Número de vértices visitados no modelo de sapos em grafos completos

Gustavo Oshiro de Carvalho

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Programa: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Fábio Prates Machado

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo
23 de Fevereiro de 2022

Número de vértices visitados no modelo de sapos em grafos completos

Gustavo Oshiro de Carvalho

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 23 de Fevereiro de 2022.

Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Fábio Prates Machado (orientador) – IME-USP
Prof. Dr. Bernardo Nunes Borges de Lima – UFMG
Prof. Dr. Élcio Lebensztayn – IMECC-UNICAMP

Resumo

Gustavo Oshiro de Carvalho. **Número de vértices visitados no modelo de sapos em grafos completos**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Estudamos um sistema de passeios aleatórios conhecido como modelo de sapos. Inicialmente, há uma partícula em cada vértice do grafo completo de ordem n; um vértice do grafo é fixado como origem e a partícula presente nele é considerada ativa, enquanto todas as outras partículas são ditas inativas. Cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simples sobre o grafo e tem probabilidade $1 - p$ de morrer antes de cada passo. Partículas inativas se tornam ativas no momento em que seu vértice é visitado por uma partícula ativa. Nesta dissertação, estudamos o número de vértices visitados por partículas ativas quando $n \longrightarrow \infty$.

Palavras-chave: modelo de sapos, passeios aleatórios, grafo completo.

Abstract

Gustavo Oshiro de Carvalho. **Number of visited vertices of the frog model on complete graphs**. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2022.

We study a random walk system known as frog model. Initially, there is a particle at each vertice of the complete graph of order n; a vertice of the graph is fixed as the root and the particle placed at the root is considered active, while all other particles are called inactive. Each active particle performs a simple random walk on the graph and has probability $1 - p$ of dying before each step. Inactive particles become active the moment their vertice is visited by an active particle. In this dissertation, we study the number of vertices visited by active particles as $n \to \infty$.

Keywords: frog model, random walks, complete graph.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O modelo de sapos é um sistema de partículas interagentes que vem sendo estudado por diversos probabilistas. Esse modelo é frequentemente associado à dinâmica do espalhamento de um rumor ou de um vírus numa população. Considerando o contexto epidêmico sob uma população de n pessoas, o objetivo deste trabalho é estudar a quantidade assintótica ($n \longrightarrow \infty$) de indivíduos infectados, onde a todo instante, cada indivíduo infectado poderá morrer/curar-se ou passar o vírus adiante para qualquer uma das $n - 1$ outras pessoas da população, infectando-a caso ela ainda não esteja infectada e nem morta/curada.

De forma genérica, esse modelo pode ser definido da seguinte maneira. No instante inicial, existem partículas espalhadas por um grafo $\mathcal{G}$ conectado, finito ou infinito. Todas as partículas começam inativas, exceto as que estiverem em um vértice especial denominado origem de $\mathcal{G}$. As partículas ativas realizam um passeio aleatório simples, usualmente simétrico e a tempo discreto, sob o grafo $\mathcal{G}$, independente das outras partículas. Toda partícula inativa permanece parada em seu vértice inicial até o momento em que ele for visitado por alguma partícula ativa; no instante seguinte, a partícula que estava inativa se torna ativa e passa a realizar sua dinâmica como partícula ativa. Há versões onde as partículas ativas vivem infinitamente, bem como versões onde as partículas ativas têm vida fixa finita ou até vida aleatória.

Grande parte da literatura sobre o modelo de sapos é focada no caso em que as partículas ativas têm vida infinita e $\mathcal{G}$ é um grafo infinito. Para esse caso, vários estudos visam descrever condições para recorrência ou transiência, isto é, condições para que o vértice de origem seja visitado infinitas vezes ou não, como [34, 30, 21, 19, 32, 24, 22, 23] (estudos como [12, 9, 10, 33, 5] consideram passeios aleatórios não simétricos); outros estudos têm o objetivo de descrever a forma de crescimento do conjunto de vértices visitados, como [2, 4, 20, 8] ([17, 13] consideram passeios aleatórios não simétricos e [31] considera passeios aleatórios a tempo contínuo).

Alguns artigos focam no modelo de sapos para o caso em que $\mathcal{G}$ é um grafo finito. Quando a vida das partículas é infinita, trabalhos como [16, 18] estudam o tempo de cobertura do grafo, ou seja, o primeiro instante de tempo para o qual cada vértice de $\mathcal{G}$ tenha sido visitado ao menos uma vez. Quando a vida das partículas ativas é fixa e finita, estudos como [7, 16] focam em descobrir o menor valor $t \in \mathbb{N}$[1] para que todo o grafo seja visitado, onde t é a vida de cada partícula. Há também artigos como [3, 25, 28], que estudam os casos onde as partículas ativas morrem quando se movem para vértices já visitados anteriormente, buscando compreender o número de vértices visitados nesse processo.

A versão do modelo que mais nos interessa nesta dissertação é conhecida como a de vida geométrica. A cada instante de tempo, cada partícula ativa sobrevive com probabilidade $p \in [0,1]$ ou morre com probabilidade $1-p$, independente das outras partículas e dos instantes anteriores, fazendo com que cada partícula ativa tenha uma vida aleatória seguindo uma distribuição geométrica de parâmetro $1-p$. Quando $\mathcal{G}$ é um grafo infinito, o interesse principal é estudar a sobrevivência do modelo, em particular o parâmetro crítico p_c tal que quando $p < p_c$ o modelo se extingue em algum momento com probabilidade 1 e quando $p > p_c$ o modelo sobrevive infinitamente com probabilidade estritamente maior do que zero (ver [1, 11, 26, 27]). De maneira similar para o grafo finito K_n, grafo completo com n vértices, com configuração inicial de uma partícula por vértice, um parâmetro crítico p_c é definido em [3], tal que quando $p < p_c$ a proporção de vértices visitados converge em distribuição para zero no limite de $n \longrightarrow \infty$ e quando $p > p_c$ essa convergência para zero não ocorre; além disso, em [3], também é demonstrado que $p_c = 1/2$. Sob essas mesmas condições, resultados parecidos são encontrados em [25].

Assim como o caso citado acima, consideramos o modelo de sapos com vida geométrica e que inicialmente há uma partícula em cada vértice de $\mathcal{G} = K_n$. O teorema principal desta dissertação extende o resultado de [3] descrito acima, principalmente na fase supercrítica ($p > 1/2$), mostrando qual a probabilidade de que uma proporção estritamente maior que zero de vértices seja visitado e que caso isso não ocorra, o número de vértices visitados é no máximo da ordem de $\log n$. Denote por $V_\infty(K_n)$ o número de vértices visitados durante todo o processo no grafo K_n.

Teorema 1. *(i) Se $p < 1/2$, para qualquer função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$, vale*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(V_\infty(K_n) \leq f(n)) = 1.$$

(ii) Se $p > 1/2$, então existem constantes $c > 0$ e $c' \in (0,1)$ tais que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(V_\infty(K_n) \leq c\log n) = \frac{1-p}{p},$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(V_\infty(K_n) \geq c'n) = \frac{2p-1}{p}.$$

Em particular, a função $f(n)$ da parte (i) do Teorema 1 também pode ser substituída por $c\log n$, para qualquer $c > 0$. Para a parte (ii), vale notar que os eventos $\{V_\infty(K_n) \leq c\log n\}$ e $\{V_\infty(K_n) \geq c'n\}$ são disjuntos para n suficientemente grande e que $\frac{1-p}{p} + \frac{2p-1}{p} = 1$, o que torna os eventos citados complementares no limite de $n \longrightarrow \infty$. Também vale notar que utilizando o Teorema 1 também chegamos no resultado apresentado em [3] de que $p_c = 1/2$, onde p_c é o parâmetro crítico descrito anteriormente.

[1] Nesta dissertação, utilizamos a convenção de $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

O Teorema 1 continua valendo ao trocar $V_\infty(K_n)$ por $V_\infty(K_n^o)$, onde K_n^o é um grafo com a mesma estrutura de K_n, mas com a adição de um auto-loop em cada vértice. De fato, a prova da parte supercrítica é realizada primeiro para K_n^o e posteriormente extendida para K_n por meio de um acoplamento, enquanto a parte subcrítica é provada para qualquer sequência de grafos conectados.

As ideias e técnicas utilizadas na demonstração do Teorema 1 são inspiradas no estudo da existência de uma componente gigante no grafo aleatório de Erdös–Rényi (ver [14, sec. 11.2] para mais detalhes). Também serão utilizados alguns conceitos básicos de processos de ramificação, que podem ser vistos com mais detalhes em [15, sec. 5.4].

O resultado do Teorema 1 é intuitivo se pensarmos que um valor grande de n combinado com um número pequeno de vértices visitados faz com que quase toda partícula que sobreviva visite um vértice novo e ative uma nova partícula. Portanto, nos primeiros instantes do modelo, intuitivamente o número de vértices visitados se assemelha ao de indivíduos em um processo de ramificação que gera 2 descendentes com probabilidade p e 0 descendentes com probabilidade $1 - p$, cuja probabilidade de extinção é igual a 1 para $p < 1/2$ ou igual a $\frac{1-p}{p}$ para $p > 1/2$. Para $p > 1/2$, o processo de ramificação descrito cresce infinitamente com probabilidade $\frac{2p-1}{p}$, evento que se associa a $V_\infty(K_n)$ ser da ordem de n.

Essa intuição também leva a uma outra questão: suponha que inicialmente há uma partícula no vértice origem de K_n e que o número de partículas nos demais vértices seja independente e identicamente distruibuído, com a mesma distribuição de uma variável aleatória $\eta \in \mathbb{N}_0$. Denote $V_\infty^{(\eta)}(K_n)$ como uma extensão de $V_\infty(K_n)$ para esse novo regime. Defina $\alpha(p, \eta)$ como a probabilidade de extinção de um processo de ramificação onde se gera 0 descendentes com probabilidade $1 - p$, e $k \in \mathbb{N}$ descendentes com probabilidade $p.P(\eta = k - 1)$.

Questão. *Quais seriam as condições sob a distribuição de η tais que:*

(i) Se $\alpha(p, \eta) = 1$, para qualquer função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$, vale:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(V_\infty^{(\eta)}(K_n) \leq f(n)) = 1.$$

(ii) Existem constantes $c > 0$ e $c' \in (0, 1)$ tais que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(V_\infty^{(\eta)}(K_n) \leq c \log n) = \alpha(p, \eta),$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(V_\infty^{(\eta)}(K_n) \geq c' n) = 1 - \alpha(p, \eta).$$

No Teorema 1, a pergunta é respondida para a condição específica de $\eta \equiv 1$. O foco da questão está na parte (ii), já que a parte (i) pode ser mostrada com argumentos similares aos da demonstração da parte (i) do Teorema 1.

1.1 Organização da dissertação

A dissertação se organiza da seguinte maneira. Em §2 é descrito um processo auxiliar que possui uma relação direta com o modelo de sapos mas que simplifica o estudo do número total de vértices visitados. Em §3 são postulados resultados sobre o processo auxiliar que serão úteis para demonstração do Teorema 1, enquanto §3.2 descreve notações extras para que esses resultados possam ser provados em §3.3. Em §4 finalmente se demonstra o Teorema 1, sendo que em §4.1 se encontra a demonstração da fase subcrítica para uma sequência qualquer de grafos conectados e em §4.2 se demonstra a fase supercrítica, primeiro para K_n^o em §4.2.1 e depois extendido para K_n em §4.2.2 por meio de um acoplamento entre o modelo nesses dois grafos.

Capítulo 2

Definição do processo auxiliar

O processo auxiliar é feito em rodadas. A cada rodada, apenas uma partícula verifica se sobrevive e, em caso afirmativo, se move. Sempre que não houver mais partículas ativas, uma partícula extra é injetada no vértice de origem do grafo, de modo que o processo nunca acabe. Formalmente, o processo auxiliar pode ser descrito como a seguir:

Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ um grafo conectado e finito com $|\mathcal{V}| = n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Atribuímos um rótulo a cada vértice de modo que $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., n\}$ e $1 \in \mathcal{V}$ é o vértice fixado como origem de $\mathcal{V}$. Sejam $\{B_i(\mathcal{G}), i \in \mathbb{N}\}$ e $\{(S_n^x(\mathcal{G}))_{n\in\mathbb{N}}, x \in \mathbb{N}\}$ conjuntos independentes de variáveis aleatórias independetes e identicamente distribuídas, em que $B_k = B_k(\mathcal{G})$ determina a sobrevivência ou morte da partícula que participa da k-ésima rodada para o grafo $\mathcal{G}$, onde $B_i \overset{i.i.d.}{\sim} Ber(p)$; $(S_n^x)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n^x(\mathcal{G}))_{n\in\mathbb{N}}$ é um passeio aleatório simples e simétrico em $\mathcal{G}$ da partícula de índice x. Consideramos que $S_0^x = x, x \in \mathcal{V}$ e $S_0^x = 1, x \in \{n+1, n+2, ...\}$, ou seja, os índices $1, 2, ..., n$ se referem a partículas originais que nascem no seu vértice correspondente enquanto os índices $n+1, n+2, ...$ se referem a partículas extras que nascem na origem de $\mathcal{V}$. Consideramos que $p \neq 1$, percebendo que o Teorema 1 é trivial para o caso em que $p = 1$, não sendo necessária a utilização de um processo auxiliar nesse caso.

Considerando $k \in \mathbb{N}_0$, o processo auxiliar será descrito pelos seguintes objetos aleatórios:

- $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_k(\mathcal{G})$: conjunto dos vértices de $\mathcal{G}$ visitados por partículas originais até o final da rodada k.
- $\mathcal{V}'_k = \mathcal{V}'_k(\mathcal{G})$: conjunto dos vértices de $\mathcal{G}$ visitados por quaisquer partículas (originais ou extras) até o final da rodada k.
- $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k(\mathcal{G})$: conjunto dos índices das partículas originais ativas ao final da rodada k.
- $w_k = w_k(\mathcal{G})$: índice da partícula que participará (morrendo ou se movendo) da rodada $k+1$.
- $s_k = s_k(\mathcal{G})$: número do (possível) passo do passeio aleatório a ser realizado na rodada $k+1$.
- $S_k = S_k(\mathcal{G})$: vértice (possivelmente) visitado na rodada k.

Apesar do grafo $\mathcal{G}$ aparecer em todas as notações, ele será omitido sempre que conveniente para facilitar a escrita.

A dinâmica do processo auxiliar é descrita da forma a seguir:

Iniciamos com $\mathcal{V}_0 := \{1\}$, $\mathcal{V}'_0 := \{1\}$, $\mathcal{A}_0 := \{1\}$, $w_0 := 1$, $s_0 := 1$ e $S_0 := 1$.

Para $k \geq 1$:

$S_k := S_{s_{k-1}}^{w_{k-1}}$.

- Se $B_k = 0$ (partícula w_{k-1} morre):
  $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}_{k-1}$.
  $\mathcal{V}'_k := \mathcal{V}'_{k-1}$.
  $\mathcal{A}_k := \mathcal{A}_{k-1} \setminus \{w_{k-1}\}$.
  $w_k := \begin{cases} \min(\mathcal{A}_k), & se \;\; \mathcal{A}_k \neq \emptyset, \\ n+1, & se \;\; \mathcal{A}_k = \emptyset, w_{k-1} \in \mathcal{V}, \\ w_{k-1}+1, & se \;\; \mathcal{A}_k = \emptyset, w_{k-1} \notin \mathcal{V}. \end{cases}$
  $s_k := 1$.
- Se $B_k = 1$ (partícula w_{k-1} sobrevive):
  $\mathcal{V}_k := \begin{cases} \mathcal{V}_{k-1} \cup \{S_k\}, & se \;\; \mathcal{A}_{k-1} \neq \emptyset, \\ \mathcal{V}_{k-1}, & se \;\; \mathcal{A}_{k-1} = \emptyset. \end{cases}$
  $\mathcal{V}'_k := \mathcal{V}'_{k-1} \cup \{S_k\}$.
  $\mathcal{A}_k := \begin{cases} \mathcal{A}_{k-1} \cup (\{S_k\} \setminus \mathcal{V}_{k-1}) = \mathcal{A}_{k-1} \cup (\{S_k\} \setminus \mathcal{V}'_{k-1}), & se \;\; \mathcal{A}_{k-1} \neq \emptyset, \\ \emptyset, & se \;\; \mathcal{A}_{k-1} = \emptyset. \end{cases}$
  $w_k := w_{k-1}$.
  $s_k := s_{k-1} + 1$.

A partir do processo citado acima, podemos definir a rodada em que o processo original acaba (a última partícula original morre) por

$$R = R(\mathcal{G}) := \inf\{k : \mathcal{A}_k(\mathcal{G}) = \emptyset\}.$$

No processo auxiliar, consideramos também que partículas inativas que são ativadas depois de R se tornam ativas extras. Pela observação anterior, teremos que a partir de R, o processo continua apenas com partículas extras, pois toda partícula a (possivelmente) se mover será uma das partículas diretamente injetadas na origem de $\mathcal{G}$ ou uma partícula ativada depois de R. Por conta disso, teremos $\mathcal{A}_k = \emptyset$ e $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_R$ para $k \geq R$, enquanto $\mathcal{V}'_k$ pode continuar crescendo mesmo após R. Note também que $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}'_k$ para $k \leq R$.

A vida (quantidade de passos) de qualquer partícula ativa é dada por uma distribuição geométrica de parâmetro $1 - p$, que é finita com probabilidade 1, já que consideramos anteriormente que $p \neq 1$. Além disso, o número de partículas originais ativadas até qualquer instante é no máximo $|\mathcal{V}| = n < \infty$. Logo, R é finito com probabilidade 1.

Apesar disso, o processo auxiliar como um todo é infinito, já que ele sempre se renova ao injetar partículas extras no vértice de origem. Esse fato torna possível analisar o comportamento da partícula (original ou extra) que realiza a rodada k para qualquer

$k \in \mathbb{N}$.

Para $k \in \mathbb{N}$ defina a variável $X_k = X_k(\mathcal{G})$ de acordo com o que ocorre com a partícula de índice w_{k-1} na rodada k:

- $X_k = 0 \iff B_k = 0$: A partícula morre.
- $X_k = 1 \iff (B_k = 1) \cap (S_k \in \mathcal{V}'_{k-1})$: A partícula sobrevive e vai a um vértice já visitado anteriormente.
- $X_k = 2 \iff (B_k = 1) \cap (S_k \notin \mathcal{V}'_{k-1})$: A partícula sobrevive e vai a um vértice nunca visitado anteriormente.

A variável anterior pode ser interpretada como o número de descendentes (no sentido de processos de ramificação) da partícula durante a rodada k. Apesar disso, os resultados do processo de ramificação não podem ser diretamente aplicados pois $X_1, X_2, \ldots$ não são independentes nem identicamente distribuídos.

Definimos $V'_k = V'_k(\mathcal{G}) := |\mathcal{V}'_k(\mathcal{G})|$, $V_k = V_k(\mathcal{G}) := |\mathcal{V}_k(\mathcal{G})|$, $A_k = A_k(\mathcal{G}) := |\mathcal{A}_k(\mathcal{G})|$ e

$$A'_0 = A'_0(\mathcal{G}) := 1; \quad A'_k = A'_k(\mathcal{G}) := 1 + \sum_{j=1}^{k}(X_j(\mathcal{G}) - 1), \quad k \geq 1. \tag{2.1}$$

Note que pelas definições acima e pelo processo descrito, vale que:

$$A_k = A'_k \mathbb{I}(k < R), \quad k \in \mathbb{N}^0; \tag{2.2}$$

$$V'_0 = 1; \quad V'_k = 1 + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(X_j = 2), \quad k \in \mathbb{N}; \tag{2.3}$$

$$V_k = V'_k \mathbb{I}(k < R) + V'_R \mathbb{I}(k \geq R), \quad k \in \mathbb{N}^0; \tag{2.4}$$

$$R = \inf\{k : A'_k = 0\}. \tag{2.5}$$

Assim, A'_k representa o número de partículas potencialmente ativas ao final da rodada k; A_k representa o número de partículas efetivamente ativas ao final da rodada k; V'_k representa o número de vértices potencialmente visitados até o final da rodada k; V_k representa o número de vértices efetivamente visitados até o final da rodada k; e, como dito anteriormente, R representa o instante em que o processo original acaba.

Definimos também o número total de vértices visitados por partículas originais durante todo o processo por:

$$V_\infty = V_\infty(\mathcal{G}) := \lim_{k \to \infty} V_k(\mathcal{G}) = V_{R(\mathcal{G})}(\mathcal{G}). \tag{2.6}$$

Veja que $V_\infty = V_R$ não é afetado pelas partículas extras injetadas no processo, já que elas são acionadas depois de R. As partículas extras são úteis apenas pelas facilidades matemáticas que trazem, como poder avaliar o número de partículas potencialmente ativas e vértices potencialmente visitados sem a necessidade de se preocupar se todas as partículas originais já morreram ou não.

É importante notar que V_∞ também descreve o número total de vértices visitados no modelo de sapos correspondente. Isto é, a dinâmica de que em cada rodada apenas uma partícula ativa pode se mover mantém o mesmo número final de vértices visitados do que a dinâmica de que em cada rodada todas as partículas ativas podem se mover ao mesmo tempo. Portanto, o estudo sobre o modelo de sapos será feito a partir de V_∞.

Embora o processo auxiliar possa ser definido para grafos genéricos, ele tem maior utilidade para estudo no grafo completo e suas variantes, pelo fato da distribuição de X_k poder ser determinada dado V'_{k-1}. Especificamente, vale que $S_k^x(K_n^o) \overset{i.i.d}{\sim} UD(\mathcal{V})$ e $S_k^x(K_n)|S_{k-1}^x(K_n) \sim UD(\mathcal{V}\setminus\{S_{k-1}^x(K_n)\})$ para $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{N}$, onde UD simboliza a distribuição uniforme discreta. Assim, temos que:

$$P(X_k(K_n^o) = x|V'_{k-1}(K_n^o) = v) = \begin{cases} 1-p, & se \;\; x = 0, \\ \frac{pv}{n}, & se \;\; x = 1, \\ \frac{p(n-v)}{n}, & se \;\; x = 2. \end{cases} \tag{2.7}$$

$$P(X_k(K_n) = x|V'_{k-1}(K_n) = v) = \begin{cases} 1-p, & se \;\; x = 0, \\ \frac{p(v-1)}{n-1}, & se \;\; x = 1, \\ \frac{p(n-v)}{n-1}, & se \;\; x = 2. \end{cases}$$

Capítulo 3

Resultados auxiliares

3.1 Enunciados dos resultados

Nessa seção, mostramos alguns resultados envolvendo o processo auxiliar especificamente para o grafo K_n^o. Portanto, durante toda a seção, estará implicito e omitido que $\mathcal{G} = K_n^o$.

Lema 1. *Para qualquer* $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \{0, 1, 2\}^k$*, vale:*

$$P(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}, ..., X_1 = x_1) = P(X_k = x_k | V'_{k-1} = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{I}(x_i = 2)).$$

Ou seja, em termos da distribuição de X_k, é equivalente simplesmente saber a quantidade de vértices potencialmente visitados no momento $k-1$, ou saber exatamente em quais momentos particulas morreram, sobreviveram e foram a vértices já visitados ou sobreviveram e foram a vértices não visitados.

Em particular, o Lema 1 nos diz que podemos trocar livremente e em qualquer quantidade o evento $(X_j = 0)$ por $(X_j = 1)$ e vice-versa na intersecção $\cap_{j=1}^{k-1}(X_j = x_j)$, sem que isso altere a distruibuição de $X_k | \cap_{j=1}^{k-1} (X_j = x_j)$. O corolário a seguir nos diz que o mesmo também vale quando consideramos a troca de $(X_j = 0)$ ou de $(X_j = 1)$ por $(X_j \in \{0, 1\})$ e vice-versa.

Corolário 1. *Fixe uma sequência qualquer* $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \{0, 1, 2\}^k$*. Seja uma sequência de conjuntos* $Y_1, Y_2, ..., Y_{k-1} \subset \{0, 1, 2\}$ *tal que para* $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$ *vale que* $x_i \in \{0, 1\} \iff Y_i \subset \{0, 1\}$, $Y_i \neq \emptyset$ *e também* $x_i = 2 \iff Y_i = \{2\}$*. Temos que*

$$P(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}, ..., X_1 = x_1) = P(X_k = x_k | X_{k-1} \in Y_{k-1}, ..., X_1 \in Y_1).$$

Em particular, a junção do Lema 1 com o Corolário 1 nos diz também que se $P(V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) > 0$, então $P(X_k = x_k | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) = P(X_k = x_k | V'_{k-1} = v_{k-1})$. Para isso, basta observar que a condicional $V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}$ equivale a dizer em quais índices i vale que $X_i = 2$ e em quais índices j vale que $X_j \in \{0, 1\}$.

Lema 2. *Para qualquer $k \geq 2$, vale que $X_1, X_2, ..., X_k$ são condicionalmente independentes dado $V'_1 = v_1, V'_2 = v_2, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}$. Ou seja, para qualquer sequência $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \{0, 1, 2\}^k$, vale*

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) \\ = \prod_{j=1}^{k} P(X_j = x_j | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Efetivamente, apenas o Lema 2 será utilizado diretamente na prova do Teorema 1. O motivo para o Teorema 1 ser provado primeiramente para K_n^o vem justamente do Lema 2 ser provado apenas para esse grafo (várias dificuldades técnicas aparecem ao se tentar provar o lema para K_n, já que nesse caso cada passo de uma partícula depende da sua posição anterior).

Abaixo, citamos também um resultado mais genérico de probabilidade envolvendo Cotas de Chernoff, que não está ligado ao processo auxiliar, mas que será útil posteriormente:

Lema 3 ([29], Teorema 4.5)**.** *Se X segue uma distribuição binomial, então:*

$$P(X \leq E(X) - t) \leq \exp(\frac{-t^2}{2E(X)}), \quad t > 0.$$

3.2 Notações auxiliares

Aqui denotaremos algumas notações que serão úteis para provar os resultados auxiliares discutidos na seção anterior.

Para $k \in \mathbb{N}$, uma sequência fixa qualquer $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \{0, 1, 2\}^k$ e $a \in \{1, ..., k\}$ denote os seguintes conjuntos de índices

$$I_a^{(0)} := \{i \in \{1, ..., a\} : x_i = 0\},$$

$$I_a^{(1)} := \{j \in \{1, ..., a\} : x_j = 1\},$$

$$I_a^{(2)} := \{l \in \{1, ..., a\} : x_l = 2\}.$$

Para simplificar a notação, está omitida a dependência de $I_a^{(0)}$, $I_a^{(1)}$ e $I_a^{(2)}$ em relação a sequência $(x_1, ..., x_k)$.

Note que para qualquer $a \in \{1, ..., k\}$, vale que $I_a^{(0)}, I_a^{(1)}$ e $I_a^{(2)}$ são uma partição de $\{1, ..., a\}$, isto é, $I_a^{(0)} \cap I_a^{(1)} = \emptyset$, $I_a^{(1)} \cap I_a^{(2)} = \emptyset$, $I_a^{(0)} \cap I_a^{(2)} = \emptyset$ e $I_a^{(0)} \cup I_a^{(1)} \cup I_a^{(2)} = \{1, ..., a\}$.

Para qualquer conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \subset \mathbb{N}$, denotamos os eventos

$$\{X_A = x\} = \{X_{a_1} = x \cap X_{a_2} = x \cap ... \cap X_{a_m} = x\}, \quad x = 0, 1, 2;$$

$$\{X_A \in B\} = \{X_{a_1} \in B \cap X_{a_2} \in B \cap ... \cap X_{a_m} \in B\}, \quad B \subset \{0, 1, 2\};$$

$$\{B_A = y\} = \{B_{a_1} = y \cap B_{a_2} = y \cap \dots \cap B_{a_m} = y\}, \quad y = 0, 1;$$
$$\{S_A \in \mathcal{V}'\} = \{S_{a_1} \in \mathcal{V}'_{a_1-1} \cap S_{a_2} \in \mathcal{V}'_{a_2-1} \cap \dots \cap S_{a_m} \in \mathcal{V}'_{a_m-1}\};$$
$$\{S_A \notin \mathcal{V}'\} = \{S_{a_1} \notin \mathcal{V}'_{a_1-1} \cap S_{a_2} \notin \mathcal{V}'_{a_2-1} \cap \dots \cap S_{a_m} \notin \mathcal{V}'_{a_m-1}\}.$$

De acordo com essa notação, temos:

$$(X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_k = x_k) = (X_{I_k^{(0)}} = 0) \cap (X_{I_k^{(1)}} = 1) \cap (X_{I_k^{(2)}} = 2).$$

3.3 Prova dos resultados auxiliares

Prova do Lema 1. Temos que

$$\begin{aligned}
P(X_k = 1 | X_{k-1} = & x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1) \\
& = P(X_k = 1 | X_{I_{k-1}^{(0)}} = 0, X_{I_{k-1}^{(1)}} = 1, X_{I_{k-1}^{(2)}} = 2) \\
& = P(B_k = 1, S_k \in \mathcal{V}'_{k-1} | B_{I_{k-1}^{(0)}} = 0, B_{(I_{k-1}^{(1)} \cup I_{k-1}^{(2)})} = 1, S_{I_{k-1}^{(1)}} \in \mathcal{V}', S_{I_{k-1}^{(2)}} \notin \mathcal{V}') \\
& = p.P(S_k \in \{1\} \dot\cup (\dot\cup_{j \in I_{k-1}^{(2)}} \{S_j\}) | B_{I_{k-1}^{(0)}} = 0, B_{(I_{k-1}^{(1)} \cup I_{k-1}^{(2)})} = 1, S_{I_{k-1}^{(1)}} \in \mathcal{V}', S_{I_{k-1}^{(2)}} \notin \mathcal{V}') \\
& \overset{(*)}{=} p(\frac{1 + |I_{k-1}^{(2)}|}{n}) \\
& = p(\frac{1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{I}(x_i = 2)}{n}),
\end{aligned}$$

onde $\dot\cup$ denota união disjunta.

Veja que S_k é independente de $B_1, \dots, B_k$ e de $S_1, \dots, S_{k-1}$, e apesar do mesmo não valer para o conjunto aleatório $\mathcal{V}'_{k-1} = \{1\} \dot\cup (\dot\cup_{j \in I_{k-1}^{(2)}} \{S_j\}) \subset \mathcal{V}$, temos que $|\mathcal{V}'_{k-1}| = 1 + |I_{k-1}^{(2)}|$. Como $S_k \sim UD(\mathcal{V})$, a probabilidade em (*) é determinada apenas pela cardinalidade desse conjunto, que não é dependente de $S_1, \dots, S_{k-1}$, apesar do próprio conjunto ser.

Por outro lado, vale

$$\begin{aligned}
P(X_k = 0 | X_{k-1} = & x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1) \\
& = P(B_k = 0 | B_{I_{k-1}^{(0)}} = 0, B_{(I_{k-1}^{(1)} \cup I_{k-1}^{(2)})} = 1, S_{I_{k-1}^{(1)}} \in \mathcal{V}', S_{I_{k-1}^{(2)}} \notin \mathcal{V}') \\
& = P(B_k = 0) \\
& = 1 - p.
\end{aligned}$$

Temos que $P(X_k = 2 | X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1) = \frac{p[n-1-\sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{I}(x_i=2)]}{n}$ pelos resultados anteriores e por $X_k \in \{0, 1, 2\}$.

O resultado segue da comparação direta dos resultados apresentados com (2.7).

□

Prova da Corolário 1. Note que para qualquer $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, Y_i só pode ser igual a $\{2\}$, $\{0\}$, $\{1\}$ ou $\{0, 1\}$. Denote y_i como o único elemento de Y_i quando $Y_i \neq \{0, 1\}$.

Considere $i_1, i_2, ..., i_q$ como os elementos do conjunto $\{i : Y_i = \{0,1\}\}$. Caso o conjunto acima seja vazio ($q = 0$), o Corolário 1 está provado automaticamente pelo Lema 1. Caso contrário, utilizando o Lema 1, temos que:

$$
\begin{aligned}
&P(X_k = x_k | X_{k-1} \in Y_{k-1}, ..., X_1 \in Y_1) \\
&\quad = \frac{P(X_k = x_k, X_{k-1} \in Y_{k-1}, ..., X_1 \in Y_1)}{P(X_{k-1} \in Y_{k-1}, ..., X_1 \in Y_1)} \\
&\quad = \frac{\sum_{y_{i_1}=0}^{1} \sum_{y_{i_2}=0}^{1} \dots \sum_{y_{i_q}=0}^{1} P(X_k = x_k, X_{k-1} = y_{k-1}, ..., X_1 = y_1)}{\sum_{y_{i_1}=0}^{1} \sum_{y_{i_2}=0}^{1} \dots \sum_{y_{i_q}=0}^{1} P(X_{k-1} = y_{k-1}, ..., X_1 = y_1)} \\
&\quad = \frac{\sum_{y_{i_1}=0}^{1} \dots \sum_{y_{i_q}=0}^{1} P(X_k = x_k | X_{k-1} = y_{k-1}, ..., X_1 = y_1) P(X_{k-1} = y_{k-1}, ..., X_1 = y_1)}{\sum_{y_{i_1}=0}^{1} \sum_{y_{i_2}=0}^{1} \dots \sum_{y_{i_q}=0}^{1} P(X_{k-1} = y_{k-1}, ..., X_1 = y_1)} \\
&\quad = P(X_k = x_k | V'_{k-1} = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{I}(Y_j = \{2\})).
\end{aligned}
$$

O Lema 1 foi utilizado na última igualdade.

Como $Y_j = \{2\} \iff x_j = 2$, podemos utilizar o Lema 1 para finalizar a prova. □

Prova do Lema 2. Começamos denotando $v_0 = 1$ (pois $V'_0 = 1$) e notando que se $\{m \in \{1, 2, ..., k-1\} : v_m = v_{m-1} + 1\} \neq I^{(2)}_{k-1}$, trivialmente a equação (3.1) vale pois os dois lados serão iguais a zero, já que $X_m = 2 \iff V'_m = V'_{m-1} + 1$.

Portanto, precisamos demonstrar apenas para os $(x_1, ..., x_{k-1})$ e $(v_1, ..., v_{k-1})$ tais que $\{m \in \{1, 2, ..., k-1\} : v_m = v_{m-1} + 1\} = I^{(2)}_{k-1}$. Assim, temos para qualquer $a \in \{1, ..., k-1\}$:

$$(X_{(I^{(0)}_a \cup I^{(1)}_a)} \in \{0,1\}) \cap (X_{I^{(2)}_a} = 2) = (V'_1 = v_1) \cap ... \cap (V'_a = v_a), \tag{3.2}$$

$$(X_{I^{(0)}_a} = 0) \cap (X_{I^{(1)}_a} = 1) \cap (X_{I^{(2)}_a} = 2) \subset (V'_1 = v_1) \cap ... \cap (V'_a = v_a). \tag{3.3}$$

Antes de prosseguirmos, relembramos um fato conhecido de probabilidade, que surge da aplicação da definição de probabilidade condicional consecutivas vezes.

Fato 1 (Regra do produto). *Se $G_1, G_2, ..., G_m$ são eventos quaisquer, então:*

$$P(\cap_{i=1}^m G_i) = \prod_{j=2}^{m} P(G_j | \cap_{i=1}^{j-1} G_i) P(G_1).$$

Então, aplicando a regra do produto junto com (3.2) e (3.3), temos que

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) \\
&\quad = \frac{P(X_{I_k^{(0)}} = 0, X_{I_k^{(1)}} = 1, X_{I_k^{(2)}} = 2)}{P(X_{I_{k-1}^{(2)}} = 2, X_{(I_{k-1}^{(0)} \cup I_{k-1}^{(1)})} \in \{0,1\})} \\
&\quad = \frac{\prod_{j=2}^{k} P(X_j = x_j | X_{j-1} = x_{j-1}, ..., X_1 = x_1)}{\prod_{i \in (I_{k-1}^{(2)} \setminus \{1\})} P(X_i = 2 | X_{I_{i-1}^{(2)}} = 2, X_{(I_{i-1}^{(0)} \cup I_{i-1}^{(1)})} \in \{0,1\})} \\
&\qquad * \frac{1}{\prod_{j \in ((I_{k-1}^{(0)} \cup I_{k-1}^{(1)}) \setminus \{1\})} P(X_j \in \{0,1\} | X_{I_{j-1}^{(2)}} = 2, X_{(I_{j-1}^{(0)} \cup I_{j-1}^{(1)})} \in \{0,1\})} \\
&\qquad * \frac{P(X_1 = x_1)}{[P(X_1 = 2)\mathbb{I}(1 \in I_{k-1}^{(2)}) + P(X_1 \in \{0,1\})\mathbb{I}(1 \in (I_{k-1}^{(0)} \cup I_{k-1}^{(1)}))]}.
\end{aligned}$$

Note que, por comparação termo a termo dos produtórios, a expressão acima se iguala a $\prod_{j=1}^{k} P(X_j = x_j | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1})$ se valem:

- (i) $P(X_k = x_k | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) = P(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}, ..., X_1 = x_1)$.
- (ii) Para $i \in (I_{k-1}^{(2)} \setminus \{1\})$:

$$P(X_i = x_i | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) = \frac{P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}, ..., X_1 = x_1)}{P(X_i = 2 | X_{I_{i-1}^{(2)}} = 2, X_{(I_{i-1}^{(0)} \cup I_{i-1}^{(1)})} \in \{0,1\})}.$$

- (iii) Para $j \in ((I_{k-1}^{(0)} \cup I_{k-1}^{(1)}) \setminus \{1\})$:

$$P(X_j = x_j | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) = \frac{P(X_j = x_j | X_{j-1} = x_{j-1}, ..., X_1 = x_1)}{P(X_j \in \{0,1\} | X_{I_{j-1}^{(2)}} = 2, X_{(I_{j-1}^{(0)} \cup I_{j-1}^{(1)})} \in \{0,1\})}.$$

- (iv)

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = x_1 | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) \\
&\quad = \frac{P(X_1 = x_1)}{P(X_1 = 2)\mathbb{I}(1 \in I_{k-1}^{(2)}) + P(X_1 \in \{0,1\})\mathbb{I}(1 \in (I_{k-1}^{(0)} \cup I_{k-1}^{(1)}))}.
\end{aligned}$$

Ou seja, a demonstração se finaliza ao mostrar (i), (ii), (iii) e (iv). Cada um dos quatro itens é demonstrado abaixo:

(i) Direto pelo Corolário 1 combinado com (3.2).

(ii) Para $i \in (I_{k-1}^{(2)} \setminus \{1\})$:

Por (3.2), trivialmente temos que $P(X_i = 2 | V'_1 = v_1, ..., V'_{k-1} = v_{k-1}) = 1$. Utilizando o Corolário 1, concluímos também que $\frac{P(X_i = 2 | X_{i-1} = x_{i-1}, ..., X_1 = x_1)}{P(X_i = 2 | X_{I_{i-1}^{(2)}} = 2, X_{(I_{i-1}^{(0)} \cup I_{i-1}^{(1)})} \in \{0,1\})} = 1$.

(iii) Para $j \in ((I_{k-1}^{(0)} \cup I_{k-1}^{(1)}) \setminus \{1\})$:

$$
\begin{aligned}
P(X_j = x_j | V_1' = v_1, ..., V_{k-1}' = v_{k-1}) &= P(X_j = x_j | X_{I^{(2)}_{k-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{k-1} \cup I^{(1)}_{k-1})} \in \{0,1\}) \\
&= \frac{P(X_{I^{(2)}_{k-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{k-1} \cup I^{(1)}_{k-1} \setminus \{j\})} \in \{0,1\}, X_j = x_j)}{P(X_{I^{(2)}_{k-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{k-1} \cup I^{(1)}_{k-1})} \in \{0,1\})} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{P(X_j = x_j | X_{I^{(2)}_{j-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{j-1} \cup I^{(1)}_{j-1})} \in \{0,1\})}{P(X_j \in \{0,1\} | X_{I^{(2)}_{j-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{j-1} \cup I^{(1)}_{j-1})} \in \{0,1\})} \\
&= \frac{P(X_j = x_j | X_{j-1} = x_{j-1}, ..., X_1 = x_1)}{P(X_j \in \{0,1\} | X_{I^{(2)}_{j-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{j-1} \cup I^{(1)}_{j-1})} \in \{0,1\})}.
\end{aligned}
$$

A última igualdade vem do Corolário 1.

A igualdade em (*) vem de usar a regra do produto e o fato de que, pelo Corolário 1, para qualquer $l > j$ vale:

$$
\begin{aligned}
&P(X_l = 2 | X_{I^{(2)}_{l-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{l-1} \cup I^{(1)}_{l-1})} \in \{0,1\}) \\
&\qquad = P(X_l = 2 | X_{I^{(2)}_{l-1}} = 2, X_{((I^{(0)}_{l-1} \cup I^{(1)}_{l-1}) \setminus \{j\})} \in \{0,1\}, X_j = x_j),
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
P(X_l \in \{0,1\} | X_{I^{(2)}_{l-1}} = {}& 2, X_{(I^{(0)}_{l-1} \cup I^{(1)}_{l-1})} \in \{0,1\}) \\
&= P(X_l = 0 | X_{I^{(2)}_{l-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{l-1} \cup I^{(1)}_{l-1})} \in \{0,1\}) \\
&\quad + P(X_l = 1 | X_{I^{(2)}_{l-1}} = 2, X_{(I^{(0)}_{l-1} \cup I^{(1)}_{l-1})} \in \{0,1\}) \\
&= P(X_l = 0 | X_{I^{(2)}_{l-1}} = 2, X_{((I^{(0)}_{l-1} \cup I^{(1)}_{l-1}) \setminus \{j\})} \in \{0,1\}, X_j = x_j) \\
&\quad + P(X_l = 1 | X_{I^{(2)}_{l-1}} = 2, X_{((I^{(0)}_{l-1} \cup I^{(1)}_{l-1}) \setminus \{j\})} \in \{0,1\}, X_j = x_j) \\
&= P(X_l \in \{0,1\} | X_{I^{(2)}_{l-1}} = 2, X_{((I^{(0)}_{l-1} \cup I^{(1)}_{l-1}) \setminus \{j\})} \in \{0,1\}, X_j = x_j).
\end{aligned}
$$

As igualdades acima simplificam os termos gerados pela regra do produto aplicada à direita de (*) em todos os índices $l > j$. Nos índices $l < j$, a simplicação acontece automaticamente pela regra do produto. Portanto, sobra apenas o termo em j.

(iv)

Se $1 \in I^{(2)}_{k-1}$:

Então, por (3.2), trivialmente $P(X_1 = 2 | V_1' = v_1, ..., V_{k-1}' = v_{k-1}) = 1$ e também $\frac{P(X_1=2)}{P(X_1=2)\mathbb{I}(1 \in I^{(2)}_{k-1}) + P(X_1 \in \{0,1\})\mathbb{I}(1 \in (I^{(0)}_{k-1} \cup I^{(1)}_{k-1}))} = 1$.

Se $1 \in (I^{(0)}_{k-1} \cup I^{(1)}_{k-1})$:

De maneira análoga ao que foi feito em (iii), podemos utilizar a regra do produto e o Corolário 1 para ver que $P(X_1 = x_1 | V_1' = v_1, ..., V_{k-1}' = v_{k-1}) = \frac{P(X_1 = x_1)}{P(X_1 \in \{0,1\})}$.

□

Capítulo 4

Prova do Teorema 1

4.1 Fase subcrítica

Como já dito anteriormente, a demonstração apresentada aqui para a parte (i) do Teorema 1 funciona para qualquer sequência de grafos $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ conectados. Estará implícito e omitido a presença do grafo $\mathcal{G}_n$ nas notações.

Demonstração do Teorema 1 (i). $p < 1/2$.

A ideia é criar um processo que se associe ao caso em que toda partícula que sobreviva necessariamente vai a um vértice novo e ativa uma nova partícula, de forma que esse processo domine o modelo original.

Defina variáveis aleatórias $X_1^+, X_2^+, \ldots$, tais que $X_j^+ = 2B_j$ para $j \in \mathbb{N}$. Ao comparar com a definição de X_j, temos

$$\begin{cases} X_j^+ = 0 \iff B_j = 0 \iff X_j = 0, \\ X_j^+ = 2 \iff B_j = 1 \iff (X_j = 1) \cup (X_j = 2). \end{cases} \tag{4.1}$$

Note que $X_1^+, X_2^+, \ldots$ são independentes e identicamente distribuídas, pois $B_1, B_2, \ldots$ também são. Considere X^+ como uma variável aleatória que possui a mesma distribuição comum de $X_1^+, X_2^+, \ldots$. Vale que

$$E(X^+) = 2P(B_1 = 1) = 2p < 1. \tag{4.2}$$

Criamos um processo de ramificação com distribuição de prole dada por X^+, também feito por rodadas de modo que se verifica o número de descendentes de apenas um indivíduo por rodada.

De maneira completamente análoga às definições (2.1), (2.3), (2.4), (2.2), (2.5) e (2.6) do processo auxiliar, denote o número de indivíduos potencialmente vivos ao final da k-ésima rodada do processo de ramificação por

$$A_k'^+ := 1 + \sum_{j=1}^{k} (X_j^+ - 1), \tag{4.3}$$

e o número de rodadas até a extinção dessa população por

$$R^+ := \inf\{k \in \mathbb{N} : A_k'^+ = 0\}. \tag{4.4}$$

A quantidade total de indivíduos desse processo de ramificação pode ser escrita como

$$V_\infty^+ := 1 + \sum_{j=1}^{R^+} \mathbb{I}(X_j^+ = 2).$$

Veja que (4.2) nos diz que o processo de ramificação com distribuição de prole X^+ se extingue, e portanto tem uma quantidade total finita de indivíduos, com probabilidade 1 (perceba que a probabilidade de extinção não é alterada se contarmos os descendentes de um indivíduo por vez a cada rodada). Como, por hipótese, $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$, vale que:

$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty^+ \le f(n)) = 1.$$

Por (4.1), temos que para qualquer $k \in \mathbb{N}$ vale que $X_k^+ \ge X_k$, implicando que $A_k'^+ \ge A_k'$ e portanto que $R^+ \ge R$. Por isso, temos também que $V_\infty^+ \ge V_\infty$. Logo, concluímos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty \le f(n)) = 1.$$

□

4.2 Fase supercrítica

4.2.1 Prova para K_n^o

Aqui, demonstramos o Teorema 1 (ii) na versão K_n^o, ou seja:

Proposição 1 (Adaptação do Teorema 1 (ii) para K_n^o)**.** *Se $p > 1/2$, então existem constantes $c > 0$ e $c' \in (0,1)$ tais que:*

$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n^o) \le c\log n) = \frac{1-p}{p},$$

$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n^o) \ge c' n) = \frac{2p-1}{p}.$$

Demonstração. $p > 1/2$.

Durante toda a demonstração, estará implícito e omitido a presença do grafo K_n^o nas notações. Além disso, consideramos $p \in (1/2, 1)$ pois o resultado é trivial para $p = 1$.

A demonstração será feita mostrando os 3 itens abaixo:

- (a) Para $k_- = 2\frac{4p}{(1+2p)[\frac{2p-1}{8p+4}]^2} \log n$ e $k_+ = (1 - \frac{2}{1+2p})n$, vale que $\lim_{n\to\infty} P(R \in [k_-, k_+]) = 0$.
- (b) $\lim_{n\to\infty} P(V_\infty \leq c \log n | R < k_-) = 1$ e $\lim_{n\to\infty} P(V_\infty \geq c' n | R > k_+) = 1$.
- (c) $\lim_{n\to\infty} P(R < k_-) = \frac{1-p}{p}$.

Note que a junção desses 3 itens finaliza a prova. Agora, cada um dos itens será demonstrado por vez:

(a)

Determine

$$k_- = k_-(n) := 2\frac{4p}{(1+2p)[\frac{2p-1}{8p+4}]^2} \log n;$$

$$k_+ = k_+(n) := (1 - \frac{2}{1+2p})n.$$

Veja que $0 < 1 - \frac{2}{1+2p} < 1$ para $p \in (1/2, 1)$.

Determine $\mathbb{V}_k := \{(v_1, v_2, ..., v_{k-1}) \in \mathbb{N}^{k-1} : P(V_1' = v_1, , ..., V_{k-1}' = v_{k-1}) > 0\}$.

Para $k \in \mathbb{N} \cap [k_-, k_+]$, podemos construir variáveis aleatórias $Y_1, ..., Y_k$ independentes e também condicionalmente independentes dado $V_1' = v_1, ..., V_{k-1}' = v_{k-1}$, $(v_1, ..., v_{k-1}) \in \mathbb{V}_k$, tais que para $j \in \{1, ..., k\}$:

$$P(Y_j = x) = \begin{cases} 1 - p, & se\ x = 0, \\ \frac{pk_+}{n}, & se\ x = 1, \\ \frac{p(n-k_+)}{n}, & se\ x = 2. \end{cases} \tag{4.5}$$

Para qualquer $j \in \{1, ..., k\}$ vale que $V_{j-1}' \leq j \leq k \leq k_+$. Portanto, comparando (4.5) com (2.7) mais o Lema 1 e Corolário 1, vemos que X_j é estocasticamente maior que Y_j com respeito à medida condicional $P(\cdot | V_1' = v_1, , ..., V_{k-1}' = v_{k-1})$, ou seja

$$P(X_j \leq x | V_1' = v_1, , ..., V_{k-1}' = v_{k-1})) \leq P(Y_j \leq x | V_1' = v_1, , ..., V_{k-1}' = v_{k-1})$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $(v_1, ..., v_{k-1}) \in \mathbb{V}_k$. Denotaremos esse fato por $X_j \overset{*}{\geq} Y_j$, onde $\geq$ é o símbolo usual de ordenação estocástica e o asterisco serve para enfatizar a medida condicional.

De acordo com [6, Teorema 2.2.9], se $X_1, ..., X_k$ e $Y_1, ..., Y_k$ são duas sequências de variáveis aleatórias independentes, vale que $X_j \geq Y_j \ \forall j \in \{1, ..., k\} \Rightarrow \sum_{j=1}^k X_j \geq \sum_{j=1}^k Y_j$. Apesar da condição de $X_1, ..., X_k$ serem independentes não valer nesse caso, o Lema 2 nos ajuda a utilizar o resultado citado acima para as distribuições condicionais e para ordenação estocástica condicional. Utilizando isso, temos que

$$
\begin{aligned}
&P(\sum_{j=1}^{k} X_j \leq x) \\
&\quad = \sum_{(v_1,\ldots,v_{k-1})\in\mathbb{V}_k} P(\sum_{j=1}^{k} X_j \leq x | V_1' = v_1, \ldots, V_{k-1}' = v_{k-1}) P(V_1' = v_1, \ldots, V_{k-1}' = v_{k-1}) \\
&\quad \leq \sum_{(v_1,\ldots,v_{k-1})\in\mathbb{V}_k} P(\sum_{j=1}^{k} Y_j \leq x | V_1' = v_1, \ldots, V_{k-1}' = v_{k-1}) P(V_1' = v_1, \ldots, V_{k-1}' = v_{k-1}) \\
&\quad = P(\sum_{j=1}^{k} Y_j \leq x).
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Ou seja, a ordenação estocástica não condicional $\sum_{j=1}^{k} X_j \geq \sum_{j=1}^{k} Y_j$ também vale.

Seja $a_k := (\frac{2p}{1+2p} - \frac{1}{2})k$. Note que $\frac{d(\frac{2p}{1+2p} - \frac{1}{2})}{dp} = \frac{2}{(1+2p)^2} > 0$ nos mostra que $\frac{2p}{1+2p} - \frac{1}{2}$ é crescente, além de contínua. Além disso vale que $p = 1/2 \implies \frac{2p}{1+2p} - \frac{1}{2} = 0$ e também que $p = 1 \implies \frac{2p}{1+2p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Concluímos então que $0 < a_k < k$ para $p \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Usando as Cotas de Chernoff para distribuição binomial do Lema 3, juntamente com o fato de que $\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 2) \sim Bin(k, \frac{p(n-k_+)}{n})$ e com (2.1), temos

$$
\begin{aligned}
&P(A_k' \leq a_k + 1) \\
&\quad = P(\sum_{j=1}^{k} X_j \leq k + a_k) \\
&\quad \leq P(\sum_{j=1}^{k} Y_j \leq k + a_k) \\
&\quad = P(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 1) + 2\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 2) \leq k + a_k) \\
&\quad \leq P(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 2) \leq \frac{k + a_k}{2}) \\
&\quad = P(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 2) \leq kp - \frac{pkk_+}{n} - k(p - \frac{1}{2}) + \frac{pkk_+}{n} + \frac{a_k}{2}) \\
&\quad = P(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 2) \leq E(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 2)) - k(p - \frac{1}{2}) + \frac{pkn(1 - \frac{2}{1+2p})}{n} + \frac{(\frac{2p}{1+2p} - \frac{1}{2})k}{2}) \\
&\quad = P(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 2) \leq E(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(Y_j = 2)) - k[\frac{2p-1}{8p+4}]) \\
&\quad \leq \exp(-\frac{k^2[\frac{2p-1}{8p+4}]^2}{2kp(1 - \frac{k_+}{n})})
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

$$\overset{(*)}{\leq} \exp(-\frac{k_-[\frac{2p-1}{8p+4}]^2(1+2p)}{4p})$$
$$= \exp(-2\log n) = o(n^{-1})^1.$$

Veja que as Cotas de Chernoff puderam ser aplicadas pois $\frac{2p-1}{8p+4} > 0$ para $p > 1/2$. A troca de k por k_- em (*) vem dos fatos de que $k_- \leq k$ e que $\exp(-x)$ é função decrescente.

Considere o evento $A := \cup_{k\in\mathbb{N}\cap[k_-,k_+]}(A'_k \leq a_k + 1)$ de que em algum instante $k \in \mathbb{N} \cup [k_-, k_+]$ há $a_k + 1$ ou menos partículas potencialmente ativas. Pela propriedade de subaditividade da medida de probabilidade e (4.7), temos:

$$P(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}\cap[k_-,k_+]} P(A'_k \leq a_k + 1) \leq k_+ o(n^{-1}) = o(1).$$

Então com alta probabilidade[2], ocorre $A^c = \cap_{k\in\mathbb{N}\cap[k_-,k_+]}(A'_k > a_k + 1)$.

Como $R := \inf\{k : A'_k = 0\}$, então $\lim_{n\to\infty} P(R \in [k_-, k_+]) = 0$.

(b)

Diretamente pela definição de R, sabemos que pelo menos para um $j \in \{1, 2, .., R\}$, vale que $X_j = 0$. Portanto, quando $R < k_-$, temos por (2.3), (2.4) e (2.6) que $V_\infty = V_R = V'_R = 1 + \sum_{j=1}^{R} \mathbb{I}(X_j = 2) \leq 1 + R - 1 < k_-$.

Concluímos então que
$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty \leq k_- | R < k_-) = 1.$$

Por outro lado, para $\lfloor k_+ \rfloor = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \leq k_+\}$, temos que a probabilidade de se ter $\frac{k_+ + a_{k_+}}{2} = n(\frac{12p^2-4p-1}{4(1+2p)^2})$ ou menos vértices potencialmente visitados é igual a:

$$\begin{aligned} P(V'_{\lfloor k_+ \rfloor} \leq \frac{k_+ + a_{k_+}}{2}) &= P(\sum_{k=1}^{\lfloor k_+ \rfloor} \mathbb{I}(X_k = 2) + 1 \leq \frac{k_+ + a_{k_+}}{2}) \\ &= P(\sum_{k=1}^{\lfloor k_+ \rfloor} \mathbb{I}(X_k = 2) \leq \frac{(k_+ - 1) + (a_{k_+} - 1)}{2}) \\ &\overset{(*)}{\leq} P(\sum_{k=1}^{\lfloor k_+ \rfloor} \mathbb{I}(X_k = 2) \leq \frac{\lfloor k_+ \rfloor + a_{\lfloor k_+ \rfloor}}{2}) \\ &\leq P(\sum_{k=1}^{\lfloor k_+ \rfloor} \mathbb{I}(Y_k = 2) \leq \frac{\lfloor k_+ \rfloor + a_{\lfloor k_+ \rfloor}}{2}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

[1] Para duas sequências de funções $f_1, f_2, ...$ e $g_1, g_2, ...$, dizemos que $f_n = o(g_n)$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = 0$.

[2] Para uma sequência de eventos $A_1, A_2, ...$, dizemos que A_n ocorre com alta probabilidade se $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$.

A desigualdade (*) vale pois $\lfloor k_+ \rfloor \geq k_+ - 1$. Além disso, $a_k = ck$, para uma constante $c \in (0,1)$, portanto vale que $a_{\lfloor k_+ \rfloor} = c\lfloor k_+ \rfloor \geq c(k_+ - 1) = a_{k_+} - c \geq a_{k_+} - 1$.

A última expressão em (4.8) é $o(n^{-1})$ (ou simplesmente $o(1)$, que já é suficiente nesse caso), percebendo que $\lfloor k_+ \rfloor \in \mathbb{N} \cap [k_-, k_+]$ e vendo que o termo em questão aparece em uma das desigualdades de (4.7).

Portanto, vale que

$$P(V'_{\lfloor k_+ \rfloor} \leq \frac{k_+ + a_{k_+}}{2} | R > k_+)P(R > k_+) + P(V'_{\lfloor k_+ \rfloor} \leq \frac{k_+ + a_{k_+}}{2} | R \leq k_+)P(R \leq k_+) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então, se $\lim_{n\to\infty} P(R > k_+) > 0$ (afirmação que será mostrada na parte c), vale que $\lim_{n\to\infty} P(V'_{\lfloor k_+ \rfloor} > \frac{k_+ + a_{k_+}}{2} | R > k_+) = 1$. Além disso, por (2.3), (2.4) e (2.6) quando $R > k_+ \geq \lfloor k_+ \rfloor$, vale que $V_\infty = V_R \geq V_{\lfloor k_+ \rfloor} = V'_{\lfloor k_+ \rfloor}$.

Concluimos então que

$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty \geq \frac{k_+ + a_{k_+}}{2} | R > k_+) = 1.$$

Relembre que $k_+ = c_1 n$ para uma constante $c_1 \in (0,1)$ e que $a_{k_+} = c_2 k_+ = c_1 c_2 n$ para uma constante $c_2 \in (0,1)$, logo $\frac{k_+ + a_{k_+}}{2} = c' n$ para um valor $c' \in (0,1)$, concluindo assim a demonstração da parte (b).

(c)

Retomemos a variável aleatória X^+ apresentada em §4.1:

$$P(X^+ = x) = \begin{cases} 1 - p, & se \ x = 0, \\ p, & se \ x = 2. \end{cases} \tag{4.9}$$

Consideramos novamente um processo de ramificação com distribuição de prole dada por X^+ onde o número de descendentes de apenas um indivíduo é avaliado a cada rodada e retomamos as definições (4.3), (4.4), reescritas abaixo:

$$A'^+_k := 1 + \sum_{j=1}^{k} (X_j^+ - 1)$$

representando o número de partículas potencialmente ativas desse processo de ramificação ao final da rodada k e

$$R^+ := \inf\{k \in \mathbb{N} : A'^+_k = 0\}$$

representando o instante onde o processo de ramificação acaba. Note que agora é necessária a definição de $R^+ := +\infty$ se $\{k \in \mathbb{N} : A'^+_k = 0\} = \emptyset$, já que no caso $p > 1/2$ pode acontecer com probabilidade positiva do processo nunca acabar. Além disso, definimos

$$A^+_k := A'^+_k \mathbb{I}(k < R^+) \tag{4.10}$$

representando o número de partículas efetivamente ativas desse processo de ramificação ao final da rodada k.

Definimos o evento em que o processo de ramificação com distribuição de prole X^+ se extingue, porém após a rodada k_- por

$$B_{k_-}^+ := \{k_- < R^+ < +\infty\}.$$

Definimos mais um processo de ramificação, com o mesmo esquema de rodadas, com distribuição de prole X^-, em que:

$$P(X^- = x) = \begin{cases} 1-p, & se\ x = 0, \\ \frac{pk_-}{n}, & se\ x = 1, \\ \frac{p(n-k_-)}{n}, & se\ x = 2. \end{cases} \tag{4.11}$$

Analogamente, considere que $X_1^-, X_2^-, \ldots$ são váriaveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com a mesma distribuição de X^- e defina

$$A_k'^- := 1 + \sum_{j=1}^{k}(X_j^- - 1)$$

como o número de indivíduos potencialmente vivos ao final da k-ésima rodada. Defina também

$$R^- := \inf\{k \in \mathbb{N} : A_k'^- = 0\}$$

como o instante em que o processo de ramificação com prole dada por X^- acaba, também considerando que $R^- := +\infty$ se $\{k \in \mathbb{N} : A_k'^- = 0\} = \emptyset$.

Considere que os dois processos de ramificação citados acima são independentes de $V_1', V_2', \ldots$. Considere também que tanto $X_1^+, X_2^+, \ldots$ quanto $X_1^-, X_2^-, \ldots$ são condicionalmente independentes dado $V_1', V_2', \ldots$.

Temos que $k \le k_- \implies V_{k-1}' = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{I}(X_j = 2) \le k_-$. Portanto, comparando (4.9) e (4.11) com (2.7) mais o Lema 1 e Corolário 1, vemos que $X_k^- \overset{*}{\preceq} X_k \overset{*}{\preceq} X_k^+$ para $k \in \mathbb{N} \cap [1, k_-]$. Utilizando a independência condicional junto com a ordenação estocástica condicional, assim como feito em (4.6), chegamos que $\sum_{j=1}^{k} X_j^- \le \sum_{j=1}^{k} X_j \le \sum_{j=1}^{k} X_j^+$ e portanto que $A_k'^- \le A_k' \le A_k'^+$ para todo $k \in \mathbb{N} \cap [1, k_-]$. Então podemos acoplar os três processos de modo que $R^+ \le k_- \implies R \le k_-$ e também $R \le k_- \implies R^- \le k_-$. Assim vale que:

$$P(R^+ < \infty) - P(B_{k_-}^+) = P(R^+ \le k_-) \le P(R \le k_-) \le P(R^- \le k_-) \le P(R^- < \infty). \tag{4.12}$$

Por propriedades de processos de ramificação, $P(R^+ < \infty)$ é a menor solução positiva de:

$$P(R^+ < \infty) = 1 - p + P(R^+ < \infty)^2 p.$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima chegamos em

$$P(R^+ < \infty) = \frac{1-p}{p}.$$

Vale também que $P(R^- < \infty)$ é a menor solução positiva de

$$P(R^- < \infty) = 1 - p + P(R^- < \infty)\frac{pk_-}{n} + P(R^- < \infty)^2\frac{p(n-k_-)}{n}.$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima chegamos em

$$P(R^- < \infty) = \frac{n(1-p)}{pn - pk_-} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1-p}{p}.$$

Denotamos $\lceil k_- \rceil = \min\{x \in \mathbb{Z} \,:\, x \geq k_-\}$. Vale, por (4.7), que $\lim_{n\to\infty} P(A'_{\lceil k_- \rceil} > a_{\lceil k_- \rceil}+1) = 1$ e portanto $\lim_{n\to\infty} P(A'^+_{\lceil k_- \rceil} > a_{\lceil k_- \rceil} + 1) = 1$. Então, se $\lim_{n\to\infty} P(R^+ > k_-) > 0$ (*), temos que $\lim_{n\to\infty} P(A'^+_{\lceil k_- \rceil} > a_{\lceil k_- \rceil} + 1 | R^+ > k_-) = 1$. Além disso, quando $R^+ > k_-$, vale que $R^+ \geq \lceil k_- \rceil$ e por (4.10), temos que $A^+_{\lceil k_- \rceil} = A'^+_{\lceil k_- \rceil}$. Assim concluímos que:

$$\begin{aligned}
P(B^+_{k_-}) &= P(R^+ > k_-, R^+ < \infty) \\
&= P(R^+ > k_-, R^+ < \infty, A^+_{\lceil k_- \rceil} > a_{\lceil k_- \rceil} + 1) + P(R^+ > k_-, R^+ < \infty, A^+_{\lceil k_- \rceil} \leq a_{\lceil k_- \rceil} + 1) \\
&\leq \frac{P(R^+ > k_-, R^+ < \infty, A^+_{\lceil k_- \rceil} > a_{\lceil k_- \rceil} + 1)}{P(R^+ > k_-, A^+_{\lceil k_- \rceil} > a_{\lceil k_- \rceil} + 1)} + \frac{P(R^+ > k_-, A^+_{\lceil k_- \rceil} \leq a_{\lceil k_- \rceil} + 1)}{P(R^+ > k_-)} \\
&= P(R^+ < \infty, | R^+ > k_-, A^+_{\lceil k_- \rceil} > a_{\lceil k_- \rceil} + 1) + P(A^+_{\lceil k_- \rceil} \leq a_{\lceil k_- \rceil} + 1 | R^+ > k_-) \\
&\leq (\frac{1-p}{p})^{a_{\lceil k_- \rceil}+1} + P(A^+_{\lceil k_- \rceil} \leq a_{\lceil k_- \rceil} + 1 | R^+ > k_-) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade se dá pela probabilidade de extinção de pelo menos $a_{\lceil k_- \rceil} + 1$ processos de ramificação independentes, cada qual com probabilidade de extinção $\frac{1-p}{p}$.

Veja que a condição (*) é verdadeira pelo fato de $E(X^+) > 1$.

Aplicando em (4.12) todos os limites encontrados, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} P(R < k_-) = \frac{1-p}{p}.$$

□

4.2.2 Extensão para K_n

Aqui será demonstrada a parte (ii) do Teorema 1.

Demonstração. A prova será divida nas partes (a), (b) e (c).

- (a) Para $n \in \{2, 3, ...\}$, descrever um acoplamento entre modelo de sapos em K_n e em K_n^o.
- (b) Mostrar que para o acoplamento em (a), valem as propriedades:
  - (b.1) $V_k'(K_n^o) \leq V_k'(K_n) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$,
  - (b.2) $V_\infty(K_n^o) \leq V_\infty(K_n)$,
  - (b.3) $P[\cap_{j=1}^k (V_j'(K_n^o) = V_j'(K_n))] \geq (1 - \frac{p}{n})^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
- (c) Com a ajuda desse acoplamento, mostrar que existem constantes $c > 0$ e $c' \in (0, 1)$ tal que:
  - $\lim_{n \to \infty} P(V_\infty(K_n) \leq c \log n) = \frac{1-p}{p}$,
  - $\lim_{n \to \infty} P(V_\infty(K_n) \geq c'n) = \frac{2p-1}{p}$.

(a) Fixe $n \in \{2, 3, ...\}$. Como estamos considerando que $B_k(K_n^o) \overset{i.i.d}{\sim} Ber(p)$ e também $B_k(K_n) \overset{i.i.d}{\sim} Ber(p)$, podemos acoplar os processos de forma que $B_k(K_n^o) = B_k(K_n), \ \ k \geq 1$ (ou seja, a partícula da rodada k sobrevive nos dois processos ou morre em ambos). Além do acoplamento nas vidas das partículas, a seguir também serão acoplados os passeios aleatórios:

Considere que $S_k(K_n^o)$ e $S_k(K_n)$ sejam independentes caso $B_k(K_n^o) = B_k(K_n) = 0$ ou $V_{k-1}'(K_n^o) \neq V_{k-1}'(K_n)$. Por outro lado, caso $B_k(K_n^o) = B_k(K_n) = 1$ e $V_{k-1}'(K_n^o) = V_{k-1}'(K_n)$, o acoplamento entre $S_k(K_n^o)$ e $S_k(K_n)$ é como descrito abaixo:

Denote $S_k(K_n) = S_s^w(K_n)$ para algum passo s de alguma partícula w, assim como $S_k(K_n^o) = S_{s^o}^{w^o}(K_n^o)$. Como $|\mathcal{V}_{k-1}'(K_n^o)| = V_{k-1}'(K_n^o) = V_{k-1}'(K_n) = |\mathcal{V}_{k-1}'(K_n)|$ e pela descrição do processo vale que $S_{s-1}^w(K_n) \in \mathcal{V}_{k-1}'(K_n)$ e $S_{s^o-1}^{w^o}(K_n^o) \in \mathcal{V}_{k-1}'(K_n^o)$, podemos definir uma função $g_k : \{1, ..., n\} \setminus \{S_{s^o-1}^{w^o}(K_n^o)\} \longrightarrow \{1, ..., n\} \setminus \{S_{s-1}^w(K_n)\}$ bijetora, tal que $x \in \mathcal{V}_{k-1}'(K_n^o) \setminus \{S_{s^o-1}^{w^o}(K_n^o)\} \iff g_k(x) \in \mathcal{V}_{k-1}'(K_n) \setminus \{S_{s-1}^w(K_n)\}$. O acoplamento nos passeios aleatórios será feito de acordo com o que foi realizado pela partícula w^o no seu passo s^o no grafo K_n^o:

- Caso a partícula não faça um loop ($S_{s^o-1}^{w^o}(K_n^o) \neq S_{s^o}^{w^o}(K_n^o)$):
  Faremos com que $S_s^w(K_n) = g_k(S_{s^o}^{w^o}(K_n^o))$.
- Caso a partícula faça o loop ($S_{s^o-1}^{w^o}(K_n^o) = S_{s^o}^{w^o}(K_n^o)$):
  Simplesmente escolhemos $S_s^w(K_n)$ de acordo com sua distribuição condicional $S_s^w(K_n) | S_{s-1}^w(K_n) \sim UD(\{1, ..., n\} \setminus \{S_{s-1}^w(K_n)\})$.

Veja que o acoplamento anterior é possível pois ele mantém as distribuições $S_s^w(K_n) | S_{s-1}^w(K_n) \sim UD(\{1, ..., n\} \setminus \{S_{s-1}^w(K_n)\})$ e $S_{s^o}^{w^o}(K_n^o) \sim UD(\{1, 2, ..., n\})$.

(b.1)

Primeiramente, sabemos que $V_0'(K_n^o) = 1 \leq 1 = V_0'(K_n)$. Basta mostrar que para esse acoplamento, teremos $V_k'(K_n^o) \leq V_k'(K_n)$, partindo da suposição que $V_{k-1}'(K_n^o) \leq V_{k-1}'(K_n)$, $k \in \mathbb{N}$.

Simplesmente reescrevendo (2.3), temos que:

$$V'_k(\mathcal{G}) = V'_{k-1}(\mathcal{G}) + \mathbb{I}(X_k(\mathcal{G}) = 2). \tag{4.13}$$

Pelo acoplamento nas vidas das partículas, no passo k pode ocorrer apenas que $B_k(K_n^o) = B_k(K_n) = 0$ ou $B_k(K_n^o) = B_k(K_n) = 1$. Trivialmente, no primeiro caso temos que $X_k(K_n^o) = X_k(K_n) = 0$ e por (4.13), junto com a suposição da indução, vale que $V'_k(K_n^o) = V'_{k-1}(K_n^o) \leq V'_{k-1}(K_n) = V'_k(K_n)$. Para o segundo caso, temos mais três opções:

- $V'_{k-1}(K_n^o) < V'_{k-1}(K_n)$ (ou equivalentemente, $V'_{k-1}(K_n^o) + 1 \leq V'_{k-1}(K_n)$):

  Por (4.13), sabemos que $V'_k(K_n^o) \leq 1 + V'_{k-1}(K_n^o)$ e por outro lado $V'_{k-1}(K_n) \leq V'_k(K_n)$. Portanto $V'_k(K_n^o) \leq V'_k(K_n)$.

- $V'_{k-1}(K_n^o) = V'_{k-1}(K_n)$ e $S_{s^o-1}^{w^o}(K_n^o) \neq S_{s^o}^{w^o}(K_n^o)$:

  Pela descrição do acoplamento e da função g_k, temos que $S_{s^o}^{w^o}(K_n^o) \in \mathcal{V}'_{k-1}(K_n^o) \iff S_s^w(K_n) = g_k(S_{s^o}^{w^o}(K_n^o)) \in \mathcal{V}'_{k-1}(K_n)$. Então $\mathbb{I}(X_k(K_n^o) = 2) = \mathbb{I}(X_k(K_n) = 2)$ e por (4.13) concluímos que $V'_k(K_n^o) = V'_k(K_n)$.

- $V'_{k-1}(K_n^o) = V'_{k-1}(K_n)$ e $S_{s^o-1}^{w^o}(K_n^o) = S_{s^o}^{w^o}(K_n^o)$:

  A realização do looping, junto com o fato que $B_k(K_n^o) = 1$, faz com que $X_k(K_n^o) = 1$. Então, por (4.13), vale que $V'_k(K_n^o) = V'_{k-1}(K_n^o) = V'_{k-1}(K_n) \leq V'_k(K_n)$.

A indução conclui a demonstração de (b.1).

(b.2)

Note que podemos reescrever (2.1) como

$$A'_k(\mathcal{G}) = V'_k(\mathcal{G}) - \sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}(B_j(\mathcal{G}) = 0), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Então, pelo acoplamento nas vidas das partículas e por (b.1), temos que $A'_k(K_n^o) \leq A'_k(K_n)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e consequentemente teremos $R(K_n^o) = \inf\{k : A'_k(K_n^o) = 0\} \leq \inf\{k : A'_k(K_n) = 0\} = R(K_n)$. Portanto, por (b.1), (4.13), (2.4) e (2.6), temos que $V_\infty(K_n^o) = V_{R(K_n^o)}(K_n^o) = V'_{R(K_n^o)}(K_n^o) \leq V'_{R(K_n)}(K_n^o) \leq V'_{R(K_n)}(K_n) = V_\infty(K_n)$.

(b.3)

Note que no acoplamento considerado acima, temos que a cada rodada a probabilidade da partícula em K_n^o sobreviver e realizar um looping é $\frac{p}{n}$, independente das outras rodadas. Além disso, sempre que não houver partícula que sobreviva e realize um looping nas rodadas $1, 2, ..., k$, teremos que $V'_1(K_n^o) = V'_1(K_n), ..., V'_k(K_n^o) = V'_k(K_n^o)$. Portanto, vale que

$$P[\cap_{j=1}^{k}(V'_j(K_n^o) = V'_j(K_n))] \geq (1 - \frac{p}{n})^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(c)

Como para qualquer $n \in \{2, 3, ...\}$, é possível encontrar um acoplamento tal que $V_\infty(K_n^o) \leq V_\infty(K_n)$, concluímos que $V_\infty(K_n^o) \leq V_\infty(K_n)$ para todo $n \in \{2, 3, ...\}$. Juntando esse fato com o resultado da Proposição 1, temos, para as mesmas constantes $c > 0$ e $c' \in (0,1)$ consideradas na proposição:

$$\limsup_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n) \le c\log n) \le \limsup_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n^o) \le c\log n) = \frac{1-p}{p}, \tag{4.15}$$

$$\liminf_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n) \ge c'n) \ge \liminf_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n^o) \ge c'n) = \frac{2p-1}{p}, \tag{4.16}$$

onde para qualquer sequência numérica $x_1, x_2, ...$, se denotam $\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}(\inf_{m\ge n} x_m)$ e $\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}(\sup_{m\ge n} x_m)$. Vale que os limites inferior e superior sempre existem (diferentemente do limite usual) e $\liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n$. Além disso, vale que $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$ se e somente se o $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe, sendo este igual aos limites inferior e superior.

Pela parte (c) da demonstração da Proposição 1, sabemos que tomando $k_- = k_-(n) := 2\frac{4p}{(1+2p)[\frac{2p-1}{8p+4}]^2}\log n$, vale que $\lim_{n\to\infty} P(R(K_n^o) < k_-) = \frac{1-p}{p}$. Além disso, pela propriedade (b.3) do acoplamento, vale que

$$\lim_{n\to\infty} P[\cap_{j=1}^{\lfloor k_- \rfloor}(V_j'(K_n^o) = V_j'(K_n))] = 1.$$

Também teremos que $\lim_{n\to\infty} P[\cap_{j=1}^{\lfloor k_- \rfloor}(V_j'(K_n^o) = V_j'(K_n))|R(K_n^o) < k_-] = 1$, pois $\lim_{n\to\infty} P(R(K_n^o) < k_-) = \frac{1-p}{p} > 0$. Por conta de (4.14) e do acoplamento nas vidas das partículas, vale que $\{\cap_{j=1}^{\lfloor k_- \rfloor}(V_j'(K_n^o) = V_j'(K_n))\} = \{\cap_{j=1}^{\lfloor k_- \rfloor}(A_j'(K_n^o) = A_j'(K_n))\}$. Além disso, condicionado em $R(K_n^o) < k_-$, também temos $\{\cap_{j=1}^{\lfloor k_- \rfloor}(A_j'(K_n^o) = A_j'(K_n))\} \subset \{R(K_n^o) = R(K_n)\}$ e portanto $\{\cap_{j=1}^{\lfloor k_- \rfloor}(V_j'(K_n^o) = V_j'(K_n))\} \subset \{V_\infty(K_n^o) = V'_{R(K_n^o)}(K_n^o) = V'_{R(K_n)}(K_n^o) = V'_{R(K_n)}(K_n) = V_\infty(K_n)\}$. Vale que

$$\lim_{n\to\infty} P[V_\infty(K_n^o) = V_\infty(K_n)|R(K_n^o) < k_-] = 1.$$

Além disso, pela parte (b) da demonstraçao da Proposição 1, sabemos que para a mesma constante c da proposição vale

$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n^o) \le c\log n|R(K_n^o) < k_-) = 1.$$

Como $\{(V_\infty(K_n^o) = V_\infty(K_n)) \cap (V_\infty(K_n^o) \le c\log n)\} \subset \{V_\infty(K_n) \le c\log n\}$, podemos juntar as duas equações acima, obtendo

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n) \le c\log n | R(K_n^o) < k_-) \\
&\ge \liminf_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n^o) = V_\infty(K_n), V_\infty(K_n^o) \le c\log n | R(K_n^o) < k_-) \\
&= \liminf_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n^o) = V_\infty(K_n) | R(K_n^o) < k_-) \\
&\quad + \liminf_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n^o) \le c\log n | R(K_n^o) < k_-) \\
&\quad - \liminf_{n\to\infty} P[(V_\infty(K_n^o) = V_\infty(K_n)) \cup (V_\infty(K_n^o) \le c\log n | R(K_n^o) < k_-)] \\
&= 2 - \liminf_{n\to\infty} P[(V_\infty(K_n^o) = V_\infty(K_n)) \cup (V_\infty(K_n^o) \le c\log n | R(K_n^o) < k_-)] \\
&\ge 1
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n) \le c\log n) \ge \liminf_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n) \le c\log n | R(K_n^o) < k_-) * \\
\liminf_{n\to\infty} P(R(K_n^o) < k_-) \\
= 1 * \frac{1-p}{p}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Juntando as desigualdades (4.15) e (4.17), concluímos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n) \le c\log n) = \frac{1-p}{p}.$$

Concluímos que $\limsup_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n) \ge c'n) \le 1 - \frac{1-p}{p} = \frac{2p-1}{p}$. Combinado com a equação (4.16), temos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(V_\infty(K_n) \ge c'n) = \frac{2p-1}{p}.$$

Isso conclui a demonstração.

□

Bibliografia

[1] O. S. M. Alves, F. P. Machado e S. Popov. "Phase Transition for the Frog Model". Em: *Electronic Journal of Probability* 7.16 (2002), pp. 1–21 (ver p. 2).

[2] O. S. M. Alves, F. P. Machado e S. Popov. "The shape theorem for the frog model". Em: *Annals of Applied Probability* 12.2 (2002), pp. 533–546 (ver p. 1).

[3] O. S. M. Alves et al. "Random walks systems on complete graphs". Em: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (N.S.)* 37.4 (2006), pp. 571–580 (ver p. 2).

[4] O. S. M. Alves et al. "The shape theorem for the frog model with random initial configuration". Em: *Markov Processes and Related Fields* 7.4 (2001), pp. 525–539 (ver p. 1).

[5] E. Beckman et al. "The frog model on trees with drift". Em: *Electronic Communications in Probability* 24.26 (2019), pp. 1–10 (ver p. 1).

[6] F. Belzunce, J. Mulero e C. M. Riquelme. *An Introduction to Stochastic Orders*. Academic Press, 2016 (ver p. 17).

[7] I. Benjamini et al. "On an epidemic model on finite graphs". Em: *The Annals of Applied Probability* 30.1 (2020), pp. 208–258 (ver p. 2).

[8] M. Deijfen e S. Rosengren. "The initial set in the frog model is irrelevant". Em: *Electronic Communications in Probability* 25.50 (2020), pp. 1–7 (ver p. 1).

[9] C. Döbler e L. Pfeifroth. "Recurrence for the frog model with drift on $\mathbb{Z}^d$". Em: *Electronic Communications in Probability* 19.79 (2014), pp. 1–13 (ver p. 1).

[10] C. Döbler et al. "Recurrence and transience of frogs with drift on $\mathbb{Z}^d$". Em: *Electronic Journal of Probability* 23.88 (2018), pp. 1–23 (ver p. 1).

[11] L. R. Fontes, F. P. Machado e A. Sarkar. "The critical probability for the frog model is not a monotonic function of the graph". Em: *Journal of Applied Probability* 41.1 (2004), pp. 292–298 (ver p. 2).

[12] N. Gantert e P. Schmidt. "Recurrence for the frog model with drift on $\mathbb{Z}$". Em: *Markov Processes and Related Fields* 15.1 (2009), pp. 51–58 (ver p. 1).

[13] A. Ghosh, S. Noren e A. Roitershtein. "On the range of the transient frog model on $\mathbb{Z}$". Em: *Advances in Applied Probability* 49.2 (2017), pp. 327–343 (ver p. 1).

[14] G. R. Grimmett. *Probability on Graphs: Random Processes on Graphs and Lattices*. 2ª ed. Cambridge University Press, 2018 (ver p. 3).

[15] G. R. Grimmett e D. R. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. 3ª ed. Oxford University Press, 2001 (ver p. 3).

[16] J. Hermon. "Frogs on trees?" Em: *Electronic Journal of Probability* 23.17 (2018), pp. 1–40 (ver pp. 1, 2).

[17] T. Höfelsauer e F. Weidner. "The speed of frogs with drift on $\mathbb{Z}$". Em: *Markov Processes and Related Fields* 22.2 (2016), pp. 379–392 (ver p. 1).

[18] C. Hoffman, T. Johnson e M. Junge. “Cover time for the frog model on trees”. Em: *Forum of Mathematics, Sigma* 7.e41 (2019), pp. 1–49 (ver p. 1).

[19] C. Hoffman, T. Johnson e M. Junge. “From transience to recurrence with Poisson tree frogs”. Em: *The Annals of Applied Probability* 26.3 (2016), pp. 1620–1635 (ver p. 1).

[20] C. Hoffman, T. Johnson e M. Junge. “Infection spread for the frog model on trees”. Em: *Electronic Journal of Probability* 24.112 (2019), pp. 1–29 (ver p. 1).

[21] C. Hoffman, T. Johnson e M. Junge. “Recurrence and transience for the frog model on trees”. Em: *The Annals of Probability* 45.5 (2017), pp. 2826–2854 (ver p. 1).

[22] T. Johnson e M. Junge. “The critical density for the frog model is the degree of the tree”. Em: *Eletronic Communications in Probability* 21.82 (2016), pp. 1–12 (ver p. 1).

[23] T. Johnson e L. T. Rolla. “Sensitivity of the frog model to initial conditions”. Em: *Electronic Communications in Probability* 24.29 (2019), pp. 1–9 (ver p. 1).

[24] E. Kosygina e M. P. W. Zerner. “A zero-one law for recurrence and transience of frog processes”. Em: *Probability Theory and Related Fields* 168.1-2 (2017), pp. 317–346 (ver p. 1).

[25] E. Lebensztayn e M. A. Estrada. “Laws of large numbers for the frog model on the complete graph”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 60 (2019), p. 123302 (ver p. 2).

[26] E. Lebensztayn e J. Utria. “A new upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees”. Em: *Journal of Statistical Physics* 176 (2019), pp. 169–179 (ver p. 2).

[27] E. Lebensztayn e J. Utria. “Phase transition for the frog model on biregular trees”. Em: *Markov Processes And Related Fields* 26.3 (2020), pp. 447–466 (ver p. 2).

[28] F. Machado, H. Mashurian e H. Matzinger. “CLT for the proportion of infected individuals for an epidemic model on a complete graph”. Em: *Markov Processes and Related Fields* 17.2 (2011), pp. 209–224 (ver p. 2).

[29] M. Mitzenmacher e E. Upfal. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, 2005 (ver p. 10).

[30] S. Popov. “Frogs in Random Environment”. Em: *Journal of Statistical Physics* 102.1 (2001), pp. 191–201 (ver p. 1).

[31] A. Ramírez e V. Sidoravicius. “Asymptotic behavior of a stochastic combustion growth process”. Em: *Journal of the European Mathematical Society* 6.3 (2004), pp. 1–42 (ver p. 1).

[32] J. Rosenberg. “Recurrence of the frog model on the 3,2-alternating tree”. Em: *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics* 15.2 (2018), pp. 811–836 (ver p. 1).

[33] J. Rosenberg. “The nonhomogeneous frog model on $\mathbb{Z}$”. Em: *Journal of Applied Probability* 55.4 (2018), pp. 1093–1112 (ver p. 1).

[34] A. Telcs e N. C Wormald. “Branching and tree indexed random walks on fractals”. Em: *Journal of Applied Probability* 36.4 (1999), pp. 999–1011 (ver p. 1).