Classes de Gevrey em grupos de Lie compactos e aplicações

Nicholas Braun Rodrigues

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, fevereiro de 2016

Classes de Gevrey em grupos de Lie compactos e aplicações

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 19/02/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro - IME-USP
- Prof. Dr. Gerson Petronilho - DM-UFSCAR
- Prof. Dr. João Carlos Alves Barata - IF-USP

Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro pelo ótimo exemplo de matemático, orientador e professor; pelos seminários realizados e pela amizade.

Aos membros da banca examinadora, o Prof. Dr. João Carlos Alves Barata e o Prof. Dr. Gerson Petronilho, pela leitura minuciosa da minha dissertação e sugestões.

Aos meus pais pelo incentivo constante ao estudo, e à perseguição dos meus sonhos. À minha mãe, Ingrid Braun pelo carinho e apoio constante. Ao meu falecido pai, Wilson Roberto Alves Rodrigues por me ajudar nos meus anseios e por acreditar em mim. Ao meu irmão Oliver Braun Rodrigues pelo companheirismo. À minha avó, Sonia Olsen Braun, pelos mimos que só uma avó pode dar.

À minha namorada, Raquel Húngaro Costa por ter me ajudado nos momentos difíceis, e por ter deixado esses dois anos de mestrado mais agradáveis. Assim como sua família, por proporcionar bons momentos nos finais de semana.

Ao Max Reinhold Janke por ter desempenhado diversos estudos juntos em boa parte da minha dissertação.

À turma do Prof. Dr. Cordaro sendo, Max Reinhold Janke, Luis Fernando Ragognette, Gabriel C.C.S de Araújo, Antônio Victor da Silva Junior e Bruno de Lessa Victor, pela participação nos seminários e pela amizade de todos.

Aos professores Dr. Oscar Fortunato Vilcachagua Erazo e Dr. Luís Cláudio Yamaoka por comparecerem às apresentações dos seminários.

Ao Prof. Dr. João Carlos Alves Barata por introduzir-me para a matemática e também, por me apresentar ao Prof. Dr. Paulo D. Cordaro.

Ao Dr. Gregório Chinni pela amizade e pelas ótimas discussões sobre assuntos de matemática.

Aos amigos em geral pelas boas risadas.

Finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que me permitiu a dedicação exclusiva ao mestrado.

Resumo

Braun Rodrigues, N. **Classes de Gevrey em grupos de Lie compactos e aplicações**. 2016. 56 f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Nesse trabalho estudamos as classes de Gevrey e as ultradistribuições em grupos de Lie compactos, que é a generalização natural do toro no contexto de análise de Fourier. Para tal utilizamos a teoria de vetores Gevrey. Fazemos a caracterização dessas classes via o comportamento da transformada de Fourier como em [DR14], utilizando o operador de Laplace-Beltrami associado à uma métrica específica. Por final fazemos uma aplicação dessa caracterização em um problema de hipoelipticidade global como em [GW73].
Palavras-chave: Classes de Gevrey, Grupos de Lie, Hipoelipticidade Global.

Abstract

Braun Rodrigues, N. **Gevrey Classes on compact Lie groups and applications**. 2016. 56 f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

In this work we study the Gevrey class of functions and ultrudistribuitions on compact Lie groups, which is the most natural generalization of the torus in the context of Fourier analysis. For such we used the theory of Gevrey vectors. We get a characterization of such class by the behaviour of the Fourier transform, as in [DR14], using the Laplace-Beltrami operator associated to a specific metric. At the end we give an aplication of this characterization in a global hypoellipticity problem as in [GW73].

Keywords: Gevrey class, Lie groups, Global Hypoellipticity.

Sumário

Lista de Símbolos **ix**

1 Grupos de Lie **3**

1.1 Representações e o teorema de Peter-Weyl 3

1.2 O operador de Laplace-Beltrami 11

1.2.1 Forma de Killing e algebras de Lie semisimples 12

1.2.2 O operador de Laplace-Beltrami 16

1.3 O caso do toro 23

2 Funções Gevrey e Ultradistribuições **27**

2.1 Vetores Gevrey 27

2.2 Análise em variedades riemannianas compactas 28

2.3 Análise de Fourier 31

2.4 O espaço $\mathscr{G}^{s,h}(G)$ 41

2.5 Funções Gevrey e ultradistribuições 44

3 Caracterição de $\mathscr{G}^s(G)$ e $\mathscr{D}'_s(G)$ via transformada de Fourier **47**

4 Hipoelipticidade global **59**

4.1 Operadores diferenciais em G 59

4.2 Dois problemas de hipoelipticidade global 60

4.3 Hipoelipticidade global por Greenfield-Wallach 63

A Lemas 16 17 **69**

Referências Bibliográficas **71**

Lista de Símbolos

G	Grupo de Lie compacto;
M	Variedade Riemanniana compacta;
$C^\infty(G)$	Funções de classe C^∞ em G a valores complexos;
$D'(G)$	Distribuições em G;
$C^\infty(M)$	Funções de classe C^∞ em M a valores complexos;
$D'(M)$	Distribuições em M;
L^2	Funções mensuráveis de quadrado integrável;
$\mathscr{G}^s(G)$	Funções Gevrey de ordem s em G;
$\mathscr{D}'_s(G)$	Ultradistribuições de ordem s em G;
$\widehat{G}$	Classes de equivalência das representações unitárias, fortemente contínuas e irredutíveis em G;
$\langle\cdot,\cdot\rangle_\bullet$	Métrica Riemanniana particular, construída no capítulo 1;
$\Delta_\bullet$	Operador de Laplace-Beltrami associado à métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_\bullet$;
Ω	Operador de Casimir;
$\mathscr{F}(\phi), \widehat{\phi}$	Transformada de Fourier de ϕ;
$\mathscr{F}^{-1}$	Transformada inversa de Fourier;
$\|.\|_{H^k}$	Norma k de Sobolev;
$\|.\|_k$	Norma equivalente à norma k de Sobolev, dada por $\|.\|_k = \|(I+\Delta_\bullet)^{\frac{k}{2}}.\|_{L^2}$.
$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$	Matrizes n por n com entradas reais.

Introdução

As classes de Gevrey e as ultradistribuições são amplamente utilizadas em problemas de resolubilidade e hipoelipticidade global (C^∞, Gevrey e analítica) no toro. Uma das ferramentas bastante utilizadas é a caracterização dessas classes via o comportamento da transformada de Fourier, por exemplo em [CH94], [CH98], [HP04], [GW72], e em [Pet05] (e todas as referências lá contidas). Em tais trabalhos, e em muitos outros, a análise de Fourier se mostra extremamente útil. Um ambiente mais geral que o toro, e no qual ainda podemos falar da série e da transformada de Fourier, é o dos grupos de Lie compactos.

O objetivo desse trabalho é o de estudar funções Gevrey e ultradistribuições em um grupo de Lie compacto arbitrário, G, provar um teorema de tipo Paley-Wiener para essas classes (caracterização via o comportamento da transformada de Fourier), e por último fazemos uma aplicação em um problema de hipoelipticidade (C^∞, Gevrey e analítica) global em G, e a comparamos com um trabalho de Greenfield e Wallach [GW73]

No primeiro capítulo estudamos o necessário da teoria de representações de grupos para a compreensão do teorema de Peter-Weyl (ver teorema 2), resultado que possibilita o estudo da série de Fourier em grupos de Lie compactos.

Pela teoria local já temos definidas as classes de Gevrey em qualquer variedade analítica, então como um grupo de Lie compacto qualquer, G, em particular é uma variedade compacta analítica, já temos essas classes naturalmente definidas em G. Pela teoria de vetores Gevrey (ver [KN62] e [BCM79]) temos que as funções Gevrey em G são os vetores Gevrey para qualquer operador diferencial linear elíptico em G. Dada qualquer métrica Riemanniana em G temos automaticamente um operador diferencial linear elíptico, o operador de Laplace-Beltrami.

Na seção 1.2 construimos uma métrica Riemanniana em G, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet$, apropriada ao nosso estudo: o operador de Laplace-Beltrami, $\Delta_\bullet$, a ela associado tem propriedades muito especiais, as quais permitem a caracterização das classes de Gevrey via a transformada de Fourier. O uso desta métrica, que nos parece original nesta abordagem, faz a conexão entre a parte algébrica, das representações, e a parte analítica, através do teorema espectral aplicado a $\Delta_\bullet$. Podemos então utilizar normas $\| \cdot \|_{2m} \doteq \|(I + \Delta_\bullet)^m\|_{L^2(G)}$ equivalentes às normas de Sobolev $\| \cdot \|_{H^{2m}(G)}$ para definir as classes de Gevrey, uma vez que basta olhar para as normas "pares"de Sobolev, o que evita o uso de operadores pseudodiferenciais.

O operador $\Delta_\bullet$ tem as representações (unitárias, fortemente contínuas e irredutíveis) como suas autofunções. Isso facilita o manuseio das normas $\| \cdot \|_{2m}$, e aliado às informações espectrais de $\Delta_\bullet$ nos permitem avaliar certas convergências de séries de Fourier, convergências essas centrais nas caracterizações das classes de Gevrey via transformada de Fourier. Outra propriedade importante do operador $\Delta_\bullet$ é que ele comuta com todos os operadores diferenciais invariantes à esquerda em G. Tal propriedade é de extrema importância no resultado de hipoelipticidade Gevrey global, exposto no último capítulo.

Enfatizamos também que embora a caracterização das classes Gevrey via transformada de Fourier seja a mesma feita em [DR14], a nossa exposição é mais simples, uma vez que utilizamos a teoria de vetores Gevrey, evitando o uso da teoria de operadores pseudodiferenciais.

No último capítulo aplicamos essa caracterização via transformada de Fourier em um problema de hipoelipticidade C^∞ e Gevrey global para operadores invariantes à esquerda (análogo aos operadores a coeficientes constantes em $\mathbb{R}^N$). Tal problema foi estudado anteriormente por Greenfield e Wallach em [GW73]. Em tal artigo, os autores primeiro consideram uma situação mais geral, e

depois se restringem ao caso de grupos de Lie compactos utilizando uma abordagem tecnicamente mais complicada. Mostramos ao final que as duas abordagens são equivalentes, embora acreditamos que a aqui exposta seja mais simples.

Capítulo 1

Grupos de Lie

Na primeira seção desse capítulo estudamos alguns resultados sobre teoria de representações em grupos de Lie compactos, com o objetivo de enunciar o teorema de Peter-Weyl, resultado esse que possibilita o estudo da série de Fourier em G. Não iremos demonstrar tal teorema, e indicamos os livros [RT10] e [Fol95] para aqueles que desejam estudar a sua demonstração. Embora a maior parte dos resultados aqui expostos valem em grupos topológicos compactos, estamos interessados em estudar séries de Fourier em grupos de Lie compactos. Seja G um grupo de Lie compacto, de dimensão n, fixado. Todos os resultados expostos nesse trabalho concernem a G.

Em particular, G é uma variedade analítica compacta. Então dada uma métrica Riemanniana em G, temos automaticamente o operador de Laplace-Beltrami globalmente definido em G. Tal operador será de grande importância na caracterização das classes de Gevrey via transformada de Fourier. Na segunda seção desse capítulo construimos uma métrica particular em G, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet$, de tal modo que o operador de Laplace-Beltrami associado à essa métrica, $\Delta_\bullet$, tem as representações (unitárias, fortemente contínuas e irredutíveis) como as suas autofunções. Como o operador de Laplace-Beltrami é elíptico, podemos usar informações espectrais, ou fórmula assintótica de Weyl, para obter informações sobre o crescimento de seus autovalores ([Cha84] e [See69]). Para a construção da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet$ são necessários elementos da teoria de veriedades diferenciáveis e grupos de Lie. Como esse trabalho não é sobre teoria geral dos grupos de Lie, enunciamos o mínimo necessário sobre esse tema. Recomendamos, por exemplo, a leitura de [Lee13] para maior entendimento do assunto.

Nesse capítulo a referência para a maior parte dos resultados é o livro [RT10], e também foram consultados [DK00], [Lee13], [Cha84] e [See69]. Além do teorema de Peter-Weyl, não demonstramos os teoremas 4 e 5.

1.1 Representações e o teorema de Peter-Weyl

Definição 1. Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert e denote por $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ o espaço dos operadores unitários em $\mathscr{H}$. Uma representação unitária ξ de G é um elemento do espaço $\mathrm{Hom}(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$. Se para todo $v \in \mathscr{H}$ a função

$$G \ni x \mapsto \xi(x)v \in \mathscr{H}$$

é contínua, ξ é dita fortemente contínua (f.c).

Definição 2. Seja $\xi \in \mathrm{Hom}\,(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$ e $V \subset \mathscr{H}$ um subespaço. Dizemos que V é ξ-invariante se

$$\xi(x)V \subset V,$$

para todo $x \in G$.

Definição 3. Uma representação unitária, fortemente contínua $\xi \in \mathrm{Hom}(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$ é dita irredutível se os únicos subespaços fechados ξ-invariantes de $\mathscr{H}$ são $\{0\}$ e $\mathscr{H}$.

Definição 4. Uma representação unitária $\xi \in \mathrm{Hom}(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$, fortemente contínua, é dita cíclica se existe $v \in \mathscr{H}$ tal que

$$\mathrm{span}\{\xi(x)v \,:\, x \in G\} \subset \mathscr{H}$$

é denso em $\mathscr{H}$. Tal v é dito vetor cíclico para ξ.

Definição 5. Sejam $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert e $\{\mathscr{H}_j\}_{j\in J}$ uma família de subespaços fechados tais que

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{j\in J} \mathscr{H}_j.$$

Se $\xi \in \mathrm{Hom}(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$, dizemos que ξ é uma soma direta

$$\xi = \bigoplus_{j\in J} \xi|_{\mathscr{H}_j},$$

se cada $\mathscr{H}_j$ é ξ-invariante.

Observação 6. *Em todo o texto indicaremos por $\bigoplus_{j\in J}\mathscr{H}_j$ como a soma direta de espaços de Hilbert, e não a algébrica.*

Definição 7. Sejam $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Uma aplicação linear contínua $A : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ é um entrelaçamento entre as representações $\xi \in \mathrm{Hom}(G,\mathscr{U}(\mathscr{H}_1))$ e $\eta \in \mathrm{Hom}(G,\mathscr{U}(\mathscr{H}_2))$ se vale

$$A\xi(x) = \eta(x)A,$$

Para todo $x \in G$. Notação: $A \in \mathrm{Hom}(\xi,\eta)$. Se A for um isomorfismo dizemos que $\xi \sim \eta$.

Definição 8. O dual unitário $\widehat{G}$ de G é o conjunto das classes de equivalência de representações unitárias, fortemente contínuas e irredutíveis.

Lema 1. *Sejam V um espaço vetorial topológico, A uma aplicação linear contínua de V em V, $W \subset V$ um subespaço A-invariante. Então $\overline{W}$ também é A-invariante.*

Demonstração. Sejam $y \in A(\overline{W})$ e $x \in \overline{W}$ tais que $y = Ax$. Se U_y é uma vizinhança aberta de y, como A é contínua, $U_x = A^{-1}(U_y)$ é vizinhança aberta de x. Como $x \in \overline{W}$, existe $z \in W \cap U_x$, logo $Az \in W \cap U_y$, e portanto $A\overline{W} \subset \overline{W}$. □

Proposição 1. *Seja ξ uma representação unitária fortemente contínua de G. Então existe uma família $\{\mathscr{H}_j\}_{j\in J}$ como na definição 5 tal que*

$$\xi = \bigoplus_{j\in J} \xi|_{\mathscr{H}_j},$$

e cada $\xi|_{\mathscr{H}_j}$ é cíclica.

Demonstração. Seja $J^\bullet$ o conjunto dos subconjuntos fechados $V \subset \mathscr{H}$, ξ-invariantes tais que $\xi|_V$ é cíclica. Seja

$$\mathfrak{S} = \{\mathbf{S} \subset J^\bullet \,:\, \forall V, W \in \mathbf{S},\ V \perp W \text{ ou } V = W\}.$$

Como $\{\{0\}\} \in S$ temos que $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. Considere em $\mathfrak{S}$ a ordem parcial

$$\mathbf{S}_1 \leq \mathbf{S}_2 \Leftrightarrow \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_2.$$

Seja $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$ uma cadeia, isto é, dados $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathfrak{R}$ tem-se $\mathbf{S}_1 \leq \mathbf{S}_2$ ou $\mathbf{S}_2 \leq \mathbf{S}_1$. Considere

$$\mathbf{M} = \bigcup_{\mathbf{S}\in\mathfrak{R}} \mathbf{S}.$$

Então $\mathbf{M} \in \mathfrak{S}$ e $\mathbf{M} \geq \mathbf{R}$, para todo $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}$, portanto $\mathbf{M}$ é um majorante de $\mathfrak{R}$. Pelo Lema de Zorn, temos que existe $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}$ maximal, isto é, se $\mathbf{W} \in \mathfrak{S}$ é tal que $\mathbf{T} \leq \mathbf{W}$, então $\mathbf{W} = \mathbf{T}$. Defina

$$V = \bigoplus_{W \in \mathbf{T}} W.$$

Queremos mostrar que $V = \mathscr{H}$. Suponha que não, isto é, existe $v \in V^{\perp}$. Portanto

$$\mathbf{T} \bigcup \overline{\operatorname{span}(\xi(G)v)} \in \mathfrak{S},$$

e

$$\mathbf{T} \bigcup \overline{\operatorname{span}(\xi(G)v)} \geq \mathbf{T}$$

e isso é um absurdo, pois $\mathbf{T}$ é maximal. □

Como G é compacto existe uma única medida regular de Borel μ_G tal que valem:

- $\int_G 1 \, \mathrm{d}\mu_G = \mu_G(G) = 1$;
- $\int_G f(x) \, \mathrm{d}\mu_G(x) = \int_G f(xy) \, \mathrm{d}\mu_G(x) = \int_G f(yx) \, \mathrm{d}\mu_G(x) = \int_G f(x^{-1}) \, \mathrm{d}\mu_G(x), \quad \forall y \in G$

Tal medida é chamada de medida de Haar. Com tal medida podemos definir o espaço $L^2(G)$.

Definição 9. Seja $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função Borel-mensurável. Dizemos que $f \in L^2(G)$ se

$$\|f\|^2_{L^2(G)} \doteq \int_G |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu_G(x) < \infty.$$

Mais ainda, essa norma é hilbertiana, e provém do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(G)} \doteq \int_G f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu_G(x), \quad f, g \in L^2(G).$$

Lema 2. *Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert com produto interno*

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{\mathscr{H}}, \quad u, v \in \mathscr{H}.$$

Seja $\xi \in Hom(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$ f.c, cíclica e $w \in \mathscr{H}$ vetor cíclico com $\|w\|_{\mathscr{H}} = 1$. Então

$$\langle u, v \rangle_{\xi} = \int_G \langle \xi(x)u, w \rangle_{\mathscr{H}} \langle w, \xi(x)v \rangle_{\mathscr{H}} \, \mathrm{d}\mu_G(x), \quad u, v \in \mathscr{H}, \tag{1.1}$$

define um produto interno em $\mathscr{H}$, ξ é unitária para $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\xi}$ e $\|u\|_{\xi} \leq \|u\|_{\mathscr{H}}$, para toda $u \in \mathscr{H}$.

Demonstração. Seja $u \in \mathscr{H}$ fixado. Considere a função $f_u : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_u(x) = \langle \xi(x)u, w \rangle_{\mathscr{H}}, \quad x \in G.$$

Temos que

$$\begin{aligned} |f_u(x) - f_u(y)| &= |\langle \xi(x)u - \xi(y)u, w \rangle_{\mathscr{H}}| \\ &\leq \|(\xi(x) - \xi(y))u\|_{\mathscr{H}} \|w\|_{\mathscr{H}} \\ &= \|(\xi(x) - \xi(y))u\|_{\mathscr{H}} \\ &\xrightarrow[x \to y]{} 0, \end{aligned}$$

pois ξ é fortemente contínua. Então f_u é contínua, e a integração em (1.1) faz sentido. É fácil ver que $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_\xi$ é sesquilinear e hermitiano. A única propriedade que falta verificar é a positividade de $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_\xi$. Então seja $u \in \mathscr{H}$ tal que $\langle u, u\rangle_\xi = 0$, isto é,

$$\int_G |\langle \xi(x)u, w\rangle_{\mathscr{H}}|^2 \, \mathrm{d}\mu_G(x) = 0.$$

Então dado $x \in G$ temos

$$|\langle \xi(x)u, w\rangle_{\mathscr{H}}| = 0.$$

Então

$$\langle u, \xi(x^{-1})w\rangle_{\mathscr{H}} = 0,$$

para todo $x \in G$, e portanto

$$u \in (\operatorname{span} \xi(G)w)^\perp = \{0\}$$

isto é, $u = 0$. Vejamos agora que ξ é também unitária com relação à $\langle \cdot, \cdot\rangle_\xi$: dados $u, v \in \mathscr{H}$ e $y \in G$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \xi(y)u, v\rangle_\xi &= \int_G \langle \xi(x)\xi(y)u, w\rangle_{\mathscr{H}} \langle w, \xi(x)v\rangle_{\mathscr{H}} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \langle \xi(xy)u, w\rangle_{\mathscr{H}} \langle w, \xi(x)v\rangle_{\mathscr{H}} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \langle \xi(x)u, w\rangle_{\mathscr{H}} \langle w, \xi(xy^{-1})\rangle_{\mathscr{H}} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \langle \xi(x)u, w\rangle_{\mathscr{H}} \langle w, \xi(x)\xi(y^{-1})v\rangle_{\mathscr{H}} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \langle u, \xi(y^{-1})v\rangle_\xi.
\end{aligned}$$

Além disso temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_\xi^2 &= \int_G |\langle \xi(x)u, w\rangle_{\mathscr{H}}|^2 \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&\leq \int_G \|\xi(x)u\|_{\mathscr{H}}^2 \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \|u\|_{\mathscr{H}}^2,
\end{aligned}$$

para toda $u \in \mathscr{H}$. □

Lema 3. *Sejam $\xi \in Hom(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$ f.c, cíclica e $\langle \cdot, \cdot\rangle_\xi$ como no lema anterior. Então existe $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tal que*

$$\langle u, Av\rangle_{\mathscr{H}} = \langle u, v\rangle_\xi, \quad u, v \in \mathscr{H}.$$

Além disso A é auto-adjunto, compacto, definido positivo e $A \in Hom(\xi, \xi)$.

Demonstração. Seja $v \in \mathscr{H}$ fixado, e considere a função $F_v(u) = \langle u, v\rangle_\xi$, $u \in \mathscr{H}$. Pelo lema anterior temos que F_v é linear e

$$|F_v(u)| \leq \|u\|_{\mathscr{H}} \|v\|_\xi,$$

para todo $u \in \mathscr{H}$. Então F_v é contínuo. Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe $Av \in \mathscr{H}$ tal que $F_v(u) = \langle u, Av\rangle_{\mathscr{H}}$, para todo $u \in \mathscr{H}$. Definido dessa forma, temos que $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Além disso temos

$$\begin{aligned}
\langle u, A^*v\rangle_{\mathscr{H}} &= \langle Au, v\rangle_{\mathscr{H}} \\
&= \overline{\langle v, Au\rangle_{\mathscr{H}}} \\
&= \overline{F_u(v)} \\
&= \overline{\langle v, u\rangle_{\xi}} \\
&= \langle u, v\rangle_{\xi} \\
&= F_v(u) \\
&= \langle u, Av\rangle_{\mathscr{H}},
\end{aligned}$$

para todos $u, v \in \mathscr{H}$. Portanto $A = A^*$, isto é, A é auto-adjunto. Também temos que dado $u \in \mathscr{H}$ vale

$$\begin{aligned}
\langle u, Au\rangle_{\mathscr{H}} &= \langle u, u\rangle_{\xi} \\
&= \|u\|_{\xi}^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

isto é, A é definido positivo. Dados $u, v \in \mathscr{H}$ e $y \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle u, A\xi(y)v\rangle_{\mathscr{H}} &= \langle u, \xi(y)v\rangle_{\xi} \\
&= \langle \xi(y^{-1})u, v\rangle_{\xi} \\
&= \langle \xi(y^{-1})u, Av\rangle_{\mathscr{H}} \\
&= \langle u, \xi(y)Av\rangle_{\mathscr{H}}.
\end{aligned}$$

Então temos a seguinte igualdade

$$A\xi(y) = \xi(y)A,$$

para todo $y \in G$, isto é, $A \in \mathrm{Hom}(\xi, \xi)$. Para completar a demonstração falta mostrar a compacidade de A. Considere então o seguinte conjunto:

$$\mathscr{B} = \{u \in \mathscr{H} \ : \ \|u\|_{\mathscr{H}} \leq 1\}.$$

Sejam $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset A(\mathscr{B})$, e $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}$ tais que $Av_j = u_j$. Por Banach-Alaoglu, temos que existem $\{v_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência e $v \in \mathscr{B}$ tais que

$$\langle w, v_{j_k}\rangle_{\mathscr{H}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle w, v\rangle_{\mathscr{H}},$$

para todo $w \in \mathscr{H}$. Então

$$\begin{aligned}
\|u_{j_k} - Av\|_{\mathscr{H}}^2 &= \langle A(v_{j_k} - v), A(v_{j_k} - v)\rangle_{\mathscr{H}} \\
&= \langle A(v_{j_k} - v), v_{j_k} - v\rangle_{\xi} \\
&= \int_G g_k(x)\, \mathrm{d}\mu_G(x),
\end{aligned}$$

onde $g_k(x) = \langle \xi(x)A(v_{j_k} - v), w\rangle_{\mathscr{H}}\langle w, \xi(x)(v_{j_k} - v\rangle_{\mathscr{H}}$, $x \in G$. Como

$$\begin{aligned}|g_k(x)| &\leq |\langle v_{j_k} - v, A\xi(x^{-1})w\rangle_{\mathscr{H}}||\langle \xi(x^{-1})w, v_{j_k} - v\rangle_{\mathscr{H}}| \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|g_k(x)| &\leq \|v_{j_k} - v\|^2_{\mathscr{H}} \\ &\leq 4,\end{aligned}$$

podemos aplicar o teorema da convergência dominada, e então concluir que

$$\int_G g_k \, \mathrm{d}\mu_G \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

e portanto

$$u_{j_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} Av,$$

isto é,

$$Av_{j_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} Av$$

□

Definição 10. Dizemos que uma representação $\xi \in \mathrm{Hom}(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$ tem dimensão finita se

$$\dim \mathscr{H} < \infty.$$

Teorema 1. *Seja $\xi \in Hom(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}))$ f.c. Então ξ é uma soma direta de representações unitárias irredutíveis e de dimensão finita.*

Demonstração. Pela proposição 1, podemos supor ξ cíclica. Seja A como no lema anterior. Pelo Teorema Espectral temos que

$$(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \mathrm{Ker}\,(\lambda I - A),$$

onde $\sigma(A)$ é o espectro de A, e $\mathrm{Ker}(\lambda I - A)$ tem dimensão finita para todo $\lambda \in \sigma(A)$. Seja $v \in \mathscr{H}$ tal que $Av = 0$. Então dado $u \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{\xi} &= \langle u, Av\rangle_{\mathscr{H}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

portanto $v = 0$, isto é, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Logo

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \mathrm{Ker}\,(\lambda I - A).$$

Como $A \in \mathrm{Hom}(\xi, \xi)$, se $v \in \mathrm{Ker}(\lambda I - A)$ e $x \in G$ temos

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)\xi(x)v &= \lambda\xi(x)v - \xi(x)Av \\ &= \xi(x)(\lambda I - A)v \\ &= 0,\end{aligned}$$

e portanto $\mathrm{Ker}(\lambda I - A)$ é ξ-invariante. Então

$$\xi = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \xi|_{\mathrm{Ker}\,(\lambda I - A)}.$$

Como cada $\mathrm{Ker}(\lambda I - A)$ tem dimensão finita, podemos decompor cada $\xi|_{\mathrm{Ker}\,(\lambda I - A)}$ em uma soma direta finita de representações unitárias irredutíveis. □

Corolário 1. *Se ξ é uma representação unitária, fortemente contínua e irredutível então ξ tem dimensão finita.*

Denotaremos $d_\xi = \dim \mathscr{H}$, e $[\xi]$ a classe de equivalência de ξ, isto é, $[\xi] \in \widehat{G}$. Para o que vem a seguir, dada uma representação unitária ξ, iremos denotar por $\mathscr{H}_\xi$ o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, isto é, $\xi \in \mathrm{Hom}(G, \mathscr{U}(\mathscr{H}_\xi))$. É fácil ver que $\mathscr{H}_\xi \cong \mathbb{C}^{d_\xi}$

Lema 4. *Sejam ξ, η duas representações unitárias, irredutíveis e de dimensão finita. Então*

$$Hom(\xi, \eta) = \begin{cases} \{\lambda I |\, \lambda \in \mathbb{C}\} & se\ \xi = \eta; \\ \{0\} & se\ \xi \nsim \eta. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $A \in \mathrm{Hom}(\xi, \eta)$, isto é, $A : \mathscr{H}_\xi \longrightarrow \mathscr{H}_\eta$ e $A\xi(x)v = \eta(x)Av$, para todos $x \in G$ e $v \in \mathscr{H}_\xi$. Seja $v \in \mathrm{Ker}\,(A)$, isto é, $Av = 0$. Então temos que dado $x \in G$

$$\begin{aligned} A\xi(x)v &= \eta(x)Av \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $\xi(x)v \in \mathrm{Ker}(A)$, para todo $x \in G$, e portanto $\mathrm{Ker}(A)$ é ξ-invariante. Como ξ é irredutível, temos que $\mathrm{Ker}(A)$ é o conjunto $\{0\}$ ou $\mathscr{H}_\xi$. Se $\eta \nsim \xi$, temos que $\mathrm{Ker}(A)$ não pode ser $\{0\}$, logo $\mathrm{Ker}(A) = H_\xi$, isto é, $A = 0$. Se $\xi = \eta$, e $A \neq 0$, temos que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de A, e seja $v \in \mathscr{H}_\xi$ um autovetor associado à λ. Em particular $v \neq 0$. Dado $x \in G$ temos que

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\xi(x)v &= \xi(x)(\lambda I - A)v \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então $\xi(x)v \in \mathrm{Ker}(\lambda I - A)$, para todo $x \in G$, e portanto $\mathrm{Ker}(\lambda I - A)$ é ξ-invariante. Como ξ é irredutível e $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$, pois $v \in \mathrm{Ker}(\lambda I - A)$, temos que $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \mathscr{H}_\xi$. □

Definição 11. Seja $[\xi] \in \widehat{G}$. Tome $\{v_1, \ldots, v_{d_\xi}\}$ uma base de $\mathscr{H}_\xi$. Definimos então para cada $1 \leq i, j \leq d_\xi$ a função $\xi_{ij} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\xi_{ij}(x) = \langle \xi(x)v_j, v_i \rangle_{H_\xi}, \quad x \in G.$$

Lema 5. *Sejam ξ, η duas representações unitárias, fortemente contínuas e irredutíveis. Então*

$$\langle \xi_{ij}, \eta_{kl} \rangle_{L^2(G)} = \begin{cases} 0 & : \xi \nsim \eta \\ \frac{1}{m}\delta_{jl}\delta_{ik} & : \xi = \eta \end{cases}$$

Demonstração. Fixe $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq l \leq n$. Seja E a matriz $(E_{pq}) = \delta_{pj}\delta_{pl}$, e defina $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ por

$$A = \int_G \xi(y)E\eta(y)^{-1} d\mu_G(y).$$

Afirmo que $A \in \mathrm{Hom}(\xi, \eta)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\xi(x)A &= \int_G \xi(xy)E\eta(y)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_G(y)\\
&= \int_G \xi(y)E\eta(x^{-1}y)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_G(y)\\
&= \int_G \xi(y)E\eta(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu_G(y)\\
&= A\eta(x).
\end{aligned}$$

Pelo lema acima temos que $A = \lambda I$, com $\lambda \in \mathbb{C}$, se $\eta = \xi$ e $A = 0$ se $\xi \nsim \eta$. Isto é,

$$A = \begin{cases} 0 & : \xi \nsim \eta \\ \lambda I & : \xi = \eta. \end{cases}$$

Então temos

$$\begin{aligned}
A_{ik} &= \int_G \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} \xi_{ip}(y)E_{pq}\eta_{qk}(y^{-1})\,\mathrm{d}\mu_G(y)\\
&= \int_G \xi_{ij}(y)\eta_{lk}(y^{-1})\,\mathrm{d}\mu_G(y)\\
&= \int_G \xi_{ij}(y)\overline{\eta_{kl}(y)}\,\mathrm{d}\mu_G(y)\\
&= \langle \xi_{ij}, \eta_{kl}\rangle_{L^2(G)}.
\end{aligned}$$

Se $\xi \nsim \eta$, então $\langle \eta_{ij}, \eta_{kj}\rangle_{L^2(G)} = 0$. Se $\xi = \eta$, então $\lambda = \frac{1}{m}\mathrm{Tr}\,(A)$, pois $A = \lambda I$, e portanto

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{ij}, \eta_{kl}\rangle_{L^2(G)} &= \delta_{ik}\lambda\\
&= \delta_{ik}\frac{1}{m}\mathrm{Tr}\,(A)\\
&= \delta_{ik}\frac{1}{m}\int_G \mathrm{Tr}\,(\xi(y)E\eta(y^{-1}))\,\mathrm{d}\mu_G(y)\\
&= \frac{\delta_{ik}}{m}\int_G \mathrm{Tr}\,(E)\,\mathrm{d}\mu_G\\
&= \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{m}.
\end{aligned}$$

□

Definição 12. As representações regulares à esquerda, e à direita, $\pi_L, \pi_R \in \mathrm{Hom}(G, \mathscr{U}(L^2(G)))$ são definidas por

$$\begin{aligned}
(\pi_L(y)f)(x) &= f(y^{-1}x)\\
(\pi_R(y)f)(x) &= f(xy)
\end{aligned}$$

para toda $f \in L^2(G)$ e μ_G-quase todo $x \in G$.

Agora estamos em condições de enunciarmos o resultado principal dessa seção:

Teorema 2 (Peter-Weyl, teo. 7.5.14 de [RT10]). *Seja $\mathfrak{A}$ um conjunto de representações unitárias, fortemente contínuas, irredutíveis tal que se $\xi, \eta \in \mathfrak{A}$ temos que $\xi = \eta$ ou $\xi \nsim \eta$, e*

$$\{[\xi] \,:\, \xi \in \mathfrak{A}\} = \widehat{G}.$$

Então o conjunto

$$\mathscr{B} = \{\sqrt{d_\xi}\xi_{ij} \ : \xi \in \mathfrak{A}\},$$

é uma base hilbertiana para $L^2(G)$. *Além disso*

$$\mathscr{H}^\xi_{i,\cdot} \doteq span\{\, \xi_{ij} \ : \ 1 \leq j \leq d_\xi\}$$

é π_R*-invariante,* $\xi \sim \pi_R|_{\mathscr{H}^\xi_{i,\cdot}}$, *e*

$$L^2(G) = \bigoplus_{[\xi]\in\widehat{G}} \bigoplus_{i=1}^{d_\xi} \mathscr{H}^\xi_{i,\cdot},$$

$$\pi_R \sim \bigoplus_{[\xi]\in\widehat{G}} \bigoplus_{i=1}^{d_\xi} \xi.$$

Denotemos ainda

$$\mathscr{H}^\xi \doteq \bigoplus_{i=1}^{d_\xi} \mathscr{H}^\xi_{i,\cdot} = \bigoplus_{j=1}^{d_\xi} \mathscr{H}^\xi_{\cdot,j}.$$

Também vale uma versão à esquerda do Peter-Weyl, e portanto $\mathscr{H}^\xi_{\cdot,j}$ é π_L-invariante.

Observação 13. *Esse teorema na verdade é sobre grupos topológicos compactos, mas aqui só estamos interessados em grupos de Lie compactos.*

1.2 O operador de Laplace-Beltrami

Seja $\mathfrak{g} \doteq T_eG$ a álgebra de Lie de G. Dado $x \in G$ definimos as ações $R_x, L_x : G \longrightarrow G$ como

$$R_x(y) = yx, \quad L_x(y) = xy,$$

para todo $y \in G$.

Definição 14. Um campo C^∞ em G é uma função $X : G \longrightarrow TG$ de classe C^∞ tal que $X_x \in T_xG$, isto é, X é uma seção C^∞ do fibrado TG. Também denotamos por $X \in C^\infty(G, TG)$.

Observação 15. *Há uma equivalência entre campos, como definidos acima, e operadores diferenciais que satisfezem a regra de Leibnitz. No que se segue usaremos as duas definições.*

Dada $f \in C^\infty(G, G)$ denotamos por $f_* : T_xG \longrightarrow T_{f(x)}G$ o push-foward por f, isto é, dados $X \in T_xG$ e $g \in C^\infty(G) \doteq C^\infty(G, \mathbb{C})$, $(f_*X_x)(g) = X_x(g \circ f) = X(g \circ f)(x)$.

Definição 16. Dizemos que um campo X de classe C^∞ em G é invariante à esquerda se $(L_x)_*X_y = X_{xy}$, para todos $x, y \in G$.

Observação 17. *A álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é isomorfa ao espaço dos campos* C^∞ *em* G *invariantes à esquerda. Ainda mais, se* $X \in \mathfrak{g}$ *e* $f \in C^\infty(G)$ *temos que*

$$Xf(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x \exp(tX)),$$

para todo $x \in G$. *Aqui a função* exp *é definida como em [Lee13].*

Considere a aplicação linear $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathfrak{g})$ dada por

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, então temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}([X,Y])(Z) &= [[X,Y],Z] \\
&= -[[Z,X],Y] - [[Y,Z],X] \\
&= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\
&= [X,\mathrm{ad}(Y)(Z)] - [Y,\mathrm{ad}(X)(Z)] \\
&= \mathrm{ad}(X)(\mathrm{ad}(Y)(Z)) - \mathrm{ad}(Y)(\mathrm{ad}(X)(Z)) \\
&= [\mathrm{ad}(X),\mathrm{ad}(Y)](Z).
\end{aligned}$$

Portanto $\mathrm{ad}([X,Y]) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]$, para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definição 18. Dado $x \in G$ definimos a aplicação $\mathrm{Ad}(x) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ como $\mathrm{Ad}(x) = (L_x \circ R_{x^{-1}})_*$.

Observação 19. *Como* $\mathrm{Ad}(x)$ *é um push-foward, temos que* $\mathrm{Ad}(x)[X,Y] = [\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y]$, *para todos* $X, Y \in \mathfrak{g}$ *e* Ad *é um homomorfismo.*

Definição 20. Seja $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma forma bilinear. Dizemos que ω é Ad-invariante se

$$\omega(\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y) = \omega(X,Y),$$

para todo $x \in G$ e todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Lema 6. *Existe um produto escalar* Ad-*invariante em* $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Seja $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto escalar qualquer em $\mathfrak{g}$. Defina $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathfrak{g}}$ por

$$(X,Y)_{\mathfrak{g}} \doteq \int_G \omega(\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y)\,\mathrm{d}\mu_G(x), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Afirmo que $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathfrak{g}}$ é Ad-invariante. De fato, se $y \in G$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}(y)X, \mathrm{Ad}(y)Y)_{\mathfrak{g}} &= \int_G \omega(\mathrm{Ad}(x)\mathrm{Ad}(y)X, \mathrm{Ad}(x)\mathrm{Ad}(y)Y)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \omega(\mathrm{Ad}(xy)X, \mathrm{Ad}(xy)Y)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \omega(\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= (X,Y)_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}$$

□

1.2.1 Forma de Killing e algebras de Lie semisimples

Definição 21. A forma de Killing em $\mathfrak{g}$ é uma aplicação bilinear $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(X,Y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

onde $\mathrm{Tr}\,(\cdot)$ é a função traço.

Como $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$ para todas matrizes A e B, temos que K é simétrica.

Lema 7. *Dado $x \in G$ vale a fórmula*

$$\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(x)X) = \mathrm{Ad}(x)\mathrm{ad}(X)\mathrm{Ad}(x^{-1}),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Dados $x \in G$ e $X, Z \in \mathfrak{g}$ temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}(x)\mathrm{ad}(X)\mathrm{Ad}(x^{-1}))Z &= \mathrm{Ad}(x)[X, \mathrm{Ad}(x^{-1})Z] \\ &= [\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)\mathrm{Ad}(x^{-1})Z] \\ &= [\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(xx^{-1})Z] \\ &= [\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(e)Z] \\ &= [\mathrm{Ad}(x)X, Z] \\ &= \mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(x)X)Z.\end{aligned}$$

□

Proposição 2. *A forma de Killing é* Ad*-invariante.*

Demonstração. Sejam $x \in G$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Temos que

$$\begin{aligned}K(\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y) &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(x)X)\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(x)Y)) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Ad}(x)\mathrm{ad}(X)\mathrm{Ad}(x^{-1})\mathrm{Ad}(x)\mathrm{ad}(Y)\mathrm{Ad}(x^{-1})) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Ad}(x)\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\mathrm{Ad}(x^{-1})) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Ad}(x^{-1})\mathrm{Ad}(x)\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) \\ &= K(X, Y).\end{aligned}$$

□

Definição 22. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita semisimples se a forma de Killing K é não degenerada, isto é,

$$\forall X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}\ \exists Y \in \mathfrak{g}\ :\quad K(X, Y) \neq 0.$$

Note que K é não degenerada se, e somente se, a matriz $(K(X_i, X_j))_{ij}$ é inversível, para toda $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ base de $\mathfrak{g}$.

Definição 23. Suponha $\mathfrak{g}$ semisimples. Seja $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Considere $R \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ dada por $R_{ij} = K(X_i, X_j)$. Definimos o operador de Casimir Ω como

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} X_i X^i,$$

onde $X^i = \sum_{j=1}^{n} (R^{-1})_{ij} X_j$.

Observação 24. *O operador de Casimir é um operador diferencial de segunda ordem em G.*

O próximo teorema é de fundamental importância no que se segue.

Teorema 3. *Suponha $\mathfrak{g}$ semisimples. O operador de Casimir Ω não depende da base de $\mathfrak{g}$, e além disso dado $Z \in \mathfrak{g}$ vale*

$$Z\Omega = \Omega Z.$$

Demonstração. Seja $\{Y_i\}_{i=1,\dots,n}$ outra base de $\mathfrak{g}$. Então existe $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Seja $S \in GL(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$S_{ij} = K(Y_i, Y_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Então temos que

$$\begin{aligned} S_{ij} &= K(Y_i, Y_j) \\ &= K\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} X_k, \sum_{l=1}^{n} A_{jl} X_l\right) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} A_{ik} A_{jl} K(X_k, X_l) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} A_{ik} R_{kl} A^T_{lj} \\ &= (ARA^T)_{ij}, \end{aligned}$$

isto é, $S = ARA^T$. O elemento de Casimir na base $\{Y_i\}$ é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} (S^{-1})_{ij} Y_i Y_j &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (S^{-1})_{ij} A_{ik} A_{jl} X_k X_l \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A^T_{ki} (S^{-1})_{ij} A_{jl} X_k X_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} (A^T S^{-1} A)_{kl} X_k X_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} (R^{-1})_{kl} X_k X_l \\ &= \sum_{k=1}^{n} X_k X^k. \end{aligned}$$

Então Ω independe da base de $\mathfrak{g}$. Mostremos agora que $[Z, \Omega] = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Se $i, j \in \{1, \dots, n\}$ temos

$$\begin{aligned} K(X^i, X_j) &= \sum_{k=1}^{n} (R^{-1})_{ik} K(X_k, X_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (R^{-1})_{ik} R_{kj} \\ &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

e portanto podemos definir um produto interno em $\mathfrak{g}$ linearmente de

$$(X_i, X_j) \mapsto K(X^i, X_j) = \delta_{i,j}.$$

Note que esse produto interno depende da base escolhida. Seja $Z \in \mathfrak{g}$. Temos que

$$\begin{aligned}
[Z, \Omega] &= \sum_{i=1}^{n} [Z, X_i X^i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [Z, X_i] X^i + X_i [Z, X^i].
\end{aligned}$$

Sejam $(c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ e $(d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ definidos por

$$[Z, X_i] = \sum_{j=1} c_{ij} X_j \quad \text{e} \quad [Z, X^i] = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} X^j.$$

Logo

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= K(X^j, [Z, X_i]) \\
&= K([X^j, Z], X_i) \\
&= -K([Z, X^j], X_i) \\
&= -K\left(\sum_{k=1}^{n} d_{jk} X^k, X_i\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} d_{jk} K(X^k, X_i) \\
&= -d_{ji},
\end{aligned}$$

isto é, $c_{ij} = -d_{ji}$. Então

$$\begin{aligned}
[Z, \Omega] &= \sum_{i=1}^{n} [Z, X_i] X^i + X_i [Z, X^i] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} X_j X^i + d_{ij} X_i X^j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (c_{ij} + d_{ji}) X_j X^i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Se $\mathfrak{g}$ é semisimples então a forma de Killing é definida negativa.*

Observação 25. *Se $\mathfrak{g}$ é semisimples, temos que K é definida negativa, e portanto podemos fazer um processo análogo ao de Gram-Schmidt, e obter uma base de $\mathfrak{g}$, $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$, tal que*

$$K(X_i, X_j) = -\delta_{i,j},$$

Portanto $R = -I$, logo o elemento de Casimir fica na forma

$$\Omega = -\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

1.2.2 O operador de Laplace-Beltrami

Seja V um espaço vetorial de dimenção finita, com produto escalar $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_V$. Podemos induzir um produto escalar em V^* via o teorema de Riesz, isto é, dados $f, g \in V^*$ existem únicos $u, v \in V$ tais que $f(x) = \langle x, u \rangle_V$ e $g(x) = \langle x, v \rangle_V$, para todo $x \in V$, e então definimos

$$\langle f, g \rangle_{V^*} \doteq \langle u, v \rangle_V.$$

Agora seja M uma variedade Riemanniana orientável, com métrica $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_M$ e munida de um elemento de volume dv. Então podemos definir uma norma no espaço das $1-$formas C^∞ definidas em M da forma

$$\|\omega\|^2_{L^2(M)} \doteq \int_M \langle \omega_x, \omega_x \rangle_{T^*xM} \, \mathrm{d}v(x), \quad \omega \in C^\infty(M; T^*M)$$

onde $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{T^*xM}$ é como na observação anterior. É claro que $\| \cdot \|_{L^2(M)}$ provém do seguinte produto escalar

$$\langle \omega, \eta \rangle_{L^2(M)} = \int_M \langle \omega_x, \eta_x \rangle_{T^*xM} \, \mathrm{d}v(x), \quad \omega, \eta \in C^\infty(M; T^*M).$$

Denotemos por d^* o adjunto formal da derivada exterior d (atuando em funções), com relação à esse produto interno. O operador de Laplace-Beltrami associado à métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ é o operador d^*d. Antes de definirmos uma métrica interessante em G, precisamos do seguinte teorema (teorema 3.6.2, equivalência $(i) \sim (vii)$, pg. 149 de [DK00]):

Teorema 5. *Podemos decompor a álgebra de Lie de G, $\mathfrak{g}$, como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z},$$

onde a forma de Killing é definida negativa em $\mathfrak{g}'$, isto é, $\mathfrak{g}'$ é semisimples, e $\mathfrak{z}$ é o centro de $\mathfrak{g}$, isto é, é o kernel da forma de Killing.

Nas condições do teorema acima, considere em $\mathfrak{g}'$ o produto escalar dado por $-K(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, e tome qualquer produto escalar Ad-invariante em $\mathfrak{z}$. Então a soma desses dois produtos escalares é um produto escalar Ad-invariante em $\mathfrak{g}$. Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ tal produto escalar.Tome $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m\}$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ onde $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{g}'$ e $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{z}$. Podemos então induzir uma métrica em G da seguinte forma: dados $X, Y \in T_xG$, existem $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n+m$ tais que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{n+j} Y_j(x),$$

e

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_{n+j} Y_j(x),$$

e então definimos

$$\langle X, Y \rangle_\bullet(x) = \sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i \beta_i.$$

De agora em diante, estaremos sempre considerando essa métrica em G. Temos portanto o operador de Laplace-Beltrami em G dado por d^*d. Defina

$$\Delta_\bullet \doteq -\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{j=1}^{m} Y_j^2.$$

Então $\Delta_\bullet$ é um operador diferencial de segunda ordem, e pela observação 25

$$\Delta_\bullet = \Omega - \sum_{j=1}^{m} Y_j^2.$$

Temos que $\Delta_\bullet$ comuta com todos elementos de $\mathfrak{g}$, pois Ω é o elemento de Casimir e os Y_j formam uma base do centro de $\mathfrak{g}$. De agora em diante consideremos essa base $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m\}$ fixada.

Proposição 3. *O operador $\Delta_\bullet$ é semi-definido positivo.*

Demonstração. Sejam $X \in \mathfrak{g}$, $f, g \in C^\infty(G)$. Então temos que

$$\begin{aligned}
\int_G Xf(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) &= \int_G \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x\exp(tX))|_{t=0} g(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_G \{f(x\exp(tX)) - f(x)\} g(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_G f(x\exp(tX)) g(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) - \int_G f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_G f(x) g(x\exp(-tX))\,\mathrm{d}\mu_G(x) - \int_G f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \right\} \\
&= \int_G \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{g(x\exp(-tX)) - g(x)}{t} \right\} f(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= -\int_G f(x) Xg(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x).
\end{aligned}$$

Portanto, se $f \in C^\infty(G)$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle f, \Delta_\bullet f\rangle_{L^2(G)} &= \int_G f(x)\overline{\Delta_\bullet f(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \int_G f(x) X_i^2 \overline{f(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) - \sum_{j=1}^{m} \int_G f(x) Y_j^2 \overline{f(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_G X_i f(x) \overline{X_i f(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) + \sum_{i=j}^{m} \int_G Y_j f(x) \overline{Y_j f(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Então $\Delta_\bullet$ é semi-definido positivo .

□

Lema 8. *O operador $\Delta_\bullet$ é o operador de Laplace-Beltrami (associado à métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_\bullet$).*

Demonstração. Dados $f \in C^\infty(G)$ e X um campo C^∞ em G temos que

$$\begin{aligned} df(X) &= X(f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(f) + \sum_{j=1}^{m} \beta_i Y_j(f) \\ &= \langle \mathrm{grad}(f), X \rangle_\bullet, \end{aligned}$$

onde $\mathrm{grad}(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i(f) X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j(f) Y_j$, e $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y_j$. Então se $f, \phi \in C^\infty(G)$ temos

$$\begin{aligned} \langle d^* df, \phi \rangle_{L^2(G)} &= \langle df, d\phi \rangle_{L^2(G)} \\ &= \int_G \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(\phi) \rangle_\bullet \, \mathrm{d}\mu_G \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_G X_i(f) \langle X_i, \mathrm{grad}(\phi) \rangle_\bullet \, \mathrm{d}\mu_G + \sum_{j=1}^{m} \int_G Y_j(f) \langle Y_j, \mathrm{grad}(\phi) \rangle_\bullet \, \mathrm{d}\mu_G \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_G X_i(f) X_i(\phi) \, \mathrm{d}\mu_G + \sum_{j=1}^{m} \int_G Y_j(f) Y_j(\phi) \, \mathrm{d}\mu_G \\ &= \int_G \left\{ -\sum_{i=1}^{n} X_i^2(f) - \sum_{j=1}^{m} Y_j^2(f) \right\} \phi \, \mathrm{d}\mu_G. \end{aligned}$$

Portanto $d^* df = -\sum_{i=1}^{n} X_i^2(f) - \sum_{j=1}^{m} Y_j^2(f)$.

□

Lema 9. *As representações regulares π_L, π_R são isometrias em $L^2(G)$.*

Demonstração. Sejam $f, g \in C^\infty(G)$ e $y \in G$. Então temos que

$$\begin{aligned} \langle \pi_L(y) f, \pi_L(y) g \rangle_{L^2(G)} &= \int_G \pi_L(y) f(x) \overline{\pi_L(y) g(x)} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\ &= \int_G f(y^{-1}x) \overline{g(y^{-1}x)} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\ &= \int_G f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\ &= \langle f, g \rangle_{L^2(G)}. \end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$\langle \pi_R(y) f, \pi_R(y) g \rangle_{L^2(G)} = \langle f, g \rangle_{L^2(G)}.$$

□

Lema 10. *Para cada $y \in G$ a aplicação $(L_y)^*$, o pull-back por L_y, é uma isometria.*

Demonstração. Sejam $\omega, \eta \in C^\infty(G; T^*G)$ duas 1-formas e sejam $Z, Y \in C^\infty(G; TG)$ dois campos tais que

$$\omega(X)(x) = \langle X, Z \rangle_\bullet(x) \quad \text{e} \quad \eta(X)(x) = \langle X, Y \rangle_\bullet(x),$$

para todos $X \in C^\infty(G; TG), x \in G$. Então

$$\langle L_y^*\omega, L_y^*\eta\rangle_{L^2(G)} = \int_G \langle L_y^*\omega, L_y^*\eta\rangle_{T_x^*G}\, \mathrm{d}\mu_G(x).$$

Mas dado $X \in C^\infty(G;TG)$ e $x \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
L_y^*\omega(X)(x) &= \omega((L_y)_*X)(yx) \\
&= \langle (L_y)_*X, Z\rangle_\bullet(yx) \\
&= \langle (L_{x^{-1}y^{-1}})_*(L_y)_*X, (L_{x^{-1}y^{-1}})_*Z\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \langle (L_{x^{-1}})_*X, (L_{x^{-1}})_*(L_{y^{-1}})Z\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \langle X, (L_{y^{-1}})_*Z\rangle_\bullet(x),
\end{aligned}$$

e portanto

$$\langle L_y^*\omega, L_y^*\eta\rangle_{T_x^*G} = \langle (L_{y^{-1}})_*Z, (L_{y^{-1}})_*Y\rangle_\bullet(x).$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle L_y^*\omega, L_y^*\eta\rangle_{L^2(G)} &= \int_G \langle (L_{y^{-1}})_*Z, (L_{y^{-1}})_*Y\rangle_\bullet(x)\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \langle (L_{x^{-1}y^{-1}})_*X, (L_{x^{-1}y^{-1}})_*Y\rangle_{\mathfrak{g}}\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \langle (L_{(yx)^{-1}})_*X, (L_{(yx)^{-1}})_*Y\rangle_{\mathfrak{g}}\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \langle (L_{x^{-1}})_*X, (L_{x^{-1}})_*Y\rangle_{\mathfrak{g}}\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \langle Z, Y\rangle_\bullet(x)\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G \langle \omega, \eta\rangle_{T_x^*G}\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \langle \omega, \eta\rangle_{L^2(G)}.
\end{aligned}$$

□

Lema 11. *Dado $y \in G$ a aplicação $(R_y)^*$ é uma isometria.*

Demonstração. Sejam ω, η, Z, Y como na demonstração anterior. Dado $X \in C^\infty(G;TG)$ e $x \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
R_y^*\omega(X)(x) &= \omega((R_y)_*X)(xy) \\
&= \langle (R_y)_*X, Z\rangle_\bullet(xy) \\
&= \langle (L_{y^{-1}x^{-1}})_*(R_y)_*X, (L_{y^{-1}x^{-1}})_*Z\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \langle (L_y \circ R_{y^{-1}})_*(L_{y^{-1}x^{-1}} \circ R_y)_*X, (L_y \circ R_{y^{-1}})_*(L_{y^{-1}x^{-1}})_*Z\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \langle (L_{x^{-1}})_*X, (L_{x^{-1}})_*(R_{y^{-1}})_*Z\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \langle X, (R_{y^{-1}})_*Z\rangle_\bullet(x).
\end{aligned}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\langle R_y^*\omega, R_y^*\eta\rangle_{L^2(G)} &= \int_G \langle R_y^*\omega, R_y^*\eta\rangle_{T_x^*G}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\
&= \int_G \langle (R_{y^{-1}})_*Z, (R_{y^{-1}})_*Y\rangle_\bullet(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\
&= \int_G \langle (L_{x^{-1}})_*(R_{y^{-1}})_*Z, (L_{x^{-1}})_*(R_{y^{-1}})_*Y\rangle_{\mathfrak{g}}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\
&= \int_G \langle (L_{y^{-1}}\circ R_y)_*(L_{x^{-1}}\circ R_{y^{-1}})_*Z, (L_{y^{-1}}\circ R_y)_*(L_{x^{-1}}\circ R_{y^{-1}})_*Y\rangle_{\mathfrak{g}}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\
&= \int_G \langle (L_{(xy)^{-1}})_*Z, (L_{(xy)^{-1}})_*Y\rangle_{\mathfrak{g}}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\
&= \int_G \langle (L_{x^{-1}})_*Z, (L_{X^{-1}})_*Y\rangle_{\mathfrak{g}}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\
&= \int_G \langle Z, Y\rangle_\bullet(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\
&= \int_G \langle \omega, \eta\rangle_{T_x^*G}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\
&= \langle \omega, \eta\rangle_{L^2(G)}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 12. *O operador de Laplace-Beltrami $\Delta_\bullet$ comuta com as representações regulares π_L e π_R.*

Demonstração. Sejam $f, g \in C^\infty(G)$ e $y \in G$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\langle \pi_L(y)\Delta_\bullet f, g\rangle_{L^2(G)} &= \langle \Delta_\bullet f, \pi_L(y^{-1})g\rangle_{L^2(G)}\\
&= \langle d^*df, g\circ L_y\rangle_{L^2(G)}\\
&= \langle df, d(g\circ L_y)\rangle_{L^2(G)}\\
&= \langle df, L_y^*dg\rangle_{L^2(G)}\\
&= \langle L_{y^{-1}}^*df, dg\rangle_{L^2(G)}\\
&= \langle d(f\circ L_{y^{-1}}), dg\rangle_{L^2(G)}\\
&= \langle d^*d(\pi_L(y)f), g\rangle_{L^2(G)}\\
&= \langle \Delta_\bullet(\pi_L(y)f), g\rangle_{L^2(G)},
\end{aligned}
$$

isto é, $\Delta_\bullet$ comuta com $\pi_L(y)$, para todo $y \in G$. Analogamente temos que $\Delta_\bullet$ comuta com $\pi_R(y)$, para todo $y \in G$.

□

Proposição 4. *Seja P um operador diferencial linear em G tal que P comuta com π_L e π_R. Então para cada $[\xi] \in \widehat{G}$ existe um número complexo $\beta_{[\xi]}$ tal que*

$$P\xi_{ij} = \beta_\xi \xi_{ij}, \quad 1 \le i, j \le d_\xi.$$

Observação 26. *Se $\xi \sim \eta$ então existe $A : \mathscr{H}_\xi \longrightarrow \mathscr{H}_\eta$, inversível, tal que*

$$A\xi(x) = \eta(x)A,$$

para todo $x \in G$. Em particular $d_\eta = d_\xi$. Então se $P\xi_{ij} = \beta_\xi\xi_{ij}$, $1 \le i, j \le d_\xi$ temos que

$$\begin{aligned} P\eta_{ij} &= P\left(\sum_{k,l=1}^{d_\xi} A_{ik}\xi_{kl}A_{lj}^{-1}\right) \\ &= \sum_{k,l=1}^{d_\xi} A_{ik}\beta_\xi\xi_{kl}A_{lj}^{-1} \\ &= \beta_\xi \sum_{k,l=1}^{d_\xi} A_{ik}\xi_{kl}A_{lj}^{-1} \\ &= \beta_\xi\eta_{ij}, \end{aligned}$$

para todos $1 \leq i, j \leq d_\xi$. *Então de fato os autovalores* $(\beta_{[\xi]})$ *só dependem das classes, e não das representações.*

Demonstração. Sejam $x, y \in G$ e $[\xi] \in \widehat{G}$. Temos que

$$\begin{aligned} P(\pi_R(y)\xi_{ij})(x) &= P(\xi_{ij}(\bullet y))(x) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^{d_\xi} \xi_{ik}(\bullet)\xi_{kj}(y)\right)(x) \\ &= \sum_{k=1}^{d_\xi} \xi_{kj}(y)(P\xi_{ik})(x). \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} P(\pi_R(y)\xi_{ij})(x) &= \pi_R(y)(P\xi_{ij})(x) \\ &= (P\xi_{ij})(xy). \end{aligned}$$

Então para todo $x, y \in G$ vale

$$(P\xi_{ij})(xy) = \sum_{k=1}^{d_\xi} (P\xi_{ik})(x)\xi_{kj}(y).$$

Tomando em particular $x = e$ temos que

$$(P\xi_{ij})(y) = \sum_{k=1}^{d_\xi} (P\xi_{ij})(e)\xi_{kj}(y),$$

para todo $y \in G$. Então

$$P(\mathscr{H}_{.,j}^{\xi}) \subset \mathscr{H}_{.,j}^{\xi}.$$

Repetindo o mesmo argumento com π_L ao invéz de π_R obtemos

$$P(\mathscr{H}_{i,.}^{\xi}) \subset \mathscr{H}_{i,.}^{\xi}.$$

Portanto $P\xi_{ij} = \beta_\xi(i,j)\xi_{ij}$, com $\beta_\xi(i,j) \in \mathbb{C}$. Agora dados $x, y \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
P(\pi_R(y)\xi_{ij})(x) &= P(\xi_{ij}(\bullet y))(x) \\
&= \sum_{k=1}^{d_\xi} P(\xi_{kj}(y)\xi_{ik}(\bullet))(x) \\
&= \sum_{k=1}^{d_\xi} \xi_{kj}(y)(P\xi_{ik})(x) \\
&= \sum_{k=1}^{d_\xi} \beta_\xi(i,k)\xi_{kj}(y)\xi_{ik}(x),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P(\pi_R(y)\xi_{ij})(x) &= \pi_R(y)(P\xi_{ij})(x) \\
&= (P\xi_{ij})(xy) \\
&= \beta_\xi(i,j)\xi_{ij}(xy) \\
&= \sum_{k=1}^{d_\xi} \beta_\xi(i,j)\xi_{kj}(y)\xi_{ik}(x),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^{d_\xi} \beta_\xi(i,k)\xi_{kj}(y)\xi_{ik}(x) = \sum_{k=1}^{d_\xi} \beta_\xi(i,j)\xi_{kj}(y)\xi_{ik}(x),$$

para todos $x, y \in G$. Como $\{\sqrt{d_\xi}\xi_{ij} \ : \ [\xi] \in \widehat{G},\ i,j = 1,\ldots,d_\xi\}$ é uma base de Hilbert para $L^2(G)$, temos que

$$\beta_\xi(i,k)\xi_{kj}(y) = \beta_\xi(i,j)\xi_{kj}(y),$$

para todo $y \in G$, e portanto $\beta_\xi(i,k) = \beta_\xi(i,j)$, para todos $i, jk = 1,\ldots,d_\xi$. Análogamente, temos que $\beta_\xi(k,j) = \beta_\xi(i,j)$, para todos $i,j,k = 1,\ldots,d_\xi$. Então

$$P\xi_{ij} = \beta_{[\xi]}\xi_{ij}.$$

□

Teorema 6. *Seja $[\xi] \in \widehat{G}$. Então*

$$\Delta_\bullet \xi_{ij} = \lambda_{[\xi]}\xi_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,d_\xi,$$

com $\lambda_{[\xi]} \geq 0$.

Demonstração. Pela proposição anterior temos que para cada $[\xi] \in \widehat{G}$ existe $\lambda_\xi \in \mathbb{C}$ tal que

$$\Delta_\bullet \xi_{ij} = \lambda_\xi \xi_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq d_\xi.$$

Como $\Delta_\bullet$ é semi-definido positivo, temos que $\lambda_\xi \geq 0$.

□

Conclusão: Fixamos uma métrica em G tal que o operador de Laplace-Beltrami, associado à essa métrica, $\Delta_\bullet$, tem as funções ξ_{ij}, $[\xi] \in \widehat{G}$, $1 \leq i,j \leq d_\xi$ como as suas autofunções.

Como o operador de Laplace-Beltrami é elíptico, as coordenadas das representações são analíticas. Pela fórmula assintótica de Weyl (pg. 155 de [Cha84], ver também [See69]) temos o seguinte teorema:

Teorema 7. *O conjunto* $\{\lambda_{[\xi]} : [\xi] \in \widehat{G}\}$ *é discreto, e podemos ordena-lo de tal modo que*

$$0 \leq \lambda_{[\xi_1]} \leq \lambda_{[\xi_2]} \leq \cdots \leq \lambda_{[\xi_j]} \leq \cdots,$$

vale

$$\lambda_{[\xi_j]} \approx Cj^{\frac{2}{n}},$$

e $d_\xi \leq C\langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}}$, *onde* $\langle\xi\rangle = (1+\lambda_{[\xi]})^{\frac{1}{2}}$

Desse resultado conseguimos provar o seguinte teorema, que é fundamental nas caracterizações que faremos a diante.

Teorema 8. *Para* $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq \frac{3n}{2}$, *a série*

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \langle\xi\rangle^{-2k}$$

converge.

Demonstração. Se $k \geq \frac{3n}{2}$, então $-2k \leq -3n$. Do teorema anterior, existem $C, M > 0$ tal que se $j > M$ então

$$1 \leq \lambda_{[\xi_j]} \leq Cj^{\frac{2}{n}}.$$

Portanto se $j > M$, aumentando se necessário a constante C, temos

$$\begin{aligned} d_{\xi_j}\langle\xi_j\rangle^{-2k} &\leq C\langle\xi_j\rangle^{-2k+\frac{n}{2}} \\ &= C(1+\lambda_{[\xi_j]})^{-2k+\frac{n}{2}} \\ &\leq C(1+\lambda_{[\xi_j]})^{-3n+\frac{n}{4}} \\ &\leq C(2C)^{\frac{-11n}{4}} j^{\frac{-11}{2}}. \end{aligned}$$

Então

$$\sum_{j>M} d_{\xi_j}\langle\xi_j\rangle^{-2k} < \infty.$$

Como

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi\langle\xi\rangle^{-2k} = \sum_{j=1}^{\infty} d_{\xi_j}\langle\xi_j\rangle^{-2k},$$

temos que a série

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi\langle\xi\rangle^{-2k}$$

é convergente.

1.3 O caso do toro

Seja $G = \mathbb{T}^n \cong \dfrac{\mathbb{R}^n}{(2\pi\mathbb{Z})^n}$. A medida de Haar em $\mathbb{T}^n$ é simplesmente $\dfrac{\mathrm{d}m}{(2\pi)^n}$, onde $\mathrm{d}m$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ restrita à $[0, 2\pi]^n$. Lembramos também que se $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ então a série de

Fourier de f,

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi),$$

onde $\widehat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x)\,\mathrm{d}m(x)$, converge para f, com convergência em $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 9. $\widehat{\mathbb{T}^n}\cong\mathbb{Z}^n$.

Demonstração. Seja ϕ uma representação unitária, fortemente contínua e irredutível em $\mathbb{T}^n$. Dados $x,y\in\mathbb{T}^n$ temos que

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y)&=\phi(x+y)\\&=\phi(y+x)\\&=\phi(y)\phi(x).\end{aligned}$$

Seja então $y\in\mathbb{T}^n$ fixado. Temos que

$$\phi(y)\phi(x)=\phi(x)\phi(y),$$

para todo $x\in\mathbb{T}^n$. Então $\phi(y)\in\mathrm{Hom}(\phi,\phi)$, isto é, $\phi(y):\mathscr{H}_\phi\longrightarrow\mathscr{H}_\phi$ é um entrelaçamento. Logo pelo lema 4 temos que

$$\phi(y)=\lambda_y I_{\mathscr{H}_\phi},$$

para algum $\lambda_y\in\mathbb{C}$. Mas como ϕ é irredutível temos que $\dim\mathscr{H}_\phi=1$. Portanto $\phi:\mathbb{T}^n\longrightarrow\mathbb{C}$. Então ϕ é contínua, logo

$$\phi(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\widehat{\phi}(\xi),$$

com convergência em $L^2(\mathbb{T}^n)$. Então dados $x,y\in\mathbb{T}^n$

$$\phi(x+y)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left\{e^{i\langle y,\xi\rangle}\widehat{\phi}(\xi)\right\},$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned}\phi(x+y)&=\phi(x)\phi(y)\\&=\left\{\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\widehat{\phi}(\xi)\right\}\left\{\sum_{\xi'\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle y,\xi'\rangle}\widehat{\phi}(\xi')\right\}\\&=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left\{\sum_{\xi'\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle y,\xi'\rangle}\widehat{\phi}(\xi)\widehat{\phi}(\xi')\right\}.\end{aligned}$$

Então vale

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left\{e^{i\langle y,\xi\rangle}\widehat{\phi}(\xi)\right\}=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left\{\sum_{\xi'\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle y,\xi'\rangle}\widehat{\phi}(\xi)\widehat{\phi}(\xi')\right\},$$

para todos $x,y\in\mathbb{T}^n$. Como $\phi(0)=1$, pois $\phi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{T}^n,\mathscr{U}(\mathbb{C}))$, temos que ϕ não é a função nula, e portanto existe $\xi\in\mathbb{Z}^n$ tal que $\widehat{\phi}(\xi)\neq 0$. Então

$$e^{i\langle y,\xi\rangle} = \sum_{\xi'\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle y,\xi'\rangle}\widehat{\phi}(\xi'),$$

para todo $y \in \mathbb{T}^n$, logo

$$\widehat{\phi}(\xi') = \begin{cases} 0 & ,\text{se}\,\xi' \neq \xi, \\ 1 & ,\text{se}\,\xi' = \xi. \end{cases}$$

Então $\phi(x) = e^{i\langle x,\xi\rangle}$, para todo $x \in \mathbb{T}^n$. Agora, se ψ é uma representação unitária (fortemente contínua e irredutível) equivalente a ϕ. Então existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$\phi(x)\lambda = \lambda\psi(x),$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$. Portanto $\phi = \psi$. Então

$$\widehat{\mathbb{T}^n} = \{e^{i\langle \bullet,\xi\rangle} \,:\, \xi \in \mathbb{Z}^n\} \cong \mathbb{Z}^n.$$

□

Como $\widehat{\mathbb{T}^n} = \{e^{i\langle \bullet,\xi\rangle} \,:\, \xi \in \mathbb{Z}^n\}$, temos que o teorema de Peter-Weyl, no caso do toro, diz simplesmente que se $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ então a sua séria de Fourier converge para f em $L^2(\mathbb{T}^n)$.

A forma de Killing em $\mathbb{T}^n$ é trivial, uma vez que $\mathbb{T}^n$ é abeliano. Além disso o toro é trivializável, isto é, $\mathrm{T}\mathbb{T}^n \cong \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Tomando então a base canônica $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$, temos que o operador de Laplace-Beltrami em $\mathbb{T}^n$ fica da forma:

$$\Delta_\bullet = -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2.$$

É fácil ver que $e^{i\langle \bullet,\xi\rangle}$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$, são as autofunções de $\Delta_\bullet$, e $\Delta_\bullet(e^{i\langle \bullet,\xi\rangle}) = |\xi|^2 e^{i\langle \bullet,\xi\rangle}$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Portanto $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, e é claro que a série

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} (1+|\xi|^2)^{-k}$$

converge se $k \geq \frac{3}{2}$.

□

Capítulo 2

Funções Gevrey e Ultradistribuições

Como dito anteriormente, todo grupo de Lie compacto,G, é uma variedade analítica compacta. Portanto da teoria local, já temos definidas em G as classes de Gevrey e as ultradistribuições (ver [Rod93]). Por resultados de Kotake e Narasimhan ([KN62]), e de Bolley, Camus e Mattera ([BCM79]), as funções Gevrey em G são os vetores Gevrey de qualquer operador diferencial parcial linear elíptico. Então podemos usar o operador de Laplace-Beltrami, $\Delta_\bullet$, associado à métrica construída anteriormente, para dar uma definição global das classes de Gevrey em G. Para tal seguiremos a mesma estratégia feita pelo professor Gerson Petronilho nas notas de um mini-curso ministrado na Primeira Escola Brasileira de Equações Diferenciais, realizado na Unicamp em maio de 2005, "*Ultradistribuições Gevrey periódicas em* $\mathbb{R}^N$"([Pet05]).

Na primeira seção definimos vetores Gevrey para operadores diferenciais parciais lineares em abertos de $\mathbb{R}^n$ e comentamos os teoremas importantes. Na segunda seção expomos alguns resultados necessários da teoria de distribuições, e espaços de Sobolev, em variedades Riemannianas compactas. Tais resultados foram extraídos de [Hör03] e [Trè06].

Como resaltamos no capítulo anterior, devido ao teorema de Peter-Weyl, podemos estudar séries de Fourier em G. Na terceira seção desse capítulo expomos os resultados clássicos da teoria de análise de Fourier em grupos de Lie, como em [RT10]. Também fazemos uma caracterização tipo Paley-Wiener, das funções C^∞ e distribuições em G (teoremas 14 e 19).

Nas duas últimas seções generalizamos a exposição do professor Petronilho sobre os espaços $\mathscr{G}^{s,h}$, $\mathscr{G}^s$ e $\mathscr{D}'_s$ feita no trabalho supracitado.

2.1 Vetores Gevrey

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ denotamos:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$;
- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$;
- $D^\alpha = D^{\alpha_1}_{x_1} \cdots D^{\alpha_n}_{x_n}$,

onde $D_{x_j} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Seja $P(x, D)$ um operador diferencial parcial linear, de ordem m, a coeficientes analíticos em Ω, isto é,

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

onde $a_\alpha \in C^\omega(\Omega)$.

Definição 27. Definimos o conjunto característico de P como

$$Char(P) \doteq \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \, : \, \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0\}.$$

Dizemos que P é elíptico se $Char(P)$ é vazio.

Definição 28. Seja $s \geq 1$ e seja $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tal que $P^k u \in L^2_{loc}(\Omega)$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Dizemos que u é um vetor Gevrey-s para P, e escrevemos $u \in \mathscr{G}^s(\Omega; P)$, se para todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|P^k u\|_{L^2(K)} \leq C^{k+1} k!^{ms},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Teorema 10 (Kotake-Narasimhan)**.** *Suponha P elíptico e seja $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\|P^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{k+1}(km)!, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.1}$$

para alguma constante positiva C. Então $u \in C^\omega(\Omega)$.

Observação 29. *Da desigualdade*

$$\left(\frac{k}{e}\right)^k \leq k! \leq k^k,$$

válida para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, temos que a condição (2.1) *é equivalente à*

$$\|P^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{k+1} k!^m, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

para alguma constante positiva C. Portanto o teorema 10 diz que se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é um vetor analítico para P então $u \in C^\omega(\Omega)$.

Observação 30. *Com pequenas alterações, é possível provar uma versão Gevrey do teorema de Kotaque-Narasimhan. Uma versão microlocal desse teorema, para classes de funções bem mais gerais, foi provado por Bolley-Camus-Mattera em [BCM79].*

Com base na observação anterior, o resultado que iremos utilizar no que se segue é o seguinte:

Teorema 11. *Suponha P elíptico e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ um vetor Gevrey-s para P. Então $u \in \mathscr{G}^s(\Omega)$.*

2.2 Análise em variedades riemannianas compactas

Seja M uma variedade Riemanniana compacta orientável de dimensão n fixada.

Definição 31. Seja $\mathscr{A}$ um atlas de M. Dizemos que $\{u_\phi\} \doteq \{u_\phi\}_{(U_\phi,\phi)\in\mathscr{A}}$ é uma distribuição em M se:

- $u_\phi \in \mathscr{D}'(\widetilde{U}_\phi)$, com $\widetilde{U}_\phi = \phi(U_\phi)$;

- Se $U_\phi \bigcap U_\psi \neq \emptyset$, vale:

$$u_\psi = (\phi \circ \psi^{-1})^* u_\phi.$$

Definição 32. Seja $\mathscr{A}$ um atlas de M. Seja $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M; \Lambda^n(TM^*))$. Dizemos que $\eta_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ se:

- $\forall (U_\phi, \phi) \in \mathscr{A},\ \phi = (x_1, \ldots, x_n),\ \eta_j|_{U_\phi} = \lambda_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,\ \lambda_j \in C^\infty(U_\phi)$ e

$$(\lambda_j \circ \phi^{-1}) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \text{em } C^\infty(\widetilde{U}_\phi).$$

De agora em diante seja $\mathscr{A}$ um atlas orientado de M.

Teorema 12. $\mathscr{D}'(M) \cong (C^\infty(M; \Lambda^n(TM^*)))^*$

Demonstração. Seja $u \in (C^\infty(M; \Lambda^n(TM^*)))^*$. Para $f \in C_c^\infty(\widetilde{U}_\phi)$ definimos

$$u_\phi(f) = u((f \circ \phi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n).$$

Se $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ em $C_c^\infty(\widetilde{U}_\phi)$, tomando

$$\eta_j = (f_j \circ \phi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

temos que $\eta_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ em $C^\infty(M; \Lambda^n(TM^*))$. Portanto $u(\eta_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, e então $u_\phi(f_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, isto é, $u_\phi \in \mathscr{D}'(\widetilde{U}_\phi)$.

Agora se $U_\phi \bigcap U_\psi \neq \emptyset$ temos

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \psi^{-1})^* u_\phi(f) &= u_\phi(f \circ (\psi \circ \phi^{-1}) |\det(\psi \circ \phi^{-1})'|) \\
&= u_\phi(f \circ (\psi \circ \phi^{-1}) \det(\psi \circ \phi^{-1})') \\
&= u(f \circ \psi \det((\psi \circ \phi^{-1})' \circ \phi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\
&= u(f \circ \psi d\widetilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\widetilde{x}_n) \\
&= u_\psi(f),
\end{aligned}$$

onde $\psi = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$. Portanto $\{u_\phi\}$ é uma distribuição em M. Reciprocamente, seja $\{u_\phi\}$ uma distribuição em M. Seja $\eta \in C^\infty(M; \Lambda^n(TM^*))$. Existem $\phi_1, \ldots, \phi_M \in \mathscr{A}$ tais que $M \subset U_{\phi_1} \bigcup \cdots \bigcup U_{\phi_M}$. Tome $\{\rho_i\}$ partição da unidade subordinada à $\{U_{\phi_i}\}_{i=1\ldots,M}$. Com isso definimos

$$u(\eta) = \sum_{i=1}^{M} u_{\phi_i}((\rho_i \lambda_i) \circ \phi_i^{-1}), \tag{2.2}$$

com $\eta|_{U_{\phi_i}} = \lambda_i dx_1^i \wedge \cdots \wedge dx_n^i$. Temos que u é linear. Se $\eta_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ em $C^\infty(M; \Lambda^n(TM^*))$ temos

$$(\rho_\phi \lambda_\phi^j) \circ \phi^{-1} = (\rho_\phi \circ \phi^{-1})(\lambda_\phi^j \circ \phi^{-1}) \xrightarrow[j\to\infty]{C_c^\infty(\widetilde{U}_\phi)} 0,$$

e portanto

$$u_\phi((\rho_\phi \lambda_\phi^j) \circ \phi^{-1}) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \forall \phi,$$

logo

$$u(\eta_j) = \sum_\phi u_\phi((\rho_\phi \lambda_\phi^j) \circ \phi^{-1}) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Então $u \in (C^\infty(M; \Lambda^n(TM^*)))^*$.

□

Definição 33. Seja $m \in \mathbb{Z}_+$. Seja $u \in L^2(M)$, dizemos que $u \in H^m(M)$ se:

$$\forall (U_\phi, \phi) \in \mathscr{A} \text{ temos } \quad u \circ \phi^{-1} \in H^m(\widetilde{U}_\phi).$$

Dizemos que $H^m(M)$ é o espaço de Sobolev de ordem m sobre M.

Pela invariância do espaço espaço de Sobolev por difeomorfismo, temos que a definição acima independe do atlas. Ver [Trè06]

Podemos considerar em H^m uma estrutura de espaço de Hilbert definido do seguinte modo: Como M é compacta, escolha $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\} \in \mathscr{A}$ tais que $M = U_{\phi_1} \cup \cdots \cup U_{\phi_N}$, e defina

$$\langle u, v \rangle_{H^m(M)} \doteq \sum_{j=1}^{N} \langle u \circ \phi_j^{-1}, v \circ \phi_j^{-1} \rangle_{H^m(\widetilde{U}_{\phi_j})}, \quad u, v \in H^m(M).$$

Temos que $\langle ., . \rangle_{H^m(M)}$ define um produto interno em $H^m(M)$, e munido do mesmo $H^m(M)$ tem estrutura de espaço de Hilbert. O produto interno definido a cima depende da escolha das cartas $\phi_1, \ldots, \phi_N$, mas a topologia do espaço de Hilbert não, isto é, a topologia induzida por esta escolha é equivalente à de qualquer outra escolha. Do Teorema da inclusão de Sobolev tiramos a seguinte proposição:

Proposição 5. *Seja $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}_+$, com $m_j \nearrow \infty$, então temos que*

$$C^\infty(M) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} H^{m_j}(M),$$

e a topologia de $C^\infty(M)$ é equivalente à topologia limite projetivo de $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} H^{m_j}(M)$, isto é

- *dada uma sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(M)$, temos que*

$$\phi_j \xrightarrow[j \to \infty]{C^\infty(M)} 0 \;\Leftrightarrow\; \phi_j \xrightarrow[j \to \infty]{H^m(M)} 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Proposição 6. *Seja $u : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. São equivalentes:*

1. *$u \in \mathscr{D}'(M)$;*
2. *existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{H^m(M)}, \quad \forall \phi \in C^\infty(M).$$

Demonstração. (2) $\Rightarrow$ (1) é fácil.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Suponha que (2) não vale, isto é, existe uma sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(M)$ tal que

$$|\langle u, \phi_j \rangle| > j \|\phi_j\|_{H^j(M)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Para cada j defina $\psi_j \in C^\infty(M)$ por

$$\psi_j(x) = \frac{1}{j} \frac{\phi_j(x)}{\|\phi_j\|_{H^j(M)}}.$$

Se $\sigma < j$ temos

$$\|\psi_j\|_{H^\sigma(M)} \leq \|\psi_j\|_{H^j(M)} = \frac{1}{j}$$

então $\|\psi_j\|_{H^\sigma(M)} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, para todo $\sigma > 0$, e portanto

$$\psi_j \xrightarrow[j\to\infty]{C^\infty(M)} 0.$$

Por outro lado temos

$$|\langle u, \psi_j\rangle| > 1,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, logo $u \notin \mathscr{D}'(M)$.

□

Definição 34. Seja P um ODPL com coeficientes C^ω em M. Dizemos que P é elíptico em M se

- $\forall (U_\phi, \phi) \in \mathscr{A}$ temos que P^ϕ é elíptico em $\widetilde{U}_\phi$, onde

$$P^\phi(f) = P(f \circ \phi), \quad f \in C^\infty(\widetilde{U}_\phi).$$

Definição 35. Seja P um ODPL elítptico de ordem m. Definimos o espaço $\mathscr{H}_P^k(M)$ por

$$\mathscr{H}_P^k(M) \doteq \{u \in L^2(M) \ : \ P^k u \in L^2(M)\}.$$

Proposição 7. *Seja P um ODPL elíptico de ordem m. Então temos*

$$C^\infty(M) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{H}_P^k,$$

e a topologia de $C^\infty(M)$ é equivalente à limite projetivo de $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{H}_P^k$. Mais ainda, se P for injetor, a norma $\|.\|_{H^{mk}}$ é equivalente à norma $\|P^k.\|_{L^2(M)}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Seja $\Delta_\bullet$ o operador de Laplace-Beltrami em M. Então $\Delta_\bullet$ é um ODPL elíptico de grau 2, semi-definido positivo. Além disso $I + \Delta_\bullet$ é elíptico e injetor, logo a norma $\|.\|_{H^{2m}(M)}$ é equivalente à norma

$$\|.\|_{2m} \doteq \|(I + \Delta_\bullet)^m.\|_{L^2(M)},$$

para todo $m \in \mathbb{Z}_+$.

2.3 Análise de Fourier

Proposição 8. *Seja $f \in L^2(G)$. Então f tem a seguinte representação em série*

$$f = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)} \xi_{ij}. \tag{2.3}$$

Além disso vale

$$\|f\|^2_{L^2(G)} = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} |\langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)}|^2.$$

Tal série é chamada de série de Fourier de f[1].

[1] Lembremos que o sentido da soma em (2.3) é o seguinte: Seja $\mathfrak{A}$ como no teorema de Peter-Weyl, isto é, $\widehat{G} = \{[\xi] : \xi \in \mathfrak{A}\}$ e se $\xi, \eta \in \mathfrak{A}$ então $\xi \nsim \eta$ ou $\xi = \eta$. Então $\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)} \xi_{ij} = \sum_{\xi\in\mathfrak{A}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)} \xi_{ij}$.

Demonstração. Pelo teorema de Peter-Weyl 2, dada $f \in L^2(G)$ fixada temos que

$$f = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)} \xi_{ij}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(G)} &= \langle f, f\rangle_{L^2(G)} \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \sum_{k,j=1}^{d_\eta} d_\xi d_\eta \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)} \overline{\langle f, \eta_{kl}\rangle_{L^2(G)}} \langle \xi_{ij}, \eta_{kl}\rangle_{L^2(G)} \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi^2 |\langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)}|^2 \frac{1}{d_\xi} \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi |\langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)}|^2.
\end{aligned}$$

□

Definição 36. Sejam $f \in L^1(G)$ e $\xi = (\xi_{ij})_{i,j=1}^m$, $[\xi] \in \widehat{G}$. O ξ- coeficiente de Fourier de f é definido como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_G f(x)\xi(x)^* \, \mathrm{d}\mu_G(x) = \int_G f(x)\xi(x^{-1}) \, \mathrm{d}\mu_G(x).$$

Lema 13. *Sejam $f \in L^2(G)$ e $\xi = (\xi_{ij})_{i,j=1}^{d_\xi}$, com $[\xi] \in \widehat{G}$. Temos que*

$$Tr\,(\widehat{f}(\xi)\xi(x)) = \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)} \xi_{ji}(x),$$

para quase todo $x \in G$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi)_{ij} &= \int_G f(x)\xi(x)^*_{ij} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G f(x)\overline{\xi_{ji}(x)} \, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \langle f, \xi_{ji}\rangle_{L^2(G)},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(\widehat{f}(\xi)\xi) &= \sum_{i=1}^{d_\xi} (\widehat{f}(\xi)\xi)_{ii} \\
&= \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{f}(\xi)_{ij}\xi_{ji} \\
&= \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2(G)} \xi_{ji}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 2. *Seja $f \in L^2(G)$. Temos que*

$$f = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \, Tr\,(\widehat{f}(\xi)\xi),$$

e

$$\|f\|^2_{L^2(G)} = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \, Tr\,(\widehat{f}(\xi)\widehat{f}(\xi)^*).$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(\widehat{f}(\xi)\widehat{f}(\xi)^*) &= \sum_{i=1}^{d_\xi} (\widehat{f}(\xi)\widehat{f}(\xi)^*)_{ii} \\
&= \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{f}(\xi)_{ij}\overline{\widehat{f}(\xi)_{ij}} \\
&= \langle f, \xi_{ji}\rangle_{L^2(G)}\overline{\langle f, \xi_{ji}\rangle_{L^2(G)}} \\
&= |\langle f, \xi_{ji}\rangle_{L^2(G)}|^2.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 37. Se $G = \mathbb{T}^N$ e $f \in L^2(\mathbb{T}^N)$ então

$$f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N_+} \widehat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle},$$

para quase todo $x \in \mathbb{T}^N$, onde

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^N} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{Z}^N_+.$$

Definição 38. Seja $A = (A_{kl})^m_{k,l=1} \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Definimos $\|A\|^2_{HS} = \mathrm{Tr}\,(A^*A) = \sum_{k,l=1}^m |A_{kl}|^2$.

Definição 39. Definimos $\mathscr{M}(\widehat{G})$ como o espaço das aplicações

$$F : \widehat{G} \to \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{C}^{m\times m},$$

satisfazendo $F([\xi]) \in \mathbb{C}^{d_\xi\times d_\xi}$. Também definimos o espaço $L^2(\widehat{G})$ das aplicações $F \in \mathscr{M}(\widehat{G})$ tais que

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \|F([\xi])\|^2_{HS} < \infty.$$

Temos que $L^2(\widehat{G})$ é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno

$$\langle E, F\rangle_{L^2(\widehat{G})} = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(E([\xi])F([\xi])).$$

Lema 14. *[Identidade de Parseval] Sejam $f, g \in L^2(G)$. Vale*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(G)} = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \, Tr\,(\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)^*) = \langle \widehat{f}(\xi), \widehat{g}(\xi)\rangle_{L^2(\widehat{G})}.$$

Demonstração. Sejam $f, g \in L^2(G)$. Usando as representações em série de Fourier temos

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle_{L^2(G)} &= \int_G f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi]\,,[\eta]\in\widehat{G}} d_\xi d_\eta \int_G \mathrm{Tr}\,(\widehat{f}(\xi)\xi(x))\overline{\mathrm{Tr}\,(\widehat{g}(\eta)\eta(x))}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi]\,,[\eta]\in\widehat{G}} d_\xi d_\eta \int_G \mathrm{Tr}\,(\widehat{f}(\xi)\xi(x))\mathrm{Tr}\,(\widehat{g}(\eta)^*\eta(x)^*)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi]\,,[\eta]\in\widehat{G}} d_\xi d_\eta \sum_{i,j=1}^{d_\xi}\sum_{k,l=1}^{d_\eta} \widehat{f}(\xi)_{ij}\widehat{g}(\eta)^*_{kl} \int_G \xi_{ji}(x)\overline{\eta_{kl}(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi]\,,[\eta]\in\widehat{G}} d_\xi d_\eta \sum_{i,j=1}^{d_\xi}\sum_{k,l=1}^{d_\eta} \widehat{f}(\xi)_{ij}\widehat{g}(\eta)^*_{kl}\langle \xi_{ji}(x), \eta_{kl}(x)\rangle_{L^2(G)} \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{f}(\xi)_{ij}\widehat{g}(\xi)^*_{ji} \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)^*) \\
&= \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{L^2(\widehat{G})}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 13. *A transformada de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ define uma isometria sobrejetora de $L^2(G)$ em $L^2(\widehat{G})$.*

Demonstração. Pelo lema 14 temos que a aplicação $f \mapsto \widehat{f}$ é uma isometria. Seja $F \in L^2(\widehat{G})$. Defina

$$f = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(F([\xi])\xi).$$

Temos que $f \in L^2(G)$, pois

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(G)} &= \int_G f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi],[\eta]\in\widehat{G}} d_\xi d_\eta \int_G \mathrm{Tr}\,(F([\xi])\xi(x))\overline{\mathrm{Tr}\,(F([\eta]\eta(x))}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi],[\eta]\in\widehat{G}} d_\xi d_\eta \sum_{i,j=1}^{d_\xi}\sum_{k,l=1}^{d_\eta} F([\xi])_{ij}F([\eta])^*_{kl}\int_G \xi(x)_{ji}\overline{\eta(x)_{kl}}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} F([\xi])_{ij}F([\xi])^*_{ji} \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(F([\xi])F([\xi])^*) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Agora temos que

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi)_{ij} &= \int_G f(x)\xi^*(x)_{ij}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} d_\eta \int_G \mathrm{Tr}\,(F([\eta])\eta(x))\xi^*(x)_{ij}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}}\sum_{k,l=1}^{d_\eta} F([\eta])_{kl}\int_G \eta(x)_{lk}\overline{\xi(x)_{ji}}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= F([\xi])_{ij}.
\end{aligned}
$$

Portanto $\widehat{f} = F$. □

Definição 40. Se $F \in L^2(\widehat{G})$ denotemos

$$(\mathscr{F}^{-1}F)(x) = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(F(\xi)\xi(x)).$$

$\mathscr{F}^{-1}$ é a transformada inversa de Fourier.

Definição 41. Definimos o espaço $L^\infty(\widehat{G})$ como

$$L^\infty(\widehat{G}) \doteq \{H \in \mathscr{M}(\widehat{G}) \,:\, \|H\|_{L^\infty(\widehat{G})} \doteq \sup_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi^{-\frac{1}{2}}\|H(\xi)\|_{HS} < \infty\}.$$

Proposição 9. *A transformada de Fourier $\mathscr{F}_G$ é um operador linear limitado de $L^1(G)$ em $L^\infty(\widehat{G})$ satisfazendo*

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\widehat{G})} \leq \|f\|_{L^1(G)}.$$

A transformada inversa de Fourier $\mathscr{F}_G^{-1}$ é um operador linear limitado de $L^1(\widehat{G})$ em $L^\infty(\widehat{G})$ satisfazendo

$$\|\mathscr{F}_G^{-1}H\|_{L^\infty(G)} \leq \|H\|_{L^1(\widehat{G})}.$$

Demonstração. Seja $f \in L^1(G)$. Se $[\xi] \in \widehat{G}$ temos

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS} &= \|\int_G f(x)\xi^*(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x)\|_{HS}\\ &\leq \int_G |f(x)|\|\xi^*(x)\|_{HS}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\ &\leq d_\xi^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^1(G)}.\end{aligned}$$

E portanto $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\widehat{G})} = \sup_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi^{-\frac{1}{2}}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS} \leq \|f\|_{L^1(G)}$. Agora seja $H \in L^1(\widehat{G})$, então

$$\begin{aligned}|(\mathscr{F}_G^{-1}H)(x)| &= \left|\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\xi(x)H(\xi))\right|\\ &\leq \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi\|\xi(x)\|_{HS}\|H(\xi)\|_{HS}\\ &\leq \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi^{\frac{3}{2}}\|H(\xi)\|_{HS}\\ &= \|H\|_{L^1(\widehat{G})},\end{aligned}$$

e portanto $\|\mathscr{F}_G^{-1}H\|_{L^\infty(G)} \leq \|H\|_{L^1(\widehat{G})}$. □

Proposição 10. *Seja $\phi \in L^2(G)$ Então*

$$\widehat{(I+\Delta_\bullet)^m\phi}(\xi) = \langle\xi\rangle^{2m}\widehat{\phi}(\xi),$$

para todos $m \in \mathbb{Z}_+$ e $[\xi] \in \widehat{G}$.

Demonstração. Sejam $[\xi] \in \widehat{G}$, $\phi \in L^2(G)$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ fixados. Então temos que

$$\begin{aligned}\widehat{(I+\Delta_\bullet)^m\phi}(\xi)_{ij} &= \int_G (I+\Delta_\bullet)^m\phi(\xi)\xi_{ij}^*(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\ &= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} d_\eta \sum_{k,l=1}^{d_\eta} \widehat{\phi}(\eta)_{kl}\int_G (I+\Delta_\bullet)^m\eta_{lk}(x)\overline{\xi_{ji}(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\ &= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} d_\eta \sum_{k,l=1}^{d_\eta} \widehat{\phi}(\eta)_{kl}\int_G \langle\eta\rangle^{2m}\eta_{lk}(x)\overline{\xi_{ji}(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\\ &= \langle\xi\rangle^{2m}\widehat{\phi}(\xi)_{ij},\end{aligned}$$

onde $\langle\xi\rangle = (1+\lambda_\xi)^{\frac{1}{2}}$. Portanto

$$\widehat{(I+\Delta_\bullet)^m\phi}(\xi) = \langle\xi\rangle^{2m}\widehat{\phi}(\xi).$$

□

Teorema 14. *Seja $a \in \mathscr{M}(\widehat{G})$. São equivalentes:*

1. *Existe $\phi \in C^\infty(G)$ tal que*

$$\widehat{\phi}(\xi) = a(\xi),$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$*;*

2. *para todo* $M > 0$ *existe* $C_M > 0$ *tal que*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq C_M \langle \xi \rangle^{-M},$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$*.*

Observação 42. *A condição* 2 *do teorema é equivalente a: Para todo* $M > 0$ *existem* $C_M > 0$ *e* $R > 0$ *tais que*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq C_M \langle \xi \rangle^{-M},$$

se $\langle \xi \rangle > R$, $[\xi] \in \widehat{G}$*.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2):

Seja $\phi \in C^\infty(G)$ tal que $\widehat{\phi}(\xi) = a(\xi)$, para toda $[\xi] \in \widehat{G}$. Portanto temos que para todo $M \in \mathbb{Z}_+$

$$(I + \Delta_\bullet)^M \phi \in L^2(G).$$

Seja $M \in \mathbb{Z}_+$ fixado, então existe $C_M > 0$ tal que

$$\|\phi\|_{2M} = \|(I + \Delta_\bullet)^M \phi\|_{L^2(G)} \leq C_M,$$

logo

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{2M}^2 &= \|(I + \Delta_\bullet)^M \phi\|_{L^2(G)}^2 \\ &= \|\widehat{(I + \Delta_\bullet)^M \phi}\|_{L^2(\widehat{G})}^2 \\ &= \sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_\xi \langle \xi \rangle^{4M} \|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS}^2. \end{aligned}$$

Então

$$\langle \xi \rangle^{2M} \|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \leq C_M, \quad \forall [\xi] \in \widehat{G},$$

e portanto

$$\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \leq C_M \langle \xi \rangle^{-2M}, \quad \forall [\xi] \in \widehat{G}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1):

Defina

$$\phi = \sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi).$$

Mostraremos que tal série converge em $C^\infty(G)$. Seja $N \in \mathbb{Z}_+$. Tome $M \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$M > 2N + \frac{7n}{4}.$$

Então existe $C_M > 0$ tal que

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq C_M \langle \xi \rangle^{-M}, \quad \forall [\xi] \in \widehat{G}.$$

Logo temos que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{p<\langle\xi\rangle\leq m} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi)\|_{2N}^2 &= \|(I+\Delta_\bullet)^N \sum_{p<\langle\xi\rangle\leq m} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi)\|_{L^2(G)}^2 \\
&= \|\sum_{p<\langle\xi\rangle\leq m} d_\xi \langle\xi\rangle^{2N} \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi)\|_{L^2(G)}^2 \\
&\overset{*}{=} \sum_{p<\langle\xi\rangle\leq m} d_\xi \langle\xi\rangle^{4N} \|a(\xi)\|_{HS}^2 \\
&\leq C_M^2 \sum_{p<\langle\xi\rangle\leq m} d_\xi \langle\xi\rangle^{4N-2NM} \\
&\leq CC_M^2 \sum_{p<\langle\xi\rangle\leq m} \langle\xi\rangle^{4N-2M+\frac{n}{2}} \\
&\xrightarrow[p,m\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

onde em $*$ usamos a identidade de Parseval (lema 14) e a série

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} \langle\xi\rangle^{4N-2M+\frac{2}{n}}$$

é convergênte pelo teorema 8. Logo $\phi \in C^\infty(G)$ e claramente $\widehat{\phi}(\xi) = a(\xi)$, para toda $[\xi] \in \widehat{G}$.

□

Como G também é uma variedade Riemanniana já temos definido o espaço $\mathscr{D}'(G)$.

Definição 43. Sejam $u \in \mathscr{D}'(G)$ e $[\xi] \in \widehat{G}$. Definimos $\widehat{u}(\xi) \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}$ por

$$\widehat{u}(\xi)_{ij} = \langle u, \overline{\xi_{ji}}\rangle, \quad 1 \leq i,j \leq d_\xi.$$

Teorema 15. *Seja $a \in \mathscr{M}(\widehat{G})$. São equivalentes:*

1. *Existe $u \in \mathscr{D}'(G)$ tal que*

$$\widehat{u}(\xi) = a(\xi),$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$.

2. *Existem $C > 0$ e $M > 0$ tais que*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq C\langle\xi\rangle^M,$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$.

Observação 44. *A condição 2 do teorema é equivalente a: Existem $M > 0$, $C_M > 0$ e $R > 0$ tais que*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq C_M\langle\xi\rangle^M,$$

se $\langle\xi\rangle > R$, $[\xi] \in \widehat{G}$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2):

Seja $u \in \mathscr{D}'(G)$ tal que $\widehat{u}(\xi) = a(\xi)$, para toda $[\xi] \in \widehat{G}$. Portanto existem $C > 0$ e $M \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_{2M}, \quad \forall \phi \in C^\infty(G).$$

Então se $[\xi] \in \widehat{G}$ temos

$$\begin{aligned}
|\langle u, \xi_{ij}\rangle| &\leq C\|\xi_{ij}\|_{2M} \\
&= C\|(I + \Delta_\bullet)^M \xi_{ij}\|_{L^2(G)} \\
&= C\langle\xi\rangle^{2M}\|\xi_{ij}\|_{L^2(G)} \\
&= C\langle\xi\rangle^{2M} d_\xi^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C'\langle\xi\rangle^{2M+\frac{n}{4}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} \leq C'\langle\xi\rangle^{M+\frac{n}{4}}, \quad \forall [\xi] \in \widehat{G}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1):

Para cada $N \in \mathbb{N}$ defina $u_N \in C^\infty(G)$ por

$$u_N = \sum_{\langle\xi\rangle \leq N} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi).$$

Se $\phi \in C^\infty(G)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle u_N, \phi\rangle &= \sum_{\langle\xi\rangle \leq N} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} a_{ij}(\xi)\langle\xi_{ji}, \phi\rangle \\
&= \sum_{\langle\xi\rangle \leq N} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} a_{ij}(\xi) \int_G \xi_{ji}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{\langle\xi\rangle \leq N} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} a_{ij}(\xi)\widehat{\phi}(\overline{\xi_{ij}}).
\end{aligned}$$

Se $l < k$ e $\phi \in C^\infty(G)$ temos

$$\begin{aligned}
|\langle u_k, \phi\rangle - \langle u_l, \phi\rangle| &\leq \sum_{l<\langle\xi\rangle \leq k} d_\xi \|a(\xi)\|_{HS}\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \\
&\leq C \sum_{l<\langle\xi\rangle \leq k} \langle\xi\rangle^{M+\frac{n}{2}}\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS},
\end{aligned}$$

e como $\phi \in C^\infty(G)$, se $N > M + \frac{7n}{2}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|\langle u_k, \phi\rangle - \langle u_l, \phi\rangle| &\leq C \sum_{l<\langle\xi\rangle\leq k} \langle\xi\rangle^{M+\frac{n}{2}} \|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \\
&\leq CC_N \sum_{l<\langle\xi\rangle\leq k} \langle\xi\rangle^{M+\frac{n}{2}-N} \\
&\xrightarrow[l,k\to\infty]{} 0,
\end{aligned}
$$

pois a série

$$
\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} \langle\xi\rangle^{M+\frac{n}{2}-N},
$$

é convergênte (teorema 8). Então $\{u_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'(G)$, logo existe $u \in \mathscr{D}'(G)$ tal que

$$
\langle u_N, \phi\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle u, \phi\rangle, \quad \forall \phi \in C^\infty(G).
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}(\xi)_{ij} &= \langle u, \xi^*_{ij}\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \langle u_N, \xi^*_{ij}\rangle \\
&= a(\xi)_{ij},
\end{aligned}
$$

isto é, $\widehat{u}(\xi) = a(\xi)$, para toda $[\xi] \in \widehat{G}$.

□

Corolário 3. *Seja $u \in \mathscr{D}'(G)$. Então*

$$
u = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \, Tr\,(\widehat{u}(\xi)\xi).
$$

Demonstração. Já sabemos que

$$
\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{u}(\xi)\xi) \in \mathscr{D}'(G).
$$

Seja $\phi \in C^\infty(G)$. Então temos

$$
\begin{aligned}
\langle u, \phi\rangle &= \langle u, \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{\phi}(\xi)\xi)\rangle \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{\phi}(\xi)_{ij}\langle u, \xi_{ji}\rangle \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \int_G \phi(x)\overline{\xi_{ji}(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x)\widehat{u}(\overline{\xi})_{ij} \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{u}(\overline{\xi})_{ij}\langle\overline{\xi_{ji}}, \phi\rangle \\
&= \sum_{[\overline{\xi}]\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{u}(\xi)_{ij}\langle\langle\xi\rangle_{j,i}, \phi\rangle \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi\langle \mathrm{Tr}\,(\widehat{u}(\xi)\xi), \phi\rangle \\
&= \langle \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{u}(\xi)\xi), \phi\rangle.
\end{aligned}
$$

□

Observação 45. *Note que usamos em uma das igualdades no final da demonstração anterior que* $\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi\langle Tr\,(\widehat{u}(\xi)\xi), \phi\rangle = \sum_{[\overline{\xi}]\in\widehat{G}} d_\xi\langle Tr\,(\widehat{u}(\xi)\xi), \phi\rangle$. *Primeiramente se* ξ *é uma representação unitária (fortemente contínua e irredutível) então* $\overline{\xi}$ *também é. Portanto temos duas opções:* $\xi \sim \overline{\xi}$ *ou* $\xi \nsim \overline{\xi}$. *Em vista que para efetuar tal soma é necessário apenas um, e qualquer um, representante de cada classe, tanto faz somar sobre* $\{[\xi] \in \widehat{G}\}$ *ou sobre* $\{[\overline{\xi}] \in \widehat{G}\}$.

2.4 O espaço $\mathscr{G}^{s,h}(G)$

Definição 46. Sejam $s \geq 1$ e $h > 0$. Seja $f \in C^\infty(G)$, dizemos que $f \in \mathscr{G}^{s,h}(G)$ se existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_{2k} \leq Ch^{2k}(2k)!^s, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.4}$$

Observações: Se $s \leq s'$ e $h \leq h'$ temos

- $\mathscr{G}^{s,h}(G) \subset \mathscr{G}^{s',h}(G)$
- $\mathscr{G}^{s,h}(G) \subset \mathscr{G}^{s,h'}(G)$
- $\mathscr{G}^{s,h}(G) \subset \mathscr{G}^{s',h'}(G)$,

com as inclusões contínuas.

Proposição 11. *O espaço* $\mathscr{G}^{s,h}(G)$ *é um espaço de Banach, com respeito a norma*

$$\|\phi\|_{s,h} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|\phi\|_{2k}}{h^{2k}(2k)!^s}.$$

Demonstração. Seja $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}^{s,h}(G)$ uma sequência de Cauchy. Como

$$\|\phi_n - \phi_m\|_{2k} \leq \|\phi_n - \phi_m\|_{s,h} h^{2k}(2k)!^s,$$

temos que $\{\phi_j\}$ é uma sequência de Cauchy em $H^{2k}(G)$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Então para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ existe $\phi^{(k)} \in H^{2k}(G)$ tal que

$$\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{H^{2k}(G)} \phi^{(k)}.$$

Denote $\phi = \phi^{(0)}$. Temos que dado $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned}\|\phi^{(k)} - \phi\|_{L^2(G)} &\leq \|\phi - \phi_j\|_{L^2(G)} + \|\phi^{(k)} - \phi_j\|_{L^2(G)} \\ &\leq \|\phi - \phi_j\|_{L^2(G)} + \|\phi^{(k)} - \phi_j\|_{2k} \\ &\xrightarrow[j\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

então $\phi = \phi^{(k)}$. Logo $\phi \in H^{2k}(G)$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, e portanto $\phi \in C^\infty(G)$. Como $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > j_0$ então $\|\phi_n - \phi_m\|_{s,h} \leq \varepsilon$, isto é

$$\frac{\|\phi_n - \phi_m\|_{2k}}{h^{2k}(2k)!^s} \leq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Fazendo $m \to \infty$ obtemos

$$\frac{\|\phi_n - \phi\|_{2k}}{h^{2k}(2k)!^s} \leq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

isto é,

$$\|\phi_n - \phi\|_{s,h} \leq \varepsilon.$$

Então $\phi \in \mathscr{G}^{s,h}(G)$ e $\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathscr{G}^{s,h}(G)} \phi$.

□

Lema 15. *Seja $f \in \mathscr{G}^{s,h}(G)$. Então a série*

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \, Tr\,(\widehat{f}(\xi)\xi)$$

converge para f em $\mathscr{G}^{s,h}(G)$.

Demonstração. Seja $T_N(f)(x) = \sum_{\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{f}(\xi)\xi(x))$, $N \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\widehat{T_N(f)}(\xi) = \begin{cases} \widehat{f}(\xi) & \text{se } \langle\xi\rangle \leq N \\ 0 & \text{se } \langle\xi\rangle > j. \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|T_N(f) - f\|_{2k}^2 &= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \langle\xi\rangle^{4k} \|\widehat{T_N(f)}(\xi) - \widehat{f}(\xi)\|_{HS}^2 \\ &= \sum_{\langle\xi\rangle>N} d_\xi \langle\xi\rangle^{4k} \|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}^2,\end{aligned}$$

então

$$\left[\frac{\|T_N(f)-f\|_{2k}}{h^{2k}(2k)!^s}\right]^2 = \frac{1}{(h^{2k}(2k)!^s)^2}\sum_{\langle\xi\rangle>N} d_\xi\langle\xi\rangle^{4k}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}^2.$$

Como $f\in\mathscr{G}^{s,h}(G)$, existe $C>0$ tal que

$$\frac{\|f\|_{2k}}{h^{2k}(2k)!^s}\leq C,\quad \forall k\in\mathbb{Z}_+,$$

isto é

$$\frac{1}{(h^{2k}(2k)!^s)^2}\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi\langle\xi\rangle^{4k}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}^2\leq C^2,\quad \forall k\in\mathbb{Z}_+.$$

Portanto

$$\frac{1}{(h^{2k}(2k)!^s)^2}\sum_{\langle\xi\rangle>N} d_\xi\langle\xi\rangle^{4k}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}^2 \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

para todo $k\in\mathbb{Z}_+$, logo

$$\|T_N(f)-f\|_{s,h}\xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

□

Teorema 16. *Se $h<h'$ a inclusão*

$$i:\mathscr{G}^{s,h}(G)\hookrightarrow\mathscr{G}^{s,h'}(G)$$

é compacta.

Demonstração. Como i é contínua, temos que $i\in\mathscr{L}(\mathscr{G}^{s,h}(G),\mathscr{G}^{s,h'}(G))$. Para $N\in\mathbb{N}$ defina

$$T_N(f)=\sum_{\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \operatorname{Tr}(\widehat{f}(\xi)\xi),\quad f\in\mathscr{G}^{s,h}(G).$$

Da demonstração do lema anterior temos que

$$\|T_N(f)-f\|_{2k}^2=\sum_{\langle\xi\rangle>N} d_\xi\langle\xi\rangle^{4k}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}^2,$$

e portanto, se $t\in\mathbb{N}$, $t\geq\frac{3n}{4}$ temos

$$\begin{aligned}\|T_N(f)-f\|_{2k}^2 &\leq \sum_{\langle\xi\rangle>N}\underbrace{\left\{d_\xi\langle\xi\rangle^{4(k+t)}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}^2\right\}}_{\leq\|f\|_{2(k+t)}^2}\langle\xi\rangle^{-4t}\\ &\leq\left\{\sum_{\langle\xi\rangle>N}\langle\xi\rangle^{-4t}\right\}(h^{2(k+t)}(2(k+t))!^s)^2\|f\|_{s,h}^2\\ &\leq C_N^2(h^{2(k+t)}(2(k+t))!^s)^2\|f\|_{s,h}^2,\end{aligned}$$

onde $C_N\xrightarrow[N\to\infty]{}0$, pois

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}\langle\xi\rangle^{-2t}<\infty$$

se $t\geq\frac{3n}{4}$ (teorema 8). Então temos

$$\frac{\|T_N(f)-f\|_{2k}}{h'^{2k}(2k)!^s} \leq \frac{C_N h^{2(k+t)}(2(k+t))!^s}{h'^{2k}(2k)!^s}\|f\|_{s,h},$$

e

$$\begin{aligned}\frac{h^{2(k+t)}}{h'^{2k}}\left(\frac{(2(k+t))!}{(2k)!}\right)^s &= h^{2t}\left(\frac{h}{h'}\right)^{2k}\left[\frac{(2k+2t)(2k+2t-1)\cdots(2k+1)(2k)!}{(2k)!}\right]^s \\ &= h^{2t}\left(\frac{h}{h'}\right)^{2k}\left[(2k+2t)(2k+2t-1)\cdots(2k+1)\right]^s.\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{h}{h'}\right)^{2k}\left[(2k+2t)(2k+2t-1)\cdots(2k+1)\right]^s = 0,$$

pois $h < h'$, temos que existe uma constante C independente de k tal que

$$h^{2t}\left(\frac{h}{h'}\right)^{2k}\left[(2k+2t)(2k+2t-1)\cdots(2k+1)\right]^s \leq C.$$

Portanto

$$\frac{\|T_N(f)-f\|_{2k}}{h'^{2k}(2k)!^s} \leq \varepsilon_N\|f\|_{s,h}, \tag{2.5}$$

onde $\varepsilon_N = CC_N$, e $\varepsilon_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Logo temos

$$\|T_N(f)-f\|_{s,h'} \leq \varepsilon_N\|f\|_{s,h},$$

e então $T_N \in \mathscr{L}(\mathscr{G}^{s,h}(G),\mathscr{G}^{s,h'}(G))$ pois

$$\begin{aligned}\|T_N(f)\|_{s,h'} &\leq \|T_N(f)-f\|_{s,h'} + \|f\|_{s,h'} \\ &\leq \varepsilon_N\|f\|_{s,h} + \|f\|_{s,h'} \\ &\leq (1+\varepsilon_N)\|f\|_{s,h},\end{aligned}$$

e de (2.5) temos $T_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{L}(\mathscr{G}^{s,h}(G),\mathscr{G}^{s,h'}(G))} i$. Como T_N tem range finito, temos que i é compacta.

□

2.5 Funções Gevrey e ultradistribuições

Definição 47. Seja $s \geq 1$. Dezemos que $\phi \in C^\infty(G)$ é uma função Gevrey de ordem s, e escrevemos $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$ se existe $h > 0$ tal que $\phi \in \mathscr{G}^{s,h}(G)$.

Se $s = 1$, denotamos $C^\omega(G) = \mathscr{G}^1(G)$, o espaço das funções reais-analíticas em G. Podemos munir $\mathscr{G}^s(G)$ com a topologia limite indutivo, tomando $\{h_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência de números reais positivos tais que $h_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$, então

$$\mathscr{G}^s(G) = \bigcup_{j=0}^{\infty}\mathscr{G}^{s,h_j}(G), \tag{2.6}$$

e dizemos que uma sequência $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}^s(G)$ converge a 0 em $\mathscr{G}^s(G)$ se

- $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}^{s,h_j}(G)$, para algum $j \in \mathbb{N}$

- $\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{G}^{s,h_j}(G)} 0.$

Definição 48. Seja $u : \mathscr{G}^s(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Dizemos que $u \in \mathscr{D}'_s(G)$ se para toda sequência $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}^s(G)$ tal que

$$\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathscr{G}^s(G)} 0,$$

vale $\langle u, \phi_j\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$

Dizemos que $\mathscr{D}'_s(G)$ é o espaço das ultradistribuições de ordem s.

Teorema 17. *Seja $u : \mathscr{G}^s(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. São equivalentes:*

1. $u \in \mathscr{D}'_s(G)$;

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C_\varepsilon \sup\{\|\phi\|_{2k}\varepsilon^{2k}(2k)!^{-s} \ : \ k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \forall \phi \in \mathscr{G}^s(G);$$

3. $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists C_j > 0$ *tal que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C_j \|\phi\|_{s,h_j}, \quad \phi \in \mathscr{G}^{s,h_j}(G).$$

Demonstração. (3) $\Rightarrow$ (1) : Fácil.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Fácil.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Suponha que (2) não vale, isto é, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}^s(G)$ tais que

$$|\langle u, \phi_j\rangle| > j \sup\{\|\phi_j\|_{2k}\varepsilon_0^{2k}(2k)!^{-s} \ : \ k \in \mathbb{Z}_+\} = j\|\phi_j\|_{s,\frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $\psi_j = \frac{1}{j}\frac{\phi_j}{\|\phi_j\|_{s,\frac{1}{\varepsilon_0}}}$. Então temos

$$\|\psi_j\|_{s,\frac{1}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{j} \longrightarrow 0,$$

e por outro lado

$$|\langle u, \psi_j\rangle| > 1.$$

Então $u \notin \mathscr{D}'_s(G)$.

$\square$

Capítulo 3

Caracterição de $\mathscr{G}^s(G)$ e $\mathscr{D}'_s(G)$ via transformada de Fourier

Nesse capítulo caracterizamos as classes de Gevrey, $\mathscr{G}^s(G)$, e as ultradistribuições, $\mathscr{D}'_s(G)$, via o decrescimento/crescimento da transformada de Fourier, como em [DR14]. Com essa caracterização mostramos, por meio de exemplos, que:

- se $s > 1$, $\bigcup_{1\geq t<s} \mathscr{G}^t(G) \subsetneqq \mathscr{G}^s(G)$;
- $\bigcup_{s\geq 1} \mathscr{G}^s(G) \subsetneqq C^\infty(G)$;
- $C^\omega(G) \subsetneqq \bigcap_{s>1} \mathscr{G}^s(G)$;
- $\mathscr{D}'(G) \subsetneqq \mathscr{D}'_s(G)$, para todo $s \geq 1$.

Começamos então com a seguinte proposição:

Proposição 12. *Temos que se $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$ então existem constantes $C > 0$, $A > 0$ tais que*

$$\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \leq CA^{2k}\langle\xi\rangle^{-2k}k^{2ks}, \tag{3.1}$$

para todos $[\xi] \in \widehat{G}$ e $k \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$. Então existem constantes $C, A > 0$ tais que

$$\|\phi\|_k \leq CA^{2k}(2k)!^s \leq C(2^sA)^{2k}k^{2ks}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Seja $A' = 2^sA$ e seja $k \in \mathbb{Z}_+$ fixado. Então temos que

$$\begin{aligned}
(CA'^{2k}k^{2ks})^2 &\geq \|\phi\|_{2k}^2 \\
&= \|(I+\Delta_\bullet)^k\phi\|_{L^2(G)}^2 \\
&= \|(\widehat{I+\Delta_\bullet})^k\phi\|_{L^2(\widehat{G})}^2 \\
&= \|\langle\xi\rangle^{2k}\widehat{\phi}(\xi)\|_{L^2(\widehat{G})}^2 \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi\langle\xi\rangle^{4k}\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS}^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \leq CA'^{2k}\langle\xi\rangle^{-2k}k^{2ks},$$

para todos $[\xi] \in \widehat{G}$ e $k \in \mathbb{Z}_+$.

□

Lema 16. *Seja $r > 0$. Vale a seguinte identidade:*

$$\inf_{t>0} t^{st}r^{-t} = e^{-\left(\frac{s}{e}\right)r^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall s > 0.$$

Lema 17. *Para $r \geq (4e)^s$ temos que existem constantes $B > 0$, $A > 0$ tais que*

$$\inf_{k\in 2\mathbb{Z}_+} k^{sk}r^{-k} \leq Be^{-Ar^{\frac{1}{s}}}. \tag{3.2}$$

Observação 49. *Também conseguimos o outro lado da desigualdade:*

$$\inf_{k\in 2\mathbb{Z}_+} k^{sk}r^{-k} \geq B'e^{-A'r^{\frac{1}{s}}},$$

com $B' = e^{-2b}$, $A' = \frac{b}{e}$ e $b = -\log(\frac{1}{2e})$. Também é importante notar que A, B, A' e B' independem de r.

A demonstração desses dois lema é feita no apêndice.

Proposição 13. *Seja $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$. Então existem constantes $A > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \leq Ce^{-A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G}. \tag{3.3}$$

Demonstração. Sabemos que existem constantes $C > 0$ e $A > 0$ tais que

$$\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \leq \inf_{k\in 2\mathbb{Z}_+} C\left(\frac{\langle\xi\rangle}{A}\right)^{-k} k^{sk}, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G}.$$

Seja $r = \frac{\langle\xi\rangle}{A}$. Se $r \geq (4e)^s$ temos que existem constantes $C' > 0$ e $A' > 0$ tais que

$$\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \leq C'e^{-A'\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}.$$

Como o conjunto $\{[\xi] \in \widehat{G} \ : \ \langle\xi\rangle < A(4e)^s\}$ é finito, trocando eventualmente as constantes C' e A' obtemos (3.3) para todo $[\xi] \in \widehat{G}$.

□

Proposição 14. *Seja $a \in \mathscr{M}(\widehat{G})$ e suponha que existam constantes $C > 0$ e $A > 0$ tais que vale*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq Ce^{-A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G}.$$

Então existe $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$ tal que $\widehat{\phi}(\xi) = a(\xi)$.

Demonstração. Defina $\phi = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi)$. Temos que $\phi \in C^\infty(G)$ e $\widehat{\phi}(\xi) = a(\xi)$. Para finalizar, temos que mostrar que $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ considere a aplicação

$$T_N(\phi) = \sum_{\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi).$$

Para facilitarmos a demonstração a letra C significará uma constante positiva arbitrária, que pode mudar no decorrer da demonstração. Se $N > M$, $h > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ temos

$$\|T_N(\phi) - T_M(\phi)\|_{2k}^2 = \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \langle\xi\rangle^{4k} \|a(\xi)\|_{HS}^2$$
$$\leq C^2 \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \langle\xi\rangle^{4k} e^{-2A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\|T_N(\phi) - T_M(\phi)\|_{2k}}{h^{2k}(2k)!^s}\right\}^2 &\leq C^2 \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} \frac{d_\xi \langle\xi\rangle^{4k} e^{-2A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}}{h^{4k}(2k)!^{2s}} \\
&\leq C^2 \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} \frac{d_\xi e^{-2A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}}{\left(\left(\frac{\langle\xi\rangle}{h}\right)^{-2k}(2k)!^s\right)^2} \\
&\leq C^2 \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} \frac{d_\xi e^{-2A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}}{\left(\left(\frac{e^s\langle\xi\rangle}{h}\right)^{-2k}(2k)^{2ks}\right)^2} \\
&\leq \sup_{k'\in 2\mathbb{Z}_+} C \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} \frac{\langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}} e^{-2A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}}{\left(\left(\frac{e^s\langle\xi\rangle}{h}\right)^{-k'}(k')^{k's}\right)^2} \\
&= C \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} \langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}} e^{-2A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} \sup_{k'\in 2\mathbb{Z}_+} \frac{1}{\left(\left(\frac{e^s\langle\xi\rangle}{h}\right)^{-k'}(k')^{k's}\right)^2} \\
&= C \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} \langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}} e^{-2A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} \frac{1}{\left(\inf_{k'\in 2\mathbb{Z}_+}\left(\frac{e^s\langle\xi\rangle}{h}\right)^{-k'}(k')^{k's}\right)^2},
\end{aligned}$$

Mas pela observação do lema 17, se M é grande o suficiente, temos que existem $B' > 0$ e $A' > 0$ tais que

$$\inf_{k'\in 2Z_+} k'^{sk'} r^{-k'} \geq B' e^{-A' r^{\frac{1}{s}}},$$

com $r = \frac{\langle\xi\rangle e^s}{h}$. Então temos

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\|T_N(\phi) - T_M(\phi)\|_{2k}}{h^{2k}(2k)!^s}\right\}^2 &\leq C' \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} \langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}} e^{-2A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} e^{2A'\left(\frac{\langle\xi\rangle e^s}{h}\right)^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq C' \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} \langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}} e^{-2\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}\left(A - \frac{A'e}{h^{\frac{1}{s}}}\right)} \\
&\doteq C_{NM}^2.
\end{aligned}$$

Portanto se $\left(A - \frac{A'e}{h^{\frac{1}{s}}}\right) > 0$, isto é

$$h > \left(\frac{A'e}{A}\right)^s,$$

temos

$$\frac{\|T_N(\phi) - T_M(\phi)\|_{2k}}{h^{2k}(2k)!^s} \leq C_{NM},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, isto é,

$$\|T_N(\phi) - T_M(\phi)\|_{s,h} \leq C_{NM},$$

onde $C_{NM} \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$. Então $T_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{G}^{s,h}} \phi$, e portanto $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$.

□

Resumindo provamos o seguinte teorema:

Teorema 18. *Sejam $a \in \mathscr{M}(\widehat{G})$ e $s \geq 1$. São equivalente:*

1. *Existe $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$ tal que*

$$\widehat{\phi}(\xi) = a(\xi),$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$.

2. *Existem constantes $C > 0$ e $A > 0$ tais que vale*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq Ce^{-A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$.

Observação 50. *A condição* (2) *do teorema é equivalente à:*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq Ce^{-A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para $[\xi] \in \widehat{G}$, com $\langle\xi\rangle$ suficientemente grande.

Observação 51. *Esse teorema pode ser encontrado em [DR14], e a demonstração aqui exposta é diferente, e talvez mais simples.*

Agora que temos o teorema 18 em mãos, podemos exibir os primeiros exemplos citados no início do presente capítulo:

Exemplo 52 (Exemplo de uma função $f \in \mathscr{G}^s(G)$ tal que $f \notin \mathscr{G}^t(G)$ para $t < s$). Seja $s \geq 1$ e defina

$$f = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi),$$

com

$$a(\xi)_{ij} = \delta_{1i}\delta_{1j}e^{-\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \quad [\xi] \in \widehat{G}.$$

Então $\widehat{f}(\xi) = a(\xi)$ e portanto

$$\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS} = e^{-\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$. Conclusão: $f \in \mathscr{G}^s(G)$ mas $f \notin \mathscr{G}^t(G)$ para todo $t < s$, pois $\frac{e^{-x^{\frac{1}{t}}}}{e^{-x^{\frac{1}{s}}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, se $t < s$. Então

$$\bigcup_{t<s} \mathscr{G}^t(G) \subsetneq \mathscr{G}^s(G).$$

Exemplo 53 (Exemplo de função $f \in \bigcap_{s>1} \mathscr{G}^s(G)$ tal que $f \notin C^\omega(G) = \mathscr{G}^1(G)$). Seja $\{\tau_\xi\}_{[\xi]\in\widehat{G}} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência tal que $\tau_\xi \xrightarrow[\langle\xi\rangle\to\infty]{} 0$, e defina $a \in \mathscr{M}(\widehat{G})$ por

$$a(\xi)_{ij} = \delta_{1i}\delta_{1j}e^{-\langle\xi\rangle^{1-\tau_\xi}}.$$

Seja

$$f = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi).$$

Afirmo que $f \in \mathscr{G}^s(G)$ para todo $s > 1$. De fato, dado $s > 1$ existe $m_0 > 0$ tal que se $\langle\xi\rangle > m_0$ temos

$$\tau_\xi < 1 - \frac{1}{s}.$$

Então se $\langle\xi\rangle > m_0$ temos

$$e^{-\langle\xi\rangle^{1-\tau_\xi}} < e^{-\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

isto é $f \in \mathscr{G}^s(G)$. Tome τ_ξ tal que $\langle\xi\rangle^{-\tau_\xi} \xrightarrow[\langle\xi\rangle\to\infty]{} 0$, por exemplo $\tau_\xi = \frac{1}{\log(\log(\langle\xi\rangle))}$. Então dados $\varepsilon > 0$ e $[\xi] \in \widehat{G}$ temos que

$$\frac{e^{-1\langle\xi\rangle^{1-\tau_\xi}}}{e^{-\varepsilon\langle\xi\rangle}} = e^{-\langle\xi\rangle^{1-\tau_\xi}+\varepsilon\langle\xi\rangle},$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon\langle\xi\rangle - \langle\xi\rangle\langle\xi\rangle^{-\tau_\xi} &= \langle\xi\rangle\left\{\varepsilon - \langle\xi\rangle^{-\tau_\xi}\right\}\\ &\geq \frac{\varepsilon}{2}\langle\xi\rangle,\end{aligned}$$

se $\langle\xi\rangle$ grande o suficiente, isto é, existe $\rho > 0$ tal que se $\langle\xi\rangle > \rho$ temos que

$$e^{-\langle\xi\rangle^{1-\tau_\xi}} \geq e^{\frac{\varepsilon}{2}\langle\xi\rangle}e^{\varepsilon\langle\xi\rangle}.$$

Então $f \notin C^\omega(G)$. Conclusão:

$$C^\omega(G) \subsetneq \bigcap_{s>1} \mathscr{G}^s(G).$$

Exemplo 54 (Exemplo de uma função $f \in C^\infty(G)$ tal que $f \notin \mathscr{G}^s(G)$ para todo $s \geq 1$). Para cada $[\xi] \in \widehat{\xi}$ defina $a(\xi) \in \mathbb{C}^{d_\xi\times d_\xi}$ por

$$a(\xi)_{ij} = \delta_{1i}\delta_{1j}\langle\xi\rangle^{-\log(\langle\xi\rangle)}.$$

Defina então

$$f(x) = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi(x)).$$

como $\widehat{f}(\xi) = a(\xi)$, temos que

$$\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS} = \langle\xi\rangle^{-\log(\langle\xi\rangle)},$$

e portanto $f \in C^\infty(G)$. Seja $s \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$\frac{(\log(\langle\xi\rangle))^2}{\log(\varepsilon)+\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} \xrightarrow[\langle\xi\rangle\to\infty]{} 0,$$

e portanto existe $m_\varepsilon > 0$ tal que se $\langle\xi\rangle > m_\varepsilon$ vale

$$(\log(\langle\xi\rangle))^2 < \log(\varepsilon)+\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}},$$

isto é,

$$\langle\xi\rangle^{-\log(\langle\xi\rangle)} > \frac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}.$$

Conclusão: dado $\varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon > 0$ tal que se $\langle\xi\rangle > m_\varepsilon$ vale

$$\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS} > \frac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}.$$

Então $f \notin \mathscr{G}^s(G)$. Como $s \geq 1$ é arbitrário, temos que $f \notin \bigcup_{s\geq 1}\mathscr{G}^s(G)$. Portanto

$$\bigcup_{s\geq 1}\mathscr{G}^s(G) \subsetneq C^\infty(G).$$

Proposição 15. *Seja $u \in \mathscr{D}'_s(G)$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Seja $u \in \mathscr{D}'_s(G)$. Seja $\varepsilon > 0$ e seja $\varepsilon_1 > 0$ a fixar. Existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que

$$|\langle u,\phi\rangle| \leq C_{\varepsilon_1}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\|\phi\|_{2k}\varepsilon_1^{2k}(2k)!^{-s}\right),$$

para toda $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$. Sejam $[\xi] \in \widehat{G}$ e $1 \leq i,j \leq d_\xi$ fixados. Então temos que

$$|\langle u,\xi_{ij}\rangle| \leq C_{\varepsilon_1}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\|\xi_{ij}\|_{2k}\varepsilon_1^{2k}(2k)!^{-s}\right),$$

e se $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned}\|\xi_{ij}\|_{2k} &= \|(I+\Delta_\bullet)^k\xi_{ij}\|_{L^2(G)}\\ &= \langle\xi\rangle^{2k}\|\xi_{ij}\|_{L^2(G)}\\ &= \langle\xi\rangle^{2k}d_\xi^{\frac{-1}{2}}\\ &\leq \langle\xi\rangle^k.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}|\langle u,\xi_{ij}\rangle| &\leq C_{\varepsilon_1}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\langle\xi\rangle^{2k}\varepsilon_1^{2k}(2k)!^{-s}\right)\\ &\leq C_{\varepsilon_1}\left\{\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\left([\langle\xi\rangle\varepsilon_1]^{-2k}(2k)!^s\right)\right\}^{-1}.\end{aligned}$$

Mas $(2k)! \geq e^{-2k}(2k)^{2k}$, então

$$\inf_{k\in 2\mathbb{Z}_+}\left([\langle\xi\rangle\varepsilon_1]^{-k}(k!)^s\right) \geq \inf_{k\in 2\mathbb{Z}_+}\left([\langle\xi\rangle\varepsilon_1 e^s]^{-k}k^{ks}\right),$$

e pela observação feita apos a proposição 17, se $r = \langle\xi\rangle\varepsilon_1 e^s$ e $r \geq (4e)^s$ existem constantes positivas A e B, independentes de r, tais que vale

$$\inf_{k\in 2\mathbb{Z}_+}\left([\langle\xi\rangle\varepsilon_1 e^s]^{-k}k^{ks}\right) \geq Be^{-Ar^{\frac{1}{s}}}.$$

Então se $[\xi] \in \widehat{G}$ é tal que $r = \langle\xi\rangle\varepsilon_1 e^s \geq (4e)^s$ vale

$$|\langle u, \xi_{ij}\rangle| \leq C_{\varepsilon_1} B^{-1} e^{A'\varepsilon_1^{\frac{1}{s}}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

onde $A' = Ae^s$. Como o conjunto

$$\left\{[\xi] \in \widehat{G} \ : \ \langle\xi\rangle < \frac{4}{\varepsilon_1}\right\}$$

é finito, aumentando as constantes se necessário obtemos

$$|\langle u, \xi_{ij}\rangle| \leq C_{\varepsilon_1} B^{-1} e^{A'\varepsilon_1^{\frac{1}{s}}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$, e portanto

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} &\leq C_{\varepsilon_1} B^{-1} d_\xi e^{A'\varepsilon_1^{\frac{1}{s}}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}\\ &\leq C_{\varepsilon_1} C B^{-1}\langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}} e^{A'\varepsilon_1^{\frac{1}{s}}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}\\ &\leq C_{\varepsilon_1} C' B^{-1} e^{2A'\varepsilon_1^{\frac{1}{s}}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},\end{aligned}$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$. Escolhendo então $\varepsilon_1 = \left(\frac{\varepsilon}{2A'}\right)^s$ e $C_\varepsilon = \frac{C'C_{\varepsilon_1}}{B}$ obtemos

$$\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G}.$$

□

Definição 55. Seja $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'_s(G)$ uma sequência de ultradistribuições. Dizemos que $u_j \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ em $\mathscr{D}'_s(G)$ se

$$\langle u_N, \phi\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

para toda $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$.

Proposição 16. *Seja $a \in \mathscr{M}(\widehat{G})$ e suponha que para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G}.$$

Então existe $u \in \mathscr{D}'_s(G)$ tal que $\widehat{u}(\xi) = a(\xi)$, para toda $[\xi] \in \widehat{G}$.

Demonstração. Para cada $N \in \mathbb{N}$ defina

$$u_N = \sum_{\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \mathrm{Tr}\,(a(\xi)\xi).$$

Como u_N é uma soma finita de funções analíticas, temos que $u_N \in \mathscr{D}'_s(G)$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Sejam $N > M$ dois números inteiros positivos. Se $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$ então existem constantes $A, C > 0$ tais que

$$\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS} \leq Ce^{A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\langle u_N, \phi\rangle &= \sum_{\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} a_{ij}(\xi)\langle \xi_{ji}, \phi\rangle \\ &= \sum_{\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} a_{ij}(\xi)\int_G \xi_{ji}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\ &= \sum_{\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} a_{ij}(\xi)\widehat{\phi}(\overline{\xi_{ij}}),\end{aligned}$$

e então se $\varepsilon > A$.

$$\begin{aligned}|\langle u_N\, \phi\rangle - \langle u_M, \phi\rangle| &\leq \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \|a(\xi)\|_{HS}\|\widehat{\phi}(\overline{\xi})\|_{HS} \\ &\leq CC_\varepsilon \sum_{M<\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi e^{-\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}(A-\varepsilon)} \\ &\xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

se $\varepsilon < A$. Conclusão: para cada $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$, existe $\lim_{N\to\infty}\langle u_N, \phi\rangle$. Defina então

$$\langle u, \phi\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle u_N, \phi\rangle, \quad \phi \in \mathscr{G}^s(G).$$

Primeiramente temos que u é linear e $\widehat{u}(\xi) = a(\xi)$, para toda $[\xi] \in \widehat{G}$. Seja $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}^s(G)$ uma sequência tal que $\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathscr{G}^s(G)} 0$, isto é, existe $h > 0$ tal que $\phi_j \in \mathscr{G}^{s,h}(G)$ e $\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathscr{G}^{s,h}(G)} 0$. Então existem constantes $A > 0$ e $C_j > 0$, com $C_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ tais que

$$\|\widehat{\phi_j}(\xi)\|_{HS} \leq C_j e^{-A\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para todos $j \in \mathbb{N}$ e $[\xi] \in \widehat{G}$. Então dado $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}|\langle u_N, \phi_j\rangle| &\leq \sum_{\langle\xi\rangle\leq N} d_\xi \|a(\xi)\|_{HS}\|\widehat{\phi}(\overline{\xi})\|_{HS} \\ &\leq C_j C_\varepsilon \sum_{\langle\xi\rangle\leq N} \langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}} e^{-\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}(A-\varepsilon)},\end{aligned}$$

Então tomando $\varepsilon < A$ podemos passar ao limite $N \to \infty$, obtendo assim

$$|\langle u, \phi_j\rangle| \leq C_j C_\varepsilon \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} \langle\xi\rangle^{\frac{n}{2}} e^{-\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}(A-\varepsilon)},$$

e portanto $\langle u, \phi_j\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, isto é, $u \in \mathscr{D}'_s(G)$.

□

Resumindo provamos o seguinte teorema:

Teorema 19. *Seja $a \in \mathscr{M}(\widehat{G})$. São equivalentes:*

1. *Existe $u \in \mathscr{D}'_s(G)$ tal que*

$$\widehat{u}(\xi) = a(\xi),$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$*;*

2. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe uma constante* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$*.*

Observação 56. *A condição* (2) *do teorema é equivalente à:*

$$\|a(\xi)\|_{HS} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para $[\xi] \in \widehat{G}$*, com* $\langle \xi \rangle$ *grande o suficiente.*

Observação 57. *O teorema 19 também pode ser encontrado em [DR14], e como no teorema anterior, a demonstração aqui exposta é diferente.*

Agora podemos exibir o último exemplo citado no início do presente capítulo:

Exemplo 58 (Exemplo de uma ultradistribuição $u \in \mathscr{D}'_s(G)$ tal que $u \notin \mathscr{D}'(G)$). Seja $a \in \mathscr{M}(\widehat{G})$ dada por

$$a(\xi)_{ij} = \delta_{1i}\delta_{1j} e^{\langle \xi \rangle^{\frac{1}{2s}}}.$$

Defina

$$u = \sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}(a(\xi)\xi).$$

Como $\widehat{u}(\xi) = a(\xi)$, para toda $[\xi] \in \widehat{G}$, temos

$$\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} = e^{\langle \xi \rangle^{\frac{1}{2s}}}, \quad \forall [\xi] \in \widehat{G}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\langle \xi \rangle^{\frac{1}{2s}}}}{e^{\varepsilon \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}}} &= \frac{e^{\left\{ \frac{\langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}}{\langle \xi \rangle^{\frac{1}{2s}}} \right\}}}{e^{\varepsilon \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}}} \\
&= e^{\overbrace{\left\{ \frac{1}{\langle \xi \rangle^{\frac{1}{2s}}} - \varepsilon \right\}}^{<0 \text{ para } \langle \xi \rangle >> 1} \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}} \\
&\xrightarrow[\langle \xi \rangle \to \infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Então existe $m_\varepsilon > 0$ tal que se $\langle \xi \rangle > m_\varepsilon$ vale

$$e^{\langle \xi \rangle^{\frac{1}{2s}}} < e^{\varepsilon \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}}.$$

Tome $C_\varepsilon = \max\{1, e^{\left\{ \frac{1}{\langle \xi \rangle^{\frac{1}{2s}}} - \varepsilon \right\} \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}} : \langle \xi \rangle \leq m_\varepsilon\}$. Então temos

$$\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G}.$$

Logo $u \in \mathscr{D}'_s(G)$. Como $u \in \mathscr{D}'(G)$ se, e somente se, existem $C, M > 0$ tais que

$$\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} \leq C\langle\xi\rangle^M, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G},$$

isto é,

$$e^{\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2s}}} \leq C\langle\xi\rangle^M, \quad \forall[\xi] \in \widehat{G},$$

e se tais constantes existissem teríamos

$$\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2s}} \leq \log(C) + M\log(\langle\xi\rangle),$$

e isso é um absurdo, pois teríamos

$$1 \leq \frac{\log(C) + M\log(\langle\xi\rangle)}{\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2s}}} \xrightarrow[\langle\xi\rangle\to\infty]{} 0.$$

Conclusão:

$$\mathscr{D}'(G) \subsetneq \mathscr{D}'_s(G).$$

Observação 59. *Todos esses exemplos foram inspirados nos exemplos dados pelo professor Petronilho nas notas "Ultradistribuições Gevrey periódicas em $\mathbb{R}^N$".*

Lema 18. *Seja $\{u_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'_s(G)$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'_s(G)$, isto é, $\langle u_N, \phi\rangle$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$ para toda $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$. Então existe $u \in \mathscr{D}'_s(G)$ tal que $u_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{D}'_s(G)} u$.*

Demonstração. Como $\{\langle u_N, \phi\rangle\}_{N\in\mathbb{N}}$ é Cauchy para toda $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$ temos que $\{u_N|_{\mathscr{G}^{s,h}(G)}\} \subset (\mathscr{G}^{s,h}(G))^*$ é Cauchy com respeito à topologia fraca, para todo $h > 0$. Como $\mathscr{G}^{s,h}(G)$ é Banach para todo $h > 0$, segue do teorema de Banach-Steinhaus que dado $h > 0$ existe $u^h \in (\mathscr{G}^{s,h}(G))^*$ tal que

$$\langle u_N, \phi\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle u^h, \phi\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathscr{G}^{s,h}(G)$. Seja h_0 como em 2.6 fixado. Se $h_0 < h'$ temos $\mathscr{G}^{s,h_0}(G) \subset \mathscr{G}^{s,h'}(G)$, então

$$u^{h'}\Big|_{\mathscr{G}^{s,h_0}(G)} = u_0^h,$$

e portanto a aplicação linear $u : \mathscr{G}^s(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u_0^h, \phi\rangle, \quad \phi \in \mathscr{G}^{s,h_0}(G)$$

está bem definida. Além disso claramente u é contínua (pela própria definição de convergência em $\mathscr{G}^s(G)$), logo $u \in \mathscr{D}'_s(G)$, e

$$\langle u_N, \phi\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle u, \phi\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$.

□

Corolário 4. *Seja $u \in \mathscr{D}'_s(G)$. Então*

$$u = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \, Tr\,(\widehat{u}(\xi)\xi).$$

Demonstração. Pelo teorema 19 já sabemos que

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{u}(\xi)\xi) \in \mathscr{D}'_s(G).$$

Se $\phi \in \mathscr{G}^s(G)$, temos que

$$\phi = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{\phi}(\xi)\xi),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\langle u, \phi\rangle &= \langle u, \sum_{[\xi]} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{\phi}(\xi)\xi)\rangle \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{\phi}(\xi)_{ij}\langle u, \xi_{ji}\rangle \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \langle u, \overline{\xi_{ij}}^{*}\rangle \int_G \phi(x)\overline{\xi_{ji}(x)}\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{u}(\overline{\xi})_{ij}\langle \overline{\xi_{ji}}, \phi\rangle \\
&= \sum_{[\overline{\xi}]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{u}(\xi)_{ij}\langle \xi_{ji}, \phi\rangle \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{u}(\xi)_{ij}\langle \xi_{ji}, \phi\rangle \\
&= \langle \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{u}(\xi)\xi), \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Então

$$u = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\widehat{u}(\xi)\xi).$$

□

Capítulo 4

Hipoelipticidade global

Com os teoremas 18 e 19, podemos tratar de problemas de hipoelipticidade global como em [GW73], e de hipoelipticidade Gevrey global em G .

Nesse capítulo final estudamos um pouco os operadores invariantes à esquerda, generalização natural dos operadores a coeficientes constantes no toro $\mathbb{T}^N$. Definimos o seu símbolo (matricial), equivalente ao símbolo discreto de operadores em $\mathbb{T}^N$, e o relacionamos com a transformada de Fourier. Feito isso, aplicamos os teoremas 18 e 19 em um problema de hipoelipticidade C^∞ global e um de hipoeliticidade Gevrey global.

Na última seção comparamos o teorema provado neste trabalho e o resultado obtido por Greenfield e Wallach em [GW73].

4.1 Operadores diferenciais em G

Definição 60. Seja $A : C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(G)$ um operador linear contínuo. Definimos $\sigma_A : G \longrightarrow \mathscr{M}(\widehat{G})$ por

$$\sigma_A(x,\xi) = \xi(x)^*(A\xi)(x), \quad x \in G, [\xi] \in \widehat{G}.$$

Dizemos que σ_A é o símbolo matricial, ou somente símbolo de A.

Proposição 17. *Seja $A : C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(G)$ um operador linear contínuo. Então vale*

$$(Af)(x) = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \, Tr\,(\xi(x)\sigma_A(x,\xi)\widehat{f}(\xi)), \quad f \in C^\infty(G), x \in G.$$

Demonstração. Sejam $f \in C^\infty(G)$ e $x \in G$. Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\xi(x)\sigma_A(x,\xi)\widehat{f}(\xi)) &= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,(\xi(x)\xi(x)^*(A\xi)(x)\widehat{f}(\xi)) \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}\,((A\xi)(x)\widehat{f}(\xi)) \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} (A\xi_{ij})(x)\widehat{f}(\xi)_{ji} \\
&= \left(A \left\{ \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \widehat{f}(\xi)_{ji}\xi_{ij} \right\} \right)(x) \\
&= (Af)(x).
\end{aligned}$$

□

Definição 61. Seja $P : C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(G)$ um operador em G. Dizemos que P é invariante à esquerda se

$$P(\pi_L(f)) = \pi_L(Pf),$$

para toda $f \in C^\infty(G)$.

Seja P um operador diferencial parcial em G, com coeficientes C^∞, isto é, P é da forma

$$P(x, X) = \sum_{|I| \leq m} a_I(x) X^I,$$

onde $I = (i_1, \ldots, i_p)$, com $i_j \in \{1, \ldots, n\}$, $|I| = p$, $X^I = X_{i_1} \ldots X_{i_p}$ e $a_I \in C^\infty(G)$. Se P é um ODPL em G é invariante à esquerda, então P comuta com a representação π_L, e como cada X_i é invariante à esquerda, temos que as funções a_I são constantes para todo I. Então neste caso P é da forma

$$P = \sum_{|I| \leq m} a_I X^I,$$

onde $I = (i_1, \ldots, i_p)$, com $i_j \in \{1, \ldots, n\}$, $|I| = p$, $X^I = X_{i_1} \ldots X_{i_p}$ e a_I são constantes.

Proposição 18. *Seja P um operador diferencial parcial linear invariante à esquerda. Então seu símbolo $\sigma_P(x, \xi)$ independe de x.*

Demonstração. Seja P um ODPL invariante à esquerda. Dada $[\xi] \in \widehat{G}$ e $x \in G$ temos

$$\begin{aligned}
(P\xi)(x) &= \pi_L(x^{-1})(P\xi)(e) \\
&= P(\pi_L(x^{-1})\xi)(e) \\
&= P(\xi(x\bullet))(e) \\
&= P(\xi(x)\xi(\bullet))(e) \\
&= \xi(x)(P\xi)(e).
\end{aligned}$$

Portanto o símbolo de P se escreve como

$$\begin{aligned}
\sigma_P(x, \xi) &= \xi(x)^*(P\xi)(x) \\
&= \xi(x)^*\xi(x)(P\xi)(x) \\
&= (P\xi)(e),
\end{aligned}$$

uma vez que $\xi^* = \xi^{-1}$, isto é, $\sigma_P(x, \xi) = \sigma_P(e, \xi)$, para toda $[\xi] \in \widehat{G}$.

□

4.2 Dois problemas de hipoelipticidade global

Nesta seção P será um ODPL invariante à esquerda. Dizemos P é globalmente (Gevrey-s) hipoelíptico se para toda $u \in \mathscr{D}'(G)$ ($\mathscr{D}'_s(G)$) tal que $Pu \in C^\infty(G)$ ($\mathscr{G}^s(G)$) tem-se que $u \in C^\infty(G)$ ($\mathscr{G}^s(G)$). Seja $\sigma_P(\xi)$ o símbolo de P.

Proposição 19. *Dada $u \in \mathscr{D}'(G)$ temos que*

$$\widehat{Pu}(\xi) = \sigma_P(\xi)\widehat{u}(\xi),$$

para todo $[\xi] \in \widehat{G}$.

Demonstração. Sejam $u \in C^\infty(G)$ e $[\eta] \in \widehat{G}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{Pu}(\eta)_{km} &= \int_G Pu(x)\eta^*_{km}(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \int_G \mathrm{Tr}\,(\xi(x)\sigma_P(\xi)\widehat{u}(\xi))\eta^*_{km}(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \sum_{[\xi]\widehat{G}} \sum_{i,j,l=1}^{d_\xi} d_\xi \sigma_P(\xi)_{jl}\widehat{u}(\xi)_{li} \int_G \xi_{ij}(x)\overline{\eta_{mk}(x)}\,\mathrm{d}\mu_G \\
&= \sum_{l=1}^{d_\eta} \sigma_P(\eta)_{kl}\widehat{u}(\eta)_{lm} \\
&= (\sigma_P(\eta)\widehat{u}(\eta))_{km},
\end{aligned}$$

para $1 \leq k, m \leq d_\eta$, isto é, $\widehat{Pu}(\eta) = \sigma_P(\eta)\widehat{u}(\eta)$. Como $C^\infty(G)$ é denso em $\mathscr{D}'(G)$ temos que o resultado também é válido para $u \in \mathscr{D}'(G)$.

□

Definição 62. Dada $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definimos a norma

$$\|H\|_{op} = \inf\{\|HA\|_{HS} \,:\, A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \|A\|_{HS} = 1\}.$$

Teorema 20. *P é globalmente hipoelíptico se, e somente se, existem constantes $C, N, R > 0$ tais que*

$$\|\sigma_P(\xi)^{-1}\|_{op} \leq C\langle\xi\rangle^N, \tag{4.1}$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$ tal que $\langle\xi\rangle > R$.

Observação 63. *A condição* (4.1) *é equivalente à:*

$$\inf\left\{\frac{\|\sigma_P(\xi)A(\xi)\|_{HS}}{\langle\xi\rangle^N} \,:\, A \in \mathscr{M}(\widehat{G}), [\xi] \in \widehat{G} \text{ e } \|A(\xi)\|_{HS} = 1,\ \forall[\xi] \in \widehat{G}\right\} < \infty.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$)

Seja $u \in \mathscr{D}'(G)$ tal que $Pu = f \in C^\infty(G)$. Então dada $[\xi] \in \widehat{G}$, com $\langle\xi\rangle > R$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \widehat{Pu}(\xi) \\
&= \sigma_P(\xi)\widehat{u}(\xi),
\end{aligned}$$

e portanto vale

$$\widehat{u}(\xi) = \sigma_P(\xi)^{-1}\widehat{f}(\xi).$$

Então dada $[\xi] \in \widehat{G}$, com $\langle\xi\rangle > R$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} &\leq \|\sigma_P(\xi)^{-1}\|_{op}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS} \\
&\leq C\langle\xi\rangle^N\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS},
\end{aligned}$$

e como $f \in C^\infty(G)$, pelo teorema 14 temos que $u \in C^\infty(G)$.

($\Rightarrow$)

Suponha que (4.1) não vale. Pela observação acima existe uma sequência $\{[\xi_j]\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \widehat{G}$, com $\langle\xi_j\rangle \geq j$, e para cada j existe $A_j \in \mathbb{C}^{d_{\xi_j}\times d_{\xi_j}}$, com $\|A_j\|_{HS} = 1$ tal que

$$\|\sigma_P(\xi_j)A_j\|_{HS} < \langle\xi_j\rangle^{-j}.$$

Defina $u = \sum_{j=1}^{\infty} d_{\xi_j} \operatorname{Tr}(A_j\xi_j)$. Como

$$\widehat{u}(\eta) = \begin{cases} A_j & \text{se } \eta = \xi_j \text{ para algum } j \\ 0 & \text{se } \eta \neq \xi_j \text{ para todo } j, \end{cases}$$

temos que $\|\widehat{u}(\eta)\|_{HS} \leq 1$, e então $u \in D'(G) \setminus C^\infty(G)$. Mas temos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{Pu}(\xi_j)\|_{HS} &= \|\sigma_P(\xi_j)\widehat{u}(\xi_j)\|_{HS} \\ &= \|\sigma_P(\xi_j)A_j\|_{HS} \\ &\leq \langle\xi_j\rangle^{-j}, \end{aligned}$$

e se $\eta \neq \xi_j$, para todo j

$$\|\widehat{Pu}(\eta)\|_{HS} = \|\sigma_P(\eta)\widehat{u}(\eta)\|_{HS} \tag{4.2}$$
$$= 0. \tag{4.3}$$

Então dado $N > 0$ escolha $0 < C_N < 1$ tal que

$$\|\widehat{Pu}(\xi_j)\|_{HS} \leq C_N\langle\xi_j\rangle^{-N}, \quad j \leq N.$$

Portanto

$$\|\widehat{Pu}(\xi)\|_{HS} \leq C_N\langle\xi\rangle^{-N},$$

para todo $[\xi] \in \widehat{G}$, e então $Pu \in C^\infty(G)$. Isto é, P não é globalmente hipoelíptico.

□

Teorema 21. *P é $\mathscr{G}^s(G)$-globalmente hipoelíptico se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem $C_\varepsilon > 0$ e $R > 0$ tais que*

$$\|\sigma_P(\xi)^{-1}\|_{op} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \tag{4.4}$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$, com $\langle\xi\rangle > R$.

Observação 64. *A condição (4.4) é equivalente à: Para todo $\varepsilon > 0$*

$$\inf\left\{\frac{\|\sigma_P(\xi)A(\xi)\|_{HS}}{e^{\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}} \,:\, A \in \mathscr{M}(\widehat{G}), [\xi] \in \widehat{G} \text{ e } \|A(\xi)\|_{HS} = 1, \forall[\xi] \in \widehat{G}\right\} < \infty.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$)

Seja $u \in \mathscr{D}'(G)$ tal que $Pu = f \in C^\infty(G)$. Então dada $[\xi] \in \widehat{G}$ temos

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \widehat{Pu}(\xi) \\ &= \sigma_P(\xi)\widehat{u}(\xi). \end{aligned}$$

Portanto vale

$$\widehat{u}(\xi) = \sigma_P(\xi)^{-1}\widehat{f}(\xi),$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$. Então se $\langle\xi\rangle > R$ temos que

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}(\xi)\|_{HS} &\leq \|\sigma_P(\xi)^{-1}\|_{op}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}\\ &\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}\|\widehat{f}(\xi)\|_{HS}.\end{aligned}$$

Como $f \in \mathscr{G}^s(G)$, pelo teorema 18 temos que $u \in \mathscr{G}^s(G)$.

($\Rightarrow$)

Suponha que (4.4) não vale. Pela observação acima existe $\varepsilon_0 > 0$ e existe $\{[\xi_j]\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \widehat{G}$, com $\langle\xi_j\rangle \geq j$, e para cada j existe $A_j \in \mathbb{C}^{d_{\xi_j}\times d_{\xi_j}}$, com $\|A_j\|_{HS} = 1$ tal que

$$\|\sigma_P(\xi_j)A_j\|_{HS} < je^{-\varepsilon_0\langle\xi_j\rangle^{\frac{1}{s}}}.$$

Defina $u = \sum_{j=1}^{\infty} d_\xi \mathrm{Tr}\,(A_j\xi_j)$. Como

$$\widehat{u}(\eta) = \begin{cases} A_j & \text{se } \eta = \xi_j \text{ para algum } j\\ 0 & \text{se } \eta \neq \xi_j \text{ para todo } j,\end{cases}$$

temos que $\|\widehat{u}(\eta)\|_{HS} \leq 1$, então $u \in \mathscr{D}'(G)$, e pontanto $u \in \mathscr{D}'_s(G) \setminus \mathscr{G}^s(G)$. Mas temos que

$$\begin{aligned}\|\widehat{Pu}(\xi_j)\|_{HS} &= \|\sigma_P(\xi_j)\widehat{u}(\xi_j)\|_{HS}\\ &= \|\sigma_P(\xi_j)A_j\|_{HS}\\ &\leq je^{-\varepsilon_0\langle\xi_j\rangle^{\frac{1}{s}}},\end{aligned}$$

e se $\eta \neq \xi_j$ para todo j

$$\|\widehat{Pu}(\eta)\|_{HS} = \|\sigma_P(\eta)\widehat{u}(\eta)\|_{HS} \tag{4.5}$$

$$= 0. \tag{4.6}$$

Seja $C > 0$ tal que

$$je^{-\varepsilon_0\langle\xi_j\rangle^{\frac{1}{s}}} \leq Ce^{-\frac{\varepsilon_0}{2}\langle\xi_j\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para todo j. Então temos que

$$\|\widehat{Pu}(\xi)\|_{HS} \leq Ce^{-\frac{\varepsilon_0}{2}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}},$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$, e portanto $Pu \in \mathscr{G}^s(G)$. Isto é, P não é $\mathscr{G}^s$-globalmente hipoelíptico.

□

4.3 Hipoelipticidade global por Greenfield-Wallach

Nessa última seção expomos um pouco do trabalho feito por Greenfield e Wallach em [GW73]. Também iremos adotar a notação utilizada por eles. Para não termos problemas de notação na hora de compararmos as duas abordagens, denotaremos, nessa seção, a transformada de Fourier, desenvolvida nos capítulos anteriores, por $\mathscr{F}$.

Sejam M uma variedade compacta, sem bordo, de dimensão n, $\mathrm{d}v$ um elemento de volume, e E um operador diferencial parcial linear normal, isto é, $EE^* = E^*E$, elíptico de ordem m em M. Listemos alguns fatos provenientes do teorema espectral:

- O conjunto dos autovalores de E é enumerável. Sejam $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{C}$ os seus autovalores, de tal forma que $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e $\lambda_0 = 0$;

- Para cada $j = 1, 2, \ldots$, denotemos por $F_j \subset C^\infty$ o autoespaço associado à λ_j, e $F_0 = \ker E$. Para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ temos que $d_j \doteq \dim F_j < \infty$. Além disso vale que

$$L^2(M) = \bigoplus_{j\geq 0} F_j;$$

- $\sum_{j>0} d_j |\lambda_j|^{-2n} \leq \infty$.

Observação 65. *Note que a priori os autoespaços F_j são subespaços de $L^2(M)$. Mas como E é elíptico, temos que $F_j \subset C^\infty(M)$.*

Para cada $j \in \mathbb{Z}_+$ temos a projeção $P_j : L^2(M) \longrightarrow F_j$.

Definição 66. Seja $T \in \mathscr{D}'(M)$. Se $j \in \mathbb{Z}_+$ definimos $\widehat{T}(j) \in F_j^*$ por

$$\widehat{T}(j)f = T(f), \quad f \in F_j.$$

Teorema 22. *Dada $T \in \mathscr{D}'(M)$ temos que cada $\widehat{T}(j) \circ P_j \in \mathscr{D}'(M)$ e*

$$T = \sum_{j\geq 0} \widehat{T}(j) \circ P_j, \quad \text{em } \mathscr{D}'(M).$$

Definição 67. Seja P um operador diferencial parcial linear em M. Dizemos que P é E-invariante se $EP = PE$.

Uma consequência imediata da definição é que se P é E-invariante então $P(F_j) \subset F_j$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Definimos então $\widehat{P}(j) = P|_{F_j}$.

Teorema 23. *Seja $S : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \bigcup_{j\geq 0} F_j^*$ tal que $S(j) \in F_j^*$. São equivalentes:*

1. *Existe $T \in \mathscr{D}'(M)$ tal que $\widehat{T} = S$;*

2. *Existe $k > 0$ tal que*

$$\|S(j)\|_{L^2} \leq k(1 + |\lambda_j|)^k,$$

   para todo j.

Teorema 24. *Seja $T \in \mathscr{D}'(M)$. São equivalente:*

1. *$T \in C^\infty(M)$;*

2. *$\sum_{j>0} \|\widehat{T}(j)\|_{L^2}^2 |\lambda_j|^2 < \infty$, para todo $k > 0$;*

3. *$\sup_{j>0} \frac{\|\widehat{T}(j)\|_{L^2}^2}{|\lambda_j|^k} < \infty$, para todo $k > 0$.*

Observação 68. *Nos teoremas 23 e 24, as normas* $\|S(j)\|_{L^2}$ *e* $\|\widehat{T}(j)\|_{L^2}$ *são definidas via o Teorema de Riesz.*

Observação 69. *Seja* P *um operador diferencial parcial linear em* M*,* E*-invariante. Sejam* $f, u \in \mathscr{D}'(M)$ *tais que* $Pu = f$*. Se* $j \in \mathbb{Z}_+$ *e* $\phi \in F_j$ *temos que*

$$\begin{aligned}(\widehat{P}(j)\widehat{f}(j))\phi &= \left(P|_{F_j}\widehat{f}(j)\right)\phi \\ &= \widehat{f}(j)({}^tP\phi) \\ &= f({}^tP\phi) \\ &= (Pf)(\phi) \\ &= \widehat{Pf}(j)\phi,\end{aligned}$$

isto é, $\widehat{Pf}(j) = \widehat{P}(j)\widehat{f}(j)$*, para todo* $j \geq 0$*.*

Teorema 25. *Seja* P *um operador diferencial parcial linear de ordem* m *em* M*,* E*-invariante. Então* P *é globalmente hipoelíptico se, e somente se, existem constantes* $L, N > 0$ *tais que*

$$m(\widehat{P}(j)) \doteq \inf\{\|Pf\|_{L^2} \,:\, f \in F_j,\, \|f\|_{L^2} = 1\} \geq L|\lambda_j|^{\frac{N}{m}}, \tag{4.7}$$

para j *suficientemente grande.*

Demonstração. Suponha (4.7) válida, e seja $f \in \mathscr{D}'(M)$ tal que $Pf = g \in C^\infty(M)$. Dado $j \geq 0$ temos que

$$\widehat{P}(j)\widehat{f}(j) = \widehat{g}(j).$$

Como estamos supondo (4.7) temos que $\widehat{P}(j)$ é inversível para j suficientemente grande, e

$$\|\widehat{P}(j)^{-1}\|_{op} \leq \frac{1}{L}|\lambda_j|^{\frac{-N}{m}}.$$

Portanto se j é suficientemente grande temos que

$$\widehat{f}(j) = \widehat{P}(j)^{-1}\widehat{g}(j),$$

e dado $k > 0$ vale

$$\begin{aligned}\frac{\|\widehat{f}(j)\|_{L^2}}{|\lambda_j|^k} &\leq \frac{\|\widehat{P}(j)^{-1}\|_{op}\|\widehat{g}(j)\|_{L^2}}{|\lambda_j|^k} \\ &\leq \frac{1}{L}\frac{\|\widehat{g}(j)\|_{L^2}}{|\lambda_j|^{k+\frac{N}{m}}}.\end{aligned}$$

Como $g \in C^\infty$, pelo teorema 24 temos que $f \in C^\infty$, isto é, P é globalmente hipoeliptico.

Suponha agora que (4.7) é falso, isto é, existe uma sequência $\{f_\alpha\} \in C^\infty(M)$ com $f_\alpha \in F_{j_\alpha}$, $\|f_\alpha\|_{L^2} = 1$ e

$$\|Pf_\alpha\|_{L^2} \leq \frac{1}{|\lambda_{j_\alpha}|^{j_\alpha}}.$$

Defina

$$f = \sum_\alpha f_\alpha.$$

Pelos teorema 23 e 24 temos que $f \in \mathscr{D}'(M) \setminus C^\infty(M)$. Mas

$$Pf = \sum_\alpha Pf_\alpha,$$

e portanto $\widehat{Pf}(j_\alpha) = Pf_\alpha$, e então

$$\begin{aligned} \|\widehat{Pf}(j_\alpha)\|_{L^2} &= \|Pf_\alpha\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_{j_\alpha}|^{j_\alpha}}, \end{aligned}$$

isto é, para todo $k > 0$ temos

$$\sup_{j>0} \frac{\|\widehat{Pf}(j)\|_{L^2}}{|\lambda_j|^k} < \infty.$$

Pelo teorema 24 $Pf \in C^\infty$, isto é, P não é globalmente hipoelíptico. Isto encerra a demonstração. □

Vejamos agora a conexão entre esse teorema e o teorema 20. Seja novamente G um grupo de Lie compacto, e tomemos como operador elíptico normal E o operador de Laplace-Beltrami $\Delta_\bullet$ definido em 8. Para cada $[\xi] \in \widehat{G}$ definimos o espaço H^ξ por $span\{\xi_{ij} : 0 \leq i, j \leq d_\xi\}$. Como o operador $\Delta_\bullet$ comuta com qualquer operador diferencial parcial linear invariante à esquerda, então todos os operadores diferenciais parciais lineares invariantes à esquerda são $\Delta_\bullet$-invariantes. Se P é um operador diferencial parcial linear invariante à esquerda, então $\pi_L P = P\pi_L$, e como visto no teorema 4 temos que $PH^\xi_{i,\cdot} \subset H^\xi_{i,\cdot}$, para todo $1 \leq i \leq d_\xi$, isto é, $PH^\xi \subset H^\xi$. Então nesse caso podemos substituir os espaços F_j pelos espaços H^ξ.

Observação 70. *Note que podemos enumerar os autovalores de $\Delta_\bullet$, $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, com $\lambda_j \neq \lambda_k$ se $i \neq k$. Então para cada $j \geq 0$ o espaço F_j é dado por*

$$F_j = \bigoplus_{\{\xi\,:\,\lambda_\xi = \lambda_j\}} H^\xi.$$

Do teorema 2 (Peter-Weyl) temos que

$$L^2(G) = \bigoplus_{[\xi]\in\widehat{G}} H^\xi.$$

As projeções $P_\xi : L^2(G) \longrightarrow H^\xi$ são dadas por

$$P_\xi f = \sum_{i,j=1}^{d_\xi} d_\xi \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2} \xi_{ij}$$

Seja $u \in \mathscr{D}'(G)$ fixada. Portanto $\widehat{u}(\xi) \in \left(H^\xi\right)^*$ é dada por

$$\widehat{u}(\xi)\phi = u(\phi), \quad \phi \in H^\xi.$$

Observação 71. *Nessa parte estamos usando a notação do artigo [GW73], introduzida nessa seção, e denotaremos por $\mathscr{F}$ a transformada de Fourier introduzida nos capítulos anteriores.*

Seja $[\xi] \in \widehat{G}$ fixada. Se $\phi \in H^\xi$ temos

$$\phi = \sum_{i,j=1}^{d_\xi} d_\xi \langle \phi, \xi_{ij}\rangle_{L^2} \xi_{ij},$$

e portanto

$$\widehat{u}(\xi)\phi = \sum_{i,j=1}^{d_\xi} d_\xi \langle \phi, \xi_{ij} \rangle_{L^2} u(\xi_{ij}).$$

Seja $U(\xi) \in H^\xi$ tal que

$$\widehat{u}(\xi)\phi = \langle \phi, U(\xi) \rangle_{L^2},$$

para toda $\phi \in H^\xi$. Então $U(\xi)$ é dada por

$$U(\xi) = \sum_{i,j=1}^{d_\xi} d_\xi \overline{u(\xi_{ij})} \xi_{ij}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(\xi)\|_{L^2}^2 &= \|U(\xi)\|_{L^2}^2 \\ &= d_\xi \sum_{i,j=1}^{d_\xi} |u(\xi_{ij})|^2 \\ &= d_\xi \|u(\overline{\xi}^*)\|_{HS}^2. \end{aligned}$$

Note que como $d_\xi \leq C\langle \xi \rangle^{\frac{n}{2}}$ temos que

$$\|u(\overline{\xi}^*)\|_{L^2}^2 \leq \|\widehat{u}(\xi)\|_{L^2}^2 \leq C\langle \xi \rangle^{\frac{n}{2}} \|u(\overline{\xi}^*)\|_{L^2}^2, \tag{4.8}$$

para toda $[\xi] \in \widehat{G}$. Seja agora um operador diferencial linear invariante à esquerda P. Como enfatizamos anteriormente, temos que $P(H^\xi) \subset H^\xi$, e portanto podemos definir $\widehat{P}(\xi) = P|_{H^\xi}$. Seja $[\xi] \in \widehat{G}$ fixada. Se $f \in H^\xi$ temos temos que

$$f = \sum_{i,j=1}^{d_\xi} d_\xi \langle f, \xi_{ij} \rangle_{L^2} \xi_{ij}.$$

Portanto vale

$$Pf = \sum_{i,j=1}^{d_\xi} d_\xi \langle f, \xi_{ij} \rangle_{L^2} P\xi_{ij},$$

para toda $f \in H^\xi$. Mas

$$P\xi_{ij} = \sum_{r=1}^{d_\xi} d_\xi \langle P\xi_{ij}, \xi_{ir} \rangle_{L^2} \xi_{ir},$$

logo

$$
\begin{aligned}
Pf &= \sum_{i,j,r=1}^{d_\xi} d_\xi^2 \langle f, \xi_{ij}\rangle_{L^2} \langle P\xi_{ij}, \xi_{ir}\rangle_{L^2} \xi_{ir} \\
&= \sum_{i,j,r=1}^{d_\xi} d_\xi^2 \mathscr{F}(f)(\xi_{ji}) \int_G P(\xi_{ij})(x)\overline{\xi_{ir}(x)}\, \mathrm{d}\mu_G(x)\xi_{ir} \\
&= \int_G \sum_{i,j,r=1}^{d_\xi} d_\xi^2 \xi_{ir}\xi_{ri}^*(x)(P\xi_{ij})\mathscr{F}(f(\xi_{ji}))\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= \int_G d_\xi^2 \mathrm{Tr}\,(\xi\xi^*(x)(P\xi)(x)\mathscr{F}(f)(\xi))\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= d_\xi^2 \int_G \mathrm{Tr}\,(\xi\sigma_P(x,\xi)\mathscr{F}(f)(\xi))\, \mathrm{d}\mu_G(x) \\
&= d_\xi^2 \mathrm{Tr}\,(\xi\sigma_P(\xi)\mathscr{F}(f)(\xi)) \\
&= d_\xi \mathrm{Tr}\,(\xi d_\xi \sigma_P(\xi)\mathscr{F}(f)(\xi)).
\end{aligned}
$$

Como no corolário 2, temos que

$$
\|Pf\|_{L^2}^2 = d_\xi^3 \|\sigma_P(\xi)\mathscr{F}(f)(\xi)\|_{HS}^2,
$$

e portanto vale

$$
\|\sigma_P(\xi)\mathscr{F}(f)(\xi)\|_{HS}^2 \leq \|Pf\|_{L^2}^2 \leq C\langle\xi\rangle^{\frac{3n}{2}} \|\sigma_P(\xi)\mathscr{F}(f)(\xi)\|_{L^2}^2, \tag{4.9}
$$

para toda $f \in H^\xi$. Juntanto (4.8) e (4.9), temos que quando M é um grupo de Lie compacto, e E é o operador de Laplace-Beltrami $\Delta_\bullet$ o teorema 25 é equivalente ao teorema 20. Com um argumento análogo poderemos mostrar a equivalência entre o caso analítico.

Apêndice A

Lemas 16 17

Relembrando o lema 16 diz que se $r > 0$ vale a seguinte identidade

$$\inf_{t>0} t^{st} r^{-t} = e^{-\left(\frac{s}{e}\right) r^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall s > 0,$$

e o lema 17 diz que para $r \geq (4e)^s$ existem constantes $B > 0$, $A > 0$ tais que

$$\inf_{k \in 2\mathbb{Z}_+} k^{sk} r^{-k} \leq B e^{-A r^{\frac{1}{s}}}. \tag{A.1}$$

16. Seja $f(t) = t^{st} r^{-t}$, definida para $t > 0$. Temos que

$$\begin{aligned} f'(t) &= (e^{st \log t} e^{-t \log r})' \\ &= (s \log t + s - \log r) t^{st} r^{-t} \\ &= t^{st} r^{-t} (s(\log t + 1) - \log r). \end{aligned}$$

A única raíz de f' na região $t > 0$ é $t_0 = r^{\frac{1}{s}} e^{-1}$. Além disso, se $0 < t < t_0$ temos $f'(t) < 0$, e se $t > t_0$ temos $f'(t) > 0$. Portanto $\inf_{t>0} f(t) = f(t_0) = e^{-\left(\frac{s}{e}\right) e^{\frac{1}{s}}}$. □

17. Seja $\widetilde{[t_0]}$ o maior inteiro par menor que t_0, e tome $k_0 = \widetilde{[t_0]}$ ou $k_0 = \widetilde{[t_0]} + 2$. Então temos que

$$\inf_{k \in 2\mathbb{Z}_+} k^{sk} r^{-k} = k_0^{sk_0} r^{-k_0}.$$

Como $r \geq (4e)^s$, temos que $r^{\frac{1}{s}} \geq 4e \;\Rightarrow\; 2 \leq \frac{1}{2e} r^{\frac{1}{s}}$. Além disso, temos que $t_0 - 2 \leq k_0 \leq t_0 + 2$, e portanto $\frac{1}{2e} r^{\frac{1}{s}} \leq k_0 \leq \frac{3}{2e} r^{\frac{1}{s}}$. Então

$$\begin{aligned} \log(r^{-1} k_0^s) &\leq \log\left(r^{-1} \left(\frac{3}{2e}\right)^s r\right) \\ &= s \log\left(\frac{3}{2e}\right) \\ &= -a < 0. \end{aligned}$$

Como $k_0^{sk_0} r^{-k_0} = (r^{-1} k_0^s)^{k_0} = e^{k_0 \log\left(r^{-1} k_0^s\right)}$, temos

$$\begin{aligned} k_0^{sk_0} r^{-k_0} &\leq e^{-ak_0} \\ &\leq e^{-a(t_0-2)} \\ &= e^{2a} e^{-at_0} \\ &= e^{2a} e^{\frac{-a}{e} r^{\frac{1}{s}}} \\ &= B e^{-A r^{\frac{1}{s}}}, \end{aligned}$$

com $B = e^{2a}$ e $A = \frac{a}{e}$.

□

Observação 72. *Se na demonstração a cima usarmos as desigualdade contrárias teremos*

$$k_0^{sk_0} r^{-k_0} \geq B' e^{-A' r^{\frac{1}{s}}},$$

com $B' = e^{-2b}$, $A' = \frac{b}{e}$ *e* $b = -\log(\frac{1}{2e})$. *Também é importante notar que* A, B, A' *e* B' *independem de* r.

Referências Bibliográficas

[BCM79] P. Bolley, J. Camus e C. Mattera. Analyticité microlocale et itères d'opérateurs. *Seminairie Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique France*, 1978-79. 1, 27, 28

[CH94] Paulo D. Cordaro e A. Alexandrou Himonas. Global analytic hypoellipticity of a class of degenerate elliptic operators on the torus. *Math. Res. Lett.*, 1(4):501–510, 1994. 1

[CH98] Paulo D. Cordaro e A. Alexandrou Himonas. Global analytic regularity for sums of squares of vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(12):4993–5001, 1998. 1

[Cha84] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk. 3, 23

[DK00] J. J. Duistermaat e J. A. C. Kolk. *Lie groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000. 3, 16

[DR14] Aparajita Dasgupta e Michael Ruzhansky. Gevrey functions and ultradistributions on compact Lie groups and homogeneous spaces. *Bull. Sci. Math.*, 138(6):756–782, 2014. iii, v, 1, 47, 50, 55

[Fol95] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. 3

[GW72] Stephen J. Greenfield e Nolan R. Wallach. Global hypoellipticity and Liouville numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31:112–114, 1972. 1

[GW73] Stephen J. Greenfield e Nolan R. Wallach. Remarks on global hypoellipticity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 183:153–164, 1973. iii, v, 1, 59, 63, 66

[Hör03] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin; MR1065993 (91m:35001a)]. 27

[HP04] A. Alexandrou Himonas e Gerson Petronilho. On Gevrey regularity of globally C^∞ hypoelliptic operators. *J. Differential Equations*, 207(2):267–284, 2004. 1

[KN62] T. Kotake e M. Narasimhan. Fractional powers of a linear elliptic operator. *Bull. Soc. Math. France*, 90:449–471, 1962. 1, 27

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edição, 2013. 3, 11

[Pet05] Gerson Petronilho. *Ultradistribuições Gevrey periódicas em RN*. Notas de um mini-curso ministrado na Primeira Escola Brasileira de Equações Diferenciais, realizado na Unicamp em maio, 2005. 1, 27

[Rod93] Luigi Rodino. *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*. World Scientific, 1993. 27

[RT10] Michael Ruzhansky e Ville Turunen. *Pseudo-differential operators and symmetries*, volume 2 of *Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. Background analysis and advanced topics. 3, 10, 27

[See69] R. T. Seeley. Eigenfunction expansions of analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21:734–738, 1969. 3, 23

[Trè06] François Trèves. *Basic linear partial differential equations.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. Reprint of the 1975 original. 27, 30