Existência de soluções periódicas em alguns problemas não-lineares

Germán Jesus Lozada Cruz

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Equações Diferenciais**

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro da CAPES

-São Paulo, 18 de setembro de 2001-

Existencia de soluções periódicas em alguns problemas não-lineares

Este exemplar corresponde à redação final

da dissertação devidamente corrigida e

defendida por Germán Jesus Lozada Cruz

e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 18 de setembro de 2001.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Sérgio Muniz Oliva Filho - IME - USP
- Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho -ICMC-USP.

“ *A MEUS PAIS*: EDUARDO e AURELIA.”

Resumo

O propósito deste trabalho é estudar a existência de solução periódica para problemas de oscilação não linear de barras submetidas a forças periódicas. Estudaremos concretamente dois problemas, que serão interpretados como equações diferenciais abstratas de segunda ordem cuja classe foi considerada em Ceron e Lopes [1]. Para garantir a existência de solução periódica dos problemas considerados, mostraremos que a aplicação de Poincaré S é limitada dissipativa e α-contração. Isso garante a existência de um atrator invariante compacto e a existencia de um ponto fixo de S, o que é equivalente a existência da solução periódica.

Abstract

Our aim in this work is to study the existence of periodic solution to oscillation in nonlinear problems of beams submitted to periodic forcing. We will study concretely two problems, which can be interpreted as an abstract second order differential equation studied by Ceron and Lopes [1]. Our intention is to prove the existence of periodic solution to these problems. To this end, we will show that the Poincaré map S is uniform ultimately bounded and α-contraction. Thus we have the existence of invariant compact attractor, therefore S have a fixed point, which is equivalent the existence of a periodic solution.

Agradecimentos

- Em primeiro lugar quero agradecer a DEUS por ser tão generoso comigo e não abandonar-me nos momentos difíceis da minha vida.
- A meus pais: Eduardo e Aurélia por serem o meio pelo qual existo e estou aqui.
- A minhas irmãs: Elita e Gladys pelo seu apoio incondicional ate o dia de hoje e minhas sobrinhas Greyci e Camila por serem parte da minha familia.
- Ao professor Luiz Augusto Fernandes de Oliveira, pela sua valiosa orientação, sem a qual não teria sido possível a realização desta dissertação.
- Aos professores dos Departamentos de Matemática e Matemática Aplicada, e todos os demais professores do IME-USP, que contribuíram de alguma maneira na minha formação acadêmica.
- À CAPES pelo apoio financeiro no início do programa de mestrado.
- Aos professores do Departamento de Matemática da Universidad Nacional de Trujillo.
- Ao Professor Jorge Rebaza Vasquez, Doutorando no Georgia Institute of Technology, USA, pelo seu entusiasmo e a motivação para fazer o Mestrado.
- Aos Colegas Brasileiros, dentre eles Clezio, Mário, Glaucio, Raul, Daniel, Calixto, Walter Ronaldo (O Doido), Emivam entre outros por ter-me acolhido nesta instituição, por causa do tamanho da folha não é possível escrever o nome de todos por isso peço desculpas se quando lerem e não acharem seu nome não se sintam ofendidos.
- A todas as pessoas que de alguma maneira nos ajudaram a concluir este trabalho.
- A Dulcimar a mulher que chegou ate mim na hora exata.

⋆ Obrigado ⋆

Índice

Introdução

Neste trabalho pretendemos estudar a existência de solução periódica para alguns problemas de oscilações não lineares de barras flexíveis submetidas a forças periódicas.

Em primeiro lugar consideramos o problema

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + u_t - [a + \epsilon \int_0^\pi (u_x^2 + v_x^2)dx]u_{xx} = p(x,t) \\ v_{tt} + v_{xxxx} + v_t - [a + \epsilon \int_0^\pi (u_x^2 + v_x^2)dx]v_{xx} = q(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

$a \geq 0$, $\epsilon > 0$, t é o tempo, $x \in (0,\pi)$ é o eixo neutro da barra, u e v são as componentes do deslocamento de um ponto do eixo neutro, p e q são as componentes da força externa, que admitiremos serem funções 2π-periódicas na variável t, i.e., $p(x,t) = p(x,t+2\pi)$, $q(x,t) = q(x,t+2\pi)$, juntamente com as condições de fronteira

$$u(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0$$
$$v(0,t) = v(\pi,t) = v_{xx}(0,t) = v_{xx}(\pi,t) = 0.$$

O sistema de equações (1) modela o movimento não linear de uma barra simplesmente suportada com dois eixos de simetria perpendiculares, que estão forçados a ter o mesmo comprimento e foi considerado em [3] e [8]. As condições de fronteira correspondem à situação em que os extremos da barra estão apoiados. Cesari e Kanann [2] estudaram o problema de existência de soluções periódicas de problemas hiperbólicos não lineares e Fix e Kannan [3] seguiram as mesmas linhas do trabalho no estudo da equação (1). Estamos interessados em procurar soluções 2π-periódicas para a equação (1), i.e., $u(x,t) = u(x,t+2\pi)$, $v(x,t) = v(x,t+2\pi)$ e para isso utilizaremos a teoria de semigrupos para obter uma representação das soluções das equações que governam o movimento transversal da barra extensível.

O segundo problema que trataremos é o movimento de rotação de uma barra flexível governada pela equação

$$z_{\psi\psi} - \Big[\frac{(1-r^2)}{2} z_r\Big]_r + \Big\{[\frac{EI}{M\Omega^2 R^4}]z_{rr}\Big\}_{rr} = f, \tag{2}$$

onde r é a distancia radial não-dimensional, ψ é o ângulo azimutal, EI é uma propriedade de rigidez seccional, M é a massa e R é a espessura da barra. O lado direito f representa a carga aerodinâmica e é uma função de ψ, r, z_r, z_ψ, e z é o deslocamento da posição de equilíbrio, $z = 0$.

As condições de fronteira que consideraremos são

$$z(\psi, 0) = 0, \quad z_{rr}(\psi, 0) = 0,$$
$$z_{rr}(\psi, 1) = 0, \quad z_{rrr}(\psi, 1) = 0.$$

A carga aerodinâmica f é periódica (de periódo 2π) em relação a ψ e procuramos soluções 2π-periódicas de (2), i.e., $z(\psi + 2\pi, r) = z(\psi, r)$.

Mediante a substituição $r = x$, $\psi = at$, com $a^2 = \frac{M\Omega^2 R^4}{EI}$ a equação (2) se escreve como

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \frac{1}{2}a^2[\ (1 - x^2)u_x\ ]_x = \tilde{f}, \tag{3}$$

onde $\tilde{f} = a^2 f$ é T- periódica em t ($T = \frac{2\pi}{a}$), com as condições de fronteira

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0$$
$$u_{xx}(1, t) = u_{xxx}(1, t) = 0.$$

Quanto a natureza da função $\tilde{f}$, em (3), consideraremos os casos nos quais o sistema resultante se torna *dissipativo* num espaço de fase apropriado. Dessa forma, os problemas acima descritos podem ser interpretados como exemplos de equações diferenciais abstratas de segunda ordem da forma

$$u_{tt} - Cu + h(u_t) + g(u) = e(t), \tag{4}$$

que foram considerados em Ceron e Lopes [1].

A equação (4) é escrita como uma equação de evolução de primeira ordem

$$\dot{z} = Az + f(t, z), \tag{5}$$

onde

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}, \ f(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h(v) - g(u) + e(t) \end{pmatrix},$$

num espaço de Banach X, onde A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de operadores lineares em X. Sob certas hipóteses básicas em f, temos existência, unicidade, dependência contínua de solução fraca de (5), $z(t) = \varphi(t, t_0, z_0)$, $t > t_0$, $z(t_0) = z_0$.

Supondo que e seja p-periódica em t, nosso interêsse é estudar a existência de uma solução periódica de (4). Neste trabalho seguimos as mesmas idéias de Hale-Lopes [4] e Lopes [10], isto é, daremos condições sob as quais a aplicação de Poincaré $S : X \to X$, dada por $S(z_0) = \varphi(p, 0, z_0)$ é uma α-contração e limitada dissipativa.

No caso que o amortecimento é linear (isto é, quando h é linear), S pode ser escrita como a soma de uma contração com uma aplicação compacta e no caso em que o amortecimento é não linear (isto é, quando h é não linear), temos que S satisfaz $|Sx - Sy| \leq q|x - y| + \rho(x, y)$, onde $0 \leq q < 1$ e ρ é uma pseudo-métrica pré-compacta. Assim temos que S é uma α-contração, o que implica que S é assintoticamente lisa. Também, se as órbitas de conjuntos limitados são limitados e S é limitada dissipativa, então podemos concluir existência do atrator global compacto e a existência de um ponto fixo para S.

Vamos agora descrever o trabalho. No Capítulo 1 reunimos resultados sobre semigrupos, existência, unicidade, dependência contínua e continuação de soluções, α-contração e sistemas dissipativos e alguns resultados da teoria abstrata para a equação de evolução semilinear $\dot{u} = Au + f(t, u)$. Os resultados são aplicados a equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico com amortecimento. No Capítulo 2 estudamos alguns exemplos de equações de evolução. Finalmente, no Capítulo 3 os resultados serão aplicados às equações (1) e (3).

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos de teoria de Semigrupos de Operadores que serão úteis para nossos própositos. Definiremos e caracterizaremos o gerador infinitesimal de um semigrupo e enunciaremos e provaremos os teoremas principais deste capítulo : o teorema de Hille-Yosida e teorema de Lummer-Philips. Para maiores informações o leitor deve consultar Henry [7], assim como Martin [11], Pazy [12] e Walker [13]. A exposição a seguir baseia-se na de Henry.

1.1 Semigrupos

Sejam X um espaço de Banach real ou complexo e $\mathcal{L}(X) = \{T : X \to X : T \text{ é linear contínuo}\}$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual

$$\|T\| = \sup_{x\in X}\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\} = \sup_{\|x\|=1}\{\|Tx\| : x \in X\}.$$

Definição 1.1.1 *Um semigrupo de operadores lineares em X é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que:*

(i) $T(0) = I$ (Identidade em $\mathcal{L}(X)$);

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todos $t, s \geq 0$.

Definição 1.1.2 *Dizemos que o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é* **uniformemente contínuo** *se $\lim_{t\to 0^+} ||T(t) - I|| = 0$, isto é, $T(t)x \to x$, quando $t \to 0^+$ uniformemente para $\|x\| \leq 1$.*

Definição 1.1.3 *Dizemos que o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é* **fortemente continuo (ou C^0-semigrupo)** *se*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \text{ para cada } x \in X. \tag{1.1}$$

A equação (1.1) é equivalente a

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \text{para cada } x \in X.$$

Definição 1.1.4 *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X, seu* **gerador infinitesimal** *é o operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$, definido por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}.$$

Observe-se que $Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x-x}{t} = \frac{d^+}{dt}T(t)x|_{t=0}$, para $x \in \mathcal{D}(A)$.

Teorema 1.1.1 *Se $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ é um C^0-semigrupo, então existem constantes ω e $M \geq 0$ tal que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{para } 0 \leq t < \infty. \tag{1.2}$$

Demonstração. Vamos primeiramente mostrar que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitada para $0 \leq t \leq \eta$. Se isto fosse falso, então existiria uma seqüência (t_n) com $t_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| \geq n$. Do Teorema da Limitação Uniforme segue então que para algum $x \in X$ a seqüência $\{\|T(t_n)x\|\}$ é ilimitada, o que contraria (1.1). Logo, existem $M \geq 0$ e $\eta > 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \eta$.

Como $\|T(0)\| = 1$, $M \geq 1$; seja $\omega = \eta^{-1}\log M$. Dado $t \geq 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \delta < \eta$ tais que $t = n\eta + \delta$ e portanto, pela propriedade de semigrupo, temos

$$\|T(t)\| = \|T(n\eta)T(\delta)\| \leq \|T(\eta)^n\|\|T(\delta)\| \leq MM^n = MM^{\frac{t}{\eta}-\frac{\delta}{\eta}} \leq MM^{\frac{t}{\eta}} \leq Me^{\omega t} \qquad \square$$

Corolário 1.1.2 *Se $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ é um C^0-semigrupo, então para cada $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é continua de $\mathbb{R}^+$ em X.*

Teorema 1.1.3 *Sejam $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ um C^0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então*

a) para cada $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

b) para cada $x \in X$,

$$\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A) \ \text{e} \ A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x.$$

c) para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ *e* $t \geq 0, T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \text{ para } t > 0.$$

d) para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ *e* $t,\ s \geq 0$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Corolário 1.1.4 *Se* A *é o gerador infinitesimal de um* C^0*-semigrupo* $\{T(t) :\ t \geq 0\}$*, então* $\mathcal{D}(A)$ *é denso em* X *e* A *é um operador linear fechado.*

Na verdade um resultado mais forte é o seguinte.

Teorema 1.1.5 *Sejam* A *o gerador infinitesimal de um* C^0*-semigrupo* $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ *e* $\mathcal{D}(A^n)$ *o domínio de* A^n*. Então* $\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}(A^n)$ *é denso em* X*.*

Teorema de Hille-Yosida

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C^0-semigrupo. Segue-se do Teorema 1.1.1 que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para $t \geq 0$. Se $\omega = 0$, $\|T(t)\| \leq M$, o semigrupo é chamado *uniformemente limitado* e se, além de $\omega = 0$ tivermos $M = 1$, o semigrupo é chamado de *contrações.*

Lembremos que se A é um operador linear em X, não necessariamente limitado, o *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - A$ é inversível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em X.

A familia $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, é chamada de *resolvente* de A.

Teorema 1.1.6 *(***Hille-Yosida***) Um operador linear* A *é o gerador infinitesimal de um* C^0*-semigrupo de contrações se e somente se*

(i) A *é fechado e* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$*;*

(ii) o conjunto resolvente $\rho(A)$ *de* A *contém* $\mathbb{R}^+$ *e para todo* $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{1.3}$$

Demonstração. Se A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$, então A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ pelo Corolário 1.1.4. Para $\lambda > 0$ e $x \in X$, seja $R(\lambda) : X \to X$ definido por

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{1.4}$$

Como a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada em $[0, \infty)$, a integral existe como uma integral de Riemann imprópria e define um operador $R(\lambda)$ linear limitado satisfazendo

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Além disso, para $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h)T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $t + h = s$ na primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como o lado direito de (1.5) converge para $\lambda R(\lambda)x - x$, temos $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Assim

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Para $x \in \mathcal{D}(A)$ temos

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt \\ &= A(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt) = AR(\lambda)x. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Segue então que, para $x \in \mathcal{D}(A)$, temos $R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - x$ e portanto $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \forall x \in \mathcal{D}(A)$. Assim, para $\lambda > 0$, $R(\lambda)$ é o inverso de $\lambda I - A$, e satisfaz a estimativa desejada (1.3), o que demonstra que a condição é necessária.
Para mostrar que as condições (i) e (ii) são suficientes para que A seja o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações precisamos de alguns lemas.

Lema 1.1.7 *Suponha que A satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema* 1.1.6 *e seja $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Então*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \text{ para todo } x \in X \tag{1.7}$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $x \in \mathcal{D}(A)$. Então

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x + x - x\| \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \|R(\lambda, A)\|\|Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0, \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$ tem-se que $\lambda R(\lambda, A)x \to x$, quando $\lambda \to \infty$, para cada $x \in X$. □

Agora definamos, para cada $\lambda > 0$, a **aproximação de Yosida** A_λ de A por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda(\lambda AR(\lambda, A) - I) = \lambda^2 AR(\lambda, A) - \lambda I. \tag{1.8}$$

Obviamente, para cada $\lambda > 0$, A_λ é um operador linear contínuo em X e é conseqüência imediata do Lema 1.1.7 e de (1.6) que se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax. \tag{1.9}$$

Lema 1.1.8 *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema* 1.1.6. *Se A_λ é a Aproximação de Yosida de A, então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ}. Além disso, para cada $x \in X$, λ, $\mu > 0$, temos*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \text{ para todo } t \geq 0. \tag{1.10}$$

Demonstração. Decorre de (1.8) que A_λ é um operador linear limitado e assim A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo e^{tA_λ} uniformemente contínuo de operadores lineares em X. Também

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-\lambda t}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\| \leq e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t\|R(\lambda, A)\|} \leq e^{-\lambda t}e^{\lambda t} = 1 \tag{1.11}$$

e portanto $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$ é um semigrupo de contrações.

Para quaisquer λ, $\mu > 0$ se verifica $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$; logo

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x)ds\| \\ &\leq \int_0^1 \|tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x - tA_\mu e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\|ds \\ &\leq \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\|ds \\ &\leq \int_0^1 t\|A_\lambda x - A_\mu x\|ds \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|. \end{aligned}$$

□

Voltemos agora à demonstração do Teorema 1.1.6. Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Então

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\| \tag{1.12}$$

De (1.12) e do Lema 1.1.8 segue-se, que para $x \in \mathcal{D}(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge quando $\lambda \to \infty$ e a convergência é uniforme para t em intervalos limitados.
Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$, segue que para cada $x \in X$ e $t \geq 0$, existe

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \stackrel{\text{def}}{=} T(t)x. \tag{1.13}$$

O limite em (1.13) é de novo uniforme para t em intervalos limitados. De (1.13) segue imediatamente que o limite $T(t)$ satisfaz a propriedade de semigrupo, que $T(0) = I$ e que $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Também, para cada $x \in X$, a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é continua para $t \geq 0$ como limite uniforme de funções contínuas. Assim $T(t)$ é um C^0-semigrupo de contrações em X. Para concluir a demonstração, mostremos que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Então usando o Teorema 1.1.3 (parte d) temos

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{sA_\lambda}x)ds \\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Axds \end{aligned} \tag{1.14}$$

Esta ultima igualdade segue da convergência uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ a $T(t)Ax$ para t em intervalos limitados.

Seja B o gerador infinitesimal de $\{T(t): t \geq 0\}$ e seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Dividindo (1.14) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0$ concluímos que $x \in \mathcal{D}(B)$ e que $Bx = Ax$. Assim $A \subseteq B$ (B é uma extensão de A). Como B é o gerador infinitesimal de $T(t)$, segue das condições necessárias que $1 \in \rho(B)$. Como $A \subseteq B$, $(I - A)\mathcal{D}(A) = X = (I - B)\mathcal{D}(A)$.

Também $(I - B)\mathcal{D}(A) = X = (I - B)\mathcal{D}(B)$. Logo segue que $\mathcal{D}(B) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(A)$ e portanto $A = B$. Isto completa a prova ∎

Corolário 1.1.9 *Seja A o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações $\{T(t): t \geq 0\}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \quad \textit{para todo } x \in X. \tag{1.15}$$

Demonstração. Da demonstração do Teorema 1.1.6, segue que o lado direito de (1.15) define um C^0-semigrupo de contrações $S(t)$ cujo gerador infinitesimal é A; pela unicidade do gerador infinitesimal concluí-se que $T(t) = S(t)$. □

Corolário 1.1.10 *Seja A o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações $\{T(t): \ t \geq 0\}$. O conjunto resolvente de A contém o semi-plano $\{\lambda : \ Re\lambda > 0\}$ e para tais λ*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}. \tag{1.16}$$

Demonstração. O operador $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ está bem definido para λ satisfazendo Re $\lambda > 0$. Na prova da primeira parte Teorema 1.1.6 foi demonstrado que

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = (\lambda I - A)^{-1}$$

e portanto $\rho(A) \supset \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda > 0\}$. A estimativa é imediata. □

Teorema de Lumer-Phillips

Seja X um espaço de Banach real ou complexo e X^* seu dual. Indicaremos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x\rangle$ ou $\langle x, x^*\rangle$. Para cada $x \in X$ definimos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \ \mathrm{Re}\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}. \tag{1.17}$$

O Teorema de Hahn-Banach nos garante que $F(x) \neq \emptyset$.

Definição 1.1.5 *Um operador A é* **dissipativo** *se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Teorema 1.1.11 *Um operador A é dissipativo se e somente se*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\| \ \textit{para todo} \ x \in \mathcal{D}(A) \ \textit{e} \ \lambda > 0. \tag{1.18}$$

Demonstração. Suponha que A é dissipativo e sejam $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$. Se $x^* \in F(x)$ e Re $\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$, então

$$\begin{aligned} \|\lambda x - Ax\| \, \|x\| &\geq |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \geq \ \mathrm{Re} \ \langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \\ &\geq \mathrm{Re} \ (\langle \lambda x, x^*\rangle - \langle Ax, x^*\rangle) \geq \lambda\|x\|^2 \end{aligned}$$

e dai segue que (1.18) vale. Reciprocamente, seja $x \in \mathcal{D}(A)$ e suponhamos que $\lambda\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$, para todo $\lambda > 0$.

Sejam $y^*_\lambda \in F(\lambda x - Ax)$ e $z^*_\lambda = \frac{y^*_\lambda}{\|y^*_\lambda\|}$. Então $\|z^*_\lambda\| = 1$ e

$$\begin{aligned} \lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| &= \langle \lambda x - Ax, z^*_\lambda\rangle = \lambda \text{ Re } \langle x, z^*_\lambda\rangle - \text{ Re } \langle Ax, z^*_\lambda\rangle \\ &\leq \lambda\|x\| - \text{Re } \langle Ax, z^*_\lambda\rangle \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$. Portanto

$$\text{Re}\langle Ax, z^*_\lambda\rangle \leq 0 \;\text{ e }\; \text{Re } \langle x, z^*_\lambda\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

Como a bola unitária em X^* é compacta na topologia fraca, $\{z^*_\lambda : \lambda > 0\}$, com $\lambda \to \infty$ tem um ponto de acumulação $z^* \in X^*$, com $\|z^*\| \leq 1$. Da ultima desigualdade segue que Re $\langle Ax, z^*\rangle \leq 0$ e Re $\langle x, z^*\rangle \geq \|x\|$. Mas Re $\langle x, z^*\rangle \leq |\langle x, z^*\rangle| \leq \|x\|$ e portanto $\langle x, z^*\rangle = \|x\|$. Tomando $x^* = \|x\|z^*$ temos que $x^* \in F(x)$ e Re $\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$. Assim para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que Re $\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$ e A é dissipativo. □

Teorema 1.1.12 (**Lumer-Phillips**) *Seja A um operador linear em X com domínio denso.*

(i) Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - A)$, de $\lambda_0 I - A$ é X, então A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações em X.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações sobre X, então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e todo $x^* \in F(x)$, $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.

Demonstração. (i) Seja $\lambda > 0$. Sendo A dissipativo temos

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.19}$$

Já que $R(\lambda_0 I - A) = X$, de (1.19) com $\lambda = \lambda_0$, segue-se que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado e portanto fechado. Mas então $\lambda_0 I - A$ é fechado e assim A é fechado.

Se $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ então $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ e $\|R(\lambda, A)\| \leq \lambda^{-1}$ por (1.19). Segue então do Teorema de Hille-Yosida que A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações em X.

Para completar a prova de (i) resta mostrar que $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Consideremos o conjunto $\Lambda = \{\lambda;\ 0 < \lambda < \infty \ e \ R(\lambda I - A) = X\}$.

Se $\lambda \in \Lambda$, então por (1.19) $\lambda \in \rho(A)$. Como $\rho(A)$ é aberto, existe uma vizinhança V de λ tal que V está contida em $\rho(A)$. A intersecção desta vizinhança com a reta real está contida em

Λ e portanto Λ é aberto. Por outro lado, seja $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda > 0$. Para cada $y \in X$, existe $x_n \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - Ax_n = y. \tag{1.20}$$

De (1.19) segue que $\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1}\|y\| \leq C$ para alguma constante $C > 0$. Agora $\lambda_m\|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \leq |\lambda_n - \lambda_m|\|x_n\| \leq C|\lambda_n - \lambda_m|$.
Portanto $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{D}(A)$. Logo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Por (1.20), $Ax_n \to \lambda x - y$. Como A é fechado, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda x - y = Ax$. Portanto $R(\lambda I - A) = X$. Assim Λ também é fechado em $(0, \infty)$ e como $\lambda_0 \in \Lambda$ pela hipótese, segue que $\Lambda = (0, \infty)$.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações $T(t)$ em X, então, pelo Teorema de Hille-Yosida, $\rho(A) \supset]0, \infty[$ e portanto $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Ademais, se $x \in \mathcal{D}(A)$ e $x^* \in F(x)$ então $|\langle T(t)x, x^*\rangle| \leq \|T(t)x\|\ \|x^*\| \leq \|x\|^2$ e portanto

$$\mathrm{Re}\langle T(t)x - x, x^*\rangle = \mathrm{Re}(\langle T(t)x, x^*\rangle) - \langle x, x^*\rangle) \leq 0 \tag{1.21}$$

dividindo (1.21) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0$ obtemos $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$. □

Corolário 1.1.13 *Seja A um operador linear fechado densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações em X.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.12(i) é suficiente demonstrar que $R(I - A) = X$. Como A é dissipativo e fechado, $R(I - A)$ é um subespaço fechado de X. Se $R(I - A) \neq X$, então existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tal que $\langle x^*, x - Ax\rangle = 0$ para $x \in \mathcal{D}(A)$. Isto implica que $x^* - A^*x^* = 0$. Como A^* também é dissipativo, segue do Teorema 1.1.11 que $x^* = 0$, que contradiz a construção de x^*. Logo, $R(I - A) = X$. □

1.2 Equações de evolução abstratas

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t)),\ t > t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.22}$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ é o gerador de um C^0-semigrupo $\{e^{At} :\ t \geq 0\}$ de operadores num espaço de Banach X, $f : U \to X$ é contínua, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X$ e $(t_0, u_0) \in U$.

Definição 1.2.1 *Uma solução fraca de* (1.22) *é uma função contínua* $u : [t_0, t_1] \to X$ *que satisfaz a equação integral*

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds, \quad \textit{para } t \in [t_0, t_1]. \tag{1.23}$$

Definição 1.2.2 *Uma solução forte de* (1.22) *é uma função de classe* C^1 $u : (t_0, t_1) \to X$ *tal que* $(t, u(t)) \in U$ *e* $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *para* $t_0 < t < t_1$ *e satisfaz* (1.22) *em* (t_0, t_1).

Teorema 1.2.1 *Suponhamos que* A *é o gerador infinitesimal de um* C^0*-semigrupo* $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *no espaço de Banach* X, $U \subset \mathbb{R} \times X$ *aberto e* $f : U \to X$ *contínua e localmente Lipschitziana com relação a segunda variavel. Então, para todo* $(t_0, u_0) \in U$, *existem* $t_1 > t_0$ *e uma solução fraca* $u : [t_0, t_1] \to X$ *de* (1.22). *Além disso, se* $v : [t_0, t_2] \to X$ *é uma solução fraca de* (1.22), *temos* $u(t) = v(t)$, *para* $t_0 \leq t \leq \min\{t_1, t_2\}$.

Demonstração. Das hipóteses sobre f, existem $\delta > 0$ e constantes $L > 0$, $M > 0$ tais que $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$, $\|u - u_0\| < \delta$ implica que $(t, u) \in U$, $\|f(t, u)\| \leq M$ e se $\|v - u_0\| \leq \delta$, então $\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|$. Escolhamos $t_1 > t_0$ tal que $0 < t_1 - t_0 \leq \min\{\frac{\delta}{2MM_0}, \frac{1}{2M_0L}, \delta, \epsilon\}$, onde $\|e^{A\tau}\| \leq M_0$ em $0 \leq \tau \leq \delta$, $\|e^{A\tau}u_0 - u_0\| \leq \frac{\delta}{2}$ quando $0 \leq \tau \leq \epsilon$.

Seja $C = \{u : [t_0, t_1] \to X : u$ é contínua e $\|u(t) - u_0\| \leq \delta$ para $t_0 \leq t \leq t_1\}$. Definindo $\rho(u, v) = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|u(t) - v(t)\|$, para $u, v \in C$, tem-se que (C, ρ) é um espaço métrico completo. Agora definamos a aplicação $F : C \to C$ por

$$(Fu)(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds, \ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Então, para $u \in C$ e $t_0 \leq t \leq t_1$, temos

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t) - u_0\| &\leq \|e^{A(t-t_0)}u_0 - u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|e^{A(t-s)} f(s, u(s))\|ds \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \int_{t_0}^{t} M_0 M ds \leq \frac{\delta}{2} + M_0 M(t - t_0) \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}$$

Disto segue que $F(C) \subset C$. Por outro lado, se $u, v \in C$ e $t_0 \leq t \leq t_1$, então

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t) - (Fv)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|e^{A(t-s)}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|ds \\
&\leq M_0 L \int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\|ds \\
&\leq M_0 L \int_{t_0}^{t} \rho(u, v)ds \leq M_0 L \rho(u, v)(t - t_0) \\
&\leq \frac{1}{2}\rho(u, v).
\end{aligned}$$

Logo $\rho(Fu, Fv) \le \frac{1}{2}\rho(u, v)$, para quaisquer u, $v \in C$. Portanto F tem um único ponto fixo em C. Este ponto fixo é a solução desejada da equação integral (1.23).

Seja $v : [t_0, t_2] \to X$ outra solução de (1.22) e seja $t_3 = \min\{t_1, t_2\}$. Consideremos o conjunto $I = \{t \in [t_0, t_3] : u(s) = v(s),\ \text{para } t_0 \le s \le t\}$. Então, $I \ne \emptyset$ e limitado superiormente.

Seja $\alpha = \sup I$. Como I é fechado, $\alpha \in I$. Se $\alpha < t_3$, então $(\alpha, u(\alpha)) \in U$ e pela parte anterior, existe $\delta > 0$ tal que o problema $\dot{w} = Aw + f(t, w)$ com a condição inicial $w(\alpha) = u(\alpha)$ tem solução única w definida em $[\alpha, \alpha + \delta]$. Como u e v são soluções do problema acima, temos $u(t) = v(t) = w(t)$, para $t \in [\alpha, \alpha + \delta]$, o que contradiz a hipótese de $\alpha = \sup I$. Logo $\alpha = t_3$. □

Teorema 1.2.2 *Suponhamos f e A como nas hipóteses do Teorema* 1.2.1. *Então, para qualquer $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$, existe uma única solução fraca maximal $u : [t_0, t_1) \to X$, com $u(t_0) = u_0$; isto é, qualquer solução fraca com valor inicial u_0 no tempo t_0 é restrição de u a um subintervalo (possivelmente menor) de $[t_0, t_1)$.*

Para esta solução u, suponhamos que $t_1 < +\infty$. Então, ou existe $u_1 \in X$ tal que $(t_1, u_1) \in \partial U$ e $u(t) \to u_1$, quando $t \to t_1^-$, ou $\limsup_{t\to t_1^-} \frac{\|f(t,u(t))\|}{1+\|u(t)\|} = \infty$. Se $U = \mathbb{R} \times X$ e f transforma conjuntos fechados e limitados de U em conjuntos limitados, o segundo caso ocorre se $\limsup_{t\to t_1^-} \|u(t)\| = \infty$.

Demonstração. Seja $t_1 = \sup\{T > t_0$; existe uma solução fraca em $[t_0, T)$ através de $(t_0, u_0)\}$. Para qualquer t em $t_0 \le t < t_1$, definimos $u(t) =$ valor em t de uma solução fraca $v : [t_0, T) \to X$ para algum $T > t$, $v(t_0) = u_0$. Toda tal solução da o mesmo valor de $u(t)$ e segue que u é a solução fraca maximal.

Suponhamos que $t_1 < \infty$ e $u_1 = \lim\limits_{t\to t_1^-} u(t)$ existe; se $(t_1, u_1) \in U$, então existe uma solução fraca $\tilde{u} : [t_1, t_1 + \delta) \to X$, para algum $\delta > 0$ com $\tilde{u}(t_1) = u_1$, e então

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & \text{em } [t_0, t_1) \\ \tilde{u}(t), & \text{em } [t_1, t_1 + \delta) \end{cases}$$

é uma solução fraca em $[t_0, t_1 + \delta)$ com $u(t_0) = u_0$, o qual contradiz a definição de u. Assim, se o limite existe, então $(t_1, u_1) \in \partial U$.

Mostraremos que $\frac{\|f(t,u(t))\|}{1+\|u(t)\|} \le B < \infty$, $t_0 \le t < t_1$, implica que $\lim\limits_{t\to t_1^-} u(t)$ existe, o qual completará a demonstração. Pela desigualdade de Gronwall $\|u(t)\|$ é limitada, e portanto existe $B_1 > 0$ tal que $\|f(t, u(t))\| \le B_1$, para $t < t_1$. Mostremos que $\|u(t) - u(s)\| \to 0$, quando $t,\ s \to t_1^-$. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $M > 0$ tal que $\|e^{At}\| \le M$, para $t \le t_1 - t_0$ e escolhamos ϵ_1 em $0 < \epsilon_1 \le \frac{\epsilon}{4MB_1}$. Seja $t^* = t_1 - \epsilon_1$ e também escolhamos $\delta > 0$, $0 < \delta \le \epsilon_1$, tal que $\|(e^{A\tau} - e^{A\sigma})u(t^*)\| \le \frac{\epsilon}{2}$, se $0 \le \sigma,\ \tau \le \epsilon_1$ e $|\sigma - \tau| \le \delta$.

Então, para $t^* \leq t_1 - \delta \leq s,\ t < t_1$, temos

$$u(t) = e^{A(t-t^*)}u(t^*) + \int_{t^*}^{t} e^{A(t-r)} f(r, u(r))dr$$

e

$$u(s) = e^{A(s-t^*)}u(t^*) + \int_{t^*}^{s} e^{A(s-r)} f(r, u(r))dr$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(s)\| &\leq \|(e^{A(t-t^*)} - e^{A(s-t^*)})u(t^*)\| + \int_{t^*}^{t} \|(e^{A(t-r)} - e^{A(s-r)})f(r, u(r))\|dr \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + 2MB_1 \int_{t^*}^{t} dr \leq \frac{\epsilon}{2} + 2MB_1(t - t^*) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + 2MB_1\epsilon_1 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Pelo critério de Cauchy, o limite $\lim\limits_{t \to t_1^-} u(t)$ existe, o que completa a demonstração. □

Em geral, se f satisfaz as hipóteses do Teorema (1.2.1), a solução fraca de (1.22) não é necessariamente uma solução forte de (1.22). O seguinte teorema nos dá uma condição suficiente para que uma solução fraca seja uma solução forte.

Teorema 1.2.3 *(Regularidade). Seja A o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{e^{At} : t \geq 0\}$ em X. Se $f : [t_0, T] \times X \to X$ é continuamente diferenciável, então a solução fraca de* (1.22) *com $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ é uma solução forte de* (1.22).

Demonstração. Da continuidade diferenciável da função f, concluímos que f é continua em t e Lipschitz contínua em u, uniformemente contínua em t no intervalo $[t_0, T]$. Portanto o problema de valor inicial (1.22) possui uma única solução fraca u em $[t_0, T]$ (Teorema 1.2.1). Agora mostraremos que esta solução fraca é continuamente diferenciável em (t_0, T). Coloquemos $B(s) = \frac{\partial}{\partial u} f(s, u)$ e

$$g(t) = e^{A(t-t_0)} f(t_0, u(t_0)) - Ae^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s))ds. \tag{1.24}$$

Das afirmações anteriores concluímos que $g \in C([t_0, T], X)$ e $h(t, u) = B(t)u$ é contínua em t de $[t_0, T]$ em X e uniformemente Lipschitz contínua em u já que $s \mapsto B(s)$ é contínua de $[t_0, T]$ em $B(X)$.

Seja w a solução da equação integral

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)w(s)ds. \tag{1.25}$$

A existência e unicidade de $w \in C([t_0, T], X)$ segue de substituir $e^{A(t-t_0)}u_0$ por $g(t)$ na definição da F no Teorema 1.2.1. Além disso das definições acima, temos

$$f(s, u(s+h)) - f(s, u(s)) = B(s)(u(s+h) - u(s)) + w_1(s, h), \tag{1.26}$$

e

$$f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s+h)) = \frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s+h))h + w_2(s, h), \tag{1.27}$$

onde $h^{-1}\|w_i(s, h)\| \to 0$ quando $h \to 0$, uniformemente em $[t_0, T]$, para $i = 1, 2$. Se $w_h(t) = h^{-1}(u(t+h) - u(t) - w(t))$, então, da definição de u, (1.25), (1.26) e (1.27), obtemos

$$\begin{aligned} w_h(t) \;\; = \;\; & [\ h^{-1}(e^{A(t+h-t_0)}u_0 - e^{A(t-t_0)}u_0) + Ae^{(t-t_0)}u_0\ ] \\ & + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(w_1(s, h) + w_2(s, h))ds \\ & + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\Big(\frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s+h)) - \frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s))\Big)ds \\ & + \Big[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t+h-s)} f(s, u(s))ds - e^{A(t-t_0)} f(t_0, u_{t_0})\Big] \\ & + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)w_h(s)ds. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Quando $h \to 0$ a norma dos quatro primeiros têrmos do lado direito tendem a zero. Portanto temos

$$\|w_h(t)\| \leq \epsilon(h) + M\int_{t_0}^{t} \|w_h(s)\|ds, \tag{1.29}$$

onde $M = \max\{\|e^{A(t-s)}\|\ \|B(s)\| : t_0 \leq t \leq T\}$ e $\epsilon(h) \to 0$ quando $h \to 0$. Usando a desigualdade de Gronwall em (1.29) obtemos $\|w_h(t)\| \leq \epsilon(h)e^{(T-t_0)M}$ e portanto $\|w_h(t)\| \to 0$ quando $h \to 0$. Isto implica que $u(t)$ é diferenciável em $[t_0, T]$ e sua derivada é $w(t)$. Como $w \in C([t_0, T], X)$, segue que u é continuamente diferenciável em $[t_0, T]$.

Finalmente mostraremos que u é uma solução forte de (1.22). Como u é continuamente diferenciável, a função $s \mapsto f(s, u(s))$ é continuamente diferenciável em $[t_0, T]$. Segue então que

$$v(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds \tag{1.30}$$

é a solução forte do problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \quad t > t_0 \\ v(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{1.31}$$

Mas como u é uma solução fraca de (1.31), pela unicidade de solução fraca de (1.31), segue que $u = v$ em $[t_0, T]$. Assim u é uma solução forte de problema de valor inicial (1.22). $\square$

Sistemas Dinâmicos

2.1 Definições e notações

Nesta seção consideraremos um espaço métrico completo X e $T : X \to X$ uma aplicação contínua.

Definição 2.1.1 *Para qualquer $x \in X$, a órbita positiva $\gamma^+(x)$ de x é definida por*
$$\gamma^+(x) = \cup_{n \geq 0}\{T^n x\}.$$

Definição 2.1.2 *Para qualquer $x \in X$, a órbita negativa de x é definida como uma seqüência $\{x_j, j = 0, -1, -2, ...\}$ tal que $x_0 = x$ e $Tx_{j-1} = x_j$, para todo j.*

Definição 2.1.3 *Uma órbita completa por $x \in X$ é uma seqüência $\{x_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, ..\}$ tal que $x_0 = x$ e $Tx_{j-1} = x_j$ para todo j.*

Como T não é necessariamente injetora, se existe uma órbita negativa, ela não é necessariamente única. Assim podemos definir a órbita negativa em x como:

Definição 2.1.4 *A órbita negativa $\gamma^-(x)$ de x é definida como a união de todas as órbitas negativas de x. Então*
$$\gamma^-(x) = \cup_{n \geq 0} H(n, x)$$
onde $H(n, x) = \{y \in X;$ existe uma órbita negativa $\{x_{-j}, j = 0, 1, 2, \cdots\}$ de x com $x_{-n} = y\}$

A órbita completa $\gamma(x)$ de x é definida como $\gamma(x) = \gamma^-(x) \cup \gamma^+(x)$.

Para qualquer subconjunto $B \subset X$, definimos as órbita positiva, órbita negativa, órbita completa do conjunto B por $\gamma^+(B) = \cup_{x \in B}\gamma^+(x)$, $\gamma^-(B) = \cup_{x \in B}\gamma^-(x)$, $\gamma(B) = \cup_{x \in B}\gamma(x)$, respectivamente.

Definição 2.1.5 *Um conjunto $S \subset X$ se diz invariante sob T se para qualquer $x \in S$, a órbita completa de x existe e $\gamma(x) \subset S$.*

Definição 2.1.6 *Dizemos que um ponto y pertence ao conjunto ω-limite de $x \in X$, se existe uma sequência de números inteiros positivos (n_i) tendendo ao infinito tal que $T^{n_i}x \to y$, quando $n_i \to \infty$. O conjunto destes pontos limites será indicado por $\omega(x)$.*

Análogamente, define-se o conjunto α-limite de x, indicado por $\alpha(x)$.

Para um subconjunto $B \subset X$ qualquer definimos: O conjunto ω-limite de B como $\omega(B) = \cap_{n \geq 0} \overline{\cup_{k \geq n} T^k B}$ e o conjunto α-limite de B como $\alpha(B) = \cap_{n \geq 0} \overline{\cup_{k \geq n} H(k, B)}$.

Para um conjunto $B \subset X$, dizemos que $y \in \omega(B)$ se e só se existe uma seqüência $x_j \in B$ e uma seqüência de inteiros $n_j \to \infty$ tal que $T^{n_j} x_j \to y$, $j \to \infty$.

Definição 2.1.7 *Sejam $A, B \subset X$ subconjuntos de X. Dizemos que A atrai B sob T se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $n_0 = n_0(\epsilon, A, B)$ tal que $T^n B$ está contido numa ϵ-vizinhança de A para $n \geq n_0$.*

Lema 2.1.1 *Se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B)$ é invariante. Se ademais $\omega(B) \subset B$, então $\omega(B) = \cap_{n \geq 0} T^n B$.*

Lema 2.1.2 *Se $B \subset X$ é um subconjunto não vazio tal que $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.*

Se $\gamma^-(B)$ é não vazio e $\overline{\gamma^-(B)}$ é compacta, então $\alpha(B)$ é não vazio, compacto e invariante.

As demonstrações destes lemas encontram-se em Hale [5].

Definição 2.1.8 *Uma aplicação contínua $T : X \to X$ é assintoticamente lisa se, para qualquer conjunto $B \subset X$ não vazio, fechado, limitado para o qual $TB \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.*

Lema 2.1.3 *(caracterização de aplicações assintoticamente lisas)*
A aplicação $T : X \to X$ é assintoticamente lisa se e só se para qualquer conjunto $B \subset X$ não vazio, limitado e fechado, existe um conjunto $J = J(B) \subset X$ não vazio, compacto tal que $J(B)$ atrai o conjunto $L(B) = \{x \in B; T^n x \in B \text{ para } n \geq 0\}$.

Demonstração.

(a) (Suficiência). Seja $J(B)$ definido como no lema. Se B é não vazio , fechado e limitado com $TB \subset B$ então $B = L(B)$ e $J(B)$ atrai B. Claramente $L(B) \subset B$. Agora seja $x \in B$, então $T^n x \in B$, $\forall n \geq 0$ pois $TB \subset B$, dai $B \subset L(B)$. Assim concluí-se que T é assintoticamente lisa.

(b) (Necessidade). Se B é qualquer conjunto limitado e fechado e $L = L(B)$, $\overline{L} = \text{Cl}L$, então $TL \subset L$, $T\overline{L} \subset \overline{L}$. Assim T sendo assintoticamente lisa implica que existe um conjunto compacto $J = J(B)$ em $\overline{L}$ que atrai $\overline{L}$. Isto completa a prova.

$\square$

Corolário 2.1.4 *Se T é assintoticamente lisa e $B \subset X$ é um conjunto não vazio, limitado em X tal que $\gamma^+(B)$ é limitada, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B. Em particular, se para algum $x \in X$, $\gamma^+(x)$ é limitada e T é assintoticamente lisa, então $\gamma^+(x)$ é pré-compacta e $\omega(x)$ é não vazio, compacto e invariante.*

2.2 Medida de não-compacidade

Sejam X um espaço métrico completo e $\mathcal{B}$ a família de todos os subconjuntos limitados de X. Se $B \in \mathcal{B}$ não é relativamente compacto (= pré-compacto, por ser X completo) então existe um $\epsilon > 0$ tal que B não pode ser coberto por um número finito de ϵ-bolas e é então impossível cobrir B por um número finito de conjuntos de diâmetro $< \epsilon$. Lembremos que $\text{diam}\, B = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$ é chamado o diâmetro de B. Portanto é natural introduzir a seguinte definição.

Definição 2.2.1 *Se X é um espaço métrico completo e $\mathcal{B}$=$\{B \subset X$; B é limitado $\}$, então $\alpha : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ definida por*

$$\alpha(B) \;=\; \inf\{d > 0 : \; \textit{existe uma cobertura finita de } B \textit{ por conjuntos cujo diâmetro } < d\}$$

é chamada medida de não compacidade de Kuratowski.

Esta medida satisfaz propriedades interessantes que são enunciadas na seguinte

Proposição 2.2.1 *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita, $\mathcal{B}$=$\{B \subset X$; B é limitado $\}$, $\alpha : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$. Então*

(i) $\alpha(B) = 0$ *se e somente se* $\overline{B}$ *é compacto.*

(ii) α *é uma semi-norma, i.e.,* $\alpha(\lambda B) = |\lambda|\alpha(B)$ *e* $\alpha(B_1 + B_2) \leq \alpha(B_1) + \alpha(B_2)$.

(iii) $B_1 \subset B_2$ *implica* $\alpha(B_1) \leq \alpha(B_2)$; $\alpha(B_1 \cup B_2) = \max\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}$.

(iv) $\alpha(\overline{co}A) = \alpha(A)$, *onde* $\overline{co}A$ *é o fecho convexo de* A. *Também,* $\alpha(\overline{B}) = \alpha(B)$.

(v) Se $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *são subconjuntos de* X *não vazios, fechados, limitados tal que* $\alpha(A_j) \to 0$ *quando* $j \to \infty$, *então* $\cap_{j=1}^{\infty} A_j$ *é não vazio e compacto.*

Para a demonstração desta proposição o leitor pode consultar Martin [11] [pp 17–20].

Lema 2.2.2 *Se $T : X \to X$ é uma aplicação contínua e existe um conjunto compacto $K \subset X$ que atrai conjuntos compactos de X, então para qualquer conjunto compacto $H \subset X$, $\gamma^+(H)$ é pré-compacta.*

Demonstração. Para qualquer conjunto compacto $H \subset X$, o conjunto

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{n\geq 0} T^n H = \gamma^+(H)$$

é limitado pois K atrai conjuntos compactos. Sendo T contínua temos que $T^j H$ é compacto para qualquer j, assim temos que $\alpha(A) = \alpha(\cup_{n\geq j} T^n H)$ para qualquer j. Mas dado qualquer $\epsilon > 0$, temos que $\cup_{n\geq j} T^n H) \subset \mathcal{B}(K, \epsilon)$ para $j \geq n(K, \epsilon)$. Portanto $\alpha(A) \leq 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Isto implica que $\alpha(A) = 0$ e dai segue que A é pré-compacto. □

Definição 2.2.2 *Uma aplicação contínua $T : X \to X$ é uma α-contração se existe $k \in [0, 1)$ tal que para todo $A \in \mathcal{B}$ temos $\alpha(TA) \leq k\alpha(A)$ e T também é uma aplicação limitada.*

Definição 2.2.3 *Uma aplicação contínua $T : X \to X$ é α-condensante se para todo $A \in \mathcal{B}$, com $\alpha(A) > 0$, temos $\alpha(TA) < \alpha(A)$ e T também é uma aplicação limitada.*

Os seguintes resultados relacionam estas aplicações com aplicações assintoticamente lisas.

Lema 2.2.3 *Aplicações α-contrações são assintoticamente lisas.*

Lema 2.2.4 *Aplicações α-condensantes são assintoticamente lisas.*

As demonstrações destes lemas encontram-se em Hale [5].

A seguir daremos alguns exemplos de α-contrações. Para isso vamos primeiramente dar a seguinte definição:

Definição 2.2.4 *Uma pseudo-métrica ρ no espaço de Banach X é pré-compacta (com respeito a norma de X) se para qualquer seqüência de X limitada em norma tem uma subseqüência que é Cauchy em relação a ρ.*

Lema 2.2.5 *Se ρ é uma pseudo-métrica pré-compacta e $A \subset X$ é limitado na norma de X, então para todo $\epsilon > 0$, existe um número finito de conjuntos $C_1, C_2, \cdots, C_m$ tais que $A = \cup_{i=1}^n C_i$ e $\rho(x, y) < \epsilon$ se $x, y \in C_i, \quad i = 1, \cdots, n$.*

Teorema 2.2.6 *Seja $S : X \to X$ satisfazendo $|S(x) - S(y)| \leq q|x - y| + \rho(x, y)$, onde $q \geq 0$ é uma constante e ρ é uma pseudo-métrica pré-compacta. Então, $\alpha(S(A)) \leq q\alpha(A)$, para qualquer conjunto limitado A. Em particular, se $0 \leq q < 1$, então S é uma α-contração.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um subconjunto limitado qualquer e seja $\alpha(A) = c$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existem conjuntos $F_1, F_2, \cdots F_n$ tais que $A = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ e diam $F_i < c+\epsilon$, $i = 1, \cdots, n$.
Além disso, pelo lema anterior, existem conjuntos $C_1, \cdots, C_m$ tais que $A = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m$ tais que $\rho(x, y) < \epsilon$ se $x, y \in C_i \quad i = 1, \cdots, m$.
Então $A = \cup(F_i \cap C_j) \quad i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m$ e $S(A) = \cup S(F_i \cap C_j)$. Além disso para $x, y \in F_i \cap C_j$ temos $|S(x) - S(y)| \leq q|x - y| + \rho(x, y) \leq q(c + \epsilon) + \epsilon$ e então diam $S(F_i \cap F_j) \leq qc + \epsilon(q + 1)$. Como ϵ é arbitrário, temos $\alpha(S(A)) \leq q\alpha(A)$. □

Uma classe bastante conhecida de α-contrações é das transformações da forma $Q + U$, onde Q é uma contração e U é compacta. Esta classe está contida na dada pelo Teorema 2.2.6 acima, pois, como veremos, se U é compacta, então $\rho(x, y) = |U(x) - U(y)|$ é uma pseudo-métrica pré-compacta.

Teorema 2.2.7 *Se $S = Q + U$, onde Q é uma contração (isto é, $|Q(x) - Q(y)| \leq q|x - y|$, com $0 \leq q < 1$) e U é uma aplicação compacta, então S é uma α-contração (com o mesmo q).*

Demonstração. Sendo U uma aplicação compacta, $\rho(x, y) = |U(x) - U(y)|$ é uma pseudo-métrica pré-compacta. De fato, seja $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X, sendo U uma aplicação compacta, $\{Ux_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente $\{Ux_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, então dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $|Ux_{j_k} - Ux_{j_p}| < \epsilon$, para $j_k,\ j_p \geq N$. Disto segue que $\rho(x_{j_k}, x_{j_p}) < \epsilon$, para $j_k,\ j_p \geq N$. Logo ρ é uma pseudo-métrica pré-compacta. Além disso, $|S(x) - S(y)| \leq q|x - y| + \rho(x, y)$, $0 \leq q < 1$. Logo a conclusão do teorema segue-se do Teorema 2.2.6 □

Teorema 2.2.8 *Suponha que $S = Q + U$, onde U é uma aplicação compacta e Q é linear com raio espectral $r(Q) < 1$. Então, a menos de uma mudança na norma de X por outra equivalente, S é uma α-contração.*

Demonstração. Se Q é linear limitada com $r(Q) < 1$, existe uma norma equivalente $|\cdot|_1$ em X tal que $|Q|_1 < 1$. De fato, seja $x \in X$ e definamos $|x|_1 = |x| + |Qx| + \cdots + |Q^n x| + \cdots$. Como $r(Q) < 1$, existe r $(0 \leq r < 1)$ tal que $|Q^n x| < r^n |x|$ para $n \geq 0$. Logo $\sum_{n=0}^{\infty} |Q^n x| < \infty$.

Obviamente $|x|_1 \geq |x|$ e

$$\begin{aligned} |x|_1 &\leq |x| + |Q|\ |x| + \cdots + |Q^n|\ |x| + \cdots \\ &\leq |x|(\ 1 + |Q| + |Q^2| + \cdots + |Q^n| + \cdots) \\ &\leq |x|(\ 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots) \\ &\leq |x|\frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

Fazendo $k = \frac{1}{1-r} > 0$, temos que $|x|_1 \leq k|x|$. Portanto $|\cdot|_1$ é equivalente a $|\cdot|$.
Também, para $x \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{|Qx|_1}{|x|_1} &= \frac{|Qx| + |Q^2x| + \cdots + |Q^nx| + \cdots}{|x| + |Qx| + \cdots + |Q^nx| + \cdots} \\ &= \frac{|x| + |Qx| + |Q^2x| + \cdots + |Q^nx| + \cdots - |x|}{|x| + |Qx| + \cdots + |Q^nx| + \cdots} \\ &= 1 - \frac{|x|}{|x|_1} \leq 1 - \frac{1}{k} < 1, \end{aligned}$$

donde segue que $|Qx|_1 < |x|_1$. Logo, $|Q|_1 < 1$.
Portanto

$$\begin{aligned} |S(x) - S(y)|_1 &= |Q(x) - Q(y) + U(x) - U(y)|_1 \leq |Q(x) - Q(y)|_1 + |Q(x) - U(y)|_1 \\ &\leq |Q|_1 |x - y|_1 + |U(x) - U(y)|_1. \end{aligned}$$

Tomando $0 \leq q = |Q|_1 < 1$ e $\rho(x, y) = |U(x) - U(y)|_1$, conclui-se que S é uma α-contração. $\square$

2.3 Dissipatividade e atratores globais

Serão determinadas condições que garantam a existência de um conjunto invariante compacto que atrai conjunto limitados de X (espaço de Banach). Estas condições são expressas em termos das propriedades de dissipatividade e limitação da aplicação contínua $T : X \to X$.

Definição 2.3.1 *A aplicação T é chamada ponto dissipativa em X se existe um conjunto limitado $B \subset X$ tal que B atrai cada ponto $x \in X$.*

Definição 2.3.2 *A aplicação T é chamada limitada dissipativa em X se existe um conjunto limitado $B \subset X$ tal que B atrai cada conjunto limitado de X.*

Definição 2.3.3 *A aplicação T é chamada compacto dissipativa em X, se existe um conjunto limitado $B \subset X$ tal que B atrai cada conjunto compacto de X, i.e., se existe $B \in \mathcal{B}$ tal que para todo $K \subset X$ compacto, existe $N = N(B)$ tal que T^nK esta numa vizinhaça de B, para todo $n \geq N$*

Definição 2.3.4 *Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Um conjunto invariante compacto $A \subset X$ é chamado conjunto invariante compacto* **maximal** *se todo conjunto invariante compacto de T está contido em A.*

Definição 2.3.5 *Um conjunto invariante $\mathcal{A}$ é chamado* **atrator global** *se $\mathcal{A}$ é um conjunto invariante compacto e maximal que atrai cada conjunto limitado $B \subset X$.*

Os seguintes resultados mostram que atratores globais sempre são conexos.

Lema 2.3.1 *Se X é um espaço de Banach e J é um conjunto invariante compacto que atrai conjuntos compactos, então J é conexo.*

Demonstração. Se $\overline{co}J$ indica o fecho convexo de J, então $\overline{co}J$ é compacto (isto decorre de (iv) e (i) da proposição 2.2.1).

Suponhamos que J não é conexo. Então existem conjuntos abertos U, V com $U \cap J \neq \emptyset$, $V \cap J \neq \emptyset$, $J \subset U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Sendo T contínua, o conjunto $T^n(\overline{co}J)$ é conexo para cada $n \geq 0$. Como $J \subset T^n\overline{co}J$ para $n \geq 0$, temos $U \cap T^n(\overline{co}J) \neq \emptyset$, $V \cap T^n(\overline{co}J) \neq \emptyset$, para $n \geq 0$.
Como $T^n(\overline{co}J)$ é conexo, existe $x_n \in T^n(\overline{co}J)\backslash(U \cup V)$. Como J atrai $\{x_n : n \geq 0\}$ e este conjunto é compacto, podemos supor que $x_n \to x \in J$. Claramente $x \notin U \cup V$, o que é uma contradição. Logo, J é conexo. □

Teorema 2.3.2 *Se $T : X \to X$ é contínua e existe um conjunto compacto K não vazio que atrai conjuntos compactos de X e $\mathcal{A} = \cap_{n\geq 0} T^n K$, então*

(i) *$\mathcal{A}$ é independente de K e, se X é um espaço de Banach, $\mathcal{A}$ é conexo.*

(ii) *$\mathcal{A}$ é maximal, compacto e invariante.*

(iii) *$\mathcal{A}$ é estável e atrai conjuntos compactos de X.*

Se, além disso, T é assintóticamente lisa, então

(iv) *para qualquer conjunto compacto H de X, existe uma vizinhança H_1 de H tal que $\gamma^+(H_1)$ é limitada e $\mathcal{A}$ atrai H_1.*

(v) *Se C é qualquer subconjunto de X tal que $\gamma^+(C)$ é limitada, então $\mathcal{A}$ atrai C.*

Corolário 2.3.3 *Se T é assintoticamente lisa, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*i*) *Existe um conjunto compacto que atrai conjuntos compactos de X.*

(*ii*) *Existe um conjunto compacto que atrai uma vizinhança de cada conjunto compacto de X.*

Lema 2.3.4 *Seja T assintoticamente lisa e ponto dissipativa. Se a órbita de qualquer conjunto compacto é limitada então T é localmente compacto dissipativa. Se a órbita de qualquer conjunto limitado é limitada, então T é limitada dissipativa.*

Demonstração. Seja B um conjunto limitado e fechado que atrai pontos de X e seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Então, U atrai pontos de X e $\gamma^+(U)$ é limitada. Como $T\gamma^+(U) \subset \gamma^+(U)$ e T é assintoticamente lisa, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{U}$ tal que K atrai U e também atrai pontos de X. O conjunto K atrai-se a si mesmo e portanto $\gamma^+(U)$ é pré-compacto. Se $J = \omega(K)$, então J é um conjunto invariante compacto que atrai pontos de X.

Suponhamos agora que a órbita de qualquer conjunto compacto é limitada. Primeiro mostraremos que existe uma vizinhança V de J tal que $\gamma^+(V)$ é limitada. Se isto não acontece, existe uma seqüência $x_j \in X$ e uma seqüência de inteiros $k_j \to \infty$ e um y em J tais que $\lim_{j\to\infty} x_j = y$ e $|T^{k_j} x_j| \to \infty$, $j \to \infty$. Mas então $\overline{\{x_j, j \geq 1\}}$ é um conjunto compacto com $\gamma^+(\overline{\{x_j, j \geq 1\}})$ não limitado. Isto é uma contradição. Assim, existe uma vizinhança V de J tal que $\gamma^+(V)$ é limitada. Como J atrai pontos de X e T é continua, para qualquer $x \in X$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}(x)$ de x e um inteiro n_0 tal que $T^n\mathcal{O}(x) \subset \gamma^+(V)$ para $n \geq n_0$, isto é, $\gamma^+(V)$ atrai $\mathcal{O}(x)$. Para qualquer conjunto compacto $H \subset X$, podemos achar um recobrimento finito de H, e assim um conjunto aberto H_1 contendo H, tal que $\gamma^+(V)$ atrai H_1. Assim, T é localmente compacto disspativa.

Suponhamos agora que as órbitas de conjuntos limitados são limitados. Então as órbitas de conjuntos compactos são limitadas e T é compacto dissipativo pela demonstração acima. Disto temos que existe um conjunto invariante compacto e maximal que atrai conjuntos limitados. Assim T é limitada disipativa. □

Como uma conseqüência deste lema, temos o seguinte resultado, que é freqüentemente usado nas aplicações.

Teorema 2.3.5 *Se T é uma aplicação assintoticamente lisa, ponto dissipativa e órbitas de conjuntos limitados são limitadas, então existe um atrator $\mathcal{A}$ global conexo.*

Demonstração. Do Lema anterior segue que T é compacto dissipativa. Logo existe um conjunto invariante compacto K que atrai conjuntos compactos. Portanto, $\mathcal{A} = \cap_{n\geq 0} T^n K$ é um atrator global conexo. □

Do Lema 2.2.3 temos que α-contrações são aplicações assintoticamente lisas; logo o Teorema 2.3.5 vale trocando T assintoticamente lisa por α-contrações.

Teoremas de Pontos Fixos

Seja X um espaço de Banach e $T : X \to X$ uma aplicação contínua.

O propósito aqui é demonstrar o seguinte

Teorema 2.3.6 *Se T é α-condensante e compacto dissipativa, então T tem um ponto fixo.*

Para a demonstração do Teorema 2.3.6 faremos uso do seguinte resultado, devido a Horn.

Teorema 2.3.7 ($Horn$[9]) *Sejam $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2$ subconjunto convexos de X com S_0, S_2 compactos e S_1 aberto em S_2. Seja $T : S_2 \to X$ uma aplicação contínua tal que para algum inteiro $m > 0$*

(1) $T^j S_1 \subseteq S_2$ *para* $0 \leq j \leq m-1$ *e*

(2) $T^j S_1 \subseteq S_0$ *para* $m \leq j \leq 2m-1$.

Então T tem um ponto fixo em S_0.

Os seguintes resultados serão necessários na demonstração do Teorema 2.3.7

Lema 2.3.8 *Seja X um espaço de Banach e $T : K \subset\to K$ uma aplicação uniformemente contínua. Para qualquer inteiro $m > 0$ e qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, se $S : D \subset K \to D$ e $\|S(x) - T(x)\| \leq \delta$ en D, então $\|S^j(x) - T^j(x)\| \leq \epsilon$ em D para $1 \leq j \leq m$*

Lema 2.3.9 ($Granas$) *Existe uma retração de qualquer espaço de Banach sobre qualquer subconjunto fechado, separavel e convexo. Em particular existe uma retração de um espaço de Banach sobre qualquer subconjunto compacto e convexo.*

Lema 2.3.10 *Seja X um espaço de Banach de dimensão dinita e seja $S_0 \subset S_{-1} \subset S_2$ subconjuntos limitados convexos de X tais que S_0 e S_2 são fechados e S_1 é uma vizinhança de S_0 relativa a S_2. Seja $T : S_2 \to X$ uma aplicação contínua tal que para ququer inteiro $m > 0$*

(1) $T^j S_1 \subseteq S_2$ *para* $0 \leq j \leq m-1$ *e*

(2) $T^j S_1 \subseteq S_0$ *para* $m \leq j \leq 2m-1$.

Então T tem um ponto fixo em S_0.

As demonstração dos lemas acima encontram-se em (Horn [9]).

Demonstração do Teorema 2.3.7 Podemos supor que $T(S_2) \subset S_2$. De fato, se esse não fosse o caso, então pelo Lema 2.3.9, existe uma retração $r : X \to S_2$; definindo a aplicação $\tilde{T} = r \circ T$, obtemos uma aplicação $\tilde{T}$ satisfazendo as propriedades (1) e (2) do teorema e cujos pontos fixos que estão em S_0 são também pontos fixos de T.

Como S_1 é aberto em S_2 e S_0 é compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $N_\epsilon(S_0) \cap S_2 \subset S_1$ ($N_\epsilon(S_0)$ é uma vizinhança do conjunto S_0). Pelo Lema 2.3.8, existe $\eta > 0$ tal que, para qualquer aplicação S definida num subconjunto $D \subset S_2$, temos $\|S^j(x) - T^j(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$ para $1 \leq j \leq 2m$ e para todo $x \in D$, sempre que $\|S(x) - T(x)\| < \eta$, para $x \in D$.

Seja $\{x_i\}_{i=1}^n$ um coleção finita de pontos em S_2 tal que para algum j, $x_j \in S_0$, de tal maneira que para qualquer $x \in S_2$ exista um x_i com $\|x - x_i\| < \frac{\eta}{5}$. Consideremos $H = \langle x_1, x_1, ..., x_n \rangle$ o espaço gerado por x_i, $i = 1, ..., n$. Definamos $R_0 = S_0 \cap H$, $R_1 = S_1 \cap H$, $R_2 = S_2 \cap H$. Então R_0, R_1 e R_2 são subconjuntos convexos não vazios em H. Portanto, existe uma triangulação $L : \mathcal{K} \mapsto R_2$, para algum complexo $\mathcal{K}$. Como T é uniformemente contínua em R_2, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| < \frac{\eta}{5}$ sempre que $\|x - y\| < \delta$. Podemos supor que a medida da triangulação seja menor que δ, já que poderíamos obter essa propriedade através de subdivisões baricêntricas de $\mathcal{K}$.

Definamos a aplicação $G : R_2 \mapsto R_2$ da seguinte maneira. Para cada vértice $v \in R_2$ da triangulação, seja $G(v)$ um dos x_i tais que $\|x_i - T(v)\| < \frac{\eta}{5}$. Agora estendemos G para todo R_2 pela seguinte regra: se $x \in R_2$ e $L^{-1}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L^{-1}(v_i)$, então $G(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G(v_i)$.

Agora, se v_i e v_j são vértices de um simplexo comum em R_2, temos

$$\begin{aligned} \|G(v_i) - G(v_j)\| &\leq \|G(v_i) - T(v_i)\| + \|T(v_i) - T(v_j)\| + \|T(v_j) - G(v_j)\| \\ &< \frac{\eta}{5} + \frac{\eta}{5} + \frac{\eta}{5} = \frac{3\eta}{5}. \end{aligned}$$

Assim, se x e y são dois pontos quaisquer em R_2 contidos no mesmo simplexo de $\mathcal{K}$, então também temos $\|G(x) - G(y)\| < \frac{3\eta}{5}$, já que a distância entre $G(x)$ e $G(y)$ não é maior que o máximo entre as distâncias das imagens por G de quaisquer dois vértices contidos no mesmo simplexo. Portanto, para qualquer $x \in R_2$, temos

$$\begin{aligned} \|T(x) - G(x)\| &\leq \|T(x) - T(u)\| + \|T(u) - G(u)\| + \|G(u) - G(x)\| \\ &< \frac{\eta}{5} + \frac{\eta}{5} + \frac{3\eta}{5} = \eta, \end{aligned}$$

onde u é qualquer vértice de um simplexo contendo x.

Disto e mais a hipótese (2), tem-se que

$$G^j(R_1) = G^j(S_1 \cap H) \subset N_{\frac{\epsilon}{2}}(T^j(R_1)) \subset N_{\frac{\epsilon}{2}}(T^j(S_1)) \subset N_{\frac{\epsilon}{2}}(S_0), \text{ para } m \leq j \leq 2m-1.$$

Mas $G : R_2 \to R_2$ e portanto temos

$$G^j(R_1) \subset N_{\frac{\epsilon}{2}}(S_0) \cap R_2 = N_{\frac{\epsilon}{2}}(R_0) \cap R_2, \text{ para } m \leq j \leq 2m-1.$$

Seja $R_0' = N_{\frac{\epsilon}{2}}(R_0) \cap R_2$. Então R_0' é fechado e $N_{\frac{\epsilon}{2}}(R_0') \cap H \subset R_1$. Mas $G^j(R_1) \subset R_0'$, para $m \leq j \leq 2m-1$. Usando agora o Lema 2.3.10, concluímos que G tem um ponto fixo $y \in R_0' \subset S_0$.

Repetindo o argumento anterior, trocando ϵ por uma sequência $\epsilon_n \to 0$, obtemos uma sequência de aplicações G_n e uma sequência (y_n) de pontos fixos de G_n tais que $y_n \in S_0$. Como S_0 é compacto, existe uma subseqüência $y_{n_i} \to y_0 \in S_0$. Então $T(y_0) = \lim_{i\to\infty} G_{n_i}(y_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} y_{n_i} = y_0$ e $y_0 \in S_0$ é um ponto fixo de T. □

Também necessitaremos dos seguintes resultados

Lema 2.3.11 *Suponhamos que $K \subseteq B \subseteq S \subset X$ são subconjuntos convexos com K compacto, S fechado e limitado e B aberto em S. Se $T : S \to X$ é contínua, $T^j B \subset S$, $j \geq 0$ e K atrai pontos de B, então existe um subconjunto A de S, convexo, fechado e limitado tal que*

$$A = \overline{co}[\cup_{j\geq 1} T^j(B \cap A)], \quad A \cap K \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Demonstração. Consideremos a familia $\mathcal{F} = \{L \subset S : L$ é convexo, fechado e limitado, $T^j(B \cap L) \subset L, \forall j \geq 1$ e $L \cap K \neq \emptyset\}$. $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $S \in \mathcal{F}$. Se $L \in \mathcal{F}$, seja

$$L_1 = \overline{co}[\cup_{j\geq 1} T^j(B \cap A)].$$

Como K atrai pontos de B, existe uma seqüência $x_n \in L_1$ tal que $x_n \to K$, quando $n \to \infty$. Portanto $\overline{L_1} \cap K \neq \emptyset$. Por outro lado L_1 é fechado e então $L_1 \cap K \neq \emptyset$.

Também, L_1 é convexo e $L_1 \subseteq S$. Como $L \in \mathcal{F}$, temos $L_1 \subset L$ e portanto $B \cap L_1 \subset B \cap L$ e dai, $T^j(B \cap L_1) \subset T^j(B \cap L) \subset L_1$, para todo $j \geq 1$. Assim, $L_1 \in \mathcal{F}$ e um elemento minimal $A \in \mathcal{F}$ satisfará as condições do Lema. Para mostrar que tal elemento existe, consideremos uma familia $(L_\alpha)_{\alpha\in I}$ de conjuntos totalmente ordenada em $\mathcal{F}$. O conjunto $L = \cap_{\alpha\in I} L_\alpha$ é fechado, convexo e está contido em S. Também, $T^j(B \cap L) \subset T^j(B \cap L_\alpha) \subset L_\alpha$, para todo $\alpha \in I$ e $j \geq 1$. Assim, $T^j(B \cap L) \subset L$, para $j \geq 1$. Se J é qualquer subconjunto finito de I, temos que $K \cap (\cap_{\alpha\in J} L_\alpha) \neq \emptyset$. Como K é compacto, segue que $K \cap (\cap_{\alpha\in I} L_\alpha) \neq \emptyset$. Assim, $L \in \mathcal{F}$ e pelo Lema de Zorn temos a conclusão do Lema. □

Lema 2.3.12 *Suponhamos que $K \subseteq B \subseteq S \subset X$ são subconjuntos convexos com K compacto, S fechado e limitado e B aberto em S. Se $T : S \to X$ é contínua, $T^j B \subset S$, $j \geq 0$ e K atrai conjuntos compactos de B e o conjunto A do Lema* 2.3.11 *é compacto, então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Como K é compacto e convexo, o conjunto B pode ser tomado como $B = \mathcal{B}(K,\epsilon) \cap S$, onde $\epsilon > 0$ e $\mathcal{B}(K,\epsilon) = \{x \in X : \text{dist }(K,x) < \epsilon\}$. Seja $S_0 = A \cap \overline{\mathcal{B}(K,\frac{\epsilon}{2})}$, $S_1 = A \cap \overline{\mathcal{B}(K,\epsilon)}$ e $S_2 = A$. Então, $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2$ são subconjuntos convexos de X com S_0, S_2 compactos e S_1 aberto em S_2. Também, $T^j S_1 = T^j(A \cap \mathcal{B}(K,\epsilon)) \subseteq A$, $j \geq 1$, e $\gamma^+(S_1) \subseteq A$. Portanto, $T^j S_1 \subseteq S_2$ para $j \geq 1$. Também, a hipótese de que K atrai conjuntos compactos de B implica que existe um inteiro $n_1 = n_1(K,\epsilon)$ tal que $T^j S_1 \subseteq \mathcal{B}(K,\frac{\epsilon}{2})$ para $j \geq n_1$. Se $n_1 \geq 1$, então $T^j S_1 \subseteq A$, para $j \geq n_1$ e portanto $T^j S_1 \subseteq S_0$ para $j \geq n_1$. Agora, aplicando o Teorema 2.3.7, concluímos que a aplicação T tem um ponto fixo. □

Teorema 2.3.13 *Se T é α-condensante, então o conjunto A do Lema* 2.3.11 *é compacto.*

Demonstração. Se $\tilde{A} = \cup_{j\geq 1} T^j(B \cap A)$, então $\tilde{A} = T(B\cap A) \cup (\cup_{j\geq 2} T^j(B\cap A)) = T(B\cap A) \cup T(\tilde{A})$ e $\alpha(\tilde{A}) = \max\{\alpha(T(B \cap A)), \alpha(T(\tilde{A}))\} = \alpha(A)$, pois $A = \overline{co}[\cup_{j\geq 1} T^j(B \cap A)] = \overline{co}(\tilde{A})$, $\alpha(A) = \alpha(\overline{co}(\tilde{A})) = \alpha(\tilde{A})$, pela Proposição 2.2.1. Se $\alpha(A) > 0$, então $\alpha(T(\tilde{A})) < \alpha(\tilde{A}) = \alpha(A)$ e portanto, $\alpha(\tilde{A}) = \alpha(T(B\cap A)) = \alpha(A)$. Como $\alpha(T(B\cap A)) < \alpha(B\cap A)$, obtemos $\alpha(A) = \alpha(T(B\cap A)) < \alpha(B \cap A) \leq \alpha(A)$, que é uma contradição. Logo, $\alpha(A) = 0$ e, portanto, A é compacto. □

Agora demonstraremos o **Teorema 2.3.6**.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto invariante, compacto e maximal do Teorema 2.3.2 e definamos $K = \overline{co}\mathcal{A}$. Como toda aplicação α-condensante é assintóticamente lisa, pela segunda parte do Teorema 2.3.2 temos que existe uma vizinhança convexa B de K tal que $\gamma^+(B)$ é limitada e K atrai B. Se $S = \overline{co}\gamma^+(B)$, então S, B, K satisfazem as condições do Lema 2.3.11. Portanto, A de (2.1) existe. Agora pelo Lema 2.3.13, A é compacto e, pelo Lema 2.3.12, conclui-se que T tem um ponto fixo.

Do Teorema 2.3.6 e dos Lemas 2.2.4 e 2.3.4 temos o seguinte resultado

Corolário 2.3.14 *Se $T : X \to X$ é α-condensante, ponto dissipativa e a órbita de qualquer conjunto compacto é limitada, então T tem um ponto fixo.*

2.4 Exemplos

Os exemplos que consideraremos são dados por equações de evolução da forma (1.22), onde f satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.1. Suponhamos que f é p-periódica com relação a t, isto é, existe $p > 0$ $f(t+p,u) = f(t,u)$, para todos $t \in \mathbb{R}$ e $u \in X$. Queremos obter condições suficientes para concluir que (1.22) tem uma solução p-periódica. Para isso, consideraremos a aplicação período (ou aplicação de Poincaré) definida por $S(u_0) = u(p,0;u_0)$, onde $u(\cdot,0;u_0)$ indica a solução de (1.22). Obviamente, u_0 é condição inicial de uma solução p-periódica de (1.22) se e somente se u_0 é ponto fixo da aplicação S. É consequência imediata dos resultados da seção anterior o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1 *Se $S : X \to X$ é limitada dissipativa, α-contração e contínua então*

(a) *Existe um atrator invariante compacto,*

(b) *S tem um ponto fixo.*

Para verificar as hipóteses do teorema anterior, os resultados a seguir serão úteis.

Teorema 2.4.2 *Se $f(t,\cdot)$ é p-periódica em t, a equação* (1.22) *é limitada dissipativa e a aplicação de Poincaré $S(u_0) = u(p,0;u_0)$ é uma α-contração, então:*
(a) *existe um atrator invariante compacto;*
(b) *existe uma solução periódica com período p.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.4.1 é suficiente mostrar que S é limitada dissipativa. Por hipótese,

$$u(t) \;=\; e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s,u(s))ds \tag{2.2}$$

é limitada dissipativa, para $t \geq 0$. Em particular para $t = p$ temos que

$$Su_0 \;=\; e^{Ap}u_0 + \int_0^p e^{A(p-s)} f(s,u(s))ds \tag{2.3}$$

é limitada dissipativa. As conclusões seguem agora do Teorema 2.4.1 □

Corolário 2.4.3 *Se $f(t,u)$ é compacta, p-periódica em t, $p > 0$ e $r(e^{Ap}) < 1$ e a equação* (1.22) *é limitada dissipativa, então as conclusões do Teorema* 2.4.2 *também valem.*

Demonstração. É suficiente mostrar que S é uma α-contração. Definamos

$$K(u_0) = \int_0^p e^{A(p-s)} f(s,u_0)ds$$

e mostremos que $K : X \to X$ é uma aplicação compacta. Como (1.22) é limitada dissipativa segue que existe uma função $a : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua e crescente tal que, se $|u_0| \leq R$, então $|u(s,0,u_0)| \leq a(R)$, para $0 \leq s \leq p$. Sendo f compacta, o conjunto $\{f(s,u(s,0,u_0)); 0 \leq s \leq p, |u_0| \leq R\}$ tem fecho compacto. Conseqüêntemente, o conjunto $\{e^{A(p-s)}f(s,u(s,0,u_0)); 0 \leq s \leq p, |u_0| \leq R\}$ tem fecho compacto, pois a aplicação $(t,u) \mapsto e^{A(t-s)}u$ é contínua.

Como $\frac{1}{p}\int_0^p e^{A(p-s)}f(s,u(s,0,u_0))ds \in \overline{co}\{e^{A(p-s)}f(s,u(s,0,u_0)); 0 \leq s \leq p, |u_0| \leq R\}$, pelo Teorema de Mazur concluí-se que K é compacta.

Como $Su_0 = e^{Ap}u_0 + Ku_0$ é tal que e^{Ap} é linear com $r(e^{Ap}) < 1$ e K é compacto, pelo Teorema 2.2.8 concluímos que S é uma α - contração. Portanto, a conclusão segue do Teorema 2.4.2. $\square$

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $A \subset X$. O fecho convexo de A é o conjunto $\overline{co}(A)$ dado pela intersecção de todos os conjuntos convexos fechados que contém A.

Teorema 2.4.4 (Mazur) *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ un espaço de Banach e $A \subset X$ um subconjunto compacto. Então $\overline{co}(A)$ é compacto.*

Equações Hiperbólicas Abstratas

Estudaremos a existência de solução periódica da equação de segunda ordem

$$u_{tt} - Cu + h(u_t) + g(u) = e(t), \tag{2.4}$$

num espaço de Hilbert real H com produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e norma $|\cdot|$.

Fazendo $u_t = v$, (2.4) é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = Cu - h(v) - g(u) + e(t), \end{cases} \tag{2.5}$$

ou como uma equação de evolução abstrata

$$\dot{w} = Aw + f(t,w), \tag{2.6}$$

onde $w = (u,v)$, $Aw = (v, Cu)$ e $f(t,w) = (\ 0, -h(v) - g(u) + e(t)\ )$.

Em todo o resto desta seção, vamos admitir que $C : \mathcal{D}(C) \subset H \to H$ é um operador fechado com domínio denso, autoadjunto, definido negativo satisfazendo a seguinte condição: existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\langle Cu, u\rangle \leq -\lambda_1|u|^2$, para todo $u \in \mathcal{D}(C)$.

Sejam $X = \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}} \times H$ com o produto interno

$$\langle (u,v),(\tilde{u},\tilde{v})\rangle = \langle (-C)^{\frac{1}{2}}u, (-C)^{\frac{1}{2}}\tilde{u}\rangle + \langle v,\tilde{v}\rangle$$

e $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(-C) \times \mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}})$. Vale, então, seguinte resultado

Proposição 2.4.5 *A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações em X.*

Demonstração. Como $\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}})$ é denso em H, segue que $\mathcal{D}(A)$ é denso em X. Se (u_n, v_n) é uma sequência de pontos de $\mathcal{D}(A)$ tal que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ e $A(u_n, v_n) \to (\tilde{u}, \tilde{v})$, então $u_n \to u$ em $\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}})$, $v_n \to v$ em H, $v_n \to \tilde{u}$ em $\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}})$ e $Cu_n \to \tilde{v}$ em H. Como a inclusão de $\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}})$ em H é contínua, temos $\tilde{u} = v$. Como $u_n \in \mathcal{D}(C)$ e C é fechado, temos $u \in \mathcal{D}(C)$ e $Cu = \tilde{v}$. Logo, $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (v, Cu) = A(u, v)$, o que demonstra que A é fechado.

Por outro lado, para $w = (u, v) \in \mathcal{D}(A)$ e $z = (x, y) \in \mathcal{D}(A)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle Aw, z\rangle &= \langle (-C)^{\frac{1}{2}} v, (-C)^{\frac{1}{2}} x\rangle + \langle Cu, y\rangle = \langle v, -Cx\rangle - \langle (-C)^{\frac{1}{2}} (-C)^{\frac{1}{2}} u, y\rangle \\
&= -\langle (-C)^{\frac{1}{2}} u, (-C)^{\frac{1}{2}} y\rangle - \langle v, Cx\rangle = -\langle (u, v), (y, Cx)\rangle \\
&= \langle (u, v), -(y, Cx)\rangle = \langle w, -Az\rangle
\end{aligned}$$

Daqui segue que $A^* = -A$ e que $\langle Aw, w\rangle = 0$, para todo $w \in \mathcal{D}(A)$. Logo A e A^* são dissipativos. Segue agora do Corolário 1.1.13 que A é o gerador de um C^0-semigrupo de contrações. □

Se $h : H \to H$ e $g : \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}} \to H$ são localmente lipschitzianas, aplicam conjuntos limitados em conjuntos limitados e $e : \mathbb{R} \to H$ é contínua, então todas as hipóteses do Teorema 1.2.1 estão satisfeitas e, portanto, dado $(u_0, v_0) \in X$, existe uma única solução fraca $w(t) = (u(t), v(t))$ de (2.6) definida num intervalo $[0, b)$, com $b > 0$ (que depende de u_0 e v_0).

Teorema 2.4.6 *Além das hipóteses anteriores para as funções h, g e e, suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) *existe uma função $G : \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 limitada inferiormente e tal que $g(u) =$ grad $G(u)$ com relação ao produto escalar de H;*

(2) *existem $\epsilon > 0$ e $C_\epsilon > 0$ tal que $G(u) \le \epsilon |u|^2 + C_\epsilon$, para todo $u \in \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}}$;*

(3) *$\langle u, g(u)\rangle$ é limitada inferiormente em $\mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}}$;*

(4) *$h(0) = 0$ e existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha|v|^2 \le \langle v, h(v)\rangle$ e $|h(v)| \le \beta|v|$ para todo $v \in H$;*

(5) *$e : \mathbb{R} \to H$ é limitada.*

Então, o sistema (2.5) *é limitado dissipativo*

Demonstração. Consideremos o funcional $W : X \to \mathbb{R}$ definido por

$$W(u, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}} u|^2 + 2b\langle u, v\rangle + G(u)$$

onde $b > 0$ será escolhido mais adiante satisfazendo varias condições, dentre as quais, que a forma quadrática $W(u,v) - G(u)$ seja equivalente à norma de X.

Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2b\langle u, v\rangle &\geq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 - 2b|u||v| \\ &\geq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 - \frac{2b}{\sqrt{\lambda_1}}|(-C)^{\frac{1}{2}}u||v|.\end{aligned}$$

O lado direito da desigualdade será uma forma quadrática positiva definida se $\frac{1}{4} - \frac{b^2}{\lambda_1} > 0$ (i.e., $b^2 < \frac{\lambda_1}{4}$) e nesse caso, tomando $K_1 = \frac{1}{2} - \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}} > 0$, temos

$$\frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2b\langle u, v\rangle \geq K_1(\ |v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2\ )$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2b\langle u, v\rangle &\leq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2b|u||v| \\ &\leq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 + \frac{2b}{\sqrt{\lambda_1}}|(-C)^{\frac{1}{2}}u||v| \\ &\leq (\ \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}\ )(\ |v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2\ ).\end{aligned}$$

Portanto, tomando $b > 0$ tal que $b^2 < \frac{\lambda_1}{4}$, existem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$K_1(|v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2) \leq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2b\langle u, v\rangle \leq K_2(|v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2)$$

para qualquer $w = (u, v) \in X$.

Agora usando as hipóteses (1) e (2), existe uma constante $m > 0$ tal que $G(u) \geq -m$, para todo $u \in \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}}$ e portanto

$$K_1(|v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2) - m \leq W(u, v) \leq (K_2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1})(|v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2) + C_\epsilon \tag{2.7}$$

para todo $(u, v) \in X$.

Se $(u(t), v(t))$ é uma solução forte de (2.6), então a derivada de W ao longo de $(u(t), v(t))$ é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(u(t),v(t)) &= \langle v(t),\dot v(t)\rangle + \langle (-C)^{\frac{1}{2}}u(t),(-C)^{\frac{1}{2}}\dot u(t)\rangle + 2b\langle u(t),\dot v(t)\rangle + 2b\langle \dot u(t),v(t)\rangle \\
&\quad +\langle \mathrm{grad}G(u(t)),\dot u(t)\rangle \\
&= \langle v, Cu-h(v)-g(u)+e(t)\rangle + \langle (-C)^{\frac{1}{2}}u,(-C)^{\frac{1}{2}}v\rangle \\
&\quad +2b\langle u, Cu-h(v)-g(u)+e(t)\rangle + 2b\langle v,v\rangle + \langle g(u),v\rangle \\
&= \langle Cu,v\rangle - \langle v,h(v)\rangle + \langle v,e(t)\rangle + \langle -Cu,v\rangle + 2b\langle u,Cu\rangle - 2b\langle u,h(v)\rangle \\
&\quad -2b\langle u,g(u)\rangle + 2b\langle u,e(t)\rangle + 2b|v|^2 \\
&= 2b|v|^2 - \langle v,h(v)\rangle + 2b\langle u,Cu\rangle - 2b\langle u,h(v)\rangle - 2b\langle u,g(u)\rangle + \langle v,e(t)\rangle \\
&\quad +2b\langle u,e(t)\rangle
\end{aligned}$$

Como $\langle v,h(v)\rangle \geq \alpha|v|^2$ e $|\langle u,h(v)\rangle| \leq |u||h(v)| \leq \beta|u||v|$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(u(t),v(t)) &\leq (\ 2b-\alpha\ )|v|^2 + 2b\beta|u||v| + 2b\langle u,Cu\rangle - 2b\langle u,g(u)\rangle + \langle v,e(t)\rangle + 2b\langle u,e(t)\rangle \\
&\leq (\ 2b-\alpha\ )|v|^2 + \frac{2b\beta}{\sqrt{\lambda_1}}|(-C)^{\frac{1}{2}}u||v| - 2b|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 - 2b\langle u,g(u)\rangle + \langle v,e(t)\rangle \\
&\quad +2b\langle u,e(t)\rangle
\end{aligned}$$

Agora, vamos escolher $b>0$ para que

$$(\ 2b-\alpha\ )|v|^2 + \frac{2b\beta}{\sqrt{\lambda_1}}|(-C)^{\frac{1}{2}}u||v| - 2b|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq -\theta(\ |v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2\ ),\ \text{para algum } \theta>0.$$

O lado esquerdo da desigualdade acima será uma forma quadrática negativa definida se

$$2b(\ \alpha-2b\ ) - \frac{b^2\beta^2}{\lambda_1} > 0,$$

i.e., $b < \frac{2\alpha}{4+\frac{\beta^2}{\lambda_1}}$. Esta última desigualdade implica que que $b < \frac{\alpha}{2}$. Portanto, é suficiente que $b < \frac{2\alpha}{4+\frac{\beta^2}{\lambda_1}}$ para que

$$(\ 2b-\alpha\ )|v|^2 + \frac{2b\beta}{\sqrt{\lambda_1}}|(-C)^{\frac{1}{2}}u||v| - 2b|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq -\theta(\ |v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2\ )\ .$$

Tendo em conta as hipóteses (1), (2), (3) e (4) e usando desigualdades elementares, concluímos

$$\langle v,e(t)\rangle \leq |\langle v,e(t)\rangle| \leq |v||e(t)| \leq \frac{\delta^2}{2}|v|^2 + \frac{1}{2\delta^2}|e(t)|^2$$

e

$$\langle u,e(t)\rangle \leq |\langle u,e(t)\rangle| \leq |u||e(t)| \leq \frac{\delta^2}{2}|u|^2 + \frac{1}{2\delta^2}|e(t)|^2\ ,$$

para todo $\delta > 0$. Como $-\langle u, g(u)\rangle$ é limitada superiormente, existe uma constante $M_1 > 0$ tal que $-\langle u, g(u)\rangle \leq M_1$. Como $e(t)$ é limitada, existe uma constante $M_2 > 0$ tal que $|e(t)| \leq M_2$. Portanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(u(t),v(t)) &\leq -\theta(|v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2) + \frac{\delta^2}{2}|v|^2 + \frac{1}{2\delta^2}M_2^2 + M_1 + \frac{\delta^2}{2}|u|^2 + \frac{1}{2\delta^2}M_2^2 \\ &\leq -\theta(|v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2) + \frac{\delta^2}{2}|v|^2 + \frac{\delta^2}{2\lambda_1}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 + M_1 + \frac{1}{2\delta^2}M_2^2.\end{aligned}$$

Agora

$$\frac{\delta^2}{2}|v|^2 + \frac{\delta^2}{2\lambda_1}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq \frac{\theta}{2}(|v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2),$$

se $\max\{\frac{\delta^2}{2}, \frac{\delta^2}{2\lambda_1}\} \leq \frac{\theta}{2}$. Portanto, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno, por exemplo $\delta = \min\{\sqrt{\theta}, \sqrt{\theta\lambda_1}\}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(u(t),v(t)) &\leq (\ -\theta + \frac{\theta}{2}\ )(\ |v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2\ ) + N, \quad N = M_1 + \frac{1}{2\delta^2}M_2^2 \\ &\leq -\frac{\theta}{2}(\ |v|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2\ ) + N.\end{aligned}$$

Usando a estimativa (2.7), obtemos

$$W(u(t),v(t)) \leq W(u_0,v_0)e^{-\lambda t} + \frac{2N}{\theta}(K_2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1}) + C_\epsilon,$$

onde $\lambda = \frac{\theta}{2(K_2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1})}$, e portanto

$$\|(u(t),v(t))\|^2 \leq \frac{[(K_2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1})\|(u_0,v_0)\|^2 + C_\epsilon]}{K_1}e^{-\lambda t} + \frac{1}{K_1}(m + \frac{2N}{\theta}(K_2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1}) + C_\epsilon),$$

para todo $t \geq 0$.

Como toda solução fraca pode ser aproximada por soluções fortes, a última desigualdade vale também para toda solução fraca de (2.6) e esta, por sua vez, implica que (2.6) é limitado dissipativo e a demonstração está completa. □

Corolário 2.4.7 *Se $Q : H \to H$ é um operador auto-adjunto, positivo definido e limitado no espaço de Hilbert H e C, h, g e $e(t)$ satisfazendo as condições do Teorema* 2.4.6, *então a equação*

$$Qu_{tt} - Cu + h(u_t) + g(u) = e(t) \tag{2.8}$$

é limitada dissipativa.

Demonstração. Do fato de Q ser um operador auto-adjunto, positivo definido e limitado, o operador Q^{-1} existe. Logo a equação (2.8) se escreve como

$$u_{tt} - Q^{-1}Cu + Q^{-1}h(u_t) + Q^{-1}g(u) = Q^{-1}e(t)$$

e definimos um novo (equivalente) produto escalar em H por $[u_1, u_2] = \langle Qu_1, u_2\rangle = \langle u_1, Qu_2\rangle$.

Verifiquemos que $Q^{-1}C$ é auto-adjunto negativo definido com relação a $[\cdot,\cdot]$. De fato,

$$\begin{aligned}[(Q^{-1}C)u, v] &= \langle Q(Q^{-1}C)u, v\rangle = \langle Cu, v\rangle \\ &= \langle u, Cv\rangle = \langle u, QQ^{-1}Cv\rangle \\ &= \langle Qu, (Q^{-1}C)v\rangle = [u, (Q^{-1}C)v]\end{aligned}$$

$$[(Q^{-1}C)u, u] = \langle Q(Q^{-1}C)u, u\rangle = \langle Cu, u\rangle \leq -\lambda_1 |u|^2, \text{ para todo } u \in H.$$

Se $g(u) = \mathrm{grad}G(u)$ com relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, então $Q^{-1}g(u) = \mathrm{grad}G(u)$ com relação a $[\cdot,\cdot]$ e $[u, Q^{-1}g(u)] = \langle u, g(u)\rangle$.

Denotemos por $|\cdot|$ a norma induzida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ a norma induzida por $[\cdot,\cdot]$. $[v, Q^{-1}h(v)] = \langle v, h(v)\rangle \geq \alpha|v|^2$, por outro lado $\|v\|^2 = [v,v] = \langle Qv, v\rangle \leq b|v|^2$. Logo $[v, Q^{-1}h(v)] \geq \alpha|v|^2 \geq \frac{\alpha}{b}\|v\|^2 = \tilde{\alpha}\|v\|^2$, onde $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{b}$, $\forall v \in H$.

Agora

$$\begin{aligned}\|Q^{-1}h(v)\|^2 &= [Q^{-1}h(v), Q^{-1}h(v)] = \langle h(v), Q^{-1}h(v)\rangle \\ &\leq |\langle h(v), Q^{-1}h(v)\rangle| \leq |h(v)||h(v)||Q^{-1}h(v)| \\ &\leq \beta^2|v|^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, $\|v\|^2 = [v,v] = \langle Qv, v\rangle \geq a|v|^2$, então $\|Q^{-1}h(v)\|^2 \leq \beta^2|Q^{-1}|\frac{1}{a}\|v\|^2$ $= \frac{\beta^2}{a}|Q^{-1}|\|v\|^2 = \tilde{\beta}\|v\|^2$, onde $\tilde{\beta} = \frac{\beta^2}{a}|Q^{-1}|$ e a conclusão segue do Teorema 2.4.6 . □

Como um exemplo desse tipo consideremos o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}u_{tt} + a_{12}U_{tt} = C_1 u - h_1(u_t) - g_1(u) + e_1(t) \\ a_{21}u_{tt} + a_{22}U_{tt} = C_2 U - h_1(U_t) - g_2(U) + e_2(t), \end{array}\right. \tag{2.9}$$

no espaço produto $H = H_0 \times H_0$, onde H_0 é um espaço de Hilberte real e a matriz (a_{ij}) é autoadjunta positiva definida e C_1 e C_2, h_1 e h_2 , g_1 e g_2, e_1 e e_2 satisfazendo as mesmas hipóteses como C, h, g e e no Teorema 2.4.6. Para verificar que (2.9) é de fato do tipo (2.8) é suficiente tomar em $H = H_0 \times H_0$ o produto escalar $\langle\langle (u_1, u_2), (U_1, U_2)\rangle\rangle = \langle u_1, U_1\rangle + \langle u_2, U_2\rangle$.

O sistema (2.9) pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{tt} \\ U_{tt}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ U\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(u_t) \\ h_2(U_t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u_t) \\ g_2(U_t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t)\end{bmatrix}$$

Fazendo

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} u \\ U \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix},$$

$$h(z_t) = \begin{bmatrix} h_1(u_t) \\ h_2(U_t) \end{bmatrix}, g(z) = \begin{bmatrix} g_1(u_t) \\ g_2(U_t) \end{bmatrix}, e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

temos $Qz_{tt} - Cz + h(z_t) + g(z) = e(t)$, sendo Q auto-adjunto, positivo definido e limitado.

C é auto-adjunto, definido negativo. De fato, sejam $z = (u, U)$, $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{U})$

$$\begin{aligned} \langle\langle Cz, \tilde{z}\rangle\rangle &= \langle\langle C(u,U), (\tilde{u}, \tilde{U})\rangle\rangle = \langle\langle (C_1 u, C_2 U), (\tilde{u}, \tilde{U})\rangle\rangle = \langle C_1 u, \tilde{u}\rangle + \langle C_2 U, \tilde{U}\rangle \\ &= \langle u, C_1\tilde{u}\rangle + \langle U, C_2\tilde{U}\rangle = \langle\langle (u,U), (C_1\tilde{u}, C_2\tilde{U})\rangle\rangle \\ &= \langle\langle (u,U), C(\tilde{u}, \tilde{U})\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Agora

$$\langle\langle Cz, z\rangle\rangle = \langle\langle (C_1 u, C_2 U), (u, U)\rangle\rangle = \langle C_1 u, u\rangle + \langle C_2 U, U\rangle < 0, \text{ para todo } z \in H$$

Definindo um novo (equivalente) produto interno em H, $[[z, \tilde{z}]] = [[(u,U), (\tilde{u}, \tilde{U})]] = [u, \tilde{u}] + [U, \tilde{U}]$, verifica-se todas as hipótese do Teorema 2.4.6, logo concluí-se que (2.9) é limitado dissipativo.

As seguintes condições garantem que a aplicação período do sistema (2.5) S é uma α-contração.

Teorema 2.4.8 *Além das hipóteses* (1)-(5) *no Teorema* 2.4.6 *suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas*

(6) *$e(t)$ é p-periódica,*

(7) *existem constantes $0 < \alpha < \beta$ tais que $\alpha|v_1 - v_2|^2 \leq \langle v_1 - v_2, h(v_1) - h(v_2)\rangle$ e $|h(v_1) - h(v_2)| \leq \beta|v_1 - v_2|$, para todo v_1, v_2 em H,*

(8) *$\mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}}$ está compactamente imerso em H,*

(9) *$g : \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}} \to H$ é uma aplicação compacta.*

Então, a aplicação período S de (2.5) *é uma α-contração; em particular, existe uma solução fraca p-periódica.*

Demonstração. Sejam $w_1 = (u_1, v_1)$, $w_2 = (u_2, v_2)$ dois pontos em X e $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \geq 0$ as soluções pelos pontos $w_1(0) = w_1$, $w_2(0) = w_2$. Como (2.5) é limitado dissipativo, temos que

$w_1(t)$, $w_2(t)$ permanecem limitadas por alguma constante R_1, para todo $t \geq 0$. Consideremos o funcional $E : X \times X \to \mathbb{R}$ definido por

$$E(w_1, w_2) = \frac{1}{2}|v_1 - v_2|^2 + 2b\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2\rangle + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|^2,$$

onde $b > 0$ é escolhido como na prova do Teorema 2.4.6. Usando (7), verifica-se que a derivada de $E(t)$ ao longo do par de soluções $(w_1(t),\ w_2(t))$ satisfaz.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \langle \dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t), v_1(t) - v_2(t)\rangle + 2b\langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), v_1(t) - v_2(t)\rangle \\
&\quad +2b\langle u_1(t) - u_2(t), \dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t)\rangle + \langle (-C)^{\frac{1}{2}}(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), (-C)^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\rangle \\
&= 2b|v_1 - v_2|^2 - \langle h(v_1) - h(v_2), v_1 - v_2\rangle + \langle v_1 - v_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle \\
&\quad +2b\langle C(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle - 2b\langle u_1 - u_2, h(v_1) - h(v_2)\rangle + \langle u_1 - u_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle \\
&\leq (2b - \alpha)|v_1 - v_2|^2 + 2b\beta|u_1 - u_2|\ |h(v_1) - h(v_2)| + 2b\langle C(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle \\
&\quad +\langle v_1 - v_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle + \langle u_1 - u_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle \\
&\leq (2b - \alpha)|v_1 - v_2|^2 + \frac{2b\beta}{\sqrt{\lambda_1}}\ |v_1 - v_2|\ |(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)| - 2b|(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|^2 \\
&\quad +\langle v_1 - v_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle + 2b\langle u_1 - u_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle.
\end{aligned}$$

A escolha de b será tal que $(2b-\alpha)|v_1 - v_2|^2 + \frac{2b\beta}{\sqrt{\lambda_1}}|v_1 - v_2|\ |(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)| - 2b|(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|^2$ seja uma forma quadrática, negativa definida, i.e., $2b - \alpha < 0$, $2b(\alpha - 2b) - \frac{b^2\beta^2}{\lambda_1} > 0$. Logo, existe $l > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
(2b - \alpha)|v_1 - v_2|^2 &+ \frac{2b\beta}{\sqrt{\lambda_1}}|v_1 - v_2|\ |(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)| - 2b|(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|^2 \\
&\leq -l(\ |v_1 - v_2|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|^2\ ).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &\leq -l(\ |v_1 - v_2|^2 + |(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|^2\ ) + \langle v_1 - v_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle \\
&\quad +2b\langle u_1 - u_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle \\
&\leq -\frac{l}{K_2}(\ \frac{1}{2}|v_1 - v_2|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|^2 + 2b\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2\rangle\ ) \\
&\quad +\langle v_1 - v_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle + 2b\langle u_1 - u_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle \\
&\leq -\theta E(t) + \langle v_1 - v_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle + 2b\langle u_1 - u_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle,
\end{aligned}$$

onde $\theta = \frac{l}{K_2}$. Observemos que

$$\langle v_1 - v_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle \leq |v_1 - v_2|\ |g(u_2) - g(u_1)|$$

e

$$\langle u_1 - u_2, g(u_2) - g(u_1)\rangle \leq |u_1 - u_2|\ |g(u_2) - g(u_1)|.$$

Sendo $w(t) = (u(t), v(t))$ uma solução fraca, então $u : [0, p] \to H$ é de classe C^1 e $\frac{d}{dt}u(t) = v(t)$. Portanto, $\xi(t) = |v_1(t) - v_2(t)|$ e $\eta(t) = |u_1(t) - u_2(t)|$ são contínuas em $[0, p]$. Logo, existe uma constante M_1 tal que $|\xi(t)| + 2b|\eta(t)| \leq M_1$ para $0 \leq t \leq p$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &\leq -\theta E(t) + M_1|g(u_2(t)) - g(u_1(t))| \\
E(t) &\leq e^{-\theta t}E(0) + M_1 \int_0^t e^{-\theta(t-s)}|g(u_2(s)) - g(u_1(s))|ds \\
&\leq e^{-\theta t}E(0) + M_1 \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \sup_{0\leq s\leq p} |g(u_2(s)) - g(u_1(s))|ds \\
&\leq e^{-\theta t}E(0) + M_1 \sup_{0\leq s\leq p} |g(u_2(s)) - g(u_1(s))| \int_0^t e^{-\theta(t-s)}ds \\
&\leq e^{-\theta t}E(0) + \frac{M_1}{\theta} \sup_{0\leq s\leq p} |g(u_2(s)) - g(u_1(s))|.
\end{aligned}$$

Fazendo $k = \frac{M_1}{\theta}$ e $t = p$ temos

$$E(p) \leq e^{-\theta p}E(0) + k \sup_{0\leq s\leq p} |g(u_2(s)) - g(u_1(s))|.$$

$$|||(u_2(p), v_2(p)) - (u_1(p), v_1(p))|||^2 = E^{\frac{1}{2}}(p).$$

Consideremos X com a norma equivalente $E^{\frac{1}{2}}$. Agora, se $S : X \to X$ é definida por $S(w) = (u(p), v(p))$, então

$$|||S(w_2) - S(w_1)|||^2 = E(p) \leq e^{-\theta p}|||w_2 - w_1|||^2 + k \sup_{0\leq s\leq p} |g(u_2(s)) - g(u_1(s))|,$$

e portanto,

$$|||S(w_2) - S(w_1)||| \leq e^{-\frac{\theta p}{2}}|||w_2 - w_1||| + k^{\frac{1}{2}} \sup_{0\leq s\leq p} |g(u_2(s)) - g(u_1(s))|^{\frac{1}{2}}.$$

Fazendo

$$\rho(w_1, w_2) = k^{\frac{1}{2}} \sup_{0\leq s\leq p} |g(u_2(s)) - g(u_1(s))|^{\frac{1}{2}},$$

temos

$$|||S(w_2) - S(w_1)||| \leq e^{-\frac{\theta p}{2}}|||w_2 - w_1||| + \rho(w_1, w_2).$$

Agora verifiquemos que $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ é uma pseudo-métrica é pré-compacta. Seja $\{w_n\}_n \subset X = \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}} \times H$ uma seqüência limitada na norma $\frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2$, $w_n = (u_n, v_n)$. Do fato que (2.5) é limitado dissipativo, concluímos que $\frac{1}{2}|v_n|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u_n|^2$ permanece limitada por uma constante fixa para $t \in [0, p]$ e (8) implica que $u_n(t)$ tem fêcho compacto em H para cada t fixo; além disso $|u_n(t_1) - u_n(t_2)| \leq |t_1 - t_2| \sup_{0\leq s\leq p} |v_n(s)|$ pelo Teorema do Valor Médio. Sendo

g uma aplicação compacta, segue que $\{g(u_n(t)\}$ é pré-compacto em H e portanto $\{g(u_n(t))\}$ contém uma subseqüência convergente em H. Assim dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $|g(u_{n_j}(t)) - g(u_{n_k}(t))| < \frac{\epsilon}{\sqrt{K}}$, para n_j, $n_k \geq N$ e portanto $\rho(w_{n_j}, w_{n_k}) < \epsilon$. Assim, ρ é uma pseudo-métrica pré-compacta na norma $\frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-C)^{\frac{1}{2}}u|^2$ e, conseqüentemente, também na norma $|||\cdot|||$, pois ambas são normas equivalentes.

Sendo $f(t, w)$ p-periódica em t, (2.5) limitado dissipativo e a aplicação $S(w) = \varphi(p, 0, w)$, $w = (u, v)$ uma α-contração, as conclusões seguem do Teorema 2.4.2. $\square$

Os resultados dos teoremas anteriores podem ser usados em diversas aplicações. Os exemplos seguintes são tratados na referência Ceron e Lopes [1] e com maiores detalhes em Hale [5], onde se pode encontrar as demonstrações correspondentes. No próximo Capítulo vamos apresentar outros exemplos, que enriquecerão a lista de aplicações.

Corolário 2.4.9 *Consideremos a equação semilinear da onda*

$$u_{tt} = \Delta u - h(u_t) - g(u) + e(t, x) \tag{2.10}$$

num domínio regular limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, *com condições de Dirichlet* $u = 0$ *em* $\partial\Omega$ *e suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas*

(1′) *a função* $\tilde{g}(u) = \int_0^u g(s)ds$ *é limitada inferiormente para* u *em* $\mathbb{R}$*;*

(2′) *a função* $ug(u)$ *é limitada inferiormente para* u *em* $\mathbb{R}$*;*

(3′) $h(0) = 0$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^1 *e* $0 < \alpha \leq h'(v) \leq \beta$ *para algumas constantes* α *e* β*;*

(4′) $e : \mathbb{R} \to L^2(\Omega)$ *é p-periódica e contínua* $(e(t) = e(t, \cdot))$

(5′) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^1 *e satisfaz a seguinte condição de crescimento* $|g'(u)| \leq a + b|u|^\gamma$, $0 \leq \gamma \leq 2$ *se* $n = 3$, γ *qualquer se* $n = 2$, *e nenhuma restrição se* $n = 1$.

Então existe solução fraca p-periódica.

O próximo resultado trata de equações que representam vibrações de vigas.

Teorema 2.4.10 *Suponhamos que o termo* $g(u)$ *no sistema* (2.5) *tem a forma* $g(u) = m(\langle Bu, u\rangle)Bu$, *onde* $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função de classe* C^1 *e* $B : \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}} \to H$ *é limitado, não negativo e auto-adjunto com respeito a* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Suponhamos também que as seguintes condições estão satisfeitas:*

($\tilde{1}$) *a função* $M(r)=\int_0^r m(s)ds$ *é de classe* C^1*, limitada inferiormente para* $r\geq 0$ *e satisfaz* (2) *do Teorema* 2.4.6*;*

($\tilde{2}$) *a função* $rm(r)$ *é limitada inferiormente para* $r\geq 0$*;*

($\tilde{3}$) *e* ($\tilde{4}$) *como* (4) *e* (5) *no Teorema* 2.4.6*.*

Então o sistema (2.5) *é limitado dissipativo. Além disso, se as hipóteses* (6), (7), (8) *do Teorema* 2.4.8 *são satisfeitas, então a aplicação período* S *é uma* α*-contração; em particular existe um atrator invariante compacto e uma solução fraca p-periódica.*

Demonstração. Vamos verificar que as hipótese do Teorema 2.4.6 estão satisfeitas. Definindo $G(u)=\frac{1}{2}M(\langle Bu,u\rangle)$, vemos que $g(u)=grad\ G(u)$ com respeito ao produto escalar de H já que $G'(u):H\to\mathbb{R}$ é dada por $G'(u)\cdot h=\langle h,m(\langle Bu,u\rangle)Bu\rangle$ e portanto a hipótese (1) está satisfeita.

Como $\langle u,g(u)\rangle = m(|B^{\frac{1}{2}}u|^2)|B^{\frac{1}{2}}u|^2$, para $u\in\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}})$, a hipótese ($\tilde{2}$) implica que a hipótese (3) do Teorema 2.4.6 está satisfeita.

As hipóteses (4) e (5) estão imediatemente satisfeitas, com tudo isto temos que o sistema (2.5) é limitado dissipativo.

Sejam (u_1,v_1), (u_2,v_2) dois dados iniciais em X, $(u_1(t),v_1(t))$, $(u_2(t),v_2(t))$ as soluções com estes dados iniciais e definamos a função

$$F(t)=E(t)-\frac{1}{2}M(\langle Bu_1(t),u_1(t)\rangle)\langle u_1(t)-u_2(t),Bu_2(t)-Bu_1(t)\rangle,$$

onde $E(t)$ é como no Teorema 2.4.8. Usando as desigualdades anteriores para $\frac{d}{dt}E(t)$ vemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}E(t)-m(\langle Bu_1(t),u_t\rangle)(\langle v_1(t),Bu_1(t)\rangle\ )-M(\langle Bu_1(t),u_1(t)\rangle)(\langle v_1(t)\\ &\quad -v_2(t),Bu_1(t)-Bu_2(t)\rangle\ ).\end{aligned}$$

Usando a desigualdade para $\frac{d}{dt}E(t)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &\leq -\theta E(t)+\langle v_1(t)-v_2(t),g(u_2(t))-g(u_1(t))\rangle+2b\langle u_1(t)-u_2(t),g(u_2(t)-g(u_1(t)\rangle\\ &\quad +M(\langle Bu_1(t),u_1(t)\rangle).\langle v_1(t)-v_2(t),Bu_1(t)-Bu_2(t)\rangle-m(\langle Bu_1(t),u_1(t)\rangle).\\ &\quad \langle v_1(t),Bu_1(t)\rangle\ ,\ \text{onde } \theta>0\\ \frac{d}{dt}F(t) &\leq -\theta(\ F(t)+\frac{1}{2}M(\langle Bu_1(t),u_1(t)\rangle)\langle u_1(t)-u_2(t),Bu_2(t)-Bu_1(t)\rangle\ )\\ &\quad +\langle v_1(t)-v_2(t),g(u_2(t))-g(u_1(t))\rangle+2b\langle u_1(t)-u_2(t),g(u_2(t))-g(u_1(t))\rangle\\ &\quad +M(\langle Bu_1(t),u_1(t)\rangle).\langle v_1(t)-v_2(t),Bu_1(t)-Bu_2(t)\rangle-m(\langle Bu_1(t),u_1(t)\rangle).\\ &\quad \langle v_1(t),Bu_1(t)\rangle\ .\end{aligned}$$

Usando o fato que m é de classe C^1 e que (2.5) é limitado dissipativo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &\leq -\theta F(t) + K|u_1(t) - u_2(t)| \\
F(t) &\leq e^{-\theta t}F(0) + K\int_0^t e^{-\theta(t-s)}|u_1(s) - u_2(s)|ds \\
F(t) &\leq e^{-\theta t}F(0) + K_1 \sup_{0\leq s\leq p}|u_1(s) - u_2(s)|,\ K_1 = \frac{K}{\theta} \\
F(p) &\leq e^{-\theta p}F(0) + K_1 \sup_{0\leq s\leq p}|u_1(s) - u_2(s)|.
\end{aligned}$$

Como

$$F(p) = E(p) - \frac{1}{2}m(\langle Bu_1(p), u_1(p)\rangle)\langle u_1(p) - u_2(p), Bu_2(p) - Bu_1(p)\rangle,$$
$$F(0) = E(0) - \frac{1}{2}m(\langle Bu_1(0), u_1(0)\rangle)\langle u_1(0) - u_2(0), Bu_2(0) - Bu_1(0)\rangle,$$

temos

$$E(p) \leq e^{-\theta p}E(0) + K_1 \sup_{0\leq s\leq p}|u_1(s) - u_2(s)|$$

e então $|||S(w_1) - S(w_2)||| \leq e^{-\frac{\theta p}{2}}|||w_1 - w_2||| + \rho(w_1, w_2)$, onde $|||\cdot|||$ é como no Teorema 2.4.8 e $\rho(w_1, w_2) = \sqrt{K_1}\sup_{0\leq s\leq p}|u_1(s) - u_2(s)|^{\frac{1}{2}}$. A pré-compacidade de ρ é provada da mesma maneira como no Teorema 2.4.8. As conclusões seguem dos Teoremas 2.2.6 e 2.4.2. $\square$

Aplicações

Neste capítulo estudaremos os problemas enunciados na introdução. Basicamente, estamos interessados em mostrar que cada problema tem solução periódica.

3.1 Barra simplesmente suportada e movimento não planar

Segundo [8], as equações do movimento descrevendo a resposta não planar de uma barra são dadas pelo sistema

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + u_t - [a + \epsilon \int_0^\pi (u_x^2 + v_x^2)dx]u_{xx} = p(x,t) \\ v_{tt} + v_{xxxx} + v_t - [a + \epsilon \int_0^\pi (u_x^2 + v_x^2)dx]v_{xx} = q(x,t), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $a \geq 0$ e $\epsilon > 0$ são constantes fixas, com as condições de fronteira

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0 \\ v(0,t) = v(\pi,t) = v_{xx}(0,t) = v_{xx}(\pi,t) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aqui, $p, q : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e 2π-periódicas na variável t, i.e., $p(x,t) = p(x, t+2\pi), q(x,t) = q(x,t+2\pi)$, para todos $0 \leq x \leq \pi$ e $t \in \mathbb{R}$.

Nosso objetivo aqui é mostrar que o sistema (3.1) tem solução 2π-periódica, i.e., $u(x,t) = u(x,t+2\pi), v(x,t) = v(x,t+2\pi)$. Para isso, vamos inicialmente escrever (3.1) na forma

$$\begin{pmatrix} u_{tt} \\ v_{tt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{xxxx} \\ v_{xxxx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} - [a + \epsilon \int_0^\pi (u_x^2 + v_x^2)dx] \begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x,t) \\ q(x,t) \end{pmatrix}.$$

Fazendo $w = (u,v)$, $-Cw = (u_{xxxx}, v_{xxxx})$, $Bw = (-u_{xx}, -v_{xx})$, $m(r) = a + \epsilon r$ e $e(t) = (p(\cdot,t), q(\cdot,t))$, o sistema (3.1) pode ser escrito como a equação diferencial de segunda ordem

$$w_{tt} - Cw + w_t + m(|\nabla w|_{L^2}^2)Bw = e(t), \tag{3.3}$$

com as seguinte condições de fronteira

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0$$
$$w_{xx}(0,t) = w_{xx}(\pi,t) = 0 \tag{3.4}$$

no espaço de Hilbert $H = L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ com o produto escalar usual $\langle(\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\rangle = \int_0^\pi (\varphi(x)\tilde{\varphi}(x) + \psi\tilde{\psi}(x))dx$.

Seja $C : \mathcal{D}(C) \subset H \to H$ o operador dado por

$$\mathcal{D}(C) = \{(u,v) \in [H^4(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)] \times [H^4(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)], u_{xx} = v_{xx} = 0, x = 0, \pi\}$$

e $C(u,v)(x) = (-u''''(x), -v''''(x)),\ 0 < x < \pi$.
Vale então o seguinte resultado

Proposição 3.1.1 *C é um operador fechado, tem domínio denso, autoadjunto, negativo definido e tem resolvente compacto.*

Demonstração. É suficiente considerar o operador $\tilde{C} : \mathcal{D}(\tilde{C}) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ dado por

$$\mathcal{D}(\tilde{C}) = \{u \in H^4(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) : u''(x) = 0,\ x = 0, \pi\}$$

e

$$\tilde{C}u(x) = -u''''(x),\ 0 < x < \pi.$$

Não é difícil de demonstrar que $\tilde{C}$ é fechado e $\mathcal{D}(\tilde{C})$ é denso em $L^2(0,\pi)$.

Para $u, v \in \mathcal{D}(\tilde{C})$, temos, usando integração por partes quatro vezes,

$$\langle \tilde{C}u, v\rangle = -\int_0^\pi u''''(x)v(x)dx = -\int_0^\pi u(x)v''''(x)dx = \langle u, \tilde{C}v\rangle$$

e

$$\langle \tilde{C}u, u\rangle = -\int_0^\pi (u''(x))^2 dx$$

e, portanto, $\tilde{C}$ é autoadjunto e negativo definido.

Seja $f \in L^2(0,\pi)$ e consideremos o problema

$$\begin{cases} -u''''(x) = f(x),\ 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = u''(0) = u''(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Então,

$$u(x) = \int_0^\pi Q(x,s)f(s)ds + \int_0^x K(x-s)f(s)ds,\ 0 \le x \le \pi,$$

onde $Q : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ e $K : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ são funções continuas dadas por

$$\begin{aligned} Q(x,s) &= -\frac{x}{3!\pi}[(x^2 - \pi^2)(\pi - s) + (\pi - s)^3] \\ K(v) &= \frac{v^3}{3!}. \end{aligned}$$

Destas expressões para u segue imediatamente que $u(f)$ é uma aplicação compacta de $L^2(0,\pi)$ em si mesmo. Portanto, 0 pertence ao resolvente de $\tilde{C}$ e $(\tilde{C})^{-1}$ é um operador compacto. □

Observamos que o espectro de $\tilde{C}$ é constituido apenas de autovalores, que são dados por $\lambda_n = -n^4$, $n = 1, 2, ...$, e as correpondentes autofunções são $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, $0 \le x \le \pi$, que constituem uma base ortonormal de $L^2(0,\pi)$.

Sejam $E_n : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$, $n = 1, 2, ...$, as projeções

$$E_n(\psi) = u_n \int_0^\pi \psi(x) u_n(x) dx = \langle \psi, u_n \rangle u_n.$$

Então seguindo Henry [6], o domínio de $(-\tilde{C})^{\frac{1}{2}}$ é dado por

$$\mathcal{D}((-\tilde{C})^{\frac{1}{2}}) = \{\psi \in L^2(0,\pi) : \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\langle \psi, u_n \rangle|^2 < \infty\},$$

o que implica que $\mathcal{D}((-\tilde{C})^{\frac{1}{2}}) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$. Observemos que $u \in \mathcal{D}((-\tilde{C})^{\frac{1}{2}})$ implica que u é uma função de classe C^1 em $(0,\pi)$ e u' é Hölder contínua com exponente $\frac{1}{2}$. Além disso,

$$\|u\|^2 = \int_0^\pi u''(x)^2 dx$$

é uma norma em $\mathcal{D}((-\tilde{C})^{\frac{1}{2}})$ equivalente a norma usual. Em particular, existe uma constante $N > 0$ tal que

$$\int_0^\pi u(x)^2 dx \le N \int_0^\pi u''(x)^2 dx \quad \text{e} \quad \int_0^\pi u'(x)^2 dx \le N \int_0^\pi u''(x)^2 dx.$$

A equação (3.3) é do tipo (2.4), onde $h(w_t) = w_t$, $g(w) = m(|\nabla w|_{L^2}^2)Bw$, $e(t) = (p(\cdot,t), q(\cdot,t))$.

Para verificar que (3.3) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.1 de existência e unicidade de soluções, vamos demonstrar a seguinte

Proposição 3.1.2 *A aplicação* $g : H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \times H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \to L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ *dada por*

$$g(u,v)(x) = (a + \epsilon \int_0^\pi (u'(x)^2 + v'(x)^2) dx)(-u''(x), -v''(x)), \;\; 0 < x < \pi$$

é localmente Lipschitziana. Mais precisamente, g é de classe C^1 e é o gradiente da função $G : H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \times H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(u,v) = \frac{1}{2}M(\int_0^\pi (u'(x)^2 + v'(x)^2)dx),$$

onde $M(s) = as + \frac{\epsilon}{2}s^2$.

Demonstração. Seja $R > 0$ e suponha que (u_1, v_1), (u_2, v_2) pertencem a bola de centro 0 e raio R. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u_i'\| \leq C$, $\|u_i'\| \leq C$, para $i = 1, 2$. Seja $K = \sup_{|s|\leq R} |m(s)|$. Temos

$$\begin{aligned}\|g(u_1,v_1) - g(u_2,v_2)\|^2_{L^2\times L^2} &\leq m(\|u_1'\|^2_{L^2} + \|v_1'\|^2_{L^2})^2(\|u_1'' - u_2''\|^2_{L^2} + \|v_1'' - v_2''\|^2_{L^2}) \\ &\quad +16\epsilon^2 C^2(\|u_1'' - u_2''\|^2_{L^2} + \|v_1'' - v_2''\|^2_{L^2}) \\ &\leq \max\{K^2, 16\epsilon^2 C^2\}\|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|^2,\end{aligned}$$

donde g é Lipschitziana na bola de raio R.

Como G é um funcional quadrático da norma de X, segue-se que G é de classe C^2 e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned}G'(u,v)(h,k) &= \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}M(\int_0^\pi ((u'(x) + th'(x))^2 + (v'(x) + tk'(x))^2)dx]\Big|_{t=0} \\ &= m(\int_0^\pi (u'(x)^2 + v'(x)^2)dx)\int_0^\pi (u'(x)h'(x) + v'(x)k'(x))dx \\ &= m(\int_0^\pi (u'(x)^2 + v'(x)^2)dx)\langle (h,k), (-u'', -v'')\rangle_{L^2\times L^2},\end{aligned}$$

onde na última linha usamos integração por partes.

Assim, grad $G(u,v) = g(u,v)$, o que completa a demonstração. □

Na demonstração da proposição anterior ficou também demonstrado que a hipótese (1) do Teorema 2.4.6 está satisfeita. As demais hipóteses do referido teorema são também de verificação imediata. Portanto, podemos concluir o seguinte

Teorema 3.1.3 *O sistema* (3.1) *com as condições de fronteira* (3.2) *é limitado dissipativo. Além disso, a aplicação periodo S é uma α-contração e existe um atrator invariante e uma solução 2π-periódica.*

Demonstração. As hipóteses (6), (7) e (8) do Teorema 2.4.8 estão obviamente satisfeitas nesse exemplo, bem como as hipóteses (4) e (5) do Teorema 2.4.6. Como $m(r) = a + \epsilon r$, as hipóteses

$(\tilde{1})$ e $(\tilde{2})$ do Teorema 2.4.10 são de verificação imediata. As conclusões segue agora do Teorema 2.4.10. $\square$

3.2 Movimento circular de uma barra

Nessa seção estudaremos a equação,

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \frac{1}{2}a^2[\ (1-x^2)u_x\ ]_x + 2\alpha u_t + g(u) = e(t,x), \tag{3.6}$$

no espaço de Hilbert $H = L^2(0,1)$, com as condições de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0 \\ u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

A equação (3.6) pode ser escrita na forma (2.4) com $Cu = -u_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2[\ (1-x^2)u_x\ ]_x$ e $h(u_t) = 2\alpha u_t$.

Proposição 3.2.1 *O operador $C : \mathcal{D}(C) \subset H \to H$, com domínio*

$$\mathcal{D}(C) = \{u \in H^4(0,1) : u(0) = u''(0) = u''(1) = u'''(1) = 0\}$$

é definido negativo, auto-adjunto e tem resolvente compacto.

Demonstração. Sejam $u,\ v \in \mathcal{D}(C)$. usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}
\langle Cu, u\rangle &= \int_0^1 (\ -u_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)u_x]_x\ )u dx \\
&= \int_0^1 (\ -u_{xxxx}u + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)u_x]_x u\ )dx \\
&= \int_0^1 (\ u_{xxx}u_x - \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u_x^2\ )dx \\
&= -\int_0^1 (\ u_{xx}^2 + \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u_x^2\ )dx \le 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $u, v \in \mathcal{D}(C)$, então

$$\begin{aligned}
\langle Cu, v\rangle &= \int_0^1 \left(-u_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)u_x]_x \right) v dx \\
&= \int_0^1 \left(-u_{xxxx}v + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)u_x]_x v \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-u_{xx}v_{xx} - \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u_x v_x \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(u_x v_{xxx} + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)v_x]_x u \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-v_{xxxx}u + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)v_x]_x u \right) dx \\
&= \int_0^1 u(x)Cv(x)dx \\
&= \langle u, Cv\rangle,
\end{aligned}$$

assim, C é simétrico. Para demonstrar que C é autoadjunto, é suficiente demonstrar que C é sobrejetor. Para $f \in L^2(0,1)$, consideremos a equação

$$-u''''(x) + \frac{a^2}{2}((1-x^2)u'(x))' = f(x), \ 0 < x < 1$$

com as condições de fronteira

$$u(0) = u''(0) = u''(1) = u'''(1) = 0.$$

Integrando em $[x, 1]$, obtemos

$$u'''(x) - \frac{a^2}{2}(1-x^2)u'(x) = \int_x^1 f(s)ds = g(x) \in H^1(0,1).$$

Tomando $u'(x) = v(x)$, v é solução de

$$\begin{cases} v''(x) - \frac{a^2}{2}(1-x^2)v(x) = g(x) \\ v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

Assim, v é solução de um problema de Neumann, e é uma aplicação compacta de $L^2(0,1)$ em si mesmo. Como $u(x) = \int_0^x v(s)ds$, segue-se que u é uma aplicação compacta de f. Isso mostra que C tem resolvente compacto. $\square$

Sendo C um operador auto-adjunto definido negativo, o operador $-C$ é auto-adjunto definido positivo, conseqüentemente $(-C)^{\frac{1}{2}}$ existe e é auto-adjunto definido positivo, cujo domínio é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}}) &= \{u \in L^2(0,1) : (-C)^{\frac{1}{2}} u \in L^2(0,1), u(0) = 0\}\\ &= \{u \in H^2(0,1) : u(0) = 0\}.\end{aligned}$$

Fazendo $u_t = v$, a equação (3.6) é equivalente ao seguinte sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = Cu - 2\alpha v - g(u) + \tilde{e}(t), \end{cases} \tag{3.8}$$

ou, equivalentemente,

$$z_t = Az + f(t,z), \tag{3.9}$$

onde

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & -2\alpha I \end{bmatrix}, \; f(t,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(u) + e(t) \end{pmatrix},$$

no espaço de Hilbert real $X = \mathcal{D}(-C)^{\frac{1}{2}} \times L^2(0,1)$ com a norma

$$\|z\|^2 = |(-C)^{\frac{1}{2}} u|^2 + |v|^2 = \int_0^1 (\, u_{xx}^2 + \frac{1}{2} a^2 (1-x^2) u_x^2 + v^2 \,) dx.$$

Lema 3.2.2 *A é o gerador de um C^0-semigrupo de contrações em X, tem resolvente compacto e decai exponencialmente.*

Demonstração. O domínio do operador A é dado por $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(-C) \times \mathcal{D}(-C^{\frac{1}{2}})$. Sejam u, $v \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\begin{aligned}\langle A(u,v),(u,v)\rangle &= \langle (v, Cu - 2\alpha v),(u,v)\rangle\\ &= \langle (-C)^{\frac{1}{2}} v, (-C)^{\frac{1}{2}} u\rangle + \langle Cu - 2\alpha v, v\rangle\\ &= \langle -Cv, u\rangle + \langle Cu, v\rangle - 2\alpha\langle v, v\rangle\\ &= -2\alpha |v|^2 \le 0.\end{aligned}$$

Disto segue que A é dissipativo. Agora vejamos o resolvente de A, $\lambda \in \rho(A)$ se para todo $(f,g) \in X$, existe um único $(u,v) \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

isto é equivalente a

$$\begin{cases} \lambda u - v = f \\ -Cu + \lambda v + 2\alpha v = g. \end{cases}$$

Colocando $v = \lambda u - f$, temos que

$$\begin{aligned} -Cu + \lambda(\lambda u - f) - 2\alpha(\lambda u - f) &= g \\ -Cu + (\lambda + 2\alpha)\lambda u &= g + (\lambda + 2\alpha)f. \end{aligned}$$

Para $\lambda = \lambda_0 = 1$ temos que $-(1+2\alpha)$ não é autovalor de $-C$. Logo $(-C + (1+2\alpha)I)^{-1}$ existe, assim temos

$$\begin{cases} u = (-C + (1+2\alpha)I)^{-1}(g + (1+2\alpha)f) \\ v = \lambda(-C + (1+2\alpha)I)^{-1}(g + (1+2\alpha)f) - f. \end{cases}$$

Assim temos que para $\lambda = \lambda_0 = 1$ a imagem de $\lambda_0 I - A$ é X. Pelo Teorema de Lumer-Phillips conclui-se que A é o gerador de um C^0-semigrupo de contrações em X.

O resolvente de A é dado por

$$(A - \lambda I)^{-1} = \begin{bmatrix} -(2\alpha + \lambda) & -I \\ -C & -\lambda I \end{bmatrix} \Big(\lambda(2\alpha + \lambda) - C\Big)^{-1}.$$

Como todos os operadores acima comutam realmente o operador acima é o operador resolvente, como o operador $-C$ é auto- adjunto, positivo definido conclui-se que $(-C)^{-1}$ é compacto. Assim para $\lambda = 0$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2\alpha & -I \\ -C & 0 \end{bmatrix} (-C)^{-1},$$

é um operador compacto. Logo, pela identidade do resolvente temos que $R(\lambda, A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Para mostrar o decaimento exponencial, consideremos $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma base ortonormal de H ($\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$) constituída de auto-funções de $-C$, correspondentes a $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \to \infty$ $((-C)\varphi_j = \lambda_j \varphi_j)$.

Seja u solução de

$$u_{tt} + 2\alpha u_t - Cu = 0. \tag{3.10}$$

Escrevemos $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n$ e substituindo esta em (3.10), temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{u}_n(t) + 2\alpha \dot{u}_n(t) + \lambda_n u_n(t))\varphi_n = 0.$$

Portanto temos que

$$\ddot{u}_n(t) + 2\alpha \dot{u}_n(t) + \lambda_n u_n(t) = 0. \tag{3.11}$$

A equação característica de (3.11) esta dada por

$$\mu^2 + 2\alpha\mu + \lambda_n = 0,$$

cujas raízes são $\mu_n^+ = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \lambda_n}$, $\mu_n^- = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \lambda_n}$.

Assim temos que

$$u_n(t) = \begin{cases} A_n e^{\mu_n^+ t} + B_n e^{\mu_n^- t}, & \text{se } 0 < \lambda_n < \alpha^2 \\ (A_n + tB_n)e^{-\alpha t}, & \text{se } \lambda_n = \alpha^2 \\ e^{-\alpha t}[A_n \cos\sqrt{\lambda_n - \alpha^2}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n - \alpha^2}t], & \text{se } \lambda_n > \alpha^2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Tomando as condições iniciais $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$ $(u_n(0) = \langle u_0, \varphi_n\rangle$, $\dot{u}_n(0) = \langle v_0, \varphi_n\rangle)$. Os coeficientes estão são dados por

- $0 < \lambda_n < \alpha^2$, neste caso existem um número finito de n tais que $0 < \lambda_n \leq \alpha^2$ e

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\langle v_0, \varphi_n\rangle - \mu_n^- \langle u_0, \varphi_n\rangle}{\mu_n^+ - \mu_n^-}, \\ B_n &= \frac{\mu_n^+ \langle u_0, \varphi_n\rangle - \langle v_0, \varphi_n\rangle}{\mu_n^+ - \mu_n^-} \end{aligned}$$

- $\lambda_n = \alpha^2$, temos

$$\begin{aligned} A_n &= \langle u_0, \varphi_n\rangle, \\ B_n &= \langle v_0, \varphi_n\rangle + \alpha\langle u_0, \varphi_n\rangle \end{aligned}$$

- $\lambda_n > \alpha^2$, temos

$$\begin{aligned} A_n &= \langle u_0, \varphi_n\rangle, \\ B_n &= \frac{\langle v_0, \varphi_n\rangle + \alpha\langle u_0, \varphi_n\rangle}{\sqrt{\lambda_n - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Em todos os caso os coeficientes A_n, B_n são limitados. Portanto para $0 < \lambda_n \leq \alpha^2$, existem constantes $k > 0$, $0 < \gamma \leq \alpha$, tais que $|e^{At}| \leq ke^{-\gamma t}$, $t \geq 0$. Além disso, para $\lambda_n > \alpha^2$, existe uma constante k_1 tal que $|e^{\mu_n^+ t}|$, $|e^{\mu_n^- t}| \leq k_1 e^{-\alpha t}$. Assim temos $|e^{At}| \leq Me^{-\delta t}$ com $M = \max\{k, k_1\}$ e $\delta = \min\{\gamma, \alpha\}$. □

Suponhamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 satisfazendo a condição de dissipatividade

$$\liminf_{|u|\to\infty} \frac{g(u)}{u} \geq 0. \tag{3.13}$$

Nessas condições temos o seguinte

Lema 3.2.3 *A aplicação f de* (3.9) *é contínua, localmente Lipschitzina e é compacta. Além disso, as soluções de* (3.9) *estão definidas para todo $t \geq 0$ e* (3.9) *é limitado dissipativo.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $\tilde{g} : \mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}}) \to L^2(0,1)$ definida por $\tilde{g}(u)(x) = g(u(x))$, $0 < x < 1$, é compacta e tem as propriedades indicadas. Isso decorre do Lema 4.7.4 de Hale [5]. Por um argumento bastante semelhante ao da demonstração do Teorema 2.4.6 e usando o funcional $W : X \to \mathbb{R}$ definido por

$$W(u,v) = \frac{1}{2}\int_0^1 [u''(x)^2 + \frac{a^2}{2}(1-x^2)u'(x)^2 + v(x)^2 + 2bu(x)v(x) + 2G(u(x))]dx,$$

onde $G(u) = \int_0^u g(s)ds$ e $b > 0$, conclui-se a demonstração do lema. $\square$

Proposição 3.2.4 *O sistema* (3.8) *é limitado dissipativo e a aplicação período é uma* α*-contração. Conseqüentemente, existe um atrator global e uma solução periódica para* (3.8)*.*

Demonstração. Pela fórmula de variação de constantes, temos

$$z(t) = e^{At}z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s,u(s))ds. \tag{3.14}$$

A aplicação periódo $S : X \to X$ é definida por $Sz_0 = z(2\pi)$ é dada por $S = U + K$, onde

$$\begin{aligned} Uz_0 &= e^{2\pi A}z_0 \\ Kz_0 &= \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)}f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Como foi visto no Lema 3.2.2, $\|e^{At}\| \leq Me^{-\delta t}$, com $M \geq 1$, $\delta \geq 0$. Assim temos que existe uma norma equivalente em X para a qual U é uma contração. Pelas hipótese de f e pelas condições do Teorema 2.4.8 conclui-se que a aplicação K é compacta. Pelo Teorema 2.2.7 temos que S é uma α-contração.

Pelo Teorema 2.4.1, S tem um atrator invariante compacto e um ponto fixo, e a proposição está demonstrada. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. S. Ceron and O. Lopes, *α-contractions and attractors for dissipative semilinear hyperbolic equations and systems*, Annali di Matematica pura ed applicata, CLX (1991), pp. 193–206.

[2] L. Cesari and R. Kannan, *Solutions of nonlinear hyperbolic equations at resonance*, in Nonlinear analysis Theory, Methods and Applications, no. 8, Pergamon Press Ltd., 1982, pp. 751–805.

[3] G. J. Fix and R. Kannan, *Nonplanar oscillation of beams under periodic forcing*, Journal Differential Equations, 96 (1992), pp. 419–429.

[4] J. Hale and O. Lopes, *Fixed point theorem and dissipative processes*, J. Diff. Eq., 13 (1973), pp. 391–402.

[5] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, no. 25 in Mathematical surveys and Monographs, American Mathematical Society, Second ed., 1988.

[6] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, vol. 840, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Velag, 1981.

[7] ——, *Evolution equations in Banach spaces.* Notas de Aulas, IME - USP, 1982.

[8] C. H. Ho, R. A. Scott, and J. G. Eisley, *Nonplanar, nonlinear oscillations of a beam-I. forced motions*, Internat. J. Nonlinear Mech, 10 (1975), pp. 113–127.

[9] W. A. Horn, *Some fixed point theorems for compact maps and flows in banach spaces*, Trans. A. M. S, 149 (1970), pp. 391–404.

[10] O. Lopes, *Stability and forced oscillations*, J. Math. Anal. Appli., 55 (1976), pp. 686–698.

[11] R. Martin, *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, Robert E. Kreiger Publishing Company, Malabar, Florida, 1987 ed., 1987.

[12] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer - Verlag, 1983.

[13] J. A. Walker, *Dynamical Systems and Evolutions Equations. Theory and Application*, Plenum Press - New York and London, 1980.

Índice Remissivo