proporcionando um ambiente propício para morar e me dedicar aos estudos em São Paulo.

Aos amigos que em diversos momentos me apoiaram e proporcionaram momentos de alegria: Eliza, Shirley, João, Silvia, Johnny, Ivan, Érica, Fabiana, Raydonal, Alexssandro, Adriana, Yumi, Glasy, Fábila, Betsabé, Luzmery, Marcos, Daniela, Daniel, Rogério, Claudinei, Gerard, Gisela, Jaqueline, dona Elza.

Aos professores do departamento de Estatística e Matemática, em especial, a prof Viviana Giampaoli que acompanhou o meu trabalho em estágios de aperfeiçoamento no ensino.

Às agências financiadoras Capes e CNPq.

Ao instituto IME-USP.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação de Estatística.

Resumo

Neste trabalho, propomos um modelo alternativo para o monitoramento “on-line” da qualidade de Taguchi para atributos, sob o enfoque Bayesiano semi-paramétrico. Este modelo contempla o cenário em que a sequência de frações não-conformes no decorrer de um ciclo do processo de produção aumenta gradativamente (situação comum, por exemplo, quando o desgaste de um equipamento é gradual), diferentemente dos modelos de Taguchi, Nayebpour e Woodall e Nandi e Sreehari (1997), que acomodam sequências de frações não-conformes assumindo no máximo três valores, e de Nandi e Sreehari (1999) e Trindade, Ho e Quinino (2007) que contemplam funções de degradação mais simples. O desenvolvimento é baseado nos trabalhos de Ferguson e Antoniak para o cálculo da distribuição a posteriori de uma medida P desconhecida, associada a uma função de distribuição F desconhecida que representa a sequência de frações não-conformes ao longo de um ciclo, supondo, a priori, mistura de Processos Dirichlet. A aplicação consiste na estimação da função de distribuição F e as estimativas de Bayes são analisadas através de alguns casos particulares.

Palavras-chave: Monitoramento “on-line” de Taguchi para atributos, Inferência Bayesiana não-paramétrica, mistura de Processos Dirichlet.

Abstract

In this work, we propose an alternative model for Taguchi's On-Line Quality-Monitoring Procedure for Attributes under a Bayesian nonparametric framework. This model may be applied to production processes the sequences of defective fractions during a cycle of which increase gradually (for example, when an equipment deteriorates little by little), differently from either Taguchi's, Nayebpour and Woodall's and Nandi and Sreehari's models that allow at most three values for the defective fraction or Nandi and Sreehari's and Trindade, Ho and Quinino's which take into account simple deterioration functions. The development is based on Ferguson's and Antoniak's papers to obtain a posteriori distribution for an unknown measure P , associated with an unknown distribution function F that represents the sequence of defective fractions, considering a prior mixture of Dirichlet Processes. The results are applied to the estimation of the distribution function F and the Bayes estimates are analysed through some particular cases.

Keywords: Taguchi's On-Line Quality-Monitoring Procedure for Attributes, nonparametric Bayesian Inference, mixture of Dirichlet Processes.

Sumário

Lista de Abreviaturas	vi
Lista de Símbolos	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xi
1 Modelos econômicos em Controle de Qualidade	1
1.1 Introdução	1
1.2 Procedimento de monitoramento <i>on-line</i> de Taguchi	3
1.3 Modelo de Taguchi	3
1.4 Modelo de Nayebpour e Woodall	5
2 Inferência Bayesiana não-paramétrica	12
2.1 Introdução	12
2.2 Distribuição de Dirichlet	16
2.3 Processo Dirichlet	20
2.4 Mistura de processos Dirichlet	28

3	Modelo alternativo ao de Taguchi	33
3.1	Introdução	33
3.2	Descrição do modelo Bayesiano	34
3.3	Distribuição a posteriori de P dado $\tau = k$	39
3.4	Estimação da função de distribuição $F(t)$	48
4	Exemplos Numéricos	52
4.1	Cálculo da estimativa de $F(t)$ dado $\tau = 1$	52
4.2	Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$	57
4.3	Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = k$	69
4.4	Análise Gráfica das estimativas de Bayes de $F(t)$	71
4.4.1	Estimativas de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 1$ e 2	71
4.4.2	Estimativas de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = k$	83
5	Conclusões	93
5.1	Considerações Finais	93
5.2	Sugestões para Pesquisas Futuras	94
A	Algoritmos em R	95
A.1	Estimativas de Bayes de $F(t)$ com a medida degenerada	95
A.2	Estimativas de Bayes de $F(t)$ com medida exponencial	98
A.3	Estimativas de Bayes de $F(t)$ com medida exponencial	102
A.4	Estimativas de Bayes de $F(t)$ com medida exponencial	108
	Referências Bibliográficas	114

Lista de Abreviaturas

- PD Processo Dirichlet.
DIR Distribuição Dirichlet.

Lista de Símbolos

μ	parâmetro do Processo Dirichlet.
η	Ponto de mudança do processo de produção.
θ	limite da sequência de frações não-conformes ao longo do tempo.
τ	números de inspeções realizadas em um ciclo.
ρ	probabilidade do processo passar para o estado fora de controle.
m	intervalo entre inspeções no processo de produção.
X_i	variável aleatória que representa o estado de conformidade do i -ésimo item produzido $i \geq 1$.
P	medida desconhecida.
\mathbf{P}	família de medidas sobre $(\mathfrak{R}_+, \mathcal{B}(\mathfrak{R}_+))$.
$x^{(k)}$	$\prod_{j=0}^{k-1} (x + j)$.
$[x]$	maior inteiro menor ou igual a x .
$]x[$	menor inteiro maior ou igual a x .

Lista de Figuras

2.1	Representação Gráfica da Distribuição Bernoulli (p) como uma realização de um processo estocástico	16
3.1	Representação do procedimento de monitoramento de controle de qualidade de Taguchi	37
3.2	Gráfico de Influência do modelo proposto 3.3	37
3.3	Sequência de frações não-conformes em função do tempo t , $t > 0$, dados o ponto de mudança η e o limite superior θ	38
4.1	Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\rho \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$, $m = 5$: (1) $\theta \sim Beta(0.1, 1)$ e (2) $\theta \sim Beta(5, 1)$	72
4.2	Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\rho \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$, $m = 5$: (1) $\theta \sim Beta(1, 0.1)$ e (2) $\theta \sim Beta(1, 5)$	73
4.3	Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$, $m = 5$: (1) $\rho \sim Beta(0.1, 1)$ e (2) $\rho \sim Beta(5, 1)$	74
4.4	Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$, $m = 5$: (1) $\rho \sim Beta(1, 0.1)$ e (2) $\rho \sim Beta(1, 5)$	75
4.5	Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$ e $m = 2, 10$	76

- 4.6 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\rho \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $m = 5$: (1) $\theta \sim Beta(0.1, 1)$ e (2) $\theta \sim Beta(5, 1)$. 77
- 4.7 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\rho \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $m = 5$: (1) $\theta \sim Beta(1, 0.1)$ e (2) $\theta \sim Beta(1, 5)$. 78
- 4.8 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $m = 5$: (1) $\rho \sim Beta(0.1, 1)$ e (2) $\rho \sim Beta(5, 1)$. 79
- 4.9 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $m = 5$: (1) $\rho \sim Beta(1, 0.1)$ e (2) $\rho \sim Beta(1, 5)$. 80
- 4.10 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $m = 5$ e para cada $\eta = \zeta$: (1) $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.1(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$ e (2) $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$ 81
- 4.11 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $m = 5$, (1) $\mu_\zeta(t, \infty) = 0.1e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$ e (2) $\mu_\zeta(t, \infty) = 5e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$ 82
- 4.12 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$ e $m = 2, 10$ 83
- 4.13 Estimativas de Bayes de $F(t)$, dado $\tau = 2, 5, 10, 20$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = \Lambda I_{(\cdot)}(\zeta)$ e $m = 5$ 84
- 4.14 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $m = 5$: (1) $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.3(t-\zeta)}I_{(t, \infty)}$; (2) $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.7(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$; (3) $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-5(t-\zeta)}I_{(t, \infty)}$ 85
- 4.15 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.1(t-\zeta)}I_{(t, \infty)}$ 86
- 4.16 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $m = 5$: (1) $\mu_\zeta(t, \infty) = 0.3e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$; (2) $\mu_\zeta(t, \infty) = 0.7e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$; (3) $\mu_\zeta(t, \infty) = 5e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$ 87

-
- 4.17 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim \text{Beta}(1, 1)$,
 $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$: (1) $\rho \sim \text{Beta}(0.3, 1)$ (2) $\rho \sim \text{Beta}(0.7, 1)$;
(3) $\rho \sim \text{Beta}(5, 1)$ 88
- 4.18 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim \text{Beta}(1, 1)$,
 $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$: (1) $\rho \sim \text{Beta}(1, 0.3)$ (2) $\rho \sim \text{Beta}(1, 0.7)$;
(3) $\rho \sim \text{Beta}(1, 5)$ 89
- 4.19 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\rho \sim \text{Beta}(1, 1)$,
 $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$: (1) $\theta \sim \text{Beta}(0.3, 1)$ (2) $\theta \sim \text{Beta}(0.7, 1)$;
(3) $\theta \sim \text{Beta}(5, 1)$ 90
- 4.20 Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\rho \sim \text{Beta}(1, 1)$,
 $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$: (1) $\theta \sim \text{Beta}(1, 0.3)$ (2) $\theta \sim \text{Beta}(1, 0.7)$;
(3) $\theta \sim \text{Beta}(1, 5)$ 92

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Modelos econômicos em Controle de Qualidade

1.1 Introdução

Em um processo de produção industrial, é essencial o estudo da qualidade dos itens produzidos, pois a produção de muitos itens não-conformes certamente poderá causar muito prejuízo à indústria. Um produto é considerado não-conforme se não atende ao critério exigido pela empresa. Usualmente, o procedimento de controle *on-line* para atributos utilizado em processos de produção é a carta-p, baseada nas frações defeituosas observadas em amostras selecionadas periodicamente do processo. Resumidamente, o diagnóstico de perda de controle do processo é baseado na linha central e nos limites inferior e superior de controle. As especificações dos tamanhos das amostras, da amplitude da carta e do intervalo de tempo entre coletas sucessivas de amostras são determinadas por critérios de desempenho de natureza estatística e, implicitamente, econômica (a construção e a operação das cartas-p são detalhadas em Montgomery [38]).

Uma outra abordagem é baseada em critérios econômicos. Duncan [17] foi o primeiro a considerar delineamentos econômicos para as cartas de controle. Gibra [29], por sua vez, apresentou um modelo para delineamento econômico de cartas np aplicando um mecanismo de falha com distribuição exponencial de média $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$. Ainda sob o modelo exponencial, Barlow et al [2] calcularam o intervalo entre inspeções ótimo considerando custos entre a falha do processo e a detecção do desajuste. Por sua vez, Taguchi [48] e Taguchi, Elsayed e Hsiang [49]

propuseram procedimentos de monitoramento *on-line* para atributos baseados essencialmente em aspectos econômicos, mais precisamente, em custos associados com o processo de produção (custo de produção de uma unidade defeituosa, custo de amostragem e inspeção de um item e custo de ajuste do processo). Taguchi et al. [49] então consideraram duas situações: (1) o caso em que o processo de produção sai de controle e passa a produzir apenas itens não-conformes e (2) o caso em que a fração de itens defeituosos passa do valor inicial zero (controle) para algum valor positivo. Em ambas as situações, a estratégia de monitoramento consiste em inspecionar o último de cada m itens produzidos e ajustar o processo para a sua condição inicial assim que um item defeituoso for observado.

Nayebpour e Woodall [41] reexaminaram a questão sob o contexto da teoria da renovação, incorporando à proposta original de Taguchi uma distribuição de probabilidade geométrica para o tempo de falha do processo. Recentemente, Borges, Ho e Turnes [8] abordaram o problema levando em consideração a possibilidade de erros de diagnóstico. Em todos esses trabalhos, as expressões obtidas para o intervalo ótimo entre inspeções dependem essencialmente dos mesmos custos associados ao processo de produção e dos valores desconhecidos dos parâmetros dos modelos estatísticos correspondentes. Mais tarde, Nandi e Sreehari [39] propuseram um outro modelo para o monitoramento no qual duas possíveis causas podem levar o processo a produzir itens defeituosos. Num ciclo, estes fatores concorrem entre si e o custo esperado é calculado considerando três possíveis estágios de produção: quando o processo está sob controle, quando passa a produzir uma fração positiva de itens não-conformes e quando passa a produzir apenas itens defeituosos. Eles denominam essa situação como Caso III de Taguchi: supondo distribuições geométricas independentes para os mecanismos de falhas do processo, generalizam, num certo sentido, os Casos I e II de Taguchi. Nesse trabalho, Nandi e Sreehari [39] sugerem o desenvolvimento de um modelo que englobe o caso em que a fração não-conforme aumenta gradativamente ao longo de um ciclo de produção como tema para pesquisas futuras. Os trabalhos de Nandi e Sreehari [40] e Trindade, Ho e Quinino [52] apresentam modelos para o problema de obtenção do intervalo entre inspeções considerando que há deterioração gradual da qualidade do processo de produção. A proposta de um modelo mais geral com essa característica é o objetivo principal deste trabalho.

Neste capítulo, apresentamos, resumidamente, os resultados obtidos por Taguchi et. al. [49]

e Nayebpour e Woodall [41].

1.2 Procedimento de monitoramento *on-line* de Taguchi

O procedimento *on-line* é caracterizado por inspeções periódicas dos itens durante a produção para verificar se as características de qualidade atendem às exigências estabelecidas. O item é considerado como conforme quando satisfaz aos critérios exigidos, caso contrário é classificado como não-conforme. Além disso, supõe-se que existe um atraso de l itens entre a detecção da mudança do processo e a interrupção para seu ajuste .

Taguchi et. al. [49] consideraram dois casos no estudo do procedimento de monitoramento do processo de produção. O primeiro refere-se à situação em que o processo produz apenas itens conformes (sob estado de controle) e, após uma mudança, passa a produzir somente itens não-conformes. Num outro cenário, a probabilidade de produzir um item não-conforme salta para um valor desconhecido $\theta > 0$. Nestes dois casos, Taguchi et. al. [49] calcularam o custo esperado por item produzido em um ciclo e o valor do intervalo de inspeção que o minimiza. Na próxima seção, descrevemos apenas o segundo caso, visto que o primeiro é um caso particular deste quando $\theta = 1$.

1.3 Modelo de Taguchi

Taguchi et.al. [49] especificaram os seguintes custos de produção para determinar o custo esperado por item produzido em um ciclo:

- C_D : custo previsto quando um item não-conforme não é identificado e prossegue para outros estágios de produção;
- C_d : custo de um item não-conforme produzido e identificado;
- C_{insp} : custo de amostragem e inspeção de um item produzido;
- C_a : custo de ajuste do processo de produção.

Em geral, considera-se que o custo atribuído a um item não-conforme não identificado seja muito maior que o custo do item não-conforme detectado. Isso pode ser justificado, dentre

outros motivos, pelo prejuízo decorrente da insatisfação do cliente ao receber um produto fora dos padrões de especificação.

Taguchi et. al. [49] definem o custo de itens não-conformes produzidos em um ciclo, C_{d+D} , por

$$C_{d+D} = \left\{ \frac{(m+1)\theta^2}{2} + m\theta(1-\theta) \right\} C_d + \left\{ \frac{(m+1)(1-\theta)\theta}{2} + m(1-\theta)^2 \right\} C_D, \quad (1.1)$$

onde m é o intervalo entre inspeções e θ é a probabilidade de produção de itens não-conformes após a mudança do processo.

Segundo Taguchi et. al. [49], o fator que multiplica C_d representa o número médio de itens não-conformes produzidos desde o ponto de mudança até a detecção da fuga de controle do processo e o fator que multiplica C_D é o número médio de itens não-conformes produzidos e não detectados desde o ponto de mudança até o momento que o item não-conforme é amostrado. Esses valores médios se tornaram muito próximos se considerarmos se θ é próximo de $\frac{1}{2}$ e se $\theta = 0,5$, temos que os dois valores médios são equivalentes.

O custo esperado do procedimento de controle por item produzido é, portanto, dado por

$$L = \frac{C_{insp}}{m} + \frac{m+1}{\bar{u}} C_D + \frac{C_a}{\bar{u}} + \frac{lC_d}{\bar{u}}, \quad (1.2)$$

em que \bar{u} representa o número médio de itens produzidos em um ciclo.

Taguchi et. al. [49] justificam a expressão anterior através dos seguintes argumentos:

- $\frac{C_{insp}}{m}$ é o custo esperado por item inspecionado. Logo, a cada m itens produzidos há um acréscimo de C_{insp} no custo do procedimento de controle;
- $\frac{m+1}{\bar{u}} C_D$ representa o número de itens não-conformes produzidos por ciclo, onde \bar{u} representa o número médio de itens produzidos em um ciclo. Segundo Ramos [42], Taguchi obteve este termo supondo que θ é aproximadamente igual a zero e substituindo C_d por $2C_D$ no custo esperado obtido para o Caso I.
- $\frac{C_a}{\bar{u}}$ é o custo de ajuste do processo por número de itens produzidos;

- $l\frac{C_d}{\bar{u}}$ é o custo dos itens não-conformes produzidos durante o atraso.

Segundo Taguchi et. al. [49], o intervalo entre inspeções ótimo, aquele que minimiza o custo esperado, calculado através da primeira derivada de (1.2), é dado por

$$m^* = \sqrt{\frac{2(\bar{u} + l)C_{insp}}{2C_D - \frac{C_a}{\bar{u}}}}. \quad (1.3)$$

Souza [46] apontou alguns problemas no desenvolvimento da metodologia de Taguchi. Em especial, Taguchi não detalha um modelo probabilístico para o cálculo do intervalo entre inspeções ótimo, prejudicando a argumentação teórica de seus resultados e das justificativas para a construção de (1.2)

1.4 Modelo de Nayebpour e Woodall

Taguchi et. al. [49] apresentaram uma solução inicial para o problema do cálculo do intervalo entre inspeções ótimo que minimiza o custo esperado em um ciclo de produção, porém sem explicitar um modelo estatístico. Por sua vez, Nayebpour e Woodall [41] analisaram o mesmo problema incorporando a distribuição Geométrica para o mecanismo de falha. Este trabalho foi importante visto que atribuiu um modelo teórico para o momento de mudança do processo, ao contrário do procedimento proposto por Taguchi et.al. [49]. Em seguida, Belem [3] e Borges et.al. [8] representaram o modelo proposto por Nayebpour e Woodall [41] como uma cadeia de Markov e corrigiram alguns de seus resultados, tais como o custo esperado em um ciclo de produção, obtidos através da teoria da renovação. Borges et. al. [8] avaliaram o cálculo do intervalo de inspeção ótimo supondo a teoria da Renovação e a possibilidade de erro de diagnóstico durante o processo de monitoramento da qualidade.

Esta seção é dedicada aos resultados principais de Nayebpour e Woodall [41], ou seja, ao cálculo do custo esperado por item produzido para o procedimento *on-line* de Taguchi, supondo distribuição Geométrica para o ponto de mudança do processo, isto é, para o instante em que a fração não-conforme salta para um valor positivo desconhecido (Caso II de Taguchi).

Sejam X_i a variável aleatória que representa o estado de conformidade do i -ésimo item

produzido, $i \geq 1$, e θ_i a probabilidade desse i -ésimo item ser não-conforme. Ou seja, dado θ_i ,

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ com probabilidade } \theta_i \\ 0 & , \text{ com probabilidade } 1 - \theta_i. \end{cases}$$

Supõe-se também que $X_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, ou seja, o processo de produção inicia sob a condição de controle e representamos então o processo pelo par $\{(X_i, \Theta_i) : i \geq 0\}$, em que Θ_i é a variável aleatória que representa a fração não-conforme do processo no instante que o i -ésimo item é produzido. O modelo proposto por Nayebpour e Woodall [41] para a sequência de frações não-conformes foi, então, representado por Belem [3] e Borges et. al. [8] como uma cadeia de Markov em que o espaço de estados é $E = \{0, \theta\}$ e a matriz de transição definida como

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \rho & \rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

onde ρ é a probabilidade do processo mudar para o estado fora de controle. Assim, se o processo está sob controle, $\Theta_i = 0$, a probabilidade de produzir um item não-conforme é $P\{X_i = 1/\Theta_i = \theta_i\} = \theta_i = 0$.

Definindo $\eta = \inf\{i : \Theta_i = \theta\}$ como a variável que representa o instante de produção em que o processo muda para o estado fora de controle (ou seja, o ponto de mudança), Nayebpour e Woodall [41] assumiram que η possui distribuição Geométrica com parâmetro ρ , pois esta distribuição normalmente é aplicada em situações envolvendo tempos de “espera” discretos: no cenário proposto por Taguchi, esta variável pode ser vista como o número de itens produzidos até o desajuste do processo.

Sejam T a variável aleatória que representa o número de peças produzidas em um ciclo e τ o número de inspeções realizadas nesse ciclo. Assim, uma forma de definir T a partir do número de inspeções e do intervalo entre inspeções pode ser

$$T = m\tau + l, \quad (1.5)$$

onde m é o intervalo de inspeção e l é o atraso entre a detecção do desajuste do processo e a interrupção para a manutenção.

Na sequência, é determinada a distribuição de probabilidade de τ dados θ e ρ . Devemos salientar que, nas expressões que seguem, as indicações de condicionamento em θ e ρ são omitidas apenas para não sobrecarregar a notação. Logo,

$$\begin{aligned}
 P\{\tau = k\} &= \sum_{j=1}^{mk} P\{\tau = k, \eta = j\} \\
 &= \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{j=tm+1}^{(t+1)m} P\{\tau = k | \eta = j\} P\{\eta = j\} \\
 &= \sum_{t=0}^{k-1} (1-\rho)^{mt} (1 - (1-\rho)^m) \theta (1-\theta)^{k-t-1}.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Observe que a expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 P\{\tau = k\} &= \sum_{t=0}^{k-1} P\{X = t\} P\{Y = k - t\} \\
 &= P\{X + Y = k\},
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

em que $X \sim \text{Geom}(1 - (1 - \rho)^m)$, $X \geq 0$, e $Y \sim \text{Geom}(\theta)$, $Y \geq 1$, com X e Y independentes, dados θ e ρ . Temos que a variável X representa as inspeções efetuadas enquanto o processo estava sob controle ($X \geq 0$) e Y é a variável que indica o número de inspeções executadas depois que o processo mudou para o estado fora de controle ($Y \geq 1$). Assim,

$$E(\tau) = E(X + Y) = \frac{(1-\rho)^m}{1 - (1-\rho)^m} + \frac{1}{\theta}. \tag{1.8}$$

Logo, a partir de (1.5) e aplicando o resultado (1.8), temos que, dados θ e ρ ,

$$E(T) = \frac{m(1-\rho)^m}{1 - (1-\rho)^m} + \frac{m}{\theta} + l, \tag{1.9}$$

chegando ao resultado de Nayebpour e Woodall.

O próximo passo é o cálculo do custo esperado pela produção de itens não-conformes. Aqui, estamos supondo que não há inspeção retrospectiva, diferentemente de Taguchi et.al [49]. Como X_i é a variável que indica o estado de conformidade do i -ésimo item, $i \geq 1$, o número médio de itens não-conformes produzidos, dados θ e ρ , pode ser calculado via condicionamento em η e τ . Assim,

$$E \left(\sum_{i=1}^{m\tau+l} X_i \right) = E_{(\eta,\tau)} \left\{ E \left(\sum_{i=1}^{m\tau+l} X_i | (\eta, \tau) \right) \right\}, \quad (1.10)$$

em que η é a variável que representa o ponto de mudança do processo de produção.

Observe que, dados θ e ρ ,

$$E \left(\sum_{i=1}^{m\tau+l} X_i | \eta = j, \tau = k \right) = 1 + \left(mk + l - j - \left(k - \left] \frac{j}{m} \left[\right) \right) \theta, \quad (1.11)$$

pois $\sum_{i=1}^{m\tau+l} X_i$, dados $\eta = j$ e $\tau = k$, possui distribuição Binomial com parâmetros N_D e θ , sendo $N_D = mk + l - j - \left(k - \left] \frac{j}{m} \left[\right)$ o número total de itens produzidos depois do ponto de mudança e não inspecionados e $\left] x \left[\right)$ representando o menor inteiro maior ou igual a x .

Logo, dados θ e ρ ,

$$E \left(\sum_{i=1}^{m\tau+l} X_i \right) = 1 + E_{(\eta,\tau)} \left\{ \left((m-1)\tau + l - \eta + \left] \frac{j}{m} \left[\right) \theta \right\}. \quad (1.12)$$

Assim, Nayebpour e Woodall calcularam o custo esperado do número de itens não-conformes produzidos em um ciclo, dado por

$$\left\{ \left(m + \frac{m(1-\rho)^m}{1-(1-\rho)^m} - \frac{1-\rho}{\rho} \right) \theta + m(1-\theta) + l\theta \right\} C_D. \quad (1.13)$$

Nayebpour e Woodall determinaram então o custo esperado por item produzido em um

ciclo, sob considerações da teoria da renovação, substituindo (1.8), (1.9) e (1.13) em

$$E(L) = \frac{E(C)}{E(T)} = \frac{E \left\{ m\tau C_{insp} + \sum_{i=1}^{m\tau+l} X_i C_d + C_a \right\}}{E \{ m\tau + l \}}, \quad (1.14)$$

onde $E(C)$ é o custo total esperado em um ciclo. Assim, dados θ e ρ

$$E(L) = \frac{\left(\frac{1}{\theta} + \frac{(1-\rho)^m}{1-(1-\rho)^m} \right) C_{insp} + \left\{ \left(m + \frac{m(1-\rho)^m}{1-(1-\rho)^m} - \frac{1-\rho}{\rho} \right) \theta + m(1-\theta) + l\theta \right\} C_d + C_a}{\frac{m}{\theta} + \frac{m(1-\rho)^m}{1-(1-\rho)^m} + l}. \quad (1.15)$$

Observe que, nessa metodologia, os parâmetros (θ, ρ) são desconhecidos e a sua estimação é imprescindível para a obtenção do intervalo entre inspeções ótimo.

Através do método de momentos, o estimador da probabilidade do processo sair de controle, ρ , é dado por

$$\hat{\rho} = 1 - \left(1 - \frac{m_c}{\bar{u} - \left(l + \frac{m_c(1-\theta)}{\theta} \right)} \right)^{\frac{1}{m_c}}, \quad (1.16)$$

em que m_c representa o valor do intervalo de diagnóstico adotado nos ciclos anteriores e \bar{u} representa o número médio de itens produzidos em um ciclo. Segundo Nayebpour e Woodall, uma estimativa de θ pode ser obtida usando dados históricos de ciclos anteriores. Note que nesse procedimento o uso da informação de experimentos anteriores no processo de estimação não é formalizado. Na inferência Bayesiana, por sua vez, este conhecimento pode ser incorporado e representado formalmente pela distribuição a priori para o vetor de parâmetros do processo.

Após a estimação dos parâmetros θ e ρ , o procedimento consiste em analisar o valor do intervalo de inspeção m que minimiza o custo esperado por item produzido em um ciclo. Nayebpour e Woodall estudaram as curvas do custo esperado para diferentes valores de θ , ou seja, estimaram a probabilidade do processo sair de controle através do método de momentos e, para cada valor de θ , escolheram o intervalo de inspeção que minimizou o custo esperado. Por fim, Nayebpour e Woodall constataram que esse procedimento produzia, sob a nova mod-

elagem, um intervalo de inspeção ótimo menor que o de Taguchi. Borges et.al [7], por sua vez, calcularam os estimadores de máxima verossimilhança e de Bayes de θ e ρ e verificaram que, para todo $m > 1$, o estimador de máxima verossimilhança da fração não-conforme, θ , necessariamente é maior que o correspondente estimador da probabilidade do processo sair de controle, ρ . Logo, em situações em que esta condição não é satisfeita, o uso desses estimadores pode produzir resultados inadequados. Estes resultados estão detalhados em Ramos [42] e Borges, Esteves e Wechsler [7].

Outras abordagens, a partir da teoria da inferência Bayesiana, que tratam desse mesmo problema foram desenvolvidas. Borges, Esteves e Wechsler [7] adotaram distribuições Betas independentes a priori para o vetor de parâmetros, obtendo, a posteriori, mistura de distribuições Betas independentes. Ramos [42] encontrou, para cada valor de m , a perda esperada por item produzido em um ciclo supondo a priori Betas independentes para a probabilidade de produzir um item defeituoso θ e a probabilidade do processo sair de controle ρ . Para determinar o intervalo de inspeção ótimo em situações que os procedimentos de Nayeypour e Woodall [41] e Borges, Esteves e Wechsler [7] apresentam limitações, Ramos [42] implementou métodos de aproximação numérica para avaliar a perda esperada para cada valor de m . Recentemente, Dasgupta e Mandal [13] propuseram um procedimento Bayesiano para estimar os parâmetros do processo para os Casos II e III de Taguchi. No Caso III, supõem-se duas causas concorrentes para o desajuste do processo: uma causa de maior gravidade levaria o processo a produzir apenas itens defeituosos e uma segunda causa, menos grave, que faz com que a fração não-conforme salte para um valor θ , $0 < \theta < 1$. Assim, o processo passa a produzir, primeiro, peças defeituosas com probabilidade θ e depois começa a fabricar apenas itens defeituosos ou, num outro cenário, passa diretamente a produzir apenas itens não-conformes. Os tempos de falha, nesse caso, possuem distribuições Geométricas independentes de parâmetros p_1 e p_2 , respectivamente. Para o cálculo da distribuição a posteriori, Dasgupta e Mandal [13] utilizaram o método de simulação MCMC.

Nesse trabalho, propomos um novo modelo estatístico para o monitoramento de controle da qualidade “on-line” para atributos de Taguchi, cujo desenvolvimento será baseado na teoria Bayesiana não-paramétrica. Esse modelo inclui a possibilidade de que a fração não-conforme aumente gradativamente com o decorrer do tempo (e não assuma apenas três valores, como no

caso III de Nandi e Sreehari [39]). Deve-se destacar que o processo de obtenção dos intervalos entre inspeções ótimos para os sucessivos ciclos de produção monitorados pode ser formalizado a partir da teoria da Decisão Bayesiana.

Capítulo 2

Inferência Bayesiana não-paramétrica

2.1 Introdução

Uma das maiores vantagens dos procedimentos não-paramétricos é a flexibilidade no processo de modelagem, visto que menos suposições são necessárias para a sua aplicação, diferentemente dos modelos paramétricos usuais. Por exemplo, segundo Hollander [32], quando a suposição de normalidade não é satisfeita, os procedimentos não-paramétricos são, na maioria das aplicações, mais eficientes que os procedimentos paramétricos. Verifica-se este fato também para os problemas que envolvem a estimação de parâmetros de dimensão infinita, como, por exemplo, a estimação de uma função de distribuição. Realizado o experimento, a escolha por uma função de distribuição corresponde, na abordagem paramétrica, à estimação de um vetor de parâmetros que indexa o modelo estatístico. Se o modelo não é razoável, os resultados obtidos não são satisfatórios, comprometendo as conclusões. Nestas situações, considerar funções de distribuição mais gerais pode conduzir a resultados mais interessantes, embora a escolha do modelo seja mais complexa.

No contexto do procedimento de monitoramento de Taguchi, a flexibilidade obtida através da aplicação da inferência não-paramétrica na estimação da sequência de frações não-conforme reside na possibilidade de que a referida sequência assumira mais de três valores, ou, mais especificamente, um comportamento menos restritivo. Essa sequência pode ser vista, na área estatística com a função distribuição numa forma mais geral.

Um trabalho recente sobre o desenvolvimento da inferência Bayesiana não-paramétrica foi desenvolvido por Muller e Quintana [37], no qual define-se Inferência Bayesiana não-paramétrica como modelos com incontáveis parâmetros que resultam em uma inferência comparável à inferência não-paramétrica clássica. Equivalentemente, modelos não-paramétricos Bayesianos são modelos de probabilidades em espaços de funções.

Em linhas gerais tem-se que a inferência Bayesiana, em sua versão não-paramétrica, começou a ser desenvolvida a partir de Freedman [24], que introduziu as primeiras prioris baseadas em medidas aleatórias e “tailfree”. Em seguida, Ferguson [20] formalizou o processo de Dirichlet e apresentou diversas aplicações à inferência estatística, tais como a estimação da média, mediana, função de distribuição e variância de uma distribuição de probabilidade desconhecida. Este trabalho impulsionou o desenvolvimento da inferência Bayesiana não-paramétrica devido à possibilidade da obtenção analítica de classes conjugadas para alguns modelos e de estimadores para diversas funções de uma distribuição de probabilidade desconhecida e se popularizou a partir dos avanços recentes das técnicas computacionais. A prova disto foram os inúmeros trabalhos que se sucederam tratando do mesmo tema. Susarla e Van Ryzin [47], por exemplo, estimaram, sob a função de perda quadrática e priori processo de Dirichlet, a função de sobrevivência para um tempo fixo com a possibilidade de dados censurados à direita. Ferguson e Phadia [22] estenderam os resultados de Susarla e Van Ryzin [47] para uma classe mais abrangente de prioris denominada processo “neutral” à direita, introduzida por Doksum [15]. Outros trabalhos desenvolvidos a partir de então foram Gelfand e Kuo [27], Bush e MacEachern [9], Escobar e West [18], Gelfand e Mallick [28], Follmann e Albert [23], Gelfand e Kottas [25], Salinas-Torres, Bragança Pereira e Tiwari [51]. Walker et al [53] apresentaram um panorama geral do desenvolvimento da inferência Bayesiana não-paramétrica, considerando Processo Dirichlet, árvore de Pólya, entre outros. Calle e Gómez [10] propuseram uma metodologia baseada no amostrador de Gibbs para obter o estimador Bayesiano não-paramétrico da função de sobrevivência para o caso de censura intervalar quando a priori é processo Dirichlet. Hanson e Johnson [31] apresentaram um modelo semi-paramétrico para o caso de tempo de falha acelerado envolvendo covariáveis e o processo Dirichlet a priori, cujas inferências a posteriori foram obtidas em algoritmos MCMC. Zhou [57] obteve um estimador de Bayes não-paramétrico da função de sobrevivência para dados com censuras intervalares

supondo priori Processo Dirichlet e função de perda quadrática. James et al [33] estudaram uma caracterização do Processo Dirichlet a partir das medidas aleatórias normalizadas. Blackwell e MacQueen [5] apresentaram uma caracterização do Processo Dirichlet através de urnas de Pólya. Muller e Quintana [37] apresentam outros trabalhos importantes que caracterizam o desenvolvimento da inferência não-paramétrica em outras áreas, tais como árvores de Pólya, regressão multivariada, modelos baseados em "wavelet", modelos de riscos competitivos entre outros.

Uma generalização importante do Processo Dirichlet foi proposta por Antoniak [1]. Nesse artigo, Antoniak formalizou a mistura de processo Dirichlet e demonstrou muitas de suas propriedades. O resultado mais interessante é a propriedade de conjugação na presença de censura. Além disso, esta classe de priori escolhe uma função de distribuição contínua F com probabilidade 1. Recentemente, muitas pesquisas têm sido feitas tratando das misturas de processos Dirichlet. Blum e Susarla [6], por exemplo, calcularam a distribuição a posteriori de uma medida P quando as observações amostrais pertencem a uma sequência monótona de conjuntos mensuráveis. Gelfand e Kottas [26] desenvolveram um procedimento não-paramétrico, com o auxílio de métodos computacionais MCMC, supondo a priori mistura de processos Dirichlet para o cálculo da distribuição a posteriori para várias funções da medida desconhecida, tais como a função distribuição, a função de sobrevivência e a função de risco. Doss e Huffer [16] implementaram métodos computacionais para estimar a distribuição a posteriori de uma função de distribuição quando a distribuição a priori é mistura de processos Dirichlet e os dados possuem censura. Kim [36] estudou a distribuição a posteriori de uma função de distribuição considerando a priori uma mistura de processo Dirichlet e dados censurados à direita.

Neste capítulo, apresentamos um breve histórico da utilização do processo Dirichlet na Inferência Bayesiana não-paramétrica. Inicialmente, introduzimos o processo de Dirichlet, suas principais propriedades e alguns resultados conhecidos que são importantes para o desenvolvimento do trabalho. A última seção é dedicada à mistura de processos Dirichlet, onde são expostas as principais propriedades e alguns exemplos de Antoniak [1]. Antes, porém, apresentamos uma breve introdução teórica sobre medidas de probabilidade sobre espaços mensuráveis de dimensões finitas, tais como \mathfrak{R} , a fim de exibir o processo Dirichlet mais adiante.

Em geral, no caso da inferência não-paramétrica, o objetivo é, resumidamente, estimar uma distribuição de probabilidade P (desconhecida) num espaço mensurável (\aleph, \mathbf{A}) . Uma medida a priori para P é uma medida de probabilidade em $(\mathbf{P}, \sigma(\mathbf{P}))$, onde \mathbf{P} é uma família de medidas de probabilidade em (\aleph, \mathbf{A}) e $\sigma(\mathbf{P})$ é a menor σ -álgebra tal que a função $P \in \mathbf{P}$ é $\sigma(\mathbf{P})$ -mensurável para todo $A \in \mathbf{A}$ (Salinas-Torres [50]). Alternativamente, uma medida de probabilidade sobre $(\mathbf{P}, \sigma(\mathbf{P}))$ pode ser representada por um processo estocástico, como descrito a seguir.

Notemos que as medidas de probabilidade em \mathbf{P} podem ser vistas como realizações de um processo estocástico com índices em \mathbf{A} a valores em $[0, 1]^{\mathbf{A}}$, onde $[0, 1]^{\mathbf{A}}$ é o espaço-produto cujo fator é o intervalo unitário fechado $[0, 1]$ e o número de fatores é o cardinal da σ -álgebra \mathbf{A} . Assim, uma medida P em \mathbf{P} é uma transformação da forma

$$\begin{aligned} P : \mathbf{A} &\mapsto [0, 1]^{\mathbf{A}}, \\ A \in \mathbf{A} &\mapsto P(A) \in [0, 1], \end{aligned}$$

com as restrições usuais já conhecidas (axiomas de Kolmogorov) (Shiriyev [45]).

Nesse caso, $\sigma([0, 1]^{\mathbf{A}})$ denota a σ -álgebra gerada pelos cilindros com base finita em $[0, 1]^{\mathbf{A}}$. De um modo geral, uma medida de probabilidade sobre $\sigma(\mathbf{P})$ deve ser definida então para cilindros finito-dimensionais de modo a atender a propriedade de permutabilidade para satisfazer o teorema de existência de Kolmogorov (ver Billingsley [4]).

Considere, por exemplo, $\aleph = \{0, 1\}$ e $\mathbf{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$, que corresponde ao espaço de probabilidade induzido por uma transformação a valores em $\{0, 1\}$, onde 1 e 0 representam, por exemplo, sucesso e fracasso, respectivamente. Uma medida de probabilidade sobre (\aleph, \mathbf{A}) corresponde a uma distribuição de Bernoulli e pode ser vista como uma trajetória (realização) de um processo estocástico indexado em $\mathbf{A} = \{\Omega, \phi, \{0\}, \{1\}\}$, como observamos na Figura 2.1.

Este exemplo exhibe uma forma alternativa de representar o modelo estatístico Bernoulli, no qual o parâmetro (probabilidade) p , $0 < p < 1$, é desconhecido e cada trajetória corresponde a uma distribuição de Bernoulli com parâmetro fixado.

Com base na caracterização do espaço $(\mathbf{P}, \sigma(\mathbf{P}))$ apresentada, deve-se considerar uma me-

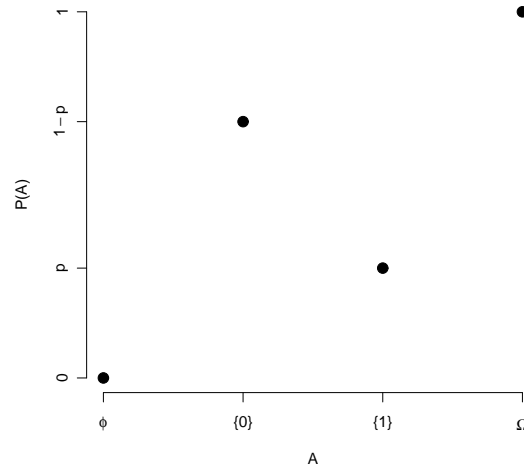


Figura 2.1: Representação Gráfica da Distribuição Bernoulli (p) como uma realização de um processo estocástico

didada de probabilidade sobre $\sigma(\mathbf{P})$ definindo as distribuições finito-dimensionais para qualquer subconjunto finito de \mathbf{A} . Porém, Torres [50] demonstrou que, para determinar uma medida de probabilidade sobre um processo estocástico, é suficiente especificar tais distribuições apenas para qualquer partição mensurável finita do espaço \aleph . Além disso, Torres [50] constrói a medida de probabilidade para P como uma medida de transição indexada por uma família de índices (Shiriyayev [45]).

Nas próximas seções, discutimos a distribuição Dirichlet, o processo Dirichlet e a mistura de processos Dirichlet e suas principais propriedades necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

2.2 Distribuição de Dirichlet

A distribuição de Dirichlet, que apresentamos na sequência, pode ser vista como uma generalização (multivariada) da distribuição Beta. Dizemos que o vetor aleatório $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1})$, $k \geq 2$, possui distribuição de Dirichlet de parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) , se sua função densidade de

probabilidade é dada por

$$f(y_1, \dots, y_{k-1} | \mu_1, \dots, \mu_k) = \frac{\Gamma(\mu_1 + \dots + \mu_k)}{\Gamma(\mu_1) \dots \Gamma(\mu_k)} \left(\prod_{j=1}^{k-1} y_j^{\mu_j - 1} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} y_j \right)^{\mu_k - 1} I_S(y_1, \dots, y_{k-1}), \quad (2.1)$$

onde S é o simplex $S = \left\{ (y_1, \dots, y_{k-1}) \in \mathfrak{R}^{k-1} : y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{k-1} y_j \leq 1 \right\}$ e I_A representa a função indicadora do conjunto A . Se $k = 2$, (2.1) resume-se à densidade de uma distribuição Beta de parâmetros μ_1 e μ_2 , denotada por $Be(\mu_1, \mu_2)$. Esta distribuição é sempre singular em \mathfrak{R}^k (uma vez que $Y_k = 1 - (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{k-1})$).

A seguinte construção é muito utilizada por permitir a simulação da distribuição de Dirichlet a partir de variáveis aleatórias independentes. Seja $G(\mu, \beta)$ a distribuição Gama com parâmetros de forma e escala $\mu \geq 0$ e $\beta > 0$, respectivamente. Lembramos que, se $\mu = 0$, a distribuição será degenerada em zero e se $\mu > 0$, a densidade associada à distribuição será dada por

$$f(z | \mu, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\mu) \beta^\mu} e^{-\frac{z}{\beta}} z^{\mu-1} I_{(0, \infty)}(z). \quad (2.2)$$

Sejam Z_1, Z_2, \dots, Z_k variáveis aleatórias independentes com $Z_j \sim G(\mu_j, \beta)$ em que $\mu_j \geq 0$ para todo j e $\mu_j > 0$ para algum j , $j = 1, 2, \dots, k$. Neste caso, a transformada $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1})$, onde

$$Y_j = \frac{Z_j}{\sum_{i=1}^k Z_i}, \quad (2.3)$$

para $j = 1, \dots, k-1$, possui distribuição de Dirichlet de parâmetros $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ (Wilks [54]).

Na sequência, apresentamos alguns resultados sobre a distribuição Dirichlet que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

Propriedade 2.1 *Se (Y_1, \dots, Y_{k-1}) possui distribuição Dirichlet de parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) e I_1, \dots, I_l é uma partição de $\{1, \dots, k\}$, $l = 2, \dots, k$, então*

$$\left(\sum_{i \in I_1} Y_i, \dots, \sum_{i \in I_{l-1}} Y_i \right) \sim DIR \left(\sum_{i \in I_1} \mu_i, \dots, \sum_{i \in I_{l-1}} \mu_i, \sum_{i \in I_l} \mu_i \right), \quad (2.4)$$

onde $DIR(a_1, \dots, a_k)$ denota a distribuição Dirichlet com parâmetro (a_1, \dots, a_k) .

Propriedade 2.2 *Seja (Y_1, \dots, Y_{k-1}) um vetor com distribuição de Dirichlet de parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) . Sejam*

$$\begin{aligned} W_1 &= Y_1 \\ W_2 &= Y_1 + Y_2 \\ &\dots \\ W_{k-1} &= Y_1 + \dots + Y_{k-1}. \end{aligned}$$

A função densidade de probabilidade de (W_1, \dots, W_{k-1}) é dada por

$$\begin{aligned} f(w_1, \dots, w_{k-1} | \mu_1, \dots, \mu_k) &= \\ &= \frac{\Gamma(\mu_1 + \dots + \mu_k)}{\Gamma(\mu_1) \dots \Gamma(\mu_k)} w_1^{\mu_1 - 1} (w_2 - w_1)^{\mu_2 - 1} \dots (w_{k-1} - w_{k-2})^{\mu_{k-1} - 1} (1 - w_{k-1})^{\mu_k - 1} I_T(w_1, \dots, w_{k-1}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que $T = \{(w_1, \dots, w_{k-1}) \in \mathfrak{R}^{k-1} : 0 < w_1 < \dots < w_{k-1} < 1\}$. Wilks [54] denominou a distribuição de (W_1, \dots, W_{k-1}) de Dirichlet ordenada.

Suponha que o objetivo é realizar um processo inferencial Bayesiano para um vetor de proporções (Y_1, \dots, Y_{k-1}) , tal que $\sum_{i=1}^{k-1} Y_i < 1$. Uma forma é considerar uma distribuição Dirichlet a priori para o vetor (Y_1, \dots, Y_{k-1}) , dada por $DIR(\mu_1, \dots, \mu_k)$, e a observação de uma variável X relacionada a (Y_1, \dots, Y_{k-1}) através de um modelo estatístico. Este procedimento é formalizado na propriedade a seguir.

Propriedade 2.3 *Considere que o vetor (Y_1, \dots, Y_{k-1}) possui distribuição de Dirichlet de parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) . Além disso, se supormos que*

$$P\{X = j | Y_1, \dots, Y_{k-1}\} = Y_j \text{ q.c, para } j = 1, \dots, k, \quad (2.6)$$

com $Y_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i$, então a distribuição a posteriori de (Y_1, \dots, Y_{k-1}) dado $X = j$ é $DIR(\mu_1^{(j)}, \dots, \mu_k^{(j)})$, onde

$$\mu_i^{(j)} = \begin{cases} \mu_i & , \text{se } i \neq j \\ \mu_j + 1 & , \text{se } i = j \end{cases} . \quad (2.7)$$

onde $\sum_{i=1}^{k-1} Y_i \leq 1$.

Demonstração:

Devemos calcular a seguinte quantidade,

$$\begin{aligned} & P\{Y_1 \leq z_1, \dots, Y_{k-1} \leq z_{k-1} | X = j\} \propto \\ & \propto P\{Y_1 \leq z_1, \dots, Y_{k-1} \leq z_{k-1}, X = j\} = \int_0^{z_1} \cdots \int_0^{z_{k-1}} P\{X = j | y_1, \dots, y_{k-1}\} d\mathbf{P}_{\underline{Y}}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{P}_{\underline{Y}}$ é a medida do vetor (Y_1, \dots, Y_{k-1}) . Assim,

$$\begin{aligned} & P\{Y_1 \leq z_1, \dots, Y_{k-1} \leq z_{k-1} | X = j\} \\ & \propto \int_0^{z_1} \cdots \int_0^{z_{k-1}} y_j d\mathbf{P}_{\underline{Y}} \propto D(z_1, \dots, z_{k-1} | \mu_1, \dots, \mu_j + 1, \dots, \mu_k), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $D(y_1, \dots, y_{k-1} | \mu_1, \dots, \mu_k)$ denota a função de distribuição da Dirichlet de parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) no ponto (y_1, \dots, y_{k-1}) . Devemos enfatizar que, ao longo do trabalho, consideraremos também $D(y_1, \dots, y_k | \mu_1, \dots, \mu_k)$ a função de distribuição do vetor aleatório singular em \mathfrak{R}^k Dirichlet de parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) no ponto (y_1, \dots, y_k) . Em seguida, obtemos a constante de proporcionalidade dada por

$$\begin{aligned} P(X = j) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 P(X = j | y_1, \dots, y_{k-1}) d\mathbf{P}_{\underline{Y}} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 y_j d\mathbf{P}_{\underline{Y}} \\ &= \frac{\Gamma(\mu_1 + \cdots + \mu_k)}{\Gamma(\mu_1) \cdots \Gamma(\mu_k)} \frac{\Gamma(\mu_1) \cdots \Gamma(\mu_j + 1) \cdots \Gamma(\mu_k)}{\Gamma(\mu_1 + \cdots + \mu_k + 1)} = \frac{\mu_j}{\mu_1 + \cdots + \mu_k}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10), obtemos o resultado. Esta propriedade também é válida se $\mu_j = 0$ para

$j = 1, \dots, k$.

Outras propriedades da distribuição de Dirichlet, tais como os momentos, marginais e transformações podem ser encontradas em Johnson e Kotz [34], Wilks [54] e Gosh e Ramamoorthi [30].

2.3 Processo Dirichlet

Ferguson [20] introduziu uma medida de probabilidade sobre uma classe de medidas de probabilidade e desenvolveu procedimentos Bayesianos não-paramétricos para alguns problemas usuais em inferência estatística. Neste artigo, ele prova que os processos de Dirichlet são medidas aleatórias e que, sob certas condições, constitui uma família conjugada para amostras de quantidades permutáveis, isto é, as distribuições a priori e a posteriori para a medida de probabilidade desconhecida são processos de Dirichlet. A construção apresentada por Ferguson [20] é descrita, resumidamente, a seguir.

Sendo $(\mathfrak{N}, \mathbf{A})$ um espaço mensurável, Ferguson [20], através do teorema de Kolmogorov, exibiu a construção de uma medida de probabilidade em $([0, 1]^{\mathbf{A}}, \sigma([0, 1]^{\mathbf{A}}))$ de modo que os vetores finito-dimensionais (marginais) formados por partições \mathbf{A} -mensuráveis de \mathfrak{N} possuam distribuições de Dirichlet de dimensão finita. A seguir, descreveremos brevemente a construção de Ferguson.

A construção de Ferguson [20] baseia-se no fato de que existe uma medida de probabilidade definida em uma partição qualquer se esta medida é consistente sob as propriedades da aditividade finita e de permutabilidade (Billingsley [4]). Desse modo, como o processo Dirichlet satisfaz estas condições, Ferguson conclui que pode-se atribuir um processo Dirichlet para uma medida aleatória P . Tem-se então a seguinte definição.

Definição 2.4 *Seja μ uma medida não nula finita em (\mathfrak{N}, A) . Dizemos que P é um processo Dirichlet em (\mathfrak{N}, A) com parâmetro (medida) μ , se para todo $k = 2, \dots$ e partições mensuráveis (B_1, \dots, B_k) de \mathfrak{N} , a distribuição de $(P(B_1), \dots, P(B_{k-1}))$ é Dirichlet com parâmetro $(\mu(B_1), \dots, \mu(B_k))$. Notação: $P \sim PD(\mu)$.*

Segundo Sethuraman e Tiwari [44] a medida μ reflete a informação a priori sobre P e

quanto menor é $\mu(\aleph)$ maior é a informação de que a medida P está concentrada em uma medida degenerada em algum ponto. Devido à propriedade de continuidade da medida μ e ao processo Dirichlet P tem-se que maiores medidas μ resultam em maiores probabilidades de P nestas regiões como comenta Ferguson [20]. As medidas comumente utilizadas nas aplicações são a degenerada e a exponencial. Para estruturar formalmente o desenvolvimento de procedimentos de inferência sob o enfoque Bayesiano não-paramétrico, Ferguson [20] formulou a seguinte definição de amostra de uma medida P desconhecida.

Definição 2.5 *Seja P uma medida de probabilidade aleatória em (\aleph, A) . Dizemos que X_1, \dots, X_n é uma amostra de tamanho n de P , se, para qualquer $m = 1, 2, \dots$ e conjuntos mensuráveis $A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n$,*

$$\mathcal{P} \{X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n | P(A_1), \dots, P(A_m), P(C_1), \dots, P(C_n)\} = \prod_{j=1}^n P(C_j) \text{ q.c.}, \quad (2.11)$$

onde, especificamente, \mathcal{P} é a medida de probabilidade construída no espaço-produto $([0, 1]^{\mathbf{A}} \times \aleph^n, \sigma([0, 1]^{\mathbf{A}} \times \aleph^n))$. Enfatizamos que, num abuso de linguagem, todas as medidas condicionais e marginais obtidas a partir de \mathcal{P} são denotadas pelo mesmo símbolo, \mathcal{P} .

Como relata Ferguson [20], X_1, \dots, X_n é considerada uma amostra aleatória de P , se, condicionalmente à medida P avaliada em $C_1, \dots, C_n, P(C_1), \dots, P(C_n)$, os eventos $X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n$ são independentes do processo avaliado em quaisquer outros conjuntos, digamos A_1, \dots, A_m , e são independentes entre si.

A inferência Bayesiana exige uma medida de probabilidade para o objeto de interesse desconhecido, que, no caso não-paramétrico, é uma função de distribuição (ou, equivalentemente, uma medida finita), uma vez que a medida P pode ser caracterizada completamente a partir da definição da função de distribuição F (Shiryayev [45]). Como, no caso de uma função de distribuição discreta, não é possível indexar os elementos da classe de todas as possíveis funções deste tipo, uma opção é utilizar o processo Dirichlet como priori para a medida de interesse, pois este atribui probabilidade 1 a todas as medidas de probabilidade discretas (Sethuraman [43]).

A seguir, apresentamos algumas propriedades do processo Dirichlet importantes no desenvolvimento do trabalho.

Proposição 2.6 (Ferguson) *Sejam P um processo Dirichlet em (\aleph, \mathbf{A}) com parâmetro μ e X uma amostra de tamanho 1 de P . Logo, para $A \in \mathbf{A}$*

$$\mathcal{P}\{X \in A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\aleph)}. \quad (2.12)$$

Demonstração. O resultado é obtido através de condicionamento. Assim,

$$\mathcal{P}(X \in A) = E(\mathcal{P}(X \in A|P(A))) = E(P(A)) = \frac{\mu(A)}{\mu(\aleph)}.$$

Proposição 2.7 (Ferguson) *Sejam P um processo Dirichlet em (\aleph, \mathbf{A}) com parâmetro μ e X uma amostra de tamanho 1 de P . Considere (B_1, \dots, B_k) uma partição mensurável de \aleph e $A \in \mathbf{A}$. Então*

$$\mathcal{P}\{X \in A, P(B_1) \leq y_1, \dots, P(B_{k-1}) \leq y_{k-1}\} = \sum_{j=1}^k \frac{\mu(B_j \cap A)}{\mu(\aleph)} D(y_1, \dots, y_{k-1} | \mu_1^{(j)}, \dots, \mu_k^{(j)}), \quad (2.13)$$

onde $D(y_1, \dots, y_{k-1} | \mu_1, \dots, \mu_k)$ é a função de distribuição da Dirichlet com parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) no ponto (y_1, \dots, y_{k-1}) e

$$\mu_i^{(j)} = \begin{cases} \mu(B_i) & , \text{ se } i \neq j \\ \mu(B_j) + 1 & , \text{ se } i = j \end{cases}. \quad (2.14)$$

A Propriedade 2.7 também é válida quando considera-se o vetor singular $(P(B_1), \dots, P(B_k))$ em (2.13).

O teorema a seguir determina a distribuição condicional de um processo Dirichlet P dada uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n de P .

Teorema 2.8 (Ferguson) *Sejam P um processo Dirichlet em (\aleph, \mathbf{A}) com parâmetro μ e X_1, \dots, X_n uma amostra de tamanho n de P . Então a distribuição condicional de P dado X_1, \dots, X_n*

é uma versão de um processo Dirichlet com parâmetro $\mu + \sum_{i=1}^n I(X_i)$, onde $I(X_i)$ é a medida degenerada na observação X_i .

A partir do Teorema 2.8, Ferguson obteve muitos resultados importantes na área de inferência Bayesiana não-paramétrica. Nestes exemplos, os estimadores de Bayes foram calculados para vários objetos de interesse como, por exemplo, para a função de distribuição em um ponto, para sua média, mediana, quantis, variância e covariância de uma distribuição P em $\mathcal{B}(\mathfrak{R}^2)$. Além disso, a construção de regiões de tolerância (estimação de um quantil da distribuição desconhecida através de um ponto de tolerância superior, Ferguson [20]) e o desenvolvimento de testes de hipóteses envolvendo quantis foram também contemplados. Em particular, a obtenção de estimadores de Bayes é desenvolvida a partir da Teoria da Decisão, na forma extensiva (DeGroot [14]): os estimadores foram obtidos, inicialmente, minimizando o risco de Bayes para o problema sem dados (o qual denotaremos como problema não-amostrai), e, depois, aplicando-se o Teorema 2.8 para incorporar a informação da amostra. A seguir, relembremos alguns desses resultados.

Resultado 2.9 (Ferguson) *Seja $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$ e $\mathbf{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{R}_+)$, a σ -álgebra de Borel. O problema é estimar uma função distribuição F em \mathfrak{R} sob a função de perda quadrática, ou seja,*

$$L(F, \hat{F}) = \int (F(t) - \hat{F}(t))^2 dW(t), \quad (2.15)$$

em que W é uma função peso e $F(t) = P((-\infty, t])$, para $t \geq 0$. Observe que se $P \sim PD(\mu)$ então $F(t) \sim \text{Beta}(\mu(-\infty, t], \mu(t, \infty))$, para t fixo. O risco de Bayes para o problema não-amostrai é dado por

$$E(L(F, \hat{F})) = \int E(F(t) - \hat{F}(t))^2 dW(t), \quad (2.16)$$

onde $\hat{F}(t)$ é a função que minimiza $E(F(t) - \hat{F}(t))^2$ para cada $t \geq 0$. Assim, o estimador de Bayes para $F(t)$ no problema não-amostrai (DeGroot [14]) é dado por

$$\hat{F}(t) = E(F(t)) = F_0(t) = \frac{\mu((-\infty, t])}{\mu(\mathfrak{R}_+)}, \quad (2.17)$$

para t fixo, $t \geq 0$. Observe que o estimador é baseado apenas no conhecimento a priori sobre a função de distribuição. Considerando uma amostra X_1, X_2, \dots, X_n de F temos, pelo Teorema 2.8, que a distribuição a posteriori de $F(t)$ é uma Beta com os parâmetros devidamente atualizados. Assim, o estimador de Bayes é dado por

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(t) &= E(F(t)/X_1, \dots, X_n) = \frac{(\mu + \sum_{i=1}^n \delta_{X_i})((-\infty, t])}{(\mu + \sum_{i=1}^n \delta_{X_i})(\mathfrak{R}_+)} \\ &= \frac{\mu(-\infty, t] + \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}((-\infty, t])}{\mu(\mathfrak{R}_+) + n} = p_n F_0(t) + (1 - p_n) F_n(t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $p_n = \frac{\mu(\mathfrak{R}_+)}{\mu(\mathfrak{R}_+) + n}$ e $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}((-\infty, t])$ é a função distribuição empírica da amostra X_1, \dots, X_n .

Logo, pela expressão (2.18), vemos que o estimador de Bayes é uma ponderação entre a informação a priori, expressa pela medida μ , e a função de distribuição empírica (informação amostral). Além disso, essa expressão pode ser vista também como uma probabilidade preditiva do modelo de Pólya apresentado por Blackwell e MacQueen [5]. Sethuraman e Tiwari [44] estudaram o comportamento do processo Dirichlet com respeito ao seu parâmetro μ e concluíram que, quando $\mu(\mathfrak{R}) \rightarrow 0$, o processo Dirichlet concentra-se em um ponto particular em \mathfrak{N} , ou seja, converge para uma medida atômica degenerada, que representa uma forte informação sobre a forma discreta de F .

Pelo teorema de Glivenko-Cantelli e como $p_n \downarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, Ferguson demonstrou que o estimador de Bayes (2.18) converge uniformemente para o estimador de Kaplan-Meier quase certamente, ou seja, \hat{F}_n é um estimador fortemente consistente da função de distribuição F .

Resultado 2.10 (Ferguson) *Considere novamente $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}_+$, $\mathbf{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{R}_+)$ e seja*

$$m = \int_{\mathfrak{R}} x dP(x), \quad (2.19)$$

o primeiro momento (desconhecido) associado à P . Tomando

$$L(P, \hat{m}) = (m - \hat{m})^2. \quad (2.20)$$

Ferguson [20] provou que o parâmetro m definido em (2.19) existe e que o seu estimador de Bayes, sob a função de perda quadrática, para o problema não-amostal é a média a priori de m , m_0 , dada por

$$m_0 = \int x d \frac{\mu(x)}{\mu(\mathfrak{R}_+)}. \quad (2.21)$$

(supondo que $P \sim PD(\mu)$, com primeiro momento finito, a média da correspondente medida de probabilidade $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(\mathfrak{R}_+)}$ é dada por (2.21)).

Para uma amostra de tamanho n , o estimador de Bayes é dado por

$$\begin{aligned} \hat{m}_n(X_1, \dots, X_n) &= \frac{\int x d(\mu(x) + \sum \delta_{X_i}(x))}{\mu(\mathfrak{R}) + n} \\ &= p_n m_0 + (1 - p_n) \bar{X}_n, \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que p_n foi definido anteriormente e $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

Observe que o estimador de Bayes é uma combinação linear entre o estimador a priori m_0 e a média amostral. Além disso, quando $n \rightarrow \infty$, $p_n \rightarrow 0$ e $\hat{m}_n - \bar{X}_n \rightarrow 0$ q.c., ou seja, o estimador de Bayes (2.22) é fortemente consistente para o primeiro momento (finito) de P .

Resultado 2.11 (Ferguson) *O problema agora é estimar a variância de uma distribuição de probabilidade desconhecida P com perda quadrática*

$$L(P, \hat{\sigma}^2) = (\text{Var}P - \hat{\sigma}^2)^2. \quad (2.23)$$

Se $P \sim PD(\mu)$ e μ tem segundo momento finito então

$$\text{Var}(P) = \int x^2 dP(x) - \left(\int x dP(x) \right)^2. \quad (2.24)$$

Ferguson [20] calculou a esperança de $Var(P)$ que também é o estimador de Bayes para o problema não-amstral

$$E(Var(P)) = \frac{\mu(\mathfrak{R}_+)}{\mu(\mathfrak{R}_+) + 1} \sigma_0^2, \quad (2.25)$$

em que $\sigma_0^2 = \frac{\int x^2 d\mu(x)}{\mu(\mathfrak{R})} - m_0^2$ é a variância de F_0 , $F_0(t) = \frac{\mu(-\infty, t)}{\mu(\mathfrak{R})}$, para $t \in \mathfrak{R}$.

Para uma amostra de tamanho n , o estimador de Bayes é

$$\hat{\sigma}_n^2(X_1, \dots, X_n) = \frac{\mu(\mathfrak{R}) + n}{\mu(\mathfrak{R}) + n + 1} Var(\hat{F}_n), \quad (2.26)$$

em que \hat{F}_n é dado em (2.18).

Além desses resultados, Ferguson apresentou a estimação da mediana, dos quantis, da $P(X > Y)$ para o problema envolvendo duas populações e desenvolveu regiões de tolerância e testes de hipóteses envolvendo quantis. Outras aplicações podem se encontradas em Yamato [55], Campbell e Hollander [11], Dalal e Phadia [12], Zalkikar, Tiwari e Jammalamadaka [56].

Outro trabalho muito importante na área de inferência Bayesiana não-paramétrica foi de Susarla e Van Ryzin [47]. Eles estudaram a distribuição a posteriori da função de distribuição $F(t)$, $t > 0$, quando há a possibilidade de censura à direita na amostra. Eles concluíram que a distribuição a posteriori para a quantidade desconhecida $F(t)$, $t \in \mathfrak{R}_+$ fixado, é uma mistura de distribuições Beta.

Susarla e Van Ryzin [47] calcularam ainda o estimador de Bayes da função de sobrevivência considerando a priori um processo de Dirichlet e função de perda quadrática. Assim, sendo S a função de sobrevivência, adotaram a seguinte função de perda ao estimar S por \hat{S} :

$$L(\hat{S}, S) = \int_0^\infty (\hat{S}(t) - S(t))^2 dw(t), \quad (2.27)$$

em que w é uma função decrescente não-negativa em $(0, \infty)$ e $\hat{S}(t)$ é um estimador de $S(t)$. Este resultado está descrito a seguir.

Resultado 2.12 (Susarla e Van Ryzin [47]) Considere uma amostra X_1, X_2, \dots, X_n de tamanho

n de F dentre as quais X_1, X_2, \dots, X_k são observações não-censuradas e X_{k+1}, \dots, X_n são as observações censuradas. Além disso, sejam $X_{(k+1)}, \dots, X_{(m)}$ as observações distintas entre as censuradas, λ_j o número de observações censuradas iguais a $X_{(j)}$ para $j = k+1, \dots, m$ e $N(t)$ e $N^+(t)$ o número de observações (censuradas ou não) maiores ou iguais a t e o número de observações maiores do que t , respectivamente. O estimador de Bayes $\hat{S}(u)$, sob a função de perda quadrática, segundo Susarla e Van Ryzin [47], é dado por

$$\hat{S}(u) = \frac{\mu(u, \infty) + N^+(u)}{\mu(\mathfrak{R}^+) + n} \prod_{j=k+1}^l \left\{ \frac{\mu[X_{(j)}, \infty) + N(X_{(j)})}{\mu[X_{(j)}, \infty) + N(X_{(j)}) - \lambda_j} \right\}, \quad (2.28)$$

no intervalo $X_{(l)} \leq u < X_{(l+1)}$, $l = k+1, \dots, m$ considerando $X_{(k)} = 0$ e $X_{(m+1)} = \infty$.

A distribuição a posteriori da função acumulada $F(t)$ considerando dados censurados é uma mistura de distribuições Betas. Mais especificamente, seja $X_{(l)} \leq u < X_{(l+1)}$, $l = k, \dots, m$ com $X_{(k)} = 0$ e $X_{(m+1)} = \infty$. A distribuição condicional de $F(u)$ dadas as observações e as censuras, ou seja, a distribuição a posteriori de F no instante u , é uma mistura de distribuições Betas $\{s_0, \dots, s_t\}$, $t = \sum_{j=k+1}^l \lambda_j$ com vetor de parâmetros $(\mu(0, u) + n - N^+(u) - r, \mu(u, \infty) + N^+ + r)$ para $r = 0, \dots, \sum_{j=k+1}^l \lambda_j$.

Susarla e Van Ryzin [47] mostraram também que o estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier de $S(u)$ (Kaplan e Meier [35]) pode ser obtido de (2.28) quando $\mu(\mathfrak{R}) \rightarrow 0$. Susarla e Van Ryzin [47] preferem o estimador de Bayes por ele considerar todas as observações (censuradas e não-censuradas), ao invés do estimador Kaplan-Meier, que se baseia somente na informação da contagem dos tempos não-censurados. Por fim, os resultados obtidos são aplicados e comparados aos resultados de Kaplan e Meier [35].

A seguir, introduzimos a mistura de processo Dirichlet, uma generalização do processo Dirichlet. Ela abrange as funções de distribuições contínuas e recentemente motivou o desenvolvimento de muitas pesquisas como comentado na introdução.

2.4 Mistura de processos Dirichlet

Antoniak [1] definiu uma extensão do processo Dirichlet construído por Ferguson denominada de mistura de processo Dirichlet (MPD). Neste trabalho, ele formalizou e apresentou vários resultados, em especial a propriedade detalhada no Teorema 2.18. Além disso, concluiu que a adoção de mistura de processo Dirichlet como priori resulta em estimativas a posteriori contínuas para a função de distribuição. Inicialmente, Antoniak estende a definição de probabilidade de transição dada a seguir.

Definição 2.13 *Seja (\aleph, \mathbf{A}) e (U, B) dois espaços mensuráveis. Uma medida de transição em $U \times \mathbf{A}$ é uma função μ de $U \times \mathbf{A}$ em $[0, \infty]$ tal que*

1. *Para todo $u \in U$, $\mu(u, \cdot)$ é uma medida não nula, não-negativa e finita em (\aleph, \mathbf{A}) ;*
2. *Para todo $A \in \mathbf{A}$, $\mu(\cdot, A)$ é mensurável em (U, B) .*

Observe que fixado $u \in U$, $\mu(u, \aleph)$ não necessariamente precisa ser igual a 1, o que é importante pois o parâmetro $\mu(u, \cdot)$ é o parâmetro de um processo de Dirichlet, conforme veremos na definição seguinte. Antoniak [1] então definiu formalmente a mistura de processos Dirichlet, detalhada a seguir.

Definição 2.14 *Sejam (\aleph, \mathbf{A}) um espaço mensurável, (U, B, H) um espaço de probabilidade, que denotamos como espaço de índices e μ uma medida de transição em $U \times \mathbf{A}$. Dizemos que P é uma mistura de processos Dirichlet em (\aleph, \mathbf{A}) com distribuição de mistura H no espaço de índices (U, B) e medida de transição μ , se para todo $k = 2, \dots$ e qualquer partição mensurável (A_1, A_2, \dots, A_k) de \aleph temos*

$$\mathcal{P} \{P(A_1) \leq y_1, \dots, P(A_k) \leq y_k\} = \int_U D(y_1, \dots, y_k | \mu(u, A_1), \dots, \mu(u, A_k)) dH(u), \quad (2.29)$$

onde $D(y_1, \dots, y_k | \mu_1, \dots, \mu_k)$ denota a função de distribuição da Dirichlet com parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) no ponto (y_1, \dots, y_k) .

Além disso, Antoniak propõe a seguinte notação

$$(P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_k)) \sim \int_U \text{DIR}(\mu(u, A_1), \dots, \mu(u, A_k)) dH(u),$$

ou simplesmente, $P \sim \int_U PD(\mu(u, \cdot)) dH(u)$. Pode-se interpretar o índice u como uma variável aleatória com distribuição H e condicionado a u , P é um processo Dirichlet com parâmetro $\mu(u, \cdot)$. Logo, uma notação alternativa seria, $u \sim H$, $P|u \sim PD(\mu_u)$, onde $\mu_u = \mu(u, \cdot)$. Antoniak denota essa abordagem como não-paramétrica, mesmo utilizando a variável u na mistura acima. Alguns autores podem denotar essa modelagem como semi-paramétrica, porém seguimos com a linguagem original. A seguir, apresentamos um exemplo de medida de transição que resulta em uma particular mistura de processo Dirichlet.

Exemplo 2.15 (Antoniak [1]) *Seja P um processo Dirichlet em $(\mathfrak{N}, \mathbf{A})$ com parâmetro μ . Defina $\mu(u, A) = \mu(A) + I_A(u)$, onde $I_u(A)$ é a função indicadora (igual a um, se $u \in A$ e 0, caso contrário). Seja H uma medida de probabilidade fixa em $(\mathfrak{N}, \mathbf{A})$. Então o processo P^* que escolhe u de acordo com H e P de um processo Dirichlet com parâmetro $\mu(u, A)$ é uma mistura de processos Dirichlet e, se (B_1, \dots, B_k) é qualquer partição mensurável de \mathfrak{N} ,*

$$(P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_k)) \sim \sum_{i=1}^k H(B_i) \text{DIR}(\mu(B_1), \dots, \mu(B_i) + 1, \dots, \mu(B_k)). \quad (2.30)$$

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \{P(B_1) \leq y_1, \dots, P(B_k) \leq y_k\} &= \int_U D(y_1, \dots, y_k | \mu(u, B_1), \dots, \mu(u, B_k)) dH(u) \\ &= \int_U D(y_1, \dots, y_k | \mu(B_1) + I_{B_1}(u), \dots, \mu(B_k) + I_{B_k}(u)) dH(u) \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{B_i} D(y_1, \dots, y_k | \mu(B_1), \dots, \mu(B_i) + 1, \dots, \mu(B_k)) dH(u) \\ &= \sum_{i=1}^k H(B_i) D(y_1, \dots, y_k | \mu(B_1), \dots, \mu(B_i) + 1, \dots, \mu(B_k)). \end{aligned}$$

Antoniak, em seguida, formalizou o conceito de amostra de uma mistura de processos Dirichlet P para desenvolver o processo inferencial Bayesiano para essa quantidade de interesse.

Definição 2.16 (Antoniak [1]) *Seja P uma mistura de processos Dirichlet em (\aleph, \mathbf{A}) com distribuição de mistura H no espaço de índices (U, \mathcal{B}) e medida de transição μ em $U \times \mathbf{A}$. Dizemos que X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra de tamanho n de P , se para qualquer $m = 1, 2, \dots$ e conjuntos mensuráveis $A_1, A_2, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n$, temos*

$$\mathcal{P} \{ X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n | u, P(A_1), \dots, P(A_m), P(C_1), \dots, P(C_n) \} = \prod_{i=1}^n P(C_i) \text{ q.c.} \quad (2.31)$$

para todo $u \in U$.

A partir desta definição, pode-se determinar a distribuição conjunta de $X_1, \dots, X_n, P(A_1), \dots, P(A_m)$:

$$\mathcal{P} \{ X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n, P(A_1) \leq y_1, \dots, P(A_m) \leq y_m \} \quad (2.32)$$

pode ser encontrada integrando (2.31) com respeito a distribuição condicional conjunta conhecida de $P(A_1), \dots, P(A_m), P(C_1), \dots, P(C_n)$ dado u sobre o conjunto $[0, y_1] \times \dots \times [0, y_m] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ e então integrando a função resultante de u com respeito a $H(u)$ sobre U . Logo, como um caso particular, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.17 (Antoniak [1]) *Se $P \sim \int_U P D(\mu(u, \cdot)) dH(u)$ e X é uma amostra de tamanho m de P , então, para qualquer conjunto mensurável A ,*

$$\mathcal{P} \{ X \in A \} = \int_U \frac{\mu(u, A)}{\mu(u, \aleph)} dH(u). \quad (2.33)$$

Demonstração: $\mathcal{P}(X \in A | u, P(A)) = P(A)$ q.c. (definição de amostra de Antoniak)

$$\mathcal{P}(X \in A | u) = E \{ \mathcal{P}(X \in A | P(A)) | u \} = E \{ P(A) | u \} = \frac{\mu(u, A)}{\mu(u, \aleph)}.$$

$$\text{Finalmente, } \mathcal{P}(X \in A) = E \left[\frac{\mu(u, A)}{\mu(u, \aleph)} \right] = \int_U \frac{\mu(u, A)}{\mu(u, \aleph)} dH(u).$$

Antoniak apresenta, então, o resultado principal de seu trabalho.

Teorema 2.18 (Antoniak [1]) *Seja P um processo Dirichlet em (\aleph, \mathbf{A}) com parâmetro μ . Sejam X uma amostra de tamanho 1 de P e $A \in \mathbf{A}$ qualquer conjunto mensurável tal que $\mu(A) > 0$. Então, a distribuição condicional de P , dado $X \in A$, é uma mistura de processos Dirichlet em (\aleph, \mathbf{A}) com distribuição de mistura H_A no espaço de índices $(A, \mathbf{A} \cap A)$ e medida de transição μ em $A \times (\mathbf{A} \cap A)$, com $H_A(\cdot) = \frac{\mu(\cdot)}{\mu(A)}$ em $\mathbf{A} \cap A$ e $\mu(u, \cdot) = \mu + \delta_u$ para $u \in A$, onde $\delta_u(\cdot)$ é a medida em (\aleph, \mathbf{A}) atribuindo massa um ao ponto u .*

Demonstração: Seja (B_1, B_2, \dots, B_n) uma partição qualquer mensurável de \aleph . Como A é mensurável, obtemos uma partição mensurável refinada considerando $B_{i,1} = A \cap B_i$ e $B_{i,0} = A^c \cap B_i$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^n B_{i,1}$.

Vamos obter a distribuição condicional de $(P(B_{i,j}), i = 1, \dots, n \text{ e } j = 0, 1)$, dado $X \in A$. Assim,

$$\mathcal{P}(P(B_{i,j}) \leq y_{i,j}, i = 1, \dots, n; j = 0, 1 | X \in A) = \frac{\mathcal{P}(P(B_{i,j}) \leq y_{i,j}, i = 1, \dots, n; j = 0, 1, X \in A)}{\mathcal{P}(X \in A)}. \quad (2.34)$$

Das Propriedades 2.6 e 2.7

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(P(B_{i,j}) \leq y_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 0, 1 | X \in A) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^1 \frac{\mu(B_{i,j} \cap A)}{\mu(\aleph)} D(y_{1,0}, \dots, y_{n,0}, y_{1,1}, \dots, y_{n,1} | \mu(B_{1,0}), \dots, \mu(B_{i,j}) + 1, \dots, \mu(B_{n,1}))}{\frac{\mu(A)}{\mu(\aleph)}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\mu(B_{i,1})}{\mu(A)} \\ & D(y_{1,0}, \dots, y_{n,0}, y_{1,1}, \dots, y_{n,1} | \mu(B_{1,0}), \dots, \mu(B_{n,0}), \mu(B_{1,1}), \dots, \mu(B_{i,1}) + 1, \dots, \mu(B_{n,1})), \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $D(y_1, \dots, y_k | \mu_1, \dots, \mu_k)$ é a função de distribuição da Dirichlet com parâmetro (μ_1, \dots, μ_k) no ponto (y_1, \dots, y_k) . Conseqüentemente, da Propriedade 2.1 e considerando $H(\cdot) = \frac{\mu(\cdot)}{\mu(A)}$ em $\mathbf{A} \cap A$, reconhecemos a relação (2.30) do Exemplo 2.15, seguindo o resultado.

Este teorema prova que, sob certas condições, a distribuição a posteriori de P , considerando uma priori processo Dirichlet e dada uma observação censurada, $X \in A$ digamos, é uma mistura de processos Dirichlet.

Um dos resultados em Análise de Sobrevivência decorrente do trabalho de Antoniak foi de Blum e Susarla [6]. Eles calcularam a distribuição a posteriori da medida desconhecida P quando os dados possuem censura à direita (de um modo mais geral, quando as observações pertencem a conjuntos monótonos crescentes).

Teorema 2.19 *A distribuição condicional de P dado $X_i \in A_i (\in \mathbf{A})$, para $i = 1, \dots, k$, com $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k$ e $\mu(A_1) > 0$, é uma mistura de processos Dirichlet com medida de transição definida por $\mu_k(u, A) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{k-1} H_i(A) + \delta_u(A)$ para $(u, A) \in \mathfrak{N} \times \mathbf{A}$ e com medida de mistura H_k , onde H_1, \dots, H_k são definidos por $\mu(A_1)H_1(A) = \mu(A \cap A_1)$ e para $A \in \mathbf{A}$*

$$H_l(A) = \frac{\mu(A \cap A_l \cap \bar{A}_{l-1})}{\mu(A_l) + l - 1} + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\mu(A \cap A_j \cap \bar{A}_{j-1})}{\mu(A_j) + j - 1} \prod_{i=j}^{l-1} \frac{\mu(A_i) + i}{\mu(A_{i+1}) + i}, \quad (2.36)$$

para $l = 2, \dots, k$ onde \bar{B} representa o complemento de B , $A_0 = \emptyset$ e $\delta_u(A)$ é a medida dando massa um ao ponto u , $u \in A$.

No próximo capítulo, propomos um modelo alternativo ao de Taguchi para o monitoramento da qualidade utilizando a teoria de Inferência Bayesiana não-paramétrica. A aplicação deste modelo é feita através da estimação da função de distribuição para cada tempo $i \in \mathbb{N}$, que, no contexto do processo de monitoramento de Taguchi, pode ser interpretada como a fração não-conforme no instante de produção do i -ésimo item do ciclo.

Capítulo 3

Desenvolvimento do modelo alternativo ao de Taguchi

3.1 Introdução

No Capítulo 1, relatamos o desenvolvimento das técnicas estatísticas em controle de qualidade, mais especificamente, sobre o monitoramento “on-line” de qualidade de Taguchi. As mais recentes contribuições nesse contexto são os trabalhos de Nayebpour e Woodall [41], Borges et.al. [8], Nandi e Sreehari [39], Nandi e Sreehari [40] e Trindade, Ho e Quinino [52] que se baseiam no resultado da Teoria da Renovação, como mencionado na seção 1.2.

Nesse capítulo, propomos um novo modelo para o monitoramento “on-line” de qualidade para atributo de Taguchi, alternativo aos modelos de Nayebpour e Woodall [41] e de Nandi e Sreehari [39]. Desenvolvemos este modelo utilizando a teoria da Inferência Bayesiana não-paramétrica, baseados nos trabalhos de Ferguson [21], Antoniak [1] e Blum e Susarla [6], pois o problema de estimar a sequência de probabilidades de produção de itens não-conformes no decorrer de um ciclo de produção (sequência de frações não-conformes) pode ser visto como um problema de estimação de uma função de distribuição mais geral cujo supremo não necessariamente é igual a 1, denominada função de distribuição incompleta (“defective”) por Feller [19].

O processo de Dirichlet, como comentado no Capítulo 2, é uma medida a priori muito

consagrada na área da inferência Bayesiana não-paramétrica. O uso dessa priori é motivado pelo fato de atribuir probabilidade 1 às distribuições de probabilidade discretas (Ferguson [21] e Sethuraman [43]) e pela possibilidade de tratamento analítico no processo inferencial. Por outro lado, quando o objetivo é estimar funções de distribuições mais gerais, uma possibilidade é considerar mistura de processos Dirichlet. A proposta deste trabalho é apresentar um modelo alternativo para o procedimento “on-line” para atributos de Taguchi e desenvolver a operação Bayesiana nesse contexto, isto é, obter a distribuição a posteriori da função de distribuição incompleta (“defective”) que, no contexto de Taguchi, descreve a sequência de frações não-conformes ao longo de um ciclo de produção. Em princípio, tal função de distribuição (medida) é bem geral, não necessariamente absolutamente contínua ou com momentos finitos. Uma aplicação importante, nesse capítulo, é a estimação da referida função de distribuição acompanhada de intensivo estudo de simulação.

3.2 Descrição do modelo Bayesiano

Nesta seção, descrevemos o modelo alternativo para o monitoramento “on-line” de Taguchi. O modelo é construído via condicionamento em alguns parâmetros, tais como o ponto de mudança (η) e a fração não-conforme limite (θ), formalizados adiante. A partir da especificação de distribuições a priori para os parâmetros do processo, é possível encontrar a distribuição a posteriori da fração não-conforme em cada instante de produção e obter as estimativas de Bayes dessas quantidades a posteriori com relação à perda quadrática.

Assim, considere os seguintes espaços mensuráveis

- $((0, 1], \mathcal{B}(0, 1])$ onde $\mathcal{B}(0, 1]$ é a σ -álgebra de Borel de $(0, 1]$. Este espaço refere-se ao limite da sequência de frações não-conformes ao longo do tempo, θ ;
- $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ onde \mathbb{N} é o conjunto dos naturais e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é a classe de subconjuntos de \mathbb{N} . Este espaço é dedicado ao ponto de mudança η ;
- $(\mathbf{P}, \sigma(\mathbf{P}))$ é o espaço mensurável de medidas, onde \mathbf{P} é a família de medidas sobre $(\mathfrak{R}_+, \mathcal{B}(\mathfrak{R}_+))$ e $\sigma(\mathbf{P})$ é a menor σ -álgebra tal que a função $P \in \mathbf{P} \rightarrow P(A) \in \mathfrak{R}_+$ é $\sigma(\mathbf{P})$ -mensurável para todo $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}_+)$. A existência desse espaço é detalhada em Torres [50].

- $(\{0, 1\}^\infty, \sigma(\{0, 1\}^\infty))$ onde $\{0, 1\}^\infty$ é o espaço de sequências de zeros e uns que representam a conformidade (ou não) dos sucessivos itens obtidos do processo de produção e $\sigma(\{0, 1\}^\infty)$ é a menor σ -álgebra contendo os cilindros finito-dimensionais de $\{0, 1\}^\infty$ (Billingsley [4] e Shiriyayev [45]).

Definidos os elementos envolvidos na construção do modelo, teremos, finalmente, como espaço para o modelo, o espaço-produto (mensurável) dado por

$$((0, 1] \times \mathbb{N} \times \mathbf{P} \times \{0, 1\}^\infty, \sigma(\mathcal{B}(0, 1] \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \sigma(\mathbf{P}) \times \sigma(\{0, 1\}^\infty))), \quad (3.1)$$

onde $\sigma(\mathcal{B}(0, 1] \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \sigma(\mathbf{P}) \times \sigma(\{0, 1\}^\infty))$ é a menor σ -álgebra contendo o produto cartesiano entre $\mathcal{B}(0, 1]$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\sigma(\mathbf{P})$ e $\sigma(\{0, 1\}^\infty)$. A descrição de espaços-produto como (3.1) é detalhado em Billingsley [4] e em Shiriyayev [45]. Além disso, as condições de mensurabilidade para acomodar observações de vários ciclos são bem conhecidas e omitidas aqui.

Agora, apresentamos a medida de probabilidade \mathcal{P} sobre o espaço (3.1), formalizando assim o modelo alternativo para o problema de monitoramento da qualidade de Taguchi, sob uma perspectiva Bayesiana não-paramétrica.

Sejam P uma medida finita não-negativa desconhecida, tal que $(P(0, n])_{n \geq 1}$ descreve a sequência de frações não-conformes em um ciclo, $\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} P((0, t])$ e $\eta = \inf \{n \in \mathbb{N} : P((0, n]) > 0\}$, o ponto de mudança.

Admitimos que G represente a incerteza a priori sobre (θ, η) , ou seja, a incerteza sobre o limite superior da fração não-conforme e o momento em que o processo sai do estado de controle, respectivamente. Consideramos que a medida finita não-negativa (desconhecida) P seja tal que, dados θ e η , $P(\mathfrak{R}_+) = \theta$ q.c., de modo que, fixados o valor de ϑ de θ e ζ de η , $\frac{P}{\vartheta}$ é uma medida de probabilidade. Mais precisamente, dados $\theta = \vartheta$ e $\eta = \zeta$, $\frac{P}{\vartheta}$ é distribuída segundo um processo Dirichlet em $(\mathfrak{R}_+, \mathcal{B}(\mathfrak{R}_+))$ com parâmetro $\mu_\zeta : \mathcal{B}(\mathfrak{R}_+) \rightarrow \mathfrak{R}_+$. Abreviadamente, $\frac{P}{\vartheta} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta \sim PD(\mu_\zeta)$. Sejam $\{X_i\}_{i \geq 1}$ variáveis aleatórias que, dados P , $\theta = \vartheta$ e $\eta = \zeta$, são condicionalmente independentes tais que $X_i | P, \theta = \vartheta, \eta = \zeta \sim Ber\left(\frac{P(0, i]}{\vartheta}\right)$. Mais formalmente, consideremos, para todo $n \in \mathbb{N}$ e toda sequência x_1, \dots, x_n de tamanho n

com $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, que

$$\mathcal{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | P(C_1), \dots, P(C_n), \theta = \vartheta, \eta = \zeta) = \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{1-x_i} \text{ q.c.}, \quad (3.2)$$

onde (C_1, \dots, C_{n+1}) é uma partição de \mathfrak{R}_+ com $C_i = ((i-1), i]$ para $i = 1, \dots, n$ e $C_{n+1} = (n, \infty)$, $p_i = \frac{P(0, i]}{\vartheta} = \frac{\sum_{j=1}^i P(C_j)}{\vartheta}$, $x_i \in \{0, 1\}$ para $i = 1, \dots, n$ e, dados valores ϑ e ζ de θ e η , respectivamente, $P(\mathfrak{R}_+) = \vartheta$. No contexto de monitoramento de Taguchi, X_i é a variável que representa a condição de não conformidade do i -ésimo item produzido, ou seja,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo item produzido é não-conforme} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para $i = 1, \dots, n$. Observe que a definição de amostra (3.2) assemelha-se a de Antoniak no sentido que a probabilidade de observar uma sequência de itens em um ciclo de produção dada a medida P não depende do ponto de mudança (no caso, variável misturadora). Além disso, essa condição facilita o cálculo da distribuição a posteriori de P dada a informação de um ciclo de produção. Um outro modelo alternativo poderia incorporar tal dependência condicional.

Por sua vez, os itens são produzidos sequencialmente e um de cada vez. A estratégia de monitoramento consiste de inspeções a cada m itens produzidos e um ciclo é encerrado quando um item não-conforme é amostrado. Ou seja, num ciclo composto de τ inspeções, as primeiras $(\tau - 1)$ peças inspecionadas são consideradas apropriadas e a última não-conforme. Nesse contexto, considera-se que não há atrasos. Assim, no momento que o item defeituoso é amostrado, o processo é interrompido imediatamente para manutenção. No modelo de Taguchi et.al. [49], especifica-se esta situação considerando $l = 0$. O processo inicia-se sob controle e em um momento desconhecido, η , ocorre a mudança do processo para a condição fora de controle. A partir deste ponto, a probabilidade de produção de um item não-conforme aumenta gradativamente, como é o caso de um equipamento que se desgasta pouco a pouco ao longo do tempo, por exemplo. Na Figura 3.1 representamos o procedimento de monitoramento "on-line" de Taguchi.

Considerando os momentos de produção um conjunto discreto, pode-se atribuir ainda, da

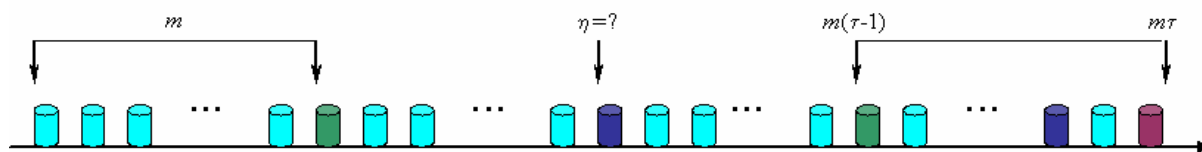


Figura 3.1: Representação do procedimento de monitoramento de controle de qualidade de Taguchi

mesma forma que Nayebpour e Woodall [41], uma estrutura hierárquica para η , como, por exemplo, $\eta|\rho = v \sim Geo(v)$, com uma distribuição Beta para ρ (as condições de mensurabilidade para acomodar a hierarquização neste caso são bastante conhecidas e não são detalhadas por ora). Logo, a partir das considerações acima, podemos representar o modelo, resumidamente, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \theta, \eta &\sim G \\
 \frac{P}{\theta} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta &\sim PD(\mu_\zeta) \\
 X_i | P, \theta = \vartheta, \eta = \zeta &\sim Bernoulli\left(\frac{P(0, i]}{\vartheta}\right), i \in \mathbb{N}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

com $\{X_n\}_{n \geq 1}$ condicionalmente independentes dados $P, \theta = \vartheta, \eta = \zeta$.

Podemos visualizar o modelo e a dependência probabilística entre as quantidades envolvidas (indicada pelas setas) através da seguinte Figura 3.2.

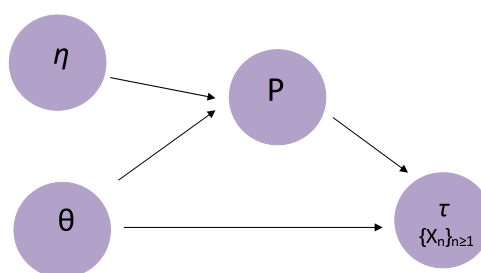


Figura 3.2: Gráfico de Influência do modelo proposto 3.3

Como descrito no Capítulo 1, o modelo proposto por Taguchi implica que, dados η e θ , a fração não-conforme salta do valor inicial 0 para uma proporção θ desconhecida, permanecendo neste patamar até o momento da detecção de que o processo está fora de controle. Assim, o modelo proposto 3.3 apresenta-se como uma alternativa ao modelo de Taguchi (veja Figura 3.3), pois, neste caso, a fração não-conforme aumenta gradativamente até que um item não-conforme é inspecionado e o processo de produção interrompido.

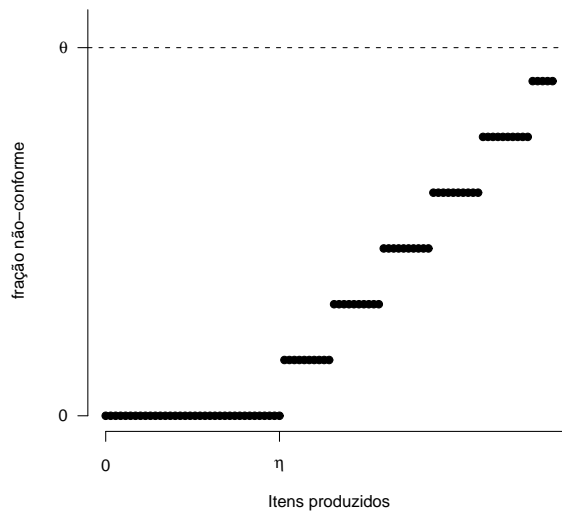


Figura 3.3: Sequência de frações não-conformes em função do tempo t , $t > 0$, dados o ponto de mudança η e o limite superior θ .

No processo de Taguchi, τ representa o número de inspeções necessárias para a detecção do desajuste do processo produtivo. Esta estatística resume a informação obtida sobre os parâmetros no ciclo de produção monitorado, informação esta contida na verossimilhança especificada a seguir.

Fixando o intervalo entre inspeções, $m \in \mathbb{N}$, considerando a partição (D_1, \dots, D_{k+1}) de \mathfrak{R}_+ , onde $D_i = ((i-1)m, im]$ e $D_{k+1} = (km, \infty)$ e definindo $\underline{P}(D) = (P(D_1), \dots, P(D_{k+1}))$, temos que a verossimilhança gerada por $\tau = k$, $k \in \mathbb{N}$, ou seja, obtida pela observação de $(k-1)$

itens conformes seguidos de um item defeituoso é dada por

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P} \left\{ \tau = k / \underline{P(D)}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta \right\} \\
&= \mathcal{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_{im} = 0\} \cap \{X_{km} = 1\} \mid \underline{P(D)}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta \right\} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{P} \left\{ X_{im} = 0 \mid \underline{P(D)}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta \right\} \right) \mathcal{P} \left\{ X_{km} = 1 \mid \underline{P(D)}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta \right\} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{P(im, \infty)}{\vartheta} \right) \frac{P(0, km)}{\vartheta} = \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{P(D_j)}{\vartheta} \right) \right\} \left(\sum_{j=1}^k \frac{P(D_j)}{\vartheta} \right) \\
&= \frac{1}{\vartheta^k} \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{j=i+1}^{k+1} P(D_j) \right) \right\} \left(\sum_{j=1}^k P(D_j) \right). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Notamos que a verossimilhança (3.4) gerada por $\tau = k$ neste cenário, a menos do fator $\frac{1}{\vartheta^k}$, pode também ser vista como a verossimilhança observada em um problema de análise de sobrevivência quando amostram-se k observações independentes e identicamente distribuídas segundo P , onde as primeiras $k - 1$ observações são tempos censurados à direita (nos pontos $m, 2m, \dots, (k - 1)m$) e a última corresponde a um tempo censurado à esquerda (no instante km).

3.3 Distribuição a posteriori de P dado $\tau = k$

Nesta seção, desenvolvemos a distribuição a posteriori da medida P dada a informação amostral produzida pelo procedimento de controle “on-line” de Taguchi, a partir da qual é feita a inferência a respeito da fração não-conforme do processo de produção em qualquer instante. Iniciamos por um resultado da distribuição Dirichlet importante para o desenvolvimento da distribuição a posteriori da medida P .

Resultado 3.1 *Sejam (Y_1, \dots, Y_{k-1}) um vetor aleatório com distribuição Dirichlet de parâmetro $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$, com $a_i > 0$ para todo i , e $\underline{c} = (c_1, \dots, c_k)$ com $c_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \dots, k$. Temos,*

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}_+^k)$, que

$$\int_B y_1^{c_1} \dots y_{k-1}^{c_{k-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)^{c_k} dP_{\underline{a}} = \frac{\prod_{i=1}^k a_i^{\langle c_i \rangle}}{(\sum_{i=1}^k a_i)^{\langle \sum_{i=1}^k c_i \rangle}} P_{\underline{a}+\underline{c}}(B), \quad (3.5)$$

onde $P_{\underline{b}}$ é a medida de probabilidade de um vetor Dirichlet com parâmetro $\underline{b} \in \mathfrak{R}^k$ e $x^{(k)} = \prod_{j=0}^{k-1} (x+j)$

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} & \int_B y_1^{c_1} \dots y_{k-1}^{c_{k-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)^{c_k} dP_{\underline{a}} \\ &= \int_B y_1^{c_1} \dots y_{k-1}^{c_{k-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)^{c_k} \frac{\Gamma(a_1 + \dots + a_k)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_k)} y_1^{a_1-1} \dots y_{k-1}^{a_{k-1}-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)^{a_k-1} dy_1 \dots dy_{k-1} \\ &= \frac{\Gamma(a_1 + \dots + a_k)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_k)} \int_B y_1^{a_1+c_1-1} \dots y_{k-1}^{a_{k-1}+c_{k-1}-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)^{a_k+c_k-1} dy_1 \dots dy_{k-1} \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{c_1-1} (a_1+i) \prod_{i=0}^{c_2-1} (a_2+i) \dots \prod_{i=0}^{c_k-1} (a_k+i)}{\prod_{i=0}^{c_1+\dots+c_k-1} (a_1+\dots+a_k+i)} P_{\underline{a}+\underline{c}}(B) = \frac{\prod_{i=1}^k a_i^{\langle c_i \rangle}}{(\sum_{i=1}^k a_i)^{\langle \sum_{i=1}^k c_i \rangle}} P_{\underline{a}+\underline{c}}(B). \quad (3.6) \end{aligned}$$

Agora, seguiremos com o cálculo da distribuição a posteriori de P dado $X_{im} = 0, i = 1, \dots, k-1$ e $X_{km} = 1$, ou seja, quando temos $\tau = k$ inspeções em um ciclo, supondo que $\frac{P}{\vartheta} / \theta = \vartheta, \eta = \zeta \sim PD(\mu_\zeta)$ onde μ_ζ é uma medida positiva e finita. A distribuição a priori, a menos do parâmetro de “achatamento” θ , é um caso particular da priori de Antoniak [1]. Neste caso, a inferência tem como objetivo a estimação de uma função de distribuição F “mais geral” no sentido em que o limite dessa função, quando t cresce, pode não alcançar o valor um. A seguir, apresentamos o resultado principal desse trabalho.

Teorema 3.2 *Considere o cenário descrito no início da seção 3.2. Sejam (B_1, \dots, B_n) uma partição arbitrária de \mathfrak{R}_+ , $D_i = ((i-1)m, im]$ para $i = 1, \dots, k$, $D_{k+1} = (km, \infty)$ para $k \geq 2$, $Y_{i,j} = P(B_i \cap D_j)$ para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k+1$ e $\underline{Y} = (Y_{i,j}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k+1)$. A função de distribuição de \underline{Y} dado $\tau = k$ no ponto $\underline{y} = (y_{i,j}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k+1)$,*

$\mathcal{P}(\cap_{\{(i,j)\} \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k+1\}} \{Y_{i,j} \leq y_{i,j}\} | \tau = k)$, denotada, daqui por diante, de forma simplificada, por $\mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} | \tau = k)$, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} | \tau = k) &= \\ &= \frac{\int \left\{ \sum_{\mathbb{C}'_k} \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(B_i \cap D_j)^{\langle N'_{(i,j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathbb{R}_+)^{(k)}} D \left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta} | (\mu_\eta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))} (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times (k+1)} \right) \right\} dG_{\theta, \eta}}{\int \left\{ \sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathbb{R}_+)^{(k)}} \right\} dG_{\theta, \eta}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $(\mu_\eta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))} (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times (k+1)}$ é o vetor $n \times (k+1)$ cuja componente é dada por $\mu_\eta(B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}) + \sum_{l=1}^k I_{\{(i_l, j_l)\}}(\nu_1, \nu_2)$, para $\nu_1 = 1, \dots, n$ e $\nu_2 = 1, \dots, k+1$, $\mathbb{C}'_k = \{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) : i_l \in \{1, \dots, n\}$ para todo $l = 1, \dots, k, j_l \in \{l+1, \dots, k+1\}, l = 1, \dots, k-1, j_k \in \{1, \dots, k\}\}$, $\mathbb{C}_k = \{(j_1, \dots, j_k) : j_l \in \{l+1, \dots, k+1\}, l = 1, \dots, k-1$ e $j_k \in \{1, \dots, k\}\}$, $N_{(j)} = \sum_{l=1}^k I_{\{j\}}(j_l)$, $N'_{(i,j)} = \sum_{l=1}^k I_{\{(i,j)\}}(i_l, j_l)$, $D \left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta} | (\mu_\eta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))} (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times (k+1)} \right)$ é a função de distribuição de um vetor aleatório com distribuição Dirichlet com vetor de parâmetros $(\mu_\eta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))} (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times (k+1)}$ no ponto $(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta})_{n \times (k+1)}$ e $\mu_\eta(A)^{(k)} = \prod_{j=0}^{k-1} (\mu_\eta(A) + j)$.

Demonstração: O nosso objetivo é calcular a seguinte função de distribuição a posteriori

$$\mathcal{P}(P(B_1) \leq y_1, \dots, P(B_n) \leq y_n | \tau = k) = \frac{\mathcal{P}(P(B_1) \leq y_1, \dots, P(B_n) \leq y_n, \tau = k)}{\mathcal{P}(\tau = k)} \quad (3.8)$$

onde τ é o número de inspeções realizadas até o momento em que o processo é considerado fora de controle.

Considere os vetores $\underline{P}(D) = (P(D_1), \dots, P(D_{k+1}))$, $\underline{X} = (X_m, \dots, X_{km})$ e $\underline{x} = (0, \dots, 0, 1)$. Denotando por $\mathbf{P}_{\underline{P}(D)|\theta=\vartheta, \eta=\zeta}$ a medida de probabilidade do vetor $(P(D_1), \dots, P(D_{k+1}))$ dados $\theta = \vartheta$ e $\eta = \zeta$, observe que

$$\mathcal{P}(\tau = k | \theta = \vartheta, \eta = \zeta) = \int_{\mathbb{R}_+^{k+1}} \mathcal{P}(\underline{X} = \underline{x} | \underline{P}(D), \theta = \vartheta, \eta = \zeta) d\mathbf{P}_{\underline{P}(D)|\theta=\vartheta, \eta=\zeta}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathfrak{R}_+^{k+1}} \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{P}(X_{im} = 0 | \underline{P(D)}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) \right\} \mathcal{P}(X_{km} = 1 | \underline{P(D)}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) \\
& d\mathbf{P}_{\underline{P(D)}|\theta=\vartheta,\eta=\zeta} \\
&= \int_{\mathfrak{R}_+^{k+1}} \left\{ \left(\frac{P(D_2) + \cdots + P(D_{k+1})}{\vartheta} \right) \left(\frac{P(D_3) + \cdots + P(D_{k+1})}{\vartheta} \right) \cdots \right. \\
& \left. \left(\frac{P(D_k) + P(D_{k+1})}{\vartheta} \right) \left(\frac{P(D_1) + \cdots + P(D_k)}{\vartheta} \right) \right\} d\mathbf{P}_{\underline{P(D)}|\theta=\vartheta,\eta=\zeta} \\
&= \int_{\mathfrak{R}_+^{k+1}} \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{C}_k} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{P(D_j)^{\sum_{i=1}^k I_{\{j\}}(j_i)}}{\vartheta^k} d\mathbf{P}_{\underline{P(D)}|\theta=\vartheta,\eta=\zeta} \\
&= \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{C}_k} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\mu_\zeta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

A última passagem de (3.9) é um caso particular do Resultado 3.1 com $B = \mathfrak{R}_+^{k+1}$.

A partir de (3.9), pode-se concluir que

$$\mathcal{P}(\tau = k | \theta, \eta) = \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{C}_k} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}}, \text{ q.c. } , \tag{3.10}$$

e podemos calcular a probabilidade de obtermos k inspeções em um ciclo (denominador de (3.8)), dada por

$$\mathcal{P}(\tau = k) = \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} dG_{\theta, \eta}, \tag{3.11}$$

onde $G_{\theta, \eta}$ é a medida de probabilidade conjunta de θ e η . Agora, seguiremos no cálculo do numerador de (3.8).

Seja $\underline{t} = (t_{i,j}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k + 1)$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y}, \tau = k) &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y}, \tau = k | \theta, \eta) dG_{\theta, \eta} \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \left(\int_R \mathcal{P}(\tau = k | \underline{t}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) d\mathbf{P}_{\underline{Y} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta} \right) dG_{\theta, \eta}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde R refere-se à região de integração $\cap_{i,j} (-\infty, y_{i,j}]$ para $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k + 1$, e $\mathbf{P}_{\underline{Y} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta}$ representa a medida de probabilidade de $\frac{Y_{i,j}}{\vartheta}$, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k + 1$ dados $\theta = \vartheta$ e $\eta = \zeta$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y}, \tau = k) &= \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \left\{ \int_R \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{P}(X_{im} = 0 | \underline{t}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) \right) \right. \\ &\quad \left. \mathcal{P}(X_{km} = 1 | \underline{t}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) d\mathbf{P}_{\underline{Y} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta} \right\} dG_{\theta, \eta} \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \left\{ \int_R \left(\prod_{l=1}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^{k+1} \frac{t_{i,j}}{\vartheta} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{t_{i,j}}{\vartheta} \right) d\mathbf{P}_{\underline{Y} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta} \right\} dG_{\theta, \eta} \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \left\{ \int_R \left(\sum_{(i_1, j_1)} \dots \sum_{(i_k, j_k)} \prod_{a=1}^k \frac{t_{i_a, j_a}}{\vartheta} \right) d\mathbf{P}_{\underline{Y} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta} \right\} dG_{\theta, \eta}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $(i_l, j_l), l = 1, \dots, k$, são tais que $i_l \in \{1, \dots, n\}$ para todo $l = 1, \dots, k$ e $j_l \in \{l + 1, \dots, k + 1\}$ para $l = 1, \dots, k - 1$ e $j_k \in \{1, \dots, k\}$. Por fim,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y}, \tau = k) &= \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \left\{ \sum_{\{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)\} \in \mathbb{C}'_k} \int_R \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k+1} \frac{t_{i,j}}{\vartheta} \sum_{l=1}^k I_{\{(i,j)\}}(i_l, j_l) d\mathbf{P}_{\underline{Y} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta} \right\} dG_{\theta, \eta} \end{aligned}$$

$$= \int \left\{ \sum_{\mathbb{C}'_k} \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(B_i \cap D_j)^{\langle N'_{(i,j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} D \left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta} \mid (\mu_\eta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))}) (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2})_{n \times (k+1)} \right) \right\} dG_{\theta, \eta}. \quad (3.14)$$

Finalmente de (3.9) e (3.14), a função de distribuição a posteriori de \underline{Y} dado $\tau = k$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} \mid \tau = k) &= \\ &= \frac{\int \left\{ \sum_{\mathbb{C}'_k} \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(B_i \cap D_j)^{\langle N'_{(i,j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} D \left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta} \mid (\mu_\eta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))}) (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2})_{n \times (k+1)} \right) \right\} dG_{\theta, \eta}}{\int \left\{ \sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} \right\} dG_{\theta, \eta}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} \mid \tau = k) &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} \mid \tau = k, \theta, \eta) \frac{\mathcal{P}(\tau = k \mid \theta, \eta)}{\mathcal{P}(\tau = k)} dG_{\theta, \eta} \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} \mid \tau = k, \theta, \eta) \frac{\sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}}}{\int \sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} dG_{\theta, \eta}} dG_{\theta, \eta}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Comparando (3.15) e (3.16), a função de distribuição de \underline{Y} condicional a $\theta = \vartheta$, $\eta = \zeta$ e $\tau = k$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} \mid \tau = k, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) &= \\ &= \frac{\sum_{\mathbb{C}'_k} \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(B_i \cap D_j)^{\langle N'_{(i,j)} \rangle}}{\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} D \left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\vartheta} \mid (\mu_\zeta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))}) (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2})_{n \times (k+1)} \right)}{\sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}}}. \end{aligned}$$

(3.17)

Logo,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Y_{i,j}}{\vartheta}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k+1 \right) | \theta = \vartheta, \eta = \zeta, \tau = k \sim \\ & \sim \sum_{\mathbb{C}'_k} \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(B_i \cap D_j)^{\langle N'_{(i,j)} \rangle}}{\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} \text{DIR} \left((\mu_\zeta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))} (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times (k+1)} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $\text{DIR}((\mu_\zeta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))} (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times (k+1)})$ representa a distribuição Dirichlet com vetor de parâmetros $(\mu_\zeta^{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))} (B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times (k+1)}$, para $\nu_1 = 1, \dots, n$ e $\nu_2 = 1, \dots, k+1$. Considerando que, dado $\eta = \zeta$, $\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+) = \Lambda$, $\Lambda > 0$, para todo $\zeta \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} & \frac{P(B_1)}{\vartheta}, \dots, \frac{P(B_n)}{\vartheta} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta, \tau = k \sim \\ & \sim \sum_{\mathbb{C}'_k} \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(B_i \cap D_j)^{\langle N'_{(i,j)} \rangle}}{\sum_{\mathbb{C}_k} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}} \text{DIR} \left((\mu_\zeta(B_{\nu_1}) + N'_{(\nu_1)})_{n \times 1} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $\text{DIR}((\mu_\zeta(B_{\nu_1}) + N'_{(\nu_1)})_{n \times 1})$ representa a distribuição Dirichlet com vetor de parâmetros $(\mu_\zeta(B_{\nu_1}) + N'_{(\nu_1)})_{\nu_1=1, \dots, n}$, onde $N'_{(\nu_1)} = \sum_{\nu_2=1}^{k+1} \sum_{l=1}^k I_{\{(\nu_1, \nu_2)\}}(i_l, j_l) = \sum_{l=1}^k I_{\{(\nu_1)\}}(i_l)$.

A seguir, é calculada a distribuição a posteriori de P dado $\tau = 1$, ou seja, quando o primeiro item inspecionado é não-conforme, para completar o teorema. Seja B_1, \dots, B_n uma partição de \mathfrak{R}_+ , $D_1 = (0, m]$ e $D_2 = (m, \infty)$. Assim, considerando $\underline{P(D)} = (P(D_1), P(D_2))$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tau = 1 | \theta = \vartheta, \eta = \zeta) &= \int_{\mathfrak{R}_+} \mathcal{P}(X = 1 | \underline{P(D)}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) d\mathbf{P}_{\underline{P(D)} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta} \\ &= \int_{\mathfrak{R}_+} \mathcal{P}(X = 1 | P(0, m], \theta = \vartheta, \eta = \zeta) d\mathbf{P}_{\underline{P(D)} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta} \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathfrak{R}_+} \frac{P(0, m]}{\vartheta} d\mathbf{P}_{P(D)|\theta=\vartheta, \eta=\zeta} = \frac{\mu_\zeta(0, m]}{\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+)}, \quad (3.20)$$

pois a distribuição de $\frac{P(0, m]}{\vartheta}$ dados $\theta = \vartheta$ e $\eta = \zeta$ corresponde a uma $Beta(\mu_\zeta(0, m], \mu_\zeta(m, \infty))$. Logo, a probabilidade de que o primeiro item amostrado seja não-conforme é

$$\mathcal{P}(\tau = 1) = \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} dG_{\theta, \eta} = E \left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} \right), \quad (3.21)$$

onde, dados $\theta = \vartheta$ e $\eta = \zeta$, $\mu_\zeta(\cdot)$ é uma medida finita em $\mathcal{B}(\mathfrak{R}_+)$.

Sejam $Y_{i,1} = P(B_i \cap (0, m])$, $Y_{i,2} = P(B_i \cap (m, \infty))$ para $i = 1, \dots, n$ e $\underline{Y} = (Y_{i,j}, i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2)$. Pela Propriedade 2.3 da distribuição Dirichlet, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y}, \tau = 1) &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y}, \tau = 1 | \theta = \vartheta, \eta = \zeta) dG_{\theta, \eta} \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \left(\int_R \mathcal{P}(\tau = 1 | \underline{t}, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) d\mathbf{P}_{\underline{Y}|\theta=\vartheta, \eta=\zeta} \right) dG_{\theta, \eta}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde a última igualdade é decorrente da definição de probabilidade condicional. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y}, \tau = 1) &= \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \left(\int_R \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,1}}{\vartheta} d\mathbf{P}_{\underline{Y}|\theta=\vartheta, \eta=\zeta} \right) dG_{\theta, \eta} \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\mu_\eta(B_i \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} D \left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta} | (\mu_\eta^{(i,1)}(B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times 2} \right) \right) dG_{\theta, \eta}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $D \left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta} | (\mu_\eta^{(i,1)}(B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times 2} \right)$ representa a função de distribuição da Dirichlet com parâmetro $(\mu_\eta^{(i,1)}(B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times 2}$ no ponto $(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta})_{n \times 2}$, $(\mu_\eta^{(i,1)}(B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times 2}$ corresponde ao vetor cujas componentes são $\mu_\eta(B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}) + I_{\{(i,1)\}}(\nu_1, \nu_2)$ para $\nu_1 = 1, \dots, n$, $\nu_2 = 1, 2$, R refere-se à região de integração $\cap_{i,j}(-\infty, y_{i,j}]$ para $i = 1, \dots, n$; $j = 1, 2$ e $I_{(i,1)}(\nu_1, \nu_2)$ é igual a

um quando $(\nu_1, \nu_2) = (i, 1)$.

Assim, a função de distribuição a posteriori de $\underline{Y} = (P(B_i \cap (0, m]), P(B_i \cap (m, \infty))), i = 1, \dots, n$, dado $\tau = 1$, no ponto \underline{y} é

$$\mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} | \tau = 1) = \frac{\int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_\eta(B_i \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} D\left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\theta} | (\mu_\eta^{(i,1)}(B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times 2}\right) dG_{\theta, \eta}}{E\left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right)}. \quad (3.24)$$

Por outro lado, pelo resultado (3.20) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} | \tau = 1) &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} | \tau = 1, \theta, \eta) \frac{\mathcal{P}(\tau = 1 | \theta, \eta)}{\mathcal{P}(\tau = 1)} dG_{\theta, \eta} \\ &= \int_{(0,1] \times \mathbb{N}} \frac{\mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} | \tau = 1, \theta, \eta) \frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}}{E\left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right)} dG_{\theta, \eta}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comparando (3.24) e (3.25), a função de distribuição de \underline{Y} condicional a $\tau = 1$, $\theta = \vartheta$ e $\eta = \zeta$ é

$$\mathcal{P}(\underline{Y} \leq \underline{y} | \tau = 1, \theta = \vartheta, \eta = \zeta) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_\zeta(B_i \cap (0, m])}{\mu_\zeta(0, m]} D\left(\frac{y_{\nu_1, \nu_2}}{\vartheta} | (\mu_\zeta^{(i,1)}(B_{\nu_1} \cap D_{\nu_2}))_{n \times 2}\right). \quad (3.26)$$

Logo,

$$\frac{P(B_1)}{\vartheta}, \dots, \frac{P(B_n)}{\vartheta} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta, \tau = 1 \sim \sum_{i=1}^n p_i^\zeta \text{DIR}(\mu_\zeta(B_1), \dots, \mu_\zeta(B_i) + 1, \dots, \mu_\zeta(B_n)), \quad (3.27)$$

onde $p_i^\zeta = \frac{\mu_\zeta(B_i \cap (0, m])}{\mu_\zeta(0, m]}$, para $i = 1, \dots, n$, e $\text{DIR}(\underline{a})$ representa a distribuição Dirichlet com parâmetro \underline{a} . Observe que a função de distribuição a posteriori dado $\tau = 1$, dada em (3.24),

pode ser obtida pela equação geral (3.15), considerando o conjunto $C'_1 = \{(i_1, j_1) : i_1 \in \{1, \dots, n\} \text{ e } j_1 = 1\}$.

3.4 Estimação da função de distribuição $F(t)$

Nesta seção, determinamos a distribuição a posteriori e a estimativa de Bayes de $F(t) = P((0, t])$, $t \in \mathfrak{R}_+$, dado que houve k inspeções em um ciclo, ou seja, $\tau = k$. Além disso, apresentamos alguns resultados numéricos a fim de avaliarmos o desempenho das estimativas obtidas. Lembrando que $D_i = ((i-1)m, im]$ para $i = 1, \dots, k$, $D_{k+1} = (km, \infty)$ e tomando $B_1 = (0, t]$ e $B_2 = (t, \infty)$, temos de (3.19), que

$$\begin{aligned} \frac{P(B_1)}{\vartheta} &= \frac{F(t)}{\vartheta} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta, \tau = k \sim \\ &\sim \sum_{\mathbb{C}'_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta((0, t] \cap D_j)^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\zeta((t, \infty) \cap D_j)^{\langle N'_{(2,j)} \rangle}}{\sum_{\mathbb{C}_k} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}} \text{Beta}(\mu_\zeta(0, t] + N'_{(1)}, \mu_\zeta(t, \infty) + N'_{(2)}) \\ &\sim \sum_{s=0}^k p_s^\zeta \text{Beta}(\mu_\zeta(0, t] + s, \mu_\zeta(t, \infty) + k - s), \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde μ_ζ refere-se à medida do processo Dirichlet considerada a priori dado $\eta = \zeta$,

$$p_s^\zeta = \frac{\sum_{\mathbb{C}'_{k,s}} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta((0, t] \cap D_j)^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\zeta((t, \infty) \cap D_j)^{\langle N'_{(2,j)} \rangle}}{\sum_{\mathbb{C}_k} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}},$$

$s = \sum_{l=1}^k I_{\{1\}}(i_l)$, $\mathbb{C}'_{k,s} = \{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) \in \mathbb{C}'_k : \sum_{l=1}^k I_{\{1\}}(i_l) = s\}$, $N_{(j)} = \sum_{l=1}^k I_{\{j\}}(j_l)$, $\text{Beta}(a, b)$ representa a distribuição Beta com parâmetros a e b e $\mu_\zeta(A)^{\langle k \rangle} = \prod_{j=0}^{k-1} (\mu_\zeta(A) + j)$. Logo, observe que, dados $\theta = \vartheta$, $\eta = \zeta$ e $\tau = k$, a distribuição a posteriori de $\frac{F(t)}{\vartheta}$ é uma mistura de $k+1$ Betas.

Utilizando o resultado (3.28) em (3.15) com $n = 2$, obtém-se a função de distribuição a

posteriori de $F(t)$ dado $\tau = k$ no ponto y dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(F(t) \leq y | \tau = k) &= \frac{1}{\int \left\{ \sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} \right\} dG_{\theta, \eta}} \int \frac{1}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} \\ &\quad \left\{ \sum_{s=0}^k \sum_{\mathbb{C}'_{k,s}} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta((0, t] \cap D_j)^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\eta((t, \infty) \cap D_j)^{\langle N'_{(2,j)} \rangle} \right. \\ &\quad \left. B\left(\frac{y}{\theta}; \mu_\eta(0, t] + s, \mu_\eta(t, \infty) + k - s\right) \right\} dG_{\theta, \eta}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $B(y; a, b)$ é a função de distribuição de uma variável aleatória Beta com parâmetros a e b no ponto y . Sob a função de perda quadrática, a estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = k$ é dada por

$$\begin{aligned} E(F(t) | \tau = k) &= \\ &= \frac{\int \frac{\theta}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} \left\{ \sum_{s=0}^k \sum_{\mathbb{C}'_{k,s}} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta((0, t] \cap D_j)^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\eta((t, \infty) \cap D_j)^{\langle N'_{(2,j)} \rangle} \frac{\mu_\eta(0, t] + s}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} \right\} dG_{\theta, \eta}}{E\left(\sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}}\right)} \\ &= \frac{\sum_{s=0}^k \int \frac{\theta(\mu_\eta(0, t] + s)}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k+1 \rangle}} \left\{ \sum_{\mathbb{C}'_{k,s}} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta((0, t] \cap D_j)^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\eta((t, \infty) \cap D_j)^{\langle N'_{(2,j)} \rangle} \right\} dG_{\theta, \eta}}{E\left(\sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}}\right)}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $\mathbb{C}'_k = \{((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)) : i_l \in \{1, 2\} \text{ para todo } l = 1, \dots, k, j_l \in \{l+1, \dots, k+1\}, l = 1, \dots, k-1, j_k \in \{1, \dots, k\}\}$, $\mathbb{C}_k = \{(j_1, \dots, j_k) : j_l \in \{l+1, \dots, k+1\}, l = 1, \dots, k-1 \text{ e } j_k \in \{1, \dots, k\}\}$, $\mathbb{C}'_{k,s} = \{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k) \in \mathbb{C}'_k : \sum_{l=1}^k I_{\{1\}}(i_l) = s\}$, $N_{(j)} = \sum_{l=1}^k I_{\{j\}}(j_l)$, $N'_{(i,j)} = \sum_{l=1}^k I_{\{(i,j)\}}(i_l, j_l)$ e $\mu_\eta(A)^{\langle k \rangle} = \prod_{j=0}^{k-1} (\mu_\eta(A) + j)$.

Note que, dado $\eta = \zeta$, quando $t \rightarrow \infty$, temos que $\mu_\zeta(D_j \cap (0, t])$ tende a $\mu_\zeta(D_j)$, $\mu_\zeta(D_j \cap (t, \infty))$ tende a 0 para $j = 1, \dots, k$, $\mu_\zeta(D_{k+1} \cap (t, \infty)) = \mu_\zeta((t, \infty)) \rightarrow 0$ e $\mu_\zeta(D_{k+1} \cap (0, t]) \rightarrow$

$\mu_\zeta(D_{k+1})$. Além disso, quando $t \rightarrow \infty$, a soma do numerador se reduz à soma dos elementos de $C'_{k,k}$ para os quais $N'_{(1,j)} = \sum_{l=1}^k I_{\{(1,j)\}}(i_l, j_l) = N_{(j)}$ e $N'_{(2,j)} = \sum_{l=1}^k I_{\{(2,j)\}}(i_l, j_l) = 0$ pois $i_l = 1$ para todo $l = 1, \dots, k$. Conseqüentemente, $\lim_{t \rightarrow \infty} E(F(t) | \tau = k) = E(\theta)$, pela independência a priori das variáveis θ e η , ou seja, a estimativa de Bayes a posteriori da fração não-conforme quando o processo está operando a um longo período de tempo tende a esperança a priori da fração não-conforme limite θ .

Agora vamos analisar o comportamento de

$$\sum_{\mathbb{C}'_{k,s}} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(D_j \cap (0, t]) \langle N'_{(1,j)} \rangle \mu_\zeta(D_j \cap (t, \infty)) \langle N'_{(2,j)} \rangle. \quad (3.31)$$

Estes resultados são úteis no cálculo computacional das estimativas de Bayes. Para $t < m$, observe que

$$\begin{aligned} D_1 \cap (0, t] &= (0, t] \\ D_j \cap (0, t] &= \emptyset, \quad \text{para } j = 2, \dots, k+1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_1 \cap (t, \infty) &= (t, m] \\ D_j \cap (t, \infty) &= D_j, \quad \text{para } j = 2, \dots, k+1 \end{aligned}$$

Por outro lado, para $t \geq m$ temos

$$\begin{aligned} D_j \cap (0, t] &= D_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor \\ D_j \cap (0, t] &= \left(\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor m, t \right], \quad \text{para } j = \left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 1 \\ D_j \cap (0, t] &= \emptyset, \quad \text{para } j = \left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 2, \dots, k+1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 D_j \cap (t, \infty) &= \emptyset, & \text{para } j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor \\
 D_j \cap (t, \infty) &= \left(t, \left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor (m+1) \right], & \text{para } j = \left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 1 \\
 D_j \cap (t, \infty) &= D_j, & \text{para } j = \left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 2, \dots, k+1,
 \end{aligned}$$

onde $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x .

O cálculo exato (3.30) demanda muito esforço computacional, o que, na prática, resulta em um tempo longo para a estimação da F . O algoritmo para esse cálculo foi desenvolvido através do programa R. No apêndice, apresentamos o desenvolvimento da estimativa de Bayes de $F(t)$ (resultado (3.30)), para $t > 0$, dado $\tau = 1$ e dado $\tau = 2$, com as respectivas rotinas computacionais. Para os demais casos ilustrados ($\tau = 3, \dots, 8$), os resultados são obtidos diretamente dos programas computacionais, não sendo exibidos desenvolvimentos analíticos da expressão (3.30) para estes casos. Além disso, os resultados são analisados graficamente e discutidos para os casos citados anteriormente. A sensibilidade da escolha dos parâmetros da distribuição a priori também é estudada. O único problema nesta aplicação foi a grande demanda computacional necessária devida à complexidade da mistura da distribuição a posteriori.

Capítulo 4

Exemplos Numéricos

4.1 Cálculo da estimativa de $F(t)$ dado $\tau = 1$.

Nessa seção, calculamos a estimativa de Bayes de F , associada a P , considerando função de perda quadrática, quando o primeiro item inspecionado é considerado não-conforme.

Resultado 4.1 *A estimativa de Bayes para $F(t)$, para $t > 0$, dado $\tau = 1$ é dada por*

$$E(F(t)|\tau = 1) = \frac{E\left(\frac{\theta\{\mu_\eta(0,m)\mu_\eta(0,t] + \mu_\eta((0,t] \cap (0,m])\}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}}\right)}{E\left(\frac{\mu_\eta(0,m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right)}, \quad (4.1)$$

onde, dado $\eta = \zeta$, $\mu_\zeta(\cdot)$ é a medida do processo Dirichlet considerada a priori.

Demonstração:

Considere $n = 2$ e $B_1 = (0, t]$ e $B_2 = (t, \infty)$ em (3.27). Logo, temos

$$\begin{aligned} \frac{P(B_1)}{\vartheta} &= \frac{F(t)}{\vartheta} | \theta = \vartheta, \eta = \zeta, \tau = 1 \sim \\ &\sim \frac{\mu_\zeta((0, t] \cap (0, m])}{\mu_\zeta(0, m]} \text{Beta}(\mu_\zeta(0, t] + 1, \mu_\zeta(t, \infty)) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu_\zeta((t, \infty) \cap (0, m])}{\mu_\zeta(0, m]} \text{Beta}(\mu_\zeta(0, t], \mu_\zeta(t, \infty) + 1) \quad (4.2)$$

onde $\text{Beta}(a, b)$ representa a distribuição da variável aleatória Beta com parâmetros a e b . Logo, a distribuição a posteriori condicional a $\theta = \vartheta$, $\eta = \zeta$ e $\tau = 1$ corresponde a uma mistura das distribuições Beta $(\mu_\zeta(0, t] + 1, \mu_\zeta(t, \infty))$ e Beta $(\mu_\zeta(0, t], \mu_\zeta(t, \infty) + 1)$ ponderada pelos pesos $\frac{\mu_\zeta((0, t] \cap (0, m])}{\mu_\zeta(0, m]}$ e $\frac{\mu_\zeta((t, \infty) \cap (0, m])}{\mu_\zeta(0, m]}$, respectivamente.

Substituindo (4.2) em (3.25), temos que a função de distribuição de $F(t)$ a posteriori dado $\tau = 1$ no ponto y é

$$P(F(t) \leq y | \tau = 1) = \int_{(0, 1] \times \mathbb{N}} \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{\mu_\eta(B_i \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} B\left(\frac{y}{\theta}; (\mu_\eta(B_{\nu_1}) + I_{(i)}(\nu_1))_{2 \times 1}\right)}{E\left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right)} dG_{\theta, \eta} \quad (4.3)$$

onde $B(y; a, b)$ é a função de distribuição de uma variável aleatória Beta com parâmetros a e b no ponto y . A estimativa de Bayes de $F(t)$ a posteriori é dada por

$$E(F(t) | \tau = 1) = \int y d\mathbf{P}_{F(t) | \tau = 1}, \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{P}_{F(t) | \tau = 1}$ é a medida de probabilidade de $F(t)$ dado $\tau = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} E(F(t) | \tau = 1) &= \\ &= \frac{1}{E\left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right)} \int_{(0, 1] \times \mathbb{N}} \theta \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_\eta(B_i \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} \int_0^\theta \frac{y}{\theta} \text{Beta}\left(\frac{y}{\theta}; (\mu_\eta(B_{\nu_1}) + I_{(i)}(\nu_1))_{2 \times 1}\right) dy dG_{\theta, \eta} \\ &= \frac{1}{E\left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right)} \int_{(0, 1] \times \mathbb{N}} \theta \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_\eta(B_i \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} \frac{(\mu_\eta(B_1) + I_{\{1\}}(i))}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+) + 1} dG_{\theta, \eta} \\ &= \frac{\int_{(0, 1] \times \mathbb{N}} \theta \left\{ \frac{\mu_\eta((0, t] \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} \frac{\mu_\eta(0, t] + 1}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+) + 1} + \frac{\mu_\eta((t, \infty) \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} \frac{\mu_\eta(0, t]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+) + 1} \right\} dG_{\theta, \eta}}{E\left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{E\left(\frac{\theta\{\mu_\eta(0,m)\mu_\eta(0,t)+\mu_\eta((0,t]\cap(0,m])\}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}}\right)}{E\left(\frac{\mu_\eta(0,m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right)}, \quad (4.5)$$

onde $\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)} = \mu_\eta(\mathfrak{R}_+)(\mu_\eta(\mathfrak{R}_+) + 1)$ e $Beta(\frac{y}{\theta}, (\mu_\eta(B_{\nu_1}) + I_{(i)}(\nu_1))_{2 \times 1})$ é a função densidade da distribuição Beta com parâmetros $(\mu_\eta(B_{\nu_1}) + I_{(i)}(\nu_1))_{2 \times 1}$ no ponto $\frac{y}{\theta}$.

Observe que, se tomarmos $t \rightarrow \infty$, temos $\frac{\mu_\eta(0,m]\mu_\eta(0,t)+\mu_\eta((0,t]\cap(0,m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}} \rightarrow \frac{\mu_\eta(0,m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}$ que coincide com o integrando em η do denominador.

Em seguida, duas medidas para os parâmetros das misturas de Processos Dirichlet a priori são utilizadas para realizar a inferência sobre a função de distribuição F , organizadas em exemplos. A primeira medida considerada foi a degenerada em um ponto arbitrário e, em seguida, a exponencial truncada no ponto de mudança η .

Exemplo 4.2 *Estimativa de Bayes de $F(t)$ com medida degenerada*

Considere, para cada valor ζ de η , a medida degenerada em ζ , $\mu_\zeta(\cdot) = \Lambda I_{(\cdot)}(\zeta)$, onde $\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+) = \Lambda$, Λ é uma constante positiva, $\eta|\rho = v \sim Geo(v)$, $\theta \sim Beta(a_1, b_1)$ e $\rho \sim Beta(a_2, b_2)$, $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$, supondo que θ e η são independentes (situação razoável em muitos casos práticos, Dasgupta e Mandal [13]). Primeiramente, a estimativa a priori de $F(t)$ para $t > 0$ é dada por

$$\begin{aligned} E(F(t)) &= E_{\theta, \eta} \left(\theta E \left(\frac{F(t)}{\theta} \middle| \theta, \eta \right) \right) = E_{\theta, \eta} \left(\theta \frac{\mu_\eta(0, t]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} \right) \\ &= E(\theta) \int \sum_{j=1}^{[t]} I_{(0, t]}(j) \rho (1 - \rho)^{j-1} \frac{\Gamma(a_2 + b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \rho^{a_2-1} (1 - \rho)^{b_2-1} d\rho = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \sum_{j=1}^{[t]} C_G(j) \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $C_G(j) = P(\eta = j) = \frac{\Gamma(a_2+b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(a_2+1)\Gamma(b_2+j-1)}{\Gamma(a_2+b_2+j)}$ é a probabilidade de observar j inspeções em um ciclo e $[t]$ é o maior inteiro menor ou igual a t .

Para o cálculo da estimativa de $F(t)$ dado $\tau = 1$, é necessário considerar os casos a seguir. Fixando η igual a ζ , como estamos supondo que $\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+) = \Lambda$, Λ é uma constante positiva, o

numerador de (4.4), para $t \leq m$, é dado por

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\mu_\eta(0, m] \mu_\eta(0, t] + \mu_\eta((0, t] \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}} \right) &= E \left(\frac{\mu_\eta(0, t] (\mu_\eta(0, m] + 1)}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}} \right) \\ &= \frac{1}{\Lambda(\Lambda + 1)} \int \sum_{j=1}^{[t]} \Lambda I_{(0, t]}(j) (\Lambda I_{(0, m]}(j) + 1) \rho(1 - \rho)^{j-1} \frac{\Gamma(a_2 + b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \rho^{a_2-1} (1 - \rho)^{b_2-1} d\rho \\ &= \sum_{j=1}^{[t]} C_G(j). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se $t > m$,

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\mu_\eta(0, m] \mu_\eta(0, t] + \mu_\eta((0, t] \cap (0, m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}} \right) &= E \left(\frac{\mu_\eta(0, m] (\mu_\eta(0, t] + 1)}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}} \right) \\ &= \frac{1}{\Lambda(\Lambda + 1)} \sum_{j=1}^m \Lambda I_{(0, m]}(j) (\Lambda I_{(0, t]}(j) + 1) C_G(j) = \sum_{j=1}^m C_G(j). \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(i)} = \prod_{j=0}^{i-1} (\mu_\eta(\mathfrak{R}_+) + j)$.

Por sua vez, o denominador de (4.4) é dado por

$$E \left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)} \right) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^m \Lambda I_{(0, m]}(j) C_G(j) = \sum_{j=1}^m C_G(j) \quad (4.9)$$

Substituindo os resultados (4.7)-(4.9) em (4.4) e como estamos supondo que $\theta \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$, obtemos a estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 1$

$$E(F(t)|\tau = 1) = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \frac{\sum_{j=1}^{[t]} C_G(j)}{\sum_{j=1}^m C_G(j)}, \quad \text{se } t \leq m \quad (4.10)$$

$$E(F(t)|\tau = 1) = \frac{a_1}{a_1 + b_1}, \quad \text{se } t > m \quad (4.11)$$

onde $C_G(j) = \frac{\Gamma(a_2+b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(a_2+1)\Gamma(b_2+j-1)}{\Gamma(a_2+b_2+j)}$ e $[t]$ é o maior inteiro menor ou igual a t . Observe que a estimativa da fração não-conforme para os tempos posteriores à primeira inspeção é a média a priori da fração não-conforme limite e a estimativa para os tempos anteriores possui uma correção dependente do tempo na qual a fração está sendo estimada.

Exemplo 4.3 Estimativa de Bayes de $F(t)$ com medida exponencial Consideramos agora a medida exponencial truncada em ζ para o cálculo da estimativa de Bayes a posteriori de $F(t)$, $t \geq 0$, ou seja, que $\eta|\rho = v \sim \text{Geo}(v)$ e que para cada ζ valor de η , $\mu_\zeta(t, \infty) = \Lambda e^{-\gamma(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+) = \Lambda$, Λ e γ constantes e positivas, $\theta \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$ e $\rho \sim \text{Beta}(a_2, b_2)$, $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$.

De forma análoga a (4.6), a estimativa a priori de $F(t)$ sob essa medida é dada por

$$E(F(t)) = E\left(\frac{\mu_\eta(0, t]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right) = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \sum_{j=1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(m-j)}) C_G(j) \quad (4.12)$$

Em seguida, determinaremos a estimativa de $F(t)$ dado $\tau = 1$ supondo a medida exponencial. O denominador de (4.4) é dado por

$$E\left(\frac{\mu_\eta(0, m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)}\right) = \sum_{j=1}^m (1 - e^{-\gamma(m-j)}) C_G(j) \quad (4.13)$$

Prosseguindo com o cálculo do numerador da estimativa de Bayes de $F(t)$, quando $t < m$

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(0, m] \mu_\eta(0, t] + \mu_\eta((0, t] \cap (0, m])) &= E(\mu_\eta(0, t] (\mu_\eta(0, m] + 1)) \\ &= \sum_{j=1}^{[t]} \Lambda (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(m-j)}) C_G(j) \end{aligned} \quad (4.14)$$

e, quando $t \geq m$, temos

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(0, m] \mu_\eta(0, t] + \mu_\eta((0, t] \cap (0, m])) &= E(\mu_\eta(0, m] (\mu_\eta(0, t] + 1)) \\ &= \sum_{j=1}^m \Lambda (1 - e^{-\gamma(m-j)}) (1 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(t-j)}) C_G(j). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Logo, substituindo (4.14) e (4.15) em (4.4), a estimativa de Bayes para $F(t)$ dado $\tau = 1$ para $t < m$ é dada por

$$E(F(t)|\tau = 1) = \frac{\frac{E(\theta)}{\Lambda+1} \left\{ \sum_{j=1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(m-j)}) \right\} C_G(j)}{\sum_{j=1}^m (1 - e^{-\gamma(m-j)}) C_G(j)} \quad (4.16)$$

e, quando $t \geq m$,

$$E(F(t)|\tau = 1) = \frac{\frac{E(\theta)}{\Lambda+1} \left\{ \sum_{j=1}^m (1 - e^{-\gamma(m-j)}) (1 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(t-j)}) C_G(j) \right\}}{\sum_{j=1}^m (1 - e^{-\gamma(m-j)}) C_G(j)} \quad (4.17)$$

onde $C_G(j) = \frac{\Gamma(a_2+b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(a_2+1)\Gamma(b_2+j-1)}{\Gamma(a_2+b_2+j)}$ e $[t]$ é o maior inteiro menor ou igual a t .

Observe que a estimativa de Bayes de $F(t)$ depende essencialmente das medidas μ avaliadas em cada momento em que houve a produção de um item até o momento analisado. Após a primeira inspeção, a estimativa torna-se constante em relação a t , ou seja, estimativa de Bayes converge para este valor conforme t aumenta.

Na próxima subseção, ilustramos a estimação da função de distribuição F dado $\tau = 2$.

4.2 Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$.

Resultado 4.4 O resultado analítico da estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$ é dada por

$$E(F(t)|\tau = 2) = \frac{1}{\int \left\{ \frac{\mu_\eta(m, \infty) \mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(m, 2m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{[2]}} \right\} dG_{\theta, \eta}}$$

$$\left\{ \int \frac{\theta}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{[3]}} (\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(0, 2m] \mu_\eta(m, \infty) + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m] \right. \\ \left. + \mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) \mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta(m, \infty) + 2\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t])) \right\} \quad (4.18)$$

onde μ_η é a medida da mistura de processos Dirichlet considerada a priori.

Demonstração:

A partir do resultado (3.30), considere as seguintes somas parciais

$$\begin{aligned} S_0(\eta) &= \sum_{\mathbb{C}'_{2,0}} \prod_{j=1}^3 \mu_\eta(D_j \cap (0, t])^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\eta(D_j \cap (t, \infty))^{\langle N'_{(2,j)} \rangle} \\ &= \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \mu_\eta((0, m] \cap (t, \infty)) + \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \\ &\quad (\mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) + 1) + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (t, \infty)) \mu_\eta((0, m] \cap (t, \infty)) \\ &\quad + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (t, \infty)) \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \\ &= \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) (\mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) + 1) \\ &\quad + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (t, \infty)) \mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) \\ &= \mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) \mu_\eta((m, \infty) \cap (t, \infty)) + \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $\mathbb{C}'_{2,0} = \{((2, 2), (2, 1)); ((2, 2), (2, 2)); ((2, 3), (2, 1)); ((2, 3), (2, 2))\}$.

$$\begin{aligned} S_1(\eta) &= \sum_{\mathbb{C}'_{2,1}} \prod_{j=1}^3 \mu_\eta(D_j \cap (0, t])^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\eta(D_j \cap (t, \infty))^{\langle N'_{(2,j)} \rangle} \\ &= \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta((0, m] \cap (t, \infty)) + \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \\ &\quad + \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \mu_\eta((0, m] \cap (0, t]) + \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \\ &\quad + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (0, t]) \mu_\eta((0, m] \cap (t, \infty)) + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (0, t]) \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \\ &\quad + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (t, \infty)) \mu_\eta((0, m] \cap (0, t]) + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (t, \infty)) \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \\ &= \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) + \mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_\eta((2m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (t, \infty))\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \\
= & \mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) + \mu_\eta((m, \infty) \cap (t, \infty))\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t])
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde $\mathbb{C}'_{2,1} = \{((1, 2), (2, 1)); ((1, 2), (2, 2)); ((2, 2), (1, 1)); ((2, 2), (1, 2)); ((1, 3)(2, 1)); ((1, 3)(2, 2)); ((2, 3)(1, 1)); ((2, 3)(1, 2))\}$.

$$\begin{aligned}
S_2(\eta) &= \sum_{\mathbb{C}'_{2,2}} \prod_{j=1}^3 \mu_\eta(D_j \cap (0, t])^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\eta(D_j \cap (t, \infty))^{\langle N'_{(2,j)} \rangle} \\
&= \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t])\mu_\eta((0, m] \cap (0, t]) + \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t])(\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) + 1) \\
&\quad + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta((0, m] \cap (0, t]) + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \\
&= \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t])(\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) + 1) + \mu_\eta((2m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \\
&= \mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t])\mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) + \mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t])
\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde $\mathbb{C}'_{2,2} = \{((1, 2), (1, 1)); ((1, 2), (1, 2)); ((1, 3), (1, 1)); ((1, 3), (1, 2))\}$.

A parte do numerador da estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$ pode ser calculada substituindo (4.19) a (4.21) no numerador de (3.30). Logo,

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=0}^2 \sum_{\mathbb{C}'_{2,s}} (\mu_\eta(0, t] + s) \prod_{j=1}^3 \mu_\eta(D_j \cap (0, t])^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\eta(D_j \cap (t, \infty))^{\langle N'_{(2,j)} \rangle} \\
&= \mu_\eta(0, t]\mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty))\mu_\eta((m, \infty) \cap (t, \infty)) + \mu_\eta(0, t]\mu_\eta((m, 2m] \cap (t, \infty)) \\
&\quad + \mu_\eta(0, t]\mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) \\
&\quad + \mu_\eta(0, t]\mu_\eta((m, \infty) \cap (t, \infty))\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \\
&\quad + \mu_\eta(0, t]\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t])\mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) + \mu_\eta(0, t]\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \\
&\quad + \mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) + \mu_\eta((m, \infty) \cap (t, \infty))\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \\
&\quad + 2\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t])\mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) + 2\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_\eta(0, t] \mu_\eta((0, 2m] \cap (t, \infty)) \mu_\eta(m, \infty) + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m] \\
&+ \mu_\eta(0, t] \mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta(m, \infty) + \mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) \mu_\eta(0, 2m] \\
&+ \mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta(m, \infty) + 2\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \\
&= \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(0, 2m] \mu_\eta(m, \infty) + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m] + \mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) \mu_\eta(0, 2m] \\
&+ \mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta(m, \infty) + 2\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular a soma do denominador de (3.30) dada por

$$\begin{aligned}
\sum_{C_2} \prod_{j=1}^3 \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle} &= \mu_\eta(m, 2m] \mu_\eta(0, m] + \mu_\eta(m, 2m] (\mu_\eta(m, 2m] + 1) + \\
&\quad + \mu_\eta(2m, \infty) \mu_\eta(0, m] + \mu_\eta(2m, \infty) \mu_\eta(m, 2m] \\
&= \mu_\eta(0, m] \mu_\eta(m, \infty) + \mu_\eta(m, 2m] (\mu_\eta(m, \infty) + 1) \\
&= \mu_\eta(m, \infty) \mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(m, 2m] \tag{4.23}
\end{aligned}$$

onde $C_2 = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

Logo, a estimativa de Bayes para $F(t)$ dado $\tau = 2$ é

$$\begin{aligned}
E(F(t)|\tau = 2) &= \frac{1}{\int \left\{ \frac{\mu_\eta(m, \infty) \mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(m, 2m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{[2]}} \right\} dG_{\theta, \eta}} \\
&\left\{ \int \frac{\theta}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{[3]}} (\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(0, 2m] \mu_\eta(m, \infty) + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m] \right. \\
&\quad \left. + \mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) \mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta(m, \infty) + 2\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t])) \right\} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

A estimativa de Bayes de $F(t)$ depende das medidas μ calculadas em intervalos de \mathfrak{R} com limites nos momentos de inspeção e do momento, t . Em alguns termos, necessita-se analisar a intersecção com o intervalo contendo t e isto simplifica, em alguns casos, o cálculo da estimativa.

Observe que se $t \rightarrow \infty$, ou seja, quando o ciclo de produção se estende indefinidamente, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{[3]}} \{ \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(0, 2m] \mu_\eta(m, \infty) + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m] + \mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) \mu_\eta(0, 2m] \\ & + \mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta(m, \infty) + 2\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) \} \\ & \rightarrow \frac{\mu_\eta(0, 2m] \mu_\eta(m, \infty) + \mu_\eta(m, 2m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{[2]}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Novamente, o limite do numerador da estimativa de Bayes de $F(t)$, quando $t \rightarrow \infty$, torna-se o integrando em relação a η do denominador.

Para uma aplicação dos resultados anteriores, consideramos duas medidas (degenerada e exponencial truncada) para a mistura de processos Dirichlet.

Exemplo 4.5 *Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$ com medida degenerada*

Suponha que $\eta | \rho = v \sim \text{Geo}(v)$, para cada valor de ζ de η , $\mu_\zeta(\cdot) = \Lambda I_{(\cdot)}(\zeta)$, $\Lambda > 0$, $\theta \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$ e $\rho \sim \text{Beta}(a_2, b_2)$. Seguindo com o cálculo da estimativa de Bayes a posteriori de $F(t)$, o denominador de (4.24) depende das quantidades abaixo

$$\begin{aligned} & E(\mu_\eta(m, \infty) \mu_\eta(0, 2m]) \\ & = \int \Lambda^2 \sum_{j=m+1}^{2m} I_{(m, \infty)}(j) I_{(0, 2m]}(j) \rho (1 - \rho)^{j-1} \frac{\Gamma(a_2 + b_2)}{\Gamma(a_2) \Gamma(b_2)} \rho^{a_2-1} (1 - \rho)^{b_2-1} d\rho \\ & = \Lambda^2 \sum_{j=m+1}^{2m} C_G(j) \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$E(\mu_\eta(m, 2m]) = \Lambda \sum_{j=m+1}^{2m} I_{(m, 2m]}(j) C_G(j) = \Lambda \sum_{j=m+1}^{2m} C_G(j) \quad (4.27)$$

onde $C_G(j) = \frac{\Gamma(a_2 + b_2)}{\Gamma(a_2) \Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(a_2 + 1) \Gamma(b_2 + j - 1)}{\Gamma(a_2 + b_2 + j)}$.

Logo, o denominador (4.24) é dado por

$$E \left(\frac{\mu_\eta(m, \infty)\mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(m, 2m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{[2]}} \right) = \sum_{j=m+1}^{2m} C_G(j). \quad (4.28)$$

Para o cálculo do numerador de (4.24), se $t \leq m$, temos

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(0, t]\mu_\eta(0, 2m]\mu_\eta(m, \infty)) &= E(\mu_\eta(0, t]\mu_\eta(m, 2m]) \\ &= E(\mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta(0, 2m]) = E(\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t])\mu_\eta(m, \infty)) \\ &= E(\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por outro lado, quando $m < t < 2m$

$$\begin{aligned} &E(\mu_\eta(0, t]\mu_\eta(0, 2m]\mu_\eta(m, \infty)) \\ &= \int \sum_{j=m+1}^{[t]} \Lambda^3 I_{(0,t]}(j) I_{(0,2m]}(j) I_{(m,\infty)}(j) \rho(1-\rho)^{j-1} \frac{\Gamma(a_2 + b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \rho^{a_2-1} (1-\rho)^{b_2-1} d\rho \\ &= \Lambda^3 \sum_{j=m+1}^{[t]} C_G(j), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(0, t]\mu_\eta(m, 2m]) &= E(\mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t])\mu_\eta(0, 2m]) \\ &= E(\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t])\mu_\eta(m, \infty)) \\ &= \sum_{j=m+1}^{[t]} \Lambda^2 C_G(j) \end{aligned} \quad (4.31)$$

e

$$2E(\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) = 2\Lambda \sum_{j=m+1}^{[t]} C_G(j). \quad (4.32)$$

Finalmente, para $t \geq 2m$, temos

$$E(\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(0, 2m] \mu_\eta(m, \infty)) = \sum_{j=m+1}^{2m} \Lambda^3 C_G(j), \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m]) &= E(\mu_\eta((m, \infty) \cap (0, t]) \mu_\eta(0, 2m]) = \\ &= E(\mu_\eta((0, 2m] \cap (0, t]) \mu_\eta(m, \infty)) = \sum_{j=m+1}^{2m} \Lambda^2 C_G(j) \end{aligned} \quad (4.34)$$

e

$$2E(\mu_\eta((m, 2m] \cap (0, t]) = 2\Lambda \sum_{j=m+1}^{2m} C_G(j). \quad (4.35)$$

Como estamos supondo que $\theta \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$ e substituindo os resultados (4.26)-(4.35) em (4.24), obtemos a estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$

$$E(F(t)|\tau = 2) = 0, \text{ se } t \leq m \quad (4.36)$$

$$E(F(t)|\tau = 2) = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \frac{\sum_{j=m+1}^{[t]} C_G(j)}{\sum_{j=m+1}^{2m} C_G(j)}, \text{ se } m < t < 2m \quad (4.37)$$

e

$$E(F(t)|\tau = 2) = \frac{a_1}{a_1 + b_1}, \text{ se } t \geq 2m \quad (4.38)$$

onde $C_G(j) = \frac{\Gamma(a_2+b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(a_2+1)\Gamma(b_2+j-1)}{\Gamma(a_2+b_2+j)}$ e $[t]$ é o maior inteiro menor ou igual a t .

A estimativa de Bayes de $F(t)$ para $t < m$ é nula, ou seja, $F(t) = 0$ quase certamente em decorrência da adoção da medida degenerada, indicando que o processo está sob controle. No intervalo entre a primeira e a segunda inspeção (na qual detectou-se que o processo está fora de controle), a sequência estimada de frações não-conformes aumenta gradualmente alcançando, finalmente, a média a priori da probabilidade limite θ . Esse comportamento será melhor

visualizado na análise gráfica desenvolvida nas próximas seções.

Exemplo 4.6 *Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$ com medida exponencial*

Agora, suponha que $\eta|\rho = v \sim \text{Geo}(v)$, para cada valor ζ de η , $\mu_\zeta(t, \infty) = \Lambda e^{-\gamma(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+) = \Lambda$, $\Lambda, \gamma > 0$, $\theta \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$ e $\rho \sim \text{Beta}(a_2, b_2)$, $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$.

Iniciaremos pelo o cálculo do denominador de (4.24). Observe que

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(m, \infty)\mu_\eta(0, 2m]) &= \\ &= \Lambda^2 \left\{ \sum_{j=1}^m e^{-\gamma(m-j)} (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

e

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(m, 2m]) &= \\ &= \Lambda \left\{ \sum_{j=1}^m (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Logo, substituindo (4.39) e (4.40) no denominador de (4.24), temos

$$\begin{aligned} D_2 &= E \left(\frac{\mu_\eta(m, \infty)\mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(m, 2m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}} \right) \\ &= \frac{1}{\Lambda + 1} \left\{ \sum_{j=1}^m (\Lambda e^{-\gamma(m-j)} (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) + e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 + \Lambda) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para o cálculo do numerador da estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$ com medida exponencial em (4.24), temos de estudar os seguintes casos particulares.

Caso 1. Quando $0 < t \leq m$

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(0, t]\mu_\eta(m, \infty)(\mu_\eta(0, 2m] + 1)) &= \\ &= \Lambda^2 \sum_{j=1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) e^{-\gamma(m-j)} (1 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \end{aligned} \quad (4.42)$$

e

$$E(\mu_\eta(0, t]\mu_\eta(m, 2m]) = \sum_{j=1}^{[t]} \Lambda^2 (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j). \quad (4.43)$$

Substituindo (4.41) a (4.43) em (4.24), obtemos a estimativa de $F(t)$ para $0 < t \leq m$

$$\begin{aligned} E(F(t)|\tau = 2) &= \frac{\int \frac{\theta(\mu_\eta(0, t]\mu_\eta(m, \infty)(\mu_\eta(0, 2m] + 1) + \mu_\eta(0, t]\mu_\eta(m, 2m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(3)}} dG_{\theta, \eta}}{\int \left\{ \frac{\mu_\eta(m, \infty)\mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(m, 2m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}} \right\} dG_{\theta, \eta}} \\ &= \frac{E(\theta)\Lambda}{(\Lambda+1)(\Lambda+2)} \times \\ &\quad \left\{ \sum_{j=1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (e^{-\gamma(m-j)} (1 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(2m-j)}) + (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)})) C_G(j) \right\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde $\theta \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$, $C_G(j) = \frac{\Gamma(a_2+b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(a_2+1)\Gamma(b_2+j-1)}{\Gamma(a_2+b_2+j)}$ e $[t]$ é o maior inteiro menor ou igual a t e D_2 é definido em (4.41).

Caso 2. Quando $m < t \leq 2m$

$$\begin{aligned} E(\mu_\eta(0, t]\mu_\eta(0, 2m]\mu_\eta(m, \infty)) &= \Lambda^3 \left\{ \sum_{j=1}^m (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) e^{-\gamma(m-j)} C_G(j) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=m+1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
E(\mu_\eta(m, t] \mu_\eta(0, 2m]) &= \Lambda^2 \left\{ \sum_{j=1}^m (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=m+1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \quad (4.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, \infty)) &= \Lambda^2 \left\{ \sum_{j=1}^m e^{-\gamma(m-j)} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) C_G(j) + \sum_{j=m+1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) C_G(j) \right\} \quad (4.47)
\end{aligned}$$

$$2E(\mu_\eta(m, t]) = 2\Lambda \left\{ \sum_{j=1}^m (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(t-j)}) C_G(j) + \sum_{j=m+1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) C_G(j) \right\} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
E(\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m]) &= \Lambda^2 \left\{ \sum_{j=1}^m (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=m+1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.41) e (4.45) a (4.49) em (4.24), temos a estimativa de Bayes de $F(t)$ para $m < t \leq 2m$

$$\begin{aligned}
E(F(t) | \tau = 2) &= \\
&= \frac{\int \frac{\theta(\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, \infty) \mu_\eta(0, 2m]) + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m]) + \mu_\eta(m, t] \mu_\eta(0, 2m]) + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, \infty) + 2\mu_\eta(m, t])}{\mu_\eta(\mathbb{R}_+)^{(3)}} dG_{\theta, \eta}}{\int \left\{ \frac{\mu_\eta(0, m] \mu_\eta(0, 2m]) + \mu_\eta(m, 2m]}{\mu_\eta(\mathbb{R}_+)^{(2)}} \right\} dG_{\theta, \eta}} \\
&= \frac{E(\theta)}{(\Lambda+1)(\Lambda+2)} \left\{ \sum_{j=1}^m \left\{ \Lambda e^{-\gamma(m-j)} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(2m-j)}) \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(t-j)}) (2 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(2m-j)}) \\
& + \Lambda (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)}) \} C_G(j) \\
& + \sum_{j=m+1}^{[t]} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (\Lambda(\Lambda + 2) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) + \Lambda + 2) C_G(j) \} , \tag{4.50}
\end{aligned}$$

onde D_2 é o denominador da estimativa de Bayes (4.41).

Caso 3. Quando $t > 2m$

$$\begin{aligned}
E(\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(0, 2m] \mu_\eta(m, \infty)) &= \Lambda^3 \left\{ \sum_{j=1}^m (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) e^{-\gamma(m-j)} C_G(j) \right. \\
& \left. + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \tag{4.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\mu_\eta(m, t] \mu_\eta(0, 2m]) &= \Lambda^2 \left\{ \sum_{j=1}^m (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right. \\
& \left. + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \tag{4.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\mu_\eta(m, \infty) \mu_\eta(0, 2m]) &= \Lambda^2 \left\{ \sum_{j=1}^m e^{-\gamma(m-j)} (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right. \\
& \left. + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \tag{4.53}
\end{aligned}$$

$$2E(\mu_\eta(m, 2m]) = 2\Lambda \left\{ \sum_{j=1}^m (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) \right\} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
E(\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m]) &= \Lambda^2 \left\{ \sum_{j=1}^m (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) C_G(j) \right\} \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (4.41) e (4.51) a (4.55) em (4.24), obtemos a estimativa de Bayes de $F(t)$ para $t > 2m$

$$\begin{aligned}
E(F(t) | \tau = 2) &= \\
&= \frac{\int \frac{\theta(\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, \infty) \mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(m, 2m] + \mu_\eta(m, t] \mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(0, 2m] \mu_\eta(m, \infty) + 2\mu_\eta(m, 2m])}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(3)}} dG_{\theta, \eta}}{\int \left\{ \frac{\mu_\eta(0, m] \mu_\eta(0, 2m] + \mu_\eta(m, 2m]}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(2)}} \right\} dG_{\theta, \eta}} \\
&= \frac{E(\theta)\Lambda}{(\Lambda+1)(\Lambda+2)} \left\{ \sum_{j=1}^m (\Lambda (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) e^{-\gamma(m-j)} (1 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(t-j)}) \right. \\
&\quad + \Lambda (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(t-j)}) (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) \\
&\quad + (e^{-\gamma(m-j)} - e^{-\gamma(2m-j)}) (2 + \Lambda - \Lambda e^{-\gamma(t-j)}) C_G(j) \\
&\quad \left. + \sum_{j=m+1}^{2m} (1 - e^{-\gamma(2m-j)}) (\Lambda(\Lambda + 2) (1 - e^{-\gamma(t-j)}) + \Lambda + 2) C_G(j) \right\} \quad (4.56)
\end{aligned}$$

As expressões das estimativas a posteriori de $F(t)$ dado que foram observados duas inspeções tornam-se muito complexas quando comparadas às estimativas dada uma inspeção. Observe que a medida exponencial do Processo Dirichlet introduz esta complexidade, gerando, no entanto, crescimento gradual mais suave da sequência estimada de frações não-conforme que a estimativa utilizando a medida degenerada. Para ciclos de produção maiores, a descrição analítica da estimativa torna-se pouco recomendável e devido a isso, apresentamos os algoritmos da obtenção dessas estimativas no Apêndice.

Na próxima subseção, apresentamos a estimativa de Bayes de $F(t)$ para o caso geral, ou seja, quando $\tau = k$ inspeções são observadas em um ciclo, considerando medidas degeneradas para a mistura de Processos Dirichlet a priori.

4.3 Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = k$.

Nesta seção apresentaremos a estimativa de Bayes de $F(t)$ supondo a medida degenerada, pois neste caso, a sequência de frações não conformes apresenta-se na forma muito próxima ao proposto por Nandi e Sreehari [39].

Exemplo 4.7 *Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = k$ com medida degenerada*

Na equação (3.30), o conjunto \mathbb{C}_k possui $k(k!)$ elementos (vetores de índices). Porém, ao considerarmos para cada valor ζ de η , a medida degenerada em ζ , $\mu_\zeta(\cdot) = \Lambda I_{(\cdot)}(\zeta)$ (de modo que $\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+) = \Lambda$, Λ constante positiva) para a mistura de Processos de Dirichlet a priori, todas as parcelas do denominador referentes aos vetores diferentes do vetor (k, \dots, k) de tamanho k deste conjunto resultam em $\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\zeta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}$ igual a zero. Da mesma forma, para o numerador de (3.30), temos que apenas para os elementos $((1, k), \dots, (1, k))$, $((2, k), \dots, (2, k))$ de \mathbb{C}'_k obtém-se parcelas diferentes de zero. Assim,

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{\mathbb{C}_k} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j)^{\langle N_{(j)} \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} \right) &= E \left(\frac{\mu_\eta(D_k)^{\langle k \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k \rangle}} \right) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} (\Lambda I_{((k-1)m, km]}(j))^{\langle k \rangle} C_G(j)}{\Lambda^{\langle k \rangle}} \\ &= \frac{\sum_{j=(k-1)m+1}^{km} \Lambda^{\langle k \rangle} C_G(j)}{\Lambda^{\langle k \rangle}} = \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} C_G(j), \end{aligned} \quad (4.57)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} h(t) &= E \left(\sum_{s=0}^k \frac{\mu_\eta(0, t] + s}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k+1 \rangle}} \left\{ \sum_{\mathbb{C}'_{k,s}} \prod_{j=1}^{k+1} \mu_\eta(D_j \cap (0, t])^{\langle N'_{(1,j)} \rangle} \mu_\eta(D_j \cap (t, \infty))^{\langle N'_{(2,j)} \rangle} \right\} \right) \\ &= E \left(\frac{(\mu_\eta(0, t] + k) \mu_\eta(D_k \cap (0, t])^{\langle k \rangle} + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta(D_k \cap (t, \infty))^{\langle k \rangle}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{\langle k+1 \rangle}} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Agora, se $t \leq (k-1)m$, temos que

$$h(t) = E \left(\frac{\mu_\eta(0, t] \mu_\eta(((k-1)m, km])^{(k)}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(k+1)}} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda I_{(0,t]}(j) (\Lambda I_{((k-1)m, km]}(j))^{(k)}}{\Lambda^{(k+1)}} C_G(j) = 0 \quad (4.59)$$

Para $(k-1)m < t \leq km$, temos

$$\begin{aligned} h(t) &= E \left(\frac{(\mu_\eta(0, t] + k) \mu_\eta((k-1)m, t]^{(k)} + \mu_\eta(0, t] \mu_\eta((t, km])^{(k)}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(k+1)}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\Lambda I_{(0,t]}(j) + k) (\Lambda I_{((k-1)m, t]}(j))^{(k)} + \Lambda I_{(0,t]}(j) (\Lambda I_{(t, km]}(j))^{(k)}}{\Lambda^{(k+1)}} C_G(j) \\ &= \sum_{j=(k-1)m+1}^{[t]} \frac{(\Lambda + k) \Lambda^{(k)}}{\Lambda^{(k+1)}} C_G(j) = \sum_{j=(k-1)m+1}^{[t]} C_G(j) \end{aligned} \quad (4.60)$$

e, finalmente, para $t > km$, temos

$$\begin{aligned} h(t) &= E \left(\frac{(\mu_\eta(0, t] + k) \mu_\eta((k-1)m, km])^{(k)}}{\mu_\eta(\mathfrak{R}_+)^{(k+1)}} \right) = \frac{\sum_{j=(k-1)m+1}^{km} (\Lambda + k) \Lambda^{(k)} C_G(j)}{\Lambda^{(k+1)}} \\ &= \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} C_G(j) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Assim, como $\theta \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$, com $a_1, b_1 > 0$, temos, a partir dos resultados (4.57)-(4.61), que a estimativa de Bayes para $F(t)$ dado $\tau = k$ é dada por

$$E(F(t)|\tau = k) = 0, \quad (4.62)$$

se $t \leq (k-1)m$,

$$E(F(t)|\tau = k) = \frac{a_1 \sum_{j=(k-1)m+1}^{[t]} C_G(j)}{a_1 + b_1 \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} C_G(j)} \quad (4.63)$$

para $(k - 1)m < t \leq km$ e, se $t > km$,

$$E(F(t)|\tau = k) = \frac{a_1}{a_1 + b_1}. \quad (4.64)$$

A seguir, analisamos graficamente o comportamento das estimativas de $F(t)$ a posteriori, obtidas a partir dos resultados encontrados nas seções anteriores, em função dos hiperparâmetros do modelo.

4.4 Análise Gráfica das estimativas de Bayes de $F(t)$

4.4.1 Análise das estimativas de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ através de alguns exemplos

A seguir, apresentamos uma análise preliminar das estimativas de Bayes a priori e a posteriori (dado $\tau = 1$ e dado $\tau = 2$) da função de distribuição F . O estudo consiste na variação dos parâmetros das distribuições a priori da fração não-conforme limite, θ , e da distribuição do ponto de mudança, η . Também perturbamos o intervalo entre inspeções, m , e, para cada valor de ζ de η , os parâmetros das medidas degenerada ($\mu_\zeta(\cdot) = \Lambda I_{(\cdot)}(\zeta)$) e exponencial truncada em ζ (tal que $\mu_\zeta(t, \infty) = \Lambda e^{-\gamma(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}$), onde $\mu_\zeta(\mathfrak{R}_+) = \Lambda$ e $\gamma > 0$. A avaliação das estimativas a posteriori de $F(t)$ através de análise gráfica é baseada na influência isolada de cada um dos parâmetros citados acima.

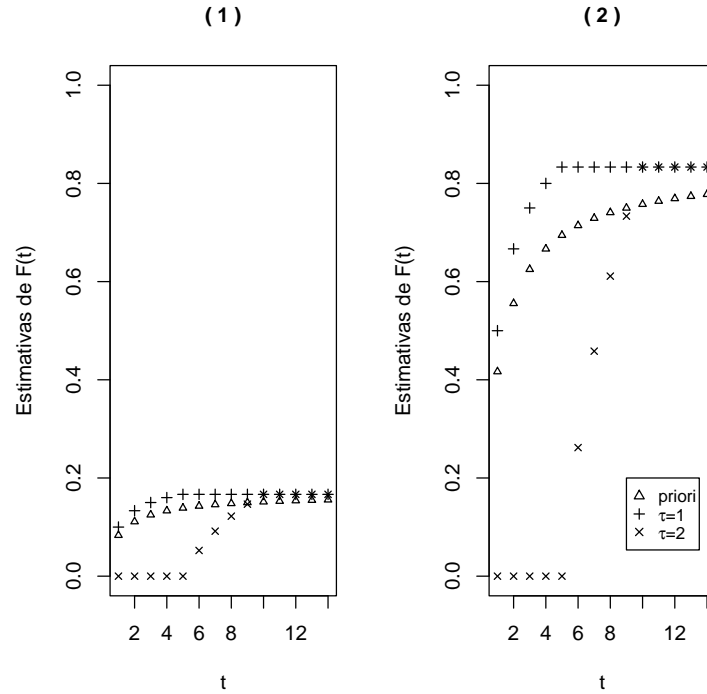


Figura 4.1: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\rho \sim \text{Beta}(1,1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$, $m = 5$: (1) $\theta \sim \text{Beta}(0.1, 1)$ e (2) $\theta \sim \text{Beta}(5, 1)$.

Análise das aplicações

A Figura 4.1 ilustra o comportamento das estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e dado $\tau = 2$ quando mudamos o primeiro parâmetro da distribuição a priori Beta (a_1, b_1) de θ . Ao considerar valores grandes para a_1 , observa-se, a priori, que a estimativa da fração não-conforme para cada tempo aumenta e, além disso, as estimativas a priori e a posteriori dado $\tau = 1$ tornam-se mais próximas quando t aumenta. Verifica-se este mesmo comportamento para a estimativa de $F(t)$ dado $\tau = 2$ para $t \geq 2m$, isto é, para tempos posteriores à detecção de que o processo está fora de controle. Para valores menores de t , as estimativas a posteriori dado $\tau = 2$ são menores que aquelas quando $\tau = 1$.

Por outro lado, para $a_1 = 1$ e b_1 grande, as estimativas diminuem pois espera-se, a priori,

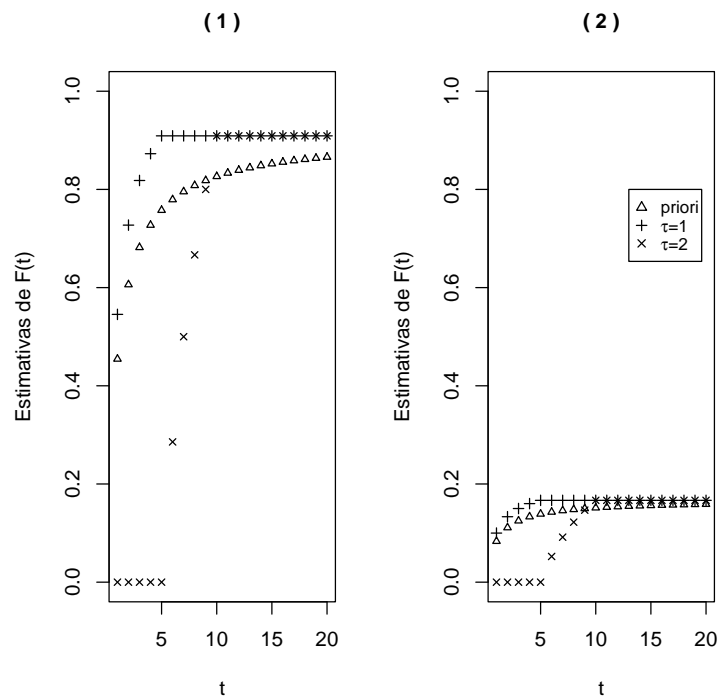


Figura 4.2: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\rho \sim \text{Beta}(1,1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$, $m = 5$: (1) $\theta \sim \text{Beta}(1,0.1)$ e (2) $\theta \sim \text{Beta}(1,5)$.

que a fração não-conforme seja muito pequena ($E(\theta) = \frac{a_1}{a_1+b_1} \rightarrow 0$, $b_1 \rightarrow \infty$), como pode ser visto na Figura 4.2. Ao considerar $b_1 = 0,1$, as estimativas de Bayes de $F(t)$ dadas duas inspeções apresentam um salto nos tempos que antecedem a detecção do estado de fora de controle do processo.

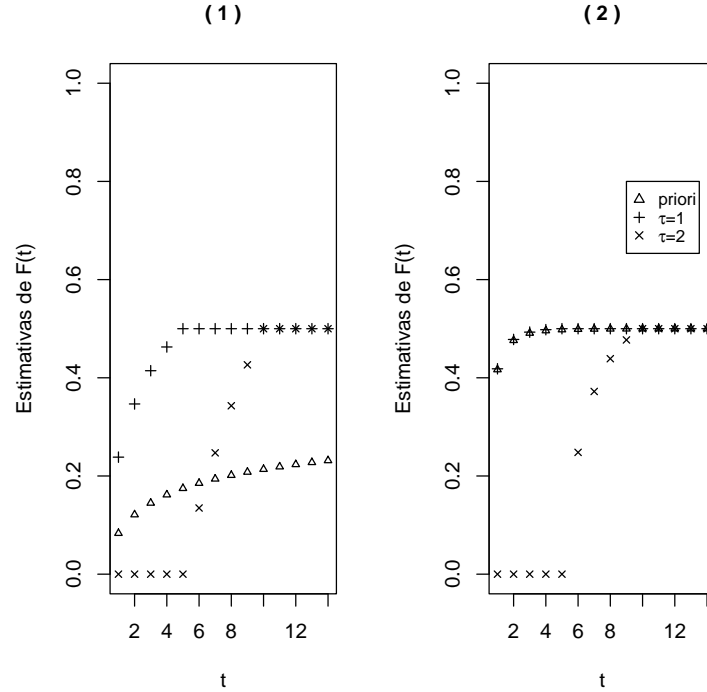


Figura 4.3: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim \text{Beta}(1,1)$, $\mu_{\zeta}(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$, $m = 5$: (1) $\rho \sim \text{Beta}(0.1, 1)$ e (2) $\rho \sim \text{Beta}(5, 1)$.

Em seguida, analisamos o impacto da mudança dos parâmetros da distribuição a priori da probabilidade do processo sair do estado de controle, ρ , sobre as estimativas de $F(t)$ com medida indicadora para o Processo Dirichlet. Pela Figura 4.3, ao escolher $a_2 = 5$, temos que as estimativas a priori e a posteriori dado $\tau = 1$ estão muito próximas, pois quando supõe-se a_2 grande, espera-se, a priori, que o processo de produção saia de controle mais rápido, comportamento também verificado nas estimativas a posteriori dado $\tau = 2$ para $t > m$. Quando a medida indicadora é adotada, as estimativas a posteriori dado $\tau = 2$ são iguais a zero nos primeiros instantes de produção, o que indica que, com probabilidade 1, o ponto de mudança ocorreu após a primeira inspeção.

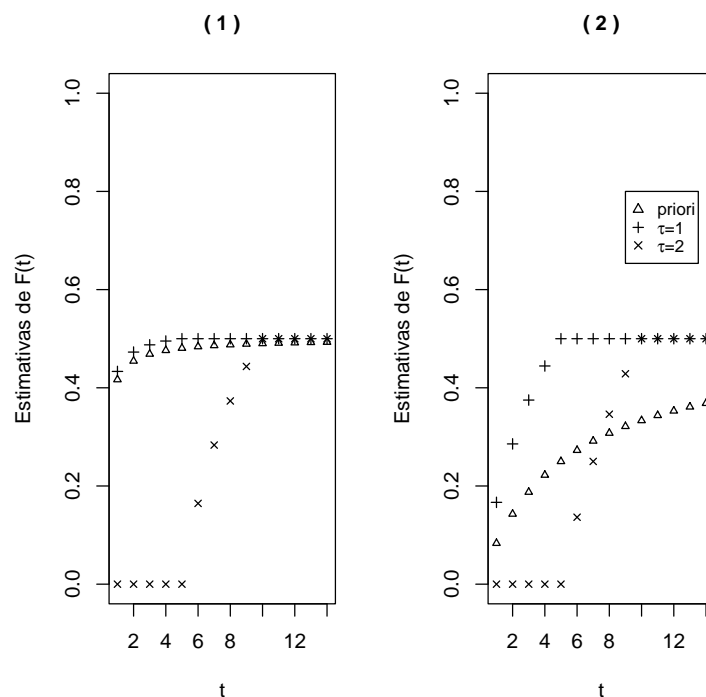


Figura 4.4: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1,1)$, $\mu_{\zeta}(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$, $m = 5$: (1) $\rho \sim Beta(1,0.1)$ e (2) $\rho \sim Beta(1,5)$.

Através da Figura 4.4, podemos ver que há uma influência clara do valor de b_2 sobre a estimativa de $F(t)$ a priori, ou seja, quanto maior é o valor deste parâmetro, menor é a estimativa a priori de produzir um item não-conforme, pois espera-se que o processo de produção permaneça no estado de controle por mais tempo. Mas, ao amostrar um item não-conforme, a sequência de frações não-conformes nos tempos subsequentes aumentam e se estabilizam. Por outro lado, supor b_2 pequeno eleva a estimativa a priori, a qual se aproxima da estimativa a posteriori dado $\tau = 1$. Assim, supor b_2 igual a 0.1, por exemplo, representa o cenário em que o ponto de mudança acontecerá, em média, rapidamente, aumentando as estimativas dado $\tau = 1$ de produzir um item não-conforme nos primeiros instantes de produção.

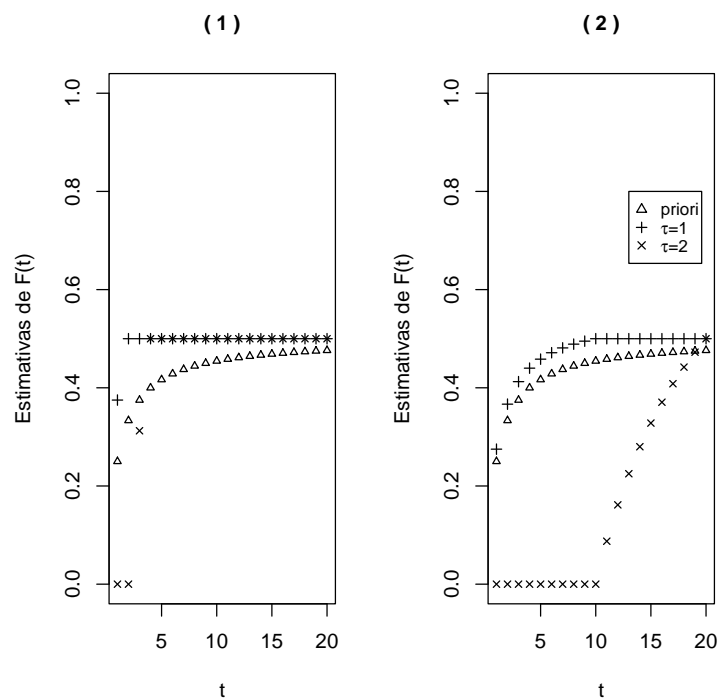


Figura 4.5: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1,1)$, $\rho \sim Beta(1,1)$, $\mu_{\zeta}(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$ e $m = 2, 10$.

A Figura 4.5 exibe o impacto da escolha do valor do intervalo de inspeção m nas estimativas a posteriori e a priori. Nitidamente, há um salto da estimativa da fração não-conforme no intervalo que antecede a detecção de um item não-conforme.

Agora analisamos as estimativas a posteriori de $F(t)$ ao supor medidas exponenciais para a mistura de Processos Dirichlet. Uma medida similar foi utilizada por Susarla e Van Ryzin [47] na resolução de um problema na área de análise de sobrevivência. Da mesma forma que as estimativas obtidas usando a medida indicadora, a escolha de valores grandes para a_1 elevam as estimativas de $F(t)$ a priori e a posteriori dado $\tau = 1$ e dado $\tau = 2$ para os instantes após a detecção do desajuste do processo, como podemos verificar na Figura 4.6. Logo, a crença a priori de que a fração de itens não-conformes é grande (a_1 grande) é confirmada pelas estimativas a priori e a posteriori dado $\tau = 1$ e dado $\tau = 2$.

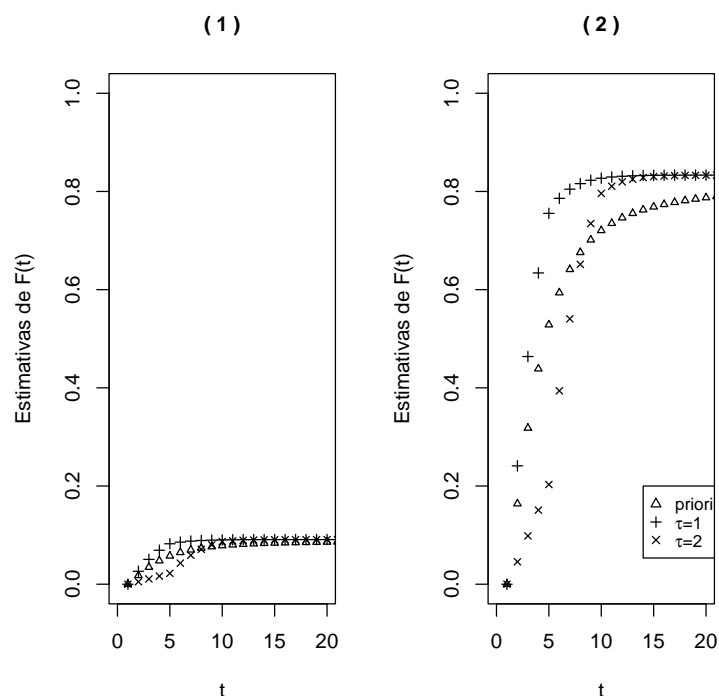


Figura 4.6: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\rho \sim \text{Beta}(1, 1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $m = 5$: (1) $\theta \sim \text{Beta}(0.1, 1)$ e (2) $\theta \sim \text{Beta}(5, 1)$

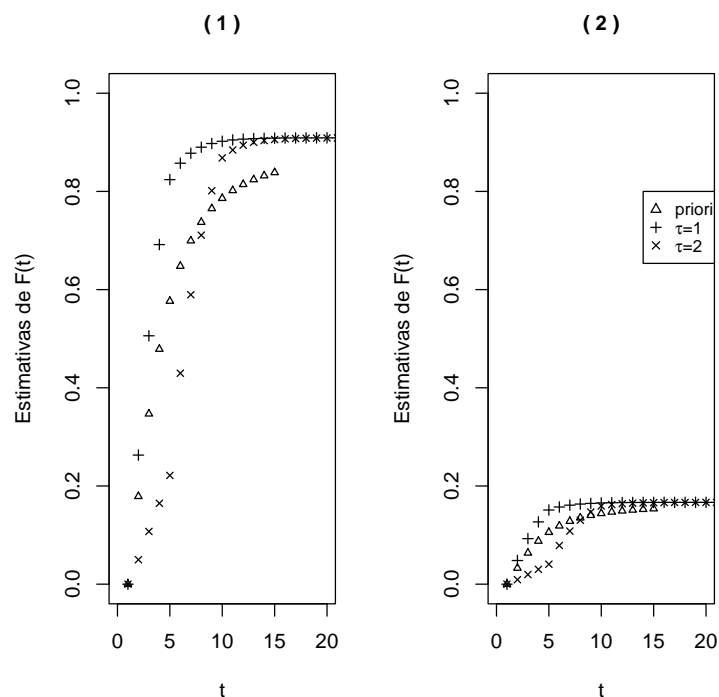


Figura 4.7: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\rho \sim \text{Beta}(1,1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $m = 5$: (1) $\theta \sim \text{Beta}(1, 0.1)$ e (2) $\theta \sim \text{Beta}(1, 5)$

Novamente, na Figura 4.7, constata-se que valores de b_1 grandes “achatam” as estimativas, pois espera-se que a probabilidade de produzir um item não-conforme seja pequena. Para valores de b_1 entre 0 e 1, as estimativas a posteriori da fração não-conforme para cada tempo após o instante da observação da não-conformidade aumentam e superam as estimativas a priori (para os respectivos tempos).

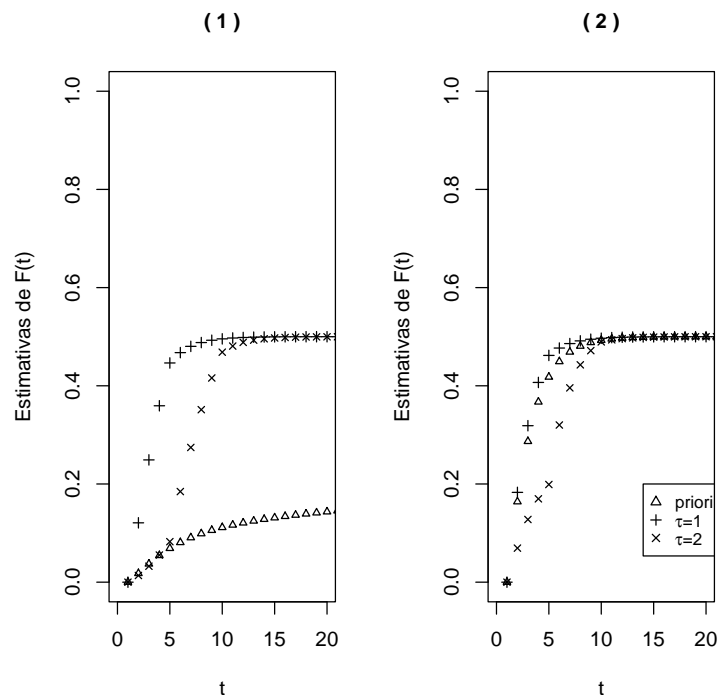


Figura 4.8: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim \text{Beta}(1,1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $m = 5$: (1) $\rho \sim \text{Beta}(0.1, 1)$ e (2) $\rho \sim \text{Beta}(5, 1)$

Por outro lado, ao supor um valor alto de a_2 , espera-se, a priori, que o processo passe para o estado fora de controle mais rápido e, através da Figura 4.8, podemos perceber que as estimativas a priori se aproximam das estimativas a posteriori. Foi visto comportamento semelhante ao supor medidas indicadoras para a mistura de Processos Dirichlet.

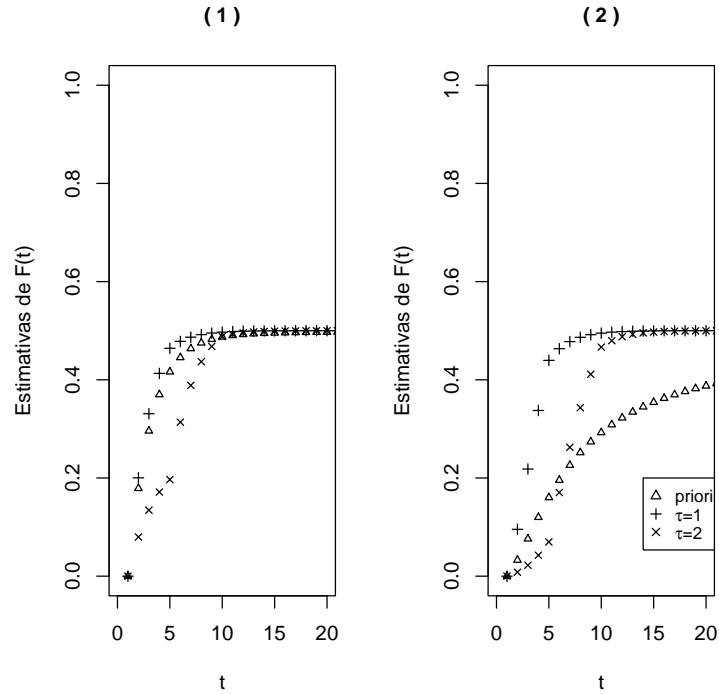


Figura 4.9: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim \text{Beta}(1,1)$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$, $m = 5$: (1) $\rho \sim \text{Beta}(1, 0.1)$ e (2) $\rho \sim \text{Beta}(1, 5)$

Obtemos as mesmas conclusões para valores pequenos de b_2 . Nestes casos, as estimativas a priori aumentam, porém não ultrapassam as frações não-conformes estimadas a posteriori dado $\tau = 1$ para cada tempo, como podemos ver na Figura 4.9. As estimativas a posteriori, por sua vez, diminuem quando supõe-se b_2 grande, pois, nesta situação, espera-se o retardamento do ponto de mudança do processo. Logo, resumidamente, a variação das estimativas de Bayes depende da relação entre os hiperparâmetros a_1 e b_1 e entre a_2 e b_2 .

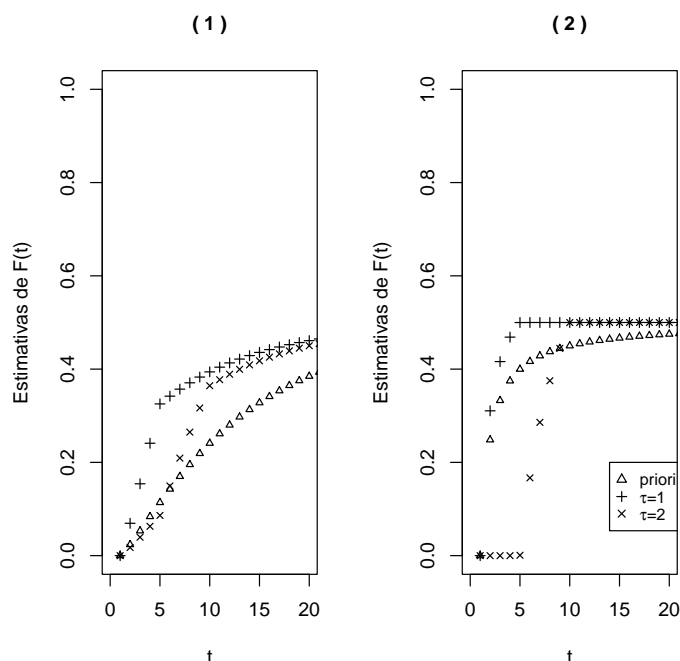


Figura 4.10: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1,1)$, $\rho \sim Beta(1,1)$, $m = 5$ e para cada $\eta = \zeta$: (1) $\mu_{\zeta}(t, \infty) = e^{-0.1(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$ e (2) $\mu_{\zeta}(t, \infty) = e^{-5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$

O impacto da escolha dos parâmetros das medidas exponenciais da mistura de Processos Dirichlet (isto é, para cada valor ζ de η , $\mu_{\zeta}(t, \infty) = \Lambda e^{-\gamma(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$) pode ser conferido nas Figuras 4.10 e 4.11. O primeiro gráfico refere-se à perturbação do parâmetro γ . Para $\gamma = 5$, as estimativas alcançam a fração limite esperada, $E(\theta)$, de forma mais rápida e se estabilizam próximas desse valor logo após a detecção do item não-conforme, tanto dado $\tau = 1$ como dado $\tau = 2$. Além disso, parece que o valor alto de γ evidencia o intervalo que antecede a detecção do desajuste do processo de produção. Por outro lado, quanto menor o valor de γ , mais suave é a sequência de frações não-conforme estimadas. O mesmo ocorre quando o valor Λ é alto. Finalmente, a Figura 4.12 apresenta as estimativas quando mudamos o intervalo entre inspeções. Constata-se que as frações não-conforme estimadas tendem a aumentar próximo ao momento da detecção do desajuste do processo de produção.

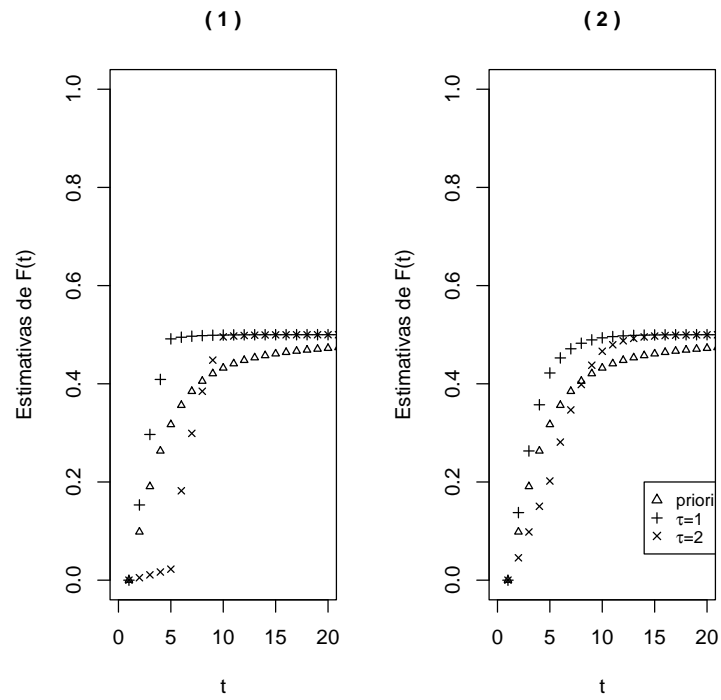


Figura 4.11: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim \text{Beta}(1,1)$, $\rho \sim \text{Beta}(1,1)$, $m = 5$, (1) $\mu_\zeta(t, \infty) = 0.1e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$ e (2) $\mu_\zeta(t, \infty) = 5e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$

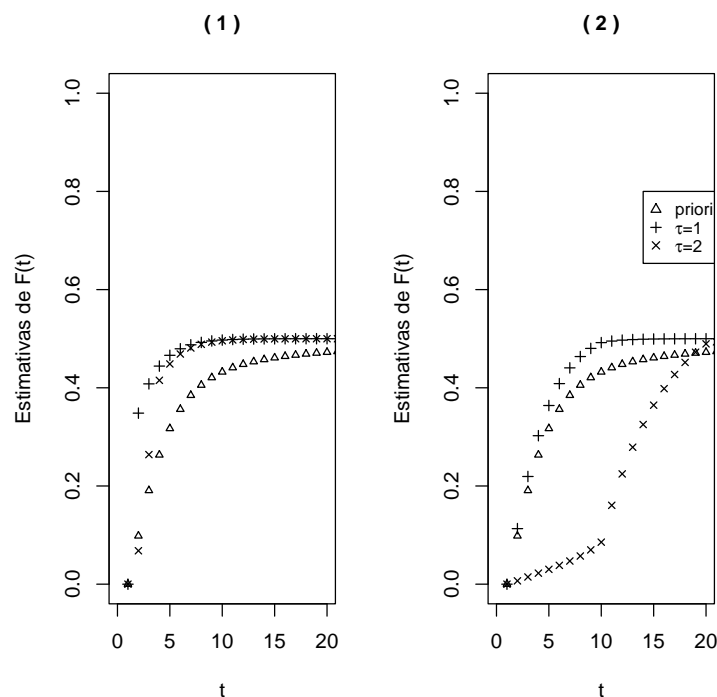


Figura 4.12: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1$ e $\tau = 2$ para $\theta \sim Beta(1,1)$, $\rho \sim Beta(1,1)$, $\mu_{\zeta}(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$ e $m = 2, 10$.

4.4.2 Estimativas de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = k$

Nesta seção, analisamos as estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori e a posteriori considerando medida degenerada e medida exponencial para a mistura de processos Dirichlet. A primeira medida foi utilizada devido a sua simplicidade e fácil interpretação sob o modelo de Taguchi. A medida exponencial, por sua vez, é comumente empregada em diversas aplicações de inferência Bayesiana não-paramétrica, como em Susarla e van Ryzin [47].

A partir da Figura 4.13, observe que as estimativas de Bayes de $F(t)$ apresentam-se, basicamente, em dois patamares bem distintos e a transição entre esses valores ocorre no intervalo de inspeção que antecede a detecção de que o processo está fora de controle. Isso se deve ao

fato que, nesse caso, com base no modelo proposto, a probabilidade de produção de um item não-conforme após o ponto de mudança passa a ser 1, como no caso I do modelo de Taguchi.

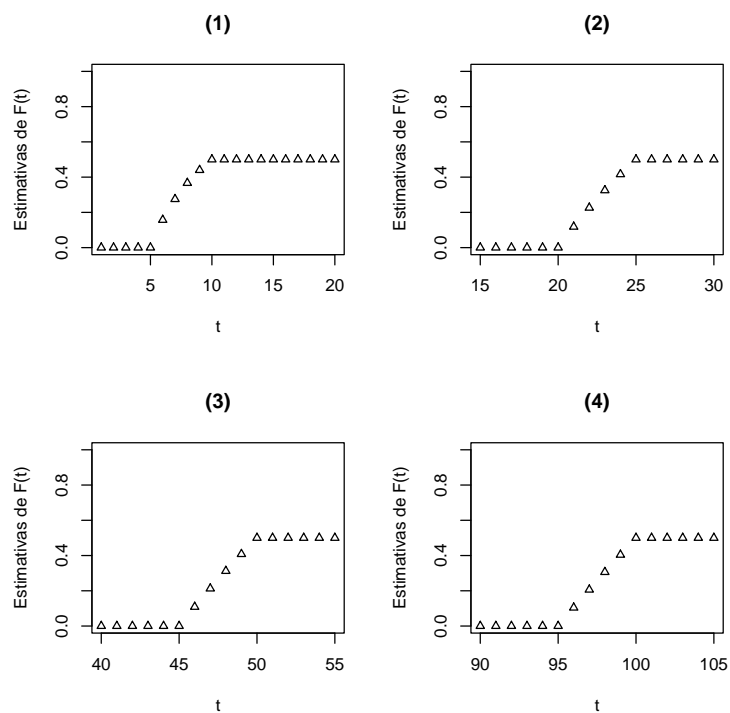


Figura 4.13: Estimativas de Bayes de $F(t)$, dado $\tau = 2, 5, 10, 20$ para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $\mu_\zeta(\cdot) = \Lambda I_{(\cdot)}(\zeta)$ e $m = 5$.

Agora, considerando a medida exponencial, temos as seguintes estimativas de Bayes para $F(t)$ dado que foram realizadas k inspeções, $k = 1, \dots, 8$, no ciclo do processo de produção. Variamos alguns parâmetros, como na seção anterior, para avaliarmos a sensibilidade das estimativas sob estas circunstâncias.

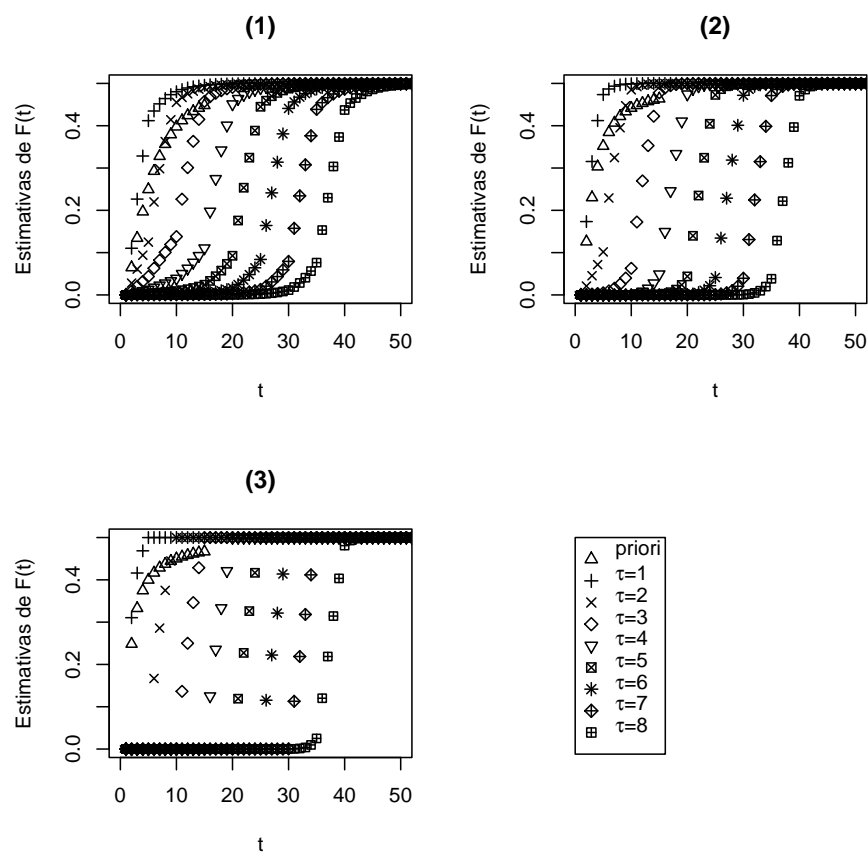


Figura 4.14: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $m = 5$: (1) $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.3(t-\zeta)} I_{(t, \infty)}$; (2) $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.7(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$; (3) $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-5(t-\zeta)} I_{(t, \infty)}$.

Pela Figura 4.14, a escolha de valores pequenos para o parâmetro γ da medida μ_ζ tal que $\mu_\zeta(t, \infty) = \Lambda e^{-\gamma(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$ proporciona estimativas da fração não-conforme nos tempos de produção anteriores ao momento de detecção do item defeituoso maiores do que as respectivas estimativas para valores grandes de γ . O mesmo acontece para valores de Λ grandes (Figura 4.16). Dessa forma, o crescimento da sequência das estimativas ao longo do tempo parece menos acentuada nesses casos. Deve-se destacar que, sob essas condições (γ pequeno e Λ grande), o modelo proposto apresenta estimativas para as frações não-conforme ao longo de um

ciclo bem distintas daquelas obtidas nos casos I, II e III de Taguchi. Ou seja, dependendo dos parâmetros escolhidos, a forma de crescimento da sequência estimada difere razoavelmente do comportamento das correspondentes estimativas sob os modelos citados anteriormente. Esta diferença é ilustrada quando consideramos, por exemplo, $\gamma = 0.1$, como mostra a Figura 4.15.

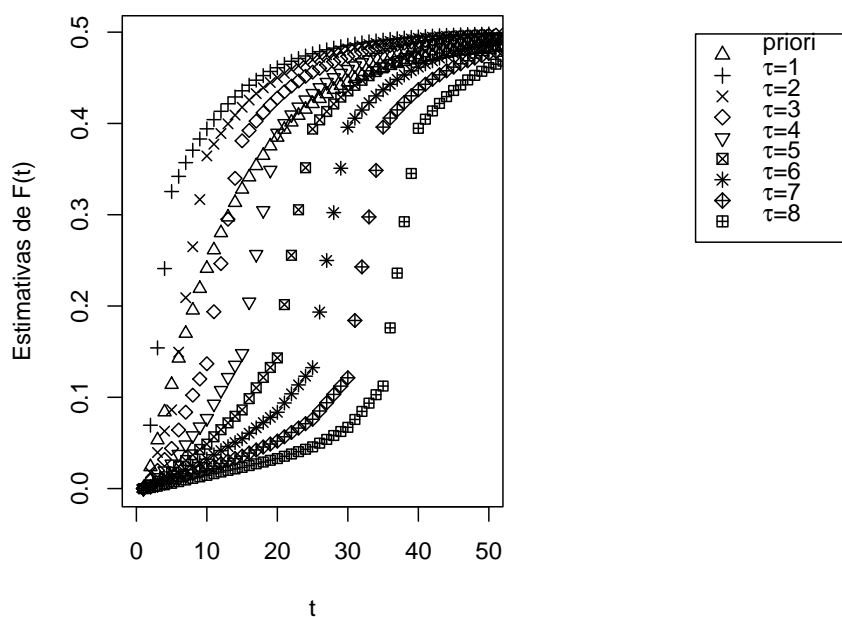


Figura 4.15: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim Beta(1, 1)$, $\rho \sim Beta(1, 1)$, $m = 5$, $\mu_{\zeta}(t, \infty) = e^{-0.1(t-\zeta)} I_{(t, \infty)}$.

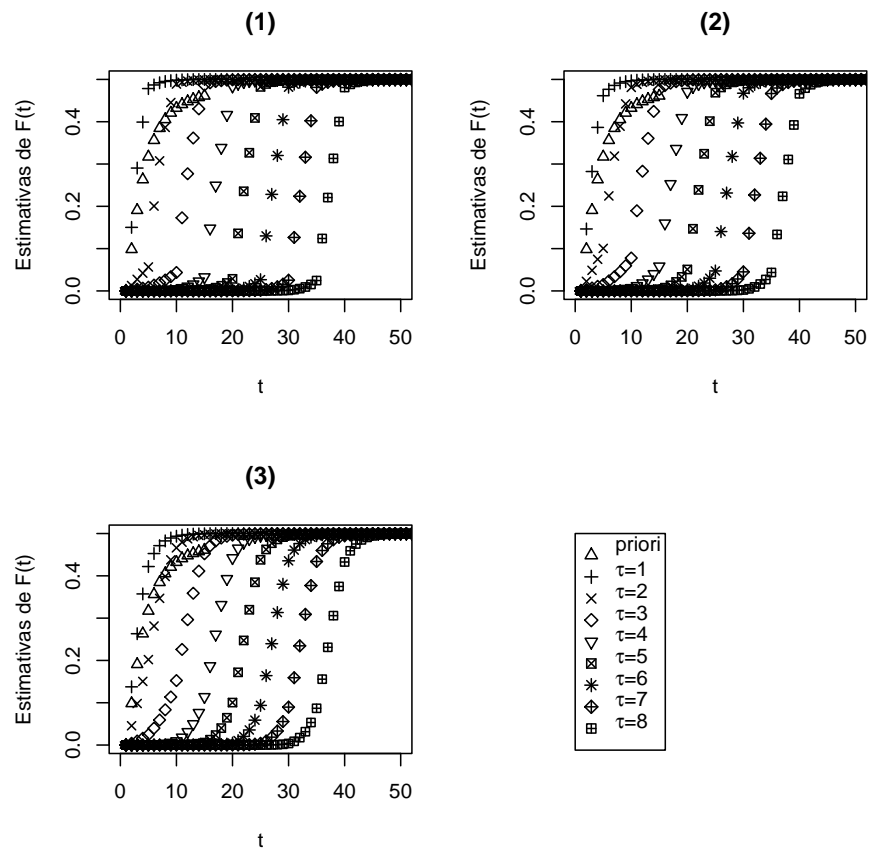


Figura 4.16: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim \text{Beta}(1, 1)$, $\rho \sim \text{Beta}(1, 1)$, $m = 5$: (1) $\mu_{\zeta}(t, \infty) = 0.3e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$; (2) $\mu_{\zeta}(t, \infty) = 0.7e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$; (3) $\mu_{\zeta}(t, \infty) = 5e^{-0.5(t-\zeta)}I_{(\zeta, \infty)}(t)$.

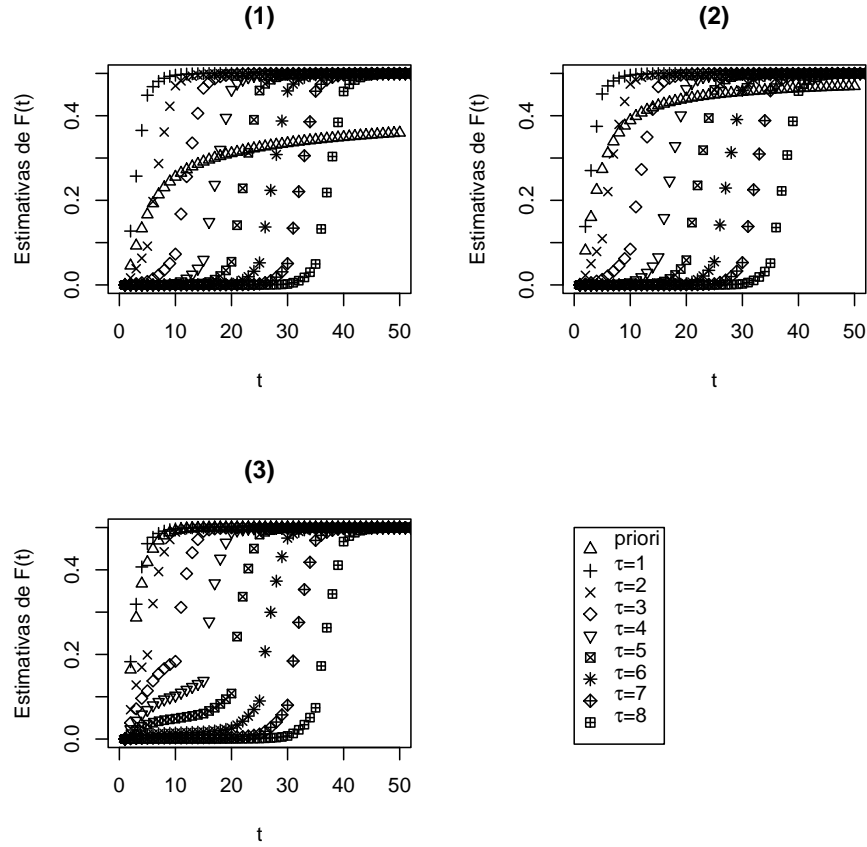


Figura 4.17: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim \text{Beta}(1, 1)$, $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$: (1) $\rho \sim \text{Beta}(0.3, 1)$ (2) $\rho \sim \text{Beta}(0.7, 1)$; (3) $\rho \sim \text{Beta}(5, 1)$.

Por outro lado, os parâmetros da distribuição de ρ parecem interferir nas estimativas a priori e a posteriori, ou seja, se a média de ρ for próxima de 0 (a_2 pequeno ou b_2 grande, Figuras 4.17 e 4.18), espera-se, a priori, que o ponto de mudança do processo de produção ocorra depois de um longo tempo. As frações não-conformes estimadas a posteriori, nestes casos, são maiores que as estimativas a priori nos tempos próximos à detecção do desajuste do processo e, nos primeiros momentos de produção do ciclo, esta relação se inverte.

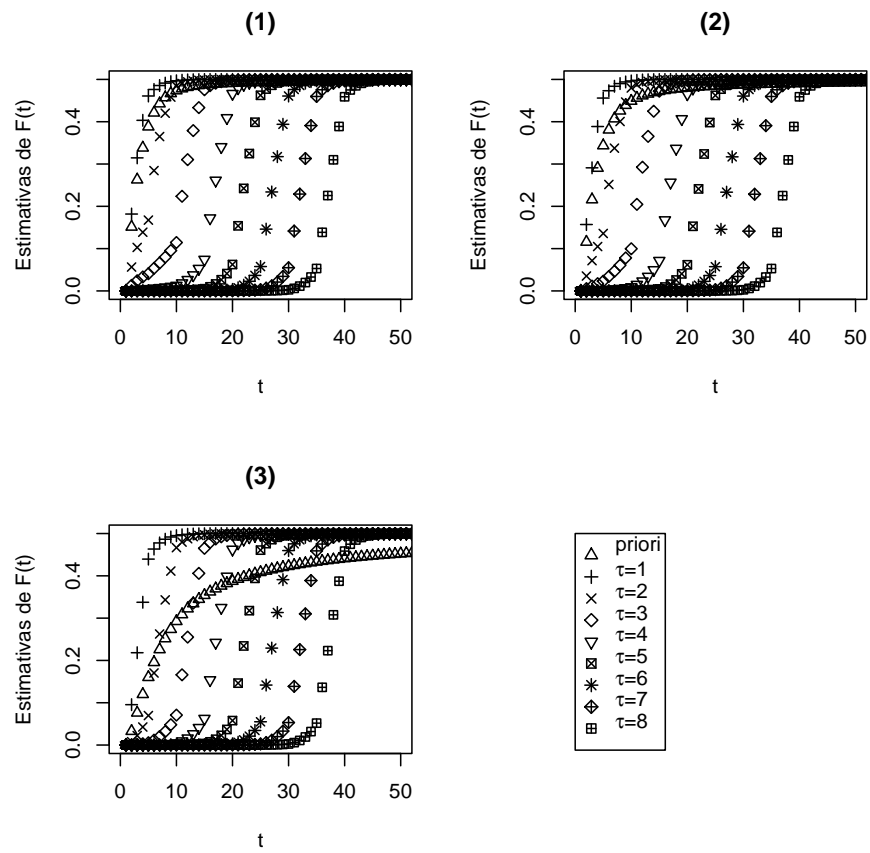


Figura 4.18: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\theta \sim \text{Beta}(1, 1)$, $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$: (1) $\rho \sim \text{Beta}(1, 0.3)$ (2) $\rho \sim \text{Beta}(1, 0.7)$; (3) $\rho \sim \text{Beta}(1, 5)$.

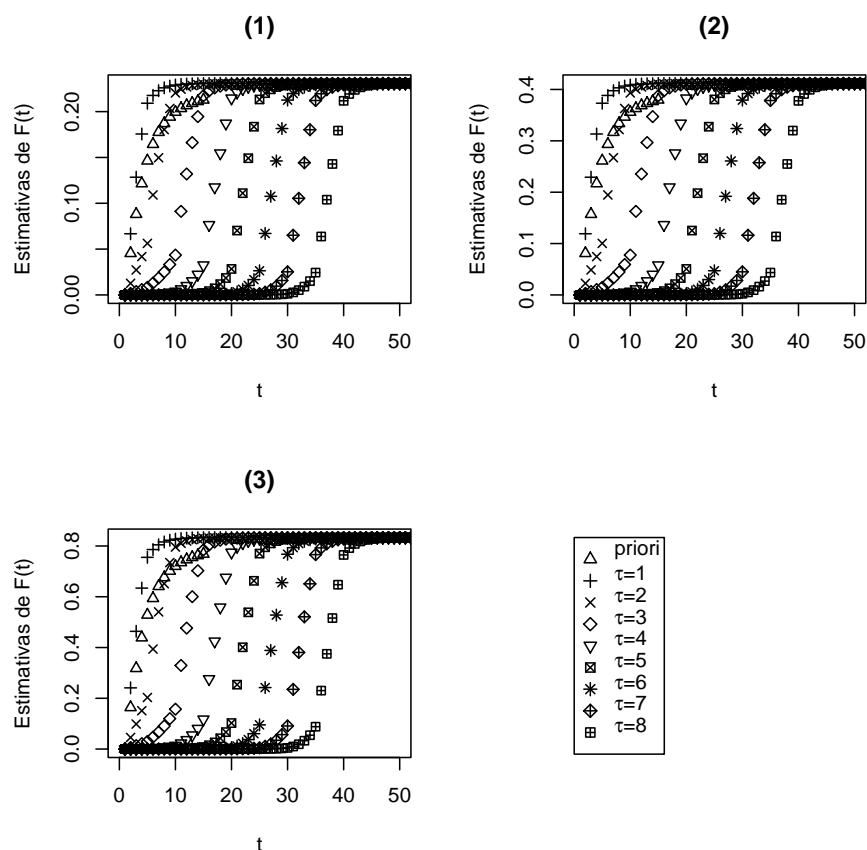


Figura 4.19: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\rho \sim \text{Beta}(1, 1)$, $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$: (1) $\theta \sim \text{Beta}(0.3, 1)$ (2) $\theta \sim \text{Beta}(0.7, 1)$; (3) $\theta \sim \text{Beta}(5, 1)$.

Por fim, a escolha dos hiperparâmetros de θ , como era esperado, interfere, principalmente, nas estimativas da fração não-conforme para longos tempos decorridos do início de um ciclo de produção, Figuras 4.19 e 4.20. Mais especificamente, médias altas a priori (próximas de 1) para a fração não-conforme limite θ produzem estimativas a posteriori também altas para as probabilidades de produzir um item defeituoso. A mudança destes hiperparâmetros parece não interferir na relação entre as estimativas a posteriori e a priori para cada tempo de produção, devido à independência entre os parâmetros θ e ρ a priori. Nesta situação, a influência do parâmetro θ , representada pelo seu primeiro momento, é anulada.

Em geral, com exceção quando $\tau = 1$, para os instantes iniciais de um ciclo, as estimativas a posteriori são menores que a priori e, nos momentos após à detecção da mudança do processo, esta tendência se altera. Além disso, nos momentos iniciais de produção, quanto maior é o número de inspeções em um dado ciclo, menores são as estimativas das frações não-conformes.

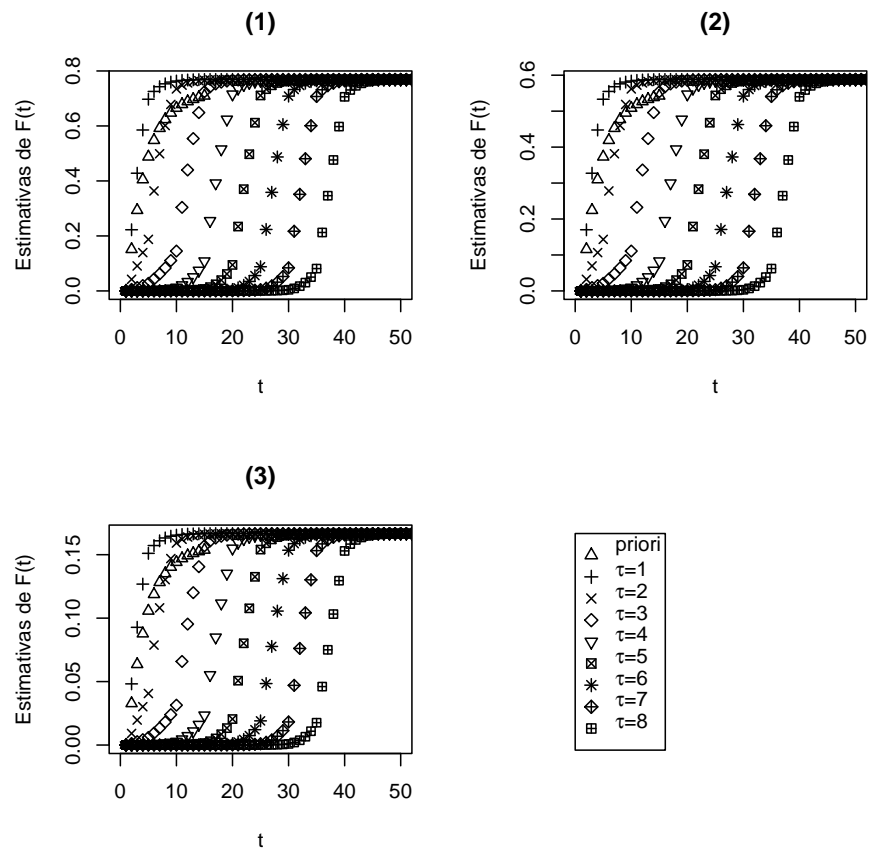


Figura 4.20: Estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dado $\tau = 1, \dots, 8$, para $\rho \sim \text{Beta}(1, 1)$, $m = 5$, $\mu_\zeta(t, \infty) = e^{-0.5(t-\zeta)} I_{(\zeta, \infty)}(t)$: (1) $\theta \sim \text{Beta}(1, 0.3)$ (2) $\theta \sim \text{Beta}(1, 0.7)$; (3) $\theta \sim \text{Beta}(1, 5)$.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Considerações Finais

Neste trabalho, propomos um modelo alternativo para o monitoramento “on-line” da qualidade de Taguchi para atributos. Este modelo contempla o caso em que a sequência de frações não-conformes aumenta gradativamente ao longo de um ciclo de produção, diferentemente dos modelos de Taguchi [49], Nayebpour e Woodall [41] e Nandi e Sreehari [39], que englobam os casos com no máximo três valores para a fração não-conforme em um ciclo e dos modelos de Nandi e Sreehari [40] e Trindade, Ho e Quinino [52] funções de degradação da qualidade do processo de produção mais simples.

A inferência, nesse caso, consiste na obtenção da distribuição a posteriori, dada a observação de itens produzidos em um ciclo, da sequência de frações não-conformes do processo, representada por uma função de distribuição F , através da Inferência Bayesiana não-paramétrica. Mais especificamente, atribuindo uma priori mistura de processos Dirichlet à medida P associada a F desconhecida, obtemos a posteriori uma nova mistura de processos Dirichlet. A aplicação baseia-se na estimação da função de distribuição F associada a P , que corresponde à sequência de frações não-conformes ao longo de um ciclo de produção no contexto de Taguchi, dado que houve $\tau = k$ inspeções em um ciclo. A partir do estudo de alguns exemplos numéricos, constata-se que as estimativas de Bayes são sensíveis às modificações das distribuições a priori dos hiperparâmetros da mistura de processos Dirichlet. Destaca-se o estudo da forma de

crescimento da sequência de estimativas de frações não-conformes em função da escolha dos parâmetros da medida da mistura de processos Dirichlet a priori.

5.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

- Cálculo do intervalo de inspeção ótimo a partir do desenvolvimento do custo esperado por item produzido em um ciclo. Neste caso, escolhe-se o intervalo de inspeção que minimiza a perda esperada a posteriori (ou a priori, para o problema sem dados) baseando-se nos custos associados ao processo de produção.
- Avaliação da aproximação da distribuição a posteriori obtida nesse trabalho por uma mistura de processos Dirichlet mais simples, com a finalidade de aumentar o desempenho computacional no processo de estimação.
- Extensão dos resultados obtidos para o caso de contagens bivariadas.
- Desenvolvimento de modelos não-paramétricos mais gerais para o monitoramento da qualidade de Taguchi incorporando covariáveis.
- Desenvolvimento de um algoritmo computacional mais eficiente através da linguagem C, ou a partir de outras técnicas computacionais, visando a estimação da sequência de frações não-conformes de forma mais rápida em situações com tamanhos de ciclos de produção maiores.
- Avaliação de uma potencial aplicação da metodologia proposta em Análise de Sobrevida de longa duração, pois nesta área o objetivo principal é estimar uma função de distribuição incompleta.
- Consideração de distribuições mais gerais para a distribuição amostral, tais como a distribuição Binomial e Poisson.

Apêndice A

Algoritmos em R para o cálculo das estimativas de Bayes de $F(t)$

A.1 Estimativas de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 1$, $\tau = 2$ e $\tau = k$ com a medida degenerada

Este algoritmo é utilizado para o cálculo da estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 1$ ($X_1 = 1$), dado $\tau = 2$ ($X_1 = 0, X_2 = 1$) e dado $\tau = k$ ($X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_k = 1$), para $k = 3, 4, \dots$. Para esse cálculo, adotamos $\theta \sim Beta(a_1, b_1)$, $\rho \sim Beta(a_2, b_2)$, $\eta|\rho \sim Geo(\rho)$ e $X_n|P, \eta = \zeta, \theta = \vartheta \sim Bernoulli\left(\frac{P(0,n]}{\vartheta}\right)$, para $n = 1, 2, \dots$ e $\frac{P}{\theta}|\theta = \vartheta, \eta = \zeta \sim$ Processo Dirichlet com medida $\mu_\zeta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\zeta)$ (degenerada).

Notação usada no programa

- pmu : vetor de parâmetros de $\mu_\eta(\cdot) = I_{(\cdot)}(\eta)$;
- $prho$: vetor de parâmetros a priori de $\rho \sim Beta(prho[1], prho[2])$;
- k e m : número de inspeções e intervalo entre inspeções, respectivamente;
- pt : a estimativa de $F(pt)$.

Cálculo das frações de γ , $\rho \sim Beta(p1, p2)$

```
frg <- function(lim, p1, p2) {
  part1 <- -lgamma(p1+p2) + log(p1, base=exp(1)) - lgamma(p2)
  part2 <- -unlist(lapply(1:lim, function(i) lgamma(p2+i-1) - lgamma(p1+p2+i) ))
  res <- -exp(part1+part2); res
}
```

Estimativa de Bayes a priori de $F(pt)$

```
estFt <- function(pteta, p1, m, lim) {
  frgam <- frg(lim, p1[1], p1[2])
  part1 <- -unlist(lapply(1:lim, function(i) sum(frgam[1:i]) ))
  razteta <- -(pteta[1]) / (pteta[1] + pteta[2])
  estbn1 <- c(part1 * razteta); c(estbn1)
}
```

Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 1$

```
festt1 <- function(pteta, prho, m, lim) {
  frgam <- frg(lim, prho[1], prho[2])
  part1 <- -unlist(lapply(1:(m-1), function(i) sum(frgam[1:i]) / sum(frgam[1:m]) ))
  razteta <- -pteta[1] / (pteta[1] + pteta[2])
  estbn1 <- c(part1 * razteta, rep(razteta, (lim-m+1) )); c(estbn1)
}
```

Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$

```
festt2 <- function(pteta, prho, m, lim) {
```

```

frgam <- frg(lim,prho[1],prho[2])
part1 <- unlist(lapply((m+1):(2*m),
function(i) sum(frgam[(m+1):i])/sum(frgam[(m+1):(2*m)])) ))
razteta<- pteta[1]/(pteta[1]+pteta[2])
estbn1<- c(rep(0,m),part1*razteta, rep(razteta,(lim-2*m)) ); c(estbn1)
}

```

Gráfico das estimativas de Bayes de $F(t)$ a priori, dados $\tau = 1$ e $\tau = 2$

```

g.pritau12b<-function(pteta,prho,m,lim){

  esttau1<-festt1(pteta,prho,m,lim)
  esttau2<-festt2(pteta,prho,m,lim)
  estprior<-estFt(pteta,prho,m,lim)
  plot(seq(1,length(esttau1),1),esttau1,pch=19,ylim=c(0,1),xlab="t",ylab="Estimativas
de F(t)",cex=0.8)
  points(seq(1,length(esttau2),1),esttau2,col=3,pch=".",cex=7)
  points(1:length(estprior),estprior,col=2,pch=24,cex=0.6)

}

```

Estimativas de Bayes dado $\tau = k$ com medida degenerada

```

festtk<-function(pteta,prho,m,tauk) { # est bayes para F(t) dado tauk = 2
frgam <- frg(tauk*m,prho[1],prho[2]) # fração de  $\gamma$ 
part1<-c()
int<-((tauk-1)*m+1):(tauk*m)
for(i in 1:length(int)) part1[i]<-sum(frgam[((tauk-1)*m+1):int[i]])
razteta<- (pteta[1])/(pteta[1]+pteta[2])
estbn1<- c(rep(0,(tauk-1)*m),part1*razteta/sum(frgam[((tauk-1)*m+1):(tauk*m)]),
rep(razteta,tauk*m) ); c(estbn1) }

```

A.2 Estimativas de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 1$ e dado $\tau = 2$ com medida exponencial

Este programa calcula a estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $X_1 = 1$ supondo $\theta \sim Beta(a_1, b_1)$, $\rho \sim Beta(a_2, b_2)$, $\eta|\rho \sim Geo(\rho)$ e $X_n|P, \theta = \vartheta, \eta = \zeta \sim Bernoulli(\frac{P(0, n]}{\vartheta})$ e $\frac{P}{\vartheta}|\theta = \vartheta, \eta = \zeta \sim$ Processo Dirichlet com medida tal que $\mu_\zeta(t, \infty) = Be^{-A(t-\zeta)}$ (exponencial truncada em $\eta = \zeta$).

Cálculo dos três primeiros momentos da $Beta(p1, p2)$

```
mbeta<-function(p1,p2){
  m1<-p1/(p1+p2); m2<-m1*(p1+1)/(p1+p2+1); m3<-m2*(p1+2)/(p1+p2+2)
  c(m1,m2,m3)
}
```

Estimativa de Bayes a priori de $F(t)$

```
estFt<-function(pteta,prho,pmu,m) {
  frgam<-frg(50,prho[1],prho[2])
  estbd<-unlist((lapply(1:(50),function(pt) sum(unlist(lapply(1:trunc(pt), function(i) (1-exp(-pmu[1]*(pt-i))*frgam[i] ))) * pteta[1]/(sum(pteta)))))) ; c(estbd)
}
```

Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$

Denominador da Estimativa de Bayes de $F(t)$

```
festbdt1<-function(prho,pmu,m) {
  frgam<-frg(m,prho[1],prho[2])
  estbd<-sum(unlist(lapply(1:m, function(i) (1-exp(-pmu[1]*(m-i))*frgam[i] )))
  c(estbd)
}
```


Numerador da Estimativa de Bayes de $F(t)$ para $t < m$ - parte referente a η

```
festn1t1 <- function(prho,pmu,m,pt) {
  frgam <- - frg(m,prho[1],prho[2])
  estbn1 <- - (sum(unlist(lapply(1:trunc(pt),
    function(i) (1-exp(-pmu[1]*(pt-i)))*(1+pmu[2]-pmu[2]*exp(-pmu[1]*(m-i)))
    frgam[i])))))/(pmu[2]+1)
  c(estbn1)
}
```

Numerador da Estimativa de Bayes para $F(t)$ para $t \geq m$ - parte referente a η

```
festn2t1 <- function(prho,pmu,m,pt) {
  frgam <- - frg(m,prho[1],prho[2])
  part1 <- - sum(unlist(lapply(1:m, function(i) (1-exp(-pmu[1]*(m-i)))*(pmu[2]*(1-
    exp(-pmu[1]*(pt-i)))+1)*frgam[i] )))
  estbn2 <- - part1/(pmu[2]+1)
  c(estbn2)
}
```

Cálculo da Estimativa de Bayes de $F(t)$ $t = 1, \dots, plim$

```
estbt1 <- function(pteta,prho,pmu,m) {
  plim <- - 50; mte <- - pteta[1]/sum(pteta)
  deno <- - festbdt1(prho,pmu,m)
  num1 <- - unlist(lapply(1:(m-1),function(i) festn1t1(prho,pmu,m,i) ))*mte
  num2 <- - unlist(lapply(m:plim, function(i) festn2t1(prho,pmu,m,i) ))*mte
  c( num1/deno, num2/deno )
}
```

Gráfico das estimativas a priori e dado $X_1 = 0$ e $X_2 = 1$

```
g.pritau1 <- function(pteta,prho,pmu,m){
  est <- estbt1(pteta,prho,pmu,m)
  estprior <- unlist(lapply(1:(3*m),
    function(i)estFt(i,mbeta(pteta[1],pteta[2])[1],prho,pmu)))
  plot(seq(1,length(est),1),est,pch=19,ylim=c(0,1),xlab="t", ylab="Estimativas de
  F(t)", cex=0.7)
  points(1:(3*m),estprior,col=2,pch=".",cex=4)
}
```

Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 2$

Denominador da Estimativa Bayes de $F(t)$

```
festbdt2 <- function(prho,pmu,m) {
  frgam <- frg(2*m,prho[1],prho[2])
  part1 <- sum(unlist(lapply(1:m, function(i) (pmu[2]*exp(-pmu[1]*(m-i))*(1-exp(-
  pmu[1]*(2*m-i))) + exp(-pmu[1]*(m-i))-exp(-pmu[1]*(2*m-i))*frgam[i] )))
  part2 <- sum(unlist(lapply((m+1) : (2*m) , function(i) (1-exp(-pmu[1]*(2*m-
  i)))*(1+pmu[2])*frgam[i] )))
  estbd <- (part1+part2)/(pmu[2]+1); c(estbd)
}
```

Numerador da Estimativa de Bayes para $F(t)$ para $t \leq m$ - parte referente a η

```
festn1t2 <- function(prho,pmu,m,pt) {
  frgam <- frg(pt,prho[1],prho[2])
  part1 <- sum(unlist(lapply(1:trunc(pt), function(i) (1-exp(-pmu[1]*(pt-i)))*(exp(-
```

```

pmu[1]*(m-i))*(1+pmu[2]-pmu[2]*exp(-pmu[1]*(2*m-i)))+exp(-pmu[1]*(m-i))-exp(-
pmu[1]*(2*m-i))*frgam[i] )))
estbn1 <- part1*pmu[2]/((pmu[2]+1)*(pmu[2]+2)); c(estbn1)

```

}

Numerador da Estimativa de Bayes para $F(t)$ para $m < t \leq 2m$ - parte referente a η

```

festn2t2 <- function(prho,pmu,m,pt) {

```

```

frgam <- frg(trunc(pt),prho[1],prho[2]) part1 <- sum(unlist(lapply(1:m, func-
tion(i) (pmu[2] * exp(-pmu[1]*(m-i)) * (1-exp(-pmu[1] * (pt-i))) * (1+pmu[2]-
pmu[2] * exp(-pmu[1] * (2*m-i))) + (exp(-pmu[1]*(m-i))-exp(-pmu[1]*(pt-i))) *
(2+pmu[2]-pmu[2] * exp(-pmu[1] * (2*m-i)))+pmu[2] * (1-exp(-pmu[1]*(pt-i))) *
(exp(-pmu[1] * (m-i))-exp(-pmu[1] * (2*m-i))))*frgam[i] )))
part2 <- sum(unlist(lapply((m+1):trunc(pt), function(i) (1-exp(-pmu[1]*(pt-i)))
* (pmu[2]*(pmu[2]+2) * (1-exp(-pmu[1]*(2*m-i)))+2+pmu[2]) * frgam[i] )))
estbn2 <- (part1+part2)/ ((pmu[2]+1)*(pmu[2]+2)); c(estbn2)

```

}

Numerador da Estimativa de Bayes para $F(t)$ para $2m < t < \infty$ - parte referente a η

```

festn3t2 <- function(prho,pmu,m,pt) {

```

```

frgam <- frg(2*m,prho[1],prho[2])
part1 <- sum(unlist(lapply(1:m, function(i) (pmu[2]*(1-exp(-pmu[1]*(2*m-i))) *
exp(-pmu[1]*(m-i)) * (1+pmu[2]-pmu[2]*exp(-pmu[1]*(pt-i)))+pmu[2] *(exp(-pmu[1]
*(m-i))-exp(-pmu[1]*(pt-i))) * (1-exp(-pmu[1]*(2*m-i)))+(exp(-pmu[1] * (m-i))-exp(-
pmu[1]*(2*m-i))) * (2+pmu[2]-pmu[2]*exp(-pmu[1]*(pt-i))) ) * frgam[i] )))
part2 <- sum(unlist(lapply((m+1):(2*m), function(i) (1-exp(-pmu[1]*(2*m-i)))
*(pmu[2] *(pmu[2]+2) * (1-exp(-pmu[1]*(pt-i)))+pmu[2]+2) *frgam[i] )))
estbn3 <- (part1+part2)/ ((pmu[2]+1)*(pmu[2]+2)); c(estbn3)

```

}

Cálculo da Estimativa de Bayes de $F(t)$, $t = 1, \dots, plim$

```
estbt2 <- function(pteta,prho,pmu,m) {
  plim <- 50; mte <- pteta[1]/sum(pteta)
  deno <- festbdt2(prho,pmu,m)
  num1 <- unlist(lapply(1:m, function(i) festn1t2(prho,pmu,m,i) ))*mte
  num2 <- unlist(lapply((m+1):(2*m), function(i) festn2t2(prho,pmu,m,i) ))*mte
  num3 <- unlist(lapply((2*m+1):plim, function(i) festn3t2(prho,pmu,m,i) ))*mte
  c( num1/deno, num2/deno, num3/deno )
}
```

A.3 Estimativas de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 3$ com a medida exponencial

Cálculo das frações de γ , $\rho \sim \text{beta}(p1, p2)$

```
frg2 <- function(pnt,p1,p2){
  part1 <- -lgamma(p1+p2)+log(p1,base=exp(1))-lgamma(p2)
  part2 <- -lgamma(p2+pnt-1) - lgamma(p1+p2+pnt)
  res <- -exp(part1+part2); res
}
```

```
fprmur <- function(tk,pmu2) {
  prod(unlist(lapply(1:tk,function(i) pmu2+i-1))) }
}
```

Cálculo da medida $\mu(\text{indj} - 1, \text{indj}] * m$

```
fmu2 <- function(pmu,tk,indj,eta,m){
```

```

int < -c(indj-1,indj)*m
if(int[1]<0) stop ("intervalo negativo para o cálculo de fmui")
rpmui < -pmu[2]*(exp(-pmu[1]*(max(int[1],eta)-eta)) - exp(-pmu[1]*(max(int[2],eta)-
eta)))
if (indj==(tk+1)) rpmui < -pmu[2]*exp(-pmu[1]*(max(int[1],eta)-eta))
return(rpmui)
}

f2 < -function(pmu,tk,indj,eta,pnt,m,il){

ftm < -trunc(pnt/m)
int < -c(indj-1,indj)*m
if(int[1]<0) stop ("intervalo negativo para o cálculo de f2")

if(il==1 & pnt < int[2] & pnt > int[1])int < -c((ftm)*m,pnt)
if(il==0 & pnt < int[2] & pnt > int[1])int < -c(pnt,indj*m)
int < -c(max(int[1],eta),max(int[2],eta))
rpmui < -pmu[2]*(exp(-pmu[1]*(int[1]-eta)) - exp(-pmu[1]*(int[2]-eta)))
return(rpmui)
}

```

Matriz com os valores da medida μ na partição (D_1, \dots, D_{k+1})

```

fmat1 < -function(p1,p2,tk,m){

mat1 < -matrix(ncol=(tk*m),nrow=2); mat2 < -c()
for(i in 1:2)for (j in 1:(tk*m)) mat1[i,j] < - fmu2(p1,tk,tk+i-1,j,m) }
mat1b < -matrix(ncol=(tk*m),nrow=tk)
for(i in 1:tk) mat1b[i,] < - c(mat1[1,((tk-i)*m+1):(tk*m-1)] , rep(0,((tk-i)*m+1)))
for(eta in 1:(tk*m))mat2[eta] < - frg2(eta,p2[[1]] , p2[[2]])}

```

```

mat1b<-rbind(mat1b,mat1[2,],mat2)
return(mat1b)
}

```

Denominador da Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 3$

```

fdeno32<-function(mat1,tk,m){

  res<-0;
  for(i1 in 2:(tk+1)){
    for(i2 in 3:(tk+1)){
      for(i3 in 1:(tk)){
        vet<-sort(c(i1,i2,i3))
        vmat<-0; for(i in 2:tk){vmat[i]<-sum(match(vet[1:(i-1)],vet[i],nomatch=0))}
        res2<-c()
        for(eta in 1:(tk*m)){
          prodp<-1;
          for(j in 1:tk){prodp<-prodp*(mat1[vet[j],eta]+vmat[j])};
          res2[eta]<-mat1[tk+2,eta]*prodp if(prodp==0)break }
          res<-res+sum(res2) } } } ; return( res )
}

```

Numerador da Estimativa de Bayes de $F(ftm)$ dado $\tau = 3$ para $ftm * m < pnt < (ftm + 1) * m$, $ftm = 1, \dots, tk$

```

fng3a2<-function(p1,mat1,tk,ftm,m){

  res<-rep(0,m-1);
  for(i1 in 1:0){
    if(i1==1) ifelse(ftm >= 1,rj1<-2:min((ftm+1),tk+1), next)
    if(i1==0) {rj1<-max((ftm+1),2):(tk+1)}

```

```

for(i2 in 1:0){
  if(i2==1) ifelse(ftm >= 2,rj2< -3:min((ftm+1),tk+1) , next)
  if(i2==0) {rj2< -max((ftm+1),3):(tk+1)}

  for(ik in 1:0){
    if(ik==1) {rjk< -1:min(ftm+1,tk)}
    if(ik==0) ifelse(ftm < tk,rjk< -(ftm+1):tk,next)

    for(j1 in rj1){
      for(j2 in rj2){
        for(jk in rjk){
          vetj< -c(j1,j2,jk)
          veti< -c(i1,i2,ik)

          vmat< -0; for(i in 2:tk){vmat[i]< - sum(match(veti[which(vetj[1:(i-1)] %in%
          vetj[i])],veti[i],nomatch=0)) }

          int< -((ftm*m)+1):((ftm+1)*m-1)

          for(ip in 1:length(int) ){
            res2< -c();
            for(eta in 1:(tk*m)){ prodp< -1
            for(j in 1:tk){
              term< -mat1[vetj[j],eta]
              if(vetj[j]==(ftm+1))term< -f2(p1,tk,vetj[j],eta,int[ip],m,veti[j])
              prodp< - prodp * ( term + vmat[j] ) };
            res2[eta]< - ( p1[2]*(1 - exp(-p1[1]*(max(int[ip],eta)-eta)))+sum(veti) ) * prodp
            * mat1[tk+2,eta]
            if(prodp==0)break }
            res[ip]< -res[ip]+sum(res2) } } } } } }; return( res )

}

```

Numerador da Estimativa de Bayes de $F(pnt)$ dado $\tau = 3$ para $pnt = i*m, i = 1, \dots$

```
fng3c2 <- function(p1,mat1,tk,pnt,m){
  res <- -0; ftm <- -trunc(pnt/m)
  for(i1 in 1:0){
    if(i1==1) ifelse(ftm >= 2 ,rj1 < -2:min(ftm,tk+1) , next)
    if(i1==0) {rj1 < -max((ftm+1),2):(tk+1)}
    for(i2 in 1:0){
      if(i2==1) ifelse(ftm >= 3,rj2 < -3:min(ftm,tk+1) , next)
      if(i2==0) {rj2 < -max((ftm+1),3):(tk+1)}
      for(ik in 1:0){
        if(ik==1) {rjk < -1:min(ftm,tk)}
        if(ik==0) ifelse(ftm < tk,rjk < -(ftm+1):tk,next)
        for(j1 in rj1){
          for(j2 in rj2){
            for(jk in rjk){
              vetj < -c(j1,j2,jk)
              veti < -c(i1,i2,ik)
              vmat < -0; for(i in 2:tk){vmat[i] < - sum(match(veti[which(vetj[1:(i-1)] %in%
              vetj[i])],veti[i],nomatch=0)) }
              res2 < -c();
              for(eta in 1:(tk*m)){
                prodp < -1
                for(j in 1:tk){ prodp < - prodp * ( mat1[vetj[j],eta] + vmat[j] ) };
                res2[eta] < - ( p1[2]*(1 - exp(-p1[1]*(max(pnt,eta)-eta)))+sum(veti) ) * prodp *
                mat1[tk+2,eta] if(prodp==0)break }
              res < -res+sum(res2) } } } } } ; return( res )
            }
          }
        }
      }
    }
  }
}
```


Numerador da Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 3$ para $t > tk * m$

```
fng3b2< -function(p1,mat1,tk,m,lim){

  ftm< -tk ; int< -(tk*m+1):lim
  mat1k1< -mat1k0< -matrix(nrow=length(int),ncol=(tk*m))

  for (lin in 1:length(int)){
  for(eta in 1:(tk*m)){
  mat1k1[lin,eta] < - p1[2]*(exp(-p1[1]*(tk*m-eta)) - exp(-p1[1]*(int[lin]-eta)))
  mat1k0[lin,eta] < - p1[2]*exp(-p1[1]*(int[lin]-eta)) }}

  mat1k< -list(mat1k0,mat1k1)

  res< -rep(0,length(int));
  for(i1 in 1:0){
  if(i1==1) ifelse(ftm >= 1,rj1< -2: (tk+1) , next)
  if(i1==0) {rj1< -tk+1}

  for(i2 in 1:0){
  if(i2==1) ifelse(ftm >= 2,rj2< -3: (tk+1) , next)
  if(i2==0) {rj2< -tk+1}

  for(ik in 1:0){
  if(ik==1) {rjk< -1:tk}
  if(ik==0) next

  for(j1 in rj1){
  for(j2 in rj2){
  for(jk in rjk){

  vetj< -c(j1,j2,jk)
  veti< -c(i1,i2,ik)

  vmat< -0; for(i in 2:tk){vmat[i]< - sum(match(veti[which(vetj[1:(i-1)] %in%
  vetj[i])],veti[i],nomatch=0)) }

}
```

```

for(ip in 1:length(int) ){
mat2<-mat1[vetj,]
for(lin in 1:tk){if(vetj[lin]==(tk+1)) mat2[lin,]<-mat1k[[ veti[lin]+1 ]][ip,] }
part1<-c()
for(eta in 1:(tk*m)) part1[eta]<-p1[2] * (1 - exp(-p1[1] * (max(int[ip],eta)-eta)))
+ sum(veti)
res[ip]<-res[ip]+sum(apply(mat2+vmat,2,prod)*mat1[tk+2,]*part1) } } } } } };
return( res )
}

```

A.4 Estimativas de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 4$ com a medida exponencial

Denominador da Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 4$

```

fdeno42<-function(mat1,tk,m){
res<-0;
for(i1 in 2:(tk+1)){
for(i2 in 3:(tk+1)){
for(i3 in 4:(tk+1)){
for(ik in 1:(tk)){
vet<-c(i1,i2,i3,ik)
vmat<-0; for(i in 2:tk){vmat[i]<-sum(match(vet[1:(i-1)],vet[i],nomatch=0))}
res2<-c()
for(eta in 1:(tk*m)){
prodp<-1;
for(j in 1:tk){prodp<-prodp*(mat1[vet[j],eta]+vmat[j])};
res2[eta]<-mat1[tk+2,eta]*prodp
if(prodp==0)break }
res<-res+sum(res2) } } } } }; return( res )
}

```

}

Numerador da Estimativa de Bayes de $F(pnt)$ dado $\tau = 4$ para $ftm * m < pnt < (ftm + 1) * m$, $ftm = 1, \dots, tk$

```
fng4a2< -function(p1,mat1,tk,ftm,m){

  res< -rep(0,m-1);
  for(i1 in 1:0){
    if(i1==1) ifelse(ftm >= 1,rj1< -2:min((ftm+1),tk+1), next)
    if(i1==0) {rj1< -max((ftm+1),2):(tk+1)}
    for(i2 in 1:0){
      if(i2==1) ifelse(ftm >= 2,rj2< -3:min((ftm+1),tk+1) , next)
      if(i2==0) {rj2< -max((ftm+1),3):(tk+1)}
      for(i3 in 1:0){
        if(i3==1) ifelse(ftm >= 3,rj3< -4: min(ftm+1,tk+1) , next)
        if(i3==0) {rj3< -max((ftm+1),4):(tk+1)}
        for(ik in 1:0){
          if(ik==1) {rjk< -1:min(ftm+1,tk)}
          if(ik==0) ifelse(ftm< tk,rjk< -(ftm+1):tk,next)
          for(j1 in rj1){
            for(j2 in rj2){
              for(j3 in rj3){
                for(jk in rjk){
                  vetj< -c(j1,j2,j3,jk) ; veti< -c(i1,i2,i3,ik)
                  vmat< -0; for(i in 2:tk){vmat[i]< - sum(match(veti[which(vetj[1:(i-1)] %in%
                    vetj[i])],veti[i],nomatch=0)) }
                  int< -((ftm*m)+1):((ftm+1)*m-1)
                  for(ip in 1:length(int) ){
```



```

for(j1 in rj1){
for(j2 in rj2){
for(j3 in rj3){
for(jk in rjk){
vetj<-c(j1,j2,j3,jk) ; veti<-c(i1,i2,i3,ik)
vmat<-0; for(i in 2:tk){vmat[i]<- sum(match(veti[which(vetj[1:(i-1)] %in%
vetj[i]]),veti[i],nomatch=0)) }
res2<-c();
for(eta in 1:(tk*m)){
prodp<-1
for(j in 1:tk){ prodp<- prodp * ( mat1[vetj[j],eta] + vmat[j] ) };
res2[eta]<- ( p1[2]*(1 - exp(-p1[1]*(max(pnt,eta)-eta)))+sum(veti) ) * prodp *
mat1[tk+2,eta]
if(prodp==0)break } res<-res+sum(res2) } } } } } }; return( res )
}

```

Numerador da Estimativa de Bayes de $F(t)$ dado $\tau = 4$ para $t > tk * m$

```

fng4b2<-function(p1,mat1,tk,m,lim){
ftm<-tk ; int<- (tk*m+1):lim
mat1k1<-mat1k0<-matrix(nrow=length(int),ncol=(tk*m))
for (lin in 1:length(int)){
for(eta in 1:(tk*m)){
mat1k1[lin,eta] <- p1[2]*(exp(-p1[1]*(tk*m-eta)) - exp(-p1[1]*(int[lin]-eta)))
mat1k0[lin,eta] <- p1[2]*exp(-p1[1]*(int[lin]-eta)) } }
mat1k<-list(mat1k0,mat1k1)
res<-rep(0,length(int));
for(i1 in 1:0){

```

```

if(i1==1) ifelse(ftm >= 1,rj1< -2: (tk+1) , next)
if(i1==0) {rj1< -tk+1}

for(i2 in 1:0){
if(i2==1) ifelse(ftm >= 2,rj2< -3: (tk+1) , next)
if(i2==0) {rj2< -tk+1}

for(i3 in 1:0){
if(i3==1) ifelse(ftm >= 3,rj3< -4: (tk+1) , next)
if(i3==0) {rj3< -(tk+1)}

for(ik in 1:0){
if(ik==1) {rjk< -1:tk}
if(ik==0) next

for(j1 in rj1){
for(j2 in rj2){
for(j3 in rj3){
for(jk in rjk){

vetj< -c(j1,j2,j3,jk)
veti< -c(i1,i2,i3,ik)

vmat< -0; for(i in 2:tk){vmat[i]< - sum(match(veti[which(vetj[1:(i-1)] %in%
vetj[i])],veti[i],nomatch=0)) }

for(ip in 1:length(int) ){
mat2< -mat1[vetj,]; part1< -c()
for(lin in 1:tk){if(vetj[lin]==(tk+1)) mat2[lin,]< -mat1k[[ veti[lin]+1 ]][ip,] }
for(eta in 1:(tk*m)) part1[eta]< - p1[2]*(1 - exp(-p1[1]*(max(int[ip],eta)-eta)))
+sum(veti)
res[ip]< -res[ip]+sum(apply(mat2+vmat,2,prod)*mat1[tk+2,]*part1) } } } } } } } }
return( res )

}

```

A.4. Estimativas de Bayes de $F(t)$ com medida exponencial 113

Os algoritmos computacionais para os demais casos estudados no Apêndice 4.4 (estimativas de Bayes de $F(t)$ para $\tau = 5, \dots, 8$) foram omitidos pois são muito semelhantes aos algoritmos apresentados nos Apêndices A.3 e A.4. Essencialmente, acrescentam-se algumas linhas de comando referentes aos índices dos somatórios adicionais. Um algoritmo utilizando recurso matricial, também em linguagem R, foi construído. Este algoritmo calcula a estimativa de Bayes de $F(t)$ para o caso geral dado $\tau = k$, porém, devido à necessidade de grande quantidade de memória, é inviável, por ora, para o processo de estimação para valores grandes de k .

Referências Bibliográficas

- [1] C.E. Antoniak, *Mixtures of dirichlet processes with applications to bayesian nonparametric problems*, Annals of Statistics **19** (1974), no. 2, 1152–74.
- [2] R.E. Barlow, L.C. Hunter, and F. Proschan, *Optimum checking procedures*, SIAM Journal **11** (1963), 1078–1095.
- [3] A.C.V. Belem, *Métodos de controle de processo on-line para atributos*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- [4] P. Billingsley, *Probability and measure*, 3rd ed., Wiley series in probability and mathematical statistics, New York : Wiley, 1995.
- [5] D. Blackwell and J.B. MacQueen, *Ferguson distributions via pólya schemes*, Ann. Statist **1** (1973), 353–355.
- [6] J. Blum and V. Susarla, *On the posterior distribution of a dirichlet process given randomly right censored observations*, Stochastic Processes and their applications (1977), no. 5, 207–211.
- [7] W. Borges and L.G. Esteves e S. Wechsler, *Process parameters estimation in the taguchi on-line quality monitoring procedure for attributes*, rt-mae ed., IME-USP, São Paulo, 2005.
- [8] W. Borges, L.L. Ho, and O. Turnes, *An analysis of taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes with diagnosis errors*, Applied Stochastic Models in Business and Industry **17** (2001), 261 – 276.
- [9] C.A. Bush and S.N. MacEachern, *A semi-parametric bayesian model for randomized block designs*, Biometrika **83** (1996), 275–286.

- [10] M. Calle and G. Gomez, *Nonparametric bayesian estimation from interval-censored data using monte carlo methods*, Journal of Statistical Planning and Inference **98** (2001), 73–87.
- [11] G. Campbell and M. Hollander, *Rank order estimation with the dirichlet prior*, Ann. Statist **6** (1978), 142–153.
- [12] S.R. Dalal and E.G. Phadia, *Nonparametric bayes inference for concordance in bivariate distributions*, Communications in Statistics A - Theory and Methods **12** (1983), 947–963.
- [13] T. Dasgupta and A. Mandal, *Estimation of process parameters to determine the optimum diagnosis interval control of defective items*, American Statistical Association and the American Society for Quality - Technometrics **50** (2008), 167–181.
- [14] M.H. DeGroot, *Optimal statistical decisions*, 2 ed., McGraw-Hill Company, New York, 1970.
- [15] K.A. Doksum, *Tailfree and neutral random probabilities and their posterior distributions*, Ann. Probability **2** (1974), 183–201.
- [16] H. Doss and F. Huffer, *Monte carlo methods for bayesian analysis of survival data using mixtures of dirichlet process priors*, Journal of Computational and Graphical Statistics **12** (2003), no. 2, 282–307.
- [17] A.J. Duncan, *The economic design of x-charts used to maintain current control of a process*, Journal of the American Statistical Association **51** (1956), 228–42.
- [18] M.D. Escobar and M. West, *Bayesian density estimation and inference using mixtures*, J. Am. Statist. Ass. **90** (1995), 577–588.
- [19] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, 2 ed., vol. 2, Wiley, University of Michigan, 1957.
- [20] T.S. Ferguson, *A bayesian analysis of some non-parametric problems*, The Annals of Statistics **1** (1973), 209 – 230.
- [21] ———, *Prior distributions on spaces of probability measures*, Ann. Statist. **2** (1974), 615–629.
- [22] T.S. Ferguson and E.G. Phadia, *Bayesian nonparametric estimation based on censored data*, Ann. Statist. **7** (1979), 163–186.

- [23] D. Follmann and P. Albert, *Bayesian monitoring of event rates with censored data*, *Biometrics* **55** (1999), 603–607.
- [24] D.A. Freedman, *On the asymptotic behavior of bayes estimates in the discrete case*, *Ann. Math. Statist.* **34** (1963), 1386–1403.
- [25] A. Gelfand and A. Kottas, *Nonparametric bayesian modeling for stochastic order*, *Ann. Inst Statist. Math* **53** (2001), no. 4, 865–876.
- [26] ———, *A computational approach for full nonparametric bayesian inference under dirichlet process mixture models*, *Journal of Computational and Graphical Statistics* **11** (2002), no. 2, 289–305.
- [27] A.E. Gelfand and L. Kuo, *Nonparametric bayesian bioassay including ordered polytomous response*, *Biometrika* **78** (1991), no. 3, 657–66.
- [28] A.E. Gelfand and Mallick, *Bayesian analysis of proportional hazards models built from monotone functions*, *Biometrics* **51** (1995), 843–52.
- [29] Gibra, *Economically optimal determination of the parameters of np-control charts*, *Journal of Quality Technology* **10** (1978), 12–19.
- [30] J.K. Gosh and R.V. Ramamoorthi, *Bayesian non-parametrics*, Springer, New York, 2003.
- [31] T. Hanson and W. Johnson, *A bayesian semiparametric aft model for interval-censored data*, *Journal of Computational and Graphical Statistics* **13** (2004), no. 2, 341–361.
- [32] M. Hollander, *Nonparametric statistical methods*, Wiley, New York, 1973.
- [33] L. James, A. Lijoi, and I. Prunster, *Conjugacy as a distinctive feature of the dirichlet process*, *Scandinavian Journal of Statistics* **33** (2006), 105–120.
- [34] N.L. Johnson and S.Kotz, *Discrete distributions*, second ed., vol. 1, Wiley, 1969.
- [35] E.L. Kaplan and P. Meier, *Nonparametric estimation from incomplete observations*, *Journal of the American Statistical Association* **53** (1958), 457–81.
- [36] Y. Kim, *On the posterior consistency of mixture of dirichlet process priors with censored data*, *Journal of statistics* **30** (2003), 535–547.
- [37] P. Müller and F.A. Quintana, *Nonparametric bayesian data analysis*, *Statistical Science* **19** (2004), no. 1, 95–110.

- [38] D.C. Montgomery, *Introduction to statistical quality control*, 4th ed., Livros técnicos e científicos, Rio de Janeiro, 2004.
- [39] S.N. Nandi and M. Sreehari, *Economy based on-line quality control method for attributes*, Sahkhyã: The Indian Journal of Statistics **59 B** (1997), 384–395.
- [40] ———, *Some improvements in taguchi's economic method allowing continued quality deterioration in production process*, Commun. Statist - Theory Meth. **28** (1999), no. 5, 1169–1181.
- [41] M.R. Nayebpour and W.H. Woodall, *An analysis of taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes*, Technometrics **35** (1993), 53 – 60.
- [42] L.C. Ramos, *Uma abordagem bayesiana para o método de controle "on-line" de taguchi para atributos*, Dissertação (Mestrado), IME- Instituto de Matemática e Estatística, 2008.
- [43] J. Sethuraman, *A constructive definition of dirichlet priors*, Statistica Sinica **4** (1994), 639–650.
- [44] J. Sethuraman and R.C. Tiwari, *Convergence of dirichlet measures and the interpretation of their parameter*, Statistical Decision Theory and Related Topics III **2** (1982), 305–315.
- [45] A.N. Shirayayev, *Probability*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [46] N. Souza, *Controle estatístico de processos: Uma perspectiva bayesiana para atributos*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- [47] V. Susarla and Van Ryzin, *Nonparametric bayesian estimation of survival curves from incomplete observation*, Journal of the American Statistical Association **71** (1976), no. 356, 897–902.
- [48] G. Taguchi, *On-line quality control during production*, Japanese Standards Association, Tokyo, 1981.
- [49] G. Taguchi, E.A. Elsayed, and T.C. Hsiang, *Quality engineering in production systems*, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [50] V.H.S. Torres, *Análise bayesiana não-paramétrica na teoria de riscos competitivos*, Tese (Doutorado), IME- Instituto de Matemática e Estatística, 1992.
- [51] V.H.S. Torres, C.A. Pereira, and R. Tiwari, *Convergence of dirichlet meaures arising in context of bayesian analysis of competing risks models*, Journal of multivariate analysis **62** (1997), 24–35.

- [52] A.L.G. Trindade, L.L. Ho, and R.C. Quinino, *Monitoring process for attributes with quality deterioration and diagnosis errors*, Applied Stochastic Models in Business and Industry **23** (2007), 339–358.
- [53] S.G. Walker and et.al., *Bayesian nonparametric inference for random distributions and related functions*, J.R. Statist. Soc. B **61** (1999), no. 3, 485–527.
- [54] S.S. Wilks, *Mathematical statistics*, John Wiley, New York, 1962.
- [55] H. Yamato, *Bayes estimates of estimable parameters with a dirichlet invariant process*, Commun. in Statist.-Theor. Meth. **15** (1986), 2383–2390.
- [56] J.N. Zalkikar, R.C. Tiwari, and S.R. Jammalamadaka, *Bayes and empirical bayes estimation of the probability that $z > x + y$* , Commun. Stat.- Theory Methods **15** (1986), no. 10, 3079–3101.
- [57] M. Zhou, *Nonparametric bayes estimator of survival functions for doubly/inteval censored data*, Stat. Sinica **14** (2004), 533–546.