

**Dinâmica de homeomorfismos do toro
homotópicos a Dehn twists**

Matheus Vinicius de Almeida Freitas

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Salvador Addas Zanata

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo
Agosto de 2023

Dinâmica de homeomorfismos do toro homotópicos a Dehn twists

Matheus Vinicius de Almeida Freitas

Esta versão da dissertação contém
as correções e alterações sugeridas
pela Comissão Julgadora durante a
defesa da versão original do trabalho,
realizada em 2 de Agosto de 2023.

Uma cópia da versão original está
disponível no Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

À minha mãe, à minha avó e aos meus irmãos.

Agradecimentos

Façamos nós por nossas mãos, Tudo que a nós nos diz respeito

— A internacional

Agradeço...

À minha mãe, que sempre me apoiou e desde sempre fez grandes sacrifícios para que eu pudesse focar em meus estudos. Te amo, todas as minhas conquistas também são suas.

À minha avó Janete, que sempre esteve ao nosso lado e nunca nos desamparou.

Aos meus irmãos, por serem compreensivos e me apoiarem.

Ao meu amor Hortência, que é um dos grandes suportes de minha vida e faz de meus dias felizes ainda mais radiantes e dos dias difíceis menos assustadores. E, como te digo frequentemente, te amo 3.000.000.000.000^(googol).

Ao meu orientador, dr. Salvador, que me enviou o primeiro artigo de dinâmica topológica que li, por ser um ótimo professor, pesquisador e uma pessoa de enorme paciência e humildade. Que durante minha graduação me encorajou a entrar para o MAP na pós-graduação e sempre esteve disposto a me ajudar quando precisei.

À professora Sônia, que foi minha orientadora de iniciação científica, me apresentou sistemas dinâmicos e sempre conversava comigo sobre matemática, educação e diversas outras coisas.

Aos professores e funcionários do IME, que sempre me acolheram e me proporcionaram um ambiente onde pude crescer não só como matemático, mas também como pessoa.

Aos meus amigos, Suco, Gondas, XD, Sabino e Max, que acompanharam por chamada de voz os dramas da produção deste trabalho. Agradeço especialmente ao Max por ter revisado o texto e por ter me mandado muitas das músicas que ouvi enquanto escrevia.

À minha amiga Sophia, que ingressou na graduação comigo e que desde então me

acompanhou. Agradeço pelas conversas, abraços e por todo o tempo que passamos juntos no campus. Também agradeço por ter me dado os empurrões que precisei; eles foram cruciais para o meu crescimento.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro, que é um dos ingredientes fundamentais para que haja pesquisa de qualidade no país.

Por fim, agradeço a deus e a todos aqueles que contribuíram com a realização deste trabalho, mesmo que de forma indireta.

Resumo

Matheus Vinicius de Almeida Freitas. **Dinâmica de homeomorfismos do toro homotópicos a Dehn twists**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre homeomorfismos do toro homotópicos a um Dehn twist. Ele contém três resultados principais. O primeiro é mais simples e nos dá uma condição sobre f a partir da qual garantimos que o conjunto de rotação vertical de f é um conjunto unitário de um número irracional. O segundo resultado nos fornece uma condição sobre o conjunto de rotação vertical em que garantimos a existência de compacto conexo que separa os fins do cilindro, por sua vez, isso garante uma limitação uniforme das órbitas de sob a ação de um levantamento para o cilindro. O terceiro nos dá uma condição explícita sob a qual temos um conjunto de rotação vertical que contém um intervalo, o qual, por sua vez, garante que f tenha entropia topológica positiva. Como um corolário desse resultado, temos uma resposta para a conjectura de Boyland nesse contexto. Em outras palavras, se f preserva área e tem um levantamento \hat{f} de número de rotação com respeito à medida de Lebesgue nulo então ou o conjunto de rotação vertical de f é apenas o 0, portanto as órbitas sob a ação de \hat{f} são uniformemente limitadas, ou 0 é um ponto interior do conjunto de rotação vertical. Em ambos os casos, garantimos que o número de rotação da medida de Lebesgue é realizado. Além disso, o teorema 1 deste trabalho apresenta uma demonstração não usual de um resultado amplamente utilizado no estudo de homeomorfismos do toro.

Palavras-chave: Conjunto de rotação vertical. Dehn twists. Decomposição em bricks.

Abstract

Matheus Vinicius de Almeida Freitas. **Dynamics of homeomorphisms of the torus homotopic to Dehn twists**. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

The goal of this work is to present a study on homeomorphisms of the torus homotopic to a Dehn twist. It contains three main results. The first one is simple and gives us a condition on f from which we can ensure that the vertical rotation set of f is a singleton set of an irrational number. The second result provides a condition on the vertical rotation set that guarantees the existence of a connected compact set that separates the ends of the cylinder. This, in turn, ensures that the orbits under the action of a lift to the cylinder are uniformly bounded. The third result gives us an explicit condition under which the vertical rotation set contains an interval, thus ensuring that f has positive topological entropy. As a corollary of this result, we obtain an answer to Boyland's conjecture in this context. This means that if f preserves area and has a lift \hat{f} with zero Lebesgue measure rotation number, then either the vertical rotation set of f is the singleton set 0 , and therefore the orbits under the action of \hat{f} are uniformly bounded, or 0 is an interior point of the vertical rotation set. In both cases, we ensure that the rotation number of the Lebesgue measure is realized. Additionally, Theorem 1 of this work presents an unusual proof of a widely used result in the study of torus homeomorphisms.

Keywords: Vertical rotation set. Dehn twists. Brick decomposition.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos	3
2.1	Topologia	3
2.2	Sistemas Dinâmicos	6
2.3	Sistemas Dinâmicos Topológicos	7
2.3.1	Difeomorfismos Twists	8
3	Preliminares	9
3.1	Dehn twits	9
3.2	Ferramentas Básicas	12
3.2.1	Decomposição do plano em Bricks	12
3.2.2	Os conjuntos B_N^+ e B_S^-	15
3.2.3	$\omega(B_S^-)$ e $\omega(B_N^+)$	18
4	Resultados Principais	23
4.1	Teorema 5	24
4.2	Teorema 6	25
4.2.1	Corolário 1	36
4.3	Teorema 7	37
4.3.1	Corolário 2	38
	Referências	43

Capítulo 1

Introdução

O estudo feito neste trabalho utiliza-se principalmente do conceito de conjunto de rotação vertical para um homeomorfismo do toro homotópico a um Dehn twist (ver definição 13). Para esse contexto, esse conjunto é uma versão de um conceito que se iniciou com os trabalhos de Poincaré e Denjoy no trabalho com homeomorfismos do círculo. Quando tratamos desses homeomorfismos, não temos um conjunto, em disso, temos um número de rotação. Esse número é um poderoso invariante topológico que classifica totalmente a dinâmica nesse contexto (ver [1] para mais detalhes).

No caso do estudo de homeomorfismos do toro homotópicos à identidade, para cada ponto do toro definimos algo similar ao número de rotação, o vetor de rotação e, a partir disso, definimos um conjunto de rotação bidimensional utilizando tais vetores. Assim como nos outros casos, o objetivo é utilizar informações sobre os vetores de rotação e o conjunto de rotação para entender a dinâmica do sistema, isto é, existência de pontos fixos, órbitas periódicas, etc (ver [8]). Nesse caso, um resultado similar ao citado anteriormente, foi obtido por John Franks. O resultado nos diz que, se o conjunto de rotação tiver interior não vazio, então os vetores de coordenadas racionais são realizados por órbitas periódicas.

Uma extensão dessa ideia foi apresentada por M. Misiurewicz, K. Ziemian, J. Franks e outros, para o anel através do conceito do intervalo de rotação e para o toro, onde pode ser um intervalo ou um conjunto bidimensional, a depender da classe de homotopia. Nesses novos contextos, órbitas diferentes podem ter números -ou vetores- de rotação diferentes. Intuitivamente, esse número, se existir, mede a velocidade média da órbita sob ação da dinâmica. A princípio, o fato de que órbitas diferentes não necessariamente têm o mesmo número de rotação pode nos dar a ideia de que o conjunto de números de rotação possíveis não necessariamente forma um intervalo, porém, há resultados que nos garantem que, de fato, esse conjunto é um intervalo. Além disso, temos resultados que nos dizem quais são os tipos de órbitas que realizam certos números de rotação. Por exemplo, números de rotação racionais, para aplicações twist do toro, são realizados por órbitas periódicas.

No caso de homeomorfismos homotópicos a Dehn twists, diferente do caso homotópico à identidade, não faz sentido definirmos um conjunto de rotação bidimensional. Isso porque se tentássemos, a primeira coordenada de um vetor de rotação dependeria de qual ponto

tomamos na fibra do levantado, e tal vetor não estaria bem definido (ver 3.1). Em invés disso definimos um conjunto de rotação vertical. Isso faz com o que o estudo de homeomorfismos do toro homotópicos a Dehn twists seja, de certa forma, mais simples do que no caso da identidade. Apesar disso, muitas das perguntas feitas para o caso da identidade também podem ser feitas nesse contexto, por exemplo, como é o conjunto de rotação de um Dehn twist minimal? Se o conjunto de rotação de um Dehn twist é apenas o 0, podemos garantir que as órbitas de um levantamento \hat{f} de f são todas limitadas? Essa ultima pergunta é particularmente interessante devido a um trabalho de F. Tal e A. Koropecki, no qual apresentam um teorema que garante a existência de um homeomorfismo h homotópico à identidade, cujo conjunto de rotação é apenas $(0, 0)$ e h tem um levantamento \hat{h} tal que \hat{h} tem pontos fixos e ao mesmo tempo tem pontos com órbitas ilimitadas em todas as direções. Isto é, o deslocamento sublinear não implica deslocamento linear no caso da identidade.

Por fim, ressalta-se que este trabalho partiu das discussões propostas pelo artigo "Dynamics of homeomorphisms of the torus homotopic to Dehn twists", dos pesquisadores Salvador Addas Zanata, Fábio Armando Tal e Bráulio Augusto Garcia, que apresenta que homeomorfismos homotópicos a Dehn twists têm um comportamento diferente em relação ao caso da identidade. Por exemplo, quando o conjunto de rotação vertical é $\{0\}$, as órbitas sob a ação de um levantamento de f para o cilindro são uniformemente limitadas. Portanto, a fim de complementar tais discussões, o objetivo deste trabalho é apresentar uma exposição concisa e fechada do artigo em questão, de forma que não se faça necessário consultar muitas outras referências externas, além de buscar outras formas de se demonstrar e pensar sobre alguns dos resultados existentes.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Topologia

Definição 1. Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto não vazio e $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ é uma família de subconjuntos que satisfaz:

- $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;
- $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha \in \tau, \forall A \subset \tau$;
- $\bigcap_{\alpha \in A} \alpha \in \tau, \forall A \subset \tau$, com A finito.

Dizemos que τ é uma topologia em X e seus elementos são os conjuntos abertos de X . Um conjunto de X é fechado se o seu complementar em X é aberto. Um conjunto pode ser aberto e fechado ao mesmo tempo, e então dizemos que ele é clopen. Em particular, o espaço topológico X todo e \emptyset são sempre clopen.

Definição 2. Sejam (A, α) e (B, β) espaços topológicos. Dizemos que $f : A \rightarrow B$ é uma função contínua se $f^{-1}(O) \in \alpha$, para todo $O \in \beta$ (a pré-imagem de um aberto de B é um aberto de A).

Definição 3. Dizemos que X é compacto se toda cobertura aberta C de X admite subcobertura finita.

Definição 4. (conjunto nunca denso) Um subconjunto S de um espaço topológico X é dito nunca denso, se seu fecho \overline{S} tem interior vazio, isto é, $\text{int}(\overline{S}) = \emptyset$.

Dois das propriedades importantes de conjuntos nunca densos são: subconjuntos de conjuntos nunca densos são nunca densos e a união finita de conjuntos nunca densos também é um conjunto nunca denso.

Definição 5. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de homeomorfismo se f é contínua, invertível, com inversa contínua.

Definição 6. (homotopia) Considere duas funções $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas, onde X e Y são espaços topológicos.

Definimos como uma homotopia entre f e g uma função contínua $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, $(x, t) \mapsto h_t(x)$ de forma que $h_0(x) = f(x)$ e $h_1(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Dadas duas funções f e g como anteriormente, se existir uma homotopia entre f e g dizemos que f e g são homotópicas (notação: $f \simeq g$).

Um conceito muito importante que será bastante utilizado neste trabalho é o conceito de levantamento. Antes de apresentá-lo é necessário darmos algumas definições preliminares.

Definição 7. (espaço de recobrimento) Um espaço de recobrimento de um espaço topológico X é um espaço \tilde{X} acompanhado de uma função $p : \tilde{X} \rightarrow X$ que satisfaz a seguinte propriedade: existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X tal que para cada α , $p^{-1}(U_\alpha)$ é a união disjunta de abertos em \tilde{X} , de modo que a restrição de p é um homeomorfismo U_α

De maneira intuitiva podemos pensar que cada um desses abertos em \tilde{X} é uma “cópia” de um U_α , isto é, para cada U_α , \tilde{X} possui múltiplas “cópias” disjuntas desse aberto.

Definição 8. (levantamento) Um levantamento de uma função $f : Y \rightarrow X$ ao espaço de recobrimento \tilde{X} é uma função $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$, de forma que $f = p \circ \tilde{f}$.

No decorrer deste trabalho serão considerados levantamentos de uma função $f : T^2 \rightarrow T^2$ ao cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e ao plano \mathbb{R}^2 . Nesse caso estamos considerando como levantamento de f uma função $g : M \rightarrow T^2$, $M = S^1 \times \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}^2 , tal que $p \circ g = f \circ p$, onde p é a função que leva um par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ em $(\tilde{x} \bmod 1, \tilde{y} \bmod 1)$, no caso de $M = \mathbb{R}^2$, e a função que leva um par $(\hat{x}, \hat{y}) \in S^1 \times \mathbb{R}$ em $(\hat{x}, \hat{y} \bmod 1)$, no caso em que $M = S^1 \times \mathbb{R}$. Isto é, o diagrama da figura 2.1 comuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\
 p \downarrow & & \downarrow p \\
 T^2 & \xrightarrow{f} & T^2
 \end{array}$$

Figura 2.1: Diagrama comutativo do levantamento de uma função do toro

Definição 9. Um espaço métrico é um par (M, d) onde M é um conjunto não vazio e $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$;
- $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in M$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in M$.

Seja X um espaço métrico. Dados $x \in X$ e $\epsilon > 0$ podemos definir a bola de centro x e raio ϵ como $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$. A partir disto temos então uma topologia

especial chamada de topologia métrica, cuja base é dada pelas bolas abertas de X .

Um dos resultados mais importantes e que é amplamente utilizado neste trabalho diz respeito à convergência de seqüências na topologia Hausdorff. Por isso, adiante apresentaremos os resultados e definições pertinentes.

Definição 10. Distância Hausdorff entre dois conjuntos. Dados dois conjuntos A e B não vazios de um espaço métrico M , definimos a distância Hausdorff entre A e B da seguinte forma:

$$d_H(A, B) = \inf\{\epsilon \geq 0 : B \subset V_\epsilon(A) \text{ e } A \subset V_\epsilon(B)\}$$

Aqui $V_\epsilon(*)$ significa que estamos tomando uma ϵ -vizinhança desse conjunto.

Equivalentemente,

$$d_H(A, B) = \sup_{x \in A \cup B} \left| \inf_{a \in A} d(x, a) - \inf_{b \in B} d(x, b) \right|$$

Definição 11. Convergência na topologia Hausdorff. Dada uma seqüência de conjuntos A_n de um espaço métrico, dizemos que A_n converge a A na topologia Hausdorff se dado $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $A_n \subset V_\epsilon(A)$ e $A \subset V_\epsilon(A_n)$. Isto é, a seqüência A_n converge na distância Hausdorff.

Teorema 1. Toda seqüência de compactos não vazios $A_n \subset K$, onde K é um compacto de um espaço métrico munido de uma métrica d , tem uma subsequência convergente na topologia Hausdorff para um compacto $A \subseteq K$.

Demonstração. Dada uma seqüência A_n de compactos não vazios contidos em K , defina para cada A_n a seguinte função:

$$d_{A_n} : K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x, A_n) \doteq \inf\{d(x, a) : a \in A_n\}$$

Afirmo que as funções d_{A_n} são limitadas e formam uma família equicontínua de funções. O fato de que são limitadas é imediato do fato de que K é limitado, e portanto, $|d_{A_n}| \leq \text{diam}(K)$. Vamos então verificar a equicontinuidade.

Dados $x, y \in K$

$$d(x, A_n) \leq d(x, y) + d(y, A_n) \Rightarrow d(x, A_n) - d(y, A_n) \leq d(x, y)$$

Daí, por simetria em x e y , $|d_{A_n}(x) - d_{A_n}(y)| \leq d(x, y)$, isto é, as funções d_{A_n} são lipschitz de constante 1. Portanto, d_{A_n} é uma família equicontínua e limitada de funções. Podemos então aplicar o teorema de Arzelà Ascoli: d_{A_n} tem uma subsequência $d_{A_{n_i}}$ que converge uniformemente a uma função d' em K .

Como a convergência uniforme implica convergência pontual, se mostrarmos que $d' = d_A$ para algum compacto $A \subseteq K$, podemos utilizar a caracterização da distância

Hausdorff como $d_H(A_{n_i}, A) = \sup_{x \in K} |d_{A_{n_i}}(x) - d_A(x)|$ para concluir que $A_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} A$ na topologia Hausdorff. Basta então mostrarmos que $d' = d_A$ para algum compacto $A \subseteq K$.

Seja $A = \{x \in K : d'(x) = 0\}$, esse conjunto é um compacto, não vazio. Pois, considere uma sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \in A_{n_i}$ para todo i , utilizando um argumento de compacidade, podemos supor que $x_i \rightarrow x'$, com $x' \in K$. Como $d_{A_{n_i}}(x_i) = 0$ para todo i , a convergência uniforme nos garante que $d'(x') = 0$. Portanto, $A \neq \emptyset$.

Para vermos que A é compacto, note que d' é uma função contínua, portanto, dado $x \in K$ tal que $d'(x) \neq 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in B_\epsilon(x)$, $d'(y) \neq 0$. Isto é, A^c é aberto, portanto A é fechado, e como A está contido num compacto, A também é compacto.

Agora veremos que $d_A = d'$. Se $d'(a) = 0$, como $d'(a) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(a, A_{n_i})$, para cada i essa distância é realizada por algum $a_i \in A_{n_i}$, isto é, $d(a, A_{n_i}) = d(x, a_i)$ (pode ser que haja mais de um ponto que realize essa distância, mas só precisamos que exista um), tomando o limite temos $\lim_{i \rightarrow \infty} d(a, a_i) = 0 \Rightarrow a_i \rightarrow a$. Isto é, todo elemento de A pode ser escrito como o limite de uma sequência a_i onde cada $a_i \in A_{n_i}$.

Dado $x \in K$ para cada A_{n_i} existe um $a_i \in A_{n_i}$ que realiza $d(x, A_{n_i})$ tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $a_i \rightarrow a \in A$. Além disso, $d_A(x)$ é realizada por algum ponto $b \in A$. Daí temos que $d_A(x) = d(x, b) \leq d(x, a_i) \Rightarrow d_A(x) \leq d'(x)$. Isto é, $d_A(x) \leq d'(x)$. Se $a = b$ então não temos mais nada a fazer, podemos então supor que $a \neq b$, como $b \in A$ sabemos que existe uma sequência $b_i \rightarrow b$, com $b_i \in A_{n_i}$. Daí temos que, $d(x, a_i) \leq d(x, b_i) \Rightarrow d(x, a) \leq d(x, b)$. Isto é, $d'(x) \leq d_A(x)$. \square

Observação: Se além das outras hipóteses, A_n for uma sequência de conexos, então A será conexo. Isso é verdade, pois se não fosse, haveria dois abertos disjuntos onde cada um contém uma componente conexa de A . Usando a definição de convergência na topologia Hausdorff concluiríamos que os A_n não são conexos, para n suficientemente grande, nos dando um absurdo.

2.2 Sistemas Dinâmicos

Neste trabalho, lidaremos apenas com sistemas dinâmicos discretos. Por conta disso, todas as definições serão dadas com isso em mente.

Um sistema dinâmico discreto é um par (X, f) , onde X é um conjunto não vazio e $f : X \rightarrow X$ é uma função. Dado $n \in \mathbb{N}$, f^n denota a n -ésima iterada da função f , que é dada pela composição de f com ela mesma n vezes, isto é, $f^n = f \circ \dots \circ f$ (n vezes); se f é invertível, então denotamos por $f^{-n} = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$; e $f^0 = Id$.

É comum impormos sobre X ou f mais condições, que nos dão outras estruturas. Estas, por sua vez, muitas vezes são preservadas por f . Por exemplo: podemos exigir que X seja um espaço topológico, um espaço métrico ou um espaço de medida. No caso de um espaço de medida, podemos exigir que f seja uma função que preserva medida, por exemplo. Dessa forma temos uma propriedade que é preservada por f .

Dado $x \in X$, denotamos por órbita positiva de x o conjunto $\mathcal{O}^+ = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$; por órbita negativa $\mathcal{O}^- = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n < 0\}$; Denotamos por órbita $\mathcal{O} = \mathcal{O}^+ \cup \mathcal{O}^-$.

2.3 Sistemas Dinâmicos Topológicos

Um sistema dinâmico topológico é um sistema dinâmico (X, f) onde X é um espaço topológico e $f : X \rightarrow X$ é uma função contínua.

Dada uma função $f : X \rightarrow X$ dizemos que um subconjunto $E \subset X$ é invariante se $f(E) \subset E$.

Definição 12. Seja X um compacto. Um subconjunto não vazio, fechado e invariante $Y \subset X$ é dito minimal se ele não contiver nenhum subconjunto, fechado, não-vazio e invariante. Isto é, se $K \subseteq Y$ é um fechado invariante então, $K = Y$ ou $K = \emptyset$.

Se $f : X \rightarrow X$ e X é um conjunto minimal, então dizemos que f é minimal.

Sistemas dinâmicos minimais são uma generalização natural do conceito de órbitas periódicas. A seguir veremos alguns resultados sobre sistemas minimais que serão utilizados na demonstração do primeiro teorema da seção de resultados principais.

Teorema 2. Seja $X \rightarrow X$ um sistema dinâmico topológico. Se X é compacto, então X contém um conjunto minimal para f .

Este é um resultado bastante conhecido, cuja demonstração é uma aplicação do lema de Zorn utilizando a ordem parcial de subconjuntos de X invariantes por f dada pela inclusão. Ele nos é particularmente útil pois estamos tratando de homeomorfismos do toro, portanto, trabalhamos com sistemas dinâmicos topológicos em um espaço compacto.

Além de garantirmos a existência de conjuntos minimais, no toro, podemos dizer mais sobre a estrutura topológica de tais conjuntos.

Teorema 3. [7, teorema A] Seja X uma variedade conexa, compacta, de dimensão 2. E seja f contínua. Se $M \subset X$ é um conjunto minimal do sistema dinâmico (X, f) , então $M = X$ ou M é nunca denso em X .

Gostaríamos de garantir também que certas propriedades dos conjuntos sejam mantidas sob a ação de um sistema dinâmico minimal. O próximo resultado nos garante que uma das propriedades que precisamos será mantida.

Teorema 4. [6, teorema 2.5] Seja X um espaço Hausdorff compacto e $f : X \rightarrow X$ contínua. Se o sistema (X, f) é minimal e $A \subset X$ é nunca denso, então $f(A)$ é nunca denso, bem como $f^{-1}(A)$.

De fato, o resultado em [6] garante muito mais do que o que foi enunciado aqui, mas para garantirmos a simplicidade enunciamos apenas o que utilizaremos.

2.3.1 Difeomorfismos Twists

O objeto de estudo deste trabalho são os homeomorfismos do toro homotópicos a Dehn twists. Mais a frente apresentaremos a definição de um Dehn twist, mas antes disso precisamos entender o que é um difeomorfismo twist.

Seja \tilde{f} um difeomorfismo de \mathbb{R}^2 , escrevendo $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (f_1(\tilde{x}, \tilde{y}), f_2(\tilde{x}, \tilde{y}))$. Onde \tilde{f} satisfaz:

1. \tilde{f} preserva os fins do cilindro. Isto é, $\lim_{\tilde{y} \rightarrow \pm\infty} p_2 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \pm\infty$;
2. Condição de twist: a função $\tilde{y} \mapsto f_1(\tilde{x}_0, \tilde{y})$ é monótona estrita para cada $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$. De forma intuitiva \tilde{f} 'entorta' as verticais do plano de forma que para cada vertical v , $\tilde{f}(v)$ é gráfico em \tilde{x} ;
3. \tilde{f} preserva orientação;
4. Se $t \rightarrow +\infty$, $p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, t) \rightarrow +\infty$ e Se $t \rightarrow -\infty$, $p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, t) \rightarrow -\infty$.

Então \tilde{f} induz uma função f no toro T^2 que chamado de difeomorfismo twist.

Capítulo 3

Preliminares

Antes de apresentarmos qualquer resultado, precisamos estabelecer um pouco da notação que será utilizada daqui pra frente.

Seja $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ o toro planificado. Além disso, sejam $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ e $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ as funções de recobrimento associadas. Denotaremos as coordenadas por $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ e por $(\hat{x}, \hat{y}) \in S^1 \times \mathbb{R}$.

Sejam $p_{1,2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ as projeções usuais de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} , isto é, $p_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}$ e $p_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{y}$. As projeções no cilindro também serão denotadas por p_1 e p_2 .

3.1 Dehn twists

Estamos interessados em estudar a ação de homeomorfismos do toro homotópicos a Dehn twists. Para isso, precisamos entender um pouco a ação de um Dehn twist, bem como definir alguns conceitos.

Dehn twists do toro são, por definição, as classes de homotopia dos difeomorfismos twist. Assim, podemos tomar representantes dessas classes para nos referirmos a Dehn twists (para mais detalhes sobre as classificações de homeomorfismos do toro ver [5, 1.1]). Dessa forma, tome então o conjunto dos homeomorfismos do toro homotópicos a um Dehn twist $(x, y) \rightarrow (x + ky \bmod 1, y \bmod 1)$ para algum $k \in \mathbb{Z}^*$. Denotaremos esse conjunto por $DT(T^2)$. Além disso, denotaremos por $DT(S^1 \times \mathbb{R})$ e por $DT(\mathbb{R}^2)$ os conjuntos de levantamentos de elementos de $DT(T^2)$ ao cilindro vertical e ao plano, respectivamente.

Intuitivamente podemos pensar que assim como os twists, os Dehn twists também possuem as propriedades de “entortar” verticais e preservar os fins do cilindro, quando tomamos levantamentos para o plano ou para o cilindro, respectivamente. A principal diferença é que enquanto nos twists para cada vertical v , $\tilde{f}(v)$ é gráfico em \tilde{x} (onde f é um difeomorfismo twist do toro), para os Dehn twists isso não necessariamente precisa ser verdade. As figura 3.1, 3.2 e 3.3 nos ajudam a ter ideia de como agem os Dehn twists.

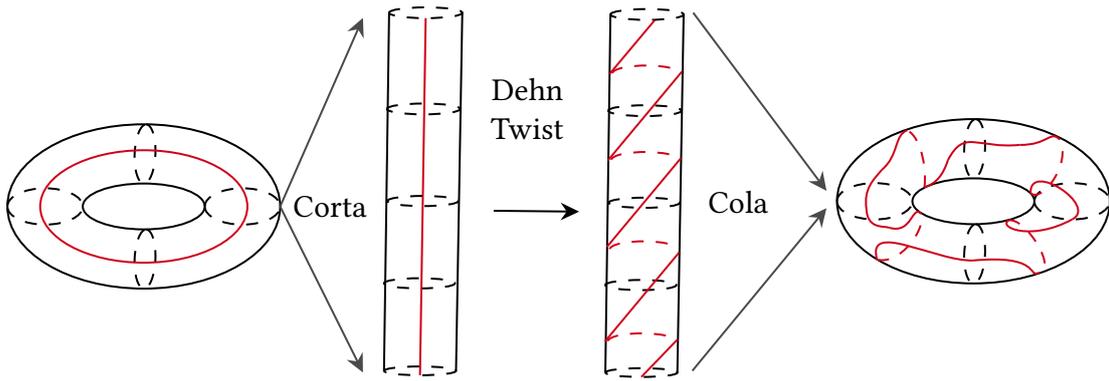


Figura 3.1: A ação de um Dehn twist

No caso do toro plano, a dinâmica de um Dehn twist é exemplificada na figura 3.2.

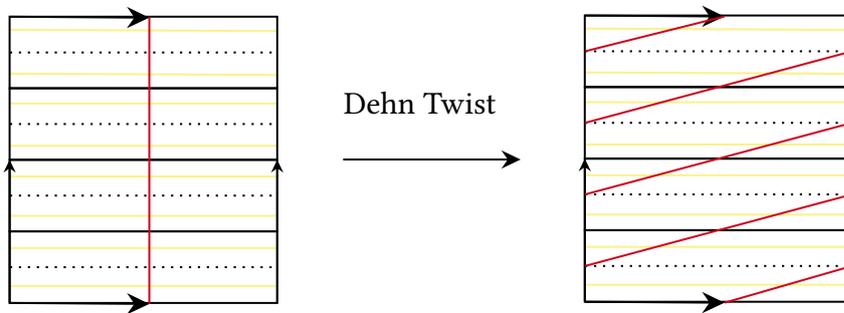


Figura 3.2: Dinâmica de um Dehn twist em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

Ambas as figuras foram retiradas da referência [5](figuras 1.1 e 1.2).

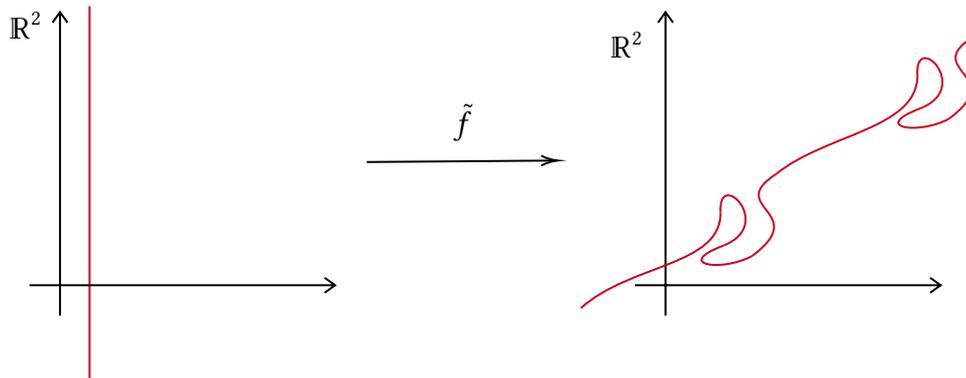


Figura 3.3: Ação de um levantamento para o plano de um Dehn twist

Uma caracterização importante dos Dehn twists é que no levantamento \tilde{f} é da forma $\tilde{f} = (\tilde{x} + k\tilde{y}, \tilde{y}) + \Phi$ onde Φ é \mathbb{Z}^2 -periódica.

Definição 13. Dado $f \in DT(T^2)$ e um levantamento $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$, o conjunto

$$\rho_V(\hat{f}) = \bigcap_{i \geq 1} \bigcup_{n \geq i} \left\{ \frac{p_2 \circ \hat{f}^n(\hat{z}) - p_2(\hat{z})}{n} : \hat{z} \in S^1 \times \mathbb{R} \right\}$$

é o que chamamos de conjunto de rotação vertical de \hat{f} . Esse conjunto é sempre não vazio, além disso é um intervalo compacto, isto é, é da forma $[a, b]$, com $a \leq b$ (podendo ser apenas um ponto, quando $a = b$).

Da definição $\rho v(\hat{f}^m + (0, n)) = m \cdot \rho v(\hat{f}) + n$ para todos os inteiros m, n .

Definição 14. Se γ é uma curva fechada simples homotopicamente não-trivial em $S^1 \times \mathbb{R}$, então $\gamma^c \doteq \gamma^{-o} \cup \gamma^{+o}$, onde $\gamma^{-o(+o)}$ é a componente conexa de γ^c que contém o fim inferior(superior) do cilindro. Defina então $\gamma^- \doteq \overline{(\gamma^{-o})} = \gamma^{-o} \cup \gamma$ e $\gamma^+ \doteq \overline{(\gamma^{+o})} = \gamma^{+o} \cup \gamma$.

Proposição 1. Sejam $f \in DT(T^2)$ e \hat{f} um levantamento de f para o cilindro. Se para alguma curva homotopicamente não trivial e algum $n \in \mathbb{N}$ temos que $\hat{f}^N(\gamma) \subset \gamma^- - (0, 1)$ então, $\rho v(\hat{f}) \subset] - \infty, -\frac{1}{N}]$.

Demonstração.

Como $f \in DT(T^2)$, a nossa hipótese sobre γ garante que $\hat{f}^N(\gamma^-) \subset \gamma^-$. Além disso, para qualquer k positivo vale:

$$\hat{f}^{kN}(\gamma^-) \subset \gamma^- - (0, k)$$

Assim, para qualquer $\hat{z} \in \gamma^-$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (p_2(\hat{f}^n(\hat{z})) - p_2(\hat{z})) \leq -\frac{1}{N}$$

Definindo $\Delta(z) \doteq p_2(\hat{f}(\hat{z})) - p_2(\hat{z})$ para qualquer \hat{z} na fibra do levantamento de z para o cilindro, é uma função (bem definida) contínua de T^2 . Seja $M > 0$ um inteiro tal que $|\delta(z)| < M$ para todo ponto z do toro. Definindo

$$\Delta^n(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(f^i(z)),$$

temos que $|\Delta^n(z)| < nM$. E por se tratar de uma soma telescópica, $\Delta^n(z) = p_2(\hat{f}^n(\hat{z})) - p_2(\hat{z})$. Além disso, $|\frac{1}{n} p_2(\hat{f}^n(\hat{z})) - p_2(\hat{z})| < M$ para todo $n > 0$.

Isto é, a sequência $v_n(\hat{z}) = \left\{ \frac{1}{n} p_2(\hat{f}^n(\hat{z})) - p_2(\hat{z}) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [-M, M] \subset \mathbb{R}$. Portanto para todo $\hat{z} \in \gamma^-$, a sequência $v_n(\hat{z})$ possui subsequência convergente $v_{n_i}(\hat{z}) \rightarrow \bar{v}(\hat{z})$. Além disso, $\bar{v}(\hat{z}) \in \rho v \hat{f}$ e $\bar{v}(\hat{z}) \leq -\frac{1}{N}$.

O fato de que $f \in DT(T^2)$, isto é, \hat{f} é o levantamento de uma função do toro, também nos garante que o mesmo argumento vale para qualquer transladado vertical de γ por inteiros e portanto $\rho v(\hat{f}) \subset] - \infty, -\frac{1}{N}]$. \square

Esse resultado é central, pois é utilizado implicitamente diversas vezes em boa parte dos resultados deste trabalho.

Definição 15. Dado $f \in DT(T^2)$ e um levantamento $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$, seja μ uma medida de probabilidade Boreliana, f -invariante. Definimos o número de rotação vertical de μ da seguinte forma:

$$\rho_V(\mu) = \int_{T^2} \phi(x, y) d\mu$$

onde a função de deslocamento vertical $\phi : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\phi(x, y) = p_2 \circ \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{y}$, para qualquer $(\hat{x}, \hat{y}) \in S^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\pi^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) \subset p^{-1}(x, y)$.

Essas definições são de grande importância para este trabalho, pois, como dito na introdução deste texto, ao estudarmos esses conjuntos garantimos certas propriedades da dinâmica.

3.2 Ferramentas Básicas

3.2.1 Decomposição do plano em Bricks

Definiremos uma decomposição do plano em bricks D_i da seguinte maneira:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i,$$

onde cada D_i da decomposição é o fecho de um aberto conexo e simplesmente conexo, tal que ∂D_i é uma curva poligonal simples com $\text{int}(D_i) \cap \text{int}(D_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Além disso, nessa decomposição os vértices de cada componente não têm mais do que três arestas conectadas a eles, e o número de elementos da decomposição contidos em qualquer compacto do plano é finito. Isto é, dizemos que a decomposição é localmente finita.

Tipicamente uma decomposição em bricks é algo como representado na figura 3.4.

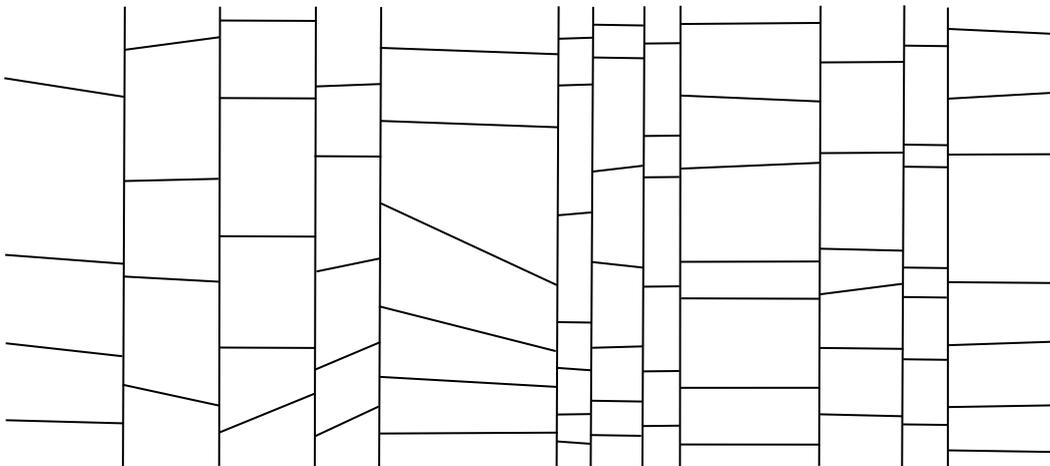


Figura 3.4: Exemplo de uma decomposição em bricks

Definição 16. Dado um homeomorfismo $\tilde{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva orientação, dizemos que uma decomposição em bricks é livre, se todos os bricks são livres ($\tilde{h}(D_i) \cap D_i = \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$).

Definição 17. Dados dois bricks D e E , se existe uma sequência de bricks $D = D_0, D_1, \dots, D_{n-1}, D_n = E$ tal que $\tilde{h}(D_i) \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$, dizemos que existe uma cadeia de bricks que conecta D e E . Se $D = E$ dizemos que essa cadeia é fechada.

Lema 1. A existência de uma cadeia fechada de bricks livre implica a existência de uma curva fechada simples $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\text{index}(\gamma, \tilde{h}) \doteq \text{degree} \left(\gamma, \frac{\tilde{h}(z) - z}{\|\tilde{h}(z) - z\|} \right) = 1$$

Observação: Se $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva simples fechada, $\text{index}(\gamma, \tilde{h})$ é o número de voltas que o campo vetorial $x - f(x)$ dá ao redor de γ . Alternativamente o index é o grau topológico da função $\tilde{g} = [\gamma(t) - f(\gamma(t))]/\|\gamma(t) - f(\gamma(t))\|$. O ponto importante é que se $\text{index}(\gamma, \tilde{h})$ é não nulo, então existe um ponto fixo de \tilde{h} na componente limitada de γ^c .

Antes de demonstrarmos o lema precisamos de alguns conceitos e resultados da referência [2].

Definição 18. Seja $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo de uma superfície. Uma disk chain de f é um conjunto finito U_1, \dots, U_n de discos abertos de M satisfazendo:

- 1. $f(U_i) \cap U_i = \emptyset$ para $1 \leq i \leq n$;
- 2. Se $i \neq j$ então ou $U_i = U_j$ ou $U_i \cap U_j = \emptyset$;
- 3. Para $1 \leq i \leq n$, existe $m_i > 0$ com $f^{m_i}(U_i) \cap U_{i+1} \neq \emptyset$.

Se $U_1 = U_n$ dizemos que a disk chain é periódica.

Lema 2. (lema dos discos livres de Franks) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva orientação e que tem uma disk chain periódica. Então existe uma curva fechada simples γ em \mathbb{R}^2 tal que $\text{index}(\gamma, f) = 1$. Se f tem apenas pontos fixos isolados, então f tem um ponto fixo de index positivo.

Esse resultado é bem similar ao que queremos demonstrar, no entanto, a grande diferença dos bricks para os discos utilizados aqui é que os bricks são fechados, enquanto os discos são abertos. Isso significa que precisamos utilizar os bricks para construir discos que nos permitam aplicar esse resultado.

Demonstração do Lema 1:

A ideia dessa demonstração é definirmos abertos U_0, \dots, U_n a partir dos bricks D_0, \dots, D_n de forma que esses abertos formem uma disk chain e então aplicar o lema 2 (consideramos aqui os índices mod n , portanto, $D_n = D_0$).

Como $\tilde{h}(D_i) \cap D_{i+1} \neq \emptyset$, $0 \leq i \leq n-1$. Seja então $p_i^- \in \tilde{h}(D_{i-1}) \cap D_i$ e $p_i^+ \in \tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(D_i) \cap D_{i+1})$. Além disso, exijo que $p_i^- = \tilde{h}(p_{i-1}^+)$ e que $p_i^+ \neq \tilde{h}(p_j^+)$, para $j = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1$ (note que, se algum p_i^+ é fixo, não há o que provar, então podemos supor que não seja).

Isto é, estamos num caso do tipo

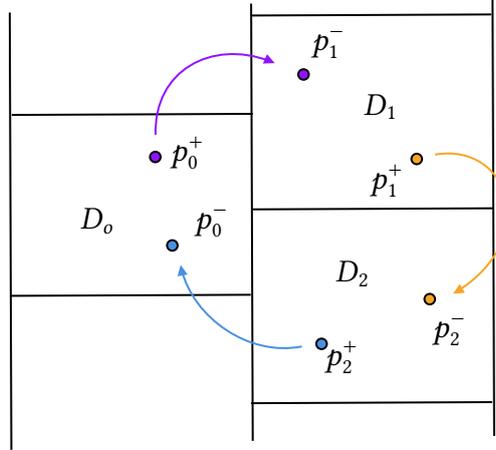


Figura 3.5: Exemplo de uma brick chain fechada e os p_i^- e p_i^+ escolhidos

A exigência de que $p_i^+ \neq \tilde{h}(p_j^+)$ para $j = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1$ é para evitarmos casos do tipo mostrado na figura 3.6.

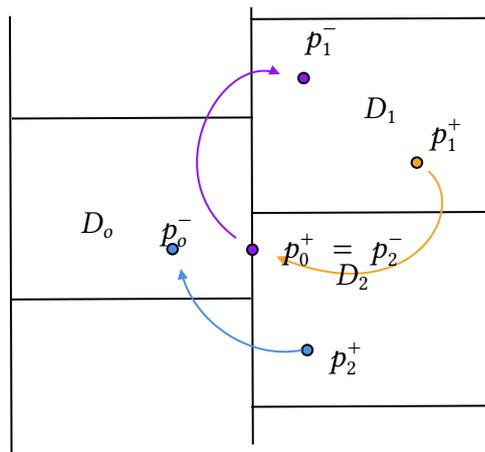


Figura 3.6: Caso onde $p_0^+ = p_2^+ = \tilde{h}(p_1^+)$

Tome então $\alpha_i \subset D_i$, arco simples que tem como um dos extremos p_i^- e o outro p_i^+ .

Como $\alpha_i \subset D_i$, $\tilde{h}(\alpha_i) \cap \alpha_i = \emptyset$ já que cada brick é livre. Dessa forma, utilizando um argumento de compacidade, garantimos que existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(\tilde{h}(\alpha_i)) \cap D_i = \emptyset$, e, pela continuidade de \tilde{h} e compacidade de α_i existe $\delta_i > 0$ tal que $\tilde{h}(V_{\delta_i}(\alpha_i)) \subset V_\epsilon(\tilde{h}(\alpha_i))$. Além disso, esse δ_i pode ser tomado de forma que ele seja menor que a distância de $V_\epsilon(\tilde{h}(\alpha_i))$ a D_i e de forma que $V_{\delta_i}(\alpha_i) \cap \tilde{h}(\alpha_i) = \emptyset$, isso é possível pois estamos assumindo que nenhum dos p_i^+ é fixo. Daí garantimos que $\tilde{h}(V_{\delta_i}(\alpha_i)) \cap V_{\delta_i}(\alpha_i) = \emptyset$.

Do fato de que cada $\alpha_i \subset D_i$, junto com a nossa escolha de p_i^- e p_i^+ , temos que existe $\epsilon > 0$ (aqui ϵ não é o mesmo utilizado anteriormente) tal que $V_\epsilon(\alpha_i) \cap V_\epsilon(\alpha_j) = \emptyset$, $0 \leq i < j \leq n-1$. Tome então $\varphi_i = \min\{\epsilon, \delta_i\}$ e defina $U_i = V_{\varphi_i}$.

Por fim, da escolha dos extremos de α_i temos que $\tilde{h}(U_i) \cap U_{i+1} \leq \emptyset$. Portanto, U_0, \dots, U_n formam uma disk chain. Agora basta aplicarmos o lema 2 e o resultado está demonstrado.

□

3.2.2 Os conjuntos B_N^+ e B_S^-

Em partes das demonstrações dos resultados principais deste trabalho utilizamos lemas que dizem respeito aos conjuntos B_N^+ e B_S^- . Nessa seção apresentamos sua construção e tais lemas.

A partir daqui é assumido sem perda de generalidade que qualquer $f \in DT(T^2)$ é homotópico a um Dehn twist $(x, y) \rightarrow (x + k_{dehn}y \bmod 1, y \bmod 1)$, com $k_{dehn} > 0$. Considere então um homeomorfismo $f \in DT(T^2)$. Dado um número real a , defina os seguintes conjuntos:

$$H_a = S^1 \times \{a\}, H_a^- = S^1 \times]-\infty, a] \quad \text{e} \quad H_a^+ = S^1 \times [a, +\infty[$$

Para simplificar, utilizaremos a seguinte notação:

$$H_0 = H, H_0^- = H^- \quad \text{e} \quad H_0^+ = H^+$$

Estes conjuntos então nos permitem definir os seguintes fechados que nos deixam um passo mais próximos de B_S^- e B_N^+ :

$$B^- = \bigcap_{n \leq 0} \hat{f}^n(H^-) \quad \text{e} \quad B^+ = \bigcap_{n \leq 0} \hat{f}^n(H^+)$$

Note que tanto B^+ quanto B^- são fechados \hat{f} -invariantes para frente. Com esses conjuntos em mão então finalmente podemos definir os conjuntos que desejamos.

Definição 19. $B_S^- \subset B^-$ e $B_N^+ \subset B^+$ são os conjuntos formados por todas as componentes conexas ilimitadas de B^- e B^+ respectivamente.

Esses conjuntos são fechados, porém, pode ser que sejam vazios. Dessa forma, gostaríamos de garantir sob quais condições esses conjuntos são não vazios. O próximo resultado nos dá uma forma de garantir isso.

Lema 3. Suponha que $0 \in \rho v(\hat{f})$. Então B_N^+ e B_S^- são não vazios.

Demonstração:

Primeiro, suponha que $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ é não limitado tanto superiormente quanto inferiormente. Nesse caso, considerando o conjunto B_S^- , vamos começar mostrando que para todo $a \leq -1$, existe um inteiro positivo $n = n(a)$ tal que

$$\hat{f}^{-n}(H_a) \cap H \neq \emptyset \quad \text{e} \quad n(a) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad a \rightarrow -\infty$$

Para um dado $a \leq -1$ nossa suposição sobre $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ implica que existe um $m > 0$ tal

que $\hat{f}^m(H) \cap H_a^- \neq \emptyset$. Se $\hat{f}^{-m}(H_a) \cap H = \emptyset$ então $\hat{f}^{-m}(H_a) \subset H^+ \subset H_a^+ + (0, 1)$. Dessa forma, 0 não estaria em $\rho v(\hat{f})$, ou seja, uma contradição. Portanto, para todo $a < -1$ existe um inteiro positivo $n = n(a)$ tal que $\hat{f}^{-n}(H_a) \cap H \neq \emptyset$. Agora seguiremos de forma parecida com [11, lema 6]

Dado $m > 0$ escolha $a < -1$ suficientemente negativo tal que:

$$n = \inf\{i > 0 : \hat{f}^{-i}(H_a^-) \cap H \neq \emptyset\} > m$$

O fato de que f preserva os fins do cilindro garante que isto é possível, isto é, garante que pontos muito para baixo no cilindro ainda são mandados em pontos baixos. De forma que quanto mais negativo é a leva-se mais tempo para uma iterada de H cruzar com H_a^- . Intuitivamente podemos pensar que esse n é o ínfimo dos tempos que H leva para atingir H_a^- , isto é, tomamos um a de forma que H leva no mínimo m para atingir H_a^- . Da definição então temos que:

$$\hat{f}^{-i}(H_a) \subset H^-, \text{ para } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad \hat{f}^{-n}(H_a^-) \cap H \neq \emptyset$$

Tome a compactificação norte e sul do cilindro, denotando $S^1 \times +\infty$ por N e $S^1 \times -\infty$ por S . Isso implica que existe um arco contínuo simples $\Gamma_m \subset \hat{f}^{-n}(H_a^-) \cap H^-$ tal que Γ_m conecta S a H , isto é, um dos extremos de Γ_m é S e o outro está em H .

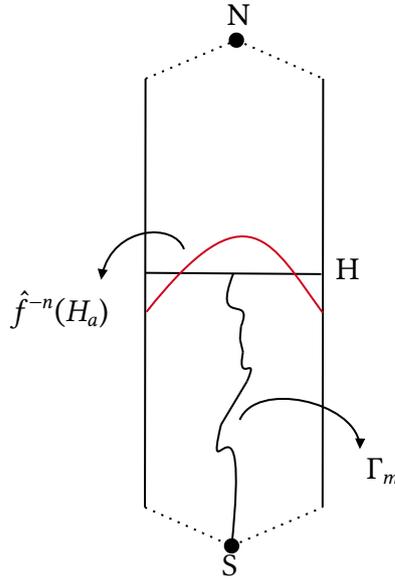


Figura 3.7: Γ_m

Para este arco, se $1 \leq i \leq n$, o fato de que $\Gamma_m \subset \hat{f}^{-n}(H_a^-)$ nos dá que $\hat{f}^i(\Gamma_m) \subset \hat{f}^{-n+i}(H_a^-)$. E portanto:

$$\Gamma_m \subset \bigcap_{i=0}^n \hat{f}^{-i}(H^-)$$

Assim, tomando $m \rightarrow +\infty \Rightarrow n \rightarrow +\infty$ o teorema 1 nos garante que a sequência Γ_m tem uma subsequência convergente na topologia Hausdorff, que converge a um compacto conexo Γ que conecta S a H . Da escolha dos Γ_m temos que $\Gamma \subset B_S^-$. E então $B_S^- \neq \emptyset$, note que, essa afirmação vale também para o cilindro não compacto.

Agora, suponha que $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ é limitado inferiormente (análogo para o caso em que é limitado superiormente). Em outras palavras, existe $M_0 > 0$, tal que $\hat{f}^n(S^1 \times \{0\}) \subset S^1 \times [-M_0, +\infty[$ para todo inteiro $n \geq 0$. Então $\hat{f}^n(S^1 \times [M_0, +\infty[) \subset S^1 \times [0, +\infty[$ para todo inteiro $n \geq 0$. Isto é,

$$\hat{f}^n(H_{M_0}^+) \subset H^+, \text{ para todo } n \geq 0 \Rightarrow H_{M_0}^+ \subset \hat{f}^{-n}(H^+), \text{ para todo } n \geq 0 \Rightarrow H_{M_0}^+ \subset B_N^+$$

Assim B_N^+ é não vazio. O importante aqui é que foi utilizado apenas suposição de que $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ é limitado inferiormente, podendo ser ilimitado superiormente ou não.

Ainda sob a hipótese de que $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ é limitado inferiormente, provaremos que B_S^- também é não vazio. Como feito anteriormente, tome a compactificação norte e sul do cilindro. Seja $O^* = \bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H^+)$, note que este conjunto é limitado inferiormente. Desta forma, seja O o complementar da componente conexa de $(O^*)^c$ que contém S (isto é, apenas tapamos os buracos como na figura 3.8).

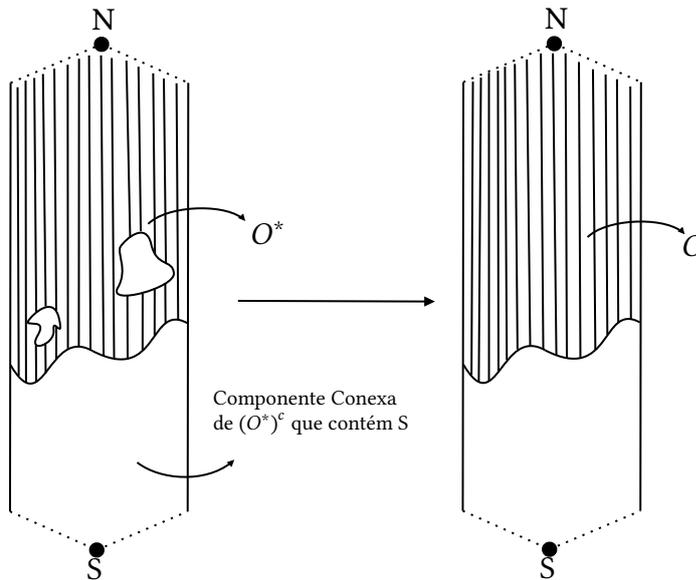


Figura 3.8: Construção do conjunto O

Como estamos considerando a compactificação, um clássico teorema da esfera e do plano nos garante que O^c é conexo e o mesmo vale para $\partial O \doteq K$. $O^* \subset O$, além disso, $N \in O$ e $\hat{f}(O) \subset O$, isso porque \hat{f} é um homeomorfismo e portanto as componentes conexas

limitadas do complementar de O^* são permutadas. Se $\bigcap_{n \leq 0} \hat{f}^n(O^c) = \emptyset$ então $0 \notin \rho v(\hat{f})$, absurdo. Portanto $\bigcap_{n \leq 0} \hat{f}^n(O^c) \neq \emptyset$ e como cada componente conexa desse \hat{f} -invariante é limitada superiormente e ilimitada, temos que para um inteiro $j \geq 0$ suficientemente grande $\bigcap_{n \leq 0} \hat{f}^n(O^c) - (0, j) \subset B_S^- \neq \emptyset$. \square

3.2.3 $\omega(B_S^-)$ e $\omega(B_N^+)$

Começamos então definindo esses dois conjuntos, definiremos $\omega(B_S^-)$ mas tudo é análogo para $\omega(B_N^+)$.

$$\omega(B_S^-) \doteq \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{\bigcup_{i=n}^{+\infty} \hat{f}^i(B_S^-)}$$

Como $\hat{f}(B_S^-) \subset B_S^- = \overline{B_S^-}$, temos que

$$\omega(B_S^-) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \hat{f}^n(B_S^-) \quad (3.1)$$

Lema 4. $\omega(B_S^-)$ é fechado, \hat{f} -invariante, cujas componentes conexas não vazias (se houverem) são todas ilimitadas.

A demonstração desse resultado baseia-se em referência [11, lema 7]

Demonstração

Tome a compactificação norte e sul do cilindro, identificando $S^1 \times +\infty$ por N e $S^1 \times -\infty$ por S . S pertence a B_S^- e $\hat{f}(S) = S$, disso temos que $S \in \omega(B_S^-)$. Note que, na compactificação, B_S^- é conexo, portanto, $\omega(B_S^-)$ é conexo. Daí então temos que cada componente conexa de $\omega(B_S^-)$ não vazia (se houver), no cilindro não compacto, é ilimitada. Pode ser que na compactificação $\omega(B_S^-) = \{S\}$ e nesse caso $\omega(B_S^-)$ é vazio no cilindro não compacto.

Como a intersecção de qualquer coleção de fechados é fechada, (3.1) garante que $\omega(B_S^-)$ é fechado. O fato de que $\omega(B_S^-)$ é \hat{f} -invariante segue do seguinte cálculo. Em vista de que $\hat{f}(B_S^-) \subset B_S^-$,

$$\hat{f}(\omega(B_S^-)) = \hat{f}(\bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{f}^n(B_S^-)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{f}^n(B_S^-) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{f}^n(B_S^-) \cap B_S^- = \omega(B_S^-)$$

\square

Lema 5. Suponha que $0 \in \rho v(\hat{f})$ que implica que B_S^- é não vazio. Se $\omega(B_S^-) = \emptyset$, então $\rho v(\hat{f}) \supset [-\epsilon, 0]$ para algum $\epsilon > 0$.

Já sabemos que $\rho v(\hat{f})$ é um intervalo, podendo ser apenas um ponto. Como $0 \in \rho v(\hat{f})$, isso significa que se mostrarmos que existe um $\epsilon > 0$ tal que $-\epsilon \in \rho v(\hat{f})$, concluiremos a

prova. A demonstração desse resultado baseia-se na referência[11, lema 10] e o parágrafo que o segue.

Demonstração

Das nossas hipóteses temos que $\omega(B_S^-) = \emptyset$. Isso significa que existe um inteiro $N_1 > 0$ tal que $\hat{f}^{N_1}(B_S^-) \subset H_{-2}^-$, isto porque, se isso não fosse verdade, em particular, haveria algum ponto $p \in S^1 \times \{-2\}$ tal que $p \in \hat{f}^n(B_S^-)$ para todo n , o que significaria que $p \in \omega(B_S^-)$, contradizendo a nossa hipótese. Dessa forma, $\hat{f}^{N_1}(B_S^-) + (0, 1) \subset H^-$. Além disso, cada componente conexa de $\hat{f}^{N_1}(B_S^-) + (0, 1)$ é ilimitada e esse conjunto é positivamente invariante. Daí temos que $\hat{f}^{N_1}(B_S^-) + (0, 1) \subset B_S^-$, e portanto, $\hat{f}^{N_1}(B_S^-) \subset B_S^- - (0, 1)$.

Lembremos que $f \in DT(T^2)$ e portanto, como $\hat{f}^{N_1}(B_S^-) \subset B_S^- - (0, 1)$, para qualquer inteiro positivo k vale

$$\hat{f}^{kN_1}(B_S^-) \subset B_S^- - (0, k) \subset H_{-k}^-$$

Daí, para qualquer ponto $\hat{z} \in B_S^-$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p_2(\hat{f}^n(\hat{z})) - p_2(\hat{z})}{n} \leq -\frac{1}{N_1}$$

Um argumento análogo ao feito na proposição 1 nos garante que, existe $\epsilon > 0$ tal que $-\epsilon \leq -\frac{1}{N_1}$ e $-\epsilon \in \rho v(\hat{f})$. \square

Agora consideremos o conjunto B_S^- para a função \hat{f}^{-1} , denotado por $B_S^-(inv)$.

Lema 6. Os conjuntos $\omega(B_S^-)$ e $\omega(B_S^-(inv))$ são iguais.

Demonstração

Do lema 4 temos que $\hat{f}(\omega(B_S^-)) = \omega(B_S^-)$ e $\hat{f}^{-1}(\omega(B_S^-(inv))) = \omega(B_S^-(inv))$. Como $\omega(B_S^-) \subset H^-$ temos que $\hat{f}(\omega(B_S^-)) = \omega(B_S^-) \subset \hat{f}^n(H^-)$ para todo $n \geq 0$. E portanto $\omega(B_S^-) \subset B_S^-(inv)$. Além disso, como $\hat{f}(\omega(B_S^-)) = \omega(B_S^-)$ temos que $\hat{f}^{-1}(\omega(B_S^-)) = \omega(B_S^-)$ e portanto $\omega(B_S^-) \subset \omega(B_S^-(inv))$. A outra inclusão é análoga. \square

Lema 7. Qualquer componente conexa $\tilde{\Gamma}$ de $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$ é ilimitada, não necessariamente na direção \tilde{y} .

Demonstração:

Tome uma componente $\tilde{\Gamma}$ de $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$ e, por absurdo, suponha que $\tilde{\Gamma}$ seja limitada.

Queremos então mostrar que existe um n suficientemente grande tal que, se A_n é a componente conexa de $V_n(\pi^{-1}(\omega(B_S^-)))$ que contém $\tilde{\Gamma}$, então A_n é limitada.

Por absurdo, suponha que A_n é ilimitada para todo n . Considere um ponto $\tilde{p} \in \tilde{\Gamma}$, existe sequencia de \tilde{y}_n arcos contidos em A_n , tal que \tilde{p} é um dos extremos de \tilde{y}_n , e o outro extremo \tilde{q}_n é de tal forma que $d(\tilde{p}, \tilde{q}_n) > n$.

Agora, leve o plano à esfera S^2 . Pelo teorema 1 existe subsequência $\tilde{\gamma}_{n_i}$ tal que $\tilde{\gamma}_{n_i} \rightarrow \phi$ quando $i \rightarrow +\infty$, na topologia Hausdorff. ϕ é um fechado conexo ilimitado, contido em $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$ e que contém \tilde{p} . Então ϕ está contido na componente conexa de $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$ que contém \tilde{p} , isto é, $\phi \subset \tilde{\Gamma}$, absurdo. Portanto, A_n é limitada. Além disso, A separa $\tilde{\Gamma}$ das outras componentes conexas e isso se mantém verdade para os translados horizontais por inteiros, assim está terminada a prova, pois encontraríamos uma componente conexa de $\omega(B_S^-)$ que é limitada contradizendo o lema 4.

□

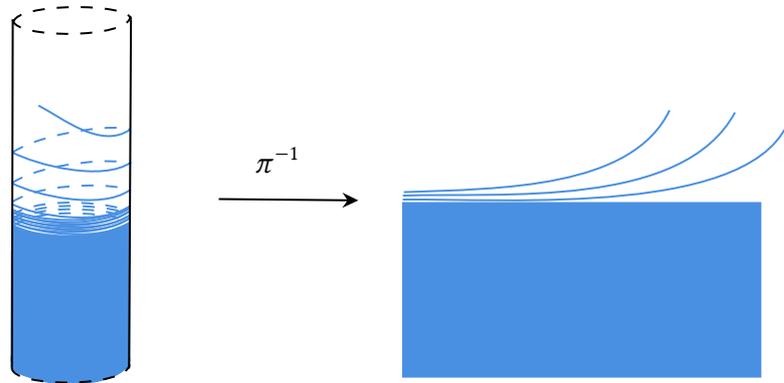


Figura 3.9 : Exemplo de como um conjunto conexo verticalmente ilimitado pode ser levantado a um conjunto no \mathbb{R}^2 cujas componentes conexas não necessariamente são verticalmente ilimitadas

A intuição importante de se ter deste resultado é que mesmo se $\omega(B_S^-)$ for um conexo (já sabemos que é ilimitado), não conseguimos garantir que ele se levanta a um conexo por π^{-1} , porém, as componentes que não são ilimitadas na direção \tilde{y} serão na direção \tilde{x} . Na figura anterior, as componentes que são limitadas para baixo, nem para cima, são ilimitadas para a esquerda.

Lema 8. Para qualquer componente conexa $\tilde{\Gamma}$ de $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$, $\tilde{\Gamma}^c$ é conexo.

Demonstração:

Seja $\tilde{\Gamma}$ uma componente conexa de $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$. Note que $\tilde{\Gamma}^c$ tem uma componente conexa que contém $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ (denotada por O^+). Então, suponha que exista outra componente conexa de $\tilde{\Gamma}^c$, denotada por O_1 , $O_1 \subset \mathbb{R} \times]-\infty, 0]$.

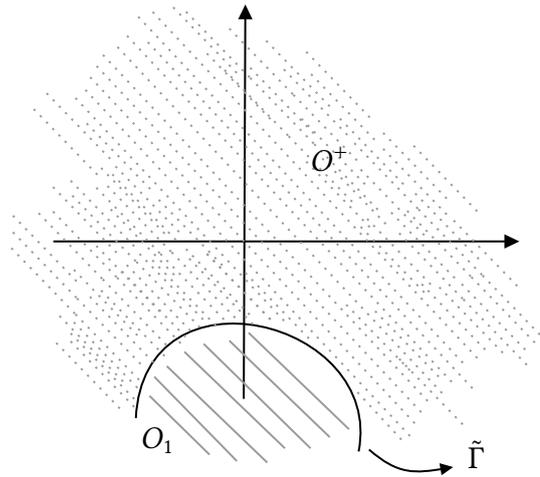


Figura 3.10: O^+ e O_1

Provaremos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\tilde{f}^n(O_1)$ está contido em $\mathbb{R} \times]-\infty, 0]$.

Suponha por absurdo que exista um inteiro n_0 tal que $\tilde{f}^{n_0}(O_1)$ não está contido em $]-\infty, 0]$. Daí temos que existe um ponto $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in O_1$ tal que $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in]0, +\infty[$. Tome então o segmento $S = \{p_1 \circ \tilde{f}^{n_0}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\} \times [p_2 \circ \tilde{f}^{n_0}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0), +\infty[$.

Como Dehn twists preservam os fins do cilindro, temos que existe um número $m_0 > 0$ tal que se $\tilde{y} > m_0$ então $\tilde{f}^{-n_0}(\tilde{x}, \tilde{y})$ tem coordenada \tilde{y} positiva. Tome então $\tilde{f}^{-n_0}(S)$, $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in \tilde{f}^{-n_0}(S)$. Além disso, o ponto $\tilde{f}^{-n_0}(p_1 \circ \tilde{f}^{n_0}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0), \tilde{y}')$ com $\tilde{y}' > m_0$ também pertence a $\tilde{f}^{-n_0}(S)$ e tem coordenada \tilde{y} positiva. Isto é, há um ponto em $\tilde{f}^{-n_0}(S)$ que está em O^+ e outro que está em O_1 , assim, concluímos que $\tilde{f}^{-n_0}(\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \cap \partial O_1 \neq \emptyset$. Uma contradição com o fato de que $\tilde{f}^{n_0}(\partial O_1) \subset \tilde{f}^{n_0}(\tilde{\Gamma}) \subset \mathbb{R} \times]-\infty, 0]$. Dessa forma está provado que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\tilde{f}^n(O_1)$ está contido em $\mathbb{R} \times]-\infty, 0]$.

Para concluir, seja Γ a componente conexa de $\omega(B_S^-)$ que contém $\pi(\tilde{\Gamma})$. Olhemos então para o conjunto $O = O_1 \cup \tilde{\Gamma}$, O é conexo e $\pi(O) = \pi(O_1) \cup \Gamma \subset \omega(B_S^-)$ pois $\hat{f}^n(\pi(O_1)) \subset H^-$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Daí temos que $\pi(O_1) \cup \Gamma = \Gamma \subset \omega(B_S^-)$, portanto, $O \subset \pi^{-1}(\omega(B_S^-))$, uma contradição com $O - 1 \neq \emptyset$. \square

Capítulo 4

Resultados Principais

Neste capítulo apresentamos os resultados principais do trabalho. Estes resultados são os seguintes:

Teorema 5. Dados $f \in DT(T^2)$ e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$ um levantamento de f , suponha que f é minimal. Então, $\rho v(\hat{f}) = \{\alpha\}$ para algum número irracional α .

Teorema 6. Dados $f \in DT(T^2)$ e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$ um levantamento de f , se $\rho v(\hat{f}) = \{\frac{p}{q}\}$ para algum racional $\frac{p}{q}$, então existe um compacto conexo $K \subset S^1 \times \mathbb{R}$, invariante sob $\hat{f}^q - (0, p)$, que separa os extremos do cilindro, de forma que todos os pontos de $S^1 \times \mathbb{R}$ tem orbitas uniformemente limitadas sob a ação de $\hat{f}^q - (0, p)$.

Corolário 1. Dados $f \in DT(T^2)$ e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$ um levantamento de f . Suponha que $\rho v(\hat{f}) = [a, \frac{p}{q}]$ para algum racional $\frac{p}{q}$ e um real $a < \frac{p}{q}$. Então, existe $M > 0$ tal que para todo $\hat{z} \in S^1 \times \mathbb{R}$, $p_2 \circ \hat{f}^n(\hat{z}) - p_2(\hat{z}) - n\frac{p}{q} < M$ para todo inteiro $n > 0$.

Teorema 7. Dados $f \in DT(T^2)$ e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$ um levantamento de f , existe $M > 0$, tal que se para pontos $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in S^1 \times \mathbb{R}$ temos que $p_2 \circ \hat{f}^{n_1}(\hat{z}_1) - p_2(\hat{z}_1) < -M$ e $p_2 \circ \hat{f}^{n_2}(\hat{z}_2) - p_2(\hat{z}_2) > M$ para certos inteiros positivos n_1 e n_2 , então 0 é um ponto interior de $\rho v(\hat{f})$.

Isto nos garante o conjunto de rotação de f contém um intervalo, e portanto, f tem entropia topológica positiva. (ver [4])

Corolário 2. Dados $f \in DT(T^2)$ que preserva área e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$ um levantamento de f com um número de rotação vertical nulo com relação a medida de Lebesgue, então ou $\rho v(\hat{f})$ é reduzido a 0 ou 0 é um ponto interior de $\rho v(\hat{f})$.

Este corolário nos da uma resposta à conjectura de Boyland nesse contexto. Isto é, sempre que temos um número de rotação nulo com relação a medida de Lebesgue, podemos garantir que 0 está no conjunto de rotação vertical.

4.1 Teorema 5

Dado $f \in DT(T^2)$ e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$, suponha que f é minimal. Então, $\rho v(\hat{f}) = \{\alpha\}$ para algum número irracional α .

Demonstração. Assuma que $f \in DT(T^2)$ e seu levantamento $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$ são de tal forma que f é minimal e existe $\{\frac{p}{q}\} \in \rho v(\hat{f})$, com $\{\frac{p}{q}\}$ racional. Tome $\hat{f}' = \hat{f}^q - (0, p)$ e temos que $0 \in \rho v(\hat{f}')$. Além disso, como f é minimal, suas iteradas também o são. Isso segue do fato de que se para algum inteiro $q > 0$ f^q não é minimal, como T^2 é compacto, o teorema 2 nos garante que f^q tem um compacto invariante minimal $K \subset T^2$. Pela minimalidade, K tem interior vazio. Isso porque f^q é um homeomorfismo, portanto só há conjuntos minimais de interior vazio (nunca densos, já que são fechados), com exceção de T^2 . Porém como estamos supondo que f^q não é minimal $K \neq T^2$. Por outro lado temos que

$$K \cup f(K) \cup \dots \cup f^{q-1}(K)$$

é invariante sob f . Agora, como K é nunca denso, $f(K), \dots, f^{q-1}(K)$ também são. Isto é, $(K \cup f(K) \cup \dots \cup f^{q-1}(K))$ é a união finita de conjuntos nunca densos e portanto $(K \cup f(K) \cup \dots \cup f^{q-1}(K))$ também é nunca denso, uma contradição com a minimalidade de f . Isto é, podemos assumir sem perda de generalidade que $0 \in \rho v(\hat{f})$.

Proposição 2 [5, teorema 2.2.6]. Sejam $f \in DT(T^2)$ e um levantamento $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$. Se f não tem pontos fixos, então existe uma curva fechada simples homotopicamente não trivial γ tal que $\hat{f}(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$.

Como \hat{f} não tem pontos fixos, por ser minimal isso implica que existe uma curva simples fechada homotopicamente não-trivial γ no cilindro tal que $\gamma \cap \hat{f}(\gamma) = \emptyset$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\hat{f}(\gamma) \subset \gamma^-$.

Seja $k > 0$ um inteiro tal que $\gamma - (0, k) \subset \gamma^-$. Se para algum $n > 0$, $\hat{f}^n(\gamma) \subset (\gamma - (0, k))^-$, então 0 não estaria em $\rho v(\hat{f})$. Então, para todo $n > 0$, existe um ponto \hat{z}_n acima de $\hat{f}(\gamma)$ e um abaixo de γ tal que

$$\{\hat{z}_n, \hat{f}(\hat{z}_n), \dots, \hat{f}^n(\hat{z}_n)\} \quad \text{está acima de } \gamma - (0, k)$$

Então, existe uma subsequencia \hat{z}_{n_i} tal que $\hat{z}_{n_i} \rightarrow \hat{z}^*$ quando $i \rightarrow \infty$, onde \hat{z}^* é um ponto no fecho da região entre $\hat{f}(\gamma)$ e γ .

A órbita positiva de \hat{z}^* é limitada no cilindro e, portanto, seu ω -limite, $\omega(\hat{z}^*)$ que é sempre fechado, é um compacto \hat{f} -invariante.

Além disso, qualquer translação vertical de $\omega(\hat{z}^*)$ por inteiros também é \hat{f} -invariante, pois \hat{f} é o levantamento de uma função do toro. Novamente, o teorema 2 nos garante que existe um conjunto compacto K \hat{f} -invariante minimal contido em $\omega(\hat{z}^*)$. Pela minimalidade, ele satisfaz $K \cap (K + (0, n)) = \emptyset$ para todo $n \neq 0$ inteiro.

Desta forma, como f é minimal, K projetado no toro tem de ser o toro todo, uma contradição. Como $\rho v(\hat{f})$ é sempre um intervalo não-vazio e não pode ter pontos racionais, o teorema está provado. \square

4.2 Teorema 6

Dado $f \in DT(T^2)$ e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$, se $\rho v(\hat{f}) = \{\frac{p}{q}\}$ para algum racional $\frac{p}{q}$, então existe um compacto conexo $K \subset S^1 \times \mathbb{R}$ invariante sob $\hat{f}^q - (0, p)$ que separa os fins do cilindro. De forma que todos os pontos tem orbitas uniformemente limitadas sob a ação de $\hat{f}^q - (0, p)$.

Demonstração.

Dado $f \in DT(T^2)$ e um levantamento $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$, como fizemos no teorema 5, podemos assumir que $\rho v(\hat{f}) = 0$ sem perda de generalidade. O lema 3 implica que B_N^+ e B_S^- são não vazios, e o lema 5 implica o mesmo para $\omega(B_N^+)$ e $\omega(B_S^-)$. Dito isto, para cada $\hat{x} \in S^1$ defina as seguintes funções:

$$\mu(\hat{x}) = \max\{\hat{y} \in \mathbb{R} : (\hat{x}, \hat{y}) \in \omega(B_S^-)\}$$

$$\nu(\hat{x}) = \min\{\hat{y} \in \mathbb{R} : (\hat{x}, \hat{y}) \in \omega(B_N^+)\}$$

Isto é, fixado um $\hat{x} \in S^1$ essas funções retornam respectivamente a maior ou menor altura possível para \hat{y} tal que (\hat{x}, \hat{y}) está em $\omega(B_S^-)$ ou $\omega(B_N^+)$, elas quantificam o quanto conseguimos nos locomover na vertical dos fins do cilindro em direção a H sem sair dos ω -limites para um \hat{x} de S^1 fixado. O lema a seguir garante que essas funções estão bem definidas.

Lema 9. Existe uma constante $M_f > 0$ tal que

$$\sup_{\hat{x}, \hat{y} \in S^1} |\mu(\hat{x}) - \mu(\hat{y})| \leq M_f \text{ e } \sup_{\hat{x}, \hat{y} \in S^1} |\nu(\hat{x}) - \nu(\hat{y})| \leq M_f$$

Demonstração.

Consideraremos aqui a função μ mas a demonstração para o outro caso é análoga.

Como $\omega(B_S^-)$ é fechado e limitado superiormente, tome $\hat{x}_0 \in S^1$ tal que $\hat{x}_0 \times]-\infty, 0] \cap \omega(B_S^-) \neq \emptyset$ e, para algum $\hat{y}_0 \leq 0$ $(\{\hat{x}_0\}, \hat{y}_0)$ pertence a $\omega(B_S^-)$ e tem coordenada \hat{y} maximal. Isto é, estamos tomando \hat{x}_0 como a primeira coordenada do ponto de $\omega(B_S^-)$ de maior altura, a existência desse ponto é garantida pelo fato de que $\omega(B_S^-)$ é limitado superiormente e fechado.

Como f é homotópico a um Dehn twist, para todo $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ existem constantes $A_f > 0$ e $B_f > 0$ tal que

$$|p_2 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{y}| < A_f \text{ e } |p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{x} - k_{dehn}\tilde{y}| < B_f$$

Seja $V_f \doteq \frac{3+2B_f}{k_{dehn}}$. Então, para qualquer compacto $G \subset \mathbb{R}^2$ com

$$|p_2(G)| \doteq \max(p_2(G)) - \min(p_2(G)) \geq V_f \text{ e } |p_1(G)| \doteq \max(p_1(G)) - \min(p_1(G)) < 1$$

Temos

$$|p_1(\tilde{f}(G))| > 2 \text{ e } p_2|_{\tilde{f}(G)} > \min(p_2(G)) - A_f$$

Considere então a intersecção $\pi^{-1}(\omega(B_S^-)) \cap \mathbb{R} \times [\mu(\hat{x}_0) - V_f, \mu(\hat{x}_0)]$. Se todos os segmentos verticais $seg_{\tilde{x}} = \{\tilde{x}\} \times [\mu(\hat{x}_0) - V_f, \mu(\hat{x}_0)]$ intersectam $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$, então para todo $\hat{x} \in S^1$, $\mu(\hat{x}_0) - V_f \leq \mu(\hat{x}) \leq 0$ e a prova está feita.

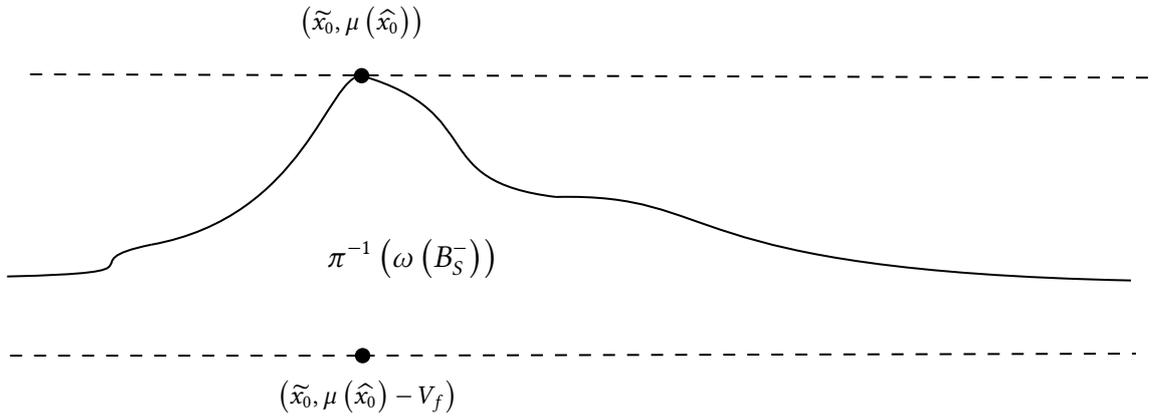


Figura 4.1: $\pi^{-1}(\omega(B_S^-)) \cap [\mu(\hat{x}_0) - V_f, \mu(\hat{x}_0)]$, primeiro caso

Então, podemos supor que exista um número real \tilde{x}^* tal que o $seg_{\tilde{x}^*}$ não intersecta $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$. Isso implica que para qualquer inteiro n , $seg_{\tilde{x}^*} + (n, 0)$ não intersecta $\pi^{-1}(\omega(B_S^-))$.

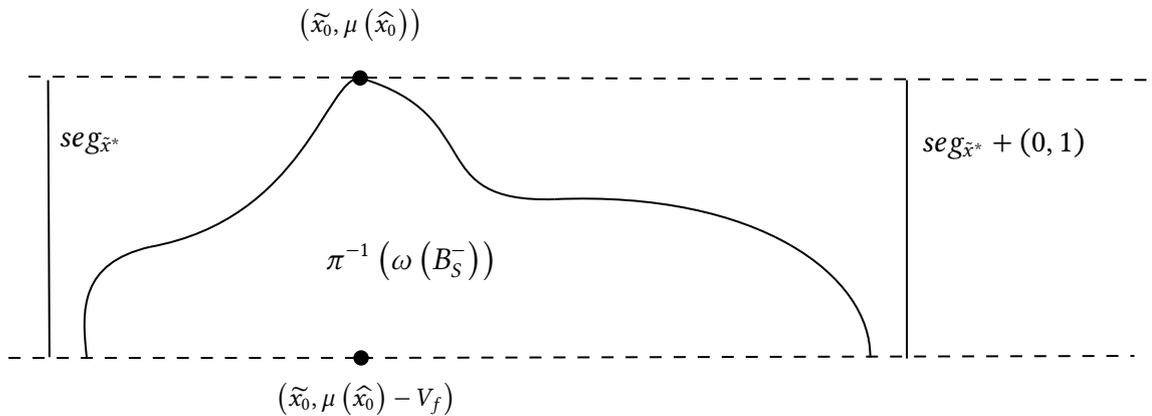


Figura 4.2: $\pi^{-1}(\omega(B_S^-)) \cap [\mu(\hat{x}_0) - V_f, \mu(\hat{x}_0)]$, segundo caso

Seja θ a componente conexa de $\omega(B_S^-)$ contendo (\hat{x}_0, \hat{y}_0) e seja Θ uma componente conexa de $\pi^{-1}(\theta)$. E então, pelo lema 7 ele é não limitado.

Θ intersecta os limites horizontais de $[\tilde{x}^* + n_\Theta, \tilde{x}^* + n_\Theta + 1] \times [\mu(\hat{x}_0) - V_f, \mu(\hat{x}_0)]$ para algum inteiro n_Θ porque ele não pode se encontrar com $\{\tilde{y} > \mu(\hat{x}_0)\}$, pela maximalidade de $\hat{y}_0 = \mu(\hat{x}_0)$. Isto é, ele é ilimitado, não pode escapar por cima e nem pelos lados, então precisa escapar por baixo. Com isso temos que $\max(p_2(\Theta)) = \mu(\hat{x}_0)$ e $\min(p_2(\Theta)) \leq \mu(\hat{x}_0) - V_f$.

$$\text{Logo, } |p_1(\tilde{f}(\Theta))| > 2 \text{ e } p_2|_{\tilde{f}(\Theta)} > \mu(\hat{x}_0) - V_f - A_f$$

Como $\omega(B_S^-)$ é \hat{f} -invariante $\pi(\tilde{f}(\Theta)) \subset \omega(B_S^-)$ e, portanto, a segunda desigualdade garante que para qualquer $\hat{x} \in S^1$ temos que $\mu(\hat{x}_0) - V_f - A_f < \mu(\hat{x}) \leq 0$ esse argumento implica que podemos tomar $M_f = (V_f + A_f)/2$ e está feito. \square

Defina então $M_{dehn} = \frac{2+B_f}{k_{dehn}} > 0$. Então note que para todo $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ com $\tilde{y} > M_{dehn}$, utilizando que $|p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{x} - k_{dehn}\tilde{y}| < B_f$ temos:

$$\tilde{x} + k_{dehn}\tilde{y} - B_f \leq p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow \tilde{x} + 2 \leq p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

e

$$p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, -\tilde{y}) \leq \tilde{x} - k_{dehn}\tilde{y} + B_f \Rightarrow p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, -\tilde{y}) \leq \tilde{x} - 2$$

Isto é

$$p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) > \tilde{x} + 2 \quad \text{e} \quad p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, -\tilde{y}) < \tilde{x} - 2$$

A construção a seguir é análoga para $\omega(B_N^+)$, desta forma, apresentaremos os detalhes apenas para $\omega(B_S^-)$.

Primeiro, pelo lema anterior, $\mu(\hat{x}) + (-\max_{S^1} \mu + M_f) \geq 0$, para todo $\hat{x} \in S^1$. Assim, $\mu(\hat{x}) + (-\max_{S^1} \mu + M_f) + M_{dehn} \geq M_{dehn}$. Com isso, defina o seguinte inteiro positivo:

$$n_{trans} \doteq \lfloor -\max_{S^1} \mu + M_f + M_{dehn} \rfloor + 1$$

Então, o conjunto $\omega(B_S^-)_{trans} \doteq \omega(B_S^-) + (0, n_{trans})$ tem, para todo $\hat{x} \in S^1$ um ponto da forma (\hat{x}, \hat{y}) com $\hat{y} > M_{dehn}$.

Em outras palavras, a função μ_{trans} associada a $\omega(B_S^-)_{trans}$ satisfaz $\mu_{trans}(\hat{x}) = \mu(\hat{x}) + n_{trans} > m_{dehn}$ para todo $\hat{x} \in S^1$.

Agora, para um $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ fixado considere a semi linha $\{\tilde{x}\} \times [m_{dehn}, +\infty[$. Quanto tomamos sua intersecção com $\overline{\omega(B_S^-)} \doteq \pi^{-1}(\omega(B_S^-)_{trans})$, temos que $\{\tilde{x}\} \times]\mu_{trans}(\pi(\tilde{x})), +\infty[\cap \overline{\omega(B_S^-)_{trans}} = \emptyset$.

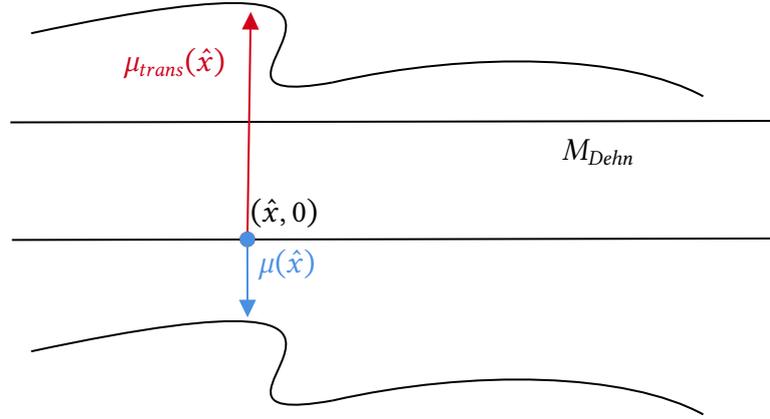


Figura 4.3: A intersecção de $\{\tilde{x}\} \times [m_{dehn}, +\infty[$ com $\overline{\omega(B_S^-)}$

Seja $v = \{\tilde{x}\} \times]\mu_{trans}(\pi(\tilde{x})), +\infty[$ e seja Θ a componente conexa de $\overline{\omega(B_S^-)}$ que contém $(\tilde{x}, \mu(\pi(\tilde{x})))$.

Então temos o seguinte lema auxiliar.

Lema 10. O conjunto $\Theta \cup v$ é um fechado conexo, $(\Theta \cup v)^c$ tem duas componentes conexas, uma das quais é positivamente invariante, e $\tilde{f}^n(v) \cap v = \emptyset$ para todos os inteiros $n > 0$.

Demonstração.

Seja θ a componente conexa de $\omega(B_S^-)_{trans}$ que contém $(\pi(\tilde{x}), \mu(\pi(\tilde{x})))$. Então θ é fechada e portanto, $\Theta \subset \pi^{-1}(\theta)$ também é.

Como Θ é uma componente conexa de $\omega(B_S^-)_{trans}$, pelo lema 6 ele é não limitado, e pelo lema 9 é limitado superiormente na direção \tilde{y} . Além disso, temos que $(\Theta \cup v)^c$ tem no mínimo duas componentes conexas, O_L e O_R , definidos da seguinte maneira:

Para qualquer ponto $\tilde{p} \in v$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\tilde{p}) \cap \Theta = \emptyset$. Além disso, $B_\delta(\tilde{p}) \setminus v$ tem exatamente duas componentes conexas, uma à esquerda de v contida em O_L , e outra a direita contida em O_R . Então, seus fechos $\overline{O_L}$ e $\overline{O_R}$ contém v .

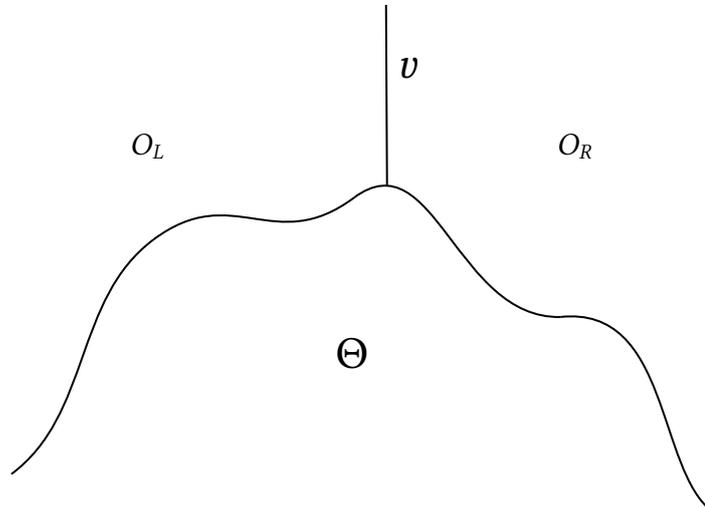


Figura 4.4: O_L e O_R

Suponha que $(\Theta \cup v)^c$ tenha outra componente conexa O^* . ∂O^* não intersecta v , porque todos os pontos suficientemente próximos a um ponto de v que não estão em v estão em $O_L \cup O_R$. Logo, $\partial O^* \subset \Theta$, contradizendo o lema 8, pois teríamos que o seu complementar não é conexo. Assim, $(\Theta \cup v)^c = O_L \cup O_R$.

$\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ com $\tilde{y} > M_{dehn}$, temos $p_1 \circ (\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})) > \tilde{x} + 2$. Em particular, como para todo (\tilde{x}, \tilde{y}) em v temos que $\tilde{y} > M_{dehn}$, $\tilde{f}(v) \subset O_R$. A seguir vamos mostrar que $\tilde{f}(O_R) \subset O_R$.

Existem duas possibilidades:

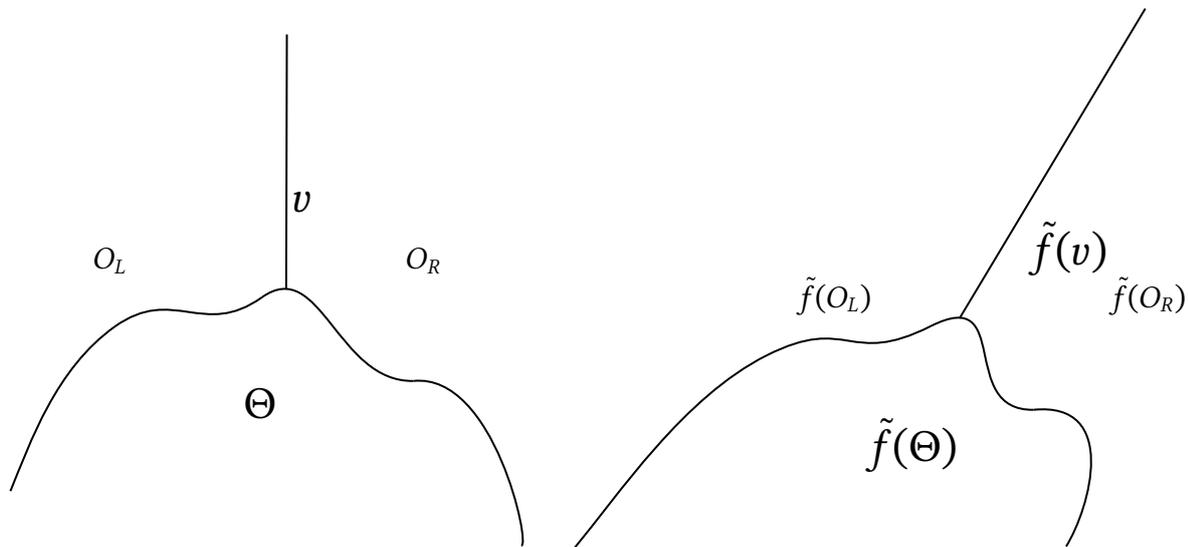
1. ou $\tilde{f}(\Theta) \neq \Theta \Rightarrow \tilde{f}(\Theta) \cap \Theta = \emptyset$;
2. ou $\tilde{f}(\Theta) = \Theta$.

Isto é porque Θ é uma componente conexa de um invariante, então se $\tilde{f}(\Theta) \cap \Theta \neq \emptyset \Rightarrow \Theta = \tilde{f}(\Theta)$. Isto é, \tilde{f} permuta as componentes conexas de seus conjuntos invariantes.

Assuma primeiro que $\tilde{f}(\Theta) \cap \Theta = \emptyset$. Então $\tilde{f}(\Theta \cup v) \cap (\Theta \cup v) = \emptyset$ Já que $\tilde{f}(v) \subset O_R$. Além disso, como $\tilde{f}(\Theta \cup v)$ é conexo, temos que $\tilde{f}(\Theta \cup v) \subset O_R$. Então $O_L \cup \Theta \cup v$ está contido ou em $\tilde{f}(O_L)$ ou em $\tilde{f}(O_R)$. Porém, ele não pode estar em $\tilde{f}(O_R)$ porque um ponto p da forma $(-a, b)$ com $b = \mu_{trans}(\pi(\tilde{x}_0)) + 1$, para um $a > 0$ suficientemente grande está em O_L , e $\tilde{f}(p)$ também está em O_L . Isso é verdade pois existe um $M > 0$ tal que $] -\infty, -M] \times [b, +\infty[\subset O_L$. Tomando $a = M + k_{dehn}b + B_f$ e utilizando que $|p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{x} - k_{dehn}\tilde{y}| < B_f$, temos:

$$p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) + a - k_{dehn}b < B_f \Rightarrow p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) + M + B_f < B_f \Rightarrow p_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) < -M$$

Logo $O_L \cup \Theta \cup v \subset \tilde{f}(O_L)$, o que implica que $\tilde{f}(O_R) \subset O_R$.

**Figura 4.5:** A figura 4.3 após a ação de \tilde{f} no caso 1

Agora suponha que $\tilde{f}(\Theta) = \Theta$. Isso implica que $O_L \cup v \subset (\tilde{f}(v \cup \Theta))^c$ porque $\tilde{f}(v) \subset O_R$ e $\tilde{f}(\Theta) = \Theta$.

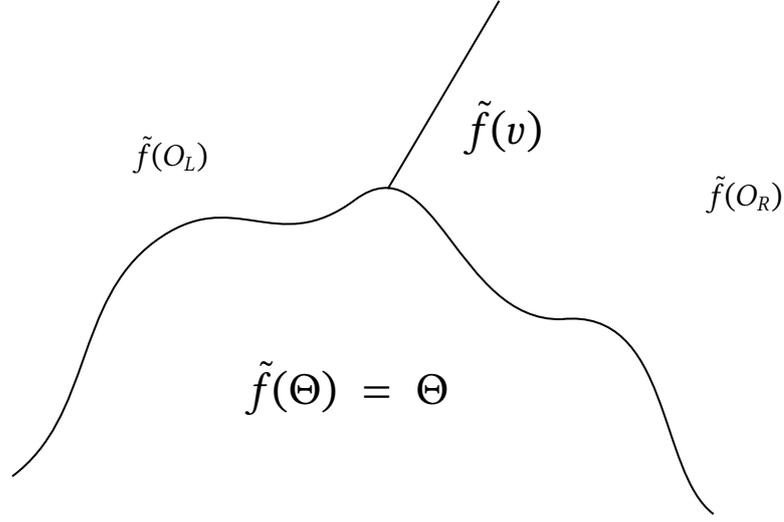


Figura 4.6: A figura 4.3 após a ação de \tilde{f} no caso 2

Então, por conexidade, $O_L \cup v$ está contido ou em $\tilde{f}(O_R)$ ou em $\tilde{f}(O_L)$. Assim como no caso de $\tilde{f}(\Theta) \cap \Theta = \emptyset$, temos que $O_L \cup v \subset \tilde{f}(O_L)$. E,

$$\tilde{f}(O_R) \subset (\tilde{f}(O_L))^c \subset (O_L \cup v)^c = O_R \cup \Theta$$

e como $\tilde{f}(\Theta) = \Theta$, temos que $\tilde{f}(O_R) \subset O_R$.

Por fim, como $\tilde{f}(v) \subset O_R$ e O_R é positivamente invariante, para qualquer $n \geq 2$, $\tilde{f}^n(v) \subset \tilde{f}(O_R)$, que não intersecta v . Então $\tilde{f}^n(v) \cap v = \emptyset$, com isso, a demonstração está terminada. \square

Observações:

1. Como $\mu_{trans}(\pi(\tilde{x})) = \mu(\pi(\tilde{x})) + n_{trans} = \mu(\pi(\tilde{x})) + [-\max_{x \in S^1} \mu(x) + M_f + M_{dehn}] + 1 \leq \max_{x \in S^1} \mu(x) + [-\max_{x \in S^1} \mu(x)] + [M_f + M_{dehn}] + 1 \leq M_f + M_{dehn} + 2, \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}$, o lema anterior garante que $\tilde{f}^n(\{\tilde{x}\} \times [M_f + M_{dehn} + 2, +\infty]) \cap \{x\} \times [M_f + M_{dehn} + 2, +\infty] = \emptyset$ vale para todo inteiro $n > 0$.
2. Um argumento análogo ao aplicado a $\omega(B_S^-)$ implica que para qualquer $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, se $w = \{\tilde{x}\} \times]-\infty, \nu(\pi(\tilde{x})) - [\inf_{\tilde{z} \in S^1} \nu(\tilde{z}) + M_f + M_{dehn}] - 1[$, então $\tilde{f}^n(w) \cap w = \emptyset, \forall n > 0$ inteiro. Então, como na observação anterior, $\nu_{trans}(\pi(\tilde{x})) > -2 - M_f - M_{dehn}$ para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, o que implica que $\tilde{f}^n(\{\tilde{x}\} \times]-\infty, -M_f - M_{dehn} - 2[) \cap \{\tilde{x}\} \times]-\infty, -M_f - M_{dehn} - 2[= \emptyset, \forall n > 0$ inteiro.

Isto é, estamos apenas "espelhando" as ideias anteriores na horizontal.

Resumindo, existe um real $M' > 0$ tal que para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}^n(\{\tilde{x}\} \times [M', +\infty]) \cap \{\tilde{x}\} \times [M', +\infty] = \emptyset$ e $\tilde{f}^n(\{\tilde{x}\} \times]-\infty, -M'[) \cap \{\tilde{x}\} \times]-\infty, -M' = \emptyset, \forall n > 0 \in \mathbb{Z}$. Com $M' \doteq M_f + M_{dehn} + 2 = \frac{5+3B_f}{k_{dehn}} + A_f + 2$.

Com isto podemos então seguir com a demonstração do teorema.

Suponha por contradição que existe um ponto \hat{z} no cilindro e um inteiro $n_0 > 0$ tal que;

$$|p_2(\hat{f}^{n_0}(\hat{z})) - p_2(\hat{z})| > 2M' + 8$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $p_2(\hat{z}) < -M' - 3$ e $p_2(\hat{f}(\hat{z})) > M' + 3$. Agora considere a função $\tilde{g}(\ast) = \hat{f}^{n_0}(\ast) - (0, 1)$, note que essa função não tem pontos fixos. Se tivesse, então $\frac{1}{n_0} \in \rho v(\hat{f})$, uma contradição com a suposição de que $\rho v(\hat{f}) = \{0\}$. Então, note que para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(\{\tilde{x}\} \times [M' + 2, +\infty[) \cap \{\tilde{x}\} \times [M' + 2, +\infty[= \emptyset$ e $\tilde{g}(\{\tilde{x}\} \times] - \infty, -M' - 2]) \cap \{\tilde{x}\} \times] - \infty, -M' - 2] = \emptyset$. Dados dois inteiros $N > 0$ e n defina os conjuntos

$$F_n^- = \left[\frac{n}{N}, \frac{(n+1)}{N} \right] \times] - \infty, -M' - 2]$$

e

$$F_n^+ = \left[\frac{n}{N}, \frac{(n+1)}{N} \right] \times [M' + 2, \infty[$$

A seguir vamos demonstrar que esses conjuntos são livres sob \tilde{g} , isto é, $\tilde{g}(F_n^\pm) \cap F_n^\pm = \emptyset$ para todos os inteiros n . A prova será feita para $[0, 1] \times [M' + 2, \infty[$ mas o raciocínio se mantém para qualquer compacto da forma $[a, b] \times [M' + 2, \infty[$, onde $a < b$ e $a, b \in \mathbb{Z}$.

Para isso, consideraremos a divisão de $[0, 1] \times [M' + 2, \infty[$ em N faixas de largura $\frac{1}{N}$. Isto é, estamos considerando faixas da forma mostrada na figura 4.7.

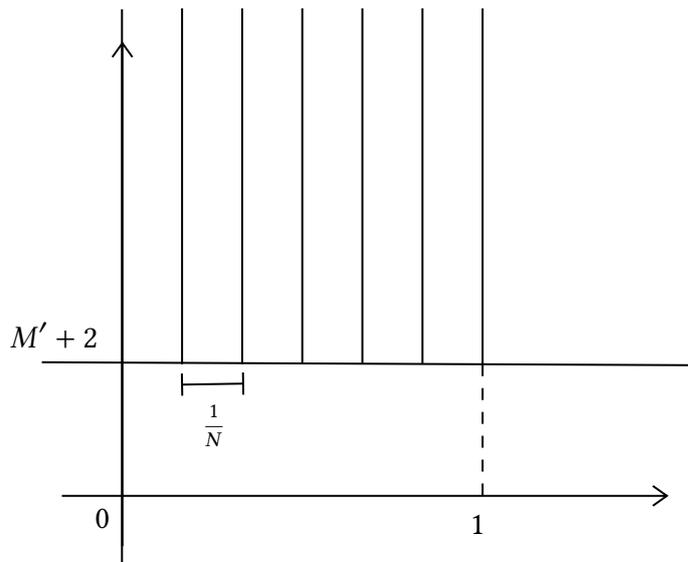


Figura 4.7: As faixas de diâmetro $\frac{1}{N}$

O caso para $[0, 1] \times] - \infty, -M' - 2]$ é análogo.

Lema 11. Existe $N > 0$ tal que as faixas de diâmetro $\frac{1}{N}$, são livres sobre \tilde{g} .

Demonstração.

Suponha por absurdo que não exista tal N . Isto é, para todo inteiro $N > 0$ existe uma faixa F_N tal que $\tilde{g}(F_N) \cap F_N \neq \emptyset$. Tome então \tilde{z}_N , ponto médio da base de F_N . Daí então temos uma sequência limitada $\tilde{x}_N = p_1(\tilde{z}_N)$. Isso significa que temos uma subsequência convergente \tilde{x}_{N_i} tal que $\tilde{x}_{N_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \tilde{x}^*$ para algum $\tilde{x}^* \in [0, 1]$.

Tome então as faixas F_{N_i} que tem como pontos médios de suas bases os pontos \tilde{x}_{N_i} . Afirimo que $F_{N_i} \rightarrow S^* \doteq \{x^*\} \times [M' + 2, +\infty[$ na topologia Hausdorff.

Dado $\epsilon > 0$, existe inteiro $M_0 > 0$ tal que $|\tilde{x}_{N_i} - \tilde{x}^*| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $i > M_0$. Além disso, existe inteiro M_1 tal que $\frac{1}{N_i} < \epsilon$ ($N_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$). Tome $M = \max\{M_0, M_1\}$ e temos que $F_{N_i} \subset V_\epsilon(S^*)$ para todo $i > M$.

Para a outra inclusão note que, se um ponto p não está em $V_\epsilon(F_{N_i})$ então $|p_1(p) - \tilde{x}_{N_i}| > \epsilon + \frac{1}{2N_i}$, como $|p_1(S^*) - \tilde{x}_{N_i}| < \epsilon$ para todo $i > M_0$, garantimos que $S^* \subset V_\epsilon(F_{N_i})$ para todo $i > M_0$.

Como $F_{N_i} \cap \tilde{g}(F_{N_i}) \neq \emptyset$ para todo i , temos que $S^* \cap \tilde{g}(S^*) \neq \emptyset$, absurdo. Portanto, existe inteiro $N > 0$ tal que as faixas são livres. \square

Mais do que essas faixas serem livres, o fato de que $k_{dehn} > 0$ implica que existe um certo $k_{crit} > 0$ tal que para todos os inteiros n

$$\tilde{g}(F_n^+) \cap F_m^+ \neq \emptyset \quad \text{para todo } m \geq n + k_{crit}$$

e

$$\tilde{g}(F_n^-) \cap F_m^- \neq \emptyset \quad \text{para todo } m \leq n - k_{crit}$$

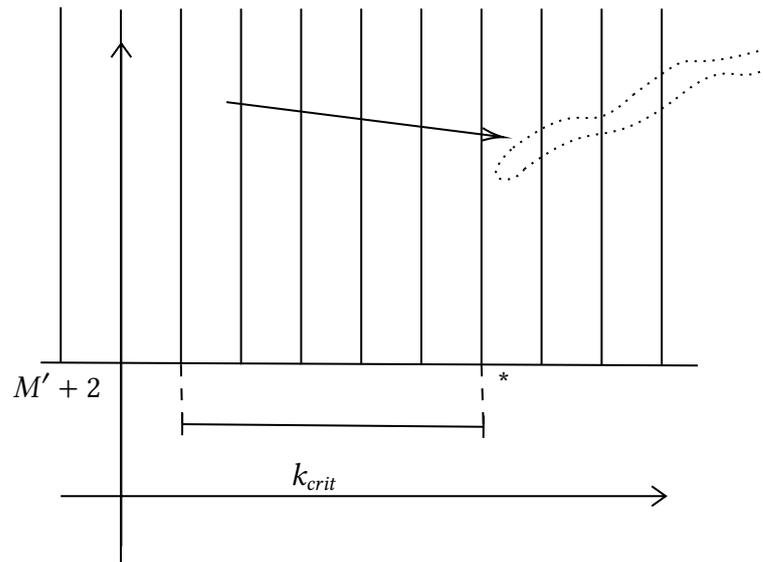


Figura 4.8: Exemplo de como $\tilde{g}(F_n^+) \cap F_m^+ \neq \emptyset$ para todo $m \geq n + k_{crit}$

Na figura 4.8, a faixa hachurada intersecta todas as faixas à direita da faixa marcada com um * sob a ação de \tilde{g} . Tipicamente as faixas serão levadas por \tilde{g} em um conjunto parecido o descrito nessa ilustração. Dessa forma fica claro o que acontece para que a afirmação anterior seja verdadeira (o fato delas serem ilimitadas para cima é o que garante as intersecções todas). Uma observação importante é que, apesar de na figura $\tilde{g}(F_n^+) \cap F_m^+ = \emptyset$, para $n \leq m \leq n + k_{crit}$, isso não precisa ocorrer.

Esses conjuntos serão importantes numa decomposição do plano em bricks \tilde{g} -livres que construiremos. Mais do que isso eles formarão uma família equivariante pela ação de $\mathbb{Z} \times \{0\}$ por translações. Para terminarmos de construir tal decomposição ainda nos falta decompor $S^1 \times [-M' - 2, M' + 2]$ em uma união de bricks \tilde{g} livres.

Para isso considere um ladrilhado, com ladrilhos de arestas de tamanho $\frac{1}{N}$. Isto é, na horizontal estamos dividindo $[0, 1]$ em N intervalos de diâmetro $\frac{1}{N}$, assim como fizemos anteriormente. Isso nos dá um ladrilhamento do tipo mostrado na figura 4.9.

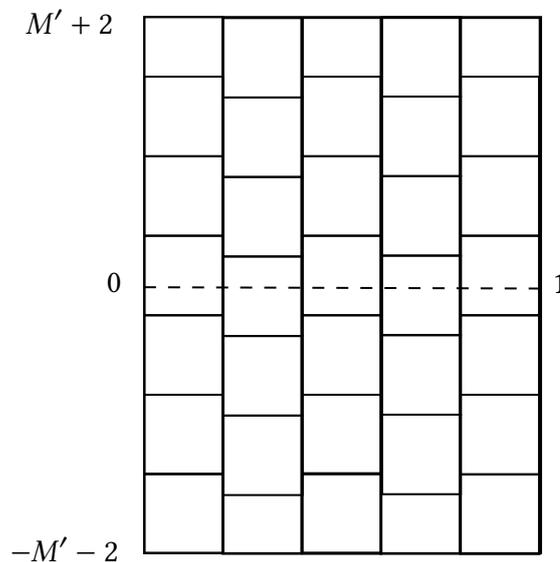


Figura 4.9 Ladrilhamento de $[0, 1] \times [-M' - 2, M' + 2]$

Note que nem todos os ladrilhos tem altura $\frac{1}{N}$: para cada intervalo que construímos em $[0, 1]$ dividimos $[-M' - 2, M' + 2]$ no maior número possível de intervalos de diâmetro $\frac{1}{N}$ restando um que tem diâmetro menor, para fazer o ladrilhamento corretamente, basta alternar a posição desse ladrinho de altura menor, ora no topo, ora na base, como na figura 4.9.

Lema 12. Existe um inteiro $N > 1$ tal que a decomposição de $[0, 1] \times [-M' - 2, M' + 2]$ em ladrilhos de base com diâmetro $\frac{1}{N}$ é livre sob a ação de \tilde{g} .

Demonstração.

Suponha por absurdo que não exista tal N . Então para cada N temos um ladrilho L_N que não é livre sob \tilde{g} . Seja \tilde{z}_N o centro de L_N . Temos então uma sequência \tilde{z}_N que possui uma subsequência convergente $\tilde{z}_{N_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \tilde{z}$ para algum $\tilde{z} \in [0, 1] \times [-M' - 2, M' + 2]$.

Como \tilde{g} não tem pontos fixos, $\tilde{g}(\tilde{z}) \neq \tilde{z}$, pela continuidade de \tilde{g} podemos obter $\epsilon > 0$

tal que $B_\epsilon(\tilde{z})$ é livre sob \tilde{g} .

Então, note que, como $\tilde{z}_{N_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \tilde{z}$, existe um $\delta > 0$ fixado e um inteiro $M_0 > 0$ tal que $B_\delta(\tilde{z}_{N_i}) \subset B_\epsilon(\tilde{z})$, para todo $i > M_0$. Por outro lado, para algum $i_0 > M_0$, $\frac{1}{N_{i_0}} < \delta$. Isso garante então que $L_{N_{i_0}} \subset B_\delta(\tilde{z}_{N_{i_0}}) \subset B_\epsilon(\tilde{z})$. Absurdo com o fato de que $B_\epsilon(\tilde{z})$ é livre sob \tilde{g} . \square

As demonstrações dos lemas 11 e 12 são baseadas em [5, afirmação 4.1.5] e [5, afirmação 4.1.4].

Dessa forma temos então uma decomposição do plano em bricks \tilde{g} -livres.

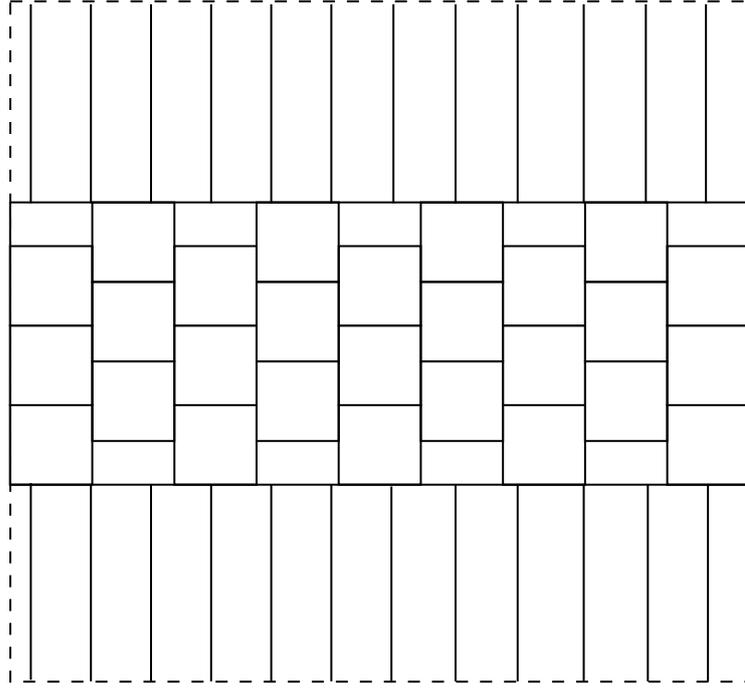


Figura 4.10: Decomposição do plano em bricks \tilde{g} -livres

Para finalizar, vamos mostrar que essa decomposição tem uma cadeia de bricks fechada, uma contradição com o fato de que \tilde{g} não tem pontos fixos. Essa ideia vem de [10, prova do teorema 4]

Tome um ponto $\tilde{z} \in \pi^{-1}(\hat{z})$, com $\tilde{z} \in F_{i_0}^-$ tal que $p_2 \circ \tilde{g}(\tilde{z}) > M' + 2$. Daí temos que

$$\tilde{g}(F_{i_0}^-) \cap F_{i_1}^+ \neq \emptyset \text{ para algum } i_1.$$

Como $\rho v(\hat{f}) = \{0\}$, escolha um ponto $\hat{w} \in S^1 \times]M' + 2, +\infty[$ tal que $p_2(\hat{g}^n(\hat{w})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, onde $\hat{g}(\ast) \doteq \hat{f}^{n_0}(\ast) - (0, 1)$ (como $\rho v(\hat{g}) = \{-1\}$, todos os pontos de $S^1 \times \mathbb{R}$ satisfazem a condição acima, isto é, todos os pontos tem velocidade vertical -1).

Assim, podemos escolher um ponto $\tilde{w} \in F_{i_2}^+ \cap \pi^{-1}(\hat{w})$, para algum inteiro i_2 tal que

- $i_2 > i_1 + k_{crit}$, de forma que $\tilde{g}(F_{i_1}^+) \cap F_{i_2}^+ \neq \emptyset$
- $\tilde{g}^{n_2}(\tilde{w}) \in F_{i_3}^-$ para algum inteiro $n_2 > 0$ e $i_3 > i_0 + k_{crit}$.

Como $\tilde{g}(F_{i_3}^-) \cap F_{i_0}^- \neq \emptyset$, existe uma cadeia de bricks fechada, $F_{i_0}^-, F_{i_1}^+, F_{i_2}^+, F_1, \dots, F_k, F_{i_3}^-, F_{i_0}^-$, onde F_1, \dots, F_k são bricks livres de $\mathbb{R} \times [-M' - 2, M' + 2]$.

Como dissemos, isso é uma contradição porque \tilde{g} não tem pontos fixos. Intuitivamente, podemos entender essa construção da seguinte maneira: começamos em $F_{i_0}^-$, daí subimos, andamos para a direita o suficiente para conseguirmos descer e ainda estarmos à direita de $F_{i_0}^-$. A figura 4.11 é baseada na figura 4.2 da referência [5] e exemplifica isso que foi dito.

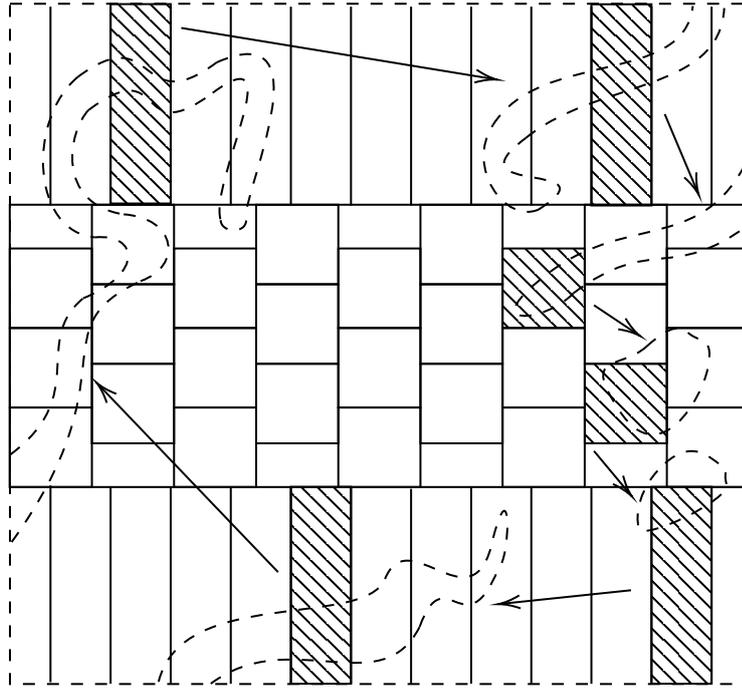


Figura 4.11: cadeia de bricks fechada

Assim, em particular, $\hat{f}^n(S^1 \times \{0\}) \subset S^1 \times [-8 - 2M', 2M' + 8]$ para todos os inteiros $n > 0$. Isto é,

$$\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$$

é limitado. Dessa forma, existe $M > 0$ tal que para todo ponto $\hat{z} \in S^1 \times \mathbb{R}$ e para todo inteiro $n > 0$

$$|p_2 \circ \hat{f}^n(\hat{z}) - p_2(\hat{z})| < M.$$

Além disso, se existir $\hat{z}_0 \in S^1 \times \mathbb{R}$ tal que

$$|p_2 \circ \hat{f}^{-n_0}(\hat{z}_0) - p_2(\hat{z}_0)| > M, \quad \text{para algum inteiro } n_0 > 0$$

basta definirmos $\hat{w}_0 = \hat{f}^{-n_0}(\hat{z}_0)$ e temos que:

$$|p_2 \circ \hat{f}^{n_0}(\hat{w}_0) - p_2(\hat{w}_0)| > M$$

absurdo. Concluimos que a órbita de qualquer ponto do cilindro é uniformemente limitada. Ou seja,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}^n(S^1 \times [0, 1])$$

é limitado. Tome então o conjunto

$$O = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}^n(S^1 \times]-\infty, 0])$$

O é um subconjunto de $S^1 \times]-\infty, M]$ aberto, conexo e \hat{f} -invariante. Além disso, existe uma única componente conexa do bordo de O contida em $S^1 \times [0, M]$ que é compacta, conexa e que separa os fins do cilindro. Definindo K como essa componente conexa, como $\hat{f}(O) = O$, temos que $\hat{f}(K) = K$.

□

4.2.1 Corolário 1

Dado $f \in DT(T^2)$ e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$. Suponha que $\rho v(\hat{f}) = [a, \frac{p}{q}]$ para algum racional $\frac{p}{q}$ e um real $a < \frac{p}{q}$. Então, existe $M > 0$ tal que para todo $\hat{z} \in S^1 \times \mathbb{R}$, $p_2 \circ \hat{f}^n(\hat{z}) - p_2(\hat{z}) - n\frac{p}{q} < M$ para todo inteiro $n > 0$.

Demonstração.

Sem perda de generalidade, considerando $\hat{f}^q - (0, p)$, podemos assumir que $\rho v(\hat{f}) = [a, 0]$ para algum $a < 0$. O lema 3 implica que B_N^+ , B_S^- , $B_N^+(inv)$ e $B_S^-(inv)$ são não vazios. Se $\omega(B_S^-) = \emptyset$, então o lema 6 implica que $\omega(B_S^-(inv)) = \emptyset$ e, então, o lema 5 implica que existe um $\epsilon > 0$ tal que $\rho v(\hat{f}^{-1}) \supset [-\epsilon, 0]$. Mas, $\rho v(\hat{f}^{-1}) = (-1)\rho v(\hat{f})$. Portanto, $\rho v \hat{f} \supset [0, \epsilon]$, uma contradição com a hipótese de que $\rho v(\hat{f})$ é um intervalo do tipo $[a, 0]$ para algum $a < 0$. Então, podemos assumir que $\omega(B_N^+)$ e $\omega(B_S^-)$ são não vazios. Suponha, então, que para todo $M > 0$ existe um ponto $\hat{z} \in S^1 \times \mathbb{R}$ e um inteiro $n_0 > 0$ tal que

$$p_2(\hat{f}^{n_0}(\hat{z})) - p_2(\hat{z}) > M$$

Agora, fazemos a escolha de $M = 2M' + 8$ e utilizamos \hat{z} e n_0 correspondentes para seguirmos como no teorema 6, isto é, tomamos a função sem pontos fixos do plano $\tilde{g}(\ast) = \hat{f}^{n_0}(\ast) - (0, 1)$. Daí, usando a decomposição do plano em bricks(faixas) livres sob a ação de \tilde{g} , construímos uma cadeia de bricks fechada, que nos leva a um absurdo. Assim o corolário está provado. □

4.3 Teorema 7

Dados $f \in DT(T^2)$ e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$, existe $M > 0$, tal que, se para pontos $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in S^1 \times \mathbb{R}$ temos $p_2 \circ \hat{f}^{n_1}(\hat{z}_1) - p_2(\hat{z}_1) < -M$ e $p_2 \circ \hat{f}^{n_2}(\hat{z}_2) - p_2(\hat{z}_2) > M$ para certos inteiros positivos n_1 e n_2 , então 0 é um ponto interior de $\rho v(\hat{f})$.

Demonstração.

Como no teorema anterior, fixe um $\tilde{f} \in DT(\mathbb{R}^2)$ levantamento \hat{f} . Primeiro, mostraremos que se

$$M \geq M_0 \doteq (20 + 2B_f)/k_{dehn} + 10$$

então \hat{f} tem um ponto fixo. Suponha então que \hat{f} não tem pontos fixos.

Portanto, a proposição 2 garante que existe uma curva fechada simples homotopicamente não trivial $\gamma \subset S^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\hat{f}(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$ e $\gamma \subset S^1 \times [-m_D, m_D]$, onde $m_D > 0$ é o menor número real que satisfaz

$$\tilde{f}(\{\tilde{x}\} \times [m_D, +\infty[) \subset [\tilde{x} + 10, +\infty[\times \mathbb{R}$$

e

$$\tilde{f}(\{\tilde{x}\} \times [-\infty, -m_D]) \subset [-\infty, \tilde{x} - 10] \times \mathbb{R},$$

para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Um calculo similar ao feito no teorema 6 para $\frac{2+B_f}{k_{dehn}}$ nos mostra que se tomarmos m_D igual a $(10 + B_f)/k_{dehn}$, então as condições anteriores estão satisfeitas.

Então $M \geq 2m_D + 10$, o que contradiz a hipótese de que existem os pontos z_1 e z_2 como no enunciado, e portanto, \hat{f} tem um ponto fixo. Desta forma, $0 \in \rho v(\hat{f})$ e o lema 3 implica que B_N^+ e B_S^- são não vazios, e o mesmo vale para a inversa de \hat{f} , isto é, $B_S^-(inv)$ e $B_N^+(inv)$ são não vazios. Se $\omega(B_N^+) = \emptyset$, então o lema 5 implica que existe um $\delta > 0$ tal que $\rho v(\hat{f}) \supset [0, \delta]$. Além disso, do lema 6 temos que $\omega(B_N^+(inv))$ é vazio, então, de novo pelo lema 5, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\rho v(\hat{f}^{-1}) \supset [0, \epsilon]$, que nos dá que $\rho v(\hat{f}) \supset [-\epsilon, \delta]$, e o teorema está provado. Então, de novo podemos supor que $\omega(B_S^-)$ e $\omega(B_N^+)$ são não vazios.

Se $\rho v(\hat{f}) = [a, 0]$ para algum $a \leq 0$, então, se

$$M \geq M_1 \doteq 2M' + 8 = \frac{10 + 6B_f}{k_{dehn}} + 2A_f + 12$$

o mesmo argumento utilizado pra provar o corolário 6, nos dá uma contradição, novamente concluiríamos que não é possível existir os pontos \hat{z}_1 e \hat{z}_2 como no enunciado. O mesmo vale para a outra possibilidade, isto é, se $\rho v(\hat{f}) = [0, b]$ para algum $b > 0$.

Então, é suficiente escolhermos

$$M = \max\{M_0, M_1\} \leq \frac{20 + 6B_f}{k_{dehn}} + 2A_f + 12$$

e a prova está finalizada.

4.3.1 Corolário 2

Dado $f \in DT(T^2)$ que preserva área e $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$ com um número de rotação vertical nulo com relação a medida de Lebesgue, então ou $\rho v(\hat{f})$ é reduzido a $\{0\}$ ou 0 é um ponto interior de $\rho v(\hat{f})$.

Demonstração.

Começamos a prova demonstrando que há duas possibilidades

1. $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ é limitado, e portanto $\rho v(\hat{f}) = \{0\}$.
2. $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ é não limitado superiormente e inferiormente.

Se ocorrer o primeiro caso, então conseguimos encontrar uma componente conexa do bordo de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}^n(H^-)$ que é compacta, invariante e que separa os fins do cilindro, isso nos garante que $\rho v(\hat{f}) = \{0\}$. Já para o segundo caso, podemos aplicar o teorema anterior para garantir que 0 é ponto interior do conjunto de rotação. Só nos resta mostrar que esses são de fato os únicos casos possíveis.

Suponha então que $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ é ilimitado e está contido em H_a^+ para algum número real $a < 0$. Isto é, suponha que estamos em um caso onde $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(H)$ é ilimitado, mas é limitado inferiormente (análogo para o outro caso).

Como no lema 3, seja $O^* = \bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^n(S^1 \times]0, +\infty[)$ e seja O o complementar da componente conexa de $(O^*)^c$ que contém o fim inferior do cilindro. Novamente, $\partial O \doteq K$ é um compacto conexo que separa os fins do cilindro. Claramente, $O^* \subset O$ (apenas tapamos os buracos), $O \subset H_a^+$, O é um aberto homeomorfo ao cilindro e $\hat{f}(O) \subset O$.

Essa definição então nos permite provar o resultado auxiliar a seguir.

Proposição 3. Dada $f \in DT(T^2)$ que preserva área e um levantamento $\hat{f} \in DT(S^1 \times \mathbb{R})$ com número de rotação vertical nulo com relação a medida de Lebesgue, para qualquer $b \in \mathbb{R}$, vale a seguinte equação (nesse caso \hat{f} é dita exata):

$$Leb(H_b^+ \cap (\hat{f}(H_b))^-) = Leb(H_b^- \cap (\hat{f}(H_b))^+)$$

onde, para D mensurável, $leb(D)$ denota sua medida de Lebesgue.

Demonstração. Se lembrarmos de que existe $A_f > 0$ tal que $|p_2 \circ \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{y}| < A_f$, temos que existe um $N > 0$ tal que para qualquer $b \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(H_b) \cap (H_{b+N} \cup H_{b-N}) = \emptyset$. Então,

considere o anel compacto $\Omega \doteq S^1 \times [b, b + N]$. Como ele é a união finita de domínios fundamentais do toro, temos

$$\int_{\Omega} [p_2 \circ \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{y}] d\hat{x}d\hat{y} = 0$$

Isso sai de que $\rho\nu(Leb) = 0$. Lembrando que, para todo conjunto $D \subset T^2$ mensurável e todo $b \in \mathbb{R}$,

$$Leb(D) = \int_{\pi^{-1}(D) \cap (S^1 \times [b-1, b+1])} d\hat{x}d\hat{y}$$

De maneira intuitiva, podemos interpretar isto da seguinte forma: $\rho\nu(Leb) = 0$ nos garante que essa integral é nula no toro. E Ω pode ser interpretado como uma união finita de "toros", disjuntos a menos de conjuntos de medida de nula (as retas horizontais das intersecções), como mostrado na figura 4.12.

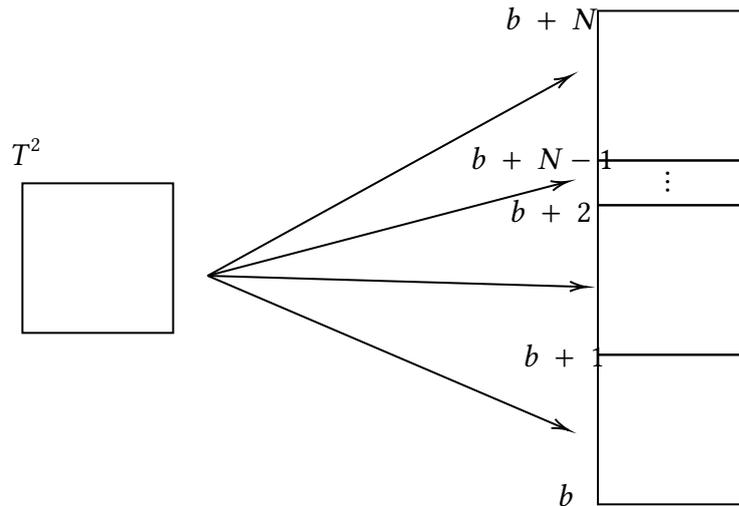


Figura 4.12 Ω como união finita de domínios fundamentais

Note que podemos escrever

$$\Omega = (\hat{f}(\Omega) \cap \Omega) \cup (H_b^+ \cap (\hat{f}(H_b))^{-o}) \cup (H_b^- \cap (\hat{f}(H_b))^{+o} + (0, N))$$

e

$$\hat{f}(\Omega) = (\hat{f}(\Omega) \cap \Omega) \cup (H_b^{+o} \cap (\hat{f}(H_b))^- + (0, N)) \cup (H_b^{-o} \cap (\hat{f}(H_b))^+)$$

onde essas uniões são disjuntas.

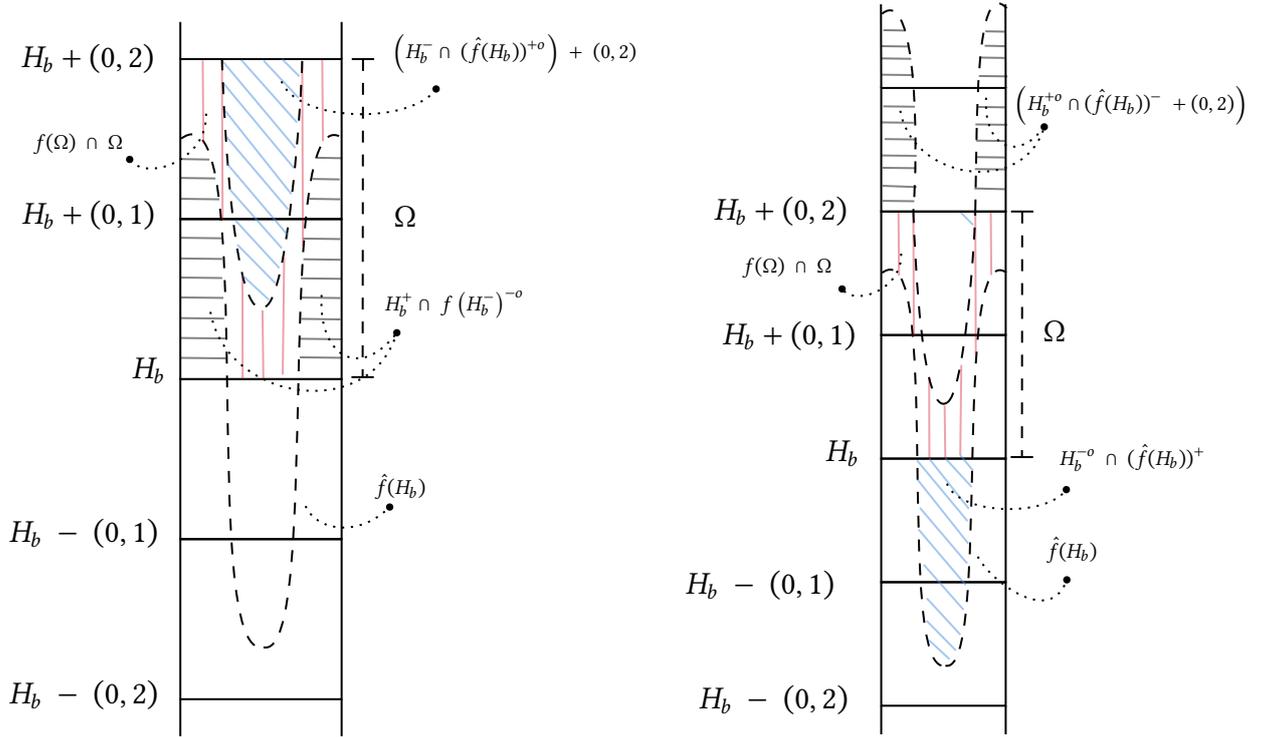


Figura 4.12: $\Omega = (\hat{f}(\Omega) \cap \Omega) \cup (H_b^+ \cap (\hat{f}(H_b))^{-o}) \cup ((H_b^- \cap (\hat{f}(H_b))^{+o}) + (0, N))$ e $\hat{f}(\Omega) = (\hat{f}(\Omega) \cap \Omega) \cup (H_b^{+o} \cap (\hat{f}(H_b))^- + (0, N)) \cup (H_b^{-o} \cap (\hat{f}(H_b))^+)$

O fato de que $\int_{\Omega} [p_2 \circ \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{y}] d\hat{x}d\hat{y} = 0$, junto com a preservação de áreas, implica que a coordenada \hat{y} do centro geométrico de Ω e de $\hat{f}(\Omega)$ são iguais (aplicação direta da definição de centro geométrico). Então, vamos calculá-los (para um conjunto mensurável Π no cilindro, denotamos a coordenada \hat{y} de seu centro geométrico por $\hat{y}_{C.G.(\Pi)}$):

$$\begin{aligned} \hat{y}_{C.G.(\Omega)} &= [\hat{y}_{C.G.(\hat{f}(\Omega) \cap \Omega)} \text{Leb}(\hat{f}(\Omega) \cap \Omega) \\ &\quad + \hat{y}_{C.G.(H_b^+ \cap (\hat{f}(H_b))^-)} \text{Leb}(H_b^+ \cap (\hat{f}(H_b))^-) \\ &\quad + (\hat{y}_{C.G.(H_b^- \cap (\hat{f}(H_b))^+)} + N) \text{Leb}(H_b^- \cap (\hat{f}(H_b))^+)] / \text{Leb}(\Omega), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{y}_{C.G.(\hat{f}(\Omega))} &= \hat{y}_{C.G.(\hat{f}(\Omega) \cap \Omega)} \text{Leb}(\hat{f}(\Omega) \cap \Omega) \\ &\quad + (\hat{y}_{C.G.(H_b^+ \cap (\hat{f}(H_b))^-)} + N) \text{Leb}(H_b^+ \cap (\hat{f}(H_b))^-) \\ &\quad + \hat{y}_{C.G.(H_b^- \cap (\hat{f}(H_b))^+)} \text{Leb}(H_b^- \cap (\hat{f}(H_b))^+) / \text{Leb}(\hat{f}(\Omega)). \end{aligned}$$

Essas equações são a aplicação, nesse contexto e satisfaz: utilizando a medida de Lebesgue, uma propriedade do centro geométrico. Por exemplo, se houverem 3 corpos disjuntos A, B e C no plano, o centro de massa da união dos três corpos, $CM_{ABC} = (CM_A a(A) + CM_B a(B) + CM_C a(C)) / (a(A) + a(B) + a(C))$, onde CM_K e $a(K)$ denotam o centro de massa e a área do corpo K , respectivamente (neste caso estamos dando uma

interpretação física para o centro geométrico ao chamarmos de centro de massa).

Como $Leb(\hat{f}(\Omega)) = Leb(\Omega)$ e $\hat{y}_{C.G.(\hat{f}(\Omega))} = \hat{y}_{C.G.(\Omega)}$, nós temos que

$$NLeb(H_b^+ \cap (\hat{f}(H_b))^-) = NLeb(H_b^- \cap (\hat{f}(H_b))^+),$$

que prova esta proposição (note que, aqui, utilizamos o fato de que $Leb(H_b) = 0$). \square

Essa proposição nos garante que há um certo balanço de áreas entre o quanto sobe por H_b e o quanto desce por H_b .

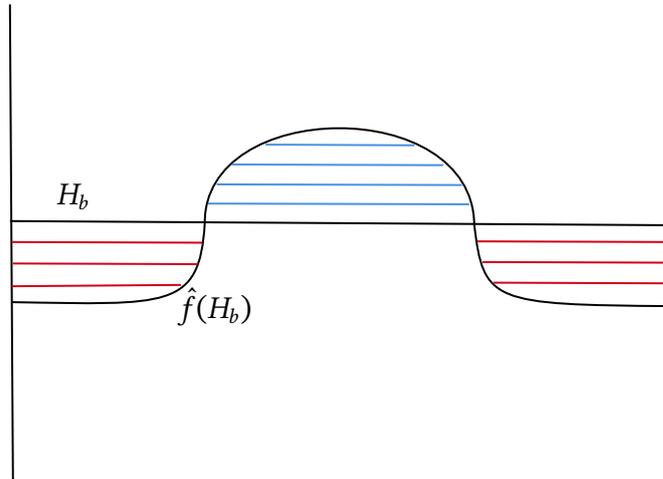


Figura 4.13: Balanço de áreas da proposição 3

Na figura 4.13 a área da região hachurada em azul é representada como tendo a mesma área da região hachurada em vermelho.

A princípio, K é algo bem complicado, o que torna difícil que tenhamos informação sobre ele. Porém, essa propriedade do balanço de áreas nos permite contornar esse problema da seguinte forma: tome $c \in \mathbb{R}$ tal que $K \cup \hat{f}(K) \subset \text{int}(H_c^- \cap (\hat{f}(H_c))^-)$. Da preservação da medida de Lebesgue e a proposição anterior temos que

$$\begin{aligned} Leb(O \cap H_c^-) &= Leb(\hat{f}(O) \cap (\hat{f}(H_c))^-) = Leb(\hat{f}(O) \cap H_c^-) + Leb(H_c^+ \cap (\hat{f}(H_c))^-) - Leb(H_c^- \cap (\hat{f}(H_c))^+) \\ &= Leb(\hat{f}(O) \cap H_c^-). \end{aligned}$$

A escolha de c , junto com o fato de que $\hat{f}(O) \subset O$, implica que $\bar{O} = \overline{\hat{f}(O)} = \hat{f}(\bar{O})$. Isto é, se fosse possível algo do tipo mostrado na figura 4.14.

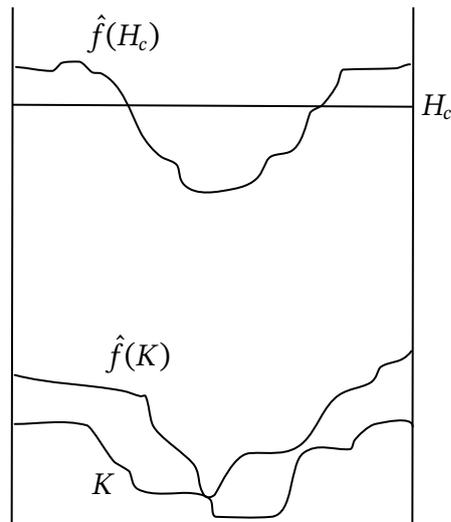


Figura 4.14: Violação da preservação de área

Como na parte superior há um balanço de áreas, se $K \neq \hat{f}(K)$ e $\hat{f}(K) \subset \overline{O} \cap (H_c)^-$ teríamos que $Leb(\hat{f}(O \cap (H_c)^-)) \neq Leb(O \cap (H_c)^-)$. Portanto, $K = \hat{f}(K)$. Isto é, $\partial \overline{O} = K$ separa os fins do cilindro e é \hat{f} -invariante. Isso significa que todas as órbitas são uniformemente limitadas. Isso segue do fato que $\hat{f}(K) = K$ e o mesmo vale para seus transladados horizontais, qualquer ponto está entre dois desses transladados de K e a região entre eles dois é invariante. Assim temos uma contradição com a nossa hipótese de que $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}(H)$ é não limitado. Então, vale (1) ou (2) do começo da prova deste corolário. \square

Referências

- [1] DEVANEY, R. **An Introduction to chaotic dynamical systems**. 1989. Addison Wesley, Redwood, CA.
- [2] FRANKS, J. **Generalizations of the Poincaré–Birkhoff theorem**. *Ann. of Math.* (2) 128 (1988), 139–151.
- [3] LE ROUX, F. **Homéomorphismes de surfaces: théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable**. 2004. *Astérisque* 292, 120 pp.
- [4] LLIBRE, J; MACKAY, R. S. **Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity**. 1991. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 11(1), 115–128. <http://doi.org/10.1017/S0143385700006040>
- [5] GARCIA, B. **Dinâmica de homeomorfismos homotópicos à Dehn twists**. 2012. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. doi:10.11606/T.45.2012.tde-19072012-200107. Acesso em: 2023-05-31.
- [6] KOLYADA, S; SNOHA, L; TROFIMCHUK, S. **Noninvertible minimal maps**. 2001. *Fund. Math.* 168(2001), 141-163.
- [7] KOLYADA, S; SNOHA, L; TROFIMCHUK, S. **Proper minimal sets on compact connected 2-manifolds are nowhere dense**. 2008. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28 (2008), 863-876.
- [8] KATOK, A; HASSELBLATT, B. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. 1993. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 54. Cambridge University Press. Cambridge.
- [9] ZANATA, S. **On properties of the vertical rotation interval for twist mappings**. 2005. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25 , 641–660.

[10] ZANATA, S. **Some extensions of the Poincaré–Birkhoff theorem to the cylinder and a remark on mappings of the torus homotopic to Dehn twists.** 2005. *Nonlinearity* 18 , 2243–2260.

[11] ZANATA, S; TAL, F. **Homeomorphisms of the annulus with a transitive lift.** 2009. *Math. Z.* 267 , 971–980.

[12] ZANATA, S; TAL, F; GARCIA, B. **Dynamics of homeomorphisms of the torus homotopic to Dehn twists.** 2014. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34, pp 409-422
doi:10.1017/etds.2012.156

z