

**O modelo de percolação em grafos:
Um estudo de condições
para a transição de fase**

Élcio Lebensztayn

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**

Orientador: **Prof. Dr. Fábio Prates Machado**

São Paulo, 15 de janeiro de 2002.

O autor agradece à FAPESP pelo apoio financeiro (Processo N. 00/02478-5).

**O modelo de percolação em grafos:
Um estudo de condições
para a transição de fase**

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Élcio Lebensztayn
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 15 de janeiro de 2002.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fábio Prates Machado (IME-USP)

Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes (IME-USP)

Profa. Dra. Marina Vachkovskaia (IMECC-UNICAMP)

Para Frida, Jacob e Ieda.

Agradecimentos:

Agradeço aos professores com os quais convivi nesses anos de formação acadêmica, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Fábio Prates Machado. Também aos colegas da pós-graduação, em particular a Oswaldo Magalhães Alves.

Agradeço aos meus pais Frida e Jacob e à minha irmã Ieda.

À FAPESP, pelo apoio recebido.

A Deus e a todos que me ajudaram a chegar até aqui.

Resumo:

Este trabalho visa a estudar o modelo de percolação independente, de Bernoulli, em grafos, tendo como objetivo principal obter condições que garantam a ocorrência de transição de fase.

Iniciamos apresentando as definições e algumas técnicas fundamentais para o modelo de percolação (de elos ou de sítios) em um grafo infinito, conectado e localmente finito. Demonstramos então dois resultados essenciais: os fatos do parâmetro crítico não depender da escolha do vértice e da existência de um aglomerado infinito ter probabilidade 0 ou 1. Também obtemos um limitante inferior para o parâmetro crítico quando o grafo é de grau limitado. Para finalizar esta parte introdutória, analisamos a percolação em grafos particulares, a saber, a rede hipercúbica \mathbb{Z}^d (para a qual mostramos a existência de transição de fase em dimensão $d \geq 2$ e a unicidade do aglomerado infinito na fase supercrítica) e alguns tipos de árvores (para as quais apresentamos os parâmetros críticos).

Na parte mais importante da dissertação, tendo como base os trabalhos de Benjamini e Schramm, de Häggström, Schonmann e Steif e de Lyons e Peres, introduzimos os conceitos de transitividade, amenabilidade e amenabilidade forte para um grafo. Fazemos uma detalhada discussão destas definições: provamos que a constante de Cheeger ancorada não depende do vértice em que é ancorada, estudamos relações entre os conceitos (amenabilidade e amenabilidade forte são noções distintas, bem como condições necessárias e suficientes para ambas) e calculamos a constante de Cheeger e a constante de Cheeger ancorada para alguns grafos. Finalmente, utilizando a técnica de crescimento do aglomerado, apresentamos para a probabilidade crítica um limitante superior que depende da constante ancorada. Isto nos permite concluir que ocorre transição de fase para qualquer grafo infinito, conectado, fracamente não-amenável (de constante de Cheeger ancorada positiva) e de grau limitado.

Palavras-chave: Percolação em grafos, Transição de fase, Constantes de Cheeger, Amenabilidade Forte.

Abstract:

This work intends to study independent Bernoulli percolation model on graphs; the main purpose is obtaining conditions for phase transition.

We begin presenting the definitions and some basic techniques for bond percolation and site percolation models on infinite, connected, locally finite graphs. We prove two essential results: the critical parameter is independent of the choice of the vertex and the probability that there exists an infinite cluster takes the values 0 and 1 only. We also obtain a lower bound for critical parameter when the graph is of bounded degree. To finish this preliminary part, we analyze percolation on particular graphs, namely the d -dimensional cubic lattice \mathbb{Z}^d (for which we prove that there exists phase transition in dimension $d \geq 2$ and the uniqueness of the infinite cluster in supercritical phase) and some trees (for which we present the critical parameters).

In the most important part of this essay, founded in the works of Benjamini and Schramm, Häggström, Schonmann and Steif and Lyons and Peres, we introduce the concepts of transitivity, amenability and strong amenability. We discuss in detail these definitions: we prove that anchored Cheeger constant does not depend on the choice of the vertex, we study some relations (amenability and strong amenability are distinct notions, and necessary and sufficient conditions for both) and we obtain Cheeger constant and anchored Cheeger constant for some graphs. Finally, using the growing cluster technique, we present for the critical probability an upper bound that depends on the anchored constant. This permits us to conclude that there exists phase transition on infinite, connected, weakly nonamenable graphs of bounded degree.

Keywords: Percolation on graphs, Phase transition, Cheeger constants, Strong amenability.

Sumário

1	Introdução à Teoria de Grafos	1
2	Percolação em Grafos	5
2.1	Definições	5
2.2	Algumas técnicas básicas	9
2.3	Resultados fundamentais	15
3	A rede \mathbb{L}^d e algumas árvores	20
3.1	A rede hipercúbica d -dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$	20
3.2	Alguns tipos de árvores	29
4	Os conceitos de transitividade, amenabilidade e amenabilidade forte	32
4.1	Definições	32
4.2	Relações entre os conceitos	38
4.3	Exemplos	46
5	Amenabilidade, amenabilidade forte e percolação	55
A	Apêndice	65

Lista de Figuras

1.1	Uma representação da árvore homogênea de grau 3, da árvore binária e da árvore fatorial.	4
3.1	Uma parte da rede bidimensional \mathbb{L}^2 e sua dual $(\mathbb{L}^2)^*$	23
3.2	Um aglomerado finito da origem de \mathbb{L}^2 , ao redor do qual existe um circuito fechado na rede dual.	24
3.3	Um aglomerado com duas trifurcações.	27
4.1	Uma representação de um grafo \mathbf{G} para o qual $0 = \iota_{\mathbb{E}}(\mathbf{G}) < \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G})$. . .	39
4.2	A seqüência $\{S_n\}_{n \geq 0}$ no caso $r = 2$ (referente ao Exemplo 4.3).	48

Capítulo 1

Introdução à Teoria de Grafos

Percolação é o fenômeno de distribuição de um fluido em um meio poroso, tendo sido formulada probabilisticamente na década de 50 por Broadbent e Hammersley. Existem duas versões básicas do modelo: percolação de sítios e percolação de elos, nas quais as variáveis aleatórias vivem ou nos sítios ou nos elos de um grafo. Discutiremos nesta dissertação ambos os modelos.

Iniciamos com alguns conceitos básicos de teoria de grafos. Embora trate apenas de grafos finitos, o livro de Tutte [14] constitui uma ótima referência para o que necessitamos neste assunto. Em nosso trabalho, um *grafo* é um par $G = (V, E)$ formado por um conjunto $V = V(G)$, o conjunto de *vértices* (ou *sítios*) de G , e um conjunto $E = E(G)$ de 2-subconjuntos de V (isto é, $E \subset \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$), o conjunto de *elos* de G . Assim, os grafos considerados não possuem direção entre os elos, não apresentam *loops* (um elo ligando um vértice a si próprio), nem elos múltiplos (mais de um elo ligando o mesmo par de vértices).

Para $x, y \in V$, a notação $x \sim y$ (ou equivalentemente $y \sim x$) servirá para denotar que x e y são *vizinhos* em G . Isto significa que existe um elo de G com *extremidades* x e y ; tal elo será representado por $\{x, y\}$. Dizemos que o elo e é *incidente* ao vértice x quando x é uma extremidade de e . Para cada $x \in V$, definimos d_x o *grau* de x como o número de elos incidentes a x , ou, de modo equivalente, o número de vértices vizinhos a x .

Um grafo H é dito um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$, e cada elo de H tem as mesmas extremidades tanto em H como em G . Sob estas

condições, também dizemos que H está *contido* em G .

Dado um grafo $G = (V, E)$, um *caminho* em G é uma seqüência alternante $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ de vértices distintos x_i e elos $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$. Este caminho tem *comprimento* n e *conecta* x_0 a x_n . Notamos que, por definição, um caminho é “auto-evitante” (*self-avoiding*), isto é, não há repetição de vértices. Um *circuito* em G é uma seqüência alternante $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n, e_n, x_0$ de vértices e elos, tal que $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ é um caminho e $e_n = \{x_n, x_0\}$; tal circuito tem *comprimento* $n + 1$.

Para cada vértice x , seja \mathcal{C}_x o conjunto dos vértices de G que podem ser conectados por um caminho a x (\mathcal{C}_x inclui o próprio x). Claramente, $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$ implica $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$, logo os diferentes \mathcal{C}_x particionam V . Para cada um dos diferentes conjuntos da forma \mathcal{C}_z , consideramos o subgrafo de G ($\mathcal{C}_z, E(\mathcal{C}_z)$), onde $E(\mathcal{C}_z) = \{\{x, y\} \in E : x, y \in \mathcal{C}_z\}$; estes subgrafos são denominados os *componentes conectados* de G . Assim, $x, y \in V$ estão no mesmo componente conectado se e somente se existe um caminho em G que os conecta.

Em geral, consideramos $G = (V, E)$ um grafo *infinito, conectado e localmente finito*. Por *infinito*, queremos dizer que V e E são conjuntos infinitos enumeráveis. *Conectado* significa que, para qualquer par de vértices x e y de G , existe um caminho em G conectando x a y (isto é, G possui um único componente conectado). Por *localmente finito*, entendemos que, para cada $x \in V$, $d_x < \infty$. Em muitos casos, assumiremos que o grafo é *de grau limitado*, o que significa que o grau de todo vértice é uniformemente limitado, ou seja, existe uma constante M tal que $d_x \leq M, \forall x \in V$. Neste caso, sendo $D = \sup_{x \in V} d_x < \infty$, o grafo é dito *de grau máximo* D .

Essencial em teoria de grafos é o conceito de *isomorfismo*. Para $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ dois grafos, definimos um *isomorfismo* de G_1 em G_2 como uma bijeção $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ com a propriedade que, para quaisquer $x, y \in V_1$, temos que $\phi(x)$ e $\phi(y)$ são vizinhos em G_2 se e somente se x e y são vizinhos em G_1 . Se existe um isomorfismo de G_1 em G_2 , dizemos que os grafos são *isomorfos* e podemos pensá-los como o mesmo grafo. Se G_1 é isomorfo a um subgrafo de G_2 , imaginamos G_1 *contido* em G_2 .

Outra definição é necessária, além de algumas notações. A *distância* $\delta(x, y)$ entre dois vértices x e y de um grafo G conectado é definida como o menor comprimento dentre todos os caminhos em G conectando x a y . Para um grafo $G = (V, E)$ e uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos e não-vazios de V , escreveremos $S_n \nearrow V$ se $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = V$. Por $|\cdot|$, denotaremos a cardinalidade de um conjunto (ou, excepcionalmente, o valor absoluto de um número real).

Finalizando o capítulo, apresentamos alguns exemplos de grafos. O primeiro, a *rede hipercúbica d -dimensional* ($d \geq 1$), usualmente denotada por \mathbb{Z}^d . De uma forma mais precisa, denotaremos este grafo por $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, onde $\mathbb{Z}^d = \{(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) : x^{(i)} \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d\}$ é o conjunto de vértices e $\mathbb{E}^d = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ e } \|x - y\|_1 = 1\}$ é o conjunto de elos. Por $\|\cdot\|_1$, representamos a norma da soma, isto é, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x^{(i)}|$ para $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$. Desse modo, a distância entre dois vértices $x, y \in \mathbb{Z}^d$ é dada por

$$\delta(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x^{(i)} - y^{(i)}|,$$

e x e y são vizinhos se e somente se $\delta(x, y) = 1$.

Outro tipo de grafo muito comum são as árvores. (Veja-se a Figura 1.1, p. 4). Uma *árvore* é um grafo conectado que não possui circuitos. Então, para qualquer par de vértices x e y de uma árvore, existe um único caminho conectando x a y . A *distância* entre x e y é portanto o comprimento (o número de elos) deste caminho. Denotaremos por T_r a *árvore homogênea (ou regular) de grau $r+1$* , que é a árvore em que todo vértice tem grau $r+1$ ($r \geq 1$). Notamos que T_1 é isomorfa a $\mathbb{L}^1 = (\mathbb{Z}^1, \mathbb{E}^1)$. Consideraremos também árvores *com raiz*, o que significa que existe um vértice especial, a *raiz*, denotada 0 , e imaginamos a árvore crescendo numa direção a partir da raiz. Cada vértice tem um certo número de *ramos* (elos), levando a seus *filhos*. Por T_r^+ , denotaremos a *árvore r -ária* ($r \geq 1$), em que a raiz tem grau r e os demais vértices têm grau $r+1$, isto é, r filhos. Observamos que T_1^+ é isomorfa a \mathbb{Z}^+ (visto como um grafo). Consideraremos também a *árvore fatorial* $T_!$, em que a raiz tem grau 2 e, para cada $n \geq 1$, existem $(n+1)!$ vértices à distância n da raiz, cada um com grau $n+3$.

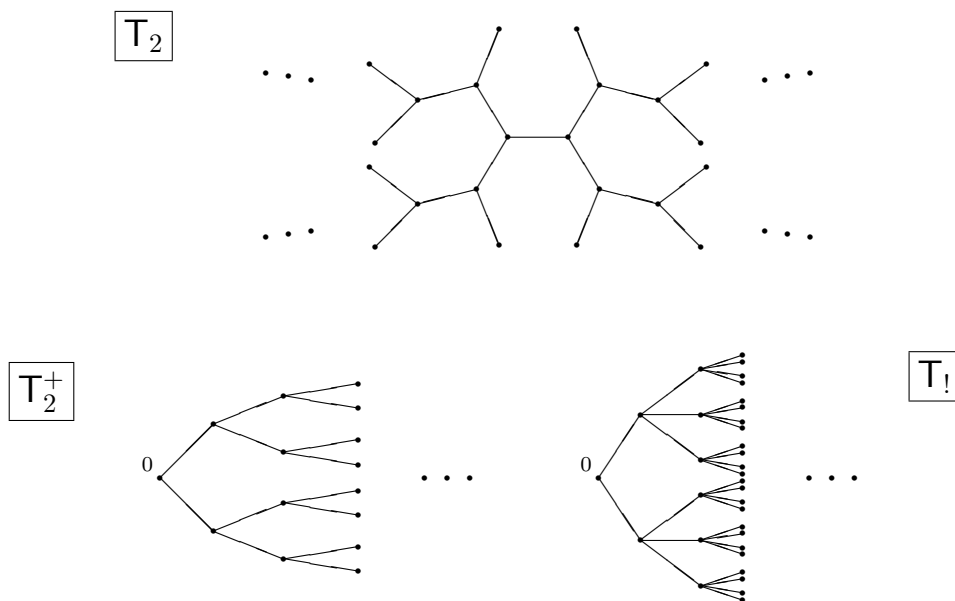


Figura 1.1: Uma representação de T_2 , a árvore homogênea de grau 3, e das quatro primeiras gerações da árvore binária T_2^+ e da árvore fatorial T_1 .

Capítulo 2

Percolação em Grafos

2.1 Definições

Apresentaremos neste capítulo as definições e resultados essenciais da percolação em um grafo. Nesta seção, estabeleceremos os conceitos fundamentais do modelo. A seguir, na Seção 2.2, estudaremos algumas técnicas básicas, para então demonstrar três teoremas cruciais (na Seção 2.3). Citamos como referências básicas sobre percolação os trabalhos de Chayes, Puha e Sweet [4], Grimmett [7], Kesten [11] e Lyons e Peres [12]. O livro de Fontes [6] constitui um excelente texto sobre o assunto em Português.

Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito. No *modelo de percolação independente, de elos*, a cada elo de G é associada aleatoriamente uma de duas designações, *aberto* ou *fechado*, independentemente dos demais elos. Já no *modelo de percolação independente, de sítios*, declaramos aleatoriamente cada vértice de G *aberto (ocupado)* ou *fechado (vazio)*; vértices distintos recebem denominações independentes. A hipótese fundamental em ambos os modelos é a independência da característica atribuída a elos ou vértices, respectivamente. Assim, os estados dos elos (ou vértices) formam uma família de variáveis aleatórias independentes a dois valores. Consideraremos o caso em que, de maneira independente, a cada elo (vértice) é atribuído o valor 1 (correspondente a *aberto*) com probabilidade $p \in [0, 1]$, ou o valor 0 (correspondente a *fechado*) com probabilidade $q = 1 - p$. Daí por que estes modelos são chamados *modelos de percolação independente, de Bernoulli*.

Considerando então o modelo de percolação de elos, vamos descrever formalmente o espaço de probabilidade [A1,3,6]¹. Seja $p \in [0, 1]$. O espaço amostral do modelo é o conjunto das *configurações* dos elos do grafo:

$$\Omega_{\mathbf{E}} = \{0, 1\}^{\mathbf{E}} = \prod_{e \in \mathbf{E}} \{0, 1\}.$$

Assim, uma *configuração* é um ponto $\omega = (\omega(e) : e \in \mathbf{E}) \in \Omega_{\mathbf{E}}$. Tomamos $\mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ a σ -álgebra de subconjuntos de $\Omega_{\mathbf{E}}$ gerada pelos *conjuntos cilíndricos finito-dimensionais*. Isto é, $\mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ é gerada pelos conjuntos da forma $\{\omega : \omega = \omega' \text{ em } B\}$, onde $\omega' \in \Omega_{\mathbf{E}}$ é uma configuração e B é um subconjunto finito de \mathbf{E} . (Em palavras, $\mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ é gerada pelos conjuntos que dependem de elos em subconjuntos finitos de \mathbf{E}). Finalmente, consideramos a *medida-produto com densidade p* em $(\Omega_{\mathbf{E}}, \mathcal{F}_{\mathbf{E}})$, ou seja, a medida

$$P_p^{\mathbf{E}} = \prod_{e \in \mathbf{E}} \mu_e,$$

onde μ_e é a medida de Bernoulli em $\{0, 1\}$, dada por

$$\mu_e(\omega(e) = 0) = q = 1 - p, \quad \mu_e(\omega(e) = 1) = p.$$

No caso de percolação de sítios, para definir o espaço de probabilidade $(\Omega_{\mathbf{V}}, \mathcal{F}_{\mathbf{V}}, P_p^{\mathbf{V}})$, substituímos e por x e \mathbf{E} por \mathbf{V} nas expressões anteriores. Tendo claro com que modelo estamos trabalhando, omitiremos os índices \mathbf{E} ou \mathbf{V} . Assim, escreveremos P_p para a medida de probabilidade e E_p para a correspondente *esperança*.

Em uma realização do processo de percolação de elos, dizemos que um caminho (ou circuito) está *aberto* se todos os seus elos estão abertos, e *fechado* se todos os seus elos estão fechados. Escrevemos ' $x \leftrightarrow y$ ' se existe um caminho aberto conectando o vértice x ao vértice y , sendo que $x \leftrightarrow x$ trivialmente. Consideremos então o subgrafo aleatório de \mathbf{G} contendo o conjunto dos vértices \mathbf{V} e apenas os elos abertos. Denominamos *aglomerados* os componentes conectados deste grafo. Para cada $x \in \mathbf{V}$, escrevemos $C(x)$ para o *aglomerado contendo x* ; observamos que $C(x) = \{x\}$ quando todos os elos incidentes a x estão fechados. O conjunto de

¹A notação [A n] se refere ao tópico n do apêndice que se inicia à p. 65. Este constitui um resumo de definições e resultados, em especial de Teoria da Medida, que complementam o texto, com maiores detalhes sobre o assunto explicado.

vértices de $C(x)$ é o conjunto de todos os vértices do grafo que estão conectados a x por caminhos abertos. Muitas vezes, usaremos $C(x)$ também para este conjunto de vértices, ou seja, interpretaremos $C(x)$ como $\{y \in V : x \leftrightarrow y\}$. Nosso interesse primordial é o tamanho de $C(x)$, mais precisamente, queremos saber se aglomerados infinitos podem ocorrer (com probabilidade positiva). Denotaremos por $|C(x)|$ o número de vértices em $C(x)$ e por ' $x \leftrightarrow \infty$ ' o evento de que $|C(x)| = \infty$. Dizemos que *ocorre percolação* se $C(x)$ for infinito para algum x .

Assim, uma quantidade essencial é a probabilidade de que um determinado vértice pertença a um aglomerado infinito. Para cada vértice x , definimos a *probabilidade de percolação* $\theta(p, x)$ como a probabilidade de que x pertença a um aglomerado infinito, ou seja,

$$\theta(p, x) = P_p(|C(x)| = \infty) = P_p(x \leftrightarrow \infty).$$

Não é difícil perceber que, para cada x , θ é uma função não-decrescente em p , com $\theta(0, x) = 0$ e $\theta(1, x) = 1$. (A técnica de acoplamento permite a demonstração da monotonicidade — veja-se a Observação 2.1, p. 10). Desse modo, podemos definir

$$p_c(x) = \inf \{p : \theta(p, x) > 0\}$$

a *probabilidade crítica* associada ao vértice x (para o modelo de percolação de elos).

As definições anteriores são facilmente adaptadas para a percolação de sítios. Um caminho (ou circuito) está *aberto* se todos os seus vértices estão abertos; *fechado* quando todos os seus vértices estão fechados. Para $x, y \in V$, a notação ' $x \leftrightarrow y$ ' também indicará o evento de que existe um caminho aberto conectando x a y . É importante reparar, porém, que $x \leftrightarrow x$ somente se x está aberto. *Aglomerados* são os componentes conectados do subgrafo aleatório obtido quando excluímos de G todos os vértices fechados e todos os elos incidentes a estes vértices. Para cada $x \in V$, $C(x)$ denota o *aglomerado que contém x* ; $C(x)$ é vazio se x está fechado. Da mesma forma, definem-se a probabilidade de percolação $\theta(p, x)$ e a probabilidade crítica $p_c(x)$ (mas aqui $P_p = P_p^V$). Quando for necessário diferenciar o tipo de percolação sob estudo, escreveremos θ^{elos} ou $\theta^{sítios}$, p_c^{elos} ou $p_c^{sítios}$. Uma observação fundamental é que essencialmente todos os resultados que valem para um modelo,

também são válidos para o outro. Isto acontece na maioria das vezes porque os argumentos das demonstrações podem ser adaptados a ambos os modelos.

Ressaltamos que, em geral, a probabilidade $\theta(p, x)$ depende do vértice x , qualquer que seja o tipo de percolação (de elos ou de sítios). No entanto, se \mathbf{G} é a rede hipercúbica d -dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ (mais geralmente, se \mathbf{G} é um grafo *transitivo* — veja-se a Definição 4.1, p. 33), o valor de $\theta(p, x)$ é independente da escolha de x , portanto podemos escrever $\theta(p)$ para $\theta(p, x)$ e definir os pontos críticos

$$p_c^{elos} = p_c^{elos}(\mathbf{G}) = \inf \{p : \theta^{elos}(p) > 0\},$$

$$p_c^{sítios} = p_c^{sítios}(\mathbf{G}) = \inf \{p : \theta^{sítios}(p) > 0\}.$$

Mostraremos na Seção 2.3 que, mesmo quando não se tem a transitividade, para todo $p \in [0, 1)$ e quaisquer vértices x e y , $\theta(p, x) = 0$ se e somente se $\theta(p, y) = 0$, isto é, o valor de $p_c(x)$ não depende da escolha do vértice x (tanto para a percolação de elos como para a percolação de sítios). Isto nos permitirá definir $p_c^{elos}(\mathbf{G})$ e $p_c^{sítios}(\mathbf{G})$, as *probabilidades críticas* para a percolação no grafo \mathbf{G} .

2.2 Algumas técnicas básicas

Apresentaremos nesta seção algumas técnicas fundamentais na teoria de percolação. Trata-se essencialmente de desigualdades de correlação relacionando, por exemplo, a probabilidade da intersecção de eventos às probabilidades individuais dos eventos.

Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito e consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ o espaço de probabilidade do modelo de percolação de elos em G . Observamos inicialmente que existe uma ordem parcial natural no conjunto Ω das configurações. Dados $\omega, \omega' \in \Omega$, dizemos que $\omega \preceq \omega'$ se, e somente se, $\omega(e) \leq \omega'(e), \forall e \in E$. Então, a variável aleatória N em (Ω, \mathcal{F}) é dita *crescente* se $N(\omega) \leq N(\omega')$ sempre que $\omega \preceq \omega'$; N é *decrecente* se $-N$ for crescente. Um evento $A \in \mathcal{F}$ é *crescente* se sua função indicadora I_A for crescente; é *decrecente* se $\Omega \setminus A$ for crescente. Para exemplificar, notamos que, para $x, y \in V$, o evento $\{x \leftrightarrow y\}$ é crescente e o número de caminhos abertos distintos de x a y é uma variável aleatória crescente.

O resultado seguinte confirma a noção intuitiva de que eventos e variáveis aleatórias crescentes são “ajudados” pela adição (abertura) de elos.

Teorema 2.1 *Sejam N uma variável aleatória crescente em (Ω, \mathcal{F}) e $A \in \mathcal{F}$ um evento crescente. Então, para $p_1 \leq p_2$:*

$$E_{p_1}(N) \leq E_{p_2}(N) \quad (\text{desde que as esperanças existam}) \quad e$$

$$P_{p_1}(A) \leq P_{p_2}(A).$$

Prova: Baseia-se na técnica de *acoplamento*. Tomamos $\bar{\Omega} = [0, 1]^E$ e a medida de probabilidade \bar{P} em $\bar{\Omega}$ como o produto das medidas de Lebesgue [A1,6], ou seja, consideramos $\{\bar{\omega}(e) : e \in E\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Sendo $p \in [0, 1]$, definimos $\eta_p : \bar{\Omega} \rightarrow \Omega$ por

$$\eta_p(e) = \eta_p(\bar{\omega})(e) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\omega}(e) < p, \\ 0 & \text{se } \bar{\omega}(e) \geq p. \end{cases}$$

Notamos então que, pela lei de η_p para $0 \leq p \leq 1$, $\bar{P}(\eta_p \in D) = P_p(D)$ para todo $D \in \mathcal{F}$. Dessa forma, obtivemos um modelo probabilístico em que os processos de percolação de elos em \mathbf{G} para os diversos valores possíveis de p estão acoplados. É claro que, para $p_1 \leq p_2$, $\eta_{p_1}(\bar{\omega}) \preceq \eta_{p_2}(\bar{\omega}), \forall \bar{\omega} \in \bar{\Omega}$. Assim, para qualquer variável aleatória N em (Ω, \mathcal{F}) crescente, $N(\eta_{p_1}(\bar{\omega})) \leq N(\eta_{p_2}(\bar{\omega}))$, logo

$$E_{p_1}(N) = \bar{E}(N(\eta_{p_1})) \leq \bar{E}(N(\eta_{p_2})) = E_{p_2}(N).$$

Finalmente, para $A \in \mathcal{F}$ um evento crescente, usamos a parte recém demonstrada com $N = I_A$ e obtemos $P_{p_1}(A) \leq P_{p_2}(A)$. \square

Observação 2.1 *Conforme já mencionamos, para cada $x \in \mathbf{V}$, a probabilidade $\theta(p, x)$ de que x pertença a um aglomerado infinito é uma função não-decrescente em p . Isso é intuitivamente claro, visto que um aumento no valor de p leva geralmente a um aumento no número de elos abertos do grafo \mathbf{G} , aumentando assim o número e os comprimentos dos caminhos abertos a partir de x . Para a prova desse fato, notamos que, fixado $x \in \mathbf{V}$, se $\omega \in \{|C(x)| = \infty\}$, então $\omega' \in \{|C(x)| = \infty\}$ sempre que $\omega \preceq \omega'$. Assim, $\{|C(x)| = \infty\}$ é um evento crescente e, pelo Teorema 2.1, $\theta(p_1, x) \leq \theta(p_2, x)$ para $p_1 \leq p_2$.*

Observação 2.2 *O conceito de eventos monótonos e as técnicas subseqüentes são bastante gerais e não se baseiam na estrutura de grafos do processo de percolação. Apenas é necessário um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) da forma $\Omega = \prod_{s \in S} \{0, 1\}$, onde S é um conjunto finito ou enumerável, \mathcal{F} é a σ -álgebra gerada pelos cilindros finito-dimensionais de Ω , e P uma medida-produto em (Ω, \mathcal{F}) :*

$$P = \prod_{s \in S} \mu_s,$$

onde μ_s é dada por

$$\mu_s(\omega(s) = 0) = 1 - p(s), \quad \mu_s(\omega(s) = 1) = p(s),$$

para vetores $\omega = (\omega(s) : s \in S) \in \Omega$ e uma coleção específica $(p(s) : s \in S)$ de números em $[0, 1]$. Nesta seção, consideramos $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$, o espaço de probabilidade

do processo de percolação de elos em um grafo $G = (V, E)$ (infinito, conectado e localmente finito), sendo bastante simples as modificações no caso de percolação de sítios. Conforme de costume, convencionamos que a palavra ‘evento’ se refere a um membro de \mathcal{F} , enquanto ‘variável aleatória’ significa uma função a valores reais \mathcal{F} -mensurável [A1,2,6].

A seguir, apresentamos duas desigualdades essenciais na teoria de percolação. A mais conhecida afirma que variáveis aleatórias crescentes têm correlação não-negativa. Foi provada primeiro por Harris e mais tarde reformulada num contexto mais geral por Fortuin, Kasteleyn e Ginibre, daí o seu nome.

Teorema 2.2 (Desigualdade de Harris-FKG)

(a) Se X e Y são variáveis aleatórias crescentes tais que $E_p(X^2) < \infty$ e $E_p(Y^2) < \infty$, então

$$E_p(XY) \geq E_p(X) E_p(Y).$$

(b) Se A e B são eventos crescentes, então

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A) P_p(B).$$

Cumpramos fazer algumas observações. É fácil ver que a desigualdade também é válida se X e Y são ambos decrescentes, e é invertida se um for crescente e o outro decrescente (ambos supostos com segundos momentos finitos). Notamos também que, se $P_p(B) > 0$, concluímos de (b) que $P_p(A|B) \geq P_p(A)$: a ocorrência de um evento crescente aumenta a probabilidade da ocorrência de outro evento crescente.

Prova do Teorema 2.2:

Observamos de início que a parte (b) decorre de (a) com $X = I_A$ e $Y = I_B$. Para a demonstração de (a), consideramos primeiro o caso em que X e Y são cilíndricas, isto é, definidas em termos dos estados de apenas um número finito de elos e_1, e_2, \dots, e_n ; a prova é por indução em n .

Para $n = 1$, as variáveis aleatórias X e Y dependem apenas do valor de ω no elo e_1 , portanto podemos pensá-las como funções de $\{0, 1\}$. Então, para quaisquer $u, v \in \{0, 1\}$,

$$(X(v) - X(u))(Y(v) - Y(u)) \geq 0,$$

visto que os dois fatores são de mesmo sinal (pois X e Y são crescentes). Assim:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{u,v \in \{0,1\}} (X(v) - X(u))(Y(v) - Y(u)) P_p(\omega(e_1) = v) P_p(\omega(e_1) = u) \\ &= 2[E_p(XY) - E_p(X)E_p(Y)], \end{aligned}$$

e o caso $n = 1$ está demonstrado.

Suponhamos então que o resultado é válido para $n = k \geq 1$ e consideremos X e Y funções crescentes dos valores dos $k + 1$ elos e_1, \dots, e_{k+1} . A fim de mostrar que $E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y)$, calculamos a primeira esperança em dois passos: primeiro, tomando a esperança com os valores dos elos e_1, \dots, e_k fixados, e a seguir tomando a esperança com respeito a $\mu_{e_1}, \dots, \mu_{e_k}$. É importante observar que, dados $\omega(e_1), \dots, \omega(e_k)$, X e Y são crescentes no valor do elo e_{k+1} . Então, utilizando uma propriedade bastante conhecida da esperança condicional [A8], o já provado caso em que as variáveis dependem do estado de apenas um elo e a monotonicidade de uma esperança, obtemos:

$$\begin{aligned} E_p(XY) &= E_p(E_p(XY|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))) \\ &\geq E_p(E_p(X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k)) E_p(Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))). \end{aligned} \quad (2.1)$$

No entanto, como $E_p(X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))$ e $E_p(Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))$ são funções crescentes dependendo apenas dos estados de k elos [A2], temos pela hipótese de indução que

$$\begin{aligned} &E_p(E_p(X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k)) E_p(Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))) \geq \\ &\geq E_p(E_p(X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))) E_p(E_p(Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))) \\ &= E_p(X) E_p(Y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Tendo em vista (2.1) e (2.2), obtemos a desigualdade desejada.

A fim de concluir a demonstração, retiramos a hipótese de que X e Y são cilíndricas. Consideramos X e Y variáveis aleatórias crescentes, com segundos momentos finitos, e definimos

$$X_n = E_p (X | \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)),$$

$$Y_n = E_p (Y | \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)),$$

onde e_1, e_2, \dots é uma ordenação fixada dos elos do grafo.

Visto que X_n e Y_n são funções crescentes dependendo apenas dos estados de e_1, e_2, \dots, e_n , temos pela parte recém demonstrada que

$$E_p (X_n Y_n) \geq E_p (X_n) E_p (Y_n). \quad (2.3)$$

Porém, pelo Teorema da Convergência L^2 de Martingais [A8], temos, quando $n \rightarrow \infty$,

$$X_n \longrightarrow X \quad \text{e} \quad Y_n \longrightarrow Y \quad P_p \text{- quase certamente e em } L^2(P_p).$$

Isto implica que [A5]

$$E_p (X_n) \longrightarrow E_p (X) \quad \text{e} \quad E_p (Y_n) \longrightarrow E_p (Y) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Além disso,

$$E_p (X_n Y_n) \longrightarrow E_p (XY) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

pois, utilizando a Desigualdade Triangular, a monotonicidade e a linearidade da esperança e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema A.3, [A3]):

$$\begin{aligned} E_p |X_n Y_n - XY| &\leq E_p (|(X_n - X) Y_n| + |X (Y_n - Y)|) \\ &\leq \sqrt{E_p ((X_n - X)^2) E_p (Y_n^2)} + \sqrt{E_p (X^2) E_p ((Y_n - Y)^2)} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Assim, fazendo-se $n \rightarrow \infty$ em (2.3) e usando-se (2.4) e (2.5), obtemos o resultado desejado. □

Ainda que não o utilizemos, apenas como referência apresentamos um resultado que complementa a Desigualdade de Harris-FKG. Para isso, é necessário definir a ocorrência disjunta de dois eventos. Para $S \subset E$, dizemos que o evento A ocorre no conjunto S , denotado por $A|_S$, se A ocorre usando apenas elos em S , independentemente dos valores dos elos em $E \setminus S$:

$$A|_S = \{\omega : \forall \tilde{\omega}, \tilde{\omega} = \omega \text{ em } S \Rightarrow \tilde{\omega} \in A\}.$$

Dois eventos A_1 e A_2 ocorrem disjuntamente, o que denotamos por $A_1 \circ A_2$, se existem dois conjuntos disjuntos nos quais eles ocorrem:

$$A_1 \circ A_2 = \{\omega : \exists S_1, S_2 \subset E, S_1 \cap S_2 = \emptyset, \omega \in A_1|_{S_1} \cap A_2|_{S_2}\}.$$

Eis o resultado:

Teorema 2.3 (Desigualdade de BK (Van den Berg-Kesten))

Para quaisquer eventos A e B dependendo de um número finito de elos,

$$P_p(A \circ B) \leq P_p(A) P_p(B).$$

Observamos que a condição de que A e B dependam de apenas um número finito de elos pode ser relaxada em essencialmente todos os exemplos de interesse. Para uma ampla discussão (incluindo a prova), sugerimos que se consulte o livro de Grimmett [7].

2.3 Resultados fundamentais

Prosseguimos o estudo sobre percolação, obtendo uma importante aplicação da Desigualdade de Harris-FKG (Teorema 2.2). Trata-se do já mencionado fato de que o valor de $p_c(x)$ não depende da escolha do vértice x (tanto para a percolação de elos como para a percolação de sítios).

Teorema 2.4 *Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito. Os valores da probabilidade crítica para a percolação de elos $p_c^{\text{elos}}(x)$ e da probabilidade crítica para a percolação de sítios $p_c^{\text{sítios}}(x)$ são independentes da escolha do vértice x .*

Prova: Consideremos um processo de percolação de elos em G . Para cada vértice x , escrevemos $\theta(p, x)$ para a probabilidade de percolação e $p_c(x)$ para a probabilidade crítica associada. Pela monotonicidade de uma medida de probabilidade e a Desigualdade de Harris-FKG, temos, para quaisquer vértices x e y ,

$$\theta(p, x) \geq P_p(\{x \leftrightarrow y\} \cap \{y \leftrightarrow \infty\}) \geq P_p(x \leftrightarrow y) \theta(p, y). \quad (2.6)$$

Como G é conectado, existe um caminho $x = x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n = y$ em G , conectando x a y , logo $P_p(x \leftrightarrow y) \geq p^n > 0$ (supondo $p > 0$). Assim, concluímos de (2.6) que, para qualquer $p \in [0, 1)$, $\theta(p, x) = 0$ implica $\theta(p, y) = 0$, portanto $p_c(x) \leq p_c(y)$. Esta desigualdade também vale com x e y trocados, então $p_c(x) = p_c(y)$. Notando que um argumento semelhante é válido para a percolação de sítios, o teorema está demonstrado. \square

Para $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito, fixemos 0 um vértice específico, que chamaremos de origem. Consideramos então as *probabilidades de percolação da origem*

$$\theta^{\text{elos}}(p) = \theta^{\text{elos}}(p, 0) = P_p^E(0 \leftrightarrow \infty),$$

$$\theta^{\text{sítios}}(p) = \theta^{\text{sítios}}(p, 0) = P_p^V(0 \leftrightarrow \infty),$$

e definimos as *probabilidades críticas*

$$p_c^{elos} = p_c^{elos}(\mathbf{G}) = \inf \{p : \theta^{elos}(p) > 0\},$$

$$p_c^{sítios} = p_c^{sítios}(\mathbf{G}) = \inf \{p : \theta^{sítios}(p) > 0\}.$$

Observamos que, pelo Teorema 2.4, as definições de $p_c^{elos}(\mathbf{G})$ e $p_c^{sítios}(\mathbf{G})$ são independentes da escolha da origem. Omitiremos o índice em $\theta(p)$ e $p_c(\mathbf{G})$ sempre que esteja claro o modelo sob estudo.

Conforme se costuma fazer, dizemos que o modelo de percolação de elos exhibe *transição de fase* quando

$$0 < p_c^{elos}(\mathbf{G}) < 1,$$

analogamente para a percolação de sítios. Neste caso, o processo apresenta uma fase *subcrítica* (quando $p < p_c(\mathbf{G})$), um *ponto crítico* (quando $p = p_c(\mathbf{G})$) e uma fase *supercrítica* (quando $p > p_c(\mathbf{G})$). Na fase subcrítica, cada vértice está quase certamente em um aglomerado finito, enquanto na fase supercrítica, cada vértice tem uma probabilidade positiva de estar em um aglomerado infinito. Sobre o ponto crítico, existem substanciais questões em aberto, por exemplo, em geral não se sabe se $\theta(p_c, x)$ é positivo ou não. O nosso propósito principal é estudar condições sobre um grafo \mathbf{G} que garantam a ocorrência de transição de fase. Antes, porém, apresentamos uma lei 0-1 essencial.

Seja $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo infinito, conectado e localmente finito e consideremos um processo de percolação de elos em \mathbf{G} . Escrevemos $\theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty)$ para a probabilidade de percolação da origem 0 (qualquer vértice fixado de \mathbf{G}), e seja $\psi(p)$ a probabilidade de que exista um aglomerado infinito em algum lugar de \mathbf{G} , isto é,

$$\psi(p) = P_p(\exists x \in \mathbf{V} \text{ com } |C(x)| = \infty).$$

Do Teorema 2.1, concluímos que $\psi(p)$ é uma função não-decrescente em p , pois claramente a existência de um aglomerado infinito é um evento crescente. O resultado a seguir estabelece que ψ assume apenas os valores 0 e 1 e que, na fase subcrítica, todos os aglomerados são quase certamente finitos, enquanto na fase supercrítica,

existe quase certamente pelo menos um aglomerado infinito. Também garante que, na fase crítica, existe quase certamente pelo menos um aglomerado infinito se, e somente se, $\theta(p_c) > 0$.

Teorema 2.5 *A probabilidade $\psi(p)$ satisfaz*

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta(p) = 0, \\ 1 & \text{se } \theta(p) > 0. \end{cases}$$

Prova: Mostraremos primeiramente que ψ assume apenas os valores 0 e 1. Isso decorre da Lei 0-1 de Kolmogorov e do fato de que $\{\exists x \in \mathbf{V} \text{ com } |C(x)| = \infty\}$ é um *evento caudal* [A7].

Mais precisamente, temos $(\omega(e) : e \in \mathbf{E})$ uma família de variáveis aleatórias independentes, à qual naturalmente está associada a σ -álgebra *caudal*

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{B \subset \mathbf{E} \text{ finito}} \sigma(\omega(e), e \notin B),$$

ou seja, \mathcal{F}_∞ é a intersecção sobre todos os subconjuntos $B \subset \mathbf{E}$ finitos da menor σ -álgebra com respeito à qual as variáveis $\omega(e), e \notin B$, são mensuráveis. O evento $\{\exists x \in \mathbf{V} \text{ com } |C(x)| = \infty\}$ é caudal, pois não depende dos estados de qualquer coleção finita de elos. Como $\omega(e), e \in \mathbf{E}$, são independentes, pela Lei 0-1 de Kolmogorov, \mathcal{F}_∞ é trivial, portanto ψ só pode assumir os valores 0 e 1.

Provamos no Teorema 2.4 que, para todo $p \in [0, 1)$ e quaisquer vértices x e y , $\theta(p, x) = 0$ se e somente se $\theta(p, y) = 0$. Então, se $\theta(p) = \theta(p, 0) = 0$, temos, pela subaditividade enumerável de P_p (já que \mathbf{V} é enumerável):

$$\psi(p) = P_p(\exists x \in \mathbf{V} \text{ com } |C(x)| = \infty) \leq \sum_{x \in \mathbf{V}} \theta(p, x) = 0.$$

Por outro lado, se $\theta(p) > 0$, temos, pela monotonicidade de P_p :

$$\psi(p) \geq P_p(|C(0)| = \infty) = \theta(p, 0) > 0,$$

logo $\psi(p) = 1$ pela Lei 0-1. □

Dessa forma, podemos redefinir

$$p_c = p_c(\mathbf{G}) = \inf \{p : \psi(p) = 1\}.$$

É importante destacar que o Teorema 2.5 e portanto esta redefinição também são válidos para a percolação de sítios.

Para fechar a seção, apresentamos outro resultado essencial, que garante $p_c(\mathbf{G}) > 0$ para grafos de grau limitado:

Teorema 2.6 *Suponhamos que $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ seja um grafo infinito, conectado, de grau máximo D . Então:*

$$p_c(\mathbf{G}) \geq \frac{1}{D-1}.$$

Prova: Seja $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo infinito, conectado, de grau máximo D e consideremos um processo de percolação de elos em \mathbf{G} . Mostraremos que, se $p < \frac{1}{D-1}$, então $\theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$, onde a origem 0 é qualquer vértice fixado de \mathbf{G} .

Sejam $\sigma(n)$ o número de caminhos em \mathbf{G} , de comprimento n , começando na origem, e $N(n)$ o número aleatório de tais caminhos que estão abertos. Claramente, cada um destes caminhos está aberto com probabilidade p^n , portanto

$$E_p(N(n)) = p^n \sigma(n).$$

Mas, se a origem pertence a um aglomerado infinito, então existem caminhos abertos de todos os comprimentos começando nela. Então, para qualquer $n \geq 1$, temos, pela Desigualdade de Markov (Teorema A.2, [A3]),

$$\begin{aligned} \theta(p) &= P_p(0 \leftrightarrow \infty) \leq P_p(N(n) \geq 1) \\ &\leq E_p(N(n)) = p^n \sigma(n). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Precisamos obter um limitante superior para $\sigma(n)$. Consideremos a construção de um caminho de comprimento n a partir da origem. Primeiro, devemos escolher um elo incidente à origem; há no máximo D escolhas. Então, existem no máximo $D-1$ escolhas para o próximo elo, já que não podemos reutilizar o anterior. Prosseguindo desta maneira, concluímos:

$$\sigma(n) \leq D(D-1)^{n-1}.$$

Substituindo-se em (2.7), obtemos um limitante para a probabilidade de percolação:

$$\theta(p) \leq pD [p(D-1)]^{n-1}.$$

Assim, se $p < \frac{1}{D-1}$, temos, fazendo $n \rightarrow \infty$, que $\theta(p) = 0$.

O raciocínio é análogo para a percolação de sítios. □

No Capítulo 4, apresentaremos alguns conceitos ligados à geometria de grafos, a saber, a *transitividade* (a propriedade de grafos cujos vértices são idênticos no que diz respeito à sua relação de vizinhança), a *amenabilidade* e a *amenabilidade forte* (que refletem como se comporta a razão entre o número de elos que saem de determinados subconjuntos de vértices e o tamanho desses subconjuntos). Essas características serão úteis em nosso estudo da percolação; mais especificamente, veremos que a ausência de uma das duas últimas para um grafo de grau limitado é condição suficiente para garantir a transição de fase. Antes disso, porém, analisaremos a percolação para alguns grafos.

Capítulo 3

A rede \mathbb{L}^d e algumas árvores

Para exemplificar, estudamos alguns resultados da percolação para grafos particulares.

3.1 A rede hipercúbica d -dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$

Com respeito ao modelo de percolação em \mathbb{L}^d , o primeiro aspecto a ressaltar é que o valor da probabilidade de percolação $\theta(p, x)$ não depende do vértice x (o que, conforme explicamos em um comentário no final da Seção 2.1, vale mais geralmente para os grafos transitivos). Este fato bastante intuitivo se deve à *invariância por translação* da medida de probabilidade P_p (no caso mais geral, deve-se à *invariância por automorfismos* de P_p).

A fim de esclarecer este assunto, vamos considerar o modelo de percolação de elos em \mathbb{L}^d . Para cada $z \in \mathbb{Z}^d$, seja $\phi_z : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ o mapeamento dado por $\phi_z(x) = x - z$, $x \in \mathbb{Z}^d$. Claramente, ϕ_z é uma bijeção e preserva a relação de vizinhança entre os vértices: $x \sim y$ se e somente se $\phi_z(x) \sim \phi_z(y)$ (ou, no contexto do Capítulo 4, ϕ_z é um *automorfismo* de \mathbb{L}^d). Para cada $z \in \mathbb{Z}^d$, seja $T_z : \Omega \rightarrow \Omega$ o *operador-translação* atuando sobre configurações $\omega \in \Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, definido por

$$(T_z\omega)(\{x, y\}) = \omega(\{\phi_z(x), \phi_z(y)\}) \text{ para } e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^d.$$

Definimos também a atuação de T_z sobre eventos $A \in \mathcal{F}$ como $T_zA = \{T_z\omega : \omega \in A\}$. Notamos então que, para todo $z \in \mathbb{Z}^d$, T_z é inversível, com $(T_z)^{-1} = T_{-z}$. Assim,

para todo $A \in \mathcal{F}$ e qualquer $z \in \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned} T_z^{-1}A &= \{\omega \in \Omega : T_z\omega \in A\} \\ &= \{(T_z)^{-1}a : a \in A\} = (T_z)^{-1}A = T_{-z}A. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Isso mostra que T_z é \mathcal{F}/\mathcal{F} mensurável e preserva P_p (para todo $z \in \mathbb{Z}^d$), já que $T_z^{-1}A \in \mathcal{F}$ e $P_p(T_z^{-1}A) = P_p(A)$ para todo A cilíndrico [A9]. Desse modo,

$$P_p(T_z^{-1}A) = P_p(A), \forall z \in \mathbb{Z}^d, \forall A \in \mathcal{F},$$

o que, tendo em vista (3.1), é equivalente a

$$P_p(T_z A) = P_p(A), \forall z \in \mathbb{Z}^d, \forall A \in \mathcal{F},$$

propriedade conhecida como a *invariância por translação* de P_p .

Voltando à nossa questão, observamos que, para todo $z \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \{0 \leftrightarrow \infty\}$ se e somente se $T_z\omega \in \{z \leftrightarrow \infty\}$, portanto:

$$P_p(0 \leftrightarrow \infty) = P_p(T_{-z}(\{z \leftrightarrow \infty\})) = P_p(z \leftrightarrow \infty).$$

Assim, podemos escrever $\theta(p)$ para $\theta(p, x)$ e definir a probabilidade crítica

$$p_c = p_c(d) = p_c(\mathbb{L}^d) = \inf \{p : \theta(p) > 0\}.$$

Continuaremos considerando o modelo de percolação de elos. Sobre o parâmetro crítico, cumpre observar que o caso unidimensional é bastante simples: sendo $|C(0)^-|$ e $|C(0)^+|$ o número de vértices no aglomerado $C(0)$ da origem de \mathbb{Z} respectivamente à esquerda e à direita da origem, temos que $|C(0)^-|$ e $|C(0)^+|$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $P_p(|C(0)^+| \geq k) = p^k$ para cada $k \geq 0$. Assim, $\theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$ se $p < 1$, e portanto $p_c(1) = 1$. O outro valor conhecido do parâmetro é $p_c(2) = \frac{1}{2}$; a demonstração, longe de ser trivial, pode ser vista em Grimmett [7].

Importante destacar também que a probabilidade crítica é não-crescente na dimensão. Intuitivamente, quanto maior a dimensão, maior é o número de caminhos conectando dois vértices x e y , portanto a probabilidade do evento $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ deve

crescer, à medida que d aumenta (fixado um valor de p). A fim de provar este fato, encaramos a rede \mathbb{L}^d como um subgrafo de \mathbb{L}^{d+1} ; de modo mais específico, imaginamos \mathbb{L}^d como a projeção de \mathbb{L}^{d+1} sobre o subespaço gerado pelas primeiras d coordenadas. Dessa forma, o modelo de percolação de elos em \mathbb{L}^{d+1} naturalmente induz o modelo de percolação de elos no subgrafo \mathbb{L}^d , de tal modo que, para cada valor fixado de p , o aglomerado da origem de \mathbb{L}^d é finito sempre que o aglomerado da origem de \mathbb{L}^{d+1} for finito. Assim, $\theta(p) = \theta_d(p)$ é não-decrescente em d , logo

$$p_c(d+1) \leq p_c(d) \quad \text{para } d \geq 1.$$

A próxima proposição estabelece que ocorre transição de fase em dimensão dois ou mais:

Proposição 3.1 (Transição de fase em $\mathbb{L}^d, d \geq 2$)

Se $d \geq 2$, então $0 < p_c(d) < 1$.

Prova: Como todo vértice de \mathbb{L}^d tem grau $2d$, obtemos do Teorema 2.6 que:

$$p_c(d) \geq \frac{1}{2d-1} > 0.$$

Para a demonstração de que $p_c(d) < 1$, basta mostrar que $p_c(2) < 1$, pois $p_c(d+1) \leq p_c(d)$. Para isso, costuma-se utilizar um método conhecido como “argumento de Peierls”. Consideramos a percolação de elos em \mathbb{L}^2 e mostraremos que a probabilidade $\theta(p)$ de que a origem 0 de \mathbb{Z}^2 pertença a um aglomerado infinito é estritamente positiva para p suficientemente próximo de 1. A fim de atingir este objetivo, necessitamos de uma idéia adicional: a *dualidade em duas dimensões*.

Seja $(\mathbb{L}^2)^* = ((\mathbb{Z}^2)^*, (\mathbb{E}^2)^*)$ a *rede bidimensional dual de \mathbb{L}^2* , um grafo com conjunto de vértices e conjunto de elos dados respectivamente por:

$$(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2) = \{x + (1/2, 1/2) : x \in \mathbb{Z}^2\},$$

$$(\mathbb{E}^2)^* = \{\{x^*, y^*\} : x^*, y^* \in (\mathbb{Z}^2)^* \text{ e } \|x^* - y^*\|_1 = 1\}.$$

Observamos que $(\mathbb{L}^2)^*$ é isomorfa a \mathbb{L}^2 , e consideramos a relação biunívoca entre \mathbb{E}^2 e $(\mathbb{E}^2)^*$ que associa a cada elo e de \mathbb{L}^2 o único elo e^* da rede dual que o cruza. Veja-se a Figura 3.1.

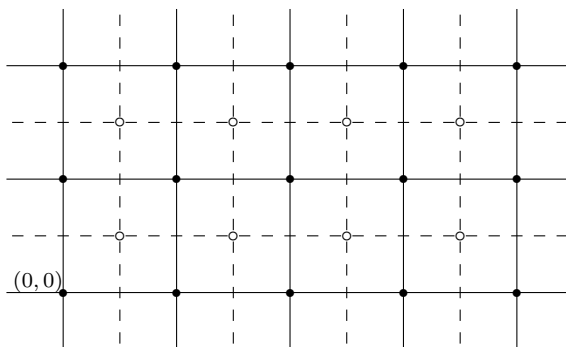


Figura 3.1: Uma parte da rede bidimensional \mathbb{L}^2 e sua dual $(\mathbb{L}^2)^*$.

Então, a cada configuração ω em $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$, associamos a *configuração dual* ω^* em $\{0, 1\}^{(\mathbb{E}^2)^*}$ por $\omega^*(e^*) = \omega(e)$. Assim, definimos um modelo de percolação de elos em $(\mathbb{L}^2)^*$ induzido pelo modelo em \mathbb{L}^2 , declarando cada elo da rede dual aberto ou fechado, dependendo respectivamente se cruza um elo aberto ou fechado de \mathbb{L}^2 .

A prova de que $\theta(p) > 0$ para p suficientemente próximo de 1 se baseia no seguinte fato: o aglomerado $C(0)$ é finito se e somente se a origem de \mathbb{L}^2 está no interior de algum circuito fechado da rede dual. Não faremos a demonstração deste fato. Sugerimos que se observe cuidadosamente a Figura 3.2 (p. 24) para uma ilustração e se consulte o livro de Kesten [11] para um tratamento mais rigoroso. Na Figura 3.2, as linhas grossas e pontilhadas representam respectivamente elos abertos e fechados de \mathbb{L}^2 ; o circuito (de elos fechados) na rede dual aparece em linhas finas.

Para $n \geq 4$, seja $M(n)$ o número de circuitos fechados em $(\mathbb{L}^2)^*$, tendo comprimento n e com a origem de \mathbb{L}^2 em seu interior. (Notamos que o menor circuito dual em torno da origem tem comprimento 4). Como já explicamos, $|C(0)| < \infty$ se e somente se $M(n) \geq 1$ para algum n . Utilizando a Desigualdade de Markov e lembrando a forma como definimos o modelo de percolação em $(\mathbb{L}^2)^*$ a partir do modelo em \mathbb{L}^2 , concluímos:

$$\begin{aligned}
 1 - \theta(p) &= P_p(|C(0)| < \infty) \leq \sum_{n \geq 4} P_p(M(n) \geq 1) \\
 &\leq \sum_{n \geq 4} E_p(M(n)) = \sum_{n \geq 4} (1-p)^n \lambda(n),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

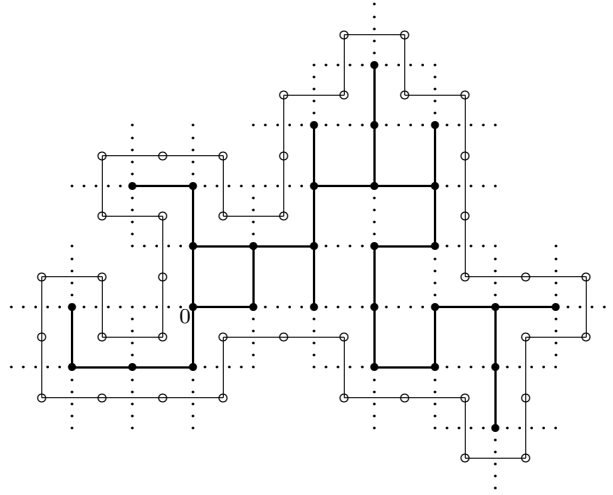


Figura 3.2: Um aglomerado finito da origem de \mathbb{L}^2 , ao redor do qual existe um circuito fechado na rede dual.

onde $\lambda(n)$ é o número total de circuitos em $(\mathbb{L}^2)^*$, tendo comprimento n e com a origem de \mathbb{L}^2 em seu interior.

A fim de obter um limitante superior para $\lambda(n)$, notamos que qualquer circuito na rede dual que tenha comprimento n e a origem de \mathbb{L}^2 em seu interior deve cruzar o eixo x em um ponto da forma $(k + 1/2, 0)$ para algum $0 \leq k < n$. (Tendo $(0, 0)$ em seu interior, o circuito necessariamente corta o eixo x em $(k + 1/2, 0)$ para algum $k \geq 0$; se k fosse maior ou igual a n , o circuito precisaria ter comprimento no mínimo $2n$). Consideremos então a construção de um circuito na rede dual de comprimento n , ao redor da origem de \mathbb{L}^2 . Podemos começar com um elo da forma $\{(k + 1/2, -1/2), (k + 1/2, 1/2)\}$, $0 \leq k < n$, para o qual existem n escolhas. A seguir, observamos que os $n - 1$ elos restantes certamente formam um caminho, logo cada um deles pode ser escolhido de no máximo três maneiras distintas. Isto claramente não garante que se forme um circuito, porém fornece um limitante superior para $\lambda(n)$:

$$\lambda(n) \leq n3^{n-1}.$$

Substituindo-se em (3.2), obtemos:

$$1 - \theta(p) \leq \sum_{n \geq 4} \frac{n}{3} [3(1-p)]^n.$$

No entanto, a série anterior é uma função contínua e decrescente em p para $p > 2/3$, anulando-se quando $p = 1$. Assim, escolhendo-se p suficientemente próximo de 1, podemos fazer o valor da soma estritamente menor que 1, o que implicará $\theta(p) > 0$. \square

Assim, a Proposição 3.1 define três fases distintas do processo em duas ou mais dimensões. Conforme já explicamos, como consequência do Teorema 2.5, na fase subcrítica ($p < p_c(d)$), todos os aglomerados são quase certamente finitos, enquanto na fase supercrítica ($p > p_c(d)$), existe quase certamente pelo menos um aglomerado infinito. O passo seguinte, essencial, é mostrar que na fase supercrítica existe quase certamente um único aglomerado infinito:

Proposição 3.2 (Unicidade do aglomerado infinito)

Se p é tal que $\theta(p) > 0$, então

$$P_p(\text{Existe exatamente um aglomerado infinito}) = 1.$$

Prova: Baseamo-nos na demonstração apresentada no Capítulo 8 (p. 197) do livro de Grimmett [7], em que se podem encontrar mais detalhes. Inicialmente, observamos que se pode supor $0 < p < 1$, e seja N o número de aglomerados infinitos em um processo de percolação de elos em \mathbb{L}^d ($d \geq 2$).

Afirmamos que N é constante quase certamente: existe $k \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ (k dependendo de p), tal que

$$P_p(N = k) = 1. \tag{3.3}$$

Este fato é consequência direta da Teoria Ergódica [A9], já que $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ é um espaço-produto dotado de uma família natural de translações (como vimos no início da seção) e N é uma variável aleatória *invariante por translação* (translações das configurações em Ω não alteram o número de aglomerados infinitos delas).

A seguir, mostramos que $k \in \{0, 1, \infty\}$. Para isso, definimos a *caixa* de centro na origem e lado $2n$ como o conjunto

$$S(n) = \{-n, \dots, n\}^d = \{x \in \mathbb{Z}^d : -n \leq x^{(i)} \leq n \text{ para todo } i\},$$

e seja $M_{S(n)}$ o número de aglomerados infinitos distintos que interceptam $S(n)$. Claramente, $M_{S(n)}$ é não-decrescente em $S(n)$, tendendo para N quando $n \rightarrow \infty$ (visto que $S(n) \nearrow \mathbb{Z}^d$ quando $n \rightarrow \infty$). Supondo que $k \geq 2$, da continuidade da probabilidade [A4], obtemos:

$$P_p(M_{S(n)} \geq 2) \longrightarrow P_p(N \geq 2) = 1,$$

logo existe uma caixa S suficientemente grande tal que

$$P_p(S \text{ intercepta dois ou mais aglomerados infinitos}) \geq \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

No entanto, abrindo os elos de \mathbb{L}^d que unem pares de vértices em S , podemos diminuir o número de aglomerados infinitos (no evento em (3.4)). Assim, concluimos que $P_p(N \leq k - 1) > 0$, o que, tendo em vista (3.3), só é possível se $k = \infty$.

Resta-nos então provar que $k \in \{0, 1\}$. Suponhamos que $k = \infty$ e obteremos uma contradição através de um argumento geométrico baseado no seguinte conceito. Denominamos um vértice x de \mathbb{L}^d uma *trifurcação* se: $|C(x)| = \infty$, existem exatamente três elos abertos incidentes a x e a remoção de x e destes três elos divide $C(x)$ em três aglomerados infinitos disjuntos e nenhum aglomerado finito. Duas observações finalizam a prova:

(a) $P_p(x \text{ é uma trifurcação}) = P_p(0 \text{ é uma trifurcação}) > 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d$.

A igualdade vale pela invariância por translação de P_p . Já o fato de que $P_p(0 \text{ é uma trifurcação})$ é estritamente positiva segue da hipótese $k = \infty$: como $P_p(N = \infty) = 1$, podemos encontrar uma caixa $S(n)$ suficientemente grande de forma que intercepte pelo menos três aglomerados infinitos distintos com probabilidade pelo menos $1/2$. Alterando os estados dos elos dentro de $S(n)$, podemos fazer com que a origem 0 se torne uma trifurcação. O conjunto correspondente de configurações tem probabilidade estritamente positiva, logo vale **(a)**.

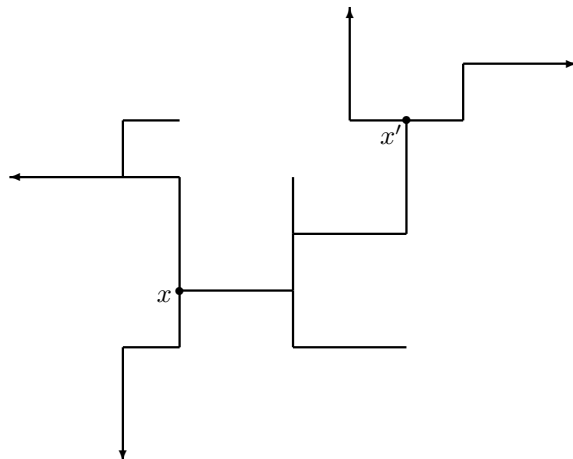


Figura 3.3: Um aglomerado com duas trifurcações x e x' , as setas representando caminhos para o infinito. A ilustração permite entender como se escolhem os índices das partições de modo a satisfazer (3.5).

(b) As trifurcações de um determinado aglomerado são conectadas por uma estrutura de árvore, o que implica que o número de trifurcações dentro de $S(n-1)$ é limitado pelo tamanho da “fronteira” de $S(n)$. No entanto, concluímos de (a) que o número médio de trifurcações dentro de $S(n-1)$ cresce com a cardinalidade de $S(n-1)$ quando $n \rightarrow \infty$, o que constitui uma contradição.

De uma forma mais precisa, consideramos novamente a caixa $S(n)$ e definimos o conjunto $\partial S(n) = \{x \in S(n) : \exists y \in \mathbb{Z}^d \setminus S(n) \text{ com } y \sim x\}$ (que é a *fronteira interior dos vértices em $S(n)$*). Seja K um aglomerado conectado de $S(n)$ e consideremos x e x' trifurcações distintas de $K \cap S(n-1)$. Então, a $K \setminus \{x\}$ corresponde naturalmente uma partição

$$P = \{P_1, P_2, P_3\}$$

de $Y = K \cap \partial S(n)$ em exatamente três subconjuntos não-vazios P_1, P_2 e P_3 , onde todos os vértices em P_i estão no mesmo componente de $K \setminus \{x\}$.² Temos uma partição similar usando x' :

$$Q = \{Q_1, Q_2, Q_3\}.$$

²Partição significa que P_1, P_2 e P_3 são dois a dois disjuntos e sua união é Y .

De fundamental importância é a observação que os índices 1, 2 e 3 podem ser escolhidos de modo que

$$P_1 \supset Q_2 \cup Q_3. \quad (3.5)$$

Para isso, basta tomar P_1 como os vértices em Y do componente de $K \setminus \{x\}$ contendo x' , e Q_1 como os vértices em Y do componente de $K \setminus \{x'\}$ contendo x . Veja-se a Figura 3.3. Dizemos que duas partições $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ (em subconjuntos não-vazios) de um conjunto finito Y com $|Y| \geq 3$ são *compatíveis* se existe uma ordenação dos índices tal que vale (3.5). Uma coleção \mathcal{P} de partições de Y é dita *compatível* se cada par $P, Q \in \mathcal{P}$ for compatível. A chave para terminar a demonstração é então o seguinte resultado (cuja prova, por indução em $|Y|$, pode ser vista em Grimmett [7]):

Lema: *Se \mathcal{P} é uma coleção compatível de partições de Y , então:*

$$|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2.$$

Conforme vimos, a cada trifurcação de $K \cap S(n-1)$ corresponde uma partição de $Y = K \cap \partial S(n)$, sendo que trifurcações distintas induzem partições compatíveis. Do lema, concluímos que o número $\tau(K)$ de trifurcações em $K \cap S(n-1)$ satisfaz a desigualdade

$$\tau(K) \leq |K \cap \partial S(n)| - 2,$$

logo somando sobre todos os aglomerados conectados K de $S(n)$, obtemos:

$$\text{Número de trifurcações em } S(n-1) = \sum_{x \in S(n-1)} I_{\{x \text{ é uma trifurcação}\}} \leq |\partial S(n)|.$$

Tomamos a esperança em ambos os lados, portanto tendo em vista **(a)**:

$$|S(n-1)| P_p(0 \text{ é uma trifurcação}) \leq |\partial S(n)|,$$

o que é impossível para n grande, visto que o lado esquerdo cresce como n^d , enquanto o lado direito como n^{d-1} . □

3.2 Alguns tipos de árvores

Estudaremos o modelo de percolação para as árvores r -árias, as árvores homogêneas e a árvore fatorial. Consideramos um processo de percolação de elos, ou seja, removemos aleatoriamente elos da árvore, sendo cada elo mantido com probabilidade $p \in [0, 1]$, ou removido com a probabilidade complementar, independentemente dos demais elos. Recordemos que a probabilidade de que um componente conectado infinito permaneça na árvore é 0 ou 1 e que o parâmetro crítico p_c é o ponto em que ocorre a mudança de 0 para 1 (pois esta probabilidade é não-decrescente em p). Parece claro que, quanto “maior” a árvore, mais provável a existência de um aglomerado infinito para um dado p . Assim, quanto “maior” a árvore, menor deve ser o parâmetro crítico p_c . Essa noção intuitiva é confirmada para as árvores r -árias:

Proposição 3.3 $p_c(\mathbb{T}_r^+) = \frac{1}{r}$, $r \geq 1$.

Prova: É simples, desde que lembremos o processo de ramificação de Galton-Watson. Este modelo representa o tamanho das gerações sucessivas de uma população que evolui por replicações aleatórias independentes e identicamente distribuídas dos indivíduos-pais. Em outras palavras, consideramos partículas capazes de originar novas partículas do mesmo tipo. Uma única partícula forma a geração zero, ou original. Cada partícula tem probabilidade p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) de gerar exatamente k novas partículas; os descendentes diretos da n -ésima geração constituem a $(n + 1)$ -ésima geração. A hipótese básica é que as partículas de cada geração atuam independentemente umas das outras. O processo continua para sempre, ou até que alguma geração se torne extinta. Seja $\mu = \sum_{k \geq 1} k p_k$ o número médio de descendentes de uma única partícula (o tamanho esperado de cada família). Um resultado bastante conhecido sobre o processo de Galton-Watson garante que, se $\mu < 1$, então a extinção é quase certa, isto é, com probabilidade 1 o processo se extingue. Mesmo quando $\mu = 1$ e $p_1 < 1$, também ocorre quase certamente a extinção. Por outro lado, prova-se que, se $\mu > 1$, então com probabilidade positiva o processo não se extingue nunca. (Com probabilidade positiva, todas as gerações têm pelo menos um indiví-

duo). Para as demonstrações destes resultados, veja-se, por exemplo, Durrett [5] ou Karlin e Taylor [10].

Conforme vimos na Seção 2.3, para $r \geq 2$, $p_c(\mathbb{T}_r^+) = \inf \{p : \theta(p) > 0\}$, onde $\theta(p) = P_p(|C(0)| = \infty)$ é a probabilidade de que a raiz 0 de \mathbb{T}_r^+ pertença a um aglomerado infinito. Mas, claramente, $C(0)$ é a árvore da família de um processo de ramificação em que o tamanho das famílias tem distribuição binomial com parâmetros r e p . Então, o aglomerado $C(0)$ é finito se e somente se este processo de ramificação se extingue. Pelos resultados explicados anteriormente, concluímos que $C(0)$ é infinito com probabilidade positiva se e somente se $rp > 1$. Assim:

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p \leq 1/r, \\ > 0 & \text{se } p > 1/r, \end{cases}$$

e $p_c(\mathbb{T}_r^+) = 1/r$ para $r \geq 2$.

No caso $r = 1$, tendo em vista a continuidade da probabilidade, é fácil ver que:

$$\begin{aligned} \theta(p) &= P_p(0 \leftrightarrow \infty) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_p(\text{Os } n \text{ primeiros elos a partir da raiz estão abertos}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 1, \\ 1 & \text{se } p = 1. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Observação 3.1 *Vamos obter $\theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty)$ para a árvore binária \mathbb{T}_2^+ . Em um processo de ramificação, seja $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ a função geradora de probabilidade do tamanho de cada família. Recordemos que, se $0 < p_0 < 1$, então a probabilidade da extinção eventual da família é a menor solução positiva da equação $G(s) = s$.*

Já vimos que o aglomerado $C(0)$ é a árvore da família de um processo de ramificação em que o tamanho de cada família tem distribuição binomial com parâmetros 2 e p . Um cálculo simples mostra que a função geradora de probabilidade associada a este processo é dada por $G(s) = (1 - p + ps)^2$. Como $C(0)$ é finito se e somente se o processo de ramificação se extingue, concluímos que $1 - \theta(p) = P_p(|C(0)| < \infty)$ é

a menor solução positiva da equação $(1-p+ps)^2 = s$. É fácil obter que esta solução é igual a 1 se $p \leq \frac{1}{2}$ e igual a $\frac{(1-p)^2}{p^2}$ se $p > \frac{1}{2}$. Portanto:

$$\theta(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 & \text{se } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

é a probabilidade de que a raiz da árvore binária pertença a um aglomerado infinito em um processo de percolação de elos.

Para as árvores homogêneas, temos um resultado análogo à Proposição 3.3:

Proposição 3.4 $p_c(\mathbb{T}_r) = \frac{1}{r}$, $r \geq 1$.

Prova: Fixado qualquer $r \geq 1$, podemos encarar a árvore \mathbb{T}_r^+ como um subgrafo da árvore \mathbb{T}_r . Desse modo, se \mathbb{T}_r^+ contém um aglomerado infinito, então \mathbb{T}_r também contém um aglomerado infinito, portanto $p_c(\mathbb{T}_r) \leq p_c(\mathbb{T}_r^+) = \frac{1}{r}$.

No entanto, pelo Teorema 2.6, $p_c(\mathbb{T}_r) \geq \frac{1}{r}$, logo vale a igualdade. \square

Finalmente, mostramos que, para a árvore fatorial, existe quase certamente um aglomerado infinito, desde que $p > 0$:

Proposição 3.5 $p_c(\mathbb{T}_!) = 0$.

Prova: Para todo $r \geq 1$, podemos encarar a árvore \mathbb{T}_r^+ contida em $\mathbb{T}_!$. Concluimos então que $p_c(\mathbb{T}_!) \leq p_c(\mathbb{T}_r^+) = \frac{1}{r}$, $\forall r \geq 1$. Fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos o resultado. \square

Obviamente, as Proposições 3.3, 3.4 e 3.5 são válidas para a percolação de sítios.

Capítulo 4

Os conceitos de transitividade, amenabilidade e amenabilidade forte

4.1 Definições

Visando a estudar a transição de fase para a percolação, vamos introduzir algumas características relacionadas à geometria de um grafo. Como referências, citamos os trabalhos de Benjamini e Schramm [2], Häggström, Schonmann e Steif [9] e Lyons e Peres [12]. Observamos inicialmente que os grafos considerados são supostos infinitos, conectados e localmente finitos, mesmo sem menção explícita.

O primeiro conceito a ser apresentado é o de *transitividade*. Intuitivamente, um grafo é *transitivo* quando se parece o mesmo, visto a partir de cada vértice, ou seja, todos os seus vértices são de um mesmo “tipo”; é *quase-transitivo* se há uma quantidade finita de “tipos” de vértices. Para uma definição mais precisa, necessitamos do seguinte conceito. Um *automorfismo* de um grafo $G = (V, E)$ é um isomorfismo de G em si próprio, ou seja, é uma bijeção $\phi : V \rightarrow V$ com a propriedade que, para quaisquer $x, y \in V$, temos que $\{\phi(x), \phi(y)\} \in E$ se e somente se $\{x, y\} \in E$. Para $G = (V, E)$, escrevemos $\text{Aut}(G)$ para o conjunto de todos os automorfismos de G . Então, para quaisquer $x, y \in V$, consideramos a relação que define x como *equivalente* a y se existe $\gamma \in \text{Aut}(G)$ que mapeia x em y . Esta relação é:

- *reflexiva*, devido ao *automorfismo trivial* $I : V \rightarrow V$, dado por $Ix = x, \forall x \in V$.
- *simétrica*, pois se ϕ é um automorfismo que mapeia x em y , então ϕ^{-1} é um

automorfismo que mapeia y em x .

- *transitiva*, pois se ϕ é um automorfismo que mapeia x em y e γ é um automorfismo que mapeia y em z , então $\gamma \circ \phi$ é um automorfismo que mapeia x em z .

Trata-se então de uma *relação de equivalência*, portanto o conjunto V dos vértices de G pode ser particionado em *classes de equivalência*. O grafo é *transitivo* quando a relação de equivalência produz apenas uma classe de equivalência; é *quase-transitivo* se possui um número finito de classes de equivalência de vértices. Em outras palavras:

Definição 4.1 Um grafo $G = (V, E)$ é **transitivo** se e somente se para quaisquer $x, y \in V$, existe $\gamma \in \text{Aut}(G)$ tal que $\gamma(x) = y$.

Um grafo $G = (V, E)$ é **quase-transitivo** se V pode ser particionado em um número finito de subconjuntos V_1, \dots, V_k , tais que, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e quaisquer $x, y \in V_i$, existe um $\gamma \in \text{Aut}(G)$ tal que $\gamma(x) = y$.

Exemplos simples de grafos transitivos são a rede hipercúbica d -dimensional \mathbb{L}^d e a árvore homogênea T_r . Já a árvore r -ária T_r^+ é um grafo quase-transitivo. Em linhas gerais, as características qualitativas dos grafos transitivos são também encontradas nos quase-transitivos. Consideraremos por simplicidade os primeiros, embora observamos que muitos resultados sobre grafos transitivos podem ser estendidos aos grafos quase-transitivos.

Vamos então definir a *amenabilidade* de um grafo $G = (V, E)$. Seja $A \subset V$ um conjunto de vértices. Definimos a *fronteira (exterior) de vértices de A* , denotada $\partial_V A$, como o conjunto dos vértices não em A que são vizinhos a algum vértice em A , ou seja,

$$\partial_V A = \{y \in V \setminus A : \exists x \in A \text{ com } x \sim y\}.$$

Alternativamente, podemos considerar a *fronteira de elos de A* , denotada $\partial_E A$, que é o conjunto dos elos de G com uma extremidade em A e a outra não em A :

$$\partial_E A = \{\{x, y\} \in E : x \in A, y \notin A\}.$$

Recordamos que $|\cdot|$ denota a cardinalidade de um conjunto.

Definição 4.2 *Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito. Definimos a **constante isoperimétrica de elos** (ou **constante de Cheeger**) de G*

$$\iota_E(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : S \subset V, 0 < |S| < \infty \right\},$$

*e a **constante isoperimétrica de vértices** de G*

$$\iota_V(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial_V S|}{|S|} : S \subset V, 0 < |S| < \infty \right\}.$$

*Se $\iota_E(G) = 0$, dizemos que G é **amenável**; se $\iota_E(G) > 0$, dizemos que G é **não-amenável**.*

É importante enfatizar que a definição da constante de Cheeger varia de um artigo para outro: alguns autores a definem como a constante isoperimétrica de vértices. Notamos também que $\iota_E(G) \geq \iota_V(G)$, visto que $|\partial_E S| \geq |\partial_V S|$ para todo $S \subset V$ finito, não-vazio. Por outro lado, se G é de grau limitado, é fácil ver que para todo $S \subset V$ finito, não-vazio, $|\partial_E S| \leq D |\partial_V S|$ (onde D é o grau máximo de G). Assim, se $\iota_E(G) > 0$, então também $\iota_V(G) > 0$, logo $\iota_E(G) = 0$ e $\iota_V(G) = 0$ são equivalentes quando G é de grau limitado. Se G é uma árvore, claramente as constantes isoperimétricas são iguais.

Apresentamos a seguir um conceito essencialmente diferente: a *amenabilidade forte* de um grafo.

Definição 4.3 *Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito. Fixemos um vértice $0 \in V$. Definimos a **constante ancorada isoperimétrica de elos** (ou **constante de Cheeger ancorada**) de G*

$$\iota_E^*(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : 0 \in S \subset V, S \text{ conectado}, n \leq |S| < \infty \right\},$$

*e a **constante ancorada isoperimétrica de vértices** de G*

$$\iota_V^*(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{|\partial_V S|}{|S|} : 0 \in S \subset V, S \text{ conectado}, n \leq |S| < \infty \right\}.$$

Se $\iota_E^(G) = 0$, dizemos que G é **fortemente amenável**; se $\iota_E^*(G) > 0$, dizemos que G é **fracamente não-amenável**.*

Observamos que ‘ $S \subset V$ conectado’ é um abuso de linguagem: significa que o grafo $G(S) = (S, E(S))$ é conectado, onde $E(S) = \{\{x, y\} \in E : x, y \in S\}$. (Ou seja, para quaisquer $x, y \in S$, existe um caminho em G conectando x a y , que utiliza apenas vértices em S). Não é difícil perceber que $\iota_E^*(G)$ e $\iota_V^*(G)$ são limites de seqüências não-decrescentes, os quais estão bem definidos. É fundamental destacar que os seus valores (portanto a noção de amenabilidade forte) não dependem da escolha de 0 em V . Desenvolvemos a seguir a prova deste fato, por ser omitida nas referências conhecidas. A própria definição justifica o nome pelo qual $\iota_E^*(G)$ e $\iota_V^*(G)$ são também conhecidas: **constantes de expansão ancorada**.

Teorema 4.1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito. Os valores de $\iota_E^*(G)$ e $\iota_V^*(G)$ são independentes da escolha do vértice 0 em V .*

Prova: Será feita para $\iota_E^*(G)$; o raciocínio é análogo para $\iota_V^*(G)$. Consideremos x e y dois vértices distintos de G e seja $x = x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{l-1}, x_l = y$ um caminho em G que conecta x a y . Definimos para $n \geq 1$

$$i(n; x) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : x \in S \subset V, S \text{ conectado}, n \leq |S| < \infty \right\}$$

e, para $n \geq l + 1$,

$$i(n; x \leftrightarrow y) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : S \subset V, \text{conectado}, x_j \in S, j = 0, \dots, l, n \leq |S| < \infty \right\},$$

onde ‘ $x \leftrightarrow y$ ’ representa a restrição $x_j \in S, j = 0, \dots, l$.

Como se trata de seqüências não-decrescentes, podemos definir:

$$\iota_E^*(G; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} i(n; x) \quad \text{e}$$

$$\iota_E^*(G; x \leftrightarrow y) = \lim_{n \rightarrow \infty} i(n; x \leftrightarrow y).$$

Observamos que, para todo $n \geq l + 1$, $i(n; x) \leq i(n; x \leftrightarrow y)$, portanto

$$\iota_E^*(G; x) \leq \iota_E^*(G; x \leftrightarrow y). \quad (4.1)$$

Vamos mostrar que vale a igualdade em (4.1), logo podemos supor $0 \leq \iota_E^*(G; x) < \infty$.

Como $i(n; x) \nearrow \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x)$ quando $n \rightarrow \infty$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe n_ε tal que

$$\iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x) - \varepsilon < i(n; x) \leq \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x), \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Para cada $k \geq 1$, fazemos $\varepsilon = 1/k$, portanto existe n_k tal que

$$\iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x) - \frac{1}{k} < i(n; x) \leq \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x), \quad \forall n \geq n_k. \quad (4.2)$$

Porém, pela definição de $i(n_1; x)$, existe $S_1 \subset \mathbf{V}$, conectado, tal que $x \in S_1$, $n_1 \leq |S_1| < \infty$ e

$$i(n_1; x) \leq \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S_1|}{|S_1|} < i(n_1; x) + 1,$$

logo de (4.2):

$$\left| \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S_1|}{|S_1|} - \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x) \right| < 1.$$

Seja então $m_2 = \max\{n_2, |S_1| + 1\}$. Pela definição de $i(m_2; x)$, existe $S_2 \subset \mathbf{V}$, conectado, tal que $x \in S_2$, $m_2 \leq |S_2| < \infty$ e

$$i(m_2; x) \leq \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S_2|}{|S_2|} < i(m_2; x) + \frac{1}{2},$$

portanto de (4.2):

$$\left| \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S_2|}{|S_2|} - \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x) \right| < \frac{1}{2}.$$

Prosseguindo dessa maneira, concluímos que existe uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$, tal que, para todo $n \geq 1$, temos $S_n \subset \mathbf{V}$, finito, conectado, com $x \in S_n$, $|S_n| < |S_{n+1}|$ e

$$\left| \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S_n|}{|S_n|} - \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x) \right| < \frac{1}{n},$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S_n|}{|S_n|} = \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbf{G}; x). \quad (4.3)$$

Para cada $n \geq 1$, definimos $S'_n = S_n \cup \{x_1, \dots, x_l\}$, então para todo $n \geq 1$, $S'_n \subset \mathbf{V}$ é finito, conectado e $x_j \in S'_n, \forall j = 0, \dots, l$. Além disso, $|S_n| \leq |S'_n| \leq |S_n| + l$ e existe $C < \infty$ tal que $|\partial_{\mathbb{E}} S'_n| \leq |\partial_{\mathbb{E}} S_n| + C$. Assim, para todo $n \geq 1$,

$$\frac{|\partial_{\mathbb{E}} S'_n|}{|S'_n|} \leq \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S_n| + C}{|S_n|},$$

e de (4.3) obtemos:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S'_n|}{|S'_n|} \leq \iota_E^*(\mathbf{G}; x). \quad (4.4)$$

Mas, como $\lim_{n \rightarrow \infty} |S'_n| = \infty$, temos que, para todo $n \geq l + 1$, existe j_n tal que $|S'_j| \geq n$, $\forall j \geq j_n$. De (4.4), concluimos:

$$\inf_{j \geq j_n} \frac{|\partial_E S'_j|}{|S'_j|} \leq \iota_E^*(\mathbf{G}; x),$$

logo para todo $n \geq l + 1$,

$$i(n; x \rightsquigarrow y) \leq \iota_E^*(\mathbf{G}; x)$$

e portanto $\iota_E^*(\mathbf{G}; x \rightsquigarrow y) \leq \iota_E^*(\mathbf{G}; x)$. Assim, tendo em vista (4.1), concluimos que $\iota_E^*(\mathbf{G}; x) = \iota_E^*(\mathbf{G}; x \rightsquigarrow y) = \iota_E^*(\mathbf{G}; y)$ e o teorema está demonstrado. \square

Observação 4.1 *Seja $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo infinito, conectado e localmente finito e fixemos $K \subset \mathbf{V}$, finito, conectado e não-vazio. Para $n \geq |K|$, definimos*

$$i(n; K) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : K \subset S \subset \mathbf{V}, S \text{ conectado}, n \leq |S| < \infty \right\}.$$

Os argumentos da demonstração do Teorema 4.1 nos permitem concluir que $i(n; K) \nearrow \iota_E^(\mathbf{G})$ quando $n \rightarrow \infty$. (Basta tomar $x \in K$ e definir $S'_n = S_n \cup K$ para $n \geq 1$).*

4.2 Relações entre os conceitos

Analisaremos a seguir algumas relações entre os conceitos de transitividade, amenabilidade e amenabilidade forte. Os resultados apresentados encontram-se fundamentalmente em Häggström, Schonmann e Steif [9], porém desenvolvemos as demonstrações omitidas e detalhamos alguns argumentos. Ressaltamos que nesse artigo define-se um grafo G como amenável quando $\iota_V(G) = 0$ e fortemente amenável quando $\iota_V^*(G) = 0$ (veja-se a Observação 4.2, p. 45).

Começamos observando que, para $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito, $\iota_E(G) \leq \iota_E^*(G)$. Vale esta desigualdade, pois, fixado $0 \in V$, temos, para todo $n \geq 1$,

$$\iota_E(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : S \subset V, 0 < |S| < \infty \right\} \leq \\ \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : 0 \in S \subset V, S \text{ conectado}, n \leq |S| < \infty \right\}$$

e o termo à direita na desigualdade forma uma seqüência não-decrescente em n cujo limite é $\iota_E^*(G)$. Assim, concluímos:

Proposição 4.1 *Um grafo fortemente amenável é amenável, ou, de modo equivalente, um grafo não-amenável é fracamente não-amenável.*

É importante salientar entretanto que os conceitos de amenabilidade e amenabilidade forte são essencialmente distintos. A fim de entender isso, apresentamos um grafo G para o qual $\iota_E(G) = 0$, mas $\iota_E^*(G) > 0$. Um grafo amenável porém não fortemente amenável pode ser obtido anexando uma seqüência de caminhos de comprimentos $1, 2, \dots$ a uma seqüência muito esparsa de vértices de um grafo não-amenável. Para esclarecer plenamente esta afirmação, consideremos $G = (V, E)$ o grafo obtido a partir da árvore binária da forma descrita a seguir. Sendo 0 a raiz da árvore binária (que será também a raiz de G), escolhemos uma seqüência $\{x_0^n\}_{n \geq 1}$ de vértices da árvore binária tal que $\delta(x_0^n, 0) = \delta(x_0^n, x_0^{n+1}) = 2^n$ para $n \geq 1$. Em seguida, para cada $n \geq 1$, anexamos a x_0^n um caminho de vértices (novos) x_1^n, \dots, x_n^n , de modo que G seja também uma árvore.

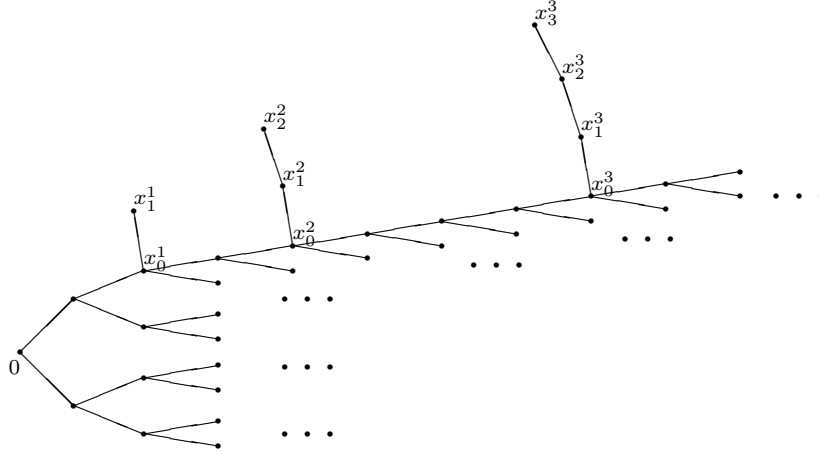


Figura 4.1: Uma representação do grafo G .

Proposição 4.2 *O grafo G definido anteriormente é amenável porém fracamente não-amenável, ou seja, $0 = \iota_E(G) < \iota_E^*(G)$.*

Prova: Para provar que $\iota_E(G) = 0$, basta mostrar uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$, tal que, para todo $n \geq 1$, S_n é um subconjunto finito e não-vazio de V e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = 0. \quad (4.5)$$

Seja $S_n = \{x_1^n, \dots, x_n^n\}$, $n \geq 1$. É claro que, para $n \geq 1$, $|S_n| = n$ e $|\partial_E S_n| = 1$, logo vale (4.5) e o grafo G é amenável.

Fixado 0 a raiz de G , a fim de concluir que $\iota_E^*(G) > 0$, provaremos que

$$\inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : 0 \in S \subset V, S \text{ conectado}, |S| < \infty \right\} > 0. \quad (4.6)$$

Sendo $V' = \bigcup_{j \geq 1} \{x_1^j, \dots, x_j^j\}$, notamos inicialmente que, para qualquer $S \subset V \setminus V'$, finito, conectado, tal que $0 \in S$,

$$\frac{|\partial_E S|}{|S|} > 1. \quad (4.7)$$

Isto ocorre porque, sendo $S = \{0\}$, temos $|S| = 1$ e $|\partial_E S| = 2$, e, a cada inclusão em S de um novo vértice em $V \setminus V'$ que mantenha a propriedade ‘conectado’, estaremos acrescentando a $|S|$ o valor 1 e a $|\partial_E S|$ um valor igual a 1 ou 2.

Consideremos então qualquer $S \subset \mathbf{V}$, finito, conectado, tal que $0 \in S$ e $S \cap \mathbf{V}' \neq \emptyset$ e seja x_i^n um vértice em $S \cap \mathbf{V}'$ cuja distância à raiz seja máxima ($n \geq 1, 1 \leq i \leq n$). Observamos que, como $2^n + n < 2^{n+1} + 1$ para $n \geq 1$ (o que pode ser mostrado por indução para $n \geq 2$), temos que este vértice é unicamente determinado e $S \cap \bigcup_{j \geq n+1} \{x_1^j, \dots, x_j^j\} = \emptyset$. Notamos também que os vértices que compõem o caminho entre 0 e x_0^n (logo os vértices da forma $x_0^i, 1 \leq i \leq n$) pertencem a S .

Assim, se definirmos S' como S unido aos vértices em $\bigcup_{j=1}^n \{x_1^j, \dots, x_j^j\} \cap (\mathbf{V} \setminus S)$, é fácil ver que $|S'| \geq |S|$ e $|\partial_{\mathbf{E}} S'| \leq |\partial_{\mathbf{E}} S|$, portanto

$$\frac{|\partial_{\mathbf{E}} S'|}{|S'|} \leq \frac{|\partial_{\mathbf{E}} S|}{|S|}.$$

Definimos então K como o conjunto formado pelos vértices que compõem o caminho entre 0 e x_0^n unidos a $\bigcup_{j=1}^n \{x_1^j, \dots, x_j^j\}$, logo teremos que $|K| = \frac{n(n+1)}{2} + 2^n + 1$ e $|\partial_{\mathbf{E}} K| = 2^n + 2$. No entanto, uma simples indução mostra que $2^{n+1} \geq n(n+1) - 6$ para $n \geq 4$ e os casos $n = 1, 2$ e 3 são fáceis de verificar. Dessa desigualdade, concluímos que

$$\frac{|\partial_{\mathbf{E}} K|}{|K|} \geq \frac{1}{2}.$$

Finalmente, notamos que $K \subset S'$ e que a inclusão em K dos vértices em $S' \setminus K$ não melhora a desigualdade anterior, isto é,

$$\frac{|\partial_{\mathbf{E}} S'|}{|S'|} \geq \frac{1}{2}.$$

(Mais especificamente, se $S' \setminus K \neq \emptyset$, seja $x \in S' \setminus K$ tal que $K' = K \cup \{x\}$ seja conectado. Então, $x \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{V}'$, $|K'| = |K| + 1$ e $|\partial_{\mathbf{E}} K'| \geq |\partial_{\mathbf{E}} K| + 1$, logo

$$2|\partial_{\mathbf{E}} K'| \geq 2|\partial_{\mathbf{E}} K| + 2 \geq |K| + 2 > |K| + 1 = |K'|.$$

Prosseguindo desse modo, obtemos que $\frac{|\partial_{\mathbf{E}} S'|}{|S'|} \geq \frac{1}{2}$.)

Assim, para qualquer $S \subset \mathbf{V}$, finito, conectado, tal que $0 \in S$ e $S \cap \mathbf{V}' \neq \emptyset$, temos

$$\frac{|\partial_{\mathbf{E}} S|}{|S|} \geq \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

Tendo em vista (4.7) e (4.8), concluímos que vale (4.6), portanto $\iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G}) > 0$. \square

Discutiremos a seguir algumas condições necessárias e suficientes para os conceitos de amenabilidade e amenabilidade forte. Também obteremos uma importante relação: um grafo transitivo e amenável é fortemente amenável.

Tendo em vista a Definição 4.2, concluímos que um grafo $G = (V, E)$ infinito, conectado e localmente finito é amenável se e somente se existe uma *seqüência de Følner* para ele, ou seja, uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos e não-vazios de V , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = 0. \quad (4.9)$$

Notamos que, para que (4.9) seja válida, claramente devemos ter $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = \infty$. As duas proposições seguintes esclarecem se condições adicionais podem ser impostas à seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$. Lembramos que a notação $S_n \nearrow V$ indica que $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = V$.

Proposição 4.3 *Suponhamos que $G = (V, E)$ seja um grafo infinito, conectado e localmente finito. Então, G é amenável se e somente se existe uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos e não-vazios de V , tal que $S_n \nearrow V$ e vale (4.9).*

Prova: Basta mostrar que se G é um grafo amenável, então existe uma seqüência como a descrita no enunciado. Já sabemos, porém, que existe uma seqüência $\{S'_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos e não-vazios de V , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S'_n|}{|S'_n|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |S'_n| = \infty. \quad (4.10)$$

Fixamos então $0 \in V$ um vértice arbitrário e definimos $B(n)$ como o conjunto dos vértices de G cuja distância a 0 é menor ou igual a n (para cada $n \geq 1$). Para $\{n_k\}$ uma seqüência de números inteiros tendendo a infinito, podemos definir $\{S_k\}$ por

$$S_k = S_{k-1} \cup B(k) \cup S'_{n_k}.$$

Para qualquer seqüência $\{n_k\}$, é claro que $S_k \nearrow V$. Além disso, se os n_k 's são escolhidos suficientemente esparsos, teremos que $\{S_k\}$ é uma seqüência de Følner.

Mais precisamente, sejam $n_1 = 1$ e $S_1 = B(1) \cup S'_{n_1}$. De (4.10), concluímos que existe $n_2 > n_1$ tal que

$$\frac{|\partial_E S'_{n_2}|}{|S'_{n_2}|} \leq \frac{1}{4} \frac{|\partial_E S_1|}{|S_1|} \quad e$$

$$|S'_{n_2}| \geq 4 \frac{|S_1|}{|\partial_E S_1|} (|\partial_E B(2)| + |\partial_E S'_{n_1}|).$$

Fazendo $S_2 = S_1 \cup B(2) \cup S'_{n_2} = B(2) \cup S'_{n_1} \cup S'_{n_2}$, temos:

$$\frac{|\partial_E S_2|}{|S_2|} \leq \frac{|\partial_E B(2)| + |\partial_E S'_{n_1}| + |\partial_E S'_{n_2}|}{|S'_{n_2}|} \leq \frac{1}{2} \frac{|\partial_E S_1|}{|S_1|}.$$

Novamente de (4.10), existe $n_3 > n_2$ tal que

$$\frac{|\partial_E S'_{n_3}|}{|S'_{n_3}|} \leq \frac{1}{4} \frac{|\partial_E S_2|}{|S_2|} \quad e$$

$$|S'_{n_3}| \geq 4 \frac{|S_2|}{|\partial_E S_2|} (|\partial_E B(3)| + |\partial_E S'_{n_1}| + |\partial_E S'_{n_2}|),$$

logo definindo $S_3 = S_2 \cup B(3) \cup S'_{n_3} = B(3) \cup S'_{n_1} \cup S'_{n_2} \cup S'_{n_3}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_E S_3|}{|S_3|} &\leq \frac{|\partial_E B(3)| + |\partial_E S'_{n_1}| + |\partial_E S'_{n_2}| + |\partial_E S'_{n_3}|}{|S'_{n_3}|} \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{|\partial_E S_2|}{|S_2|} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{|\partial_E S_1|}{|S_1|}. \end{aligned}$$

Prosseguindo dessa forma, obteremos uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ com as propriedades desejadas. \square

Proposição 4.4 *Suponhamos que $G = (V, E)$ seja um grafo infinito, conectado e localmente finito. Então, G é amenável se e somente se existe uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos, conectados e não-vazios de V , tal que vale (4.9).*

Prova: Se G é amenável, sabemos que existe uma seqüência $\{S'_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos e não-vazios de V , tal que vale (4.10). Para cada $n \geq 1$, podemos escrever $S'_n = \bigcup_{i \in I_n} S'_{n,i}$, onde $S'_{n,i}$, $i \in I_n$, são os componentes conectados não-vazios de S'_n .

Notamos então que, para todo $n \geq 1$,

$$\partial_E S'_n = \bigcup_{i \in I_n} \partial_E S'_{n,i},$$

onde a união é disjunta. A fim de mostrar isso, observamos que, se $e \in \partial_{\mathbb{E}} S'_n$, e conecta um vértice x em algum $S'_{n,i}$ a um vértice y fora de S'_n , portanto fora de $S'_{n,i}$. Por outro lado, se $e \in \partial_{\mathbb{E}} S'_{n,i}$ para algum $i \in I_n$, temos que e conecta um vértice x em $S'_{n,i} \subset S'_n$ a um vértice y que não pertence a S'_n . (Se y pertencesse a S'_n , teria que estar em $S'_{n,i}$, logo $e \notin \partial_{\mathbb{E}} S'_{n,i}$).

Suponhamos por absurdo que exista $\varepsilon > 0$ tal que $|\partial_{\mathbb{E}} S'_{n,i}| \geq \varepsilon |S'_{n,i}|$ para todo $n \geq 1$ e qualquer $i \in I_n$. Neste caso, teríamos, para todo $n \geq 1$:

$$|\partial_{\mathbb{E}} S'_n| = \sum_{i \in I_n} |\partial_{\mathbb{E}} S'_{n,i}| \geq \varepsilon \sum_{i \in I_n} |S'_{n,i}| = \varepsilon |S'_n|,$$

o que contradiz (4.10).

Assim, concluímos que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem $n \geq 1$ e $i \in I_n$ tais que $|\partial_{\mathbb{E}} S'_{n,i}| < \varepsilon |S'_{n,i}|$. A partir daí, é simples obter uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos, conectados e não-vazios de \mathbb{V} , tal que vale (4.9). \square

Para $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo infinito, conectado e localmente finito, seja

$$\iota'_{\mathbb{E}}(\mathbb{G}) = \inf \left\{ \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S|}{|S|} : 0 \in S \subset \mathbb{V}, S \text{ conectado}, |S| < \infty \right\}, \quad (4.11)$$

onde $0 \in \mathbb{V}$ é um vértice fixado. Mostraremos a seguir que, em vez de usar a constante de Cheeger ancorada $\iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbb{G})$, podemos definir a amenabilidade forte em termos desta constante. É importante ressaltar entretanto que, quando positivo, o valor de $\iota'_{\mathbb{E}}(\mathbb{G})$ pode depender da escolha de 0 em \mathbb{V} . Para ver isso, consideramos $\mathbb{G} = \mathbb{T}_1$; os detalhes encontram-se no Exemplo 4.9, p. 54. Como $\iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbb{G})$ não depende da escolha de 0 em \mathbb{V} , é considerada uma constante melhor que $\iota'_{\mathbb{E}}(\mathbb{G})$ quando se objetiva estimar pontos críticos e outras características numéricas de um grafo.

A fim de provar que a amenabilidade forte pode ser definida em termos de $\iota'_{\mathbb{E}}(\mathbb{G})$, notamos que claramente $\iota'_{\mathbb{E}}(\mathbb{G}) \leq \iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbb{G})$, logo $\iota_{\mathbb{E}}^*(\mathbb{G}) = 0$ implica que $\iota'_{\mathbb{E}}(\mathbb{G}) = 0$ qualquer que seja o vértice $0 \in \mathbb{V}$ escolhido. Por outro lado, temos:

Proposição 4.5 *Suponhamos que $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ seja um grafo infinito, conectado e localmente finito. Se $\iota'_{\mathbb{E}}(\mathbb{G}) = 0$ para algum $0 \in \mathbb{V}$, então \mathbb{G} é fortemente amenável.*

Prova: Se, fixado $0 \in \mathbf{V}$, tivermos que $\iota'_E(\mathbf{G}) = 0$, então existe uma seqüência $\{S'_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos e conectados de \mathbf{V} , tal que $0 \in S'_n, \forall n \geq 1$, e vale (4.10).

Como $\lim_{j \rightarrow \infty} |S'_j| = \infty$, temos que, para todo $n \geq 1$, existe j_n tal que $|S'_j| \geq n, \forall j \geq j_n$. Para cada $n \geq 1$, consideramos a seqüência $\{S'_j\}_{j \geq j_n}$, portanto para todo $n \geq 1$:

$$\inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : 0 \in S \subset \mathbf{V}, S \text{ conectado}, n \leq |S| < \infty \right\} = 0.$$

Tendo em vista a definição de $\iota_E^*(\mathbf{G})$ e o fato desta constante não depender da escolha de 0 em \mathbf{V} , concluímos que $\iota_E^*(\mathbf{G}) = 0$. \square

Assim, $\iota'_E(\mathbf{G}) = 0$ é uma definição equivalente de amenabilidade forte. Dessa observação, decorre o seguinte corolário à Proposição 4.4:

Proposição 4.6 *Suponhamos que $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ seja um grafo infinito, conectado, localmente finito e transitivo. Então, \mathbf{G} é amenável se e somente se é fortemente amenável.*

Prova: Se \mathbf{G} é amenável, existe uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos, conectados e não-vazios de \mathbf{V} , tal que vale (4.9). Fixado qualquer $0 \in \mathbf{V}$, pela transitividade de \mathbf{G} , podemos sem perda de generalidade considerar que $0 \in S_n, \forall n \geq 1$, portanto $\iota'_E(\mathbf{G}) = 0$. \square

Finalmente, utilizando a Observação 4.1 (p. 37), podemos provar uma nova condição necessária e suficiente para a amenabilidade forte: um grafo é fortemente amenável se e somente se existe uma seqüência de Følner $\{S_n\}_{n \geq 1}$ com ambas as características impostas nas Proposições 4.3 e 4.4 (isto é, $S_n \nearrow \mathbf{V}$ e S_n 's conectados).

Proposição 4.7 *Suponhamos que $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ seja um grafo infinito, conectado e localmente finito. Então, \mathbf{G} é fortemente amenável se e somente se existe uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos, conectados e não-vazios de \mathbf{V} , tal que $S_n \nearrow \mathbf{V}$ e vale (4.9).*

Prova: Uma implicação é trivial: se existe uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ como a descrita no enunciado, tomando qualquer $0 \in S_1$, concluímos que $\iota'_E(\mathbf{G}) = 0$, logo \mathbf{G} é fortemente amenável.

A fim de mostrar a recíproca, fixamos $0 \in \mathbf{V}$ e novamente consideramos $B(n)$ o conjunto dos vértices de \mathbf{G} com distância a 0 no máximo n . Notamos então que se $\iota_E^*(\mathbf{G}) = 0$, pela Observação 4.1, dado qualquer $K \subset \mathbf{V}$, finito, conectado e não-vazio, temos que $i(n; K) = 0, \forall n \geq |K|$.

Recordamos a definição de $i(n; K)$:

$$i(n; K) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : K \subset S \subset \mathbf{V}, S \text{ conectado}, n \leq |S| < \infty \right\}.$$

Assim, sendo x um vértice qualquer de \mathbf{G} , como $i(1; \{x\}) = 0$, existe $S_1 \subset \mathbf{V}$, finito, conectado, tal que $x \in S_1$ e

$$\frac{|\partial_E S_1|}{|S_1|} < 1.$$

Definimos $K_1 = B(1) \cup S_1 \cup V_1$, onde V_1 é um conjunto *finito* de vértices escolhido de forma que K_1 seja conectado. Visto que $i(|K_1|; K_1) = 0$, existe $S_2 \subset \mathbf{V}$, finito, conectado, tal que $K_1 \subset S_2$ e

$$\frac{|\partial_E S_2|}{|S_2|} < \frac{1}{2}.$$

Prosseguindo desse modo, obteremos uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ com as propriedades desejadas. □

Observação 4.2 *Se tivéssemos definido um grafo \mathbf{G} como **amenável** quando $\iota_V(\mathbf{G}) = 0$ e **fortemente amenável** quando $\iota_V^*(\mathbf{G}) = 0$, os principais resultados que apresentamos continuariam válidos (com as devidas mudanças: por exemplo, a substituição de $\partial_E S_n$ por $\partial_V S_n$ em (4.9)).*

Uma diferença que merece ser destacada é que, para a Proposição 4.4, precisaríamos da hipótese adicional ‘ \mathbf{G} de grau limitado’ (sendo bastante simples a adaptação na prova). No entanto, isso não mudaria nada na Proposição 4.6.

4.3 Exemplos

Apresentaremos os valores da constante de Cheeger e da constante de Cheeger ancorada para alguns grafos. As provas baseiam-se nas definições das constantes, e são feitos comentários com respeito aos resultados estabelecidos na seção anterior.

Exemplo 4.1 Para $G = \mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ a rede hipercúbica d -dimensional ($d \geq 1$), temos

$$\iota_{\mathbb{E}}(G) = 0.$$

Assim, \mathbb{L}^d é amenável.

Prova: Basta mostrar uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 1}$, tal que, para todo $n \geq 1$, S_n é um subconjunto finito e não-vazio de \mathbb{Z}^d e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_{\mathbb{E}} S_n|}{|S_n|} = 0. \quad (4.12)$$

Definimos então $S_n = \{0, 1, \dots, n-1\}^d = \{x \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x^{(i)} \leq n-1 \text{ para todo } i\}$, $n \geq 1$. É claro que, para $n \geq 1$:

$$|\partial_{\mathbb{E}} S_n| = 2d n^{d-1},$$

$$|S_n| = n^d,$$

portanto vale (4.12) e \mathbb{L}^d é amenável. \square

Exemplo 4.2 Para $G = \mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ a rede hipercúbica d -dimensional ($d \geq 1$), temos

$$\iota_{\mathbb{E}}^*(G) = 0.$$

Assim, \mathbb{L}^d é fortemente amenável.

Prova: Fixemos 0 a origem de \mathbb{Z}^d . Para cada $n \geq 1$, a seqüência $\{S_j^n\}_{j \geq n}$ definida por $S_j^n = \{0, \dots, j-1\}^d$ nos permite concluir que são nulos todos os termos da seqüência cujo limite é $\iota_{\mathbb{E}}^*(G)$. \square

Notamos que a seqüência apresentada no Exemplo 4.1 mostra que $\iota'_E(\mathbb{L}^d)$ se anula quando fixamos 0 a origem de \mathbb{Z}^d , o que, tendo em vista as Proposições 4.1 e 4.5, já demonstraria os Exemplos 4.1 e 4.2. Na realidade, o Exemplo 4.1 implica imediatamente o Exemplo 4.2, visto que \mathbb{L}^d é um grafo transitivo (Proposição 4.6). Observamos também que poderíamos ter mostrado o Exemplo 4.2 utilizando a Proposição 4.7 (definindo por exemplo $S_n = \{-n, \dots, n\}^d = \{x \in \mathbb{Z}^d : -n \leq x^{(i)} \leq n \text{ para todo } i\}$, $n \geq 1$).

Exemplo 4.3 Para $G = T_r$ a árvore homogênea de grau $r + 1$ ($r \geq 1$),

$$\iota_E(G) = r - 1.$$

Assim, se $r \geq 2$, T_r é não-amenável.

Prova: Mostraremos inicialmente que, para qualquer $S \subset V$ finito, não-vazio,

$$\frac{|\partial_E S|}{|S|} \geq r - 1. \quad (4.13)$$

Isto será feito por indução em $|S|$ (claro que para $r \geq 2$). O caso inicial $|S| = 1$ é simples, pois

$$\frac{|\partial_E S|}{|S|} = \frac{r + 1}{1} = r + 1.$$

Suponhamos então que (4.13) vale para todo $S \subset V$ com $|S| = n \geq 1$, e consideremos $S \subset V$ tal que $|S| = n + 1$. Vamos provar que (4.13) vale para este S . Para isso, basta notar que, como S é finito, existe $x \in S$ com no máximo um vizinho em S , ou seja, $|\{y \in S : y \sim x\}| \leq 1$. Caso isto não acontecesse, todos os vértices de S teriam pelo menos dois vizinhos em S , e S não seria finito. (Lembramos que $G = T_r$ não possui circuitos). Fazemos então $S' = S \setminus \{x\}$, onde x é um vértice de S com no máximo um vizinho em S . Se x não tem nenhum vizinho em S , temos $|\partial_E S| = |\partial_E S'| + r + 1$; se x possui apenas um vizinho em S , $|\partial_E S| = (|\partial_E S'| - 1) + r$. De qualquer forma,

$$\begin{aligned} |\partial_E S| &\geq |\partial_E S'| - 1 + r \\ &\geq (r - 1)|S'| + r - 1 \quad (\text{pela hipótese de indução}) \\ &= (r - 1)(|S'| + 1) \\ &= (r - 1)|S|, \end{aligned}$$

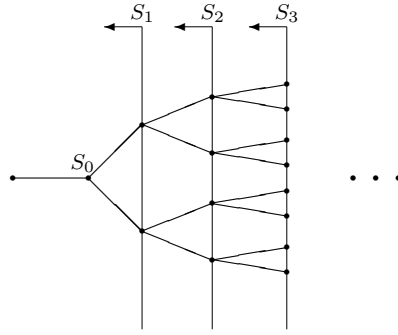


Figura 4.2: Exemplo 4.3: A seqüência $\{S_n\}_{n \geq 0}$ no caso $r = 2$.

e então vale (4.13) para S .

De (4.13), concluímos que $\iota_E(\mathbb{T}_r) \geq r - 1$. O passo final é mostrar que existe uma seqüência $\{S_n\}_{n \geq 0}$, tal que, para todo $n \geq 0$, S_n é um subconjunto finito e não-vazio de V e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = r - 1. \quad (4.14)$$

Vamos definir $\{S_n\}_{n \geq 0}$ indutivamente. Veja-se a Figura 4.2 para o caso $r = 2$. Iniciamos tomando qualquer vértice de G , denotado como origem 0 , e fazendo $S_0 = \{0\}$. Para determinar S_1 , escolhemos r vértices vizinhos à origem, os quais unimos a S_0 . A partir daí, dado S_n , $n \geq 1$, definimos S_{n+1} como S_n unido aos r^{n+1} vértices cuja distância à origem é $n + 1$ e cuja distância a algum vértice em S_n é 1 . Com esta definição, é fácil ver que, para $n \geq 0$:

$$|\partial_E S_n| = 1 + r^{n+1},$$

$$|S_n| = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \begin{cases} n + 1 & \text{se } r = 1, \\ \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} & \text{se } r \geq 2, \end{cases}$$

portanto vale (4.14) e a demonstração está concluída. \square

Exemplo 4.4 Para $G = T_r$ a árvore homogênea de grau $r + 1$ ($r \geq 1$),

$$\iota_E^*(G) = r - 1.$$

Assim, se $r \geq 2$, T_r é fracamente não-amenável.

Prova: Mostraremos que, para qualquer $S \subset V$ finito, conectado e não-vazio,

$$|\partial_E S| = (r - 1)|S| + 2. \quad (4.15)$$

Isto será feito por indução em $|S|$ (claro que para $r \geq 2$). É óbvio o caso inicial $|S| = 1$. Suponhamos então que (4.15) vale para todo $S \subset V$ conectado com $|S| = n \geq 1$, e consideremos $S \subset V$ conectado tal que $|S| = n + 1$. Fazemos então $S' = S \setminus \{x\}$, onde x é um vértice de S com exatamente um vizinho em S . Os mesmos argumentos utilizados no Exemplo 4.3 justificam a existência de x , porém o caso em que x não possui vizinhos em S é excluído, já que S é conectado e $|S| \geq 2$. Notamos também que S' é conectado, portanto:

$$\begin{aligned} |\partial_E S| &= |\partial_E S'| + r - 1 \\ &= (r - 1)|S'| + 2 + r - 1 && \text{(pela hipótese de indução)} \\ &= (r - 1)(|S'| + 1) + 2 \\ &= (r - 1)|S| + 2, \end{aligned}$$

logo (4.15) é válida para S .

De (4.15), concluímos que, fixado qualquer $0 \in V$, o ínfimo na definição de $\iota_E^*(G)$ vale $r - 1$ para todo $n \geq 1$. \square

Para a árvore r -ária, valem resultados semelhantes:

Exemplo 4.5 Para $G = T_r^+$ a árvore r -ária ($r \geq 1$),

$$\iota_E(G) = r - 1.$$

Assim, se $r \geq 2$, T_r^+ é não-amenável.

Prova: É praticamente idêntica à do Exemplo 4.3, com algumas adaptações simples. Mostramos por indução em $|S|$ que, para qualquer $S \subset V$ finito, não-vazio,

$$\frac{|\partial_E S|}{|S|} \geq r - 1.$$

Para $r \geq 2$, temos, no caso inicial $|S| = 1$,

$$\frac{|\partial_E S|}{|S|} = r \text{ ou } r + 1 > r - 1.$$

Na indução, fazemos $S' = S \setminus \{x\}$, onde x é um vértice de S diferente da raiz de T_r^+ , com no máximo um vizinho em S . (Considere-se x um vértice de S com distância à raiz máxima). Já na parte final, definimos S_n como o conjunto dos vértices de T_r^+ cuja distância à raiz é menor ou igual a n . Claramente, para $n \geq 0$:

$$|\partial_E S_n| = r^{n+1},$$

$$|S_n| = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \begin{cases} n + 1 & \text{se } r = 1, \\ \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} & \text{se } r \geq 2, \end{cases}$$

portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = r - 1.$$

□

Exemplo 4.6 Para $G = T_r^+$ a árvore r -ária ($r \geq 1$),

$$\iota_E^*(G) = r - 1.$$

Assim, se $r \geq 2$, T_r^+ é fracamente não-amenável.

Prova: Fixemos 0 a raiz de T_r^+ . Mostraremos que, para qualquer $S \subset V$ finito, conectado, tal que $0 \in S$,

$$|\partial_E S| = (r - 1)|S| + 1. \tag{4.16}$$

Isto será feito por indução em $|S|$ (claro que para $r \geq 2$). No caso inicial $|S| = 1$, temos $S = \{0\}$, que tem grau r . Suponhamos então que (4.16) vale para todo $S \subset V$ conectado, com $0 \in S$ e $|S| = n \geq 1$ e consideremos $S \subset V$ conectado

tal que $0 \in S$ e $|S| = n + 1$. Fazemos $S' = S \setminus \{x\}$, onde x é um vértice de S diferente da raiz 0 , com exatamente um vizinho em S . Então:

$$\begin{aligned} |\partial_E S| &= |\partial_E S'| + r - 1 \\ &= (r - 1)|S'| + 1 + r - 1 && \text{(pela hipótese de indução)} \\ &= (r - 1)(|S'| + 1) + 1 \\ &= (r - 1)|S| + 1. \end{aligned}$$

Assim, o ínfimo na definição de $\iota_E^*(G)$ (com 0 a raiz de G) vale $r - 1$ para todo $n \geq 1$. □

É importante observar que a prova do Exemplo 4.4 poderia evitar a parte final da demonstração do Exemplo 4.3 (em que se constrói a seqüência $\{S_n\}_{n \geq 0}$), já que $\iota_E(G) \leq \iota_E^*(G)$ para qualquer grafo G infinito, conectado e localmente finito. O mesmo comentário é verdadeiro com respeito aos Exemplos 4.5 e 4.6.

Para fechar o capítulo, consideramos a árvore fatorial, um grafo não-amenável para o qual a constante de Cheeger e a constante de Cheeger ancorada são distintas e $\iota_E'(G)$ depende da escolha do vértice:

Exemplo 4.7 *Para $G = T_1$ a árvore fatorial,*

$$\iota_E(G) = 2.$$

Assim, T_1 é não-amenável.

Prova: Mostraremos por indução em $|S|$ que, para qualquer $S \subset V$ finito, não-vazio,

$$\frac{|\partial_E S|}{|S|} \geq 2. \tag{4.17}$$

O caso inicial $|S| = 1$ é óbvio.

Suponhamos então que (4.17) vale para todo $S \subset V$ com $|S| = n \geq 1$, e consideremos $S \subset V$ tal que $|S| = n + 1$. A fim de provar que (4.17) vale para este S , fazemos $S' = S \setminus \{x\}$, onde x é um vértice de S com distância à raiz de T_1

máxima. Assim, x é um vértice de S diferente da raiz de T_1 e tem no máximo um vizinho em S , logo $|\partial_E S| \geq |\partial_E S'| + 4$ ou $|\partial_E S| \geq (|\partial_E S'| - 1) + 3$. De qualquer forma,

$$\begin{aligned} |\partial_E S| &\geq |\partial_E S'| + 2 \\ &\geq 2|S'| + 2 && \text{(pela hipótese de indução)} \\ &= 2(|S'| + 1) \\ &= 2|S|, \end{aligned}$$

portanto vale (4.17) para S .

A fim de concluir a demonstração, basta notar que a raiz de T_1 tem grau 2, então existe $S \subset V$ finito, não-vazio, tal que vale a igualdade em (4.17). \square

Exemplo 4.8 Para $G = T_1$ a árvore fatorial,

$$\iota_E^*(G) = \infty.$$

Assim, T_1 é fracamente não-amenável.

Prova: Fixemos 0 a raiz de T_1 . Começamos observando que, para cada $n \geq 3$, o valor de

$$\inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : 0 \in S \subset V, S \text{ conectado, } |S| = n \right\}$$

é obtido com qualquer $S \subset V$, conectado, tal que $0 \in S$ e cada um dos demais $n - 1$ vértices é escolhido de forma a ficar à menor distância possível da raiz. Para perceber isso, basta notar que a escolha de cada um destes $n - 1$ vértices acrescenta a $|\partial_E S|$ um valor igual ao grau do vértice $- 2$ ($=$ distância do vértice à raiz $+ 1$). (Para um raciocínio mais detalhado, consideremos $S \subset V$, conectado, com $0 \in S$ e $|S| = n \geq 3$ e seja x_0 um vértice em $V \setminus S$ cuja distância à raiz seja mínima. Se, para todo x em S , tivermos que $\delta(x, 0) \leq \delta(x_0, 0)$, então S é da forma descrita anteriormente. Por outro lado, se existe $y \in S$ tal que $\delta(y, 0) > \delta(x_0, 0)$, a substituição em S de um vértice de S com distância à raiz máxima pelo vértice x_0 necessariamente diminui o valor de $|\partial_E S|$.)

A fim de concluir que $\iota_E^*(G) = \infty$, mostraremos que a seqüência que aparece na definição de $\iota_E^*(G)$ possui uma subseqüência divergente.

Para cada $n \geq 1$, definimos $i_n = 1! + 2! + \cdots + n!$. Provaremos a seguir que, para $n \geq 2$,

$$\inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : 0 \in S \subset \mathbf{V}, S \text{ conectado}, i_n \leq |S| < i_{n+1} \right\} = \frac{(n+1)!}{i_n}. \quad (4.18)$$

Notamos que o valor à direita é obtido quando S é o conjunto dos vértices de \mathbf{G} cuja distância à raiz é no máximo igual a $n-1$. Resta-nos então mostrar que, para cada $n \geq 2$, dado $i_n \leq j < i_{n+1}$, temos, para todo $S \subset \mathbf{V}$, conectado, com $0 \in S$ e $|S| = j$,

$$\frac{|\partial_E S|}{|S|} \geq \frac{(n+1)!}{i_n}.$$

Mas, pelo comentário no início da demonstração, fixado $i_n \leq j < i_{n+1}$, temos que, entre todos os subconjuntos $S \subset \mathbf{V}$, conectados, com $0 \in S$ e $|S| = j$, o menor valor de $|\partial_E S|$ é obtido quando todos os vértices de \mathbf{G} com distância à raiz menor ou igual a $n-1$ pertencem a S e os demais $j - i_n$ vértices de S estão à distância n da raiz. Concluimos então que, para todo $S \subset \mathbf{V}$, conectado, com $0 \in S$ e $|S| = j$,

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_E S|}{|S|} &\geq \frac{(n+1)! - (j - i_n) + (j - i_n) \cdot (n+2)}{j} \\ &= \frac{(n+1)! + (j - i_n) \cdot (n+1)}{j}. \end{aligned}$$

Para mostrar que a última expressão é maior ou igual a $\frac{(n+1)!}{i_n}$, basta observar que $(j - i_n)[(n+1)i_n - (n+1)!] \geq 0$. Com isso, (4.18) está demonstrado.

Seja $a_n = \frac{(n+1)!}{i_n}$, $n \geq 2$, temos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+2)!}{i_{n+1}} - \frac{(n+1)!}{i_n} = \frac{(n+2)!i_n - (n+1)!i_{n+1}}{i_n i_{n+1}} \\ &= \frac{(n+2)!i_n - (n+1)!i_n - [(n+1)!]^2}{i_n i_{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)! [i_n(n+1) - (n+1)!]}{i_n i_{n+1}} = \frac{(n+1)!(n+1)(i_n - n!)}{i_n i_{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)!(n+1)i_{n-1}}{i_n i_{n+1}} = \frac{a_n(n+1)i_{n-1}}{i_{n+1}}, \end{aligned}$$

logo

$$a_{n+1} = a_n \left[(n+1) \frac{i_{n-1}}{i_{n+1}} + 1 \right].$$

Assim, a seqüência $\{a_n\}_{n \geq 2}$ é estritamente crescente e, tendo em vista (4.18), concluimos que, para $n \geq 2$,

$$\inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : 0 \in S \subset V, S \text{ conectado}, i_n \leq |S| < \infty \right\} = \frac{(n+1)!}{i_n}. \quad (4.19)$$

Finalmente, para concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, provaremos por indução que, para $n \geq 4$,

$$\frac{(n+1)!(n+1)i_{n-1}}{i_n i_{n+1}} > 1. \quad (4.20)$$

Primeiro, uma simples indução mostra que:

$$(n+1)i_n \geq i_{n+1}, \quad n \geq 2.$$

Supondo que esta desigualdade é válida para n , temos:

$$\begin{aligned} (n+2)i_{n+1} &= (n+2)i_n + (n+2)! > (n+1)i_n + (n+2)! \\ &\geq i_{n+1} + (n+2)! = i_{n+2}. \end{aligned}$$

Supondo então que (4.20) vale para n , temos:

$$\begin{aligned} (n+2)!(n+2)i_n &= (n+2)(n+1)!(n+1)i_n + (n+2)(n+1)!i_n \\ &= (n+2)(n+1)!(n+1)i_{n-1} + (n+2)(n+1)!(n+1)n! \\ &\quad + (n+2)(n+1)!i_n \\ &> (n+2)i_n i_{n+1} + (n+2)!(n+1)! + (n+2)!i_n \\ &= (n+2)i_n i_{n+1} + (n+2)!i_{n+1} \\ &= (n+2)i_{n+1} i_{n+1} \\ &\geq i_{n+1} i_{n+2}. \end{aligned} \quad \square$$

Exemplo 4.9 *Conforme mencionamos na Seção 4.2, quando positivo, o valor de $i'_E(\mathbf{G})$ dado por (4.11) pode depender da escolha de 0 em V . A fim de entender isso, consideremos $\mathbf{G} = \mathbf{T}_1$. Fixando 0 a raiz de \mathbf{G} , não é difícil perceber que $i'_E(\mathbf{G}) = 2$ (os casos $|S| = 1$ e $|S| = 2$ são simples e os demais casos seguem de (4.19) com $n = 2$). Já para 0 qualquer vértice à distância 2 da raiz, um raciocínio semelhante mostra que $i'_E(\mathbf{G}) = 9/4$ (obtido quando S é igual a $\{0\}$ unido aos três vértices de \mathbf{G} de distância à raiz no máximo 1).*

Capítulo 5

Amenabilidade, amenabilidade forte e percolação

Apresentaremos neste capítulo um resultado fundamental, que relaciona a percolação às características de um grafo definidas anteriormente. Lembramos que o nosso objetivo principal é estudar condições sobre um grafo G que garantam a ocorrência de transição de fase, ou seja, $0 < p_c(G) < 1$. Na Seção 2.3, demonstramos um resultado essencial: vale a primeira desigualdade quando G é um grafo infinito, conectado, **de grau limitado** (Teorema 2.6, p. 18). Com relação à segunda desigualdade, mostraremos que é válida para o parâmetro da percolação de elos quando G é um grafo infinito, conectado, localmente finito e **fracamente não-amenável** (e para o parâmetro da percolação de sítios quando $\iota_V^*(G) > 0$).

Teorema 5.1 *Para qualquer grafo $G = (V, E)$ infinito, conectado e localmente finito, temos:*

$$p_c^{\text{elos}}(G) \leq \frac{1}{1 + \iota_E^*(G)} \quad e \quad p_c^{\text{sítios}}(G) \leq \frac{1}{1 + \iota_V^*(G)}.$$

Antes da demonstração, cumpre fazer alguns comentários. O primeiro, que vale a igualdade em ambas as desigualdades quando G é uma árvore homogênea. É importante também destacar que, conforme já explicamos, o teorema garante $p_c^{\text{elos}}(G) < 1$ se $\iota_E^*(G) > 0$, porém o grafo $G = \mathbb{L}^2$ mostra que não é verdadeira a recíproca (vejam-se a Proposição 3.1 e o Exemplo 4.2). Finalmente, observamos que o teorema foi originalmente enunciado com $\iota_E(G)$ e $\iota_V(G)$ no lugar de $\iota_E^*(G)$ e $\iota_V^*(G)$,

respectivamente; algumas adaptações na prova fornecem os limitantes melhores, com as constantes ancoradas. Sobre isso, convém esclarecer que a demonstração que desenvolvemos se baseia em três referências: Benjamini e Schramm [2] (em que se prova a desigualdade com $\iota_V(\mathbf{G})$), Lyons e Peres [12] (desigualdade com $\iota_E(\mathbf{G})$) e algumas idéias de um seminário dado pelo Prof. Dr. Roberto Schonmann (desigualdade com $\iota_E^*(\mathbf{G})$). Destacamos que a prova apresentada é um tanto diferente da demonstração feita nesse seminário (recentemente publicada em Schonmann [13]), já que a última finaliza usando um argumento de grandes desvios.

A seguinte proposição é fundamental na demonstração do Teorema 5.1:

Proposição 5.1 *Seja $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Bernoulli em $\{0, 1\}$ com parâmetro p (ou seja, $P(Y_k = 1) = p = 1 - P(Y_k = 0), \forall k \geq 1$). Dado qualquer $\varepsilon > 0$, consideremos H o evento de que*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k > p - \varepsilon$$

para todo $n \geq 1$. Então, H tem probabilidade positiva.

Prova: [A4,5] Seja $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Bernoulli em $\{0, 1\}$ com parâmetro p . Definimos $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k, n \geq 1$. A fim de mostrar a proposição, podemos supor que $p > 0$. Começamos observando que, pela Lei Forte dos Grandes Números, com probabilidade 1,

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow p \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

o que é equivalente a

$$P \left(\limsup_n \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ou

$$P \left(\liminf_n \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Como $\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \subset \left\{ \frac{S_n}{n} > p - \varepsilon \right\}, \forall n \geq 1$, concluímos:

$$P \left(\liminf_n \left\{ \frac{S_n}{n} > p - \varepsilon \right\} \right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.1)$$

Fixado $\varepsilon > 0$, para cada $m \geq 1$, consideremos o evento

$$B_m = \left\{ \frac{S_n}{n} > p - \varepsilon \text{ para todo } n \geq m \right\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ \frac{S_n}{n} > p - \varepsilon \right\}.$$

Então, a seqüência $\{B_m\}_{m \geq 1}$ é não-decrescente, com

$$B_m \nearrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ \frac{S_n}{n} > p - \varepsilon \right\} = \liminf_n \left\{ \frac{S_n}{n} > p - \varepsilon \right\},$$

portanto, pela continuidade da probabilidade e (5.1):

$$P(B_m) \nearrow 1 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Assim, existe $m_0 > 1$ tal que $P(B_{m_0}) \geq \frac{1}{2}$. Sendo

$$C = \left\{ \frac{S_n}{n} > p - \varepsilon \text{ para todo } 1 \leq n \leq m_0 - 1 \right\},$$

não é difícil perceber que:

$$P(C) \geq P(Y_k = 1 \text{ para todo } 1 \leq k \leq m_0 - 1) = p^{m_0-1} > 0 \quad \text{e}$$

$$P(B_{m_0}|C) \geq P(B_{m_0}).$$

Vale a última desigualdade, pois C e B_{m_0} são eventos crescentes (Desigualdade de Harris-FKG).

Porém, como $H = C \cap B_{m_0}$,

$$P(H) = P(C \cap B_{m_0}) = P(B_{m_0}|C) P(C) \geq P(B_{m_0}) P(C) > 0.$$

□

Esta proposição e a chamada “técnica de crescimento do aglomerado” constituem a chave para demonstrar o Teorema 5.1.

Prova do Teorema 5.1:

A fim de ilustrar a referida técnica tanto em percolação de elos como em percolação de sítios, faremos as demonstrações de ambas as desigualdades, não obstante sejam inteiramente análogas. Iniciamos com a primeira desigualdade, para o que podemos supor $\iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G}) > 0$. Seja então $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo infinito, conectado e localmente finito, com $\iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G}) > 0$. Considerando um processo de percolação de elos em \mathbf{G} , queremos mostrar que $\psi(p) = P_p(\exists x \in \mathbf{V} \text{ com } |C(x)| = \infty) > 0$ para $p > \frac{1}{1 + \iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G})}$.

Para $A \subset \mathbf{V}$ finito e não-vazio, definimos o *aglomerado de A*

$$C(A) = \{x \in \mathbf{V} : x \leftrightarrow y \text{ para algum } y \in A\}$$

e observamos que $C(A) \supset A$.

Fixemos $p > \frac{1}{1 + \iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G})}$. Como $\iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G}) > 0$, temos que $0 \leq \frac{1}{1 + \iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G})} < 1$, logo existe h , $0 < h < \iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G})$, tal que $p > \frac{1}{1 + h}$. (Basta fazer $h = \frac{1}{l} - 1$, onde $\frac{1}{1 + \iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G})} < l < p$). Sejam $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ e $\{Y'_k\}_{k \geq 1}$ duas seqüências independentes de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Bernoulli em $\{0, 1\}$ com parâmetro p . Pela Proposição 5.1, se H é o evento de que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k > \frac{1}{1 + h}$$

para todo $n \geq 1$, então H tem probabilidade positiva.

Fixado um vértice $0 \in \mathbf{V}$, recordamos a definição da constante de Cheeger ancorada de \mathbf{G} :

$$\iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{E}} S|}{|S|} : 0 \in S \subset \mathbf{V}, S \text{ conectado}, n \leq |S| < \infty \right\}.$$

Visto que $0 < h < \iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G})$, concluímos que existe n_0 tal que, para todo $S \subset \mathbf{V}$, conectado, tal que $0 \in S$ e $n_0 \leq |S| < \infty$, temos

$$\frac{|\partial_{\mathbf{E}} S|}{|S|} \geq h. \tag{5.2}$$

Seja então $A = B(n_0) = \{x \in \mathbf{V} : \delta(0, x) \leq n_0\}$.

Utilizando as seqüências $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ e $\{Y'_k\}_{k \geq 1}$, descreveremos um método que permite a construção do aglomerado $C(A)$ em uma amostra honesta do processo de percolação de elos com densidade p em G . Fixemos e_1, e_2, \dots uma ordenação qualquer de E (o que é possível visto E ser infinito enumerável). Definiremos recursivamente uma seqüência (C_k, E_k) finita ou infinita, onde $C_k \subset V$ e $E_k \subset E$. Fazemos inicialmente $C_0 = A$ e $E_0 = \emptyset$. Tendo obtido (C_k, E_k) para algum k , definimos (C_{k+1}, E_{k+1}) como segue. Encontramos o primeiro elo e na ordenação de E com as seguintes propriedades: $e \notin E_k$ e e é incidente a exatamente um vértice de C_k , digamos o vértice x . Declaramos então $\omega(e) = Y_{k+1}$ e fazemos

$$E_{k+1} = E_k \cup \{e\},$$

$$C_{k+1} = \begin{cases} C_k & \text{se } Y_{k+1} = 0, \\ C_k \cup \{y\} & \text{se } Y_{k+1} = 1, \end{cases}$$

onde $e = \{x, y\}$. Se não existe tal elo e (ou seja, se $\partial_E C_k \cap (E \setminus E_k) = \emptyset$), paramos. Neste caso, $C_k = C(A)$ é finito (pois $\partial_E C_k \subset E_k$, logo todos os elos em $\partial_E C_k$ foram declarados fechados) e fazemos $\omega(e_j) = Y'_j$ para os elos restantes $e \in E \setminus E_k$, o que não altera $|C(A)|$ (pois $E \setminus E_k \subset E \setminus \partial_E C_k$).

Se este procedimento nunca termina, então $\partial_E C_k \cap (E \setminus E_k) \neq \emptyset, \forall k \geq 0$, logo $C(A) = \bigcup_{k \geq 0} C_k$ é infinito (visto que, pelo Lema de Borel-Cantelli [A4], o evento $\{Y_k = 1 \text{ infinitas vezes}\}$ tem probabilidade 1). A associação $\omega(e_j) = Y'_j$ para quaisquer elos restantes $e \in E \setminus E_k$ (ou $e \in E \setminus \bigcup_{k \geq 0} E_k$ no caso do procedimento não parar) fornece uma amostra honesta da percolação de elos em G com densidade p (modelo independente, de Bernoulli).

Provaremos a seguir que $C(A)$ é infinito no evento H . Como H tem probabilidade positiva, temos percolação com probabilidade positiva, e a demonstração da primeira desigualdade estará concluída.

Suponhamos então que $C(A)$ seja finito e contenha $|A| + m$ vértices. Sendo C_n e E_n os conjuntos finais selecionados, temos que $C_n = C(A)$ e que o conjunto dos elos fechados em E_n contém $\partial_E C(A)$. Além disso, os componentes conectados determinados pelos elos abertos em E_n são árvores cujos vértices estão em $C(A)$, de modo que a cada elo aberto em E_n corresponde um único vértice em $C(A)$ que

não estava originalmente em A , e vice-versa. Assim, concluímos que $|E_n| = n \geq |\partial_{\mathbf{E}}C(A)| + m$ e $\sum_{k=1}^n Y_k = m$. Se $m = 0$, claramente o evento H não ocorre. Caso $m \geq 1$, observamos que $C(A) \subset \mathbf{V}$ é conectado (herdando os elos de \mathbf{G}), $0 \in A \subset C(A)$ e $n_0 \leq |A| < |C(A)| < \infty$, portanto de (5.2):

$$\frac{|\partial_{\mathbf{E}}C(A)|}{|C(A)|} \geq h.$$

Mas isso implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k &\leq \frac{m}{|\partial_{\mathbf{E}}C(A)| + m} = \frac{1}{1 + |\partial_{\mathbf{E}}C(A)|/m} \\ &< \frac{1}{1 + |\partial_{\mathbf{E}}C(A)|/(|A| + m)} = \frac{1}{1 + |\partial_{\mathbf{E}}C(A)|/|C(A)|} \leq \frac{1}{1 + h}, \end{aligned}$$

logo o evento H não ocorre.

A fim de provar a segunda desigualdade, consideramos um processo de percolação de sítios em um grafo $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ infinito, conectado e localmente finito, com $\iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G}) > 0$, e mostraremos que $\psi(p) = P_p(\exists x \in \mathbf{V} \text{ com } |C(x)| = \infty) > 0$ para $p > \frac{1}{1 + \iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G})}$. A demonstração é análoga à da primeira desigualdade, o que se altera é a construção do aglomerado.

Para $A \subset \mathbf{V}$ finito e não-vazio, definimos o *aglomerado de A*

$$C(A) = \{x \in \mathbf{V} : x \leftrightarrow y \text{ para algum } y \in A\}.$$

É fundamental observar que, por se tratar de percolação de sítios, $C(A)$ pode ser vazio.

Fixemos $p > \frac{1}{1 + \iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G})}$ e seja $0 < h < \iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G})$, tal que $p > \frac{1}{1 + h}$. Consideramos as seqüências $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ e $\{Y'_k\}_{k \geq 1}$ e o evento H definidos como anteriormente. Fixado $0 \in \mathbf{V}$, pela definição de $\iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G})$, existe n_0 tal que, para todo $S \subset \mathbf{V}$, conectado, tal que $0 \in S$ e $n_0 \leq |S| < \infty$, temos

$$\frac{|\partial_{\mathbf{V}}S|}{|S|} \geq h. \tag{5.3}$$

Seja então $A = B(n_0) = \{x \in \mathbf{V} : \delta(0, x) \leq n_0\}$.

É aqui que se estabelece a diferença. Fixemos x_1, x_2, \dots uma ordenação qualquer de V . Definiremos recursivamente uma seqüência (C_k, W_k) finita ou infinita, tal que $C_k, W_k \subset V$ e $W_k \subset \partial_V C_k, \forall k$. Fazemos inicialmente $C_0 = A$ e $W_0 = \emptyset$ e declaramos $\omega(x) = 1, \forall x \in C_0$. Tendo obtido (C_k, W_k) para algum k , definimos (C_{k+1}, W_{k+1}) como segue. Encontramos o primeiro vértice x na ordenação de V com as seguintes propriedades: $x \notin C_k \cup W_k$ e x é vizinho a algum vértice $z \in C_k$. Declaramos então $\omega(x) = Y_{k+1}$ e fazemos

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \begin{cases} C_k & \text{se } Y_{k+1} = 0, \\ C_k \cup \{x\} & \text{se } Y_{k+1} = 1, \end{cases} \\ W_{k+1} &= \begin{cases} W_k \cup \{x\} & \text{se } Y_{k+1} = 0, \\ W_k & \text{se } Y_{k+1} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Se não existe tal vértice x (isto é, se $\partial_V C_k \subset W_k$), paramos. Neste caso, $C_k = C(A)$ é finito (já que todos os vértices em $\partial_V C_k$ foram declarados fechados) e fazemos $\omega(x_j) = Y'_j$ para os vértices restantes $x \in V \setminus (C_k \cup W_k)$, o que não modifica $|C(A)|$.

Se este procedimento não termina, então $\partial_V C_k \setminus W_k \neq \emptyset, \forall k \geq 0$, logo $C(A) = \bigcup_{k \geq 0} C_k$ é infinito (pois $\{Y_k = 1 \text{ infinitas vezes}\}$ tem probabilidade 1). É importante ressaltar que a associação $\omega(x_j) = Y'_j$ para quaisquer vértices restantes $x \in V \setminus (C_k \cup W_k)$ (ou $x \in V \setminus \bigcup_{k \geq 0} (C_k \cup W_k)$ no caso do procedimento não parar) fornece uma amostra *desonesta* da percolação de sítios em G , visto que os vértices em A foram declarados abertos de modo determinístico (os demais seguiram o modelo de Bernoulli (p), independentemente uns dos outros).

No entanto, a probabilidade de que exista um aglomerado infinito em um processo (honesto) de percolação de sítios em G com densidade p não é inferior à probabilidade de que $C(A)$ seja infinito em um processo desonesto em que os vértices de A são declarados abertos, os demais seguindo a lei de Bernoulli (p), de modo independente. Para compreender esta afirmação, sejam

$$P_p = \prod_{x \in V} \mu_x$$

a medida-produto [A6] em $\{0, 1\}^V$ da percolação de sítios em G com densidade p ,

onde $\mu_x(\omega(x) = 1) = p = 1 - \mu_x(\omega(x) = 0)$, e

$$P_p^{des} = \prod_{x \in A} \nu_x \times \prod_{x \in \mathbf{V} \setminus A} \mu_x$$

a medida-produto em $\{1\}^A \times \{0, 1\}^{\mathbf{V} \setminus A}$ do processo “desonesto” de percolação de sítios em \mathbf{G} , onde $\nu_x(\omega(x) = 1) = 1$. Dado $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbf{V}}$, definiremos $\tilde{\omega} \in \{1\}^A \times \{0, 1\}^{\mathbf{V} \setminus A}$, de maneira que, primeiro, se ω tem distribuição P_p , então $\tilde{\omega}$ tem distribuição P_p^{des} ; e, segundo, se $C_\omega(\partial_{\mathbf{V}}A)$ é finito, então $C_{\tilde{\omega}}(A)$ também é (o índice mostra qual configuração determina o aglomerado). Para cada $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbf{V}}$, definimos

$$\tilde{\omega}(x) = 1 - I_{\mathbf{V} \setminus A}(x)(1 - \omega(x)).$$

Este acoplamento simples entre as medidas de percolação fornece

$$P_p(|C(\partial_{\mathbf{V}}A)| < \infty) \leq P_p^{des}(|C(A)| < \infty),$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \psi(p) &= P_p(\exists x \in \mathbf{V} \text{ com } |C(x)| = \infty) \\ &\geq P_p(|C(\partial_{\mathbf{V}}A)| = \infty) \geq P_p^{des}(|C(A)| = \infty). \end{aligned}$$

Mostraremos então que, no processo desonesto, $C(A)$ é infinito com probabilidade positiva, o que completará a demonstração. Para isso, vamos provar que $C(A)$ é infinito no evento H (tendo em vista a construção de $C(A)$ feita anteriormente). Os detalhes são semelhantes aos do caso da percolação de elos.

Suponhamos que $C(A)$ seja finito e contenha $|A| + m$ vértices. Sendo C_n e W_n os conjuntos finais obtidos, temos que $C_n = C(A)$ e $W_n = \partial_{\mathbf{V}}C_n = \partial_{\mathbf{V}}C(A)$, portanto $n = |C_n| - |A| + |W_n| = m + |\partial_{\mathbf{V}}C(A)|$ e $\sum_{k=1}^n Y_k = m$. Se $m = 0$, não ocorre o evento H . Caso $m \geq 1$, observamos que $|\partial_{\mathbf{V}}C(A)| / |C(A)| \geq h$, logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k &= \frac{m}{|\partial_{\mathbf{V}}C(A)| + m} = \frac{1}{1 + |\partial_{\mathbf{V}}C(A)|/m} \\ &< \frac{1}{1 + |\partial_{\mathbf{V}}C(A)|/(|A| + m)} = \frac{1}{1 + |\partial_{\mathbf{V}}C(A)|/|C(A)|} \leq \frac{1}{1 + h}, \end{aligned}$$

e o evento H não ocorre. □

Observação 5.1 *Seria possível definir a construção de $C(A)$ em uma amostra honesta da percolação de sítios em \mathbf{G} com densidade p . Entretanto, tornou-se necessário fazer a amostra “desonesta” (começando-se com $C_0 = A$ e declarando-se $\omega(x) = 1, \forall x \in C_0$) para garantir que $A \subset C(A)$. Desse modo, sob a hipótese de que $C(A)$ seja finito, concluímos que $C(A) \subset \mathbf{V}$ é conectado (herdando os elos de \mathbf{G}), $0 \in A \subset C(A)$ e $n_0 \leq |A| \leq |C(A)| < \infty$, portanto vale (5.3) com $S = C(A)$.*

Para finalizar, observamos que, se \mathbf{G} é um grafo de grau limitado, é fácil ver que se $\iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G}) > 0$, então também $\iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G}) > 0$. Assim, dos Teoremas 2.6 e 5.1, obtemos as desejadas condições para que exista transição de fase:

Teorema 5.2 *Para qualquer grafo $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ infinito, conectado, fracamente não-amenável e de grau limitado, temos:*

$$0 < p_c(\mathbf{G}) < 1.$$

Observação 5.2 *Conforme já destacamos para $\iota_{\mathbf{E}}(\mathbf{G})$ e $\iota_{\mathbf{V}}(\mathbf{G})$, para qualquer grafo $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ infinito, conectado e localmente finito, vale a desigualdade $\iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G}) \geq \iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G})$. Assim, pelo Teorema 5.1, se $\iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G}) > 0$, temos que não só $p_c^{\text{sítios}}(\mathbf{G}) < 1$, como também $p_c^{\text{elos}}(\mathbf{G}) < 1$. Na realidade, para qualquer grafo \mathbf{G} , a condição $p_c^{\text{sítios}}(\mathbf{G}) < 1$ implica $p_c^{\text{elos}}(\mathbf{G}) < 1$, como mostra o seguinte resultado:*

Teorema 5.3 *Para qualquer grafo $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ infinito, conectado e localmente finito, temos:*

$$p_c^{\text{elos}}(\mathbf{G}) \leq p_c^{\text{sítios}}(\mathbf{G}).$$

Como notamos anteriormente, no caso em que \mathbf{G} é de grau limitado com $\iota_{\mathbf{E}}^*(\mathbf{G}) > 0$, então $\iota_{\mathbf{V}}^*(\mathbf{G}) > 0$, logo $p_c^{\text{elos}}(\mathbf{G}) < 1$, bem como $p_c^{\text{sítios}}(\mathbf{G}) < 1$. Na verdade, para qualquer grafo \mathbf{G} de grau limitado, $p_c^{\text{sítios}}(\mathbf{G}) < 1$ é conseqüência de $p_c^{\text{elos}}(\mathbf{G}) < 1$, já que:

Teorema 5.4 *Para qualquer grafo $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ infinito, conectado, de grau máximo D , temos:*

$$p_c^{\text{sítios}}(\mathbf{G}) \leq 1 - (1 - p_c^{\text{elos}}(\mathbf{G}))^D.$$

A prova de ambos os resultados pode ser vista em Grimmett [7].

Observação 5.3 *Várias outras proposições relacionam a percolação às características definidas no Capítulo 4. No que diz respeito ao número de aglomerados infinitos, por exemplo, citamos dois resultados (para a demonstração, consulte-se Lyons e Peres [12]):*

Teorema 5.5 *Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado, localmente finito e transitivo. Então, o número de aglomerados infinitos é constante quase certamente e igual a um dos valores $0, 1$ ou ∞ .*

Teorema 5.6 *Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado, localmente finito, transitivo e amenável. Então,*

$$P_p(\text{Existe no máximo um aglomerado infinito}) = 1.$$

O Teorema 5.6 generaliza a Proposição 3.2, em que consideramos o modelo de percolação em \mathbb{L}^d e mostramos que existe com probabilidade 1 um único aglomerado infinito quando $\theta(p) > 0$. É interessante observar, porém, que, conforme demonstrado por Grimmett e Newman em [8], a situação é diferente para a percolação no grafo (alguma árvore regular) $\times \mathbb{Z}$ (para o qual não se tem a amenabilidade). Para alguns valores do parâmetro p , vale a unicidade, enquanto para outros, existe uma infinidade de aglomerados infinitos disjuntos.

Apêndice A

A probabilidade moderna tem como base a teoria de medida e integração, logo é fundamental para seu estudo certa familiaridade com σ -álgebras, medidas, funções mensuráveis e integrais. Apresentamos então um resumo de conceitos e resultados nessa área, de forma a complementar alguns tópicos que surgiram no desenvolvimento da dissertação. Maiores detalhes das definições, as demonstrações dos teoremas e muito mais podem ser vistos nos livros de Ash [1], Billingsley [3] e Durrett [5].

[A1] Consideremos Ω um conjunto não-vazio qualquer. Uma classe \mathcal{F} de subconjuntos de Ω é denominada uma *álgebra* se contém Ω e é fechada sob a formação de complementares e uniões finitas:

- (a) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (b) $A \in \mathcal{F}$ implica $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
- (c) $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ implica $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$.

Uma classe \mathcal{F} de subconjuntos de Ω é uma σ -*álgebra* se é uma álgebra e é fechada sob a formação de uniões enumeráveis:

- (d) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ implica $A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$.

Dada uma classe \mathcal{A} de subconjuntos de Ω , a menor σ -álgebra que contém os conjuntos de \mathcal{A} é conhecida como a σ -*álgebra gerada por* \mathcal{A} e denotada por $\sigma(\mathcal{A})$. ($\sigma(\mathcal{A})$ é a intersecção de todas as σ -álgebras que contêm \mathcal{A}). Um exemplo fundamental

é com $\Omega = \mathbb{R}^n = \{(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$, em que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, a classe dos *conjuntos borelianos* de \mathbb{R}^n , é definida como a σ -álgebra gerada pela classe dos subconjuntos de \mathbb{R}^n da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : a^{(i)} < x^{(i)} \leq b^{(i)} \text{ para todo } i\}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.

A tripla ordenada (Ω, \mathcal{F}, P) é um *espaço de probabilidade* se:

Ω é um conjunto qualquer não-vazio;

\mathcal{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , cujos elementos são denominados *eventos*;

P é uma *medida de probabilidade* em \mathcal{F} , ou seja, uma função $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

(i) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$,

(ii) $P(\Omega) = 1$ e

(iii) P é *aditiva enumerável*:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

para quaisquer eventos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ que sejam *dois a dois disjuntos* ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$).

Destacamos duas propriedades de uma medida de probabilidade P :

- *Monotonicidade:* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}, A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$.

- *Subaditividade enumerável:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{para quaisquer eventos } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}.$$

Um exemplo de espaço de probabilidade corresponde à escolha aleatória de um ponto no intervalo $[0, 1]$. Neste caso, $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ é formada pelos conjuntos borelianos de \mathbb{R} contidos em $[0, 1]$ e P é a *medida de Lebesgue*, que associa a um intervalo em $[0, 1]$ seu comprimento.

[A2] Dado um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é por definição \mathcal{F} -mensurável se

$$X^{-1}(H) = \{\omega : X(\omega) \in H\} \in \mathcal{F}$$

para todo conjunto $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

No contexto probabilístico, X é chamado um *vetor aleatório*; se $n = 1$, uma *variável aleatória*. Um exemplo trivial, porém útil, de variável aleatória é a *função indicadora* de um evento $A \in \mathcal{F}$:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A, \\ 0 & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

A *distribuição* de uma variável aleatória X é a medida de probabilidade em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dada por

$$\mu(A) = P(X \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Se \mathcal{G} é uma σ -álgebra tal que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, dizemos que um vetor aleatório X n -dimensional é \mathcal{G} -mensurável se $X^{-1}(H) \in \mathcal{G}$ para todo $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Definimos então $\sigma(X)$ a σ -álgebra gerada por X como a menor σ -álgebra com respeito à qual X é mensurável. O seguinte resultado é essencial:

Teorema A.1 *A σ -álgebra $\sigma(X)$ consiste exatamente dos conjuntos $\{\omega : X(\omega) \in H\}$ para $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, uma variável aleatória Y é $\sigma(X)$ -mensurável se e somente se existe uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mensurável, tal que $Y(\omega) = f(X(\omega))$ para todo ω .*

[A3] Introduzimos então os conceitos de independência e esperança em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) :

Os eventos A_1, A_2, \dots, A_n são *independentes* se, para qualquer $I \subset \{1, \dots, n\}$, tivermos

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

As variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n são *independentes* se, quaisquer que sejam $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$,

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i).$$

Finalmente, uma coleção infinita de eventos (ou variáveis aleatórias) é definida *independente* se cada subcoleção finita for independente.

A *esperança* de uma variável aleatória X em (Ω, \mathcal{F}, P) é a integral de Lebesgue de X com respeito à medida de probabilidade P :

$$E(X) = \int X dP = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega).$$

Para X não-negativa, a esperança está sempre definida (podendo ser infinito); para X qualquer, define-se $E(X)$ como $E(X^+) - E(X^-)$, desde que pelo menos uma de $E(X^+)$ e $E(X^-)$ seja finita ($X^+ = \max(X, 0)$ e $X^- = \max(-X, 0)$). Para um estudo aprofundado da integral de Lebesgue, sugerimos que se consulte a bibliografia citada anteriormente. Destacamos duas desigualdades bastante conhecidas:

Teorema A.2 (Desigualdade de Markov)

Seja X uma variável aleatória não-negativa. Para todo $\alpha > 0$:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(X).$$

Teorema A.3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Para quaisquer variáveis aleatórias X e Y ,

$$E|XY| \leq \sqrt{E(X^2) E(Y^2)}.$$

[A4] Um conceito essencial em probabilidade é o de *conjuntos limites*. Para uma seqüência A_1, A_2, \dots de eventos em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , definimos

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

conhecido como o evento $\{A_n \text{ infinitas vezes}\}$, e

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

o evento $\{A_n \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande}\}$.

É fácil ver que $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$; se vale a inclusão oposta, definimos

$$A = \lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n,$$

sendo possível mostrar que

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (\text{Continuidade da Probabilidade}).$$

Em particular, se $A_n \nearrow A$ (ou seja, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$), temos que $P(A_n) \nearrow P(A)$ quando $n \rightarrow \infty$. Sobre conjuntos limites, o seguinte resultado é fundamental:

Teorema A.4 (Lema de Borel-Cantelli)

Seja A_1, A_2, \dots uma seqüência de eventos em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .

(a) Se $\sum_n P(A_n) < \infty$, então $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$.

(b) Se os eventos A_n são independentes e $\sum_n P(A_n) = \infty$, então

$$P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

A segunda parte deste lema foi utilizada na demonstração do Teorema 5.1 (garantiu ser infinito o aglomerado no caso do procedimento de construção não terminar).

[A5] A fim de tratar de convergência de variáveis aleatórias, consideremos X e X_1, X_2, \dots definidas em um mesmo espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Dizemos que X_n converge P -quase certamente (ou com probabilidade 1) para X se o evento

$$\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

tem probabilidade 1. Prova-se que isto é equivalente a

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes}) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Um exemplo importante de convergência quase-certa é dado pela *Lei Forte dos Grandes Números*:

Teorema A.5 *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com esperança finita. Então, com probabilidade 1,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \longrightarrow E(X_1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Outra forma de convergência que utilizamos é *em média de ordem r* : X_n converge em $L^r(P)$ para X , onde $1 \leq r < \infty$, se $E(|X_n|^r) < \infty$ para todo n , $E(|X|^r) < \infty$ e

$$E(|X_n - X|^r) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Os seguintes fatos foram usados na prova da Desigualdade de Harris-FKG (Teorema 2.2):

- Se $r > s \geq 1$, a convergência em L^r implica a convergência em L^s (no caso, com $r = 2$ e $s = 1$).
- Se $X_n \longrightarrow X$ em L^1 , então $E(X_n) \longrightarrow E(X)$ quando $n \rightarrow \infty$.
- Se $X_n \longrightarrow X$ em L^r , então $E(|X_n|^r) \longrightarrow E(|X|^r)$ quando $n \rightarrow \infty$ (com $r = 2$).

[A6] Apresentamos então um conceito fundamental em teoria da medida, o de *espaço-produto*, que foi utilizado na construção do modelo de percolação. Suponhamos que, para cada $i = 1, 2, \dots$, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ seja um espaço de probabilidade, e consideremos o produto cartesiano

$$\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots,$$

definido como o conjunto de todas as seqüências da forma $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, onde $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Definimos um *retângulo mensurável* como um conjunto da forma

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots,$$

onde $A_i = \Omega_i$ para todos a não ser um número finito de valores de i , para os quais $A_i \in \mathcal{F}_i$. Um subconjunto de Ω é então dito *mensurável* se pertence à σ -álgebra \mathcal{F} gerada pela classe de todos os retângulos mensuráveis; costuma-se escrever $\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots$

Um conjunto A em Ω é chamado um *n-cilindro* se, para quaisquer $\omega, \omega' \in \Omega$ tais que $\omega_j = \omega'_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, temos $I_A(\omega) = I_A(\omega')$. Por exemplo, se $A_i \in \mathcal{F}_i$ para $i = 1, \dots, n$, o retângulo mensurável $A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots$ é um *n-cilindro*. É possível provar que se $A \subset \Omega$ é um *n-cilindro* mensurável, então $A = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A'\} = A' \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots$, onde $A' \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$ pertence à σ -álgebra gerada pela classe dos conjuntos da forma $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, n$. Sendo \mathcal{C} a classe de todos os conjuntos mensuráveis que são *n-cilindros* para algum valor de n , não é difícil mostrar que \mathcal{C} é uma álgebra e que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$. Isto explica por que \mathcal{F} é conhecida como a σ -álgebra gerada pelos cilindros finito-dimensionais de Ω . Fundamental é o seguinte resultado:

Teorema A.6 *Para cada $i = 1, 2, \dots$, seja $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ um espaço de probabilidade arbitrário. Consideremos $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ e $\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$. Então, existe uma única medida de probabilidade P em \mathcal{F} tal que*

$$P\{\omega \in \Omega : \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_n \in A_n\} = \prod_{i=1}^n P_i(A_i)$$

para todo $n = 1, 2, \dots$ e quaisquer $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \dots$

A medida P é denominada o *produto* das probabilidades P_i e escrevemos $P = \prod_{i=1}^{\infty} P_i$. O espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) é o *espaço-produto* dos espaços dados.

É importante enfatizar que para a construção do espaço-produto não é essencial que o conjunto I de índices a que i pertença seja o conjunto dos inteiros positivos; qualquer conjunto infinito enumerável pode ser usado. (O espaço $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ consiste, por definição, de todas as funções ω definidas em I tais que $\omega(i) \in \Omega_i, i \in I$). A prova dessa afirmação pode ser feita por uma enumeração de I , isto é, estabelecendo-se uma correspondência biunívoca arbitrária (porém fixada) entre o conjunto I e o conjunto dos inteiros positivos. Assim, dado $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito, consideramos $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mu_0)$ o *espaço de probabilidade de Bernoulli em $\{0, 1\}$ com parâmetro p* , cujos pontos são os dois números reais 0 e 1, com \mathcal{F}_0 a classe de todos os subconjuntos de Ω_0 e $\mu_0(\{1\}) = p = 1 - \mu_0(\{0\})$ ($p \in [0, 1]$ fixado). Para cada $e \in E$, fazemos $(\Omega_e, \mathcal{F}_e, \mu_e) = (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mu_0)$ e formamos o espaço-produto

$$(\Omega_E, \mathcal{F}_E, P_p^E) = \left(\prod_{e \in E} \Omega_e, \prod_{e \in E} \mathcal{F}_e, \prod_{e \in E} \mu_e \right),$$

que é o espaço de probabilidade da percolação de elos em G (modelo de Bernoulli). Observamos que as variáveis aleatórias $\omega(e), e \in E$, são *independentes*, já que, pelo Teorema A.6, para todo $n \geq 1$, quaisquer $e_1, \dots, e_n \in E$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_0$,

$$P_p^E(\omega(e_1) \in A_1, \dots, \omega(e_n) \in A_n) = \prod_{i=1}^n P_p^E(\omega(e_i) \in A_i).$$

No caso de percolação de sítios, o espaço de probabilidade $(\Omega_V, \mathcal{F}_V, P_p^V)$ é definido de maneira análoga. Finalmente, notamos que não é difícil a generalização da teoria de espaços-produto para um número não-enumerável de fatores, o que em nosso estudo não é necessário.

[A7] Abordamos a seguir a Lei 0-1 de Kolmogorov, essencial na demonstração de que a existência de um aglomerado infinito tem probabilidade 0 ou 1 (Teorema 2.5).

Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e consideremos X_1, X_2, \dots uma seqüência de variáveis aleatórias. Seja $\mathcal{F}_n^\infty = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada por X_n, X_{n+1}, \dots (isto é, a menor σ -álgebra com respeito à qual todas as $X_m, m \geq n$, são mensuráveis). Observamos que uma intersecção completamente arbitrária de σ -álgebras é uma σ -álgebra e definimos

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^\infty$$

a σ -álgebra caudal associada à seqüência X_1, X_2, \dots , cujos elementos são denominados *eventos caudais*. Intuitivamente, um evento caudal é aquele cuja ocorrência ou não ocorrência não é afetada por uma mudança nos valores de um número finito das variáveis X_i .

Teorema A.7 (Lei 0-1 de Kolmogorov)

*Suponhamos que X_1, X_2, \dots seja uma seqüência de variáveis aleatórias independentes. Então, a σ -álgebra caudal \mathcal{T} associada a X_1, X_2, \dots é **trivial**, ou seja, para todo evento $A \in \mathcal{T}$, temos $P(A) = 0$ ou 1.*

Ressaltamos que não é fundamental que a seqüência de variáveis aleatórias seja indexada pelo conjunto dos inteiros positivos; basta qualquer conjunto infinito enumerável. Dessa forma, considerando-se um processo de percolação de elos em um grafo $G = (V, E)$ infinito, conectado e localmente finito, a σ -álgebra caudal é dada por

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{B \subset E \text{ finito}} \sigma(\omega(e), e \notin B),$$

onde, para cada $B \subset E$ finito, $\sigma(\omega(e), e \notin B)$ é a menor σ -álgebra com respeito à qual as variáveis aleatórias $\omega(e), e \notin B$, são mensuráveis. Como $\omega(e), e \in E$, são independentes, a hipótese essencial do Teorema A.7 está satisfeita, portanto \mathcal{F}_∞ é trivial.

[A8] Introduzimos então os conceitos de esperança condicional e de martingal, ambos utilizados na prova da Desigualdade de Harris-FKG (Teorema 2.2).

Sejam dados um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , uma σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ e uma variável aleatória X em (Ω, \mathcal{F}, P) tal que $E|X| < \infty$. Definimos a *esperança condicional de X dado \mathcal{G}* , $E(X|\mathcal{G})$, como qualquer variável aleatória Y com as seguintes propriedades:

- (a) Y é \mathcal{G} -mensurável e
- (b) Para todo $A \in \mathcal{G}$, $\int_A X dP = \int_A Y dP$.

Qualquer Y satisfazendo (a) e (b) é dita *uma versão de $E(X|\mathcal{G})$* . É possível mostrar que a esperança condicional existe (conseqüência do Teorema de Radon-Nikodym) e é única (quaisquer duas versões são iguais com probabilidade 1). De (b) com $A = \Omega$, obtemos uma importante propriedade:

$$E(E(X|\mathcal{G})) = E(X).$$

Se $[X_t, t \in T]$ é uma coleção de variáveis aleatórias, denotamos $E(X|X_t, t \in T)$ a esperança condicional $E(X|\mathcal{G})$ com $\mathcal{G} = \sigma(X_t, t \in T)$.

Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias em (Ω, \mathcal{F}, P) , e $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$ uma seqüência não-decrescente de σ -álgebras em \mathcal{F} .

A seqüência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é um *martingal* (com respeito a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$) se, para todo $n \geq 1$, valem as seguintes condições:

- (i) $E|X_n| < \infty$,
- (ii) X_n é \mathcal{F}_n -mensurável e
- (iii) $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$.

O seguinte resultado foi essencial na demonstração da Desigualdade de Harris-FKG:

Teorema A.8 (Convergência L^2 de Martingais)

Se $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é um martingal com $\sup_n E|X_n|^2 < \infty$, então existe uma variável aleatória X_∞ , tal que X_n converge para X_∞ quase certamente e em L^2 .

Um caso de fundamental importância é quando temos X e Z_1, Z_2, \dots variáveis aleatórias em (Ω, \mathcal{F}, P) , com $E|X|^2 < \infty$, e definimos

$$X_n = E(X | Z_1, \dots, Z_n).$$

Utilizando as propriedades da esperança condicional, não é difícil provar que $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é um martingal (com respeito a $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$) e $\sup_n E|X_n|^2 \leq E|X|^2 < \infty$. Pode-se mostrar que o limite X_∞ cuja existência é garantida pelo Teorema A.8 é dado por

$$X_\infty = E(X | \mathcal{F}'), \quad \text{onde } \mathcal{F}' = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n).$$

Na prova da Desigualdade de Harris-FKG, tínhamos $Z_i = \omega(e_i)$ e o limite X_∞ é X (quase certamente), já que $\mathcal{F}' = \sigma(Z_1, Z_2, \dots) = \mathcal{F}$ e X é \mathcal{F} -mensurável.

[A9] Finalmente, apresentamos alguns conceitos de Teoria Ergódica, para esclarecer as noções utilizadas na Seção 3.1 e os argumentos da demonstração da primeira assertiva na prova da Proposição 3.2 (a saber, que o número de aglomerados infinitos em um processo de percolação de elos em \mathbb{L}^d é constante quase certamente).

Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e $T : \Omega \rightarrow \Omega$ um mapeamento \mathcal{F}/\mathcal{F} mensurável que preserva medida, isto é, para todo $A \in \mathcal{F}$, temos que

$$T^{-1}A = \{\omega \in \Omega : T\omega \in A\} \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad P(T^{-1}A) = P(A). \quad (\text{A.1})$$

Observamos que um resultado da Teoria da Medida garante que, para mostrar que T é \mathcal{F}/\mathcal{F} mensurável e preserva medida, basta que se verifique (A.1) para todo A em uma álgebra [mais fracamente, um π -sistema] que gera \mathcal{F} .

Sendo $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} : T^{-1}A = A\}$ a classe dos eventos invariantes, pode-se mostrar que \mathcal{I} é uma σ -álgebra, e que uma variável aleatória X é \mathcal{I} -mensurável se e somente se X é invariante ($X(T\omega) = X(\omega)$ para todo ω). Dizemos então que T é ergódica se \mathcal{I} é trivial, ou seja, para todo $A \in \mathcal{I}$, $P(A) \in \{0, 1\}$. Neste caso, qualquer variável aleatória X invariante é constante quase certamente. (Admitindo-se que X pode assumir os valores $-\infty$ e $+\infty$, temos $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, onde $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

e $\{X < c\} \in \mathcal{I}$ para todo $c \in \bar{\mathbb{R}}$. Definimos $k = \sup \{c \in \bar{\mathbb{R}} : P(X < c) = 0\}$, logo $X = k$ com probabilidade 1.)

O exemplo mais simples de um sistema com estas características é dado pela *translação de Bernoulli*, em que temos um conjunto finito S , com probabilidades p_u (não-negativas e somando 1), e consideramos o espaço-produto $\Omega = S^{\{1,2,\dots\}}$ das seqüências infinitas de elementos de S , com P a medida-produto sobre a σ -álgebra \mathcal{F} gerada pelos eventos cilíndricos. Dado $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$, a *translação* T é definida por

$$T(\omega) = (\omega_2, \omega_3, \dots).$$

É possível mostrar que T é \mathcal{F}/\mathcal{F} mensurável, preserva P e é ergódica. (A ergodicidade segue da Lei 0-1 de Kolmogorov, visto que todo evento invariante é caudal).

No caso de um processo de percolação de elos em \mathbb{L}^d ($d \geq 2$), recordamos que $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ possui uma família natural de translações adquiridas das translações da rede \mathbb{L}^d : dados $\omega \in \Omega$ e $z \in \mathbb{Z}^d$, definimos $T_z\omega \in \Omega$ por

$$(T_z\omega)(\{x, y\}) = \omega(\{x - z, y - z\}) \text{ para } e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^d.$$

Vimos também que as translações são \mathcal{F}/\mathcal{F} mensuráveis e preservam P_p . Como $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ é um espaço-produto, temos a ergodicidade, ou seja, é trivial a σ -álgebra \mathcal{I}_T dos eventos invariantes sob todas as translações ($\mathcal{I}_T = \{A \in \mathcal{F} : T_z^{-1}A = A, \forall z \in \mathbb{Z}^d\} = \{A \in \mathcal{F} : T_zA = A, \forall z \in \mathbb{Z}^d\}$).

O número N de aglomerados infinitos em uma realização do processo é uma variável aleatória *invariante por translação*, já que translações das configurações em Ω não alteram o número de aglomerados infinitos delas:

$$N(T_z\omega) = N(\omega), \forall \omega \in \Omega, \forall z \in \mathbb{Z}^d.$$

Assim, N é constante quase certamente e, por ser não-negativa, concluimos que existe $k \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$, tal que $P_p(N = k) = 1$.

Referências Bibliográficas

- [1] ASH, R. B. *Real analysis and probability*. Academic Press, New York, 1972.
- [2] BENJAMINI, I. E SCHRAMM, O. Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers. *Electronic Communications in Probability* **1** (1996), no. 8, 71-82.
- [3] BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*. 3rd. ed., John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [4] CHAYES, J. T., PUHA, A. L. E SWEET, T. Independent and dependent percolation. *Probability theory and applications* (Princeton, NJ, 1996), 49-166, IAS/Park City Math. Ser., 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [5] DURRETT, R. *Probability: theory and examples*. 2nd. ed., Wadsworth, Belmont, 1996.
- [6] FONTES, L. R. G. *Notas em percolação*. IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
- [7] GRIMMETT, G. *Percolation*. 2nd. ed., Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [8] GRIMMETT, G. R. E NEWMAN, C. M. Percolation in $\infty + 1$ dimensions. *Disorder in physical systems* (Grimmett, G. R. and Welsh, D. J. A. editors), 219-240, Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [9] HÄGGSTRÖM, O., SCHONMANN, R. H. E STEIF, J. E. The Ising model on diluted graphs and strong amenability. *The Annals of Probability* **28** (2000), no. 3, 1111-1137.
- [10] KARLIN, S. E TAYLOR, H. M. *A first course in stochastic processes*. 2nd. ed., Academic Press, New York, 1975.
- [11] KESTEN, H. *Percolation theory for mathematicians*. Birkhäuser, Boston, 1982.

- [12] LYONS, R. E PERES, Y. *Probability on trees and networks*. Cambridge University Press, em preparação, 2001. Versão atual disponível em <http://php.indiana.edu/~rdlyons/>.
- [13] SCHONMANN, R. H. Multiplicity of phase transitions and mean-field criticality on highly non-amenable graphs. *Communications in Mathematical Physics* **219** (2001), 271-322.
- [14] TUTTE, W. T. *Graph theory*. Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.