

**Controlabilidade do rolamento
de uma esfera sobre uma
superfície de revolução**

Laura Maria da Cunha Canto Oliva Biscolla

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: MATEMÁTICA APLICADA
Orientador: Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli

São Paulo
2005

Controlabilidade do rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado devidamente corrigida e defendida por Laura Maria da Cunha Canto Oliva Biscolla e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 22 de dezembro de 2005.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Luciano Barbanti - IME-USP
- Prof. Dr. Diego Colón - UNESP
- Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino - IMECC-UNICAMP

Resumo

O trabalho apresenta inicialmente os conceitos clássicos de rolamento (sem escorregamento e sem pivotamento) de uma superfície sobre outra usando os triedros de Darboux das duas superfícies ao longo das respectivas curvas de contato. Mostra, ainda, a equivalência desses conceitos com outras definições. A seguir, estuda-se a controlabilidade no problema do rolamento de uma esfera sobre uma superfície S de revolução, tanto no caso de rolar sem escorregar como no caso de não escorregar e não pivotar; a controlabilidade visa determinar a atingibilidade entre dois “estados” da esfera (posição em S e orientação), isto é, de elementos do espaço das configurações $S \times SO(3)$. Na seqüência, estabelecem-se condições nos controles para que os rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento ocorram sobre geodésicas de S e obtém-se, também, a controlabilidade nesta situação. Finalmente, verifica-se que, quando S é um plano, 3 ou 4 rolamentos retilíneos, sem escorregamento e sem pivotamento, são suficientes para garantir a atingibilidade entre dois “estados” da esfera.

Abstract

This work starts by presenting the classical concepts of rolling (without slipping and without slipping or twisting) of a surface over another one, using the Darboux referential frames of the two surfaces along their contact curves. It shows the equivalence between these concepts with other definitions. In the sequel one studies the controllability in the rolling problem of a ball over a surface of revolution S , including both: the non slipping and the non slipping or twisting cases; controllability aims to determine the reachability between two “states” of the ball (position on S and orientation), that is, two elements of the configuration space $S \times SO(3)$. It follows by establishing conditions on controls in order that the rollings occur along geodesics of S and by studying the controllability in this situation. Finally, it is shown that if S is the plane, 3 or 4 retilinear moves without slipping or twisting are enough to guarantee reachability between two states of the ball.

*Ao meu pai, grande incentivador
em todos esses anos.*

Agradecimentos

Agradeço inicialmente ao Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli pelo atencioso trabalho de orientação.

Agradeço ao Prof. Dr. Sérgio Muniz Oliva Filho pela atenção dispensada em vários momentos deste trajeto.

Agradeço a todos os amigos do Instituto Superior Técnico de Lisboa que me acolheram na temporada em que estive lá.

Agradeço ao Walter Vicente Fernandes pelo auxílio no trabalho de digitação.

Agradeço também aos colegas Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa, Rita de Cássia Dornelas Sodré Broche e Osnel Broche Cristo, que muito me ajudaram na elaboração do formato final da tese.

Agradeço finalmente a todos os familiares e amigos, em especial ao meu marido, Leonildo, e filhos, Guilherme, Marcelo e Henrique, pelo apoio e carinho que sempre me deram.

Sumário

Introdução	2
1 Rolamentos de superfícies	8
1.1 Relações de Darboux	8
1.2 Rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento	18
1.3 Rolamento sem escorregamento e sem pivotamento na abordagem de Bryant e Hsu	23
1.4 Condições para que o difeomorfismo entre superfícies paralelas transforme geodésica de uma em geodésica da outra	27
1.5 Rolamentos de subvariedades segundo Sharpe	35
2 Controlabilidade no problema do rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução	41
2.1 Sistemas de controle não lineares afins	41
2.2 Condições para não escorregamento e não pivotamento	46
2.3 Ângulos de Euler e o vetor instantâneo de rotação	52
2.4 Sistemas de controle no problema do rolamento	58
2.5 Condições para a verificação da completa não integrabilidade das distribuições \mathcal{D} e \mathcal{D}_1	67
3 Controlabilidade no problema do rolamento de uma esfera sobre geodésicas de uma superfície de revolução	75
4 Uma solução fraca do problema de Kendall	88

Introdução

Num artigo de 1983, Hammersley ([9]) analisa o seguinte problema, por ele chamado de problema de Kendall: considera-se uma bola de raio $\delta > 0$ apoiada sobre um plano horizontal. A bola está com orientação, ou seja, existe um referencial ortonormal positivo preso a ela. Cada “estado” da bola é definido pelo ponto do plano onde ela se apóia e pela posição do referencial a ela preso com relação a um referencial ortonormal positivo fixo no espaço. Um movimento da bola é uma rotação com eixo paralelo ao plano descrevendo uma reta nesse plano e de tal modo que não haja escorregamento da bola. O problema de Kendall visa determinar a quantidade N necessária e suficiente de tais movimentos que permita levar a bola de um estado qualquer E_1 para um estado final E_2 sem efetuar pivotamento na bola. Tal problema está resolvido em [9] com uma solução extremamente complexa e de difícil leitura. No capítulo 4 apresentamos uma solução fraca do referido problema.

A maneira geométrica simples de ver o problema de Kendall (plano) permite apresentar essa solução fraca através de dois fatos fundamentais. O fato 2 é extremamente interessante e permite resolver algumas questões por meio de construções geométricas com régua e compasso. Essa apresentação motivará estudos futuros para o mesmo problema quando a esfera rolar sobre algumas superfícies especiais como a esfera, o cone, o cilindro, etc.

O problema do rolamento de uma bola sobre um plano admite uma interpretação em teoria de controle (ver Jurdjevic ([14])). Uma generalização foi lá considerada

substituindo-se o plano por uma superfície esférica de raio R e outras generalizações e variações foram também propostas no final de [9].

A consideração desses problemas coloca em evidência a relevância dos métodos e idéias da teoria de controle e da teoria geométrica correspondente. Apresenta de forma simples vários problemas de geometria de sistemas não holônomos, especialmente no que diz respeito à cinemática envolvida.

Quando uma bola rola num plano descrevendo uma reta (geodésica do plano) significa também que a curva de contato na bola é um círculo máximo (geodésica da esfera) e, além disso, o movimento sem escorregamento dá-se, também, sem pivotamento. No intuito de formular de maneira precisa esses conceitos, passamos a considerar, inicialmente, o estudo do rolamento sem escorregamento e sem pivotamento de uma superfície Σ_1 sobre uma outra superfície fixa Σ_2 . No capítulo 1, seção 1.3, procuramos exibir algumas definições equivalentes para tais rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento e isto ocorre se, e somente se, as duas curvas têm as mesmas curvaturas geodésicas; em particular, se uma das curvas é geodésica em Σ_2 , a outra também é geodésica em Σ_1 , e reciprocamente. O principal instrumento geométrico utilizado foi a construção dos triedros móveis de Darboux nas duas superfícies ao longo das respectivas curvas de contato.

Mostramos, com um exemplo, que uma esfera que rola num plano sem escorregar e sem pivotar pode descrever curvas de contato que não sejam geodésicas. Porém, Bryant e Hsu (ver [5]) demonstraram que se as duas superfícies têm curvaturas de Gauss distintas existem movimentos sem escorregamento e sem pivotamento que necessariamente implicam que as curvas de contato correspondentes sejam geodésicas nas respectivas superfícies. Entretanto, não abordaremos os detalhes de tal demonstração.

Provamos, também, que uma curva contida numa esfera e que possua curvatura

geodésica constante é necessariamente plana (ver proposição 1.9, seção 1.2), logo é um arco de circunferência. Calculamos, ainda, no capítulo 1, seção 1.1, a curvatura geodésica dos paralelos de uma superfície de revolução, desenvolvemos o exemplo do catenóide (superfície de revolução) que é isométrico ao helicóide (superfície regrada) e calculamos as curvaturas geodésicas de algumas curvas especiais que se correspondem isometricamente nas duas superfícies.

R. W. Sharpe (ver[20]) generalizou o estudo dos rolamentos considerando a situação bem geral de uma subvariedade de dimensão $(n - p)$, mergulhada em \mathbb{R}^n , que rola sem escorregar e sem pivotar sobre uma outra subvariedade fixa de \mathbb{R}^n , também de dimensão $(n - p)$, definindo de maneira apropriada tais conceitos de rolamento e mostrando, inclusive, que dada uma curva suave de contato em uma das subvariedades, existe um único movimento sem escorregamento e sem pivotamento que tem a curva dada como curva de contato. Na seção 1.5 fizemos um resumo de algumas dessas idéias de Sharpe.

No estudo da cinemática e da dinâmica do problema de rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução, desenvolvido por Hermans [11], surge uma questão de geometria que consiste em considerar duas “superfícies paralelas”, a saber, a superfície onde rola a esfera e a superfície descrita pelas posições do seu centro de massa, e ver em que condições as imagens de geodésicas de uma delas são geodésicas da outra. É claro que em planos paralelos ou em esferas paralelas as imagens de geodésicas são geodésicas. Deduzimos com detalhes (ver seção 1.4) as restrições a que devem ser submetidas as geodésicas de uma das superfícies para que suas imagens sejam geodésicas da superfície paralela. Isso tudo surgiu porque Hermans definiu as posições da bola pelo seu centro de massa e não pelo ponto de contato com a superfície.

O capítulo 2 trata da controlabilidade no problema de rolamento de uma esfera

de raio suficientemente pequeno sobre uma superfície convexa S de revolução. A controlabilidade visa determinar a atingibilidade entre dois “estados” da esfera (posição em S e orientação), isto é, de elementos do espaço das configurações $S \times SO(3)$. Foram deduzidas na seção 2.2 as condições gerais dos rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento, tanto em coordenadas cartesianas como em coordenadas polares. A seguir retomamos os clássicos ângulos de Euler (coordenadas locais do grupo ortogonal $SO(3)$) e o vetor instantâneo de rotação (ver seção 2.3). Na seção 2.1 fizemos um pequeno resumo dos resultados sobre controlabilidade que foram utilizados no caso desse problema de rolamento (ver teoremas 2.1 e 2.2). Em seguida na seção 2.4 deduzimos os sistemas de controle tanto no problema do rolamento sem escorregamento como no do rolamento sem escorregamento e sem pivotamento. O teorema 2.9 garante que se a curvatura de Gauss da superfície de rolamento S for distinta da curvatura de Gauss da esfera então a distribuição \mathcal{D} de posto constante 2, definida na variedade $S \times SO(3)$, correspondente ao rolamento sem escorregamento e sem pivotamento é uma distribuição não involutiva. Também é não involutiva a distribuição $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}$, de posto constante 3, que determina os rolamentos sem escorregamento. Chamaremos distribuições completamente não integráveis as distribuições “bracket generating” (ver Montgomery [17] - Introdução). Na seção 2.5 mostramos que \mathcal{D} e \mathcal{D}_1 , além de serem não involutivas, são também completamente não integráveis no aberto de $S \times SO(3)$ em que a curvatura de Gauss de S é diferente da curvatura de Gauss da esfera de rolamento (ver teorema 2.11). Como consequência deste último teorema 2.11 e dos resultados sobre controlabilidade de sistemas não lineares afins apresentados na seção 2.1 conclui-se que, quando S é analítica, os sistemas de controle correspondentes às distribuições \mathcal{D} e \mathcal{D}_1 são controláveis (ver teorema 2.12).

No capítulo 3 estabelecemos condições nos controles para que o rolamento sem

escorregamento e sem pivotamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução seja efetuado sobre geodésicas e demonstramos a controlabilidade de tal problema.

Como contribuições neste trabalho podemos mencionar inicialmente a formulação clara e precisa dos conceitos clássicos de rolamento sem escorregamento e sem pivotamento usando as relações de Darboux. Calculamos as curvaturas geodésicas dos paralelos de uma superfície de revolução e de algumas curvas especiais contidas no helicóide e no catenóide afim de deixar bem claro o conceito de curvatura geodésica na situação de interesse do trabalho (rolamento de uma bola sobre uma superfície de revolução). O teorema 1.6 resume bem as idéias gerais e a proposição 1.9 com seu corolário e exemplo mostram que nem sempre as curvas de contato são geodésicas. A proposição 1.12 mostra a equivalência da definição que demos com a de Bryant e Hsu. Na seção 1.5 ligamos nossas definições com a situação geral apresentada por Sharpe e terminamos essa seção resolvendo uma questão proposta por Sharpe sobre o rolamento de uma esfera sobre a linha central do helicóide.

A seguir, na seção 2.2, exprimimos as condições de rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução (ver fórmulas (2.13) e (2.14)) e apresentamos cinco exemplos em que tais equações podem ser colocadas explicitamente. A utilização dos ângulos de Euler permitiu construir os sistemas de controle não lineares associados aos rolamentos sem escorregamento \mathcal{D}_1 e também sem escorregamento e sem pivotamento (eq.(2.13) e (2.14) resp.). A não involutividade de \mathcal{D} aparece no teorema 2.9 precedido de três lemas técnicos. Na seção 2.5 apresentamos a prova da controlabilidade dos dois sistemas de controle associados a \mathcal{D} e \mathcal{D}_1 . O teorema 2.11 com aplicação a cinco exemplos clássicos (e analíticos) mostra que \mathcal{D} e \mathcal{D}_1 são “bracket generating”. O teorema 2.12 dá a prova da controlabilidade no caso analítico e que se aplica aos cinco exemplos dados; este último resultado generaliza um clássico resultado da Teoria de Controle (ver Jurdjevic [14], p.165).

Também interessante é a contribuição que se encontra no capítulo 3 em que se estuda a controlabilidade do problema de rolamento de uma esfera sobre geodésicas de uma superfície de revolução utilizando-se de maneira adequada o teorema da órbita de Sussmann e demonstrando-se que a dimensão da órbita coincide com a dimensão do espaço de configurações.

Capítulo 1

Rolamentos de superfícies

1.1 Relações de Darboux

Sejam Σ_1 e Σ_2 duas superfícies orientadas, mergulhadas em \mathbb{R}^3 . Para fixar idéias, poderemos supor que $\Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ esteja fixa e que $\Sigma_1 \subset \mathbb{R}^3$ irá se mover rigidamente como se fosse a fronteira de um corpo rígido. Durante o movimento, Σ_1 e Σ_2 são tangentes entre si e seja P_0 um ponto comum a ambas num certo instante inicial.

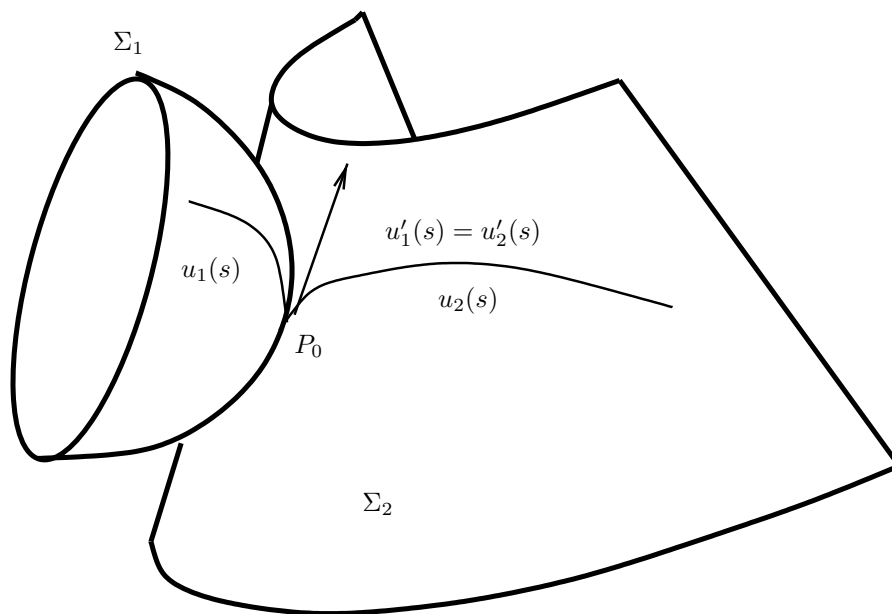


Figura 1.1: Rolamento de Superfícies

Além disso, com o decorrer do tempo, e mantendo-se Σ_1 e Σ_2 em contato, suporemos que surjam duas curvas suaves de contato, $u_i : [0, \ell_i] \rightarrow \Sigma_i$, $i = 1, 2$, e admitiremos que ambas estejam parametrizadas pelos correspondentes comprimentos de arco $s \in [0, \ell_i]$, com $u'_i(s) = t_i(s) \neq 0$. Como foi imaginado, teremos $P_0 = u_1(0) = u_2(0)$ e também $u'_1(0) = u'_2(0)$.

Em cada uma das superfícies teremos um referencial ortonormal positivo móvel; assim $E_i = (t_i, \eta_i, N_i)$ ao longo de $u_i(s)$, $i = 1, 2$, em que $N_i(s)$ é o vetor normal unitário que define a orientação de Σ_i e $\eta_i = N_i \times t_i$ (por simplicidade omitiremos, sempre que possível, o argumento $s \in [0, \ell_i]$).

Há muitos tipos de rolamentos de Σ_1 sobre Σ_2 ; por exemplo, estudaremos os chamados *rolamentos sem escorregamento* e, entre estes últimos, os *rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento*. Vamos tentar caracterizá-los, seguindo algumas idéias desenvolvidas por C. E. Harle em notas não publicadas mas que nos foram cedidas particularmente.

Ao longo da curva $u_i(s)$ contida em Σ_i , $i = 1, 2$, conhecem-se as *relações de Darboux*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt_i}{ds} = k_g^{(i)} \eta_i + h^{(i)} N_i , \\ \frac{d\eta_i}{ds} = -k_g^{(i)} t_i + \tau^{(i)} N_i , \\ \frac{dN_i}{ds} = -h^{(i)} t_i - \tau^{(i)} \eta_i , \end{array} \right. \quad (1.1)$$

onde $k_g^{(i)} = k_g^{(i)}(s)$ é a *curvatura geodésica* de $u_i = u_i(s)$ sobre Σ_i ; analogamente, $\tau^{(i)} = \tau^{(i)}(s)$ é a sua *torção geodésica* e $h^{(i)} = h^{(i)}(s)$ é a sua *curvatura normal*.

Prova das relações de Darboux

Como $\langle t_i, t_i \rangle = 1$ e, derivando em relação a s , vem $\langle \frac{dt_i}{ds}, t_i \rangle = 0$, que acarreta ser $\frac{dt_i}{ds}$ ortogonal a t_i , o que prova a primeira relação, digamos

$$\frac{dt_i}{ds} = \alpha \eta_i + \beta N_i ;$$

analogamente, $\langle \eta_i, \eta_i \rangle = 1$ acarreta

$$\frac{d\eta_i}{ds} = \gamma t_i + \delta N_i .$$

Porém, como $\langle \eta_i, t_i \rangle = 0$, vem que $\langle \frac{d\eta_i}{ds}, t_i \rangle + \langle \eta_i, \frac{dt_i}{ds} \rangle = 0$, ou seja, $\gamma = -\alpha$.

Chamando $\alpha = k_g^{(i)}$ e $\beta = h^{(i)}$ conclui-se que $\gamma = -k_g^{(i)}$; chamando ainda $\delta = \tau^{(i)}$ obtém-se as duas primeiras relações de Darboux.

Para obtermos a terceira relação, derivamos as identidades $\langle N_i, N_i \rangle = 1$, $\langle \eta_i, N_i \rangle = 0$ e $\langle N_i, t_i \rangle = 0$, e isso permite concluir a prova. ■

Observação 1.1 *Recordemos que $u_i = u_i(s)$ é uma geodésica de Σ_i se, e só se, sua aceleração $\frac{dt_i}{ds}$ for ortogonal a Σ_i , logo pela primeira das relações de Darboux vê-se que $u_i(s)$ é geodésica de Σ_i se, e só se, $k_g^{(i)} = k_g^{(i)}(s) = 0$, para todo $s \in [0, \ell_i]$.*

Exemplo 1.2 *Curvaturas geodésicas de um meridiano e de um paralelo de uma superfície de revolução*

Seja S uma superfície de revolução de eixo vertical, cuja equação é dada por

$$z = \psi(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{ou} \quad z = F(r)$$

em que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $F(r) \in C^\infty$.

Todo meridiano de uma superfície de revolução é uma geodésica dessa superfície e portanto sua curvatura geodésica é nula. Voltaremos ao assunto de geodésicas de uma superfície de revolução no capítulo 3 deste trabalho.

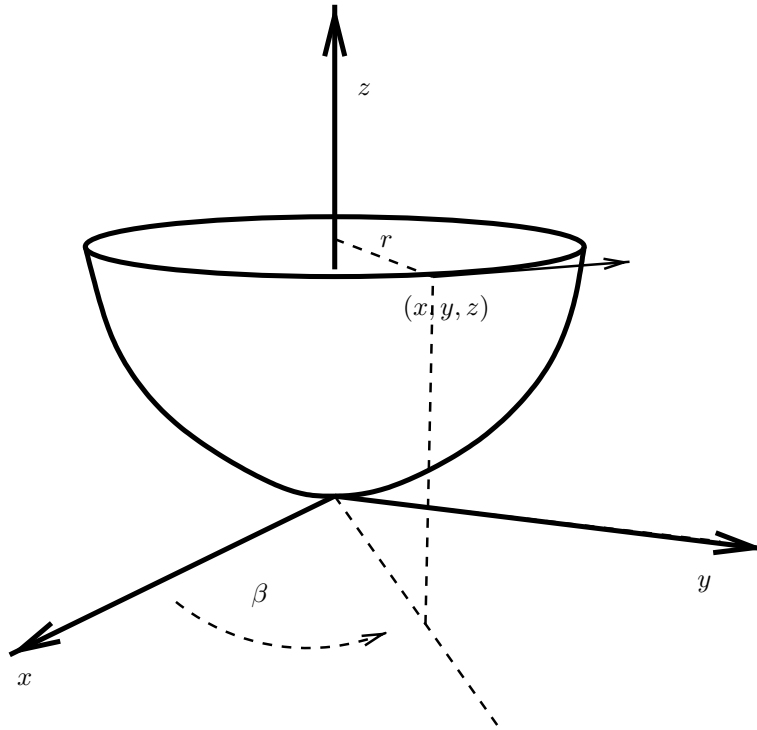


Figura 1.2: Ponto de um paralelo de uma superfície de revolução

Um ponto de um paralelo dessa superfície será dado por:

$$(x, y, z) = (r \cos \beta, r \sin \beta, F(r))$$

com r constante e β sendo o ângulo de rotação em torno de Oz .

A tangente nesse ponto é

$$T = \left(\frac{dx}{d\beta}, \frac{dy}{d\beta}, \frac{dz}{d\beta} \right) = (-r \sin \beta, r \cos \beta, 0) \text{ e } |T| = \sqrt{r^2} = r.$$

Como $\frac{T(\beta)}{r} = (-\sin \beta, \cos \beta, 0)$ tem norma igual a 1, então, considerando o comprimento de arco $s = \beta r$, teremos

$$t(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right)$$

e

$$\frac{dt}{ds} = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \text{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right).$$

Por outro lado, o vetor unitário normal a S é dado por

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\left(-\frac{F'(r)}{r}x, -\frac{F'(r)}{r}y, 1 \right)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}},$$

ou

$$N = \frac{(-F'(r) \cos \beta, -F'(r) \text{sen} \beta, 1)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}}$$

e

$$N(s) = \frac{(-F'(r) \cos(\frac{s}{r}), -F'(r) \text{sen}(\frac{s}{r}), 1)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}}.$$

Calculando então o vetor $\eta(s) = N(s) \times t(s)$ obtemos

$$\eta(s) = \frac{\left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\text{sen}\left(\frac{s}{r}\right), -F'(r) \right)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}}.$$

Como $\frac{dt}{ds} = k_g \eta + hN$, temos que

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \text{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) &= k_g \frac{(-\cos(\frac{s}{r}), -\text{sen}(\frac{s}{r}), -F'(r))}{\sqrt{1 + F'(r)^2}} \\ &\quad + h \frac{(-F'(r) \cos(\frac{s}{r}), -F'(r) \text{sen}(\frac{s}{r}), 1)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}}, \end{aligned}$$

e igualando as componentes obtemos

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right) = k_g \frac{\cos\left(\frac{s}{r}\right)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}} + h \frac{F'(r) \cos\left(\frac{s}{r}\right)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}} \\ \frac{1}{r} \text{sen}\left(\frac{s}{r}\right) = k_g \frac{\text{sen}\left(\frac{s}{r}\right)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}} + h \frac{F'(r) \text{sen}\left(\frac{s}{r}\right)}{\sqrt{1 + F'(r)^2}} \\ h = k_g F'(r), \end{cases}$$

donde se conclui que a curvatura geodésica k_g de um paralelo de uma superfície de revolução é constante e igual a

$$k_g = \frac{1}{r\sqrt{1 + F'(r)^2}}. \quad (1.2)$$

■

Observação 1.3 *Uma mesma curva pode ser um paralelo de diferentes superfícies de revolução, porém, sua curvatura geodésica depende da superfície em que está imersa.*

Consideremos uma esfera de raio R e um plano horizontal de altura h , $0 < h < R$, cuja intersecção com a esfera é uma circunferência de raio \bar{r} . Consideremos, também, um cone circunscrito à esfera segundo esta circunferência de raio \bar{r} .

As equações das três superfícies de revolução são:

(1) Do plano: $z = F(r) = h$, $F'(r) = 0$;

(2) Da esfera: $z = F(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$, onde $r^2 = x^2 + y^2$, $F'(r) = -\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$;

(3) Do cone: $z = F(r) = \frac{R^2 - r\bar{r}}{h}$, $F'(r) = -\frac{\bar{r}}{h}$.

Sabemos que a curvatura geodésica de um paralelo de uma superfície de revolução é $k_g = \frac{1}{\bar{r}\sqrt{1 + F'(\bar{r})^2}}$, logo, a curvatura geodésica da circunferência de raio \bar{r} contida no plano é $k_g = \frac{1}{\bar{r}}$, contida na esfera é $k_g = \frac{\sqrt{R^2 - \bar{r}^2}}{\bar{r}R} = \frac{h}{\bar{r}R}$ e contida no cone é também $k_g = \frac{h}{\bar{r}R}$. ■

Exemplo 1.4 *O helicóide e o catenóide*

Neste exemplo iremos calcular as curvaturas geodésicas de algumas curvas especiais contidas nessas duas superfícies.

O helicóide é uma superfície regradada definida pelos pontos das retas que se apoiam e são ortogonais a uma dada hélice. A equação paramétrica do helicóide se escreve como

$$f(t, r) = g(t) + rv(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R},$$

em que $g(t)$ é uma hélice de passo $2\pi b$, $b > 0$ e que se enrola no cilindro de equação $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, dada por

$$g(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in I,$$

e

$$v(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

é o vetor unitário normal à hélice no ponto $g(t)$. Portanto,

$$f(t, r) = ((a - r) \cos t, (a - r) \sin t, bt), \quad t \in I, \quad r \in \mathbb{R}.$$

O eixo Oz , também denominado “linha central do helicóide” é uma geodésica dessa superfície regradada e as retas de direção $v(t)$ que passam por $g(t)$, com t fixo, também são geodésicas.

Para cada valor de r fixo, $r = \bar{r}$, e t variando no intervalo I , a equação do helicóide define uma hélice de equação

$$g(t) = f(t, \bar{r}) = ((a - \bar{r}) \cos t, (a - \bar{r}) \sin t, bt), \quad t \in I, \quad \text{ou}$$

$$g(t) = (\bar{a} \cos t, \bar{a} \sin t, bt), \quad t \in I,$$

onde $\bar{a} = a - \bar{r}$ e \bar{r} é fixo.

Considerando-se a parametrização pelo comprimento de arco dessa hélice, obtemos

$$g(s) = \left(\bar{a} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \bar{a} \sin\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c} \right), \quad \bar{c} = \sqrt{\bar{a}^2 + b^2}$$

e por derivação em relação a s ,

$$g'(s) = t(s) = \left(-\frac{\bar{a}}{\bar{c}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\bar{c}}\right), \frac{\bar{a}}{\bar{c}} \cos\left(\frac{s}{\bar{c}}\right), \frac{b}{\bar{c}} \right) \quad \text{e} \quad |t(s)| = 1,$$

e também

$$\frac{dt}{ds} = \left(-\frac{\bar{a}}{\bar{c}^2} \cos\left(\frac{s}{\bar{c}}\right), -\frac{\bar{a}}{\bar{c}^2} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\bar{c}}\right), 0 \right).$$

A normal unitária num ponto (t, \bar{r}) da superfície é dada por

$$N = \frac{f_t \times f_r}{|f_t \times f_r|} (r = \bar{r}) = \frac{(b \operatorname{sen} t, -b \cos t, a - \bar{r})}{\sqrt{b^2 + (a - \bar{r})^2}} = \frac{(b \operatorname{sen} t, -b \cos t, \bar{a})}{\bar{c}}$$

e

$$\eta = N \times t = \left(-\cos\left(\frac{s}{\bar{c}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\bar{c}}\right), 0 \right).$$

E como $\frac{dt}{ds} = k_g \eta + hN$, segue que $h = 0$ e $k_g = \frac{\bar{a}}{\bar{c}^2}$, ou seja, a curvatura geodésica

da hélice é constante e não-nula (logo a hélice não é geodésica do helicóide).

A superfície de revolução obtida pela rotação da catenária de equações

$$\begin{cases} x = b \cosh v, \\ z = bv, \end{cases} \quad -\infty < v < +\infty,$$

em torno do eixo Oz , é chamada de *catenóide* e tem a parametrização dada por

$$\begin{cases} x = b \cosh v \cos u, \\ y = b \cosh v \operatorname{sen} u, \\ z = bv, \end{cases} \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty.$$

O catenóide é localmente isométrico ao helicóide pois ambos têm os mesmos coeficientes da primeira forma quadrática (ver [6]).

Como visto em [6], sabemos que o helicóide também pode ser parametrizado localmente por:

$$\begin{cases} x = b \operatorname{senh} v \cos u, \\ y = b \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, \\ z = bu, \end{cases} \quad -\infty < v < +\infty, \quad 0 < u < 2\pi,$$

e a isometria local leva a hélice do helicóide definida por $b \sinh \bar{v}_0 = v_0 = \text{constante}$ (cuja curvatura geodésica, que é constante, vale $k_g^{(1)} = \frac{v_0}{v_0^2 + b^2} = \frac{\sinh \bar{v}_0}{b \cosh^2 \bar{v}_0}$), no paralelo do catenóide, de equações

$$\begin{cases} x = (b \cosh \bar{v}_0) \cos u , \\ y = (b \cosh \bar{v}_0) \sin u , \\ z = b\bar{v}_0, \end{cases} \quad 0 < u < 2\pi;$$

esse paralelo é uma circunferência de raio $r = b \cosh \bar{v}_0$, situado no plano horizontal $z = b\bar{v}_0$ e cuja curvatura geodésica é $k_g^{(2)} = \frac{1}{r \sqrt{1 + F'(r)^2}}$, onde $F(r) = b\bar{v}_0 = b \cosh^{-1}(\frac{r}{b})$, com derivada dada por $F'(r) = \frac{1}{\sinh \bar{v}_0}$. Ou seja,

$$k_g^{(2)} = \frac{\sinh \bar{v}_0}{b \cosh^2 \bar{v}_0} = k_g^{(1)}.$$

Aliás, provaremos adiante que uma isometria entre superfícies preserva curvaturas geodésicas de curvas correspondentes (ver proposição (1.13)).

Note-se $\bar{v}_0 = 0$ define a linha central que é uma geodésica do helicóide; esta é levada, pela isometria, no paralelo de menor raio que é uma geodésica do catenóide (circunferência de raio b).

A isometria local também leva a geodésica do helicóide ($u = u_0 = \text{cte}$) no meridiano do catenóide (geodésica) de equações

$$\begin{cases} x = (b \cos u_0) \cosh v , \\ y = (b \sin u_0) \cosh v , \\ z = bv, \end{cases} \quad -\infty < v < +\infty.$$

■

Voltando aos referenciais ortonormais móveis $E_i = (t_i, \eta_i, N_i)$ ao longo de $u_i(s)$, $i = 1, 2$, e para cada valor de $s \in [0, \ell_i]$, poderemos considerar a aplicação

$I(s) \in SO(3)$ definida univocamente por

$$\begin{aligned} I(s)(t_1) &= t_2 , \\ I(s)(\eta_1) &= \eta_2 , \\ I(s)(N_1) &= N_2 . \end{aligned}$$

Essa correspondência $I : s \in [0, \ell_i] \rightarrow I(s) \in SO(3)$ chama-se *movimento de rolamento sem escorregamento de Σ_1 sobre Σ_2* ao longo das curvas $u_2(s)$ e $u_1(s)$. Trata-se de um tipo de movimento que preserva os comprimentos de arco das duas curvas de contato.

Na próxima seção vamos considerar os movimentos de *rolamento sem escorregamento e sem pivotamento*. Para isso, derivemos, em relação a s , as três igualdades que definem $I(s)$; como $I(s)(t_1(s)) = t_2(s)$, teremos

$$I'(s)t_1(s) + I(s)\frac{dt_1}{ds}(s) = \frac{dt_2}{ds}(s)$$

ou

$$I'(s)I^{-1}(s)t_2(s) = \frac{dt_2}{ds}(s) - I(s)\frac{dt_1}{ds},$$

pois $t_1(s) = I^{-1}(s)t_2(s)$; portanto, usando as relações de Darboux (1.1), obtemos

$$I'(s)I^{-1}(s)t_2(s) = (k_g^{(2)}\eta_2 + h^{(2)}N_2) - I(s)(k_g^{(1)}\eta_1 + h^{(1)}N_1)$$

e, finalmente,

$$I'(s)I^{-1}(s)t_2(s) = (k_g^{(2)} - k_g^{(1)})\eta_2 + (h^{(2)} - h^{(1)})N_2 .$$

De forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} I'(s)I^{-1}(s)\eta_2(s) &= -(k_g^{(2)} - k_g^{(1)})t_2 + (\tau^{(2)} - \tau^{(1)})N_2 , \\ I'(s)I^{-1}(s)N_2(s) &= -(h^{(2)} - h^{(1)})t_2 - (\tau^{(2)} - \tau^{(1)})\eta_2 . \end{aligned}$$

Por outro lado, $I'(s)I^{-1}(s)$ é anti-simétrica. Com efeito, como $I(s)$ é ortogonal, sua inversa é a sua transposta e então podemos derivar $I(s) \cdot {}^t I(s) = I_d$ e obter $I'(s) \cdot {}^t I(s) + I(s) \cdot {}^t I'(s) = 0$, logo

$${}^t(I'(s) \cdot {}^t I(s)) = I(s) \cdot {}^t I'(s) = -I'(s) \cdot {}^t I(s),$$

o que prova ser $I'(s)I^{-1}(s)$ anti-simétrica.

Por um isomorfismo entre matrizes anti-simétricas e elementos de \mathbb{R}^3 podemos garantir que existe um único vetor $\omega(s)$ chamado a direção do *eixo instantâneo de rotação* e tal que

$$\omega(s) \times u = [I'(s)I^{-1}(s)]u ,$$

para todo $u \in \mathbb{R}^3$, que acarreta

$$\omega \times t_2 = (k_g^{(2)} - k_g^{(1)})\eta_2 + (h^{(2)} - h^{(1)})N_2 ,$$

$$\omega \times \eta_2 = -(k_g^{(2)} - k_g^{(1)})t_2 + (\tau^{(2)} - \tau^{(1)})N_2 ,$$

$$\omega \times N_2 = -(h^{(2)} - h^{(1)})t_2 - (\tau^{(2)} - \tau^{(1)})\eta_2 ;$$

e, finalmente,

$$\omega = (\tau^{(2)} - \tau^{(1)})t_2 - (h^{(2)} - h^{(1)})\eta_2 + (k_g^{(2)} - k_g^{(1)})N_2 .$$

Essa última fórmula será utilizada para caracterizar os *rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento* que daremos a seguir.

1.2 Rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento

Definição 1.5 *Um rolamento sem escorregamento de Σ_1 sobre Σ_2 é dito sem pivotamento se a direção do eixo instantâneo de rotação for ortogonal à normal N_2 de Σ_2 , para todo $s \in [0, \ell_2]$, isto é, se $\langle \omega, N_2 \rangle(s) = 0, \forall s \in [0, \ell_2]$.*

Teorema 1.6 *Um rolamento sem escorregamento de Σ_1 sobre Σ_2 é sem pivotamento se, e somente se, $k_g^{(2)}(s) = k_g^{(1)}(s)$, ou seja, se as duas curvas de contato $u_1(s)$ e $u_2(s)$ tiverem as mesmas curvaturas geodésicas.*

Corolário 1.7 *Se o rolamento for sem escorregamento e sem pivotamento e uma das curvas de contato é geodésica, então a outra curva de contato também é geodésica.*

A condição $\langle \omega, N_2(s) \rangle = 0$ mostra intuitivamente que não há pivotamento pois neste caso ω deveria ter uma componente na direção de N_2 .

Exemplo 1.8 Um rolamento sem escorregamento e sem pivotamento de uma esfera sobre um plano e que descreva no plano uma reta (geodésica desse plano) terá como curva de contato um círculo máximo (geodésica da esfera).

Proposição 1.9 *Seja C uma curva regular contida numa esfera S de raio R e tal que sua curvatura geodésica k_g em S seja constante. Então, C é plana e por consequência está contida numa circunferência.*

Demonstração: Seja $O \in \mathbb{R}^3$ o centro de S e $p(s) = O + f(s)$ uma parametrização de C pelo comprimento de arco. Como C é regular, $f(s)$ é suave e $t = f'(s)$ é unitário; $N = N(s)$ é um vetor unitário ortogonal a S , isto é, $f(s) = RN(s)$ e $\eta(s) = N(s) \times t(s)$. Podemos escolher as orientações de C e de S de modo que $k_g \geq 0$ e lembremos (ver (1.1)) que as equações de Darboux são:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = k_g \eta + hN , \\ \frac{d\eta}{ds} = -k_g t + \tau N , \\ \frac{dN}{ds} = -ht - \tau \eta . \end{cases} \quad (1.3)$$

Temos $|f(s)|^2 = \langle f(s), f(s) \rangle = \langle RN(s), RN(s) \rangle = R^2$ e, por derivação, obtém-se $\langle f'(s), f(s) \rangle = 0$ e $\langle f''(s), f(s) \rangle + \langle f'(s), f'(s) \rangle = 0$; como $f''(s) = \frac{dt}{ds}$ (pois $f'(s) = t$),

obtém-se

$$\langle k_g \eta + hN, RN \rangle + 1 = 0 ,$$

$$\text{ou } k_g R \langle \eta, N \rangle + hR \langle N, N \rangle + 1 = 0,$$

isto é, $hR + 1 = 0$ que acarreta $h = -\frac{1}{R}$ (constante).

Por outro lado, $f(s) = RN$ implica que

$$f'(s) = R \frac{dN}{ds} = R(-ht - \tau\eta) = R \left(\frac{1}{R}t - \tau\eta \right) = t - (R\tau)\eta$$

e

$$f''(s) = \frac{dt}{ds} = t' - R\tau\eta' - R\tau'\eta,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= k_g \eta + hN - R\tau(-k_g t + \tau N) - R\tau'\eta , \\ \frac{dt}{ds} &= (k_g - R\tau')\eta + (R\tau k_g)t + \left(-\frac{1}{R} - R\tau^2 \right) N, \end{aligned}$$

que comparada com a primeira equação de Darboux (ver(1.3)) fornece:

$$\begin{cases} k_g - R\tau' = k_g , \\ R\tau k_g = 0 , \\ -\frac{1}{R} - R\tau^2 = -\frac{1}{R} , \end{cases}$$

acarretando então $\tau = 0$.

O caso $k_g = 0$ implica que C é uma geodésica e a proposição está automaticamente válida.

Resta o caso $k_g > 0$ e $\tau = 0$. As duas últimas equações de Darboux (ver(1.3)) fornecem

$$\frac{d\eta}{ds} = -k_g t \quad \text{e} \quad \frac{dN}{ds} = -ht ,$$

então

$$\frac{1}{R} \frac{d\eta}{ds} = -\frac{1}{R} k_g t = k_g h t = -k_g \frac{dN}{ds} ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{R} \frac{d\eta}{ds} + k_g \frac{dN}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\eta}{R} + k_g N = \vec{c} \quad (\text{constante}),$$

em que $\vec{c} \neq 0$ pois η e N são linearmente independentes.

Como consequência temos $\langle t, \vec{c} \rangle = \langle t, \frac{\eta}{R} + k_g N \rangle = 0$ e $t = t(s)$ é ortogonal a $\vec{c} \neq 0$, o que mostra ser $p(s)$ uma curva plana, logo contida numa circunferência. ■

Corolário 1.10 *A curva $C \subset S$, da proposição anterior, é tal que $k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{rR}$, em que r é o raio de C .*

Demonstração: A curvatura k de C é dada por $f''(s) = k\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, pelas equações de Frenet. Então, como

$$f''(s) = \frac{dt}{ds} = k_g \eta + hN = k_g \eta - \frac{1}{R} N = k\vec{n},$$

obtem-se

$$k_g^2 + \frac{1}{R^2} = k^2 \quad \text{e} \quad k = \frac{1}{r},$$

logo

$$k_g^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2},$$

ou seja,

$$k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{rR}. \tag{1.4}$$

■

Exemplo 1.11 *Rolamento sem escorregamento e sem pivotamento que apresenta curvas de contato que não são geodésicas.*

Consideremos uma curva C representada pela intersecção de um plano com uma esfera S de raio R , ou seja, uma circunferência de raio r , contida em S , com $r < R$.

Seja P um ponto de C , O o centro da esfera S e T o vértice de um cone circunscrito a S que tem C como curva comum ao cone e à esfera S . Admitamos que a reta PT esteja num plano horizontal.

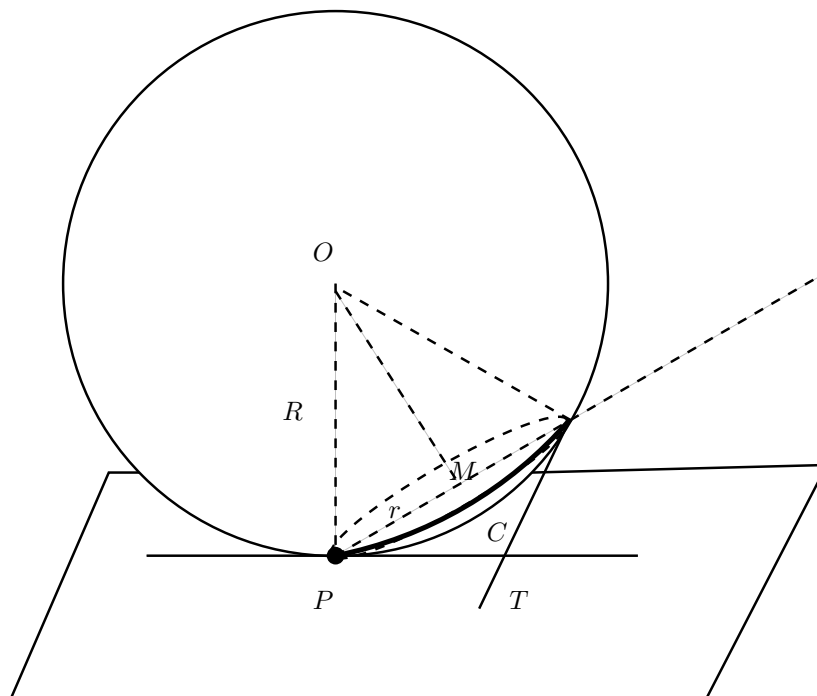


Figura 1.3: Rolamento sem escorregamento e sem pivotamento sobre uma circunferência que não é geodésica

Quando o cone rola sem escorregar, sobre o plano horizontal, mantendo T fixo, a curva C rola sobre uma circunferência \tilde{C} de centro T e raio \overline{PT} . Temos então

$$\frac{r}{R} = \frac{\overline{MT}}{\overline{PT}} \quad \text{e} \quad \overline{PT} = \sqrt{r^2 + (\overline{MT})^2},$$

em que M é o centro da circunferência C . Então obteremos

$$(\overline{PT})^2 = r^2 + (\overline{MT})^2 = r^2 + \left(\frac{r\overline{PT}}{R}\right)^2,$$

isto é, $\overline{PT} = \frac{rR}{\sqrt{R^2 - r^2}}$.

Como \tilde{C} é plana, a curvatura $\frac{1}{PT}$ de \tilde{C} é igual à sua curvatura geodésica \tilde{k}_g no plano horizontal, logo

$$\tilde{k}_g = \frac{1}{PT} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{rR}$$

e como $k_g = \tilde{k}_g$, o rolamento da esfera sobre o plano é sem escorregamento e sem pivotamento. ■

1.3 Rolamento sem escorregamento e sem pivotamento na abordagem de Bryant e Hsu

De uma forma mais intrínseca podemos definir os rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento usando a abordagem de Bryant e Hsu [5]. Uma vez fixadas Σ_1 e Σ_2 (superfícies orientadas, mergulhadas no espaço euclidiano), seja F_1 (resp. F_2) o correspondente fibrado dos referenciais ortonormais orientados de Σ_1 (resp. Σ_2). Note-se que F_1 (resp. F_2) são fibrados principais de grupo estrutural $SO(2)$. Isto é cada fibra de F_1 (resp. F_2) se identifica com o grupo $SO(2)$.

O grupo $SO(2)$ atua diagonalmente em $F_1 \times F_2$, isto é, $SO(2)$ define a seguinte ação à direita:

$$\begin{aligned} \phi : SO(2) \times (F_1 \times F_2) &\rightarrow (F_1 \times F_2) \\ \phi(g, (\bar{p}_1, \bar{p}_2)) &\mapsto (\bar{p}_1 g, \bar{p}_2 g) \end{aligned}$$

Trata-se de uma ação própria, pois $SO(2)$ é compacto; além disso, a ação é livre já que a aplicação

$$g \in SO(2) \mapsto \phi(g, x) \in (F_1 \times F_2)$$

é injetora para todo $x \in (F_1 \times F_2)$. Isso garante que o quociente

$M = (F_1 \times F_2)/SO(2)$, que representa o espaço de configurações, seja uma variedade de dimensão 5 (para maiores detalhes, ver [1]).

Se p_1 e p_2 são as projeções em M dos pontos $\bar{p}_1 \in F_1$ e $\bar{p}_2 \in F_2$, um elemento de M tem uma interpretação natural como a terna (p_1, p_2, i) , onde

$$i : T_{p_1}\Sigma_1 \rightarrow T_{p_2}\Sigma_2$$

é uma isometria orientada.

Tomemos uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$,

$$\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t), i(t)),$$

onde $u_i(t) : [a, b] \rightarrow \Sigma_i$, $i = 1, 2$, são curvas suaves satisfazendo

$$i(t)(\dot{u}_1(t)) = \dot{u}_2(t), \text{ para todo } a \leq t \leq b;$$

a última condição corresponde à propriedade de “rolar sem escorregar”.

Para evitar “pivotamento”, considera-se $e_1, f_1 : [a, b] \rightarrow T\Sigma_1$ como um campo paralelo de referenciais ortonormais ao longo da curva u_1 e supõe-se que o correspondente campo de referenciais

$e_2, f_2 : [a, b] \rightarrow T\Sigma_2$ definido por

$$e_2(t) = i(t)(e_1(t)),$$

$$f_2(t) = i(t)(f_1(t)),$$

seja também paralelo ao longo de u_2 .

Para mostrar a equivalência desta última definição com a noção de rolamento sem escorregamento e sem pivotamento, introduzida na seção anterior, observa-se que o rolamento sem escorregamento definido por Bryant e Hsu em [5] significa que para a curva suave

$$\gamma(s) = (u_1(s), u_2(s), i(s)),$$

a isometria orientada $i(s)$ tem a propriedade que $i(s)(t_1(s)) = t_2(s)$ e, conseqüentemente, $i(s)(\eta_1(s)) = \eta_2(s)$, $s \in [a, b]$.

Por outro lado, considera-se um referencial ortonormal orientado e paralelo $(e_1, f_1) = (e_1(s), f_1(s))$ ao longo de $u_1 = u_1(s)$. Então ambas as derivadas covariantes $\frac{De_1}{ds}$ e $\frac{Df_1}{ds}$ se anulam. Porém, já que

$$\begin{aligned} e_1 &= At_1 + B\eta_1, \\ f_1 &= \bar{A}t_1 + \bar{B}\eta_1, \end{aligned}$$

obtém-se por derivação covariante (ver [18], p. 27, e [6])

$$\begin{cases} \frac{dA}{ds}t_1 + A\frac{Dt_1}{ds} + \frac{dB}{ds}\eta_1 + B\frac{D\eta_1}{ds} = 0, \\ \frac{d\bar{A}}{ds}t_1 + \bar{A}\frac{Dt_1}{ds} + \frac{d\bar{B}}{ds}\eta_1 + \bar{B}\frac{D\eta_1}{ds} = 0. \end{cases}$$

Como (e_1, f_1) e (t_1, η_1) são bases ortonormais positivas, a matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix}$, dada pela mudança de base, é ortogonal própria, e existe para cada s um único $\theta = \theta(s)$ tal que

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ \bar{A}(s) & \bar{B}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(s)) & \text{sen}(\theta(s)) \\ -\text{sen}(\theta(s)) & \cos(\theta(s)) \end{bmatrix}$$

logo

$$A(s) = \bar{B}(s) = \cos(\theta(s))$$

e

$$B(s) = -\bar{A}(s) = \text{sen}(\theta(s)).$$

Além disso, das relações de Darboux (1.1) e da definição de derivada covariante segue que

$$\frac{Dt_1}{ds} = k_g^{(1)}\eta_1 \quad \text{e} \quad \frac{D\eta_1}{ds} = -k_g^{(1)}t_1.$$

Temos então

$$\frac{dA}{ds}t_1 + \frac{dB}{ds}\eta_1 + Ak_g^{(1)}\eta_1 - Bk_g^{(1)}t_1 = 0 ,$$

$$\left(\frac{dA}{ds} - Bk_g^{(1)}\right)t_1 + \left(\frac{dB}{ds} + Ak_g^{(1)}\right)\eta_1 = 0$$

e como t_1 e η_1 são linearmente independentes, obtemos

$$\frac{dA}{ds} = Bk_g^{(1)} \quad \text{e} \quad \frac{dB}{ds} = -Ak_g^{(1)}$$

e, analogamente,

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \bar{B}k_g^{(1)} \quad \text{e} \quad \frac{d\bar{B}}{ds} = -\bar{A}k_g^{(1)} .$$

Mas

$$\text{sen}(\theta(s))k_g^{(1)} = Bk_g^{(1)} = \frac{dA}{ds} = \frac{d\bar{B}}{ds} = \frac{d}{ds}(\cos\theta(s)) = -\text{sen}(\theta(s))\theta'(s)$$

e

$$\cos(\theta(s))k_g^{(1)} = Ak_g^{(1)} = -\frac{dB}{ds} = -\frac{d}{ds}(\text{sen}\theta(s)) = -\cos(\theta(s))\theta'(s).$$

Então $k_g^{(1)} = -\theta'$.

A definição de rolar sem escorregar e sem pivotar dada por Bryant e Hsu (ver [5]) implica também que $i(s)(t_1(s)) = t_2(s)$ e que os dois vetores $i(s)e_1 = e_2$ e $i(s)f_1 = f_2$ formam um referencial paralelo, ou seja, $\frac{De_2}{ds}$ e $\frac{Df_2}{ds}$ se anulam. Finalmente, argumentando como acima, vemos que $k_g^{(2)} = -\theta'$ e concluímos que $k_g^{(1)} = k_g^{(2)}$. Isto é suficiente para mostrar a equivalência entre o rolamento sem escorregamento e sem pivotamento mencionado antes e o rolamento sem escorregamento e sem pivotamento de Bryant e Hsu definido em [5].

Proposição 1.12 *Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies orientadas mergulhadas no espaço euclidiano e $u_1(s)$, $u_2(s)$ duas curvas suaves de contato em Σ_1 e Σ_2 , respectivamente, parametrizadas pelo comprimento de arco, com $u'_i(s) \neq 0$, $i = 1, 2$, para todos os valores de s , e obtidas pelo rolamento sem escorregamento de Σ_1 ao longo de Σ_2 . Então o rolamento é sem escorregamento e sem pivotamento no sentido de Bryant e Hsu se, e somente se, $u_1(s)$ e $u_2(s)$ têm as mesmas curvaturas geodésicas.*

Usando argumentos semelhantes aos da proposição anterior podemos demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 1.13 *Suponhamos que exista uma isometria ϕ entre duas superfícies Σ_1 e Σ_2 mergulhadas no espaço euclidiano, regulares e orientadas, isto é, ϕ é um difeomorfismo de Σ_1 sobre Σ_2 tal que sua derivada em cada ponto p é uma isometria de $T_p\Sigma_1$ sobre $T_{\phi(p)}\Sigma_2$. Sendo $u_1 = u_1(s)$ em Σ_1 e $u_2 = u_2(s)$ em Σ_2 duas curvas tais que $u_2(s) = \phi(u_1(s))$, ambas parametrizadas pelo comprimento de arco s , então as curvaturas geodésicas de u_1 e u_2 são iguais.*

1.4 Condições para que o difeomorfismo entre superfícies paralelas transforme geodésica de uma em geodésica da outra

No estudo do problema do rolamento de uma esfera de raio δ sobre uma superfície S de revolução, contida em \mathbb{R}^3 , desenvolvido por Hermans (ver [11]), as coordenadas locais de um ponto do espaço de estados $S \times SO(3)$ foram escolhidas a partir das projeções do centro da esfera sobre um plano horizontal. O lugar geométrico H descrito por todas as posições possíveis do centro da esfera é uma superfície “paralela” à superfície S onde rola a esfera. Surge então uma questão geométrica que consiste

em determinar as condições para que a uma geodésica γ_1 de S , descrita pelos pontos de contato, corresponda uma curva γ na superfície H e que seja também geodésica de H .

Dado $\delta > 0$, consideremos a aplicação

$$\rho_\delta : S \rightarrow H$$

$$x \in S \mapsto x + \delta N_1 \in H,$$

onde N_1 é a normal unitária de S em x , apontando de S para H . Em geral, para δ suficientemente pequeno, essa aplicação é um difeomorfismo e S e H são então denominadas superfícies paralelas em \mathbb{R}^3 , o que será admitido daqui para frente nesta seção.

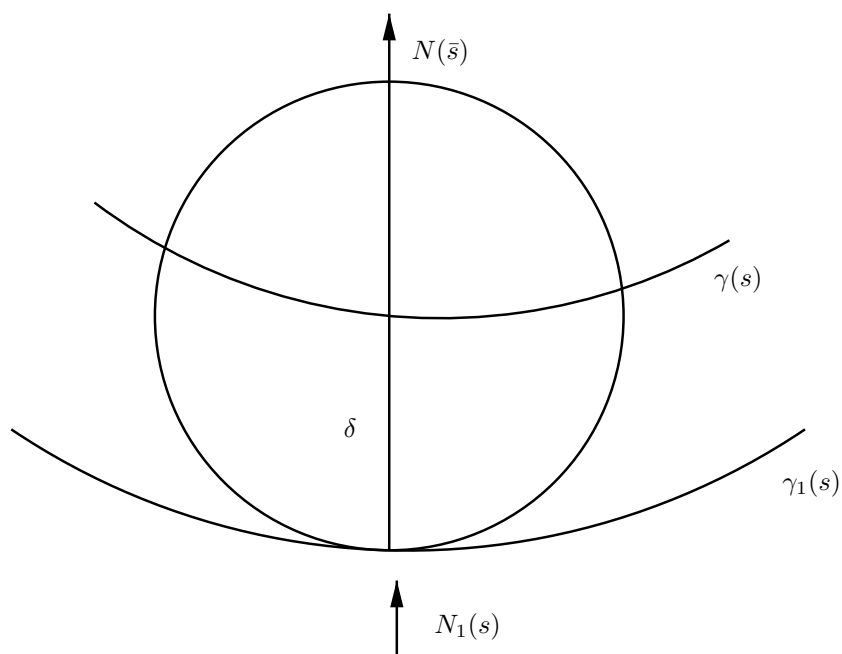


Figura 1.4: Geodésicas de superfície paralela passando pelo centro da esfera

Seja $\gamma_1 = \gamma_1(s)$ uma geodésica de S , parametrizada pelo comprimento de arco s , $s \in I \subset \mathbb{R}$ e $\gamma(s) = \gamma_1(s) + \delta N_1(s)$ uma curva de H .

Recordemos as relações de Darboux (ver (1.1)) para a curva γ_1 :

$$\begin{cases} \frac{dt_1}{ds} = k_g^{(1)}\eta_1 + h^{(1)}N_1, \\ \frac{d\eta_1}{ds} = -k_g^{(1)}t_1 + \tau^{(1)}N_1, \\ \frac{dN_1}{ds} = -h^{(1)}t_1 - \tau^{(1)}\eta_1, \end{cases} \quad (1.5)$$

onde $k_g^{(1)} = k_g^{(1)}(s)$ é a *curvatura geodésica*, $\tau^{(1)} = \tau^{(1)}(s)$ é a *torção geodésica* e $h^{(1)} = h^{(1)}(s)$ é a *curvatura normal*.

Teorema 1.14 *As relações*

$$\begin{cases} \tau^{(1)} \left[(1 - \delta h^{(1)}) \frac{d\tau^{(1)}}{ds} + \delta \tau^{(1)} \frac{dh^{(1)}}{ds} \right] = 0 \\ (1 - \delta h^{(1)}) \left[(1 - \delta h^{(1)}) \frac{d\tau^{(1)}}{ds} + \delta \tau^{(1)} \frac{dh^{(1)}}{ds} \right] = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

são as condições necessárias e suficientes a que deve satisfazer a geodésica γ_1 da superfície S para que sua imagem pelo difeomorfismo ρ_δ , $\rho_\delta(\gamma_1) \subset H$, seja geodésica de H .

Demonstração: Derivando γ em relação a s e usando as relações de Darboux (ver (1.5)) para a curva $\gamma_1(s)$ obteremos

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma_1(s)}{ds} + \delta \frac{dN_1}{ds} = t_1(s) + \delta(-h^{(1)}(s)t_1(s) - \tau^{(1)}(s)\eta_1(s))$$

ou, omitindo o argumento s ,

$$\frac{d\gamma}{ds} = (1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta \tau^{(1)}\eta_1.$$

Vamos introduzir um novo parâmetro $\bar{s} = \bar{s}(s)$ para a curva γ através de

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \left| \frac{d\gamma}{ds} \right| = \sqrt{(1 - \delta h^{(1)})^2 + (\delta \tau^{(1)})^2}, \quad (1.7)$$

assim $g(\bar{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(s(\bar{s}))$ é a curva γ parametrizada pelo novo comprimento de arco \bar{s} .

Daí

$$t(\bar{s}) = \frac{dg}{ds} = \frac{d\gamma}{ds}(s(\bar{s})) \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{d\gamma}{ds}(s(\bar{s})) \cdot \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|(s(\bar{s}))}$$

ou

$$t(\bar{s}) = \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|(s(\bar{s}))} \cdot \left[(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta\tau^{(1)}\eta_1 \right] (s(\bar{s}))$$

e como $N(\bar{s}) = N_1(s(\bar{s}))$, então

$$\eta(\bar{s}) = N(\bar{s}) \times t(\bar{s}) = N_1(s(\bar{s})) \times \left\{ \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|(s(\bar{s}))} \left[(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta\tau^{(1)}\eta_1 \right] (s(\bar{s})) \right\}.$$

Derivando-se t em relação a \bar{s} obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\bar{s}} &= \frac{d}{d\bar{s}} \left\{ \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|(s(\bar{s}))} \cdot \left[(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta\tau^{(1)}\eta_1 \right] (s(\bar{s})) \right\} \\ &= \left[\frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|(s(\bar{s}))} \right) \right] \left[(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta\tau^{(1)}\eta_1 \right] (s(\bar{s})) + \\ &\quad + \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|(s(\bar{s}))} \cdot \left(\frac{d}{d\bar{s}} \left[(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta\tau^{(1)}\eta_1 \right] (s(\bar{s})) \right). \end{aligned}$$

Como $\frac{d\bar{s}}{ds} = \left| \frac{d\gamma}{ds} \right|$, então

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\bar{s}} &= \left[\frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|(s(\bar{s}))} \right) \right] \cdot \left[(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta\tau^{(1)}\eta_1 \right] (s(\bar{s})) + \\ &\quad + \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|^2(s(\bar{s}))} \cdot \left(\frac{d}{ds} \left[(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta\tau^{(1)}\eta_1 \right] \right) (s(\bar{s})) \\ &= \left[\frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|(s(\bar{s}))} \right) \right] \cdot \left[(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta\tau^{(1)}\eta_1 \right] (s(\bar{s})) + \\ &\quad + \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|^2(s(\bar{s}))} \cdot \left\{ \left[\frac{d}{ds} (1 - \delta h^{(1)}) \right] t_1 + (1 - \delta h^{(1)}) \frac{dt_1}{ds} - \left[\frac{d}{ds} (\delta\tau^{(1)}) \right] \eta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \delta\tau^{(1)} \frac{d\eta_1}{ds} \right\} (s(\bar{s})) \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\bar{s}} &= \left[\frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right| (s(\bar{s}))} \right) \right] \cdot [(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta \tau^{(1)}\eta_1] (s(\bar{s})) + \\ &+ \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 (s(\bar{s}))} \cdot \left\{ -\delta \frac{dh^{(1)}}{ds} t_1 + (1 - \delta h^{(1)}) \frac{dt_1}{ds} - \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \eta_1 - \delta \tau^{(1)} \frac{d\eta_1}{ds} \right\} (s(\bar{s})), \end{aligned}$$

e usando as relações de Darboux (ver (1.5)) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\bar{s}} &= \left[\frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right| (s(\bar{s}))} \right) \right] \cdot [(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta \tau^{(1)}\eta_1] (s(\bar{s})) + \\ &+ \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 (s(\bar{s}))} \cdot \left\{ -\delta \frac{dh^{(1)}}{ds} t_1 + (1 - \delta h^{(1)}) (k_g^{(1)}\eta_1 + h^{(1)}N_1) - \right. \\ &\left. - \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \eta_1 - \delta \tau^{(1)} (-k_g^{(1)}t_1 + \tau^{(1)}N_1) \right\} (s(\bar{s})). \end{aligned}$$

Como $\gamma_1(s)$ é geodésica então $k_g^{(1)} = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\bar{s}} &= \left[\frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right| (s(\bar{s}))} \right) \right] \cdot [(1 - \delta h^{(1)})t_1 - \delta \tau^{(1)}\eta_1] (s(\bar{s})) + \\ &+ \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 (s(\bar{s}))} \cdot \left\{ -\delta \frac{dh^{(1)}}{ds} t_1 + (1 - \delta h^{(1)}) h^{(1)} N_1 - \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \eta_1 - \delta (\tau^{(1)})^2 N_1 \right\} (s(\bar{s})) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\bar{s}} &= t_1 \left\{ (1 - \delta h^{(1)}) \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right| (s(\bar{s}))} \right) - \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 (s(\bar{s}))} \cdot \delta \frac{dh^{(1)}}{ds} \right\} (s(\bar{s})) + \\ &+ \eta_1 \left\{ -\delta \tau^{(1)} \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right| (s(\bar{s}))} \right) - \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 (s(\bar{s}))} \cdot \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right\} (s(\bar{s})) + \\ &+ N_1(s(\bar{s})) \left\{ \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 (s(\bar{s}))} \right) [h^{(1)}(1 - \delta h^{(1)}) - \delta (\tau^{(1)})^2] (s(\bar{s})) \right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{dt}{d\bar{s}} = k_g^{(2)}(\bar{s})\eta(\bar{s}) + h^{(2)}(\bar{s})N(\bar{s}) = k_g^{(2)}(\bar{s})\eta(\bar{s}) + h^{(2)}(\bar{s})N_1(s(\bar{s})),$$

então

$$\begin{aligned}
& k_g^{(2)}(\bar{s})\eta(\bar{s}) + h^{(2)}(\bar{s})N_1(s(\bar{s})) = \\
& = t_1 \left\{ (1 - \delta h^{(1)}) \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|(s(\bar{s}))} \right) - \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2(s(\bar{s}))} \cdot \delta \frac{dh^{(1)}}{ds} \right\} (s(\bar{s})) + \\
& + \eta_1 \left\{ -\delta \tau^{(1)} \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|(s(\bar{s}))} \right) - \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2(s(\bar{s}))} \cdot \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right\} (s(\bar{s})) + \\
& + N_1(s(\bar{s})) \left\{ \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2(s(\bar{s}))} \right) [h^{(1)}(1 - \delta h^{(1)}) - \delta(\tau^{(1)})^2] (s(\bar{s})) \right\}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $t_1(s(\bar{s}))$ e $\eta_1(s(\bar{s}))$ são ortogonais a $N_1(s(\bar{s})) = N(\bar{s})$ e também que $\eta(\bar{s})$ é ortogonal a $N(\bar{s})$, então $\eta(\bar{s})$ é combinação linear de $t_1(s(\bar{s}))$ e $\eta_1(s(\bar{s}))$ e não tem componente na direção de $N(\bar{s})$. Concluimos então que

$$\left\{ \begin{array}{l}
k_g^{(2)}(\bar{s})\eta(\bar{s}) = t_1(s(\bar{s})) \left\{ (1 - \delta h^{(1)}) \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|(s(\bar{s}))} \right) - \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2(s(\bar{s}))} \delta \frac{dh^{(1)}}{ds} \right\} (s(\bar{s})) + \\
+ \eta_1 \left\{ -\delta \tau^{(1)} \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|(s(\bar{s}))} \right) - \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2(s(\bar{s}))} \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right\} (s(\bar{s})) \\
h^{(2)}(\bar{s}) = \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2(s(\bar{s}))} [h^{(1)}(1 - \delta h^{(1)}) - \delta(\tau^{(1)})^2] (s(\bar{s})).
\end{array} \right.$$

O resultado que garante ser geodésica a imagem da geodésica inicial, é verdadeiro se, e somente se, $k_g^{(2)} = 0$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left\{ (1 - \delta h^{(1)}) \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|(s(\bar{s}))} \right) - \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2(s(\bar{s}))} \delta \frac{dh^{(1)}}{ds} \right\} (s(\bar{s})) = 0 \\
\text{e} \\
\left\{ -\delta \tau^{(1)} \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|(s(\bar{s}))} \right) - \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2(s(\bar{s}))} \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right\} (s(\bar{s})) = 0.
\end{array} \right. \quad (1.8)$$

Porém,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|(s(\bar{s}))} \right) &= \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - \delta h^{(1)})^2 + (\delta \tau^{(1)})^2}} \right) \Big|_{s(\bar{s})} \\
&= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - \delta h^{(1)})^2 + \delta^2 (\tau^{(1)})^2}} \right) \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} \\
&= \frac{d}{ds} \left[(1 - \delta h^{(1)})^2 + \delta^2 (\tau^{(1)})^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|(s(\bar{s}))} \\
&= -\frac{1}{2} \left[(1 - \delta h^{(1)})^2 + \delta^2 (\tau^{(1)})^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \left[2(1 - \delta h^{(1)}) \cdot \left(-\delta \frac{dh^{(1)}}{ds} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta^2 2\tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \delta h^{(1)})^2 + \delta^2 (\tau^{(1)})^2}} \Big|_{s(\bar{s})} \\
&= \left[(1 - \delta h^{(1)})^2 + \delta^2 (\tau^{(1)})^2 \right]^{-2} \cdot \left[\delta(1 - \delta h^{(1)}) \frac{dh^{(1)}}{ds} - \delta^2 \tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] s(\bar{s}) \\
&= \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^4} \left[\delta(1 - \delta h^{(1)}) \frac{dh^{(1)}}{ds} - \delta^2 \tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] s(\bar{s}).
\end{aligned}$$

As condições (1.8) ficam

$$\begin{cases}
(1 - \delta h^{(1)}) \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^4} \left[\delta(1 - \delta h^{(1)}) \frac{dh^{(1)}}{ds} - \delta^2 \tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] = \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2} \delta \frac{dh^{(1)}}{ds} \\
-\delta \tau^{(1)} \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^4} \left[\delta(1 - \delta h^{(1)}) \frac{dh^{(1)}}{ds} - \delta^2 \tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] = \frac{1}{\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2} \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds}
\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases}
(1 - \delta h^{(1)}) \left[\delta(1 - \delta h^{(1)}) \frac{dh^{(1)}}{ds} - \delta^2 \tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] = \delta \frac{dh^{(1)}}{ds} \left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 \\
-\delta \tau^{(1)} \left[\delta(1 - \delta h^{(1)}) \frac{dh^{(1)}}{ds} - \delta^2 \tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] = \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2,
\end{cases}$$

substituindo-se $\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|$, por sua expressão dada por (1.7) temos

$$\begin{cases}
(1 - \delta h^{(1)}) \left[\delta(1 - \delta h^{(1)}) \frac{dh^{(1)}}{ds} - \delta^2 \tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] = \delta \frac{dh^{(1)}}{ds} \left[(1 - \delta h^{(1)})^2 + \delta^2 (\tau^{(1)})^2 \right] \\
-\delta \tau^{(1)} \left[\delta(1 - \delta h^{(1)}) \frac{dh^{(1)}}{ds} - \delta^2 \tau^{(1)} \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \right] = \delta \frac{d\tau^{(1)}}{ds} \left[(1 - \delta h^{(1)})^2 + \delta^2 (\tau^{(1)})^2 \right]
\end{cases}$$

e simplificando obtemos

$$\begin{cases} -(1 - \delta h^{(1)})\delta^2\tau^{(1)}\frac{d\tau^{(1)}}{ds} = \delta^3(\tau^{(1)})^2\frac{dh^{(1)}}{ds} \\ -\delta^2\tau^{(1)}(1 - \delta h^{(1)})\frac{dh^{(1)}}{ds} = \delta(1 - \delta h^{(1)})^2\frac{d\tau^{(1)}}{ds} . \end{cases}$$

Como $\delta > 0$, temos

$$\begin{cases} -(1 - \delta h^{(1)})\tau^{(1)}\frac{d\tau^{(1)}}{ds} = \delta(\tau^{(1)})^2\frac{dh^{(1)}}{ds} \\ -\delta\tau^{(1)}(1 - \delta h^{(1)})\frac{dh^{(1)}}{ds} = (1 - \delta h^{(1)})^2\frac{d\tau^{(1)}}{ds} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \tau^{(1)} \left[(1 - \delta h^{(1)})\frac{d\tau^{(1)}}{ds} + \delta\tau^{(1)}\frac{dh^{(1)}}{ds} \right] = 0 \\ (1 - \delta h^{(1)}) \left[(1 - \delta h^{(1)})\frac{d\tau^{(1)}}{ds} + \delta\tau^{(1)}\frac{dh^{(1)}}{ds} \right] = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

que são as condições necessárias e suficientes na geodésica de partida para que sua imagem também seja geodésica. ■

Analisemos alguns casos particulares:

1º caso: Se $\tau^{(1)} = 0$ e $h^{(1)} = \frac{1}{\delta}$, para todo s , então as condições em (1.9) são válidas.

2º caso: Se $\tau^{(1)} \neq 0$ e $h^{(1)} = \frac{1}{\delta}$, para todo s , teremos que as condições em (1.9) sempre são válidas pois $\frac{dh^{(1)}}{ds} = 0$, para todo s .

3º caso: Se $\tau^{(1)} = 0$ e $h^{(1)} \neq \frac{1}{\delta}$, para todo s , teremos que as condições em (1.9) sempre são válidas pois $\frac{d\tau^{(1)}}{ds} = 0$, para todo s .

4º caso: Se para algum $s = \bar{s}$, $\tau^{(1)}(\bar{s}) \neq 0$ ou se $h^{(1)}(\bar{s}) \neq \frac{1}{\delta}$, as condições em (1.9) valem se, e somente se, no ponto $s = \bar{s}$ tivermos

$$(1 - \delta h^{(1)})\frac{d\tau^{(1)}}{ds} = -\delta\tau^{(1)}\frac{dh^{(1)}}{ds} . \quad (1.10)$$

No caso em que $\tau^{(1)} \neq 0$ e $h^{(1)} \neq \frac{1}{\delta}$, para todo s , então de (1.10) temos

$$\frac{\frac{d\tau^{(1)}}{ds}}{\tau^{(1)}} = -\delta \frac{\frac{dh^{(1)}}{ds}}{1 - \delta h^{(1)}}$$

e obtemos

$$\ln |\tau^{(1)}| = \ln |1 - \delta h^{(1)}| + K$$

(K não depende de s), ou

$$K = \ln \left(\frac{|\tau^{(1)}|}{|1 - \delta h^{(1)}|} \right),$$

então

$$|\tau^{(1)}| = e^K |1 - \delta h^{(1)}|. \quad (1.11)$$

1.5 Rolamentos de subvariedades segundo Sharpe

Até agora não nos preocupamos com a definição formal de rolamento nem com a existência e unicidade dos rolamentos considerados.

Nesta seção veremos que R. W. Sharpe em [20] tratou do assunto num contexto bastante geral.

Consideremos $M^{n-p} \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade dada implicitamente por

$M = F^{-1}(O)$, $O \in \mathbb{R}^p$ sendo um valor regular de uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, de classe C^∞ . Se $\bar{x} \in M$, $T_{\bar{x}}M = [F'(\bar{x})]^{-1}\{O\}$.

Sendo $\text{Euc}_n(\mathbb{R})$ o grupo de todas as isometrias de \mathbb{R}^n , então $\bar{g} \in \text{Euc}_n(\mathbb{R})$ se, e só se, $\bar{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da forma $\bar{g}(v) = Av + p$ em que $A \in O_n(\mathbb{R})$ e $p \in \mathbb{R}^n$ representa a translação.

Seja $g : I \rightarrow \text{Euc}_n(\mathbb{R})$ uma curva C^1 , isto é, para todo $t \in I$,

$$g(t)v = A(t)v + p(t)$$

em que $v \in \mathbb{R}^n$ e $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $A(t) \in O_n(\mathbb{R})$ e $p(t) \in \mathbb{R}^n$.

Para cada $t \in I$, fixo, tem-se $g(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $(g(t))_*(x) = A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Também, por derivação em relação a t teremos

$$\dot{g}(t)v = \dot{A}(t)v + \dot{p}(t), \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

logo $\dot{A}(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Temos também que $\dot{g}(t)g(t)^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador anti-simétrico.

Definição 1.15 (Sharpe) Dadas duas subvariedades M_1^{n-p}, M_0^{n-p} em \mathbb{R}^n , diremos que uma aplicação $g : I \rightarrow \text{Euc}_n(\mathbb{R})$ satisfazendo as quatro propriedades abaixo para cada $t \in I$ é chamada um rolamento de M_1 sobre M_0 sem escorregar e sem pivotar; ou simplesmente, uma *aplicação de rolamento*, se:

(1) Existe uma “curva de rolamento sobre M_1 ”, $\sigma_1 : I \rightarrow M_1$, tal que

(a) $g(t)\sigma_1(t) \in M_0$, e

(b) $T_{g(t)\sigma_1(t)}(g(t)M_1) = T_{g(t)\sigma_1(t)}M_0, \forall t \in I$.

A curva $\sigma_0 : I \rightarrow M_0$ definida por $\sigma_0(t) = g(t)\sigma_1(t)$ é denominada *o desenvolvimento de σ_1 sobre M_0* .

A condição de “não escorregamento” é dada por

(2) $\dot{g}(t)g(t)^{-1}\sigma_0(t) = 0, \quad \forall t \in I$.

A parte *tangencial* da condição de “não pivotamento” é definida por

(3) $(\dot{g}(t)g(t)^{-1})_*T_{\sigma_0(t)}M_0 \subset [T_{\sigma_0(t)}M_0]^\perp, \quad \forall t \in I$,

e a parte *normal* da condição de “não pivotamento” é:

(4) $(\dot{g}(t)g(t)^{-1})_*[T_{\sigma_0(t)}M_0]^\perp \subset T_{\sigma_0(t)}M_0, \quad \forall t \in I$.

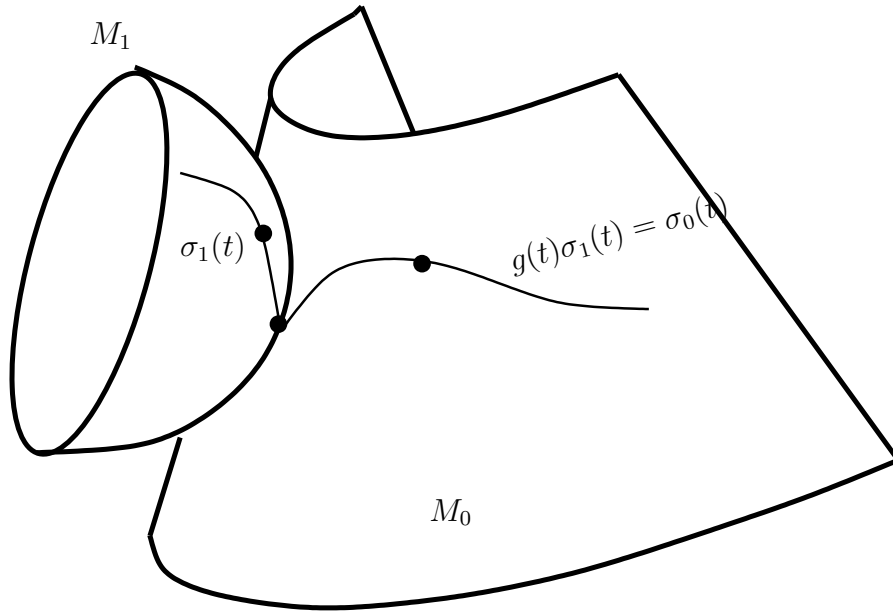


Figura 1.5: Aplicação de rolamento

Observação 1.16 Como

$$g(t)\sigma_1(t) = \sigma_0(t)$$

vem, por derivação em relação a t ,

$$\dot{g}(t)\sigma_1(t) + A(t)\dot{\sigma}_1(t) = \dot{\sigma}_0(t). \quad (1.12)$$

De fato, como $g(t)v = A(t)v + p(t)$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, teremos

$$\dot{g}(t)v = \dot{A}(t)v + \dot{p}(t).$$

Mas

$$g(t)\sigma_1(t) = A(t)\sigma_1(t) + p(t) = \sigma_0(t),$$

logo

$$p(t) = -A(t)\sigma_1(t) + \sigma_0(t)$$

e então

$$\dot{p}(t) = -(\dot{A}(t)\sigma_1(t) + A(t)\dot{\sigma}_1(t)) + \dot{\sigma}_0(t)$$

que acarreta

$$\dot{g}(t)\sigma_1(t) = \dot{A}(t)\sigma_1(t) + [-(\dot{A}(t)\sigma_1(t) + A(t)\dot{\sigma}_1(t))] + \dot{\sigma}_0(t)$$

e portanto

$$\dot{g}(t)\sigma_1(t) = -A(t)\dot{\sigma}_1(t) + \dot{\sigma}_0(t),$$

o que prova (1.12). ■

Essa observação mostra que a condição de não escorregamento (2), que é dada por $\dot{g}(t)\sigma_1(t) = 0$, é equivalente a

$$(2') \quad A(t)\dot{\sigma}_1(t) = \dot{\sigma}_0(t), \quad \forall t \in I.$$

Observação 1.17 A parte tangencial da condição de não pivotamento no caso $n = 3$ e $p = 1$, lembrando que

$$(\dot{g}(t)g(t)^{-1})_* \stackrel{\text{def}}{=} \omega(t) \times,$$

é dada por

$$\omega(t) \times v \in (T_{\sigma_0(t)}M_0)^\perp, \quad \forall t \in I \text{ e } \forall v \in T_{\sigma_0(t)}M_0.$$

Mas esta última condição escreve-se ainda:

$$\omega^{\text{hor}} \times v + \omega^{\text{vert}} \times v \in (T_{\sigma_0(t)}M_0)^\perp, \quad \forall v \in T_{\sigma_0(t)}M_0,$$

ou $\omega^{\text{vert}} \times v \in (T_{\sigma_0(t)}M_0)^\perp$, pois $\omega^{\text{hor}} \times v \in (T_{\sigma_0(t)}M_0)^\perp$.

Porém, como $\omega^{\text{vert}} \times v \in T_{\sigma_0(t)}M_0$, conclui-se que $\omega^{\text{vert}} \times v = 0$, para todo $v \in T_{\sigma_0(t)}M_0$. Logo, ω^{vert} é paralelo a $v \in T_{\sigma_0(t)}M_0$, $\forall v$, o que implica que $\omega^{\text{vert}} = 0$.

Concluimos então que ω é horizontal.

É claro que para $n = 3$ e ω horizontal, tem-se a condição (3). Já a parte normal da condição de não pivotamento (4) é trivialmente satisfeita se $n = 3$, pois

$$\omega \times u = \omega^{\text{hor}} \times u + \omega^{\text{vert}} \times u, \quad \forall u \in (T_{\sigma_0(t)}M_0)^\perp,$$

logo $\omega^{\text{hor}} \times u \in T_{\sigma_0(t)}M_0$ pois $\omega^{\text{vert}} \times u = 0$, o que implica

$$\omega \times u \in T_{\sigma_0(t)}M_0, \quad \forall u \in (T_{\sigma_0(t)}M_0)^\perp.$$

O espaço de configurações Σ é, essencialmente, o conjunto de todas as posições de M_1 , em que ela é tangente a M_0 ; mais precisamente, definimos:

$$\Sigma = \{(p, A, q) \in M_0 \times O_n(\mathbb{R}) \times M_1 \mid A(T_qM_1) = T_pM_0\}.$$

Nesse contexto geral, Sharpe (ver [20], prop.2.4, p.381) provou o seguinte resultado:

Proposição 1.18 *Sejam $M_0^{n-p}, M_1^{n-p} \subset \mathbb{R}^n$, subvariedades e $(p_0, A_0, q_0) \in \Sigma$. Suponhamos dada uma curva, C^∞ por partes, $\sigma_1 : I \rightarrow M_1$, com $\sigma_1(0) = q_0$ (resp., $\sigma_0 : I \rightarrow M_0$, com $\sigma_0(0) = p_0$). Então existe uma única aplicação de rolamento $g : I \rightarrow \text{Euc}_n(\mathbb{R})$, $g(0) = id$, com curva de rolamento σ_1 (resp., desenvolvimento σ_0).*

Dada a hélice do helicóide, de equação $g(t) = (\bar{a} \cos t, \bar{a} \sin t, bt)$, $t \in I$ (ver exemplo (1.4)) cuja curvatura geodésica é $k_g = \frac{\bar{a}}{\bar{a}^2 + b^2}$ e dado um ponto P numa esfera S de raio δ , $\delta < 2\pi b$, pela proposição (1.18), existe uma única aplicação de rolamento e uma curva de contato sobre S passando por P . Como esse rolamento é sem escorregamento e sem pivotamento a curva sobre S tem curvatura geodésica constante igual à da hélice. Pela proposição (1.9) essa curva está contida numa circunferência de raio r , $r < \delta$, dado por

$$\frac{\sqrt{\delta^2 - r^2}}{r\delta} = \frac{\bar{a}}{\bar{a}^2 + b^2} \quad (\text{ver corolário 1.10}).$$

Em particular, se uma esfera rola sem escorregar e sem pivotar ao longo da linha central do helicóide, a curva na esfera é um círculo máximo pois ambas são geodésicas.

Capítulo 2

Controlabilidade no problema do rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução

Neste capítulo trataremos do problema de uma esfera que rola sem pivotar e sem escorregar sobre uma superfície de revolução como um problema de controle e a seguir, no capítulo 3, como seria se o rolamento fosse sobre geodésicas.

2.1 Sistemas de controle não lineares afins

Nesta seção faremos um pequeno resumo dos resultados sobre controlabilidade que serão utilizados no caso do problema do rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução, seguindo de perto A. M. Bloch em [4](ver cap.4, p.175).

Um *sistema de controle não linear afim* numa variedade diferenciável M de dimensão n é um sistema de equações diferenciais da forma

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad (2.1)$$

onde f e os g_i , $i=1, \dots, m$, são campos vetoriais C^∞ (ou analíticos) definidos em M e $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ é uma função C^∞ (ou analítica) por partes, definida em \mathbb{R}^+ , com valores em \mathbb{R}^m .

A variedade M é chamada o *espaço de estados* do sistema, as funções $u_i(t)$ os *controles* e $u(t)$ é a *função de controle*.

O sistema (2.1) é dito *controlável* se para cada par de pontos x_0 e x_f em M existe uma função de controle $u(t)$ definida em um certo intervalo de tempo $[0, T]$ tal que a trajetória $x(t)$ do sistema (2.1), com condição inicial $x(0) = x_0$, atinja o ponto x_f em tempo T , isto é, $x(T) = x_f$.

Dado $x_0 \in M$, define-se $R(x_0, t)$ como o conjunto de todos os pontos $x \in M$ para os quais existe alguma função de controle u , definida em $[0, T]$, $0 \leq t \leq T$, tal que a correspondente trajetória de (2.1) satisfaz $x(0) = x_0$ e $x(t) = x$. Note-se que essa função de controle u depende de x . O conjunto

$$R_T(x_0) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} R(x_0, t) \quad (2.2)$$

denomina-se *conjunto atingível em tempo T a partir de x_0* .

Chama-se *álgebra de acessibilidade* \mathcal{A} de (2.1) a menor álgebra de Lie de campos vetoriais sobre M que contém os campos vetoriais f e g_1, \dots, g_m . Observe-se que a álgebra de acessibilidade coincide com o conjunto de todas as combinações lineares, com coeficientes reais, de todos os possíveis colchetes de Lie dos campos vetoriais f e g_i , $i = 1, \dots, m$. A *distribuição de acessibilidade* \mathcal{C} de (2.1) é a distribuição gerada pelos elementos da álgebra de acessibilidade, isto é, $\mathcal{C}(x)$ é o espaço vetorial gerado em $x \in M$ pelos elementos da álgebra de acessibilidade \mathcal{A} .

O sistema (2.1) sobre M chama-se *acessível a partir de $x_0 \in M$* se para todo $T > 0$, $R_T(x_0)$ tem interior não vazio. Isso significa que existe um certo ponto q que é atingível a partir de x_0 em tempo menor ou igual a T e o mesmo ocorre para todos os pontos de uma vizinhança do ponto q .

Teorema 2.1 (Bloch [4], teorema 4.2.6, p.178) *Suponhamos que os campos f e g_i , $i = 1, \dots, m$, no sistema (2.1) sejam de classe C^∞ . Se $\dim \mathcal{C}(x_0) = n$ (isto é, a álgebra de acessibilidade gera o espaço tangente a M em x_0), então para todo $T > 0$ o conjunto $R_T(x_0)$ tem interior não vazio, ou seja, o sistema (2.1) tem a propriedade de acessibilidade a partir de x_0 .*

A condição $\dim \mathcal{C}(x_0) = n$ é denominada de *condição do posto em x_0 , para acessibilidade*.

Se a variedade M e os campos f e g_i , $i = 1, \dots, m$, do sistema (2.1) forem analíticos, a recíproca do teorema 2.1 é válida, isto é, acessibilidade a partir de x_0 implica na condição do posto em x_0 para acessibilidade.

Em alguns casos a condição do posto em x_0 para acessibilidade implica na controlabilidade; enunciaremos somente o caso que usaremos no presente trabalho:

Teorema 2.2 (Bloch [4], teorema 4.2.7, p.179) *Suponhamos que M e os campos vetoriais g_i , $i = 1, \dots, m$, do sistema (2.1) sejam analíticos. Se $\dim \mathcal{C}(x) = n$ para todo $x \in M$ e $f = 0$, então o sistema (2.1) é controlável.*

Observação 2.3 Quando os campos vetoriais g_i , $i = 1, \dots, m$, definidos em M , são linearmente independentes em cada ponto $x \in M$, fica definida em M uma distribuição \mathcal{D} de posto constante m , isto é, $\mathcal{D}(x)$ é um subespaço vetorial de dimensão m do espaço tangente $T_x M$ no ponto x de M . Quando $f = 0$ a condição do posto em x_0 para acessibilidade corresponde a dizer que a distribuição \mathcal{D} é “bracket generating”, ou seja, \mathcal{D} é “completamente não integrável”.

Observação 2.4 Convém notar que uma distribuição não involutiva pode não ser “bracket generating”. Para isso vejamos um exemplo (Koiller [16], figura 2, p.128):

Consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x} \operatorname{sen} \phi - \dot{y} \cos \phi = 0 \\ \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \operatorname{sen} \phi + r \dot{\phi} + a \dot{q}_1 = 0 \\ \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \operatorname{sen} \phi - r \dot{\phi} + a \dot{q}_2 = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

em que (x, y, ϕ, q_1, q_2) são coordenadas locais na variedade M ,

$$M = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1 \times S^1,$$

e $a > 0$ e $r > 0$ são constantes. Tal sistema corresponde a procurar curvas diferenciáveis $(x(t), y(t), \phi(t), q_1(t), q_2(t))$ cujos vetores tangentes anulam o sistema de formas diferenciais

$$\begin{cases} \omega^1 = \operatorname{sen} \phi \, dx - \cos \phi \, dy \\ \omega^2 = \cos \phi \, dx + \operatorname{sen} \phi \, dy + r \, d\phi + a \, dq_1 \\ \omega^3 = \cos \phi \, dx + \operatorname{sen} \phi \, dy - r \, d\phi + a \, dq_2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Fica pois definida por (2.4) uma distribuição \mathcal{D} de posto constante 2 e é fácil ver que os campos vetoriais

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ X_2 = a \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + a \operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2} \end{cases} \quad (2.5)$$

geram em cada ponto de M a distribuição \mathcal{D} , pois tanto X_1 como X_2 anulam as formas diferenciais ω^1, ω^2 e ω^3 . O colchete de Lie $[X_1, X_2]$ não pertence à distribuição \mathcal{D} pois X_1, X_2 e $[X_1, X_2]$ são linearmente independentes em cada ponto de M , logo \mathcal{D} é não involutiva.

Considerando agora a distribuição \mathcal{D}^4 definida por $X_1, X_2, [X_1, X_2]$ e $[X_1, [X_1, X_2]]$, verificamos que ela tem posto constante igual a 4 e, pelo teorema de Frobenius, é involutiva. Podemos então concluir pelo fato de \mathcal{D}^4 ser involutiva que \mathcal{D} não é “bracket generating”.

Para a verificação das afirmações acima utilizamos a expressão dos colchetes de Lie de dois campos:

Se

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e

$$Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

então

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{onde} \quad c_i = \sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.6)$$

Note-se também que das duas últimas equações diferenciais de (2.3), segue a relação

$$2r\dot{\phi} + a(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = 0,$$

ou seja $F = 2r\phi + a(q_1 - q_2)$ é constante ao longo de cada trajetória, isto é, F é uma integral primeira de (2.3). Conseqüentemente, dados em M dois pontos v_1 e v_2 com valores diferentes para F , não se pode atingir v_2 a partir de v_1 , respeitando a distribuição \mathcal{D} , ou seja, pelo teorema de Chow, \mathcal{D} não é “bracket generating”. ■

2.2 Condições para não escorregamento e não pivotamento

O objetivo desta seção é deduzir quais são as condições que nos garantem que o rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução seja sem escorregamento e sem pivotamento.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução de eixo vertical $(0, e_z)$, sobre a qual vai rolar, sem escorregar, uma esfera rígida de raio $\delta > 0$, em que estamos denotando por (e_x, e_y, e_z) a base canônica do \mathbb{R}^3 .

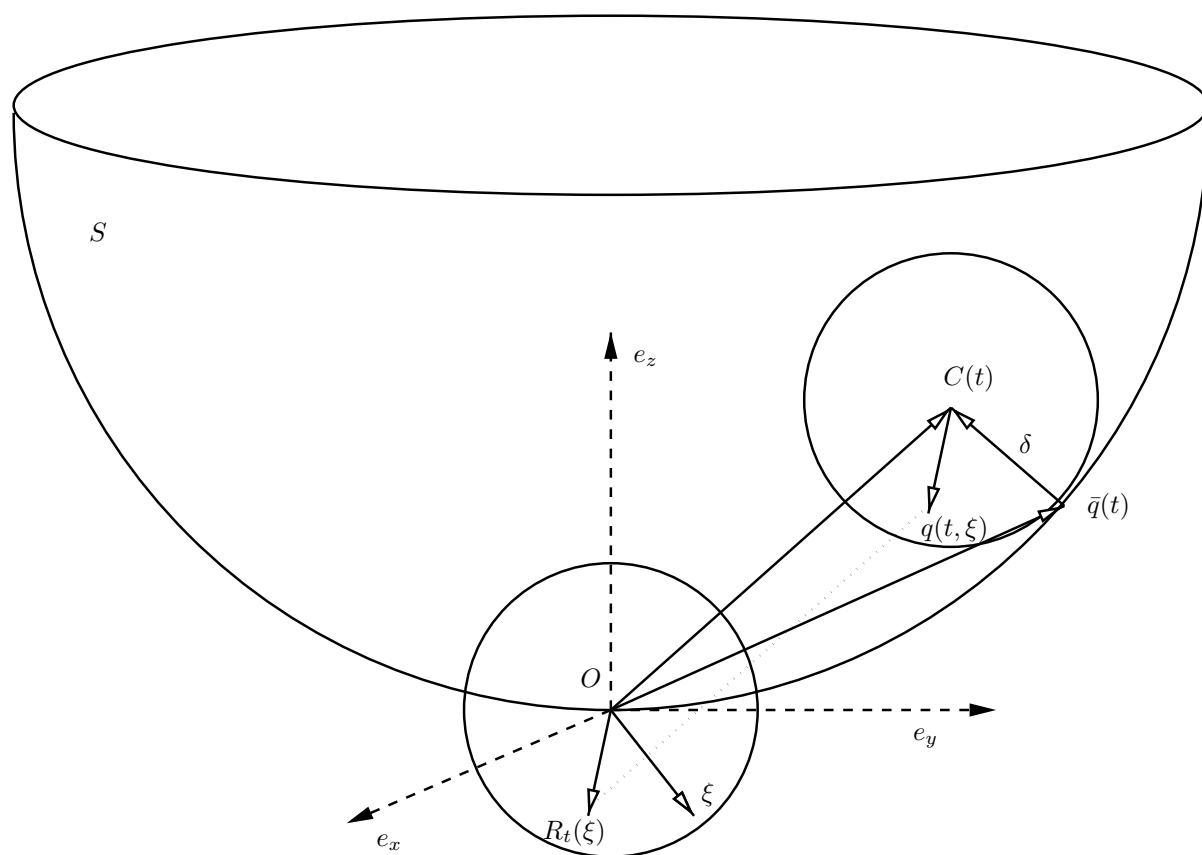


Figura 2.1: Movimento $q(t, \xi)$

Consideremos as coordenadas da projeção do ponto de contato $\bar{q}(t)$ (da esfera com a superfície) no plano $(0, e_x, e_y)$, que serão denotados por x, y . Logo, as coordenadas cartesianas de $\bar{q}(t)$ serão $(x, y, \Psi(x, y))$ desde que $z = \Psi(x, y)$ represente localmente a superfície S . Como é de revolução, teremos $z = \Psi(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2})$ ou $z = F(r)$ em que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r > 0$ variando num certo intervalo I de \mathbb{R} onde F é de classe C^2 .

O centro da esfera será dado por

$$C(t) = \bar{q}(t) + \delta \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \quad \text{ou} \quad C(t) = (x, y, F(r)) + \delta \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|},$$

em que $\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ é o vetor unitário normal a S no ponto de contato com

$$\vec{N} = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right) = \left(-\frac{F'(r)}{r}x, -\frac{F'(r)}{r}y, 1 \right)$$

e

$$|\vec{N}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{1 + F'(r)^2}.$$

Por outro lado, um ponto da esfera num instante t , que se obtém de um ponto genérico ξ numa esfera de referência, através de um movimento rígido, é dado por:

$$q(t, \xi) = R_t(\xi) + C(t).$$

Derivando, em relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{q}(t, \xi) = \dot{R}_t(\xi) + \dot{C}(t)$$

e como $\xi = R_t^{-1}(q(t, \xi) - C(t))$, temos

$$\dot{q}(t, \xi) = \dot{R}_t R_t^{-1}(q(t, \xi) - C(t)) + \dot{C}(t)$$

e então

$$\dot{q}(t, \xi) = \omega \times (q(t, \xi) - C(t)) + \dot{C}(t), \quad (2.7)$$

em que $\omega = \omega(t)$ denomina-se a direção do eixo instantâneo de rotação obtida do operador anti-simétrico $\dot{R}_t R_t^{-1}$ pela correspondência entre vetores e operadores anti-simétricos de \mathbb{R}^3 .

A condição de rolar *sem escorregar* é dada por $\dot{q}(t, \xi) = 0$, em que $q(t, \xi)$ é o ponto de contato $\bar{q}(t)$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \times (\bar{q}(t) - C(t)) + \dot{C}(t), \\ 0 &= \omega \times \left(-\delta \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \right) + \dot{C}(t), \\ \dot{C}(t) &= \frac{\delta}{|\vec{N}|} \omega \times \vec{N}, \\ \dot{C}(t) &= \frac{\delta}{|\vec{N}|} \omega \times \left(-\frac{F'(r)}{r} x, -\frac{F'(r)}{r} y, 1 \right); \end{aligned}$$

se $\omega = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z$ temos

$$\begin{aligned} \dot{C}(t) &= \frac{\delta}{|\vec{N}|} \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -\frac{F'(r)}{r} x & -\frac{F'(r)}{r} y & 1 \end{vmatrix}, \text{ ou} \\ \dot{C}(t) &= \frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_y + \omega_z \frac{F'(r)}{r} y, -\omega_z \frac{F'(r)}{r} x - \omega_x, -\omega_x \frac{F'(r)}{r} y + \omega_y \frac{F'(r)}{r} x \right) \end{aligned}$$

e como

$$C(t) = (x, y, F(r)) + \frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(-\frac{F'(r)}{r} x, -\frac{F'(r)}{r} y, 1 \right),$$

vem que

$$\dot{C}(t) = (\dot{x}, \dot{y}, F'(r)\dot{r}) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(-\frac{F'(r)}{r} x, -\frac{F'(r)}{r} y, 1 \right) \right]$$

ou

$$\dot{C}(t) = (\dot{x}, \dot{y}, F'(r)\dot{r}) - \delta \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} x \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} y \right), \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{|\vec{N}|} \right) \right].$$

Igualando as componentes de $\dot{C}(t)$, temos

$$\begin{cases} \dot{x} - \delta \frac{d}{dt} \left(\frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} x \right) = \frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_y + \omega_z \frac{F'(r)}{r} y \right) \\ \dot{y} - \delta \frac{d}{dt} \left(\frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} y \right) = -\frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_z \frac{F'(r)}{r} x + \omega_x \right) \\ F'(r)\dot{r} + \delta \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{N}|} \right) = \frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_y \frac{F'(r)}{r} x - \omega_x \frac{F'(r)}{r} y \right) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \dot{x} - \delta \left[\left(\frac{F''(r)}{r|\vec{N}|^3} - \frac{F'(r)}{r^2|\vec{N}|} \right) \dot{r}x + \frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} \dot{x} \right] = \frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_y + \omega_z \frac{F'(r)}{r} y \right) \\ \dot{y} - \delta \left[\left(\frac{F''(r)}{r|\vec{N}|^3} - \frac{F'(r)}{r^2|\vec{N}|} \right) \dot{r}y + \frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} \dot{y} \right] = -\frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_x + \omega_z \frac{F'(r)}{r} x \right) \\ F'(r)\dot{r} - \frac{\delta F'(r)F''(r)\dot{r}}{|\vec{N}|^3} = \frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_y \frac{F'(r)}{r} x - \omega_x \frac{F'(r)}{r} y \right). \end{cases} \quad (2.8)$$

Veremos a seguir que a terceira equação em (2.8) é combinação linear das duas primeiras. Podemos supor $F'(r) \neq 0$, pois, se $F'(r) = 0$ a afirmação é óbvia.

Dividindo-se a terceira equação por $F'(r)$ temos

$$\begin{cases} \dot{x} - \delta \left[\frac{F''(r)}{r|\vec{N}|^3} \dot{r}x - \frac{F'(r)}{r^2|\vec{N}|} \dot{r}x + \frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} \dot{x} \right] = \frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_y + \omega_z \frac{F'(r)}{r} y \right) \\ \dot{y} - \delta \left[\frac{F''(r)}{r|\vec{N}|^3} \dot{r}y - \frac{F'(r)}{r^2|\vec{N}|} \dot{r}y + \frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} \dot{y} \right] = -\frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_x + \omega_z \frac{F'(r)}{r} x \right) \\ \dot{r} - \frac{\delta F''(r)\dot{r}}{|\vec{N}|^3} = \frac{\delta}{|\vec{N}|} \left(\omega_y \frac{x}{r} - \omega_x \frac{y}{r} \right). \end{cases} \quad (2.9)$$

Multiplicando-se em (2.9) a primeira equação por x , a segunda por y e somando-se, obtemos

$$\begin{aligned} & x\dot{x} + y\dot{y} - \delta \left[\frac{F''(r)}{r|\vec{N}|^3} \dot{r}(x^2 + y^2) - \frac{F'(r)}{r^2|\vec{N}|} \dot{r}(x^2 + y^2) + \frac{F'(r)}{r|\vec{N}|} (\dot{x}x + \dot{y}y) \right] \\ &= \frac{\delta}{|\vec{N}|} (\omega_y x - \omega_x y) \end{aligned}$$

e como $r^2 = x^2 + y^2$, temos que $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ e então:

$$r\dot{r} - \delta \left[\frac{F''(r)\dot{r}r}{|\vec{N}|^3} - \frac{F'(r)\dot{r}}{|\vec{N}|} + \frac{F'(r)\dot{r}}{|\vec{N}|} \right] = \frac{\delta}{|\vec{N}|}(\omega_y x - \omega_x y)$$

ou

$$r\dot{r} - \delta \frac{F''(r)\dot{r}r}{|\vec{N}|^3} = \frac{\delta}{|\vec{N}|}(\omega_y x - \omega_x y).$$

Dividindo-se por r , obtemos a terceira equação e podemos então eliminá-la em (2.9).

No que segue, será útil considerar as duas primeiras equações de (2.9) em coordenadas polares $x = r \cos \beta$ e $y = r \sin \beta$:

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \beta - r\dot{\beta} \sin \beta - \frac{\delta F''(r)\dot{r} \cos \beta}{|\vec{N}|^3} + \frac{\delta F'(r)\dot{\beta} \sin \beta}{|\vec{N}|} = \frac{\delta}{|\vec{N}|}(\omega_y + \omega_z F'(r) \sin \beta), \\ \dot{r} \sin \beta + r\dot{\beta} \cos \beta - \frac{\delta F''(r)\dot{r} \sin \beta}{|\vec{N}|^3} - \frac{\delta F'(r)\dot{\beta} \cos \beta}{|\vec{N}|} = -\frac{\delta}{|\vec{N}|}(\omega_x + \omega_z F'(r) \cos \beta). \end{cases} \quad (2.10)$$

Em (2.10), multiplicando-se por $\cos \beta$ a primeira equação, por $\sin \beta$ a segunda e somando-se, obtemos:

$$\dot{r} - \frac{\delta F''(r)}{|\vec{N}|^3} \dot{r} = \frac{\delta}{|\vec{N}|}(\omega_y \cos \beta - \omega_x \sin \beta); \quad (2.11)$$

a seguir, multiplicando-se a primeira equação por $-\sin \beta$, a segunda por $\cos \beta$ e somando-se, obtemos:

$$r\dot{\beta} - \frac{\delta F'(r)}{|\vec{N}|} \dot{\beta} = -\frac{\delta}{|\vec{N}|}(\omega_y \sin \beta + \omega_x \cos \beta + \omega_z F'(r)). \quad (2.12)$$

Concluimos então que a *condição para não escorregar*, nas novas coordenadas, é dada pelas duas equações (2.11) e (2.12):

$$\begin{cases} \dot{r} \left(1 - \frac{\delta F''(r)}{|\vec{N}|^3} \right) = \frac{\delta}{|\vec{N}|}(\omega_y \cos \beta - \omega_x \sin \beta) \\ \dot{\beta} \left(r - \frac{\delta F'(r)}{|\vec{N}|} \right) = -\frac{\delta}{|\vec{N}|}(\omega_y \sin \beta + \omega_x \cos \beta + \omega_z F'(r)). \end{cases}$$

A condição para rolar sem pivotar é $\langle \omega, \vec{N} \rangle = 0$, onde $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ e $\vec{N} = \left(-\frac{F'(r)}{r}x, -\frac{F'(r)}{r}y, 1\right)$, e então

$$-\omega_x F'(r) \frac{x}{r} - \omega_y F'(r) \frac{y}{r} + \omega_z = 0,$$

ou, em coordenadas polares:

$$-\omega_x F'(r) \cos \beta - \omega_y F'(r) \sin \beta + \omega_z = 0.$$

Resumindo as condições acima obtemos:

Proposição 2.5 *As condições de não escorregamento são*

$$\begin{cases} \dot{r} \left(\frac{|\vec{N}|^3 - \delta F''(r)}{\delta |\vec{N}|^2} \right) = \omega_y \cos \beta - \omega_x \sin \beta \\ \dot{\beta} \left(\frac{\delta F'(r) - r |\vec{N}|}{\delta} \right) = \omega_y \sin \beta + \omega_x \cos \beta + \omega_z F'(r) \end{cases} \quad (2.13)$$

e a condição de não pivotamento é

$$\omega_z = \omega_x F'(r) \cos \beta + \omega_y F'(r) \sin \beta. \quad (2.14)$$

Para podermos explicitar nas equações (2.13) as expressões de \dot{r} e $\dot{\beta}$, devemos admitir que

$$(|\vec{N}|^3 - \delta F''(r))(\delta F'(r) - r |\vec{N}|) \neq 0, \quad \forall r > 0, r \in I. \quad (2.15)$$

Em certos casos teremos que escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno para garantir a existência dos rolamentos.

É fácil ver, por exemplo, que (2.15) está verificada nos casos:

- 1) $F(r) = \frac{r^2}{2}$, com $\delta < 1$ (parabolóide elíptico),
- 2) $F(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$ (esfera de raio R),
- 3) $F(r) = b \cosh^{-1}(\frac{r}{b})$, com $r > b > \delta$, (catenóide),
- 4) $F(r) = \alpha r$, $r > \frac{\delta\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\alpha > 0$ (cone) e
- 5) $F(r) = \text{constante}$ (plano).

A condição (2.15) não estará satisfeita se, e somente se, o vetor instantâneo de rotação ω for ortogonal ao vetor $(-\sin \beta, \cos \beta, 0)$ ou ao vetor $(\cos \beta, \sin \beta, F'(r))$ (para algum ângulo β).

Na próxima seção deduziremos as expressões de ω_x , ω_y e ω_z em termos dos chamados ângulos de Euler pois como veremos na seção 2.4, as equações (2.13), (2.14) e (2.15) definirão um sistema de controle não linear afim cuja controlabilidade será demonstrada. A utilização dos ângulos de Euler visa poder exprimir o sistema não linear afim em termos de coordenadas locais de $S \times SO(3)$.

2.3 Ângulos de Euler e o vetor instantâneo de rotação

No estudo dos rolamentos de uma esfera rígida sobre uma superfície de revolução S , os “estados” da esfera serão identificados com os pontos da variedade $S \times SO(3)$ em que $SO(3)$ é o conjunto dos operadores ortogonais próprios (rotações) de R^3 . No intuito de introduzir um atlas para a estrutura de variedade $SO(3)$ recordemos, a seguir, as definições dos ângulos de Euler.

Consideremos duas bases ortonormais positivas de \mathbb{R}^3 , (E_1, E_2, E_3) e (e_x, e_y, e_z) , a primeira ligada ao corpo móvel K (representando a esfera rígida), e que corres-

ponde, por exemplo, às direções principais de inércia, e a segunda é a base canônica de \mathbb{R}^3 .

Seja $(e_1, e_2, e_3) = (R_t E_1, R_t E_2, R_t E_3)$ a correspondente base móvel, em que R_t representa a rotação associada ao movimento rígido do corpo K , que é a composta de R_t com uma translação.

Vamos introduzir os ângulos de Euler e para tal usaremos a notação de V. Arnold [2] (ver também W. M. Oliva [18]).

Suponhamos $e_z \times e_3 \neq 0$, o que permite definir o vetor unitário (direção do eixo nodal)

$$e_N = \frac{e_z \times e_3}{|e_z \times e_3|}.$$

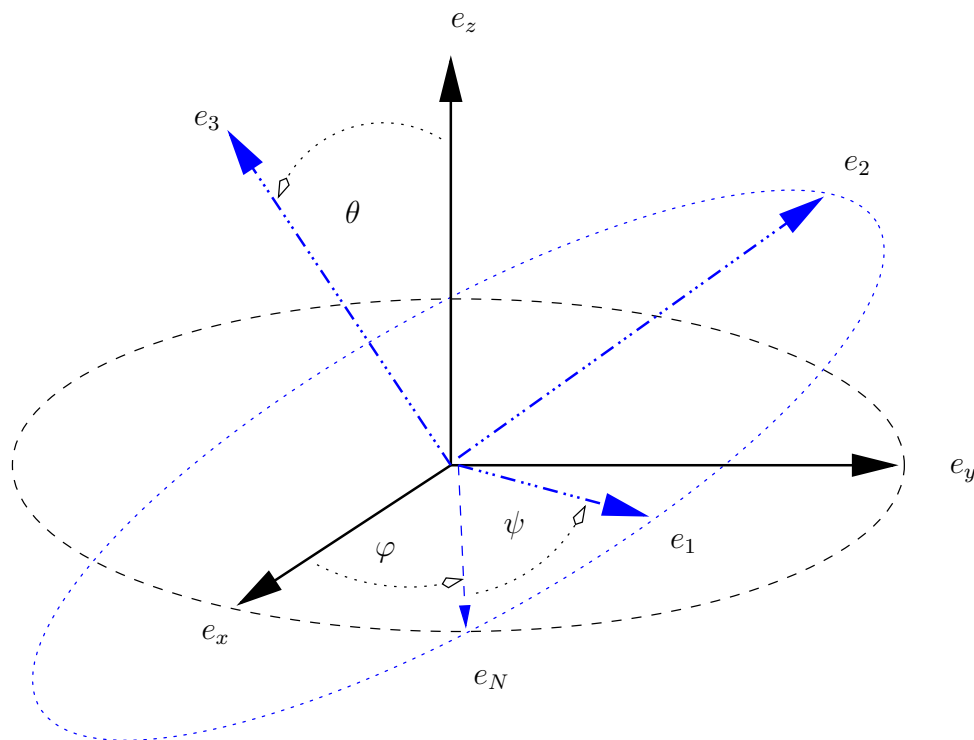


Figura 2.2: Ângulos de Euler

Definiremos a seguir três rotações:

A primeira R_φ , rotação de ângulo φ ($0 < \varphi < 2\pi$) em torno de e_z que leva a base (e_x, e_y, e_z) na base $(e_N, e_z \times e_N, e_z)$ de modo que

$$\begin{aligned} e_N &= (\cos \varphi)e_x + (\text{sen } \varphi)e_y, \\ e_z \times e_N &= -(\text{sen } \varphi)e_x + (\cos \varphi)e_y, \end{aligned}$$

logo, em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} e_N \\ e_z \times e_N \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

A segunda R_θ , rotação de ângulo θ ($0 < \theta < \pi$) em torno de e_N que leva a base $(e_N, e_z \times e_N, e_z)$ na base $(e_N, e_3 \times e_N, e_3)$ de modo que

$$\begin{bmatrix} e_N \\ e_3 \times e_N \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_N \\ e_z \times e_N \\ e_z \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

A terceira R_ψ , rotação de ângulo ψ ($0 < \psi < 2\pi$) em torno de e_3 que leva a base $(e_N, e_3 \times e_N, e_3)$ na base (e_1, e_2, e_3) de modo que

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_N \\ e_3 \times e_N \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

A composição das três rotações $R_\psi \circ R_\theta \circ R_\varphi$, que é uma rotação, fornece

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \text{sen } \psi \text{sen } \varphi \cos \theta & \cos \psi \text{sen } \varphi + \text{sen } \psi \cos \varphi \cos \theta & \text{sen } \theta \text{sen } \psi \\ -\text{sen } \psi \cos \varphi - \cos \psi \text{sen } \varphi \cos \theta & -\text{sen } \psi \text{sen } \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta & \cos \psi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \varphi \text{sen } \theta & -\text{sen } \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

isto é, a rotação que leva (e_x, e_y, e_z) em (e_1, e_2, e_3) é dada por

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde H é a matriz 3×3 que aparece em (2.19).

Seja $R(\varphi, \theta, \psi)$ o operador ortogonal próprio de \mathbb{R}^3 que leva (e_x, e_y, e_z) em (e_1, e_2, e_3) dado por (2.19). A matriz de $R(\varphi, \theta, \psi)$ em relação à base (e_x, e_y, e_z) é a transposta da matriz H .

A função $R : (\varphi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3 \mapsto R(\varphi, \theta, \psi) \in SO(3)$ com $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \psi < 2\pi$, define uma carta local em $SO(3)$, centrada no ponto $R(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi)$. Por translações à direita obtém-se uma carta local para cada ponto de $SO(3)$ não atingido pela carta local R ; desta forma constrói-se um atlas para a estrutura de variedade desse grupo de Lie.

As coordenadas locais (φ, θ, ψ) da carta R em $SO(3)$, também chamados *ângulos de Euler*, definem coordenadas naturais $(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ para $T(SO(3))$ da maneira usual, e o que se pretende provar, inicialmente, é que a *velocidade angular* ω em relação ao sistema fixo, de um movimento rígido de K , é dada por:

$$\omega = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) e_x + (\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta) e_y + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) e_z. \quad (2.20)$$

Seja $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} R_t \in SO(3)$. Como $t \mapsto h(t)$ é uma curva com valores em $SO(3)$ e, usando-se a carta local $R(\varphi, \theta, \psi)$ nas vizinhanças de $h(t)$, vê-se que existe uma curva $t \mapsto \gamma(t) = (\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$ em \mathbb{R}^3 , tal que $R(\gamma(t)) = h(t)$ e também que

$$\dot{h} = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(h) + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(h) + \dot{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}(h), \quad (2.21)$$

onde, por definição, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(h) = dR_\gamma(1,0,0), \quad \frac{\partial}{\partial\theta}(h) = dR_\gamma(0,1,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial\psi}(h) = dR_\gamma(0,0,1),$$

em que $R_\gamma = R(\gamma) = h$.

Como visto na seção 2.2 deste capítulo, obtém-se

$$\omega(t) \times = \dot{R}_t R_t^{-1} = \dot{h}(t) h^{-1}(t),$$

isto é,

$$\omega(t) \times x = \dot{h}(t) h^{-1}(t) x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3.$$

Portanto,

$$\omega(t) \times x = \left[\dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}(h(t)) + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(h(t)) + \dot{\psi} \frac{\partial}{\partial\psi}(h(t)) \right] h^{-1}(t) x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Sejam $\omega_\varphi(t), \omega_\theta(t), \omega_\psi(t)$ os vetores de \mathbb{R}^3 correspondentes aos vetores tangentes $\frac{\partial}{\partial\varphi}(h(t))h^{-1}(t)$, $\frac{\partial}{\partial\theta}(h(t))h^{-1}(t)$ e $\frac{\partial}{\partial\psi}(h(t))h^{-1}(t)$, na identidade do grupo $SO(3)$, definidos por:

$$\omega_\varphi \times x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\varphi}(h)h^{-1}x, \quad \omega_\theta \times x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\theta}(h)h^{-1}x \quad \text{e} \quad \omega_\psi \times x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\psi}(h)h^{-1}x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, onde omitimos o argumento t . Segue daí que

$$\omega = \dot{\varphi}\omega_\varphi + \dot{\theta}\omega_\theta + \dot{\psi}\omega_\psi. \quad (2.22)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(h) = dR_\gamma(1,0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{ds} R(\varphi + s, \theta, \psi)|_{s=0},$$

e usando-se a representação matricial do operador $R(\varphi, \theta, \psi)$ (transposta de H), obtém-se a representação matricial de $\frac{\partial}{\partial\varphi}(h)$ na base (e_x, e_y, e_z) :

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(h) = \begin{bmatrix} -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\theta & \sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \cos\varphi \cos\theta & \cos\varphi \sin\theta \\ \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\theta & -\sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi \cos\theta & \sin\varphi \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, correspondentemente, a representação matricial de $\frac{\partial}{\partial\varphi}(h)h^{-1}$ resulta, após multiplicação da matriz de $\frac{\partial}{\partial\varphi}(h)$ pela matriz H ,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(h)h^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Procedendo de forma análoga, obteremos as representações matriciais dos operadores anti-simétricos $\frac{\partial}{\partial\theta}(h)h^{-1}$ e $\frac{\partial}{\partial\psi}(h)h^{-1}$, a saber:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(h)h^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sen } \varphi \\ 0 & 0 & -\text{cos } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \text{cos } \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\psi}(h)h^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{cos } \theta & -\text{cos } \varphi \text{sen } \theta \\ \text{cos } \theta & 0 & -\text{sen } \varphi \text{sen } \theta \\ \text{cos } \varphi \text{sen } \theta & \text{sen } \varphi \text{sen } \theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Do isomorfismo entre vetores e operadores anti-simétricos de \mathbb{R}^3 , a um vetor $\omega \in \mathbb{R}^3$, que na base ortonormal positiva (e_x, e_y, e_z) se escreve

$$\omega = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z,$$

corresponde o operador anti-simétrico $(\omega \times)$ cuja representação matricial nessa base é

$$(\omega \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega \times &= \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sen } \varphi \\ 0 & 0 & -\text{cos } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \text{cos } \varphi & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 & -\text{cos } \theta & -\text{cos } \varphi \text{sen } \theta \\ \text{cos } \theta & 0 & -\text{sen } \varphi \text{sen } \theta \\ \text{cos } \varphi \text{sen } \theta & \text{sen } \varphi \text{sen } \theta & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

logo,

$$\omega = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) e_x + (\dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \operatorname{sen} \theta) e_y + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) e_z .$$

Segue daí que

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi , \\ \omega_y = \dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi - \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi , \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta . \end{cases} \quad (2.23)$$

ou invertendo, tem-se

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_z - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} (\omega_x \operatorname{sen} \varphi - \omega_y \cos \varphi) , \\ \dot{\theta} = \omega_x \cos \varphi + \omega_y \operatorname{sen} \varphi , \\ \dot{\psi} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} (\omega_x \operatorname{sen} \varphi - \omega_y \cos \varphi) . \end{cases} \quad (2.24)$$

2.4 Sistemas de controle no problema do rolamento

Na seção 2.2 (ver (2.15)) impusemos a condição

$$(|\vec{N}|^3 - \delta F''(r))(\delta F'(r) - r|\vec{N}|) \neq 0, \quad \forall r > 0, r \in I,$$

que define um conjunto aberto Ω na variedade $S \times SO(3)$ (espaço de configurações ou espaço de estados na nomenclatura da teoria do controle); podemos então definir

$$A = A(r) = \frac{\delta |\vec{N}|^2}{|\vec{N}|^3 - \delta F''(r)} \quad (2.25)$$

e

$$B = B(r) = \frac{\delta}{\delta F'(r) - r|\vec{N}|} . \quad (2.26)$$

As condições para o *rolamento sem escorregamento* (ver(2.13)) são portanto

$$\begin{cases} \dot{r} = A(\omega_y \cos \beta - \omega_x \sin \beta) \\ \dot{\beta} = B(\omega_y \sin \beta + \omega_x \cos \beta + \omega_z F'(r)) \end{cases} \quad (2.27)$$

e caracterizam uma distribuição \mathcal{D}_1 de posto constante 3 no aberto Ω .

Recordemos também (ver(2.14)) a condição que garante o *rolamento sem pivotação*:

$$\omega_z = \omega_x F'(r) \cos \beta + \omega_y F'(r) \sin \beta . \quad (2.28)$$

Veremos adiante que as condições (2.27) e (2.28) caracterizam uma distribuição \mathcal{D} de posto constante 2 no mesmo aberto Ω . Note-se que (2.27) e (2.28) são intrínsecas, isto é, não envolvem os ângulos de Euler.

Lembremos o que foi provado no final da seção 2.3 (ver (2.23)):

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta, \end{cases}$$

que fornecem as expressões locais de ω_x , ω_y e ω_z ; então nas coordenadas $(r, \beta, \varphi, \theta, \psi)$ as *equações do vínculo* (rolar sem escorregar) são:

$$\begin{cases} \dot{r} = A[\dot{\theta} \sin(\varphi - \beta) - \dot{\psi} \sin \theta \cos(\varphi - \beta)] \\ \dot{\beta} = B[\dot{\varphi} F'(r) + \dot{\psi}(\cos \theta F'(r) + \sin \theta \sin(\varphi - \beta)) + \dot{\theta} \cos(\varphi - \beta)]. \end{cases} \quad (2.29)$$

Consideremos as formas ν_1 e ν_2 nas variáveis $(r, \beta, \varphi, \theta, \psi)$ que são coordenadas locais definidas num aberto da variedade $S \times SO(3)$:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= dr - A[d\theta \sin(\varphi - \beta) - d\psi \sin \theta \cos(\varphi - \beta)] , \\ \nu_2 &= d\beta - B[d\varphi F'(r) + d\psi(\cos \theta F'(r) + \sin \theta \sin(\varphi - \beta)) + d\theta \cos(\varphi - \beta)] . \end{aligned}$$

Lema 2.6 *Os campos*

$$\begin{cases} X_1 = BF'(r) \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} , \\ X_2 = A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \theta} , \\ X_3 = -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B[\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)] \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \psi} , \end{cases} \quad (2.30)$$

são linearmente independentes em cada ponto da carta local considerada e pertencem à distribuição \mathcal{D}_1 de posto constante 3 definida por $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

Prova:

Procuraremos funções reais a_r , a_β , a_φ , a_θ e a_ψ , tais que o campo vetorial

$$X = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + a_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\psi \frac{\partial}{\partial \psi}$$

satisfaça $\nu_1(X) = \nu_2(X) = 0$.

Teremos então

$$\begin{aligned} a_r &= A[a_\theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - a_\psi \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta)] , \\ a_\beta &= B[a_\varphi F'(r) + a_\psi (\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)) + a_\theta \cos(\varphi - \beta)] . \end{aligned}$$

As funções a_r e a_β são determinadas a partir de a_φ , a_θ e a_ψ que são arbitrárias.

Escolhendo-se para $(a_\varphi, a_\theta, a_\psi)$ a terna $(1,0,0)$, depois $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, obteremos sucessivamente:

$$\begin{cases} X_1 = BF'(r) \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} , \\ X_2 = A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \theta} , \\ X_3 = -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B[\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)] \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \psi} . \end{cases}$$

Veremos que os campos vetoriais X_1 , X_2 e X_3 são linearmente independentes em cada ponto de $S \times SO(3)$ da carta local considerada, na qual geram a distribuição \mathcal{D}_1 definida por $\nu_1 = \nu_2 = 0$, de posto constante 3. De fato, a matriz associada ao sistema (2.30) é

$$\begin{bmatrix} 0 & BF'(r) & 1 & 0 & 0 \\ A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) & B \cos(\varphi - \beta) & 0 & 1 & 0 \\ -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) & B[\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)] & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e tem posto 3. ■

Lema 2.7 \mathcal{D}_1 é não involutiva.

Prova: Se um dos colchetes $[X_1, X_2]$, $[X_1, X_3]$ ou $[X_2, X_3]$ não pertencer a \mathcal{D}_1 , esta distribuição não é involutiva, o que segue do teorema de Frobenius.

Aplicando a fórmula (2.6) para os três colchetes acima, vem:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= [A \cos(\varphi - \beta)(1 - BF'(r))] \frac{\partial}{\partial r} - \\ &\quad - \left\{ \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \left[B(1 - BF'(r)) + A \frac{\partial}{\partial r}(BF'(r)) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \beta}, \\ [X_1, X_3] &= [A \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)(1 - BF'(r))] \frac{\partial}{\partial r} + \\ &\quad + \left\{ \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \left[B(1 - BF'(r)) + A \frac{\partial}{\partial r}(BF'(r)) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \beta}, \\ [X_2, X_3] &= [-A \cos \theta \cos(\varphi - \beta)(1 - BF'(r))] \frac{\partial}{\partial r} + \left\{ \operatorname{sen} \theta \left[A \frac{\partial B}{\partial r} - B^2 - BF'(r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \left(B(1 - BF'(r)) + A \frac{\partial}{\partial r}(BF'(r)) \right) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

Tem-se portanto:

$$\begin{cases} \nu_1[X_1, X_2] = A \cos(\varphi - \beta)(1 - BF'(r)), \\ \nu_2[X_1, X_2] = -\operatorname{sen}(\varphi - \beta) \left[B(1 - BF'(r)) + A \frac{\partial}{\partial r}(BF'(r)) \right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_1[X_1, X_3] = A \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)(1 - BF'(r)) , \\ \nu_2[X_1, X_3] = \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \left[B(1 - BF'(r)) + A \frac{\partial}{\partial r}(BF'(r)) \right] , \\ \nu_1[X_2, X_3] = -A \cos \theta \cos(\varphi - \beta)(1 - BF'(r)) , \\ \nu_2[X_2, X_3] = \operatorname{sen} \theta \left[A \frac{\partial B}{\partial r} - B^2 - BF'(r) + \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \left(B(1 - BF'(r)) + A \frac{\partial}{\partial r}(BF'(r)) \right) \right]; \end{cases}$$

Observemos que

$$1 - BF'(r) \neq 0 \text{ pois } BF'(r) = \frac{\delta F'(r)}{\delta F'(r) - r|\vec{N}|} \text{ (por (2.26)) e como } r > 0, \text{ obtemos}$$

que

$$\frac{\delta F'(r)}{\delta F'(r) - r|\vec{N}|} \neq 1, \text{ ou seja, } BF'(r) \neq 1.$$

Além disso, $\operatorname{sen} \theta \neq 0$ ($0 < \theta < \pi$) e $\operatorname{sen}(\varphi - \beta)$ e $\cos(\varphi - \beta)$ não se anulam simultaneamente; quando $\operatorname{sen}(\varphi - \beta) = 0$ temos que $\cos(\varphi - \beta) \neq 0$ e $\nu_1[X_1, X_2] \neq 0$ que implica $[X_1, X_2] \notin \mathcal{D}_1$. Finalmente se $\operatorname{sen}(\varphi - \beta) \neq 0$ temos $\nu_1[X_1, X_3] \neq 0$, ou seja, $[X_1, X_3] \notin \mathcal{D}_1$. ■

Concluimos então que o *vínculo de rolamento sem escorregamento* é não holônomo, já que \mathcal{D}_1 é não involutiva.

Acrescentando-se às equações (2.29) a equação (2.28), obtemos nas coordenadas $(r, \beta, \varphi, \theta, \psi)$ as equações do *vínculo de rolamento sem escorregamento e sem pivotamento*:

$$\begin{cases} \dot{r} = A [\dot{\theta} \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta)] \\ \dot{\beta} = B [|\vec{N}|^2 (\dot{\theta} \cos(\varphi - \beta) + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta))] \\ \dot{\varphi} = F'(r) \cos(\varphi - \beta) \dot{\theta} + \dot{\psi} (F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta) . \end{cases} \quad (2.31)$$

Consideremos agora as formas $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$ e $\bar{\nu}_3$ cujos zeros definem localmente a distribuição \mathcal{D} de posto constante 2:

$$\begin{cases} \bar{\nu}_1 = dr - A [d\theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - d\psi \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta)] , \\ \bar{\nu}_2 = d\beta - B [|\vec{N}|^2 (d\theta \cos(\varphi - \beta) + d\psi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta))] , \\ \bar{\nu}_3 = d\varphi - F'(r) \cos(\varphi - \beta) d\theta + d\psi (F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta) . \end{cases} \quad (2.32)$$

Lema 2.8 *Os campos*

$$\begin{cases} Y_1 = A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B |\vec{N}|^2 \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + F'(r) \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} , \\ Y_2 = -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B |\vec{N}|^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + \\ \quad + (F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi} . \end{cases} \quad (2.33)$$

geram a distribuição \mathcal{D} em cada ponto do aberto de $S \times SO(3)$ onde estão definidos os ângulos de Euler.

Prova: Procuremos, como antes, funções $a_r, a_\beta, a_\varphi, a_\theta$ e a_ψ tais que o campo vetorial

$$Y = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + a_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\psi \frac{\partial}{\partial \psi}$$

satisfaça $\bar{\nu}_1(Y) = \bar{\nu}_2(Y) = \bar{\nu}_3(Y) = 0$.

Teremos então

$$\begin{aligned} a_r &= A [a_\theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - a_\psi \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta)] , \\ a_\beta &= B [|\vec{N}|^2 (a_\theta \cos(\varphi - \beta) + a_\psi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta))] , \\ a_\varphi &= F'(r) \cos(\varphi - \beta) a_\theta + a_\psi (F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta) . \end{aligned}$$

Escolhendo-se $(a_\theta, a_\psi) = (1, 0)$ e depois $(0, 1)$, determinaremos a_r, a_β e a_φ e obteremos

$$\begin{cases} Y_1 = A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B |\vec{N}|^2 \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + F'(r) \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} , \\ Y_2 = -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B |\vec{N}|^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \quad + (F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi} . \end{cases}$$

Os campos Y_1 e Y_2 são linearmente independentes em cada ponto de $S \times SO(3)$ da carta local considerada pois a matriz

$$\begin{bmatrix} A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) & B|\vec{N}|^2 \cos(\varphi - \beta) & F'(r) \cos(\varphi - \beta) & 1 & 0 \\ -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) & B|\vec{N}|^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) & F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem posto 2. Os campos Y_1 e Y_2 geram \mathcal{D} em cada ponto do aberto de $S \times SO(3)$ onde estão definidos os ângulos de Euler. ■

Teorema 2.9 *Seja \mathcal{D} a distribuição de posto constante 2 definida no aberto Ω e que corresponde ao rolamento sem escorregamento e sem pivotamento de uma esfera de raio conveniente $\delta > 0$ sobre uma superfície de revolução S de equação*

$z = F(r)$, F de classe C^2 . Então no aberto Ω em que a curvatura de Gauss $K = \frac{F'(r)F''(r)}{r(1+F'(r)^2)^2}$ da superfície S é distinta da curvatura de Gauss $\frac{1}{\delta^2}$ da esfera, \mathcal{D} é não involutiva.

Prova: Se o colchete $[Y_1, Y_2]$ não pertencer a \mathcal{D} , \mathcal{D} não é involutiva, ou seja, o vínculo de rolamento sem escorregamento e sem pivotamento é não-holônomo.

Calculando-se o colchete de Y_1 com Y_2 tem-se

$$[Y_1, Y_2] = \operatorname{sen} \theta \left[C(r) \frac{\partial}{\partial \beta} + D(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right],$$

em que

$$C(r) = A \frac{\partial}{\partial r} (B|\vec{N}|^2) - B|\vec{N}|^2 (F'(r) + B|\vec{N}|^2)$$

ou

$$\begin{aligned} C(r) &= \frac{AB^2|\vec{N}|}{\delta} \left[-\delta|\vec{N}|F''(r) + |\vec{N}|^2 + rF'(r)F''(r) \right] + 2ABF'(r)F''(r) \\ &\quad - B^2|\vec{N}|^4 + B|\vec{N}|^2F'(r) \end{aligned} \tag{2.34}$$

e

$$D(r) = AF''(r) + |\vec{N}|^2 - B|\vec{N}|^2F'(r) .$$

Mostremos que $[Y_1, Y_2]$ não é combinação linear de Y_1 e Y_2 ($[Y_1, Y_2] \notin \mathcal{D}$) desde que $D(r) \neq 0$.

De fato, a matriz dos coeficientes de Y_1, Y_2 e $[Y_1, Y_2]$ na base $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \psi})$ é:

$$\begin{bmatrix} A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) & B|\vec{N}|^2 \cos(\varphi - \beta) & F'(r) \cos(\varphi - \beta) & 1 & 0 \\ -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) & B|\vec{N}|^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) & F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta & 0 & 1 \\ 0 & C(r) \operatorname{sen} \theta & D(r) \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e o determinante das três últimas colunas vale $D(r) \operatorname{sen} \theta \neq 0$. Além disso,

$D(r) = AF''(r) + |\vec{N}|^2 - B|\vec{N}|^2F'(r)$ e, substituindo-se A e B de (2.25) e (2.26), chega-se a

$$D(r) = \frac{|\vec{N}|^2[\delta^2 F'(r)F''(r) - r|\vec{N}|^4]}{(|\vec{N}|^3 - \delta F''(r))(\delta F'(r) - r|\vec{N}|)} ; \quad (2.35)$$

a condição $D(r) \neq 0$ equivale a

$$\delta^2 F'(r)F''(r) - r|\vec{N}|^4 \neq 0 ,$$

ou à condição

$$\frac{F'(r)F''(r)}{r(1 + F'(r)^2)^2} \neq \frac{1}{\delta^2} . \quad (2.36)$$

Mas o primeiro membro dessa igualdade é precisamente a curvatura de Gauss da superfície de revolução S (ver M. P. Carmo, [6], p. 94 e p. 100). Segue daí que a prova está completa. ■

As equações (2.29) definem o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ BF'(r) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \\ B \cos(\varphi - \beta) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \\ B[\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)] \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_3 \quad (2.37)$$

onde $v = (r, \beta, \varphi, \theta, \psi)$, ou seja,

$$\dot{v} = X_1(v)u_1 + X_2(v)u_2 + X_3(v)u_3,$$

que é um sistema de controle não-linear afim (ver seção 2.1) associado à distribuição \mathcal{D}_1 que determina os rolamentos sem escorregamento.

Analogamente, as equações (2.31) definem o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \\ B|\vec{N}|^2 \cos(\varphi - \beta) \\ F'(r) \cos(\varphi - \beta) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \\ B|\vec{N}|^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \\ F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (2.38)$$

ou

$$\dot{v} = Y_1(v)u_1 + Y_2(v)u_2,$$

que é um sistema de controle não-linear afim associado à distribuição \mathcal{D} que determina os rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento.

Podemos, também, considerar $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ como controles para o problema de rolamento pois as equações (2.27) e (2.24) definem o sistema:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \operatorname{sen} \beta \\ B \cos \beta \\ -\frac{\cos \theta \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \\ \cos \varphi \\ \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \end{bmatrix} \omega_x + \begin{bmatrix} A \cos \beta \\ B \operatorname{sen} \beta \\ \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \\ \operatorname{sen} \varphi \\ -\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \end{bmatrix} \omega_y + \begin{bmatrix} 0 \\ BF'(r) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_z \quad (2.39)$$

que é um sistema de controle não-linear afim, com controles ω_x , ω_y e ω_z , associado à distribuição \mathcal{D}_1 que determina os rolamentos sem escorregamento.

De maneira análoga, as equações (2.27), (2.28) e (2.24) definem o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \operatorname{sen} \beta \\ B|\vec{N}|^2 \cos \beta \\ F'(r) \cos \beta - \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \\ \cos \varphi \\ \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \end{bmatrix} \omega_x + \begin{bmatrix} A \cos \beta \\ B|\vec{N}|^2 \operatorname{sen} \beta \\ F'(r) \operatorname{sen} \beta + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \\ \operatorname{sen} \varphi \\ -\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \end{bmatrix} \omega_y \quad (2.40)$$

que é um sistema de controle não-linear afim, com controles ω_x e ω_y , associado à distribuição \mathcal{D} que determina os rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento.

2.5 Condições para a verificação da completa não integrabilidade das distribuições \mathcal{D} e \mathcal{D}_1

Nesta seção iremos mostrar a prova de que as distribuições \mathcal{D} e \mathcal{D}_1 , além de serem não involutivas, são também *completamente não integráveis* (“bracket generating”). Deste modo, como visto na seção 2.1 (teorema 2.2), provaremos a controlabilidade dos sistemas de controle (2.37) e (2.38) introduzidos na seção anterior.

Para facilitar os cálculos, escolheremos convenientemente novas bases locais para as referidas distribuições \mathcal{D} e \mathcal{D}_1 , que permitirão provar simultaneamente a completa não integrabilidade dessas duas distribuições.

Recordemos as expressões (2.32) da seção anterior e definamos a base de formas diferenciais $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \omega^1, \omega^2$:

$$\begin{aligned}\theta^1 &= \bar{v}_1 = dr - A[d\theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - d\psi \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta)] , \\ \theta^2 &= \bar{v}_2 = d\beta - B[d\varphi F'(r) + d\psi (\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)) + d\theta \cos(\varphi - \beta)] , \\ \theta^3 &= \bar{v}_3 = d\varphi - F'(r) \cos(\varphi - \beta)d\theta + (\cos \theta - F'(r)\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta))d\psi , \\ \omega^1 &= d\theta , \\ \omega^2 &= d\psi ,\end{aligned}$$

lembrando que os campos vetoriais pertencentes a \mathcal{D}_1 anulam θ^1 e θ^2 , enquanto que os campos vetoriais de \mathcal{D} anulam θ^1, θ^2 e θ^3 .

Seja $(Z_1, Z_2, Z_3, Y_1, Y_2)$ a seqüência de campos vetoriais que formam a base dual de $(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \omega^1, \omega^2)$. Se $Y_1 = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + a_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\psi \frac{\partial}{\partial \psi}$ e

$$\begin{aligned}\theta^1(Y_1) &= a_r - A \operatorname{sen}(\varphi - \beta)a_\theta + A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta)a_\psi = 0 , \\ \theta^2(Y_1) &= a_\beta - B F'(r)a_\varphi - B(\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta))a_\psi - B \cos(\varphi - \beta)a_\theta = 0 , \\ \theta^3(Y_1) &= a_\varphi - F'(r) \cos(\varphi - \beta)a_\theta + (\cos \theta - F'(r)\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta))a_\psi = 0 , \\ \omega^1(Y_1) &= 1 , \\ \omega^2(Y_1) &= 0 ,\end{aligned}$$

então

$$\left\{ \begin{array}{l} a_r = A \operatorname{sen}(\varphi - \beta)a_\theta - A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta)a_\psi , \\ a_\beta = B F'(r)a_\varphi + B(\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta))a_\psi + B \cos(\varphi - \beta)a_\theta , \\ a_\varphi = F'(r) \cos(\varphi - \beta)a_\theta - (\cos \theta - F'(r)\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta))a_\psi , \\ a_\theta = 1 , \\ a_\psi = 0 , \end{array} \right.$$

ou

$$\begin{cases} a_r = A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) , \\ a_\beta = B |\vec{N}|^2 \cos(\varphi - \beta) , \\ a_\varphi = F'(r) \cos(\varphi - \beta) , \\ a_\theta = 1 , \\ a_\psi = 0 , \end{cases}$$

daí ,

$$Y_1 = A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B |\vec{N}|^2 \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + F'(r) \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} .$$

Analogamente, se $Y_2 = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + a_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\psi \frac{\partial}{\partial \psi}$ e

$$\theta^1(Y_2) = 0 ,$$

$$\theta^2(Y_2) = 0 ,$$

$$\theta^3(Y_2) = 0 ,$$

$$\omega^1(Y_2) = 0 ,$$

$$\omega^2(Y_2) = 1 ,$$

então

$$\begin{aligned} Y_2 = & -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial r} + B |\vec{N}|^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + \\ & + (F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi} . \end{aligned}$$

Como os campos vetoriais Y_1 e Y_2 são os mesmos da seção anterior, já foi visto que $[Y_1, Y_2] \notin \mathcal{D}$ desde que $\frac{F'(r)F''(r)}{r(1+F'(r)^2)^2} \neq \frac{1}{\delta^2}$, ou seja, \mathcal{D} não é involutiva se a curvatura de Gauss da superfície de revolução S for distinta da curvatura de Gauss da esfera de raio δ .

Por outro lado,

$$\theta^1([Y_1, Y_2]) = 0 \quad \text{e}$$

$$\theta^2([Y_1, Y_2]) = C(r) \operatorname{sen} \theta - BD(r)F'(r) \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta [C(r) - BD(r)F'(r)] = 0 ,$$

pois $C(r) - BD(r)F'(r) = 0$ (ver próximo lema) e então podemos concluir que $[Y_1, Y_2] \in \mathcal{D}_1$.

Lema 2.10 $C(r) - B(r)D(r)F'(r) = 0$, para todo $r > 0$.

Prova: Pelas expressões (2.25), (2.26), (2.34) e (2.35) da seção anterior temos, após algumas simplificações e omitindo a variável r , que

$$C - BDF' = \frac{B|\vec{N}|^2\delta}{(|\vec{N}|^3 - \delta F'')(\delta F' - r|\vec{N}|)} \left[-\delta|\vec{N}|^2 F'' + \delta F'^2 F'' + \delta F'' \right] = 0 . \quad \blacksquare$$

Para verificar se a distribuição \mathcal{D}_1 é completamente não integrável deveremos considerar os campos vetoriais $Y_1, Y_2, [Y_1, Y_2], [Y_1, [Y_1, Y_2]], [Y_2, [Y_1, Y_2]]$ e determinar as condições para que eles sejam linearmente independentes (em cada ponto).

Calculemos a seguir Z_1, Z_2 e Z_3 .

Se $Z_1 = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + a_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\psi \frac{\partial}{\partial \psi}$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^1(Z_1) = a_r - A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) a_\theta + A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) a_\psi = 1 , \\ \theta^2(Z_1) = a_\beta - B[F'(r) a_\varphi + a_\psi (\cos \theta F'(r) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)) + a_\theta \cos(\varphi - \beta)] = 0 , \\ \theta^3(Z_1) = a_\varphi - F'(r) \cos(\varphi - \beta) a_\theta + (\cos \theta - F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)) a_\psi = 0 , \\ \omega^1(Z_1) = a_\theta = 0 , \\ \omega^2(Z_1) = a_\psi = 0 \end{array} \right.$$

e obtemos $Z_1 = \frac{\partial}{\partial r}$.

De maneira análoga, se $Z_2 = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + a_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\psi \frac{\partial}{\partial \psi}$ e como

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^1(Z_2) = 0 , \\ \theta^2(Z_2) = 1 , \\ \theta^3(Z_2) = 0 , \\ \omega^1(Z_2) = 0 , \\ \omega^2(Z_2) = 0 , \end{array} \right.$$

obtemos $Z_2 = \frac{\partial}{\partial \beta}$.

Finalmente, se $Z_3 = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + a_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\psi \frac{\partial}{\partial \psi}$ e

$$\begin{cases} \theta^1(Z_3) = 0, \\ \theta^2(Z_3) = 0, \\ \theta^3(Z_3) = 1, \\ \omega^1(Z_3) = 0, \\ \omega^2(Z_3) = 0, \end{cases}$$

obtemos $Z_3 = BF'(r) \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Como $[Y_1, Y_2] = \text{sen } \theta \left[C(r) \frac{\partial}{\partial \beta} + D(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$, temos que $[Y_1, Y_2] = D(r) \text{sen } \theta Z_3$, já que $B(r)D(r)F'(r) = C(r)$ pelo lema anterior; e, calculando-se os colchetes, obtemos

$$\begin{aligned} [Y_1, Z_3] &= A \cos(\varphi - \beta)(BF'(r) - 1) \frac{\partial}{\partial r} + \\ &+ \text{sen}(\varphi - \beta) \left[A \frac{\partial}{\partial r}(BF'(r)) + B|\vec{N}|^2(1 - BF'(r)) \right] \frac{\partial}{\partial \beta} + \\ &+ \text{sen}(\varphi - \beta)F'(r)(1 - BF'(r)) \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [Y_2, Z_3] &= A \text{sen } \theta \text{sen}(\varphi - \beta)(BF'(r) - 1) \frac{\partial}{\partial r} + \\ &+ \text{sen } \theta \cos(\varphi - \beta) \left[-A \frac{\partial}{\partial r}(BF'(r)) + B|\vec{N}|^2(BF'(r) - 1) \right] \frac{\partial}{\partial \beta} + \\ &+ F'(r) \text{sen } \theta \cos(\varphi - \beta)(BF'(r) - 1) \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} [Y_1, Z_3] &= \left[Y_1, \frac{1}{D(r) \text{sen } \theta} [Y_1, Y_2] \right] \\ &= \frac{1}{D(r) \text{sen } \theta} [Y_1, [Y_1, Y_2]] + Y_1 \left(\frac{1}{D(r) \text{sen } \theta} \right) [Y_1, Y_2] \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$[Y_2, Z_3] = \frac{1}{D(r) \text{sen } \theta} [Y_2, [Y_1, Y_2]] + Y_2 \left(\frac{1}{D(r) \text{sen } \theta} \right) [Y_1, Y_2],$$

o que mostra que $Y_1, Y_2, [Y_1, Y_2], [Y_1, [Y_1, Y_2]], [Y_2, [Y_1, Y_2]]$ são linearmente independentes se, e somente se, $Y_1, Y_2, Z_3, [Y_1, Z_3], [Y_2, Z_3]$ são linearmente independentes.

Para determinar a condição que garante serem os cinco últimos campos vetoriais linearmente independentes, basta calcular o determinante da seguinte matriz 5×5 :

$$\begin{bmatrix} A \operatorname{sen}(\varphi - \beta) & B|\vec{N}|^2 \cos(\varphi - \beta) & F'(r) \cos(\varphi - \beta) & 1 & 0 \\ -A \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) & B|\vec{N}|^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) & F'(r) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) - \cos \theta & 0 & 1 \\ 0 & BF'(r) & 1 & 0 & 0 \\ A \cos(\varphi - \beta) \cdot (BF'(r) - 1) & \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \left[A \frac{\partial}{\partial r} (BF'(r)) + B|\vec{N}|^2 (1 - BF'(r)) \right] & \operatorname{sen}(\varphi - \beta) F'(r) \cdot (1 - BF'(r)) & 0 & 0 \\ A \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \cdot (BF'(r) - 1) & \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \left[-A \frac{\partial}{\partial r} (BF'(r)) + B|\vec{N}|^2 (BF'(r) - 1) \right] & F'(r) \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta) \cdot (BF'(r) - 1) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O determinante é igual a

$$-A \operatorname{sen} \theta (BF'(r) - 1) \left[A \frac{\partial}{\partial r} (BF'(r)) + B|\vec{N}|^2 (1 - BF'(r)) \right]$$

ou

$$-\frac{AB|\vec{N}| \operatorname{sen} \theta (BF'(r) - 1)}{(|\vec{N}|^3 - \delta F''(r))(\delta F'(r) - r|\vec{N}|)} \left(\delta |\vec{N}|^2 F'(r) - r|\vec{N}|^5 + \delta r F'(r)^2 F''(r) \right),$$

que será diferente de zero se, e só se,

$$\delta |\vec{N}|^2 F'(r) - r|\vec{N}|^5 + \delta r F'(r)^2 F''(r) \neq 0, \quad (2.41)$$

onde $|\vec{N}| = \sqrt{1 + F'(r)^2}$. Essa condição é, em geral, verdadeira num conjunto aberto de $S \times SO(3)$, pois F é de classe C^2 , e deverá ser verificada em cada caso.

Por exemplo, (2.41) é válida para:

- 1) O parabolóide elíptico $F(r) = \frac{r^2}{2}$, com $\delta < 2$,
- 2) A esfera de raio R , $F(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$, com $\delta < R$,
- 3) O catenóide $F(r) = b \cosh^{-1}(\frac{r}{b})$, $r > b$ e $\delta < 1$,
- 4) O cone $F(r) = \alpha r$, $r > \frac{\delta\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\alpha > 0$ e
- 5) O plano $F(r) = \text{constante}$.

As condições (2.15), (2.36) e (2.41) definem um conjunto aberto Ω_1 de $S \times SO(3)$, $\Omega_1 \subset \Omega$, e do que foi provado acima podemos enunciar o seguinte:

Teorema 2.11 *Seja \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}) a distribuição definida em Ω_1 e que corresponde ao rolamento sem escorregamento (resp. sem escorregamento e sem pivotamento) de uma esfera de raio conveniente $\delta > 0$ sobre uma superfície S de revolução definida pela equação $z = F(r)$, F de classe C^2 . Então como em Ω_1 a curvatura de Gauss $K = \frac{F'(r)F''(r)}{r(1+F'(r)^2)^2}$ da superfície S é distinta da curvatura de Gauss $\frac{1}{\delta^2}$ da esfera, a distribuição \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}) além de ser não involutiva é completamente não integrável.*

Neste ponto convém mencionar que após ter demonstrado o teorema 2.11 observamos que Bryant e Hsu (ver [5] p.24) concluíram, sem explicitar a demonstração, que a distribuição não involutiva \mathcal{D} correspondente ao rolamento sem escorregamento e sem pivotamento de uma superfície de \mathbb{R}^3 sobre outra é “bracket generating”, respeitada a condição de que as curvaturas gaussianas das duas superfícies sejam distintas.

Vamos agora mostrar a controlabilidade dos sistemas (2.37) e (2.38). Como o sistema é analítico e usando-se o teorema 2.2 conclui-se o seguinte:

Teorema 2.12 *Nas mesmas hipóteses do teorema 2.11 e F analítica, os sistemas de controle (2.37) e (2.38), correspondentes às distribuições \mathcal{D}_1 e \mathcal{D} , são controláveis. Portanto, todo ponto de uma componente conexa de Ω_1 é atingível a partir de qualquer outro ponto dessa componente conexa por um arco contínuo formado por um número finito de trechos de trajetórias analíticas tangentes à distribuição \mathcal{D} .*

Esse teorema generaliza um resultado da teoria do controle que diz que se duas esferas tem raios diferentes e uma rola sem escorregar e sem pivotar sobre a outra, o sistema afim correspondente é controlável (ver Jurdjevic [14], p.165).

Capítulo 3

Controlabilidade no problema do rolamento de uma esfera sobre geodésicas de uma superfície de revolução

O teorema 2.12 garante que dados dois pontos num subconjunto aberto da variedade $S \times SO(3)$ é possível ligá-los através de um número finito de caminhos tangentes à distribuição \mathcal{D} . Porém, gostaríamos de obter esses caminhos como oriundos de rolamentos da esfera de raio δ sobre geodésicas da superfície S .

Nesta seção a nossa intenção é descobrir as condições sobre as funções $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ para que o rolamento sem escorregamento e sem pivotamento se dê ao longo de geodésicas de uma superfície de revolução.

Consideremos a superfície de revolução S dada pela parametrização

$$\begin{cases} x = r \cos \beta , \\ y = r \operatorname{sen} \beta , \\ z = F(r) , \end{cases}$$

com F analítica, e vamos estudar localmente as geodésicas dessa superfície.

Dada uma curva analítica $(x(s), y(s), z(s))$ da superfície S , parametrizada pelo comprimento de arco s , sabemos que a norma do vetor tangente $(\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s))$ é igual a 1.

Então

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{dr}{ds} \cos \beta - r \operatorname{sen} \beta \frac{d\beta}{ds} \\ \dot{y} = \frac{dy}{ds} = \frac{dr}{ds} \operatorname{sen} \beta + r \cos \beta \frac{d\beta}{ds} \\ \dot{z} = \frac{dz}{ds} = F'(r) \frac{dr}{ds} ; \end{cases}$$

daí, como $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$, temos

$$\left(\frac{dr}{ds} \cos \beta - r \operatorname{sen} \beta \frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dr}{ds} \operatorname{sen} \beta + r \cos \beta \frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \left(F'(r) \frac{dr}{ds} \right)^2 = 1,$$

obtendo-se

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 + F'(r)^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 1 \quad (3.1)$$

ou

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 (1 + F'(r)^2) = 1 - r^2 \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 . \quad (3.2)$$

As equações diferenciais das geodésicas de S são:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} + \frac{2\dot{\beta}\dot{r}}{r} = 0 \\ \ddot{r} - \frac{r\dot{\beta}^2}{1 + F'(r)^2} + \frac{F'(r)F''(r)}{1 + F'(r)^2} \dot{r}^2 = 0 \end{cases}$$

(ver M. P. Carmo, [6], p. 133); mas

$$(r^2 \dot{\beta})^\cdot = 2r\dot{r}\dot{\beta} + r^2\ddot{\beta} = r^2 \left(\ddot{\beta} + \frac{2\dot{r}\dot{\beta}}{r} \right) = 0$$

e então $r^2 \dot{\beta} = c$ (constante ao longo de cada geodésica).

Lembro que pelo teorema de Clairaut, a constante c é dada por $c = r \operatorname{sen} \alpha$ em que α é o ângulo entre a órbita e o meridiano (ver [2], cap.4, p.89).

As equações das geodésicas ficam

$$\begin{cases} \ddot{r} - \frac{r\dot{\beta}^2}{1 + F'(r)^2} + \frac{F'(r)F''(r)}{1 + F'(r)^2}\dot{r}^2 = 0 \\ r^2\dot{\beta} = c, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \ddot{r}(1 + F'(r)^2) - r\dot{\beta}^2 + F'(r)F''(r)\dot{r}^2 = 0 \\ r^2\dot{\beta} = c. \end{cases} \quad (3.3)$$

Observação: Não existe uma geodésica com $\dot{r}(s) = 0, \forall s$; de fato, isso acarretaria $r(s) = r_0 = cte$ e $\dot{\beta} = 0$ e, conseqüentemente, $\beta = \beta_0 = cte$. Por pertencer à superfície S teríamos

$$\begin{cases} x(s) = r_0 \cos \beta_0, \\ y(s) = r_0 \sin \beta_0, \\ z(s) = F(r_0), \quad \forall s, \end{cases}$$

logo tal curva teria como imagem um único ponto. ■

De (3.2) e da segunda equação do sistema (3.3), $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{c}{r^2}$, temos

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 (1 + F'(r)^2) = 1 - \frac{c^2}{r^2}. \quad (3.4)$$

Derivando a equação (3.4) e tendo em conta $\dot{\beta} = \frac{c}{r^2}$ chega-se facilmente a

$$\dot{r}[\ddot{r}(1 + F'(r)^2) - r\dot{\beta}^2 + F'(r)F''(r)\dot{r}^2] = 0. \quad (3.5)$$

Logo, toda curva que não seja com $\dot{r}(s) = 0, \forall s$, terá um ponto s_0 tal que $\dot{r}(s_0) \neq 0$, e isso vale também numa vizinhança de s_0 , onde

$$[\ddot{r}(1 + F'(r)^2) - r\dot{\beta}^2 + F'(r)F''(r)\dot{r}^2] = 0,$$

e, por analiticidade temos que (3.3) é válida.

Isso mostra que (3.4) com $\dot{\beta} = \frac{c}{r^2}$, ao ser verificada por uma curva que não satisfaça $\dot{r}(s) = 0$, forma um par de equações que implicam as equações (3.3).

Se a equação (3.4) junto com $\dot{\beta} = \frac{c}{r^2}$ admitir uma trajetória $\gamma = (x(s), y(s), z(s)) \in S$ tal que $\dot{r}(s) = 0$ (isto é $r(s) = r_0$), conclui-se que $\dot{\beta} = \frac{c}{r_0^2}$ e $c^2 = r_0^2 \neq 0$ ou $\dot{\beta} = \frac{1}{c}$.

Daí temos

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\dot{\beta}\text{sen } \beta = -\frac{r_0}{c}\text{sen } \beta \\ \dot{y} = \frac{r_0}{c}\text{cos } \beta \\ \dot{z} = 0 ; \end{cases}$$

logo a curva é um círculo plano, e conclui-se, também, que

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{r_0}{c^2}\text{cos } \beta \\ \ddot{y} = -\frac{r_0}{c^2}\text{sen } \beta \\ \ddot{z} = 0 . \end{cases}$$

Segue daí que γ não é geodésica pois a derivada covariante da velocidade não é nula já que a aceleração não tem a direção da normal $\vec{N} = (-F'(r)\text{cos } \beta, -F'(r)\text{sen } \beta, 1)$.

No entanto se olharmos para a equação

$$\ddot{r} - \frac{r\dot{\beta}^2}{1 + F'(r)^2} + \frac{F'(r)F''(r)}{1 + F'(r)^2}\dot{r}^2 = 0$$

vemos que ela ainda seria satisfeita pela curva, com $\dot{r}(s) = 0$ ($r(s) = r_0$), desde que $\lim_{r \rightarrow r_0} F'(r) = \infty$. Isto está de acordo com a teoria das geodésicas de uma superfície de revolução.

Conclui-se facilmente que as equações diferenciais das geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco são equivalentes ao sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{r}^2(1 + F'(r)^2) = 1 - \frac{c^2}{r^2} \\ r^2\dot{\beta} = c . \end{cases} \quad (3.6)$$

Segue das equações (3.6) que $|c| < r$ e obtemos o seguinte sistema de equações das geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco:

$$\begin{cases} \dot{r} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{r|\vec{N}|} \\ \dot{\beta} = \frac{c}{r^2}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Por outro lado, as condições para rolar sem escorregar e sem pivotar (ver sistema (2.27) e equação (2.28)) são

$$\begin{cases} \dot{r} = A (\omega_y \cos \beta - \omega_x \sin \beta) \\ \dot{\beta} = B (\omega_y \sin \beta + \omega_x \cos \beta + \omega_z F'(r)) \\ \omega_z = F'(r)(\omega_x \cos \beta + \omega_y \sin \beta), \end{cases} \quad (3.8)$$

ou

$$\begin{cases} \dot{r} = A (\omega_y \cos \beta - \omega_x \sin \beta) \\ \dot{\beta} = B|\vec{N}|^2(\omega_y \sin \beta + \omega_x \cos \beta) \\ \omega_z = F'(r)(\omega_x \cos \beta + \omega_y \sin \beta), \end{cases} \quad (3.9)$$

e, utilizando-se as equações de (3.7), obtemos que as funções $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ para o rolamento sobre geodésicas sem escorregamento e sem pivotamento estão univocamente determinadas, a saber:

$$\begin{cases} \omega_x = \mp \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \sin \beta + \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \cos \beta \\ \omega_y = \pm \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \cos \beta + \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \sin \beta \\ \omega_z = \frac{F'(r)c}{Br^2|\vec{N}|^2}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Exemplo 3.1 É fácil ver que no caso da superfície ser o plano, as condições para que o rolamento seja sem escorregamento e sem pivotamento são

$$\begin{cases} \dot{r} = \delta (\omega_y \cos \beta - \omega_x \text{sen } \beta) \\ \dot{\beta} = -\frac{\delta}{r} (\omega_y \text{sen } \beta + \omega_x \cos \beta) \\ \omega_z = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

e, se este rolamento for sobre geodésicas teremos

$$\begin{cases} \omega_x = \mp \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{\delta r} \text{sen } \beta - \frac{c}{\delta r} \cos \beta \\ \omega_y = \pm \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{\delta r} \cos \beta - \frac{c}{\delta r} \text{sen } \beta \\ \omega_z = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

onde

$$c = r^2 \dot{\beta} = -\delta r (\omega_y \text{sen } \beta + \omega_x \cos \beta). \quad (3.13)$$

■

O sistema de controle não-linear afim (ver(2.38)), com controles $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$, associado à distribuição \mathcal{D} (ver seção 2.4) que determina os rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento é dado por:

$$\dot{v} = Y_1 \dot{\theta} + Y_2 \dot{\psi} \quad (3.14)$$

Substituindo-se $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ pelas suas expressões (ver (2.24)), tem-se:

$$\dot{v} = Y_1 [\omega_x \cos \varphi + \omega_y \text{sen } \varphi] + Y_2 \left[\omega_x \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \theta} - \omega_y \frac{\cos \varphi}{\text{sen } \theta} \right],$$

ou,

$$\dot{v} = \left[\cos \varphi Y_1 + \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \theta} Y_2 \right] \omega_x + \left[\text{sen } \varphi Y_1 - \frac{\cos \varphi}{\text{sen } \theta} Y_2 \right] \omega_y,$$

e obtemos o sistema (ver(2.40))

$$\dot{v} = \overline{Y}_1 \omega_x + \overline{Y}_2 \omega_y \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \overline{Y}_1 \\ \overline{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \theta} \\ \text{sen } \varphi & \frac{-\cos \varphi}{\text{sen } \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

De (3.10), fazendo-se

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(r, c) = \mp \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \\ \varphi_2 = \varphi_2(r, c) = \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \end{cases} \quad (3.17)$$

obtemos

$$\begin{cases} \omega_x = \varphi_1 \text{sen } \beta + \varphi_2 \cos \beta \\ \omega_y = -\varphi_1 \cos \beta + \varphi_2 \text{sen } \beta \end{cases} \quad (3.18)$$

que substituído em (3.15) fica

$$\dot{v} = \overline{Y}_1(\varphi_1 \text{sen } \beta + \varphi_2 \cos \beta) + \overline{Y}_2(-\varphi_1 \cos \beta + \varphi_2 \text{sen } \beta)$$

ou

$$\dot{v} = (\text{sen } \beta \overline{Y}_1 - \cos \beta \overline{Y}_2) \varphi_1 + (\cos \beta \overline{Y}_1 + \text{sen } \beta \overline{Y}_2) \varphi_2$$

e obtemos o seguinte:

$$\dot{v} = \overline{Z}_1 \varphi_1 + \overline{Z}_2 \varphi_2 \quad (3.19)$$

que é um sistema de controle não-linear afim, com controles φ_1 e φ_2 que não são independentes, pois há uma relação entre eles obtida de (3.17) dada por

$$\frac{\varphi_1^2}{B^2 r^2 |\vec{N}|^2} + \frac{\varphi_2^2}{A^2} = \frac{1}{A^2 B^2 r^2 |\vec{N}|^4}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} \overline{Z}_1 \\ \overline{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \beta & -\text{cos } \beta \\ \text{cos } \beta & \text{sen } \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{Y}_1 \\ \overline{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} \overline{Z}_1 \\ \overline{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \beta & -\text{cos } \beta \\ \text{cos } \beta & \text{sen } \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{cos } \varphi & \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \theta} \\ \text{sen } \varphi & -\frac{\text{cos } \varphi}{\text{sen } \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \overline{Z}_1 \\ \overline{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen } (\varphi - \beta) & \frac{\text{cos } (\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta} \\ \text{cos } (\varphi - \beta) & \frac{\text{sen } (\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Pelo fato de

$$\begin{vmatrix} -\text{sen } (\varphi - \beta) & \frac{\text{cos } (\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta} \\ \text{cos } (\varphi - \beta) & \frac{\text{sen } (\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta} \end{vmatrix} = \frac{-1}{\text{sen } \theta} \neq 0,$$

temos que \overline{Z}_1 e \overline{Z}_2 são linearmente independentes.

Mostremos inicialmente que \overline{Z}_1 , \overline{Z}_2 , $[\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]$, $[\overline{Z}_1, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]]$ e $[\overline{Z}_2, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]]$ são linearmente independentes em cada ponto; de fato

$$\begin{aligned} [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2] &= \text{cos } (\varphi - \beta)(F'(r) - B|\vec{N}|^2)Y_1 + \\ &+ \frac{\text{sen } (\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta}(F'(r) - B|\vec{N}|^2)Y_2 - \frac{1}{\text{sen } \theta}[Y_1, Y_2], \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
[\overline{Z}_1, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]] &= \cos(\varphi - \beta) \left\{ -A \frac{\partial}{\partial r} (F'(r) - B|\vec{N}|^2) + \right. \\
&+ (F'(r) - B|\vec{N}|^2)^2 + C(r) - D(r) \left. \right\} Y_1 + \\
&+ \frac{\text{sen}(\varphi - \beta)}{\text{sen} \theta} \left\{ -A \frac{\partial}{\partial r} (F'(r) - B|\vec{N}|^2) + (F'(r) - B|\vec{N}|^2)^2 + \right. \\
&+ C(r) - D(r) \left. \right\} Y_2 - \\
&- \frac{1}{\text{sen} \theta} \left\{ F'(r) - B|\vec{N}|^2 + \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \text{sen}(\varphi - \beta) \right\} [Y_1, Y_2] + \\
&+ \frac{\text{sen}(\varphi - \beta)}{\text{sen} \theta} [Y_1, [Y_1, Y_2]] - \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\text{sen}^2 \theta} [Y_2, [Y_1, Y_2]], \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\overline{Z}_2, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]] &= \text{sen}(\varphi - \beta) (C(r) - D(r)) Y_1 - \\
&- \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\text{sen} \theta} (C(r) - D(r)) Y_2 + \\
&+ \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\text{sen} \theta} \cos \theta [Y_1, Y_2] - \\
&- \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\text{sen}^2 \theta} [Y_1, [Y_1, Y_2]] - \frac{\text{sen}(\varphi - \beta)}{\text{sen}^2 \theta} [Y_2, [Y_1, Y_2]]. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Para determinar a condição que garante serem \overline{Z}_1 , \overline{Z}_2 , $[\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]$, $[\overline{Z}_1, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]]$ e $[\overline{Z}_2, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]]$ linearmente independentes, basta calcular o determinante da seguinte matriz 5×5 :

$$\begin{bmatrix} -\text{sen}(\varphi - \beta) & \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta} & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\varphi - \beta) & \frac{\text{sen}(\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta} & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\varphi - \beta)(F'(r) - B|\vec{N}|^2) & \frac{\text{sen}(\varphi - \beta)(F'(r) - B|\vec{N}|^2)}{\text{sen } \theta} & \frac{-1}{\text{sen } \theta} & 0 & 0 \\ \cos(\varphi - \beta)\{A\frac{\partial}{\partial r}(B|\vec{N}|^2 - F'(r)) + (F'(r) - B|\vec{N}|^2)^2 + C(r) - D(r)\} & \frac{-A\text{sen}(\varphi - \beta)\frac{\partial}{\partial r}(F'(r) - B|\vec{N}|^2) + \text{sen}(\varphi - \beta)((F'(r) - B|\vec{N}|^2)^2 + C(r) - D(r))}{\text{sen } \theta} & \frac{B|\vec{N}|^2 - F'(r)}{\text{sen } \theta} & \frac{\text{sen}(\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta} & \frac{-\cos(\varphi - \beta)}{\text{sen } 2\theta} \\ \text{sen}(\varphi - \beta)(C(r) - D(r)) & \frac{\cos(\varphi - \beta)(D(r) - C(r))}{\text{sen } \theta} & \frac{\cos(\varphi - \beta) \cos \theta}{\text{sen } 2\theta} & \frac{-\cos(\varphi - \beta)}{\text{sen } \theta} & \frac{-\text{sen}(\varphi - \beta)}{\text{sen } 2\theta} \end{bmatrix}.$$

Como tal determinante é igual a $\frac{-1}{\text{sen } 5\theta} \neq 0$, e, $Y_1, Y_2, [Y_1, Y_2], [Y_1, [Y_1, Y_2]], [Y_2, [Y_1, Y_2]]$ são linearmente independentes em cada ponto (ver seção 2.5), concluimos que $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2], [\overline{Z}_1, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]], [\overline{Z}_2, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]]$ são, também, linearmente independentes nesses mesmos pontos.

Voltemos ao sistema (3.19),

$$\dot{v} = \varphi_1 \overline{Z}_1 + \varphi_2 \overline{Z}_2, \quad (3.26)$$

isto é,

$$\dot{v} = \mp \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \overline{Z}_1 + \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \overline{Z}_2, \quad |c| < r.$$

Recorde-se que Ω_1 é o conjunto aberto de $S \times SO(3)$ considerado no teorema 2.11; suponhamos sem perda de generalidade que Ω_1 seja conexo, então todo ponto A de Ω_1 é atingível a partir de qualquer outro ponto B de Ω_1 por um conveniente

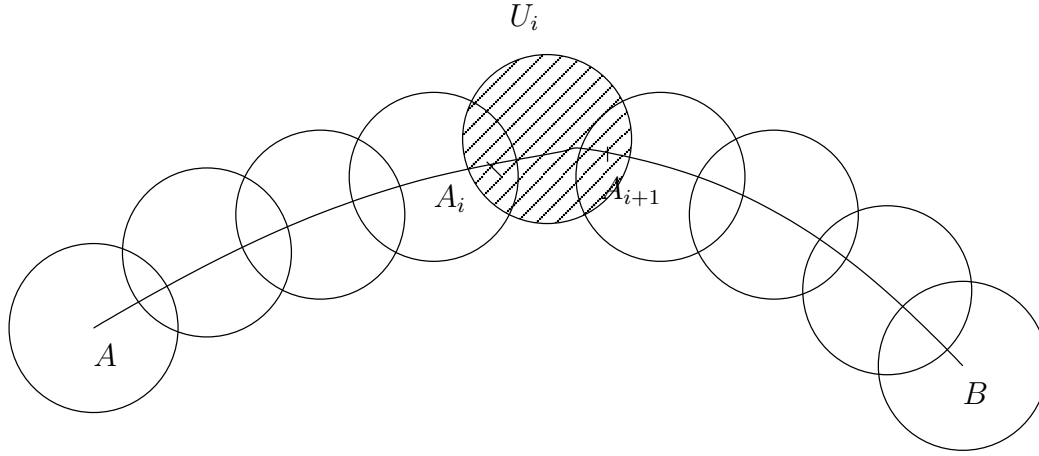


Figura 3.1: Cobertura da trajetória por cartas

arco diferenciável de modo que como esse arco é compacto ele pode ser coberto por um número finito n_0 de cartas locais conexas U_i da variedade $S \times SO(3)$, $1 \leq i \leq n_0$, tais que cada uma encontre no máximo duas delas (ver figura acima). Tomemos uma dessas cartas locais U_i com coordenadas $(r, \beta, \varphi, \theta, \psi)$ e nela consideremos a família de campos vetoriais dependentes da constante c :

$$\mathcal{F}(U_i) = \{W(c) = \mp \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \overline{Z}_1 + \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \overline{Z}_2, |c| < r\}$$

e explicitemos dois de seus elementos:

$$W_0 = \frac{1}{A|\vec{N}|} \overline{Z}_1$$

e

$$W_1 = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \overline{Z}_1 + \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \overline{Z}_2, \quad 0 < |c| < r.$$

Passemos a considerar a seqüência de elementos de $\text{Lie}(\mathcal{F}(U_i))$:

$W_0, W_1, [W_0, W_1], [W_0, [W_0, W_1]], [W_1, [W_0, W_1]]$ (ver [14], p.42).

$$\begin{aligned}
[W_0, W_1] = & \left\{ \frac{1}{A|\vec{N}|} \overline{Z_1} \left(\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \right) - \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \overline{Z_1} \left(\frac{1}{A|\vec{N}|} \right) - \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \overline{Z_2} \left(\frac{1}{A|\vec{N}|} \right) \right\} \overline{Z_1} + \\
& + \left\{ \frac{1}{A|\vec{N}|} \overline{Z_1} \left(\frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \right) \right\} \overline{Z_2} + \left\{ \frac{c}{ABr^2|\vec{N}|^3} \right\} [\overline{Z_1}, \overline{Z_2}], \tag{3.27}
\end{aligned}$$

e para facilitar denotaremos

$$[W_0, W_1] = a\overline{Z_1} + b\overline{Z_2} + d[\overline{Z_1}, \overline{Z_2}], \tag{3.28}$$

em que a, b e d são funções.

Conseqüentemente

$$\begin{aligned}
[W_0, [W_0, W_1]] = & \left\{ \frac{1}{A|\vec{N}|} \overline{Z_1}(a) - a\overline{Z_1} \left(\frac{1}{A|\vec{N}|} \right) - b\overline{Z_2} \left(\frac{1}{A|\vec{N}|} \right) - d[\overline{Z_1}, \overline{Z_2}] \left(\frac{1}{A|\vec{N}|} \right) \right\} \overline{Z_1} + \\
& + \left\{ \frac{1}{A|\vec{N}|} \overline{Z_1}(b) \right\} \overline{Z_2} + \left\{ \frac{b}{A|\vec{N}|} + \frac{1}{A|\vec{N}|} \overline{Z_1}(d) \right\} [\overline{Z_1}, \overline{Z_2}] + \\
& + \frac{d}{A|\vec{N}|} [\overline{Z_1}, [\overline{Z_1}, \overline{Z_2}]], \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[W_1, [W_0, W_1]] = & \left\{ \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \overline{Z_1}(a) - a\overline{Z_1} \left(\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \right) - b\overline{Z_2} \left(\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \right) - \right. \\
& - d[\overline{Z_1}, \overline{Z_2}] \left(\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \right) + \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \overline{Z_2}(a) \left. \right\} \overline{Z_1} + \\
& + \left\{ \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \overline{Z_1}(b) - a\overline{Z_1} \left(\frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \right) + \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \overline{Z_2}(b) - \right. \\
& - b\overline{Z_2} \left(\frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \right) - d[\overline{Z_1}, \overline{Z_2}] \left(\frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \right) \left. \right\} \overline{Z_2} + \\
& + \left\{ \frac{b\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} + \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} \overline{Z_1}(d) + \right. \\
& + \frac{ac}{Br^2|\vec{N}|^2} + \frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2} \overline{Z_2}(d) \left. \right\} [\overline{Z_1}, \overline{Z_2}] + \\
& + \frac{d\sqrt{r^2 - c^2}}{Ar|\vec{N}|} [\overline{Z_1}, [\overline{Z_1}, \overline{Z_2}]] + \frac{cd}{Br^2|\vec{N}|^2} [\overline{Z_2}, [\overline{Z_1}, \overline{Z_2}]]. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

A matriz de mudança da seqüência $W_0, W_1, [W_0, W_1], [W_0, [W_0, W_1]], [W_1, [W_0, W_1]]$ para a seqüência $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2], [\overline{Z}_1, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]], [\overline{Z}_2, [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]]$ é uma matriz triangular cujo determinante é igual a

$$\left(\frac{1}{A|\vec{N}|}\right)\left(\frac{c}{Br^2|\vec{N}|^2}\right)(d)\left(\frac{d}{A|\vec{N}|}\right)\left(\frac{cd}{Br^2|\vec{N}|^2}\right) = \left(\frac{c}{ABr^2|\vec{N}|^3}\right)^5 \neq 0.$$

Concluimos então que a família $\mathcal{F}(U_i)$ tem, por cada ponto de U_i , uma órbita de dimensão 5 (ver [14], teorema 3, p.44). Logo em U_i o sistema (3.26) é controlável.

Como temos um número finito n_0 de abertos U_i o ponto $B \in \Omega_1$ é atingível a partir de $A \in \Omega_1$ por um caminho contínuo formado de um número finito de trechos de trajetórias analíticas de campos vetoriais pertencentes à união das famílias $\mathcal{F}(U_i)$; conseqüentemente essas trajetórias projetam-se sobre geodésicas da superfície S . Face ao exposto podemos enunciar o seguinte resultado de controlabilidade:

Teorema 3.2 *Seja Ω_1 o conjunto aberto de $S \times SO(3)$ introduzido no teorema 2.11, em que S é uma superfície de revolução definida pela equação $z = F(r)$, F analítica, sobre a qual vai rolar sem escorregar e sem pivotar uma esfera de raio conveniente $\delta > 0$. Como em Ω_1 a curvatura de Gauss $K = \frac{F'(r)F''(r)}{r(1 + F'(r)^2)^2}$ da superfície S é distinta da curvatura de Gauss $\frac{1}{\delta^2}$ da esfera, então todo ponto de uma componente conexa $\overline{\Omega}_1$ de Ω_1 é atingível a partir de qualquer outro ponto de $\overline{\Omega}_1$ por um caminho contínuo formado por um número finito de trechos de trajetórias analíticas de campos vetoriais de $\bigcup_i \mathcal{F}(U_i)$ as quais projetam-se sobre geodésicas da superfície S .*

Capítulo 4

Uma solução fraca do problema de Kendall

No artigo “*Oxford commemoration ball*” (ver [9]), Hammersley analisa o problema por ele chamado de problema de Kendall: considera-se uma bola de raio $\delta > 0$ apoiada sobre um plano horizontal. A bola está com orientação, ou seja, existe um referencial ortonormal positivo preso a ela. Cada “estado” da bola é definido pelo ponto do plano onde ela se apóia e pela posição do referencial a ela preso com relação a um referencial ortonormal positivo fixo no espaço. Um movimento da bola é uma rotação com eixo paralelo ao plano descrevendo uma reta nesse plano e de tal modo que não haja escorregamento da bola. O problema de Kendall visa determinar a quantidade N necessária e suficiente de tais movimentos que permita levar a bola de um estado qualquer E_1 para um estado final E_2 sem efetuar pivotamento na bola.

Da leitura do trabalho de Hammersley, verifica-se que a prova, lá apresentada, da solução $N = 3$ para o número de movimentos é bastante complexa enquanto que a solução fraca $N = 4$ é bastante elementar. Esta última baseia-se em dois fatos fundamentais que descreveremos abaixo.

Fato 1: Como em [9], inicia-se por mostrar que dados dois pontos T_1 e T_2 no plano, pode-se imaginar que em T_1 encontra-se uma bola com uma dada orientação;

procura-se, então, com dois movimentos, transportar a bola ao ponto T_2 com a mesma orientação que possuía em T_1 . Basta considerar um inteiro $n \geq 1$ tal que $2\pi n\delta$ seja superior à distância de T_1 a T_2 . Constrói-se um triângulo isósceles T_1VT_2 tal que a distância $2\pi n\delta$ de T_1 a V seja igual à distância de V a T_2 . A orientação da bola em T_1 ao ser rolada ao longo do segmento T_1V é igual à orientação da bola em V e, da mesma forma, rolando-se a bola ao longo de VT_2 , a orientação da bola em T_2 coincide com a orientação em V e T_1 . A prova reside no fato elementar seguinte: cada movimento de comprimento $2\pi\delta$ corresponde a uma rotação de 2π em volta de um eixo horizontal, ortogonal ao deslocamento, seguida de uma translação paralela ao deslocamento; é fácil mostrar que tal procedimento não altera a orientação.

Fato 2: Se $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é um referencial positivo ortonormal, com \vec{k} ortogonal ao plano de rolamento, e, se $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ é também ortonormal positivo, o ângulo φ_0 de \vec{i} para \vec{I} chama-se *discrepância de pivotamento* entre as orientações definidas pelos dois referenciais. Se tomarmos dois eixos \vec{u} e \vec{v} no subespaço (\vec{i}, \vec{j}) de tal modo que o ângulo de \vec{u} para \vec{v} seja $\varphi_0/2$, a composta de um rolamento de comprimento $\pi\delta$ em torno de \vec{u} com um outro rolamento de comprimento $\pi\delta$ em torno da imagem de \vec{v} pelo rolamento anterior, elimina a discrepância de pivotamento, ou seja, os dois movimentos transformam a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ na base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$.

A prova é simples e fica muito visível se tomarmos $\vec{u} = \vec{i}$ e $\vec{v} = (\vec{i} + \vec{I})$.

Observação 4.1 *Consideremos duas bolas, a primeira apoiada em A_1 com orientação $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e a segunda em A_2 com orientação $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ de tal modo que a discrepância de pivotamento seja φ_0 , e dois vetores \vec{u} e \vec{v} com o ângulo de \vec{u} para \vec{v} igual a $\varphi_0/2$. Se usarmos o fato 2 verificamos que a bola que parte de A_2 , após dois rolamentos de comprimento $\pi\delta$, sendo o primeiro em torno de \vec{u} e o segundo em torno de \vec{v} , terá sua imagem apoiada num ponto B e sua orientação será igual a*

da bola apoiada em A_1 , ou seja, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Como \vec{u} é arbitrário o ponto B determina uma circunferência e nesta circunferência a bola terá sempre a mesma orientação da bola apoiada em A_1 , ou seja, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Com os dois fatos acima considerados, vamos ver que, com três ou quatro movimentos, podemos transportar uma bola de orientação $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ apoiada num ponto A_1 até atingir um ponto A_2 de modo que sua orientação fique $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Por simplicidade, suporemos que \vec{k} é ortogonal ao plano de rolamento.

1º caso: $A_1 = A_2$ e $\vec{k} = \vec{K}$.

Toma-se $\vec{u} = \vec{i}$ e $\vec{v} = (\vec{i} + \vec{I})$ como no fato 2. Após o primeiro rolamento de comprimento $\pi\delta$ em torno de $\vec{u} = \vec{i}$, atinge-se o ponto X ; com o segundo rolamento em torno da imagem de \vec{v} , como no fato 2, vai-se do ponto X até um ponto B com a mesma orientação $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ do início. A seguir usa-se o fato 1 e vai-se de B para A_1 com dois movimentos. Total: quatro movimentos.

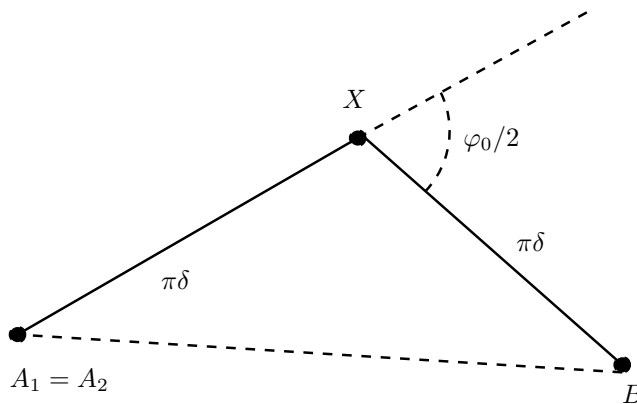


Figura 4.1: Caso 1

(aqui $\varphi_0/2$ é o ângulo de \vec{u} para \vec{v})

2º caso: A_1 com orientação $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e A_2 que tem em relação a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma discrepância de pivotamento φ_0 , $A_1 \neq A_2$.

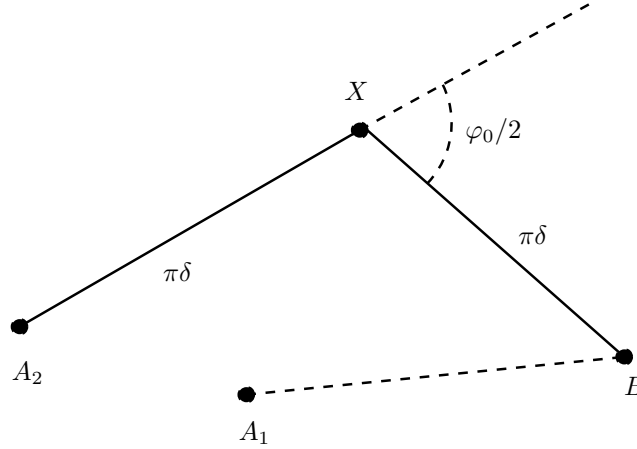


Figura 4.2: Caso 2

Parte-se de A_2 e procede-se, como no caso anterior, atingindo-se B que tem a mesma orientação de A_1 . Usa-se o fato 1 e vai-se de B para A_1 . Foram utilizados quatro movimentos como no primeiro caso.

Se tomarmos adequadamente o ponto B de modo que ele esteja na circunferência que foi citada na observação (4.1) e que diste $2\pi n\delta$ de A_1 , este caso pode ser feito com três movimentos.

3º caso: $A_1 = A_2$ e $\vec{k} = -\vec{K}$.

Deve-se sair de A_1 de modo que \vec{I} atinja \vec{i} com uma rotação de comprimento $\pi\delta$; para isso gira-se de um ângulo π em torno da bissetriz $\vec{i} + \vec{I}$ entre \vec{i} e \vec{I} . Consegue-se assim que \vec{I} tenda para \vec{i} e, ao mesmo tempo, que \vec{K} tenda para \vec{k} . Isso implicará, necessariamente, que \vec{J} tenderá para \vec{j} . Usamos, para tudo isso, um único movimento. A seguir, usa-se o fato 1 e com dois movimentos chega-se novamente ao ponto A_1 com a orientação inicial. No total foram utilizados três movimentos.

4º caso: $A_1 \neq A_2$ e $\vec{k} = -\vec{K}$.

O caso é análogo ao anterior e com três movimentos vai-se de A_2 para A_1 levando a orientação de A_2 na orientação de A_1 .

5º caso: $A_1 = A_2$ e (\vec{k}, \vec{K}) linearmente independentes.

Neste caso, $\vec{k} \times \vec{K} \neq \vec{0}$ logo \vec{k} e \vec{K} formam um ângulo θ , $0 < \theta < \pi$. Girando-se de $\pi - \theta$ em torno do eixo nodal (intersecção entre os planos (A_1, \vec{i}, \vec{j}) e (A_2, \vec{I}, \vec{J})) obtém-se \vec{K} tendendo para $-\vec{k}$. Procede-se, a seguir, como no quarto caso, e chega-se finalmente ao ponto A_2 com a orientação inicial. Foram portanto utilizados quatro movimentos.

6º caso: $A_1 \neq A_2$ com $\vec{k} \times \vec{K} \neq \vec{0}$.

Este caso é idêntico ao anterior e utiliza, portanto, quatro movimentos.

Referências Bibliográficas

- [1] Abraham, R. and Marsden, J. E. *Foundations of Mechanics*. 2.ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1978.
- [2] Arnold, V. I. *Métodos Matemáticos de Mecânica Clássica*. Ed. Mir Moscovo, URSS, 1987.
- [3] Baillieul, J. *The geometry of controlled mechanical systems*. In *Mathematical Control Theory*, pages 322–354, Springer, New York, 1999.
- [4] Bloch, A. M. *Nonholonomics Mechanics and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 2003.
- [5] Bryant, R. L. and Hsu, L. *Rigidity of Integral Curves of Rank 2 Distributions – Inventiones Mathematicae*, 114, 1993.
- [6] do Carmo, M. P. *Elementos de Geometria Diferencial*. Ao Livro Técnico S. A. e Ed. Universidade de Brasília, Rio de Janeiro, 1971.
- [7] do Carmo, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1976.
- [8] do Carmo, M. P. *Differential Forms and Applications*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.
- [9] Hammersley, J. M. *Oxford commemoration ball*. In *Probability, statistics and analysis*, v. 79 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 112–142. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.
- [10] Harle, C. E. *Geometria Diferencial*. 9^o Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas, 9–28 julho de 1973, IMPA.
- [11] Hermans, J. *A symmetric sphere rolling on a surface*. *Nonlinearity*, 8(4):493–515, 1995.

- [12] Isidori, A. *Nonlinear Control Systems*. 3.ed. Springer - Verlag, London, 1995.
- [13] Jurdjevic, V. *The geometry of the plate-ball problem*. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 124(4):305–328, 1993.
- [14] Jurdjevic, V. *Geometric control theory*, v. 52 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [15] Jurdjevic, V. *Optimal control, geometry, and mechanics*. In *Mathematical Control Theory*, pages 227–267. Springer, New York, 1999.
- [16] Koiller, J. *Reduction of Some Classical Non-Holonomic Systems with Symmetry*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **118**(1992), 113-148.
- [17] Montgomery, R. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, v. 91 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [18] Oliva, W. M. *Geometric Mechanics* . In *Lecture Notes in Mathematics*, 1798, pages 1–270. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002.
- [19] O’Neill, B. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, New York, 1971.
- [20] Sharpe, R. W. *Differential Geometry, Cartan’s Generalization of Klein’s Erlangen Program* v.166 - 2.ed in *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, New York, 2000.
- [21] Sussmann, H. J. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*. *Transactions of American Mathematical Society*, vol 180, pages 171–188, June 1973.