

**Taxas Exponenciais de
Convergência na Lei
Multidimensional dos Grandes
Números: Uma Abordagem
Construtiva**

Geraldine Góes Bosco

★

Orientador: Prof. Dr. Fábio Prates Machado

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo para a
obtenção do grau de Doutor em Estatística.

Área de concentração: **Probabilidade.**

-São Paulo, 29 de setembro de 2006-

Taxas Exponenciais de Convergência na Lei Multidimensional dos Grandes Números: Uma Abordagem Construtiva

Este exemplar corresponde à versão final da
tese de doutorado de Geraldine Góes Bosco, corrigida
e aprovada pela comissão julgadora.

Comissão Julgadora:

- Fábio prates Machado IME-USP
- Luiz Renato Fontes IME-USP
- Domingos Urbano Marchetti IF-USP
- Rafael Andrés Rosales Mitrowsky FFCLRP-USP
- Klaus Leite Pinto Vasconcellos - CCEN-UFPE

Agradecimentos

Agradeço ao Fábio pela orientação e ao Thomas pela colaboração estreita durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos membros da comissão julgadora pelas correções e sugestões.

Esta tese teve o financiamento da Capes através do Programa de Excelência Acadêmica -PROEX e contou com o apoio científico da FAPESP através do projeto de pós-doutorado “Estimativas de Grandes Desvios para Modelos de Adsorção Seqüencial Aleatória e Outros Modelos Perfeitamente Simuláveis” (processo 04/14125-0).

Resumo

Neste trabalho apresentamos condições suficientes para a obtenção de taxas exponenciais de convergência na lei multidimensional dos grandes números para campos aleatórios definidos em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Dentre possíveis aplicações do resultado apresentamos medidas não-gibbsianas e não-FKG (limites de saturação de processos de estacionamento) e medidas estacionárias originárias de sistemas de partículas (rede com perdas, incluindo o caso onde há interação de longo alcance com cauda pesada).

Abstract

We describe sufficient conditions for the occurrence of exponential rates of convergence in the multi-dimensional law of large numbers for random fields in $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Non-gibbsian and non-FKG measures from statistical mechanics (jamming limits of RSA models) and IPS (stationary measures of loss networks, including heavy-tail long-range interaction) are indicated as examples where the result applies.

Sumário

1	Taxas Exponenciais de Convergência na Lei Multidimensional dos Grandes Números	1
1.1	Definições Preliminares	3
1.2	Resultado Principal	4
1.3	Prova do Resultado Principal	6
1.3.1	Primeira Parte: Ampliação do Espaço de Probabilidade	7
1.3.2	Segunda Parte	9
2	Processos de Estacionamento	19
2.1	Processo de Estacionamento com exclusão de primeiros vizinhos	20
2.1.1	Descrição do Processo	20
2.1.2	Função de construção do campo aleatório σ	21
2.1.3	Aplicação do Teorema Principal	25
2.1.4	Exemplo de Ampliação do Espaço de Probabilidade	25
2.2	Processos de Estacionamento em \mathbb{Z}^d com regras de exclusão mais gerais	31
2.2.1	Descrição dos Processos	31
2.2.2	Função de Construção do Campo Aleatório	32
2.2.3	Aplicação do Teorema Principal	34
2.3	Processo de Ocupação	34
2.3.1	Aplicação do Teorema Principal	36
3	Rede de Filas com Perdas, com Interações de Longo Alcance e Cauda Pesada	39
3.1	Rede de Filas com Capacidade $K=1$	40
3.1.1	Existência do processo	40
3.1.2	Construção Gráfica	42
3.1.3	Função de Construção do Campo Aleatório	46
3.1.4	Aplicação do teorema principal	48

3.2	Rede de Filas com Capacidade $K \geq 1$	52
3.3	Apêndice 1	53
3.4	Apêndice 2	57
4	Questões em Aberto e Pesquisa Corrente	65

Capítulo 1

Taxas Exponenciais de Convergência na Lei Multidimensional dos Grandes Números

Neste capítulo apresentamos e demonstramos o principal resultado desta tese, que estabelece condições suficientes para a existência de taxas exponenciais de convergência na Lei Multidimensional dos Grandes Números (LMGN), a partir de uma abordagem gráfico-construtiva.

O resultado pode ser aplicado a quaisquer medidas que possam ser construídas e estejam sob as hipóteses do Teorema (1.2.1) (ver seção (1.2)). A definição precisa de construção de uma medida, ou do campo aleatório a ela associado, é exibida na seção (1.2). No entanto, podemos adiantar que as idéias por trás desse conceito se relacionam vagamente às idéias do algoritmo de simulação perfeita de Propp-Wilson [1], uma vez que se baseiam na obtenção de uma medida limite a partir de uma quantidade aleatória mas finita de

variáveis aleatórias uniformes i.i.d.'s. Mais precisamente, seu significado está em consonância com a construção da medida limite (limite termodinâmico) do *processo de estacionamento* apresentado em [2], uma vez que nesta presente tese também construímos (simulamos perfeitamente) uma janela finita de um objeto aleatório infinito, de acordo com uma lei limite previamente estabelecida, a partir de uma quantidade finita mas aleatória de variáveis aleatórias uniformes i.i.d.'s. Outras construções similares aparecem em [3].

Taxas exponenciais de convergência na LMGN podem ser encontradas, por exemplo, em [4] para campos aleatórios indexados por \mathbb{Z} ; em [5] para campos aleatórios distribuídos segundo medidas estacionárias de sistemas de partículas atrativos; e em [6] para sistemas percolativos de longo alcance. Nesta presente tese taxas exponenciais de convergência na LMGN são provadas a partir da técnica usada em [2] para provar o decaimento super-exponencial das correlações espaciais do limite de saturação do processo de estacionamento (ver Capítulo 2 desta tese). Esta técnica se baseia na ampliação do espaço de probabilidade com o fim de se criarem cópias independentes do campo aleatório estudado e, a partir delas, se construir um campo aleatório “híbrido” que se pareça localmente com cada uma das cópias i.i.d.'s.

Embora o resultado possa ser aplicado a medidas FKG¹, provenientes de medidas estacionárias de dinâmicas atrativas², sua aplicação mais interessante é no caso de medidas não-gibbsianas e não-FKG, uma vez que, até onde vai nosso conhecimento, não são tratadas na literatura corrente. Como exemplos, apresentamos nos próximos capítulos, dois processos que possuem medidas limites não-gibbsianas

¹Uma lei μ em $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}^d})$ é dita FKG, quando, para quaisquer funções contínuas e crescentes (no sentido da ordem parcial de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$) $f, g : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} (f \cdot g) d\mu \geq \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} f d\mu \cdot \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} g d\mu$. Ver [7], por exemplo.

²Por exemplo: Modelo do votante linear com ruído [9]

e não-FKG. No capítulo 2 apresentamos os *Processos de Estacionamento*, incluindo na seção (2.3) um processo no qual o espaço de spins é contínuo. No Capítulo 3 apresentamos um *Sistema de Filas com Perdas, incluindo Interações de Longo Alcance e Cauda Pesada*.

1.1 Definições Preliminares

Seja $X \equiv (X(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ um campo aleatório, i.e. um arranjo de variáveis aleatórias (funções reais Borel-mensuráveis) integráveis, indexadas pelos sítios de \mathbb{Z}^d e definidas num espaço de probabilidade abstrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dizemos que X é estacionário, quando, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, X e $Y \stackrel{\text{def}}{=} (X(i+x))_{i \in \mathbb{Z}^d}$ forem igualmente distribuídos em $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}^d})$, i.e. $(\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}^d}) \mathbb{P}(\{X \in B\}) = \mathbb{P}(\{Y \in B\})$. Neste caso, escrevemos $X \sim Y$.

Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, seja $\theta_x : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ um operador de translação, definido, para cada $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, por $\theta_x(\omega_y) = \omega_{x+y}$, para todo $y \in \mathbb{Z}^d$. Dizemos que X é ergódico, quando a lei de X restrita à sigma-álgebra invariante $\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ I \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}^d} : (\forall x \in \mathbb{Z}^d) (\theta_x(I) = I) \right\}$ for trivial, isto é, para qualquer $I \in \mathcal{I}$ temos que $\mathbb{P}(\{X \in I\}) \in \{0, 1\}$.

Quando o campo aleatório X for estacionário, ergódico e $X_0 \in L^1$, vale que

$$\frac{\sum_{x \in \Lambda_n} X(x)}{|\Lambda_n|} \xrightarrow{n} \mathbb{E}(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} X_0 \cdot d\mathbb{P} \quad \text{quase-certamente,} \quad (1.1)$$

onde $\Lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} [-n, n]^d$ é uma caixa de \mathbb{Z}^d , centrada na origem e com raio n . Vamos nos referir a esse resultado³ como *Lei Multidimensional dos Grandes Números (LMGN)*.

³Na sua forma mais geral, esse resultado é conhecido como Teorema Ergódico Multiparamétrico (TEM). Uma prova do TEM baseada na geometria dos espaços de Hilbert pode ser encontrada em [7].

Dizemos que a taxa de convergência na LMGN é exponencial, quando para qualquer $\epsilon > 0$, existirem $\alpha > 0$ e $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, tivermos

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \left| \frac{\sum_{x \in \Lambda_n} X(x)}{|\Lambda_n|} - \mathbb{E}(X_0) \right| > \epsilon \right\} \right) \leq C \cdot e^{-\alpha \cdot |\Lambda_n|}. \quad (1.2)$$

Observação Através do 1º lema de Borel-Cantelli vemos que (1) implica em (1.1). Na verdade, basta que as probabilidades em (1) sejam somáveis para garantirmos a validade de (1.1). Nesse sentido, uma prova da validade de (1) para um campo aleatório pode ser vista como uma prova alternativa para LMGN.

1.2 Resultado Principal

O teorema central desta tese nos garante a existência de taxas exponenciais de convergência na lei multidimensional dos grandes números para campos aleatórios que possam ser construídos obedecendo a certas condições.

O significado de construção de um campo aleatório torna-se preciso através da próxima definição.

Definição 1.2.1 (*Construção (da lei) de um campo aleatório X*). Construir (a lei de) X significa descrever uma função mensurável f_X ,

$$f_X : \left((0, 1)^{\mathbb{Z}^d} \equiv \Omega, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d} \equiv \mathcal{F}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d} \equiv \mathbb{P} \right) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}),$$

associada a uma seqüência crescente de conjuntos \mathcal{F} -mensuráveis $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que:

(i) o campo aleatório $Y \equiv (Y_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \stackrel{\text{def}}{=} (f_X \circ \theta_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ tenha a mesma distribuição de X em $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}^d})$, i.e. $Y \sim X$.

(ii) Cada A_n é um cilindro com base em $\mathcal{B}_{(0,1)}^{\Lambda_n}$, i.e.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\exists \bar{A}_n \in \mathcal{B}_{(0,1)}^{\Lambda_n} \right) : A_n = \bar{A}_n \times (0, 1)^{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n}.$$

(iii) Em cada A_n , f_X fica determinada em Λ_n , i.e.

$$(\forall \omega, \omega' \in A_n) (\omega|_{\Lambda_n} = \omega'|_{\Lambda_n}) \Rightarrow f_X(\omega) = f_X(\omega').$$

(iv) $\mathbb{P}(A_n) \nearrow 1$, ou seja, com probabilidade 1, f_X fica determinada dentro de alguma caixa Λ_n ."

Em palavras, essa definição nos diz que: (1) aos sítios de \mathbb{Z}^d estão associadas variáveis aleatórias uniformes independentes e distribuídas no intervalo $(0, 1)$; (2) a função f_X associa cada realização dessas uniformes ao spin/estado da origem, e da mesma forma $f_X \circ \theta_x$ associa cada realização ao spin/estado de qualquer outro sítio $x \in \mathbb{Z}^d$; (3) o evento A_n é o conjunto das realizações nas quais o estado da origem fica determinado apenas com as informações contidas na caixa Λ_n , ou seja, a partir de uma quantidade aleatória mas finita de uniformes; (4) se a seqüência de conjuntos $(A_n)_{n \geq 1}$ satisfizer as condições do item (iv) então, quase certamente, precisamos de um número finito de uniformes para determinarmos o spin da origem.

Observação: Como a medida produto $\lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}$ é ergódica e estacionária em $\left((0,1)^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}\right)$ a distribuição do campo aleatório X também será ergódica e estacionária em $\left(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\{0,1\}}^{\mathbb{Z}^d}\right)$. Este tipo de argumento é canônico em teoria ergódica e maiores detalhes podem ser encontrados em [15].

Consideremos o conjunto B das configurações que não definem f_X sobre quaisquer caixas finitas Λ_n , $n \in \mathbb{N}$, mais precisamente $B := \{\omega \in \Omega : \omega \text{ não define } f_X \text{ sobre as caixas finitas } \Lambda_n, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$. Como os conjuntos A_n^c , $n \geq 1$ formam uma seqüência decrescente, então $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n^c)$. Mas, segundo o item (iv) da definição (1.2.1), se $\mathbb{P}(A_n^c)$ decair para zero em n , então podemos construir o campo aleatório X . O teorema a seguir, principal resultado desta tese, diz como $\mathbb{P}(A_n^c)$ deve ir para zero quando $n \rightarrow \infty$, de tal forma que possamos construir X e também obter, para esse

campo, taxa exponencial de convergência na lei multidimensional dos grandes números.

Teorema 1.2.1 (*Resultado Principal*)⁴ *Seja X um campo aleatório assumindo valores em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ e f_X a função de construção de X . Se f_X for limitada e $\mathbb{P}(A_n^c) = O(n^{-d-\delta})$, para algum $\delta > 0$, então a taxa de convergência na Lei Multidimensional dos Grandes Números será exponencial para o campo aleatório X .*

A prova do teorema (1.2.1) consiste em mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existem $\alpha = \alpha(\epsilon) > 0$ e $C = C(\epsilon) > 0$ tais que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{x \in \Lambda_n} X(x)}{|\Lambda_n|} - \mathbb{E}X(0)\right| > \epsilon\right) \leq C \cdot (e^{-|\Lambda_n|^\alpha}) \quad \forall n. \quad (1.3)$$

Na prova dessa asserção utilizamos duas idéias principais (1) a ampliação do espaço de probabilidade (do antigo $((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d})$) para um novo $((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d})^{\mathbb{Z}^d}$); e (2) o uso da parte mais conhecida do Teorema de Crámer, que estabelece que se $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ for uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d.'s com $\mathbb{E}(e^{t \cdot X_1}) < \infty$ em alguma vizinhança de $t = 0$, então existem constantes positivas C e α tais que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| > \epsilon\right) \leq C \cdot e^{-\alpha \cdot n}.$$

1.3 Prova do Resultado Principal

Dividimos a prova do Teorema (1.2.1) em duas partes. Na primeira apresentamos as construções provenientes da ampliação do espaço de probabilidade. E, na segunda parte, apresentamos e provamos

⁴ $O(g(n)) = \{f(n) \text{ tais que existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0\}$

resultados que envolvem essas construções e as hipóteses do teorema, concluindo a demonstração. Recomendamos ao leitor que acompanhe o desenvolvimento da prova tendo como exemplo o Processo de Estacionamento de primeiros vizinhos apresentado na seção (2.1) do Capítulo 2.

1.3.1 Primeira Parte: Ampliação do Espaço de Probabilidade

Nesta seção o conjunto \mathbb{Z}^d é particionado em caixas, que são associadas univocamente a cópias independentes do campo aleatório X . Através dessas cópias e de uma outra cópia de X , com propriedades que nos interessam, definimos duas famílias de variáveis aleatórias que permitem reescrever o termo à esquerda da expressão (1.3) de forma que possamos usar o Teorema de Crámer.

Partição de \mathbb{Z}^d

Seja $\mathcal{P} = \{\Gamma_i^{(L)}\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ uma partição de \mathbb{Z}^d , onde $\Gamma_i^{(L)}$ é uma caixa de raio $L \in \mathbb{N}$ e centro $[(2L + 1) \cdot i] \in \mathbb{Z}^d$ definida por⁵

$$\Gamma_i^{(L)} = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x - (2L + 1) \cdot i|_{\text{sup}} \leq L\}$$

Denotaremos por V_L , o volume da caixa $\Gamma_i^{(L)}$, $\forall i \in \mathbb{Z}^d$, ou seja $V_L = |\Gamma_i^{(L)}|$. Omitiremos L todas as vezes que estiver claro do contexto.

A partir de $\Gamma_i^{(L)}$, definimos $\Lambda_{n_k} := \bigcup_{i \in \Lambda_k} \Gamma_i^{(L)}$ para um L fixo, isto é, Λ_{n_k} é uma caixa de caixas. Mais precisamente, $n_k = L + (2 \cdot L + 1) \cdot k$, e $|\Lambda_{n_k}| = \{2 \cdot [L + (2 \cdot L + 1) \cdot k] + 1\}^d = |\Lambda_k| \cdot V_L$.

Família de cópias independentes do objeto aleatório X

A partir da partição \mathcal{P} , construímos uma família de objetos aleatórios i.i.d.'s, $(X^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, onde $X^i \sim X$, ou seja, uma família de cópias independentes do objeto aleatório X . Mais precisamente,

⁵ $|x - y|_{\text{sup}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$

associamos a cada caixa Γ_i um espaço $(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$, e nesse espaço construímos X , ou seja, ampliamos o antigo espaço de probabilidade, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d} \right)$, transformando-o em um novo espaço $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}') = \left((0, 1)^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} \right)$.

Em $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, cada $\omega \in \Omega'$ pode ser pensado como uma seqüência generalizada $(\omega_z^i)_{z \in \mathbb{Z}^d, i \in \mathbb{Z}^d}$, onde cada ω_z^i é uma variável aleatória uniforme definida no intervalo $(0, 1)$. Nessa notação, o índice z indica os sítios de \mathbb{Z}^d e o índice i está associado à caixa Γ_i .

Seja π^i o operador de projeção

$$\begin{aligned} \pi^i : (0, 1)^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} &\rightarrow (0, 1)^{\mathbb{Z}^d} \\ \omega &\mapsto \omega^i = \pi^i(\omega), \end{aligned}$$

que composto com o operador de translação nos fornece $\theta_x \circ \pi^i(\omega) = \theta_x(\omega^i)$. Podemos, assim, definir o campo aleatório $(X^i(x))_{x \in \mathbb{Z}^d} := (f_X \circ \theta_x(\omega^i))_{x \in \mathbb{Z}^d}$. Fazendo isso para todo $i \in \mathbb{Z}^d$, temos em mãos uma família, $(X^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, de objetos aleatórios i.i.d.'s.

Objeto aleatório híbrido

Vamos agora construir um novo objeto aleatório X^h tal que $X^h \sim X$ e seja "similar" a X^i em Γ_i .

Seja $c(z)$ uma função que associa cada sítio $z \in \mathbb{Z}^d$ ao índice da caixa a que z pertence, e seja $\omega^h := \left(\omega_z^{c(z)} \right)_{z \in \mathbb{Z}^d}$. Podemos então, definir o campo aleatório $(X^h(x))_{x \in \mathbb{Z}^d} := (f_X \circ \theta_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ onde $X^h(x) = f_X \circ \theta_x(\omega^h)$, que chamamos de campo aleatório híbrido.

É interessante observar que construímos o campo aleatório X^h usando a subseqüência ω^h que é composta por um "pedaço" da subseqüência ω^i , associado aos sítios da caixa Γ_i ; por outro "pedaço" da subseqüência ω^j associado aos sítios da caixa Γ_j ; e assim sucessivamente, percorrendo todas as caixas $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$. Por isso o campo aleatório X^h é "similar" ao campo aleatório X^i na caixa Γ_i , e pelo mesmo motivo, X^h não é independente de qualquer campo aleatório

da família $(X^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$. Vale ainda observar, que o campo aleatório X^h depende do raio L de caixa escolhido, e por isso vamos denotá-lo, a partir deste momento, por X_L^h .

Tendo em mãos $(X^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, X_L^h e a partição $\mathcal{P} = \{\Gamma_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$, definimos uma família de variáveis aleatórias independentes: $(m_{i(L)}^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, onde

$$m_{i(L)}^i := \frac{\sum_{x \in \Gamma_i} X^i(x)}{V_L} ; \quad (1.4)$$

e, uma família de variáveis aleatórias dependentes: $(m_{i(L)})_{i \in \mathbb{Z}^d}$, onde

$$m_{i(L)} := \frac{\sum_{x \in \Gamma_i} X_L^h(x)}{V_L} . \quad (1.5)$$

As variáveis aleatórias estão definidas em $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ e assumem valores em \mathbb{R} .

Em linhas gerais, essas famílias de variáveis aleatórias nos permitem reescrever o termo à esquerda de (1.3) como uma soma de parcelas nas quais podemos aplicar o Teorema de Crámer. É o que veremos na próxima subseção.

1.3.2 Segunda Parte

Seja a seqüência $(b_n)_{(n \geq 0)}$, onde

$$b_n := \frac{\sum_{x \in \Lambda_n} X(x)}{|\Lambda_n|} - \mathbb{E}X(0)$$

é o termo que aparece na expressão (1.3). E seja $(b_{n_k})_{(k \geq 0)}$ uma subseqüência de $(b_n)_{(n \geq 0)}$, onde

$$b_{n_k} := \frac{\sum_{x \in \Lambda_{n_k}} X(x)}{|\Lambda_{n_k}|} - \mathbb{E}X(0). \quad (1.6)$$

Relembrando que $n_k = L + (2 \cdot L + 1) \cdot k$, vemos que a diferença entre os termos gerais b_n e b_{n_k} reside no primeiro apresentar um somatório que vai de 1 em 1, enquanto no segundo, o somatório vai em múltiplos de L .

Uma vez que $X_L^h \sim X$ por (1.5), temos

$$b_{n_k} \sim \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} m_i(L)}{|\Lambda_k|} - \mathbb{E}X(0).$$

Agora, seja $\epsilon > 0$ e consideremos o evento $\{|b_{n_k}| > \epsilon/2\}$. Então temos que

$$\{|b_{n_k}| > \epsilon/2\} \subset \left\{ \left\{ \left| \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} m_i^i(L)}{|\Lambda_k|} - \mathbb{E}X(0) \right| > \frac{\epsilon}{4} \right\} \cup \left\{ \left| \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} m_i(L) - m_i^i(L)}{|\Lambda_k|} \right| > \frac{\epsilon}{4} \right\} \right\}.$$

E por subaditividade temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|b_{n_k}| > \frac{\epsilon}{2}\} &\leq \mathbb{P}\left(\left| \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} m_i^i(L)}{|\Lambda_k|} - \mathbb{E}X(0) \right| > \frac{\epsilon}{4}\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(\left| \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} m_i(L) - m_i^i(L)}{|\Lambda_k|} \right| > \frac{\epsilon}{4}\right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Uma vez que as variáveis aleatórias $(m_i^i(L))_{i \in \mathbb{Z}^d}$, definidas em (1.4), são i.i.d's, concluímos a partir do Teorema de Cramer que para todo $\epsilon > 0$, existem $C = C(\epsilon) > 0$ e $\alpha = \alpha(\epsilon) > 0$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} m_i^i(L)}{|\Lambda_k|} - \mathbb{E}X(0) \right| > \frac{\epsilon}{4}\right) \leq C \cdot e^{-|\Lambda_k| \cdot \alpha} \quad \forall k \geq 0. \quad (1.8)$$

Portanto, a prova do Teorema (1.2.1) fica concluída a partir de dois fatos: (1) mostrar que o segundo termo à direita da expressão

(1.7) também apresenta decaimento exponencial quando n cresce; (2) mostrar qual é a relação entre os conjuntos $\{|b_{n_k}| > \epsilon/2\}$ e $\{|b_n| > \epsilon\}$. Esses dois fatos se traduzem nos dois lemas a seguir, cujas demonstrações são apresentadas nas próximas duas subseções.

Lema 1.3.1 *Para todo $\epsilon > 0$, é possível encontrar um raio de caixa, $L(\epsilon)$, suficientemente grande de tal forma que existem $\kappa = \kappa(\epsilon)$ e $\phi = \phi(\epsilon) > 0$ satisfazendo*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i \in \Lambda_k} m_{i(L)} - m_{i(L)}^i}{|\Lambda_k|}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \leq \kappa \cdot e^{-|\Lambda_k| \cdot \phi} \quad \forall k \geq 0$$

Lema 1.3.2 *Existe k suficientemente grande tal que $\{|b_n| > \epsilon\} \subset \{|b_{n_k}| > \epsilon/2\}$, para $n_{k-1} < n < n_k$.*

Prova do Lema (1.3.1)

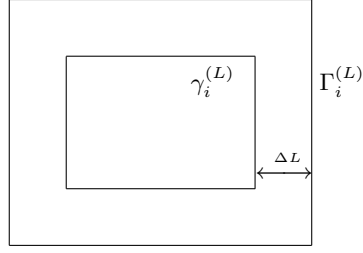
Começamos por observar que a expressão $|\sum_{i \in \Lambda_k} m_{i(L)} - m_{i(L)}^i|$ é a soma das diferenças entre os campos aleatórios X^i e X_L^h , nas respectivas caixas Γ_i contidas na caixa Λ_k . No que segue, vamos estabelecer as bases para enumerar as possíveis fontes de diferença entre os campos X^i e X_L^h em uma caixa Γ_i .

Consideremos caixas de raio l contidas em cada uma das caixas $\Gamma_i^{(L)}$. Denotamos essas caixas por $\gamma_i^{(L)}$. Assim, temos⁶

$$\gamma_i^{(L)} := \{x \in \mathbb{Z}^d : |x - (2L + 1) \cdot i|_{\text{sup}} < l\},$$

e definimos $\Delta L := L - l$. Chamamos de *anel* a região entre as caixas $\Gamma_i^{(L)}$ e $\gamma_i^{(L)}$ (ver figura abaixo).

⁶ $|x - y|_{\text{sup}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$



Seja A_n^i o conjunto das configurações $\omega \in \Omega'$ tais que $X^i(0)$ fica determinado dentro da caixa Λ_n , mais precisamente

$$A_n^i := \{\omega : \omega^i \in A_n\}.$$

Consideremos o conjunto $\theta_x(A_{\Delta L}^i)$ das configurações ω^i que determinam $X^i(x)$ a partir da informação contida na caixa de raio ΔL centrada no sítio $x \in \gamma_i^{(L)}$. E seja $C_i := \cap_{x \in \gamma_i} \theta_x(A_{\Delta L}^i)$, cujo complementar nos interessa:

$$C_i^c = (\cap_{x \in \gamma_i} \theta_x(A_{\Delta L}^i))^c = \cup_{x \in \gamma_i} [\theta_x(A_{\Delta L}^i)]^c$$

pois é o conjunto das configurações que precisam de informação que está fora da caixa Γ_i , para que os estados dos sítios $x \in \gamma_i$ fiquem definidos. Por subaditividade e pela estacionariedade de X temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{C_i^c\} &\leq \sum_{x \in \gamma_i} \mathbb{P}\{[\theta_x(A_{\Delta L}^i)]^c\} \\ &\leq |\gamma_i| \cdot \mathbb{P}\{[\theta_x(A_{\Delta L}^i)]^c\} = |\gamma_i| \cdot \mathbb{P}\{(A_{\Delta L}^i)^c\}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Mas por hipótese, temos que

$$\mathbb{P}\{(A_{\Delta L}^i)^c\} = O(\Delta L^{-d-\delta}),$$

o que é equivalente a dizer que existem $c > 0$ e $l_0 > 0$ tais que

$$\mathbb{P}\{(A_{\Delta L}^i)^c\} \leq c \cdot \Delta L^{-d-\delta}, \tag{1.10}$$

para $\Delta L > l_0$.

Queremos encontrar ΔL como função de L , de tal forma que, quando L crescer, o *anel* não cresça muito e seja grande o suficiente para que $\mathbb{P}(C_i^c) \rightarrow 0$. Então, seja $\Delta L = L^\beta$ com $0 < \beta < 1$, e o problema se traduz em encontrar β que satisfaça essas condições. Retomando (1.9), onde substituímos (1.10), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_i^c) &\leq c \cdot |\gamma_i| \cdot (L - \Delta L)^d \cdot (L^\beta)^{-d-\delta} \\ &\leq c' \cdot L^d \cdot L^{-\beta(d+\delta)} \\ &= c' \cdot L^{d-\beta(d+\delta)}. \end{aligned}$$

Assim, temos que ter

$$d - \beta(d + \delta) < 0 \iff \frac{d}{d + \delta} < \beta,$$

o que implica em

$$0 < \frac{d}{d + \delta} < \beta < 1.$$

As variáveis aleatórias $(\mathbb{I}_{C_i^c})_{i \in \mathbb{Z}^d} := (\mathbb{I}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$

Consideremos as variáveis aleatórias $(\mathbb{I}_{C_i^c})_{i \in \mathbb{Z}^d} := (\mathbb{I}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, que são i.i.d.'s graças à construção estabelecida anteriormente. E recordemos que, por hipótese f_X é limitada, ou seja $\exists K > 0$ tal que $|f_X| \leq K$. Podemos agora, enunciar o seguinte lema.

Lema 1.3.3 *A discrepância relativa entre as variáveis aleatórias $m_i^i(L)$ e $m_i(L)$ é dada por*

$$\frac{|\sum_{i \in \Lambda_k} m_i(L) - m_i^i(L)|}{|\Lambda_k|} \leq K \cdot \frac{V_{anel}}{V_L} + K \cdot \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbb{I}_i}{|\Lambda_k|}$$

onde V_{anel} é o volume do anel entre as caixas Γ_i e γ_i .

Prova:

A discrepância relativa entre as variáveis aleatórias $m_{i(L)}^i$ e $m_{i(L)}$ dentro de uma caixa Γ_i é proveniente de duas fontes. Primeiro, se estivermos no evento C_i , então $m_{i(L)}^i$ e $m_{i(L)}$, só podem ser diferentes no anel entre as caixas Γ_i and γ_i . Por outro lado, se estivermos no evento C_i^c , as variáveis aleatórias podem ser diferentes em toda caixa Γ_i . Assim, temos que

$$\begin{cases} \text{Se } \mathbb{I}_i = 0 & \text{então } |m_{i(L)} - m_{i(L)}^i| \leq \mathbf{K} \cdot \frac{V_{\text{anel}}}{V_L}, \\ \text{caso contrário, se } \mathbb{I}_i = 1 & \text{então } |m_{i(L)} - m_{i(L)}^i| \leq \mathbf{K}. \end{cases}$$

E podemos estimar a discrepância relativa a partir desses dois casos.

$$|m_{i(L)} - m_{i(L)}^i| \leq \mathbf{K} \cdot \frac{V_{\text{anel}}}{V_L} + \mathbf{K} \cdot \mathbb{I}_i$$

Somando sobre todo $i \in \Lambda_k$, temos que

$$\frac{\sum_{i \in \Lambda_k} |m_{i(L)} - m_{i(L)}^i|}{|\Lambda_k|} \leq \mathbf{K} \cdot \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} V_{\text{anel}}}{V_L \cdot |\Lambda_k|} + \mathbf{K} \cdot \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbb{I}_i}{|\Lambda_k|},$$

e finalmente

$$\frac{|\sum_{i \in \Lambda_k} m_{i(L)} - m_{i(L)}^i|}{|\Lambda_k|} \leq \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} |m_{i(L)} - m_{i(L)}^i|}{|\Lambda_k|} \leq \mathbf{K} \cdot \frac{V_{\text{anel}}}{V_L} + \mathbf{K} \cdot \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbb{I}_i}{|\Lambda_k|}.$$

■

Prova do Lema 1.3.1:

Tomemos L suficientemente grande para que V_{anel}/V_L seja menor que $\epsilon/4\mathbf{K}$; e para que $\mathbb{E}\mathbb{I}_0 < \epsilon/4\mathbf{K}$. E sejam os eventos

$$D_k = \left\{ \frac{|\sum_{i \in \Lambda_k} m_{i(L)} - m_{i(L)}^i|}{|\Lambda_k|} \geq \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

$$F_k = \left\{ \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbb{I}_i}{|\Lambda_k|} < \frac{\epsilon}{4K} \right\}.$$

Usando o lema (1.3.3), no evento F_k temos que

$$\left| \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} m_{i(L)} - m_{i(L)}^i}{|\Lambda_k|} \right| < K \left(\frac{\epsilon}{4K} + \frac{\epsilon}{4K} \right) = \frac{\epsilon}{2}.$$

E, portanto $D_k \cap F_k = \emptyset$, o que implica em

$$D_k \subset F_k^c = \left\{ \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbb{I}_i}{|\Lambda_k|} \geq \frac{\epsilon}{4K} \right\} = \left\{ \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbb{I}_i}{|\Lambda_k|} - \mathbb{E}\mathbb{I}_0 \geq \frac{\epsilon}{4K} - \mathbb{E}\mathbb{I}_0 := \epsilon' \right\},$$

que, por sua vez, implica em

$$\mathbb{P}(D_k) \leq \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbb{I}_i}{|\Lambda_k|} - \mathbb{E}\mathbb{I}_0 \geq \epsilon' \right).$$

Como as variáveis $(\mathbb{I}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ são variáveis aleatórias i.i.d.'s e, por hipótese, $\epsilon' > 0$, temos, pelo Teorema de Cramer, que existem $\kappa = \kappa(\epsilon') > 0$ e $\phi = \phi(\epsilon') > 0$ tais que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbb{I}_i}{|\Lambda_k|} - \mathbb{E}\mathbb{I}_0 \right| \geq \epsilon' \right) \leq \kappa \cdot e^{-|\Lambda_k| \cdot \phi}$$

■

Prova do Lema (1.3.2)

Comecemos por considerar a diferença entre os termos b_{n_k} e b_n , com

$$n_{k-1} < n < n_k.$$

$$\begin{aligned} |b_{n_k} - b_n| &= \left| \left(\frac{\sum_{x \in \Lambda_{n_k}} X^h(x)}{|\Lambda_{n_k}|} - \mathbb{E}X(0) \right) - \left(\frac{\sum_{x \in \Lambda_n} X^h(x)}{|\Lambda_n|} - \mathbb{E}X(0) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{x \in \Lambda_{n_{k-1}}} X^h(x)}{|\Lambda_{n_k}|} + \frac{\sum_{x \in (\Lambda_{n_k} - \Lambda_n)} X^h(x)}{|\Lambda_{n_k}|} - \frac{\sum_{x \in \Lambda_n} X^h(x)}{|\Lambda_n|} \right| \\ &\leq 2 \cdot \mathcal{K} \cdot \left\{ 1 - \frac{|\Lambda_n|}{|\Lambda_{n_k}|} \right\}. \end{aligned}$$

Como $|\Lambda_{n_{k-1}}| < |\Lambda_n|$, temos que

$$\left\{ 1 - \frac{|\Lambda_n|}{|\Lambda_{n_k}|} \right\} < \left\{ 1 - \frac{|\Lambda_{n_{k-1}}|}{|\Lambda_{n_k}|} \right\}.$$

E lembrando que $n_k = L + (2 \cdot L + 1) \cdot k$, temos também que

$$\frac{|\Lambda_{n_{k-1}}|}{|\Lambda_{n_k}|} = \frac{\{2 \cdot [L + (2 \cdot L + 1) \cdot (k-1)] + 1\}^d}{\{2 \cdot [L + (2 \cdot L + 1) \cdot k] + 1\}^d} \rightarrow 1 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

E, portanto $|b_{n_k} - b_n| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Resultado que nos permite dizer que *para qualquer $\epsilon > 0$ existe k suficientemente grande tal que $|b_{n_k} - b_n| < \epsilon/2$* . Então

$$\{|b_n| > \epsilon\} \subset \left\{ |b_{n_k}| > \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

para k suficientemente grande. ■

Observações Finais

(1) Nas construções deste capítulo utilizamos o espaço de probabilidade $((0, 1), \mathcal{B}_{(0,1)}, \lambda_{(0,1)})^{\mathbb{Z}^d}$. Isso equivale a associar, de maneira independente, a cada sítio de \mathbb{Z}^d uma variável aleatória uniforme distribuída no intervalo $(0, 1)$. Em outras construções será mais favorável associar, de modo independente, a cada ponto de \mathbb{Z}^d seqüências i.i.d.'s de variáveis aleatórias, processos de Poisson,

etc. Como estes objetos aleatórios podem ser gerados a partir de um único número aleatório, as construções que utilizamos não envolvem perda de generalidade. No capítulo 3 veremos um exemplo onde dois processos de Poisson são associados a cada sítio de \mathbb{Z}^d .

(2) É importante observar que o resultado também se aplica a medidas em $S^{\mathbb{Z}^d}$, onde S é um compacto em \mathbb{R}^n . Na seção (2.3), por exemplo, apresentamos um modelo onde o espaço de estados é contínuo.

Capítulo 2

Processos de Estacionamento

Neste capítulo apresentamos os processos de estacionamento como exemplos de aplicação do Teorema (1.2.1) no caso de medidas não-gibbsianas e não-FKG.

Resultados rigorosos para os processos de estacionamento restringiam-se, até bem pouco tempo, a modelos unidimensionais [13, 17, 18, 19, 20, 21] e a modelos quase unidimensionais [11, 12, 16]. Em 2002, Penrose [22] apresentou uma lei fraca dos grandes números para a densidade de partículas no limite de saturação quando o processo de estacionamento é construído em caixas. Recentemente, Ritchie [2] provou uma lei forte dos grandes números para a mesma grandeza, e o decaimento super-exponencial das funções de correlação. Esses resultados foram alcançados através da construção explícita do limite termodinâmico¹ do processo. Neste capítulo seguiremos de perto essa construção.

Na primeira seção discutiremos sobre o caso unidimensional e onde

¹Em Mecânica Estatística é comum definirem-se medidas μ_n no espaço S^{Λ_n} (S espaço de spins). O termo limite termodinâmico (μ) refere-se à(s) medida(s) limite quando faz-se $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. Mais precisamente $\lim_n \mu_n \rightarrow \mu$ ($\mu_n \Rightarrow \mu$).

há apenas interações de primeiros vizinhos. Para esse caso exibimos a função de construção e mostramos que o campo aleatório limite obedece as hipóteses do teorema (1.2.1). E por fim, exemplificamos as idéias de ampliação do espaço de probabilidade.

Na segunda seção tratamos dos casos com interações mais gerais. E na última seção apresentamos um modelo, baseado nos processos de estacionamento, com espaço de spins contínuo, caso também abrangido pelo Teorema (1.2.1).

2.1 Processo de Estacionamento com exclusão de primeiros vizinhos

2.1.1 Descrição do Processo

Consideremos uma dinâmica a tempo discreto onde há deposição de partículas nos sítios de uma caixa $\Lambda_n = [-n, n]$ de \mathbb{Z} . No instante inicial todos os sítios da caixa estão vazios (spin/estado 0), e um deles é escolhido uniformemente e nele há deposição de uma partícula (spin/estado 1). Imediatamente, seus dois primeiros vizinhos ficam bloqueados, isto é, nenhuma partícula poderá se depositar nesses sítios. Uma vez ocupado, um sítio permanece nesse estado para sempre. A dinâmica prossegue com a deposição, a cada instante de tempo, de uma partícula num sítio uniformemente escolhido dentre aqueles não ocupados e não bloqueados. Em resumo, o sítio escolhido só é ocupado se seus dois primeiros vizinhos estiverem vazios. O processo continua até que todos os sítios da caixa Λ_n estejam ou bloqueados ou ocupados. A configuração final da caixa Λ_n é chamada de *limite de saturação* de Λ_n , e vamos denotá-la por σ_n . Este é o caso mais simples dos processos de estacionamento: o caso onde há apenas interações de primeiros vizinhos.

2.1.2 Função de construção do campo aleatório σ

Vamos denotar por σ a configuração final do processo construído em todo o \mathbb{Z} , e que não pode ser determinada a partir das regras descritas acima, já que não podemos escolher uniformemente um sítio em \mathbb{Z} . Na solução dessa questão vamos seguir o algoritmo de construção de σ_n , apresentado em [2], que contém em si as idéias para a construção da configuração final σ .

Consideremos o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left((0, 1)^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}} \right)$, e denotemos por ω um elemento de Ω . Em palavras, esse espaço de probabilidade associa a cada sítio de \mathbb{Z} uma variável aleatória uniforme definida no intervalo $(0, 1)$. Segue abaixo o algoritmo de construção de σ_n .

Definição 2.1.1 *Definimos o processo de estacionamento na caixa Λ_n com condição de fronteira nula através do seguinte algoritmo: Para cada $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}}$,*

Passo 1 $\sigma_n(\omega)(x) \leftarrow 0 \forall x \in \mathbb{Z}$;

Passo 2 *escolha $x \in \Lambda_n$ tal que*

$$\omega_x = \inf\{\omega_z : z \in \Lambda_n \text{ e } z \text{ não tenha sido escolhido previamente}\};$$

Passo 3 *Se $\sigma_n(\omega)(x+1) = \sigma_n(\omega)(x-1) = 0$ então $\sigma_n(\omega)(x) \leftarrow 1$;*

Passo 4 *Se há pontos em Λ_n não escolhidos ainda, então volte ao passo 2, ou encerre o algoritmo.*

Observações: (1) Os objetos aleatórios $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ estão definidos em $\left((0, 1)^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}} \right)$ e assumem valores em $\{0, 1\}^{\Lambda_n}$. Vamos denotar por $(\mu_n)_{n \geq 0}$ as respectivas medidas de probabilidade dos objetos aleatórios $(\sigma_n)_{n \geq 0}$. (2) Este algoritmo é equivalente probabilisticamente ao descrito no início desta seção.

Para o caso unidimensional, a Figura 1 mostra um "perfil" de uniformes, ou seja, uma realização $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}} = \Omega$. Essa figura

também mostra as configurações finais $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ e σ_7 . Observe-mos que a configuração final σ_1 é diferente da configuração final σ_2 , que por sua vez é diferente da configuração final σ_3 , que também é diferente da configuração final σ_4 . No entanto, a configuração final σ_7 restrita à caixa Λ_4 é igual à configuração final σ_4 . Observemos também, que as uniformes utilizadas na construção do processo na caixa Λ_4 estão entre pontos de mínimo do "perfil". Para entendermos melhor o que está acontecendo, vamos nos fixar em determinar o estado da origem na configuração final σ . Definamos

$$l_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \leq 0 : \omega_i < \omega_{i-1}\}$$

e

$$r_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{i \geq 0 : \omega_i < \omega_{i+1}\},$$

ou seja, l_0 e r_0 são os pontos de mínimo local do "perfil" que estão mais próximos da origem, à esquerda e à direita da origem, respectivamente. A Figura 1, mostra l_0 e r_0 para o "perfil" exemplificado. Observemos que as uniformes associadas aos sítios entre 0 e l_0 (r_0) estão em ordem decrescente, e que somente o que acontecer aos sítios entre r_0 e l_0 , poderá influenciar o estado final da origem.

É fácil verificar que, se uma caixa Λ_n contiver l_0 e r_0 , e se eles forem números pares então $\sigma_n(0) = 1$, e se pelo menos um deles for um número ímpar, então $\sigma_n(0) = 0$. Assim, uma vez que uma caixa Λ_m contenha l_0 e r_0 , então o estado final da origem será o mesmo dentro de qualquer caixa Λ_n para $n > m$, ou seja $\sigma(0) = \sigma_m(0)$. Para determinarmos os estados, na configuração final σ , de outros sítios usamos o mesmo método: encontramos l_x e r_x , ou seja,

$$l_x(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \leq x : \omega_i < \omega_{i-1}\}$$

e

$$r_x(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{i \geq x : \omega_i < \omega_{i+1}\}.$$

É interessante notar que neste caso particular -processo de estacionamento unidimensional com exclusão de primeiros vizinhos - os estados dos outros sítios entre l_0 e r_0 também não mudam mais dentro de qualquer caixa Λ_n para $n > m$. E de maneira mais geral, fixada uma realização ω , a construção de σ se dá "pedaço" a "pedaço", onde os "pedaços" estão separados por pontos de mínimo local de ω .

Voltando à Figura 1, a caixa Λ_4 contém l_0 e r_0 , e por isso a configuração final σ_7 restrita à caixa Λ_4 não se modifica. E então, podemos exibir a função de construção do campo aleatório σ que denotamos por f_σ ,

$$f_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_{\{l_0 \in [0, -2, -4, \dots]\}} \cdot \mathbb{I}_{\{r_0 \in [0, 2, 4, \dots]\}} = \sigma(0),$$

e temos

$$\sigma(x) = \theta_x \circ f_\sigma = \mathbb{I}_{\{l_{x-x} \in [0, -2, -4, \dots]\}} \cdot \mathbb{I}_{\{r_{x-x} \in [0, 2, 4, \dots]\}}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Formalizando um pouco mais, temos que: *Se $l_0, r_0 \in \Lambda_n$ então $\sigma_n(0) = \sigma(0)$, o que implica em $\sigma_n(0) \rightarrow \sigma(0)$ q.c., e por conseguinte $\sigma_n \rightarrow \sigma$ q.c., com $\sigma \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \mu$.*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left((0, 1)^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}} \right)$$

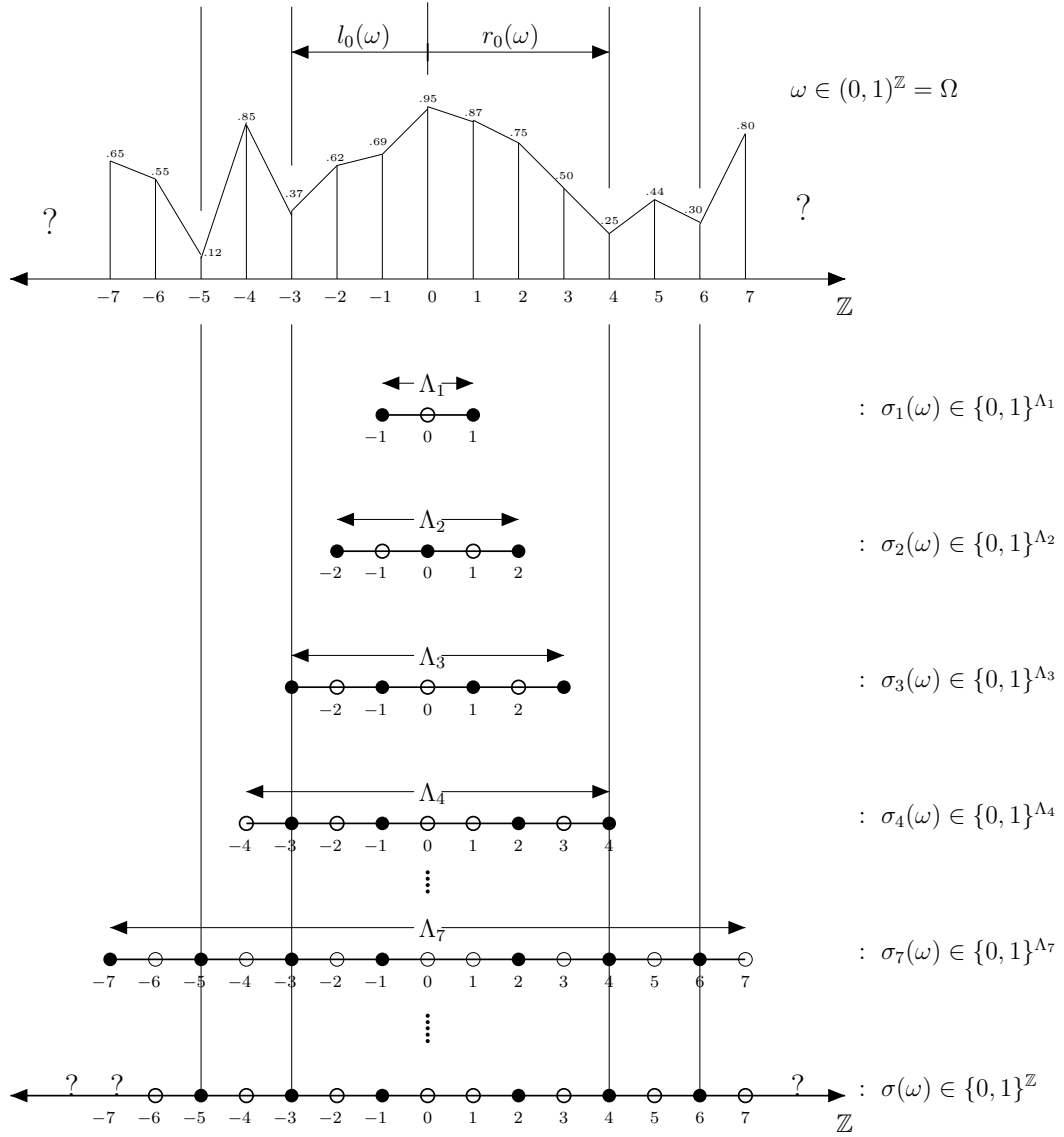


Figura 1: Acima temos um "perfil" de uniformes, ou seja, uma realização $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}} = \Omega$. Na seqüência podem ser observadas as configurações finais $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ e σ_7 .

2.1.3 Aplicação do Teorema Principal

A seqüência de conjuntos $(A_n)_{n \geq 1}$

Fica claro das considerações anteriores que, fixada uma realização ω , $\sigma(0)$ fica determinado na caixa Λ_n , se essa caixa contiver l_0 e r_0 . Segue da definição (1.2.1) (item (iii)) que o conjunto A_n fica naturalmente definido por

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{-n < l_0 \leq 0 \leq r_0 < n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$\mathbf{P}(A_n^c)$

O conjunto A_n^c é o conjunto das configurações que não determinam $\sigma(0)$ dentro da caixa Λ_n , ou em termos de l_0 e r_0 , $A_n^c = \{\omega : l_0(\omega), r_0(\omega) \notin \Lambda_n\}$. Ou ainda, é o evento no qual existem seqüências numéricas decrescentes que começam no sítio 0 e terminam fora da caixa Λ_n .

A probabilidade de uma seqüência numérica de tamanho (fixo) $n+1$ ser decrescente é $1/(n+1)!$, e como podemos ter duas seqüências começando na origem, temos que

$$P(A_n^c) \leq \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{2}{n!} \quad .$$

E, portanto, o Teorema (1.2.1) se aplica ao processo de estacionamento unidimensional com exclusão de primeiros vizinhos.

2.1.4 Exemplo de Ampliação do Espaço de Probabilidade

O processo de estacionamento unidimensional e com interações de primeiros vizinhos, talvez seja o único modelo em que podemos exibir graficamente a construção dos campos aleatórios $(X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e X^h , e é o que faremos a seguir.

Consideremos $L = 2$ e particionemos o eixo \mathbb{Z} em caixas $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, de raio $L = 2$ e centro $(2 \cdot L + 1) \cdot i = 5 \cdot i$. A Figura 2 mostra um trecho de \mathbb{Z} particionado nas caixas $\Gamma_{-2}, \Gamma_{-1}, \Gamma_0, \Gamma_1$ e Γ_2 .

Associemos a cada caixa Γ_i uma nova cópia do eixo \mathbb{Z} , a qual chamaremos de \mathbb{Z}_i . Essas cópias aparecem na Figura 3, onde estão "dobradas" e "esticadas", de forma que seus sítios estejam em correspondência com os sítios das caixas Γ_i de \mathbb{Z} .

O significado do espaço ampliado $\left((0, 1)^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \right)$ é associar a cada cópia \mathbb{Z}_i um "perfil" de uniformes. A Figura 4 mostra uma realização de $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$. Cada cópia \mathbb{Z}_i tem seu perfil pintado por uma cor, e esses perfis são projetados nas caixas de \mathbb{Z} formando um perfil multi-colorido. Essa projeção é indicada na Figura 4 pelo símbolo de *espelho*.

Se aplicarmos a função de construção f_σ a cada perfil, chegamos à realizações dos campos aleatórios independentes que denotamos por X^i na seção (1.3.1), e que aqui chamaremos de σ^i . E se aplicarmos f_σ ao perfil multi-colorido, chegamos a uma realização do campo aleatório híbrido que aqui chamaremos de σ^h . A Figura 5 mostra as realizações desses campos aleatórios.

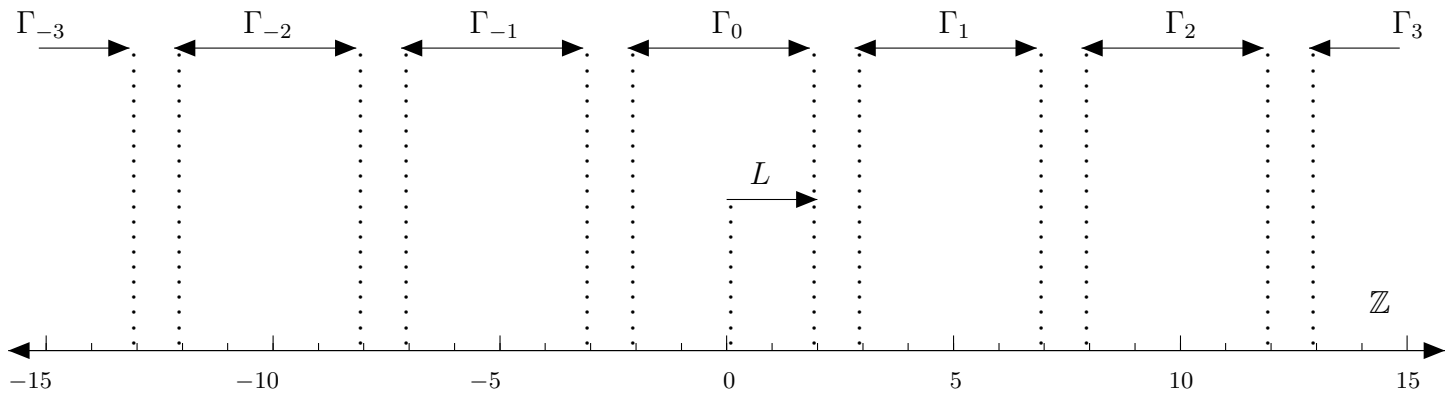


Figura 2: Trecho de \mathbb{Z} particionado nas caixas Γ_{-2} , Γ_{-1} , Γ_0 , Γ_1 e Γ_2

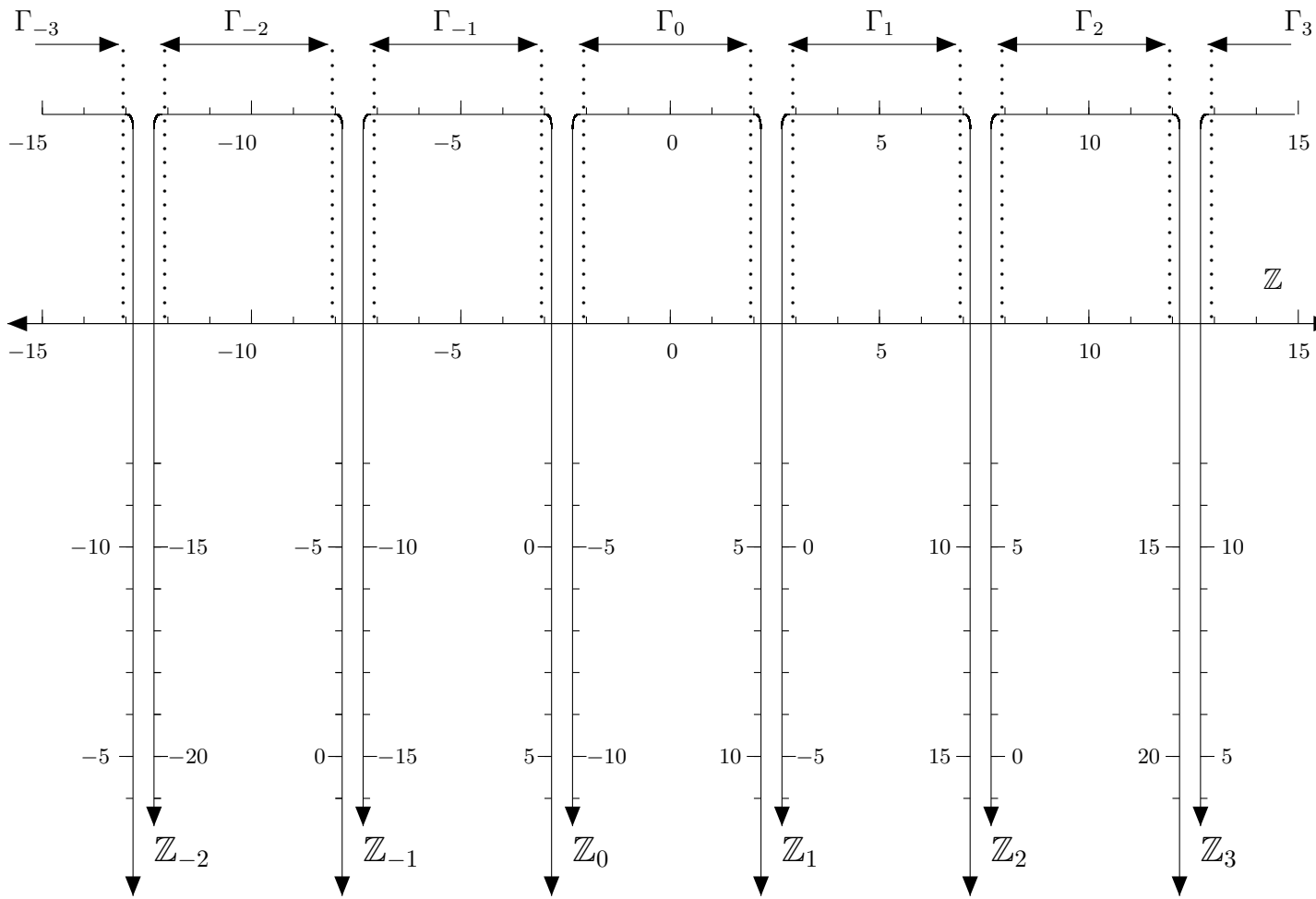


Figura 3: Cópias \mathbb{Z}_i de \mathbb{Z} "dobradas" e "esticadas", de forma que seus sítios estejam em correspondência com os sítios das caixas Γ_i de \mathbb{Z} .

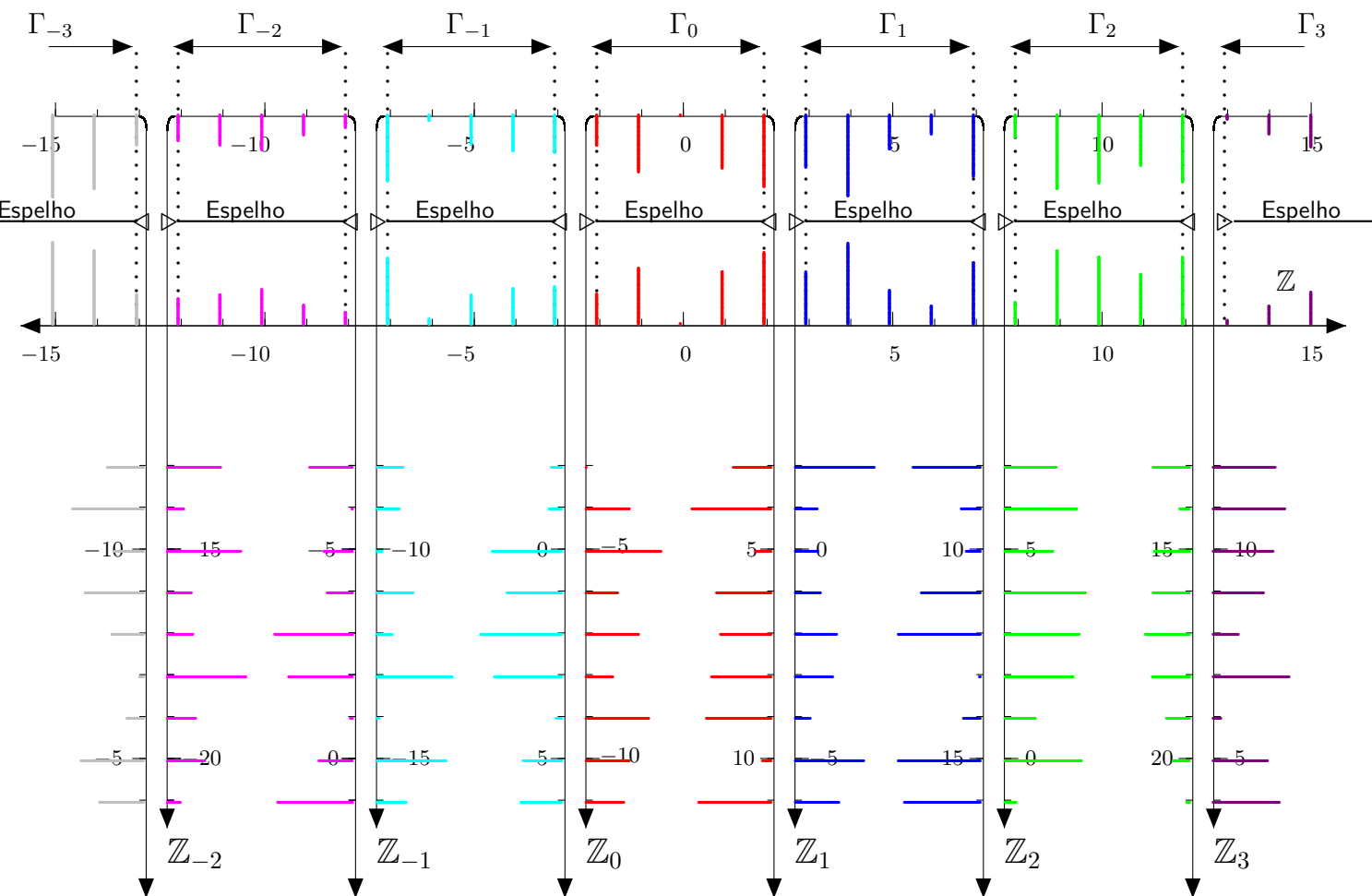


Figura 4: Realização de $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$. Cada cópia Z_i tem seu perfil pintado por uma cor. Os perfis são projetados nas caixas de \mathbb{Z} , formando um perfil multi-colorido. A projeção é indicada pelo símbolo de *espelho*.

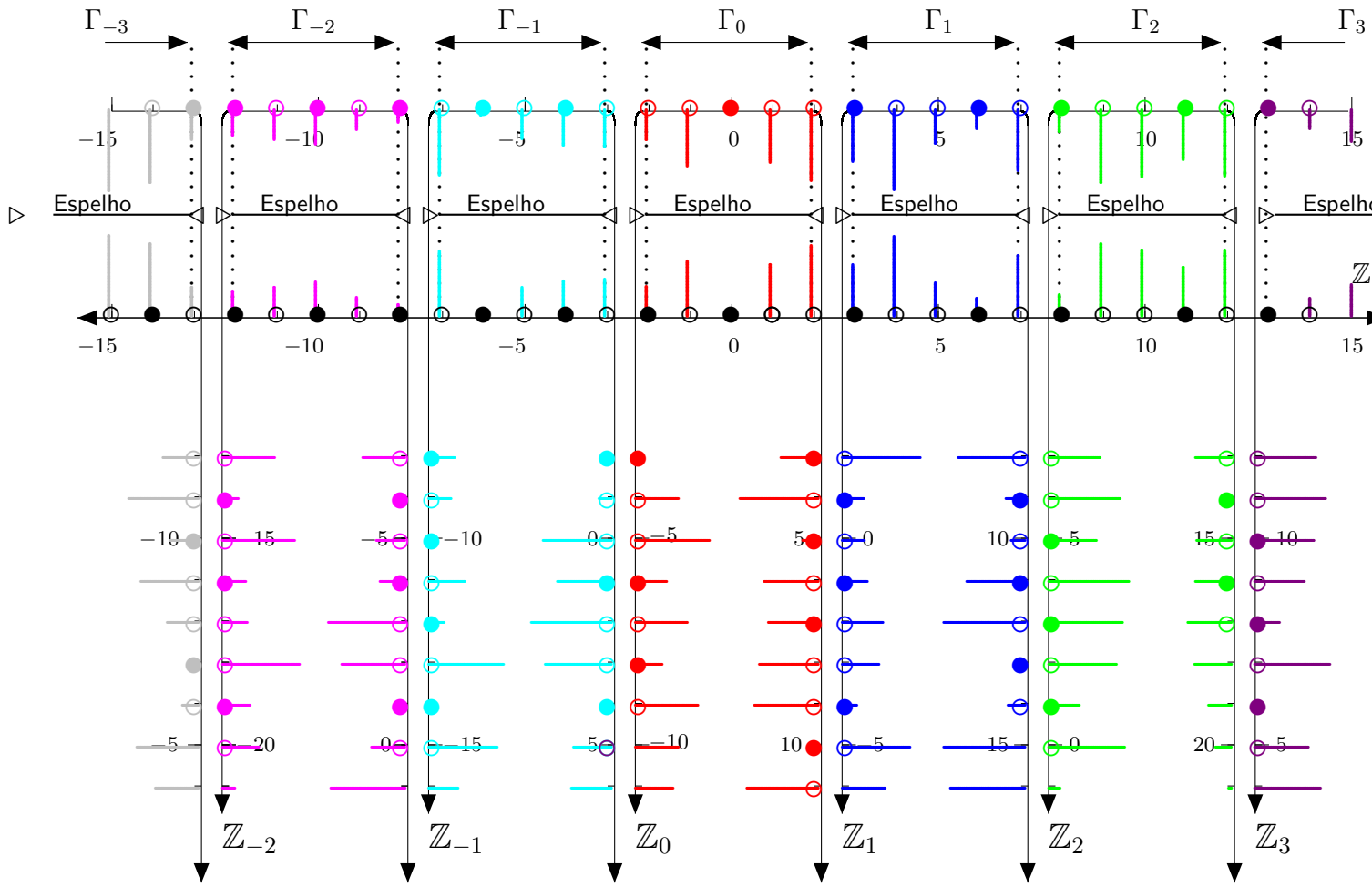


Figura 5: Realizações dos campos aleatórios independentes (coloridos), e do campo aleatório híbrido (branco e preto), mas gerado a partir de um perfil multi-colorido.

2.2 Processos de Estacionamento em \mathbb{Z}^d com regras de exclusão mais gerais

2.2.1 Descrição dos Processos

Seguindo [2], definimos o processo de estacionamento de forma mais abrangente, usando uma noção mais geral de vizinhança entre sítios de \mathbb{Z}^d . Essa noção se traduz a partir do grafo $\mathcal{G}_\nu^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}_\nu^{(d)})$, onde $\mathcal{E}_\nu^{(d)}$ é o conjunto de elos que ligam dois sítios distintos, x e y , de \mathbb{Z}^d tal que² $|x - y|_{\text{sup}} \leq \nu$, para $\nu \in \mathbb{N}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$, onde ν é chamado de raio de interação. Consideramos também interações mais gerais entre sítios de \mathbb{Z}^d , através da definição de *esquemas de estacionamento*: dada uma caixa Λ_ν contida em \mathbb{Z}^d , chamamos de *esquema de estacionamento* um subconjunto $S_\nu^{(d)} = S_\nu \subset \{0, 1\}^{\Lambda_\nu}$ tal que $0^{\Lambda_\nu} \in S_\nu$. Em palavras, dado um raio de interação ν e um sítio qualquer x , $\mathcal{G}_\nu^{(d)}$ diz quem são os vizinhos de x , enquanto o esquema de estacionamento informa quais vizinhos influenciam na ocupação desse sítio por uma partícula.

Denotemos por $\sigma|_{\Lambda_\nu}$ a restrição de σ à caixa Λ_ν . Podemos apresentar um algoritmo de construção de σ_n que leva em conta regras de exclusão mais gerais do que a apresentada na seção (3.1), mas sempre de alcance finito.

Definição 2.2.1 *Dado um esquema de estacionamento S_ν , definimos o processo de estacionamento na caixa Λ_n com condição de fronteira nula através do seguinte algoritmo:*

Para cada $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$,

Passo 1 *considere $\sigma_n(\omega) = 0^{\mathbb{Z}^d}$;*

Passo 2 *escolha $x \in \Lambda_n$ tal que*

$$\omega_x = \inf \left\{ \omega_z : z \in \Lambda_n \text{ e } z \text{ não tenha sido escolhido previamente} \right\};$$

² $|x - y|_{\text{sup}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$

Passo 3 Se $\theta_x(\sigma_n(\omega))| \Lambda_\nu \in S_\nu$, então $\sigma_n(\omega)(x) \leftarrow 1$;

Passo 4 Se há pontos em Λ_n não escolhidos ainda, então volte ao passo 2, ou encerre o algoritmo.

Observação A generalização dessa definição para o caso de subconjuntos arbitrários finitos de \mathbb{Z}^d é imediata. Para um subconjunto finito F de \mathbb{Z}^d , basta que definamos $\sigma_F(\omega)$ da mesma maneira que σ_n na definição (2.2.1).

2.2.2 Função de Construção do Campo Aleatório

A construção do objeto aleatório limite foi implementada graças ao conceito de blindagem. Em palavras, fixada uma realização $\omega \in \Omega$, esse conceito diz que o estado de um sítio qualquer $x \in \mathbb{Z}^d$, no limite termodinâmico, é determinado a partir de uma quantidade finita mas aleatória de uniformes. Ou ainda, existe n tal que $\sigma(x)$ pode ser determinado sem a informação contida em $\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n$, e portanto $\sigma(x) = \sigma_n(x)$.

Blindagem

As três definições a seguir são necessárias para definirmos o conceito de blindagem.

Definição 2.2.2 Um caminho de pontos no grafo $\mathcal{G}_\nu^{(d)}$ é uma seqüência finita $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, $x_i \in \mathbb{Z}^d$; tal que $|x_{i+1} - x_i|_{\text{sup}} \leq \nu$, $0 \leq i \leq n - 1$.

Definição 2.2.3 Um caminho $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ é dito decrescente (sujeito a $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$), toda vez que a seqüência numérica $(\omega_{x_i})_{0 \leq i \leq n}$ for (essritamente) decrescente.

Definição 2.2.4 Para $x, y \in \mathbb{Z}^d$ e $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$, dizemos que y influencia x sujeito a ω , se existir um caminho decrescente $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, tal que $x_0 = x$ e $x_n = y$.

Definição 2.2.5 (*Blindagem*) Dado um subconjunto finito $F \subset \mathbb{Z}^d$, definimos a blindagem de F (sujeito a $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$), como o subconjunto (aleatório)

$$\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F)(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \exists x \in F : y \text{ influencia } x\}$$

Desta definição fica claro que, para $F, G \subset \mathbb{Z}^d$ e $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$, temos que (i) $\mathcal{A}(F)(\omega) \supset F$; (ii)³ $F = \bigsqcup_{i=1}^n F_i \Rightarrow \mathcal{A}(F)(\omega) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}(F_i)(\omega)$; (iii) $F \subset G \Rightarrow \mathcal{A}(F)(\omega) \subset \mathcal{A}(G)(\omega)$; (iv) e pode ser provado [2] que para qualquer $F \subset \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{A}(F)$ é (quase certamente) finito.

A partir da definição de blindagem, o algoritmo aleatório limite fica precisamente definido por

$$\sigma(\omega)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\mathcal{A}(\{x\})(\omega)}(\omega)(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

Em palavras, essa definição indica que para encontrarmos $\sigma(\omega)(x)$: (i) determinamos a *blindagem* do conjunto $\{x\}$ através da definição (2.2.5), (ii) em seguida, construímos/implementamos o processo de estacionamento sobre $\mathcal{A}(\{x\})$, (iii) e então assinalamos o valor do correspondente *limite de saturação* $\sigma_{\mathcal{A}(\{x\})}$ ao sítio x . Essas regras fazem o papel da função de construção f_σ para este caso mais geral.

Em [2] os algoritmos finitos $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ do processo de estacionamento são construídos no mesmo espaço de probabilidade de seu algoritmo limite, de tal forma que $\sigma_n \rightarrow \sigma$ quase certamente ⁴. Segue daí que, dado um esquema de estacionamento S_ν , existe uma única medida de probabilidade μ definida em $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\{0, 1\}}^{\mathbb{Z}^d})$ tal que $\mu_n \Rightarrow \mu$. O elemento aleatório σ é o limite termodinâmico da seqüência $(\sigma_n)_{n \geq 0}$, e sua distribuição μ é a correspondente medida termodinâmica. A convergência quase certa de σ_n para o algoritmo limite σ , se baseia no fato dos conjuntos (aleatórios) $\mathcal{A}(\{x\})$ serem

³ \bigsqcup denota união disjunta.

⁴convergência pontual em relação à topologia produto em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

estáveis em relação à seqüência $(\sigma_n)_{n \geq 1}$, no sentido que, uma vez que n seja suficientemente grande tal que $\mathcal{A}(\{x\}) \subset \Lambda_n$, os *limites de saturação* $\sigma_m, m \geq n$ são idênticos sobre $\mathcal{A}(\{x\})$.

2.2.3 Aplicação do Teorema Principal

Vamos definir a seqüência de conjuntos $(A_n)_{n \geq 0}$ e mostraremos que $\mathbb{P}(A_n^c) = O(n^{-d-\delta})$, o que faz com que todas as hipóteses do Teorema (1.2.1) fiquem verificadas para os processos de estacionamento.

Neste caso mais geral dos processos de estacionamento, a seqüência de conjuntos $(A_n)_{n \geq 0}$ fica definida através do conceito de blindagem.

$$A_{n\nu} \stackrel{def}{=} \{\omega : \mathcal{A}\{0\}(\omega) \subset \Lambda_{n\nu-\nu}\}.$$

Consideremos o evento $A_{n\nu}^c = \{\mathcal{A}\{0\} \not\subset \Lambda_{n\nu}\}$ ou seja, o evento no qual existe um caminho (e portanto self-avoiding) decrescente $(x_j)_{0 \leq j \leq m}$, $m > n$, começando em 0 e terminando fora da caixa $\Lambda_{n\nu}$. Observemos que a probabilidade de um caminho self-avoiding arbitrário (mas fixo) $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ ser decrescente é $1/(n+1)!$ e que o número total de caminhos self-avoiding que começam em 0 e que possuem tamanho n não é maior que $(2\nu+1)^{d \cdot n}$, e concluímos (por subaditividade) que

$$\mathbb{P}\{A_{n\nu}^c\} = \mathbb{P}(\mathcal{A}\{0\} \not\subset \Lambda_{n\nu}) \leq \frac{(2\nu+1)^{d \cdot n}}{(n+1)!} \leq \frac{(2\nu+1)^{d \cdot n}}{n!}.$$

2.3 Processo de Ocupação

O Teorema (1.2.1) também se aplica a modelos onde o espaço de spins é contínuo, porém limitado. Nesta seção apresentamos um exemplo desse caso, baseado nos Processos de Estacionamento.

Consideramos um processo onde há competição de agentes biológicos por territórios ou competição de agentes financeiros por nichos

de mercado. Os agentes são representados pelos sítios $x \in \mathbb{Z}^d$ e podem ocupar áreas esféricas de raio $r(x)$, uniformemente distribuído no intervalo $(0, \rho)$, com $0 < \rho < \infty$. Tomemos uma caixa Λ_n , que representa o território ou mercado em competição. Um sítio x (agente) é escolhido aleatoriamente dentre os pertencentes à caixa Λ_n e se apossa de uma área de raio $r(x)$, condicionada a não se sobrepor a domínios já ocupados. O processo continua até que todos os sítios da caixa Λ_n ocupem algum espaço. A Figura 6 mostra uma realização do processo na caixa Λ_1 .

Da mesma forma que no caso dos Processos de Estacionamento, queremos construir o processo em todo o \mathbb{Z}^d . Para isso, consideramos o espaço de probabilidade $\left(((0, 1)^2)^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{(0,1)^2}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)^2}^{\mathbb{Z}^d} \right)$ que, em palavras, significa associar a cada sítio $x \in \mathbb{Z}^d$ duas variáveis aleatórias uniformes definidas no intervalo $(0, 1)$. As componentes de um elemento $\omega \in ((0, 1)^2)^{\mathbb{Z}^d}$ são pares ordenados de variáveis aleatórias uniformes, que denotamos por (ω_1^x, ω_2^x) . Denotamos por $r_n \in (0, \rho)^{\Lambda_n}$ a configuração final do processo na caixa Λ_n , e por μ_n a correspondente distribuição definida em $\left((0, \rho)^{\Lambda_n}, \mathcal{B}_{(0,\rho)}^{\Lambda_n} \right)$.

Apresentamos a seguir o algoritmo de construção do processo na caixa Λ_n . Neste caso usamos a norma euclidiana, que denotamos por $d(\cdot, \cdot)$, ao invés de usar a norma do sup como fizemos nas seções anteriores.

Definição 2.3.1 *Definimos o Processo de Ocupação na caixa Λ_n com condição de fronteira nula através do seguinte algoritmo:*

Para cada $\omega \in ((0, 1)^2)^{\mathbb{Z}^d}$,

Passo 1 $r(x) = -\infty \forall x \in \mathbb{Z}^d$;

Passo 2 *escolha $x \in \Lambda_n$ tal que*

$$\omega_1^x = \inf\{\omega_1^z : z \in \Lambda_n \text{ e } z \text{ não tenha sido escolhido previamente}\};$$

Passo 3 $r(x) = \omega_2^x \cdot \min_{z \in \Lambda_n} \{\min\{\rho, \max\{d(x, z) - r(z), 0\}\}\};$

Passo 4 *Se há pontos em Λ_n não escolhidos ainda, então volte ao passo 2, ou encerre o algoritmo.*

Observações

1. Esse algoritmo é estendido naturalmente para o caso de subconjuntos arbitrários finitos de \mathbb{Z}^d .
2. A expressão $\min\{\rho, \max\{d(x, z) - r(z), 0\}\}$ pode ser interpretada como a limitação que a área de influência do sítio z impõe à área de ocupação do sítio x .
3. No caso em que $\rho > 1$, a região ocupada por um sítio pode englobar sítios ainda não escolhidos.

O conceito de blindagem é definido da mesma forma que no caso dos Processos de Estacionamento, através da definição (2.2.5).⁵ Vamos chamar de $r \in (0, \rho)^{\mathbb{Z}^d}$ o campo aleatório limite, ou seja, o objeto aleatório que tem como lei $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$. Da mesma forma que na seção (2.2.2) temos

$$r(\omega)(x) \stackrel{\text{def}}{=} r_{\mathcal{A}(\{x\})(\omega)}(\omega)(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

2.3.1 Aplicação do Teorema Principal

O roteiro para mostramos que o Teorema (1.2.1) se aplica ao campo aleatório r é o mesmo seguido nas seções anteriores, nos casos dos Processos de Estacionamento:

1. Definição da seqüência de conjuntos $(A_n)_{n \geq 1}$,

$$A_{n\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega : \mathcal{A}\{0\}(\omega) \subset \Lambda_{n \cdot \rho - \rho}\}.$$

2. E pelas mesmas justificativas elencadas na seção (2.2.3), temos

$$\mathbb{P}(A_{n \cdot \rho}^c) = \mathbb{P}(\mathcal{A}\{0\} \not\subset \Lambda_{n \cdot \rho}) \leq \frac{(2 \cdot \rho + 1)^{d \cdot n}}{(n + 1)!} \leq \frac{(2 \cdot \rho + 1)^{d \cdot n}}{n!}.$$

⁵Observar que na definição (2.2.2) é usada a norma do sup e $\nu = \rho$. É a norma do sup que deve ser usada!

E portanto, pelo Teorema (1.2.1), temos taxas exponenciais de convergência para a medida termodinâmica deste processo.

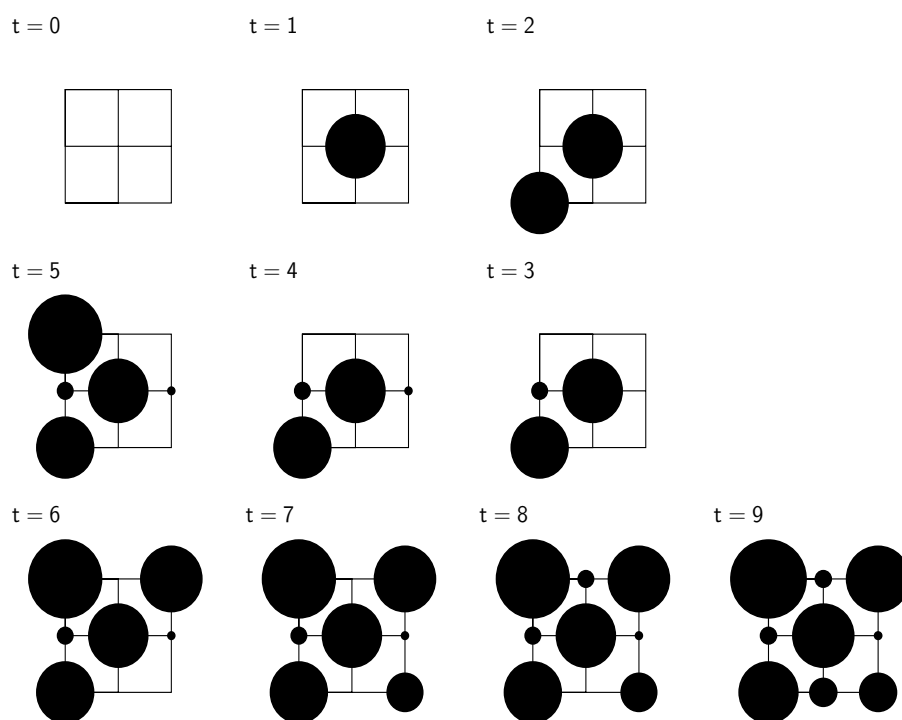


Figura 6: Realização do *Processo de Ocupação* na caixa Λ_1 para $\rho = 1$.

Capítulo 3

Rede de Filas com Perdas, com Interações de Longo Alcance e Cauda Pesada

Neste capítulo apresentamos um exemplo de aplicação do Teorema (1.2.1) à medida estacionária de um sistema de partículas interagentes, que em sua forma mais geral apresenta interações de longo alcance. Trata-se de uma rede de filas indexadas por \mathbb{Z}^d com capacidade total K , $1 \leq K < \infty$.

Na primeira seção tratamos do caso $K = 1$: apresentamos (1) a construção gráfica do processo; (2) as condições para a construção do objeto aleatório limite, ou seja, do objeto aleatório distribuído segundo a medida estacionária do processo; (3) mostramos que o Teorema (1.2.1) pode ser aplicado às medidas estacionárias do processo. Na segunda seção apenas indicamos o caso $K > 1$ apresentando: (1) a dinâmica do processo; (2) a condição para construir o objeto aleatório limite. As hipóteses do Teorema (1.2.1) também são verificadas para este caso mais geral.

3.1 Rede de Filas com Capacidade $K=1$

A cada sítio de \mathbb{Z}^d associamos uma fila sem sala de espera e com capacidade de atender um cliente por vez. Qualitativamente, o processo evolui da seguinte forma: um serviço termina com taxa μ ; e um cliente é aceito numa fila vazia a uma taxa proporcional ao "peso" total das filas desocupadas à sua volta.

Mais precisamente, consideramos um processo de Markov a tempo contínuo $\{\eta_t : t \geq 0\}$, que assume valores em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, ou seja, para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, $\eta_t(x)$ assume 0 ou 1. O estado 0 indica que não há clientes na fila associada ao sítio x , e o estado 1 indica que um cliente está sendo atendido. E dada uma distribuição de probabilidade, ν em \mathbb{Z}^d , isto é, $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \nu(x) = 1$, temos então um sistema de partículas interagentes de longo alcance. Chamando de $c(x, \eta)$ a taxa com que o estado do sítio x flipa quando o processo assume a configuração η , então esse sistema de partículas evolui de acordo com as seguintes taxas

$$c(x, \eta) = \begin{cases} \mu & \text{se } \eta(x) = 1 \\ \lambda \cdot \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \nu(y - x)[1 - \eta(y)] & \text{se } \eta(x) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Esta dinâmica pode ser encarada como um processo que modela a entrada e a saída de usuários em uma rede de terminais. A saída de um usuário ocorre com taxa μ , enquanto a taxa de conexão de um usuário a um terminal depende da configuração global da rede, sendo tanto maior, quanto maior for a quantidade de terminais desocupados.

3.1.1 Existência do processo

Vamos denotar por η^x a configuração η que apresenta apenas o estado do sítio x flipado. Consideremos uma função $g := g(\eta)$, e definimos $\|g\| := \sum_x \|g(\eta^x) - g(\eta)\|_\infty$ onde $\|f\|_\infty = \sup_\eta |f(\eta)|$.

Dizemos que a função g é Lipschitz contínua se $\|g\| < \infty$. Um processo fica bem definido se as taxas de evolução do processo satisfizerem as seguintes condições [14]:

- Apresentam invariância translacional: se $y \in \mathbb{Z}^d$ e se o operador de translação θ_y atua sobre η , de tal forma que $\theta_y \eta(x) = \eta(x+y)$ para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, então a invariância translacional implica que $c(x+y, \theta_y \eta) = c(x, \eta)$;
- São Lipschitz contínuas, ou seja, $\|c(0, \cdot)\| < \infty$.

As taxas definidas na expressão (3.1) satisfazem de maneira óbvia a primeira condição. Vamos mostrar que essas taxas também satisfazem a segunda condição. Começemos fixando uma configuração η e analisemos $|c(0, \eta^x) - c(0, \eta)|$ para $x = 0$ e $x \neq 0$. Para $x = 0$ temos

$$|c(0, \eta^0) - c(0, \eta)| \leq |\mu - \lambda \sum_{y:\eta(y)=0} \nu(y)| \leq \max\{\mu, \lambda\}.$$

Agora, tomando o sup sobre todas as configurações $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ temos

$$\sup_{\eta} |c(0, \eta^0) - c(0, \eta)| \leq \max\{\mu, \lambda\} \Leftrightarrow \|c(0, \eta^0) - c(0, \eta)\|_{\infty} \leq \max\{\mu, \lambda\}.$$

Para $x \neq 0$ temos $|c(0, \eta^x) - c(0, \eta)| = \lambda \cdot \nu(x)$ e, conseqüentemente,

$$\sup_{\eta} |c(0, \eta^x) - c(0, \eta)| = \|c(0, \eta^x) - c(0, \eta)\|_{\infty} = \lambda \cdot \nu(x).$$

E, finalmente temos

$$\begin{aligned} \|c(0, \cdot)\| &= \sum_x \|c(0, \eta^x) - c(0, \eta)\|_{\infty} \\ &= \|c(0, \eta^0) - c(0, \eta)\|_{\infty} + \sum_{x \neq 0} \|c(0, \eta^x) - c(0, \eta)\|_{\infty} \\ &\leq \max\{\lambda, \mu\} + \sum_{x \neq 0} \lambda \cdot \nu(x) \leq \max\{\lambda, \mu\} + \lambda < \infty \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

3.1.2 Construção Gráfica

Na construção gráfica de sistemas de partículas interagentes definidos em \mathbb{Z}^d , há sempre a dificuldade de dizer qual é a primeira marca a ser considerada. Para processos com interação de primeiros vizinhos ou de curto alcance, tal dificuldade é superada através de um argumento percolativo devido a T. Harris. Esse argumento garante que, para um pequeno intervalo de tempo determinístico $[0, t_0]$, \mathbb{Z}^d se decompõe em componentes finitas e disjuntas que não interagem nesse intervalo de tempo. A evolução do processo em $[0, t_0]$ pode então ser determinada, uma vez que somente um número finito de marcas precisam ser consideradas. E a configuração obtida em t_0 faz o papel de condição inicial e nova partição de \mathbb{Z}^d é obtida e, assim toda a evolução do processo fica determinada. Contudo, no caso de um processo com interações de longo alcance esse argumento não pode ser aplicado. Para o modelo aqui proposto, determinamos o estado de um sítio $x \in \mathbb{Z}^d$, em um instante determinístico T , usando algo semelhante à técnica chamada de acoplamento do passado ("coupling from the past" [1]).

Para cada sítio $x \in \mathbb{Z}^d$ definimos, em um espaço de probabilidade abstrato $(\Omega_x, \mathcal{F}_x, \mathbb{P}_x)$, dois processos independentes de Poisson em \mathbb{R} : \mathcal{N}_x com taxa λ (chegada de um cliente) e \mathcal{M}_x com taxa μ (fim de um serviço); e uma família de variáveis aleatórias, $(\Delta_i^x)_{i \in \mathbb{Z}^*}$, independentes e identicamente distribuídas, e que assumem valores em \mathbb{Z}^d , com $\Delta_i^x \sim \nu$. Assim, o espaço de probabilidade usado neste capítulo é o espaço produto $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d}$.

Denotamos por $(Y_i^x)_{(i \in \mathbb{Z}^*, x \in \mathbb{Z}^d)}$ e $(U_i^x)_{(i \in \mathbb{Z}^*, x \in \mathbb{Z}^d)}$ as seqüências de tempos de ocorrência das marcas dos processos com taxa λ e μ , respectivamente. Para um sítio x e um índice i fixos, o instante

Υ_i^x está associado à variável aleatória Δ_i^x . Fixada uma realização $\omega \in (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d}$, temos em cada sítio x uma seqüência de instantes de marcas de processos de Poisson, uns são do tipo U_i^x e outros são do tipo Υ_i^x , que por sua vez, estão associados às respectivas realizações das variáveis aleatórias Δ_i^x .

Para que haja fluidez da linguagem, muitas vezes vamos dizer "a fila $x \in \mathbb{Z}^d$ " ao invés de dizer "a fila associada ao sítio $x \in \mathbb{Z}^d$ ". E muitas vezes diremos apenas "o sítio x ". E para $x \in \mathbb{Z}^d$, vamos denotar por $\{x\} \times (0, t)$ um intervalo de tempo associado a x , e diremos apenas "o intervalo $\{x\} \times (0, t)$ ".

Nos tempos $(U_i^x)_{i \in \mathbb{Z}^*}$, se uma fila x estiver ocupada por um cliente ($\eta_{U_i^x-}(x) = 1$), ela fica vazia espontaneamente ($\eta_{U_i^x}(x) = 0$). Por outro lado, nos tempos $(\Upsilon_i^x)_{i \in \mathbb{Z}^*}$, um cliente pode entrar na fila x , desde que esta esteja vazia, e a fila $x + \Delta_i^x$ também esteja vazia no instante Υ_i^x- .

Dada uma condição inicial η_0 e uma realização ω , determinamos $\eta_T(0)$, $T > 0$, olhando para as marcas de chegada e partida (final de serviço) do intervalo $(0, T)$ que influenciam o estado da fila 0 no instante T . Podemos ter as seguintes situações com relação à seqüência de marcas de chegada e partida do intervalo $(0, T)$:

1. Não ocorrem marcas nesse intervalo, então $\eta_T(0) = \eta_0(0)$;
2. Há apenas marcas de final de serviço, então $\eta_T(0) = 0$;
3. Há apenas marcas de chegada de novos clientes, digamos k marcas, $\Upsilon_1^0, \dots, \Upsilon_k^0$, tais que $0 < \Upsilon_1^0 < \Upsilon_2^0 < \dots < \Upsilon_k^0 < T$. A concretização dessas chegadas depende dos estados dos sítios $0 + \Delta_1^0, 0 + \Delta_2^0, \dots, 0 + \Delta_k^0$, respectivamente.
4. Há marcas de chegada e partida. Nesse caso, se tomamos a maior marca de partida desse intervalo, digamos U_i^0 , temos os

seguintes casos:

- (a) Não há marcas de chegada entre U_i^0 e T então $\eta_T(0) = 0$.
- (b) Há marcas de chegada entre U_i^0 e T , digamos k marcas, $\Upsilon_j^0, \dots, \Upsilon_{j+k}^0$, tais que $U_i^0 < \Upsilon_j^0 < \Upsilon_{j+1}^0 < \dots < \Upsilon_{j+k}^0 < T$. E nesse caso, as chegadas dependem dos estados dos sítios $0 + \Delta_j^0, 0 + \Delta_{j+1}^0, \dots, 0 + \Delta_{j+k}^0$, respectivamente.

Determinar $\eta_T(0)$ no caso 3 significa verificar o estado de cada um dos sítios $0 + \Delta_1^0, 0 + \Delta_1^0, \dots, 0 + \Delta_k^0$, enquanto determinar $\eta_T(0)$ no caso 4(b), significa verificar o estado de cada um dos sítios $0 + \Delta_j^0, 0 + \Delta_{j+1}^0, \dots, 0 + \Delta_{j+k}^0$. Tanto num caso como no outro temos que percorrer os passos 1, 2, 3 e 4 iteradas vezes, até ocorrer uma das situações descritas nos itens 1, 2 e 4(a), nas quais o estado de um sítio fica efetivamente determinado. Resumimos essa busca através da definição de uma função interativa que denotamos por $alg(x, t)$, onde x é um sítio e t um intervalo de tempo. Dada uma realização $\omega \in (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d}$ e uma condição inicial η_0 , ela gera o estado do sítio x no instante t .

Definição 3.1.1 Função interativa: gera o estado de um sítio x num instante t .

Para $\omega \in (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d}$ e uma condição inicial η_0 ,

- $alg(x, t) \leftarrow \eta_0(x)$ se não há marcas no intervalo $\{x\} \times (0, t)$;
- caso contrário,
 - $alg(x, t) \leftarrow 0$ se a primeira marca menor que t for uma marca de final de serviço;
 - caso contrário, se a primeira marca menor que t for uma marca de chegada, digamos Υ_k^x , então

$$alg(x, t) \leftarrow I_{\{alg(x, \Upsilon_k^x)=1\}} + I_{\{alg(x, \Upsilon_k^x)=0\}} \cdot \left(1 - I_{\{alg(x+\Delta_k^x, \Upsilon_k^x)=0\}}\right).$$

Se o número de interações for finito, ou seja, o estado de qualquer sítio de \mathbb{Z}^d só depender de um número finito de marcas, temos de maneira sintética que $\eta_T(0) = \text{alg}(0, T)$.

Para determinarmos as condições nas quais o número de marcas é finito, começamos definindo o que chamamos de “progenia de um sítio x ”.

Definição 3.1.2 Progenia de um sítio x no intervalo $(0, t)$.

Para $\omega \in (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d}$, chamamos de “progenia de um sítio x no intervalo $(0, t)$ ” o conjunto de todas as marcas de chegada (nascimento) desse intervalo que influenciam o estado de x no instante t .

Em linhas gerais, encaramos o sítio/fila 0 como sendo um indivíduo, cujos filhos, no caso 3, são as marcas de chegada entre os instantes 0 e T : $\Upsilon_1^0 < \Upsilon_2^0 < \dots < \Upsilon_k^0$; e no caso 4(b) são as marcas de chegada entre os instantes U_i^0 e T : $\Upsilon_j^0 < \Upsilon_{j+1}^0 < \dots < \Upsilon_{j+k}^0$. “Os filhos de uma marca Υ_l^0 ”, por sua vez, são as marcas de chegada do intervalo $\{0 + \Delta_l^0\} \times (0, \Upsilon_l^0)$, no caso 3; e são as marcas de chegada entre a maior marca de partida do intervalo $\{0 + \Delta_l^0\} \times (0, \Upsilon_l^0)$ e o instante Υ_l^0 , no caso 4(a). Observemos que podem ocorrer situações onde “os filhos de uma marca” são também filhos de outras marcas.

Na última seção deste capítulo, descrevemos de maneira detalhada a “progenia de um sítio x no intervalo $(0, T)$ ”, e mostramos que ela é dominada por um processo de ramificação com lei de prole Poisson de parâmetro λT . Ou seja, “a progenia de x no intervalo $(0, T)$ ” é finita se $\lambda T < 1 \Leftrightarrow T < 1/\lambda$. E assim podemos construir toda a evolução do processo, progredindo em múltiplos de $1/\lambda$.

3.1.3 Função de Construção do Campo Aleatório

Nesta seção vamos mostrar que se $\lambda < \mu$ podemos construir o campo aleatório limite, ou seja, o campo aleatório que tem como lei a única medida estacionária do processo em questão.

Definimos no espaço de probabilidade $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d}$ uma família de processos estocásticos acoplados $(\eta_t^{-\tau})_{t \geq 0}$, para $\tau \geq 0$. O instante $(-\tau)$ é o instante inicial, e $\eta_t^{-\tau}(\omega) = \eta_t^0(\theta_\tau(\omega))$, onde $\theta_\tau(\omega)$ é um operador que translada em τ unidades de tempo, todas as marcas de chegada e partida¹. Observemos que, o objeto aleatório η_t usado até a última seção era $\eta_t^{-\tau}$ para $\tau = 0$.

Seja η_0 uma configuração inicial, vamos construir a medida estacionária do processo $(\eta_t^0)_{t \geq 0}$ a partir dos seguintes passos:

- (i) Definimos $\eta_\infty^{-\infty}$ em $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d}$ assumindo valores em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ tal que

$$\eta_\tau^{-\tau} \rightarrow \eta_\infty^{-\infty} \text{ q.c., quando } \tau \rightarrow \infty .$$

Portanto,

$$\eta_\tau^{-\tau} \Rightarrow \eta_\infty^{-\infty}, \text{ quando } \tau \rightarrow \infty ,$$

onde \Rightarrow significa convergência fraca ou convergência em lei.

- (ii) Uma vez que $\eta_\tau^{-\tau} \sim \eta_\tau^0$, podemos concluir que

$$\eta_\tau^0 \Rightarrow \eta_\infty^{-\infty}, \text{ quando } \tau \rightarrow \infty .$$

Ou seja, $\eta_t^0 \Rightarrow \eta_\infty^{-\infty}$, quando $t \rightarrow \infty$.

- (iii) Como a cópia $(\eta_t^0)_{t \geq 0}$ é marginalmente distribuída de acordo com a dinâmica do processo, podemos concluir que a lei de $\eta_\infty^{-\infty}$ é (exatamente) a distribuição limite/assintótica do processo.

¹Temos que $\theta_\tau : (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)^{\mathbb{Z}^d}$ e $\omega \sim \theta_\tau(\omega)$

Definição de $\eta_\infty^{-\infty}$

Na construção gráfica do processo, vimos como determinar $\eta_T^0(0)$. Da mesma forma, podemos determinar $\eta_\tau^{-\tau}(0)$ para $\forall \tau \geq 0$. Observemos também que naquela situação a progenia da origem (sítio/fila 0) era truncada. Na medida que aumentamos τ mais completa a progenia se torna. Vamos chamar de “progenia completa da origem (ou de qualquer outro sítio x)” o conjunto de marcas que determinam o estado desse sítio no instante 0 quando o processo começa em $-\infty$.

Se a “progenia completa da origem” for finita, podemos afirmar que existe $T_0 = T_0(\omega)$ tal que para $\tau \geq T_0$ temos $\eta_\tau^{-\tau}(0) = \eta_{T_0}^{-T_0}(0)$, e portanto $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta_\tau^{-\tau}(0) = \eta_{-T_0}^{T_0}(0) = \eta_\infty^{-\infty}(0)$. O Lema a seguir diz em qual situação ela é finita quase certamente.

Lema 3.1.1 *Se $\lambda < \mu$ então a progenia completa do sítio 0 é finita q.c. .*

Prova do Lema 3.1.1:

A prova consiste em mostrar que a “descendência” do sítio 0 é dominada por um processo de ramificação subcrítico se $\lambda < \mu$.

Começamos observando que a distribuição do número de “filhos” de um “indivíduo” corresponde à distribuição do número de marcas de nascimento antes da última marca de morte, num processo de nascimento e morte onde as marcas de nascimento ocorrem segundo um processo de Poisson de parâmetro λ , e as marcas de morte ocorrem segundo um processo de Poisson independente do primeiro, e de parâmetro μ . Como pode ser deduzido sem grandes dificuldades, o número de “filhos” de um “indivíduo” tem distribuição geométrica com parâmetro de sucesso $\lambda/(\lambda + \mu)$.

Usando as mesmas idéias da construção gráfica do processo, construímos no mesmo espaço de probabilidade a descendência original e

a gerada por um processo de ramificação com lei de prole geométrica com parâmetro de sucesso $\lambda/(\lambda + \mu)$. Uma vez que esse processo de ramificação domina a descendência de x , impomos condições para que seja subcrítico: a esperança do número de filhos de um "indivíduo" ser menor que 1, ou seja, $\lambda/\mu < 1$, o que implica em $\lambda < \mu$, como queríamos provar. ■

Então para $\lambda < \mu$ a função de construção do objeto aleatório limite, que denotaremos por f_η , é dada por

$$f_\eta = \eta_\infty^{-\infty}(0).$$

3.1.4 Aplicação do teorema principal

Nesta seção vamos definir a seqüência de conjuntos $(A_n)_{n \geq 0}$, e analisar o comportamento de $P(A_n^c)$ quando $n \rightarrow \infty$. Vamos mostrar que $P(A_n^c) = O(n^{-d-\delta})$, que, pelo Teorema (1.2.1), implica em termos taxas exponenciais de convergência na lei dos grandes números para a única medida estacionária deste processo.

Vamos começar definindo uma variável aleatória, R_x , que fornece o deslocamento espacial total em torno do sítio x , após concluído o processo de busca de $\eta_\infty^{-\infty}(x)$.

Como pode ser visto no Apêndice 1, para determinarmos o estado do sítio 0, percorremos a seqüência de sítios $\{0, x_2, x_3, \dots, x_{l_k}, \dots\}$, onde $x_2 = 0 + \Delta_{l_1}^0$, $x_3 = x_2 + \Delta_{l_2}^{x_2}$ e $x_k = x_{k-1} + \Delta_{l_{k-1}}^{x_{k-1}}$. Para tornar a notação mais simples no que segue, vamos denotar a variável aleatória $|\Delta_{l_k}^{x_k}|_{\text{sup}}$ por Δ_k apenas².

Definição 3.1.3 *Seja $N > 0$ o número de descendentes de um sítio x . Se $\lambda < \mu$ temos $N < \infty$, e podemos definir a variável aleatória*

² $|x - y|_{\text{sup}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$

R_x por

$$R_x = \sum_{k=1}^N \Delta_k$$

Observação: Uma caixa de centro x e raio R_x engloba um número maior de sítios do que o necessário para determinarmos $\eta_\infty^{-\infty}(x)$. Contudo, o fato da variável aleatória R_x se apresentar como soma das variáveis aleatórias Δ_i nos possibilitou determinar propriedades interessantes da distribuição de R_x . Por esse motivo, não usamos o máximo deslocamento espacial em torno do sítio x para definir R_x .

O conjunto A_n fica naturalmente definido por

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega : R_0(\omega) < n\}. \quad (3.2)$$

Recordemos que A_n^c é o conjunto das configurações nas quais f_η não fica determinado a partir dos estados dos sítios pertencentes à caixa Λ_n . Então $A_n^c \subseteq \{R_0 > n\}$ que, por subaditividade, implica em $\mathbb{P}(A_n^c) \leq \mathbb{P}(R_0 > n)$. Portanto temos que determinar a cauda da lei de R_0 para saber se o campo aleatório $\eta_\infty^{-\infty}$ obedece a hipótese do teorema (1.2.1).

A cauda da lei de R_0

A distribuição da variável aleatória Δ_i fica definida a partir da medida ν , como segue³

$$\mathbb{P}(\Delta_i = n) = \sum_{\{x \in \mathbb{Z}^d : |x|_{\text{sup}} = n\}} \nu(x).$$

Na seqüência, vamos mostrar que a variável aleatória R_0 herda a cauda da distribuição de Δ_i . Mais precisamente, a seqüência $(\mathbb{P}(A_n^c))$ herda o comportamento assintótico de $\left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n} \nu(x)\right)$, ou ainda $\mathbb{P}(A_n^c) = O\left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n} \nu(x)\right)$.

³ $|x - y|_{\text{sup}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$

(1) *Tratemos primeiro do caso em que Δ_i tem cauda exponencial*

A distribuição da variável aleatória Δ_i tem cauda exponencial se existirem $C > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\mathbb{P}(\Delta_i > n) \leq C \cdot e^{-\alpha n}$

Lema 3.1.2 *Se Δ_i tiver cauda exponencial então a lei da variável aleatória R_0 terá cauda exponencial.*

Este lema nos diz que se Δ_i tiver cauda exponencial, então existem constantes positivas C' e α' , tais que $\mathbb{P}(A_n^c) \leq \mathbb{P}(R_0 > n) \leq C' \cdot e^{-\alpha' n}$, e portanto o Teorema (1.2.1) se aplica a este caso.

Idéia da prova do Lema (3.1.2). Usamos o seguinte resultado para provarmos esse lema.

Lema 3.1.3 *Seja X uma variável aleatória positiva, com função geradora de momentos $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$. Existem constantes $k > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\mathbb{P}(X > x) \leq k \cdot e^{-\alpha x}$ se e somente se existir $\delta > 0$ tal que $M_X(t) < \infty$ para $t \in (0, \delta)$.*

Então, se mostrarmos que existe δ' tal que para $t \in (0, \delta')$ temos $\mathbb{E}(e^{tR_0}) < \infty$, poderemos afirmar que existem κ e φ tais que $\mathbb{P}(R_0 > x) \leq \kappa \cdot e^{-x\varphi}$, uma vez que R_0 é uma variável aleatória positiva.

A demonstrações dos Lemas (3.1.3) e (3.1.2) se encontram no Apêndice 2.

■

(2) Consideremos agora o caso em que Δ_i é tal que existem constantes positivas C e α tais que $\mathbb{P}(\Delta_i > n) \leq C \cdot n^{-\alpha}$. Esta classe de distribuições engloba aquelas que possuem cauda pesada ou polinomial.

Lema 3.1.4 *Se a lei da variável aleatória Δ_i for tal que existem $C > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\mathbb{P}(\Delta_i > n) \leq C \cdot n^{-\alpha}$ então existem constantes positivas C' e α' tais que $\mathbb{P}(\mathbf{R}_0 > n) \leq C' \cdot n^{-\alpha'}$.*

Então temos $\mathbb{P}(A_n^c) \leq \mathbb{P}(\mathbf{R}_0 > n) \leq C' \cdot n^{-\alpha'}$, e se $\alpha' > d$ o Teorema (1.2.1) também se aplica a este caso. Observemos ainda, que o resultado acima inclui a possibilidade da lei de \mathbf{R}_0 ter cauda polinomial (pesada).

Idéia da prova do Lema (3.1.4). A demonstração do Lema (3.1.4) foi baseada nos resultados a seguir.

Lema 3.1.5 *Seja X uma variável aleatória positiva e seja $k \in \mathbb{R}_+$. Se $\mathbb{E}(X^k) < \infty$ então existe $C \in \mathbb{R}_+$ tal que $\mathbb{P}(X > x) \leq C/x^k$.*

Lema 3.1.6 *Seja X uma variável aleatória positiva e sejam k, ϵ e $C \in \mathbb{R}_+$. Se $\mathbb{P}(X > x) \leq C/x^{k+\epsilon}$ então $\mathbb{E}(X^k) < \infty$.*

A prova do Lema (3.1.5) segue imediatamente da desigualdade de Markov, enquanto o Lema (3.1.6) segue do fato de $\mathbb{E}(X^k) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X^k > x) dx \leq \int_0^\infty 1 \wedge (C/x^{1+\epsilon/k}) dx$.

Se a lei da variável aleatória Δ_i for como descrita nas hipóteses do Lema (3.1.4) então concluímos através do Lema (3.1.6) que⁴ $\mathbb{E}(\Delta_i^k) < \infty$. Essa hipótese nos permite mostrar, através da desigualdade de Hölder⁵, que, para $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(\mathbf{R}_0^k) < \infty$.

A demonstrações do Lema 3.1.4 se encontra no Apêndice 2. ■

⁴Neste caso Δ_1^k significa Δ_1 elevado ao expoente k .

⁵O resultado segue de maneira imediata da desigualdade de Minkowski. Nada mais natural, uma vez que essa desigualdade é corolário da desigualdade de Hölder.

3.2 Rede de Filas com Capacidade $K \geq 1$

A idéia desta seção é apenas indicar uma generalização do modelo inicialmente apresentado, por isso não vamos repetir os detalhes da seção anterior. Na seção (3.1) tratamos do caso no qual a cada sítio de \mathbb{Z}^d está associada uma fila de capacidade K igual a 1, ou seja, uma fila sem sala de espera e que atende apenas um cliente de cada vez. Nesta seção vamos descrever o caso no qual a cada sítio de \mathbb{Z}^d associamos uma fila com capacidade total $K \geq 1$ e sala de espera finita. A construção gráfica deste modelo pode ser realizada nos mesmos moldes da seção (3.1), sendo porém bem mais intrincada.

Vamos denotar por $\eta_t \in \{0, 1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{Z}^d}$ a configuração da rede no instante t , com $\eta_t(x) = i$ indicando que existem i clientes no sítio x no instante t . Da mesma forma que na seção (3.1), ν é uma medida de probabilidade definida em $\mathbb{Z}^d/0$, isto é $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d \setminus 0} \nu(x) = 1$.

Dinâmica

Em cada fila, os clientes chegam de maneira seqüencial, de acordo com um processo de Poisson de intensidade λ , e são atendidos de acordo com um processo de Poisson de intensidade μ . Um novo cliente é aceito na fila x no instante t com probabilidade

$$\mathbb{I}_{\{\eta_t(x) < K\}} \cdot \sum_{y \in \mathbb{Z}^d \setminus x} \nu(y - x) \mathbb{I}_{\{\eta_t(y) < K\}},$$

o que indica que a rede perde clientes com probabilidade que cresce de acordo com o tamanho do congestionamento da rede em torno do sítio x . Por exemplo, para $d = 1$ e $\nu(1) = \nu(-1) = 1/2$, vemos que a rede rejeita/perde novos clientes com probabilidade $i/2$, onde $i = 0, 1, 2$ é o número de primeiros vizinhos congestionados.

Essa descrição informal da dinâmica do processo pode ser formalizada como um Sistema de Partículas Interagentes $(\eta_t)_{t \geq 0}$ com

espaço de spin $\{0, 1, \dots, K\}$ e com taxas:

$$c_i(x, \eta) = \begin{cases} \mu, & \text{se } \eta(x) = i + 1 \\ \lambda \cdot \sum_{\{y \in \mathbb{Z}^d \setminus x\}} \nu(y - x) \cdot \mathbb{I}_{\{\eta_t(y) < K\}}, & \text{se } \eta(x) = i - 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$c_K(x, \eta) = \begin{cases} \lambda \cdot \sum_{\{y \in \mathbb{Z}^d \setminus x\}} \nu(y - x) \cdot \mathbb{I}_{\{\eta_t(y) < K\}}, & \text{se } \eta(x) = K - 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$c_0(x, \eta) = \begin{cases} \mu, & \text{se } \eta(x) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É possível construir a medida estacionária de $(\eta_t)_{t \geq 0}$ se $\lambda < \mu \cdot (\sqrt[K]{2} - 1)$. A prova desse resultado segue exatamente as mesmas idéias da demonstração do Lema (3.1.1), por isso não vamos repeti-las.

A seqüência de conjuntos $(A_n)_{n \geq 1}$ fica definida da mesma forma que na seção (3.1.4), assim como valem todos os resultados lá enunciados, e portanto o Teorema (1.2.1) também vale para a única medida estacionária deste processo.

3.3 Apêndice 1

“Progenia do sítio 0 no intervalo $(0, T)$ ” e Processo de Ramificação Dominante

Nesta seção descrevemos precisamente a “progenia do sítio 0 no intervalo $(0, T)$ ”.

Chamamos de t_1^M a maior marca de partida do intervalo $\{0\} \times (0, T)$

$$t_1^M := \max\{U_i^0 : 0 < U_i^0 < T\},$$

com $t_1^M := 0$ quando não houver marcas de partida no intervalo $\{0\} \times (0, T)$.

Definimos por A_1 o conjunto que contém as marcas de chegada do intervalo $\{0\} \times (t_1^M, T)$. Mais precisamente

$$A_1 := \{\Upsilon_i^0 : t_1^M < \Upsilon_i^0 < T\}.$$

E definimos, também o instante de tempo $t_1^N := \max A_1$ que está associado a um índice⁶ que chamamos de l_1 , a partir do qual recuperamos $\Delta_{l_1}^0$, que, por sua vez, nos permite determinar o sítio $x_2 = 0 + \Delta_{l_1}^0$.

E seja também

$$t_2^M := \max\{U_i^{x_2} : 0 < U_i^{x_2} < t_1^N\},$$

com $t_2^M := 0$ quando não houver marcas de partida no intervalo $\{x_2\} \times (0, t_1^N)$.

Definimos ainda, o conjunto A_2 que contém os elementos de A_1 menos o elemento máximo de A_1 , que neste caso específico é t_1^N , acrescido das marcas de chegada do intervalo $\{x_2\} \times (t_2^M, t_1^N)$, mais precisamente

$$A_2 := [A_1 / \{\max A_1\}] \cup \{\Upsilon_i^{x_2} : t_2^M < \Upsilon_i^{x_2} < t_1^N\}.$$

Por sua vez, o elemento $\max A_2 := t_2^N$ está associado a um índice l_2 e um sítio x_2 , através do qual determinamos $x_3 = x_2 + \Delta_{l_2}^{x_2}$, A_3 e assim por diante. De maneira geral, para $j \in \{2, 3, \dots\}$ temos

$$t_{j-1}^N := \max A_{j-1}$$

$$A_j := [A_{j-1} / \{\max A_{j-1}\}] \cup \{\Upsilon_i^{x_j} : t_j^M < \Upsilon_i^{x_j} < t_{j-1}^N\},$$

onde

$$t_j^M := \max_i \{U_i^{x_j} : 0 < U_i^{x_j} < t_{j-1}^N\},$$

⁶Queremos dizer que t_1^N é uma marca de nascimento do intervalo $\{0\} \times (t_1^M, T)$, ou seja, uma marca do tipo $\Upsilon_{l_1}^0$, com o índice l_1 naturalmente associado.

com $t_j^M := 0$ quando não houver marcas de partida no intervalo $\{x_j\} \times (0, t_{j-1}^N)$.

Processo de Ramificação Dominante

Para mostrarmos que a progenia do sítio 0 no intervalo é dominada por um processo de ramificação, construímos primeiro o que chamamos de "descendência dual" do sítio 0, no mesmo espaço de probabilidade da descendência original do sítio 0.

Na descendência dual do sítio 0, a primeira geração ("filhos do sítio 0") é constituída por todas as marcas de chegada do intervalo $\{0\} \times (0, T)$. Denotamos por B_1 o conjunto que contém essas marcas:

$$B_1 := \{\Upsilon_i^0 : 0 < \Upsilon_i^0 < T\}.$$

O elemento máximo do conjunto B_1 fornece o índice k_1 a partir do qual obtemos o sítio $y_2 = 0 + \Delta_{k_1}^0 (= x_2)$. Seja então B_2 o conjunto que contém os elementos de B_1 menos y_2 , acrescido das marcas de nascimento do intervalo $\{y_2\} \times (0, t_1^N)$. Mais precisamente

$$B_2 := [B_1 / \{\max B_1\}] \cup \{\Upsilon_i^{y_2} : 0 < \Upsilon_i^{y_2} < t_1^N\}.$$

Observemos que B_2 contém todas as marcas de chegada entre os instantes 0 e t_1^N , ao contrário de A_2 , que contém as marcas de chegada entre t_1^M e t_1^N , ou seja, $A_2 \subset B_2$.

Ao elemento $\max B_2$ está associado um índice k_2 , a partir do qual recuperamos $\Delta_{k_2}^{y_2}$ e determinamos $y_3 = y_2 + \Delta_{k_2}^{y_2}$ e B_3 , e assim por diante. Trocamos x_j por y_j para $j \geq 3$, uma vez que $x_1 = y_1 = 0$ e $x_2 = y_2$, mas y_j não é necessariamente igual a x_j , para $j \geq 3$. Finalmente, o termo geral de B_j , $j \in \{2, 3, \dots\}$, é dado por

$$B_j := [B_{j-1} / \{\max B_{j-1}\}] \cup \{\Upsilon_i^{y_j} : 0 < \Upsilon_i^{y_j} < t_{j-1}^N\}.$$

Observemos que $A_j \subset B_j$, $j \geq 1$, e que portanto, a descendência dual do sítio 0 domina a descendência original do sítio 0.

Nosso segundo passo é construir, no mesmo espaço de probabilidade, o que chamamos de descendência dominante do sítio 0.

A descendência dominante do sítio 0 começa da mesma forma que sua descendência dual, ou seja, usa todas as marcas de chegada do intervalo $\{y_1\} \times (0, T)$. Denotamos por C_1 esse conjunto de marcas

$$C_1 := B_1 = \{\mathcal{Y}_i^{y_1} : 0 < \mathcal{Y}_i^{y_1} < T\}.$$

Para $j \geq 2$, a descendência dominante do sítio 0 usa a seqüência de sítios $\{y_2, y_3 \dots\}$, exposta anteriormente na construção da descendência dual do sítio 0. Contudo, considera todas as marcas de chegada dos intervalos $\{y_j\} \times (0, T)$, $j \geq 2$. Assim temos

$$C_j := \{\mathcal{Y}_i^{y_j} : 0 < \mathcal{Y}_i^{y_j} < T\}.$$

Uma vez que as marcas de chegada (“filhos”) seguem um processo de Poisson de taxa λ , a distribuição do número dessas marcas no intervalo $(0, T)$ é uma Poisson com média λT . Desta forma, na construção da descendência dominante, vamos utilizar um conjunto de processos de ramificação independentes, com lei de prole Poisson de parâmetro λT . Denotaremos esse conjunto por \mathcal{R}_P .

Quando $C_j/B_j \neq \emptyset$, cada um dos “indivíduos” (marcas de chegada) de C_j/B_j gera sua descendência através de um processo de ramificação do conjunto \mathcal{R}_P . Nesse caso a descendência dominante de 0 apresenta pelo menos $|C_j/B_j|$ “indivíduos” a mais que a descendência dual de 0. Por outro lado, quando um “indivíduo” da descendência dual de 0 apresenta um “filho” já chamado anteriormente, na descendência dominante este “indivíduo” gera sua descendência através de um processo de ramificação do conjunto \mathcal{R}_P . Neste caso, a descendência dual de 0 não gera novos “indivíduos”, enquanto é acrescentado pelo menos mais um novo “indivíduo” à descendência dominante.

Isso deixa claro que a descendência dominante do sítio 0 domina a descendência dual do sítio 0. Nesse sentido, basta que tenhamos $\lambda T < 1 \Leftrightarrow T < 1/\lambda$ para que a descendência dominante do sítio 0 seja subcrítica.

3.4 Apêndice 2

Provas do Lemas (3.1.2), (3.1.3) e (3.1.4) .

Prova do Lema (3.1.3) :

\Rightarrow O primeiro fato a ser observado é que para $t > 0$:

$$\{X > x\} = \{e^{X \cdot t} > e^{x \cdot t}\}. \quad (3.3)$$

E por hipótese temos que

$$\mathbb{P}(e^{X \cdot t} > e^{x \cdot t}) \leq k \cdot e^{-\alpha \cdot x}. \quad (3.4)$$

Integrando a variável aleatória $e^{X \cdot t}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{X \cdot t}) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(e^{X \cdot t} > y) dy \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}(e^{X \cdot t} > y) dy + \int_1^\infty \mathbb{P}(e^{X \cdot t} > y) dy \end{aligned}$$

Usando 3.4 e que $x = \frac{1}{t} \ln y$ (pois $y = e^{x \cdot t}$), temos

$$\mathbb{E}(e^{X \cdot t}) \leq 1 + \int_1^\infty k \cdot y^{-\alpha/t} dy < \infty \text{ para } t < \alpha,$$

ou seja, para $t \in (0, \alpha)$, $M_X(t) < \infty$, como queríamos provar.

\Leftarrow

De 3.3, temos para $t > 0$ que

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{X \cdot t} > e^{x \cdot t})$$

Como por hipótese $M_X(t) < \infty$ para algum $t \in (0, \delta)$, podemos usar a desigualdade de Markov para a variável aleatória $e^{X \cdot t}$, ou seja

$$\mathbb{P}(e^{X \cdot t} > e^{x \cdot t}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{X \cdot t})}{e^{x \cdot t}} = M_X(t) \cdot e^{-x \cdot t}.$$

E temos por fim,

$$\mathbb{P}(X > x) \leq M_X(t) \cdot e^{-x \cdot t} = k \cdot e^{-x \cdot t}$$

para algum $t \in (0, \delta)$, como queríamos provar. ■

Prova do Lema (3.1.2):

Começemos por desenvolver $\mathbb{E}(e^{t \cdot R_0})$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{t \cdot R_0}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(e^{t \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k}; N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(e^{t \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k}; \mathbb{I}_{N=n}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(e^{t \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k}) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\prod_{k=1}^n e^{t \cdot \Delta_k}) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{t \cdot \Delta_k}) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (M_{\Delta_k}(t))^n \cdot \mathbb{P}(N = n),
\end{aligned}$$

onde

$$M_{\Delta_k}(t) = \mathbb{E}(e^{t \cdot \Delta_k}).$$

Se Δ_i tiver cauda exponencial, então pelo Lema (3.1.3) existe $\delta > 0$ tal que para $t \in (0, \delta)$, $M_{\Delta_k}(t) < \infty$. Tomemos $\bar{\delta}$ tal que $0 < \bar{\delta} < \delta$ e consideremos a seqüência positiva $(t_n)_{n \geq 1}$ de números reais tal que $t_n \in (0, \bar{\delta})$ e $t_n \searrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Temos que $t_n \searrow 0$ implica em $e^{t_n \cdot \Delta_k} \searrow 1$. Como $e^{t_n \cdot \Delta_k} < e^{\bar{\delta} \cdot \Delta_k}$, $\forall n$, podemos aplicar o teorema da convergência dominada, e chegarmos a

$$\mathbb{E}(e^{t_n \cdot \Delta_k}) = M_{\Delta_k}(t_n) \searrow 1. \quad (3.5)$$

Ou seja, dado $\beta < 1$, $\exists n_0$ suficientemente grande tal que $M_{\Delta_k}(t_n) < 1/\beta$, $\forall n > n_0$. Se $\delta = t_{n_0}$, então, $M_{\Delta_k}(t) < 1/\beta$, para $t \in (0, \delta)$.

Por outro lado, a distribuição assintótica do tamanho da progenia de um indivíduo num processo de ramificação subcrítico [23] é tal

que

$$\mathbb{P}(N = n) \leq C \cdot e^{-\gamma n}.$$

Se fizermos $e^{-\gamma} = \beta < 1$, temos

$$\mathbb{P}(N = n) \leq C \cdot \beta^n. \tag{3.6}$$

De (3.5) e de (3.6) temos para $t \in (0, \delta)$ e $\alpha = M_{\Delta_k}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{t \cdot R_0}) &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{\Delta_k}^n(t) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cdot \mathbb{P}(N = n) \\ &\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot \beta)^n < \infty, \end{aligned}$$

pois

$$1 < \alpha < \frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 1.$$

■

Prova do Lema (3.1.4):

Se a lei de Δ_i for como descrita nas hipóteses do Lema (3.1.4), então pelo Lema (3.1.6), as variáveis aleatórias $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots$ tem k -ésimo momento finito, isto⁷ é $\mathbb{E}(\Delta_1^k) < \infty$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Podemos escrever $\mathbb{E}(\mathbf{R}_0^k)$ como segue

$$\mathbb{E}(\mathbf{R}_0^k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbf{R}_0^k | N = n) \cdot \mathbb{P}(N = n), \quad (3.7)$$

onde

$$(\mathbf{R}_0^k | N = n) = (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)^k.$$

Vamos mostrar que $\mathbb{E}(\mathbf{R}_0^k) < \infty$ mostrando que $\mathbb{E}(\mathbf{R}_0^k | N = n) < \infty$ por indução finita em n , $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 2$ temos

$$(\mathbf{R}_0^k | N = 2) = (\Delta_1 + \Delta_2)^k = \sum_{\{\sum_{j=1}^2 n_j = k\}} \Delta_1^{n_1} \cdot \Delta_2^{n_2}.$$

Por hipótese $\Delta_1^{n_1}$ é uma variável aleatória em \mathcal{L}^{k/n_1} e $\Delta_2^{n_2}$ é uma variável aleatória em \mathcal{L}^{k/n_2} . Usando a desigualdade de Hölder para as variáveis $\Delta_1^{n_1}$ e $\Delta_2^{n_2}$, com $p = k/n_1$ e $q = k/n_2$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_1^{n_1} \cdot \Delta_2^{n_2}) &\leq \left(\mathbb{E}(\Delta_1^{n_1 \cdot k/n_1}) \right)^{\frac{n_1}{k}} \cdot \left(\mathbb{E}(\Delta_2^{n_2 \cdot k/n_2}) \right)^{\frac{n_2}{k}} \\ &= \mathbb{E}(\Delta_1^k)^{\frac{n_1}{k}} \cdot \mathbb{E}(\Delta_2^k)^{\frac{n_2}{k}} \\ &= \mathbb{E}(\Delta_1^k)^{\frac{n_1+n_2}{k}} \\ &= \mathbb{E}(\Delta_1^k) < \infty, \end{aligned}$$

pois $\Delta_1^{n_1}$ e $\Delta_2^{n_2}$ são identicamente distribuídas e $n_1 + n_2 = k$. E portanto

$$\mathbb{E}(\mathbf{R}_0^k | N = 2) = \sum_{\{\sum_{j=1}^2 n_j = k\}} \mathbb{E}(\Delta_1^{n_1} \cdot \Delta_2^{n_2}) \leq 2^k \cdot \mathbb{E}(\Delta_1^k) < \infty.$$

⁷Nesta demonstração $\Delta_1^{n_1}$ significa Δ_1 elevado ao expoente n_1 .

Hipótese de Indução: Vamos supor que

$$\mathbb{E}(\Delta_1^{n_1} \cdot \Delta_2^{n_2} \cdot \Delta_i^{n_i}) \leq \mathbb{E}(\Delta_1^k) < \infty$$

para $\sum_{j=1}^i n_j = k$ e queremos mostrar que

$$\mathbb{E}(\Delta_1^{n'_1} \cdot \Delta_2^{n'_2} \dots \Delta_i^{n'_i} \cdot \Delta_{i+1}^{n'_{i+1}}) \leq \mathbb{E}(\Delta_1^k) < \infty$$

para $\sum_{j=1}^{i+1} n'_j = k$.

Temos que $\sum_{j=1}^i n'_j + n'_{i+1} = k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^i n'_j = k - n'_{i+1} = k'$. Seja $a = k/k'$ e observemos que $a \cdot n'_1 + a \cdot n'_2 + \dots + a \cdot n'_i = k$.

Seja $Y = \Delta_1^{n'_1} \cdot \Delta_2^{n'_2} \dots \Delta_i^{n'_i}$, então

$$\mathbb{E}(Y^a) = \mathbb{E}(\Delta_1^{a \cdot n'_1} \Delta_2^{a \cdot n'_2} \Delta_i^{a \cdot n'_i}) \leq \mathbb{E}(\Delta_1^k) < \infty$$

pela hipótese de indução e uma vez que $\sum_{j=1}^i a \cdot n'_j = k$. E portanto $Y \in \mathcal{L}^a$. Por outro lado $\Delta_{i+1}^{n'_{i+1}} \in \mathcal{L}^{k/n'_{i+1}}$ por hipótese. E agora usamos a desigualdade de Hölder para Y e $\Delta_{i+1}^{n'_{i+1}}$ com $p = a$ e $q = k/n'_{i+1}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_1^{n'_1} \cdot \Delta_2^{n'_2} \dots \Delta_i^{n'_i} \cdot \Delta_{i+1}^{n'_{i+1}}) &= \mathbb{E}(Y \cdot \Delta_{i+1}^{n'_{i+1}}) \\ &\leq (\mathbb{E}(Y^a))^{1/a} \cdot \left(\mathbb{E} \left((\Delta_{i+1}^{n'_{i+1}})^{k/n'_{i+1}} \right) \right)^{n'_{i+1}/k} \\ &\leq \mathbb{E}(\Delta_1^k)^{1/a} \cdot \mathbb{E}(\Delta_{i+1}^k)^{\frac{n'_{i+1}}{k}} \\ &= \mathbb{E}(\Delta_1^k) < \infty. \end{aligned}$$

E portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_0^k | N = i + 1) &= \sum_{\{\sum_{j=1}^{i+1} n'_j = k\}} \mathbb{E}(\Delta_1^{n'_1} \cdot \Delta_2^{n'_2} \dots \Delta_i^{n'_i} \cdot \Delta_{i+1}^{n'_{i+1}}) \\ &\leq (i + 1)^k \cdot \mathbb{E}(\Delta_1^k) < \infty. \end{aligned}$$

Voltemos à expressão (3.7) do início da demonstração. Lembremos que a distribuição assintótica do tamanho da progenia de

um indivíduo num processo de ramificação subcrítico é dada por $\mathbb{P}(N = n) \leq C \cdot e^{-\gamma n}$. Portanto $\mathbb{E}(\mathbf{R}_0^k) < \infty$, e pelo Lema (3.1.5) podemos concluir que a variável aleatória \mathbf{R}_0 tem cauda pesada tal como a variável Δ_i , como queríamos provar.

Observemos que poderíamos ter $\mathbb{P}(N = n) \leq C/n^{1+\epsilon}$, para $\epsilon > 0$, e ainda assim a variável aleatória \mathbf{R}_0 teria cauda pesada.

■

Prova alternativa do Lema (3.1.4):

Vamos supor que a lei da variável Δ_i seja tal que $\mathbb{P}(\Delta_i > x) \leq C \cdot 1/x^\alpha$.

Observemos que se condicionarmos a variável aleatória R_0 no evento $\{N = 2\}$, ou seja $\mathbf{R}_0 = \Delta_1 + \Delta_2$, temos que

$$\{\mathbf{R}_0 > r\} \subset \left\{ \Delta_1 > \frac{r}{2} \right\} \cup \left\{ \Delta_2 > \frac{r}{2} \right\},$$

e que portanto

$$\mathbb{P}(\mathbf{R}_0 > r) \leq \mathbb{P}\left(\Delta_1 > \frac{r}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\Delta_2 > \frac{r}{2}\right).$$

Como $\Delta_1 \sim \Delta_2$ temos $\mathbb{P}(\mathbf{R}_0 > r) \leq 2 \cdot \mathbb{P}(\Delta_1 > \frac{r}{2})$.

Agora, se condicionarmos \mathbf{R}_0 no evento $\{N = n\}$, ou seja $\mathbf{R}_0 = \sum_{i=1}^n \Delta_i$, temos que

$$\{\mathbf{R}_0 > r\} \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ \Delta_i > \frac{r}{n} \right\},$$

e, pelos mesmos motivos anteriores, temos também que

$$\mathbb{P}(\mathbf{R}_0 > r) \leq n \cdot \mathbb{P}\left(\Delta_1 > \frac{r}{n}\right) \leq C \cdot n \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{n}\right)^\alpha} = C \cdot \frac{n^{\alpha+1}}{r^\alpha}.$$

Agora, observemos que podemos reescrever o termo $\mathbb{P}(\mathbf{R}_0 > r)$

da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_0 > r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(R_0 > r, N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(R_0 > r | N = n) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} C \cdot \frac{n^{\alpha+1}}{r^\alpha} \cdot \mathbb{P}(N = n) \\
&= \frac{C}{r^\alpha} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+1} \cdot \mathbb{P}(N = n).
\end{aligned}$$

E como a distribuição assintótica do tamanho da progenia de um indivíduo num processo de ramificação subcrítico é tal que

$$\mathbb{P}(N = n) \leq C_1 \cdot e^{-\gamma \cdot n},$$

concluimos que a variável aleatória R_0 poderia ter cauda pesada da mesma forma que a variável aleatória Δ_i , como queríamos provar.

Observemos que a expressão acima nos informa que poderíamos ter $\mathbb{P}(N = n) \leq C \cdot n^{-\{\alpha+\delta\}}$, para $\delta > 2$, e ainda assim, ficaria incluída a possibilidade de R_0 ter cauda pesada.

■

Capítulo 4

Questões em Aberto e Pesquisa Corrente

1. Seja

$$p_{n,\epsilon} = \mathbb{P} \left(\left| \frac{\sum_{i \in \Lambda_n} X_i}{|\Lambda_n|} - \mathbb{E}(X_0) \right| > \epsilon \right) \leq C \cdot e^{-\alpha \cdot |\Lambda_n|}.$$

O Teorema (1.2.1) teve como hipótese o fato de f_X ser limitada. Acreditamos ser possível enfraquecer essa hipótese e considerar $\mathbb{E}(e^{t \cdot f_X}) < \infty$ para provar um resultado mais forte, ou seja

$$“(\forall \epsilon > 0)(\exists C > 0)(\exists \alpha > 0) \text{ tal que } \frac{1}{n} \log p_{n,\epsilon} \xrightarrow{n} \alpha(\epsilon)”$$

2. Pretendemos ampliar a classe de exemplos onde o Teorema (1.2.1) se aplica. Já sabemos que o resultado se aplica a *Modelos de Adsorção Seqüencial Aleatória Cooperativa* e ao *Modelo dos Filósofos* e, queremos abordar outros *Processos de Ocupação* similares ao descrito na seção (2.3) bem como outros sistemas biológicos relacionados.
3. Outra questão a que nos propomos é saber se podemos estender o método aqui desenvolvido a Cadeias de Markov definidas em espaços gerais.

Referências Bibliográficas

- [1] Propp, J. G.; Wilson, D. B. *Exact sampling with coupled markov chains and applications to statistical mechanics* Random Structures and Algorithms 9, 223-252 (1996)
- [2] Ritchie, T.L *Construction of the thermodynamic jamming limit for the parking process and other exclusion schemes on \mathbb{Z}^d* . Journal of Statistical Physics, Vol. 122, No. 3, 381-398 (2006).
- [3] Ferrari, P. A.; Fernandez R.; Garcia, N. L. (2002) *Perfect simulation for interacting point processes, loss networks and Ising models*. Stochastic Processes and their Applications 102, 63-88.
- [4] Baum, L. E.; Katz, M.; Read, R. R. *Exponential convergence rates for the law of large numbers*. Trans. Amer. Math. Soc. 102, 187-199 (1962).
- [5] Lebowitz, J. L.; Schonmann, R. H. (1988) *Pseudo-Free Energies and Large Deviations for Non Gibbsian FKG Measures* Probab. Th. Rel. Fields 77, 49-64.
- [6] Machado, F.P. *Large Deviations for the Number of Open Clusters per site in Long Range Bond Percolation* Markov Processes and Related Fields, Vol. 3, No 3, 367-376 (1997).

- [7] Georgii, H. O. (1988) *Gibbs measures and phase transitions*. de Gruyter Studies in Mathematics 9.
- [8] Accardi, L; Olla, S. *Large deviations for stationary processes*.
- [9] Granovsky B. L., Madras N. *The Noisy Voter Model*. Stochastic Process and their Applications 56 (1995), 23-43.
- [10] Olla, S. *Large deviations for almost markovian processes*. Prob. Th. Rel. Fields 76, No.3 395-409 (1987).
- [11] Baram, A.; Kutasov, D. (1992) *Random sequential adsorption on a quasi-one-dimensional lattice: an exact solution*. J. Phys. A 25, L493.
- [12] Baram, A.; Kutasov, D. (1994) *Random sequential adsorption on a $3 \times \infty$ lattice: an exact solution*. J. Phys. A 27, 3683-3687.
- [13] Bonnier, B.; Boyer, D; Viot, P. (1994) *Pair correlation function in random sequential adsorption process*. J. Phys. A 27, 3671-3682.
- [14] Durrett, R. (1981) *An Introduction to Infinite Particle Systems*. Stochastic Processes and their Applications 11, 109-150.
- [15] Durrett, R. (1996) *Probability: theory and examples*. Second edition. Duxbury Press.
- [16] Fan Y.; Percus J. K. (1992) *Random sequential adsorption on a ladder* J. Stat. Phys. 66, 263.
- [17] Flory, P. J. (1939) *Intramolecular reaction between neighboring substituents of vinyl polymers*. J. Am. Chem. Soc. 61, 1518.
- [18] Rényi, A. (1963) *On a one-dimensional problem concerning random space filling*. Sel. Trans. Math. Stat. Prob. 4, 203.

- [19] Keller, J. B. (1962) *Reactions kinetics of a long chain molecule*. J. Chem. Phys. 37, 2584.
- [20] Mackenzie, J. K. (1962) *Sequential filling of a line by intervals placed at random and its application to linear adsorption*. J. Chem. Phys. 37, 723.
- [21] Page, E. S. (1959) *The distributions of vacancies on a line*. J. Royal Statist. Soc. B 21, 364-374.
- [22] Penrose, M. D. (2002) *Limit theorems for monotonic particle systems and sequential deposition*. Stochastic Processes and their Applications 98, 175-197.
- [23] Harris, T. E. (1963) *The Theory of Branching Process*