Continuidade de atratores para uma família de problemas parabólicos semi-lineares em domínios Lipschitzianos

Pricila da Silva Barbosa

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira
Coorientador: Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, 26 de junho de 2015

Continuidade de atratores para uma família de problemas parabólicos semi-lineares em domínios Lipschitzianos

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 26/06/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira - IME-USP
- Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão - UNIFESP
- Prof. Dr. Ma To Fu - ICMC-USP
- Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva - UNESP - Rio Claro

Resumo

Neste trabalho consideramos a família de problemas parabólicos semi-lineares

$$\begin{cases} u_t(x,t) & = & \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \quad x \in \Omega_\epsilon \ \text{ e } \ t > 0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) & = & g(u(x,t)), \ x \in \partial\Omega_\epsilon \ \text{ e } \ t > 0\,, \end{cases}$$

onde Ω_0 é o quadrado unitário, $\Omega_\epsilon = h_\epsilon(\Omega_0)$ e h_ϵ é uma família de difeomorfismos convergindo para a identidade na norma C^1. Provamos que o problema está bem posto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, em um espaço de fase adequado. Mostramos que o semigrupo associado tem um atrator global $\mathcal{A}_{h_\epsilon}$ e a família $\{\mathcal{A}_{h_\epsilon}\}_{h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)}$ é contínua em $h_\epsilon = i_\Omega$.

Palavras-chave: problema parabólico, perturbação do domínio, domínio Lipschitz, atrator global, continuidade de atratores.

Abstract

In this work we consider the family of semilinear parabolic problems

$$\begin{cases} u_t(x,t) & = & \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \quad x \in \Omega_\epsilon \;\text{ e }\; t > 0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) & = & g(u(x,t)), \;\; x \in \partial\Omega_\epsilon \;\text{ e }\; t > 0\,, \end{cases}$$

where Ω_0 is the unit square, $\Omega_\epsilon = h_\epsilon(\Omega_0)$ and h_ϵ is a family of diffeomorphisms converging to the identity in the C^1-norm. We prove that the problem is well posed for $\epsilon > 0$ sufficiently small in a suitable phase space. We also show that the associated semigroup has a global attractor $\mathcal{A}_{h_\epsilon}$ and the family $\{\mathcal{A}_{h_\epsilon}\}_{h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)}$ is continuous at $h_\epsilon = i_\Omega$.

Keywords: parabolic problem, perturbation of the domain, Lipschitz domain, global attractor, continuity of attractor.

Sumário

Introdução

Considerações Preliminares

Equações diferenciais parciais de reação e difusão aparecem como modelos de fenômenos nas diversas áreas do conhecimento, como Engenharia, Física, Química, Biologia e Economia, que dependem simultaneamente de variáveis espaciais e temporais. Entender o comportamento assintótico dessas equações pode ajudar a entender o comportamento desses modelos e a interpretar fenômenos naturais. Neste trabalho, propomos-nos a estudar equações diferenciais parciais semilineares do tipo parabólico, submetidas a variação do domínio de definição de suas soluções.

O tema de perturbação do contorno para problemas com valor de fronteira em EDP's foi estudado por vários autores sobre vários pontos de vista. Entre outros, podemos citar os trabalhos pioneiros de Rayleigh [18] e Hadamard [19].

Para tratar, entre outras coisas, problemas de perturbação de contorno para EDP's, Henry desenvolveu em [7] uma espécie de cálculo diferencial no qual a variável independente é o domínio onde os problemas de valor de contorno são considerados. Essa teoria nos permite utilizar teoremas clássicos tal como o Teorema da Função Implícita.

Uma das dificuldades de problemas de perturbação de contorno é que os espaços de funções mudam quando mudamos a região. Nossa primeira tarefa é encontrar um modo de comparar as soluções de um problema parabólico em diferentes regiões. Uma das possibilidades de abordagem é fazer com que o problema de valor de contorno retorne à região de referência original. Essa técnica foi desenvolvida por Henry em [7] e nos permite trabalhar em espaços de funções que não variam quando a região é perturbada.

O estudo de existência e continuidade de atratores para problemas parabólicos em relação à perturbação de contorno é um assunto bastante abordado na literatura. Há muitos trabalhos que abordam o assunto, como por exemplo, [1], [4], [5], [6], [25] e [26]. No entanto não há muitos trabalhos sobre perturbação de contorno quando o domínio não é suficientemente suave. Uma das dificuldades que se tem em um domínio com fronteira Lipschitz é garantir que as potências fracionárias $X^\alpha = D(A^\alpha)$ (A operador setorial) coincidem com os espaços de interpolação real ou complexo para todo $\alpha > 0$ real (quando o domínio é suave os espaços coincidem, ver [14]).

Em geral, quando se trabalha em um domínio com fronteira Lipschitz, ele ainda tem boas propriedades a ponto de garantirmos que os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ estão bem definidos, assim como teoremas importantes utilizados em EDP, como por exemplo, Teorema de Imersões, Teorema do Traço e Teorema de Green. Também podemos garantir a existência de operadores de extensão e as técnicas de perturbação de contorno desenvolvida em [7] ainda podem ser aplicadas.

Um trabalho de perturbação de contorno que podemos citar é [25], onde os autores estudam o comportamento das soluções (equilíbrios) do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega_\epsilon \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} + g(x,u) = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon \,, \end{cases}$$

onde a fronteira do domínio varia rapidamente quando o parâmetro $\epsilon \longrightarrow 0$. Considera-se uma família de domínios suaves uniformemente limitados $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Prova-se que as soluções do problema acima convergem para as soluções do problema limite, assim como a convergência dos autovalores e autofunções da linearização em torno das soluções.

Já em [5] os autores analisam o problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega_\epsilon \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon \,, \end{cases}$$

onde Ω_ϵ, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, são domínios limitados com fronteira Lipschitz em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Prova-se que se as perturbações do domínio são tais que a convergência dos autovalores e das autofunções do problema é garantida, então é obtida a continuidade superior dos atratores. Se, além disso, todos os equilíbrios do problema sem a perturbação é hiperbólico, então a continuidade dos atratores é obtida.

Motivação

Nossa principal referência será [1], onde os autores tratam um problema de perturbação de contorno para um problema parabólico semilinear dissipativo. Prova-se que os atratores globais compactos variam continuamente com respeito a um parâmetro na equação. Como iremos abordar a mesma equação parabólica semilinear, mas com hipóteses mais fracas em relação à [1], daremos então a seguir uma breve introdução ao problema estudado em [1].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e com fronteira suave, $a \in \mathbb{R}^+$ e considere o seguinte problema parabólico semilinear com condição de fronteira de Neumann não linear:

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \quad x \in \Omega \ \text{ e } \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) &= g(u(x,t)), \ x \in \partial\Omega \ \text{ e } \ t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

É conhecido que, sob apropriadas condições de crescimento e dissipatividade para as não linearidades f e g, o problema (1) possui um atrator global (ver, por exemplo, [2] e [3]). Em [1] foi estudada a dependência do atrator global de (1) em relação as perturbações do domínio Ω. De fato, foi provado em [1] que os atratores mudam continuamente com respeito às deformações de classe C^2 do contorno de Ω. Resultados nessa direção também foram obtidos em [4] para problemas com condição de fronteira de Dirichlet. Em [5] os autores provaram continuidade dos atratores para condição de fronteira de Neumann homogênea utilizando a noção de convergência espectral. A continuidade dos equilíbrios de (1) foi provada em [6], onde os autores permitem perturbações Lipschitz para o domínio suave.

A primeira tarefa então é encontrar uma maneira de comparar os atratores do problema (1) em diferentes regiões. É fácil verificar que $v(.\,,t)$ satisfaz (1) em $\Omega_h := h(\Omega)$ se, e somente se, $u(.\,,t) = h^*v(.,t)$ (que é $u(x,t) = v(h(x),t)$) satisfaz:

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= h^*\Delta_{\Omega_h} h^{*^{-1}} u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \ x \in \Omega \ \text{ e } \ t > 0, \\ h^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}} h^{*^{-1}} u(x,t) &= g(u(x,t)), \ x \in \partial\Omega \ \text{ e } \ t > 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

onde $h^*\Delta_{\Omega_h} h^{*^{-1}}$ e $h^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}} h^{*^{-1}}$ são definidas por:

$$\begin{aligned} h^*\Delta_{\Omega_h} h^{*^{-1}} u(x) &= \Delta_{\Omega_h}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\ &\text{e} \\ h^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}} h^{*^{-1}} u(x) &= \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}}(u \circ h^{-1})(h(x)) \end{aligned}$$

em espaços apropriados. Em particular, se $\mathcal{A}_h$ é o atrator global de (1) em $H^1(\Omega_h)$, então $\widetilde{\mathcal{A}_h} = \left\{ v \circ h \,\middle|\, v \in \mathcal{A}_h \right\}$ é o atrator global de (2) em $H^1(\Omega)$ e reciprocamente. Desse modo, é possível considerar o problema de continuidade dos atratores quando $h \longrightarrow i_\Omega$ em um espaço de fase fixo.

No trabalho [9] foi mostrado que se f e g são funções suaves satisfazendo condições adequadas de crescimento e dissipatividade, então os atratores de (2) são uniformemente limitados em $L^\infty(\Omega)$. Isto permite supor que as não linearidades f e g são nulas fora de um conjunto limitado e, em particular, globalmente Lipschitz, o que permite, por exemplo, considerar o problema em $L^2(\Omega)$ como espaço de fase.

Em [1] os autores consideram Ω uma região de classe C^2 e para cada $h \in \mathrm{Diff}^2(\Omega)$, tomam B_h o operador Laplaciano com condição de fronteira de Neumann homogênea em $h(\Omega)$, isto é,

$$B_h : D(B_h) \subset L^2(h(\Omega)) \longrightarrow L^2(h(\Omega)),$$

onde

$$D(B_h) = H^2(\,h(\Omega)\,)_N = \left\{ v \in H^2(\,h(\Omega)\,) \,\middle|\, \frac{\partial v}{\partial N_{h(\Omega)}} = 0 \right\} \quad \text{e} \quad B_h v = \Delta_{h(\Omega)} v\,.$$

Consideram o operador $A_h = h^*(B_h - a)h^{*-1}$ definido na região fixa Ω com h^* e h^{*-1} isomorfismos (em espaços apropriados). O operador $-A_h$ é auto-adjunto positivo em $L^2(\Omega)$ em relação a um produto interno conveniente, com

$$D(-A_h) = H^2(\Omega)_{N^*} = \left\{ u \in H^2(\Omega) \,\middle|\, h^* \frac{\partial}{\partial N_{h(\Omega)}} h^{*-1} u = 0 \right\}.$$

Assim, para quaisquer $\alpha > 0$, o conjunto formado por esses espaços de potências fracionárias $X_h^\alpha = D((-A_h)^\alpha)$ geram uma escala de espaços de Banach que coincidem com os espaços de interpolação real ou complexo, para $\alpha \geq 0$, $X_h^\alpha \hookrightarrow H^{2\alpha}(\Omega)$ e $X_h^{-\alpha} = X_h^{\alpha\,'}$, onde $'$ é a dualidade com respeito ao pareamento bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$. Além disso, $X_h^1 = H^2(\Omega)_{N^*}$, $X_h^{1/2} = H^1(\Omega)$ e $X_h^0 = L^2(\Omega)$.

É possível estender o operador A_h a um operador $A_{h,-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow X_h^{-1} = H^{-2}(\Omega)$ por dualidade e então definir, por interpolação, para qualquer $0 \leq \delta \leq 1$, o operador $A_{h,-\delta} : X_h^{1-\delta} \longrightarrow X_h^{-\delta}$ (ver [3] para mais detalhes).

Denotando o operador $A_{h,-1/2}$ por A_h para simplificar a notação, e Jh o determinante da matriz jacobiana $[h]_x = \left[\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^n$ e $v = u \circ h^{-1}$.

Se $u \in D(-A_h)$, por integração por partes é possível obter:

$$\langle\, A_h u + au\,,\, \psi\,\rangle_{-1,1} \;=\; -\int_\Omega (h^* \nabla_{h(\Omega)} h^{*-1} u)(x) \cdot \left(h^* \nabla_{h(\Omega)} h^{*-1} \frac{\psi}{|\,Jh\,|} \right)(x)\,|\,Jh(x)\,|\,dx. \tag{3}$$

Como (3) está bem definido para qualquer $u \in H^1(\Omega)$, então é obtida uma expressão de A_h para qualquer u nesse domínio.

Supondo que $v(\cdot, t)$ é uma solução de (1) em $h(\Omega)$, então multiplicando por $\Phi \in H^1(h(\Omega))$ e integrando por partes, obtém-se:

$$\int_{h(\Omega)} v_t\, \Phi\, dy \;=\; -\int_{h(\Omega)} \nabla v \cdot \nabla \Phi\, dy + \int_{\partial h(\Omega)} \Phi g(v)\, d\sigma(y) \;+\; \int_{h(\Omega)} (f(v) - av)\, \Phi\, dy.$$

Mudando as variáveis para a região fixa Ω, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_t(h(x))\Phi(h(x))|\,Jh(x)\,|\,dx \;=\; & -\int_\Omega \nabla_{h(\Omega)} v(h(x)) \cdot \nabla_{h(\Omega)} \Phi(h(x))|\,Jh(x)\,|\,dx \\
& + \int_\Omega [\,f((v \circ h)(x)) - av \circ h(x)]\, \Phi(h(x))\,|\,Jh(x)\,|\,dx \\
& + \int_{\partial\Omega} g((v \circ h)(x))\, \Phi(h(x))\,|\,J_{\partial\Omega} h(x)\,|\,d\sigma(x),
\end{aligned} \tag{4}$$

para todo $\Phi \in H^1(h(\Omega))$, onde Jh é o determinante da matriz jacobiana $[h]_x = \left[\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^n$ e $J_{\partial\Omega}h$ o determinante da matriz jacobiana do difeomorfismo $h : \partial\Omega \longrightarrow \partial h(\Omega)$.

Para cada $h \in \mathrm{Diff}^2(\Omega)$ consideremos os operadores não lineares:

(i) $F(\cdot, h) : H^r(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ definido por

$$\langle F(u,h), \Phi\rangle_{-1,1} = \int_\Omega f(u)\,\Phi\,dx,$$

(ii) $G(\cdot, h) : H^r(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ definido por

$$\langle G(u,h), \Phi\rangle_{-1,1} = \int_{\partial\Omega} \gamma(g(u))\,\gamma(\Phi)\left|\frac{J_{\partial\Omega}h}{Jh}\right| d\sigma(x),$$

com $1/2 < r < 1$ e $\gamma : H^r(\Omega) \longrightarrow H^{r-1/2}(\partial\Omega)$ é a aplicação traço.

Denotando por $H(\cdot, h) := F(\cdot, h) + G(\cdot, h)$. De (3) e (4) é natural considerar o problema na forma abstrata:

$$\begin{cases} u_t = A_h u + H(u,h)\,,\ t > t_0\,, \\ u(t_0) = u_0 \in H^r(\Omega)\,, \end{cases} \tag{5}$$

onde $1/2 < r < 1$. Foi provado em [3] que, com hipóteses apropriadas o problema (5) é equivalente ao (2). Além disso os autores em [1] consideram as seguintes condições sobre as não linearidades f e g:

(H1) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ são funções limitadas com derivadas limitadas tais que existem constantes c_0 e d_0 com

$$\limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{f(s)}{s} \le c_0\,, \qquad \limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{g(s)}{s} \le d_0$$

(H2) c_0 e d_0 são tais que o primeiro autovalor μ_1 do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (a - c_0)u = \mu u \text{ em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial N_\Omega} = d_0 u \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

é positivo.

Uma vez que $h^*\Delta_{h(\Omega)}h^{*-1}$ é analítico em h, a hipótese (H2) também vale em $h(\Omega)$ se h é próximo o suficiente da inclusão $i_\Omega : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Com as hipóteses (H1) e (H2), o problema (2) é bem posto, suas soluções são globalmente definidas e admite um atrator global (ver [3] e [20]). Como mostrado em [9] esses atratores são uniformemente limitados em $L^\infty(\Omega)$ para h próximo de i_Ω.

Objetivos, Contribuições e Organização do Trabalho

Em geral, os trabalhos que tratam perturbação de contorno tem como hipótese que o domínio utilizado é suave. A ideia neste trabalho é considerar o mesmo problema parabólico semilinear abordado em [1] mas sob hipóteses mais fracas. A primeira diferença é que consideraremos Ω um domínio com fronteira Lipschitz e não C^2 como é considerado em [1]. Outra diferença deste trabalho em relação à [1] é sobre a convergência das pertubações do domínio, já que exigiremos apenas convergência C^1 para as perturbações, e não C^2 como em [1]. Sobre essas hipóteses mais fracas e usando as técnicas desenvolvidas em [7], iremos obter a existência e continuidade do atrator global para o problema (1) em relação à perturbação do domínio.

Notemos também que em [25], usando outras técnicas os autores obtiveram a continuidade dos equilíbrios para o problema (1) quando o domínio perturbado e suas perturbações são suaves. Nós iremos além disso, provaremos a continuidade dos equilíbrios para o problema (1) para um domínio com fronteira Lipschitz e também a existência e continuidade do atrator global.

Já em [5] prova-se a continuidade do atrator para o problema (1) com condição de fronteira de Neumann homogênea e consideram o domínio e suas perturbações com fronteira Lipschitz. Afirma-se que a prova de existência e limitação uniforme dos atratores em $L^\infty(\Omega)$ segue do trabalho [9], onde os autores consideram um domínio com fronteira suave. Nosso trabalho considerará uma condição de fronteira de Neumann não homogênea e usando as técnicas de [7], provaremos a existência e continuidade do atrator global para o problema (1).

Em [27] os autores consideram $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave com $n = 2$ ou 3, e provam a existência de atrator global para o problema (1) com as seguintes condições de crescimento para as não linearidades f e g:

$$\limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{f(s)+as}{s} \geq 0\,, \qquad \limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{g(s)}{s} \geq 0\,.$$

Nossa hipótese de crescimento para f e g será mais geral (ver hipótese (H3)).

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 1 daremos um apanhado breve a respeito dos principais resultados sobre espaços de Sobolev definidos em um domínio com fronteira não regular, com destaque para os Teoremas de Imersões e Teorema do Traço. Abordaremos as técnicas de perturbação de contorno desenvolvidas em [7], faremos um apanhado breve de resultados sobre operadores setoriais, semigrupos analíticos, existência de solução e atrator global para um problema parabólico não linear e por fim, existência e continuidade de variedades locais.

- No Capítulo 2 iniciaremos introduzindo o domínio $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ no qual iremos trabalhar, e h_ϵ uma família de perturbações do quadrado que depende do parâmetro ϵ e que converge para a inclusão na norma C^1. Utilizaremos essa família de perturbações h_ϵ para fazer com que o contorno da região fixa Ω varie. Como dito brevemente no início desta Introdução, é necessário fazer com que o problema (1) que estudaremos retorne à região de referência original, logo utilizaremos as técnicas desenvolvidas em [7], e exibiremos com mais detalhes os coeficientes do operador $h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1}$ e a nova condição de fronteira em função da perturbação h_ϵ. Deste modo trabalharemos com o problema (2) na região fixa Ω, e mostraremos que o operador $(-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} + aI)$ é setorial em uma escala de espaços de Banach, quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma C^1. No caso de um domínio suave, temos que para qualquer $\beta > 0$ o espaço de potência fracionária $X_{h_\epsilon}^\beta = D((-A_{h_\epsilon})^\beta)$ de um operador setorial gera uma escala de espaços de Banach que coincidem com o espaço de interpolação real ou complexo. Como nosso domínio não é suficientemente suave, não conseguimos provar a coincidência entre os espaços para todo $\beta > 0$, por esse motivo, o plano será trabalhar nos espaços $X_{h_\epsilon}^\beta$ e com as imersões $X_{h_\epsilon}^\beta \subset W^{k,p}(\Omega)$ quando não pudermos garantir a coincidência.

- No Capítulo 3 definiremos o problema abstrato associado ao problema parabólico semilinear dado em (2). Provaremos depois, sob algumas hipóteses adicionais para as não linearidades envolvidas em (2), a existência e unicidade de soluções globais para o problema abstrato quando consideramos os operadores envolvidos neste problema, definidos em uma escala de espaços de Banach definidas no Capítulo 2. Para tanto usaremos a teoria de semigrupos e consideraremos o problema (2) como uma equação de evolução em um espaço de Banach.

- No Capítulo 4 provaremos a existência e continuidade de atrator global para o problema (2) em $X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}+\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno e h_ϵ em uma vizinhança da inclusão i_Ω, na norma $C^1(\Omega)$. Depois mostraremos a existência de atrator no caso em que o espaço de fase é $X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Provaremos a continuidade dos equilíbrios do problema (2) e por fim, fixaremos uma perturbação $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$ e trabalharemos com o problema (2) na forma fraca, assim iremos obter uma família de atratores globais $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ que convergem para o atrator global de (1) no espaço de fase fixo $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é primeiramente abordar alguns resultados importantes sobre espaços de Sobolev definidos em domínios não regulares. Como trabalharemos em um domínio regular por partes, será importante garantir que resultados como o Teorema de Imersões e o Teorema do Traço ainda sejam válidos neste tipo de domínio. Na segunda seção, introduzimos a técnica desenvolvida por Henry em [7], para trabalhar com problemas de perturbação de contorno. Já na terceira seção, faremos um apanhado breve com os principais resultados sobre operadores lineares, na quarta seção expomos alguns resultados sobre existência de soluções para uma classe de equações parabólicas não lineares e existência de atrator global, e por fim, na última seção abordaremos dois resultados sobre existência e continuidade de variedades locais.

1.1 Espaços de Sobolev em Domínios não Regulares

Os Teoremas de imersões de Sobolev e o Teorema do Traço são ferramentas de grande importância no estudo das EDP's, mas a maioria das referências encontradas tem como hipótese um domínio cuja fronteira é suave. Como trabalharemos com domínios regulares por partes, iremos abordar brevemente nesta seção alguns resultados encontrados em Grisvard [13], Nečas [14] e Adams [15].

1.1.1 Definições e Notações

Denotaremos um ponto x qualquer do espaço n-dimensional Euclidiano $\mathbb{R}^n$ por $(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1}^{\alpha_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}^{\alpha_n},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. De maneira análoga $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Usaremos também a seguinte notação para derivadas parciais,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \;\text{ e }\; D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}.$$

Seja f uma aplicação que assume valores reais m-diferenciável em $x \in \mathbb{R}^n$. A m-ésima derivada de f em x pode ser considerada como uma m-forma linear simétrica sobre $\mathbb{R}^n$,

$$h \longrightarrow D^m f(x) h^m.$$

A norma $|\cdot|$ de $D^m f(x)$ pode ser definida como o

$$\max_{|h| \leq 1} |D^m f(x) h^m|.$$

Vale a pena observar que a m-ésima derivada de f em x pode ser considerada também como a coleção das derivadas parciais de f até ordem m, ou seja,

$$D^m f(x) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \Big| \, |\alpha| = m \right\}.$$

Denotaremos por Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ e fecho $\overline{\Omega}$. Se E é algum espaço vetorial normado, $C^m(\Omega, E)$ é o espaço das funções limitadas m-diferenciáveis definidas em Ω com derivadas limitadas e valores em E, cujas derivadas se estendem continuamente a $\overline{\Omega}$ com a norma usual

$$\|f\|_{C^m(\Omega,E)} = \max_{0 \leq j \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^j f(x)|.$$

Além disso, consideraremos $C^{k,1}(\Omega, E)$, com $k \geq 1$, o espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis com derivadas de ordem k Lipschitz contínuas.

1.1.2 Domínios não Regulares

Muitos autores consideram (quando possível) a fronteira $\partial\Omega$ de Ω como sendo localmente o gráfico de uma função φ. Então as propriedades de $\partial\Omega$ são especificadas por meio de propriedades de φ, por exemplo, continuidade, propriedade Lipschitz, diferenciabilidade, etc. Este é o ponto de vista, adotado por exemplo, em Nečas [14] e Adams [15].

Definição 1.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que sua fronteira $\partial\Omega$ é contínua (respectivamente Lipschitz, continuamente diferenciável, de classe $C^{k,1}$ (com $k \geq 1$ inteiro), m vezes continuamente diferenciável ($m \geq 1$ inteiro)) se para todo $x \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança V de $x \in \mathbb{R}^n$ e novas coordenadas ortogonais $\left\{ y_1, ..., y_n \right\}$ tais que:*

(a) V é um hipercubo nas novas coordenadas:

$$V = \left\{ (y_1, ..., y_n) \middle| -a_j < y_j < a_j \, , \, 1 \leq j \leq n \right\};$$

(b) existe uma função contínua φ (respectivamente Lipschitz, continuamente diferenciável, de classe $C^{k,1}$, m vezes continuamente diferenciável), definida em

$$V' = \left\{ (y_1, ..., y_{n-1}) \middle| -a_j < y_j < a_j \, , \, 1 \leq j \leq n-1 \right\}$$

e tal que

$$\begin{aligned} &|\varphi(y')| \leq a_n/2 \;\; \text{para todo} \;\; y' = (y_1, ..., y_{n-1}) \in V', \\ &\Omega \cap V = \left\{ y = (y', y_n) \in V \;\middle|\; y_n < \varphi(y') \right\}, \\ &\partial\Omega \cap V = \left\{ y = (y', y_n) \in V \;\middle|\; y_n = \varphi(y') \right\}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, em uma vizinhança de x, Ω está abaixo do gráfico de φ e consequentemente a fronteira $\partial\Omega$ é o gráfico de φ.

Um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^2$, cuja fronteira $\partial\Omega$ é um polígono, tem uma fronteira Lipschitz mas não continuamente diferenciável. Analogamente, um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^3$, cuja fronteira $\partial\Omega$ é um poliedro, tem uma fronteira Lipschitz e não continuamente diferenciável.

Definição 1.1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que $\overline{\Omega}$ é uma subvariedade n-dimensional, com fronteira Lipschitz em $\mathbb{R}^n$ (respectivamente continuamente diferenciável, de classe $C^{k,1}$ ($k \geq 1$ inteiro), m vezes continuamente diferenciável ($m \geq 1$ inteiro)), se para todo $x \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança V de x em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tais que:*

(a) ψ é injetora;

(b) ψ e ψ^{-1} (definida em $\psi(V)$) são aplicações Lipschitz (respectivamente continuamente diferenciáveis de classe $C^{k,1}$, m-vezes continuamente diferenciáveis);

(c) $\Omega \cap V = \left\{ y \in \Omega \;\middle|\; \psi_n(y) < 0 \right\}$, onde $\psi_n(y)$ denota a n-ésima componente de $\psi(y)$.

Muitas propriedades de espaços de Sobolev definidos sobre um domínio Ω e, em particular, as propriedades de imersão desses espaços, dependem de propriedades de regularidade de Ω. Tal regularidade é normalmente expressa em termos da geometria ou de condições analíticas satisfeitas por esse domínio. Especificaremos a seguir algumas dessas condições e consideraremos algumas relações entre elas.

Definição 1.1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que Ω tem a propriedade do segmento uniforme (respectivamente propriedade do cone) se para todo $x \in \partial\Omega$, existe uma vizinhança V de x em $\mathbb{R}^n$ e novas coordenadas $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tais que:*

(a) V é um hipercubo nas novas coordenadas

$$V = \Big\{ (y_1, \ldots, y_n) \;\Big|\; -a_j < y_j < a_j \,,\, 1 \le j \le n \Big\};$$

(b) $y - z \in \Omega$ sempre que $y \in \overline{\Omega} \cap V$ e $z \in C$, onde C é um segmento aberto $\Big\{ (0, \ldots, 0, z_n) \;\Big|\; 0 < z_n < h \Big\}$ (respectivamente C é um cone aberto $\Big\{ z = (z', z_n) \;\Big|\; (\cot\theta)\,|z'| < z_n < h) \Big\}$ para algum $\theta \in]\,0\,,\,\pi/2]\,)$ para algum $h > 0$.

Notemos que pela Definição 1.1.1, se Ω tem fronteira contínua então tem a propriedade do segmento uniforme, basta escolher $h < a_n/2$. Da mesma forma, se Ω tem fronteira Lipschitz, então ele tem a propriedade do cone uniforme. De fato, basta substituir todos os a_j por $a_j/2$ na Definição 1.1.2 e escolher $h < a_n/2$ junto com

$$\theta \le \inf\left(\arctan\frac{1}{K}\,;\, \arctan\frac{a_1}{a_n}\,;\ldots;\, \arctan\frac{a_{n-1}}{a_n}\right),$$

onde K é a constante de Lipschitz de φ.

Teorema 1.1.4 *Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado tem a propriedade do cone uniforme se, e somente se, sua fronteira $\partial\Omega$ é Lipschitz.*

Demonstração: Veja [13].

Corolário 1.1.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, convexo e limitado, então Ω tem fronteira Lipschitz.*

Demonstração: Veja [13].

1.1.3 Espaços de Sobolev em Abertos

Esta subseção contém algumas definições de espaços de Sobolev encontrados em [13]. Nos concentraremos estritamente nos espaços que serão utilizados neste trabalho. Abordaremos primeiro os espaços de Sobolev sobre $\mathbb{R}^n$ e, logo após, sobre subdomínios Ω do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz.

No que se segue nesta seção, $s \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ é tal que $1 < p < \infty$. Denotemos por m a parte inteira de s e por σ sua parte fracionária, consequentemente, $s = m + \sigma$ e $0 \le \sigma < 1$.

Definição 1.1.6 *Denotemos por $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as distribuições (todas as funções e distribuições são a valores complexos salvo indicação do contrário) definidas em $\mathbb{R}^n$, tais que:*

(a) $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *para* $|\alpha| \leq m$, *quando* $s = m$ *é um inteiro não negativo;*

(b) $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx\, dy < +\infty$$

para $|\alpha| = m$, *quando* $s = m + \sigma$ *é não inteiro e não negativo.*

Como o usual, $L^p(\mathbb{R}^n)$ *é o espaço de todas as funções mensuráveis* u *tais que* $|u|^p$ *é integrável sobre* $\mathbb{R}^n$. *Definimos uma norma sobre* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

no caso (a), e por

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \|u\|^p_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha| = m} \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

no caso (b).

A definição acima é estendida para valores negativos de s, por dualidade, como segue:

Definição 1.1.7 *Para* $s < 0$ *denotemos por* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ *o espaço dual de* $W^{-s,p}(\mathbb{R}^n)$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

No caso especial $p = 2$, iremos denotar por $H^s(\mathbb{R}^n)$ o espaço $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos agora $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, possivelmente diferente de $\mathbb{R}^n$. O propósito da próxima definição é apresentar uma definição de espaços de Sobolev sobre Ω. Podemos reproduzir a Definição 1.1.6 por restrição do domínio de integração (trocando $\mathbb{R}^n$ por Ω). Este é um ponto de vista utilizado, por exemplo, em [13] e [14].

Definição 1.1.8 *Denotemos por* $W^{s,p}(\Omega)$ *o espaço de todas as distribuições* u *definidas em* Ω *tal que*

(a) $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, *para* $|\alpha| \leq m$, *quando* $s = m$ *é um inteiro não negativo;*

(b) $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *e*

$$\int\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx\, dy < +\infty$$

para $|\alpha| = m$, *quando* $s = m + \sigma$ *é não inteiro e não negativo.*

Definimos uma norma sobre $W^{s,p}(\Omega)$ por

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} | D^{\alpha} u |^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

no caso (a), e por

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left\{ \| u \|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} \int\int_{\Omega \times \Omega} \frac{| D^{\alpha} u(x) - D^{\alpha} u(y) |^p}{| x - y |^{n+\sigma p}} dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

no caso (b).

Definição 1.1.9 *Para todo $s > 0$, denotemos por $W^{s,p}(\overline{\Omega})$ o espaço de todas as distribuições em Ω que são restrições de elementos de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Em outras palavras, $W^{s,p}(\overline{\Omega})$ é o espaço de toda $u|_{\Omega}$, onde $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ e $u|_{\Omega}$ é definida por $\langle u|_{\Omega}, \varphi \rangle = \langle u, \widetilde{\varphi} \rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, onde $\widetilde{\varphi}$ é a extensão de φ por zero fora de Ω e $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções C^{∞} com suporte compacto em Ω. Definimos a norma sobre $W^{s,p}(\overline{\Omega})$ por

$$\| u \|_{W^{s,p}(\overline{\Omega})} = \inf_{\substack{U \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \\ U|_{\Omega} = u}} \| U \|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como uma consequência da definição temos a seguinte inclusão:

$$W^{s,p}(\overline{\Omega}) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$$

para todo real $s > 0$.

1.1.4 Densidade, Compacidade, Operador Extensão e Imersões

Nesta seção, citamos alguns resultados sobre densidade, compacidade, extensão de operadores e imersões entre espaços de Sobolev definidos em domínios com fronteira Lipschitz. As demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em [14], [16] e [17].

Teorema 1.1.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira Lipschitz. Então para todo $s > 0$, existe um operador linear contínuo P_s de $W^{s,p}(\Omega)$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $P_s u|_{\Omega} = u$.*

Em outras palavras o teorema acima diz que cada função $u \in W^{s,p}(\Omega)$ é a restrição de uma função $P_s u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Um contra-exemplo em [17] mostra que a propriedade pode não valer quando Ω não tem fronteira Lipschitz. Consequentemente temos que $W^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\overline{\Omega})$, quando Ω é limitado e tem fronteira Lipschitz.

Teoremas de imersão contínua são poderosas ferramentas para estender muitos resultados provados em $\mathbb{R}^n$ para resultados similares em domínios limitados com fronteira Lipschitz.

Dados dois espaços de Banach B_1 e B_2, dizemos que B_1 está imerso em B_2 algebricamente e topologicamente se cada elemento de B_1 é um elemento de B_2 e, para todo $u \in B_1$, $\| u \|_{B_2} \leq c\| u \|_{B_1}$ para alguma constante c positiva . Usaremos a notação $B_1 \subset B_2$.

Teorema 1.1.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado com fronteira Lipschitz. Se $p \geq 1$, $kp < 2$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{2}$, então $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.*

Demonstração: Veja [14].

Teorema 1.1.12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado com fronteira Lipschitz. Se $p \geq 1$ e $kp = 2$, então $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo q, $1 \leq q < \infty$.*

Ver [14].

Teorema 1.1.13 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado com fronteira Lipschitz. Se $p \geq 1$, $kp > 2$, e denotemos*

$$\mu \begin{cases} = k - \dfrac{2}{p}, & se \quad k - \dfrac{2}{p} < 1\,, \\ < 1 & se \quad k - \dfrac{2}{p} = 1\,, \\ = 1 & se \quad k - \dfrac{2}{p} > 1. \end{cases}$$

Então $W^{k,p}(\Omega) \subset C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Veja [14].

Teorema 1.1.14 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado com fronteira Lipschitz e $s > t \geq 0$. Então a imersão $I : W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow W^{t,p}(\Omega)$ é compacta.*

Ver [13].

Teorema 1.1.15 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira Lipschitz. Então D_j, o operador diferenciação em relação à x_j com $1 \leq j \leq n$, é um operador linear contínuo de $W^{s,p}(\Omega)$ em $W^{s-1,p}(\Omega)$ exceto quando $s = 1/p$.*

Demonstração: Veja [13].

1.1.5 Espaços Definidos em Domínios Poligonais

Nesta subseção trataremos de domínios planos cuja fronteira são polígonos (possivelmente curvilíneos). Daremos a definição de um polígono curvilíneo e então vamos rever brevemente a consequência dos resultados das seções anteriores, no caso em que Ω tem uma fronteira poligonal. Grosseiramente falando, um polígono curvilíneo é uma variedade com cantos. Mais precisamente, vamos dar uma definição semelhante em muitos aspectos à Definição 1.1.2.

Definição 1.1.16 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado. Dizemos que a fronteira $\partial\Omega$ é um polígono curvilíneo de classe C^m, $m \geq 1$ inteiro (respectivamente $C^{k,\alpha}$, $k \geq 1$ inteiro, $0 < \alpha \leq 1$), se para todo $x \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança V de x em $\mathbb{R}^2$ e uma aplicação $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:*

(a) ψ é injetora;

(b) ψ e ψ^{-1} (definida em $\psi(V)$) são de classe C^m (respectivamente $C^{k,\alpha}$);

(c) $\Omega \cap V$ é

$$\left\{ y \in \Omega \;\middle|\; \psi_2(y) < 0 \right\} \;,\; \left\{ y \in \Omega \;\middle|\; \psi_1(y) < 0 \text{ e } \psi_2(y) < 0 \right\}$$

ou

$$\left\{ y \in \Omega \;\middle|\; \psi_1(y) < 0 \text{ ou } \psi_2(y) < 0 \right\},$$

onde $\psi_j(y)$ denota a j-ésima componente de ψ.

Notemos que todo domínio que satisfaz as hipóteses da Definição 1.1.16 tem uma fronteira Lipschitz de acordo com a Definição 1.1.1. Consequentemente, os espaços de Sobolev sobre Ω terão todas as propriedades já listadas para espaços de Sobolev sobre domínios limitados com fronteira Lipschitz. Contudo, as vantagens reais desses domínios aparecem claramente na próxima seção dedicada ao Teorema do Traço.

Teorema 1.1.17 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é um polígono curvilíneo. Então temos as seguintes imersões e identidades:*

(a) $W^{s,p}(\overline{\Omega}) = W^{s,p}(\Omega)$ para $s > 0$;

(b) $W^{s,p}(\Omega) \subseteq W^{t,q}(\Omega)$, $s - \dfrac{2}{p} = t - \dfrac{2}{q}$, $t \leq s$ e $q \geq p$;

(c) $W^{s,p}(\Omega) \subseteq C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $k + \alpha = s - \dfrac{2}{p}$ para $s - \dfrac{2}{p} > 0$ não inteiro.

1.1.6 Teorema do Traço para Domínios com Fronteira Lipschitz

Nesta subseção daremos uma versão para o Teorema do Traço quando $\partial\Omega$ é a fronteira Lipschitz de um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$.

Usando a mesma notação da Definição 1.1.1, um vetor normal exterior unitário υ é definido quase sempre (para a medida da superfície usual sobre $\partial\Omega$) por:

$$\upsilon(y', \varphi(y')) = \frac{\{ -D_1\varphi(y'), ..., -D_{n-1}\varphi(y'), 1 \}}{\sqrt{1 + D_1\varphi(y')^2 + ... + D_{n-1}\varphi(y')^2}}\,,$$

para $y' \in V'$. Finalmente, usando uma partição da unidade, é possível definir um campo de vetores em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$, tal que v é um vetor normal exterior unitário quase sempre sobre $\partial\Omega$. Observemos que, quando a fronteira de Ω é de classe $C^{k,1}$, o campo de vetor v é apenas de classe $C^{k-1,1}$. Agora denotamos por γ o operador definido por $(\gamma u) = u|_{\partial\Omega}$ quando u é uma função suave.

Teorema 1.1.18 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{k,1}$. Se $s - 1/p$ é não inteiro, $s \leq k+1$, $s - 1/p = l + \sigma$, $0 < \sigma < 1$ e $l \geq 0$ inteiro, então a aplicação*

$$u \longmapsto \left\{ \gamma u, \gamma\frac{\partial u}{\partial v}, ..., \gamma\frac{\partial^l u}{\partial v^l} \right\}$$

que está definida para $u \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$, tem uma única extensão contínua como um operador de

$$W^{s,p}(\Omega) \ \ em \ \ \prod_{j=0}^{l} W^{s-j-1/p,p}(\partial\Omega).$$

O caso particular em que $s = 1$ e $k = 0$ foi provado por Gagliardo em [10].

Teorema 1.1.19 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira Lipschitz $\partial\Omega$. Então a aplicação $u \longrightarrow \gamma u$ que está definida para $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, tem uma única extensão contínua como um operador de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.*

Ver [13].

Teorema 1.1.20 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz, k um número real tal que $0 \leq k < 1$ e $q = \dfrac{1}{1-k}$. Então existe exatamente uma aplicação $\gamma : H^k(\Omega) \longrightarrow L^q(\partial\Omega)$ tal que se $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \Rightarrow \gamma u = u$.*

Demonstração: Veja [14].

Teorema 1.1.21 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz. Então existe exatamente uma aplicação $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^q(\partial\Omega)$ tal que se $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \Rightarrow \gamma u = u$, para $q \geq 1$ arbitrário.*

Para um domínio com fronteira Lipschitz, dada a existência do vetor exterior normal unitário q.s. sobre $\partial\Omega$, é possível demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1.1.22 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com fronteira Lipschitz, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W^{1,q}(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{n+1}{n}$ se $n > p \geq 1$, $n > q \geq 1$ com $q > 1$ se $p \geq n$ e com $p > 1$ se $q \geq n$. Então*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_i\, dS - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx\,,$$

onde $(\nu_1, \cdots, \nu_n)$ é o vetor normal exterior.

Demonstração: Veja [14].

1.1.7 Problemas de Valor de Fronteira em Domínios Convexos

A possibilidade de aproximar um domínio convexo por domínios com fronteira de classe C^2 segue de resultados de [21]. O lema a seguir nos permite aproximar um dado domínio convexo Ω por domínios com fronteira suave.

Lema 1.1.23 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e convexo. Então, para todo $\epsilon > 0$, existem dois subconjuntos abertos e convexos Ω_1 e Ω_2 em $\mathbb{R}^n$ tais que:*

(a) $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$;

(b) Ω_j *tem fronteira* $\partial\Omega_j$ *de classe* C^2, $j = 1, 2$;

(c) $dist(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) \leq \epsilon$;

onde $dist(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2)$ denota a distância usual entre conjuntos, isto é, $dist(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) = \inf_{x \in \partial\Omega_1} \inf_{y \in \partial\Omega_2} d(x, y)$.

O Lema 1.1.23 nos mostra que é possível aproximar um dado Ω por dentro ou por fora por um domínio com fronteira suave. A aproximação pelo conjunto convexo interior é mais conveniente quando se estuda o problema de Dirichlet, já a aproximação exterior é mais conveniente para estudar o problema de Neumann. Lembremos que, pelo Corolário 1.1.5, temos que um subconjunto aberto, limitado e convexo do $\mathbb{R}^n$ tem fronteira Lipschitz.

Para o próximo teorema consideremos o operador A definido por

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} D_i \left(a_{ij} D_j u \right), \tag{1.1}$$

com $a_{ij} = a_{ji} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Assumimos também que A é fortemente elíptico, ou seja, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq -\alpha \, | \, \xi \, |^2 ,$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.24 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado e convexo. Então para cada $f \in L^2(\Omega)$ e $\lambda > 0$, existe uma única $u \in H^2(\Omega)$ que é solução de*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j v \, dx \; + \; \lambda \int_{\Omega} uv \, dx \; = \; \int_{\Omega} f v \, dx \, , \tag{1.2}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Ver [13].

A identidade (1.2) é a forma fraca do problema de Neumann para a equação

$$Au + \lambda u = f \ \text{ em } \ \Omega. \tag{1.3}$$

Ela equivalente à equação (1.3) junto com a condição de fronteira

$$\sum_{i,j=1}^{n} \upsilon_i \gamma(a_{ij} D_j u) = 0 \ \text{ q.s. em } \ \partial\Omega. \tag{1.4}$$

Isso faz sentido já que $\partial\Omega$ é Lipschitz e $a_{ij} D_j u \in H^1(\Omega)$.

Observação 1.1.25 *Notemos que, se $u \in H^2(\Omega)$ é uma solução de (1.2), então podemos usar integração por partes e a condição de fronteira (1.4), obtendo então a equação (1.3). Portanto se $u \in H^2(\Omega)$ é uma solução de (1.2) então também é solução de (1.3) com condição de fronteira (1.4).*

1.2 Perturbação de Contorno

Para tratar problemas de variação de domínios em problemas de EDP, Henry desenvolveu em [7] uma espécie de cálculo diferencial onde a variável independente é o domínio. Nesta seção vamos introduzir a técnica desenvolvida em [7] para tratar esse tipo de problema, bem como notações e alguns outros resultados que serão necessários no nosso trabalho.

Consideremos o operador linear diferencial matricial formal

$$Lu(x) = \left(u(x)\,, \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\,, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\,, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x)\,, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x)\,, \cdots \right), \ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

com a quantidade de termos que se fizer necessário. Dada uma função f de várias variáveis podemos definir um operador diferencial formal não linear por

$$v(x) = f(\,x\,, Lu(x))\,, \, x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Mais precisamente, suponha que $Lu(\cdot)$ assume valores em $\mathbb{R}^p$ e $f(\,x\,,\lambda)$ está definida para $(x\,,\lambda)$ em algum conjunto aberto $O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Para subconjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos F_Ω por

$$F_\Omega(u)(x) = f(\,x\,, Lu(x))\,, \, x \in \Omega$$

para funções u suficientemente suaves sobre Ω tal que $(x\,, Lu(x)) \in O$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Por exemplo, se f é contínua, Ω é limitado e L envolve derivadas de ordem menor ou igual a m, o domínio de F_Ω é um subconjunto aberto de $C^m(\Omega)$ (talvez vazio), e os valores de F_Ω se encontram em $C^0(\Omega)$. Outros espaços de funções podem ser usados com modificações naturais.

Seja $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um mergulho m vezes diferenciável, isto é, um difeomorfismo sobre sua imagem $h(\Omega)$ de ordem m. Definimos a aplicação de composição (ou o 'pull-back') h^* de h por

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x))\,,\ x \in \Omega\,,$$

onde u é uma função definida em $h(\Omega)$.

Proposição 1.2.1 *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} h^* : & C^m(h(\Omega)) & \longrightarrow & C^m(\Omega) \\ & u & \longmapsto & u \circ h \end{array}$$

é um isomorfismo com inversa $h^{*-1} = (h^{-1})^*$.

Demonstração: Veja [23].

É importante observar que a proposição acima é válida em outros espaços de funções, como por exemplo, os espaços de Sobolev,

$$h^* : W^{k,p}(h(\Omega)) \longrightarrow W^{k,p}(\Omega),\ 0 \leq k \leq m,\ 1 \leq p \leq \infty\,.$$

Dado um mergulho h de uma região limitada Ω podemos considerar o operador diferencial $F_{h(\Omega)}$ com domínio aberto $D(F_{h(\Omega)}) \subset C^m(h(\Omega))$. A aplicação

$$F_{h(\Omega)} : D(F_{h(\Omega)}) \subset C^m(h(\Omega)) \longrightarrow C^0(h(\Omega))$$

é chamada a forma *Euleriana* do operador diferencial formal não linear $v \mapsto f(\cdot, Lv(\cdot))$ sobre $h(\Omega)$, enquanto

$$h^*F_{h(\Omega)}h^{*-1} : h^*D(F_{h(\Omega)}) \subset C^m(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega)$$

é chamada forma *Lagrangeana* do mesmo operador diferencial formal não linear. Os mesmos termos são usados para outros espaços de funções.

A forma Euleriana é frequentemente mais natural e simples para se fazer cálculos, a forma Lagrangeana é usada para provar teoremas. A vantagem da forma Lagrangeana é que ela age em espaços de funções que não dependem de h, facilitando então o uso de teoremas como por exemplo, o Teorema da Função Implícita. Entretanto precisamos garantir que

$$(h, u) \longmapsto h^*F_{h(\Omega)}h^{*-1}u \tag{1.5}$$

é diferenciável e calcular derivadas com respeito à h. Como h^* é linear, a diferenciabilidade em relação à u não apresenta problema algum. Antes de estudarmos a diferenciabilidade da aplicação (1.5), temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.2 *Temos que*

$$\mathrm{Diff}^m(\Omega) = \left\{ h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)\,;\ h \text{ é injetora e } \frac{1}{|Jh|} \text{ é limitado em } \Omega \right\}$$

é aberto se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto limitado de classe C^m, onde Jh é o determinante da matriz jacobiana de h.

Demonstração: Veja [23].

Uma topologia pode ser introduzida na coleção de regiões $\left\{ h(\Omega)\,;\ h \in \mathrm{Diff}^m(\Omega) \right\}$, definindo uma (sub base de) vizinhanças de um domínio Ω por

$$\left\{ h(\Omega)\,;\ \| h - i_\Omega \|_{C^m(\Omega,\mathbb{R}^n)} < \epsilon,\ \epsilon > 0 \ \text{ suficientemente pequeno} \right\},$$

onde $i_\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação inclusão. Em [8] Michelleti mostrou que essa topologia é metrizável.

Voltando a questão de suavidade, para $h \in \mathrm{Diff}^m(\Omega)$, $v = h^{*-1}u$, $y = h(x)$, $x \in \Omega$, temos

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u(x) = F_{h(\Omega)} v(y) = f(y, Lv(y)) = f(h(x), h^* L h^{*-1} u(x))\,.$$

Consideremos primeiro o operador diferencial

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^{\alpha_i},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ com α_i inteiro não negativo. Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
\left(h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1}(u) \right)(x) &= \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(h^{-1}(y)) \frac{\partial (h^{-1})_k}{\partial y_i}(h(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(h^{-1}(y))(h_y^{-1})_{ki}(h(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)(h_x^{-1})_{ki}(x)\,,
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$h^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha} h^{*-1} u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha} v(y) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (h_x^{-1})_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{\alpha_i} u(x)\,.$$

Então, a aplicação

$$\begin{array}{rccc}
F: & C^m(\Omega) \times \mathrm{Diff}^m(\Omega) & \longrightarrow & C^0(\Omega) \\
 & (u, h) & \longmapsto & h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u = f(h(\cdot), h^* L h^{*-1} u)
\end{array}$$

é analítica supondo Ω uma região limitada de classe C^m. Se, em adicional, $f \in C^k$ ou analítica então F é C^K, sobre seu domínio de definição. Outros espaços de funções podem ser empregados e os resultados de suavidade são essencialmente os mesmos.

1.3 Operadores Lineares

Nesta seção faremos um apanhado breve sobre operadores lineares e semigrupos analíticos. Para o caso em que o operador é setorial serão definidas suas potências fracionárias e apresentados alguns resultados importantes para nossos propósitos. Por fim, abordaremos alguns resultados que nos garantem a existência de solução e atrator global para uma classe de equações não lineares. As demonstrações serão omitidas nesta seção mas podem ser encontradas em [1], [11] e [12].

1.3.1 Operadores Adjuntos, Simétricos, Setoriais e Semigrupos Analíticos

Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y com a norma usual; isto é, para $A \in \mathcal{L}(X, Y)$,

$$\| A \|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\| Ax \|_Y}{\| x \|_X}.$$

No caso particular $X = Y$, escrevemos $\mathcal{L}(X)$ para denotar $\mathcal{L}(X, X)$. Seja X^* o dual topológico de X; isto é, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ com a topologia dada pela norma acima. Denotaremos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x, x^* \rangle$.

Definição 1.3.1 *Seja H um espaço de Hilbert. Um operador A em H com domínio $D(A) \subseteq H$ é uma aplicação que para cada $x \in D(A)$ associa um único elemento $y \in H$, e nesse caso, indica-se $y = Ax$. O conjunto*

$$R(A) = \left\{ y \in H \,\middle|\, y = Ax,\ x \in D(A) \right\}$$

é chamado de conjunto imagem do operador A. Diz-se que A é um operador densamente definido quando seu domínio é denso em H.

Definição 1.3.2 *Seja H um espaço de Hilbert. Diz-se que um operador B em H com domínio $D(B) \subseteq H$ é uma extensão do operador A em H com domínio $D(A) \subseteq H$ quando:*

i) $D(A) \subseteq D(B)$;

ii) $Ax = Bx, \forall x \in D(A)$.

Neste caso, indica-se $A \subseteq B$. Em especial, quando $A \subset B$, diz-se que B é uma extensão própria de A.

Definição 1.3.3 *Sejam X um espaço de Banach e X^* o seu dual topológico. Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear densamente definido, o adjunto $A^* : D(A^*) \subset X^* \longrightarrow X^*$ de A é o operador linear definido por:*

$$D(A^*) = \left\{ x^* \in X^* : \exists\, y^* \in X^*,\ \langle x^*, Ax \rangle = \langle y^*, x \rangle, x \in D(A) \right\}, \quad A^* x^* = y^*.$$

Definição 1.3.4 *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Um operador $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ é simétrico se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$; isto é $\langle Ax\,,\, y\rangle = \langle x\,,\, Ay\rangle$ para todo $x, y \in D(A)$.*

Definição 1.3.5 *Sejam H um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(H)$ um operador densamente definido em H. Suponha que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D(A)$. Diz-se que o operador A é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Ax, x\rangle \geq a \langle x, x\rangle, \forall x \in D(A)$.*

Definição 1.3.6 *Sejam H um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(H)$, com $D(A)$ denso em H. O operador A é chamado de autoadjunto quando $D(A) = D(A^*)$ e $Ax = A^*x$ para $\forall x \in D(A)$, isto é, $A = A^*$.*

Teorema 1.3.7 *Sejam H um espaço de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ e $D(A)$ denso em H, então seu adjunto A^* é um operador fechado.*

Definição 1.3.8 *Dizemos que $A \in \mathcal{L}(X)$ é um operador setorial se é fechado, densamente definido e se existem $\theta \in \left(0\,,\, \frac{\pi}{2}\right)$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$, tais que o setor*

$$S_{a\,,\,\theta} = \left\{ \lambda \,\middle|\, \theta \leq |\, arg(\lambda - a)\,| \leq \pi,\ \lambda \neq a \right\}$$

está no conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, e

$$\|\,(\,\lambda - A\,)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\,\lambda - a\,|}\,,\ \textit{para todo}\ \lambda \in S_{a\,,\,\theta}.$$

A seguir temos 2 exemplos de operadores setoriais (ver [11]):

Exemplo 1.3.9 *Se A é um operador linear limitado em um espaço de Banach, então A é um operador setorial.*

Exemplo 1.3.10 *Se A é um operador densamente definido autoadjunto em um espaço de Hilbert, e se A é limitado inferiormente, então A é um operador setorial.*

Lema 1.3.11 *Seja A um operador setorial com $\|\,(\lambda - A)^{-1}\,\| \leq \dfrac{M}{|\,\lambda - a\,|}$ para todo λ no setor*

$$S_{a\,,\,\phi_0} = \left\{ \lambda \,\middle|\, \phi_o \leq arg(\lambda - a) \leq \pi\,,\ \lambda \neq a \right\},$$

para algum $a \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \phi_0 \leq \pi/2$. Suponhamos adicionalmente que B é um operador linear com $D(B) \supset D(A)$ e $\|\,Bx - Ax\,\| \leq N\|\,Ax\,\| + K\|\,x\,\|$, para todo $x \in D(A)$, onde K e N são constantes positivas com

$$N \leq \frac{1}{4(1 + LM)}\,, \quad K \leq \frac{\sqrt{5}}{20M}\,\frac{\sqrt{2}L - 1}{L^2 - 1},$$

para algum $L > 1$.

Então B é um operador setorial. Mais precisamente, se

$$b = \frac{L^2}{L^2-1}a - \frac{\sqrt{2}L}{L^2-1}|\,a\,|\,,\ \ \phi = \max\left\{\phi_0\,,\ \frac{\pi}{4}\right\}\ \ e\ \ M' = 2M\sqrt{5}$$

então

$$\|\,(\lambda - B)^{-1}\,\| \le \frac{M'}{|\,\lambda - b\,|}\,,$$

no setor $S_{b\,,\phi} = \left\{\,\lambda\,\middle|\,\phi \le |\,arg(\lambda - b)\,| \le \pi\ \ \lambda \neq b\,\right\}$.

Demonstração: Veja [1], Lema 3.1.

Definição 1.3.12 *Um semigrupo analítico sob um espaço de Banach X é uma família de operadores lineares contínuos sob X,* $\{\,T(t)\,\}_{t\geq 0}$*, satisfazendo:*

(i) $T(0) = I$, $T(t)T(s) = T(t+s)$ *para* $t \geq 0, s \geq 0$*;*

(ii) $T(t)x \to x$ *quando* $t \to 0^+$*, para cada* $x \in X$*;*

(iii) $t \to T(t)x$ *é analítico real sob* $0 < t < \infty$ *para cada* $x \in X$.

O gerador infinitesimal L deste semigrupo é definido por $Lx = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(\,T(t)x - x\,\Big)$*, e seu domínio* $D(L)$ *consiste de todo* $x \in X$ *para o qual este limite (em X) existe.*

Teorema 1.3.13 *Se A é um operador setorial, então* $-A$ *é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico* $\left\{\,e^{-tA}\,\right\}_{t\geq 0}$*, onde*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\,,$$

onde Γ *é uma curva em* $\rho(-A)$ *com* $arg\lambda \to \pm\theta$ *quando* $|\,\lambda\,| \to \infty$ *para algum* θ *em* $(\pi/2\,,\ \pi)$.

Além disso, e^{-At} *pode ser continuamente estendido a um setor* $\{\,z \neq 0 : |\,arg\,z\,| < \delta\,\}$ *contendo o eixo real positivo, e se* $Re\,\sigma(A) > a$*, isto é, se* $Re\,\lambda > a$ *sempre que* $\lambda \in \sigma(A)$*, onde* $\sigma(A)$ *é o resolvente de A. Então para* $t > 0$

$$\|\,e^{-At}\,\| \le Ce^{-at}\ \ ,\ \ \|\,Ae^{-At}\,\| \le \frac{C}{t}e^{-at}$$

para alguma constante C positiva. E ainda

$$\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At}\,,\ \ para\ \ \ t > 0.$$

Demonstração: Veja [11].

Observação 1.3.14 *A recíproca do teorema acima é verdadeira, ou seja, se* $-A$ *gera um semigrupo analítico, então A é setorial.*

Teorema 1.3.15 *Suponha que A seja como no Lema 1.3.11,* Λ *um espaço topológico e* $\{\,A_\gamma\,\}_{\gamma\in\Lambda}$ *uma família de operadores em X com* $A_{\gamma_0} = A$ *satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$D(A_\gamma) \supset D(A)$, para todo $\gamma \in \Lambda$;*

2. *$\| A_\gamma x - Ax \| \leq W(\gamma)\| Ax \| + K(\gamma)\| x \|$ para todo $x \in D(A)$, onde $K(\gamma)$ e $W(\gamma)$ são funções positivas com $\lim\limits_{\gamma \longrightarrow \gamma_0} W(\gamma) = 0$ e $\lim\limits_{\gamma \longrightarrow \gamma_0} K(\gamma) = 0$.*

Então, existe uma vizinhança V de γ_0 tal que A_γ é setorial se $\gamma \in V$ e a família de semigrupos (lineares) e^{-tA_γ} safisfaz:

$$\| e^{-tA_\gamma} - e^{-tA} \| \leq C(\gamma) e^{-bt},$$
$$\| A(e^{-tA_\gamma} - e^{-tA}) \| \leq C(\gamma)\frac{1}{t} e^{-bt},$$
$$\| A^\alpha(e^{-tA_\gamma} - e^{-tA}) \| \leq C(\gamma)\frac{1}{t^\alpha} e^{-bt}, \ 0 < \alpha < 1,$$

para $t > 0$, onde b é como no Lema 1.3.11 e $C(\gamma) \longrightarrow 0$ quando $\gamma \longrightarrow \gamma_0$.

Demonstração: Veja [1].

Definição 1.3.16 *Para todo $x \in X$, a órbita positiva $\gamma^+(x)$ de um semigrupo $T(t)$ que passa por x é definida como $\gamma^+(x) = \{T(t)x\}_{t \geq 0}$. Uma órbita negativa que passa por x é uma função $\phi(-\infty, 0] \longrightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e para todo $s \leq 0$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leq t \leq -s$. Uma órbita completa que passa por x é uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e para todo $s \in \mathbb{R}$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $t \geq 0$.*

Definição 1.3.17 *Um conjunto $B \subset X$ atrai um conjunto $C \subset X$ sob a ação de $T(t)$ se $dist_H(T(t)C, B) \to 0$ quando $t \to \infty$, onde $dist_H(T(t)C, B) = \sup\limits_{x \in T(t)C} \inf\limits_{y \in B} d(x,y)$. Um conjunto $S \subset X$ é dito ser invariante se, para*

todo $x \in S$, existe uma órbita completa $\gamma(x)$ que passa por x tal que $\gamma(x) \subset S$.

Notemos que dizer que S é invariante é equivalente a $T(t)S = S$ para $t \geq 0$.

Definição 1.3.18 *Um semigrupo $T(t) : X \longrightarrow X$ é assintoticamente suave se, para todo conjunto não vazio, fechado e limitado $B \subset X$ para o qual $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.*

1.3.2 Potências Fracionárias de Operadores Setoriais

Definição 1.3.19 *Suponha que A é um operador setorial e $Re\,\sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, definimos a potência $-\alpha$ de A*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Teorema 1.3.20 *Se A é um operador setorial em X com $Re\,\sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado em X que é injetor e satisfaz $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ quando $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Além disso, para $0 < \alpha < 1$, temos*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

Demonstração: Veja [11].

Definição 1.3.21 *Seja A como no Teorema 1.3.20, definimos A^{α} como a inversa de $A^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ e $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$, onde $A^0 = I$ é a identidade em X, $D(A^{\alpha})$ é o domínio de A^{α} e $R(A^{-\alpha})$ é a imagem de $A^{-\alpha}$.*

Teorema 1.3.22 *Seja A um operador setorial com $Re\,\sigma(A) > \delta > 0$. Então para $\alpha \geq 0$, existe $C_{\alpha} < \infty$ tal que*

$$\| A^{\alpha} e^{-At} \| \leq C_{\alpha} t^{-\alpha} e^{-\delta t} \ \ para \ \ t > 0,$$

e se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^{\alpha})$,

$$\| (e^{-At} - 1)x \| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^{\alpha} \| A^{\alpha} x \|.$$

Além disso, C_{α} é limitado para α em todo intervalo compacto de $(0, \infty)$ e C_{α} é também limitado quando $\alpha \longrightarrow 0^{+}$.

Demonstração: Veja [11].

Definição 1.3.23 *Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, definimos para cada $\alpha \geq 0$*

$$X^{\alpha} = D(A_1^{\alpha}) \ \ com\ a\ norma\ do\ gráfico\,,$$

$$\| x \|_{\alpha} = \| A_1^{\alpha} x \|, \; x \in X^{\alpha}\,,$$

onde $A_1 = A + aI$ com a escolhido de modo que $Re\,\sigma(A_1) > 0$.

Teorema 1.3.24 *Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, então X^{α} é um espaço de Banach na norma $\| \cdot \|_{\alpha}$ para $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$, e para $\alpha \geq \beta \geq 0$, X^{α} é um subespaço denso de X^{β} com inclusão contínua. Se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$ é compacta quando $\alpha > \beta \geq 0$.*

Se A_1 e A_2 são operadores setoriais em X com o mesmo domínio e $Re\,\sigma(A_j) > 0$ para j=1,2, e se $(A_1 - A_2)A_1^{-\alpha}$ é um operador setorial para algum $\alpha < 1$, então com $X_j^{\beta} = D(A_j^{\beta})$ $(j = 1, 2)$, $X_1^{\beta} = X_2^{\beta}$ com normas equivalentes para $0 \leq \beta \leq 1$.

Stein em [22] mostra que se Ω tem fronteira Lipschitz, então é possível construir um operador extensão $E : C_c^m(\overline{\Omega}) \longrightarrow E_c^m(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $E(\phi)$ restrito à $\overline{\Omega}$ é ϕ, tal que para as normas de quaisquer dos espaços C^{υ} ou $W^{k,q}$ $(0 \leq \upsilon, k \leq m$ e $1 \leq q < \infty)$ existe uma constante $B > 0$ com

$$B^{-1} \| \phi \|_{\Omega} \leq \| E(\phi) \|_{\mathbb{R}^n} \leq \| \phi \|_{\Omega}\,.$$

Neste caso dizemos que Ω tem a propriedade de extensão de classe C^m.

Teorema 1.3.25 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado que possui a propriedade de extensão de classe C^m, $1 < p < \infty$ e A um operador setorial em $X = L^p(\Omega)$ com $D(A) = X^1 \subset W^{m,p}(\Omega)$ para algum $m \geq 1$. Então para $0 \leq \alpha \leq 1$, temos*

$$X^\alpha \subset W^{k,q}(\Omega) \quad \textit{quando} \quad k - \frac{n}{q} < m\alpha - \frac{n}{p}, \quad q \geq p,$$

$$X^\alpha \subset C^\nu(\Omega) \quad \textit{quando} \quad 0 \leq \nu < m\alpha - \frac{n}{p}.$$

Demonstração: Veja [11].

1.4 Problema Abstrato

Nesta seção veremos alguns resultados abstratos sobre existência e unicidade de solução para um problema abstrato, e existência e continuidade de atratores para semigrupos.

1.4.1 Existência Local e Unicidade de Soluções

Consideremos agora a equação de evolução abstrata

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + Ax = f(x)\,,\ t > t_0\,, \\ x(t_0) = x_0\,, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde A é um operador setorial em X e existe um $\alpha \in [0,1)$ tal que $f : X^\alpha \longrightarrow X$ é localmente Lipschitz contínua, isto é, f é contínua e, para todo conjunto limitado U em X^α, existe uma constante K_U tal que

$$\| f(u) - f(v) \| \leq K_U \| u - v \|_\alpha \quad \text{para} \quad u, v \in U\,.$$

Definição 1.4.1 *Uma solução de (1.6) em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $x : [t_0, t_1) \longrightarrow X^\alpha$, $x(t_0) = x_0$, tal que $f(x(\cdot)) : [t_0, t_1) \longrightarrow X$ é contínua, $x(t) \in D(A)$, e x satisfaz (1.6) em (t_0, t_1).*

Lema 1.4.2 *As soluções de (1.6) coincidem com as soluções da equação integral*

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(x(s))\, ds \quad , t_0 \leq t < t_1\,,$$

para os quais $x : [t_0, t_1) \longrightarrow X^\alpha$ e $f(x(\cdot)) : [t_0, t_1) \longrightarrow X$ são contínuas.

Demonstração: Veja [11].

Teorema 1.4.3 *Sejam A um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$ e $f : U \longrightarrow X$ aplicação localmente Lipschitz contínua em x. Então para qualquer $(\,t_0, x_0\,) \in U$ existe $T = T(t_0, x_0) > 0$ tal que (1.6) tem uma única solução x em $(\,t_0, t_0 + T\,)$ com valor inicial $x(t_0) = x_0$.*

Demonstração: Veja [11].

Definição 1.4.4 *Se x é uma solução de (1.6) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, então não existe solução de (1.6) em (t_0, t_2) se $t_2 > t_1$.*

Teorema 1.4.5 *Sejam A e f como no Teorema 1.4.3, e suponhamos adicionalmente que para todo conjunto limitado e fechado $B \subset U$, a imagem de $f(B)$ é limitada em X. Se x é uma solução de (1.6) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, então $t_1 = +\infty$ ou existe uma sequência $t_n \to t_1$- quando $n \to +\infty$ tal que $(t_n, x(t_n)) \to \partial U$.*

Demonstração: Veja [11].

Teorema 1.4.6 *Sejam A e f como no Teorema 1.4.3, e assumimos também que A tem resolvente compacto e f leva todo conjunto $\mathbb{R}^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ com B fechado e limitado, em conjuntos limitados de X. Se $x(t; t_0, x_0)$ é uma solução de (1.6) em (t_0, ∞) com $\| x(t; t_0, x_0) \|_\alpha$ limitada quando $t \to +\infty$, então $\{ x(t; t_0, x_0) \}_{t > t_0}$ está em um conjunto compacto em X^α.*

Demonstração: Veja [11].

1.4.2 Atratores Globais e Sistemas Gradientes

Definição 1.4.7 *Para um semigrupo $\left\{T(t)\right\}_{t \geq 0}$ de classe C^r com $r \geq 0$, um conjunto compacto invariante $\mathcal{A}$ é dito ser um conjunto compacto invariante maximal se todo conjunto invariante compacto do semigrupo pertence a $\mathcal{A}$. Um conjunto invariante $\mathcal{A}$ é dito ser um atrator global se $\mathcal{A}$ é um conjunto compacto invariante maximal que atrai cada conjunto limitado $B \subset X$.*

Definição 1.4.8 *Um ponto de equilíbrio para um semigrupo $\left\{T(t)\right\}_{t \geq 0}$ de classe C^r com $r \geq 0$, é um ponto $x \in X$ tal que $T(t)x = x$ para $t \geq 0$. Um ponto de equilíbrio é dito ser hiperbólico se o espectro $\sigma(DT(t)(x))$ não intercepta o círculo unitário com centro na origem em $\mathbb{C}$.*

Definição 1.4.9 *Um semigrupo fortemente contínuo $T(t) : X \longrightarrow X, t \geq 0$, de classe C^r com $r \geq 1$, é dito ser um sistema gradiente se:*

(i) *Cada órbita positiva limitada é pré-compacta.*

(ii) *Existe uma função de Lyapunov para $T(t)$, isto é, existe uma função contínua $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

(ii_1) *$V(x)$ é limitada inferiormente;*

(ii_2) *$V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$;*

(ii_3) *$V(T(t)x)$ é decrescente em t para cada $x \in X$;*

(ii_4) Se x é tal que $T(t)x$ está definido para $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para $t \in \mathbb{R}$, então x é um ponto de equilíbrio.

Teorema 1.4.10 *Se $\left\{T(t)\right\}_{t\geq 0}$ é um sistema gradiente, assintoticamente suave e o conjunto de equilíbrios E é limitado, então existe um atrator global $\mathcal{A}$ para $T(t)$ e $\mathcal{A} = W^u(E) = \left\{y \in X : T(-t)y \text{ está definido para } t \geq 0 \text{ e } T(-t)y \to E \text{ quando } t \to \infty\right\}$. Se X é um espaço de Banach, então $\mathcal{A}$ é conexo. Se, além disso, cada elemento de E é hiperbólico, então E é um conjunto finito e*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x\in E} W^u(x).$$

Demonstração: Veja [12].

Definição 1.4.11 *Uma família de subconjuntos $\mathcal{A}_\lambda$ de um espaço métrico (X, d) é dita semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$, se $dist_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_0$, onde $dist_H(A, B) = \sup_{x\in A} d(x, B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y)$ e semicontínua inferiormente se $dist_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_0$.*

Lema 1.4.12 *Sejam Y um espaço métrico, Λ um aberto de Y, $\{-A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de operadores em um espaço de Banach X satisfazendo as condições do Teorema 1.3.15 em $\lambda = \lambda_0$, U um aberto em $\mathbb{R}^+ \times X^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, e $f : U \times \Lambda \to X$ Hölder contínua em t. Suponha adicionalmente que para todo subconjunto limitado $D \subset U$, f é contínua em $\lambda = \lambda_0$ uniformemente para $(t, x) \in D$, e existe uma constante $L = L(D)$, tal que $\| f(t, x, \lambda) - f(t, y, \lambda) \| \leq L \| x - y \|_\alpha$ para $(t, x), (t, y) \in D$ e $\lambda \in \Lambda$. Suponha além disso que as soluções $x(t, x_0, \lambda)$ do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_\lambda x + f(t, x, \lambda)\,,\ t > t_0\,, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

existem e permanecem em um subconjunto limitado de X^α quando x_0 varia em um subconjunto limitado de X^α, λ em uma vizinhança de λ_0 e $t_0 \leq t \leq T$.

Então a função $\lambda \mapsto x(t, x_0, \lambda) \in X^\alpha$ é contínua em λ_0 uniformemente para x_0 em um subconjunto limitado de X^α e $t_0 \leq t \leq T$.

Demonstração: Veja [1], Lema 3.7

Teorema 1.4.13 *Sejam Y um espaço métrico, Λ um aberto em Y, $\{-A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de operadores em um espaço de Banach X satisfazendo as condições do Teorema 1.3.15 em $\lambda = \lambda_0$ com $b > 0$, U um aberto em X^α, $0 \leq \alpha < 1$, e $f : U \times \Lambda \to X$ satisfazendo as condições do Lema 1.4.12. Seja $T(t, \lambda)(x_0)$ o semigrupo não linear em X^α dado pelas soluções do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_\lambda x + f(x, \lambda)\,,\ t > t_0\,, \\ x(t_0) = x_0\,. \end{cases}$$

Suponha também que, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe um atrator compacto global $\mathcal{A}_\lambda$ para $T(t,\lambda)(x)$, a união $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ é um conjunto limitado em X^α e f leva essa união em um conjunto limitado de X. Então a família $\mathcal{A}_\lambda$ é semicontínua superiormente.

Demonstração: Veja [1].

Teorema 1.4.14 *Seja X um espaço de Banach, para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0^*$, seja $\left\{ T_\epsilon(t) \right\}_{t\geq 0}$ uma família de semigrupos sobre X. Suponhamos que as seguintes hipóteses são válidas sobre $T_\epsilon(t)$, para $\epsilon \in [0\,,\, \epsilon_0^*]$:*

(h1) *$T_0(t)$ é um C^1-sistema gradiente, assintoticamente suave e órbitas de conjuntos limitados são limitados.*

(h2) *O conjunto E_0 de equilíbrios de $T_0(t)$ é limitado em X.*

(h3) *Cada elemento de E_0 é hiperbólico.*

(h4) *Para $\epsilon \neq 0$, $T_\epsilon(t)$ é um C^1-semigrupo e existe uma vizinhança U_0 e $\mathcal{A}_0$ que é independente de ϵ, tal que $T_\epsilon(t)$ tem um atrator local $\mathcal{A}_\epsilon$ que atrai U_0.*

(h5) *Se E_ϵ é o conjunto de equilíbrios de $T_\epsilon(t)$, então existe uma vizinhança W_0 de E_0 tal que $W_0 \cap E_\epsilon = \left\{ \phi_{1\,,\epsilon}\,, \ldots, \phi_{N\,,\epsilon} \right\}$, onde cada $\phi_{j\,,\epsilon}$, $1 \leq j \leq N$, é hiperbólico e $\phi_{j\,,\epsilon} \longrightarrow \phi_j$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$.*

(h6) *$dist_H(W^u_{loc}(\phi_j)\,,\, W^u_{loc\,,\epsilon}(\phi_{j\,,\epsilon})) \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$.*

(h7) *Para quaisquer $\eta > 0$, $t_0 > 0$, τ_0, existem δ^* e $\epsilon_0^* > 0$ tal que*

$$\| T_\epsilon(t) y_\epsilon - T_0(t) x \|_X < \eta \;\; \text{para} \;\; t_0 \leq t \leq \tau_0\,,$$

desde que $x \in \mathcal{A}_0$, $y_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$ e $\| y_\epsilon - x \|_X \leq \delta^*$.

Então a família de conjuntos $\left\{ \mathcal{A}_\epsilon, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \right\}$ é semicontínua inferiormente em $\epsilon = 0$.

Demonstração: Veja [12].

Observação 1.4.15 *Uma vez que $T_0(t)$ satisfaz $(h1)$ e $(h2)$, o atrator global $\mathcal{A}_0$ existe. Além disso, $(h3)$ implica que $E_0 = \left\{ \phi_1, \ldots, \phi_N \right\}$ é um conjunto finito e*

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{\phi_j \in E_0} W^u(\phi_j)\,,$$

onde $W^u(\phi_j)$ é a variedade instável de ϕ_j.

1.5 Existência e Continuidade de Variedades Locais

Nesta seção abordaremos dois resultados abstratos sobre existência e continuidade das variedades estáveis e instáveis, próximas de um equilíbrio de um problema parabólico abstrato, cujas demonstrações podem ser encontrados em [1]. Utilizaremos o resultado principal desta seção para provarmos a continuidade inferior dos atratores do nosso problema. Vamos primeiramente introduzir em que contexto o problema parabólico abstrato está definido.

Sejam Λ um espaço topológico, X um espaço de Banach e $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma família de operadores em X com $A_{\gamma_0} = A$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.3.15. E consideremos o seguinte problema abstrato:

$$\begin{cases} v_t + A_\gamma v = f(v,\gamma)\,,\ t > 0\,, \\ v(0) = v_0\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

E seja também V uma vizinhança de γ_0 em Λ tal que $e(\gamma)$ é um equilíbrio hiperbólico de (1.7), para todo $\gamma \in V$ com $e(\gamma) \in X^\alpha$ contínuo em γ_0. Suponhamos adicionalmente que a função

$$f : X^\alpha \times V = D(A^\alpha_{\gamma_0}) \times V \longrightarrow X$$

é contínua, C^1 na primeira variável v com f_v contínua em γ_0, satisfazendo:

$$f(e(\gamma) + z\,,\,\gamma) = A_\gamma e(\gamma) + f_v(e(\gamma)\,,\,\gamma)z + r(z\,,\,\gamma)\,,$$

para todo $\gamma \in V$, com $r(0,\gamma) = 0$, $\sup\limits_{\|z\|_\alpha\leq\rho} \|r(z,\gamma_0) - r(z,\gamma)\| \leq C_{\gamma_0}(\gamma)$, $C_{\gamma_0}(\gamma) \longrightarrow 0$, quando $\gamma \longrightarrow \gamma_0$ em V, $\|r(z_1\,,\,\gamma) - r(z_2\,,\,\gamma)\| \leq k(\rho)\|z_1 - z_2\|_\alpha$, para $\|z_1\|_\alpha \leq \rho$, $\|z_2\|_\alpha \leq \rho$, com $k(\rho) \longrightarrow 0$ quando $\rho \longrightarrow 0^+$ e $k(\cdot)$ é não decrescente.

Uma vez que $e(\gamma)$ é um equilíbrio hiperbólico de (1.7), temos que $L(\gamma) = A_\gamma - f_v(e(\gamma)\,,\,\gamma)$ é um isomorfismo para todo $\gamma \in V$. É possível decompor X em subespaços $X_1 = X_1(\gamma)$ e $X_2 = X_2(\gamma)$ correspondentes aos conjuntos espectrais $\sigma_1 = \sigma(L(\gamma)) \cap \{Re\,\lambda < 0\}$ e $\sigma_2 = \sigma(L(\gamma)) \cap \{Re\,\lambda > 0\}$. Sejam $E_1 = E_1(\gamma)$ e $E_2 = E_2(\gamma)$ as projeções sobre X_1 e X_2, respectivamente.

As hipóteses sobre A_γ e f implicam a existência de funções contínuas positivas e reais $\omega(\gamma)$ e $\delta(\gamma)$ definidas em V, com $\lim\limits_{\gamma\longrightarrow\gamma_0} \omega(\gamma) = \lim\limits_{\gamma\longrightarrow\gamma_0} \delta(\gamma) = 0$, tal que para todo $\gamma \in V$, $L(\gamma)$ é um operador setorial em X e para todo $u \in D(A_{\gamma_0})$

$$\|(L(\gamma_0) - L(\gamma))u\| \leq \omega(\gamma)\|A_{\gamma_0}u\| + \delta(\gamma)\|u\| \leq \omega(\gamma)\|L_{\gamma_0}u\| + \delta(\gamma)\|u\|\,.$$

Dadas as condições sobre os operadores do problema abstrato parabólico, vamos agora enunciar dois resultados demonstrados em [1]:

Lema 1.5.1 *Sejam X um espaço de Banach, Λ um espaço topológico e $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma família de operadores em X satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.3.15. Então, para $i = 1, 2$, existe uma vizinhança V de γ_0 e* *uma família de isomorfismos* $\{T_i(\gamma)\}_{\gamma\in V}$ *em* X *com* $T_i(\gamma)X_i(\gamma_0) = X_i(\gamma)$, $T_i(\gamma_0) = 1$, *tal que a aplicação* $\gamma \longmapsto T_i(\gamma) \in \mathcal{L}(X)$ *é contínua em* γ_0.

Demonstração: Veja [1].

Teorema 1.5.2 *Sejam* A_γ, f *e* $e(\gamma)$ *satisfazendo as condições dadas nesta seção, para* $\gamma \in V$. *Então, existem constantes* $\rho > 0$ *e* $M \geq 1$ *tais que para todo* $\gamma \in V$, *temos:*

1. *Existe uma variedade local estável de* $e(\gamma)$

$$W^s_{loc}(e(\gamma)) = \left\{ e(\gamma) + z_0 \in X^\alpha \, ; \, \| E_2(\gamma_0)z_0 \|_\alpha \leq \frac{\rho}{2M} \, , \, \| z(t, t_0, z_0, \gamma) \|_\alpha \leq \rho \ \ para \ \ t \geq t_0 \right\},$$

   onde $z(t, t_0, z_0, \gamma)$ *é a solução da equação*

$$z_t + L(\gamma)z = r(z, \gamma) \ \ para \ \ t \geq t_0 \, , \tag{1.8}$$

   com valor inicial z_0. *Quando* $z_0 + e(\gamma) \in W^s_{loc}(e(\gamma))$, $\| z(t, t_0, z_0, \gamma) \|_\alpha \longrightarrow 0$ *quando* $t \longrightarrow \infty$.

2. *Existe uma variedade local instável de* $e(\gamma)$

$$W^u_{loc}(e(\gamma)) = \left\{ e(\gamma) + z_0 \in X^\alpha \, ; \, \| E_1(\gamma_0)z_0 \|_\alpha \leq \frac{\rho}{2M} \, , \, \| z(t, t_0, z_0, \gamma) \|_\alpha \leq \rho \ \ para \ \ t \leq t_0 \right\},$$

   onde $z(t, t_0, z_0, \gamma)$ *é a solução da equação (1.8) em* $(-\infty \, , \, t_0)$, *com valor inicial* z_0. *Quando* $z_0 + e(\gamma) \in W^u_{loc}(e(\gamma))$, $\| z(t, t_0, z_0, \gamma) \|_\alpha \longrightarrow 0$ *quando* $t \longrightarrow -\infty$.

3. *Se* $dist_H(O, Q) = \sup\limits_{o \in O} \inf\limits_{q \in Q} \| q - o \|_\alpha$, *para* $O, Q \subset X^\alpha$, *então*

$$dist_H(W^s_{loc}(e(\gamma)) \, , \, W^s_{loc}(e(\gamma_0))) \ , \ \ dist_H(W^s_{loc}(e(\gamma_0)) \, , \, W^s_{loc}(e(\gamma))) \, ,$$

$$dist_H(W^u_{loc}(e(\gamma)) \, , \, W^u_{loc}(e(\gamma_0))) \ e \ \ dist_H(W^u_{loc}(e(\gamma_0)) \, , \, W^u_{loc}(e(\gamma)))$$

   tendem a zero quando $\gamma \longrightarrow \gamma_0$ *em* V.

Demonstração: Veja [1].

Capítulo 2

Setorialidade de uma Família de Operadores Lineares

Neste capítulo consideraremos o operador linear $(-\Delta + aI) : D(-\Delta + aI) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ definido em uma região fixa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira regular por partes e $a \in \mathbb{R}^+$. Iremos perturbar a região fixa Ω por uma família de perturbações que convergem para a identidade na norma C^1 e, utilizando as técnicas desenvolvidas por Henry em [7], levaremos a perturbação para o operador e a região Ω ficará fixa. Nosso objetivo será mostrar que a família de operadores obtida é setorial para uma escala de espaços de Banach.

2.1 Perturbação do Domínio

O domínio no qual trabalharemos será o quadrado $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$, mas os argumentos usados podem ser generalizados para domínios mais gerais, como por exemplo, domínios convexos de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz. Sabemos que Ω não é suave mas tem fronteira Lipschitz, logo utilizaremos os resultados abordados no Capítulo 1. A perturbação do domínio que utilizaremos será dada por uma família de difeomorfismos do plano definida por:

$$\begin{array}{rccc} h_\epsilon : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, x_2 + x_2\,\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)) \end{array} \tag{2.1}$$

com $0 < \alpha < 1$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Ver Figura **??**, onde $h_\epsilon(\Omega)$ será denotado por Ω_{h_ϵ}.

Novamente, escolhemos este tipo de perturbação por simplicidade, mas muito do que se segue pode ser generalizado para perturbações mais gerais.

Seja $[h_\epsilon]_x = \left[\dfrac{\partial (h_\epsilon)_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^{2}$ a matriz jacobiana de h_ϵ, cuja expressão é dada por:

$$[h_\epsilon]_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2\,\epsilon^{1-\alpha} cos(x_1/\epsilon^\alpha) & 1+\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

e $\left| Jh_\epsilon(x) \right| = 1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha) > 0$ para ϵ suficientemente pequeno. A matriz inversa transposta de (2.2) é dada por:

$$[h_\epsilon^{-1}]_x^T = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-x_2\,\epsilon^{1-\alpha} cos(x_1/\epsilon^\alpha)}{1+\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Denotaremos por $b_{ij}(x)$ as entradas da matriz (2.3), e por

$$\mathrm{Diff}^1(\Omega) = \left\{ h_\epsilon \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \,\middle|\, h_\epsilon \text{ é injetora e } \frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|} \text{ é limitado em } \Omega \right\}$$

e $i_\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação inclusão. Denotaremos de agora em diante $C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ apenas por $C^1(\Omega)$.

Temos o seguinte resultado sobre a perturbação h_ϵ:

Lema 2.1.1 *Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação h_ϵ definida em (2.1) pertence à* $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$ *e* $\| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)} < \delta$, *para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é fácil ver que $h_\epsilon \in C^1(\Omega)$, é uma aplicação injetora e $\dfrac{1}{|Jh_\epsilon(x)|} = \dfrac{1}{|1+\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)|}$ é limitado para $x = (x_1, x_2) \in \Omega$.

Vamos mostrar agora que h_ϵ converge para i_Ω na norma $C^1(\Omega)$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Sabemos que $\| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)} = \max\limits_{0 \le j \le 1} \sup\limits_{(x_1,x_2)\in\Omega} \left| D^j(h_\epsilon - i_\Omega)(x_1,x_2) \right|$ e

(i) $\left| D^0(h_\epsilon - i_\Omega)(x_1,x_2) \right| = \left| x_2\,\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha) \right|$,

(ii) $\left| D^1(h_\epsilon - i_\Omega)(x_1,x_2) \right| = \left(\sum\limits_{|\alpha|=1} \left| D^\alpha(h_\epsilon - i_\Omega)(x_1,x_2) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(x_2^2\,\epsilon^{2-2\alpha} cos^2(x_1/\epsilon^\alpha) + \epsilon^2 sen^2(x_1/\epsilon^\alpha) \right)^{\frac{1}{2}}$,

logo $\| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)} = \max \left\{ \sup\limits_{(x_1,x_2)\in\Omega} \left| x_2\,\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha) \right|, \sup\limits_{(x_1,x_2)\in\Omega} \left(x_2^2\,\epsilon^{2-2\alpha} cos^2(x_1/\epsilon^\alpha) + \epsilon^2 sen^2(x_1/\epsilon^\alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$, portanto pela expressão acima e usando o fato de que $0 < \alpha < 1$, concluímos que $\| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)} \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. ∎

Observação 2.1.2 *Notemos que a convergência acima, na norma $C^1(\Omega)$ se deve ao fato de α ser menor que 1. Se quiséssemos a convergência na norma $C^2(\Omega)$ seria necessário impor que α fosse menor que $\dfrac{1}{2}$.*

Temos que $h_\epsilon : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um mergulho diferenciável, isto é, um difeomorfismo sobre sua imagem $h_\epsilon(\Omega)$ de ordem 1. Definimos a aplicação composição (ou o pull-back) h_ϵ^* de h_ϵ por

$$(h_\epsilon^* u)(x) = (u \circ h_\epsilon)(x) = u(h_\epsilon(x)), \; x \in \Omega,$$

onde u é uma função definida em $h_\epsilon(\Omega)$ e que denotaremos por Ω_{h_ϵ}.

Lema 2.1.3 *Dados $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e h_ϵ definida em (2.1), então a aplicação*

$$\begin{array}{rcccl} h_\epsilon^* & : & H^s(\Omega_{h_\epsilon}) & \longrightarrow & H^s(\Omega) \\ & & u & \longmapsto & u \circ h_\epsilon \end{array}$$

é um isomorfismo com inversa $h_\epsilon^{*-1} = (h_\epsilon^{-1})^*$, para $\frac{1}{2} < s \leq 1$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $h_\epsilon : \Omega \longrightarrow \Omega_{h_\epsilon}$ mergulho de ordem 1, temos que h_ϵ^* é claramente linear, injetora e sobrejetora. Henry em [7] mostra que h_ϵ^* é um isomorfismo no caso em que s é inteiro, logo apenas nos resta mostrar no caso $\frac{1}{2} < s < 1$. Utilizando a Definição 1.1.8 para a norma em $H^s(\Omega)$ podemos concluir que h_ϵ^* é limitado, de fato,

$$\begin{aligned} \| h_\epsilon^* u \|_{H^s(\Omega)} &:= \left\{ \int_\Omega |(u \circ h_\epsilon)(x)|^2 dx + \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{\left|(u \circ h_\epsilon)(x) - (u \circ h_\epsilon)(y)\right|^2}{\| x - y \|^{2+2s}} dx\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u(r)|^2 |Jh_\epsilon^{-1}(r)|\, dr + \iint_{\Omega_{h_\epsilon} \times \Omega_{h_\epsilon}} \frac{\left|u(r) - u(w)\right|^2}{\| h_\epsilon^{-1}(r) - h_\epsilon^{-1}(w) \|^{2+2s}} |Jh_\epsilon^{-1}(r)|\, |Jh_\epsilon^{-1}(w)|\, dr\, dw \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u(r)|^2 |Jh_\epsilon^{-1}(r)|\, dr + \iint_{\Omega_{h_\epsilon} \times \Omega_{h_\epsilon}} \frac{\left|u(r) - u(w)\right|^2}{\| r - w \|^{2+2s}} \frac{\| r - w \|^{2+2s}}{\|h_\epsilon^{-1}(r) - h_\epsilon^{-1}(w)\|^{2+2s}} |Jh_\epsilon^{-1}(r)||Jh_\epsilon^{-1}(w)| dr dw \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Note que h_ϵ é diferenciável e para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, e denotando

$$h_\epsilon(x) = h_\epsilon(x_1, x_2) = ((h_\epsilon)_1(x_1, x_2), (h_\epsilon)_2(x_1, x_2)),$$

temos que $\left| \frac{\partial (h_\epsilon)_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$ para todo $1 \leq i, j \leq 2$ e $x \in \Omega$, então $\| h_\epsilon(x) - h_\epsilon(y) \| \leq 2M \| x - y \|$. Obtemos então a seguinte estimativa:

$$\frac{\| r - w \|^{2+2s}}{\| h_\epsilon^{-1}(r) - h_\epsilon^{-1}(w) \|^{2+2s}} \leq \frac{\left(2M \| h_\epsilon^{-1}(r) - h_\epsilon^{-1}(w) \| \right)^{2+2s}}{\| h_\epsilon^{-1}(r) - h_\epsilon^{-1}(w) \|^{2+2s}} \leq (2M)^{2+2s},$$

e além disso, usando o fato de $|Jh_\epsilon^{-1}|$ ser limitado para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, teremos:

$$\| h_\epsilon^* u \|_{H^s(\Omega)} \leq K \left\{ \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u(r)|^2 dr + \iint_{\Omega_{h_\epsilon} \times \Omega_{h_\epsilon}} \frac{\left|u(r) - u(w)\right|^2}{|r - w|^{2+2s}} dr\, dw \right\}^{\frac{1}{2}} \leq K \| u \|_{H^s(\Omega_{h_\epsilon})}.$$

Logo $\| h_\epsilon^* u \|_{H^s(\Omega)} = \| u \circ h_\epsilon \|_{H^s(\Omega)} \leq K \| u \|_{H^s(\Omega_{h_\epsilon})}$, onde K é uma constante que depende de $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$. Portanto h_ϵ^* é um isomorfismo já que $h_\epsilon^{*-1} = (h_\epsilon^{-1})^*$. ■

2.2 Perturbação do Contorno para o Laplaciano

Nosso objetivo nesta seção é obter uma expressão para o operador linear $(\Delta - aI)$ envolvido no problema (1) e sua condição de fronteira, quando o domínio está variando e $a \in \mathbb{R}^+$. Para tanto, utilizaremos as técnicas desenvolvidas por Henry em [7] e descritas brevemente no Capítulo 1.

Seja $\Delta_{\Omega_{h_\epsilon}}$ o operador Laplaciano na região $\Omega_{h_\epsilon} = h_\epsilon(\Omega)$. Podemos considerar o operador diferencial $h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1}$ definido na região fixa Ω. Mais explicitamente, se $u \in C^2(\Omega_{h_\epsilon})$ e $x \in \Omega$, então

$$\Big[(h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1}) u \Big](x) = \Big[\Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} (u \circ h_\epsilon^{-1}) \Big] (h_\epsilon(x)) .$$

Precisamos expressar os coeficientes de $h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1}$ em termos de h_ϵ definida em (2.1). Para isso, denotemos

$$h_\epsilon(x) = h_\epsilon(x_1, x_2) = ((h_\epsilon)_1(x), (h_\epsilon)_2(x)) = (y_1, y_2) = y .$$

Para $i = 1, 2$ temos:

$$\begin{aligned}
\left(h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial y_i} h_\epsilon^{*-1}(u) \right)(x) &= \frac{\partial}{\partial y_i} (u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}(h_\epsilon^{-1}(y)) \frac{\partial (h_\epsilon)_1^{-1}(y)}{\partial y_i}(y) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(h_\epsilon^{-1}(y)) \frac{\partial (h_\epsilon)_2^{-1}(y)}{\partial y_i}(y) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \left[\left(\frac{\partial h_\epsilon}{\partial x_j} \right)^{-1} \right]_{j,i} (x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) ,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $b_{ij}(x)$ é a i, j entrada da matriz (2.3).

Além disso, temos a seguinte expressão para as derivadas de segunda ordem:

$$\left(h_\epsilon^* \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} h_\epsilon^{*-1}(u) \right)(x) = \sum_{k=1}^{2} b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(x) .$$

Logo, para $i = 1$ obtemos:

$$\begin{aligned}
h_\epsilon^* \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} h_\epsilon^{*-1}(u)(x) &= \sum_{k=1}^{2} b_{1k}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^{2} b_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(x) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + b_{12} \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} ,
\end{aligned}$$

e para $i = 2$

$$\begin{aligned}
h_\epsilon^* \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} h_\epsilon^{*-1}(u)(x) &= \sum_{k=1}^{2} b_{2k}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^{2} b_{2j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(x) \\
&= b_{22}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} .
\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned} h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1}(u)(x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \left(b_{12}^2 + b_{22}^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + b_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12}\frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} \\ &= div\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\, , \left(b_{12}^2 + b_{22}^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} - b_{12}\frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\,. \end{aligned}$$

Como iremos trabalhar com um problema com condição de fronteira de Neumann, é importante expressar a condição de fronteira em termos de h_ϵ. Seja então $N_{\Omega_{h_\epsilon}}$ a normal da região $h_\epsilon(\Omega) := \Omega_{h_\epsilon}$, queremos expressar em termos de h_ϵ a condição de fronteira de Neumann homogênea $h_\epsilon^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}} h_\epsilon^{*-1} = 0$ na região fixa Ω. Utilizando a expressão (2.4), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \left(h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}} h_\epsilon^{*-1} u\right)(x) &= \sum_{i=1}^{2}\left(h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial y_i} h_\epsilon^{*-1} u\right)(x)\left(N_{\Omega_{h_\epsilon}}\right)_i (h_\epsilon(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x))\left(N_{\Omega_{h_\epsilon}}\right)_i (h_\epsilon(x)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\left(N_{\Omega_{h_\epsilon}}\right)_i (h_\epsilon(x)) \\ &= N_{\Omega_{h_\epsilon}}(h_\epsilon(x)) \cdot (u_{x_1}(x) + b_{12}(x) u_{x_2}(x)\, , b_{22}(x) u_{x_2}(x))\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Henry em [7] exibe um modo de calcular $N_{\Omega_{h_\epsilon}}$ em função de N_Ω, que é dada pela expressão

$$h_\epsilon^* N_{\Omega_{h_\epsilon}}(x) = N_{\Omega_{h_\epsilon}}(h_\epsilon(x)) = \frac{[h_\epsilon^{-1}]_x^T N_\Omega(x)}{\| [h_\epsilon^{-1}]_x^T N_\Omega(x) \|}\,,$$

onde $\left[h_\epsilon^{-1}\right]_x^T$ é a matriz inversa transposta da matriz jacobiana $[h_\epsilon]_x = \left[\dfrac{\partial (h_\epsilon)_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^2$ e $\| \cdot \|$ é a norma Euclidiana. Logo,

$$N_{\Omega_{h_\epsilon}}(h_\epsilon(x)) = \frac{\left((N_\Omega(x))_1 + b_{12}(x)(N_\Omega(x))_2\, , b_{22}(x)(N_\Omega(x))_2\right)}{\| [h_\epsilon^{-1}]_x^T N_\Omega(x) \|}.$$

Então de (2.5) obtemos

$$\left(h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}} h_\epsilon^{*-1} u\right)(x) = \frac{(N_\Omega(x))_1 \left[u_{x_1}(x) + b_{12}(x) u_{x_2}(x)\right] + (N_\Omega(x))_2 \left[b_{12}(x) u_{x_1}(x) + \left(b_{12}^2(x) + b_{22}^2(x)\right) u_{x_2}(x)\right]}{\| [h_\epsilon^{-1}]_x^T N_\Omega(x) \|}.$$

Se considerarmos a condição de fronteira

$$\left(h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}} h_\epsilon^{*-1} u\right)(x) = 0\,,$$

teremos que ela é equivalente a condição

$$(N_\Omega(x))_1 \left[-u_{x_1}(x) - b_{12}(x) u_{x_2}(x) \right] + (N_\Omega(x))_2 \left[-b_{12}(x) u_{x_1}(x) - \left(b_{12}^2(x) + b_{22}^2(x)\right) u_{x_2}(x) \right] = 0\,.$$

Que também podemos reescrever como

$$\sum_{i,j=1}^{2} (N_\Omega(x))_i\,(c_{ij}D_j u) = 0 \text{ em } \partial\Omega\,,$$

onde

$$c_{11} = -1\,,\ c_{12} = c_{21} = -b_{12}\,,\ c_{22} = -(\,b_{12}^2 + b_{22}^2\,)\,. \tag{2.6}$$

2.3 Setorialidade dos Operadores Perturbados

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, h_ϵ definida em (2.1) e $a \in \mathbb{R}^+$, o operador

$$\left(-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} + aI\right) := \left(C_{h_\epsilon} + L_{h_\epsilon} + aI\right) : D\left(-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} + aI\right) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)\,, \tag{2.7}$$

com domínio

$$D\left(-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \;+\; aI\right) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \,\middle|\, \sum_{i,j=1}^{2} (N_\Omega(x))_i\,(c_{ij}D_j u) = 0\,,\ x \in \partial\Omega \right\} := H_N^2(\Omega) \tag{2.8}$$

é um operador setorial, onde os c_{ij} são dados como em (2.6) e os operadores C_{h_ϵ} e L_{h_ϵ} em $L^2(\Omega)$ são dados por:

$$C_{h_\epsilon} u := -div\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\,,\ b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \left(b_{12}^2 + b_{22}^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \tag{2.9}$$

e

$$L_{h_\epsilon} u := \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \tag{2.10}$$

com domínio dado como em (2.8). Então temos o seguinte resultado para o operador (2.9) na forma divergente:

Lema 2.3.1 *Dada h_ϵ definida em (2.1), o operador C_{h_ϵ} dado pela expressão em (2.9) e com domínio dado como em (2.8), é um operador fortemente elíptico para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração: Primeiro devemos escrever o operador C_{h_ϵ} na forma dada como em (1.1), obtendo então

$$C_{h_\epsilon} u = \sum_{i,j=1}^{2} D_i\,(c_{ij} D_j u)$$

com os c_{ij} dados como em (2.6).

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que $-\dfrac{1}{4} < b_{12} < \dfrac{1}{4}$ e $(b_{12}^2 + b_{22}^2) > \dfrac{1}{2}$. Então dado $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}\xi_i\xi_j &= -\xi_1^2 - 2b_{12}\xi_1\xi_2 - (b_{12}^2 + b_{22}^2)\xi_2^2 \\
&\leq -\frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}|\xi_1||\xi_2| - \frac{1}{2}\xi_2^2 \\
&= -\frac{1}{4}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \left(\frac{1}{4}\xi_1^2 - \frac{1}{2}|\xi_1||\xi_2| + \frac{1}{4}\xi_2^2\right) \\
&= -\frac{1}{4}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \left(\frac{1}{2}|\xi_1| - \frac{1}{2}|\xi_2|\right)^2 \\
&\leq -\frac{1}{4}(\xi_1^2 + \xi_2^2).
\end{aligned}$$

Portanto, existe $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}\xi_i\xi_j \leq -\alpha|\xi|^2$, logo para cada $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, o operador C_{h_ϵ} é um operador fortemente elíptico. ∎

Para mostrarmos que o operador definido em (2.7) com domínio dado em (2.8) é setorial, precisamos primeiro mostrar que $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é setorial. Inicialmente temos o seguinte resultado:

Lema 2.3.2 *Sejam $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, h_ϵ definida em (2.1) e $a \in \mathbb{R}^+$, definimos o operador*

$$(C_{h_\epsilon} + aI) : D(C_{h_\epsilon} + aI) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \tag{2.11}$$

onde

$$D(C_{h_\epsilon} + aI) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \,\middle|\, \sum_{i,j=1}^{2} (N_\Omega(x))_i\,(c_{ij}D_j u) = 0\,,\ x \in \partial\Omega \right\}, \tag{2.12}$$

I é o operador identidade em $L^2(\Omega)$ e C_{h_ϵ} é dado em (2.9). Então o operador $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é simétrico e limitado inferiormente em $L^2(\Omega)$.

Demonstração: Dados $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, h_ϵ definida em (2.1) e quaisquer $u, v \in D(C_{h_\epsilon} + aI)$, podemos escrever o operador C_{h_ϵ} na forma dada em (2.9), logo teremos:

$$\begin{aligned}
\left\langle C_{h_\epsilon}u + au\,,\, v\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega div\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\,,\, \left(b_{12}^2 + b_{22}^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot v\,dx + a\int_\Omega uv\,dx \\
&= -\int_\Omega div\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\,,\, \left(b_{12}^2 + b_{22}^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)v\right]dx \\
&\quad + \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\,,\, \left(b_{12}^2 + b_{22}^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot \nabla v\,dx + a\int_\Omega uv\,dx \\
&= -\int_{\partial\Omega}\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\,,\, \left(b_{12}^2 + b_{22}^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right]\cdot \nabla N_\Omega\,d\sigma(x) \\
&\quad - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2}(c_{ij}D_j u D_i v)\,dx + a\int_\Omega uv\,dx \\
&= \int_{\partial\Omega} v\left[\sum_{i,j=1}^{2}(N_\Omega(x))_i\,(c_{ij}D_j u)\right]d\sigma(x) - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2}(c_{ij}D_j u D_i v)\,dx + a\int_\Omega uv\,dx\,.
\end{aligned}$$

Como $u \in D(C_{h_\epsilon} + aI)$ e $c_{ij} = c_{ji}$ para quaisquer $i, j = 1, 2$, concluímos que

$$\begin{aligned} \left\langle C_{h_\epsilon} u + au \,,\, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} (c_{ij} D_j u D_i v)\, dx + a \int_\Omega uv\, dx \\ &= \left\langle u \,,\, C_{h_\epsilon} v + av \right\rangle_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

Portanto o operador $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é simétrico. Pelo Lema 2.3.1 sabemos que o operador C_{h_ϵ} é fortemente elíptico, logo podemos mostrar que ele é um operador limitado inferiormente, pois para $u \in D(C_{h_\epsilon} + aI)$ temos que:

$$\begin{aligned} \left\langle C_{h_\epsilon} u + au \,,\, u \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} D_i (c_{ij} D_j u) \cdot u\, dx + a \int_\Omega u^2\, dx \\ &= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} (c_{ij} D_j u D_i u)\, dx + a \int_\Omega u^2\, dx \\ &\geq \int_\Omega \alpha\, |\nabla u|^2\, dx + a \int_\Omega u^2\, dx . \end{aligned}$$

Como α e a são positivos, temos que $\left\langle C_{h_\epsilon} u + au \,,\, u \right\rangle_{L^2(\Omega)} \geq a \langle u \,,\, u \rangle_{L^2(\Omega)}$. Logo o operador $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é limitado inferiormente em $L^2(\Omega)$. ■

Teorema 2.3.3 *Seja $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$. Para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $f \in L^2(\Omega)$ e $a \in \mathbb{R}^+$, existe uma única $u \in H^2(\Omega)$ que é solução do problema*

$$\begin{cases} C_{h_\epsilon} u + au = f, \quad x \in \Omega \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} (N_\Omega(x))_i\, (c_{ij} D_j u) = 0, \;\; x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

onde o operador C_{h_ϵ} é dado em (2.9) e os c_{ij} são dados como em (2.6).

Demonstração: Temos que Ω é um subconjunto aberto, limitado e convexo do $\mathbb{R}^2$. Logo pelo Teorema 1.1.24, temos que para cada $f \in L^2(\Omega)$ e $a > 0$, existe uma única solução $u \in H^2(\Omega)$ que é solução de

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega c_{ij} D_j u D_i v\, dx \;+\; a \int_\Omega uv\, dx \;=\; \int_\Omega fv\, dx ,$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Como $u \in H^2(\Omega)$, então podemos integrar por partes e obter:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} D_i (c_{ij} D_j u) v\, dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} (N_\Omega(x))_i\, (c_{ij} D_j u) v\, d\sigma(x) \;+\; a \int_\Omega uv\, dx \;=\; \int_\Omega fv\, dx$$

e usando a condição de fronteira do problema (2.13), obtemos:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} D_i (c_{ij} D_j u) v\, dx \;+\; a \int_\Omega uv\, dx \;=\; \int_\Omega fv\, dx .$$

Como a equação acima é válida para todo $v \in H^1(\Omega)$ e Ω é limitado, obtemos então:

$$\sum_{i,j=1}^{2} D_i\,(c_{ij}D_j u) \;+\; au \;=\; f\,,$$

onde $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} D_i\,(c_{ij}D_j u) = C_{h_\epsilon}u$. Portanto existe uma única solução $u \in H^2(\Omega)$ do problema (2.13). ■

Pelo Exemplo 1.3.10, temos que todo operador autoadjunto densamente definido em um espaço de Hilbert e limitado inferiormente é setorial. Vamos usar esse resultado para provar que o operador dado em (2.11) é setorial.

Teorema 2.3.4 *Dados $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, h_ϵ definida em (2.1) e $a \in \mathbb{R}^+$, então o operador definido em (2.11), com domínio dado em (2.12) é setorial.*

Demonstração: Temos que $D(C_{h_\epsilon} + aI)$ é denso em $L^2(\Omega)$, logo $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é um operador densamente definido. Pelo Teorema 2.3.3 temos que o operador $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é sobrejetor em $L^2(\Omega)$ e pelo Lema 2.3.2 ele é simétrico e limitado inferiormente. Falta mostramos que o operador é autoadjunto, para tanto mostraremos que $D\Big((C_{h_\epsilon} + aI)^*\Big) = D(C_{h_\epsilon} + aI)$.

Temos de imediato que se $v \in D(C_{h_\epsilon} + aI)$ então $v \in D\Big((C_{h_\epsilon} + aI)^*\Big)$, logo $D\left((C_{h_\epsilon} + aI)^*\right) \supset D(C_{h_\epsilon} + aI)$. Suponhamos agora que $v \in D\left((C_{h_\epsilon} + aI)^*\right)$, então existe $f \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\Big\langle C_{h_\epsilon}u + au\,,\, v\Big\rangle = \langle u\,, f\rangle\;,\;\; \forall u \in D(C_{h_\epsilon} + aI). \tag{2.14}$$

Como $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é sobrejetor, existe $\overline{v} \in D(C_{h_\epsilon} + aI)$ tal que $(C_{h_\epsilon} + aI)\overline{v} = f$. Logo usando o fato de que $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é simétrico, obtemos

$$\langle u\,,\, f\rangle = \Big\langle u, C_{h_\epsilon}\overline{v} + a\overline{v}\Big\rangle = \Big\langle C_{h_\epsilon}u + au\,,\, \overline{v}\Big\rangle\;,\; \forall u \in D(C_{h_\epsilon} + aI)\,. \tag{2.15}$$

Então de (2.14) e (2.15) temos que

$$\Big\langle C_{h_\epsilon}u + au\,,\, v\Big\rangle = \Big\langle C_{h_\epsilon}u + au\,,\, \overline{v}\Big\rangle\;,\; \forall u \in D(C_{h_\epsilon} + aI)$$

e segue que $v = \overline{v}$. Logo $v \in D(C_{h_\epsilon} + aI)$ o que implica $D\left((C_{h_\epsilon} + aI)^*\right) \subset D(C_{h_\epsilon} + aI)$.

Concluímos que

$$D\left((C_{h_\epsilon} + aI)^*\right) = D(C_{h_\epsilon} + aI) \text{ e } (C_{h_\epsilon} + aI)^*u = (C_{h_\epsilon} + aI)u\,,\;\; \forall u \in D(C_{h_\epsilon} + aI)\,,$$

logo o operador $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é autoadjunto e consequentemente é setorial. ■

Como dito no início desta seção, nosso objetivo é mostrar que para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, h_ϵ definida em (2.1) e $a \in \mathbb{R}^+$, o operador definido em (2.7) e com domínio dado em (2.8) é um operador setorial, para tanto utilizaremos o Lema 1.3.11.

Teorema 2.3.5 *Se $a \in \mathbb{R}^+$, $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e h_ϵ é como definida em (2.1), então o operador definido em (2.7) com domínio dado em (2.8) é um operador setorial.*

Demonstração: Sejam $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, h_ϵ como definida em (2.1) e $a \in \mathbb{R}^+$, temos

$$-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} + aI = C_{h_\epsilon} + aI + L_{h_\epsilon},$$

onde C_{h_ϵ} e L_{h_ϵ} são os operadores dados em (2.9) e (2.10), respectivamente. Pelo Teorema 2.3.4 temos que o operador $(C_{h_\epsilon} + aI)$ é setorial em $L^2(\Omega)$ com

$$D(C_{h_\epsilon} + aI) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \;\middle|\; \sum_{i,j=1}^{2} (N_\Omega(x))_i \, (c_{ij} D_j u) = 0\,,\; x \in \partial\Omega \right\}.$$

O operador $(C_{h_\epsilon} + aI + L_{h_\epsilon})$ é linear e $D(C_{h_\epsilon} + aI + L_{h_\epsilon}) = D(C_{h_\epsilon} + aI)$, então para $\forall u \in D(C_{h_\epsilon} + aI)$ teremos

$$\begin{aligned}
\left\| \left(C_{h_\epsilon} u + au + L_{h_\epsilon} u\right) - \left(C_{h_\epsilon} u + au\right) \right\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| L_{h_\epsilon} u \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left\| \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| b_{12} \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\left\| \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \right\|_\infty + \left\| b_{12} \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \right\|_\infty \right) \| u \|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\left\| \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \right\|_\infty + \left\| b_{12} \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \right\|_\infty \right) \left\| (C_{h_\epsilon} + aI) u \right\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde utilizamos na última desigualdade o fato de $(C_{h_\epsilon} + aI)$ ser bijetor e contínuo entre os espaços $D(C_{h_\epsilon} + aI)$ e $L^2(\Omega)$. Tomando então $\overline{\eta}(\epsilon) := \left(\left\| \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \right\|_\infty + \left\| b_{12} \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \right\|_\infty \right)$, temos que $\overline{\eta}(\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ e

$$\left\| (C_{h_\epsilon} u + au + L_{h_\epsilon} u) - (C_{h_\epsilon} u + au) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \overline{\eta}(\epsilon) \left\| (C_{h_\epsilon} + aI) u \right\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in D(C_{h_\epsilon} + aI).$$

Logo pelo Lema 1.3.11 o operador

$$\left(-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} + aI \right) := C_{h_\epsilon} + aI + L_{h_\epsilon}$$

é setorial. ■

Para facilitar a notação, de agora em diante denotemos por $-A_{h_\epsilon}$ o operador $\left(-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} + aI \right)$ em $L^2(\Omega)$ e com domínio dado em (2.8). Logo, pelo Teorema 2.3.5 temos que $-A_{h_\epsilon}$ com domínio dado em (2.8) é setorial.

2.4 Formulação Fraca

Nosso objetivo nesta seção é primeiramente definir o operador $-A_{h_\epsilon} := \left(-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} + aI\right)$ em $H^{-1}(\Omega)$ com $D(-A_{h_\epsilon}) = H^1(\Omega)$. Depois, provaremos que existe uma vizinhança V de i_Ω tal que o operador $-A_{h_\epsilon}$ em $H^{-1}(\Omega)$ é setorial quando tomamos $h_\epsilon \in V$.

Se $v = u \circ h_\epsilon^{-1}$ e $u \in D(A_{h_\epsilon}) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \;\middle|\; h_\epsilon^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}} h_\epsilon^{*-1} u = 0 \right\}$, obtemos por integração por partes:

$$
\begin{aligned}
\left\langle A_{h_\epsilon} u \,,\, \psi \right\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega (h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u)(x)\, \psi(x)\, dx - a \int_\Omega u(x)\psi(x)\, dx \\
&= \int_\Omega \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} (u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x))\, \psi(x)\, dx - a \int_\Omega u(x)\psi(x)\, dx \\
&= \int_{\Omega_{h_\epsilon}} \Delta_{\Omega_{h_\epsilon}} v(y)\, \psi(h_\epsilon^{-1}(y)) \frac{1}{|\,Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(y))\,|}\, dy - a \int_{\Omega_{h_\epsilon}} u(h_\epsilon^{-1}(y))\psi(h_\epsilon^{-1}(y))\, \frac{1}{|\,Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(y))\,|}\, dy \\
&= \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} \frac{\partial v}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}}(y)\, \psi(h_\epsilon^{-1}(y)) \frac{1}{|\,Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(y))\,|}\, d\sigma(y) \\
&\quad - \int_{\Omega_{h_\epsilon}} \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} v(y) \cdot \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} \psi(h_\epsilon^{-1}(y)) \frac{1}{|\,Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(y))\,|}\, dy. \\
&\quad - a \int_{\Omega_{h_\epsilon}} u(h_\epsilon^{-1}(y))\psi(h_\epsilon^{-1}(y))\, \frac{1}{|\,Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(y))\,|}\, dy\,.
\end{aligned}
$$

Como $u \in D(A_{h_\epsilon})$, então $\dfrac{\partial v}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}}(y) = 0$. Utilizando mudança de coordenadas novamente obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left\langle A_{h_\epsilon} u \,,\, \psi \right\rangle_{-1,1} &= -\int_{\Omega_{h_\epsilon}} \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} v(y) \cdot \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} \psi(h_\epsilon^{-1}(y)) \frac{1}{|\,Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(y))\,|}\, dy \\
&\quad - a \int_{\Omega_{h_\epsilon}} u(h_\epsilon^{-1}(y))\psi(h_\epsilon^{-1}(y))\, \frac{1}{|\,Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(y))\,|}\, dy \\
&= -\int_\Omega \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} v(h_\epsilon(x)) \cdot \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} \psi \circ h_\epsilon^{-1} \frac{1}{|\,Jh_\epsilon \circ h_\epsilon^{-1}\,|}(h_\epsilon(x))\,|\,Jh_\epsilon(x)\,|\, dx - a \int_\Omega u(x)\psi(x)\, dx \\
&= -\int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u)(x) \cdot \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|} \right)(x)\,|\,Jh_\epsilon(x)\,|\, dx \;- a \int_\Omega u(x)\psi(x)\, dx. \quad (2.16)
\end{aligned}
$$

Como (2.16) está bem definido para qualquer $u \in H^1(\Omega)$, então podemos definir o operador $-A_{h_\epsilon}$ em $H^{-1}(\Omega)$, para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Denotemos então por $-(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ o operador dado pela expressão (2.16). Mostraremos a seguir que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ em $H^{-1}(\Omega)$ com domínio $D\Big((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\Big) = H^1(\Omega)$ é setorial.

Teorema 2.4.1 *Existe uma vizinhança V de i_Ω tal que, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a família de operadores $\left\{(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\right\}_{h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)}$ definida em (2.16) é setorial se $h_\epsilon \in V$.*

Demonstração: Precisamos mostrar que a família de operadores $\left\{(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\right\}_{h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3.15. É fácil ver que $(A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}}$ é um operador setorial e $D\Big((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\Big) \supset D\Big((A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}}\Big)$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e h_ϵ como definida em (2.1).

Agora, temos que provar que existem funções positivas $\tau(h_\epsilon)$ e $\omega(h_\epsilon)$ tais que

$$\left\| \Big((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} - (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}} \Big) u \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \tau(h_\epsilon) \left\| (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}} \, u \right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \omega(h_\epsilon) \| \, u \, \|_{H^1(\Omega)} \, ,$$

para todo $u \in D\Big((A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}}\Big)$, onde $\lim\limits_{h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega} \omega(h_\epsilon) = 0$ e $\lim\limits_{h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega} \tau(h_\epsilon) = 0$. Mas a desigualdade acima é equivalente a mostrar que

$$\left| \left\langle \Big((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} - (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}} \Big) u \, , \, \psi \right\rangle_{-1,1} \right| \le C(h_\epsilon) \| \, u \, \|_{H^1(\Omega)} \| \, \psi \, \|_{H^1(\Omega)} \, ,$$

para todo $u, \psi \in H^1(\Omega)$, com $\lim\limits_{h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega} C(h_\epsilon) = 0$.

Para todo $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$ temos:

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \Big((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} - (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}} \Big) u \, , \, \psi \right\rangle_{-1,1} \right| &= \Bigg| \int_\Omega \Big(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u \Big)(x) \cdot \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{| \, J h_\epsilon \, |} \right)(x) \, | \, J h_\epsilon(x) \, | \, dx \\
&\quad - \int_\Omega \nabla_\Omega u(x) \cdot \nabla_\Omega \psi(x) \, dx \Bigg| \\
&= \Bigg| \int_\Omega \Big(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u - \nabla_\Omega u \Big)(x) \cdot \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{|J h_\epsilon|} \right)(x) \, | \, J h_\epsilon(x) \, | \\
&\quad + \nabla_\Omega u(x) \cdot \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{|J h_\epsilon|} \right)(x) \, |J h_\epsilon(x)| - \nabla_\Omega u(x) \cdot \nabla_\Omega \psi(x) \, dx \Bigg| \\
&= \Bigg| \int_\Omega \Big(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u - \nabla_\Omega u \Big)(x) \cdot \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{| \, J h_\epsilon \, |} \right)(x) \, | \, J h_\epsilon(x) \, | \\
&\quad + \nabla_\Omega u(x) \cdot \left[h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{| \, J h_\epsilon \, |}(x) - \nabla_\Omega \left(\frac{\psi}{| \, J h_\epsilon \, |} \right)(x) \right] | \, J h_\epsilon(x) \, | \\
&\quad + \nabla_\Omega u(x) \cdot \nabla_\Omega \left(\frac{\psi}{| \, J h_\epsilon \, |} \right)(x) | \, J h_\epsilon(x) \, | - \nabla_\Omega u(x) \cdot \nabla_\Omega \psi(x) \, dx \Bigg| \\
&\le \int_\Omega \left| (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u - \nabla_\Omega u)(x) \cdot \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{|J h_\epsilon|} \right)(x) \right| |J h_\epsilon| dx \quad (2.17) \\
&\quad + \int_\Omega \left| \nabla_\Omega u(x) \cdot \Big(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} - \nabla_\Omega \Big) \left(\frac{\psi}{| \, J h_\epsilon \, |} \right)(x) \right| |J h_\epsilon(x)| \, dx \quad (2.18) \\
&\quad + \int_\Omega \psi(x) \nabla_\Omega u(x) \cdot \nabla_\Omega \left(\frac{1}{| \, J h_\epsilon \, |} \right)(x) \, | \, J h_\epsilon(x) \, | \, dx \, . \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Para estimar as integrais (2.17), (2.18) e (2.19) é necessário expressar $h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1}$ em termos de h_ϵ, mas isso já foi feito em (2.4). Logo, utilizando essas expressões, obtemos a seguinte estimativa para a integral (2.17):

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u - \nabla_\Omega u\right)(x) \cdot \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) \right| |Jh_\epsilon(x)|\, dx \\
\leq\ & \int_\Omega \left| \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} (b_{1j}(x) - \delta_{1j}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2} (b_{2j}(x) - \delta_{2j}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} b_{1j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2} b_{2j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) \end{pmatrix} \right| \left|1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\right| dx \\
\leq\ & \max_{(x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,1[} \left\{ |Jh_\epsilon(x)| \right\} \int_\Omega \left[b_{12}^2(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(b_{22}(x) - 1\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\cdot \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) + b_{12}(x) \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) \right]^2 + b_{22}^2(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx \\
\leq\ & \max_{(x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,1[} \left\{ |Jh_\epsilon(x)| \right\} \underbrace{\left\{ \int_\Omega \left[b_{12}^2(x) + (b_{22}(x) - 1)^2 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}}_{(I)} \\
&\cdot \underbrace{\left\{ \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) + b_{12}(x) \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) \right]^2 + b_{22}^2(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}}_{(II)}.
\end{aligned}
$$

Vamos analisar primeiramente a integral (I) :

$$
\begin{aligned}
\left\{ \int_\Omega \left[b_{12}^2(x) + \left(b_{22}(x) - 1\right)^2 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} &= \left\{ \int_\Omega \frac{x_2^2\, \epsilon^{2-2\alpha} \cos^2(x_1/\epsilon^\alpha) + \epsilon^2 sen^2(x_1/\epsilon^\alpha)}{[\,1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\,]^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{ \int_\Omega \frac{x_2^2 \epsilon^{2-2\alpha} + \epsilon^2}{[\,1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\,]^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Seja $K_1(h_\epsilon) := \displaystyle\sup_{(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]} \frac{x_2^2 \epsilon^{2-2\alpha} + \epsilon^2}{[\,1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\,]^2}$, notemos que $K_1(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma $C^1(\Omega)$. Portanto

$$
\left\{ \int_\Omega \left[b_{12}^2(x) + \left(b_{22}(x) - 1\right)^2 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left(K_1(h_\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_\Omega \nabla_\Omega u(x) \cdot \nabla_\Omega u(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{2}},
$$

com $\left(K_1(h_\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0.$

Para estimar a integral (II) será necessário calcular as derivadas parciais de $\dfrac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}$ em termos de h_ϵ, logo teremos que

$$
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)}\right) = -\frac{\epsilon^{1-\alpha} \cos(x_1/\epsilon^\alpha)}{[\,1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\,]^2}
$$

e

$$
\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)}\right) = 0\,.
$$

Vamos agora estimar a integral (II) :

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x) + b_{12}(x)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x)\right]^2 + b_{22}^2(x)\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x)\right]^2 dx \right\}^{\frac12}\\
\leq\ &\left\{ \int_\Omega 2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x)\right]^2 + \left(2b_{12}^2(x) + b_{22}^2(x)\right)\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac12}\\
=\ &\left\{ \int_\Omega 2\left[\psi(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right) + \frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)\right]^2 + \left(2b_{12}^2(x) + b_{22}^2(x)\right)\left[\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac12}\\
\leq\ &\left\{ \int_\Omega 4\psi^2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right)\right]^2 + \frac{4}{|Jh_\epsilon(x)|^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \left(2b_{12}^2(x) + b_{22}^2(x)\right)\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)\right)^2 dx\right\}^{\frac12}\\
\leq\ &\underbrace{\left\{ \int_\Omega \left[4\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right)\right)^2\right]\psi^2 dx\right\}^{\frac12}}_{(III)} + \underbrace{\left\{ \int_\Omega \frac{4}{|Jh_\epsilon(x)|^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \frac{2b_{12}^2(x) + b_{22}^2(x)}{|Jh_\epsilon(x)|^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)\right)^2 dx\right\}^{\frac12}}_{(IV)}.
\end{aligned}
$$

Vamos analisar a integral (III), para isso vamos estimar parte do seu integrando. Seja

$$K_2(h_\epsilon) := \sup_{x_1 \in [0,1]} 4\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right)\right]^2 = \sup_{x_1\in[0,1]} \frac{4\epsilon^{2-2\alpha}\cos^2(x_1/\epsilon^\alpha)}{[\,1+\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\,]^4}.$$

Temos que $K_2(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma $C^1(\Omega)$. Portanto

$$\left\{ \int_\Omega \left[4\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right)\right)^2\right]\psi^2 dx\right\}^{\frac12} \leq \left(K_2(h_\epsilon)\right)^{\frac12}\left[\int_\Omega \psi^2 dx\right]^{\frac12},$$

com $\left(K_2(h_\epsilon)\right)^{\frac12} \longrightarrow 0$.

Vamos agora analisar a integral (IV), para isso notemos que

$$\frac{4}{|Jh_\epsilon(x)|^2} = \frac{4}{[\,1+\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\,]^2} \quad \text{e} \quad \frac{2b_{12}^2(x)+b_{22}^2(x)}{|Jh_\epsilon(x)|^2} = \frac{2x_2^2\epsilon^{2-2\alpha}\cos^2(x_1/\epsilon^\alpha)+1}{[\,1+\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\,]^4}$$

são limitados para $0<\alpha<1, (x_1,x_2) \in]0,1[\times]0,1[$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto

$$\left\{ \int_\Omega \frac{4}{|Jh_\epsilon(x)|^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \frac{2b_{12}^2(x) + b_{22}^2(x)}{|Jh_\epsilon(x)|^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)\right)^2 dx\right\}^{\frac12} \leq K_3\left\{\int_\Omega \nabla_\Omega\psi(x)\cdot\nabla_\Omega\psi(x)\,dx\right\}^{\frac12},$$

onde K_3 é uma constante positiva. Portanto temos que a integral (2.17) fica estimada do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u - \nabla_\Omega u\right)(x)\cdot\left(h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1}\frac{\psi}{|Jh_\epsilon|}\right)(x)\right|\,\left|Jh_\epsilon(x)\right| dx\\
\leq\ &\max_{(x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,1[}\left\{\left|Jh_\epsilon(x)\right|\right\}[\,K_1(h_\epsilon)K_2(h_\epsilon)\,]^{\frac12}\left\{\int_\Omega \psi^2\,dx\right\}^{\frac12}\left\{\int_\Omega \nabla_\Omega u\cdot\nabla_\Omega u\,dx\right\}^{\frac12}\\
+\ &\max_{(x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,1[}\left\{\left|Jh_\epsilon(x)\right|\right\}[\,K_1(h_\epsilon)\,]^{\frac12}K_3\left\{\int_\Omega \nabla_\Omega\psi\cdot\nabla_\Omega\psi\,dx\right\}^{\frac12}\left\{\int_\Omega \nabla_\Omega u\cdot\nabla_\Omega u\,dx\right\}^{\frac12}.
\end{aligned}
$$

Tomando

$$C_0(h_\epsilon) := \max_{(x_1,x_2)\,\in\,]0,1[\times]0,1[} \Big\{ \big| Jh_\epsilon(x) \big| \Big\} [\, K_1(h_\epsilon) K_2(h_\epsilon)\,]^{\frac{1}{2}} \;\text{ e }\; C_0^{'}(h_\epsilon) := \max_{(x_1,x_2)\,\in\,]0,1[\times]0,1[} \Big\{ \big| Jh_\epsilon(x) \big| \Big\} [\, K_1(h_\epsilon)\,]^{\frac{1}{2}} K_3 \,,$$

temos que $C_0(h_\epsilon)$ e $C_0^{'}(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma $C^1(\Omega)$.

Analogamente vamos estimar a integral (2.18):

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \nabla_\Omega u(x) \cdot \Big(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} - \nabla_\Omega \Big) \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|}(x) \right) \right| |\,Jh_\epsilon(x)\,|\, dx \\
\leq\; & \max_{(x_1,x_2)\,\in\,]0,1[\times]0,1[} \Big\{ \big| Jh_\epsilon(x) \big| \Big\} \left\{ \int_\Omega \big| \nabla_\Omega u(x) \big|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} \Big(b_{ij}(x) - \delta_{ij} \Big) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|}(x) \right) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}}_{(V)} .
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o integrando de (V), obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} \Big(b_{ij}(x) - \delta_{ij} \Big) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|}(x) \right) \right]^2 &= \sum_{i=1}^{2} \left[\Big(b_{i1}(x) - \delta_{i1} \Big) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|}(x) \right) + \Big(b_{i2}(x) - \delta_{i2} \Big) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|}(x) \right) \right]^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{2} \left[2 \Big(b_{i1}(x) - \delta_{i1} \Big)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|} \right)(x) \right]^2 \right. \\
&\qquad \left. + 2 \Big(b_{i2}(x) - \delta_{i2} \Big)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|} \right)(x) \right]^2 \right] \\
&= \left[2 b_{12}^2(x) + 2 \Big(b_{22}(x) - 1 \Big)^2 \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|} \right)(x) \right]^2 \\
&= \left[2 b_{12}^2(x) + 2 \Big(b_{22}(x) - 1 \Big)^2 \right] \frac{1}{|\,Jh_\epsilon(x)\,|^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) \right)^2 .
\end{aligned}$$

Estimando então a integral (V), teremos:

$$\left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} \Big(b_{ij}(x) - \delta_{ij} \Big) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|}(x) \right) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \underbrace{\left\{ \int_\Omega \frac{2 b_{12}^2(x) + 2 \Big(b_{22}(x) - 1 \Big)^2}{|\,Jh_\epsilon(x)\,|^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}}_{(VII)} .$$

Temos que o integrando de (VII) pode ser estimado por:

$$K_4(h_\epsilon) := \sup_{(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]} \frac{2 b_{12}^2(x) + 2 \Big(b_{22}(x) - 1 \Big)^2}{|\,Jh_\epsilon(x)\,|^2} = \sup_{(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]} \frac{2 x_2^2\, \epsilon^{2-2\alpha} cos^2(x_1/\epsilon^\alpha) + 2 \epsilon^2 sen^2(x_1/\epsilon^\alpha)}{|\,Jh_\epsilon(x)\,|^2} ,$$

e $K_4(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma $C^1(\Omega)$. Logo, tomando $C_1(h_\epsilon) := \max_{(x_1,x_2)\,\in\,]0,1[\times]0,1[} \Big\{ |\,Jh_\epsilon(x)\,| \Big\} [K_4(h_\epsilon)]^{\frac{1}{2}}$, teremos a seguinte estimativa para a integral (2.18):

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \nabla_\Omega u(x) \cdot \Big(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_{h_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} - \nabla_\Omega \Big) \left(\frac{\psi}{|\,Jh_\epsilon\,|}(x) \right) \right| |\,Jh_\epsilon(x)\,|\, dx \\
\leq\; & C_1(h_\epsilon) \left\{ \int_\Omega \nabla_\Omega \psi \cdot \nabla_\Omega \psi \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega u \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} ,
\end{aligned}$$

com $C_1(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma $C^1(\Omega)$.

E finalmente analisando a integral (2.19), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \psi(x)\nabla_\Omega u(x)\cdot\nabla_\Omega\left(\frac{1}{\left|Jh_\epsilon(x)\right|}\right)\right| \left|Jh_\epsilon(x)\right| dx \\
\leq & \max_{(x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,1[}\left\{\left|Jh_\epsilon(x)\right|\right\}\int_\Omega \psi(x)\left[\sum_{j=1}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{j=1}^2\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \\
\leq & \max_{(x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,1[}\left\{\left|Jh_\epsilon(x)\right|\right\}\left\{\int_\Omega \psi^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_\Omega\sum_{j=1}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\left[\sum_{j=1}^2\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right)\right)^2\right] dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
= & \max_{(x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,1[}\left\{\left|Jh_\epsilon(x)\right|\right\}\left\{\int_\Omega \psi^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_\Omega\sum_{j=1}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\left[\frac{\epsilon^{2-2\alpha}cos^2(x_1/\epsilon^\alpha)}{|Jh_\epsilon(x)|^4}\right] dx\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Seja $K_5(h_\epsilon) := \sup_{x_1\in]0,1[}\dfrac{\epsilon^{2-2\alpha}cos^2(x_1/\epsilon^\alpha)}{|Jh_\epsilon(x)|^2}$, temos que $K_5(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma $C^1(\Omega)$. Logo, tomando $C_2(h_\epsilon) := \max_{(x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,1[}\left\{\left|Jh_\epsilon(x)\right|\right\}[K_5(h_\epsilon)]^{\frac{1}{2}}$, teremos a seguinte estimativa para a integral (2.19) :

$$\int_\Omega \left| \psi(x)\nabla_\Omega u(x)\cdot\nabla_\Omega\left(\frac{1}{|Jh_\epsilon(x)|}\right)\right| \left|Jh_\epsilon(x)\right| dx \leq C_2(h_\epsilon)\left\{\int_\Omega \psi^2\, dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_\Omega \nabla_\Omega u\cdot\nabla_\Omega u\, dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

com $C_2(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma $C^1(\Omega)$.

Concluímos então que existe uma vizinhança V de i_Ω e uma função positiva $C(h_\epsilon)$ tal que

$$\left|\left\langle\left((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} - (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}}\right)u\,,\,\psi\right\rangle_{-1,1}\right| \leq C(h_\epsilon)\|\,u\,\|_{H^1(\Omega)}\|\,\psi\,\|_{H^1(\Omega)}\,,$$

para todo $h_\epsilon \in V$ e $u,\psi \in H^1(\Omega)$, com $\lim_{h_\epsilon\longrightarrow i_\Omega} C(h_\epsilon) = 0$ na norma $C^1(\Omega)$. Portanto $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é setorial para todo $h_\epsilon \in V$. ■

2.5 Extensão e Setorialidade de uma Família de Operadores

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e h_ϵ como definida em (2.1), queremos estender o operador setorial $-A_{h_\epsilon}$ definido em (2.7) com domínio dado em (2.8), e mostrar que suas extensões também são setoriais. Para isso construiremos os espaços de potência associados ao domínio desse operador.

Provamos no Teorema 2.3.5 que o operador definido em (2.7) com domínio (2.8) é setorial. Temos também pelo Teorema 1.3.24 que se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, então X^α é um espaço de Banach na norma $\|\cdot\|_\alpha$ para $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$, e para $\alpha \geq \beta \geq 0$, X^α é um subespaço denso de X^β com inclusão contínua, e se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta quando $\alpha > \beta \geq 0$.

Então para $\beta > 0$ denotemos por $X^{\beta}_{h_\epsilon} = D((-A_{h_\epsilon})^{\beta})$ os espaços de Banach associados ao domínio de $(-A_{h_\epsilon})^{\beta}$, e em particular temos $X^0_{h_\epsilon} = L^2(\Omega)$, $X^{\frac{1}{2}}_{h_\epsilon} = H^1(\Omega)$ e $X^1_{h_\epsilon} = H^2_N(\Omega)$. Recordemos que para um domínio suave, temos que para qualquer $\beta > 0$ o espaço de potência fracionária $X^{\beta}_{h_\epsilon} = D((-A_{h_\epsilon})^{\beta})$ gera uma escala de espaços de Banach que coincidem com o espaço de interpolação real ou complexo. Como nosso domínio não é suficientemente suave, não conseguimos mostrar essa coincidência entre os espaços. Por esta razão vamos trabalhar apenas nos espaços $X^{\beta}_{h_\epsilon}$, e com as imersões $X^{\beta}_{h_\epsilon} \subset W^{k,p}(\Omega)$ que são garantidas pelo Teorema 1.3.25, para k e p convenientes. Teremos que $X^{\beta}_{h_\epsilon} = H^{2\beta}(\Omega)$ apenas quando 2β é inteiro.

Temos que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é uma extensão do operador $-A_{h_\epsilon}$, e pelo Teorema 2.4.1 temos que existe uma vizinhança da inclusão tal que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é setorial se h_ϵ pertence a essa vizinhança. Logo, podemos considerar o operador $-A_{h_\epsilon}$ como sendo uma restrição do operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$, ou seja, $-A_{h_\epsilon} = (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\big|_{H^2_N(\Omega)}$.

Em particular, para $0 < \beta \leq \dfrac{1}{2}$, definimos o seguinte operador:

$$(A_{h_\epsilon})_{-\beta} : X^{1-\beta}_{h_\epsilon} \longrightarrow X^{-\beta}_{h_\epsilon}, \quad \text{onde} \quad (A_{h_\epsilon})_{-\beta} := (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\big|_{X^{1-\beta}_{h_\epsilon}}, \tag{2.20}$$

ou seja, $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$ é a restrição do operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ ao espaço $X^{1-\beta}_{h_\epsilon}$. Logo temos o seguinte resultado para o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$:

Teorema 2.5.1 *Para $0 < \beta \leq \dfrac{1}{2}$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$ definido como em (2.20) é setorial.*

Demonstração: Pela definição de $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$, temos que ele é um operador fechado e densamente definido. Como o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é setorial, então existem $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que o setor

$$S_{a,\theta} = \left\{ \lambda \,\middle|\, \theta \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi \,, \lambda \neq a \right\}$$

está no resolvente de $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$. Para $\lambda \in S_{a,\theta}$ e $u \in X^{-\beta}_{h_\epsilon}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\lambda I - (A_{h_\epsilon})_{-\beta} \right)^{-1} u \right\|_{X^{-\beta}_{h_\epsilon}} &= \left\| \left(\lambda I - (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} u \right\|_{X^{-\beta}_{h_\epsilon}} \\
&= \left\| \left((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} \right)^{-\beta+\frac{1}{2}} \left(\lambda I - (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} u \right\|_{X^{-\frac{1}{2}}_{h_\epsilon}} \\
&= \left\| \left(\lambda I - (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} \right)^{-\beta+\frac{1}{2}} u \right\|_{X^{-\frac{1}{2}}_{h_\epsilon}} \\
&\leq \frac{M}{|\lambda - a|} \left\| \left((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} \right)^{-\beta+\frac{1}{2}} u \right\|_{X^{-\frac{1}{2}}_{h_\epsilon}} \\
&= \frac{M}{|\lambda - a|} \left\| u \right\|_{X^{-\beta}_{h_\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Obtemos então que $\left\| \left(\lambda I - (A_{h_\epsilon})_{-\beta} \right)^{-1} \right\|_{X^{-\beta}_{h_\epsilon}} \leq \dfrac{M}{|\lambda - a|}$, logo $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$ é setorial para $0 < \beta \leq \dfrac{1}{2}$.

Notemos que usamos o fato de $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ ser setorial e coincidir com o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$ em $X^{-\beta}_{h_\epsilon}$, e $((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}})^{-\beta+\frac{1}{2}}$ comutar com $\left(\lambda I - (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$. ■

Observação 2.5.2 *Provamos no Teorema 2.4.1 que existe uma vizinhança V de i_Ω e uma função positiva $C(h_\epsilon)$ tal que*

$$\left| \left\langle \left((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} - (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}}\right)u \,,\, \psi \right\rangle_{-1,1} \right| \leq C(h_\epsilon) \| \, u \, \|_{H^1(\Omega)} \| \, \psi \, \|_{H^1(\Omega)} \,,$$

para todo $h_\epsilon \in V$ e $u, \psi \in H^1(\Omega)$, com $\lim\limits_{h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega} C(h_\epsilon) = 0$ na norma $C^1(\Omega)$. Que é equivalente a mostrar que existem funções positivas $\tau(h_\epsilon)$ e $\omega(h_\epsilon)$ tais que

$$\left\| \left((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} - (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}}\right)u \, \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \tau(h_\epsilon) \left\| \, (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}} \, u \, \right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \omega(h_\epsilon) \| \, u \, \|_{H^1(\Omega)} \,,$$

para todo $u \in D\left((A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}}\right) = H^1(\Omega)$, onde $\lim\limits_{h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega} \omega(h_\epsilon) = 0$ e $\lim\limits_{h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega} \tau(h_\epsilon) = 0$. Logo as normas nos espaços $X^{\frac{1}{2}}_{h_\epsilon} = H^1(\Omega)$ e $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$ são equivalentes quando $h_\epsilon \in V$, e as imersões de $X^{\frac{1}{2}}_{h_\epsilon} \subset W^{k,p}(\Omega)$ podem ser consideradas com constante de imersão uniforme em h_ϵ, quando $h_\epsilon \in V$.

Agora veremos um resultado que relaciona os espaços de interpolação com o domínio das potências fracionárias de operadores positivos.

Teorema 2.5.3 *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador positivo. Suponhamos que existem $\delta > 0$ e $C > 0$ tais que A^{it} é um operador limitado para $-\delta \leq t \leq \delta$ e $\| \, A^{it} \, \|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$, para todo $-\delta \leq t \leq \delta$. Se α e β são dois números complexos tais que $0 \leq \Re(\alpha) < \Re(\beta) < \infty$ e $0 < \theta < 1$, então*

$$[\, D(B^\alpha), D(B^\beta) \,]_\theta = D(B^{\alpha(1-\theta)+\theta\beta}) \,.$$

Demonstração: Veja [24].

A definição de potência fracionária de operadores positivos pode ser encontrada em [24], no caso especial quando A é um operador elíptico, essa definição coincide com a definição para operadores setoriais (ver [11]).

Temos que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ está definido em $X^{-\frac{1}{2}}_{h_\epsilon} = H^{-1}(\Omega)$ com domínio $D\left((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\right) = H^1(\Omega)$, para todo h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω. Logo pela Observação 2.5.2 e pelo Teorema 2.5.3, temos que os espaços $X^\eta_{h_\epsilon}$ e $X^\eta_{i_\Omega}$ tem normas equivalentes quando $-\dfrac{1}{2} < \eta < \dfrac{1}{2}$. Portanto nos capítulos que se seguem trabalharemos apenas nos espaços fixos $X^\eta_{i_\Omega}$ quando $-\dfrac{1}{2} < \eta < \dfrac{1}{2}$, já no caso quando $\eta > \dfrac{1}{2}$, faremos distinção entre os espaços $X^\eta_{h_\epsilon}$ e $X^\eta_{i_\Omega}$, pois não sabemos afirmar para quais valores de η os espaços tem normas equivalentes.

Capítulo 3

Formulação Abstrata e Existência de Solução

O objetivo deste capítulo é definir o problema abstrato associado ao problema parabólico semilinear dado em (2), quando consideramos a perturbação h_ϵ definida em (2.1) e sob novas hipóteses . Provaremos depois, sob algumas hipóteses para as não linearidades envolvidas em (2), a existência e unicidade de soluções globais para o problema abstrato quando consideramos os operadores envolvidos neste problema, definidos em algum espaço $X^{\beta}_{h_\epsilon} = D((-A_{h_\epsilon})^{\beta})$, com $\beta > 0$ conveniente. Para tanto usaremos a teoria de semigrupos, considerando o problema (2) como uma equação de evolução em um espaço de Banach.

3.1 Formulação Abstrata

É possível definir o problema abstrato associado a (2) e mostrar que ele está bem posto, usando $H^1(\Omega)$ como espaço de fase e as propriedades do operador com condição de fronteira de Neumann homogêneo, associado a (2), nesse espaço. Entretanto, para mostrar que os atratores são limitados em $L^\infty(\Omega)$ será conveniente trabalhar em um espaço que esteja imerso em $C(\overline{\Omega})$. Mas pelo Teorema 1.1.13 temos que a imersão $H^s(\Omega) \subset C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ é válida para $1 < s < 2$ e $\mu = s - 1$, logo inicialmente iremos escolher o espaço de fase como sendo $X^{\frac{1}{2}+\delta}_{h_\epsilon} \subset H^s(\Omega)$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $1 < s < 2$.

Precisamos escolher o domínio do operador $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$ definido em (2.20), o espaço de fase e o espaço ambiente em que vamos formular abstratamente o problema (2). Consideremos então o problema abstrato:

$$\begin{cases} u_t + (A_{h_\epsilon})_{-\beta} u = (H_{h_\epsilon})_{-\beta} u\,,\ t > t_0\,; \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases}$$

Para que o problema acima esteja bem posto e tenha solução única é necessário fixar os espaços de fase onde o operador setorial $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$ e o operador não linear $(H_{h_\epsilon})_{-\beta}$ estarão definidos. Como um dos objetivos será mostrar a existência e limitação uniforme dos atratores em L^∞, é conveniente então escolhermos o espaço de fase de $(A_{h_\epsilon})_{-\beta}$ como sendo $X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}+\delta} \subset C(\overline{\Omega})$.

Fixemos então $\delta > 0$ suficientemente pequeno e consideremos o operador

$$(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)} : X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}+\delta} \longrightarrow X_{h_\epsilon}^{-\frac{1}{2}+\delta}, \ \text{ onde } \ (A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)} := (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\Big|_{X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}+\delta}}, \tag{3.1}$$

dado como em (2.20) e $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ o operador setorial dado em (2.16). Pelo Teorema 2.5.1 temos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o operador definido em (3.1) é setorial.

Podemos definir também o operador não linear $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ por:

$$(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)} : X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} \longrightarrow X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}, \tag{3.2}$$

com $\mu \geq 0, \epsilon > 0$ suficientemente pequenos e h_ϵ como definida em (2.1), como sendo a soma dos seguintes operadores:

(i) $\begin{array}{rccc} (F_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)} = F(\cdot, h_\epsilon) : & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta} \\ & u & \longmapsto & F(u, h_\epsilon) \end{array}$ definido por

$$\langle F(u, h_\epsilon)\,,\, \Phi \rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta} = \int_\Omega f(u)\, \Phi\, dx, \tag{3.3}$$

(ii) $\begin{array}{rccc} (G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)} = G(\cdot, h_\epsilon) : & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta} \\ & u & \longmapsto & G(u, h_\epsilon) \end{array}$ definido por

$$\langle G(u, h_\epsilon)\,,\, \Phi \rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta} = \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\, \gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} h_\epsilon}{J h_\epsilon} \right| d\sigma(x)\,, \tag{3.4}$$

onde γ é a aplicação traço.

Definimos então $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)} = H(\cdot, h_\epsilon) := (F_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)} + (G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$. Para que o operador $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ esteja bem definido nos espaços considerados, vamos exigir algumas condições de crescimento para $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, como segue:

(H1) f é $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem números reais $\lambda_1 > 0$ e $L_1 > 0$ tais que:

$$|\, f(u_1) - f(u_2)\,| \leq L_1\,(1 + |\, u_1\,|^{\lambda_1} + |\, u_2\,|^{\lambda_1})|\, u_1 - u_2\,|$$

para todo $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

(H2) g é $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e existem números reais $\lambda_2 > 0$ e $L_2 > 0$ tais que:

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leq L_2\,(1 + |u_1|^{\lambda_2} + |u_2|^{\lambda_2})|u_1 - u_2|$$

para todo $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

Fixados $\mu = 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, iremos garantir a existência e unicidade de solução global para o seguinte problema abstrato:

$$\begin{cases} u_t + (A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}u = (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}u\,, \;\; t > t_0\,; \\ u(t_0) = u_0 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde os operadores $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ e $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ são dados em (3.1) e (3.2), respectivamente. Devemos provar que o operador $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ está bem definido e é localmente Lipschitz, logo iniciamos com resultados sobre o operador $(F_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ e consideraremos o caso onde $\mu \geq 0$ suficientemente pequeno.

Lema 3.1.1 *Se $\mu \geq 0$ e $\delta > 0$ são suficientemente pequenos, então o operador $(F_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ dado em (3.3) está bem definido.*

Demonstração: Sejam $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$ e $\Phi \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, temos que

$$\begin{aligned} \left|\langle F(u\,,\,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta}\right| &\leq \int_\Omega |f(u)||\Phi|\,dx \\ &\leq L_1\int_\Omega |u||\Phi|\,dx + L_1\int_\Omega |u|^{\lambda_1+1}|\Phi|\,dx + \int_\Omega |f(0)||\Phi|\,dx \\ &\leq L_1\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)} + L_1\|u^{\lambda_1+1}\|_{L^2(\Omega)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= L_1\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)} + L_1\|u\|^{\lambda_1+1}_{L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3.25 temos que $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\rho} \subset L^2(\Omega)$ se $\rho < \dfrac{1}{2}$. Logo para $\mu \geq 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequenos, teremos que $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} \subset L^2(\Omega)$ com constante de imersão K_1 e $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} \subset L^2(\Omega)$ com constante de imersão K_2. Temos também que $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} \subset L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)$ se $\mu < \dfrac{1}{2(\lambda_1+1)}$, mas como $\lambda_1 > 0$ e $\mu \geq 0$ é suficientemente pequeno, então a imersão é válida com constante de imersão K_3. Logo temos que:

$$\begin{aligned} \left|\langle F(u,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta}\right| \leq\; & L_1K_1K_2\|u\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\|\Phi\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} + L_1K_3^{\lambda_1+1}K_2\|u\|^{\lambda_1+1}_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\|\Phi\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} \\ & + K_2\|f(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\Phi\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}\,. \end{aligned}$$

Portanto se $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$ e $\Phi \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, teremos:

$$\left\|F(u,h_\epsilon)\right\|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}} \leq L_1K_1K_2\|u\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} + L_1K_3^{\lambda_1+1}K_2\|u\|^{\lambda_1+1}_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} + K_2\|f(0)\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

e concluímos então que o operador $(F_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ está bem definido. ∎

Lema 3.1.2 *O operador*

$$\begin{array}{rccc} F(\cdot,\cdot): & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}\times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}, \\ & (u,h_\epsilon) & \longmapsto & F(u,h_\epsilon) \end{array}$$

definido por

$$\langle F(u,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta} = \int_\Omega f(u)\,\Phi\,dx\,,$$

com $\mu \geq 0$, $\delta > 0$ suficientemente pequenos e h_ϵ como em (2.1), é localmente Lipschitz contínuo em u.

Demonstração: Sejam $\epsilon, \mu > 0$ suficientemente pequenos, $u_1, u_2 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$ e $\Phi \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, segue da definição de $(F_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ em (3.3) que

$$\begin{aligned}
\left|\langle F(u_1,h_\epsilon)-F(u_2,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}-\delta}\right| &= \left|\int_\Omega [f(u_1)-f(u_2)]\,\Phi\,dx\right| \\
&\leq \int_\Omega L_1(1+|\,u_1\,|^{\lambda_1}+|\,u_2\,|^{\lambda_1})\,|\,u_1-u_2\,|\,|\,\Phi\,|\,dx \\
&\leq L_1\left\{\int_\Omega (1+|u_1|^{\lambda_1}+|u_2|^{\lambda_1})^2|u_1-u_2|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_\Omega |\,\Phi\,|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq L_1\left\{\int_\Omega (1+|\,u_1\,|^{\lambda_1}+|\,u_2\,|^{\lambda_1})^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}}\left\{\int_\Omega |\,u_1-u_2\,|^{2q}dx\right\}^{\frac{1}{2q}} \\
&\quad \cdot\left\{\int_\Omega |\,\Phi\,|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= L_1\|\,1+|\,u_1\,|^{\lambda_1}+|\,u_2\,|^{\lambda_1}\,\|_{L^{2p}(\Omega)}\|\,u_1-u_2\,\|_{L^{2q}(\Omega)}\|\,\Phi\,\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1\Big(|\Omega|^{\frac{1}{2p}}+\|\,u_1^{\lambda_1}\|_{L^{2p}(\Omega)}+\|\,u_2^{\lambda_1}\|_{L^{2p}(\Omega)}\Big)\|\,u_1-u_2\,\|_{L^{2q}(\Omega)}\|\,\Phi\,\|_{L^2(\Omega)} \\
&= L_1\Big(|\Omega|^{\frac{1}{2p}}+\|\,u_1\,\|^{\lambda_1}_{L^{2p\lambda_1}(\Omega)}+\|\,u_2\,\|^{\lambda_1}_{L^{2p\lambda_1}(\Omega)}\Big)\|\,u_1-u_2\,\|_{L^{2q}(\Omega)}\|\,\Phi\,\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1\Big(|\,\Omega\,|^{\frac{1}{2p}}+K_4^{\lambda_1}\|\,u_1\,\|^{\lambda_1}_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}+K_4^{\lambda_1}\|\,u_2\,\|^{\lambda_1}_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\Big) \\
&\quad \cdot K_5\|\,u_1-u_2\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}K_2\|\,\Phi\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}\,,
\end{aligned}$$

onde $|\,\Omega\,|$ é a medida do conjunto Ω. Ao aplicarmos a desigualdade de Sobolev acima, escolhemos $1 < p\,,\,q < \infty$ conjugados tal que $p > \dfrac{1}{\lambda_1}$. Pelo Teorema 1.3.25 temos a imersão $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} \subset L^{2p\lambda_1}(\Omega)$ com constante de imersão K_4. Como $\mu \geq 0$ é suficientemente pequeno, temos também a imersão $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} \subset L^{2q}(\Omega)$ com constante de imersão K_5, e por fim temos a imersão $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} \subset L^2(\Omega)$ com constante de imersão K_2. Obtemos então:

$$\begin{aligned}
\left|\langle F(u_1,h_\epsilon)-F(u_2,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta}\right| &\leq L_1\Big(|\,\Omega\,|^{\frac{1}{2p}}+K_4^{\lambda_1}\|\,u_1\,\|^{\lambda_1}_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}+K_4^{\lambda_1}\|\,u_2\,\|^{\lambda_1}_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\Big) \\
&\quad \cdot K_5\|\,u_1-u_2\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}K_2\|\,\Phi\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}\,.
\end{aligned}$$

Se U é um subconjunto limitado de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$ e u_1, $u_2 \in U$, teremos:

$$\|\,F(u_1\,,\,h_\epsilon)-F(u_2\,,\,h_\epsilon)\,\|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}} \leq K_{\lambda_1\,,\,U}\,\|\,u_1-u_2\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}},$$

onde $K_{\lambda_1,U}$ é uma constante positiva que depende de λ_1 e de U escolhidos. Portanto $(F_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz contínuo em u. ■

Para mostrar que $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ está bem definido e é localmente Lipschitz, será necessário utilizar o seguinte resultado:

Lema 3.1.3 *Sejam* $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$ *a aplicação definida em (2.1),* Jh_ϵ *o determinante da matriz jacobiana* $[h_\epsilon]_x = \left[\dfrac{\partial(h_\epsilon)_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^{2}$ *e* $J_{\partial\Omega}h_\epsilon$ *o determinante da matriz jacobiana do difeomorfismo* $h_\epsilon : \partial\Omega \longrightarrow \partial h_\epsilon(\Omega)$. *Definimos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & C(\Omega,\mathbb{R}) \\ & h_\epsilon & \longmapsto & \left|\dfrac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right|. \end{array}$$

Seja V *uma vizinhança de* i_Ω *em* $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$*, então dado* $h_\epsilon \in V$*, a aplicação* θ *é localmente Lipschitz.*

Demonstração: Temos que a matriz jacobiana $[h_\epsilon]_x = \left[\dfrac{\partial(h_\epsilon)_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^{2}$ dada em (2.2) tem determinante $Jh_\epsilon(x) = 1 + \epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha) > 0$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Tomemos V uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$, então existe uma constante positiva c tal que $Jh_\epsilon(x) > c$ para todo $x \in \Omega$ e $h_\epsilon \in V$. Logo, dados $h_{\epsilon_1}, h_{\epsilon_2} \in V$, teremos:

$$\left|\theta(h_{\epsilon_1})(x) - \theta(h_{\epsilon_2})(x)\right| < \frac{1}{c}\left|\,|J_{\partial\Omega}h_{\epsilon_1}(x)| - |J_{\partial\Omega}h_{\epsilon_2}(x)|\,\right|.$$

Podemos dividir $\partial\Omega$ em quatro regiões e parametrizá-las, então teremos uma expressão para a aplicação $h_\epsilon : \partial\Omega \longrightarrow \partial h_\epsilon(\Omega)$ para cada região. Vamos nos concentrar na região onde há a oscilação, pois nas outras três regiões da fronteira a demonstração é análoga. Teremos então a seguinte expressão fixando a coordenada $x_2 = 1$:

$$\begin{array}{rccc} h_\epsilon: &]\,0\,,1\,[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x_1 & \longmapsto & \left(x_1\,,\,1+\epsilon\, sen(x_1/\epsilon^\alpha)\right). \end{array}$$

Logo

$$\begin{aligned} \left|\,|J_{\partial\Omega}h_{\epsilon_1}(x)| - |J_{\partial\Omega}h_{\epsilon_2}(x)|\,\right| &= \left|\sqrt{1+\epsilon_1^{2-2\alpha}cos^2(x_1/\epsilon_1^\alpha)} - \sqrt{1+\epsilon_2^{2-2\alpha}cos^2(x_1/\epsilon_2^\alpha)}\right| \\ &\le \left|\epsilon_1^{2-2\alpha}cos^2(x_1/\epsilon_1^\alpha) - \epsilon_2^{2-2\alpha}cos^2(x_1/\epsilon_2^\alpha)\right| \\ &\le \|h_{\epsilon_1} - h_{\epsilon_2}\|_{C^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, dados $h_{\epsilon_1}, h_{\epsilon_1} \in V$, existe M constante positiva, tal que:

$$\left|\theta(h_{\epsilon_1})(x) - \theta(h_{\epsilon_2})(x)\right| \le M\,\|h_{\epsilon_1} - h_{\epsilon_2}\|_{C^1(\Omega)}$$

e segue que a aplicação θ é localmente Lipschitz para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω. ■

Lema 3.1.4 *Se $\mu \geq 0$ e $\delta > 0$ são suficientemente pequenos, então o operador $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ dado em (3.4) está bem definido.*

Demonstração: Sejam $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$ e $\Phi \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\langle G(u,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta,\,\frac{1}{2}-\delta}\right| &\leq \int_{\partial\Omega} |\,g(\gamma(u))\,|\,|\,\gamma(\Phi)\,|\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right| d\sigma(x)\\
&\leq \|\,\theta\,\|_\infty \int_{\partial\Omega} L_2\Big[\,|\,\gamma(u)\,|+|\,\gamma(u)\,|^{\lambda_2+1}\Big]\,|\,\gamma(\Phi)\,|+|\,g(\gamma(0))\,|\,|\,\gamma(\Phi)\,|\,d\sigma(x)\\
&\leq \|\,\theta\,\|_\infty L_2\left(\int_{\partial\Omega}|\,\gamma(u)\,|^2 d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\partial\Omega}|\,\gamma(\Phi)\,|^2 d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\|\,\theta\,\|_\infty L_2\left(\int_{\partial\Omega}|\,\gamma(u)\,|^{2(\lambda_2+1)} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\partial\Omega}|\,\gamma(\Phi)\,|^2 d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\|\,\theta\,\|_\infty\|\,g(\gamma(0))\,\|_{L^2(\partial\Omega)}\,\|\,\gamma(\Phi)\,\|_{L^2(\partial\Omega)}\\
&= \|\,\theta\,\|_\infty L_2\Big[\,\|\,\gamma(u)\,\|_{L^2(\partial\Omega)}+\|\,\gamma(u)\,\|^{\lambda_2+1}_{L^{2(\lambda_2+1)}(\partial\Omega)}\Big]\,\|\,\gamma(\Phi)\,\|_{L^2(\partial\Omega)}\\
&\quad+\|\,\theta\,\|_\infty\|\,g(\gamma(0))\,\|_{L^2(\partial\Omega)}\,\|\,\gamma(\Phi)\,\|_{L^2(\partial\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

onde θ é a função limitada definida no Lema 3.1.3. Pelo Teorema 1.3.25 temos que $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\eta} \subset H^s(\Omega)$ para todo s tal que $s < 1 - 2\eta$. Por outro lado, pelo Teorema 1.1.20 temos que para $s < 1$, $\gamma : H^s(\Omega) \longrightarrow L^q(\partial\Omega)$ para todo $q = \dfrac{1}{1-s}$. Logo como $\eta \geq 0$ é suficientemente pequeno, então s está suficientemente próximo de 1, então podemos tomar q suficientemente grande se necessário. Portanto se tomarmos $\mu \geq 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequenos, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\,\gamma(\Phi)\,\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_1}\,\|\,\Phi\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}\,,\\
\|\,\gamma(u)\,\|_{L^{2(\lambda_2+1)}(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_2}\,\|\,u\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\,,\\
\|\,\gamma(u)\,\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_3}\,\|\,u\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\,,
\end{aligned}$$

onde $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$ e $\overline{K_3}$ são constantes de imersão. Finalmente, se $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$, $\Phi \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ e $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\left\|\,G(u,h_\epsilon)\,\right\|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}} &\leq L_2\overline{K_3}\,\overline{K_1}\|\,\theta\,\|_\infty\|\,u\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}+L_2\overline{K_2}^{\lambda_2+1}\overline{K_1}\|\,\theta\,\|_\infty\|\,u\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad+\overline{K_1}\|\,\theta\|_\infty\|\,g(\gamma(0))\,\|_{L^2(\partial\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Portanto temos que o operador $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ está bem definido. ■

Mostremos agora que o operador $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz contínuo na primeira variável.

Lema 3.1.5 *Sejam V uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$, h_ϵ como definido em (2.1) e tal que $h_\epsilon \in V$, e $\mu \geq 0$, $\delta > 0$ suficientemente pequenos, então o operador*

$$\begin{array}{rccc} G(\cdot,\cdot): & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}, \\ & (u,h_\epsilon) & \longmapsto & G(u,h_\epsilon) \end{array}$$

definido por

$$\langle G(u,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta} = \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\gamma(\Phi)\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right| d\sigma(x)\,,$$

é localmente Lipschitz contínuo em h_ϵ e localmente Lipschitz contínuo em u.

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz contínuo em $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$. Para tanto, sejam $u_1, u_2 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$, $\Phi \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ e $h_\epsilon \in V$, segue da definição de $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ que

$$\begin{aligned}
\left|\langle G(u_1,h_\epsilon) - G(u_2,h_\epsilon),\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}-\delta}\right| &\leq \int_{\partial\Omega} |\,g(\gamma(u_1)) - g(\gamma(u_2))\,|\left|\gamma(\Phi)\right|\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right| d\sigma(x) \\
&\leq \int_{\partial\Omega} L_2\Big(1 + |\gamma(u_1)|^{\lambda_2} + |\gamma(u_2)|^{\lambda_2}\Big)|\gamma(u_1) - \gamma(u_2)|\left|\gamma(\Phi)\right|\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right| d\sigma(x) \\
&\leq L_2\|\theta\|_\infty \int_{\partial\Omega}\Big(1 + |\gamma(u_1)|^{\lambda_2} + |\gamma(u_2)|^{\lambda_2}\Big)|\gamma(u_1) - \gamma(u_2)|\left|\gamma(\Phi)\right| d\sigma(x) \\
&\leq L_2\|\theta\|_\infty\left\{\int_{\partial\Omega}\Big(1 + |\gamma(u_1)|^{\lambda_2} + |\gamma(u_2)|^{\lambda_2}\Big)^2 |\gamma(u_1) - \gamma(u_2)|^2\, d\sigma(x)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left\{\int_{\partial\Omega}\left|\gamma(\Phi)\right|^2 d\sigma(x)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq L_2\|\,\theta\,\|_\infty\left\{\int_{\partial\Omega}\Big(1 + |\,\gamma(u_1)\,|^{\lambda_2} + |\,\gamma(u_2)\,|^{\lambda_2}\Big)^{2p} d\sigma(x)\right\}^{\frac{1}{2p}} \\
&\quad \cdot \left\{\int_{\partial\Omega}|\,\gamma(u_1) - \gamma(u_2)\,|^{2q} d\sigma(x)]\right\}^{\frac{1}{2q}} \|\,\gamma(\Phi)\,\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq L_2\|\,\theta\,\|_\infty\Big(\,|\,\partial\Omega\,|^{\frac{1}{2p}} + \|\,\gamma(u_1)\,\|^{\lambda_2}_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)} + \|\,\gamma(u_2)\,\|^{\lambda_2}_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)}\Big) \\
&\quad \cdot \|\,\gamma(u_1) - \gamma(u_2)\,\|_{L^{2q}(\partial\Omega)}\|\,\gamma(\Phi)\,\|_{L^2(\partial\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

onde $|\,\partial\Omega\,|$ é a medida de $\partial\Omega$ e $1 < p, q < \infty$ são conjugados e p é escolhido tal que $p > \dfrac{1}{2\lambda_2}$. Pelo mesmo argumento do Lema 3.1.4, temos que para $\mu \geq 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequenos, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|\,\gamma(\Phi)\,\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_1}\,\|\,\Phi\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}\,, \\
\|\,\gamma(u)\,\|_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_4}\,\|\,u\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\,, \\
\|\,\gamma(u)\,\|_{L^{2q}(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_5}\,\|\,u\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\,,
\end{aligned}$$

onde $\overline{K_1}$, $\overline{K_4}$ e $\overline{K_5}$ são constantes de imersão. Logo teremos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\left|\langle G(u_1,h_\epsilon) - G(u_2,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta}\right| &\leq L_2\|\,\theta\,\|_\infty\Big(\,|\,\partial\Omega\,|^{\frac{1}{2p}} + \overline{K4}^{\lambda_2}\|\,u_1\,\|^{\lambda_2}_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} + \overline{K_4}^{\lambda_2}\|\,u_2\,\|^{\lambda_2}_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\Big) \\
&\quad \cdot \overline{K_5}\|\,u_1 - u_2\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}\overline{K_1}\|\,\Phi\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}\,.
\end{aligned}$$

Se U é um limitado de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$ e $u_1,\, u_2 \in U$, obtemos:

$$\| G(u_1, h_\epsilon) - G(u_2, h_\epsilon) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}} \leq \overline{K}_{\lambda_2\,,\,U\,,\,h_\epsilon} \| u_1 - u_2 \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} ,$$

onde $\overline{K}_{\lambda_2\,,\,U}$ é uma constante positiva que depende de λ_2 e de U escolhidos. Portanto $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz contínuo em u.

Vamos mostrar agora que $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz contínuo em h_ϵ. Para tanto tomemos V uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$ com $h_{\epsilon_1}, h_{\epsilon_2} \in V$ e U um limitado de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$ com $u \in U$. Segue pela definição de $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ que

$$\begin{aligned}
\left|\langle G(u, h_{\epsilon_1}) - G(u, h_{\epsilon_2}), \Phi\rangle_{-\frac{1}{2}+\delta, \frac{1}{2}-\delta}\right| &\leq \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\Phi) | \left| \left(\left| \frac{J_{\partial\Omega} h_{\epsilon_1}}{J h_{\epsilon_1}} \right| - \left| \frac{J_{\partial\Omega} h_{\epsilon_2}}{J h_{\epsilon_2}} \right| \right) \right| d\sigma(x) \\
&\leq \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\Phi) | M \| h_{\epsilon_1} - h_{\epsilon_2} \|_{C^1(\Omega)} \, d\sigma(x) \\
&\leq M \| h_{\epsilon_1} - h_{\epsilon_2} \|_{C^1(\Omega)} \\
&\quad \cdot \int_{\partial\Omega} L_2 \Big[| \gamma(u) | + | \gamma(u) |^{\lambda_2+1} \Big] | \gamma(\Phi) | + | g(\gamma(0)) | | \gamma(\Phi) | \, d\sigma(x) \\
&\leq M \|h_{\epsilon_1} - h_{\epsilon_2}\|_{C^1(\Omega)} \left\{ L_2 \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma(u)|^2 \, d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma(\Phi)|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad + L_2 \left(\int_{\partial\Omega} | \gamma(u) |^{2(\lambda_2+1)} \, d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} | \gamma(\Phi) |^2 \, d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. + \left(\int_{\partial\Omega} | g(\gamma(0)) |^2 \, d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} | \gamma(\Phi) |^2 \, d\sigma(x) \right)^{2} \right\} \\
&= M \| h_{\epsilon_1} - h_{\epsilon_2} \|_{C^1(\Omega)} \Big\{ L_2 \| \gamma(u) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(\Phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\quad + L_2 \| \gamma(u) \|_{L^{2(\lambda_2+1)}(\partial\Omega)}^{\lambda_2+1} \| \gamma(\Phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\quad + \| g(\gamma(0)) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(\Phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \Big\} ,
\end{aligned}$$

onde M (que depende de V) é a constante de Lipschitz para a função θ garantida pelo Lema 3.1.3. Logo pelo mesmo argumento do Lema 3.1.4, temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\| \gamma(\Phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_1} \| \Phi \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} , \\
\| \gamma(u) \|_{L^{2(\lambda_2+1)}(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_2} \| u \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} , \\
\| \gamma(u) \|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq \overline{K_3} \| u \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} ,
\end{aligned}$$

onde $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$ e $\overline{K_3}$ são constantes de imersão. Portanto:

$$\begin{aligned}
\left| \langle G(u, h_{\epsilon_1}) - G(u, h_{\epsilon_2}) \,,\, \Phi \rangle_{-\frac{1}{2}+\delta\,,\,\frac{1}{2}-\delta} \right| &\leq M \| h_{\epsilon_1} - h_{\epsilon_2} \|_{C^1(\Omega)} \left\{ L_2 \overline{K_1}\, \overline{K_3} \| u \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} \| \Phi \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} \right. \\
&\quad + L_2 \overline{K_1}\, \overline{K_2}^{\lambda_2+1} \| u \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}}^{\lambda_2+1} \| \Phi \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} \\
&\quad \left. + \overline{K_1} \| g(\gamma(0)) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \Phi \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} \right\} ,
\end{aligned}$$

Logo obtemos:

$$\left\| G(u\,,\,h_{\epsilon_1}) - G(u\,,\,h_{\epsilon_2}) \right\|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}} \leq \tilde{K}_{\lambda_2\,,U\,,V} \| h_{\epsilon_1} - h_{\epsilon_2} \|_{C^1(\Omega)},$$

onde $\tilde{K}_{\lambda_2\,,U\,,V}$ é uma constante positiva que depende de λ_2, U e V escolhidos. Portanto $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz contínua em h_ϵ. ■

Lema 3.1.6 *Sejam $\mu \geq 0$, $\delta > 0$ suficientemente pequenos e o operador*

$$\begin{array}{rccl} H(\cdot,\cdot): & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}, \\ & (u,h_\epsilon) & \longmapsto & H(u,h_\epsilon) \end{array}$$

definido por $H(u,h_\epsilon) = F(u,h_\epsilon) + G(u,h_\epsilon)$, onde $(F_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ e $(G_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ são dados em (3.3) e (3.4), respectivamente. Então $H(\cdot,\cdot)$ assim definido é localmente Lipschitz contínuo em h_ϵ e localmente Lipschitz contínuo em u.

Demonstração: O resultado segue imediatamente dos Lemas 3.1.2 e 3.1.5. ■

Concluímos então que para $\delta > 0$ e $\mu \geq 0$ suficientemente pequenos, o operador $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ definido em (3.2) é localmente Lipschitz contínuo, e pelo Teorema 2.5.1 temos que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é setorial. Portanto concluímos que o problema abstrato (3.5) está bem definido.

3.2 Existência de Solução Local e Global

Nesta seção mostraremos que para $\mu = 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o problema abstrato (3.5)

$$\begin{cases} u_t + (A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}u = (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}u\,,\ t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega) \end{cases}$$

definido na seção anterior tem solução global e que esta é única. Iniciamos com um resultado de existência de solução local.

Teorema 3.2.1 *Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}$ e $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$. Então para todo $(t_0,u_0) \in U$, existe $T = T(t_0,u_0) > 0$ tal que o problema parabólico abstrato dado em (3.5) tem uma única solução em $(t_0\,,\,t_0+T)$ com valor inicial $u(t_0) = u_0$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.5.1 temos que $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é setorial e pelo Lema 3.1.6 temos que $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz na primeira variável. Logo pelo Teorema 1.4.3 temos que dado U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}$ e $(t_0,u_0) \in U$, existe $T = T(t_0,u_0) > 0$ tal que (3.5) tem uma única solução u em $(t_0\,,\,t_0+T)$ com valor inicial $u(t_0) = u_0$. ■

Nosso objetivo agora é mostrar a existência de solução global para o problema (3.5).Para isso além das hipóteses (H1) e (H2) dadas no início deste capítulo, assumiremos as seguintes hipóteses adicionais:

(H3) Existem constantes c_0, d_0 e d_0' tais que

$$\limsup_{|u|\longrightarrow\infty} \frac{f(u)}{u} \leq c_0\,, \qquad \limsup_{|u|\longrightarrow\infty} \frac{g(u)}{u} \leq d_0'$$

e $d_0 > d_0'$.

(H4) c_0 e d_0 são tais que o primeiro autovalor λ_0 do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (a - c_0)u = \lambda u \text{ em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial N_\Omega} = d_0\, u \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

é positivo.

Observação 3.2.2 *Notemos que a hipótese (H4) também é válida quando consideramos o operador do problema (3.6) em $H^{-1}(\Omega_{h_\epsilon})$, se h_ϵ está suficientemente próximo da inclusão $i_\Omega : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ na norma $C^1(\Omega)$, pois pelo Teorema 2.4.1 temos que*

$$\left|\left\langle \left((A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} - (A_{i_\Omega})_{-\frac{1}{2}}\right) u\,,\, \psi \right\rangle_{-1,1}\right| \leq C(h_\epsilon)\| u \|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} \| \psi \|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}}\,,$$

para todo $u, \psi \in X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$, com $\lim_{h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega} C(h_\epsilon) = 0$. Ou seja, quando consideramos o operador do problema (3.6) em $H^{-1}(\Omega_{h_\epsilon})$, seus autovalores estão suficientemente próximos dos autovalores na região fixa Ω.

Afim de garantirmos a existência de um atrator global para o problema (3.5) vamos provar o seguinte resultado:

Lema 3.2.3 *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} V_{h_\epsilon} : & H^1(\Omega_{h_\epsilon}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & V_{h_\epsilon}(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \dfrac{a}{2}\displaystyle\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - \displaystyle\int_{\Omega_{h_\epsilon}} \overline{F}(u)\, dx - \displaystyle\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} \overline{G}(\gamma(u))\, dS \end{array}$$

é um funcional de Lyapunov para o problema (1) em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$, onde a é um número real positivo e F, G : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são tais que $\dfrac{d}{dt}\overline{F}(u) = u_t f(u)$ e $\dfrac{d}{dt}\overline{G}(u) = u_t g(u)$.

Demonstração: Seja $u(t)$ uma solução de (1) em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_{h_\epsilon}(u(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \frac{a}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - \int_{\Omega_{h_\epsilon}} \overline{F}(u)\,dx - \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} \overline{G}(\gamma(u))\,dS\right)\\
&= \int_{\Omega_{h_\epsilon}} \left(\frac{d}{dx}u_t\right)\nabla u\,dx + a\int_{\Omega_{h_\epsilon}} u_t u\,dx - \int_{\Omega_{h_\epsilon}} u_t f(u)\,dx - \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} u_t g(\gamma(u))\,dS\\
&= -\int_{\Omega_{h_\epsilon}} u_t \Delta u\,dx + \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} u_t \frac{\partial u}{\partial N} dS + a\int_{\Omega_{h_\epsilon}} u_t u\,dx - \int_{\Omega_{h_\epsilon}} u_t f(u)\,dx - \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} u_t g(\gamma(u))\,dS\\
&= -\left(\int_{\Omega_{h_\epsilon}} u_t \Delta u\,dx - a\int_{\Omega_{h_\epsilon}} u_t u\,dx + \int_{\Omega_{h_\epsilon}} u_t f(u)\,dx\right)\\
&= -\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u_t|^2 dx\\
&= -\|u_t\|^2_{L^2(\Omega_{h_\epsilon})},
\end{aligned}$$

onde as igualdades acima foram obtidas utilizando integração por partes e o fato de $u(t)$ satisfazer (1) e sua condição de fronteira. Temos então que

$$\frac{d}{dt}V_{h_\epsilon}(u(t)) = -\|u_t\|^2_{L^2(\Omega_{h_\epsilon})} \leq 0$$

e portanto V_{h_ϵ} é decrescente em t ao longo de soluções de (1) em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$.

Queremos agora obter uma estimativa entre $V_{h_\epsilon}(u)$ e $\|u\|_{H^1(\Omega_{h_\epsilon})}$, para tanto vamos estimar primeiramente $\int_{\Omega_{h_\epsilon}} \overline{F}(u)\,dx$. Temos que

$$\overline{F}(u) = \int_0^u f(s)\,ds$$

e pela hipótese (H3) temos que existem $\eta_f > 0$ e $M(\eta_f) > 0$ tal que $\frac{f(s)}{s} - c_0 \leq \eta_f$ para $|s| > M(\eta_f)$. Se $s > 0$ temos que $f(s) \leq c_0 s + \eta_f s$, logo

$$\int_{\Omega_{h_\epsilon}} \overline{F}(u)\,dx = \int_{\Omega_{h_\epsilon}} \left(\int_0^u f(s)\,ds\right) dx \leq \int_{\Omega_{h_\epsilon}} \left(\int_0^u (c_0 s + \eta_f s)\,ds\right) dx \leq \frac{c_0}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx + k_0,$$

onde k_0 é uma constante que depende de η_f, $M(\eta_f)$ e do primeiro autovalor do problema (3.6) em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$, e se $s < 0$ obtemos uma estimativa similar a feita acima.

Vamos estimar agora $\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} \overline{G}(\gamma(u))\,dS$, temos que

$$\overline{G}(u) = \int_0^u g(s)\,ds$$

e pela hipótese (H3) temos que existem $\eta_g > 0$ e $N(\eta_g) > 0$ tal que $\frac{g(s)}{s} - d_0' \leq \eta_g$ para $|s| > N(\eta_g)$. Se $s > 0$ temos que $g(s) \leq d_0' s + \eta_g s$, logo

$$\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} \overline{G}(\gamma(u))\,dS = \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} \left(\int_0^u g(s)\,ds\right) dS \leq \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} \left(\int_0^u (d_0' s + \eta_g s)\,ds\right) dS \leq \frac{d_0'}{2}\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |\gamma(u)|^2 dS + k_0',$$

onde k_0' é uma constante que depende de η_g, $N(\eta_g)$ e do primeiro autovalor do problema (3.6) em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$, e se $s<0$ obtemos uma estimativa similar a feita acima.

Voltando agora para a expressão de $V_{h_\epsilon}(u)$ e utilizando as estimativas acima, teremos

$$\begin{aligned} V_{h_\epsilon}(u) &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \frac{a}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - \frac{c_0}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - k_0 - \frac{d_0'}{2}\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |\gamma(u)|^2 dS - k_0' \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \frac{(a-c_0)}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - \frac{d_0'}{2}\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |\gamma(u)|^2 dS - (k_0+k_0'), \end{aligned}$$

por (H3) temos que $d_0 > d_0'$, logo podemos escolher um $d_0'' \neq 0$ tal que

$$d_0 > d_0'' > d_0' \text{ e } \left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{a-c_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2} > 0,$$

obtendo então a estimativa:

$$\begin{aligned} V_{h_\epsilon}(u) &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \frac{(a-c_0)}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - \frac{d_0''}{2}\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |\gamma(u)|^2 dS - (k_0+k_0') \\ &= \frac{d_0''}{d_0}\left[\frac{d_0}{d_0''}\frac{1}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \frac{d_0}{d_0''}\frac{(a-c_0)}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - \frac{d_0}{2}\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |\gamma(u)|^2 dS - \frac{d_0}{d_0''}(k_0+k_0')\right] \\ &= \frac{d_0''}{d_0}\left[\left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{1}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{(a-c_0)}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a-c_0)}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - \frac{d_0}{2}\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |\gamma(u)|^2 dS - \frac{d_0''}{d_0}(k_0+k_0')\right] \\ &\geq \frac{d_0''}{d_0}\left\{\left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{1}{2}\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \left[\left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{(a-c_0)}{2} + \frac{\lambda_0}{2}\right]\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx - \frac{d_0''}{d_0}(k_0+k_0')\right\}. \end{aligned}$$

Notemos da estimativa acima que $V_{h_\epsilon}(u)$ fica limitado inferiormente por $\| u \|_{H^1(\Omega_{h_\epsilon})}$ mais uma constante que depende do primeiro autovalor do problema (3.6) e das não linearidades, logo $|V_{h_\epsilon}(u)| \longrightarrow \infty$ quando $\| u \|_{H^1(\Omega_{h_\epsilon})} \longrightarrow \infty$. Temos também que se $u(t)$ é uma solução que está definida para $\forall t \in \mathbb{R}$ e $V_{h_\epsilon}(u(t)) = V_{h_\epsilon}(u_0)$, com $u_0 \in H^1(\Omega_{h_\epsilon})$, teremos:

$$\frac{d}{dt}V_{h_\epsilon}(u(t)) = \frac{d}{dt}V_{h_\epsilon}(u_0) \Longrightarrow -\| u_t \|^2_{L^2(\Omega_{h_\epsilon})} = 0\,,$$

logo u é constante em t e segue que é um equilíbrio para (1) em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$. Portanto V_{h_ϵ} é um funcional de Lyapunov para (1) em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$. ■

Observação 3.2.4 *Pelo Lema 3.2.3 temos que V_{h_ϵ} é um funcional de Lyapunov para o problema (1) em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$. Definimos $\widetilde{V}_{h_\epsilon}$ em $H^1(\Omega)$ por*

$$\widetilde{V}_{h_\epsilon}(\Phi) = V_{h_\epsilon}(\Phi \circ h_\epsilon^{-1})\,. \tag{3.7}$$

Uma vez que u é uma solução de (2) se, e somente se, $v = h_\epsilon^{*-1}u$ é uma solução de (1), temos que $\widetilde{V}_{h_\epsilon}$ é um funcional de Lyapunov para o problema (2) em $H^1(\Omega)$.

Em [4] encontramos uma relação entre $\widetilde{V}_{i_\Omega}$ e $\widetilde{V}_{h_\epsilon}$:

Lema 3.2.5 *Seja Ω uma região com fronteira C^2 e $h : \Omega \longrightarrow \Omega_h$ um C^2-difeomorfismo. Então temos que:*

$$K_1(h)|\, V_{i_\Omega}(u)\,| \leq |\, V_h(u)\,| \leq K_2(h)|\, V_{i_\Omega}(u)\,|\,, \;\; \forall\, u \in H^1(\Omega).$$

Além disso, $K_1(h), K_2(h) \longrightarrow 1$ quando $h \longrightarrow i_\Omega$ na norma C^2.

Observação 3.2.6 *No caso em que $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ e $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, a mesma demonstração do Lema 3.2.5 pode ser feita, logo é possível obter a mesma relação entre $\widetilde{V}_{i_\Omega}$ e $\widetilde{V}_{h_\epsilon}$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma C^1.*

Desta forma podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 3.2.7 *Dados $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, as soluções do problema (3.5) estão globalmente definidas.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.5.1 temos que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é setorial e pelo Lema 3.1.6 temos que $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz, logo leva conjuntos fechados limitados de $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$ em limitados de $X^{-\frac{1}{2}+\delta}_{i_\Omega}$. Pelo Teorema 3.2.1 temos que existe $T = T(t_0, u_0) > 0$ tal que o problema (3.5) tem uma única solução u em $(t_0, t_0 + T)$ com valor inicial $u(t_0) = u_0$, além disso temos pela Observação 3.2.4 que $\widetilde{V}_{h_\epsilon}$ é um funcional de Lyapunov para o problema (2) em $H^1(\Omega)$.

Suponhamos que $T < \infty$, então pelo Teorema 1.4.5 temos que existe uma sequência $t_n \longrightarrow T^-$ tal que $\|\, u(t_n)\,\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow \infty$, o que implicaria que $|\widetilde{V}_{h_\epsilon}(u(t_n))| \longrightarrow \infty$, mas isso é uma contradição pois $\widetilde{V}_{h_\epsilon}$ é decrescente em t para cada $u \in H^1(\Omega)$. Portanto as soluções do problema (3.5) estão globalmente definidas. ∎

3.3 Boa Colocação da Formulação Fraca

Nesta seção mostraremos que o problema (2) em $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$ está bem definido para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, ou seja, que o problema

$$\begin{cases} u_t = (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} u + (H_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} u\,,\; t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \in X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega} \end{cases} \tag{3.8}$$

está bem definido.

Para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$, temos pelo Teorema 2.4.1 que $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é um operador setorial, e para $\delta > 0$ suficientemente pequeno consideremos o operador não linear

$$(H_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} : X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega} \longrightarrow X^{-\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^{-1}(\Omega)\,,$$

onde este operador é dado como a soma dos seguintes operadores:

(i) $$\begin{array}{rcll} (F_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} = F(\cdot, h_\epsilon): & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)\,, \\ & u & \longmapsto & F(u,h_\epsilon) \end{array}$$ definido por

$$\langle F(u,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_\Omega f(u)\,\Phi\,dx, \tag{3.9}$$

(ii) $$\begin{array}{rcll} (G_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}} = G(\cdot, h_\epsilon): & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)\,, \\ & u & \longmapsto & G(u,h_\epsilon) \end{array}$$ definido por

$$\langle G(u,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\,\gamma(\Phi)\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right|\,d\sigma(x)\,, \tag{3.10}$$

onde γ é a aplicação traço.

Vamos mostrar primeiramente que o operador $(F_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ está bem definido e é localmente Lipschitz.

Lema 3.3.1 *Se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, então o operador $(F_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ dado em (3.9) está bem definido.*

Demonstração: A demonstração é uma consequência do Lema 3.1.1, notando que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos a imersão compacta de $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}$ em $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}$. ∎

Lema 3.3.2 *Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o operador*

$$\begin{array}{rcll} F(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}: & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)\,, \\ & (u,h_\epsilon) & \longmapsto & F(u,h_\epsilon) \end{array}$$

definido por

$$\langle F(u,h_\epsilon)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_\Omega f(u)\,\Phi\,dx$$

é localmente Lipschitz contínuo em u.

Demonstração: A demonstração é uma consequência do Lema 3.1.2, notando que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos a imersão compacta de $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}$ em $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}$. ∎

Vamos mostrar agora que o operador $(G_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ dado em (3.10) está bem definido.

Lema 3.3.3 *Se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, então o operador $(G_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ dado em (3.10) está bem definido.*

Demonstração: A demonstração é uma consequência do Lema 3.1.4, notando que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos a imersão compacta de $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}$ em $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}$. ∎

Lema 3.3.4 *Sejam V é uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$, h_ϵ dada como em (2.1) e tal que $h_\epsilon \in V$, e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, então o operador*

$$\begin{array}{rcll} G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}: & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)\,, \\ & (u,h_\epsilon) & \longmapsto & G(u,h_\epsilon) \end{array}$$

definido por

$$\langle G(u,h_\epsilon)\,,\,\Phi\,\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\gamma(\Phi)\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right| d\sigma(x)$$

é localmente Lipschitz contínuo em h_ϵ e localmente Lipschitz contínuo em u.

Demonstração: A demonstração é uma consequência do Lema 3.1.5, notando que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos a imersão compacta de $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}$ em $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}$. ■

Lema 3.3.5 *Dados V uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$, h_ϵ como dada em (2.1) e tal que $h_\epsilon \in V$, e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, e consideremos o operador*

$$\begin{array}{rccl} H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}: & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}\times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)\,, \\ & (u,h_\epsilon) & \longmapsto & H(u,h_\epsilon) \end{array}$$

definido por $H(u,h_\epsilon) = F(u,h_\epsilon) + G(u,h_\epsilon)$, onde $(F_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ e $(G_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ são dados em (3.9) e (3.10), respectivamente. O operador $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ assim definido é localmente Lipschitz contínuo em h_ϵ e localmente Lipschitz contínuo em u.

Demonstração: O resultado segue imediatamente dos Lemas 3.3.2 e 3.3.4 ■

3.4 Existência de Solução Global do Problema na Forma Fraca

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de solução global para o problema (3.8). Iniciamos com o resultado de existência local de soluções.

Teorema 3.4.1 *Sejam $\delta > 0$ suficientemente pequeno, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}\times X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, V uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$ e $h_\epsilon \in V$. Então para todo $(t_0,u_0)\in U$, existe $T = T(t_0,u_0) > 0$ tal que o problema dado em (3.8) tem uma única solução em (t_0,t_0+T) com valor inicial $u(t_0) = u_0$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.4.1 temos que $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é setorial e pelo Lema 3.3.5 temos que $(H_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é localmente Lipschitz em u. Logo pelo Teorema 1.4.3 temos que dado U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}\times X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ e $(t_0,u_0)\in U$, existe $T = T(t_0,u_0) > 0$ tal que o problema (3.8) tem uma única solução u em (t_0,t_0+T) com valor inicial $u(t_0) = u_0$. ■

Para garantirmos que as soluções do problema (3.8) estão globalmente definidas, vamos compará-las com as soluções do problema dado em (3.5) e com o problema

$$\begin{cases} u_t + (A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}u = (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}u\,, & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu} \end{cases}, \tag{3.11}$$

onde o operador $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ foi definido em (3.1) e $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ foi definido em (3.2) e neste caso tomamos $\mu > 0$ suficientemente pequeno.

Teorema 3.4.2 *Se V é uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$, $h_\epsilon \in V$ e $\delta, \mu > 0$ são suficientemente pequenos, então as soluções do problema (3.8) estão globalmente definidas.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.5.1 temos que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ definido em (3.1) é setorial, e pelo Lema 3.1.6 temos que o operador não linear $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ definido em (3.2) é localmente Lipschitz em u. Portanto pelo Teorema 1.4.3 temos que dado U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}\times X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$ e $(t_0, u_0) \in U$, existe uma única solução $\overline{u}$ do problema (3.11) em (t_0, t_0+T) com valor inicial $\overline{u}(t_0) = u_0$.

Vamos mostrar agora que $\overline{u}$ está globalmente definida, para tanto mostremos que $\overline{u}$ também é solução do problema (3.5). Suponhamos sem perda de generalidade que $\mathrm{Re}\,\sigma\Big((A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}\Big) > w > 0$ e $\|(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}\overline{u}(t;t_0,u_0)\|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}} \leq N$ para todo $t \geq t_0$. Pela fórmula da variação das constantes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}(t;t_0,u_0)\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}} &\leq \Big\| e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(t-t_0)} u_0 \Big\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}} + \int_{t_0}^{t} \Big\| e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(t-s)} (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(\overline{u}(s)) \Big\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \Big\| (A_{h_\epsilon})^{\mu}_{-(\frac{1}{2}-\delta)} e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(t-t_0)} u_0 \Big\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \Big\| (A_{h_\epsilon})^{1-\delta}_{-(\frac{1}{2}-\delta)} e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(t-s)} (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(\overline{u}(s)) \Big\|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}+\delta}} ds \\
&\leq C_\mu (t-t_0)^{-\mu} e^{-w(t-t_0)} \|u_0\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}} + N C_{1-\delta} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-(1-\delta)} e^{-w(t-s)} ds\,,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade acima utilizamos as estimativas do Teorema 1.3.22 e C_μ e $C_{1-\delta}$ são constantes limitadas para todo intervalo compacto de $(0, \infty)$ e que dependem de h_ϵ. Logo para $t \geq t_0 + 1$ temos que o lado direito da expressão acima é limitada, logo $\|\overline{u}(t;t_0,u_0)\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}}$ é limitado, portanto após um tempo finito a solução $\overline{u} \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}$. Sabemos pelo Teorema 3.2.7 que dado $\overline{u} \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}$ existe uma única solução global para o problema (3.5) com condição inicial $\overline{u}$. Como o operador linear é o mesmo nos problemas (3.5) e (3.11), então a solução $\overline{u}$ de (3.11) também é solução de (3.5) e está globalmente definida.

Por fim, vamos mostrar que as soluções do problema (3.8) são as mesmas do problema (3.11), logo estão globalmente definidas. Dado $u_0 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\mu}$, temos pelo Teorema 3.4.1 que existe uma única solução local $\overline{u}$ do problema (3.8) com valor inicial $\overline{u}(t_0) = u_0$, e temos também que existe uma única solução global $\widetilde{u}$ do problema (3.11) com valor inicial $\widetilde{u}(t_0) = u_0$. Como o operador linear do problema (3.11) é dado por $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)} := (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\Big|_{X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}+\delta}}$, então $\overline{u}$ também será solução do problema (3.11), logo $\overline{u}$ está globalmente definida. Concluímos então que as soluções do problema (3.8) estão globalmente definidas. ■

Capítulo 4

Existência e Continuidade de Atratores Globais

O objetivo deste último capítulo é provar a existência e continuidade de atrator global para o problema (2) em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno e h_ϵ em uma vizinhança V de i_Ω na norma $C^1(\Omega)$. Fixaremos uma perturbação $h_\epsilon \in V$ e trabalharemos com o operador do problema (2) em $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)$, então iremos obter uma família de atratores globais $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ que convergem para o atrator global de (1) na região fixa Ω. Para tanto utilizaremos alguns resultados obtidos em [1] e descritos brevemente no Capítulo 1.

4.1 Existência de Atratores Globais para Sistemas Gradientes

Nosso objetivo nesta seção é provar primeiramente que o fluxo gerado por (2) tem um atrator global $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, para cada h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω na norma $C^1(\Omega)$. Com esse objetivo, provemos o seguinte resultado:

Lema 4.1.1 *Dados $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, o semigrupo não linear $T(h_\epsilon, t)$ gerado por (2) em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, para h_ϵ em uma vizinhança da inclusão i_Ω na norma $C^1(\Omega)$, é um sistema gradiente.*

Demonstração: Sabemos pelo Lema 3.2.3 e pela Observação 3.2.4 que $\widetilde{V}_{h_\epsilon}$ dado em (3.7) é um funcional de Lyapunov para $\left\{T(h_\epsilon, t)\right\}_{t\geq 0}$. Nos resta apenas provar que cada órbita positiva e limitada de $H^1(\Omega)$ é pré-compacta. De fato, seja $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ e consideremos a órbita positiva que passa por u, dada por $\gamma^+(u) = \left\{T(h_\epsilon, t)\right\}_{t\geq 0}$ limitada em $H^1(\Omega)$. Pelo Teorema 1.4.6, sendo $\gamma^+(u)$ uma solução do problema (3.5) em (t_0, ∞) com $\|\gamma^+(u)\|_{H^1(\Omega)}$ limitada, então para $t > t_0$ temos que $\gamma^+(u)$ está em um conjunto compacto em $H^1(\Omega)$. Portanto $\gamma^+(u)$ é pré-compacto e segue que $T(h_\epsilon, t)$ é um sistema gradiente. ■

Com o objetivo de provar a existência de atrator para o problema (2) em $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$, provemos o seguinte resultado:

Lema 4.1.2 *A família E_{h_ϵ} de equilíbrios do problema (1) é uniformemente limitada em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$, para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω.*

Demonstração: Os equilíbrios do problema (1) em Ω_{h_ϵ} são as soluções constantes no tempo, logo são soluções do problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x) - au(x) + f(u(x)) &= 0\,, \quad x \in \Omega_{h_\epsilon} \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x) &= g(u(x))\,, \ x \in \partial\Omega_{h_\epsilon}\,. \end{cases}$$

Multiplicando por u e integrando a equação acima, obtemos:

$$\int_{\Omega_{h_\epsilon}} u\Delta u\, dx - a\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx + \int_{\Omega_{h_\epsilon}} uf(u)\, dx = 0\,,$$

mas

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{h_\epsilon}} u\Delta u\, dx &= -\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} u\frac{\partial u}{\partial N}\, dS \\ &= -\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} ug(u)\, dS\,. \end{aligned}$$

Logo

$$-\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} ug(u)\, dS - a\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx + \int_{\Omega_{h_\epsilon}} uf(u)\, dx = 0\,. \tag{4.1}$$

Pela hipótese (H4) (ver Capítulo 3), temos que existem constantes c_0, d_0 tais que o primeiro autovalor $\lambda_0(\epsilon)$ do problema (3.6) é positivo. Então temos que:

$$0 < \lambda_0(\epsilon) = \inf_{u\in H^1(\Omega_{h_\epsilon})} \frac{\langle -\Delta u + (a - c_0)u\,,\, u\rangle}{\|u\|_{L^2(\Omega_{h_\epsilon})}}\,,$$

então

$$\begin{aligned} &\langle -\Delta u + (a-c_0)u\,,\, u\rangle &&\geq \lambda_0(\epsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega_{h_\epsilon})} \\ \Longleftrightarrow\quad &-\langle \Delta u\,,\, u\rangle + (a-c_0)\|u\|^2_{L^2(\Omega_{h_\epsilon})} &&\geq \lambda_0(\epsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega_{h_\epsilon})} \\ \Longleftrightarrow\quad &-\int_{\Omega_{h_\epsilon}} u\Delta u\, dx + (a-c_0)\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx &&\geq \lambda_0(\epsilon)\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx\,. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_{h_\epsilon}} u\Delta u\, dx &= \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} u\frac{\partial u}{\partial N}\, dS \\ &= \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2\, dx - d_0\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2\, dS\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2\, dx \;-\; d_0 \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dS \;+\; (a - c_0) \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx \;\geq\; \lambda_0(\epsilon) \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx\,. \tag{4.2}$$

Pela hipótese (H3) (ver Capítulo 3), segue que:

- Existem $\eta_f > 0$ e $M(\eta_f) > 0$ tal que $\dfrac{f(u)}{u} - c_0 \leq \eta_f \Longrightarrow f(u)u \leq (c_0 + \eta_f)u^2$ para $|u| > M$.
- Existem $\eta_g > 0$ e $N(\eta_g) > 0$ tal que $\dfrac{g(u)}{u} - d_0' \leq \eta_g \Longrightarrow g(u)u \leq (d_0' + \eta_g)u^2$ para $|u| > N$.

Definamos agora os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{ x \in \Omega_{h_\epsilon} \,\middle|\, |u(x)| > M \right\},\\
\Omega_2 &= \Omega_{h_\epsilon} \setminus \Omega_1\,,\\
\partial\Omega_1 &= \left\{ x \in \partial\Omega_{h_\epsilon} \,\middle|\, |u(x)| > N \right\} \text{ e}\\
\partial\Omega_2 &= \partial\Omega_{h_\epsilon} \setminus \partial\Omega_1\,.
\end{aligned}$$

Logo da equação (4.1) segue que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx &\leq -a \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx + (c_0 + \eta_f) \int_{\Omega_1} |u|^2 dx + \int_{\Omega_2} M f(u)\, dx\\
&\quad + (\,d_0' + \eta_g\,) \int_{\partial\Omega_1} |u|^2 dS + \int_{\partial\Omega_2} N g(u)\, dS\\
&\leq (\,c_0 - a\,) \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx + d_0' \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dS + \eta_f \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx \qquad (4.3)\\
&\quad + \eta_g \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dS + N \|g\|_{C^2(\partial\Omega_\epsilon)} |\partial\Omega_{h_\epsilon}| + M \|f\|_{C^1(\Omega_\epsilon)} |\Omega_{h_\epsilon}|\,,
\end{aligned}$$

onde $|\Omega_{h_\epsilon}|$ é a medida de Ω_{h_ϵ} e $|\partial\Omega_{h_\epsilon}|$ é a medida de $\partial\Omega_{h_\epsilon}$. Subtraindo (4.2) de (4.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
(\,d_0 - d_0'\,) \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dS + \lambda_0(\epsilon) \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx &\leq \eta_f \int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx + \eta_g \int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dS \qquad (4.4)\\
&\quad + N \|g\|_{C^2(\partial\Omega_\epsilon)} |\partial\Omega_{h_\epsilon}| + M \|f\|_{C^1(\Omega_\epsilon)} |\Omega_{h_\epsilon}|\,.
\end{aligned}$$

Notemos que em uma vizinhança da região fixa Ω, ambos $\lambda_0(\epsilon)$, $|\Omega_{h_\epsilon}|$ e $|\partial\Omega_{h_\epsilon}|$ são funções contínuas de ϵ, e portanto, são limitadas. Então para η_f e η_g suficientemente pequenos temos que o lado direito de (4.4) é limitado, logo $\int_{\partial\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dS$ e $\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |u|^2 dx$ são limitados. Portanto concluímos também de (4.3) que $\int_{\Omega_{h_\epsilon}} |\nabla u|^2 dx$ é limitado, e segue então que os equilíbrios de (1) são uniformemente limitados em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$, para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω. ∎

Observação 4.1.3 *Uma vez que u é um equilíbrio de (2) se, e somente se, $v = h_\epsilon^{*-1} u$ é um equilíbrio de (1), temos pelo Lema 4.1.2 que a família E_{h_ϵ} de equilíbrios do problema (1) é uniformemente limitada em $H^1(\Omega_{h_\epsilon})$, para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω, portanto a família $\widetilde{E}_{h_\epsilon}$ de equilíbrios do problema (2) também é uniformemente limitada em $H^1(\Omega)$.*

Estamos aptos agora a mostrar que o problema (2) admite um atrator global em $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$.

Teorema 4.1.4 *O fluxo gerado pelo problema (2) tem um atrator global $\tilde{A}_{h_\epsilon}$ em $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$, para cada h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω em $C^1(\Omega)$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.1.1 temos que o fluxo $T(h_\epsilon, t)$ gerado por (2) é um sistema gradiente em $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$, e pelo Lema 4.1.2 e Observação 4.1.3 temos que a família de equilíbrios do problema (2) é uniformemente limitada em $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$. Pelo Teorema 1.4.10 teremos a existência do atrator se além dos fatos acima, tivermos que o fluxo $T(h_\epsilon, t)$ gerado por (2) é assintoticamente suave.

De fato, seja B um conjunto limitado, fechado e não vazio de $H^1(\Omega)$ tal que $T(h_\epsilon, t)B \subset B$ $\forall t \geq 0$. Pela propriedade de semigrupos, temos que para $t > 1$

$$T(h_\epsilon, t)B = T(h_\epsilon, t-1)T(h_\epsilon, 1)B \subset B.$$

Tomemos então $J := T(h_\epsilon, 1)B$. Temos os seguintes fatos sobre J:

(i) $J \subset B$. De fato, como por hipótese $T(h_\epsilon, t)B \subset B$ $\forall t \geq 0$, então $J = T(h_\epsilon, 1)B \subset B$.

(ii) Vamos mostrar que J é compacto. Temos que que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ tem resolvente compacto, logo pelo Teorema 1.3.24 temos que a imersão $X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{i_\Omega} \subset X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$ é compacta para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Mostremos que J é um limitado de $X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}$, logo pela imersão compacta teremos que J é um conjunto pré-compacto de $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$. Suponhamos sem perda de generalidade que Re $\sigma\Big((A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}\Big) > w > 0$, e temos também pelo Lema 3.1.6 que o operador não linear $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz, logo existe constante positiva M tal que $\| (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(T(h_\epsilon, s)) \|_{X^{-\frac{1}{2}+\delta}_{i_\Omega}} \leq M$ para $0 \leq s \leq 1$. Tomemos $j \in J$, então existe $b \in B$ tal que $j = T(h_\epsilon, 1)b$ e $\| b \|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} \leq N$, onde N é uma constante positiva. Logo pela fórmula da variação das constantes e o Teorema 1.3.22 teremos:

$$\begin{aligned}
\| j \|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}} &= \| T(h_\epsilon, 1)b \|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}} \\
&\leq \Big\| e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(1)} b \Big\|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}} + \Big\| \int_0^1 e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(1-s)} (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(T(h_\epsilon, s))\, ds \Big\|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}} \\
&= \Big\| (A_{h_\epsilon})^{\frac{\delta}{2}}_{-(\frac{1}{2}-\delta)} e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(1)} b \Big\|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} \\
&\quad + \int_0^1 \Big\| (A_{h_\epsilon})^{1-\frac{\delta}{2}}_{-(\frac{1}{2}-\delta)} e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(1-s)} (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(T(h_\epsilon, s)) \Big\|_{X^{-\frac{1}{2}+\delta}_{i_\Omega}} ds \\
&\leq C_1 e^{-w} \| b \|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} + \int_0^1 C_2 (1-s)^{-(1-\frac{\delta}{2})} e^{-w(1-s)} \Big\| (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(T(h_\epsilon, s)) \Big\|_{X^{-\frac{1}{2}+\delta}_{i_\Omega}} ds \\
&\leq C_1 N e^{-w} + C_2 M \int_0^1 (1-s)^{-(1-\frac{\delta}{2})} e^{-w(1-s)}\, ds,
\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes que dependem de δ e h_ϵ. Como a expressão acima é limitada, concluímos então que J é um limitado de $X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}$. Como a imersão $X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} \subset X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}$ é compacta e J é um limitado de $X_{h_\epsilon}^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}$, temos que J é um conjunto pré-compacto de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$. Agora, como B é fechado e $T(h_\epsilon, t)$ é contínua, então $J = T(h_\epsilon, t)B$ é fechado e isso implicará que J é um compacto de $H^1(\Omega)$.

(iii) J atrai B. De fato, para $\forall t > 1$ temos que

$$T(h_\epsilon, t)B = T(h_\epsilon, 1)\underbrace{T(h_\epsilon, t-1)B}_{\subset B} \subset J\,.$$

Portanto segue que $T(h_\epsilon, t)$ é assintoticamente suave. Logo, pelo Teorema 1.4.10 temos que, o fluxo gerado pelo problema (2) em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ possui um atrator global $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$, para cada h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω em $C^1(\Omega)$. ■

Também temos a seguinte limitação para a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$:

Teorema 4.1.5 *A família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ do problema (2) é uniformemente limitada em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω em $C^1(\Omega)$, e limitada em $L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração: Temos pelo Lema 4.1.2 e pela Observação 4.1.3 que a família de equilíbrios $\widetilde{E}_{h_\epsilon}$ do problema (2) é uniformemente limitada em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, ou seja, existe B_r aberto de $H^1(\Omega)$ tal que $\widetilde{E}_{h_\epsilon} \subset B_r$ para todo h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω.

Seja $\widetilde{V}_{i_\Omega}$ o funcional de Lyapunov, como no Lema 3.2.3 em $H^1(\Omega)$, dado por:

$$\widetilde{V}_{i_\Omega}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \int_\Omega F(u)\,dx - \int_{\partial\Omega} G(\gamma(u))\,dS\,.$$

Usando as mesmas estimativas utilizadas no Lema 3.2.3, temos que:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{i_\Omega}(u) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + \frac{|c_0|}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + |k_0| + \frac{|d_0'|}{2}\int_{\partial\Omega} |\gamma(u)|^2 dS + |k_0'| \\ &\leq K\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \overline{K}\,,\end{aligned}$$

onde K e $\overline{K}$ são constantes positivas.

Dado $\overline{u} \in B_r \subset H^1(\Omega)$, temos pela estimativa acima que $\widetilde{V}_{i_\Omega}(\overline{u})$ é limitado, portanto existe $M > 0$ tal que $\widetilde{V}_{i_\Omega}(B_r) < M$. Pelo Lema 3.2.5 e Observação 3.2.6, temos que $|\widetilde{V}_{h_\epsilon}(u)| \leq K_2(h_\epsilon)|\widetilde{V}_{i_\Omega}(u)|$ com $K_2(h_\epsilon) \longrightarrow 1$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ na norma C^1, logo $\widetilde{V}_{h_\epsilon}(B_r) \leq M$ para todo h_ϵ em uma vizinhança da inclusão.

Seja $u \in \widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$, temos que $\|T(h_\epsilon, -t)u\|_{H^1(\Omega)} \leq r$ para t suficientemente grande, pois $T(h_\epsilon, -t)u \longrightarrow \widetilde{E}_{h_\epsilon}$ quando $t \longrightarrow \infty$ e $\widetilde{E}_{h_\epsilon} \subset B_r$ para todo h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω. Como $\widetilde{V}_{h_\epsilon}(B_r) \leq M$, segue que

$\widetilde{V}_{h_\epsilon}(T(h_\epsilon,-t)u) \leq M$ para t suficientemente grande, logo pela propriedade de semigrupos temos que:

$$\widetilde{V}_{h_\epsilon}(u) = \widetilde{V}_{h_\epsilon}(T(h_\epsilon,t)T(h_\epsilon,-t)u) \leq \widetilde{V}_{h_\epsilon}(T(h_\epsilon,-t)u) < M\,.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2.3, Observação 3.2.6 e pela desigualdade acima, temos que

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} \leq K_3\widetilde{V}_{h_\epsilon}(u) + K_4 \ \leq K_3M + K_4 = \widetilde{K}\,,$$

onde K_3 e K_4 são constantes positivas, logo $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ é uniformemente limitado em $H^1(\Omega)$.

Concluímos até agora que, para cada h_ϵ suficientemente próximo de i_Ω na norma $C^1(\Omega)$, o atrator global é uniformemente limitado em $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$. Para obtermos uma limitação em $L^\infty(\Omega)$ é necessário mostrar que o atrator é limitado em um espaço que esteja imerso nas contínuas. Para tanto provaremos a seguir que o atrator está limitado em $X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, pois pelo Teorema 1.3.25 temos que $X^\alpha_{h_\epsilon} \subset C(\Omega)$ para $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Pelo Teorema 2.5.1 temos que o operador $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é setorial e pelo Lema 3.1.6 temos que o operador $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ é localmente Lipschitz, onde esses operadores são como dados no problema abstrato (3.5). Sabemos também que $(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ tem resolvente compacto e $(H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ leva limitados de $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$ em limitados de $X^{-\frac{1}{2}+\delta}_{i_\Omega}$.

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos pelo Teorema 1.3.24 que a imersão $X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon} \subset X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$ é compacta. Vamos mostrar que dado $u \in \widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$, então $\| u(t;t_0,u_0) \|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}}$ é limitado para $t \geq t_0 + 1$. Suponhamos sem perda de generalidade que $Re\,\sigma\Big((A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}\Big) > w > 0$ e $\| (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(u(s)) \|_{X^{-\frac{1}{2}+\delta}_{i_\Omega}} \leq M$ para $\forall s \geq t_0$. Pela fórmula da variação das constantes e pelo Teorema 1.3.22, obtemos:

$$\begin{aligned}
\| u(t;t_0,u_0) \|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}} &\leq \Big\| e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(t-t_0)} u_0 \Big\|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}} + \int_{t_0}^t \Big\| e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(t-s)} (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(u(s)) \Big\|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}} ds \\
&= \Big\| (A_{h_\epsilon})^{\frac{\delta}{2}}_{-(\frac{1}{2}-\delta)} e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(t-t_0)} u_0 \Big\|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} \\
&\quad + \int_{t_0}^t \Big\| (A_{h_\epsilon})^{1-\frac{\delta}{2}}_{-(\frac{1}{2}-\delta)} e^{-(A_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(t-s)} (H_{h_\epsilon})_{-(\frac{1}{2}-\delta)}(u(s)) \Big\|_{X^{-\frac{1}{2}+\delta}_{i_\Omega}} ds \\
&\leq C_1(t-t_0)^{-\frac{\delta}{2}}\, e^{-w(t-t_0)} \| u(t_0) \|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} + MC_2 \int_{t_0}^t (t-s)^{-(1-\frac{\delta}{2})} e^{-w(t-s)} ds\,,
\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes que dependem de $\delta > 0$ e h_ϵ. Portanto para $t \geq t_0 + 1$ temos que o lado direito da expressão acima é limitado, logo $\| u(t;t_0,u_0) \|_{X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon}}$ é limitado.

Para um domínio de dimensão 2 a imersão $X^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}_{h_\epsilon} \subset C^0(\Omega)$ é válida para $\delta > 0$. Portanto dado $u \in \widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$, temos que u também é limitado na norma $C^0(\Omega)$ e segue que o atrator é limitado em $L^\infty(\Omega)$, para h_ϵ suficientemente próximo de i_Ω na norma $C^1(\Omega)$. ■

4.2 Existência de Atrator Global para a Formulação Fraca

O objetivo desta seção é mostrar a existência de atrator global para o problema (3.8) e depois provar que para h_ϵ suficientemente próximo de i_Ω na norma $C^1(\Omega)$, a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ é limitada em $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 4.2.1 *Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o fluxo gerado pelo problema (3.8) admite um atrator global em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ e além disso a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ é uniformemente limitada em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ e limitada em $L^\infty(\Omega)$, para cada h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω na norma $C^1(\Omega)$.*

Demonstração: Notemos primeiramente que no Teorema 4.1.4 ao garantirmos a existência de um atrator global $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ para o problema (2) em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, estamos garantindo a existência de atrator global para o problema (3.5). Além disso, dada u uma solução global do problema (3.5), ela também será uma solução global para o problema (3.11).

Seja $T(h_\epsilon, t)$ o semigrupo gerado pelo problema (3.11) e B um limitado de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Usando a fórmula da variação das constantes e estimativas similares as feitas no Teorema 4.1.4 é possível mostrar que para $t > 1$, $T(h_\epsilon, 1)B$ é um limitado de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$. Logo, como $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ é um atrator global do problema (3.5), então dado $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, t_1 > 0$ tal que

$$T(h_\epsilon, t_1)T(h_\epsilon, 1)B \subset \epsilon - \text{vizinhança de } \widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon} \text{ em } X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega).$$

Como $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}$ está compactamente imerso em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, segue que

$$T(h_\epsilon, t_1)T(h_\epsilon, 1)B \subset \epsilon - \text{vizinhança de } \widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon} \text{ em } X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

Usando a propriedade de semigrupos teremos:

$$T(h_\epsilon, t_1)T(h_\epsilon, 1)B = T(h_\epsilon, t_1 + 1)B \subset \epsilon - \text{vizinhança de } \widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon} \text{ em } X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta},$$

logo $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ atrai limitados de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ e portanto é um atrator global para o problema (3.8). E segue imediatamente do Teorema 4.1.5 que a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ é uniformemente limitada em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, e limitada em $L^\infty(\Omega)$, para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω na norma $C^1(\Omega)$. ■

4.3 Continuidade dos Equilíbrios

Nesta seção, investigamos a continuidade dos equilíbrios do problema (3.8) com relação à perturbação do domínio. Provaremos que os equilíbrios do problema (3.8) variam continuamente em uma vizinhança V de i_Ω na norma $C^1(\Omega)$. Para tanto, além das condições (H3) e (H4), do capítulo anterior, vamos precisar das seguintes hipóteses:

(H5) Os equilíbrios do problema (3.8) são todos hiperbólicos.

E necessitaremos restringir as condições de crescimento para as não linearidades f e g. Logo as hipóteses (H1) e (H2) serão restringidas à hipótese:

(H6) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ são funções limitadas com derivadas limitadas.

Observação 4.3.1 *A hipótese (H6) pode ser obtida se os atratores do problema (3.8) são uniformemente limitados em $L^\infty(\Omega)$, para h_ϵ suficientemente próximo de i_Ω.*

Seja $\widetilde{E}_{h_\epsilon}$ a família de equilíbrios do problema (3.8) em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Temos então o primeiro resultado sobre a continuidade dos equilíbrios:

Lema 4.3.2 *Os equilíbrios do problema (3.8) em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, são semicontínuos superiormente em $h_\epsilon = i_\Omega$.*

Demonstração: Seja V uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$ e $\left\{ e(h_\epsilon) \right\}_{h_\epsilon \in V}$ uma família de equilíbrios do problema (3.8) em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$. Então para cada $h_\epsilon \in V$, seja $T(h_\epsilon, t)$ o semigrupo gerado pelo problema (3.8). Como os equilíbrios são soluções constantes no tempo, temos que $T(h_\epsilon, t)e(h_\epsilon) = e(h_\epsilon)$, para todo $t > 0$.

Temos pelo Lema 4.1.2 e Observação 4.1.3, que os equilíbrios do problema (2) são uniformemente limitados em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, como os problemas (3.8) e (2) tem as mesmas soluções, então possuem os mesmos equilíbrios.

Consideremos então uma sequência de equilíbrios $\left(e(h_{\epsilon_n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\left\{\widetilde{E}_{h_\epsilon}\right\}_{h_\epsilon \in V}$ do problema (3.8). Como os equilíbrios são limitados em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, então existe uma subsequência $\left(e(h_{\epsilon_{n_k}})\right)_{n_k\in\mathbb{N}}$ em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que $e(h_{\epsilon_{n_k}}) \longrightarrow e(h_{\epsilon_0})$ em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$. Logo para todo $t > 0$, teremos que:

$$
\begin{aligned}
\| T(h_{\epsilon_{n_k}}, t)e(h_{\epsilon_{n_k}}) - T(i_\Omega, t)e(h_{\epsilon_0}) \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} \leq\ & \| T(h_{\epsilon_{n_k}}, t)e(h_{\epsilon_{n_k}}) - T(i_\Omega, t)e(h_{\epsilon_{n_k}}) \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} && (4.5)\\
& + \| T(i_\Omega, t)e(h_{\epsilon_{n_k}}) - T(i_\Omega, t)e(h_{\epsilon_0}) \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} . && (4.6)
\end{aligned}
$$

Temos que (4.5) vai a zero quando $h_{\epsilon_{n_k}} \longrightarrow i_\Omega$ em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$ pois $T(h_\epsilon, t)$ é contínuo em $h_\epsilon \in V$, e (4.6) vai a zero pois $e(h_{\epsilon_{n_k}}) \longrightarrow e(h_{\epsilon_0})$ em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$. Temos então que:

$$
e(h_{\epsilon_{n_k}}) = T(h_{\epsilon_{n_k}}, t)e(h_{\epsilon_{n_k}}) \longrightarrow T(i_\Omega, t)e(h_{\epsilon_0}) \text{ em } X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta},
$$

$$
e(h_{\epsilon_{n_k}}) \longrightarrow e(h_{\epsilon_0}) \text{ em } X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta},
$$

para todo $t > 0$. Segue que $T(i_\Omega, t)e(h_{\epsilon_0}) = e(h_{\epsilon_0})$ para todo $t > 0$, ou seja, $e(h_{\epsilon_0})$ é ponto de equilíbrio do problema (3.8) para $h_\epsilon = i_\Omega$. Portanto a família de equilíbrios $\left\{\widetilde{E}_{h_\epsilon}\right\}_{h_\epsilon \in V}$ é semicontínua superiormente em $h_\epsilon = i_\Omega$. ■

A semicontinuidade inferior dos equilíbrios será obtida aplicando-se o Teorema da Função Implícita. Isso é possível quando os equilíbrios são todos hiperbólicos. Para tanto, devemos ter certa regularidade para o operador $(H_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ do problema (3.8). Logo, antes de provarmos a semicontinuidade inferior dos equilíbrios de (3.8), provemos os seguintes resultados:

Lema 4.3.3 *Se a hipótese (H6) está satisfeita e $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, então o operador*

$$\begin{array}{rccl} F(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}: & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)\,, \\ & (u, h_\epsilon) & \longmapsto & F(u, h_\epsilon) \end{array}$$

definido por

$$\langle\, F(u,h_\epsilon)\,,\, \Phi\,\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_\Omega f(u)\,\Phi\, dx$$

é Lipschitz contínuo em u.

Demonstração: A demonstração é uma consequência do Lema 3.3.2 e do fato de f ser globalmente Lipschitz (hipótese (H6)). ■

Vamos mostrar agora que o operador não linear $G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ é Lipschitz contínuo em relação as suas variáveis.

Lema 4.3.4 *Se a hipótese (H6) está satisfeita e $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, então o operador*

$$\begin{array}{rccl} G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}: & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)\,, \\ & (u, h_\epsilon) & \longmapsto & G(u, h_\epsilon) \end{array}$$

definido por

$$\Big\langle G(u,h_\epsilon)\,,\, \Phi\,\Big\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} h_\epsilon}{J h_\epsilon} \right| d\sigma(x)$$

é Lipschitz contínuo em u para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω, e localmente Lipschtz contínuo em h_ϵ uniformemente para $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$.

Demonstração: A demonstração é uma consequência do Lema 3.3.4 e do fato de g e sua derivada serem globalmente Lipschitz (hipótese (H6)). ■

Dos Lemas 4.3.3 e 4.3.4 segue o seguinte resultado:

Lema 4.3.5 *Suponhamos que (H6) seja satisfeita, $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, e consideremos o operador*

$$\begin{array}{rccl} H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}: & X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega) & \longrightarrow & X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)\,, \\ & (u, h_\epsilon) & \longmapsto & H(u, h_\epsilon) \end{array}$$

definido por $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}} := F(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}} + G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$, onde $F(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ e $G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ são dados em (3.9) e (3.10), respectivamente. Então o operador $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ assim definido é localmente Lipschitz contínuo em h_ϵ uniformemente para $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, e Lipschitz contínuo em u para h_ϵ em uma vizinhança de i_Ω.

Demonstração: O resultado segue imediatamente dos Lemas 4.3.3 e 4.3.4 ■

Seja V uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$ tal que $e(h_\epsilon)$ é um equilíbrio hiperbólico de (3.8) para todo $h_\epsilon \in V$ com $e(h_\epsilon) \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Com o objetivo de provar a semicontinuidade inferior dos equilíbrios e posteriormente a continuidade das variedades estáveis e instáveis, vamos provar algumas propriedades de regularidade para o operador não linear $(H_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ do problema (3.8).

Lema 4.3.6 *Suponhamos que (H6) seja satisfeita. Então a aplicação $F(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ definida no Lema 4.3.3 é Hadamard diferenciável com respeito à u, para todo $(u, h_\epsilon) \in X_{i_\Omega}^{\eta} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, com $0 < \eta < \dfrac{1}{2}$ e derivada dada por:*

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(u, h_\epsilon) w \,,\, \Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_\Omega f'(u) w\, \Phi\, dx\,, \tag{4.7}$$

para todo $w \in X_{i_\Omega}^{\eta}$.

Demonstração: Para todo $(u, h_\epsilon) \in X_{i_\Omega}^{\eta} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega)$ e $\Phi \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, seja $T : X_{i_\Omega}^{\eta} \longrightarrow \mathcal{B}(X_{i_\Omega}^{\eta}, X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}})$ a aplicação dada em (4.7), onde $\mathcal{B}(X_{i_\Omega}^{\eta}, X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}})$ é o conjunto dos operadores lineares limitados de $X_{i_\Omega}^{\eta}$ em $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)$. Então, para cada $p \in X_{i_\Omega}^{\eta}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\left| \langle F(u+tp+tk, h_\epsilon) - F(u, h_\epsilon) - T(u)(tp), \Phi \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right| &\le \int_\Omega \left| [\, f(u+tp+tk) - f(u) - f'(u)(tp)\,]\, \Phi \right| dx \\
&\le \left(\int_\Omega \left| f(u+t(p+k)) - f(u) - f'(u)(tp) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le K_1 \left(\int_\Omega \left| f(u+t(p+k)) - f(u) - f'(u)(tp) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

onde K_1 é a constante de imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ garantida pelo Teorema 1.1.12. Agora temos que:

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega \left| f(u+t(p+k)) - f(u) - f'(u)(tp) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \Bigg(\int_\Omega \Big| f(u+t(p+k)) - f(u+tp) \\
&\quad + f(u+tp) - f(u) - f'(u)(tp) \Big|^2 dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \underbrace{\left(\int_\Omega \left| f(u+t(p+k)) - f(u+tp) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{(I)} \qquad (4.8) \\
&\quad + \underbrace{\left(\int_\Omega \left| f(u+tp) - f(u) - f'(u)(tp) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{(II)} . \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Para (I) temos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|t|}\Big(\int_\Omega \Big|f(u+t(p+k)) - f(u+tp)\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{|t|}\Big(\int_\Omega \Big|f'(u+t^*(p+k))(tk)\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f'\|_\infty \Big(\int_\Omega |k|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_2 \|f'\|_\infty \|k\|_{X^\eta_{i_\Omega}}, \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

onde K_2 é a constante de imersão de $X^\eta_{i_\Omega}$ em $L^2(\Omega)$, e $0 < |t^*| < |t|$. Agora estimando (II) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|t|}\Big(\int_\Omega \Big|f(u+tp) - f(u) - f'(u)(tp)\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{|t|}\Big(\int_\Omega \Big|f'(u+t^*p)(tp) - f'(u)(tp)\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\int_\Omega \Big|f'(u+t^*p)(p) - f'(u)(p)\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Notemos que o integrando de (4.11) é limitado pela função integrável $4\|f'\|^2_\infty p^2$. Além disso

$$
\Big|f'(u+t^*p)(p) - f'(u)(p)\Big|^2(x) \longrightarrow 0
$$

quando $t \longrightarrow 0$ para todo $x \in \Omega$, uma vez que $0 < |t^*| < |t|$. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que:

$$
\frac{1}{|t|}\Big(\int_\Omega \Big|f(u+tp) - f(u) - f'(u)(tp)\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \qquad (4.12)
$$

quando $t \longrightarrow 0$.

Portanto de (4.8), (4.9), (4.10) e (4.12) segue que

$$
\left|\frac{1}{t}\,\langle F(u+tp+tk, h_\epsilon) - F(u, h_\epsilon) - T(u)(tp)\,,\,\Phi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right| \longrightarrow 0
$$

quando $(t,k) \longrightarrow (0,0) \in \mathbb{R} \times X^\eta_{i_\Omega}$, e segue que $(F_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é Hadamard diferenciável em relação à u. ■

Lema 4.3.7 *Suponhamos que (H6) seja satisfeita. Então a aplicação $G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ definida no Lema 4.3.4 é Hadamard diferenciável com respeito à u, para todo $(u, h_\epsilon) \in X^\eta_{i_\Omega} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, com $0 < \eta < \dfrac{1}{2}$ tal que a função traço esteja bem definida, e com derivada dada por:*

$$
\left\langle \frac{\partial G}{\partial u}(u, h_\epsilon)w\,,\,\Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \int_{\partial\Omega} g'(\gamma(u))\gamma(w)\,\gamma(\Phi)\,\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right| d\sigma(x), \qquad (4.13)
$$

para todo $w \in X^\eta_{i_\Omega}$.

Demonstração: Para todo $(u, h_\epsilon) \in X^\eta_{i_\Omega} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega)$ e $\Phi \in X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$, seja $\overline{T} : X^\eta_{i_\Omega} \longrightarrow \mathcal{B}(X^\eta_{i_\Omega}, X^{-\frac{1}{2}}_{i_\Omega})$ a aplicação dada em (4.13), onde $\mathcal{B}(X^\eta_{i_\Omega}, X^{-\frac{1}{2}}_{i_\Omega})$ é o conjunto dos operadores lineares limitados de $X^\eta_{i_\Omega}$

em $X^{-\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^{-1}(\Omega)$. Então, para cada $p \in X^{\eta}_{i_\Omega}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
&\left| \left\langle G(u+tp+tk,h_\epsilon) - G(u,h_\epsilon) - \overline{T}(u)(tp)\,,\,\Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right| \\
&\leq \int_{\partial\Omega} \left| [\, g(\gamma(u+tp+tk)) - g(\gamma(u)) - g'(\gamma(u))(\gamma(tp))\,]\,\gamma(\theta(h_\epsilon))\,\gamma(\Phi) \right| d\sigma(x) \\
&\leq \left(\int_{\partial\Omega} \left| [\, g(\gamma(u+tp+tk)) - g(\gamma(u)) - g'(\gamma(u))(\gamma(tp))\,]\,\gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma(\Phi)|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_3 \left(\int_{\partial\Omega} \left| [\, g(\gamma(u+tp+tk)) - g(\gamma(u)) - g'(\gamma(u))(\gamma(tp))\,]\,\gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}\,,
\end{aligned}
$$

onde K_3 é a constante de imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$. Agora temos que:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\partial\Omega} \left| \Big[g(\gamma(u+tp+tk)) - g(\gamma(u)) - g'(\gamma(u))(\gamma(tp)) \Big] \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Bigg(\int_{\partial\Omega} \Big| \Big[g(\gamma(u+t(p+k))) - g(\gamma(u+tp)) \\
&\quad + g(\gamma(u+tp)) - g(\gamma(u)) - g'(\gamma(u))(\gamma(tp)) \Big] \gamma(\theta(h_\epsilon)) \Big|^2 d\sigma(x) \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \underbrace{\left(\int_{\partial\Omega} \left| g(\gamma(u+t(p+k))) - g(\gamma(u+tp)) \right|^2 \left| \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}}}_{(I)} \\
&\quad + \underbrace{\left(\int_{\partial\Omega} \left| g(\gamma(u+tp)) - g(\gamma(u)) - g'(\gamma(u))(\gamma(tp)) \right|^2 \left| \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}}}_{(II)}\,.
\end{aligned}
$$

Para (I) temos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|t|} \left(\int_{\partial\Omega} \left| g(\gamma(u+t(p+k))) - g(\gamma(u+tp)) \right|^2 \left| \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & \frac{1}{|t|} \left(\int_{\partial\Omega} \left| g'(\gamma(u+t^*(p+k)))(\gamma(tk)) \right|^2 \left| \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & \|g'\|_\infty \|\theta(h_\epsilon)\|_\infty \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma(k)|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & K_4(h_\epsilon) \|g'\|_\infty \|\theta\|_\infty \|k\|_{X^{\eta}_{i_\Omega}}\,,
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

onde $0 < |t^*| < |t|$, θ é como dada no Lema 3.1.3 e $K_4(h_\epsilon)$ é a constante de imersão de $X^{\eta}_{i_\Omega}$ em $L^2(\partial\Omega)$, que depende de h_ϵ. Agora estimando (II) obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|t|} \left(\int_{\partial\Omega} \left| g(\gamma(u+tp)) - g(\gamma(u)) - g'(\gamma(u))(\gamma(tp)) \right|^2 \left| \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & \frac{1}{|t|} \left(\int_{\partial\Omega} \left| g'(\gamma(u+t^*p))(\gamma(tp)) - g'(\gamma(u))(\gamma(tp)) \right|^2 \left| \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
=\ & \left(\int_{\partial\Omega} \left| \Big(g'(\gamma(u+t^*p)) - g'(\gamma(u)) \Big) (\gamma(p)) \right|^2 \left| \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Notemos que o integrando de (4.15) é limitado pela função integrável $4\|g'\|^2_\infty \|\theta\|^2_\infty \gamma(p)^2$. Além disso,

$$
\left| \Big(g'(\gamma(u+t^*p)) - g'(\gamma(u)) \Big)(\gamma(p))\, \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2(x) \leq \left| \Big(g''(\gamma(u+t^{**})t^* \Big) \gamma(p)^2\, \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2(x) \longrightarrow 0
$$

quando $t \longrightarrow 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, uma vez que $0 < |t^{**}| < |t^{*}| < |t|$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que:

$$\frac{1}{|t|}\Big(\int_{\partial\Omega}\Big|\Big(g(\gamma(u+tp)) - g(\gamma(u)) - g^{'}(\gamma(u))(\gamma(tp))\Big)\gamma(\theta(h_\epsilon))\Big|^2 d\sigma(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \tag{4.16}$$

quando $t \longrightarrow 0$.

Portanto de (4.14) e (4.16) segue que

$$\Big|\frac{1}{t}\Big\langle G(u+tp+tk,h_\epsilon) - G(u,h_\epsilon) - \overline{T}(u)(tp)\,,\,\Phi\Big\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\Big| \longrightarrow 0$$

quando $(t,k) \longrightarrow (0,0) \in \mathbb{R}\times X^{\eta}_{i_\Omega}$, e segue que $(G_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é Hadamard diferenciável em relação à u. ∎

Lema 4.3.8 *Suponhamos a hipótese (H6). Então a aplicação $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ definida no Lema 4.3.5 é Hadamard diferenciável com respeito à u, para todo $(u,h_\epsilon) \in X^{\eta}_{i_\Omega} \times \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, com $0 < \eta < \dfrac{1}{2}$ tal que a função traço está bem definida.*

Demonstração: A demonstração segue imediatamente dos Lemas 4.3.6 e 4.3.7. ∎

Para os próximos resultados iremos utilizar os seguintes lemas cujas demonstrações podem ser encontradas em [1]:

Lema 4.3.9 *Sejam X, Y espaços de Banach, O um aberto de X, $f : O \longrightarrow Y$, $X_1 \subset X$ espaço de Banach e suponha que a inclusão $i : X_1 \longrightarrow X$ é compacta. Então, se f é Hadamard diferenciável em $p \in X_1$, a composição $\widetilde{f} = f \circ i$ é Fréchet diferenciável em p.*

Lema 4.3.10 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T_n : X \longrightarrow Y$ uma sequência de operadores lineares convergindo fortemente para o operador linear $T : X \longrightarrow Y$. Suponha também que $X_1 \subset X$ é um espaço de Banach e a inclusão $i : X_1 \longrightarrow X$ é compacta e sejam $\widetilde{T_n} = T_n \circ i$ e $\widetilde{T} = T \circ i$. Então $\widetilde{T_n} \longrightarrow \widetilde{T}$ uniformemente para x em um subconjunto limitado de X_1 (isto é, na norma de $\mathcal{B}(X_1, Y)$, o espaço dos operadores lineares limitados de X_1 em Y).*

Lema 4.3.11 *Suponhamos que (H6) seja satisfeita. Então a aplicação $F(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ definida no Lema 4.3.3 é continuamente Fréchet diferenciável com respeito à u, com derivada dada em (4.7).*

Demonstração: A Fréchet diferenciabilidade de $F(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ com respeito à u (e sua expressão) segue dos Lemas 4.3.6 e 4.3.9, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno e tal que $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega} \subset X^{\eta}_{i_\Omega}$, com imersão compacta garantida pelo Teorema 1.3.24.

Vamos mostrar agora a continuidade, para tanto, seja u_n uma sequência convergindo para u em $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$ e $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, e escrevemos

$$T(u,h_\epsilon) = \frac{\partial F}{\partial u}(u,h_\epsilon)\,.$$

Então, para $\Phi \in X_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$ e $w \in X^{\eta}_{i_\Omega}$ teremos:

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \Big(T(u_n,h_\epsilon) - T(u,h_\epsilon) \Big) w \,,\, \Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right| &\leq \int_\Omega \left| \Big(f'(u) - f'(u_n) \Big) w \, \Phi \right| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \left| \Big(f'(u) - f'(u_n) \Big) w \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\Phi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_1 \left(\int_\Omega \left| \Big(f'(u) - f'(u_n) \Big) w \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)} , \quad (4.17)
\end{aligned}$$

onde K_1 é a constante de imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ garantida pelo Teorema 1.1.12.

O integrando em (4.17) é limitado pela função integrável $4\|f'\|^2_\infty w^2$, e pela hipótese (H6) temos que f é $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, então o integrando vai a zero quase sempre quando $u_n \longrightarrow u$ em $X^{\eta}_{i_\Omega}$. A sequência de operadores $T(u_n,h_\epsilon)$ em $\mathcal{B}(X^{\eta}_{i_\Omega}, H^{-1}(\Omega))$ converge fortemente para o operador $T(u,h_\epsilon)$, e pelo Lema 4.3.10 a convergência é uniforme em $\mathcal{B}(X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}, H^{-1}(\Omega))$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega} \subset X^{\eta}_{i_\Omega}$ é compacta. E segue que a aplicação $F(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ definida no Lema 4.3.3 é continuamente Fréchet diferenciável com respeito à u. ■

Podemos obter o mesmo resultado para a aplicação $G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$, como segue:

Lema 4.3.12 *Suponhamos que (H6) seja satisfeita. Então a aplicação $G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ definida no Lema 4.3.4 é continuamente Fréchet diferenciável com respeito à u, com derivada dada em (4.13).*

Demonstração: A Fréchet diferenciabilidade de $G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ com respeito à u (e sua expressão) segue dos Lemas 4.3.7 e 4.3.9, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno e tal que $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega} \subset X^{\eta}_{i_\Omega}$, com imersão compacta garantida pelo Teorema 1.3.24.

Vamos mostrar agora a continuidade, para tanto, seja u_n uma sequência convergindo para u em $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$ e $h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)$, e escrevemos

$$\widetilde{T}(u,h_\epsilon) = \frac{\partial G}{\partial u}(u,h_\epsilon) .$$

Então, para $\Phi \in X_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$ e $w \in X^{\eta}_{i_\Omega}$ teremos:

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \Big(\widetilde{T}(u_n,h_\epsilon) - \widetilde{T}(u,h_\epsilon) \Big) w \,,\, \Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right| &\leq \int_{\partial\Omega} \left| \Big(g'(\gamma(u)) - g'(\gamma(u_n)) \Big) \gamma(w)\, \gamma(\Phi)\, \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right| d\sigma(x) \\
&\leq \left(\int_{\partial\Omega} \left| \Big(g'(\gamma(u)) - g'(\gamma(u_n)) \Big) \gamma(w)\, \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left(\int_\Omega |\gamma(\Phi)|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_2 \left(\int_{\partial\Omega} \left| \Big(g'(\gamma(u)) - g'(\gamma(u_n)) \Big) \gamma(w) \gamma(\theta(h_\epsilon)) \right|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)} ,
\end{aligned}$$

onde K_2 é a constante de imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$.

O integrando acima é limitado pela função integrável $4\|g'\|^2_\infty \|\theta\|^2_\infty \gamma(w)^2$, e temos pela hipótese (H6) que g é $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, então o integrando vai a zero quase sempre quando $u_n \longrightarrow u$

em $X^{\eta}_{i_\Omega}$. A sequência de operadores $\widetilde{T}(u_n, h_\epsilon)$ em $\mathcal{B}(X^{\eta}_{i_\Omega}, H^{-1}(\Omega))$ converge fortemente para o operador $\widetilde{T}(u, h_\epsilon)$, e pelo Lema 4.3.10 a convergência é uniforme em $\mathcal{B}(X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}, H^{-1}(\Omega))$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega} \subset X^{\eta}_{i_\Omega}$ é compacta. E segue que a aplicação $G(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ definida no Lema 4.3.4 é continuamente Fréchet diferenciável com respeito à u. ■

Lema 4.3.13 *Suponhamos que (H6) seja satisfeita. Então a aplicação $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ definida como no Lema 4.3.5 é continuamente Fréchet diferenciável com respeito à u e localmente Lipschitz contínua em h_ϵ, uniformemente para $u \in X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração: A demonstração segue imediatamente dos Lemas 4.3.5, 4.3.11 e 4.3.12. ■

Agora estamos aptos a demonstrar a semicontinuidade inferior dos equilíbrios do problema (3.8):

Lema 4.3.14 *Suponhamos que as hipóteses (H5) e (H6) sejam satisfeitas e $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Então os equilíbrios do problema (3.8) em $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$ são semicontínuos inferiormente em $h_\epsilon = i_\Omega$.*

Demonstração: Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno, note que $e \in X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$ é equilíbrio do problema (3.8) se, e só se, é um zero da aplicação:

$$\begin{array}{rccc} Z: & H^1(\Omega) \times V & \longrightarrow & X^{-\frac{1}{2}}_{i_\Omega}, \\ & (u, h_\epsilon) & \longmapsto & (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}(u) + H(u, h_\epsilon)_{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

onde a imersão $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega) \subset X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$ é compacta para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e V é uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$. Temos os seguintes resultados:

i) Pelo Lema 4.1.2 e Observação 4.1.3, temos que os equilíbrios estão uniformemente limitados em $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega)$;

ii) Pelo Lema 4.3.13 a aplicação $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ é Fréchet diferenciável com respeito à u e localmente Lipschtiz contínua em h_ϵ, uniformemente para $u \in X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$;

iii) Como o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ é linear em relação à u, então por esse fato e o item ii), concluímos que a aplicação Z é Fréchet diferenciável com respeito à u.

Logo pelo Teorema da Função Implícita, segue que $e(h_\epsilon)$ é contínuo inferiormente em $h_\epsilon = i_\Omega$. ■

4.4 Continuidade dos Atratores Globais

Nesta última seção provaremos que a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ do problema (3.8):

$$\begin{cases} u_t = (A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}u + (H_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}u\,,\ t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta} \end{cases},$$

é contínua em $h_\epsilon = i_\Omega$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Iniciaremos com a semicontinuidade superior dos atratores, como segue:

Teorema 4.4.1 *A família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ do problema fraco (3.8) é semicontínua superiormente em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, em $h_\epsilon = i_\Omega$.*

Demonstração: Para provarmos a semicontinuidade superior da família de atratores basta garantirmos que todas as hipóteses do Teorema 1.4.13 são satisfeitas. De fato, temos que:

i) Provamos no Teorema 2.4.1, que a família de operadores $\left\{(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}\right\}_{h_\epsilon \in \mathrm{Diff}^1(\Omega)}$ definida em (2.16) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3.15 em $h_\epsilon = i_\Omega$.

ii) Pelo Lema 4.3.5 temos o operador $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ é localmente Lipschitz contínuo em h_ϵ uniformemente para $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, e Lipschitz contínuo em u. Logo o operador $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ leva limitados de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ em limitados de $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)$.

iii) Pelo Teorema 4.2.1 temos que, dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o fluxo gerado pelo problema fraco (3.8) admite um atrator global em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ e além disso a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ é uniformemente limitada em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$.

iv) Seja V uma vizinhança de i_Ω, temos pelo item iii) que a união $\displaystyle\bigcup_{h_\epsilon \in V} \widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ é um conjunto limitado em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, e pelo item ii) que $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ leva essa união em um conjunto limitado de $X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)$.

Portanto pelo Teorema 1.4.13 segue que a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ é semicontínua superiormente. ■

Provaremos agora que a família de atratores globais $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ do problema (3.8) é semicontínua inferiormente em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, em $h_\epsilon = i_\Omega$. Para tanto, iremos supor que (H5) e (H6) são satisfeitas, usaremos o fato de que os equilíbrios de (3.8) são contínuos em $h_\epsilon = i_\Omega$, e além disso provaremos a continuidade das variedades locais estáveis e instáveis próximas de um equilíbrio do problema (3.8).

Para facilitar a notação do próximo lema, denotaremos apenas por H_{h_ϵ} a aplicação $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ como definida no Lema 4.3.5, por H_u sua derivada em relação à primeira variável, e por A_{h_ϵ} o operador $(A_{h_\epsilon})_{-\frac{1}{2}}$ definido pela expressão (2.16). Logo, temos o seguinte resultado:

Lema 4.4.2 *Suponhamos satisfeitas as hipóteses (H5) e (H6), e sejam $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, V uma vizinhança de i_Ω em $\mathrm{Diff}^1(\Omega)$, $h_\epsilon \in V$ e $e(h_\epsilon) \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ um equilíbrio hiperbólico do problema (3.8). Então a aplicação $H(\cdot,\cdot)_{-\frac{1}{2}}$ como definida no Lema 4.3.5 satisfaz:*

a) $H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon) + u\,,\, h_\epsilon) = A_{h_\epsilon}e(h_\epsilon) + H_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u + r(u, h_\epsilon)$ *para todo* $h_\epsilon \in V$, *com* $r(0, h_\epsilon) = 0$.

b) $\sup\limits_{\|u\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} < \rho} \| r(u, i_\Omega) - r(u, h_\epsilon) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \leq C_{i_\Omega}(h_\epsilon)$, *com* $C_{i_\Omega}(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ *quando* $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ *em* V.

c) $\| r(u_1, h_\epsilon) - r(u_2, h_\epsilon) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \leq k(\rho) \| u_1 - u_2 \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}$, *para* $\| u_1 \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} \leq \rho$ *e* $\| u_2 \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} \leq \rho$, *com* $k(\rho) \longrightarrow 0$ *quando* $\rho \longrightarrow 0^+$ *e* $k(\cdot)$ *é não decrescente.*

Demonstração:

a) Pelo Lema 4.3.13 sabemos que H_{h_ϵ} é Fréchet diferenciável em relação à u, logo pelo Teorema de Taylor temos que H_{h_ϵ} pode ser escrito na forma:

$$H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon) + u, h_\epsilon) = H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon), h_\epsilon) + H_u(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u + r(u, h_\epsilon).$$

Temos pela hipótese (H5) que $e(h_\epsilon)$ é um equilíbrio do problema (3.8), então $H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon), h_\epsilon) = A_{h_\epsilon}e(h_\epsilon)$. Logo H_{h_ϵ} pode ser escrito como:

$$H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon) + u\,,\, h_\epsilon) = A_{h_\epsilon}e(h_\epsilon) + H_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u + r(u, h_\epsilon) \text{ para todo } h_\epsilon \in V$$

e segue de imediato da igualdade acima que $r(0, h_\epsilon) = 0$.

b) Sejam $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $h_\epsilon \in V$, teremos então:

$$\begin{aligned}
\| r(u, i_\Omega) - r(u, h_\epsilon) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} &= \| H_{h_\epsilon}(e(i_\Omega) + u\,,\, i_\Omega) - H_{h_\epsilon}(e(i_\Omega), i_\Omega) - H_u(e(i_\Omega), i_\Omega)u \\
&\quad - H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon) + u\,,\, h_\epsilon) + H_{h_\epsilon}e(h_\epsilon), h_\epsilon) + H_u(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
&\leq \| H_{h_\epsilon}(e(i_\Omega) + u\,,\, i_\Omega) - H_{h_\epsilon}(e(i_\Omega), i_\Omega) \qquad (4.18) \\
&\quad - H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon) + u\,,\, h_\epsilon) + H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \| H_u(e(i_\Omega), i_\Omega)u - H_u(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}}. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Vamos estimar primeiramente (4.18), somando e subtraindo termos adequados, obtemos:

$$
\begin{aligned}
& \| H_{h_\epsilon}(e(i_\Omega)+u\,,\,i_\Omega) - H_{h_\epsilon}(e(i_\Omega)\,,\,i_\Omega) - H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)+u\,,\,h_\epsilon) + H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)\,,\,h_\epsilon) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
\leq\ & \| H_{h_\epsilon}(e(i_\Omega)+u\,,\,i_\Omega) - H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)+u\,,\,i_\Omega) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
& + \| H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)+u\,,\,i_\Omega) - H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)+u\,,\,h_\epsilon) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
& + \| H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)\,,\,i_\Omega) - H_{h_\epsilon}(e(i_\Omega)\,,\,i_\Omega) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
& + \| H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)\,,\,h_\epsilon) - H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)\,,\,i_\Omega) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
\leq\ & a \| e(h_\epsilon) - e(i_\Omega) \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} + b \| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)} + c \| e(h_\epsilon) - e(i_\Omega) \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} + d \| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)} \\
=\ & (\,a+c\,) \| e(h_\epsilon) - e(i_\Omega) \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}} + (\,b+d\,) \| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)}\,, \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade acima segue do Lema 4.3.5 e a, b, c e d são constantes. Como $e(h_\epsilon)$ é um equilíbrio hiperbólico do problema (3.8), então pelos Lemas 4.3.2 e 4.3.14 temos que é contínuo em i_Ω, logo a expressão (4.20) vai a zero quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ em V.

Vamos agora estimar (4.19), para tanto sejam $\Phi \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ e $u \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
& \left| \left\langle \frac{\partial H}{\partial u}(e(i_\Omega), i_\Omega)u - \frac{\partial H}{\partial u}(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u\,,\,\Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right| \\
=\ & \left| \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(e(i_\Omega), i_\Omega)u + \frac{\partial G}{\partial u}(e(i_\Omega), i_\Omega)u - \frac{\partial F}{\partial u}(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u - \frac{\partial G}{\partial u}(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u\,,\,\Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right| \\
\leq\ & \left| \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(e(i_\Omega), i_\Omega)u - \frac{\partial F}{\partial u}(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u\,,\,\Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right| \qquad (4.21) \\
& + \left| \left\langle \frac{\partial G}{\partial u}(e(i_\Omega), i_\Omega)u - \frac{\partial G}{\partial u}(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u\,,\,\Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right|. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Estimando a expressão (4.21) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left| \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(e(i_\Omega), i_\Omega)u - \frac{\partial F}{\partial u}(e(h_\epsilon)\,,\,h_\epsilon)u\,,\,\Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right| \ \leq\ & \int_\Omega \Big| \,[\, f'(e(i_\Omega)) - f'(e(h_\epsilon))\,]u\,\Phi \Big|\, dx \\
\leq\ & \left\{ \int_\Omega \Big| [f'(e(i_\Omega)) - f'(e(h_\epsilon))]u \Big|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & K_2 \left\{ \int_\Omega \Big| \,[f'(e(i_\Omega)) - f'(e(h_\epsilon))]u \,\Big|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

onde K_2 é a constante de imersão de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ garantida pelo Teorema 1.1.17. Notemos que o integrando imediatamente acima é limitado pela função integrável $4\| f' \|_\infty^2 u^2$, assumindo a hipótese (H6), temos que f é $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, logo pelo Teorema da Convergência Dominada temos que a integral vai a zero q.s. quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ em V.

Vamos agora estimar a expressão (4.22), somando e subtraindo termos adequados, obtemos:

$$
\begin{aligned}
& \left| \left\langle \frac{\partial G}{\partial u}(e(i_\Omega), i_\Omega)u - \frac{\partial G}{\partial u}(e(h_\epsilon), h_\epsilon)u \, , \, \Phi \right\rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right| \\
= & \left| \int_{\partial\Omega} g'(\gamma(e(i_\Omega)))\gamma(u)\gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} i_\Omega}{J i_\Omega} \right| d\sigma(x) - \int_{\partial\Omega} g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u)\gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} h_\epsilon}{J h_\epsilon} \right| d\sigma(x) \right| \\
\leq & \left| \int_{\partial\Omega} g'(\gamma(e(i_\Omega)))\gamma(u)\gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} i_\Omega}{J i_\Omega} \right| d\sigma(x) - \int_{\partial\Omega} g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u)\gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} i_\Omega}{J i_\Omega} \right| d\sigma(x) \right| \quad (4.23) \\
+ & \left| \int_{\partial\Omega} g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u)\gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} i_\Omega}{J i_\Omega} \right| d\sigma(x) - \int_{\partial\Omega} g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u)\gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} h_\epsilon}{J h_\epsilon} \right| d\sigma(x) \right| . \quad (4.24)
\end{aligned}
$$

Estimando (4.23) obtemos:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} \left| \left\{ \left[g'(\gamma(e(i_\Omega))) - g'(\gamma(e(h_\epsilon))) \right] \gamma(u) \right\} \gamma(\Phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} i_\Omega}{J i_\Omega} \right| \right| d\sigma(x) \\
\leq & \left\{ \int_{\partial\Omega} \left| \left\{ \left[g'(\gamma(e(i_\Omega))) - g'(\gamma(e(h_\epsilon))) \right] \gamma(u) \right\} \right|^2 \left| \frac{J_{\partial\Omega} i_\Omega}{J i_\Omega} \right|^2 d\sigma(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \| \gamma(\Phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
\leq & \overline{K}_2 \left\{ \int_{\partial\Omega} \left| \left\{ \left[g'(\gamma(e(i_\Omega))) - g'(\gamma(e(h_\epsilon))) \right] \gamma(u) \right\} \right|^2 | \theta(i_\Omega) |^2 d\sigma(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \| \Phi \|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} ,
\end{aligned}
$$

onde $\overline{K}_2$ é a constante de imersão de $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ garantida pelos Teoremas 1.1.17 e 1.1.20, e θ é a função dada como no Lema 3.1.3, que é limitada para $h_\epsilon \in V$. Notemos que o integrando imediatamente acima é limitado pela função integrável $4 \| \theta \|^2_\infty \| g' \|^2_\infty \gamma(u)^2$, e pela hipótese (H6) temos que $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, logo pelo Teorema da Convergência Dominada temos que a integral vai a zero q.s. quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ em V. Vamos agora estimar (4.24):

$$
\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} \left| g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u)) \, \gamma(\Phi) \left(\left| \frac{J_{\partial\Omega} i_\Omega}{J i_\Omega} \right| - \left| \frac{J_{\partial\Omega} h_\epsilon}{J h_\epsilon} \right| \right) \right| d\sigma(x) \\
\leq & \; \| g' \|_\infty M \| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)} \| \gamma(u) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(\Phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
\leq & \; M \overline{K}_1 \overline{K}_2 \| g' \|_\infty \| h_\epsilon - i_\Omega \|_{C^1(\Omega)} \| u \|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}} \| \Phi \|_{X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} ,
\end{aligned}
$$

onde M é uma constante dada como na demonstração do Lema 3.1.3, $\overline{K}_1$ é a constante de imersão de $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega} \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ garantida pelos Teoremas 1.3.25 e 1.1.20, e $\overline{K}_2$ é a constante de imersão de $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ garantida pelos Teoremas 1.1.17 e 1.1.20. Portanto a integral acima vai a zero quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ em V.

Logo pelas estimativas feitas para (4.18) e (4.19), temos que existe $C_{i_\Omega}(h_\epsilon)$ tal que

$$
\sup_{\| u \|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}} < \rho} \| r(u, h_\epsilon) - r(u, i_\Omega) \| \leq C_{i_\Omega}(h_\epsilon) ,
$$

com $C_{i_\Omega}(h_\epsilon) \longrightarrow 0$ quando $h_\epsilon \longrightarrow i_\Omega$ em V.

c) Sejam $u_1, u_2 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ e h_ϵ dado como em (2.1) e tal que $h_\epsilon \in V$, teremos então:

$$\begin{aligned}
\| r(u_1\,,\, h_\epsilon) - r(u_2\,,\, h_\epsilon) \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} &= \| H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon) + u_1\,,\, h_\epsilon) - H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) - H_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_1 \\
&\quad - H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon) + u_2\,,\, h_\epsilon) + H_{h_\epsilon}(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) + H_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_2 \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
&\leq \| F(e(h_\epsilon) + u_1\,,\, h_\epsilon) - F(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) - F_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_1 \qquad (4.25) \\
&\quad - F(e(h_\epsilon) + u_2\,,\, h_\epsilon) + F(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) + F_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_2 \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \| G(e(h_\epsilon) + u_1\,,\, h_\epsilon) - G(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) - G_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_1 \qquad (4.26) \\
&\quad - G(e(h_\epsilon) + u_2\,,\, h_\epsilon) + G(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) + G_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_2 \|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}}\,.
\end{aligned}$$

Vamos estimar primeiro (4.25):

$$\begin{aligned}
&\Big| \langle F(e(h_\epsilon) + u_1\,,\, h_\epsilon) - F(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) - F_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_1 \\
&-F(e(h_\epsilon) + u_2\,,\, h_\epsilon) + F(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) + F_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_2\,,\, \Phi \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Big| \\
\leq\; & \int_\Omega \Big| [\, f(e(h_\epsilon) + u_1) - f(e(h_\epsilon)) - f'(e(h_\epsilon))u_1 - f(e(h_\epsilon) + u_2) + f(e(h_\epsilon)) + f'(e(h_\epsilon))u_2 \,]\, \Phi \Big|\, dx\,.
\end{aligned}$$

Pela hipótese (H6) temos que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e tem todas suas derivadas limitadas, então para cada $x \in \Omega$ existe ξ_x tal que $u_1(x) \leq \xi_x \leq u_2(x)$ e obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \Big| [\, f(e(h_\epsilon) + u_1) - f(e(h_\epsilon)) - f'(e(h_\epsilon))u_1 - f(e(h_\epsilon) + u_2) + f(e(h_\epsilon)) + f'(e(h_\epsilon))u_2 \,]\, \Phi \Big|\, dx \\
=\; & \int_\Omega \Big| [\, f'(e(h_\epsilon) + \xi_x) - f'(e(h_\epsilon)) \,](u_1(x) - u_2(x))\, \Phi \Big|\, dx \\
\leq\; & K_2 \left\{ \int_\Omega [\, f'(e(h_\epsilon) + \xi_x) - f'(e(h_\epsilon)) \,]^2 (u_1(x) - u_2(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \| \Phi \|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

onde K_2 é a constante de imersão de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$. Para darmos continuidade à demonstração, notemos os seguintes fatos:

i) $u_1, u_2 \in X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, logo $(u_1 - u_2) \in L^2(\Omega)$, e segue pela Desigualdade de Hölder que $(u_1 - u_2)^2 \in L^1(\Omega)$.

ii) Pelo Teorema 1.1.14, se tomarmos q tal que $q = \dfrac{1}{1-k}$ com $0 < k < 1$, então teremos que $H^k(\Omega) \subset L^{2q}(\Omega)$.

iii) Pela hipótese (H6), f é uma função limitada com derivadas limitada, logo $[\, f'(e(h_\epsilon) + \xi_x) - f'(e(h_\epsilon)) \,]^2 \in L^\infty(\Omega)$.

iv) Se escolhermos q como acima teremos que $(u_1 - u_2)^2 \in L^q(\Omega)$ e tomando p conjugado de q, teremos também que $[\, f'(e(h_\epsilon) + \xi_x) - f'(e(h_\epsilon)) \,]^2 \in L^p(\Omega)$.

Logo, aplicando a desigualdade de Hölder na integral em (4.27), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_{\Omega}[\,f'(e(h_\epsilon)+\xi_x)-f'(e(h_\epsilon))\,]^2(u_1(x)-u_2(x))^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\\
\le\;&\left\{\int_{\Omega}[\,f'(e(h_\epsilon)+\xi_x)-f'(e(h_\epsilon))\,]^{2p}dx\right\}^{\frac{1}{2p}}\left\{\int_{\Omega}(u_1(x)-u_2(x))^{2q}dx\right\}^{\frac{1}{2q}}\\
\le\;&\left\{\int_{\Omega}[\,f'(e(h_\epsilon)+\xi_x)-f'(e(h_\epsilon))\,]^{2p}dx\right\}^{\frac{1}{2p}}\|\,u_1-u_2\,\|_{L^{2q}(\Omega)}\\
\le\;&K_3\left\{\int_{\Omega}[\,f'(e(h_\epsilon)+\xi_x)-f'(e(h_\epsilon))\,]^{2p}dx\right\}^{\frac{1}{2p}}\|\,u_1-u_2\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}},
\end{aligned}$$

onde K_3 é a constante de imersão de $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}\longrightarrow L^{2q}(\Omega)$, que depende de h_ϵ. Portanto temos que

$$\begin{aligned}
&\|\,F(e(h_\epsilon)+u_1,h_\epsilon)-F(e(h_\epsilon),h_\epsilon)-F_u(e(h_\epsilon),h_\epsilon)u_1-F(e(h_\epsilon)+u_2,h_\epsilon)+F(e(h_\epsilon),h_\epsilon)+F_u(e(h_\epsilon),h_\epsilon)u_2\|_{X_{i_\Omega}^{-\frac{1}{2}}}\\
&\le K_2K_3\left\{\int_{\Omega}[\,f'(e(h_\epsilon)+\xi_x)-f'(e(h_\epsilon))\,]^{2p}dx\right\}^{\frac{1}{2p}}\|\,u_1-u_2\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}.
\end{aligned}$$

Notemos que o integrando acima é limitado pela função integrável $4^p\|f'\|_\infty^{2p}$, como pela hipótese (H6) f tem derivada limitada, então temos pelo Teorema da Convergência Dominada que a integral acima vai a zero q.s quando $\rho\longrightarrow 0$, pois ρ é tal que $\|\,u_1\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}\le\rho$, $\|\,u_2\,\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}}\le\rho$ e $u_1(x)\le\xi_x\le u_2(x)$.

Vamos estimar agora (4.26):

$$\begin{aligned}
&\Big|\,\langle G(e(h_\epsilon)+u_1\,,\,h_\epsilon)-G(e(h_\epsilon)\,,\,h_\epsilon)-G_u(e(h_\epsilon)\,,\,h_\epsilon)u_1\\
&\quad-G(e(h_\epsilon)+u_2\,,\,h_\epsilon)+G(e(h_\epsilon)\,,\,h_\epsilon)+G_u(e(h_\epsilon)\,,\,h_\epsilon)u_2\,,\,\Phi\,\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\Big|\\
\le\;&\int_{\partial\Omega}\Big|\,[\,g(\gamma(e(h_\epsilon)+u_1))-g(\gamma(e(h_\epsilon)))-g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u_1)\\
&\quad-g(\gamma(e(h_\epsilon)+u_2))+g(\gamma(e(h_\epsilon)))+g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u_2)\,]\,\gamma(\Phi)\gamma\left(\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right|\right)\Big|d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Pela hipótese (H6) temos que g tem todas suas derivadas limitadas, então para cada $x\in\Omega$ existe ξ_x tal que $u_1(x)\le\xi_x\le u_2(x)$, logo

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\Big|\,[\,g(\gamma(e(h_\epsilon)+u_1))-g(\gamma(e(h_\epsilon)))-g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u_1)\\
&\quad-g(\gamma(e(h_\epsilon)+u_2))+g(\gamma(e(h_\epsilon)))+g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\gamma(u_2)\,]\,\gamma(\Phi)\gamma\left(\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right|\right)\Big|d\sigma(x)\\
=\;&\int_{\partial\Omega}\left|\,[\,g'(\gamma(e(h_\epsilon)+\xi_x))-g'(\gamma(e(h_\epsilon)))\,]\gamma(u_1(x)-u_2(x))\,\gamma(\Phi)\gamma\left(\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right|\right)\right|d\sigma(x)\\
\le\;&\overline{K}_2\left\{\int_{\partial\Omega}[\,(g'(\gamma(e(h_\epsilon)+\xi_x))-g'(\gamma(e(h_\epsilon))))]^2[\gamma(u_1(x)-u_2(x))]^2\left[\gamma\left(\left|\frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon}\right|\right)\right]^2d\sigma(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

onde $\overline{K}_2$ é a constante de imersão de $X^{\frac{1}{2}}_{i_\Omega} = H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ garantida pelos Teoremas 1.1.17 e 1.1.20. Logo, aplicando a Desigualdade de Hölder, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \int_{\partial\Omega} [\, g'(\gamma(e(h_\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(h_\epsilon)))]^2 [\, \gamma(u_1(x)-u_2(x))\,]^2 \left[\gamma\left(\left| \frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon} \right| \right) \right]^2 d\sigma(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & \left\{ \int_{\partial\Omega} [\, g'(\gamma(e(h_\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(h_\epsilon)))]^{2\overline{p}} \left[\gamma\left(\left| \frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon} \right| \right) \right]^{2\overline{p}} d\sigma(x) \right\}^{\frac{1}{2\overline{p}}} \\
& \cdot \left\{ \int_{\partial\Omega} [\gamma(u_1(x)-u_2(x))]^{2\overline{q}} d\sigma(x) \right\}^{\frac{1}{2\overline{q}}} \\
=\ & \left\{ \int_{\partial\Omega} [g'(\gamma(e(h_\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(h_\epsilon)))]^{2\overline{p}} \left[\gamma\left(\left| \frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon} \right| \right) \right]^{2\overline{p}} d\sigma(x) \right\}^{\frac{1}{2\overline{p}}} \|\gamma(\, u_1 - u_2)\,\|_{L^{2\overline{q}}(\partial\Omega)} \\
\leq\ & \overline{K}_3 \left\{ \int_{\partial\Omega} [\, g'(\gamma(e(h_\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(h_\epsilon)))]^{2\overline{p}} \left[\gamma\left(\left| \frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon} \right| \right) \right]^{2\overline{p}} d\sigma(x) \right\}^{\frac{1}{2\overline{p}}} \|\, u_1 - u_2 \,\|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}},
\end{aligned}
$$

onde $\overline{K}_3$ é a constante de imersão de $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega} \longrightarrow L^{2\overline{q}}(\partial\Omega)$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Portanto

$$
\begin{aligned}
& \|\, G(e(h_\epsilon)+u_1\,,\, h_\epsilon) - G(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) - G_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_1 \\
& - G(e(h_\epsilon)+u_2\,,\, h_\epsilon) + G(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon) + G_u(e(h_\epsilon)\,,\, h_\epsilon)u_2 \,\|_{X^{-\frac{1}{2}}_{i_\Omega}} \\
\leq\ & \overline{K}_2\, \overline{K}_3 \left\{ \int_{\partial\Omega} [\, g'(\gamma(e(h_\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(h_\epsilon)))]^{2\overline{p}} \left[\gamma\left(\left| \frac{J_{\partial\Omega}h_\epsilon}{Jh_\epsilon} \right| \right) \right]^{2\overline{p}} d\sigma(x) \right\}^{\frac{1}{2\overline{p}}} \|\, u_1 - u_2 \,\|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}}.
\end{aligned}
$$

Notemos que o integrando acima é limitado pela função integrável $4^{\overline{p}}\|\, g' \,\|^{2\overline{p}}_{\infty} \|\, \theta \,\|^{2\overline{p}}_{\infty}$, onde θ é a aplicação dada como no Lema 3.1.3. Pela hipótese (H6) temos que g tem derivada limitada, logo pelo Teorema da Convergência Dominada temos que a integral acima vai a zero q.s quando $\rho \longrightarrow 0$, pois ρ é tal que $\|\, u_1 \,\|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}} \leq \rho$, $\|\, u_2 \,\|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}} \leq \rho$ e $u_1(x) \leq \xi_x \leq u_2(x)$.

Portanto pelas estimativas feitas para (4.25) e (4.26) concluímos que existe $k(\rho)$ tal que

$$
\|\, r(u_1, h_\epsilon) - r(u_2, h_\epsilon) \,\| \leq k(\rho) \|\, u_1 - u_2 \,\|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}},
$$

para $\|\, u_1 \,\|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}} \leq \rho$, $\|\, u_2 \,\|_{X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}} \leq \rho$, com $k(\rho) \longrightarrow 0$ quando $\rho \longrightarrow 0^+$. ∎

Vamos agora ao principal resultado deste trabalho, que é a continuidade dos atratores.

Teorema 4.4.3 *A família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ do problema (3.8) é contínua em $X^{\frac{1}{2}-\delta}_{i_\Omega}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, em $h_\epsilon = i_\Omega$.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.4.1 temos que a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ do problema (3.8) é semicontínua superiormente em $h_\epsilon = i_\Omega$. Só nos resta provar a semicontinuidade inferior dos atratores, para tanto provaremos que todas as hipóteses do Teorema 1.4.14 são satisfeitas, logo teremos que a família de atratores é semicontínua inferiormente. De fato,

1) Pelos Lema 4.1.1 e Teoremas 4.1.4 e 4.4.1, temos que a hipótese (h1) do Teorema 1.4.14 é satisfeita.

2) Pelo Lema 4.1.2 e Observação 4.1.3, temos que a hipótese (h2) é satisfeita.

3) (h3) é nossa hipótese (H5).

4) Pelo Teorema 4.2.1 temos que (h4) é satisfeito.

5) (h5) segue dos Lemas 4.3.2 e 4.3.14.

6) A hipótese (h6) segue do Teorema 2.4.1, Lema 4.4.2 e do Teorema 1.5.2.

7) Pelos Lemas 1.4.12 e 3.3.5, e Teoremas 2.4.1 e 3.4.2, segue a hipótese (h7).

Portanto a família de atratores $\widetilde{\mathcal{A}}_{h_\epsilon}$ do problema (3.8) é semicontínua inferiormente em $X_{i_\Omega}^{\frac{1}{2}-\delta}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, em $h_\epsilon = i_\Omega$. E segue a continuidade dos atratores globais. ■

Referências Bibliográficas

[1] Pereira, A. L. and Pereira, M. C., *Continuity of attractors for a reaction-diffusion problem with nonlinear boundary conditions with respect to variations of the domain*, Journal of Differential Equations 239 (2007) 343-370.

[2] Carvalho, A. N., Oliva, S. M., Pereira, A. L., Bernal, A. R., *Parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. 207 (1997) 409-461.

[3] Oliva, S. M., Pereira, A. L., *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions in fractional power spaces*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal. 9 (2002) 551-562.

[4] Oliveira, L. A. F., Pereira, A. L. and Pereira, M. C., *Continuity of attractors for a reaction-diffusion problem with respect to variations of the domain*, Electron. J. Differential Equations 2005 (100) (2005) 1-18.

[5] Arrieta, J. M. and Carvalho, A. N., *Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction-diffusion equations under pertubations of the domain*, J. Differential Equations 199 (2004) 143-178.

[6] Arrieta, J. M. and Bruschi, S. M., *Boundary oscillations and nonlinear boundary conditions*, C. R. Sci. Paris Ser. I 343 (2006) 99-104.

[7] Henry, D. B., *Perturbation of the boundary in boundary-value problems of partial differential equations*, Cambrigde Univ. Press (2005).

[8] Micheletti, A. M., *Pertubazione dello spectro dell operatore de Laplace in relazione ad una variazone del campo*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa 26 (1972) 151-169.

[9] Arrieta, J. M., Carvalho A. N. and Bernal, A. R., *Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary condition. Uniform bounds*, Comm. Partial Differential Equations 25 (1-2) (2000) 1-37.

[10] Gagliardo, E., *Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi funzioni in n variabili*, Ren. Sem. Mat. Univ Padova, 27, 284-305.

[11] Henry, D. B., *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag (1981).

[12] Hale, J. K., *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, number 25, American Mathematical Society.

[13] Grisvard, P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, 69.

[14] Nečas, J., *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer Monographs in Mathematics, 2012.

[15] Adams, R. A., Fournier, J. J. F., *Sobolev spaces*, Academic Press.

[16] Agmon, S., *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand Mathematical Studies, number 2, 1965.

[17] Lion, J. L., *Lectures on elliptic partial differential equations*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[18] Rayleigh, J. W., *The theory of sound*, Dover (1945).

[19] Hadamard, J., *Linear Partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980.

[20] Arrieta, J. M., Carvalho, A. N., *Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and heat equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (1) (2000) 285-310.

[21] Eggleston, H. G., *Convexity*, Cambridge Tracts in Maths and Mathematical Physics, number 47, Cambridge University Press.

[22] Stein, E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton U. Press, Princeton, New Jersey (1970).

[23] Pereira, M. C., *Aplicações do Teorema da Transversalidade à genericidade em alguns problemas de contorno elíptico*, dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (2001).

[24] Triebel, H., *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[25] Arrieta, J. M., Bruschi, S. M., *Rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a Lipschitz deformation*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 17, number 10 (2007).

[26] Arrieta, J. M., Bruschi, S. M., *Very rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a non uniformly Lipschitz deformation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Serie B, vol. 14, number 2 (2010).

[27] Carvalho, A. N., Oliva, S. M., Pereira, A. L., Bernal, A. R., *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 207, 409-461 (1997).