Operadores ultradiferenciais no estudo de resolubilidade e regularidade Gevrey

Luis Fernando Ragognette

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, 26 de março de 2017

Operadores ultradiferenciais no estudo de resolubilidade e regularidade Gevrey

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 04/12/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Gerson Petronilho - UFSCar
- Prof. Dr. Gustavo Hoepfner - UFSCar
- Prof. Dr. Rafael Barostichi - UFSCar
- Prof. Dr. Sérgio L. Zani - ICMC - USP

Agradecimentos

Aos meus pais, Paulo e Leonilda, por serem motivo força e alegria durante todos os momentos e por todo amor que recebo.

Ao professor Paulo Cordaro por ser um exemplo de matemático, orientador e pessoa. E por toda sua dedição aos seus alunos.

Aos professores da Temple University, Gerardo Mendoza e Shiferaw Berhanu, por todo o auxílio durante o doutorado sanduíche.

Aos membros da banca Gerson, Gustavo, Rafael e Sérgio pelo interesse na minha tese, a leitura cuidosa e pelas sugestões para melhorar este texto.

A todo "time Cordaro": Alexandre Kawano, Luís Cláudio Yamaoka, Gregorio Chinni, Antonio Victor da Silva Junior, Bruno de Lessa Victor, Nicholas Braun Rodrigues, Max Reinhold Jahnke e Gabriel Cueva Candido Soares de Araújo. É muito gratificante pertencer a um grupo que compartilha da mesma paixão pela matemática. Agradeço duplamente aos amigos do começo desta jornada: Gabriel e Max. Por serem amigos presentes e pelas inúmeras discussões que moldaram este trabalho.

Aos amigos do IME: Adèle Helena Ribeiro, Bruno Jacóia, Eric Ossami Endo, Lucas Ruiz dos Santos, Pedro Henrique Pontes e Priscila Freitas. A presença de vocês no IME fez com que as longas viagens sempre fossem proveitosas.

Aos meus amigos da ETE, Bruno Daniel Higa, Daniel Santiago, Fábio Salvático da Silva, Marcel Gomes Cerri, Rodrigo Marchezoni de Oliveira e Tiago Santana, pela longa amizade que persiste com o tempo.

Resumo

RAGOGNETTE, L. F. **Operadores ultradiferenciais no estudo de resolubilidade e regularidade Gevrey**. 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

A essência desta tese são resultados e aplicações da teoria de operadores de ordem infinita. A ideia central deste trabalho é um teorema de representação de ultradistribuições a partir de operadores ultradiferenciais agindo em funções Gevrey. Essa representação junto com a regularidade do kernel destes operadores nos permite importar uma dada propriedade válida para funções Gevrey para o contexto de ultradistribuições e vice-versa. Aproveitamos estes teoremas para aprender um pouco mais sobre a resolubilidade local de complexos induzidos por estruturas localmente integráveis. Definimos três conceitos de resolubilidade local destes complexos no ambiente Gevrey e provamos a equivalência entre eles. Para tanto, foi necessário estudar espaços de funções Gevrey com respeito a uma dada estrutura hipo-analítica e investigar quando este novo espaço é isomorfo ao usual. E isto nos permitiu entender melhor a ação dos operadores considerados e o papel por eles desempenhado nesta teoria.

Palavras-chave: operadores ultradiferenciais, resolubilidade, funções Gevrey.

Abstract

RAGOGNETTE, L. F. **Ultradifferential operators in the study of Gevrey solvability and regularity**. 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

The essence of this thesis are results and applications of the theory of infinite order operators. The central idea of this work is a representation theorem of ultradistributions by ultradifferential operators acting on Gevrey functions. This representation together with the regularity of the kernel of these operators allow us to import a given property from Gevrey functions to the ultradistribution context and vice versa. We took advantage of these theorems to learn a little more about the local solvability of the complexes induced by locally integrable structures. We defined three concepts of local solvability of these complexes in the Gevrey environment and we proved that they are equivalent. To do so, it was necessary to study the space of the Gevrey functions with respect to a given hypo-analytic structure and to investigate when this new space is isomorphic to the usual one. And this allowed us to better understand the action of the considered operators and their role in this theory.

Keywords: ultradifferential operators, solvability, Gevrey functions.

Sumário

Lista de Símbolos

$G^s(\Omega)$	o espaço das funções Gevrey de ordem s em Ω
$G^s_c(\Omega)$	o subespaço de $G^s(\Omega)$ das funções com suporte compacto
$G^s(\Omega;\mathrm{M})$	o espaço das funções Gevrey de ordem s em Ω segundo M (2.1.4)
$G^s_c(\Omega;\mathrm{M})$	o subespaço de $G^s(\Omega;\mathrm{M})$ das funções com suporte compacto (2.18)
$\mathcal{D}'(\Omega)$	o espaço das distribuições em Ω
$\mathcal{E}'(\Omega)$	o espaço das distribuições com suporte compacto em Ω
$\mathcal{D}'_s(\Omega)$	o espaço das ultradistribuições em Ω
$\mathcal{E}'_s(\Omega)$	o espaço das ultradistribuições com suporte compacto em Ω
$\mathcal{D}'_s(\Omega;\mathrm{M})$	o espaço das ultradistribuições em Ω segundo M (2.19)
$\mathcal{E}'_s(\Omega;\mathrm{M})$	o espaço das ultradistribuições de suporte compacto em Ω segundo M (2.21)
$Q_{s,\sigma}(\zeta)$	a função inteira definida em (1.17)
$Q_{s,r}(\zeta)$	a função inteira definida em (6.1)
$\mathfrak{T}$	Uma estrutura hipo-analítica como em (2.1.1)

Introdução

Este trabalho se iniciou como uma tentativa de relacionar resolubilidades de diferentes tipos no ambiente Gevrey e o Teorema 7.1.4 foi o máximo que consegui realizar neste sentido. A motivação inicial para este trabalho foi uma conjectura presente no artigo de Malaspina e Nicola [MN13] que questiona se dada uma estrutura localmente integrável tal que para algum $s > 1$ temos a resolubilidade local do complexo induzido pela estrutura localmente integrável no sentido de ultra-distribuições de ordem s em um determinado grau, então, vale a resolubilidade do mesmo complexo no sentido de distribuições no mesmo grau.

Muito deste trabalho foi inspirado no trabalho de Caetano [Cae01] e Caetano e Cordaro [CC11] e as comparações entre estes com os artigos de Komatsu [Kom73] e Cordaro [Cor00] guiaram a maior parte desta tese. O teorema de representação de hiperfunções já havia sido me apresentado pelo meu orientador, portanto, não me surpreendeu que um resultado similar é verdadeiro para ultradistribuições. Entretanto, foi apenas comparando o trabalho de Caetano e Cordaro com o trabalho de Komatsu que fui capaz de perceber que a escolha de operadores de tipo $(p!^s)$ é o segredo para conseguir representar todas as ultradistribuições de ordem s (e tipo $\{p!^s\}$) com um mesmo operador.

Investigando a conjectura proposta e tentando relacionar com o artigo de Caetano e Cordaro fui levado a considerar três diferentes tipos de resolubilidade para o complexo: (G^s, G^s), $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ e $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$. A notação (E, F) quer dizer (de um modo bem impreciso) que dada $f \in F$ uma forma fechada esta é exata em E. O principal resultado que consegui neste sentido é justamente que as resolubilidades (G^s, G^s), $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ e $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$ são equivalentes. Que tanto (G^s, G^s) quanto $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$ implicam $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ é imediato. Para provar $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ implica (G^s, G^s) repeti as ideias da demonstração de que (C^∞, C^∞) implica (G^s, G^s) presentes em [CC11]. Por fim, percebi que a demonstração de que $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ implica $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$ deveria sair por um processo de limite e felizmente consegui transpor alguns argumentos que usam o Lema de Poincaré aproximado, que aprendi no caso C^∞, para o contexto de ultradistribuições.

A principal ferramenta deste trabalho é o teorema de representação de ultradistribuições de ordem s a partir de operadores de ordem infinita aplicados a funções Gevrey de ordem s. É imediato estender o teorema de representação para formas com coeficientes funções Gevrey e para ultracorrentes. Também foi muito útil explorar a regularidade do kernel dos operadores de ordem infinita o que, por exemplo, nos permitiu provar que é possível representar ultracorrentes fechadas a partir de uma forma também fechada e com coeficientes funções Gevrey.

Estes resultados estão organizados nesta tese do seguinte modo: O objetivo do Capítulo 1 é provar um teorema de representação de ultradistribuições a partir de funções C^∞ usando operadores de ordem infinita que são contínuos quando restritos a G^s. Optei por apresentar este resultado com intuito de permitir um melhor entendimento da tese como um todo. Acredito que o texto ganha com esta escolha muito embora este resultado de representação não é suficiente para os nossos objetivos por dois motivos: O primeiro é que não leva em consideração a estrutura localmente integrável que induz o complexo que queremos resolver. E o segundo motivo é porque a continuidade do operador nos impede de represenstrar ultradistribuições por funções Gevrey de mesma ordem.

No Capítulo 2 introduzimos o conceito de estruturas hipo-analíticas e o espaço das funções Gevrey segundo uma dada estrutura hipo-analítica. Provamos que, em estruturas hipo-analíticas Gevrey de ordem s, o espaço das funções Gevrey de ordem s com respeito a estrutura hipo-analítica é isomorfo ao espaço das funções Gevrey de ordem s usual. Por fim, definimos as ultradistribuições segundo uma estrutura hipo-analítica.

O Capítulo 3 por sua vez é dedicado ao estudo de certos operadores de ordem infinita aqui chamados de operadores ultradiferenciais enquanto o Capítulo 4 é dedicado à prova do teorema de representação. Passamos o Capítulo 5 discutindo propriedades de regularidade do kernel destes operadores e dedicamos o Capítulo 6 ao estudo de uma família particular de operadores ultradiferenciais. Finalmente, no Capítulo 7 recordamos a noção de estruturas localmente integráveis Gevrey, definimos a ação de operadores ultradiferenciais em formas e em ultracorrentes e também recordamos a definição de resolubilidade local aqui adotada. Neste capítulo também demonstramos a equivalência entre as resolubilidades (G^s, G^s), $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ e $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$. E terminamos este capítulo provando que um operador de tipo principal que satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg e Treves é também resolúvel no sentido de ultradistribuições.

Os últimos três capítulos são mais curtos e são simples aplicações de ideias próximas às já desenvolvidas aqui. No Capítulo 8, construímos um laplaciano a partir de uma certa família de campos que vem de uma estrutura hipo-analítica, definimos um conceito de vetor Gevrey deste laplaciano e provamos que pedir que função seja um vetor Gevrey deste laplaciano é o mesmo que dizer que esta é uma função Gevrey da estrutura hipo-analítica. O Capítulo 9 estende um resultado de regularidade provado em [CC11]. E terminamos com o Capítulo 10 onde mostramos uma versão global do teorema de representação em variedades riemannianas compactas reais-analíticas.

Capítulo 1

Relação entre ultradistribuições e operadores de ordem infinita

A primeira parte deste texto é dedicada a entender como as ultradistribuições podem ser vistas localmente como operadores de ordem infinita aplicados em funções. O análogo deste resultado na teoria de distribuições é o Teorema de estrutura local e uma demonstração deste pode ser obtida utilizando o Teorema de Paley-Wiener. O Teorema de Paley-Wiener nos diz que, dada $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, existe $p \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|\hat{u}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^p$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ e podemos enunciar o Teorema de estrutura local do seguinte modo:

Teorema 1.0.1 (Estrutura local)**.** *Dados p, k e M inteiros positivos tais que $M > (N+k+p)/2$ então vale que, para toda $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ para a qual existe uma constante $C_u > 0$ tal que a desigualdade $|\hat{u}(\xi)| \leq C_u(1+|\xi|)^p$ vale para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, existe $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$ tal que $u = (1-\Delta)^M f$ como distribuições.*

O que faremos agora será utilizar o Teorema de Paley-Wiener de ultradistribuições para construir um operador que nos permitirá representar ultradistribuições com suporte compacto de modo análogo ao que o Teorema de estrutura local faz com distribuições.

Teorema 1.0.2 (Paley-Wiener para ultradistribuições)**.** *Seja $u \in \mathcal{E}_s'(\mathbb{R}^N)$ então, para todo $\epsilon > 0$, existe $C(\epsilon) > 0$ tal que*

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C(\epsilon)\exp(\epsilon|\xi|^{1/s}),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Lembremos que operadores diferenciais (de ordem finita) são contínuos no espaço das distribuições. E isto nos diz que precisamos de outros tipo de operadores para representarmos ultradistribuições a partir de funções (que no nosso caso serão de classe C^∞). Mas que tipo de operadores eles seriam? Uma maneira intuitiva de responder esta pergunta é pensar que o Teorema de estrutura local nos diz que se a transformada de Fourier de uma distribuição é limitada por um polinômio de grau p então esta distribuição pode ser representada por um polinômio no laplaciano cujo grau depende de p, logo, como as ultradistribuições são limitadas por funções de crescimento exponencial então estas devem ser representadas por funções do laplaciano de crescimento exponencial. Formalizaremos esta ideia vaga adiante.

1.1 Operadores Ultradiferenciais

Costumeiramente pensamos que as funções de classe Gevrey estão em uma escala de regularidade intermediária entre as funções de classe C^∞ e as funções reais-analíticas. A teoria das funções reais-analíticas é tão rica que é fácil entender o porquê alguém as consideraria mais regular que as funções de classe C^∞. Uma pergunta mais difícil é: o que distingue as funções de classe Gevrey das funções

C^∞? Uma resposta para essa pergunta é que temos as seguintes inclusões próprias:

$$C^\infty(\Omega) \supsetneq \cdots \supsetneq G^s(\Omega) \supsetneq \cdots \supsetneq G^{s'}(\Omega) \supsetneq \cdots \supsetneq C^\omega(\Omega)$$

onde $s > s'$ e Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma outra característica que diferencia estes espaços e que é consequência da regularidade dos espaços Gevrey é a existência de operadores diferenciais de ordem infinita que são contínuos nos espaços de funções Gevrey de uma dada ordem e descontínuos em espaços maiores, em especial no espaço das funções C^∞. Utilizaremos o termo operador ultradiferencial para dizer que o operador considerado pode eventualmente ter ordem infinita. No capítulo 3, definiremos precisamente uma classe de operadores ultradiferenciais e daremos condições sob as quais estes operadores são contínuos em um determinado espaço.

A transformada de Fourier nos permite associar polinômios a operadores diferenciais. Os operadores de ordem infinita que iremos trabalhar são associados a funções inteiras com um crescimento controlado. Construiremos duas classes de exemplos que guiarão nossa intuição durante o restante do texto.

1.1.1 Construção de operadores ultradiferenciais

Seja s um número real maior que 1 e seja m um número inteiro. Consideremos a função inteira $J : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$J(z) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{p^{ms}}\right), \tag{1.1}$$

esta função pode ser reescrita na forma de somatório como

$$J(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{1.2}$$

Detalhemos a importância dos parâmetros s e m. Queremos compor J com o símbolo de um operador diferencial P de ordem m de coeficientes constantes e concluir que a composta satisfaz $|J(P(\zeta))| \leq Ce^{L|\zeta|^{1/s}}$ para constantes $C > 0$ e $L > 0$ e esta estimativa nos garante que $J(P)$ define um operador ultradiferencial contínuo de $G^{s'}$ em $G^{s'}$ para todo $1 \leq s' < s$.

Para conseguir um operador que é contínuo também em G^s precisamos de um controle melhor sobre o crescimento de J. Para isto, utilizaremos $\sigma : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente satisfazendo

$$\sigma(1) > 0 \quad \text{e} \quad \sigma(t) \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow \infty. \tag{1.3}$$

E utilizaremos no lugar de J a função inteira $J_\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$J_\sigma(z) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{p^{ms}\sigma(p)}\right), \tag{1.4}$$

que também pode ser reescrita na forma de somatório como

$$J_\sigma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{1.5}$$

Observação 1.1.1. É claro que J e J_σ dependem dos parâmetros s e m. Optamos por não carregarmos demais na notação e tomar o cuidado de esclarecer a notação quando consideramos a possibilidade de uma ambiguidade.

1.1.2 Estimativas para J e J_σ.

Nas próximas proposições daremos uma estimativa para o crescimento de J e J_σ e de seus coeficientes.

Proposição 1.1.2. *Sejam $s > 1$ e m um inteiro positivo tais que $ms \geq 2$. Se J é dado pela equação (1.1), então existem $C > 0$ e $L > 0$ tais que*

$$|J(z)| \leq Ce^{L|z|^{1/(ms)}}. \tag{1.6}$$

Além disso, se seus coeficientes a_k são dados por (1.2), então existe $l > 0$ tal que

$$|a_k| \leq C\frac{l^{mk}}{(mk)!^s} \tag{1.7}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Proposição 1.1.3. *Sejam $s > 1$ e m um inteiro positivo tais que $ms \geq 2$. Dada J_σ como na equação (1.4), temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$|J_\sigma(z)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon|z|^{1/(ms)}}. \tag{1.8}$$

Ademais, para os coeficientes em (1.5) vale que a desigualdade

$$|a_k| \leq C_\epsilon\frac{\epsilon^{mk}}{(mk)!^s} \tag{1.9}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Como as demonstrações destas duas proposições são praticamente idênticas reduziremos nosso trabalho decompondo suas demonstrações nos próximos lemas técnicos.

Lema 1.1.4. *Sejam a e b números reais positivos e r um número real no intervalo $(0,1)$. Então $(a+b)^r < a^r + b^r$.*

Demonstração. Primeiro notemos que as funções $f(r) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^r$ e $g(r) = \left(\frac{b}{a+b}\right)^r$ são funções estritamente decrescentes de r(basta notar que sua derivada é negativa). Portanto $(f+g)(r)$ é uma função estritamente decrescente e $(f+g)(1) = 1$. Donde $(f+g)(r) > 1$ para todo $r \in (0,1)$, portanto, segue que $a^r + b^r > (a+b)^r$. □

Lema 1.1.5. *Para todo $\epsilon > 0$ temos a desigualdade*

$$\prod_{p=1}^{\infty}\left(1 - \frac{i^2(\epsilon|z|)^{2/ms}}{p^2}\right)^{ms/2} \leq \frac{e^{\frac{sm}{2}\pi(\epsilon|z|)^{1/ms}}}{(2\pi)^{ms/2}\epsilon^{1/2}|z|^{1/2}} \tag{1.10}$$

para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Demonstração. Relembremos a fatoração da função $\sin z$:

$$\frac{\sin \pi\zeta}{\pi\zeta} = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta^2}{p^2}\right), \qquad \text{para todo } \zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}. \tag{1.11}$$

Lembremos também que $-2i\sin(ix) = e^x - e^{-x}$ o que nos diz que $-2i\sin(ix)$ é um número real e, se $x \geq 0$, vale que $0 \leq -2i\sin(ix) \leq e^x$.

Assim obtemos, para $z \neq 0$, a estimativa desejada:

$$\begin{aligned}
\prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\frac{i^2(\epsilon|z|)^{2/ms}}{p^2}\right)^{ms/2} &\leq \left(\frac{\sin(\pi i(\epsilon|z|)^{1/ms})}{\pi i(\epsilon|z|)^{1/ms}}\right)^{ms/2} \\
&\leq \left(\frac{e^{\pi(\epsilon|z|)^{1/ms}}}{2\pi(\epsilon|z|)^{1/ms}}\right)^{ms/2} \\
&= \frac{e^{\frac{sm}{2}\pi(\epsilon|z|)^{1/ms}}}{(2\pi)^{ms/2}\epsilon^{1/2}|z|^{1/2}}. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

□

Lema 1.1.6. *Seja $Q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira dada por $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ para a qual existem C, L números reais positivos tais que $|Q(z)| \leq Ce^{L|z|^{1/ms}}$. Então, os coeficientes de Q satisfazem a seguinte estimativa:*

$$|a_k| \leq C\left(\frac{eL}{s}\right)^{kms}\frac{1}{(km)!^s} \qquad (1.13)$$

Demonstração. Seja $r > 0$ um número real positivo qualquer. Para computarmos os coeficientes usaremos a fórmula integral de Cauchy

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{Q(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w,$$

e estimaremos seu valor absoluto:

$$\begin{aligned}
|a_k| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|Q(re^{i\theta})|}{r^k}\mathrm{d}\theta \\
&\leq C\frac{e^{Lr^{1/(ms)}}}{r^k}
\end{aligned}$$

onde r é um número real positivo. Calculando o mínimo do lado direito da desigualdade acima verificamos que este ocorre quando $r = (kmsL^{-1})^{ms}$ e disto segue a nova estimativa

$$|a_k| \leq C\frac{e^{kms}L^{kms}}{(kms)^{kms}} \leq C\left(\frac{eL}{s}\right)^{kms}\frac{1}{(km)!^s}$$

onde usamos que $(km)!^s \leq (km)^{kms}$ para obter a desigualdade final. □

Demonstração da Proposição 1.1.2. Primeiro observemos que o Lema 1.1.4 nos concede que

$$\left(1+\frac{|z|}{p^{ms}}\right)^{2/ms} \leq 1 + \frac{|z|^{2/ms}}{p^2}.$$

Assim, estimando o valor absoluto de J, temos

$$\begin{aligned}
|J(z)| &\leq \prod_{p=1}^{\infty}\left(1+\frac{|z|}{p^{ms}}\right) \\
&\leq \left[\prod_{p=1}^{\infty}\left(1+\frac{|z|^{2/ms}}{p^2}\right)\right]^{sm/2} \\
&= \left[\prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\frac{i^2|z|^{2/ms}}{p^2}\right)\right]^{ms/2}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1.5 com $\epsilon = 1$ temos que para $z \neq 0$

$$|J(z)| \leq \frac{e^{\frac{sm}{2}\pi|z|^{1/ms}}}{(2\pi)^{ms/2}|z|^{1/2}}.$$

Definindo $C = \max\{\sup_{z\in B_1(0)} |J(z)|, (2\pi)^{-ms/2}\}$ e $L = sm\pi/2$ temos que

$$|J(z)| \leq Ce^{L|z|^{1/ms}}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Para a estimativa dos coeficientes basta usarmos o Lema 1.1.6 para obtermos que $l = (eL/s)^s$. $\square$

Demonstração da Proposição 1.1.3. Dado $\epsilon > 0$ escolhemos $q \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(p) \geq 1/\epsilon$ se $p \geq q$. Existe uma constante $C'_\epsilon > 0$ tal que

$$\prod_{p=1}^{q}\left(1 + \frac{|z|}{p^{ms}\sigma(p)}\right)\left(1 + \frac{\epsilon|z|}{p^{ms}}\right)^{-1} \leq C'_\epsilon, \tag{1.14}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo para $z \neq 0$ temos a estimativa

$$\begin{aligned}|J_\sigma(z)| &\leq \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 + \frac{|z|}{p^{ms}\sigma(p)}\right)\\ &\leq C'_\epsilon \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\epsilon|z|}{p^{ms}}\right)\\ &\leq C'_\epsilon\left[\prod_{p=1}^{\infty}\left(1 - \frac{i^2(\epsilon|z|)^{2/ms}}{p^2}\right)\right]^{ms/2}.\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1.5 temos que

$$|J_\sigma(z)| \leq C'_\epsilon \frac{e^{\frac{sm}{2}\pi(\epsilon|z|)^{1/ms}}}{(2\pi)^{ms/2}\epsilon^{1/2}|z|^{1/2}}.$$

Podemos então nomear $\epsilon_0 = \frac{ms}{2}\pi\epsilon^{1/(ms)}$ e definir C_{ϵ_0} por

$$C_{\epsilon_0} = \max\left\{\sup_{z\in B_1(0)} |J_\sigma(z)|, \frac{C'_\epsilon}{(2\pi)^{ms/2}\epsilon^{1/2}}\right\}$$

e desta forma conseguimos obter

$$|J_\sigma(z)| \leq C_{\epsilon_0}e^{\epsilon_0|z|^{1/(ms)}}.$$

Para a estimativa dos coeficientes usamos a estimativa acima no Lema 1.1.6 e obtemos

$$|a_k| \leq C_{\epsilon_0}\epsilon_1^{km}\frac{1}{(km)!^s},$$

onde $\epsilon_1 = (e\epsilon_0/s)^s$. $\square$

1.1.3 Operadores de ordem infinita associados a um operador diferencial.

Fixemos $s > 1$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ com $ms \geq 2$. Fixemos J e J_σ como em (1.1) e (1.4), respectivamente.

É usual quando precisamos da transformada de Fourier de um operador denotarmos

$$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \text{ para todo } j = 1, \ldots, N.$$

Seja P um operador diferencial de ordem m com coeficientes constantes o qual iremos escrever como $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} b_\alpha D^\alpha$ onde $b_\alpha \in \mathbb{C}$. O símbolo de P é denotado por $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} b_\alpha \xi^\alpha$ onde $\xi \in \mathbb{R}^N$ e sua extensão para $\mathbb{C}^N$ é dada por $P(\zeta) = \sum_{|\alpha|\leq m} b_\alpha \zeta^\alpha$ onde $\zeta \in \mathbb{C}^N$.

Definimos a função inteira $J_{\sigma,P}(\zeta) = J_\sigma(P(\zeta))$ e podemos usá-la para definir um operador de ordem infinita da seguinte forma:

$$J_{\sigma,P}(D)f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (P^k(D)f)(x). \tag{1.15}$$

A equação acima não converge para qualquer f. É imediato obter uma constante $A > 0$ tal que $|P(\zeta)| \leq A|\zeta|^m$ para $|\zeta| \geq 1$ e juntando isto com a desigualdade (1.8) é fácil provar que, para todo $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que $|J_{\sigma,P}(\zeta)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon|\zeta|^{1/s}}$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}^N$. Com esta desigualdade satisfeita temos em mãos o Teorema 2.12 de Komatsu [Kom73] que nos diz que, dado Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, temos que $J_{\sigma,P} : G^s(\Omega) \longrightarrow G^s(\Omega)$ é um operador linear contínuo. O leitor interessado pode obter este resultado adaptando a demonstração do Lema 3.1.8.

Podemos também definir funções inteiras $J_P = J(P(\zeta))$ usando a função inteira J definida em (1.1). Notemos que se $s' < s$ então, dado $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que se $|\zeta| \geq r$ então $L|\zeta|^{1/s} \leq \epsilon|\zeta|^{1/s'}$ e isto nos permite achar $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|J_P(\zeta)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon|\zeta|^{1/s'}} \tag{1.16}$$

para todo $\zeta \in \mathbb{C}^N$ e a discussão acima nos diz que $J_P : G^{s'}(\Omega) \longrightarrow G^{s'}(\Omega)$ é um operador contínuo.

É imediato que $J_{\sigma,P}(D)$ e $J_P(D)$ preservam suporte e isto significa que estes operadores também agem, por transposição, em ultradistribuições, isto é, definimos $J_{\sigma,P} : \mathcal{D}'_s(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'_s(\Omega)$ por $(J_{\sigma,P}(D)u)(\varphi) = u({}^tJ_{\sigma,P}(D)\varphi) = u(J_{\sigma,{}^tP}(D)\varphi)$ onde $u \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$ e $\varphi \in G^s(\Omega)$ e definimos para $s' < s$ o operador $J_P : \mathcal{D}'_{s'}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'_{s'}(\Omega)$ por $J_P(D)u(\varphi) = u({}^tJ_P(D)\varphi) = u(J_{{}^tP}(D)\varphi)$ onde $u \in \mathcal{D}'_{s'}(\Omega)$ e $\varphi \in G^{s'}(\Omega)$.

É interessante notarmos que se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ então temos que as transformadas de Fourier de $J_{\sigma,P}u$ e J_Pu são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(J_{\sigma,P}(D)u\big)(\xi) &= \Big\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k P^k(D)u, e^{-i\xi x}\Big\rangle \\
&= \Big\langle u, \sum_{k=0}^{\infty} a_k ({}^tP)^k(D)\big(e^{-i\xi x}\big)\Big\rangle \\
&= \Big\langle u, \sum_{k=0}^{\infty} a_k ({}^tP)^k(-\xi)e^{-i\xi x}\Big\rangle \\
&= J_\sigma(P(\xi))\hat{u}(\xi)
\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{F}\big(J_P(D)u\big)(\xi) = J_\sigma(P(\xi))\hat{u}(\xi)$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^N$.

1.2 Um teorema de representação usando operadores ultradiferenciais contínuos.

Os principais resultados desta tese são obtidos com operadores ultradiferenciais que são descontínuos em G^s mas contínuos em $G^{s'}$ quando $s' < s$. Entretanto, não resistimos e resolvemos apresentar também uma demonstração do teorema de representação para operadores ultradiferenciais contínuos em G^s. Existem alguns motivos para querermos apresentar esta prova. O principal é que a construção da função σ elucida a relação entre a ultradistribuição representada e o operador ultradiferencial que utilizamos para representá-la. De um modo impreciso, podemos dizer que σ faz o papel para ultradistribuições que a ordem tem na teoria de distribuições.

Um segundo motivo é que apresentado este resultado ficamos livres para traçarmos paralelos entre o que podemos fazer com operadores ultradiferenciais contínuos e descontínuos em G^s. Daremos agora os dois exemplos de operadores ultradiferenciais mais importantes no nosso trabalho:

Exemplo 1.2.1. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, $s \in (1, \infty)$ e σ com as propriedades (1.3). Escolhemos $P = \Delta$ o laplaciano e consideremos J_σ com $m = 2$. Segue que $J_{\sigma,\Delta}(\zeta) = J_\sigma(-\langle\zeta\rangle^2)$ define um operador ultradiferencial contínuo em $G^s(\Omega)$, aqui usamos a notação $\langle\zeta\rangle^2 = \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_N^2$.

Exemplo 1.2.2. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $s \in (1, \infty)$. Novamente escolhemos $P = \Delta$ e J com $m = 2$. Temos que $J_\Delta(\zeta) = J(-\langle\zeta\rangle^2)$ define um operador ultradiferencial contínuo em $G^{s'}(\Omega)$ para todo $s' < s$.

Os operadores $J_{\sigma,\Delta}(D)$ são contínuos em G^s e, por transposição, em $\mathcal{D}'_s$. Passaremos o restante deste capítulo provando o teorema de representação para estes operadores. Provaremos no Teorema 4.1.1 um resultado de representação para uma classe de operadores descontínuos em G^s e veremos que J_Δ está nesta classe. Para deixar nossa notação consistente com outros trabalhos adotaremos a seguinte notação $Q_{s,\sigma}(\zeta) = J_{\sigma,\Delta}(\zeta)$, isto é,

$$Q_{s,\sigma}(\zeta) = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\langle\zeta\rangle^2}{p^{2s}\sigma(p)}\right). \tag{1.17}$$

O resultado que iremos provar é o seguinte:

Teorema 1.2.3. *Dada $u \in \mathcal{E}'_s(\mathbb{R}^N)$ existem $\sigma : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u = Q_{s,\sigma}(D)f. \tag{1.18}$$

Prepararemos o caminho para este teorema apresentando um resultado sobre aproximações de ultradistribuições, uma estimativa para $Q_{s,\sigma}$ e discutiremos como construir a função σ a partir da transformada de Fourier de uma dada ultradistribuição.

1.2.1 Um resultado sobre aproximações de ultradistribuições.

Dada $u \in \mathcal{E}'_s(\mathbb{R}^N)$ definimos uma família de funções reais-analíticas, $\mathscr{E}_\epsilon[u]$, por

$$\mathscr{E}_\epsilon[u](x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} u_y\big(e^{i(x-y))\xi}\big)e^{-\epsilon|\xi|^2}\mathrm{d}\xi. \tag{1.19}$$

Provemos que $\mathscr{E}_\epsilon[u]$ converge em $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R}^N)$ para u. Seja $\varphi \in G^s_c(\mathbb{R}^N)$ então

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\epsilon[u](\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} u_y\big(e^{i(x-y)\xi}\big)e^{-\epsilon|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\right]\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &= u_y\bigg(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x-y)\xi}e^{-\epsilon|\xi|^2}\varphi(x)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\bigg).\end{aligned}$$

E isto implica que

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \mathscr{E}_\epsilon[u](\varphi) = u(\varphi) \tag{1.20}$$

já que, pelo resultado (B.0.9), vale

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x-y)\xi} e^{-\epsilon|\xi|^2} \varphi(x) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x = \varphi(y) \tag{1.21}$$

em $G^s(\mathbb{R}^N)$.

Isto implica que toda subsequência de $\mathscr{E}_\delta[u]$ converge para u em $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R}^N)$. (Veja a Observação 2.3.2).

1.2.2 Uma estimativa inferior para $Q_{s,\sigma}$.

Para todo q inteiro positivo temos que

$$\begin{aligned} |Q_{s,\sigma}(i\xi)| &= \prod_{p=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{|\xi|^2}{p^2\sigma(p)} \right| \\ &\geq \prod_{p=1}^{q} \left(1 + \frac{|\xi|^2}{p^{2s}\sigma(p)} \right). \end{aligned}$$

Para todo $|\xi| \geq \sigma(1)$ existe um inteiro positivo $q = q(|\xi|)$ tal que

$$q^{2s}\sigma(q) \leq |\xi|^2 \leq (q+1)^{2s}\sigma(q+1).$$

Então, para todo $1 \leq p \leq q$, temos que $|\xi|^2 \geq p^{2s}\sigma(p)$ donde vale

$$|Q_{s,\sigma}(i\xi)| \geq 2^q = \exp\big(q \log 2\big).$$

Como σ é uma função crescente existe R tal que se $|\xi| \geq R$ então $\sigma(q) \geq 1$ e consequentemente $q^{2s} \leq q^{2s}\sigma(q) \leq |\xi|^2$, logo $q \leq |\xi|^{1/s}$ e isto junto com $|\xi|^2 \leq (q+1)^{2s}\sigma(q+1)$ nos dá

$$\begin{aligned} q &> \left[\frac{|\xi|^2}{\sigma(q+1)} \right]^{1/2s} - 1 \\ &\geq \frac{|\xi|^{1/s}}{\sigma(q+1)^{1/2s}} - 1 \\ &\geq \frac{|\xi|^{1/s}}{\sigma(|\xi|^{1/s}+1)} - 1 \end{aligned}$$

Conclusão 1.2.4. Acabamos de mostrar que existe $R > 0$ tal que, se $|\xi| \geq R$, vale a estimativa

$$\begin{aligned} |Q_{s,\sigma}(i\xi)| &\geq \exp\left\{ (\log 2) \left[\frac{|\xi|^{1/s}}{\sigma(|\xi|^{1/s}+1)} - 1 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \exp\left\{ \log 2 \frac{|\xi|^{1/s}}{\sigma(|\xi|^{1/s}+1)} \right\}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

1.2.3 Escolhendo a função σ.

Fixemos $u \in \mathcal{E}'_s(\mathbb{R}^N)$, como já discutimos, o Teorema de Paley-Wiener para ultradistribuições nos diz que, para todo $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_\epsilon \exp(\epsilon|\xi|^{1/s}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.23}$$

Inspirados pela desigualdade acima consideremos $C : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ uma função estritamente decrescente satisfazendo $C(\epsilon) \geq 1$ se $\epsilon \leq 1$, $C(\epsilon) \longrightarrow +\infty$ quando $\epsilon \longrightarrow 0^+$ e satisfazendo

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C(\epsilon)\exp(\epsilon|\xi|^{1/s}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Uma forma de conseguir tal função é primeiro considerar $\tilde{C}(\epsilon)$ uma escolha que associa a $\epsilon > 0$ o ínfimo de C_ϵ satisfazendo (1.23) deste modo $\tilde{C}$ é uma função decrescente. Podemos admitir que $\tilde{C}$ é contínua, caso contrário, basta fazer uma convolução com uma função de corte apropriada. Para conseguir uma função estritamente decrescente definimos $C(\epsilon) = \tilde{C}(\epsilon) + 1/\epsilon$ e assim temos temos $C(\epsilon) \geq 1$ para $\epsilon \leq 1$ e $C(\epsilon) \longrightarrow \infty$ quando $\epsilon \longrightarrow 0^+$.

Denotemos por $a = \log(C(1))$. É claro que $a \geq 0$. Denotemos por γ o inverso da função $\log C :]0, 1[\longrightarrow [a, \infty[$ e definimos $\sigma :]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ por

$$\sigma(\tau) = \begin{cases} \frac{\log 2}{2}\frac{1}{\sqrt{\tau}^{-1}+\gamma(\sqrt{\tau})}, & \text{se } \sqrt{\tau} > a; \\ \frac{\log 2}{2}\frac{1}{a^{-1}+\gamma(a)}, & \text{se } a \geq \sqrt{\tau} > 0. \end{cases}$$

Notemos que σ é uma função crescente com $\sigma(\tau) \longrightarrow \infty$ quando $\tau \longrightarrow \infty$. Se $|\xi|$ é grande o suficiente para valer (1.22), então, para todo $\epsilon > 0$, vale

$$|Q_{s,\sigma}(i\xi)^{-1}\hat{u}(\xi)| \leq 2C(\epsilon)\exp\left(\epsilon|\xi|^{1/s} - \log 2\frac{|\xi|^{1/s}}{\sigma(|\xi|^{1/s}+1)}\right) \tag{1.24}$$

Se ξ é tal que $(|\xi|^{1/s}+1)^{1/2} > a$ escolheremos $\epsilon = \gamma((|\xi|^{1/s}+1)^{1/2})$ e isto nos significa que $C(\epsilon) = \exp(\log C(\epsilon)) = \exp((|\xi|^{1/s}+1)^{1/2})$. Com esta escolha de ϵ conseguimos uma exponencial do lado direito de (1.24) e seu expoente satisfaz:

$$\begin{aligned} &(|\xi|^{1/s}+1)^{1/2} + \epsilon|\xi|^{1/s} - 2|\xi|^{1/s}\frac{\big(1+(|\xi|^{1/s}+1)^{1/2}\epsilon\big)}{(|\xi|^{1/s}+1)^{1/2}} \\ &= (|\xi|^{1/s}+1)^{1/2} - 2\frac{|\xi|^{1/s}}{(|\xi|^{1/s}+1)^{1/2}} - \epsilon|\xi|^{1/s} \\ &\leq (|\xi|^{1/s}+1)^{-1/2}\big((|\xi|^{1/s}+1) - 2|\xi|^{1/s}\big) \\ &= (|\xi|^{1/s}+1)^{-1/2}\big(-|\xi|^{1/s}+1\big) \\ &= -|\xi|^{1/s}(|\xi|^{1/s}+1)^{-1/2} + (|\xi|^{1/s}+1)^{-1/2} \\ &\leq -|\xi|^{1/s}(|\xi|^{1/s}+1)^{-1/2} + 1 \end{aligned}$$

podemos ainda supor que $|\xi| \geq 1$, logo $-|\xi|^{1/s}(|\xi|^{1/s}+1)^{-1/2} \leq -|\xi|^{1/s}/(2|\xi|^{1/s})^{1/2}$.

Conclusão 1.2.5. Seja R_0 um número real maior que 1 grande o suficiente para valer a Conclusão 1.2.4 e também $(R_0^{1/s}+1)^{1/2} > a$, então, para todo ξ satisfazendo $|\xi| \geq R_0$, vale

$$|Q_{s,\sigma}(i\xi)^{-1}\hat{u}(\xi)| \leq 2\exp\left(-\frac{|\xi|^{1/2s}}{\sqrt{2}} + 1\right). \tag{1.25}$$

1.2.4 Representação de uma ultradistribuição

Demonstração do Teorema 1.2.3. Definimos a sequência de funções de classe C^∞:

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\hat{u}(\xi)}{Q_{s,\sigma}(i\xi)}e^{ix\xi-\epsilon|\xi|^2}\mathrm{d}\xi. \tag{1.26}$$

Seja R_0 como na Conclusão 1.2.5 e desta forma vale desigualdade (1.25) para todo ξ com

$|\xi| \geq R_0$. Assim temos para as derivadas de f_ϵ que vale

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha f_\epsilon(x)| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)}{Q_{s,\sigma}(i\xi)}e^{ix\xi-\epsilon|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\xi|^{|\alpha|}|\hat{u}(\xi)|}{|Q_{s,\sigma}(i\xi)|}\mathrm{d}\xi \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N}\left[\int_{B_{R_0}(0)}\frac{|\xi|^{|\alpha|}|\hat{u}(\xi)|}{|Q_{s,\sigma}(i\xi)|}\mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_0}(0)} 2|\xi|^{|\alpha|}e^{-\frac{|\xi|^{1/2s}}{\sqrt{2}}+1}\mathrm{d}\xi\right].\end{aligned}$$

Logo a família f_ϵ é uniformemente limitada em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, possui uma subsequência f_{ϵ_j} convergindo para uma função f de classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Como $Q_{s,\sigma}(D)$ é um operador contínuo em $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R}^N)$ temos que, em $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R}^N)$, vale a convergência $Q_{s,\sigma}(D)f_{\epsilon_j} \longrightarrow Q_{s,\sigma}(D)f$ mas já vimos que $Q_{s,\sigma}(D)f_{\epsilon_j} = \mathcal{E}_{\epsilon_j}[u] \longrightarrow u$ em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R}^N)$ temos $Q_{s,\sigma}(D)f = u$. □

1.2.5 Discussão sobre teoremas de representação.

Uma observação é que construindo a função σ, com um pouco mais de cuidado, é fácil adaptar a prova e mostrar que dadas $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{E}'_s(\mathbb{R}^N)$ existem σ e $f_1, \dots, f_k$ tais que $u_j = Q_{s,\sigma}(D)f_j$ para todo $j = 1, \dots, k$.

Sobre a história dos teoremas de representações de ultradistribuições usando operadores ultradiferenciais gostaríamos de relembrar que Komatsu provou em [Kom73] que dada uma ultradistribuição existe um operador ultradiferencial e uma função contínua para o qual temos a representação. Uma vantagem da abordagem aqui adotada é que esta nos permite construir o operador a partir da transformada de Fourier da ultradistribuição que queremos representar.

Capítulo 2

Espaços Gevrey segundo uma estrutura hipo-analítica

2.1 Estruturas Hipo-analíticas.

Definiremos uma teoria de espaços Gevrey segundo uma dada estrutura hipo-analítica e o principal motivo pelo qual faremos isto é porque estudaremos operadores que estão intrinsecamente relacionados com a estrutura hipo-analítica e, portanto, é natural tentar obter estimativas com estes operadores aplicados em funções deste novo espaço. Não obstante, provaremos que dentro de certas condições estes novos espaços Gevrey são na verdade os espaços Gevrey tradicionais.

Definição 2.1.1. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma estrutura hipo-analítica de coposto nulo em Ω é uma coleção de pares ordenados $\mathfrak{T} = \{(U, Z)\}$, onde U é um subconjunto aberto de Ω e $Z = (Z_1, \dots, Z_N) : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ é uma função suave, satisfazendo as seguintes condições:*

(1) $\Omega = \bigcup_{(U,Z)\in\mathfrak{T}} U$.

(2) Se $(U, Z) \in \mathfrak{T}$, então as diferenciais $\mathrm{d}Z_1, \dots, \mathrm{d}Z_N$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ em todo ponto de U.

(3) Se $(U, Z), (U', Z') \in \mathfrak{T}$ são tais que $U \cap U' \neq \emptyset$, então (U, Z) e (U', Z') são biholomorficamente relacionadas, isto é, existem subconjuntos abertos $\mathcal{U} \supset Z(U \cap U')$ e $\mathcal{U}' \supset Z'(U \cap U')$ de $\mathbb{C}^N$ e um biholomorfismo $H : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}'$ tais que $Z' = H \circ Z$ em $U \cap U'$.

(4) Se $U^\flat$ é um aberto de Ω e $Z^\flat = (Z_1^\flat, \dots, Z_N^\flat) : U^\flat \longrightarrow \mathbb{C}^N$ é uma função suave tal que

- *$\mathrm{d}Z_1^\flat, \dots, \mathrm{d}Z_N^\flat$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ em todo ponto de $U^\flat$,*
- *os pares $(U^\flat, Z^\flat)$ e (U, Z) são biholomorficamente relacionados para todo $(U, Z) \in \mathfrak{T}$ com $U \cap U^\flat \neq \emptyset$,*

então $(U^\flat, Z^\flat) \in \mathfrak{T}$.

2.1.1 Espaços Gevrey segundo M.

Fixemos uma estrutura hipo-analítica $\mathfrak{T}$ em Ω. Um par $(U, Z) \in \mathfrak{T}$ é chamado uma carta hipo-analítica.

Segue da definição de estrutura hipo-analítica que $\mathrm{d}Z_1, \dots, \mathrm{d}Z_N$ formam uma base local para $\mathbb{C}T^*U$, denotemos por $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_N$ sua base local dual, isto é, $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_N$ são campos vetoriais que satisfazem a relação

$$\mathrm{d}Z_k(\mathrm{M}_j) = \mathrm{M}_j Z_k = \delta_{jk} \tag{2.1}$$

em cada ponto de U.

Definição 2.1.2. *Dados $V \subset\subset U$ um aberto, $s \geq 1$ e $h > 0$ denotaremos por $G^{s,h}(\overline{V}, \mathrm{M})$ o espaço de todas as funções $f \in C^\infty(\overline{V})$ para as quais existe $C > 0$ tal que vale*

$$\sup_{\overline{V}} |\mathrm{M}^\alpha f| \leq C h^{|\alpha|} |\alpha|!^s, \qquad \textit{para todo } \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{2.2}$$

Definimos uma norma em $G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ por

$$\|f\|_{\overline{V},h} \doteq \sup_{\alpha} \left\{ h^{-|\alpha|} (|\alpha|!)^{-s} \sup_{\overline{V}} |\mathrm{M}^\alpha f| \right\}. \tag{2.3}$$

Temos que $G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ é um espaço de Banach com essa norma.

Em algumas demonstrações estaremos trabalhando com mais de um espaço Gevrey, usaremos a notação $\|\cdot\|_{\overline{V},h,s}$ para a norma em $G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ para evitar possíveis ambiguidades.

Definição 2.1.3 (Espaço das funções Gevrey segundo M em um compacto)**.** *Seja $V \subset\subset U$ um aberto com fronteira suave. Definimos o espaço $G^s(\overline{V}; \mathrm{M})$ como o limite indutivo dos espaços $G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$, isto é, escolhemos uma sequência de números reais positivos, h_j, com $h_j < h_{j+1}$ e $h_j \longrightarrow \infty$ quando $j \longrightarrow \infty$ e definimos*

$$G^s(\overline{V}; \mathrm{M}) = \operatorname*{limind}_{j \longrightarrow \infty} G^{s,h_j}(\overline{V}; \mathrm{M}). \tag{2.4}$$

Notemos que a família $G^{s,h_j}(\overline{V}; \mathrm{M})$ cresce conforme j aumenta e isto nos diz que, como espaço vetorial, $G^s(\overline{V}; \mathrm{M})$ é simplesmente a união $\bigcup G^{s,h_j}(\overline{V}; \mathrm{M})$.

Diremos que V_j uma sequência de abertos de U é uma exaustão de U se $V_j \subset V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ e $\bigcup V_j = U$.

Definição 2.1.4 (Espaço das funções Gevrey segundo M em um aberto)**.** *Consideremos uma exaustão de U por abertos $V_j \subset\subset U$ com fronteira suave. O espaço $G^s(U; \mathrm{M})$ é definido como o limite projetivo dos espaços $G^s(\overline{V_j}; \mathrm{M})$, isto é,*

$$G^s(U; \mathrm{M}) = \operatorname*{limproj}_{j \longrightarrow \infty} G^s(\overline{V_j}; \mathrm{M}). \tag{2.5}$$

Chamaremos este conjunto do espaço das funções Gevrey segundo M.

Queremos verificar que $G^s(U; \mathrm{M})$ pode ser identificado com um subespaço de $C^\infty(U)$. Para isto recapitulemos a definição de limite projetivo. Seja A_j uma família de espaços vetoriais tais que para todo par i, j de inteiros positivos com $i \leq j$ existe $f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ uma aplicação linear satisfazendo as seguintes propriedade

- f_{ii} é a identidade de A_i;
- $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ para todo $i \leq j \leq k$.

Definimos então o limite projetivo da sequência A_j por

$$\operatorname*{limproj}_{j \longrightarrow \infty} A_j = \left\{ a \in \prod_{j \in \mathbb{Z}_+} A_j : a_j = f_{jk}(a_k) \text{ para todo } j, k \in \mathbb{Z}_+ \text{ satisfazendo } j \leq k \right\},$$

onde a_j é a j-ésima coordenada de a. Seja $\mathcal{G}^s(U; \mathrm{M})$ o espaço das funções $f \in C^\infty(U)$ tais que $f|_{\overline{V_j}} \in G^s(\overline{V_j}; \mathrm{M})$ para todo j e consideremos $T : \mathcal{G}^s(U; \mathrm{M}) \longrightarrow G^s(U; \mathrm{M})$ definida por

$$(Tf)_j = f|_{\overline{V_j}}.$$

De fato, se $j \leq k$ então $(Tf)_j = (Tf)_k|_{\overline{V_j}}$ e donde Tf é mesmo um elemento de $G^s(U; \mathrm{M})$. A aplicação T é claramente linear e injetora, provemos que T é sobrejetora. Dada $f \in G^s(U; \mathrm{M})$

definiremos $\tilde{f} \in \mathcal{G}^s(U;\mathrm{M})$. Para cada $x \in U$ existe V_j tal que $x \in V_j$ podemos definir $\tilde{f}(x) = f_j(x)$. Ressaltemos que $\tilde{f}$ está bem definida pois se $x \in V_k$ então $\tilde{f}(x) = f|V_j(x) = f|_{V_k}(x)$ e é imediato que $\tilde{f}$ é de classe C^∞ e, por isto, segue que $T\tilde{f} = f$. Estamos considerando a topologia limite projetivo em $G^s(U;\mathrm{M})$, e iremos transferir esta topologia para $\mathcal{G}^s(U;\mathrm{M})$ do seguinte modo: diremos que $\mathcal{U}$ é aberto em $\mathcal{G}^s(U;\mathrm{M})$ se, e somente se, existe $\mathcal{W}$ aberto de $G^s(U;\mathrm{M})$ tal que $\mathcal{U} = T^{-1}\mathcal{W}$. Com esta topologia T é um isomorfismo de espaços localmente convexos e desta forma não iremos mais diferenciar $G^s(U;\mathrm{M})$ e $\mathcal{G}^s(U;\mathrm{M})$. Na próxima seção discutiremos mais sobre as topologias de $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ e $G^s(U;\mathrm{M})$.

Observação 2.1.5 (Independência dos limites indutivos e projetivos)**.** Um resultado clássico na teoria de espaços localmente convexos diz que tanto os limites projetivos quanto os limites indutivos são isomorfos aos limites de uma família cofinal. Se considerarmos o limite indutivo da família $\{G^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M})\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ obtemos um espaço que é isomorfo ao limite indutivo de qualquer família $\{G^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M})\}_{h\in\Lambda}$ com Λ cofinal em $\mathbb{R}_+$ e, portanto, o limite é independente, a menos de isomorfismos, da escolha da sequência h_j. Um argumento análogo prova que a definição de $G^s(U;\mathrm{M})$ é independente da sequência de abertos V_j.

Observação 2.1.6 (Espaço das funções Gevrey)**.** Quando Z é formado pelas coordenadas usuais de $\mathbb{R}^N$, isto é, $Z(x) = x$ os campos M_j são as derivadas parciais usuais $\partial/\partial x_j$ e, portanto, temos que o espaço $G^s(U;\mathrm{M})$ é o espaço das funções Gevrey s usuais em U que será denotado por $G^s(U)$.

2.1.2 Topologia do espaço das funções Gevrey segundo M.

Consideraremos os espaços $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ e $G^s(U;\mathrm{M})$ com as topologias de limites indutivos e limite projetivo, respectivamente.

Um resultado que nos dá informação preciosas sobre a topologia destes espaços é a seguinte proposição:

Proposição 2.1.7. *Seja $(U,Z) \in \mathfrak{T}$. Então, dados $V \subset\subset U$ com bordo suave, $s \geq 1$ e $h < h_+$, a inclusão*

$$G^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s,h_+}(\overline{V};\mathrm{M}) \tag{2.6}$$

é compacta.

A prova deste resultado pode ser encontrada na tese de doutorado de Paulo Caetano [Cae01] e esta usa o Teorema de Arzela-Ascoli e é inspirada na demonstração da Proposição 2.2 do artigo de Komatsu [Kom73].

O fato que esta inclusão é compacta se reflete nas propriedades topológicas de $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ e $G^s(U;\mathrm{M})$. Sempre que temos uma sequência de espaços de Banach com inclusões compactas entre eles seu limite indutivo é um espaço DFS (Dual de Fréchet-Schwartz). O dual de um espaço DFS é, evidentemente, um espaço FS (Fréchet-Schwartz) que, como nome diz, é um espaço de Fréchet. Uma sequência em um espaço DFS converge se, e somente se, a sequência pertence a algum dos espaços de Banach e converge neste espaço. Outra propriedade que devemos ter em mente sobre espaços FS e DFS é que estes são espaços de Montel o que nos diz, entre outras coisas, que toda sequência limitada possui uma subsequência convergente. Temos que $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ é um espaço DFS quando V é um aberto com fronteira suave.

Como estamos trabalhando com topologias indutivas e projetivas vamos relembrar como verificar continuidade nestes espaços usando a sequência de espaços que definem o espaço limite:

Lim Ind Escolhida uma sequência crescente h_ℓ de números reais positivos tal que $h_\ell \longrightarrow \infty$, a topologia em $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ é dada pela sequência

$$G^{s,h_1}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s,h_2}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G^{s,h_\ell}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow \cdots. \tag{2.7}$$

O espaço $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ é o único espaço a menos de isomorfismos que possui a topologia localmente convexa mais fina tal que as inclusões

$$\iota_\ell : G^{s,h_\ell}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G^s(\overline{V};\mathrm{M}) \tag{2.8}$$

são contínuas para todo $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Seja F um espaço localmente convexo, uma aplicação de $P : G^s(\overline{V};\mathrm{M}) \longrightarrow F$ é contínua se, e somente se, as aplicações

$$P \circ \iota_\ell : G^{s,h_\ell}(\overline{V};\mathrm{M}) \longrightarrow F \tag{2.9}$$

são contínuas para todo ℓ.

Lim Proj Escolhida uma exaustão $V_\ell \subset\subset U$ com bordo suave, a topologia de $G^s(U;\mathrm{M})$ é dada pela sequência

$$G^s(\overline{V_1};\mathrm{M}) \xleftarrow{r_{\overline{V_1}}} G^s(\overline{V_2};\mathrm{M}) \xleftarrow{r_{\overline{V_2}}} \cdots \xleftarrow{r_{\overline{V_{\ell-1}}}} G^s(\overline{V_\ell};\mathrm{M}) \xleftarrow{r_{\overline{V_\ell}}} \cdots \tag{2.10}$$

onde as aplicações $r|_{\overline{V_\ell}}$ são as restrições. O espaço $G^s(U;\mathrm{M})$ é o único espaço a menos de isomorfismo que possui a topologia menos fina tal que as restrições

$$\rho_{\overline{V_\ell}} : G^s(U;\mathrm{M}) \longrightarrow G^s(\overline{V_\ell};\mathrm{M}) \tag{2.11}$$

são contínuas para todo $\ell \in \mathbb{Z}_+$ e esta topologia é automaticamente localmente convexa. Se F é um espaço localmente convexo uma aplicação $P : F \longrightarrow G^s(U;M)$ é contínua se, e somente se, as aplicações

$$\rho_{\overline{V_\ell}} \circ P : F \longrightarrow G^s(\overline{V_\ell};\mathrm{M}) \tag{2.12}$$

são contínuas para todo ℓ.

Uma sequência f_ν converge para f em $G^s(U;\mathrm{M})$ se, e somente se, para todo ℓ, $f_\nu|_{\overline{V}_\ell}$ converge para $f|_{\overline{V}_\ell}$ em $G^s(\overline{V}_\ell;\mathrm{M})$. Agora como $G^s(\overline{V}_\ell;\mathrm{M})$ é um espaço DFS temos que $f_\nu|_{\overline{V}_\ell}$ converge para $f|_{\overline{V}_\ell}$ em $G^s(\overline{V}_\ell;\mathrm{M})$ se, e somente se, existe h_k tal que $f|_{\overline{V}_\ell} \in G^{s,h_k}(\overline{V}_\ell;\mathrm{M})$ e $f_\nu|_{\overline{V}_\ell} \in G^{s,h_k}(\overline{V}_\ell;\mathrm{M})$ para todo ν e $f_\nu|_{\overline{V}_\ell}$ converge para $f|_{\overline{V}_\ell}$ em $G^{s,h_k}(\overline{V}_\ell;\mathrm{M})$.

A observação acima se traduz do seguinte modo: uma sequência $f_\nu \in G^s(U;\mathrm{M})$ converge para 0 se, e somente se, para todo ℓ existe h_k tal que $f_\nu|_{\overline{V}_\ell} \in G^{s,h_k}(\overline{V}_\ell;\mathrm{M})$ e $f_\nu|_{\overline{V}_\ell} \longrightarrow 0$ em $G^{s,h_k}(\overline{V}_\ell;\mathrm{M})$, isto é, para todo V_ℓ existe h_k tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe ν_0 tal que se $\nu > \nu_0$ então

$$\|f_\nu\|_{\overline{V}_\ell,h_k} \leq \epsilon.$$

E se $f \in G^s(U;\mathrm{M})$ temos que $f_\nu \longrightarrow f$ em $G^s(U;\mathrm{M})$ se $f - f_\nu$ converge para 0 em $G^s(U;\mathrm{M})$.

Como comentamos sequências limitadas em $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ tem subsequência convergente. Provemos que o mesmo é válido em $G^s(U;\mathrm{M})$:

Proposição 2.1.8. *Sejam $(U;Z) \in \mathfrak{T}$, V_j uma exaustão de U por abertos com fronteira suave e seja $f_n \in G^s(U;\mathrm{M})$ uma sequência limitada, isto é, tal que existem $h_j, C_j > 0$ independentes de n tais que*

$$\|f_n\|_{\overline{V}_j,h_j} \leq C_j,$$

então existe uma subsequência convergente f_{n_k} e $f \in G^s(U;\mathrm{M})$ tal que f é o limite em $G^s(U;\mathrm{M})$ de f_{n_k}.

Demonstração. Dado V_j, a desigualdade acima nos dá que $f_n|_{\overline{V}} \in G^{s,h_j}(\overline{V}_j;\mathrm{M})$. Pela Proposição 2.1.7 temos que $f_n|_{\overline{V_j}}$ possui uma subsequência convergente em $G^{h_j^+}(\overline{V}_j;\mathrm{M})$, para todo $h_j^+ > h_j$.

Agora procedemos do seguinte modo: Aplicando o procedimento acima obtemos f_n^1 uma subsequência de f_n tal que $f_n^1|_{\overline{V_1}}$ converge em $G^{s,h_1^+}(\overline{V_1};\mathrm{M})$. E definimos f_n^j como uma subsequência de

f_n^{j-1} tal que $f_n^j|_{\overline{V_j}}$ converge em $G^{s,h_j^+}(\overline{V}_j;\mathrm{M})$. Definimos $f_{n_k}=f_k^k$ e dado $x\in U$ definimos $f(x)$ por

$$f(x)=\lim_{j\longrightarrow\infty} f_{n_k}(x).$$

Como $f_{n_k}|_{\overline{V}_j}$ converge em $G^{s,h_j^+}(\overline{V}_j;\mathrm{M})$ temos que $f|_{\overline{V}_j}\in G^{s,h_j^+}(\overline{V}_j;\mathrm{M})$ e é claro que $f-f_{n_k}\longrightarrow 0$ em $G^s(U;\mathrm{M})$. □

2.2 A estrutura dos espaços Gevrey segundo M.

Seja (U,Z) uma carta hipo-analítica e consideremos $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}^N$ uma vizinhança de $Z(U)$. Para qualquer função holomorfa H definida em $\mathcal{U}$ existe h tal que $H\circ Z\in G^{1,h}(\overline{V};\mathrm{M})$. De uma forma geral podemos construir para todo $h>0$ exemplos de funções em $G^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M})$ considerando funções H de classe G^s em $\mathbb{C}^N$ tais que $\overline{\partial}H$ se anula de ordem infinita sobre $Z(U)$. Este resultado é o Teorema 1.1 da tese de doutorado de Paulo Caetano [Cae01] e seu preciso enunciado é:

Teorema 2.2.1. *Seja $p\in\Omega$. Seja $(U,Z)\in\mathfrak{T}$ uma carta hipo-analítica onde U é uma vizinhança de p e seja f uma função infinitamente diferenciável no fecho de uma vizinhança $V\subset\subset U$ de p. Se $s>1$ então são equivalentes:*

- *$f\in G^s(\overline{V};\mathrm{M})$,*
- *existem $\mathcal{U}\supset Z(V)$ e $F\in G^s(\mathcal{U})$ com $f|_V=F\circ Z|_V$ e com $\overline{\partial}F\sim 0$,*
- *existe $F\in G^s(\mathbb{C}^N)$ com $f|_V=F\circ Z|_V$ e com $\overline{\partial}F\sim 0$,*

onde $\overline{\partial}F\sim 0$ significa que $\overline{\partial}F$ se anula de ordem infinita sobre $Z(U)$, isto é, $\partial F/\partial\bar{z}_k$ e todas as suas derivadas se anulam em $Z(U)$ para todo $k=1,\dots,N$.

Usaremos este resultado para relacionar os espaços Gevrey associados a cartas hipo-analíticas distintas. Até aqui consideramos apenas uma carta hipo-analítica e é natural nos perguntar quando temos duas cartas hipo-analíticas (U,Z) e $(\tilde{U},\tilde{Z})$ com $U\cap\tilde{U}\neq\emptyset$ qual é a relação entre $G^s(U\cap\tilde{U},\mathrm{M})$ e $G^s(U\cap\tilde{U},\tilde{\mathrm{M}})$? O próximo resultado esclarece esta questão:

Proposição 2.2.2. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja $\mathfrak{T}$ uma estrutura hipo-analítica de coposto nulo em Ω. Dado um ponto $p\in\Omega$ consideremos $(U,Z),(U,\tilde{Z})\in\mathfrak{T}$ tal que $p\in U$ e denotemos por M_j e $\tilde{\mathrm{M}}_j$ campos duais de $\mathrm{d}Z_j$ e $\mathrm{d}\tilde{Z}_j$, respectivamente. Então $G^s(U;\mathrm{M})$ e $G^s(U;\tilde{\mathrm{M}})$ são isomorfos como espaços topológicos.*

Para provar esta proposição usaremos um lema sobre limites indutivos de espaços localmente convexos. Primeiro lembremos que $(F_j,f_{jk})_{j\in\mathbb{Z}_+}$ é um sistema direto se, para todo $j\leq k$, temos um homomorfismo $f_{jk}:F_j\longrightarrow F_k$ que satisfaz

- f_{jj} é a identidade em F_j;
- $f_{jl}=f_{kl}\circ f_{jk}$ para todo $j\leq k\leq l$.

Seja F o limite indutivo de $(F_j,f_{jk})_{j\in\mathbb{Z}_+}$. Para induzir em F a topologia limite indutivo exigimos também que as aplicações f_{jk} sejam contínuas.

Lema 2.2.3. *Sejam $(E_j,e_{jk})_{j\in\mathbb{Z}_+}$ e $(F_j,f_{jk})_{j\in\mathbb{Z}_+}$ duas famílias de espaços localmente convexos. Seja E o limite indutivo de $(E_j,e_{jk})_{j\in\mathbb{Z}_+}$ e F o limite indutivo de $(F_j,f_{jk})_{j\in\mathbb{Z}_+}$, ambos com a topologia limite indutivo. Por fim, consideremos que, para todo $j\in\mathbb{Z}_+$, temos $\iota_j:E_j\longrightarrow F_j$ e $\kappa_j:F_j\longrightarrow E_{j+1}$ homomorfismos contínuos satisfazendo $f_{jk}\circ\iota_j=\iota_k\circ e_{jk}$, $e_{j+1k+1}\circ\kappa_j=\kappa_k\circ f_{jk}$, $\kappa_j\circ\iota_j=e_{jj+1}$ e $\iota_{j+1}\circ\kappa_j=f_{jj+1}$. Nestas condições, temos que E e F são isomorfos.*

Demonstração. Consideremos a família $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ definida por

$$A_n = \begin{cases} E_j & \text{se } n \text{ é ímpar e } n = 2j-1; \\ F_j & \text{se } n \text{ é par e } n = 2j. \end{cases}$$

Note que $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma família de espaços localmente convexos. Dados $n, p \in \mathbb{Z}_+$ com $n \leq p$ definimos a_{np} por

$$a_{np} = \begin{cases} f_{jk} & \text{se } n \text{ e } p \text{ são pares e } n = 2j, p = 2k; \\ e_{jk} & \text{se } n \text{ e } p \text{ são ímpares e } n = 2j-1, p = 2k-1; \\ \kappa_{k-1} \circ f_{jk-1} & \text{se } n \text{ é par e } p \text{ é ímpar e } n = 2j, p = 2k-1; \\ \iota_k \circ e_{jk} & \text{se } n \text{ é ímpar e } p \text{ é par e } n = 2j-1, p = 2k. \end{cases}$$

Com a definição acima temos que $(A_n, a_{np})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é um sistema direto com aplicações contínuas, denotemos por A seu limite indutivo. Pela construção, segue que $(E_j, e_{jk})_{j\in\mathbb{Z}_+}$ e $(F_j, f_{jk})_{j\in\mathbb{Z}_+}$ são cofinais em $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ isto implica que E, F e A são isomorfos. □

Demonstração da Proposição 2.2.2. Como (U, Z) e $(U, \tilde{Z})$ são biholomorficamente relacionadas existem abertos $\mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ e um biholomorfismo $H : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{U}$ tais que $Z = H \circ \tilde{Z}$ em U. Dada $g \in G^s(\overline{V}; \mathrm{M})$ temos, pelo Teorema 2.2.1, que existe $G \in G^s(\mathbb{C}^N)$ tal que $g = G \circ Z$ e $\overline{\partial} G \sim 0$ em $Z(U)$. Logo $g = G \circ H \circ \tilde{Z}$ e é claro que $G \circ H \in G^s(\tilde{\mathcal{U}})$ e que $\overline{\partial}\big(G \circ H\big) \sim 0$ em $\tilde{Z}(U)$ e assim $g \in G^s(\overline{V}; \tilde{\mathrm{M}})$. Por um raciocínio análogo concluímos que $G^s(\overline{V}; \mathrm{M}) = G^s(\overline{V}; \tilde{\mathrm{M}})$. Entretanto, precisamos ainda provar que as topologias são iguais e faremos isto provando que $G^s(\overline{V}; \mathrm{M})$ e $G^s(\overline{V}; \tilde{\mathrm{M}})$ são isomorfos. Para tanto provaremos que, dado $h_1 > 0$, existem h_2, h_3 números reais satisfazendo $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ e tais que

$$G^{s,h_1}(\overline{V}; \mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s,h_2}(\overline{V}; \tilde{\mathrm{M}}) \hookrightarrow G^{s,h_3}(\overline{V}; \mathrm{M}) \tag{2.13}$$

são inclusões contínuas, o que nos concede uma família de espaços nas condições do Lema 2.2.3.

Consideremos $g \in G^{s,h_1}(\overline{V}; \mathrm{M})$. Temos pelo argumento acima que $g = G \circ H \circ \tilde{Z} = G \circ Z$. Por um lado, vale que $\tilde{\mathrm{M}}^\alpha g = \partial_z^\alpha (G \circ H)(\tilde{Z})$ e, portanto, estamos interessados em estimativas para $\partial_z^\alpha (G \circ H)$ sobre $\tilde{Z}$. Por outro lado, $\mathrm{M}^\alpha g = \partial_z^\alpha G(Z)$ donde temos que $|\partial_z^\beta G(Z)| \leq \|g\|_{\overline{V},h_1,\mathrm{M}} h_1^{|\beta|} |\beta|!^s$, para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$. Para cada $x \in \overline{V}$ consideremos a função holomorfa

$$F(z) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} (\partial_z^\beta G(H(\tilde{Z}(x)))(H(z) - H(\tilde{Z}(x)))^\beta / \beta!, \tag{2.14}$$

suas derivadas satisfazem $\tilde{\mathrm{M}}^\gamma g(x) = (\partial_z^\gamma F(z))|_{\tilde{Z}(x)}$ sempre que $|\gamma| \leq |\alpha|$. Seja W um aberto compactamente contido em $\mathcal{U}$ contendo $Z(\overline{V})$. Consideremos B um limitante para $|H(z) - H(\tilde{Z}(x))|$ quando z varia em $\overline{W}$ e x varia em $\overline{V}$ o que nos diz que

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{W}} |F| &\leq \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \|g\|_{\overline{V},h_1,\mathrm{M}} (Bh_1)^{|\beta|} |\beta|!^s \beta!^{-1} \\ &\leq \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \|g\|_{\overline{V},h_1,\mathrm{M}} (\max\{Bh_1, 1\})^{|\alpha|} |\beta|!^{s-1} N^{|\beta|} \\ &\leq c 2^{N-1} \|g\|_{\overline{V},h_1,\mathrm{M}} \tilde{h}_2^{|\alpha|} |\alpha|!^{s-1} \end{aligned}$$

onde $\tilde{h}_2 = 2N \max\{Bh_1, 1\}$. Aqui c é a constante que só depende de $s-1$ que aparece na desigualdade A.5 do Apêndice.

Seja $r > 0$ tal que para cada ponto de $z \in Z(V)$ o polidisco $\Delta_r(z)$ está contido em W. Temos, pela desigualdades de Cauchy, que

$$\begin{aligned}\sup_{Z(\overline{V})} |\tilde{\mathrm{M}}^\alpha g| &\leq \sup_{Z(\overline{V})} |\partial_z^\alpha F| \\ &\leq \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}} c 2^{N-1} \|g\|_{\overline{V},h_1,\mathrm{M}} \tilde{h}_2^{|\alpha|} |\alpha|!^{s-1} \\ &\leq c2^{N-1} \|g\|_{\overline{V},h_1,\mathrm{M}} h_2^{|\alpha|} |\alpha|!^s\end{aligned}$$

onde $h_2 = \tilde{h}_2 \max\{1, r^{-|\alpha|}\}$ donde temos que

$$\|g\|_{\overline{V},h_2,\tilde{\mathrm{M}}} \leq c2^{N-1} \|g\|_{\overline{V},h_1,\mathrm{M}}. \tag{2.15}$$

Portanto, a inclusão $G^{s,h_1}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s,h_2}(\overline{V};\widetilde{\mathrm{M}})$ é contínua. Espelhando o procedimento acima provamos que existe h_3 tal que a inclusão $G^{s,h_2}(\overline{V};\widetilde{\mathrm{M}}) \hookrightarrow G^{s,h_3}(\overline{V};\mathrm{M})$ é contínua, como queríamos. □

Este resultado nos permite estender o conceito de G^s segundo M para o aberto Ω, onde podemos definir o espaço das funções G^s segundo $\mathfrak{T}$. Não iremos nesta direção pela simples razão que nosso interesse aqui é estudar aspectos locais destes espaços. E, em particular, utilizar estes espaços para obter resultados locais para o espaço das funções Gevrey usuais. Notemos que, quando a estrutura $\mathfrak{T}$ é real-analítica, a Proposição 2.2.2 nos diz que o espaço das funções G^s segundo M é o espaço das funções G^s usual. Esta igualdade permanece verdadeira para abertos pequenos quando a estrutura $\mathfrak{T}$ é gerada localmente por funções Gevrey.

Definição 2.2.4. *Seja $s \geq 1$. Uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s de coposto nulo em Ω é uma estrutura hipo-analítica de coposto nulo em Ω tal que, para toda carta hipo-analítica $(U,Z) \in \mathfrak{T}$, a função $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ é Gevrey de ordem s.*

Nosso intuito agora é comparar $G^s(U)$ e $G^s(U;\mathrm{M})$ quando $\mathfrak{T}$ é uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s. Para tanto, fixemos um ponto em Ω, que vamos supor por simplicidade ser a origem e escolhemos uma carta hipo-analítica em $(U,Z) \in \mathfrak{T}$ que contém a origem. Por meio de uma translação e uma combinação linear obtemos uma carta $(U,\tilde{Z})$ biholomorficamente relacionada com (U,Z) tal que $\tilde{Z}(x) = x + i\Phi(x)$ onde $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função Gevrey de ordem s que satisfaz

$$\Phi(0) = 0 \text{ e } D\Phi(0) = 0. \tag{2.16}$$

Pela Proposição 2.2.2 temos que $G^s(U;\mathrm{M})$ é isomorfo a $G^s(U;\widetilde{\mathrm{M}})$. Nosso objetivo é provar que se $\mathfrak{T}$ é Gevrey de ordem $s > 1$ então existe uma carta (W,Z) com $0 \in W$ tal que $G^s(W)$ e $G^s(W;\mathrm{M})$ são isomorfos. Vamos primeiro explorar o Teorema 2.2.1 para conseguir uma carta especial onde podemos estender Z para uma função em $\mathbb{C}^N$.

Proposição 2.2.5. *Seja $\mathfrak{T}$ uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem $s > 1$ de coposto nulo. Consideremos $(U,Z) \in \mathfrak{T}$ uma carta hipo-analítica tal que $0 \in U$. Então existem $\mathcal{W}$ uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^N$, W uma vizinhança da origem em U, e $H : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ uma função Gevrey de ordem s tal que $H|_{\mathcal{W}}$ é invertível, $H|_W = Z|_W$ e, para todo $j \in \{1,\dots,N\}$, temos que $\overline{\partial}(H|_{\mathcal{W}})_j \sim 0$ sobre W e $\overline{\partial}(H|_{\mathcal{W}}^{-1})_j \sim 0$ sobre $H|_{\mathcal{W}}(W)$.*

Demonstração. Como vimos acima podemos supor que Z tem a propriedade (2.16). Aplicaremos o Teorema 2.2.1 só que agora para a estrutura dada por $x_1,\dots,x_N$ com os campos $\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_N}$. Seja $V \subset\subset U$ uma vizinhança aberta da origem. Temos que $Z_j \in G^s(\overline{V})$ para cada $j \in \{1,\dots,N\}$ e o Teorema 2.2.1 implica que existem $H_j \in G^s(\mathbb{C}^N)$ satisfazendo $\overline{\partial}H_j \sim 0$ sobre $\overline{V}$ tais que $Z_j = H_j|_V$. Denotemos as coordenadas de $\mathbb{C}^N$ por $x_1+iy_1,\dots,x_N+iy_N$ e consideremos $H : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ dada por $H = (H_1,\dots,H_N)$. Temos que $\partial_{x_j}H_k(0) = \partial_{x_j}(Z_k(x))|_{=0} = \delta_{jk}$ e como $\overline{\partial}H_k(0) = 0$ segue que $\partial_{y_j}H_k(0) = -i\partial_{x_j}H_k(0)$. Logo o determinante jacobiano de H na origem é não-nulo e pelo Teorema da Função Inversa para funções Gevrey temos que existe $\mathcal{W}$ uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^N$ tal que $H|_{\mathcal{W}}$ é inversível e sua inversa $H|_{\mathcal{W}}^{-1}$ é Gevrey de ordem s. Definiremos $W = V \cap \mathcal{W}$ onde é claro que $H|_W = Z|_W$. Falta provar que $H|_{\mathcal{W}}^{-1}$ satisfaz $\overline{\partial} H|_{\mathcal{W}}^{-1} \sim 0$ em $H|_{\mathcal{W}}(W)$.

Sobre $\mathcal{W}$ temos que $(H|_{\mathcal{W}}^{-1})_j \circ H|_{\mathcal{W}}(z) = z_j$. Aplicando $\overline{\partial}_k$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\partial}_k\big[(H|_{\mathcal{W}}^{-1})_j \circ H|_{\mathcal{W}}(z)\big] \\ &= \sum_{l=1}^{N} \big(\partial_{\zeta_l}(H|_{\mathcal{W}}^{-1})_j(H|_{\mathcal{W}}(z))\overline{\partial}_{z_k}(H_l|_{\mathcal{W}})(z) + \sum_{l=1}^{N} \big(\partial_{\bar{\zeta}_l}(H|_{\mathcal{W}}^{-1})_j(H|_{\mathcal{W}}(z))\overline{\partial}_{z_k}(\overline{H_l}|_{\mathcal{W}})(z) \end{aligned}$$

no primeiro termo aparecem as parcelas $\overline{\partial}_{z_k}(H_l|_{\mathcal{W}})(z)$ que se anulam quando $z \in W$ e como o determinante jacobiano de H não se anula em $\mathcal{W}$ podemos inverter a matriz $(\overline{\partial}_{z_k}(\overline{H_l}|_{\mathcal{W}})(z))_{k,l}$ em $\mathcal{W}$ e concluir que $\partial_{\bar{\zeta}_l}(H|_{\mathcal{W}}^{-1})_j(H|_{\mathcal{W}}(z)) = 0$ se $z \in W$. □

Uma ferramenta que precisaremos na próxima proposição é a fórmula de Faà di Bruno em várias variáveis.

Proposição 2.2.6 (Fórmula de Faà di Bruno em várias variáveis)**.** *Sejam Ω_1 e Ω_2 abertos de $\mathbb{R}^N$. Sejam $f : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ e $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ funções de classe C^∞. Então para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N \setminus \{0\}$ temos que*

$$\partial^\alpha (f \circ g)(x) = \sum \partial^\kappa f(g(x))\alpha! \frac{\big(\partial^{\delta_1} g(x)\big)^{\beta_1}}{\beta_1! \delta_1!^{|\beta_1|}} \cdots \frac{\big(\partial^{\delta_\ell} g(x)\big)^{\beta_\ell}}{\beta_\ell! \delta_\ell!^{|\beta_\ell|}}$$

onde $\kappa = \beta_1 + \cdots + \beta_\ell$ e o somatório é em todos os conjuntos $\{\delta_1, \ldots, \delta_\ell\}$ de ℓ elementos distintos de $\mathbb{Z}_+^N \setminus \{0\}$ e sobre todas as ℓ-uplas $(\beta_1, \ldots, \beta_\ell) \in (\mathbb{Z}_+^N \setminus \{0\})^\ell$, $\ell = 1, 2, 3, \ldots,$ tais que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} |\beta_j| \delta_j.$$

Notação: Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N \setminus \{0\}$ denotaremos por $\mathcal{S}_\alpha$ o conjunto onde calculamos o somatório na fórmula de Faà di Bruno.

Precisaremos também do seguinte lema:

Lema 2.2.7. *Dado $\lambda > 0$ existem R, D constantes positivas dependendo somente de λ e de N tais que*

$$\sum_{\mathcal{S}_\alpha} \frac{\kappa!}{\beta_1! \ldots \beta_\ell!} \lambda^{|\kappa|} \leq R D^{|\alpha|},$$

vale para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$.

O artigo [BM04] de Bierstone e Milman apresenta uma belíssima demonstração da fórmula de Faà di Bruno e do Lema 2.2.7. Mais precisamente, eles provam, no artigo, que, dado $\lambda > 0$, temos que $H(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} H_\alpha u^\alpha$ é uma série de potências convergente quando seus coeficientes são dados pela seguinte expressão $H_\alpha = \sum_{\mathcal{S}_\alpha} \frac{\kappa!}{\beta_1! \ldots \beta_\ell!} \lambda^{|\kappa|}$. Seja B_r denotando o disco de raio $r > 0$ em $\mathbb{C}$, como H é uma série de potências convergente existe $r > 0$ tal que H converge no polidisco $B_r \times \ldots \times B_r$ e usando a estimativa de Cauchy concluímos que existe $R > 0$ tal que

$$|H_\alpha| \leq \frac{R}{r^{|\alpha|}}$$

e escolhendo $D = r^{-1}$ conseguimos as constantes do Lema 2.2.7.

E agora estamos prontos para provar o seguinte resultado:

Proposição 2.2.8. *Seja $\mathfrak{T}$ uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem $s > 1$ de coposto nulo. Dada $(U, Z) \in \mathfrak{T}$ uma carta hipo-analítica e fixado $p \in U$ existe W uma vizinhança de p tal que $G^s(W)$ e $G^s(W; \mathrm{M})$ são isomorfos.*

Demonstração. Continuaremos assumindo que o ponto p é a origem. Para provarmos este resultado usaremos novamente o Teorema 2.2.1, este nos diz que, dada $g \in G^s(U; \mathrm{M})$ e V uma vizinhança aberta da origem compactamente contida em U, existe $G \in G^s(\mathbb{C}^N)$ tal que $g|_V = G \circ Z|_V$, portanto, $g|_V$ é a composta de duas funções G^s e usando uma exaustão de U por vizinhanças da origem concluímos que $g \in G^s(U)$. Provaremos que podemos achar W uma vizinhança da origem contida em U, onde vale a inclusão $G^s(W) \subset G^s(W; \mathrm{M})$ e o argumento acima nos concede a inclusão $G^s(W; \mathrm{M}) \subset G^s(W)$.

Sejam W e H dados pela Proposição 2.2.5. Assim se $f \in G^s(W)$ então, para toda $V \subset\subset W$ vizinhança da origem, temos que $f|_{\overline{V}} \in G^s(\overline{V})$ e existe $F \in G^s(\mathbb{C}^N)$ tal que $f|_V = F|_V$ e $\overline{\partial} F \sim 0$ em $\overline{V}$. A função $F \circ H|_{\mathcal{W}}^{-1} \in G^s(H(\mathcal{W}))$ e satisfaz $\overline{\partial}[F \circ H|_{\mathcal{W}}^{-1}] \sim 0$ sobre $H(\overline{V})$ e $F \circ H|_{\mathcal{W}}^{-1} \circ Z|_V = f$ e novamente o Teorema 2.2.1 nos diz que $f \in G^s(W; \mathrm{M})$.

Até aqui achamos W uma vizinhança da origem para a qual vale $G^s(W; \mathrm{M}) = G^s(W)$ como conjuntos. Precisamos ainda verificar que estes possuem a mesma topologia. Usaremos, para tanto, o Lema 2.2.3. O que precisamos provar é que dados $V \subset\subset W$ vizinhança da origem e $h_1 > 0$ existem h_2 e h_3, com $h_1 \leq h_2 \leq h_3$, tais que $G^{s,h_1}(\overline{V}) \subset G^{s,h_2}(\overline{V}; \mathrm{M}) \subset G^{s,h_3}(\overline{V})$ e, com isto, o Lema 2.2.3 nos dirá que $G^s(\overline{V}; \mathrm{M})$ e $G^s(\overline{V})$ são isomorfos e consequentemente teremos que $G^s(W; \mathrm{M})$ e $G^s(W)$ são isomorfos.

Dada $f \in G^{s,h_1}(\overline{V})$ queremos estimar suas derivadas $\mathrm{M}^\alpha f(x)$ em $\overline{V}$ de forma a encontrarmos h_2. Como vimos acima $f|_V = F|_V$ e como $\overline{\partial} F \sim 0$ para todo $x \in \overline{V}$ temos que existe $C > 0$ tal que $|\partial^\kappa F(x)| \leq C h_1^\kappa |\kappa|!^s$ para todo $x \in \overline{V}$ aqui $\kappa \in \mathbb{Z}_+^N$ (∂^κ leva em conta apenas os multiíndices em ∂_z já que $\overline{\partial} F \sim 0$ em $\overline{V}$ implica que as derivadas que possuem algum termo da forma $\partial_{\overline{z}_k}$ se anulam). Por outro lado, $f = F \circ H^{-1}|_{\mathcal{W}} \circ Z$ em V e desta forma vemos que $\mathrm{M}^\alpha f(x) = \mathrm{M}^\alpha(F \circ H^{-1}|_{\mathcal{W}} \circ Z(x)) = \partial^\alpha(F \circ H^{-1}|_{\mathcal{W}})(Z(x))$. Usando a fórmula de Faà di Bruno em várias variáveis temos

$$\partial^\alpha(F \circ H|_{\mathcal{W}}^{-1})(z) = \sum_{\mathcal{S}_\alpha} \partial^\kappa F(H|_{\mathcal{W}}^{-1}(z)) \alpha! \frac{\left(\partial^{\delta_1} H|_{\mathcal{W}}^{-1}(z)\right)^{\beta_1}}{\beta_1! \delta_1!^{|\beta_1|}} \cdots \frac{\left(\partial^{\delta_\ell} H|_{\mathcal{W}}^{-1}(z)\right)^{\beta_\ell}}{\beta_\ell! \delta_\ell!^{|\beta_\ell|}}.$$

Lembremos que $H|_{\mathcal{W}}^{-1}$ é uma função de Gevrey de ordem s e, portanto, existem r e h tais que $|\partial^\delta H|_{\mathcal{W}}^{-1}(z)| \leq r h^{|\delta|} |\delta|!^s$ e temos a seguinte estimativa

$$|\partial^\alpha(F \circ H|_{\mathcal{W}}^{-1})(z)| \leq \alpha! C h^{|\alpha|} \sum_{\mathcal{S}_\alpha} \frac{\kappa!}{\beta_1! \ldots \beta_\ell!} (N r h_1)^{|\kappa|} |\kappa|!^{s-1} |\delta_1|!^{(s-1)|\beta_1|} \cdots |\delta_\ell|!^{(s-1)|\beta_\ell|}.$$

Usamos a estimativa

$$|\kappa|!^{s-1} |\delta_1|!^{(s-1)|\beta_1|} \cdots |\delta_\ell|!^{(s-1)|\beta_\ell|} \leq |\alpha|!^{s-1}$$

provada no Corolário A.0.8 do Apêndice e obtemos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(F \circ H|_{\mathcal{W}}^{-1})(z)| &\leq \alpha! C h^{|\alpha|} \sum_{\mathcal{S}_\alpha} \frac{\kappa!}{\beta_1! \ldots \beta_\ell!} (N r h_1)^{|\kappa|} |\alpha|!^{s-1} \\ &\leq |\alpha|!^s C h^{|\alpha|} \sum_{\mathcal{S}_\alpha} \frac{\kappa!}{\beta_1! \ldots \beta_\ell!} (N r h_1)^{|\kappa|}. \end{aligned}$$

Agora usamos a Proposição 2.2.7 que nos garante a existência de constantes positivas R, D que dependem somente de r, h_1 e N e satisfazem

$$\sum_{\mathcal{S}_\alpha} \frac{\kappa!}{\beta_1! \ldots \beta_\ell!} (N r h_1)^{|\kappa|} \leq R D^{|\alpha|}.$$

E, desta forma, conseguimos

$$|\partial^\alpha(F \circ H|_{\mathcal{W}}^{-1})(z)| \leq C R (D h)^{|\alpha|} |\alpha|!^s,$$

e constatamos que $f \in G^{s,h_2}(\overline{V};\mathrm{M})$ onde $h_2 = Dh$.

Consideremos agora $f \in G^{s,h_2}(\overline{V};\mathrm{M})$. Sabemos que existe $F \in G^s(\mathbb{C}^N)$ tal que $f|_V = F \circ Z|_V$ e $\overline{\partial} F \sim 0$ em $Z(V)$ e calculando $\mathrm{M}^\kappa f(x) = \partial^\kappa F(Z(x))$ conseguimos que $|\partial^\kappa F| \leq C h_2^{|\kappa|}|\kappa|!^s$ onde novamente ∂^κ só leva em conta ∂_z. Agora usamos que Z é Gevrey de ordem s e, consequentemente, existem r, h tais que $|\partial^\delta Z(x)| \leq r h^{|\delta|}|\delta|!^s$ e também usamos que $\partial^\alpha f(x) = \partial^\alpha(F \circ Z)$para aplicar o mesmo processo acima para conseguir h_3. □

2.3 Ultradistribuições segundo M.

Iremos agora discutir a construção do espaço das funções Gevrey segundo M de suporte compacto. Dada uma estrutura hipo-analítica $\mathfrak{T}$ e (U, Z) vamos definir, para todo $h > 0$ e todo aberto $V \subset\subset U$, os espaços de Banach $G_c^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) = G^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) \cap C_c^\infty(\overline{V})$. Observemos que se o bordo de V é suave e se $h < h_+$ temos que $G_c^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G_c^{s,h_+}(\overline{V};\mathrm{M})$ é compacta. Verifiquemos esta última afirmação. Como $G_c^{s,h_+}(\overline{V};\mathrm{M})$ é um fechado de $G^{s,h_+}(\overline{V};\mathrm{M})$ temos que a inclusão $G_c^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G_c^{s,h_+}(\overline{V};\mathrm{M})$ é compacta se, e somente se, a composta das inclusões $G_c^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s,h_+}(\overline{V};\mathrm{M})$ é compacta. Sejam $\iota_1 : G_c^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M})$ e $\iota_2 : G^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s,h_+}(\overline{V};\mathrm{M})$ e como ι_1 é contínua e ι_2 é compacta temos que $\iota_2 \circ \iota_1$ é compacta.

Escolhemos h_k uma sequência crescente de números reais positivos $h_k \longrightarrow \infty$ e uma exaustão de U por abertos V_j com bordo suave satisfazendo $V_j \subset\subset V_{j+1}$. E assim definimos

$$G_c^s(\overline{V}_j;\mathrm{M}) = \liminds_{k \longrightarrow \infty} G_c^{s,h_k}(\overline{V}_j;\mathrm{M}), \tag{2.17}$$

$$G_c^s(U;\mathrm{M}) = \liminds_{j \longrightarrow \infty} G_c^s(\overline{V}_j;\mathrm{M}). \tag{2.18}$$

Desta forma $f \in G_c^s(U;\mathrm{M})$ se, e somente se, existem $V \subset\subset U$ e $h > 0$ tais que $f \in G_c^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M})$. Temos que os espaços $G_c^s(\overline{V}_j;\mathrm{M})$ são espaços DFS, consequentemente, $G_c^s(U;\mathrm{M})$ é o limite indutivo de espaços DFS e também é DFS. Novamente os limites indutivos não dependem da escolha de h_k e V_j.

Provamos na Proposição 2.2.8 que $G^s(U;\mathrm{M})$ e $G^s(U)$ são isomorfos se $\mathfrak{T}$ é uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s. O isomorfismo é dado pela inclusão e esta leva funções de suporte compacto em funções de suporte compacto donde é claro que nestas condições $G_c^s(U;\mathrm{M})$ e $G_c^s(U)$ são iguais como conjuntos. Além disso, na parte principal da demonstração provamos que, dado $V \subset\subset U$ e dado $h_1 > 0$, existem h_2 e h_3 tais que $G^{s,h_1}(\overline{V}) \subset G^{s,h_2}(\overline{V};\mathrm{M}) \subset G^{s,h_3}(\overline{V})$ o que implica que $G_c^{s,h_1}(\overline{V}) \subset G_c^{s,h_2}(\overline{V};\mathrm{M}) \subset G_c^{s,h_3}(\overline{V})$ provando que $G_c^s(U;\mathrm{M})$ e $G_c^s(U)$ são isomorfos.

Podemos aprimorar a Proposição 2.2.8 e concluir que o isomorfismo vale globalmente no domínios da carta hipo-analítica.

Proposição 2.3.1. *Seja $\mathfrak{T}$ uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem $s > 1$ de coposto nulo. Dada $(U, Z) \in \mathfrak{T}$ uma carta hipo-analítica temo que $G^s(U)$ e $G^s(U;\mathrm{M})$ são isomorfos.*

Demonstração. Seja $V \subset\subset U$ um aberto. Graças à Proposição 2.2.8, podemos achar $W_1, \ldots W_\ell$ abertos tais que $V \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} W_j \subset U$ e tais que $G^s(W_j)$ e $G^s(W_j;\mathrm{M})$ são isomorfos. Podemos considerar $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\ell$ uma partição da unidade de classe G^s subordinada a $U \setminus V, W_1, \ldots, W_\ell$. Assim, dada $f \in G^s(U)$ podemos escrever $f = \varphi_0 f + \varphi_1 f + \cdots \varphi_\ell f$. Como cada $(\varphi_j f)|_{\overline{V}} \in G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ temos que $f|_{\overline{V}} \in G^s(\overline{V};\mathrm{M})$. O mesmo argumento prova que, dada $f \in G^s(U;\mathrm{M})$, temos que $f \in G^s(U)$. Por fim, todas as questões referentes à topologia podem ser respondidas provando que $G^s(\overline{V})$ e $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$ são isomorfos. O procedimento acima nos diz que um net converge em $G^s(\overline{V})$ se, e somente se, este converge em $G^s(\overline{V};\mathrm{M})$. O que conclui a prova. □

Uma sequência converge em $G_c^s(U;\mathrm{M})$ se, e somente se, existem k e j tais que a sequência pertence a $G_c^{s,h_k}(\overline{V}_j;\mathrm{M})$ e converge neste espaço. Isto pode ser escrito do seguinte modo: uma sequência em f_ν em $G_c^s(U;\mathrm{M})$ converge para 0 se, e somente se, existem $j, k \in \mathbb{Z}_+$ tais que $f_\nu \in G_c^{s,h_k}(\overline{V}_j;\mathrm{M})$ e $f_\nu \longrightarrow 0$ em $G_c^{s,h_k}(\overline{V}_j;\mathrm{M})$, isto é equivalente a pedir que a existência de V_j tal que

$\operatorname{supp} f_\nu \subset V_j$ para todo $\nu \in \mathbb{Z}_+$ e de $h_k > 0$ com a propriedade que, para todo $\epsilon > 0$, existe ν_0 tal que se $\nu > \nu_0$, então vale que

$$\|f_\nu\|_{\overline{V}_j, h_k} \leq \epsilon.$$

Definiremos o espaço das ultradistribuições de ordem s segundo M como o dual topológico forte de $G_c^s(U; \mathrm{M})$, isto é, $\mathcal{D}_s'(U; \mathrm{M})$ é o espaço dos funcionais lineares e contínuos $u : G_c^s(U; \mathrm{M}) \longrightarrow \mathbb{C}$, isto é, temos que, para todo $K \subset U$ compacto e $h > 0$ existe C_h tal que

$$|u(\varphi)| \leq C_h \sup_\alpha \left\{ \frac{h^{-|\alpha|}}{|\alpha|!^s} \sup_K |\mathrm{M}^\alpha \varphi| \right\} \tag{2.19}$$

para toda $\varphi \in G_c^s(K; \mathrm{M})$, note que o lado direito deve ser entendido como infinito quando φ não pertence a $G_c^{s,h}(K; \mathrm{M})$. Consideramos em $\mathcal{D}_s'(U; \mathrm{M})$ a topologia dual forte e com esta topologia $\mathcal{D}_s'(U; \mathrm{M})$ é um espaço FS.

Observação 2.3.2. Como observamos anteriormente espaços FS e DFS são espaços de Montel, logo, $G_c^s(U; \mathrm{M})$ é um espaço de Montel. Usaremos o seguinte resultado sobre convergência no dual de um espaço de Montel:

Proposição 2.3.3. *Seja E um espaço de Montel e seja E' seu dual. Então toda sequência que converge fracamente em E', converge também na topologia forte.*

Uma demonstração desta proposição pode ser encontrada no livro [Tre06] de Treves. Em particular, este resultado nos diz que para verificar a convergência de uma sequência de ultradistribuições u_j para uma outra ultradistribuição u basta mostrar que $u_j(\varphi)$ converge para $u(\varphi)$ para toda $\varphi \in G_c^s(U; \mathrm{M})$.

Dada uma função $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ podemos definir uma ultradistribuição segundo M da seguinte maneira

$$G_c^s(U; \mathrm{M}) \ni \varphi \mapsto \int f(x)\varphi(x) \mathrm{d}Z(x) \tag{2.20}$$

e assim $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ pode ser considerado com um subespaço de $\mathcal{D}_s'(U; \mathrm{M})$. Definimos a ação dos campos M em $u \in \mathcal{D}_s'(U; \mathrm{M})$ por

$$\mathrm{M}_j u(\varphi) = -u(\mathrm{M}_j \varphi),$$

para toda $\varphi \in G_c^s(U; \mathrm{M})$. Notemos que dada $f \in C^\infty(U)$ podemos aplicar M_j em f no sentido de ultradistribuições acima e o que obtemos é exatamente a ultradistribuição definida pela função $\mathrm{M}_j f$ e por esse motivo é importante considerarmos a medida $\mathrm{d}Z$ em (2.20).

O espaço das ultradistribuições de ordem s segundo M de suporte compacto é o dual topológico de $G^s(U; \mathrm{M})$ e será denotado por $\mathcal{E}_s'(U; \mathrm{M})$. Assim $u \in \mathcal{E}_s'(U; \mathrm{M})$ se, e somente se, existe K um compacto tal que para todo $\epsilon > 0$ existe C_ϵ tal que

$$|u(\varphi)| \leq C_\epsilon \sup_\alpha \left\{ \frac{\epsilon^{|\alpha|}}{|\alpha|!^s} \sup_K |\mathrm{M}^\alpha \varphi| \right\} \tag{2.21}$$

para toda $\varphi \in G^s(U; \mathrm{M})$.

Assumindo que $G_c^s(U; \mathrm{M})$ é um subespaço denso de $G^s(U; \mathrm{M})$, podemos identificar $\mathcal{E}_s'(U; \mathrm{M})$ como um subespaço de $\mathcal{D}_s'(U; \mathrm{M})$ formado pelas ultradistribuições segundo M de suporte compacto. Note que, sem a hipótese de que $\mathfrak{T}$ é uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s, não sabemos quando $G_c^s(U; \mathrm{M})$ é um subespaço denso de $G^s(U; \mathrm{M})$. Entretanto, sob esta hipótese, a Proposição 2.3.1 nos diz que $G^s(U; \mathrm{M})$ e $G^s(U)$ são iguais como conjuntos e isomorfos como espaços topológicos e este isomorfismo se restringe a um isomorfismo entre $G_c^s(U; \mathrm{M})$ e $G_c^s(U)$ donde concluímos que $G_c^s(U; \mathrm{M})$ é denso em $G^s(U; \mathrm{M})$.

Capítulo 3

Operadores ultradiferenciais

3.1 O símbolo de um operador ultradiferencial

O espaço das funções Gevrey possui uma topologia que nos permite considerar operadores lineares de ordem infinita. Os operadores de ordem infinita que iremos considerar são lineares, contínuos sobre o espaço das funções reais-analíticas e locais. Os operadores ultradiferenciais de classe $(p!^s)$, definidos abaixo, podem ser estendidos continuamente para todo espaço G^{s_0} com $s_0 < s$ e existem operadores desta classe que não possuem extensão como um operador de G^s em G^s. Entretanto, é possível definir a ação destes operadores em G^s de modo que sua imagem cai em um espaço maior do que o espaço das ultradistribuições de ordem s e é justamente isto o que permite o teorema de representação e, para clarificar esta afirmação, vamos detalhar várias propriedades dos operadores de ordem infinita que iremos trabalhar.

Definição 3.1.1 (Símbolo de um operador ultradiferencial). *Uma função inteira $P : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita um símbolo de um operador ultradiferencial de classe $(p!^s)$ se existem constantes $L > 0$ e $C > 0$ tais que P pode ser escrito na forma*

$$P(\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha \zeta^\alpha \tag{3.1}$$

onde $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e satisfazem

$$|a_\alpha| \leq \frac{CL^{|\alpha|}}{|\alpha|!^s}, \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{Z}^N. \tag{3.2}$$

Por brevidade, vamos dizer que P é um símbolo de classe $(p!^s)$ e diremos que L é a constante associada a P.

Definição 3.1.2. *A função $M : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$M(\rho) = \sup_p \log \frac{\rho^p}{p!^s} \tag{3.3}$$

é chamada a função associada à sequência $(p!^s)$.

E a Proposição 4.5 do artigo de Komatsu [Kom73] nos diz que uma função inteira P é um símbolo de classe $(p!^s)$ se, e somente se, existem $L > 0$ e $C > 0$ tais que

$$|P(\zeta)| \leq Ce^{M(L|\zeta|)} \text{ para todo } \zeta \in \mathbb{C}^N. \tag{3.4}$$

Provamos na Proposição C.0.10 do apêndice que, quando $\rho^{1/s} \geq 2e$, vale a estimativa

$$\frac{s}{2e}\rho^{1/s} \leq M(\rho) \leq s\rho^{1/s} \tag{3.5}$$

e segue como consequência o seguinte resultado:

Proposição 3.1.3. *Uma função inteira $P : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ é um símbolo de classe $(p!^s)$ se, e somente se, existem $L > 0$ e $C > 0$ tais que vale*

$$|P(\zeta)| \leq Ce^{L|\zeta|^{1/s}} \text{ para todo } \zeta \in \mathbb{C}^N. \tag{3.6}$$

E assim obtemos uma condição mais simples de ser verificada e esta proposição junto com a desigualdade (1.16) nos diz que a função J definida em (1.2) composta com o símbolo de um operador diferencial de ordem m nos dá um símbolo de classe $(p!^s)$. Além disso, esta proposição nos diz que os símbolos de classe $(p!^s)$ têm o crescimento limitado por uma exponencial em $|\zeta|^{1/s}$ e estaremos especialmente interessados em símbolos que satisfazem, pelo menos dentro de um cone, uma estimativa inferior para seu crescimento que também é de tipo exponencial em $|\zeta|^{1/s}$. Dado $\rho \in (0, 1)$, definimos o cone de abertura ρ por $\Gamma_\rho = \{\zeta \in \mathbb{C}^N : |\mathrm{Im}\zeta| \leq \rho|\mathrm{Re}\zeta|\}$.

Definição 3.1.4 (Condição $(\mathfrak{e})_s$). *Dizemos que um símbolo de classe $(p!^s)$, P, satisfaz a condição de elipticidade $(\mathfrak{e})_s$ se existem um cone Γ_ρ e constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$|P(i\zeta)| \geq c_1 \exp\{c_2|\zeta|^{1/s}\}, \quad \text{para todo } \zeta \in \Gamma_\rho, \tag{3.7}$$

ou de forma equivalente se existe $\gamma > 0$ tal que

$$|P(i\zeta)| \geq \frac{\gamma^p|\zeta|^p}{p!^s}, \tag{3.8}$$

para todo $p \in \mathbb{Z}_+$ e $\zeta \in \Gamma_\rho$.

Aproveitemos para analisar o que acontece quando multiplicamos dois símbolos.

Proposição 3.1.5. *Dados dois números reais s_1, s_2 ambos maiores que 1 consideremos P_1 e P_2 símbolos de classe $(p!^{s_1})$ e $(p!^{s_2})$, respectivamente. Então a função inteira Q definida por*

$$Q(\zeta) = P_1(\zeta)P_2(\zeta)$$

é de classe $(p!^{s'})$, onde $s' = \min\{s_1, s_2\}$. Ademais, se P_1 e P_2 satisfazem $(\mathfrak{e})_{s_1}$ e $(\mathfrak{e})_{s_2}$ em Γ_ρ, respectivamente, então Q satisfaz $(\mathfrak{e})_{s'}$ em Γ_ρ.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.3 existem $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, C_1 e $C_2 > 0$ tais que

$$|P_j(\zeta)| \leq C_je^{L_j|\zeta|^{1/s_j}}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N \text{ e } j = 1, 2.$$

E assim para ζ com $|\zeta| \geq 1$ temos a estimativa

$$\begin{aligned} |Q(\zeta)| &\leq C_1C_2e^{L_1|\zeta|^{1/s_1}+L_2|\zeta|^{1/s_2}} \\ &\leq C_1C_2e^{(L_1+L_2)|\zeta|^{1/s'}}. \end{aligned}$$

Como P_1 e P_2 são limitadas quando $|\zeta| \leq 1$ concluímos que Q é um símbolo de classe $(p!^{s'})$. Para provarmos que Q satisfaz a condição $(\mathfrak{e})_{s'}$ vamos supor, por simplicidade, que $s' = s_1$. Como P_2 satisfaz a condição $(\mathfrak{e})_{s_2}$ existe $c_2 > 0$ tal que $|P_2(i\zeta)| \geq c_2$ para todo $\zeta \in \Gamma_\rho$. Se $c_1 > 0$ é tal que $|P_1(i\zeta)| \geq c_1e^{c_1|\zeta|^{1/s_1}}$ para todo $\zeta \in \Gamma_\rho$, então temos que

$$\begin{aligned} |Q(i\zeta)| &= |P_1(i\zeta)||P_2(i\zeta)| \\ &\geq c_2c_1e^{c_1|\zeta|^{1/s_1}}, \end{aligned}$$

o que nos diz que Q satisfaz $(\mathfrak{e})_{s_1}$ em Γ_ρ como queríamos. $\square$

Observação 3.1.6 ("Ordem" nos símbolos (parte I)). No estudo das funções Gevrey sempre existem certas ordens que são preservadas. Por exemplo, se U é um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $1 < s' < s$, então

$C^\omega(U) \subset G^{s'}(U) \subset G^s(U)$ e $\mathcal{D}'_s(U) \subset \mathcal{D}'_{s'}(U)$ e os espaços de ultradistribuições ainda podem ser vistos como subespaços dos espaços das hiperfunções. Um questionamento natural é o seguinte: qual é a ordem que o espaço dos símbolos possuem?

A Proposição 3.1.3 nos permite responder esta pergunta facilmente, pois, $|\zeta|^{1/s} < |\zeta|^{1/s'}$ se $|\zeta| \geq 1$ e limitando $P(\zeta)$ quando $|\zeta| < 1$ concluímos, graças à Proposição 3.1.3, que todo símbolo de classe $(p!^s)$ é também um símbolo de classe $(p!^{s'})$. E para os leitores familiares com hiperfunções temos que todos os operadores ultradiferenciais são operadores hiperdiferenciais. Uma forma mnemônica de relacionar esta classe de operadores é:

$$(p!^s) \subsetneq \cdots \subsetneq (p!^{s_0}) \subsetneq \cdots \subsetneq (p!^{s_1}) \subsetneq \cdots$$

sempre que $s > s_0 > s_1 > 1$.

O fato que um símbolo de classe $(p!^s)$ pode ser de classe $(p!^{s'})$ para diferentes s' pode passar a impressão que existe alguma ponta solta no sentido que até o momento não apontamos quais operadores em $(p!^s)$ nos dão informações relavantes sobre G^s e $\mathcal{D}'_s$. Entretanto, é fácil ver que os operadores $(p!^s)$ que satisfazem a condição $(\mathfrak{c})_s$ não podem ser de classe $(p!^{\tilde{s}})$ para $\tilde{s} > s$ e são estes os operadores que capturam as propriedades das funções e ultradistribuições Gevrey de ordem s.

3.1.1 A ação de operadores ultradiferenciais

Dado um símbolo de classe $(p!^s)$ definimos um operador ultradiferencial de classe $(p!^s)$ por

$$P(\mathrm{M}) = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha \mathrm{M}^\alpha. \tag{3.9}$$

Caetano e Cordaro provaram em [CC11] o seguinte Lema:

Lema 3.1.7. *Seja $\mathfrak{T}$ uma estrutura hipo-analítica em Ω e fixe uma carta hipo-analítica $(U, Z) \in \mathfrak{T}$. Dado P um símbolo de classe $(p!^s)$ seja L uma constante tal que vale (3.2), então temos que, para todo $h \leq (2^{s+1}L)^{-1}$, o símbolo P define um operador linear contínuo*

$$P(\mathrm{M}) : G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s,2^s h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \tag{3.10}$$

para todo aberto $V \subset\subset U$.

A ação de $P(\mathrm{M})$ em uma função em $g \in G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ é definida da seguinte forma:

$$P(\mathrm{M})g(x) = \lim_{\ell \longrightarrow \infty} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq \ell} a_\alpha \big(\mathrm{M}^\alpha g(x)\big). \tag{3.11}$$

Note que se g é identicamente nula em um aberto, então $P(\mathrm{M})g$ também é identicamente nula neste aberto e, consequentemente, temos que $P(\mathrm{M}) : G_c^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \longrightarrow G_c^{s,2^s h}(\overline{V}; \mathrm{M})$.

Observemos também que se P é um símbolo de classe $(p!^s)$ podemos definir outros símbolos de classe $(p!^s)$ simplesmente considerando $P_r(\zeta) = P(r\zeta)$ para $r > 0$. Dado um $h > 0$ esta construção nos permite escolher r tal que

$$P_r(\mathrm{M}) : G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s,2^s h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \tag{3.12}$$

é um operador linear contínuo para todo $V \subset\subset U$ e para isto o Lema 3.1.7 nos diz que basta escolher r tal que vale $h < (2^{s+1}rL)^{-1}$, onde L é a constante associada a P como em (3.2).

Para estendermos a ação dos operadores ultradiferenciais para ultradistribuições vamos precisar do seguinte lema:

Lema 3.1.8. *Fixemos $1 < s_0 < s$. Consideremos $\mathfrak{T}$ uma estrutura hipo-analítica (não necessariamente Gevrey), uma carta hipo-analítica $(U, Z) \in \mathfrak{T}$ e P é um símbolo de classe $(p!^s)$. Então o operador $P(\mathrm{M}) : G^{s_0}(U; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s_0}(U; \mathrm{M})$ é linear contínuo.*

Demonstração. Seja $f \in G^{s_0}(U; \mathrm{M})$. Para todo $V \subset\subset U$ aberto existe uma constante $h > 0$ tal que

$$\sup_{\overline{V}} |\mathrm{M}^\beta f| \leq \|f\|_{\overline{V},h} h^{|\beta|} |\beta|!^{s_0} \tag{3.13}$$

aqui $\|\cdot\|_{\overline{V},h}$ é a norma em $G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$. Sejam C e L constantes para as quais os coeficientes de P satisfazem a equação (3.2). Conseguimos a seguinte majoração

$$\begin{aligned}
\sup_{\overline{V}} |\mathrm{M}^\alpha P(\mathrm{M}) f| &= \sup_{\overline{V}} \Big| \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N} a_\gamma \mathrm{M}^{\alpha+\gamma} f \Big| \\
&\leq \sup_{\overline{V}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N} |a_\gamma| \Big| \mathrm{M}^{\alpha+\gamma} f \Big| \\
&\leq \|f\|_{\overline{V},h} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N} |a_\gamma| h^{|\alpha+\gamma|} |\alpha+\gamma|!^{s_0} \\
&\leq \|f\|_{\overline{V},h} C \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N} L^{|\gamma|} h^{|\alpha+\gamma|} \frac{|\alpha+\gamma|!^{s_0}}{|\gamma|!^s} \\
&\leq \|f\|_{\overline{V},h} C h^{|\alpha|} \Bigg[\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N} \frac{L^{|\gamma|} h^{|\gamma|}}{|\gamma|!^{s-s_0}} \left(\frac{|\alpha+\gamma|!}{|\gamma|!|\alpha|!} \right)^{s_0} \Bigg] |\alpha|!^{s_0}.
\end{aligned}$$

Como $|\alpha+\gamma|!/(|\alpha|!|\gamma|!) \leq 2^{|\alpha+\gamma|}$, escolhemos s_1 satisfazendo $s > s_1 > s_0$ e achamos ℓ tal que o quociente $(L2^{s_0}h)^{|\gamma|}/|\gamma|!^{s-s_1} < 1$ para todo $|\gamma| \geq \ell$ e denotamos $C' = \sup(L2^{s_0}h)^{|\gamma|}/|\gamma|!^{s-s_1}$ para $|\gamma| < \ell$ e estimamos

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N} \frac{(L2^{s_0}h)^{|\gamma|}}{|\gamma|!^{s-s_0}} \leq C' + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N \\ |\gamma| \geq \ell}} \frac{1}{|\gamma|!^{s_1-s_0}} \leq C''.$$

Concluímos que

$$\sup_{\overline{V}} |\mathrm{M}^\alpha P(\mathrm{M}) f| \leq \|f\|_{\overline{V},h} C C'' (2^{s_0} h)^{|\alpha|} |\alpha|!^{s_0} \tag{3.14}$$

e, portanto, $P(\mathrm{M})f \in G^{s_0}(U; \mathrm{M})$ e vale que

$$\|P(\mathrm{M})f\|_{\overline{V},2^{s_0}h} \leq CC'' \|f\|_{\overline{V},h}. \tag{3.15}$$

E isto prova a continuidade de $P : G^{s_0,h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s_0,2^{s_0}h}(\overline{V}; \mathrm{M})$. Vamos agora discutir como isto garante a continuidade de $P : G^{s_0}(U; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s_0}(U; \mathrm{M})$. Dada $V_\ell \subset\subset U$ uma exaustão de U por abertos com bordo suave, a condição (2.12) nos diz que a continuidade de P é equivalente à continuidade de $\rho|_{\overline{V_\ell}} \circ P : G^{s_0}(U; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s_0}(\overline{V_\ell}; \mathrm{M})$ para todo ℓ. Como P comuta com a restrição, basta provar a continuidade de $P : G^{s_0}(\overline{V_\ell}; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s_0}(\overline{V_\ell}; \mathrm{M})$ e, pela condição (2.9), isto é equivalente a provar que, para uma sequência crescente h_j de números reais positivos satisfazendo $h_j \longrightarrow \infty$, o operador $P : G^{s_0,h_j}(\overline{V}_\ell; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s_0}(\overline{V}_\ell; \mathrm{M})$ é contínuo. Entretanto, a continuidade da inclusão $G^{s_0,2^{s_0}h}(\overline{V}_\ell; \mathrm{M}) \hookrightarrow G^{s_0}(\overline{V}_\ell; \mathrm{M})$ nos garante que é suficiente provar que $P : G^{s_0,h}(\overline{V}_\ell; \mathrm{M}) \longrightarrow G^{s_0,2^{s_0}h}(\overline{V}_\ell; \mathrm{M})$ é contínua. □

Por fim, notemos que o fato que $P(\mathrm{M})$ preserva suporte implica na continuidade de $P(\mathrm{M})$ quando age em $G_c^{s_0}(U; \mathrm{M})$. De fato, lembremos que $P : G_c^{s_0}(U; \mathrm{M}) \longrightarrow G_c^{s_0}(U; \mathrm{M})$ é contínuo se, e somente se, $P : G_c^{s_0,h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \longrightarrow G_c^{s_0}(U; \mathrm{M})$ é contínuo para todo $h > 0$ e $V \subset\subset U$. Agora vemos que dada $f \in G_c^{s_0,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ segue da desigualdade (3.15) que $P : G_c^{s_0,h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \longrightarrow G_c^{s_0,2^{s_0}h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ é contínuo e, lembrando que a inclusão $G_c^{s_0,2^{s_0}h}(\overline{V}; \mathrm{M}) \hookrightarrow G_c^{s_0}(U; \mathrm{M})$ é contínua, provamos a continuidade de P. Por transposição, temos que ${}^tP(\mathrm{M}) : \mathcal{D}'_{s_0}(U; \mathrm{M}) \longrightarrow \mathcal{D}'_{s_0}(U; \mathrm{M})$ é contínuo e assim como sua restrição a $\mathcal{E}'_{s_0}(U; \mathrm{M})$. Note que ${}^tP(\mathrm{M}) = P(-\mathrm{M})$.

Observação 3.1.9 ("Ordem" nos símbolos (parte II))**.** É importante notar que os operadores ultradiferenciais de classe $(p!^s)$ têm uma propriedade muito especial, eles são contínuos para todo espaço G^{s_0} com $s_0 < s$ mas eles podem não ser contínuos em G^s. Os operadores P que são contínuos em G^s são precisamente os operadores cujo símbolo tem a propriedade que para todo $L > 0$ existe $C = C_L$ tal que (3.2) é satisfeita, quando o símbolo de um operador tem esta propriedade dizemos que ele é de classe $\{p!^s\}$. Por exemplo, os operadores definidos em (1.15) são de classe $\{p!^s\}$. É claro que todo operador de classe $\{p!^s\}$ é também de classe $(p!^s)$. Por outro lado, é fácil ver que se um operador é de classe $(p!^s)$ e satisfaz $(\mathfrak{e})_s$ não pode ser de classe $\{p!^s\}$.

Recordemos que as funções Gevrey usuais são uma classe particular de funções não-quase analíticas. Queremos destacar que as classes de Gevrey de ordem s usuais são também conhecidas como funções de Roumieu de classe $\{p!^s\}$ e existe uma outra classe de funções que também é fortemente relacionada com a sequência $p!^s$ as funções da classe $(p!^s)$, também conhecidas como as funções de Beurling associadas à sequência $p!^s$. Podemos definir o espaço das funções Gevrey de classe $(p!^s)$ segundo M definindo, para todo $h > 0$ e para todo $V \subset\subset U$, $G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ como fizemos em (2.2) e definimos $G^{(s)}(\overline{V}; \mathrm{M})$ como limite projetivo em h de $G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ e definimos $G^{(s)}(U; \mathrm{M})$ como o limite projetivo de $G^{(s)}(\overline{V}; \mathrm{M})$ quando V percorre uma exaustão de U com fronteira suave. Em poucas palavras, $G^{(s)}(U; \mathrm{M})$ é o espaço das funções $C^\infty(U)$ que satisfazem (2.2) para todo $h > 0$ e todos os compactos de U.

Podemos generalizar o Lema 3.1.8 e provar que os operadores de classe $(p!^s)$ são contínuos em $G^{(s)}(U; \mathrm{M})$, basta fazer uma releitura do Lema 3.1.7. É um exercício provar que $G^{s'}(U; \mathrm{M}) \subsetneq G^{(s)}(U; \mathrm{M}) \subsetneq G^s(U; \mathrm{M})$ para todo $s' < s$. Voltando para a forma mnemônica de relacionar operadores de diferentes classes agora incluindo os operadores de classe $\{p!^s\}$ temos a seguinte "ordem":

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \subsetneq & \{p!^s\} & \subsetneq & (p!^s) & \subsetneq \cdots \subsetneq & \{p!^{s_0}\} & \subsetneq & (p!^{s_0}) & \subsetneq \cdots \\ \cdots \supsetneq & G^s(U; \mathrm{M}) & \supsetneq & G^{(s)}(U; \mathrm{M}) & \supsetneq \cdots \supsetneq & G^{s_0}(U; \mathrm{M}) & \supsetneq & G^{(s_0)}(U; \mathrm{M}) & \supsetneq \cdots \end{array}$$

onde $1 < s_0 < s$ e alinhamos os operadores com o maior espaço onde são contínuos. Um caso interessante são os operadores de classe $\{p!\}$ que são contínuos no espaço das funções reais-analíticas, mas não são obrigatoriamente contínuos em algum espaço de funções Gevrey. Estes são os símbolos que definem os operadores hiperdiferenciais e podemos estender sua ação para hiperfunções. Para os leitores interessados em representações de hiperfunções as referências mais próximas deste trabalho são Cordaro [Cor00] e Kaneko [Kan72].

Capítulo 4

Representação de ultradistribuições segundo M.

4.1 O teorema de representação

Seja $\mathfrak{T}$ uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s_0 e fixemos $\rho \in (0,1)$. Fixemos um ponto em Ω o qual chamaremos de origem. Escolhemos $(U, Z) \in \mathfrak{T}$ onde U é uma vizinhança da origem e vamos admitir que estamos trabalhando em coordenadas onde podemos escrever $Z(x) = x + i\Phi(x)$ com Φ satisfazendo (2.16). Além disso, será necessário supor que

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \frac{\rho}{2}|x - y|, \tag{4.1}$$

para todo $x, y \in U$, o que é sempre possível reduzindo U em torno da origem, pois, $D(\Phi)(0) = 0$.

Teorema 4.1.1. *Sejam ρ real positivo, $\mathfrak{T}$ uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s_0 e (U, Z) uma carta hipo-analítica com as propriedades acima. Então, dados $s > s_0$ e P um símbolo de classe $(p!^s)$ que satisfaz a condição $(\mathfrak{c})_s$ em Γ_ρ, vale que, para toda $u \in \mathcal{E}'_s(U; \mathrm{M})$, existe $f \in G^s(U; \mathrm{M})$ tal que $u = P(\mathrm{M})f$.*

A demonstração é composta de duas partes. Na primeira parte acharemos uma função $f \in G^s(U; \mathrm{M})$ que será a nossa candidata a representante e na segunda parte verificaremos que, de fato, temos $P(\mathrm{M})f = u$. Antes, porém, vamos construir uma função que simplificará uma deformação de contorno que faremos no meio da demonstração. Sejam $x, y \in U$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$, o Teorema fundamental do cálculo nos diz que

$$\begin{aligned}
\big(\Phi(y) - \Phi(x)\big)\xi &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(\Phi(x - t(x-y))\xi\big)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{j=1}^N \Phi_j\big(x - t(x-y)\big)\xi_j\Big)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\big(x - t(x-y)\big)(x_k - y_k)\xi_j \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^N \Big(\sum_{j=1}^N \Big(\int_0^1 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\big(x - t(x-y)\big)\mathrm{d}t\Big)\xi_j\Big)(x_k - y_k).
\end{aligned}$$

Definimos então

$$\psi_j^k(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\big(x - t(x-y)\big)\mathrm{d}t$$

e $b_k(x,y,\xi) = \sum_{j=1}^N \psi_j^k(x,y)\xi_j$ e a função $b : U \times U \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ definida por $b = (b_1, \ldots, b_N)$ é Gevrey de ordem s com respeito a x e y e $b(x-y) = \big(\Phi(y) - \Phi(x)\big)\xi$, onde $b(x-y)$ denota o produto interno de $b(x,y,\xi)$ com $(x-y)$. Notemos que $|b| \leq (\rho/2)|\xi|$.

4.1.1 A existência de um representante.

Fixado $u \in \mathcal{E}'_s(U;\mathrm{M})$ temos que existe $K \subset U$ um compacto tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe C_ϵ tal que

$$|u(\varphi)| \leq C_\epsilon \sup_\alpha \left\{ \frac{\epsilon^{|\alpha|}}{\alpha!^s} \sup_K |M^\alpha \varphi| \right\} \tag{4.2}$$

para toda $\varphi \in G^s(U;M)$. Para todo $\delta > 0$ fixado definimos uma função holomorfa na variável z por

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_y(e^{i(z-Z(y))\xi - \delta|\xi|^2})}{P(i\xi)} \mathrm{d}\xi \tag{4.3}$$

e, portanto, segue que a função

$$\begin{aligned} f_\delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_y(e^{i(Z(x)-Z(y))\xi - \delta|\xi|^2})}{P(i\xi)} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} u_y\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{i(Z(x)-Z(y))\xi - \delta|\xi|^2}}{P(i\xi)} \mathrm{d}\xi \bigg) \end{aligned}$$

está em $G^{s_0}(U;\mathrm{M})$.

Nosso primeiro passo será provar que existe $C > 0$ tal que, dado $W \subset\subset U$ aberto, $(f_\delta)|_{\overline{W}}$ é uniformemente limitada em $G^{s,C}(\overline{W};\mathrm{M})$, em outras palavras, existe R uma constante positiva, dependendo de W, tal que para todo multi-índice $\lambda \in \mathbb{Z}_+^N$, as derivadas

$$\mathrm{M}_x^\lambda f_\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} u_y\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(i\xi)^\lambda e^{i(Z(x)-Z(y))\xi - \delta|\xi|^2}}{P(i\xi)} \mathrm{d}\xi \bigg) \tag{4.4}$$

satisfazem

$$|\mathrm{M}_x^\lambda f_\delta(x)| \leq R C^{|\lambda|} |\lambda|!^s \tag{4.5}$$

para todo $x \in \overline{W}$ e todo δ. Podemos então usar a estimativa (4.2) para conseguir

$$\begin{aligned} |\mathrm{M}_x^\lambda f_\delta(x)| &= \frac{1}{(2\pi)^N} \left| u_y\bigg(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(i\xi)^\lambda e^{i(Z(x)-Z(y))\xi - \delta|\xi|^2}}{P(i\xi)} \mathrm{d}\xi \bigg) \right| \\ &\leq \frac{C_\epsilon}{(2\pi)^N} \sup_\alpha \left\{ \frac{\epsilon^{|\alpha|}}{\alpha!^s} \sup_{y \in K} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(-1)^{|\alpha|}(i\xi)^{\lambda+\alpha} e^{i(Z(x)-Z(y))\xi - \delta|\xi|^2}}{P(i\xi)} \mathrm{d}\xi \right| \right\}. \end{aligned}$$

Agora fazemos a deformação $\xi \mapsto \zeta \doteq \xi + ib$ e obtemos

$$\begin{aligned} |\mathrm{M}_x^\lambda f_\delta(x)| &\leq \frac{C_\epsilon}{(2\pi)^N} \sup_\alpha \left\{ \frac{\epsilon^{|\alpha|}}{\alpha!^s} \sup_{y \in K} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\zeta^{\lambda+\alpha} e^{i(Z(x)-Z(y))\zeta - \delta\langle\zeta\rangle^2}}{P(i\zeta)} \Delta(x,y) \mathrm{d}\xi \right| \right\} \\ &\leq \frac{C_\epsilon}{(2\pi)^N} \sup_\alpha \left\{ \sup_{y \in K} \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta|^\lambda \frac{(\epsilon|\zeta|)^{|\alpha|}}{\alpha!^s} \frac{|e^{i(Z(x)-Z(y))\zeta - \delta\langle\zeta\rangle^2}|}{|P(i\zeta)|} |\Delta(x,y)| \mathrm{d}\xi \right\}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $\Delta(x,y)$ é o determinante jacobiano da transformação $\xi \mapsto \xi + ib$.

Analisemos os termos dentro da integral separadamente. Consideremos primeiro o expoente $i(Z(x) - Z(y))\zeta - \delta\langle\zeta\rangle^2$. A parte independente de δ é

$$\begin{aligned} i\big(Z(x) - Z(y)\big)(\xi + ib) &= i(x-y)\xi - b(x-y) - \big(\Phi(x) - \Phi(y)\big)\xi - i(\Phi(x) - \Phi(y))b \\ &= i(x-y)\xi - i(\Phi(x) - \Phi(y))b, \end{aligned}$$

aqui usamos que $b(x-y) = (\Phi(y) - \Phi(x))\xi$ e neste ponto fica claro que construímos a função b para obtermos que a parte real deste termo é nula. Já o termo dependente de δ pode ser reescrito como

$$-\delta\Big\langle \xi + ib \Big\rangle^2 = -\delta(|\xi|^2 - |b|^2 + i2b\xi)$$

e sua parte real pode ser estimada por

$$-\delta|\xi|^2 + \delta|b|^2 \leq -\delta(1 - \rho^2/4)|\xi|^2) \leq 0$$

donde temos que $|e^{i(Z(x)-Z(y))\zeta - \delta\langle\zeta\rangle^2}| \leq 1$.

Já para obtermos um limitante para o termo $(\epsilon|\zeta|)^{|\alpha|}/\alpha!^s$ usamos a desigualdade (A.4) do Apêndice e conseguimos

$$\frac{(\epsilon|\zeta|)^{|\alpha|}}{\alpha!^s} \leq e^{sN\epsilon^{1/s}|\zeta|^{1/s}}.$$

Como o determinante jacobiano $\Delta(x,y)$ como, pela construção, b tem que seus coeficientes são funções limitadas de x e y, concluímos que existe um limitante B, independente de x e y, tal que $|\Delta(x,y)| \leq B$.

Voltando para a estimativa (4.6) temos que

$$\begin{aligned}
|\mathrm{M}_x^\lambda f_\delta(x)| &\leq \frac{C_\epsilon}{(2\pi)^N} \sup_\alpha \sup_{y\in K} \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta|^{|\lambda|} \frac{(\epsilon|\zeta|)^{|\alpha|}}{\alpha!^s} \frac{|e^{i(Z(x)-Z(y))\zeta - \delta\langle\zeta\rangle^2}|}{|P(i\zeta)|} |\Delta(x,y)| \mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{C_\epsilon}{(2\pi)^N} \sup_{y\in K} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\zeta|^{|\lambda|}}{|P(i\zeta)|^{1/2}} \frac{e^{sN\epsilon^{1/s}|\zeta|^{1/s}}}{|P(i\zeta)|^{1/2}} B\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Como $|\mathrm{Im}\zeta| = |b| \leq (\rho/2)|\xi| \leq \rho|\xi| = \rho|\mathrm{Re}\zeta|$ temos que $\zeta \in \Gamma_\rho$ e para estimarmos $|\zeta|^\lambda/|P(i\zeta)|^{1/2}$ usamos a desigualdade (3.8) com $p = 2|\lambda|$ para obtermos que

$$\begin{aligned}
\frac{|\zeta|^{|\lambda|}}{|P(i\zeta)|^{1/2}} &\leq \frac{(2|\lambda|)!^{s/2}}{\gamma^{|\lambda|}} \\
&= \frac{|\lambda|!^s}{\gamma^{|\lambda|}} \binom{2|\lambda|}{|\lambda|}^{s/2} \leq \left(\frac{2^s}{\gamma}\right)^{|\lambda|} |\lambda|!^s.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Agora usamos a desigualdade (3.7), com $c = \min\{c_1, c_2\}$, para conseguir

$$\begin{aligned}
|\mathrm{M}_x^\lambda f_\delta(x)| &\leq B \frac{C_\epsilon}{(2\pi)^N} \left(\frac{2^s}{\gamma}\right)^{|\lambda|} |\lambda|!^s \sup_{y\in K} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{sN\epsilon^{1/s}|\zeta|^{1/s}}}{|P(i\zeta)|^{1/2}} \mathrm{d}\xi \right\} \\
&\leq \frac{B}{c^{1/2}} \frac{C_\epsilon}{(2\pi)^N} \left(\frac{2^s}{\gamma}\right)^{|\lambda|} |\lambda|!^s \sup_{y\in K} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{sN\epsilon^{1/s}|\zeta|^{1/s} - (c/2)|\zeta|^{1/s}} \mathrm{d}\xi \right\} && (4.8) \\
&\leq \frac{B}{c^{1/2}} \frac{C_\epsilon}{(2\pi)^N} \left(\frac{2^s}{\gamma}\right)^{|\lambda|} |\lambda|!^s \int_{\mathbb{R}^n} e^{sN\epsilon^{1/s}(1+\rho)^{1/s}|\xi|^{1/s} - (c/2)(1-\rho)^{1/s}|\xi|^{1/s}} \mathrm{d}\xi && (4.9)
\end{aligned}$$

e se ϵ é escolhido pequeno o suficiente o lado direito é integrável. Seja $C = 2^s/\gamma$. O que provamos é que, para todo $W \subset\subset U$ aberto, $(f_\delta)|_{\overline{W}}$ é um conjunto de funções em $G^{s,C}(\overline{W};\mathrm{M})$ que são uniformemente limitadas. Agora invocamos a Proposição 2.1.8 que nos garante a existência de uma subsequência, f_{δ_j}, de f_δ e de uma função $f \in G^s(U;\mathrm{M})$ tais que f_{δ_j} converge para f em $G^s(U;\mathrm{M})$.

4.1.2 Representação de uma ultradistribuição.

Definimos $\mathscr{E}_\delta[u]$ por

$$\mathscr{E}_\delta[u](x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} u_y\big(e^{i(Z(x)-Z(y))\xi}\big)e^{-\delta|\xi|^2}\mathrm{d}\xi. \tag{4.10}$$

Assim temos um conjunto de funções G^{s_0}. Vamos provar que toda subsequência de $\mathscr{E}_\delta[u]$ converge em $\mathcal{D}'_s(U;\mathrm{M})$ para u. Seja $\varphi \in G^s_c(U;\mathrm{M})$ então temos

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\delta[u](\varphi) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} u_y\big(e^{i(Z(x)-Z(y))\xi}\big)e^{-\delta|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\right]\varphi(x)\mathrm{d}Z(x)\\ &= u_y\bigg(\int_\Omega \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(Z(x)-Z(y))\xi}e^{-\delta|\xi|^2}\varphi(x)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}Z(x)\bigg).\end{aligned}$$

Calculando o limite dos dois lados vemos que

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\mathscr{E}_\delta[u](\varphi) = u(\varphi) \tag{4.11}$$

onde usamos o resultado de aproximação (Proposição B.0.9 do Apêndice) que nos diz que

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\int_U \frac{1}{(2\pi)^N}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(Z(x)-Z(y))\xi}e^{-\delta|\xi|^2}\varphi(x)\mathrm{d}\xi\bigg)\mathrm{d}Z(x) = \varphi(y) \tag{4.12}$$

em $G^s(U;\mathrm{M})$. Isto junto com a Observação 2.3.2 nos diz que toda subsequência de $\mathscr{E}_\delta[u]$ converge para u em $\mathcal{D}'_s(U;\mathrm{M})$.

Agora notemos que como $f_{\delta_j} \in G^{s_0}(U;\mathrm{M})$ temos que a ação de $P(\mathrm{M})$ em $f_{\delta_j}(x)$ é dada por

$$\begin{aligned}P(\mathrm{M})f_{\delta_j}(x) &= P(\mathrm{M}_x)\bigg[\frac{1}{(2\pi)^N}u_y\bigg(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{e^{i(Z(x)-Z(y))\xi-\delta_j|\xi|^2}}{P(i\xi)}\mathrm{d}\xi\bigg)\bigg]\\ &= \frac{1}{(2\pi)^N}u_y\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(Z(x)-Z(y))\xi-\delta_j|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\bigg),\end{aligned}$$

isto é, $\mathscr{E}_{\delta_j}[u] = P(\mathrm{M})f_{\delta_j}$. A continuidade do operador $P(\mathrm{M})$ em $\mathcal{D}'_{s_0}(U;\mathrm{M})$ implica na convergência $P(\mathrm{M})f_{\delta_j} \longrightarrow P(\mathrm{M})f$ em $\mathcal{D}'_{s_0}(U;\mathrm{M})$ e, por outro lado, $P(\mathrm{M})f_{\delta_j} = \mathscr{E}_{\delta_j}[u] \longrightarrow u$ como os dois limites ocorrem $\mathcal{D}'_{s_0}(U;\mathrm{M})$ concluímos que $P(\mathrm{M})f = u$.

Observação 4.1.2. Com o intuito de simplificar os enunciados adiante sempre que dissermos que uma carta hipo-analítica tem *as propriedades do teorema de representação* estaremos admitindo fixados $1 < s_0 < s$, um número real $\rho \in (0,1)$, uma estrutura hipo-analítica $\mathfrak{T}$ Gevrey de ordem s_0 e que a carta hipo-analítica tem as propriedades listadas antes do Teorema 4.1.1.

Observação 4.1.3. No caso especial em que $Z_j = x_j$ para todo $j = 1,\dots,m$ conseguimos provar o teorema de representação enfraquecendo a hipótese de elipticidade. Podemos pedir que P satisfaça $(\mathfrak{e})_s$ apenas sobre $\mathbb{R}^N$, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|P(i\xi)| \geq c\exp\{c|\xi|^{1/s}\}, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

ou equivalentemente existe $\gamma > 0$ tal que

$$|P(i\xi)| \geq \frac{\gamma^p|\xi|^p}{p!^s}, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}_+.$$

Note que como $\Phi = 0$ a condição (4.1) é automaticamente satisfeita neste caso e que a deformação $\xi \mapsto \zeta$ não é necessária.

Observação 4.1.4 ("Ordem" nos símbolos (parte III))**.** Conforme discutimos na observação anterior os operadores de classe $(p!^s)$ que satisfazem a condição $(\mathfrak{e})_s$ não podem ser de classe $\{p!^s\}$ e entre outras coisas o teorema de representação nos diz que estes operadores não podem ser contínuos em $G^s(U;\mathrm{M})$ e é justamente esta descontinuidade que nos dá o teorema de representação.

O trabalho de Komatsu [Kom73] apresenta estes diferentes tipos de operadores ultradiferenciais, mas uma diferença que apareceu na tese de Caetano [Cae01] e no artigo de Caetano e Cordaro [CC11] é que estes utilizam operadores do classe $(p!^s)$ agindo em funções Gevrey de classe $\{p!^s\}$ e o que fizemos aqui é explorar esta ideia ao extremo. Se P é de classe $(p!^s)$ e satisfaz $(\mathfrak{e})_s$ então a imagem de $G^s(U;\mathrm{M})$ por P contém $\mathcal{D}'_s(U;\mathrm{M})$. Este problema apresenta uma assimetria entre funções de classe $\{p!^s\}$ e $(p!^s)$, no sentido de que é possível usar operadores de classe $(p!^s)$ para representar as ultradistribuições de classe $\{p!^s\}$ a partir de funções de classe $\{p!^s\}$, mas operadores de classe $\{p!^s\}$ são obrigatoriamente contínuos em $G^{(s)}(U;\mathrm{M})$ o que impede de usá-los para representarmos elementos de um espaço maior.

Capítulo 5

Outras propriedades dos operadores ultradiferenciais

5.1 O kernel de um operador ultradiferencial.

Em seu artigo [CC11], Caetano e Cordaro provaram o seguinte resultado[1] sobre o kernel de um operador ultradiferencial de classe $(p!^s)$:

Proposição 5.1.1. *Seja (U, Z) uma carta hipo-analítica com as propriedades do teorema de representação. Seja $\rho \in (0,1)$ definindo a abertura de um cone Γ_ρ, então, dada uma vizinhança da origem $V \subset U$, existe D uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^N$, com $Z^{-1}(D) \subset\subset V$, tal que, para todo P um símbolo de classe $(p!^s)$ com $s > s_0$ satisfazendo a condição $(\mathfrak{e})_s$ em Γ_ρ, vale a seguinte propriedade:*

- *Para toda $v \in C^\infty(V)$ satisfazendo $P(M)v = 0$ existe $G \in \mathcal{O}(D)$ tal que $v = G \circ Z$ em $Z^{-1}(D)$.*

Vamos provar que um resultado similar é válido para ultradistribuições segundo M.

Proposição 5.1.2. *Seja (U, Z) uma carta hipo-analítica com as propriedades do teorema de representação. Seja $\rho \in (0,1)$ definindo a abertura de um cone Γ_ρ e seja s' um número real satisfazendo $s_0 < s' < s$. Então, dada uma vizinhança da origem $V \subset U$, existe D uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^N$, com $Z^{-1}(D) \subset\subset V$, tal que para todo P um símbolo de classe $(p!^s)$ satisfazendo a condição $(\mathfrak{e})_s$ em Γ_ρ vale a seguinte propriedade:*

- *Para toda $v \in \mathcal{D}'_{s'}(V; \mathrm{M})$ satisfazendo $P(M)v = 0$ existe $G \in \mathcal{O}(D)$ tal que $v = G \circ Z$ em $Z^{-1}(D)$.*

Demonstração. Seja $V \subset U$ uma vizinhança da origem e seja $W \subset\subset V$ outra vizinhança da origem. A Proposição 5.1.1, com W no lugar de V, nos garante que existe D uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^N$, com $Z^{-1}(D) \subset\subset W$, tal que, para todo $\tilde{P}$ um símbolo de classe $(p!^{s'})$ satisfazendo a condição $(\mathfrak{e})_{s'}$ em Γ_ρ, vale a seguinte propriedade:

- Para toda $v \in C^\infty(W)$ satisfazendo $\tilde{P}(M)v = 0$ existe $G \in \mathcal{O}(D)$ tal que $v = G \circ Z$ em $Z^{-1}(D)$.

Seja $\chi \in G_c^{s_0}(V; \mathrm{M})$ igual a 1 em $\overline{W}$ e Q um símbolo de classe $(p!^{s'})$ que satisfaz $(\mathfrak{e})_{s'}$ em Γ_ρ desta forma, dada $v \in \mathcal{D}'_{s'}(V; \mathrm{M})$ tal que $P(M)v = 0$, podemos representar o produto χv em V por $Q(M)f$ onde $f \in G^{s'}(V; \mathrm{M})$. Pela hipótese e pela escolha de χ temos que $P(\mathrm{M})Q(\mathrm{M})f = 0$ em W. Como o símbolo de PQ é de classe $(p!^{s'})$ e também satisfaz a condição $(\mathfrak{e})_{s'}$ em Γ_ρ, vale que $f = F \circ Z$ em $Z^{-1}(D)$, onde $F \in \mathcal{O}(D)$. Em $Z^{-1}(D)$, a representação nos permite escrever $v = Q(\mathrm{M})F \circ Z = (Q(\partial_z)F) \circ Z$. Portanto, se definirmos $G = Q(\partial_z)F$, vale que $v = G \circ Z$. $\square$

[1] Apesar dos autores terem enunciado uma versão mais simples da Proposição 5.1.1 uma análise cuidadosa da prova concede a versão mais forte aqui enunciada.

Notemos que esta proposição implica que os operadores ultradiferenciais que tem símbolos de classe $(p!^s)$ e satisfazem $(\mathfrak{e})_s$ possuem um tipo de G^s-hipoelipticidade no seguinte sentido:

Proposição 5.1.3. *Seja (U, Z) uma carta hipo-analítica com as propriedades do teorema de representação. Seja $\rho \in (0,1)$ definindo a abertura de um cone Γ_ρ e seja s' um número real satisfazendo $s_0 < s' < s$. Seja $V \subset\subset U$ vizinhança da origem. Então existe uma vizinhança aberta da origem $D \subset \mathbb{C}^N$ com $Z^{-1}(D) \subset\subset V$ tal que, se $v \in \mathcal{D}'_{s'}(V; \mathrm{M})$ é tal que $P(\mathrm{M})v \in \mathcal{D}'_s(V; M)$, então temos que $v \in G^s(Z^{-1}(D); \mathrm{M})$.*

Demonstração. Sejam $W \subset\subset V$ e $\chi \in G_c^{s_0}(V; \mathrm{M})$ igual a 1 em W. Pelo teorema de representação podemos achar $g \in G^s(V; \mathrm{M})$ tal que $\chi P(\mathrm{M})v = P(\mathrm{M})g$ e assim $P(\mathrm{M})(v - g) = 0$ em W e segue da Proposição 5.1.2 que existem D uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^N$ e uma função holomorfa $G \in \mathcal{O}(D)$ tal que $v = g + G \circ Z$ e consequentemente $v \in G^s(Z^{-1}(D); \mathrm{M})$. □

5.2 Representações usando funções de suporte compacto.

Notemos que o teorema de representação não nos garante nada sobre o suporte das funções Gevrey que usamos na representação de ultradistribuições de suporte compacto. Sejam P um operador ultradiferencial de classe $(p!^s)$ que satisfaz $(\mathfrak{e})_s$, $u \in \mathcal{E}'_s(U, \mathrm{M})$ e $g \in G^s(U; \mathrm{M})$ tais que $u = P(\mathrm{M})g$ em U. Para todo $V \subset\subset U$ aberto e toda função $\chi \in G_c^{s_0}(U; \mathrm{M})$ tal que $\chi = 1$ em V vale que $u|_V = P(\mathrm{M})(\chi g)|_V$. Para vermos isto basta verificar que ambos são iguais em toda $\varphi \in G_c^{s_0}(V; \mathrm{M})$.

Em outras palavras, mesmo não sabendo representar globalmente em U as ultradistribuições de suporte compacto por funções de suporte compacto, podemos representar em todo $V \subset\subset U$ aberto a restrição de qualquer $u \in \mathcal{D}'_s(U; \mathrm{M})$ usando uma função $g \in G_c^s(U; \mathrm{M})$ de tal modo que vale $u|_V = P(\mathrm{M})g|_V$.

Capítulo 6

Símbolos de classe $(p!^s)$.

6.1 As funções $Q_{s,r}$.

Dentre as funções que definem um operador ultradiferencial de classe $(p!^s)$ nosso principal exemplo são as funções inteiras $Q_{s,r}$, onde $r > 0$, definidas por

$$Q_{s,r}(\zeta) = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\langle r\zeta\rangle^2}{p^{2s}}\right). \tag{6.1}$$

Lembrando do Exemplo 1.2.2, a definição de $Q_{s,r}$ pode ser relida como $Q_{s,r}(\zeta) = J_\Delta(r\zeta)$.

Versões destas funções aparecem nos trabalhos de Kaneko [Kan72], Komatsu [Kom73], Cordaro [Cor00] e as funções acima aparecem na tese de Caetano [Cae01] e no artigo de Caetano e Cordaro [CC11].

Proposição 6.1.1. *A função inteira $Q_{s,r}$ é o símbolo de um operador ultradiferencial de classe $(p!^s)$.*

Demonstração. Definindo $J : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$J(z) = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{p^{2s}}\right),$$

temos pela Proposição 1.1.2 que existem $C > 0$ e $L > 0$ tais que

$$|J(z)| \le Ce^{L|z|^{1/2s}}.$$

E desta desigualdade é imediato que

$$\begin{aligned}|Q_{s,r}(\zeta)| &= |J(\langle -r\zeta\rangle^2)| \\ &\le Ce^{L|\langle r\zeta\rangle^2|^{1/2s}} \le Ce^{Lr^{1/s}|\zeta|^{1/s}}.\end{aligned}$$

□

Nos falta provar que estes operadores também satisfazem a propriedade $(\mathfrak{e})_s$.

Lema 6.1.2. *Dado $\rho \in (0,1)$ e definindo $\tilde\rho = \{(1-\rho^2)/(1+\rho^2)\}^{1/2}$ temos que*

$$|Q_{s,r}(i\zeta)| \ge \frac{r^p|\zeta|^p\tilde\rho^p}{p!^s} \tag{6.2}$$

para todo $p \in \mathbb{Z}_+$ e $\zeta \in \Gamma_\rho$ e também existe $C > 0$ tal que

$$|Q_{s,r}(i\zeta)| \ge \frac{C}{1+\tilde\rho^2}\exp\big\{\log(1+\tilde\rho^2)r^{1/s}|\zeta|^{1/s}\big\}. \tag{6.3}$$

Demonstração. Escrevendo $\zeta = \xi + i\eta$ temos, em Γ_ρ, que $\rho|\xi| \geq |\eta|$ e assim obtemos

$$\mathrm{Re}\langle\zeta\rangle^2 = |\xi|^2 - |\eta|^2 \geq (1-\rho^2)|\xi|^2 \geq \tilde{\rho}^2(1+\rho^2)|\xi|^2 \geq \tilde{\rho}^2|\zeta|^2. \tag{6.4}$$

Assim segue que, para todo $q \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} |Q_{s,r}(i\zeta)| &= \prod_{p=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{\langle r\zeta\rangle^2}{p^{2s}} \right| \\ &\geq \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2 \mathrm{Re}\langle\zeta\rangle^2}{p^{2s}} \right) \\ &\geq \prod_{p=1}^{q} \left(1 + \frac{\tilde{\rho}^2 r^2 |\zeta|^2}{p^{2s}} \right). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Usando que $a^2 + b^2 \geq ab$ para $a, b \in \mathbb{R}$, conseguimos

$$\begin{aligned} |Q_{s,r}(i\zeta)| &\geq \prod_{p=1}^{q} \left(1 + \frac{\tilde{\rho}^2 r^2 |\zeta|^2}{p^{2s}} \right) \\ &\geq \prod_{p=1}^{q} \frac{\tilde{\rho} r |\zeta|}{p^s} = \frac{(\tilde{\rho} r)^q |\zeta|^q}{q!^s}. \end{aligned}$$

Vamos provar agora a segunda desigualdade. Voltemos para (6.5) agora supondo que $r|\zeta| \geq 1$. Com esta hipótese existe um inteiro positivo $q = q(|\zeta|)$ tal que $q^s \leq r|\zeta| < (q+1)^s$. Concluímos assim que, para todo p tal que $1 \leq p \leq q$, vale que $r|\zeta| \geq p^s$ e consequentemente

$$|Q_{s,r}(i\zeta)| \geq (1+\tilde{\rho}^2)^q = \exp\{q \log(1+\tilde{\rho}^2)\}.$$

De $(q+1)^s > r|\zeta|$ segue que $q > r^{1/s}|\zeta|^{1/s} - 1$ donde vale

$$\begin{aligned} |Q_{s,r}(i\zeta)| &\geq \exp\big\{ \log(1+\tilde{\rho}^2)(r^{1/s}|\zeta|^{1/s} - 1) \big\} \\ &\geq \frac{1}{1+\tilde{\rho}^2} \exp\big\{ \log(1+\tilde{\rho}^2) r^{1/s}|\zeta|^{1/s} \big\} \end{aligned}$$

para todo $\zeta \in \Gamma_\rho$ tal que $r|\zeta| \geq 1$. Como $|Q_{s,r}(i\zeta)| \geq 1 + \tilde{\rho}^2 r^2 |\zeta|^2$ em Γ_ρ existe uma constante C tal que

$$|Q_{s,r}(i\zeta)| \geq \frac{C}{1+\tilde{\rho}^2} \exp\big\{ \log(1+\tilde{\rho}^2) r^{1/s}|\zeta|^{1/s} \big\} \text{ para todo } \zeta \in \Gamma_\rho. \qquad \square$$

Um resultado técnico que precisaremos adiante é a relação entre o espaço das ultradistribuições de ordem s_0 representadas por $Q_{s,r}$ e por $Q_{s,t}$ para r e t distintos. Seja (U, Z) a carta hipo-analítica com todas as propriedades do teorema de representação. Introduziremos a seguinte notação:

$$R_r(G_c^s) = \{u \in \mathcal{E}'_{s_0}(U; \mathrm{M}) : u = Q_{s,r}(\mathrm{M})g \text{ para algum } g \in G_c^s(U; \mathrm{M})\} \tag{6.6}$$

e

$$R_t(G^s) = \{u \in \mathcal{D}'_{s_0}(U; \mathrm{M}) : u = Q_{s,t}(\mathrm{M})g \text{ para algum } g \in G^s(U; \mathrm{M})\}. \tag{6.7}$$

Não é claro que $R_r(G_c^s) \subset R_t(G^s)$ para todo $r < t$. Entretanto, vamos provar que a inclusão é verdadeira se $Lr^{1/s}(1+\rho)^{1/s} < \frac{1}{2}\log(1+\tilde{\rho}^2)t^{1/s}(1-\rho)^{1/s}$ onde L é uma constante positiva tal que $|Q_{s,1}(\zeta)| \leq \tilde{C}e^{L|\zeta|^{1/s}}$. Consideremos $u \in R_r(G_c^s)$ representada por $Q_{s,r}(\mathrm{M})g$, nosso objetivo é repetir o final da prova do teorema de representação e tudo o que precisamos é conseguir uma sequência f_{ϵ_j} convergente em $G^s(U; \mathrm{M})$ tal que $Q_{s,t}(\mathrm{M})f_{\epsilon_j} = \mathcal{E}_{\epsilon_j}[u]$. Pela Proposição 2.1.8, nos basta provar que para todo $\overline{V} \subset U$ existe $h > 0$ tal que

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_y(e^{i(Z(x)-Z(y)\xi - \epsilon|\xi|^2})}{Q_{s,t}(i\xi)} \mathrm{d}\xi \tag{6.8}$$

é uniformemente limitada em $G^{s,h}(\overline{V}, \mathrm{M})$. Podemos reescrever as derivadas na forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_x^\lambda f_\epsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (i\xi)^\lambda \frac{u_y(e^{i(Z(x)-Z(y))\xi - \epsilon|\xi|^2})}{Q_{s,t}(i\xi)} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_V g(y) \bigg(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(i\xi)^\lambda Q_{s,r}(i\xi)}{Q_{s,t}(i\xi)} e^{i(Z(x)-Z(y))\xi - \epsilon|\xi|^2} \mathrm{d}\xi \bigg) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Aqui fazemos novamente a mudança de variável $\xi \mapsto \zeta = \xi + ib$, onde b é a mesma função usada no teorema de representação, e obtemos $|e^{i(Z(x)-Z(y))\zeta - \epsilon\langle\zeta\rangle^2}| \leq 1$. Estimando o valor absoluto da igualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathrm{M}_x^\lambda f_\epsilon(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_V \bigg(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\zeta|^{|\lambda|}}{|Q_{s,t}(i\zeta)|^{1/2}} \frac{|Q_{s,r}(i\zeta)|}{|Q_{s,t}(i\zeta)|^{1/2}} |g(y)|\Delta(x,y)|\mathrm{d}\xi \bigg) \mathrm{d}y \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_V \bigg(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\zeta|^{|\lambda|}}{|Q_{s,t}(i\zeta)|^{1/2}} \frac{C(1+\tilde{\rho}^2)e^{Lr^{1/s}|\zeta|^{1/s}}}{e^{\frac{1}{2}\log(1+\tilde{\rho}^2)t^{1/s}|\zeta|^{1/s}}} |g(y)||\Delta(x,y)|\mathrm{d}\xi \bigg) \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

onde C é obtida pelo quociente da constante que aparece na estimativa superior de $Q_{s,r}$ pela constante que aparece na estimativa inferior de $Q_{s,t}$. Para estimar o quociente $|\zeta|^{|\lambda|}/|Q_{s,t}(i\zeta)|^{1/2}$ usamos que $|\zeta|^{|\lambda|}/|Q_{s,t}(i\zeta)|^{1/2} \leq t^{-|\lambda|}\tilde{\rho}^{-|\lambda|}(2|\lambda|)!^{s/2}$ por (6.2). Para estimarmos as exponenciais lembramos que $(1-\rho)|\xi| \leq |\zeta| \leq (1+\rho)|\xi|$ e conseguimos

$$|\mathrm{M}_x^\lambda f_\epsilon(x)| \leq \frac{(2|\lambda|)!^{s/2} C(1+\tilde{\rho}^2)}{(2\pi)^N (t\tilde{\rho})^{|\lambda|}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{E(t,r)|\xi|^{1/s}} \int_V |g(y)||\Delta(x,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

onde $E(t,r) = Lr^{1/s}(1+\rho)^{1/s} - \frac{1}{2}\log(1+\tilde{\rho}^2)t^{1/s}(1-\rho)^{1/s} < 0$. Como $g \in G_c^s(U)$ a integral em y é finita, $\Delta(x,y)$ é limitada e $E(t,r) < 0$ temos que f_ϵ é uniformemente limitada em $G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ onde $h = 2/t\tilde{\rho}$. Isto prova que f_ϵ possui uma subsequência convergente no espaço das funções Gevrey de ordem s.

Lema 6.1.3. *Dados t, r números reais positivos que satisfazem*

$$Lr^{1/s}(1+\rho)^{1/s} < \frac{1}{2}\log(1+\tilde{\rho}^2)t^{1/s}(1-\rho)^{1/s},$$

então $R_t(G_c^s) \subset R_r(G^s)$.

Em particular, o lema vale para

$$t = \frac{2(L2)^s}{\log^s(1+\tilde{\rho}^2)} r \bigg(\frac{1+\rho}{1-\rho} \bigg).$$

Capítulo 7

Resolubilidade em G^s e em $\mathcal{D}'_s$ em estruturas localmente integráveis

7.1 Estruturas localmente integráveis Gevrey.

Consideremos Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem s_0 é um subfibrado T' de $\mathbb{C}T^*\Omega$ de posto m que é localmente gerado pela diferencial de m funções Gevrey de ordem s_0.

Iremos sempre assumir que Ω é uma vizinhança da origem e escreveremos $N = m + n$. Sempre podemos achar um sistema de coordenadas locais $(x, t) = (x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n)$ centrado na origem e definido em um domínio da forma $U = \Theta_1 \times \Theta_2$, onde $\Theta_1 \subset \mathbb{R}^m$, $\Theta_2 \subset \mathbb{R}^n$ são bolas abertas centradas na origem, e também uma função $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ de classe G^{s_0} tal que se definirmos

$$Z_k(x,t) = x_k + i\phi_k(x,t), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{7.1}$$

então

$$Z(0,0) = 0, \quad Z_x(0,0) = Id, \quad \det Z_x \neq 0 \text{ em } U \tag{7.2}$$

e

$$\{\mathrm{d}Z_1, \ldots, \mathrm{d}Z_m\} \quad \text{gera } \mathrm{T}' \text{ sobre } U. \tag{7.3}$$

A prova da existência destas coordenadas e mais informações sobre estruturas localmente integráveis podem ser encontradas no livro de Berhanu, Cordaro e Hounie [BCH08].

Definimos os campos vetoriais complexos $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ sobre U pelas relações

$$\mathrm{X}_k Z_\ell = \delta_{k\ell}, \quad \mathrm{X}_k t_j = 0, \quad k, \ell \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{7.4}$$

e definimos

$$\mathrm{L}_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(x,t)\mathrm{X}_k, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.5}$$

Segue que $\mathrm{L}_j t_k = \delta_{jk}$ e $\mathrm{L}_j Z_\ell = 0$ para todo $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ e $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ e segue também que o ortogonal de T', que é um subfibrado de $\mathbb{C}T\Omega$ de posto n, é gerado sobre U pelos campos vetoriais L_j.

Consideremos em U a estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s_0 de coposto nulo, $\mathfrak{T}$, definida pela carta (U, λ), onde $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ é definida por $\lambda(x,t) = (Z(x,t), t)$, isto é, $\mathfrak{T}$ é uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s_0 em U que contém (U, λ). Notemos que (U, λ) não está nas condições do teorema de representação, pois, $D(\mathrm{Im}\lambda)(0) \neq 0$, portanto, consideremos a aplicação $\lambda_\sharp : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ definida por

$$\lambda_\sharp(x,t) = (Z(x,t) - i\phi_t(0)t, t). \tag{7.6}$$

Notemos que $\lambda_\sharp = A \circ \lambda$, onde A é uma matriz $N \times N$ não-singular e, portanto, $(U, \lambda_\sharp) \in \mathfrak{T}$ e vale que $\lambda_\sharp(0) = 0, D(\mathrm{Im}\lambda_\sharp)(0) = 0$.

Os correspondentes campos vetoriais para a carta hipo-analítica $(U, \lambda_\sharp)$ são

$$\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m, \mathrm{L}_1^\sharp, \ldots, \mathrm{L}_n^\sharp, \tag{7.7}$$

onde

$$\mathrm{L}_j^\sharp = \mathrm{L}_j + i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(0,0)\mathrm{X}_k. \tag{7.8}$$

Como (U, λ) e $(U, \lambda^\sharp)$ são biholomorficamente equivalentes temos que $G^s(U; \mathrm{X}, \mathrm{L})$, $G^s(U; \mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)$ e $G^s(U)$ são isomorfos como espaços topológicos.

Fixados $s > s_0$ e $r > 0$ o operador de classe $(p!^s)$ definido por

$$Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{p^{2s}}\left[\mathrm{X}_1^2 + \cdots + \mathrm{X}_m^2 + (\mathrm{L}_1^\sharp)^2 + \cdots + (\mathrm{L}_n^\sharp)^2\right]\right) \tag{7.9}$$

tem a seguinte propriedade fundamental: $Q_{s,r}$ comuta com os campos originais, isto é,

$$Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\mathrm{L}_j = \mathrm{L}_j Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) \text{ em } \mathcal{D}'_{s_0}(U), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.10}$$

Dado $V \subset U$ um aberto e $q \in \{0, 1, \ldots, n\}$ introduzimos o espaço das ultracorrentes associadas à estrutura localmente integrável T' por

$$\mathcal{D}'_{s_0}(V; \Lambda^q) \doteq \left\{ u = \sum_{|J|=q} u_J(x,t)\mathrm{d}t_J, u_J \in \mathcal{D}'_{s_0}(V) \right\} \tag{7.11}$$

e se $E(V)$ é um subespaço de $\mathcal{D}'_{s_0}(V)$ então definimos $E(V; \Lambda^q)$ o subespaço de $\mathcal{D}'_{s_0}(V; \Lambda^q)$ das ultracorrentes com coeficientes em $E(V)$.

Definimos o operador diferencial

$$\mathbb{L} : \mathcal{D}'_{s_0}(V; \Lambda^q) \longrightarrow \mathcal{D}'_{s_0}(V; \Lambda^{q+1}) \tag{7.12}$$

pela expressão

$$\mathbb{L}(u) = \sum_{|J|=q} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{L}_j u_J)\mathrm{d}t_j \wedge \mathrm{d}t_J. \tag{7.13}$$

Estendemos a ação dos operadores $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)$ para $\mathcal{D}'_{s_0}(U; \Lambda^q)$ considerando a ação do operador coeficiente a coeficiente.

Dado $\rho \in (0,1)$ e reduzindo U para valer a propriedade (4.1) sabemos que qualquer ultradistribuição $u \in \mathcal{E}'_s(U)$ pode ser representada a partir de $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)$ aplicado em uma função em $G^s(U)$ e consequentemente toda $u \in \mathcal{E}'_s(U; \Lambda^q)$ pode ser representada por $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)$ aplicado em uma forma $g \in G^s(U; \Lambda^q)$.

7.1.1 O kernel dos operadores $Q_{s,r}$ agindo em ultracorrentes.

Nos enunciados adiante iremos sempre supor que já foram escolhidos ρ e (U, λ) com as propriedades necessárias para o teorema de representação. Iremos provar uma versão para formas da Proposição 5.1.2. É importante notar que estes resultados envolvem a existência de um aberto W que só depende de ρ, (U, λ).

Lema 7.1.1. *Sejam ρ e (U, λ) para os quais vale o teorema de representação. Dados s, s' com $s > s' > s_0$ existe polidisco $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ tal que se $g \in \mathcal{D}'_{s'}(U; \Lambda^q)$ é $\mathbb{L}$-fechada e satisfaz $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g = 0$, então existe uma $(q-1)$-forma com coeficientes holomorfos $H \in \mathcal{O}(\Delta; \Lambda^{q-1})$ tal que $g = \mathbb{L}(\lambda^* H)$ em $W = \lambda^{-1}(\Delta)$.*

Demonstração. Seja D dado pela Proposição 5.1.2, seja A a matriz não-singular tal que $\lambda_\sharp = A \circ \lambda$, seja $\Delta \subset A^{-1}(D)$ um polidisco e seja $W = \lambda(\Delta)$. Vamos escrever $g = \sum_{|J|=q} g_J \mathrm{d}t_J$, aplicando $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)$ obtemos que $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g = \sum_{|J|=q} Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g_J(x,t)\mathrm{d}t_J = 0$, isto é, que $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g_J = 0$ para todo J. Aplicando a Proposição 5.1.2, vemos que existe $\tilde{G}_J \in \mathcal{O}(D)$ tal que $g_J = \tilde{G}_J \circ \lambda_\sharp$ em $\lambda_\sharp^{-1}(D)$ e, como $\lambda_\sharp = A \circ \lambda$, podemos definir $G_J = \tilde{G}_J \circ A \in \mathcal{O}(A^{-1}(D))$ para obter que $g_J = G_J \circ \lambda$. Logo $g = \lambda^*(G)$ onde

$$G(z,\zeta) = \sum_{|J|=q} G_J(z,\zeta)\mathrm{d}\zeta_J. \tag{7.14}$$

Agora usamos que $0 = \mathbb{L}g = \mathbb{L}\lambda^*(G) = \lambda^*(\partial_\zeta G)$. Como a imagem de λ contém uma variedade real maximal então $\partial_\zeta G = 0$ em Δ. Logo G é uma forma fechada em Δ e, portanto, o problema

$$\partial_\zeta H = G \tag{7.15}$$

tem uma solução

$$H(z,\zeta) = \sum_{|K|=q-1} H_K(z,\zeta)\mathrm{d}\zeta_K \tag{7.16}$$

com coeficientes holomorfos em Δ e segue que

$$g = \lambda^*(\partial_\zeta H) = \mathbb{L}(\lambda^* H) \text{ em } W. \qquad \square$$

Proposição 7.1.2. *Sejam ρ, U, Δ e W como no Lema 7.1.1. Se $u \in \mathcal{D}'_{s_0}(U;\Lambda^q)$ é da forma $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L})g$ com $g \in G^s(U;\Lambda^q)$ e u é $\mathbb{L}$-fechada, então podemos achar $f \in G^s(W;\Lambda^q)$ que é $\mathbb{L}$-fechada tal que*

$$u = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)f \text{ em } W. \tag{7.17}$$

Em particular, o resultado vale para $u \in \mathcal{E}'_s(U;\Lambda^q)$ e é $\mathbb{L}$-fechada.

Demonstração. Iniciamos representãndo u por $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g$ com $g \in G^s(U;\Lambda^q)$. Segue, do fato que u é $\mathbb{L}$-fechada, que

$$Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\mathbb{L}g = 0. \tag{7.18}$$

Logo o Lema 7.1.1 nos diz que $\mathbb{L}g = \mathbb{L}(\lambda^* H)$ em W onde H é uma q-forma com coeficientes holomorfos em Δ. Definimos a q-forma $\tilde{f} = g - \lambda^* H$ que claramente é $\mathbb{L}$-fechada. E assim temos que

$$u = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\tilde{f} + Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)(\lambda^* H) = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\tilde{f} + \lambda^*(Q_{s,r}(\partial_z, \partial_t)H). \tag{7.19}$$

Seja $\tilde{H} = Q_{s,r}(\partial_z, \partial_t)H$ temos que $0 = \mathbb{L}(\lambda^*\tilde{H}) = \lambda^*(\partial_\zeta \tilde{H})$. Novamente como a imagem de λ contém uma variedade real maximal temos que $\partial_\zeta \tilde{H} = 0$ e assim existe $\tilde{h}$ uma $(q-1)$-forma com coeficientes holomorfos em Δ que é solução de $\partial_\zeta \tilde{h} = \tilde{H}$ e basta definirmos $h = \tilde{h} \circ \lambda$ para obtermos

$$u = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\tilde{f} + \mathbb{L}h.$$

Seja $h_1 = \tilde{h} \circ A^{-1}$. Consequentemente, vale que $h = h_1 \circ \lambda_\sharp$. Os operadores ultradiferenciais da forma $Q_{s,r}(\partial_x, \partial_t)$ são sobrejetores de $\mathcal{O}(A(\Delta)) \longrightarrow \mathcal{O}(A(\Delta))$ logo existe $\tilde{h_1}$ tal que $h_1 = Q_{s,r}(\partial_x, \partial_t)\tilde{h_1}$. Assim temos $h = \lambda_\sharp^*(h_1) = \lambda_\sharp^*(Q_{s,r}(\partial_x, \partial_t)\tilde{h_1}) = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)(\tilde{h_1} \circ \lambda_\sharp)$ e concluímos que

$$u = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)(\tilde{f} + \mathbb{L}(\tilde{h_1} \circ \lambda_\sharp)) \text{ em } W. \qquad \square$$

7.1.2 Resolubilidade no espaço das ultradistribuições.

Dada T' uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem s_0 e de posto m em Ω podemos considerar em U o operador $\mathbb{L}$ agindo em ultracorrentes de grau $0, 1, \ldots, n$. Vamos introduzir aqui um conceito de resolubilidade deste operador:

Definição 7.1.3. *Sejam E, F dois subfeixes de $\mathcal{D}'_{s_0}$. Dizemos que $\mathbb{L}$ é (E,F)-resolúvel na origem em grau q se existe U uma vizinhança da origem tal que se $U_0 \subset U$ é vizinhança aberta da origem, então existe uma outra vizinhança aberta da origem $U_1 \subset U_0$ tal que, para toda $f \in F(U_0;\Lambda^q)$ satisfazendo $\mathbb{L}f = 0$, existe $u \in E(U_1;\Lambda^{q-1})$ satisfazendo $\mathbb{L}u = f$ em U_1.*

Nosso objetivo aqui é investigar como relacionar a resolubilidade de diferentes pares de espaços. Por exemplo, Cordaro e Caetano [CC11] provaram em seu trabalho que resolubilidade (C^∞, C^∞) implica resolubilidade (G^s, G^s). O nosso objetivo é relacionar as resolubilidades envolvendo os espaços G^s e $\mathcal{D}'_s$ e o nosso principal resultado neste sentido é:

Teorema 7.1.4. *Fixemos $s, s_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $s > s_0 > 1$. Seja T' uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem s_0 e posto m. Dado $q \in \{1, \ldots, n\}$ são equivalentes:*

(i) $\mathbb{L}$ *é (G^s, G^s)-resolúvel em ordem q,*

(ii) $\mathbb{L}$ *é $(\mathcal{D}'_s, G^s)$-resolúvel em ordem q,*

(iii) $\mathbb{L}$ *é $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$-resolúvel em ordem q.*

A condição (ii) é consequência imediata tanto de (i) quanto de (iii). De fato, a resolubilidade $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ é a mais simples de ser verificada e é isto o que exploramos no seguinte corolário:

Corolário 7.1.5. *Seja T' uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem $s_0 > 1$ e posto m. Sejam E e F feixes tais que $E \subset \mathcal{D}'_s$ e $G^s \subset F$ para algum $s > s_0$. Se $\mathbb{L}$ é (E,F)-resolúvel em ordem q, então é imediato que $\mathbb{L}$ é $(\mathcal{D}'_s, G^s)$-resolúvel em ordem q. Em particular, temos que*

(a) a resolubilidade (C^∞, C^∞) implica as resolubilidades (G^s, G^s), $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ e $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$,

(b) a resolubilidade $(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ implica as resolubilidades (G^s, G^s), $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ e $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$,

(c) se $s_0 < s < s_1$ então a resolubilidade $(\mathcal{D}'_{s_1}, G^{s_1})$ implica as resolubilidades (G^s, G^s), $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ e $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$.

Dividiremos a prova do Teorema 7.1.4 em duas partes. Primeiro provaremos que (ii) implica (i) e depois desenvolveremos um pouco mais a teoria até obtermos as ferramentas necessárias para provar que (i) implica (iii).

Teorema 7.1.6. *Seja T' uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem s_0 e posto m. Se $\mathbb{L}$ é $(\mathcal{D}'_s, G^s)$-resolúvel para $s > s_0$ em ordem q, então $\mathbb{L}$ é (G^s, G^s)-resolúvel em ordem q.*

Demonstração. Dado $U_0 \subset U$ vizinhança aberta da origem escolhemos $U_1 \subset\subset U_0$ outra vizinhança aberta da origem. Dada $g \in G^s(U_0;\Lambda^q)$ tal que $\mathbb{L}g = 0$ temos que existe $h > 0$ tal que $g|_{\overline{U_1}} \in G^{s,h}(\overline{U}_1; \mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp, \Lambda^q)$. Escolhemos $r > 0$ tal que $(Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g)|_{\overline{U_1}} \in G^{s,2^s h}(\overline{U}_1; \mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp, \Lambda^q)$ e, consequentemente, $(Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g)|_{\overline{U_1}} \in G^s(\overline{U}_1;\Lambda^q)$. Esta nova forma é $\mathbb{L}$-fechada, pois, $\mathbb{L}Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\mathbb{L}g = 0$, como sabemos que $\mathbb{L}$ é $(\mathcal{D}'_s, G^s)$ resolúvel temos que existe $U_2 \subset U_1$ uma vizinhança da origem (só dependendo de U_1) e $u \in \mathcal{D}'_s(U_2;\Lambda^{q-1})$ tal que $\mathbb{L}u = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g$.

Escolhemos agora uma vizinhança da origem $U_3 \subset\subset U_2$ e uma função $\chi \in G^{s_0}_c(U_2)$ igual a 1 em U_3 e assim $\chi u \in \mathcal{E}'_s(U_2;\Lambda^{q-1})$ e podemos aplicar o teorema de representação e conseguir $f \in G^s(U_2;\Lambda^{q-1})$ satisfazendo $\chi u = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)f$.

Juntando todas as informações em U_3, concluímos que $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\mathbb{L}f = \mathbb{L}Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)f = \mathbb{L}u = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g$ donde temos que $\mathbb{L}f - g$ pertence ao kernel de $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)$ e é $\mathbb{L}$-fechada, portanto, pelo Lema 7.1.1 existem uma vizinhança da origem $U_4 \subset\subset U_3$, que depende somente de U_3, e $H \in G^s(U_4;\Lambda^{q-1})$ tais que $\mathbb{L}f - g = \mathbb{L}H$ em U_4 e, consequentemente, $g = \mathbb{L}(f - H)$ em U_4. $\square$

7.2 Resolubilidade (G^s, G^s) implica resolubilidade $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$.

Na prova da segunda parte do Teorema 7.1.4 usaremos um processo de limite e também precisaremos do chamado Lema de Poincaré aproximado que nos diz que uma forma $\mathbb{L}$-fechada pode ser aproximada por uma sequência de formas $\mathbb{L}$-exatas. Uma prova do Lema de Poincaré aproximado pode ser encontrada no livro de Treves [Tre92] Corolário II.6.1, o preciso enunciado que usaremos é o seguinte:

Teorema 7.2.1. *Seja $(U, \lambda^\sharp)$ uma carta hipo-analítica centrada na origem com as propriedades (2.16) e (4.1). Existe $U_0 \subset U$ uma vizinhança da origem tal que, para toda $u \in C^\infty(U; \Lambda^q)$ que é $\mathbb{L}$-fechada, existe uma sequência de formas $P_\nu \in C^\infty(\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n; \Lambda^{q-1})$ onde os coeficientes são polinômios com respeito a (z,t) e tais que $u|_{U_0}$ é o limite em $C^\infty(U_0; \Lambda^q)$ do pullback de $\mathbb{L}P_\nu$ por $\lambda^\sharp$.*

No primeiro passo do teorema que vamos provar, encontraremos soluções nos espaços $(G_c^{s,h}(\overline{U}))'$ (ou no espaço das formas com coeficientes neste espaço) e um processo de limite nos dirá que a solução que estamos procurando está na interseção deste espaços para todo h. O que podemos inferir a partir de tal informação? Primeiro notemos que se $u \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$ então, para todo $K \subset \Omega$ compacto e todo $h > 0$, temos que u define um elemento em $u_{(h)} \in (G_c^{s,h}(K))'$, a saber, $u_{(h)}$ calculado em $\varphi \in G_c^{s,h}(K)$ é definido por $u_{(h)}(\varphi) = u(\tilde{\varphi})$ onde $\tilde{\varphi}$ é a extensão por zero de φ para Ω. Façamos a seguinte hipótese: existe $U \subset\subset \Omega$ um aberto tal que, para todo $h > 0$, u define um elemento de $(G^{s,h}(\overline{U}))'$. Provaremos no próximo lema que esta hipótese nos garante que $u|_U$ define uma ultradistribuição de ordem s.

Lema 7.2.2. *Seja $u \in \mathcal{D}'_{s_0}(U)$ e seja $V \subset\subset U$ um aberto. Dada h_j uma sequência tal que $h_j \longrightarrow \infty$, suponhamos que u define um funcional sobre $G_c^{s_0,h_j}(\overline{V})$ que se estende para um funcional contínuo sobre $G_c^{s,h_j}(\overline{V})$ para todo j, isto é, temos que u define um elemento de $\big(G_c^{s,h_j}(\overline{V})\big)'$ para todo j, então $u|_V \in \mathcal{D}'_s(V)$.*

Demonstração. Primeiro notemos que u é, de fato, linear em $G_c^s(V)$. Dadas $\varphi_1, \varphi_2 \in G_c^s(V)$ o fato que estas têm suporte compacto implica que existe h_j tal que $\varphi_1, \varphi_2 \in G_c^{s,h_j}(V)$ e é claro que podemos estendê-las para $\overline{V}$. Como u define um elemento de $(G_c^{s,h_j}(\overline{V}))'$ segue que dado $c \in \mathbb{C}$ então $u(\varphi_1 + c\varphi_2) = u(\varphi_1) + cu(\varphi_2)$ e verificamos a linearidade de u.

Falta verificarmos a continuidade de u, isto é, provar que para todo $K \subset V$ compacto e todo $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|u(\varphi)| \leq C_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} \epsilon^{|\alpha|} \alpha!^{-s} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

para toda $\varphi \in G_c^s(K)$.

Toda $\varphi \in G_c^s(K)$ pode ser vista como um elemento de $G_c^s(\overline{V})$ e, consequentemente, existe $j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\varphi \in G_c^{s,h_j}(\overline{V})$. Vendo u como um elemento de $(G_c^{s,h_j}(\overline{V}))'$ temos que existe $C_{h_j} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &\leq C_{h_j} \|\varphi\|_{\overline{V}, h_j, s} \\ &= C_{h_j} \|\varphi\|_{K, h_j, s} \\ &= C_{h_j} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} h_j^{-|\alpha|} \alpha!^{-s} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in G_c^{s,h_j}(K)$, ou mesmo, para toda $\varphi \in G_c^s(K)$, pois o lado direito é infinito se $\varphi \in G_c^s(K) \setminus G_c^{s,h_j}(K)$. Dados K e ϵ basta escolher h_j tal que $h_j^{-1} < \epsilon$ e $C_\epsilon = C_{h_j}$ e temos a continuidade de u. $\square$

Observemos que um elemento de $\big(G_c^{s,h}(\overline{U})\big)'$ também define um elemento de $\mathcal{D}'_{s_0}(U)$ se $s_0 < s$. Verificaremos esta afirmação e também provaremos que se uma sequência converge no primeiro espaço, então ela também converge no segundo.

Lema 7.2.3. *Se $u \in \left(G_c^{s,h}(\overline{U})\right)'$, então u define um elemento em $\mathcal{D}'_{s_0}(U)$ para todo $s_0 < s$. Além disso, se u_j é uma sequência converge para 0 em $\left(G_c^{s,h}(\overline{U})\right)'$, então a sequência induzida em $\mathcal{D}'_{s_0}(U)$, que também denotaremos por u_j, converge 0 em $\mathcal{D}'_{s_0}(U)$.*

Demonstração. Primeiro notemos que $G_c^{s_0}(U)$ pode ser identificado com um elemento de $G_c^{s,h}(\overline{U})$. Dada $\varphi \in G_c^{s_0}(U)$ existem $K \subset U$ um compacto e $\tilde{h} > 0$ tais que $\varphi \in G_c^{s_0,\tilde{h}}(K)$. Podemos identificar φ com um elemento de $G_c^{s_0,h}(\overline{U})$. Notemos que, como $s_0 - s < 0$, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que $\sup_\alpha\{\tilde{h}^{|\alpha|}h^{-|\alpha|}|\alpha|!^{s_0-s}\} < \tilde{C}$.

Deste modo, vemos que

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N}\sup_{\overline{U}}\left\{\frac{|\partial^\alpha\varphi(x)|}{h^{|\alpha|}|\alpha|!^s}\right\} &\leq \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N}\sup_{\overline{U}}\left\{\frac{|\partial^\alpha\varphi(x)|}{\tilde{h}^{|\alpha|}|\alpha|!^{s_0}}\frac{\tilde{h}^{|\alpha|}}{h^{|\alpha|}}|\alpha|!^{s_0-s}\right\}\\ &\leq \tilde{C}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N}\sup_{\overline{U}}\left\{\frac{|\partial^\alpha\varphi(x)|}{\tilde{h}^{|\alpha|}|\alpha|!^{s_0}}\right\} = \tilde{C}\|\varphi\|_{\overline{U},\tilde{h},s_0}\\ &= \tilde{C}\|\varphi\|_{K,\tilde{h},s_0}.\end{aligned}$$

Logo se $u \in \left(G_c^{s,h}(\overline{U})\right)'$ faz sentido avaliarmos u em φ. E conseguimos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}|u(\varphi)| &\leq C\|\varphi\|_{\overline{U},h,s}\\ &\leq C\tilde{C}\|\varphi\|_{K,\tilde{h},s_0}\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in G_c^{s_0,\tilde{h}}(K)$, o que prova que u define um elemento em $\mathcal{D}'_{s_0}(U)$ o qual denotaremos também por u. Se u_j é uma sequência convergindo para 0 em $\left(G_c^{s,h}(\overline{U})\right)'$ temos que, dado $\epsilon > 0$, existe j_0 tal que

$$|u_j(\varphi)| \leq \epsilon\|\varphi\|_{\overline{U},h,s}$$

para toda $\varphi \in G_c^{s,h}(\overline{U})$ e para todo $j \geq j_0$. Em particular, se $\varphi \in G_c^{s_0,\tilde{h}}(K)$ nosso cálculo acima mostra que

$$|u_j(\varphi)| \leq \epsilon\tilde{C}\|\varphi\|_{K,\tilde{h},s_0},$$

donde concluímos que u_j converge para 0 em $\mathcal{D}'_{s_0}(U)$. ☐

Provaremos agora a segunda parte do Teorema 7.1.4:

Teorema 7.2.4. *Seja T' uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem s_0 e posto m. Se $\mathbb{L}$ é (G^s, G^s)-resolúvel para $s > s_0$ em ordem q, então $\mathbb{L}$ é $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$-resolúvel em ordem q.*

Demonstração. Dado $U_0 \subset U$ escolhemos $U_1 \subset\subset U_0$ tal que $\chi \in G_c^{s_0}(U_0)$ e $\chi = 1$ em U_1. Seja $u \in \mathcal{D}'_s(U_0; \Lambda^q)$ uma ultracorrente que satisfaz $\mathbb{L}u = 0$. Para todo $r > 0$ existe $u_r \in G^s(U_0; \Lambda^q)$ tal que $\chi u = Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)u_r$. Notemos que $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\mathbb{L}u_r = \mathbb{L}Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)u_r = 0$ em U_1 e, pela Proposição 7.1.2, podemos assumir que u_r é $\mathbb{L}$-fechada em U_2, onde U_2 é vizinhança da origem dada pela Proposição 7.1.2 dependendo apenas de U_1. A resolubilidade (G^s, G^s) nos dá que existe uma vizinhança da origem $U_3 \subset\subset U_2$, dependendo apenas de U_2, na qual u_r é $\mathbb{L}$-exata, isto é, existe $g_r \in G^s(U_3; \Lambda^{q-1})$ tal que $\mathbb{L}g_r = u_r$ em U_3.

Existe $h > 0$ tal que ${}^tQ_{s,1}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) : G_c^{s,h}(\overline{U_3}) \longrightarrow G_c^{s,2^sh}(\overline{U_3})$ continuamente. É um simples cálculo verificar que ${}^tQ_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) : G_c^{s,h/r}(\overline{U_3}) \longrightarrow G_c^{s,2^sh/r}(\overline{U_3})$ e, por transposição, temos que $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) : \left(G_c^{s,2^sh/r}(\overline{U_3})\right)' \longrightarrow \left(G_c^{s,h/r}(\overline{U_3})\right)'$. Concluímos que $Q_{s,r}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g_r \in \left(G_c^{s,h/r}(\overline{U_3}; \Lambda^{q-1})\right)'$. Para obtermos uma solução que é uma ultracorrente precisaremos passar por um processo de limite.

Seja $\{r_j\}$ uma sequência estritamente decrescente indo para zero. Temos, em U_3, que

$$\mathbb{L}\big(Q_{s,r_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g_{r_j} - Q_{s,r_{j+1}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)g_{r_{j+1}}\big) = 0. \tag{7.20}$$

Definimos t_j pela fórmula

$$t_j = \frac{2(L2)^s}{\log^s(1+\tilde{\rho}^2)} r_j \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right).$$

Seja $\tilde{\chi} \in G_c^{s_0}(U_3)$, $\tilde{\chi} = 1$ em U_4, onde $U_4 \subset\subset U_3$ é uma vizinhança da origem qualquer. Pelo Lema 6.1.3, existe $b_j \in G^s(U_3, \Lambda^{q-1})$ tal que

$$Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) b_j = Q_{s,r_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\big(\tilde{\chi} g_{r_j}\big) - Q_{s,r_{j+1}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\big(\tilde{\chi} g_{r_{j+1}}\big)$$

e sabemos por (7.20) que $Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\mathbb{L} b_j = \mathbb{L} Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) b_j = 0$ em U_4. Logo, pelo Lema 7.1.1, existem Δ uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^N$, $W = \lambda^{-1}(\Delta)$ vizinhança da origem contida em U_4 e $H_j \in \mathcal{O}(\Delta; \Lambda^{q-1})$ tais que $\mathbb{L} b_j = \mathbb{L}((\lambda_\sharp)^* H_j)$ e, consequentemente, $b_j - (\lambda_\sharp)^* H_j$ é $\mathbb{L}$-fechada. Pelo lema de Poincaré aproximado, existe $U_5 \subset W$ tal que, para cada j, existe uma sequência de $(q-1)$-formas, P_ν^j cujos coeficientes são polinômios com respeito a (z,t) tais que

$$b_j - (\lambda_\sharp)^* H_j = \lim_{\nu \longrightarrow \infty} \mathbb{L} (\lambda_\sharp)^* P_\nu^j$$

em $C^\infty(U_5; \Lambda^{q-1})$. Notemos que U_5 só depende de W que por sua vez só depende de U_4.

Definimos $h_\nu^j = (\lambda_\sharp)^* H_j + \mathbb{L}(\lambda_\sharp)^* P_\nu^j$ uma sequência de $(q-1)$-formas hipo-analíticas tais que $Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) h_\nu^j$ converge para $Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) b_j$ em $\big(G_c^{s,h/t_j}(\overline{U_5}; \Lambda^{q-1})\big)'$ quando $\nu \longrightarrow 0$. Consideraremos também as seguintes ultracorrentes: $q_j = [Q_{s,r_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) g_{r_j}]|_{\overline{U_5}}$ e $\tilde{h}_j^{(\nu)} = [Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) h_\nu^j]|_{\overline{U_5}}$. Notemos que a convergência de $Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) h_\nu^j$ para $Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) b_j$ em $\big(G_c^{s,h/t_j}(\overline{U_5}; \Lambda^{q-1})\big)'$, quando $\nu \longrightarrow 0$, é equivalente à convergência de $q_j - q_{j+1} - \tilde{h}_j^{(\nu)}$ para 0 em $\big(G_c^{s,h/t_j}(\overline{U}_5; \Lambda^{q-1})\big)'$. Consequentemente, existe ν_j tal que

$$|\langle q_j - q_{j+1} - \tilde{h}_j^{(\nu_j)}, \varphi \rangle| \leq \frac{1}{2^j} \|\varphi\|_{\overline{U}_5, h/t_j}$$

para toda $\varphi \in G_c^{s,h/t_j}(\overline{U}_5; \Lambda^{q-1})$.

Definimos $v_1 = q_1$ e para $j > 1$ definimos $v_j = q_j + \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{h}_k^{(\nu_k)}$. Sejam μ e κ inteiros positivos tais que $\mu < \kappa$. Vale a desigualdade

$$\begin{aligned}
|\langle v_\mu - v_\kappa, \varphi\rangle| &\leq \sum_{\lambda=\mu+1}^{\kappa} |\langle v_{\lambda-1} - v_\lambda, \varphi\rangle| \\
&\leq \sum_{\lambda=\mu+1}^{\kappa} |\langle q_{\lambda-1} - q_\lambda - \tilde{h}_{\lambda-1}^{(\nu_{\lambda-1})}, \varphi\rangle| \\
&\leq \sum_{\lambda=\mu+1}^{\kappa} \frac{1}{2^\lambda} \|\varphi\|_{\overline{U}_5, h/t_\lambda} \\
&\leq \frac{1}{2^\mu} \|\varphi\|_{\overline{U}_5, h/t_\mu}
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in G_c^{s,h/t_\mu}(\overline{U}_5; \Lambda^{q-1})$. Na última linha usamos que $t_\mu \geq t_\lambda$, sempre que $\lambda > \mu$, e que isto implica que $\|\varphi\|_{\overline{U}_5, h/t_\lambda} \leq \|\varphi\|_{\overline{U}_5, h/t_\mu}$. Deste modo, temos que a sequência $(v_j)_{j=j_0}^\infty$ converge em $\big(G_c^{s,h/t_\mu}(\overline{U}_5; \Lambda^{q-1})\big)'$ para todo $\mu \leq j_0$. Seja v o limite de v_j tomado em $\mathcal{D}'_{s_0}(U_5; \Lambda^{q-1})$ o que pode ser feito graças ao Lema 7.2.3. Agora se $U_6 \subset\subset U_5$ é uma outra vizinhança da origem temos como consequência do Lema 7.2.2, que $v \in \mathcal{D}'_s(U_6; \Lambda^{q-1})$.

Lembremos que $h_{\nu_k}^j = (\lambda_\sharp)^* H_j + \mathbb{L}(\lambda_\sharp)^* P_{\nu_k}^j$ e, por isto, temos que $\mathbb{L} h_{\nu_k}^j = \mathbb{L}(\lambda_\sharp)^* H_j = \mathbb{L} b_j$ e também que

$$Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\mathbb{L} h_{\nu_k}^j = Q_{s,t_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)\mathbb{L} b_j = \mathbb{L}\big(Q_{s,r_j}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) g_{r_j} - Q_{s,r_{j+1}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp) g_{r_{j+1}}\big) = 0$$

pela equação (7.20). Agora notemos que em $\mathcal{D}'_{s_0}(U_6)$, temos a igualdade

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}v &= \mathbb{L}\big(\lim_{j\longrightarrow\infty} v_j\big)\\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\big(\mathbb{L}v_j\big)\\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\mathbb{L}q_j + \sum_{k=1}^{j-1}\mathbb{L}\tilde{h}_j^{(\nu_k)}\right)\\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\mathbb{L}Q_{s,r_j}(\mathrm{X},\mathrm{L}^\sharp)g_{r_j} + \sum_{k=1}^{j-1}\mathbb{L}Q_{s,t_j}(\mathrm{X},\mathrm{L}^\sharp)h_{\nu_k}^{j}\right)\\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\big(Q_{s,r_j}(\mathrm{X},\mathrm{L}^\sharp)u_{r_j}\big)\\
&= u,
\end{aligned}$$

e como $G_c^{s_0}(U_6)$ é denso em $G_c^s(U_6)$ segue que a igualdade continua válida em $\mathcal{D}'_s(U_6)$ com isto provamos que v é a ultradistribuição que procurávamos. □

7.3 Mais sobre resolubilidade Gevrey

Paulo Caetano e Paulo Cordaro provaram em seu artigo que a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg e Treves implica na resolubilidade Gevrey de um operador diferencial de primeira ordem. O mesmo pode ser feito para resolubilidade no sentido de ultradistribuições.

Seja $P(y, D)$ um operador diferencial de ordem 1 com coeficientes reais-analíticos definidos em Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, isto é, P é definido por

$$P(y,D) = \sum_{j=1}^{N} a_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + b(y).$$

Iremos assumir também que P é de tipo principal, isto é,

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j(y)| \neq 0, \text{ para todo } y \in \Omega.$$

Então vale o seguinte resultado:

Teorema 7.3.1. *Seja $y_0 \in \Omega$ e assuma que P é de tipo principal e satisfaz a condição de $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves em y_0. Então, para todo $s > 1$ e toda $f \in \mathcal{D}'_s$ definida em uma vizinhança de y_0 existe $u \in \mathcal{D}'_s$ resolvendo $P(y, D)u = f$.*

Demonstração. Repetindo os passos do Teorema 6.1 do artigo [CC11] de Caetano e Cordaro concluímos que a resolubilidade de P é equivalente à resolubilidade um campo L e que a condição $(\mathcal{P})$ implica na resolubilidade de L no sentido C^∞. A prova também mostra que é possível conseguir um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)$ e uma base do espaço tangente em uma vizinhança de y_0 de forma ao operador $\mathbb{L}$ ser definido da seguinte maneira: $\mathbb{L}f = Lf\mathrm{d}t$ para toda f ultradistribuição.

E nosso enunciado segue do fato que a resolubilidade (C^∞, C^∞) implica na resolubilidade $(\mathcal{D}'_s, \mathcal{D}'_s)$. □

Capítulo 8

Vetores Gevrey

8.1 Vetores Gevrey do laplaciano segundo M.

Voltemos para o caso em que $\mathfrak{T}$ é uma estrutura hipo-analítica Gevrey de ordem s_0 e de coposto nulo. Seja (U, Z) uma carta hipo-analítica contendo a origem com as propriedades do teorema de representação. Diremos que uma função contínua $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ é um vetor Gevrey de ordem $s > s_0$ para o laplaciano se $\Delta_{\mathrm{M}}^k f$ é uma função contínua para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ e se para toda $V \subset\subset U$ vizinhança da origem existem números reais positivos R, C tais que

$$\sup_{x \in V} |\Delta_{\mathrm{M}}^k f(x)| \leq RC^k (2k)!^s.$$

Ser vetor Gevrey do laplaciano segundo M nos dá informações sobre todas as derivadas e iremos aproveitar disto para provar a próxima proposição.

Proposição 8.1.1. *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ um vetor Gevrey de ordem $s > s_0$ para o laplaciano segundo* M. *Então existe $W \subset U$ uma vizinhança da origem tal que $f \in G^s(W; \mathrm{M})$.*

Demonstração. Seja $V \subset\subset U$ uma vizinhança da origem e consideremos $Q_{s,r}(\mathrm{M})f$. O que iremos provar é que podemos escolher r de forma a concluir que esta é uma função contínua em V. Formalmente temos que

$$Q_{s,r}(\mathrm{M})f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k} (\Delta_{\mathrm{M}}^k f)(x)$$

e, portanto, estamos interessados na seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x \in V} |a_k r^{2k} (\Delta_{\mathrm{M}}^k f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{2k} RC^k (2k)!^s \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C} \frac{L^k}{(2k)!^s} r^{2k} RC^k (2k)!^s \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C} R (r^2 LC)^k < \infty
\end{aligned}$$

contanto que $r^2 LC < 1$. Logo a série $Q_{s,r}(\mathrm{M})f$ converge normalmente em V e é contínua já que $\Delta_{\mathrm{M}}^k f$ é contínua para todo k. Seja $\tilde{W} \subset\subset V$ uma vizinhança da origem usando o teorema de representação em $\tilde{W}$ temos que $Q_{s,r}(\mathrm{M})f = Q_{s,r}(\mathrm{M})g$ onde g é uma função Gevrey de ordem s. Logo $Q_{s,r}(\mathrm{M})(f - g) = 0$ e, pela Proposição 5.1.2, existem W uma vizinhança da origem e h uma função Gevrey de ordem s_0 tais que $f = g + h$ em W e assim f é Gevrey de ordem s em W. $\square$

A ideia de provar esta proposição veio do Lema II.4.1 do livro [Tre92] que é um resultado que tem como consequência a versão real-analítica de nossa proposição, mas também trata do caso quando a estrutura gerada pelos campos não tem posto máximo. Este resultado pode também ser visto como um caso muito particular de um resultado de Kotake e Narasimhan [KN62].

Capítulo 9

Regularidade Gevrey

9.1 Regularidade Gevrey fraca e Gevrey-hipoelipticidade.

Na última seção de [CC11] os autores provaram que $\mathbb{L}$ é G^s-hipoelíptico sob uma hipótese fraca de regularidade. Aqui conseguimos enfraquecer ainda mais a hipótese de regularidade e ainda obter que $\mathbb{L}$ é G^s-hipoelíptico. Lembremos a definição de G^s-hipoelipticidade.

Definição 9.1.1. *Dizemos que $\mathbb{L}$ é G^s-hipoelíptico na origem se para toda $V \subset U$ vizinhança da origem e toda $u \in \mathcal{D}'_s(V)$ tal que $\mathrm{L}_j u \in G^s$ em alguma vizinhança da origem para todo j implica que u é de classe G^s em uma vizinhança da origem.*

A condição de regularidade fraca que mencionamos é a seguinte:

Definição 9.1.2. *Seja T' uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem s_0. Para todo $V \subset U$ uma vizinhança da origem consideremos as ultradistribuições $u \in \mathcal{D}'_{s_0}(V)$ com a seguinte propriedade:*

($*$) *$\mathrm{L}_j u$ é de classe G^s em uma vizinhança da origem para todo $j = 1, \dots n$.*

Diremos que $\mathbb{L}$ satisfaz a propriedade $\mathfrak{h}_s$ na origem se toda ultradistribuição com a propriedade ($*$) é de classe $\mathcal{D}'_s$ em uma vizinhança da origem.

Assim temos o seguinte resultado sobre a hipoelipticidade de $\mathbb{L}$:

Proposição 9.1.3. *Seja T' uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem s_0, onde $s_0 > 1$. Se $\mathbb{L}$ satisfaz a propriedade $\mathfrak{h}_s$ na origem para algum $s > s_0$, então $\mathbb{L}$ é G^s-hipoelíptico na origem.*

Demonstração. Seja $V \subset U$ uma vizinhança da origem e seja $u \in \mathcal{D}'_s(V)$ tal que $f = \mathbb{L}u$ é Gevrey de ordem s em uma vizinhança da origem. Existe $V_1 \subset\subset V$ uma vizinhança da origem e $h > 0$ tal que $f|_{\overline{V_1}}$ tem coeficientes em $G^{s,h}(\overline{V}_1, \mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)$. Existe $r > 0$ tal que os coeficientes de $Q_{s,r}(X, \mathrm{L}^\sharp)f$ estão em $G^{s,2^s h}(\overline{V_1}; \mathrm{X}, \mathrm{L}^\sharp)$. Como $\mathbb{L}$ satisfaz a propriedade $\mathfrak{h}_s$ a igualdade

$$Q_{s,r}(X, \mathrm{L}^\sharp)f = Q_{s,r}(X, \mathrm{L}^\sharp)\mathbb{L}u = \mathbb{L}Q_{s,r}(X, \mathrm{L}^\sharp)u, \tag{9.1}$$

em V_1, nos diz que existe $V_2 \subset V_1$ tal que $Q_{s,r}(X, \mathrm{L}^\sharp)u \in \mathcal{D}'_s(V_2)$. Escolhendo $V_3 \subset\subset V_2$ vizinhança da origem temos, pelo teorema de representação, que existe $v \in G^s(V_3)$ tal que $Q_{s,r}(X, \mathrm{L}^\sharp)v = Q_{s,r}(X, \mathrm{L}^\sharp)u$ em V_3 e vemos que $u - v$ é um elemento do kernel de $Q_{s,r}$ logo existe uma vizinhança $V_4 \subset V_3$ tal que $u - v$ é Gevrey de ordem s nesta vizinhança e, em particular, $u \in G^s(V_4)$. $\square$

Capítulo 10

Representação global

10.1 Um teorema de representação em variedades riemannianas reais-analíticas compactas.

Os resultados obtidos nesta tese foram obtidos explorando o poder do teorema de representação de ultradistribuições. Estes resultados são locais e na maioria das demonstrações fizemos diversas reduções no aberto original e este já era escolhido pequeno o suficiente para valerem certas condições. Todas estas reduções poderiam nos levar a desacreditar que um teorema de representação global é possível. Felizmente, o caso de representações globais em variedades riemannianas reais-analíticas compactas é consideravelmente mais fácil que o caso local.

Teremos em mente os resultados provados no artigo de Fujita e Morimoto [FM95]. Consideremos (X, g) uma variedade riemanniana real-analítica compacta onde g é a métrica riemanniana. Seja $\mathrm{d}\mu$ a medida correspondente a métrica g e denotemos por $\|\cdot\|_{L^2}$ a norma L^2 com respeito a $\mathrm{d}\mu$ e seja Δ o operador de Laplace-Beltrami correspondente a g em X. Dado $s \geq 1$ um número real, definimos o espaço

$$G^{s,h}(X) = \left\{ f \in C^\infty(X) : \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{(2k)!^s h^{2k}} \|\Delta^k f\|_{L^2(X)} < \infty \right\} \tag{10.1}$$

e o espaço das funções Gevrey globais de ordem s por

$$G^s(X) = \liminds_{\substack{h \longrightarrow \infty \\ h>0}} \left\{ f \in C^\infty(X) : \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{(2k)!^s h^{2k}} \|\Delta^k f\|_{L^2(X)} < \infty \right\}. \tag{10.2}$$

Denotemos por $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ os autovalores de Δ, aqui estamos os enumerando de forma a ordená-los para satisfazerem

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{k-1} \leq \lambda_k \leq \ldots$$

e sejam $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência de autofunções do operador de Laplaci-Beltrami formando uma base ortonormal completa de $L^2(X)$ de tal forma que φ_k está associado ao autovalor λ_k. Sabemos pela fórmula assintótica de Weyl que $\lambda_k \longrightarrow \infty$ quando $k \longrightarrow \infty$.

Com os autovalores iremos definir os espaços de sequência

$$\mathcal{F}_{s,h}(X) = \left\{ (a_k)_{k \geq 0} : a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \exp\left(\frac{1}{h} \lambda_k^{1/(2s)} \right) < \infty \right\}. \tag{10.3}$$

Definimos também

$$\mathcal{F}_{\{s\}}(X) = \liminds_{\substack{h \longrightarrow \infty \\ h>0}} \left\{ (a_k)_{k \geq 0} : a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \exp\left(\frac{1}{h} \lambda_k^{1/(2s)} \right) < \infty \right\}. \tag{10.4}$$

Seguindo Fujita e Morimoto, temos que espaços $G^{s,h}(X)$ e $\mathcal{F}_{s,h}(X)$ são espaços de Banach e vale que tanto $G^s(X)$ quanto $\mathcal{F}_{\{s\}}(X)$ são espaços DFS. Além disso, os autores também definem a aplicação $\Phi : G^s(X) \longrightarrow \mathcal{F}_{\{s\}}(X)$ que associa $f \in G^s(X)$ a $\Phi(f) = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} \in \mathcal{F}_{\{s\}}(X)$, onde $a_k = \langle f, \overline{\varphi_k}\rangle$ e provam que Φ é um isomorfismo linear topológico.

Denotamos o dual de $G^s(X)$ por $\mathcal{E}'_s(X)$ e definimos dois espaços de sequências:

$$\mathcal{G}_{s,h}(X) = \Big\{(a_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \exp\big(-h\lambda_k^{1/(2s)}\big) < \infty\Big\},$$

definido para todo $h > 0$ e o limite projetivo

$$\mathcal{G}_{\{s\}}(X) = \operatorname*{limproj}_{h\longrightarrow 0} \mathcal{G}_{s,h}(X).$$

Também temos que $\mathcal{G}_{s,h}(X)$ é um espaço de Banach e $\mathcal{G}_{\{s\}}(X)$ é um espaço FS e, além disso, existe um isomorfismo linear topológico $\Psi : \mathcal{E}'_s(X) \longrightarrow \mathcal{G}_{\{s\}}(X)$ definido da seguinte forma: dada $u \in \mathcal{E}'_s(X)$ definimos $\Psi(u) = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ onde $a_k = u(\varphi_k)$, notemos que φ_k são reais-analíticas logo faz sentido calcularmos u aplicada em φ_k. É imediato que $\mathcal{F}_{\{s\}}(X)$ é um subespaço de $\mathcal{G}_{\{s\}}(X)$ e que Ψ e Φ empatam sobre $\mathcal{F}_{\{s\}}(X)$.

Com estes isomorfismos vamos provar um teorema de representação global em X. Vamos recuperar algumas definições do caso local. Atentemos ao fato de que a raiz quadrada dos autovalores presente nas definições de $\mathcal{F}_{\{s\}}(X)$ e $\mathcal{G}_{\{s\}}(X)$ é consequência do fato que o laplaciano é um operador de ordem 2 e, por isto, esta raiz quadrada será incorporada na nossa definição de operadores ultradiferenciais globais.

Definição 10.1.1. *Seja $J \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ diremos que J é um símbolo de classe $(p!^s)$ se existem constantes $L > 0$ e $C > 0$ tais que $|J(z)| \leq Ce^{L|z|^{1/(2s)}}$ para todo $z \in \mathbb{C}$*

Como é de se esperar, podemos definir um operador ultradiferencial a partir destes símbolos. Vamos primeiro verificar que, escolhido $1 < s_0 < s$, os operadores de classe $(p!^s)$ agem em $\mathcal{E}'_{s_0}(X)$.

Proposição 10.1.2. *Consideremos J um símbolo de classe $(p!^s)$, $s > s_0 > 1$. Podemos associá-lo a um operador $J : \mathcal{E}'_{s_0}(X) \longrightarrow \mathcal{E}'_{s_0}(X)$ do seguinte modo: dada $u \in \mathcal{E}'_{s_0}(X)$ definimos $J(u) = \Psi^{-1}\big[\big(J(\lambda_k)\Psi(u)_k\big)_{k\in\mathbb{Z}_+}\big]$.*

Demonstração. Verifiquemos que $J(u) \in \mathcal{E}'_{s_0}(X)$ e, para tanto, precisamos mostrar que $\Psi(J(u)) = \big(J(\lambda_k)\Psi(u)_k\big)_{k\in\mathbb{Z}_+} \in \mathcal{G}_{\{s_0\}}(X)$. Como $\Psi(u) \in \mathcal{G}_{\{s_0\}}(X)$ temos que vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big|\Psi(u)_k\big| \exp\Big(-\frac{h}{2}\lambda_k^{1/(2s_0)}\Big) < \infty \tag{10.5}$$

para todo $h > 0$.

Sejam $L > 0$ e $C > 0$ tais que $|J(z)| \leq Ce^{L|z|^{1/(2s)}}$. Dado h denotemos k_0 o primeiro inteiro positivo tal que $h\lambda_{k_0}^{1/(2s_0)} > 2L\lambda_{k_0}^{1/(2s)}$. Obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \big|J(\lambda_k)\Psi(u)_k\big| e^{-h\lambda_k^{(2s)^{-1}}} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} C\big|\Psi(u)_k\big| e^{-h\lambda_k^{1/(2s_0)}+L\lambda_k^{1/(2s)}} \\
&\leq C\Bigg(\sum_{k=0}^{k_0-1} \big|\Psi(u)_k\big| e^{-h\lambda_k^{(2s_0)^{-1}}+L\lambda_k^{(2s)^{-1}}} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \big|\Psi(u)_k\big| e^{-\frac{h}{2}\lambda_k^{(2s_0)^{-1}}}\Bigg),
\end{aligned}$$

como o primeiro somatório é uma soma finita e o segundo é majorado por (10.5), concluímos que $\Psi(u) \in \mathcal{G}_{\{s_0\}}(X)$. $\square$

Definição 10.1.3. *Dizemos que J um símbolo de classe $(p!^s)$ satisfaz a condição $(\mathfrak{c})$ se existem constantes $l > 0$ e $c > 0$ tais que $|J(x)| \geq ce^{l|x|^{1/(2s)}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Funções inteiras com estas propriedades existem, por exemplo, seja J a função definida em (1.1) com $m = 2$ já vimos que um símbolo de classe $(p!^s)$ que satisfaz $(\mathfrak{e})_s$(na versão global, claro). Novamente esta condição de elipticidade é suficiente para o teorema de representação global.

Teorema 10.1.4. *Dado J um símbolo de classe $(p!^s)$ satisfazendo a condição $(\mathfrak{e})$, então, para toda $u \in \mathcal{E}_s'(X)$, existe $f \in G^s(X)$ tal que $J(f) = u$.*

Demonstração. Vamos provar que dada $u \in \mathcal{E}_s'(X)$ existe $f \in G^s(X)$ tal que $u = J(f)$ usando o isomorfismo Ψ. Se tal representação é válida então $\Psi(u) = \Psi(J(f))$, isto é, $\Psi(f)_k = [J(\lambda_k)]^{-1}\Psi(u)_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Deste modo, é suficiente mostrar que definindo $f = \Phi^{-1}\big([J(\lambda_k)]^{-1}\Psi(u)_k\big)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ temos que $f \in G^s(X)$. Faremos isto verificando que $\Phi(f) \in \mathcal{F}_{\{s\}}(X)$ e isto segue da desigualdade:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi(f)_k| e^{\frac{1}{h}\lambda_k^{1/(2s)}} &\le \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\Psi(u)_k}{J(\lambda_k)}\right| e^{\frac{1}{h}\lambda_k^{1/(2s)}} \\ &\le c^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \big|\Psi(u)_k\big| e^{-l\lambda_k^{1/(2s)}+\frac{1}{h}\lambda_k^{1/(2s)}}\end{aligned}$$

onde c e l são as constantes positivas da propriedade $(\mathfrak{e})$. Como $u \in \mathcal{E}_s'(X)$ segue que o lado direito converge quando h é escolhido satisfazendo $l > 1/h$, donde vemos que $\Phi(f) \in \mathcal{F}_{\{s\}}(X)$, como queríamos. □

Chamemos a atenção que neste contexto também temos a regularidade do kernel de J. Os operadores definidos usando os símbolos de classe $(p!^s)$ que não se anulam em $\mathbb{R}^N$ são injetores em $\mathcal{E}_s'(X)$.

Proposição 10.1.5. *Seja J um símbolo de classe $(p!^s)$ que não se anula em $\mathbb{R}^N$. Se $J(f) = 0$ para alguma $f \in \mathcal{E}_s'(X)$, então $f = 0$.*

Demonstração. Lembremos que $\Phi(J(f)) = (J(\lambda_k)\Psi(f)_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, logo, como $J(f) = 0$, temos que $J(\lambda_k)\Psi(f)_k = 0$ e usamos a hipótese que J não se anula em $\mathbb{R}^N$ para concluir que $\Psi(f)_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Como $f = \Psi^{-1}(\Psi(f)_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ e Ψ é um isomorfismo, temos que $f = 0$. □

Capítulo 11

Conclusões

A característica mais marcante deste trabalho é o uso de operadores do tipo $(p!^s)$ para estudar funções e ultradistribuições do tipo $\{p!^s\}$. Esta ideia aparece na tese de Caetano [Cae01] e no artigo de Caetano e Cordaro [CC11] e minha intuição diz que tudo o que foi provado é consequência do fato que podemos usar operadores "do tipo errado" e ainda conseguir representações e resultados de regularidade para funções Gevrey e suas ultradistribuições.

A introdução dos espaços $G^s(U; \mathrm{M})$, que é uma extensão natural do que foi feito na tese de Caetano onde aparecem os espaços $G^s(\overline{V}; \mathrm{M})$, foi uma sugestão do meu orientador e permitiu simplificar os cálculos do teorema de representação. Minhas conversas com meu amigo e colega Gabriel Cueva Candido Soares de Araújo foram cruciais em todo este trabalho, dentre estas, destaco nossas discussões sobre a topologia dos espaços DFS e FS que, junto com comentários do meu orientador, são tudo o que eu sei sobre o assunto. Uma outra parte importante deste trabalho foi provar que os espaços $G^s(U; \mathrm{M})$ e $G^s(U)$ são isomorfos quando a estrutura hipo-analítica é Gevrey de ordem s. O primeiro passo foi provar a Proposição 2.2.2 que diz que duas cartas hipo-analíticas sobre o mesmo aberto U definem espaços isomorfos. A demonstração deste fato segue de perto a prova de que a composta de uma função Gevrey com uma função real-analítica é uma função Gevrey presente no livro de Rodino [Rod93]. Neste momento, percebi que o caminho para provar a Proposição 2.2.8 passava por entender a prova que a composição de funções Gevrey é também uma função Gevrey. Conversei com o Professor Gerardo Mendoza que me aconselhou a pedir uma referência para o professor Gustavo Hoepfner. Este me indicou o artigo de Bierstone e Milman [BM04] o qual possui uma excelente exposição de resultados importantes na teoria de funções ultradiferenciáveis como a invariância por composição e o teorema da função inversa e junto a estes uma belíssima demonstração do teorema de Faà di Bruno.

Na demonstração do teorema de representação(Teorema 4.1.1) segui o roteiro estabelecido em [CC11] tomando os devidos cuidados para conseguir a representação global no aberto U.

Sobre a demonstração do Teorema 7.1.4, a primeira parte, feita no Teorema 7.1.6, foi baseada na estratégia utilizada em Caetano e Cordaro, possível graças ao teorema de representação de ultradistribuições. Já a segunda parte, provada no Teorema 7.2.4, foi muito mais trabalhosa e a principal ideia foi adaptar as técnicas presentes na demonstração do Teorema 3.1 do artigo de Cordaro e Hounie [CH90] para ultradistribuições.

O Teorema 7.3.1 e a Proposição 9.1.3 são simples extensões de resultados presentes em [CC11] e foram possíveis graças à extensão do teorema de representação de C^∞ para $\mathcal{D}'_s$. Depois de notar que os operadores $Q_{s,r}$ são definidos como operadores do laplaciano a ideia de provar a Proposição 8.1.1 surgiu naturalmente.

A ideia para o Capítulo 10 surgiu graças à sugestão de outro amigo e colega, Max Reinhold Jahnke. Ele me apresentou o artigo de Fujita e Morimoto [FM95] e discutiu comigo os resultado ali presentes.

Apêndice A

Desigualdades Gevrey.

Estudando funções Gevrey estimativas envolvendo binômios e fatoriais aparecem naturalmente. Muitas vezes estas desigualdades envolvem uma potência s-ésima que vem da classe de Gevrey estudada e, por isto, parece-nos importante registrá-las neste apêndice.

A expansão em série de Taylor da exponencial nos diz que $t^j/j! \leq e^t$ para todo $t \geq 0$ uma generalização deste resultado é uma estimativa para $t^j/j!^s$ que é obtida do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\frac{t^j}{j!^s} &= \left(\frac{(t^{1/s})^j}{j!}\right)^s \\ &\leq (e^{t^{1/s}})^s = e^{st^{1/s}}.\end{aligned} \tag{A.1}$$

Para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ o Teorema do multinomial nos diz que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)^{|\alpha|} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}_+^N \\ |\beta| = |\alpha|}} \binom{|\alpha|}{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_N^{\beta_N} \tag{A.2}$$

e, em particular, quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 1$ temos

$$N^{|\alpha|} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}_+^N \\ |\beta| = |\alpha|}} \binom{|\alpha|}{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N} \geq \binom{|\alpha|}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N} \tag{A.3}$$

que pode ser reescrito como $|\alpha|! \leq N^{|\alpha|}\alpha!$. Por outro, o fato do multinômio $\binom{|\alpha|}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N}$ ser um inteiro positivo implica que $\alpha! \leq |\alpha|!$. Temos ainda uma estimativa para $t^{|\alpha|}/\alpha!^s$

$$\begin{aligned}\frac{t^{|\alpha|}}{\alpha!^s} &\leq \frac{(N^s t)^{|\alpha|}}{|\alpha|!^s} \\ &\leq (e^{Nt^{1/s}})^s = e^{sNt^{1/s}}.\end{aligned} \tag{A.4}$$

Algumas vezes precisamos limitar somatórios do tipo

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N} \frac{1}{|\gamma|!^t}$$

onde $t > 0$. Para isto lembremos que para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ temos que

$$\sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}_+^N \\ |\gamma| = j}} 1 = \binom{N - 1 + j}{j}.$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}_+^N}\frac{1}{|\gamma|!^t} &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{Z}_+^N\\|\gamma|=j}}\frac{1}{j!^t}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{N-1+j}{j}\frac{1}{j!^t}\\
&\le 2^{N-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{j!^t}.
\end{aligned}$$

Agora usamos que existe j_0 tal que se $j > j_0$ então $j! > (2^{1/t})^{2j}$ e assim

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}_+^N}\frac{1}{|\gamma|!^t} &\le 2^{N-1}\Bigg(\sum_{j=0}^{j_0}\frac{2^j}{j!^t}+\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\frac{2^j}{j!^t}\Bigg)\\
&\le 2^{N-1}\Bigg(\sum_{j=0}^{j_0}\frac{2^j}{j!^t}+\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\Bigg)
\end{aligned}$$

como queríamos.

Estimemos agora somatório envolvendo fatoriais que foi importante neste trabalho. Provemos que, dado $t > 0$, existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo $\ell \in \mathbb{Z}_+$ e todo $N \in \mathbb{Z}_+$, vale a desigualdade:

$$\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^N\\|\beta|\le\ell}}\frac{|\beta|!^t}{\ell!^t} \le c2^{N-1+\ell}. \tag{A.5}$$

Provemos esta afirmação, seja $c = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!^t}$ temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^N\\|\beta|\le\ell}}\frac{|\beta|!^t}{\ell!^t} &= \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^N\\|\beta|=j}}\frac{j!^t}{\ell!^t} = \sum_{j=0}^{\ell}\binom{N-1+j}{j}\frac{j!^t}{\ell!^t}\\
&\le \sum_{j=0}^{\ell}2^{N-1+j}\frac{j!^t(\ell-j)!^t}{\ell!^t}\frac{1}{(\ell-j)!^t}\\
&\le 2^{N-1+\ell}\sum_{j=0}^{\ell}\frac{1}{(\ell-j)!^t} = 2^{N-1+\ell}\sum_{j=0}^{\ell}\frac{1}{j!^t}\\
&\le c2^{N-1+\ell}.
\end{aligned}$$

A próxima proposição e seus corolários são adaptações das Proposição 4.4 e do Corolário 4.5 do artigo de Bierstone e Milman [BM04]. Por questão de gosto pessoal, decidimos renunciar e reprovar estes resultados especificamente para o caso Gevrey.

Proposição A.0.6. *Sejam $k_1, \ldots, k_n$ inteiros positivos tais que $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$. Seja $k = k_1 + \cdots + k_n$. Então*

$$(p+k-1)!^t p!^{tk_1}\cdots(p+n-1)!^{tk_n} \le p!^{tk}(p+n-1)!^t$$

para todo $t > 0$ e todo $p \in \mathbb{Z}$ com $p \ge 1$.

Demonstração. Faremos a seguinte hipótese de indução em n: dado n vamos supor que a desigualdade é válida para todo possível valor de k e todo valor de p. Caso $n = 1$, então, $k = 1$ e a desigualdade é trivial. Suporemos que a desigualdade é verdadeira para todo $n < n_0$. Quando $k_{n_0} = 1$ a desigualdade é trivial, logo, trabalharemos sob a hipótese de que $k_{n_0} = 0$. Se $k_1 \neq 0$ definimos $k_1' = k_1 - 1$ e $k' = k - 1$ e assim $k' = k_1' + k_2 + \cdots + k_{n_0-1}$ e $n_0 - 1 = k_1' + 2k_2 + \cdots + (n_0-1)k_{n_0-1}$. Pela hipótese de indução, temos

$$(p + k' - 1)!^t p!^{tk_1'}(p + 1)!^{tk_2} \cdots (p + n_0 - 2)!^{tk_{n_0-1}} \leq p!^{tk'}(p + n_0 - 2)!^t,$$

logo

$$\begin{aligned}(p + k - 1)!^t p!^{tk_1} \cdots (p + n_0 - 2)!^{tk_{n_0-1}} &= p!^t \frac{(p + k - 1)!^t}{(p + k' - 1)!^t}(p + k' - 1)!^t p!^{tk_1'} \cdots (p + n_0 - 2)!^{tk_{n_0-1}} \\ &\leq p!^t \frac{(p + n_0 - 1)!^t}{(p + n_0 - 2)!^t} p!^{tk'}(p + n_0 - 2)!^t \\ &= p!^{tk}(p + n_0 - 1)!^t,\end{aligned}$$

notemos que na primeira desigualdade vem da hipótese de indução. Observemos ainda que como $k_{n_0} = 0$ a desigualdade acima é a mesma do enunciado.

Caso $k_1 = 0$ temos que $n_0 - k = k_2 + 2k_3 + \cdots + (n_0 - k)k_{n_0-k+1}$ o que nos diz que $k_m = 0$ para todo $n_0 - k + 1 < m \leq n_0$ e $k = k_2 + \cdots + k_{n_0-k+1}$. Sejam $n' = n_0 - k$, $k' = k$ e $k_1' = k_2, \ldots, k_{n_0-k}' = k_{n_0-k+1}$.

Pela hipótese de indução para $p + 1$, n', $k_1', \ldots, k_{n_0-k-1}'$ e k', temos

$$(p + 1 + k' - 1)!^t(p + 1)!^{tk_1'} \cdots (p + 1 + n' - 1)!^{tk_{n'}'} \leq (p + 1)!^{tk'}(p + 1 + n' - 1)!^t,$$

ou seja,

$$(p + k)!^t(p + 1)!^{tk_2} \cdots (p + n_0 - k)!^{tk_{n_0-k+1}} \leq (p + 1)!^{tk}(p + n_0 - k)!^t.$$

Lembremos que $k_1 = 0$ e $k_{n_0-k+2} = \cdots = k_{n_0} = 0$, donde podemos aplicar a desigualdade anterior

$$\begin{aligned}(p + k - 1)!^t p!^{tk_1} \ldots (p + n_0 - 1)!^{tk_{n_0}} &\leq \frac{(p + 1)!^{tk}}{(p + k)^t}(p + n_0 - k)!^t \\ &\leq p!^t(p + 1)!^{t(k-1)}(p + n_0 - k)!^t \\ &\leq p!^{t2}(p + 1)!^{t(k-2)}(p + n_0 - (k - 1))!^t \\ &\ldots \\ &\leq p!^{tk}(p + n_0 - 1)!^t\end{aligned}$$

na segunda desigualdade usamos que $p! > (p + 1)!/(p + k)$ e nas seguintes desigualdades usamos que $(r + 1)!^{t\ell}(r + s)!^t \leq r!^t(r + 1)^{t(\ell-1)}(r + s + 1)!^t$ para todo $r, s \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

O caso particular da proposição acima quando $p = 1$ é o que de fato nos interessa. Vamos enunciar este caso no seguinte corolário:

Corolário A.0.7. *Sejam $k_1, \ldots, k_n$ inteiros positivos tais que $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$ e seja $k = k_1 + \cdots + k_n$. Então*

$$k!^t 1!^{tk_1} \cdots n!^{tk_n} \leq n!^t$$

para todo $t > 0$.

E este corolário nos dá a seguinte desigualdade para multi-índices.

Corolário A.0.8. *Consideremos dois conjuntos de multi-índices $\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{Z}_+^N \setminus \{0\}$ e $\delta_1, \ldots, \delta_\ell \in \mathbb{Z}_+^N \setminus \{0\}$. Definimos $\kappa = \beta_1 + \cdots + \beta_\ell$ e $\alpha = |\beta_1|\delta_1 + \cdots + |\beta_\ell|\delta_\ell$, então*

$$|\kappa|!^t|\delta_1|!^{t|\beta_1|} \ldots |\delta_\ell|!^{t|\beta_\ell|} \leq |\alpha|!^t$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Seja $n = |\alpha|$ e definimos k_j como a soma de todo $|\beta_i|$ tal que $|\delta_i| = j$ para $j = 1, \dots, n$ e $k = k_1 + \cdots + k_n = |\kappa|$. Usando o Corolário A.0.7 temos

$$|\kappa|!^t 1!^{tk_1} \dots n!^{tk_n} \leq |\alpha|!^t$$

e, por fim, reescrevemos $j!^{tk_j} = \prod |\delta_i|!^{t|\beta_i|}$ onde produtório é sobre todos os δ_i tais que $|\delta_i| = j$ e temos a desigualdade desejada. $\square$

Apêndice B

Um resultado de aproximação para funções Gevrey segundo M.

Precisaremos de uma versão do Teorema de Baouendi-Treves para funções Gevrey com suporte compacto e para estruturas localmente integráveis de posto N. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja (U, Z) uma carta com $0 \in U$ e com Z uma função Gevrey de ordem s e satisfazendo as propriedades (2.16) e (4.1) com $\rho \in (0,1)$. Temos que (U, Z) define uma estrutura localmente integrável Gevrey de ordem s_0 e de posto N. O Teorema de Baouendi-Treves diz que as soluções da estrutura localmente integrável são aproximadas por polinômios em Z. Essa convergência ocorre em vários espaços de funções e aqui estaremos interessados na convergência em $G^s(U; \mathrm{M})$. Quando trabalhamos com uma estrutura de posto máximo o conceito de solução é satisfeito por vacuidade, isto é, toda ultradistribuição é automaticamente solução. O que faremos, então, é aproximar funções Gevrey segundo M de suporte compacto por funções Gevrey segundo M.

Para o nosso propósito basta provarmos o seguinte resultado:

Proposição B.0.9. *Seja $\varphi \in G^s_c(U; \mathrm{M})$ e consideremos*

$$\mathscr{E}_\delta[\varphi](y) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_U e^{i(Z(x)-Z(y)))\xi} e^{-\delta|\xi|^2} \varphi(x) \mathrm{d}Z(x) \mathrm{d}\xi.$$

Então segue que $\mathscr{E}_\delta[\varphi]$ converge para φ em $G^s(U; \mathrm{M})$ quando $\delta \longrightarrow 0$. Além disso, vale que, para todo $\epsilon > 0$, existe δ_0 tal que, se $0 < \delta < \delta_0$, vale $\|\mathscr{E}_\delta[\varphi] - \varphi\|_{\overline{W},h} \leq \epsilon \|\varphi\|_{\overline{V},h}$ para toda $\varphi \in G^{s,h}(\overline{V}; \mathrm{M})$ e para todo $W \subset\subset U$ aberto.

Demonstração. Procederemos como a prova do Teorema de Baouendi-Treves do livro [BCH08] apenas tomando os cuidados necessários para podermos usar a informação que φ é uma função em $G^s_c(U; \mathrm{M})$ quando necessário. Primeiro notemos que podemos estender φ para $\mathbb{R}^N$ e ainda podemos supor que a parte imaginária de Z, Φ, tem suporte compacto e assim estender Z fora de U como a identidade. Completando quadrados no expoente e integrando em ξ podemos reescrever $\mathscr{E}_\delta[\varphi]$ como:

$$\mathscr{G}_\tau[\varphi](y) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\tau\langle Z(y)-Z(x)\rangle^2} \varphi(x) \det Z_x(x) \mathrm{d}x,$$

onde $\tau = (2\sqrt{\delta})^{-1}$ donde τ tende a infinito quando δ tende a 0. Chamemos a atenção para o fato que como φ tem suporte compacto o Lema II.1.4 de [BCH08] nos diz que os campos M_j comutam com a $\mathscr{G}_\tau$, isto é,

$$\mathrm{M}^\alpha \mathscr{G}_\tau[\varphi](y) = \mathscr{G}_\tau[\mathrm{M}^\alpha \varphi](y).$$

Executaremos a seguinte mudança de variáveis $x \mapsto y + \tau^{-1/2}x$ para obtermos

$$\mathscr{G}_\tau[\mathrm{M}^\alpha \varphi](y) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\tau\langle Z(y)-Z(y+\tau^{-1/2}x)\rangle^2} \mathrm{M}^\alpha \varphi(y + \tau^{-1/2}x) \det Z_x(y + \tau^{-1/2}x) \mathrm{d}x$$

Usaremos também a seguinte identidade:

$$\mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y) = \frac{1}{\pi^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\langle Z_x(y)x\rangle^2}\mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y)\det Z_x(y)\mathrm{d}(x).$$

Deste modo iremos estudar a diferença

$$\mathscr{G}_{\tau}[\mathrm{M}^{\alpha}\varphi](y) - \mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y) = I_{\tau}^{\alpha}(y) + J_{\tau}^{\alpha}(y),$$

onde

$$I_{\tau}^{\alpha}(y) = \frac{1}{\pi^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\langle Z_x(y)x\rangle^2}\big(\mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y+\tau^{-1/2}x)\det Z_x(y+\tau^{-1/2}x) - \mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y)\det Z_x(y)\big)\mathrm{d}x$$

e

$$J_{\tau}^{\alpha}(y) = \frac{1}{\pi^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(e^{-\tau\langle Z(y)-Z(y+\tau^{-1/2}x)\rangle^2} - e^{-\langle Z_x(y)x\rangle^2}\Big)\mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y+\tau^{-1/2}x)\det Z_x(y+\tau^{-1/2}x)\mathrm{d}x.$$

Queremos provar que $\mathscr{G}_{\tau}\varphi - \varphi$ converge para 0 em $G^s(U;\mathrm{M})$, para tanto, é suficiente mostrar que existem $V_j \subset\subset U$ uma exaustão de U tal que, para todo j, existe $h_j > 0$ tal que, escolhido $\epsilon > 0$, existe τ_0 tal que se $\tau > \tau_0$, então

$$\|\mathscr{G}_{\tau}[\varphi] - \varphi\|_{\overline{V}_j,h_j} \leq \epsilon.$$

Provaremos ainda mais, escolhemos $V \subset\subset U$ um aberto e $h > 0$ o que provaremos é que se $W \subset\subset U$ então existe τ_0 tal que se $\tau > \tau_0$ vale que

$$\|\mathscr{G}_{\tau}[\varphi] - \varphi\|_{\overline{W},h_+} \leq \epsilon\|\varphi\|_{\overline{V},h} \tag{B.1}$$

para todo $h_+ > h$ e toda $\varphi \in G_c^{s,h}(\overline{V};\mathrm{M})$.

Para estimar $I_{\tau}(y)$ observemos que a hipótese (4.1) nos diz que $|\phi_x(y)| \leq \rho/2 \leq 1/2$

$$|e^{-\langle Z_x(y)x\rangle^2}| = e^{-|x|^2+|\phi_x(y)x|^2} \leq e^{-3|x|^2/4}.$$

Sabemos que as derivadas usuais podemos ser escritas a partir de $\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_N$ com coeficientes limitados no suporte de φ e logo obtemos

$$\begin{aligned}|D_j[(\mathrm{M}^{\alpha}\varphi)\det Z_x](y)| &= \Big|\sum_{l=1}^{N} a_l^j(y)(\mathrm{M}^{\alpha+e_l}\varphi)(y)\det Z_x(y) + \mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y)D_j\big(\det Z_x(y)\big)\Big| \\ &\leq \|\varphi\|_{\overline{V},h}\Big(h^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)!^s\Big|\sum_{l=1}^{N} a_l^j(y)\det Z_x(y)\Big| + h^{|\alpha|}|\alpha|!^s\Big|D_j\big(\det Z_x(y)\big)\Big|\Big) \\ &\leq \|\varphi\|_{\overline{V},h}Ch^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)!^s.\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathrm{supp}\varphi$ e assim temos em $\mathbb{R}^N$ que

$$\begin{aligned}|\mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y+\tau^{-1/2}x)\det Z_x(y+\tau^{-1/2}x) - \mathrm{M}^{\alpha}\varphi(y)\det Z_x(y)| &\leq \tau^{-1/2}|x|\sup_{\mathrm{supp}_{\varphi}}\big|\nabla[(\mathrm{M}^{\alpha}\varphi)\det Z_x]\big| \\ &\leq \|\varphi\|_{\overline{V},h}\tilde{C}\tau^{-1/2}|x|h^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)!^s.\end{aligned}$$

Juntando tudo o que foi feito temos

$$|I_{\tau}^{\alpha}(y)| = \|\varphi\|_{\overline{V},h}\Big(\frac{\tilde{C}\tau^{-1/2}}{\pi^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-3|x|^2/4}|x|\mathrm{d}x\Big)h^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)!^s.$$

Estimemos agora $|J^\alpha_\tau(y)|$. Nossa primeira observação neste sentido é que (4.1) implica que

$$|e^{-\tau\langle Z(y)-Z(y+\tau^{-1/2}x)\rangle^2} - e^{-\langle Z_x(y)x\rangle^2}| \leq 2e^{-3|x|^2/4}.$$

Para todo $K > 0$ denotemos por $A_K = \mathrm{supp}\varphi \cap B_K(0)$. Estimaremos a integral de J^α_τ dentro e fora de A_K:

$$\begin{aligned}
|J^\alpha_\tau(y)| &\leq C\|\varphi\|_{\overline{V},h}\bigg(\int_{A_K} e^{-3|x|^2/4}\mathrm{d}x + \int_{|x|<K}\big|e^{-\tau\langle Z(y)-Z(y+\tau^{-1/2}x)\rangle^2} - e^{-\langle Z_x(y)x\rangle^2}\big|\mathrm{d}x\bigg)h^{|\alpha|}|\alpha|!^s \\
&\leq C\|\varphi\|_{\overline{V},h} m(\mathrm{supp}\varphi)e^{-3K^2/4}h^{|\alpha|}|\alpha|!^s \\
&+ C\|\varphi\|_{\overline{V},h}h^{|\alpha|}|\alpha|!^s\int_{|x|<K}\big|e^{-\tau\langle Z(y)-Z(y+\tau^{-1/2}x)\rangle^2} - e^{-\langle Z_x(y)x\rangle^2}\big|\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

onde $m(\mathrm{supp}\varphi)$ é a medida de Lebesgue de $\mathrm{supp}\varphi$.

Seguindo a notação de [BCH08] denotamos $\zeta_1 = \big(Z(y) - Z(y+\tau^{-1/2}x)\big)/\tau^{-1/2}$ e $\zeta_2 = Z_x(y)x$. Temos que ζ_1 converge uniformemente em x para ζ_2 e também que $\mathrm{Re}\langle\zeta_1\rangle^2 \geq 0$ e $\mathrm{Re}\langle\zeta_2\rangle^2 \geq 0$. Como e^ζ é Lipschitz em $\mathrm{Re}\zeta \geq 0$ e $|\langle\zeta_1\rangle^2 - \langle\zeta_2\rangle^2| \leq C'\tau^{-1/2}$ temos que

$$\int_{|x|<K}\big|e^{-\tau\langle Z(y)-Z(y+\tau^{-1/2}x)\rangle^2} - e^{-\langle Z_x(y)x\rangle^2}\big|\mathrm{d}x \leq C'\tau^{-1/2}K^N.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, escolhemos $K > 0$ tal que $Cm(\mathrm{supp}\varphi)e^{-3K^2/4} \leq \epsilon/4$. Se τ_0 for escolhido grande o suficiente temos que $C'\tau^{-1/2}K^N \leq \epsilon/4$

Escolhemos agora $h_+ > h$ e denotamos por $b = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_+}\{h_+^{-|\alpha|}h^{|\alpha|}(|\alpha|+1)\}$. Assim podemos ainda aumentar τ_0, se necessário, para valer

$$\frac{\tilde{C}\tau^{-1/2}}{\pi^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-3|x|^2/4}|x|\mathrm{d}x \leq \frac{\epsilon}{4b},$$

para todo $\tau > \tau_0$.

Concluímos que

$$|\mathrm{M}^\alpha\mathscr{G}_\tau[\varphi](y) - \mathrm{M}^\alpha\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_{\overline{V},h}\bigg(\frac{\epsilon}{2}h^{|\alpha|}|\alpha|!^s + \frac{\epsilon}{4b}h^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)!^s\bigg)$$

para todo $\tau \geq \tau_0$. Agora dividimos ambos os lados por $h_+^{|\alpha|}|\alpha|!^s$. E temos

$$\frac{|\mathrm{M}^\alpha\mathscr{G}_\tau[\varphi](y) - \mathrm{M}^\alpha\varphi(y)|}{h_+^{|\alpha|}|\alpha|!^s} \leq \|\varphi\|_{\overline{V},h}\bigg(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4b}\frac{h^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)}{h_+^{|\alpha|}}\bigg) \leq \|\varphi\|_{\overline{V},h}\epsilon.$$

E conseguimos a desigualdade prometida. $\square$

Apêndice C

Uma estimativa para a função $M(\rho)$

Usando uma estimativa para a função associada a sequência $\{p!^s\}$ conseguimos um método mais simples de verificar se uma função inteira define um operador ultradiferencial de classe $\{p!^s\}$ ou de classe $(p!^2)$. Provemos a estimativa que usamos:

Proposição C.0.10. *Se $\rho^{1/s} \geq 2e$ então vale a seguinte estimativa:*

$$\frac{s}{2e}\rho^{1/s} \leq M(\rho) \leq s\rho^{1/s}. \tag{C.1}$$

Demonstração. Provemos primeiro que $M(\rho) \leq s\rho^{1/s}$ para todo $\rho > 0$. Para isto usamos a desigualdade (A.1) e vemos que

$$\begin{aligned} M(\rho) &= \sup_p \log\left(\frac{\rho^p}{p!^s}\right) \\ &\leq \sup_p \log e^{s\rho^{1/s}} = s\rho^{1/s}. \end{aligned}$$

Para concluir que $M(\rho) \geq (s/2e)\rho^{1/s}$, quando $\rho^{1/s} \geq 2e$, começamos usando que $p^p \geq p!$ para obter

$$\begin{aligned} M(\rho) &= \sup_p \log\left(\frac{\rho^p}{p!^s}\right) \\ &\geq \sup_p \log\left(\frac{\rho^{1/s}}{p}\right)^{ps} \\ &= \sup_p ps\log\left(\frac{\rho^{1/s}}{p}\right) \end{aligned}$$

O supremo calculado acima é obviamente maior que o valor da função calculado em $p_0 = \lfloor\frac{\rho^{1/s}}{e}\rfloor$ e assim conseguimos

$$M(\rho) \geq \left\lfloor\frac{\rho^{1/s}}{e}\right\rfloor s\log\left(\frac{\rho^{1/s}}{p_0}\right) \geq \frac{s}{2e}\rho^{1/s}$$

onde usamos a hipótese que $\rho^{1/s} \geq 2e$ para concluir que $\lfloor\frac{\rho^{1/s}}{e}\rfloor \geq \frac{\rho^{1/s}}{2e}$. $\square$

Referências Bibliográficas

[BCH08] S. Berhanu, P. D. Cordaro e J. Hounie. *An Introduction to Involutive Structures*, volume 6 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, 2008. 43, 65, 67

[BM04] E. Bierstone e P. Milman. Resolution of singularities in Denjoy-Carleman classes. *Selecta Math*, 10 no. 1:1–28, 2004. 20, 59, 62

[Cae01] P. A. S. Caetano. *Classes de Gevrey em Estruturas Hipo-Analíticas.* Ph.D. Thesis. Universidade de São Paulo, 2001. 1, 15, 17, 35, 39, 59

[CC11] P. A. S. Caetano e P. D. Cordaro. Gevrey solvability and Gevrey regularity in differential complexes associated to locally integrable structures. *Trans. Am. Math. Soc.*, 363:185–201, 2011. 1, 2, 27, 35, 37, 39, 46, 50, 53, 59

[CH90] P. D. Cordaro e J. Hounie. On local solvability of undetermined systems of vector fields. *American Journal of Mathematics*, 112:243–270, 1990. 59

[Cor00] P. D. Cordaro. Representation of hyperfunction solutions in a hypo-analytic structure. *Math. Z.*, 233:633–654, 2000. 1, 29, 39

[FM95] K. Fujita e M. Morimoto. Gevrey classes on compact real analytic riemannian manifolds. *Tokyo J. of Math.*, 18(2):341–355, 12 1995. 55, 59

[Kan72] A. Kaneko. Representation of hyperfunctions by measures and some of its applications. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 19:321–352, 1972. 29, 39

[KN62] T. Kotake e M. S. Narasimhan. Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator. *Bull. Soc. Math. France*, 90:449–471, 1962. 52

[Kom73] H. Komatsu. Ultradistributions 1: Structure theorems and a characterization. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 20:25–105, 1973. 1, 8, 12, 15, 25, 35, 39

[MN13] F. Malaspina e F. Nicola. Gevrey local solvability in locally integrable structures. *Annali di Matematica Pura ed Applicata,*, 193(5), 2013. 1

[Rod93] L. Rodino. *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces.* World Scientific, 1993. 59

[Tre92] F. Treves. *Hypo-analytic Structures: Local Theory*, volume 40 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, 1992. 47, 51

[Tre06] F. Treves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*, volume 40. Dover Publications, 2006. 23