

**Um estudo sobre as Coordenadas de Fatou durante a bifurcação de pontos fixos parabólicos**

Artur Almeida Moura de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Mestrado em Matemática Aplicada  
Orientador: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Luciana Luna Anna Lomonaco

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e do Instituto Serrapilheira.

São Paulo, dezembro de 2023

# Um estudo sobre as Coordenadas de Fatou durante a bifurcação de pontos fixos parabólicos

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo candidato Artur Almeida Moura de Oliveira, tal como submetida à Comissão Julgadora.

# Um estudo sobre as Coordenadas de Fatou durante a bifurcação de pontos fixos parabólicos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 19/12/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luciana Luna Anna Lomonaco - IME-USP
- Prof. Dr. Edson de Faria - IME-USP
- Prof. Dr. Peter Edward Hazard - UFF

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. Agradeço também a força que minha família e amigos me deram ao longo deste mestrado, principalmente durante os dois anos de Pandemia de Covid-19.



# Resumo

Oliveira, Artur Almeida Moura de **Um estudo sobre as Coordenadas de Fatou durante a bifurcação parabólica**. 2023. 120 f. Dissertação de mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

A presente dissertação possui o objetivo de trazer detalhes sobre a implosão parabólica utilizando as Coordenadas de Fatou, estudando os conceitos e principais teoremas da bifurcação parabólica dentro da área da dinâmica complexa em  $\mathbb{C}$ . Para um estudo completo, introduzimos conceitos básicos do tema, além de importantes resultados dos mapas quase-conformes, tais como a cirurgia quase-conforme, que foi de grande interesse para compreender a bifurcação parabólica, objetivo principal do trabalho. A área de dinâmica complexa foi primeiramente estudada por Gaston Julia, Pierre Fatou, Lucjan Böttcher, Gabriel Koenigs, Ernst Schröder, entre outros e, ultimamente Shishikura, Douady, Hubbard e Sullivan fizeram importantes contribuições para o avanço da Dinâmica Complexa Moderna. O trabalho usa como referência a obra de Shishikura, intitulada Bifurcação de pontos Fixos Parabólicos. Cada capítulo do trabalho está organizado por temas. O primeiro capítulo traz detalhes sobre os conceitos básicos da dinâmica complexa que são importantes para o entendimento da bifurcação de pontos fixos parabólicos. O segundo traz detalhes sobre os mapas quaseconformes. O terceiro sobre a dinâmica parabólica. O quarto traz o objetivo principal do trabalho, a bifurcação parabólica. Por fim, nos últimos capítulos, os apêndices.

**Palavras-chave:** dinâmica complexa; bifurcação parabólica; implosão parabólica; coordenadas de Fatou.



# Abstract

Oliveira, Artur Almeida Moura de. **A study about the Fatou Coordinates during the parabolic fixed points bifurcation**. 2023. 120 f. Dissertartion - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

The present dissertation has the objective of bringing details about the parabolic implosion using the Fatou coordinates, studying the concepts and main theorems of the parabolic bifurcation within the area of complex dynamics in the complex plane. For a complete study, we introduce basic concepts of the area, in addition to important results of the quasiconformal mappings, such as the quasiconformal surgery, which was of great interest to understand the parabolic bifurcation, the main objective of the work. The area of complex dynamics was first studied by Gaston Julia, Pierre Fatou, Lucjan Böttcher, Gabriel Koenigs, Ernst Schröder, among others, and lately Shishikura, Douady, Hubbard and Sullivan made important contributions to the advancement of Modern Complex Dynamics. The work uses as a reference the paper by Shishikura, entitled Bifurcation of Parabolic Fixed Points. Each chapter of this paper is organized by themes. The first chapter details the basic concepts of Complex Dynamics which are important to understanding the bifurcation of parabolic fixed points. The second brings details about the quasiconformal mappings. The third on Parabolic Dynamics. The fourth brings the main objective of the work: the parabolic bifurcation. And, in the last chapters, the appendices.

**Keywords:** parabolic implosion; parabolic bifurcation, complex dynamics; Fatou coordinates.





# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Dinâmica Holomorfa</b>	<b>1</b>
1.1 Mapas holomorfos . . . . .	1
1.2 A compactificação do plano complexo . . . . .	1
1.3 Propriedades dos mapas holomorfos na esfera de Riemann . . . . .	2
1.4 Pontos fixos e pontos periódicos de mapas holomorfos . . . . .	3
1.5 Classificação de pontos fixos . . . . .	3
1.6 Conjugações . . . . .	4
1.7 Teoria Local . . . . .	4
1.8 Normalidade de funções holomorfas . . . . .	6
1.9 Conjunto de Julia e conjunto de Fatou . . . . .	7
1.10 Mapas polinomiais . . . . .	8
<b>2 Mapas quaseconformes</b>	<b>11</b>
2.1 Coeficiente de Beltrami e dilatação de mapas quaseconformes . . . . .	11
2.2 Derivada distribucional . . . . .	14
2.3 Definição analítica de mapas quaseconformes . . . . .	14
2.4 Definições geométricas de mapas quaseconformes . . . . .	15
2.5 Propriedades dos mapas K-quaseconformes . . . . .	17
2.6 Teorema mensurável da aplicação de Riemann e Lema-chave . . . . .	17
<b>3 Dinâmica parabólica</b>	<b>19</b>
3.1 Introdução . . . . .	19
3.1.1 Coordenadas de Fatou . . . . .	20
3.1.2 Mapa de transição ( <i>Horn Map</i> ) . . . . .	29
<b>4 Bifurcação Parabólica</b>	<b>33</b>
4.1 Configuração básica das funções perturbadas . . . . .	34
4.1.1 Coordenada de desdobramento . . . . .	36
4.1.2 Coordenadas de Fatou . . . . .	39
<b>5 Apêndice A</b>	<b>45</b>
<b>6 Apêndice B</b>	<b>51</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>



# Lista de Figuras

1.1	À esquerda, um caso de órbita repulsora para $f(z) = z^2$ com $z_0 = 0,7 + 0,8i$ e, à direita, um caso de órbita atratora para $f(z) = z^2$ com $z_0 = 0,4 + 0,5i$ . . . . .	4
1.2	Componentes de Fatou para cada um dos casos, considerando $f_c$ uma função quadrática . . . . .	8
1.3	Conjunto de Mandelbrot . . . . .	10
2.1	Imagem de $F$ em um quadrado de lados dados pelos vetores $1$ e $i$ . . . . .	12
2.2	A pré imagem de um círculo unitário é uma elipse . . . . .	12
2.3	As elipses infinitesimais no plano tangente $T_w W$ são mapeadas em círculos infinitesimais no plano tangente $T_{f(w)} V$ através da diferencial $Df$ de $f$ , se $Df$ existir. . . . .	13
2.4	Diagrama comutativo entre $f$ , $F$ e $G$ . . . . .	14
2.5	Um retângulo sendo mapeado a um anel padrão com o mesmo módulo através da função exponencial . . . . .	16
2.6	Exemplo do lema-chave para $S = \mathbb{C}$ . . . . .	18
3.1	Representação geométrica do domínio de $f^*$ . . . . .	20
3.2	Representação geométrica do domínio de $f_0$ e de $S_+$ à esquerda e do domínio de $f_0^*$ e de $S^+$ à direita . . . . .	21
3.3	Um exemplo de uma possível região $Q(b_1, b_2)$ contendo uma região fundamental $S$ . . . . .	22
3.4	Exemplo da ação do pullback adaptando a estrutura quase complexa no domínio de $G$ , levando elipses infinitesimais em círculos infinitesimais. . . . .	24
3.5	Construção do mapa $H$ na região $Q$ . . . . .	24
3.6	Representação do domínio de $\tilde{E}_{f_0}$ colorido em amarelo . . . . .	29
3.7	Representação da ação dos mapas $\tilde{E}_{f_0}$ e $E_{f_0}$ sobre as extremidades de $C_-$ . . . . .	30
3.8	Representação da ação da transformação de Ecalle nos planos . . . . .	31
3.9	Representação da ação da transformação de Ecalle no cilindro $C_+$ . . . . .	31
4.1	Localização dos multiplicadores $\lambda$ e $\lambda'$ em cada caso . . . . .	33
4.2	À esquerda a dinâmica do caso não perturbado e à direita a dinâmica do $2^o$ caso após a perturbação . . . . .	34
4.3	Domínio de $\alpha(f)$ . . . . .	35
4.4	A coordenada de desdobramento $\tau_f$ e a ação da translação $T_f$ . . . . .	36
4.5	Exemplo de dois domínios $\Omega_f^+$ e $\Omega_f^-$ com suas respectivas regiões fundamentais, usando $\frac{1}{\alpha(f)} = 4 - 2i$ e $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ . . . . .	41



# 1 Dinâmica Holomorfa

No primeiro capítulo deste trabalho, abordaremos algumas propriedades importantes sobre dinâmica holomorfa, utilizando as definições e teoremas disponíveis nas obras de John W. Milnor, de Theodore Carleson e Theodore W. Gamelin, referenciados, respectivamente, em [Mil06] e [CG13].

## 1.1 Mapas holomorfos

Uma função complexa  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é dita  $\mathbb{C}$ -diferenciável ou holomorfa em  $z_0$  se existir o seguinte limite:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta},$$

com  $\eta \in \mathbb{C}$ . Vamos denotar este limite, se existir, por  $f'(z_0)$ , isto é, a *derivada de  $f$  em  $z_0$* .

Uma função  $f$ , como no parágrafo acima, é dita holomorfa se for  $\mathbb{C}$ -diferenciável em todos os pontos  $z \in U$ . Pode ser demonstrado que se  $f$  for holomorfa então  $f$  é equivalentemente complexa analítica, isto é, se  $f$  é holomorfa em  $U$  então, para todo  $z \in U$  e  $r > 0$ , tal que  $B(z_0, r) \subset U$ , temos que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Se  $f$  possuir uma função inversa  $f^{-1}$  que também seja holomorfa, dizemos que  $f$  é biholomorfa.

Se considerarmos  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , sendo  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções  $C^1$  e  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z = x + iy$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}$ , então a derivada de  $f$  em  $z$  pode ser representada por  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$  ao tomar  $\eta \rightarrow 0$  real no limite da definição da  $\mathbb{C}$ -diferenciabilidade ou por  $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$  com  $\eta \rightarrow 0$  imaginário. Igualando-se a parte real e a parte imaginária das duas possíveis representações, notamos que uma função holomorfa satisfaz as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Além destas propriedades, os mapas holomorfos são mapas abertos, ou seja, se  $U \subset \mathbb{C}$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função holomorfa não constante, então  $f$  manda subconjuntos abertos de  $U$  em subconjuntos abertos de  $\mathbb{C}$ .

## 1.2 A compactificação do plano complexo

Vamos falar agora da Esfera de Riemann, entendida como uma compactificação do plano complexo, uma maneira de se estender o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos com um ponto no infinito. Desta forma,  $\infty$  passa a ser um ponto como todos os outros em  $\mathbb{C}$ . Assim, definimos a esfera de Riemann como  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . O nome desse conjunto é dado em referência ao matemático do século XIX Bernhard Riemann.

É conveniente trabalhar com a dinâmica de  $f$  na esfera de Riemann, uma vez que, ao longo deste trabalho, vamos analisar a dinâmica de algumas órbitas em uma vizinhança ao redor de  $\infty$ .

A topologia de  $\widehat{\mathbb{C}}$  é induzida pela *métrica cordal*  $\chi$ , a qual é definida por

$$\chi : \begin{cases} \chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \\ \chi(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} \end{cases}.$$

Cabe ressaltar que  $\chi(z_1, z_2) = \chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)$ . Além disso, em conjuntos compactos do plano, a métrica Euclidiana usual e a métrica cordal são topologicamente equivalentes. Isso significa que, se uma sequência  $f_n$  de funções converge de modo uniforme na métrica cordal para uma função  $f \neq \infty$  em um conjunto  $S \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , então  $f_n$  converge para  $f$  em qualquer subconjunto compacto de  $S$ .

Quando compactificamos o conjunto complexo dessa forma,  $\infty$  se torna um ponto como os outros. Em particular, para as funções polinomiais de grau  $p \geq 2$ ,  $\infty$  é um ponto fixo super atrator. Assim,  $\infty$  possui uma bacia de atração. Neste caso, existe  $R > 0$  tal que, se  $|z| > R$  então  $f^n(z) \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Na seção 1.4, daremos mais detalhes sobre a dinâmica de  $f$  nesse caso.

Como mencionado, a esfera de Riemann é compacta e destacam-se duas cartas:

$$\varphi_1 : z \mapsto z \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad \varphi_2 : z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{em torno de } \infty.$$

Ao longo deste trabalho, quando formos estudar a dinâmica de  $f$  próximo de  $\infty$ , aplicaremos a carta  $\varphi_2$  e estudaremos assim  $g(w) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{w}\right)}$  numa vizinhança de 0.

### 1.3 Propriedades dos mapas holomorfos na esfera de Riemann

Definiremos as funções racionais. Se  $p(z)$  e  $q(z)$  são funções complexas polinomiais, definimos uma função complexa racional  $r : U \subset \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  como  $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ . Apresentaremos a seguir uma proposição que afirma que toda função holomorfa na esfera de Riemann possui a forma de uma função racional. O grau de funções desse tipo é definido como o maior grau entre  $p(z)$  e  $q(z)$  e a derivada de uma função racional é dada pela regra do quociente:  $r'(z) = \frac{p'(z) \cdot q(z) - p(z) \cdot q'(z)}{q^2(z)}$ .

**Proposição 1.3.1.** O conjunto das funções holomorfas em  $\widehat{\mathbb{C}}$  é o conjunto das funções racionais. Veja a demonstração em [Che17], p. 23.

Considere  $U$  uma vizinhança aberta de  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  e  $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Então:

1. Se  $f'(z_0) \neq 0$ , então  $z_0$  é um ponto regular. Logo,  $f$  é um homeomorfismo local de  $U$  em  $f(U)$  e, como  $f$  é aberta,  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  é contínua e holomorfa. Neste caso,  $f$  é conforme, ou seja,  $f$  preserva ângulos durante a sua aplicação. Isso pode ser visto pelo fato que seu Jacobiano, por satisfazer as equações de Cauchy-Riemann, é uma matriz de rotação.
2. Se  $f'(z_0) = 0$ , então,  $z_0$  é um ponto crítico e  $f$  não é mais injetora de  $U$  em  $f(U)$ . De fato,  $f$  mapeia  $U$  em  $f(U)$   $k$  a 1 vezes, isto é, cada ponto em  $f(U)$  admite  $k$  pré imagens em  $U$ , contadas com multiplicidade, onde  $k$  é a ordem da primeira derivada não nula em  $z_0$ .

## 1.4 Pontos fixos e pontos periódicos de mapas holomorfos

Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dado  $z_0 \in \mathbb{C}$ , chamamos de *órbita* de  $z_0$  sob  $f(z)$  a sequência de pontos  $z_0, z_1, z_2, \dots$  onde cada ponto desta sequência é dado por  $z_n = f(z_{n-1})$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , onde

$$f^n(z) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n(z).$$

O principal objetivo no estudo da dinâmica holomorfa é entender como uma pequena perturbação pode afetar o comportamento de uma órbita inteira. Se a família  $f^n$  for equicontínua em uma vizinhança  $U$  de  $z_0$  então, se perturbada, não ocorre grandes mudanças na órbita desse ponto. No entanto, se a família não for equicontínua, não podemos garantir nada. Estabelecendo alguns critérios e condições, tentamos entender o que acontece com tais órbitas.

Ao estudar a dinâmica das órbitas de pontos no plano complexo nos deparamos com alguns pontos muito importantes: os *pontos fixos* e os *pontos periódicos*. Definimos um ponto fixo como todo ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z_0) = z_0$  e ponto periódico como todo ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  para o qual existe  $n > 1$  tal que  $f^n(z_0) = z_0$ . Damos o nome de *período* da órbita periódica ao menor  $n$  possível que satisfaça  $f^n(z_0) = z_0$ . Para terminar, chamamos uma órbita de *pré-periódica* se algum ponto da órbita de  $z_0$ , não sendo  $z_0$ , é periódico, i.e se  $f_c^{n+j}(z_0) = f_c^j(z_0)$ , com  $j > 0$ .

## 1.5 Classificação de pontos fixos

Um ponto fixo  $z_0$  de uma função  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa é chamado de *atrator* se existir uma vizinhança  $V$  de  $z_0$ , na qual todas as iteradas sucessivas  $f^n$  estejam definidas e a sequência  $f^n$  convergir uniformemente para a função  $z = z_0$ . Um ponto fixo  $z_0$  de  $f$  é chamado de *repulsor* se existir uma vizinhança  $V$  de  $z_0$  onde, para todo  $z \in V$  diferente de  $z_0$ ,  $f^n(z) \notin V$ , para algum  $n > 1$ . Ou seja, mesmo que  $z$  esteja bem perto de  $z_0$ , após algum número de iterações, sua órbita se afastará de  $z_0$ . Veja que a órbita de  $z$  não tende necessariamente para o infinito ou algum ponto específico, ela simplesmente se afasta de  $z_0$ .

Seja  $z_0$  um ponto fixo atrator. Damos o nome de *bacia de atração* ao conjunto  $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \rightarrow z_0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ , isto é, todos os pontos  $z \in \mathbb{C}$  cujas órbitas tendem para o ponto fixo atrator ao longo das iterações.

Seja  $z_0$  um ponto fixo para  $f$ . Chamamos de multiplicador de  $f$  em  $z_0$  a derivada de  $f$  em  $z_0$ , isto é,  $\lambda = f'(z_0)$ . O valor absoluto do multiplicador determina o comportamento do sistema próximo ao ponto fixo. Em particular, pode-se demonstrar que um ponto fixo é atrator se, e somente se,  $|\lambda| \leq 1$  e repulsor se, e somente se,  $|\lambda| > 1$ . De fato, temos 4 possíveis casos:

- atrator, se  $|f'(z_0)| < 1$ ;
- super atrator, se  $f'(z_0) = 0$  (i.e. pontos fixos e críticos são pontos *super atratores*);
- neutro ou indiferente, se  $|f'(z_0)| = 1$ ;
- repulsor, se  $|f'(z_0)| > 1$ .

Quanto aos pontos fixos neutros, eles se dividem em:

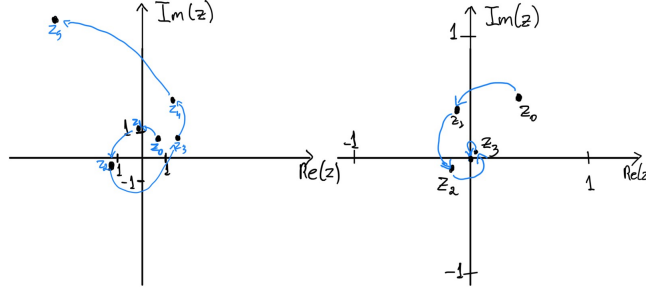
- *racionalmente neutros* ou *parabólicos*: se  $\lambda$  for uma raiz da unidade, i.e.  $\lambda$  puder ser escrito na forma  $e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ , onde  $p, q \in \mathbb{Z}$  são primos entre si. Neste caso, note que  $\lambda^q = 1$ .
- *irracionalmente neutros*: quando  $\lambda = e^{2\pi it}$ , onde  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Neste caso, não existe um inteiro  $n$  tal que  $\lambda^n = 1$ .

Os pontos fixos parabólicos possuem um papel um tanto quanto intrigante: em algumas regiões temos órbitas atratoras e, em outras, órbitas repulsoras.



Se  $z_0$  é um ponto fixo repulsor, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança  $V$  de  $z_0$ , na qual existe um ramo analítico da função inversa de  $f$  e, neste ramo,  $z_0$  é um ponto fixo atrator para a função inversa  $f^{-1}$ , ou seja, nesse caso faz sentido observar as pré imagens da função  $f$ , i.e  $f^{-n} \rightarrow z_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Podemos classificar também pontos periódicos da mesma forma usando  $f^n$  ao invés de  $f$ .



**Figura 1.1:** À esquerda, um caso de órbita repulsora para  $f(z) = z^2$  com  $z_0 = 0,7 + 0,8i$  e, à direita, um caso de órbita atratora para  $f(z) = z^2$  com  $z_0 = 0,4 + 0,5i$

## 1.6 Conjugações

Sejam  $U, V \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $f : U \rightarrow U$  e  $g : V \rightarrow V$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo  $\Phi : U \rightarrow V$  tal que para todo  $z \in U$  temos a seguinte propriedade

$$\Phi \circ f(z) = g \circ \Phi(z).$$

Quando temos uma conjugação entre uma função  $f$  e uma função  $g$  em um subconjunto  $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  significa que podemos entender a dinâmica de  $f$  conhecendo a de  $g$ , ou seja, ambas possuem propriedades topológicas idênticas, em particular, o mesmo número de pontos fixos ou pontos periódicos além de órbitas periódicas com as mesmas propriedades topológicas.

Se  $\Phi$  for conforme, dizemos que  $f$  e  $g$  são conformemente conjugadas. Resumidamente, se  $\Phi$  for conforme, ela conserva os ângulos e a orientação e preserva o multiplicador das órbitas, enviando círculos infinitesimais em círculos infinitesimais.

No capítulo 2, veremos as propriedades das conjugações quaseconformes.

## 1.7 Teoria Local

Seja  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa onde  $0 \in U$  e  $f(0) = 0$ , com expansão próxima de 0 dada por  $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ . Seu ponto fixo  $z = 0$  possui multiplicador  $\lambda$  e, se  $|\lambda| \neq 0, 1$ , veremos pelo teorema a seguir que  $f$  pode ser reduzida para uma forma mais simples através de uma mudança de coordenadas apropriada.

**Teorema 1.7.1** (Teorema da linearização de Koenigs). *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa definida como acima em uma vizinhança de 0. Se o multiplicador  $\lambda$  satisfaz  $0 < |\lambda| < 1$  ou  $1 < |\lambda| < \infty$ , então existe uma vizinhança  $V$  do ponto fixo 0 e uma mudança de coordenadas holomorfa  $w = \phi(z)$  em  $V$ , fazendo com que  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$  se torne o mapa linear  $w \mapsto \lambda w$ , para todo  $w \in V \subseteq \mathbb{C}$ . Esta mudança de coordenadas é única, a menos de multiplicação por uma constante não nula.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no capítulo 8 de [Mil06], p. 74.

Suponha agora que  $f$  seja holomorfa e possua um ponto fixo super-atrator, ou seja,  $f(p) = p$  com  $\lambda = |f'(p)| = 0$ . Sem perda de generalidade, podemos utilizar uma mudança de parâmetro local

para fazer com que o ponto fixo esteja localizado em  $z = 0$ . Neste caso, pela natureza do ponto fixo, a situação é diferente do Teorema de Koenigs, uma vez que não há parte linear. Vamos enunciar o Teorema de Böttcher e sua demonstração pode também ser encontrada no capítulo 9 de [Mil06].

**Teorema 1.7.2** (Teorema de Böttcher). *Seja  $f$  holomorfa definida como*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

onde  $n \geq 2$  e  $a_n \neq 0$ . Então existe uma mudança de coordenadas local holomorfa  $w = \phi(z)$  que conjugua o mapa  $f$  com o mapa  $w \mapsto w^n$  em uma vizinhança  $V$  de  $\phi(0) = 0$ . Essa mudança de coordenadas é única a menos de multiplicação por uma  $(n-1)$ -ésima raiz da unidade.

O Teorema de Böttcher nos diz que, próximo a um ponto fixo crítico,  $f$  é conjugada a um mapa da forma

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto w^n,$$

com  $n > 1$ . Este teorema é de grande importância no caso de polinômios na esfera de Riemann, pois eles têm um ponto fixo super atrator no infinito.

Para o caso dos pontos fixos neutros, que são divididos em pontos fixos racionalmente neutros e irracionalmente neutros, a linearização é mais complicada. Veremos agora o caso de pontos fixos racionalmente neutros, mas, primeiro, vamos definir o que são vetores atratores e vetores repulsores e as pétalas atradoras e repulsoras.

Seja  $f(z) = z + az^{n+1} + \dots$ . Chamamos  $n+1$  de multiplicidade do ponto fixo parabólico  $z_0$ .

**Definição 1.7.3.** Dizemos que um vetor unitário  $\nu$  na origem é *repulsor* se  $av^n$  é real e positivo. De modo semelhante, dizemos que um vetor  $\nu$  é *atrator* se  $av^n$  é real e negativo.

Assim definido, temos  $n$  direções atradoras igualmente espaçadas separadas por  $n$  direções repulsoras também igualmente espaçadas, ou seja, as direções atradoras e repulsoras são sempre intercaladas.

**Definição 1.7.4** (Pétala atradora e pétala repulsora). Sejam  $\hat{z} \in \mathbb{C}$  um ponto fixo parabólico de multiplicidade  $n+1 \geq 2$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $U \subset \mathbb{C}$  uma vizinhança de  $\hat{z}$  suficientemente pequena, de modo que  $f$  mapeia difeomorficamente  $U$  em outra vizinhança  $U'$  de  $\hat{z}$ . Chamamos de *pétala atradora* de  $f$  na direção atradora  $\nu$  em  $\hat{z}$  o conjunto simplesmente conexo  $\Omega_- \subset U \cap U'$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1. a sequência de iteradas  $f^k$ , restrita a  $\Omega_-$ , converge uniformemente para a função constante  $z \mapsto \hat{z}$ ;
2. a órbita de um ponto  $z_0$  sob  $f$  é eventualmente “absorvida” por  $\Omega_-$  se, e somente se, ela converge para  $\hat{z}$  na direção  $\nu$ .

Semelhantemente, podemos definir a *pétala repulsora* na direção repulsora  $\nu'$  como um conjunto simplesmente conexo  $\Omega_+ \subset U \cap U'$  se  $\Omega_+$  for uma pétala atradora para a função  $f^{-1} : U' \rightarrow U$  na direção  $\nu$ .

**Teorema 1.7.5** (Teorema de Linearização de Fatou). *Seja  $\hat{z} \in \mathbb{C}$  um ponto fixo parabólico de multiplicidade  $n+1 \geq 2$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Então existem  $n$  pétalas atradoras e  $n$  pétalas repulsoras  $\Omega_{\pm}^j$  tal que, em cada pétala  $j$ , com  $j = 1, 2, \dots, n$ , existe um mapa conforme (um difeomorfismo analítico)  $\varphi_{\pm}^j : \Omega_{\pm}^j \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazendo*

$$\varphi_{\pm}^j(f(z)) = \varphi_{\pm}^j(z) + 1,$$

para todo  $z \in \Omega_{\pm}^j \cap f^{-1}(\Omega_{\pm}^j)$ . Chamamos o mapa  $\varphi_-^j$  de *coordenada de Fatou atradora* na  $j$ -ésima pétala atradora e o mapa  $\varphi_+^j$  de *coordenada de Fatou repulsora* na  $j$ -ésima pétala repulsora.

Demonstraremos este teorema, para o caso  $n = 1$ , no capítulo 3 deste trabalho.

Para os pontos fixos irracionalmente neutros de  $f$ , o multiplicador  $\lambda$  pode ser expresso por  $e^{2\pi i\xi}$ . Chamaremos  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  de *número de rotação* para o espaço tangente no ponto fixo  $\hat{z}$ . Em determinadas condições existe uma mudança de coordenadas  $z = \varphi(w)$  que conjuga  $f$  à rotação irracional  $w \mapsto \lambda w$ , tal que

$$f(\varphi(w)) = \varphi(\lambda w),$$

próximo da origem, no entanto podemos afirmar que nem sempre existe uma mudança de coordenadas como esta. Vamos enunciar dois teoremas que nos dão casos nos quais podemos linearizar  $f$  e casos em que não podemos.

**Teorema 1.7.6** (Teorema da não-linearização de Cremer). *Sejam  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ , com  $\theta \notin \mathbb{Q}$ , no círculo unitário e  $d \geq 2$ . Se a sequência  $\sqrt[d^n]{\frac{1}{\lambda^n - 1}}$  não for limitada quando  $n \rightarrow \infty$ , então não existe nenhum ponto fixo com multiplicador  $\lambda$  de uma função racional de grau  $d$  que possa ser linearizado localmente.*

**Teorema 1.7.7** (Teorema da linearização de Siegel). *Se  $\frac{1}{\lambda^q - 1}$  é limitado por uma função polinomial de variável  $q$ , então todo germe de função holomorfa com ponto fixo tendo multiplicador  $\lambda$  irracionalmente neutro pode ser localmente linearizado.*

Sugerimos ao leitor que utilize a referência [Mil06] p.117 para consultar a demonstração destes dois teoremas e obter mais informações a respeito dos pontos fixos irracionalmente neutros.

## 1.8 Normalidade de funções holomorfas

Vamos definir agora o que são as famílias normais de funções. Considere a coleção de funções holomorfas  $\mathcal{F} = \{f_i : i = 1, 2, \dots\}$ , onde  $f_i : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Esta coleção é chamada de família normal em um conjunto aberto e conexo  $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$  se cada sequência de  $f_i$  possuir uma subsequência que converge uniformemente em um compacto de  $U$  para uma função analítica. Pelo teorema de Arzelá-Ascoli, isso é equivalente às funções  $f_i$  formarem uma família equicontínua em  $U$ .

**Teorema 1.8.1** (Arzelá-Ascoli). *Seja  $\mathcal{F} = \{f_i : i = 1, 2, \dots\}$ , onde  $f_i : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , uma família de funções complexas contínuas e holomorfas, então  $\mathcal{F}$  é normal se, e somente se, a família  $\mathcal{F}$  é equicontínua.*

Por meio deste teorema, a normalidade de uma família de funções está ligada ao quanto as funções se encontram próximas entre si. Uma família normal implica que as funções da coleção não estão totalmente espalhadas, mas de certo modo elas se mantêm agrupadas, onde o comportamento de cada uma não se altera drasticamente para pontos em uma mesma vizinhança.

Vamos utilizar a propriedade de famílias normais na dinâmica complexa no estudo da família de iteradas

$$\mathcal{F} = \{f^n : n = 1, 2, \dots\}$$

de uma função holomorfa ao longo do trabalho. A normalidade de uma família de funções é usada na definição de dois conjuntos essenciais para a dinâmica complexa. Tais conjuntos são chamados de Conjunto de Julia e Conjunto de Fatou.

O matemático francês Paul Montel forneceu um resultado importante que condiciona as famílias normais de funções a uma propriedade forte: uma omissão de valores. Esse resultado muitas vezes é chamado de Teste Fundamental de Normalidade. Mais detalhes sobre o teorema podem ser encontrados no capítulo 3 de [Mil06].

**Teorema 1.8.2** (Teorema de Montel - Teste Fundamental de Normalidade). *Seja  $\mathcal{F} = \{f_i : i = 1, 2, \dots\}$  uma família de funções holomorfas  $f_i : U \subset \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Suponha que, para qualquer  $f_i \in \mathcal{F}$ ,  $f_i$  sempre omite três valores em  $\widehat{\mathbb{C}}$ :  $z_1, z_2$  e  $z_3$ . Então  $\mathcal{F}$  é uma família normal de funções.*

## 1.9 Conjunto de Julia e conjunto de Fatou

O conjunto de Julia e o conjunto de Fatou são dois conjuntos complementares: o primeiro formado por pontos com dinâmica caótica e o segundo formado por pontos que se comportam de uma maneira similar na dinâmica.

Formalmente, o conjunto de Fatou é o conjunto dos pontos  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  em que a família de iteradas  $f^n$  é normal em suas vizinhanças. O complementar é o conjunto de Julia.

**Definição 1.9.1** (Conjuntos de Fatou e Julia). Seja  $f$  uma função racional definida em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . O conjunto dos pontos  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  tais que a coleção de iteradas  $\{f^n : \text{com } n \geq 1\}$  é normal em uma vizinhança de  $z$  é chamado de *Conjunto de Fatou* e o denotamos como  $F_f$ . Ao seu complementar chamaremos de *Conjunto de Julia* e o denotaremos por  $J_f$ .

A nomenclatura para esses conjuntos advém dos matemáticos franceses Gaston Julia e Pierre Fatou, cujos trabalhos contribuíram em peso para os estudos de dinâmica complexa no início do século XX.

De forma simples, podemos dizer que o conjunto de Fatou para uma função consiste nos pontos e suas vizinhanças que se comportam de uma maneira similar por iterações repetidas e o conjunto de Julia consiste nos pontos tais que uma pequena perturbação é capaz de causar mudanças drásticas na dinâmica da função.

**Teorema 1.9.2.** *O conjunto de Julia de uma função holomorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é totalmente invariante sob  $f$ . Ou seja, se um ponto  $z$  pertence ao conjunto de Julia, então todas as pré imagens e todas as imagens deste ponto também pertencem a esse conjunto. O mesmo vale para o conjunto de Fatou.*

**Teorema 1.9.3.** *A bacia de atração para uma órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou. Em contrapartida, a fronteira da bacia de atração da órbita periódica atratora está contida no conjunto de Julia, bem como toda órbita periódica repulsora de  $f$ .*

As demonstrações dos dois últimos teoremas podem ser vistas, respectivamente, em [Mil06] p.39 e p.43.

No caso em que os pontos periódicos são indiferentes, isto é,  $|(f_c^n)'(z_0)| = 1$  (podendo ser parabólicos ou irracionalmente neutros), a situação é mais complicada. Em particular, podemos dizer que todo ponto periódico parabólico pertence ao conjunto de Julia (veja [Mil06] p.44).

**Definição 1.9.4.** Definimos **componente de Fatou** qualquer componente conexa do conjunto de Fatou e vamos denotá-la aqui por  $C$ .

Vejamos algumas propriedades relacionadas às componentes de Fatou:

1. A imagem de qualquer componente de Fatou por uma função racional é outra componente do conjunto de Fatou. Então temos que, por uma função racional, duas componentes de Fatou são disjuntas ou são as mesmas.
2. Considere a sequência de iteradas das componentes de Fatou  $C_n = f^n(C)$ . Existem duas possibilidades para esta sequência: a primeira é que exista um  $j \geq 0$  e um  $l \geq 1$  de modo que  $C_{j+l} = C_l$ , ou seja, as componentes de Fatou são então periódicas ou pré periódicas; ou  $C_j \neq C_n$  para qualquer  $j \neq n$ , neste caso, as componentes são chamadas de **componentes errantes de Fatou**. Em particular, pelo Teorema de Sullivan [Sul85], os mapas holomorfos na esfera de Riemann não possuem componentes errantes.

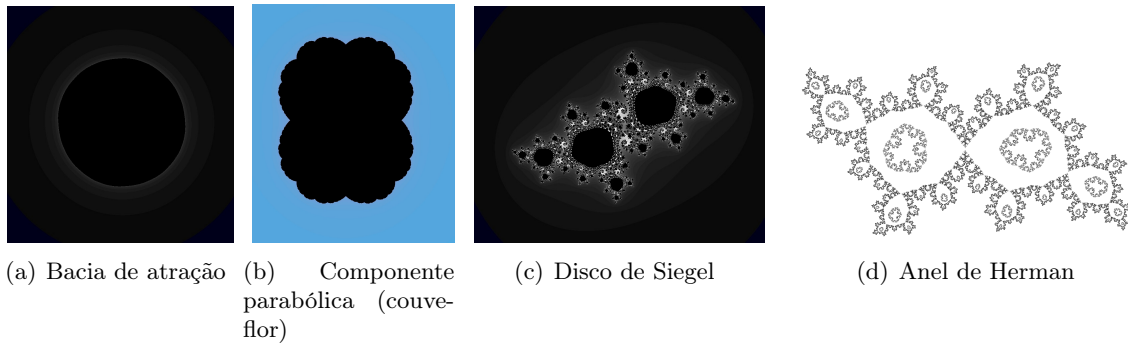
**Definição 1.9.5.** Definimos um disco de Siegel como uma componente simplesmente conexa do conjunto de Fatou, na qual  $f(z)$  está analiticamente conjugada a uma rotação irracional e definimos um anel de Herman como uma componente de Fatou duplamente conexa, na qual  $f$  é conjugada a uma rotação irracional.

Seja  $f$  uma função racional com grau  $d \geq 2$  definida na esfera de Riemann e  $U$  uma componente periódica de Fatou, então um dos quatro casos ocorre:

1.  $U$  contém um ponto periódico atrator, isto é,  $U$  é uma bacia de atração;
2.  $U$  é parabólica;
3.  $U$  é um disco de Siegel;
4.  $U$  é um anel de Herman.

Veja abaixo alguns exemplos de componentes de Fatou.

**Figura 1.2:** Componentes de Fatou para cada um dos casos, considerando  $f_c$  uma função quadrática



## 1.10 Mapas polinomiais

Seja  $P$  uma função polinomial de grau  $d \geq 2$ . Então  $\infty$  é um ponto fixo super atrator. Os pontos cujas órbitas tendem para o infinito fazem parte da bacia de atração do infinito:

$$A_\infty(P) = \{z : P^n(z) \rightarrow \infty\}.$$

Definimos agora o **conjunto de Julia preenchido** como o complementar de  $A_\infty$ , isto é, o conjunto dos pontos cujas órbitas não tendem para o infinito e o denotamos por  $K(P)$ :

$$K(P) = \{z : P^n(z) \not\rightarrow \infty\}.$$

O conjunto de Julia pode ser definido como a fronteira comum ao conjunto de Julia preenchido e à bacia de atração de infinito:

$$J(P) := \partial K(P) = \partial A_\infty(P).$$

Quando  $d = 2$ , é fácil ver que todo polinômio pode ser escrito na forma  $Q_c(z) = z^2 + c$ . Chamamos a família de funções representadas por  $Q_c$  de **família quadrática**, a qual representa todos os polinômios mônicos de grau 2 centrados em  $c$ .

Para simplificar, vamos denotar o conjunto de Julia preenchido para uma função da família quadrática por  $K(Q_c) = K_c$ . Ressaltamos que para uma função  $Q_c$  dessa família, o único ponto crítico em  $\mathbb{C}$  está localizado na origem.

Um importante resultado: se o ponto crítico pertencer ao conjunto de Julia preenchido, então  $K_c$  é conexo, mas se a órbita do ponto crítico tender para o infinito, o conjunto de Julia preenchido é totalmente desconexo.

Vamos agora estudar um pouco do *Conjunto de Mandelbrot*. Adrien Douady e John H. Hubbard, em [DH09], definiram e demonstraram teoremas importantes, alguns dos quais vamos mostrar resumidamente a seguir.

**Definição 1.10.1** (Conjunto de Mandelbrot). Definimos o conjunto de Mandelbrot como o conjunto de parâmetros  $c$  para elementos da família quadrática tais que  $K_c$  é conexo, isto é, parâmetros  $c$  tais que a órbita do ponto crítico 0 seja limitada:

$$\mathcal{M} := \{c : Q_c^n(0) \not\rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

**Proposição 1.10.2.** O conjunto de Mandelbrot  $\mathcal{M}$  é um subconjunto fechado simplesmente conexo do disco  $\{|c| \leq 2\}$  que intersecta o eixo real no intervalo  $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$ . Além disso, o conjunto de Mandelbrot compõe exatamente todos os valores de  $c$  tais que  $|Q_c^n(0)| \leq 2$ , para todo  $n \geq 1$ .

A prova pode ser vista com mais detalhes em [CG13].

**Teorema 1.10.3.** O conjunto de Mandelbrot é conexo.

*Demonstração.* Seja  $Q_c(z) = z^2 + c$ . Fazendo uso do Teorema de Böttcher, podemos conjugar conformemente  $Q_c$ , de modo que essa conjugação seja única, ao mapa  $z \mapsto z^2$  em uma vizinhança  $U_c$  de  $\infty$  em  $\hat{\mathbb{C}}$ . Esta conjugação pode ser definida como  $\phi : U_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D_r}$ , sendo  $D_r$  o disco centrado na origem com raio  $r > 0$ , tal que

$$\phi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Q_c^n(z))^{\frac{1}{2^n}},$$

onde a raiz é escolhida de forma que  $(Q_c^n(z))^{\frac{1}{2^n}} \sim z$ , além do mais  $\phi(z) \sim z$  próximo de  $\infty$ .

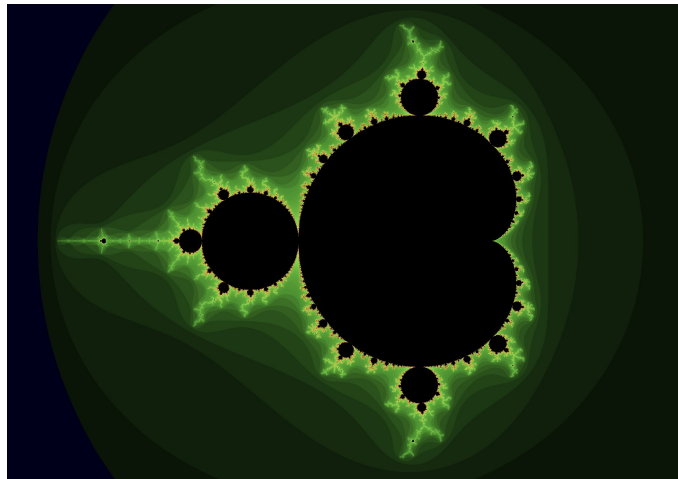
É possível notar que  $\phi$  satisfaz a relação de conjugação com  $Q_c$ , uma vez que

$$\phi(Q_c(z)) = \phi^2(z).$$

Se o ponto crítico  $c$  não está em  $U_c$ , então, pelo Teorema da Função Inversa,  $Q_c$  possui um inverso analítico, levando  $U_c$  em  $Q_c^{-1}(U_c)$ . Se  $c$  não está em  $Q_c^{-1}(U_c)$  também, podemos estender novamente para  $Q_c^{-2}(U_c)$  e assim por diante, até que  $c \in Q_c^{-k}(U_c)$ . Estas extensões nos dão um mapa conforme  $\phi : \Omega_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D_{R_c}}$ , onde o novo domínio  $\Omega_c$  depende de  $J(Q_c)$ .

Se  $J(Q_c)$  é conexo, então  $c \notin A(\infty)$  e, assim, o processo de extensão para  $\phi$  pode ser repetido infinitamente, fazendo com que  $\Omega_c = A(\infty)$ . Se  $J(Q_c)$  for desconexo,  $c \in A(\infty)$  e  $\phi$  se estende até um disco topológico cuja fronteira é uma figura 8 contendo o ponto crítico. Embora não seja óbvio,  $R_c = 1$  se  $J(Q_c)$  for conexo e  $R_c > 1$  caso contrário.

Consideramos o mapa  $\Phi(c, z) = \phi_c(z) : \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ . Pode-se mostrar que o mapa  $\Phi$  é conforme, assim  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$  é um disco e portanto  $\mathcal{M}$  é conexo.  $\square$



**Figura 1.3:** *Conjunto de Mandelbrot*



## 2 Mapas quaseconformes

Antes de começarmos nosso estudo sobre a implosão parabólica, vamos apresentar nesse capítulo algumas características importantes sobre os mapas quaseconformes com base na obra de Núria Fagella et al, intitulada “Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics”, referenciada em [BF14] e na obra de Lars V. Ahlfors, intitulada “Lectures on quasiconformal mappings”, referenciada em [Ahl06].

Intuitivamente, se  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é um homeomorfismo que preserva a orientação entre conjuntos abertos no plano e se  $f$  é continuamente diferenciável, então  $f$  é  $K$ -quaseconforme se a derivada de  $f$  em cada ponto mapeia círculos em elipses com excentricidade delimitada por  $K$ .

### 2.1 Coeficiente de Beltrami e dilatação de mapas quaseconformes

Seja  $F : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa definida como  $F(z) = az + b\bar{z}$ , com  $a, b \in \mathbb{C}$ . Dizemos que  $F$  preserva a orientação se tivermos que  $|b| < |a|$ . Definimos o *Coeficiente de Beltrami* como a razão  $\mu(F) = \frac{b}{a}$ . No nosso contexto, podemos relacionar estes coeficientes com a holomorficidade de  $F$ , afirmando que  $F$  é holomorfa se, e somente se,  $b = 0$ , ou equivalentemente,  $\mu(F) = 0$ .

Se aplicarmos  $F$  em um quadrado com lados gerados pelos vetores  $1$  e  $i$ , teremos como imagem um paralelogramo com lados gerados por  $a + b$  e  $(a - b)i$ . Se  $\mu(F) \neq 0$ , a pré-imagem por  $F$  de um círculo unitário infinitesimal é uma elipse infinitesimal.

Ao colocarmos  $a = |a|e^{i\alpha}$  e  $b = |\mu|e^{i(2\theta+\alpha)}$ , com  $\alpha \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ , podemos reescrever  $F$  como  $F(z) = e^{i\alpha}|a|(z + |\mu|e^{i2\theta}\bar{z})$ , indicando-nos que  $F$  é uma composição de uma transformação  $\mathbb{R}$ -linear, que vamos definir por  $S(z) = |a|(z + |\mu|e^{i2\theta}\bar{z})$ , e um mapa de rotação,  $R(z) = e^{i\alpha}z$ . A partir dessa composição, temos que os dois autovalores de  $S$  são reais e dados por  $|a|(1 + |\mu|)$  e  $|a|(1 - |\mu|)$  com os respectivos autovetores sendo  $e^{i\theta}$  e  $e^{i\theta+\frac{\pi}{2}}$ .

A partir dos autovalores e autovetores, temos que o eixo maior da elipse  $E(F) = F^{-1}(S^1)$  é dado por  $\frac{2}{|a|(1 - |\mu|)}$  na direção do vetor  $e^{i\theta+\frac{\pi}{2}}$  e o eixo menor dado por  $\frac{2}{|a|(1 + |\mu|)}$  na direção do vetor  $e^{i\theta}$ .

Ao contrário de quando  $F(z) = az + b\bar{z}$  preserva a orientação, dizemos que  $F$  reverte a orientação quando  $|a| < |b|$ .

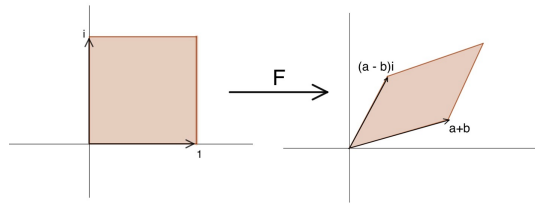
Dizemos que uma propriedade é válida em quase todos os pontos de  $A$  se o conjunto de pontos onde a propriedade não é válida formar um conjunto de medida zero. Por exemplo, quando dizemos que uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em quase todo ponto em  $A$ , significa que há um conjunto  $B \subset A$  de medida zero de modo que para cada  $x \in A \setminus B$  a função  $f$  é contínua em  $x$ .

**Definição 2.1.1.** Definimos a dilatação de  $F$  como sendo

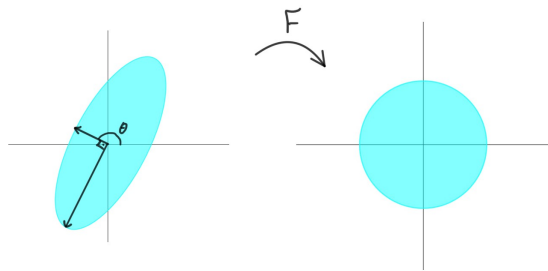
$$K = \frac{1 + |\mu(F)|}{1 - |\mu(F)|} = \frac{|a| + |b|}{|a| - |b|},$$

que é claramente maior ou igual que 1, se  $F$  preserva a orientação. Esta relação é usada para determinar a forma da elipse, mas não sua posição, diferentemente do coeficiente de Beltrami, que é usado para determinar ambos.





**Figura 2.1:** Imagem de  $F$  em um quadrado de lados dados pelos vetores  $1$  e  $i$



**Figura 2.2:** A pré imagem de um círculo unitário é uma elipse

Sejam  $V, W \subset \mathbb{C}$  e seja  $D^+(W, V)$  o conjunto de todas as funções  $f : W \rightarrow V$  que preservam a orientação e possuem derivadas reais não nulas em quase todo ponto, tal que a função  $w \rightarrow Df(w)$  seja mensurável. Se tal função complexa puder ser escrita na forma  $f(w) = u(x, y) + iv(x, y)$ , admitindo  $w = x + iy$ , podemos definir suas derivadas complexas (a derivada em  $w$ ,  $f_w = \frac{\partial f}{\partial w}$ , e a derivada conjugada em  $w$ ,  $f_{\bar{w}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}$ ) através da relação:

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

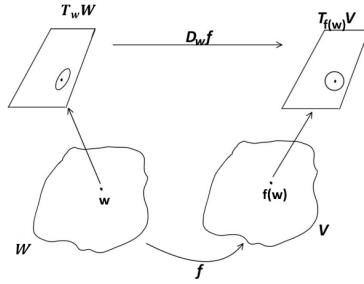
Em cada ponto  $w \in W$ , onde  $f$  possui derivadas não nulas, o mapa diferencial de  $f$ ,  $Df(w) : T_w f \rightarrow T_{f(w)} V$ , que é definido como a soma das derivadas complexa e conjugada de  $f$  no ponto  $w$ , ou seja,

$$Df(w) = \frac{\partial}{\partial w} f(w) dw + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} f(w) d\bar{w},$$

é linear.

Da linearidade da diferencial de  $f$ , a pré imagem por  $Df$  de um círculo infinitesimal em  $T_{f(w)} V$  é uma elipse em  $T_w f$  para quase todo  $w \in W$ . Assim, podemos dizer que a diferencial de  $f$  define uma elipse  $E_w$  em quase todo plano do fibrado tangente de  $W$ .

Neste caso, podemos definir o coeficiente de Beltrami, em quase todo ponto, como o quociente da derivada conjugada complexa em  $w$  pela derivada complexa em  $w$ , ou seja,  $\mu_f = \frac{f_{\bar{w}}}{f_w}$ . Portanto,



**Figura 2.3:** As elipses infinitesimais no plano tangente  $T_w W$  são mapeadas em círculos infinitesimais no plano tangente  $T_{f(w)} V$  através da diferencial  $Df$  de  $f$ , se  $Df$  existir.

podemos redefinir também como se calcula a dilatação para  $f$  do seguinte modo:

$$K_f(w) = \frac{1 + |\mu_f|}{1 - |\mu_f|} = \frac{1 + \left| \frac{f_{\bar{w}}}{f_w} \right|}{1 - \left| \frac{f_{\bar{w}}}{f_w} \right|} = \frac{|f_w| + |f_{\bar{w}}|}{|f_w| - |f_{\bar{w}}|}.$$

**Definição 2.1.2.** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  e  $TU = \bigcup_{u \in U} T_u U$  o fibrado tangente sobre  $U$ , isto é, a coleção dos espaços tangentes nos pontos  $u \in U$ , cada um visto como uma cópia de  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ . Uma *estrutura quase complexa*  $\sigma$  em  $U$  é um campo de elipses infinitesimais mensurável, isto é, uma elipse no fibrado tangente, definida a menos de uma multiplicação por constante, para quase todo  $u \in U$ , tal que  $u \rightarrow \mu(u)$  é mensurável.

Uma estrutura conforme significa que podemos considerar  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  como um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial com a multiplicação escalar complexa padrão. De fato, qualquer mapa linear real invertível  $L$  pode ser usado para definir uma nova estrutura conforme no domínio de  $L$ , o que é uma nova operação transformando  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  em um espaço vetorial  $\mathbb{C}$ , estendendo a estrutura do  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

O que precisamos fazer agora é redefinir como multiplicar elementos de  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  por escalares complexos. Praticamente, precisamos definir a “multiplicação” por  $i$ . Isto é, podemos escolher um mapa linear real  $J$  e assim definirmos uma multiplicação por escalar complexo usando-o do seguinte modo:  $c \star z = \text{Re}(cz) + \text{Im}(cJ(z))$ , onde  $c, z \in \mathbb{C}$ . Após isso, usando o fato que  $i^2 z = i \cdot i \cdot z = -z$ , obtemos  $J(J(z)) = -z$ . A estrutura induzida por  $L$  é definida escolhendo  $J = L^{-1} \circ I \circ L$ , admitindo  $I(z) = iz$  no modo padrão.

Assim, uma estrutura quase complexa é uma estrutura complexa no plano tangente em quase todo ponto. Podemos interpretar uma estrutura quase complexa como o pullback da estrutura complexa padrão.

**Definição 2.1.3.** Sejam  $f \in D^+(U, V)$  e  $\sigma_f$  uma estrutura quase complexa com coeficiente de Beltrami associado  $\mu_f$ , com  $\mu_f = \frac{f_{\bar{u}}}{f_u}$ , então dizemos que  $\mu_f$  é o pullback de  $\mu_0 \equiv 0$  sob  $f$ . Podemos escrever:  $\sigma_f(u) = f^* \sigma_0(u)$  ou, usando o coeficiente de Beltrami,  $\mu_f(u) = f^* \mu_0(u)$ , para quase todo  $u \in U$ .

Podemos generalizar e considerar o pullback de qualquer estrutura quase complexa sob um mapa  $f$ , não somente o de  $\mu_0$ . Para isso precisamos exigir algo extra para a definição: o mapa  $f$  precisa ser absolutamente contínuo em relação à medida de Lebesgue, isto é, a pré-imagem por  $f$  de qualquer conjunto de medida zero tem que ser de medida zero. Denotamos a subclasse de  $D^+(U, V)$  que consiste de funções com essas propriedades como  $D_0^+(U, V)$ .

Podemos compor coeficientes de Beltrami ao realizarmos um pullback. Veja que se  $f : U \rightarrow V$ , em  $D_0^+(U, V)$  e  $\mu$  puder ser dada por um mapa  $g : V \rightarrow W$  na classe  $D^+(V, W)$ , em notação  $\mu = \mu_g$ ,

então, ao realizarmos um pullback de  $\mu$  por  $f$ , teremos que

$$f^*\mu = f^*\mu_g = f^*(g^*\mu_0) = (g \circ f)^*\mu_0 = \mu_{g \circ f}.$$

Vamos definir agora o que é uma **estrutura quaseconforme  $f$ -invariante**. Sejam  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f : U \rightarrow U$  uma função em  $D_0^+(U, U)$ . Suponha  $\sigma$  uma estrutura quase complexa em  $U$  com coeficiente de Beltrami  $\mu$ .  $\mu$  será  $f$ -invariante se  $f^*\mu(u) = \mu(u)$  para quase todo  $u \in U$ . Podemos também denotar esta invariância por  $f$  como  $f^*\sigma = \sigma$ .

Vejam um caso de um pullback invariante. Suponha que uma estrutura quaseconforme  $\sigma$ , com coeficiente de Beltrami  $\mu$ , seja  $F$ -invariante, onde  $F \in D_0^+(V, V)$ . Considere  $G \in D_0^+(U, U)$  e  $f \in D_0^+(U, V)$  e suponha também que o seguinte diagrama comute com a ação dos três mapas:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{G} & U \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{F} & V \end{array}$$

**Figura 2.4:** Diagrama comutativo entre  $f$ ,  $F$  e  $G$

A estrutura do pullback  $f^*\sigma$  é  $G$ -invariante. De fato,

$$G^*(f^*\mu) = (f \circ G)^*\mu = (F \circ f)^*\mu = f^*(F^*\mu) = f^*\mu.$$

O uso de estruturas quaseconformes invariantes será de extrema importância na aplicação da cirurgia quaseconforme.

## 2.2 Derivada distribucional

Dizemos que uma função  $f$  definida em um domínio  $U \subset \mathbb{R}^2$  possui derivadas distribucionais,  $f_x$  e  $f_y$ , se  $f$  satisfaz a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} \iint g f_x dx dy &= - \iint g_x f dx dy \\ \iint g f_y dx dy &= - \iint g_y f dx dy, \end{aligned}$$

para toda  $g$  que seja  $C^1$  e com suporte compacto no domínio.

A derivada distribucional  $f_x$  é localmente integrável, i.e.  $L_{loc}^1$ , se existir uma vizinhança compacta  $N$  para cada ponto no seu domínio de definição tal que  $\iint_N |f_x| dx dy < \infty$ . O mesmo vale para a derivada distribucional  $f_y$ .

É importante notar que se  $f \in L_{loc}^1$  não é  $C^1$ , então as derivadas distribucionais podem não ser definidas por funções. Caso sejam definidas por funções, ou até mesmo se  $f$  for  $C^1$ , suas derivadas distribucionais coincidem com as derivadas no caso ordinário.

## 2.3 Definição analítica de mapas quaseconformes

Vamos apresentar a definição analítica de mapas quaseconformes que utiliza as derivadas distribucionais.

**Definição 2.3.1** (Definição de um mapa  $K$ -quaseconforme). Considere  $U, V \subset \mathbb{C}$  e seja dado  $K \geq 1$ . Um homeomorfismo  $f : U \rightarrow V$  é  $K$ -quaseconforme se, e somente se, existir  $q = \frac{K-1}{K+1}$  tal que

1.  $f$  possui derivadas distribucionais localmente quadrado integráveis, i.e.  $L_{loc}^2$ ;

$$2. \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} < q, \text{ em } L^2_{loc}.$$

Se  $f$  for um difeomorfismo entre subconjuntos compactos, então  $f$  é quaseconforme. Podemos obter  $K$  pela continuidade das derivadas e o fato de que uma função contínua atinge seu máximo em conjuntos compactos.

É possível notar também que um mapa quase conforme é diferenciável em quase todo ponto e, neste caso, as derivadas, distribucionais e analíticas, coincidem em quase todo ponto.

Vamos relacionar a definição de mapas K-quaseconformes com os *pullbacks* por um mapa quaseconforme. Precisamos que a estrutura quase complexa  $f^*\sigma_0$ , induzida por  $f$  como o pullback da estrutura complexa conforme  $\sigma_0$ , tenha dilatação limitada, i.e.  $K_f = K < \infty$ . Isso significa que quanto maior for  $K$ , mais distante o mapa  $f$  está de ser conforme, ou seja, mais distantes as elipses infinitesimais estão de se tornarem círculos infinitesimais.

## 2.4 Definições geométricas de mapas quaseconformes

Veremos nesta seção duas definições geométricas de mapas quaseconformes. A primeira envolve quadriláteros e retângulos no plano. A segunda envolve anéis (coroas circulares) ao invés de quadriláteros.

Um quadrilátero  $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$  é um domínio de Jordan nos complexos com uma sequência ordenada de pontos na fronteira  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ . Podemos mapear conformemente qualquer quadrilátero  $Q$  em um retângulo por um mapa  $\varphi$  com módulo definido da seguinte maneira:

$$\text{mod } Q(z_1, z_2, z_3, z_4) := \left| \frac{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}{\varphi(z_3) - \varphi(z_2)} \right|.$$

Dizemos que dois quadriláteros são conformemente equivalentes se, e somente se, eles possuem o mesmo módulo. Uma propriedade importante é que se alternarmos os vértices do quadrilátero  $Q$ , o novo módulo será dado por

$$\text{mod } Q(z_2, z_3, z_4, z_1) := \left| \frac{\varphi(z_3) - \varphi(z_2)}{\varphi(z_4) - \varphi(z_3)} \right| = \left| \frac{\varphi(z_3) - \varphi(z_2)}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)} \right| = \frac{1}{\text{mod } Q(z_1, z_2, z_3, z_4)}.$$

Sejam  $U, V \subset \mathbb{C}$  e considere  $\varphi : U \rightarrow V$  um homeomorfismo que preserva a orientação. Podemos dizer que a imagem por  $\varphi$  de qualquer quadrilátero  $Q$ , compactamente contido em  $U$ , é um quadrilátero compactamente contido em  $V$ .

**Definição 2.4.1** (Primeira definição geométrica de um mapa K-quaseconforme). Sejam  $U, V \subset \mathbb{C}$  e considere  $\varphi : U \rightarrow V$  um homeomorfismo que preserva a orientação. Dizemos que  $\varphi$  é um mapa K-quaseconforme, com  $K \geq 1$ , se, e somente se,  $\varphi$  satisfaz a seguinte relação

$$\frac{1}{K} \text{mod } Q \leq \text{mod } \varphi(Q) \leq K \text{mod } Q,$$

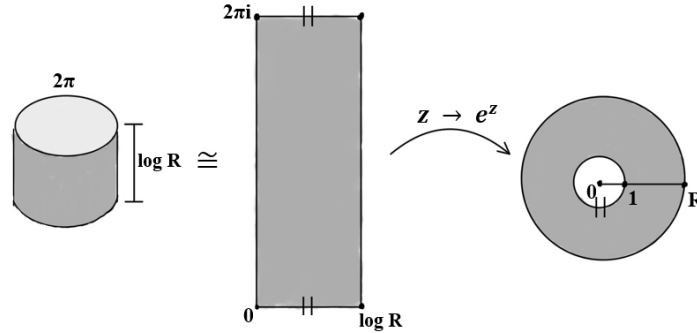
para todos os quadriláteros  $Q$  compactamente contidos em  $U$ .

Definimos um *anel* aberto  $A$  em  $\mathbb{C}$  como um domínio duplamente conexo em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Dado um anel  $A$ , existe um mapa conforme  $\varphi$  que mapeia  $A$  em um anel padrão, sendo este definido por  $A_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z| < R \leq \infty\}$ , que é único a menos de uma multiplicação por uma constante. Seu módulo pode ser definido da seguinte maneira:

$$\text{mod } A := \text{mod } A_{r,R} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}, & \text{se } 0 < r < R < \infty \\ \infty, & \text{se } r = 0 \text{ ou } R = \infty \end{cases}$$

A relação entre a definição do módulo para os quadriláteros e a do módulo dos anéis é que para um quadrilátero qualquer de módulo  $M$  podemos escolher um retângulo equivalente com vértices

ordenados da forma  $(0, 2\pi M, 2\pi(M + i), 2\pi i)$  e, utilizando a função exponencial  $z \mapsto e^z$ , podemos mapear o retângulo no anel padrão  $A_{1,R}$ , onde  $\log R = 2\pi M$ .



**Figura 2.5:** Um retângulo sendo mapeado a um anel padrão com o mesmo módulo através da função exponencial

**Definição 2.4.2** (Segunda definição geométrica de um mapa  $K$ -quaseconforme). Sejam  $U, V \subset \mathbb{C}$  e  $K \geq 1$  dado. Um homeomorfismo que preserva a orientação  $\varphi : U \rightarrow V$  é um mapa  $K$ -quaseconforme se, e somente se, ele satisfizer a seguinte relação

$$\frac{1}{K} \text{mod } A \leq \text{mod } \varphi(A) \leq K \text{mod } (A),$$

para todos os anéis  $A$  compactamente contidos em  $U$ .

Observação: nas definições analíticas de mapas quaseconformes, não foi necessário a hipótese sobre os homeomorfismos preservarem a orientação. Essa condição vinha como uma consequência! Mas para obter a equivalência entre as definições analíticas e as definições geométricas, precisamos adicionar essa hipótese no caso das definições geométricas.

#### Lema de Weyl

Se  $U \subset \mathbb{C}$  é aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma distribuição em  $U$  1-quaseconforme com derivada distribucional  $f_z$  localmente integrável em  $U$ , então  $f$  é conforme.

*Demonstração.* Seja  $D_r(z)$  o disco de raio  $r > 0$  centrado em  $z$  e  $\varphi_\epsilon$  uma família de funções-teste com suporte em  $D_r(z)$  que tendem para a função Delta quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Assim, as convoluções  $f_\epsilon = f \star \varphi_\epsilon$  são funções  $C^\infty$  em  $U_r := \{z \in \mathbb{C} : D_r(z) \in U\}$  e satisfazem  $\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{z}} = 0$ , fazendo com que cada  $f_\epsilon$  seja uma função analítica em  $U_r$ . Agora, vamos tomar  $r_1 < r_2$  e uma função  $\eta$  que seja  $C^\infty$  com suporte em  $(r_1, r_2)$  tal que  $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1$ . Podemos observar que a equação

$$f_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{f_\epsilon(z_0 + re^{i\theta})}{z - (z_0 + re^{i\theta})} \eta(r) d\theta dr$$

é verdadeira no disco de raio  $r_1$  em torno do ponto  $z_0 \in U_{r+r_2}$ . Desta forma, a distribuição  $f_\epsilon$  pode ser calculada na função teste fixada  $\frac{\eta(r)}{z - (z_0 + re^{i\theta})}$  para cada  $z$  fixado, convergindo quando  $\epsilon \rightarrow 0$  e, assim,  $f$  obtém um valor em cada ponto. Já que as funções-teste variam continuamente como funções de  $z$ , a função  $f$  é contínua. Ao utilizarmos uma variante apropriada da Fórmula Integral de Cauchy, podemos mostrar que a derivada existe e é contínua.  $\square$

## 2.5 Propriedades dos mapas K-quaseconformes

Sejam  $U, V \subset \mathbb{C}$  e  $\varphi : U \rightarrow V$  um homeomorfismo que preserva a orientação. Vamos estabelecer algumas propriedades sobre os mapas K-quaseconformes:

1. Se  $\varphi$  é K-quaseconforme, então  $\varphi^{-1}$  também é K-quaseconforme.
2. Se  $\varphi$  é K-quaseconforme e puder ser composta, pela direita ou pela esquerda, com um mapa conforme, então a composição é também K-quaseconforme. Ou seja, a classe de mapas K-quaseconformes é invariante sob mapas conformes.
3. A composição de um mapa  $K_1$ -quaseconforme e um mapa  $K_2$ -quaseconforme é um mapa  $K_1K_2$ -quaseconforme.
4. Como consequência da primeira definição analítica, um homeomorfismo  $\varphi$  é K-quaseconforme se, e somente se,  $\varphi$  é localmente K-quaseconforme.
5. Se  $\varphi$  é K-quaseconforme de classe  $C^1$ , então a dilatação de uma elipse  $E_z$  no plano tangente  $T_zU$  é limitada por  $K$  em todo  $z \in U$ .
6. Suponha que  $\varphi$  seja K-quaseconforme, então, em cada compacto de  $U$ ,  $\varphi$  satisfaz uma condição de Hölder uniforme:

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|^{\frac{1}{K}}.$$

7. Se  $\varphi$  é bilipschitziana, ou seja, se  $\varphi$  satisfaz para algum  $L > 0$  a relação

$$\frac{1}{L}|z_1 - z_2| \leq |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|,$$

então  $\varphi$  é K-quaseconforme. A recíproca não é verdade.

O próximo resultado é muito importante na aplicação da cirurgia quaseconforme. Vamos falar do Teorema Mensurável da Aplicação de Riemann que está relacionado com a existência de uma determinada solução para a equação de Beltrami.

## 2.6 Teorema mensurável da aplicação de Riemann e Lema-chave

O Teorema Mensurável da Aplicação de Riemann ou *Teorema da Integrabilidade*, provado em 1960 por Lars Ahlfors e Lipman Bers, afirma que se  $\mu$  é uma função mensurável limitada em  $\mathbb{C}$ , onde  $\|\mu\|_\infty < 1$ , então existe uma única solução  $f$  para a equação de Beltrami  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \mu(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ , sendo  $f$  um homeomorfismo quase conforme em  $\mathbb{C}$  que fixa os pontos 0, 1 e  $\infty$ .

**Teorema 2.6.1.** *Sejam  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ , com  $U \sim \mathbb{D}$  (respectivamente  $U = \mathbb{C}$ ) e  $\sigma$  uma estrutura quaseconforme em  $U$  com coeficiente de Beltrami  $\mu$  e com dilatação uniformemente limitada, isto é,  $K(\sigma) < \infty$ . Equivalentemente, suponhamos que a norma do supremo essencial de  $|\mu|$  seja menor que 1, i.e.  $\|\mu\|_\infty = k < 1$ . Então  $\mu$  é integrável, ou seja, existe uma função  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$  (ou respectivamente em  $\mathbb{C}$ ) homeomorfa que é solução para a equação de Beltrami, sendo esta:*

$$\mu(z) = \frac{\partial_{\bar{z}}\varphi(z)}{\partial_z\varphi(z)},$$

para quase todo  $z \in U$ . Além disso,  $\varphi$  é única a menos de uma composição com um automorfismo de  $\mathbb{D}$ , respectivamente  $\mathbb{C}$ .

**Observação 2.6.2.** Se a forma de beltrami  $\mu$  depende de parâmetros ( $\lambda \rightarrow \mu_\lambda$ ) de forma continua ou holomorfa, então o mapa quaseconforme  $\phi_\lambda$ , que integra  $\mu_\lambda$ , também depende do parâmetro  $\lambda$  de forma continua ou holomorfa, respectivamente.

**Definição 2.6.3** (Mapas quase-regulares). Seja  $U \subseteq \mathbb{C}$  um conjunto aberto e  $K < \infty$ . Chamamos  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  de mapa  $K$ -quase-regular se, e somente se,  $g$  puder ser expressa por

$$g = f \circ \varphi,$$

onde  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  é  $K$ -quaseconforme e  $f : \varphi(U) \rightarrow g(U)$  é holomorfa.

Diretamente da definição, pode-se notar que  $g$  é localmente  $K$ -quaseconforme, exceto em um conjunto discreto de pontos  $\varphi^{-1}(Cr(f))$ , sendo  $Cr(f)$  o conjunto de pontos críticos de  $f$ , i.e. pontos onde  $f'$  se anula. Isso acontece pois, ao redor destes pontos,  $f$  não é injetora.

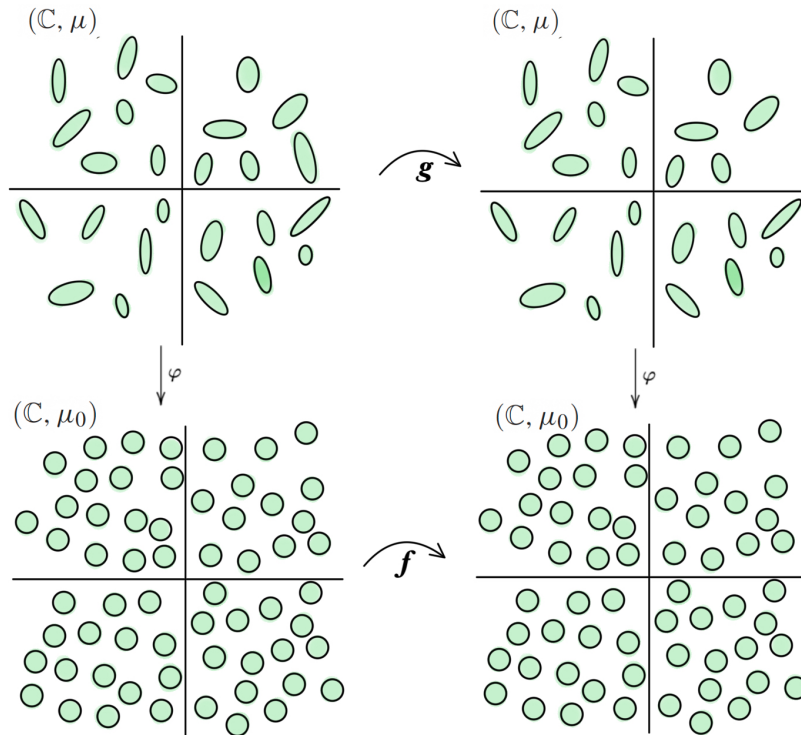
**Lema 2.6.4** (Lema-chave para a aplicação da cirurgia quaseconforme). Sejam  $S$  uma superfície de Riemann isomorfa a  $\mathbb{C}$  ou a  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $g : S \rightarrow S$  um mapa quase-regular e  $\mu$  uma forma de Beltrami  $g$ -invariante em  $S$ , com  $\|\mu\|_\infty = k < 1$ . Então existe um mapa holomorfo  $f : X \rightarrow X$ , onde  $X \in \{\mathbb{C}, \widehat{\mathbb{C}}\}$ , tal que  $g$  e  $f$  são quaseconformemente conjugadas.

*Demonstração.* Seja  $\varphi : S \rightarrow X$  uma função, obtida pelo Teorema da Integrabilidade, que integra a forma de Beltrami  $\mu$ . Então se definirmos  $f := \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} (S, \mu) & \xrightarrow{g} & (S, \mu) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ (X, \mu_0) & \xrightarrow{f} & (X, \mu_0) \end{array}$$

Do modo como  $f$  foi definida,  $f$  é quase-regular satisfazendo  $f^*\mu_0 = \mu_0$  em quase todo ponto. Ao aplicar o Lema de Weyl, obtemos que  $f$  é holomorfa e quaseconformemente conjugada a  $g$  por  $\varphi$ .

□



**Figura 2.6:** Exemplo do lema-chave para  $S = \mathbb{C}$

## 3 Dinâmica parabólica

### 3.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar dinâmica parabólica e demonstrar o teorema de Fatou apresentado no capítulo 1 deste trabalho. Primeiramente, vamos mostrar a construção das pétalas atratora e repulsora, importantes durante a dinâmica. Logo após, enunciaremos e demonstraremos a existência das coordenadas de Fatou e mostraremos a forma assintótica de tais coordenadas. Para o desenvolvimento deste capítulo, estudamos os teoremas e proposições publicados no capítulo 2 “Local theory of parabolic fixed points” da obra de Shishikura intitulada “Bifurcation of Parabolic fixed points”, referenciada neste trabalho como [Shi00].

Para começar, por simplicidade, vamos assumir que o ponto fixo do nosso sistema dinâmico está em  $z = 0$ , a menos de uma conjugação por translação. Assumiremos também que  $f'_0(0) = 1$  e que  $f''_0(0) \neq 0$ , mas, via conjugação, podemos considerar também  $f''_0(0) = \frac{1}{2}$ .

Nosso estudo se dará com base na família de mapas holomorfos  $F_0 = \{f_0 : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f_0(0) = 0, f'_0(0) = 1, f''_0(0) = 1\}$ , com série de potências:

$$f_0(z) = z + z^2 + a_3 z^3 \dots$$

Ao fazer uma mudança de coordenadas dada por  $I(z) = -\frac{1}{z}$ , obtemos

$$f_0^*(w) := (I \circ f_0 \circ I^{-1})(w) = w + 1 + \frac{a}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right),$$

onde  $a \in \mathbb{C}$  e  $w \in I(z) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ .

É possível notar que, para  $w$  próximo de  $\infty$ ,  $f_0^*$  se comporta de forma similar que a translação  $T(w) = w + 1$ .

Para determinar como são as órbitas de  $f_0$ , fazemos uso dessa primeira mudança de coordenadas, isto é, já que  $f_0^*$  se comporta quase como uma translação por 1, suas órbitas são, aproximadamente, linhas horizontais. Logo, como as órbitas de  $f_0$  são as pré-imagens por  $I$  das órbitas de  $f_0^*$ , elas são aproximadamente círculos, tangentes ao eixo real em  $z = 0$ .

Seja  $b > 0$  suficientemente grande. Considere as duas regiões abaixo:

$$\Omega^+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) < -b + |\operatorname{Im}(w)|\} \text{ e } \Omega^- = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) > b - |\operatorname{Im}(w)|\}.$$

Se  $b > 0$  é grande o suficiente,  $f_0^*|_{\Omega^- \cup \Omega^+}$  está definida e é injetora, satisfazendo  $|f_0^*(w) - (w+1)| <$

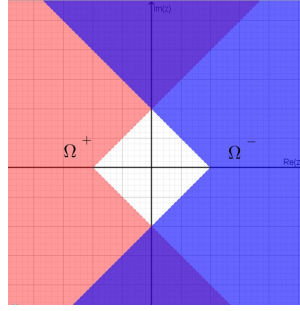
$\frac{1}{4}$ . Na figura 1.1 pode-se ver a representação dessas regiões que formam o domínio de  $f_0^*$ .

A ação da função  $f_0^*$  sobre o domínio é resumida de forma que a imagem por ela está sempre à direita, uma vez que sua dinâmica é quase uma translação por 1, desta forma, ainda com  $b > 0$  grande o suficiente,  $f_0^*(\Omega^-) \subseteq \Omega^- \cup \{\infty\}$  e  $\Omega^+ \subseteq f_0^*(\Omega^+ \cup \{\infty\})$ .

Note que  $\infty$  é ponto fixo parabólico para  $f_0^*$ . Ao ser conjugada com  $f_0$  através da mudança de coordenadas  $w = I(z)$ , verificamos que, para todo  $z \in \overline{\Omega^+} \cup \overline{\Omega^-}$ , temos  $f_0^{*n}(z) \rightarrow \infty$  com  $n \rightarrow \infty$ ,  $f_0^*(\infty) = \infty$  e  $(f_0^*)'(\infty) = 1$ .

Vamos, então, lembrar que a bacia de atração de  $\infty$  é definida como o conjunto de todos os pontos cuja iteração pela função em questão tende para  $\infty$  e a denotaremos por  $\Lambda(\infty)$ . De acordo





**Figura 3.1:** Representação geométrica do domínio de  $f^*$

com a dinâmica de  $f_0^*$ , nota-se que  $\Omega^- \subseteq \Lambda(\infty)$  e, assim, reciprocamente, se considerarmos uma vizinhança  $V$  de  $z_0 \in \mathbb{C}$ , de modo que  $f_0^{*n}(z)$  esteja definido para todo  $n$  e para todo  $z \in V(z_0)$  e  $f_0^{*n}(z) \rightarrow \infty$  ao passo que  $n \rightarrow \infty$ , então  $f_0^{*n}(z_0) \in \Omega^-$ , para algum  $n \geq 1$ .

Para retornar a dinâmica de  $f_0^*$  para as coordenadas de  $f_0$ , basta compormos  $f_0^*$  com a pré-imagem pela mudança de coordenadas  $I$ , i.e.  $I^{-1}$ . Através dessa composição, podemos definir conjuntos que serão de grande importância ao longo do nosso estudo, chamados de pétalas atratoras e de pétalas repulsoras de  $f_0$ . Definimos como pétala atratora (respect. repulsora) de  $f_0$ , e a denotamos como  $\Omega_-$  (respect.  $\Omega_+$ ), o conjunto dado por  $I^{-1}(\Omega^-)$  (respect.  $I^{-1}(\Omega^+)$ ).

Esses dois conjuntos satisfazem algumas propriedades, sendo elas descritas abaixo:

1.  $\Omega_-$  e  $\Omega_+$  são domínios simplesmente conexos e limitados por curvas de Jordan que passam pela origem, pois, através da mudança de coordenadas  $I^{-1}(w)$ , a linha  $l^+$  é levada à fronteira da região  $\Omega_+$  e, respectivamente a linha  $l^-$  é levada à fronteira da região  $\Omega_-$ .
2.  $f_0$  está definida e é injetora no conjunto  $\Omega_- \cup \Omega_+ \cup \{0\}$ , o qual é uma vizinhança da origem;
3.  $f_0(\overline{\Omega_-}) \subset \Omega_- \cup \{0\}$  e  $\overline{\Omega_+} \subset f_0(\Omega_+ \cup \{0\})$ , quando aplicamos a mudança de coordenadas  $I^{-1}(w)$ , o semiplano esquerdo  $\Omega^+$  é levado à pétala repulsora  $\Omega_+$  e o semiplano direito  $\Omega^-$  é levado à pétala atratora  $\Omega_-$ , nos dois casos a função  $f_0$  possui um comportamento regular, entretanto, em contraposição à dinâmica simples de  $f_0^*$ , a órbita de  $f_0$  tende ao ponto fixo 0 na pétala atratora e à fronteira da pétala repulsora quando  $z_0 \in \Omega_+$  saindo assim de  $\Omega_+$ . Ambas as órbitas em  $\Omega_+$  e  $\Omega_-$  seguem uma trajetória similar a um círculo.

**Definição 3.1.1.** No caso geral, para uma função analítica  $f$  cujo ponto fixo é  $\zeta$ , vamos definir a bacia de atração do ponto fixo parabólico de  $f$  como o conjunto

$$\mathcal{B} = \{z \mid \text{existe uma vizinhança de } z \text{ na qual } f^n \text{ está definida e } f^n \xrightarrow{\text{unif.}} \zeta \text{ conforme } n \rightarrow \infty\}.$$

Para  $f_0 \in F_0$ , a bacia de atração de  $z_0 = 0$  será definida através do que construímos de  $f_0^*$ , isto é,  $f_0^n(z) \rightarrow 0$  se, e só se,  $f_0^{*n}(w) \rightarrow \infty$ , onde  $w$  é o corresponde de  $z \in V(0)$  sob a mudança de coordenadas  $I$ . Isso quer dizer que estamos interessados nos pontos que eventualmente entram em  $\Omega^-$ . Portanto, a bacia de atração de  $z = 0$  para  $f_0$  é definida por

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_n f_0^{-n}(\Omega_-)$$

### 3.1.1 Coordenadas de Fatou

Na seção anterior vimos a construção das pétalas e definimos  $f_0^*$ , uma conjugação de  $f_0$ , formada através de composições com a mudança de coordenadas  $I$ , cuja dinâmica é parecida com a translação

$T(w) = w + 1$ , diferindo dela por menos que  $\frac{1}{4}$ . Nesta subseção, veremos que existe, em cada pétala, uma conjugação parcial entre  $f_0$  e  $T$ . Estas conjugações são chamadas de coordenadas de Fatou.

Antes de provar a existência e a unicidade das coordenadas de Fatou, veremos a definição do **domínio fundamental**. Esse domínio será de grande importância para a construção das coordenadas de Fatou.

**Definição 3.1.2.** Sejam  $z_0^+$  e  $z_0^-$  pontos que estejam localizados em  $\mathbb{C}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_0^+) &< -b - 2 \\ \operatorname{Re}(z_0^-) &> b \end{aligned} ,$$

onde  $b$  é a mesma constante na definição de  $\Omega^\pm$ . Continuando, vamos definir as linhas verticais

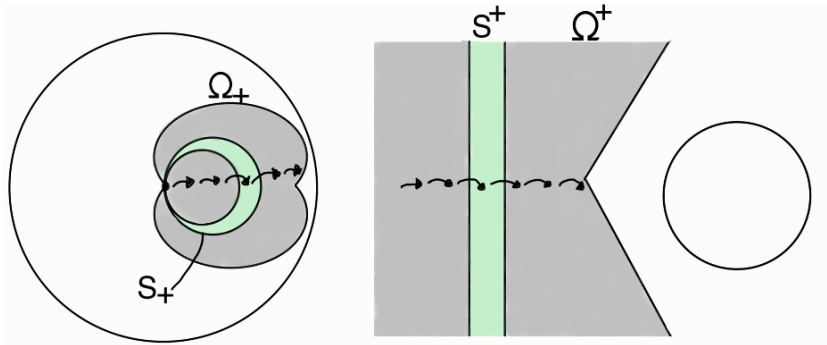
$$\begin{aligned} l^+ &= \{z_0^+ + iy : y \in \mathbb{R}\} \\ l^- &= \{z_0^- + iy : y \in \mathbb{R}\} . \end{aligned}$$

Assim, ao aplicarmos  $f_0^*$  sobre a linha  $l^-$ , vemos que  $f_0^*(l^-)$  se localiza à direita de  $l^-$ , permanecendo em  $\Omega^-$ , delimitando portanto uma região fechada, contida inteiramente em  $\Omega^-$ , que se parece com uma faixa vertical. Denotaremos tal região por  $S^-$ . Do mesmo modo,  $f_0^*(l^+)$  e  $l^+$  delimitam uma região fechada em  $\Omega^+$  e a denotaremos por  $S^+$ . Estas regiões serão chamadas de **regiões fundamentais** no plano da coordenada  $w$ .

O nome de fundamental advém da propriedade de que todas as órbitas possuem apenas um representante dentro da região, assim nosso estudo se baseará inteiramente nelas, não sendo necessário investigar a dinâmica das órbitas no plano complexo inteiro.

Para representarmos  $S^\pm$  na dinâmica de  $f_0$  e nas regiões  $\Omega_\pm$ , basta aplicarmos  $I^{-1}$  em  $S^\pm$ , isto é,  $S_\pm = I^{-1}(S^\pm)$ . Tais regiões, no plano de coordenada  $z$ , são as regiões fundamentais para a dinâmica de  $f_0|_{S_\pm}$  e elas possuem um formato de “croissant”, com suas pontas na origem.

Através da dinâmica da função  $f_0^*$ , podemos ver que toda órbita em  $\Omega^\pm$  passa por  $S^\pm$  apenas uma única vez, com exceção apenas de quando a órbita de  $z \in \Omega^\pm$  por  $f_0^*$  possuir um representante em  $l^\pm$ , pois daí sua imagem estará na outra fronteira da região  $S^\pm$ , no caso  $f_0^*(l^\pm)$ .



**Figura 3.2:** Representação geométrica do domínio de  $f_0$  e de  $S_+$  à esquerda e do domínio de  $f_0^*$  e de  $S^+$  à direita

**Teorema 3.1.3** (Existência das coordenadas de Fatou). *Sejam  $f_0 \in F_0$ ,  $f_0^*$  e  $\Omega^\pm$  como anteriormente. Então existem dois únicos (a menos de uma constante aditiva) mapas conformes (difeomorfismos analíticos)  $\varphi^\pm : \Omega^\pm \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfazem a seguinte relação:*

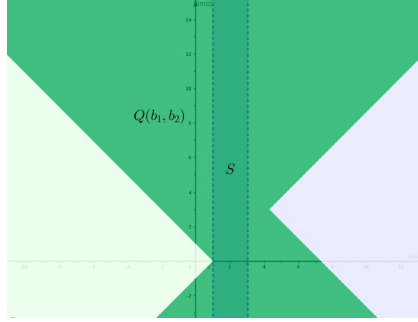
$$\begin{cases} (\varphi^+ \circ f_0^*)(w) = \varphi^+(w) + 1, w \in \Omega^+ \\ (\varphi^- \circ f_0^*)(w) = \varphi^-(w) + 1, w \in \Omega^- \end{cases}$$

Para demonstrar o teorema, vamos construir a região onde o teorema da existência de tais coordenadas será contextualizado.

Sejam  $b_1, b_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$  de modo que  $Re(b_2) > Re(b_1)$ . Vamos definir a região  $Q(b_1, b_2)$  como

$$Q(b_1, b_2) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z - b_1) > -|Im(z - b_1)|, Re(z - b_2) < |Im(z - b_2)|\}.$$

Note que se  $b_1 = -\infty$  (respectivamente  $b_2 = \infty$ ), a condição envolvendo  $b_1$  (respectivamente  $b_2$ ) deve ser removida.



**Figura 3.3:** Um exemplo de uma possível região  $Q(b_1, b_2)$  contendo uma região fundamental  $S$ .

Vamos provar o teorema através da proposição abaixo:

**Teorema 3.1.4.** *Considere  $f_0^*$  como uma função holomorfa definida em  $Q = Q(b_1, b_2)$  com  $Re(b_1) < Re(b_2) - 2$ . Suponha que para todo  $z \in Q$  sejam válidas as seguintes condições:*

- $|f_0^*(z) - (z + 1)| < \frac{1}{4}$
- $|f_0^{\prime}(z) - 1| < \frac{1}{4}$

Então, temos:

1.  $f_0^*$  é univalente em  $Q$ ;
2. Seja  $z_0 \in Q$  tal que  $Re(b_1) < Re(z_0) < Re(b_2) - \frac{5}{4}$ . Considere  $S$  a região fechada delimitada pela linha vertical  $l = \{z_0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$  e por  $f_0^*(l)$ . Então, para todo  $z \in Q$ , existe um único  $n \in \mathbb{Z}$  para o qual  $(f_0^*)^n(z)$  está definida e pertence a  $S \setminus f_0^*(l)$ ;
3. Existe uma função univalente (única, a menos de uma constante)  $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$\varphi(f_0^*(z)) = \varphi(z) + 1;$$

*Demonstração.* 1. Óbvio.

2. Veja que, a partir da primeira desigualdade ( $|f_0^*(z) - (z + 1)| < 1/4$ ),  $f_0^*(z)$  dista da translação por 1, um valor menor que 1/4. Assim,  $\forall z \in Q \setminus (S \setminus f_0^*(l))$  apenas uma das iterações de  $f_0^*$  pertencerá a  $S \setminus f_0^*(l)$ , exceto o caso em que  $(f_0^*)^n(z) \in l$ , pois daí  $(f_0^*)^{n+1}(z) \in f_0^*(l)$ .
3. Considerando o mesmo  $z_0$  do item anterior, vamos definir uma função  $G : X = \{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1, x, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow Q$  da seguinte forma:

$$G(x + iy) = (1 - x)(z_0 + iy) + x f_0^*(z_0 + iy).$$

Vamos lembrar aqui que, se uma função complexa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é escrita na forma  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , admitindo  $z = x + iy$ , temos que suas derivadas complexas (a derivada de  $z$  e a *derivada conjugada* de  $z$ ) serão dadas através da relação:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Prosseguindo, podemos derivar  $G$  com respeito às partes real e imaginária e obtermos:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = f_0^*(z_0 + iy) - (z_0 + iy), \quad \frac{\partial G}{\partial y} = ix(f_0^*)'(z_0 + iy) + i(1 - x).$$

Vamos fazer algumas estimativas sobre as derivadas complexas afim de se obter uma estimativa para a dilatação de  $G$ . Assim, continuamos:

$$\left| \frac{\partial G}{\partial z} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial G}{\partial x} - i \frac{\partial G}{\partial y} \right] - 1 \right| = \frac{1}{2} |f_0^*(z_0 + iy) - (z_0 + iy + 1) + x((f_0^*)'(z_0 + iy) - 1)| \leq \frac{1}{4},$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right| = \left| \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial G}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial y} \right] \right| = \frac{1}{2} |f_0^*(z_0 + iy) - (z_0 + iy + 1) + x((f_0^*)'(z_0 + iy) - 1)| \leq \frac{1}{4}.$$

A dilatação de  $G$  será encontrada através de

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \div \frac{\partial G}{\partial z} \right| \leq \frac{1}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{1}{5},$$

assim, vemos que  $G$  é um mapa quaseconforme na faixa  $S$ , uma vez que ele seria conforme se, e só se,  $\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = 0$ .

O mapa  $G$  satisfaz  $G^{-1}(f_0^*(z)) = G^{-1}(z) + 1$  para  $z \in l$ . De fato, pondo  $l_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = iy, y \in \mathbb{R}\}$  e  $l_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = 1 + iy, y \in \mathbb{R}\}$  como as linhas perpendiculares que passam por 0 e 1, respectivamente, podemos calcular o mapa  $G$  em pontos pertencentes a elas e obtermos:

$$G(iy) = z_0 + iy \in l;$$

$$G(1 + iy) = f_0^*(z_0 + iy) \in f_0^*(l).$$

Não é difícil ver agora que, ao aplicarmos  $G^{-1}$ , obtemos:

$$G^{-1}(f_0^*(z)) = G^{-1}(G(1 + iy)) = 1 + iy = G^{-1}(z) + 1,$$

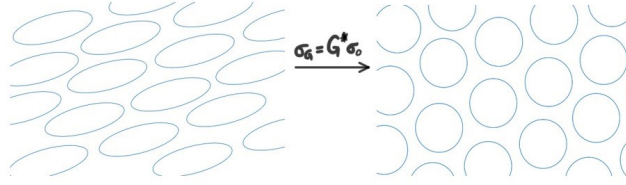
tomando  $z \in l$ .

Vamos construir  $\varphi$  usando cirurgia quaseconforme. Considere o conjunto  $X = \{z : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ , a translação por 1:  $T(z) = z + 1$ , com  $z \in X$ , e tome  $\sigma_0$  como a estrutura conforme padrão de  $\mathbb{C}$ . Podemos definir uma nova estrutura quase complexa  $\sigma \in \mathbb{C}$  como

$$\mu = \begin{cases} \mu_G = G^* \mu_0, & \text{em } X \\ \mu_T = (T^n)^* \mu_G, & \text{em } T^{-n}(X) \end{cases}.$$

Note que a estrutura quase-complexa  $\mu$  é limitada, uma vez que  $G^* \mu_0 = \mu$  é quaseconforme e  $T$  conforme. Assim, pelo Teorema Mensurável da Aplicação de Riemann, existe um único mapa  $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  quase conforme, onde  $H^* \mu_0 = \mu_G$  e ainda fixa os pontos 0 e 1, ou seja,  $H(0) = 0$  e  $H(1) = 1$ .

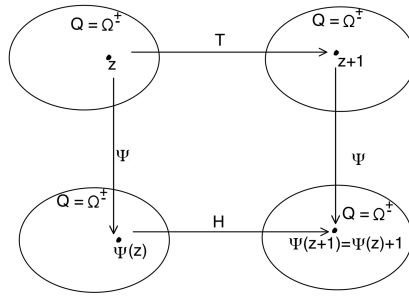
Por construção, a composição  $H \circ T \circ H^{-1}$  preserva a estrutura padrão  $\sigma_0$ , sendo assim conforme. Agora que conseguimos um mapa conforme, note que a translação  $T$  não possui pontos fixos, conseqüentemente  $H \circ T \circ H^{-1}$  também não possui, logo é também uma translação



**Figura 3.4:** Exemplo da ação do pullback adaptando a estrutura quase complexa no domínio de  $G$ , levando elipses infinitesimais em círculos infinitesimais.

por um, pois uma vez que  $H \circ T \circ H^{-1}(0) = 1$ , concluímos que  $H \circ T \circ H^{-1}(z) = T(z)$ .

Vamos definir agora  $\varphi$  como  $\varphi = H \circ G^{-1}$  em  $S$ , podemos usar a relação  $\varphi(f_0^*(z)) = \varphi(z) + 1$  para estender  $\sigma_G$  para toda a região  $Q$ . Notamos que  $\varphi$  está bem definida e, pela construção de  $G^{-1}$  e  $H$ , vemos que  $\varphi$  é contínua e homeomorfa, uma vez que  $\varphi^{-1} = G \circ H^{-1}$  onde  $G$  e  $H^{-1}$  são contínuas e, fazendo uso do Teorema de Morera<sup>1</sup>, como  $\varphi$  é analítica fora da órbita de  $l$ , então, pelo Lema de Weyl, ela é analítica em toda a região  $Q$ , uma vez que  $\varphi$  é quaseconforme e  $\varphi^* \mu_0 = \mu_0$ . Portanto, esta é a função univalente desejada:  $\varphi = H \circ G^{-1}$ .



**Figura 3.5:** Construção do mapa  $H$  na região  $Q$

Para provar a unicidade, suponhamos que  $\varphi_1$  seja outra função com as mesmas propriedades que  $\varphi$ , então  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi^{-1}$  comuta com a translação  $T$ , pelo menos em  $\varphi(Q)$ , assim  $\varphi_2$  é estendida em  $\mathbb{C}$  holomorficamente, também comutando com  $T$ . Da mesma maneira,  $\varphi_2^{-1} = \varphi \circ \varphi_1^{-1}$  tem as mesmas propriedades, o que faz  $\varphi$  ser obrigatoriamente uma função afim. Conseqüentemente, uma função afim que comuta com uma translação acaba se tornando uma translação por uma constante. Logo,  $\varphi$  é única, a menos de uma constante. □

**Teorema 3.1.5** (Forma assintótica das coordenadas de Fatou). *Se  $f_0^*(w) = w + 1 + \frac{a}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right)$ , então  $\varphi^\pm$  é dada por*

$$\varphi^\pm(w) = w - a \log(w) + c_\pm + o(1)$$

conforme  $w \rightarrow \infty$ , onde  $c_\pm$  são constantes. Ademais,  $\varphi^\pm$  são únicas, a menos de uma constante. O domínio de  $\varphi^+$  pode ser tomado como o setor  $D^+ = \{w : \text{Re}(w) < -b+k|\text{Im}(w)|\}$  e o domínio de  $\varphi^-$  como o setor  $D^- = \{w : \text{Re}(w) > -b-k|\text{Im}(w)|\}$ , com  $b > 0$  sendo uma constante suficientemente grande e  $k$  uma constante em  $[0, 1]$ . Note que, para todo  $k$  neste intervalo,  $D^+ \subset \Omega^+$  e  $D^- \subset \Omega^-$ .

<sup>1</sup>O teorema de Morera, em homenagem a Giacinto Morera, o qual foi um matemático e engenheiro italiano (1856 - 1909), contribui com um resultado para mostrar que uma função complexa é holomorfa. Este teorema estabelece a recíproca do teorema de Cauchy. Ele afirma que se  $U \subset \mathbb{C}$  é um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua, de modo que satisfaça  $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ , para todo triângulo fechado  $\Delta \subset U$ ,  $f$  é uma função holomorfa em  $U$ .

*Ideia da prova*

Considere a função definida por  $v(w) = f_0^*(w) - w$ , sendo  $f_0^*(w) = w + 1 + \frac{a}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right)$ . Vale lembrar que  $f_0^*$  é uma função analítica, assim temos algumas situações a considerar. Note que  $v(w)$  diferencia pouco de 1 e, se  $v \equiv 1$  então  $f_0^*(w) = v(w) + w = w + 1$ , e então  $f_0^*$  é exatamente o mapa de tempo 1 do fluxo constante  $\frac{dw}{dt} = 1$ . Portanto, para iniciar, vamos fazer uma comparação da órbita de  $f_0^*$  com a órbita do fluxo  $\frac{dw}{dt} = v(w)$ , perto de infinito.

Podemos achar uma solução para esse fluxo através do método da integral:

$$t = \int_{z_0}^z \frac{d\tau}{v(\tau)} + C.$$

Assim, considerando  $t$  acima como uma função complexa, podemos dizer que as coordenadas de Fatou devem ter um comportamento semelhante ao da função  $t(z)$ .

*Demonstração.* Vamos começar mostrando primeiro o comportamento semelhante das coordenadas de Fatou com a função  $t(z)$ , a qual é uma solução para o fluxo  $\frac{dw}{dt} = v(w)$ . Para isso, vamos precisar da seguinte proposição:

**Proposição 3.1.6.** Suponha que  $\varphi$  e  $v$  sejam funções holomorfas em uma região  $\mathcal{V}$  que satisfaçam as seguintes propriedades:

$$\varphi \text{ é univalente em } \mathcal{V}, |v(z) - 1| < \frac{1}{4} \text{ para } z \in \mathcal{V} \text{ e}$$

$$\varphi(z + v(z)) = \varphi(z) + 1, \text{ desde que } z, z + v(z) \in \mathcal{V}.$$

Então:

1. Existem constantes universais positivas  $R_1, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  tais que se  $\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ , onde  $R > R_1$ , então

$$\left| \varphi'(z_0) - \frac{1}{v(z_0)} \right| \leq \tilde{C}_1 \left( \frac{1}{R^2} + |v'(z_0)| \right) \leq \frac{\tilde{C}_2}{R}$$

2. Suponha que  $\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho_1 < \arg(z) < \rho_2\}$ , desde que  $\rho_2 < \rho_1 + 2\pi$  e  $|v'(z)| \leq \frac{C}{|z|^{1+\nu}}$  com  $z \in \mathcal{V}$  e  $C, \nu > 0$ . Considerando  $z_0 \in \mathcal{V}$  e  $\rho'_1, \rho'_2$  de modo que  $\rho_1 < \rho'_1 < \rho'_2 < \rho_2$ , existem constantes  $R_2, C^* > 0$  (com  $C^*$  dependendo de  $\rho_1, \rho'_1, \rho_2$  e  $\rho'_2$ ) e  $\xi \in \mathbb{C}$  tais que

$$\left| \varphi(z) - \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{v(\zeta)} - \xi \right| \leq C^* \left( \frac{1}{|z|} + \frac{C}{|z|^\nu} \right),$$

desde que  $z$  satisfaça  $\rho'_1 < \arg(z) < \rho'_2$  e  $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}) > 1$ .

*Demonstração.* 1. Para provar o primeiro item, podemos supor que  $z_0 = 0$ . Agora, tomemos  $R \gg 1$ , i.e.  $R$  muito maior que 1. Revendo o Teorema da distorção de Koebe, disponível no apêndice A desse trabalho, na página 44, temos que se  $|z| < R - 2$ , então

$$\frac{\frac{|v(z)|}{2}}{\left(1 + \frac{|v(z)|}{2}\right)^2} \leq \frac{\left| \frac{\varphi(z + v(z)) - \varphi(z)}{\varphi'(z)} \right|}{2} \leq \frac{\frac{|v(z)|}{2}}{\left(1 - \frac{|v(z)|}{2}\right)^2},$$

uma vez que  $\varphi$  é univalente na vizinhança  $\{\eta : |\eta - z| < 2\}$ . Então, temos que

$$\frac{\left(1 - \frac{|v(z)|}{2}\right)^2}{|v(z)|} \leq \left| \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z + v(z)) - \varphi(z)} \right| \leq \frac{\left(1 + \frac{|v(z)|}{2}\right)^2}{|v(z)|}.$$

Utilizando que  $\varphi(z + v(z)) = \varphi(z) + 1$ , resulta em:

$$\frac{\left(1 - \frac{|v(z)|}{2}\right)^2}{|v(z)|} \leq |\varphi'(z)| \leq \frac{\left(1 + \frac{|v(z)|}{2}\right)^2}{|v(z)|},$$

assim  $C'' \leq |\varphi'(z)| \leq C'$ , com  $|z| < R - 2$ .

Relembremos que a fórmula integral de Cauchy nos diz que a derivada  $n$ -ésima de uma determinada função holomorfa  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  pode ser encontrada através da fórmula

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Assim, fazendo uso da fórmula integral de Cauchy, podemos estimar o valor de  $|\varphi''(z)|$ , sendo  $\varphi''(z)$  expressa por  $\frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{\varphi'(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta$  e considerando  $D = \{\eta : |\eta - z| = \frac{R}{3}\}$ . Reduzindo a expressão de  $\varphi''(z)$ , temos

$$\begin{aligned} |\varphi''(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{\varphi'(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{|\varphi'(\eta)|}{|\eta - z|^2} d\eta \right| = \frac{1}{2\pi} \oint_D \frac{|\varphi'(z)|}{|\eta - z||\eta - z|} dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C'}{\frac{R^2}{9}} \cdot 2\pi \frac{R}{3} = \frac{C_1}{R}. \end{aligned}$$

Assim, chegamos que  $|\varphi''(z)| \leq \frac{C_1}{R}$  para todo  $z$  tal que  $|z| < \frac{R}{2}$ .

Vamos utilizar a fórmula de Taylor com o Resto Integral para chegarmos numa expressão para  $\varphi(z + v(z))$ . Observe que:

$$\varphi(z + a) = \varphi(z) + a\varphi'(z) + a^2 \int_0^1 (1 - t)\varphi''(z + at) dt$$

Substituindo  $a$  por  $v(z)$ , temos que

$$\begin{aligned} \underbrace{\varphi(z + v(z))}_{\varphi(z)+1} - \varphi(z) &= v(z)\varphi'(z) + v^2(z) \int_0^1 (1 - t)\varphi''(z + v(z)t) dt \\ 1 - v(z)\varphi'(z) &= v^2(z) \int_0^1 (1 - t)\varphi''(z + v(z)t) dt. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Note que  $|1 - v(z)\varphi'(z)| \leq \frac{\widehat{C}}{R}$  desde que  $|z| < \frac{R}{2} - \frac{5}{4}$ , , então  $|z| < \frac{R}{2}$  e  $|z| + \frac{5}{4} < \frac{R}{2} \Rightarrow |z + v(z)| < \frac{R}{2}$ , uma vez que

$$\left| v^2(z) \int_0^1 (1 - t)\varphi''(z + v(z)t) dt \right| \leq |v^2(z)| \int_0^1 |(1 - t)| \underbrace{|\varphi''(z + at)|}_{\leq \frac{C_1}{R}} dt \leq \frac{\widehat{C}}{R}.$$

Tomando-se a norma da derivada de  $1 - v(z)\varphi'(z)$ , temos que:

$$\left| \frac{d}{dz}(1 - v(z)\varphi'(z)) \right| = \underbrace{\left| \frac{d}{dz}v(z)\varphi'(z) \right|}_{\star} = |v'(z)\varphi'(z) + v(z)\varphi''(z)|.$$

Mas, pela fórmula integral de Cauchy aplicada em  $\star$  e considerando  $D = \{\eta : |\eta - z| = \frac{R}{4}\}$ , segue que:

$$\left| \frac{d}{dz}v(z)\varphi'(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_D \frac{v(\eta)\varphi'(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{5C'}{4} \frac{16}{R^2} 2\pi \frac{R}{4} \leq \frac{C_2}{R^2}$$

Assim, temos agora que:

$$|v'(z)\varphi'(z) + v(z)\varphi''(z)| \leq \frac{C_3}{R^2}. \quad (3.2)$$

Mais uma vez, utilizando a fórmula integral de Cauchy, vamos estimar a norma de  $v'(z)$  e de  $v''(z)$ , tomando  $z$  em  $D = \left\{ \eta : |\eta - z| < \frac{R}{2} \right\}$ . Assim:

$$|v'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{v(z)}{(\eta - z)^2} d\eta \right| \leq \frac{C_4}{R}$$

$$|v''(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{v(z)}{(\eta - z)^3} d\eta \right| \leq \frac{C_4}{R^2}.$$

Aplicando agora a fórmula de Taylor para  $|v'(z)|$  no ponto  $z_0 = 0$  com  $|z| < \frac{5}{4}$ , temos que  $|v'(z)| \leq |v'(0)| + |z||v''(0)| \leq |v'(0)| + \frac{C_5}{R^2}$ . De 3.2, continuamos com

$$|v'(z)\varphi'(z) + v(z)\varphi''(z)| \leq \underbrace{|v'(z)|}_{\leq |v'(0)| + \frac{C_5}{R^2}} \cdot \underbrace{|\varphi'(z)|}_{\leq C'} + \underbrace{|v(z)|}_{\geq \frac{3}{4}} |\varphi''(z)| \leq \frac{C_3}{R^2}$$

$$|\varphi''(z)| \leq \widehat{C}_1 \left( \frac{1}{R^2} + |v'(0)| \right),$$

desde que  $|z| < \frac{5}{4}$ . Por fim, temos que

$$|1 - \varphi'(z)v(z)| = \left| v^2(z) \int_0^1 (1-t)\varphi''(z + v(z)t) dt \right| \leq \widehat{C}_2 |\varphi''(z)| \leq \widehat{C}_3 \left( \frac{1}{R^2} + |v'(0)| \right).$$

Em particular, temos que

$$|1 - \varphi'(0)v(0)| \leq \widehat{C}_3 \left( \frac{1}{R^2} + |v'(0)| \right) \leq \frac{\widehat{C}_4}{R}.$$

Para obtermos a desigualdade pretendida, basta generalizarmos para qualquer  $z_0 \in \mathbb{C}$  e multiplicarmos pela norma de  $\frac{1}{v(z_0)}$ , uma vez que  $\frac{3}{4} < |v(z)| < \frac{5}{4}$ , para  $z \in \mathcal{V}$ , portanto

$$\left| \frac{1}{v(z_0)} - \varphi'(z_0) \right| = \left| \varphi'(z_0) - \frac{1}{v(z_0)} \right| \leq \widetilde{C}_1 \left( \frac{1}{R^2} + |v'(z_0)| \right) \leq \frac{\widetilde{C}_2}{R}.$$

2. Precisamos demonstrar o item que majora a diferença da coordenada de Fatou e do fluxo constante  $v(z) = \frac{dz}{dt}$ . Veja bem que  $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}) > \widetilde{C}_3|z|$ , com  $\widetilde{C}_3 > 0$ , dentro do setor



$\rho'_1 < \arg(z) < \rho'_2$ . Assim, podemos usar a desigualdade no item anterior para a região  $\{w : |w - z| < \tilde{C}_3|z|\}$ , portanto temos:

$$\underbrace{\left| \varphi'(z) - \frac{1}{v(z)} \right|}_{\star\star} \leq \tilde{C}_1 \left( \frac{1}{(\tilde{C}_3|z|)^2} + |v'(z_0)| \right) \leq \tilde{C}_4 \left( \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^{1+\nu}} \right).$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima em um caminho menor  $R_2$ , obtemos a desigualdade procurada:

$$\left| \varphi(z) - \int_{z_0}^z \frac{d\eta}{v(\eta)} - \xi \right| \leq C^* \left( \frac{1}{|z|} + \frac{C}{|z|^\nu} \right).$$

□

*Demonstração do teorema:*

Vimos que as coordenadas de Fatou seguem um comportamento semelhante ao tempo 1 do fluxo constante  $v(z) = \frac{dz}{dt}$ . A proposição anterior mostra que as coordenadas de Fatou e a solução para o fluxo  $\left( t = \int_{z_0}^z \frac{d\eta}{v(\eta)} \right)$  são, de fato, próximas, sendo a distância entre elas limitada por  $C^* \left( \frac{1}{|z|} + \frac{C}{|z|^\nu} \right)$ , com  $z \in \mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho_1 < \arg(z) < \rho_2; \rho_2 < \rho_1 + 2\pi\}$ .

Agora, vamos considerar que  $v(z) = f_0^*(z) - z = 1 + \frac{a}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ , com  $z \in \mathcal{V}$  e vamos usar  $\varphi = \varphi^\pm$ , pois a demonstração serve tanto para a atratora quanto para a repulsora. Por hipótese,  $|v'(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ . Assim, a desigualdade em  $\star\star$  implica que  $\left| \varphi'(z) - \frac{1}{v} \right| \leq \frac{\hat{C}}{|z|^2}$  que então nos dá

$$\left| \varphi^\pm(z) - \int_{z_0}^z \frac{d\eta}{v(\eta)} - \xi \right| \leq C_5 \frac{1}{|z|}.$$

Precisamos da forma de  $\frac{1}{v(z)}$  e, utilizando o conhecimento sobre o inverso multiplicativo de uma série de potências, podemos afirmar que  $\frac{1}{v(z)} = 1 - \frac{a}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ . Daí, temos que

$$\varphi^\pm(z) \approx \int_{z_0}^z \frac{d\eta}{v(\eta)} + c^\pm = \int_{z_0}^z \left( 1 - \frac{a}{\eta} + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \right) d\eta + c^\pm = z - a \log z + c^\pm + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

portanto, temos que o comportamento assintótico das coordenadas de Fatou é dado por

$$\varphi^\pm(z) = z - a \log z + c^\pm + o(1),$$

quando  $z \rightarrow \infty$ .

□

*As coordenadas de Fatou são únicas, a menos de uma constante. Podemos normalizar  $\varphi^+$  e  $\varphi^-$ , através de um acréscimo de uma constante, tal que:*

$$\varphi^-(w) - \varphi^+(w) \rightarrow 0,$$

*sempre que  $w \in \Omega^- \cap \Omega^+$  e  $Im(w) \rightarrow \infty$ . Consequentemente, é automático que*

$$\varphi^-(w) - \varphi^+(w) \rightarrow 2\pi ia,$$

sempre que  $w \in \Omega^- \cap \Omega^+$  e  $Im(w) \rightarrow -\infty$ .

Essa normalização é justificada pela escolha das ramificações do logaritmo complexo nas expressões de  $\varphi^\pm$ , pois temos que elas diferem na componente inferior de  $\Omega^+ \cap \Omega^-$  por  $2\pi i$  e coincidem na componente superior da mesma região. Se a constante  $a$  é não nula,  $\varphi^+$  e  $\varphi^-$  não podem coincidir, justamente por causa das ramificações escolhidas do logaritmo em  $\Omega^+ \cap \Omega^-$ .

**Definição 3.1.7.** Através de uma composição com a mudança de coordenadas  $I$ , podemos obter as coordenadas de Fatou nas pétalas. Assim,  $\varphi_+ = \varphi^+ \circ I : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{C}$  será chamada de **coordenada de Fatou repulsora** de  $f_0$ . Da mesma forma,  $\varphi_- = \varphi^- \circ I : \Omega_- \rightarrow \mathbb{C}$  será chamada de **coordenada de Fatou atratora** de  $f_0$ .

### Definição 3.1.8. Cilindros de Écalle

Considere a relação de equivalência  $z \sim f_0(z)$ , se  $z$  e sua imagem por  $f_0$  ambos pertencerem à mesma pétala. Vamos construir o conjunto quociente de  $S_-$  utilizando a relação de equivalência considerada e identificando  $z \in I^{-1}(l^-)$  e  $f_0(z) \in I^{-1}(f_0^*(l^-))$ . Assim, temos o cilindro topológico:

$$C_- = S_- / \sim, \quad \text{com } z \sim f_0(z).$$

De forma semelhante, define-se  $C_+ = S_+ / \sim$ . Assim, chamamos  $C_-$  de cilindro de Écalle de chegada e  $C_+$  de cilindro de Écalle de saída. Ambos os cilindros herdam a estrutura da superfície de Riemann, uma vez que  $f_0$  é um mapa conforme.

### 3.1.2 Mapa de transição (*Horn Map*)

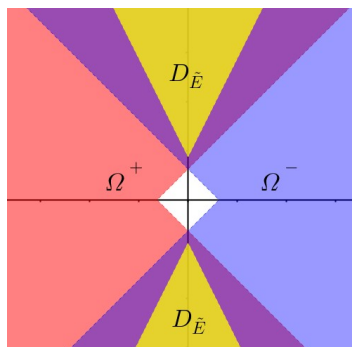
Nesta seção vamos definir os conceitos a respeito do mapa de transição. Com relação aos cilindros de Écalle, o mapa de transição tem o papel de fazer uma correspondência entre vizinhanças nas “extremidades” do cilindro  $C_+$  com vizinhanças nas “extremidades” do cilindro  $C_-$ . Basicamente, o mapa nos diz que, tomando um número complexo na região fundamental  $S^+$ , sendo sua parte imaginária suficientemente grande, a sua órbita eventualmente chegará na região fundamental  $S^-$ .

**Definição 3.1.9.** Considere a região  $D_{\tilde{E}} = \{w : |Im(w)| > b_1 + 2|Re(w)|\}$ . Se  $b_1 > 0$  for suficientemente grande, podemos definir, nesta região, o mapa  $\tilde{E}_{f_0} = \varphi_- \circ (\varphi_+)^{-1} = \varphi^- \circ (\varphi^+)^{-1}$ . A partir da definição, o mapa  $\tilde{E}_{f_0}$  satisfaz a seguinte propriedade:

$$\tilde{E}_{f_0}(w + 1) = \tilde{E}_{f_0}(w) + 1$$

É fácil verificar esta propriedade, uma vez que, considerando  $\varphi^{-1}(w + 1) = f \circ \varphi^{-1}(w)$ , temos

$$\tilde{E}_{f_0}(w + 1) = (\varphi_- \circ (\varphi_+)^{-1})(w + 1) = \varphi_- \circ f \circ (\varphi_+^{-1}(w)) = \varphi_- \circ \varphi_+^{-1}(w) + 1 = \tilde{E}_{f_0}(w) + 1$$



**Figura 3.6:** Representação do domínio de  $\tilde{E}_{f_0}$  colorido em amarelo

**O mapa de transição**

O mapa  $\tilde{E}_{f_0}$  está definido em  $D_{\tilde{E}} = \{w : |Im(w)| > b_1 + 2|Re(w)|\}$  e satisfaz  $\tilde{E}_{f_0}(w + 1) = \tilde{E}_{f_0}(w) + 1$ . A partir da relação acima, podemos estender o mapa  $\tilde{E}$  na região  $\{w : |Im(w)| > \eta_0\}$ , onde  $\eta_0 > 0$  grande.

Fazendo uso do mapa exponencial  $\pi(z) = e^{2\pi iz}$ , podemos definir o mapa de transição. Considere  $\eta_0 > 0$  como antes, definimos:

$$D_{E_{f_0}} := \{0 < |w| < e^{-2\pi\eta_0}\} \cup \{e^{2\pi\eta_0} < |w| < \infty\}$$

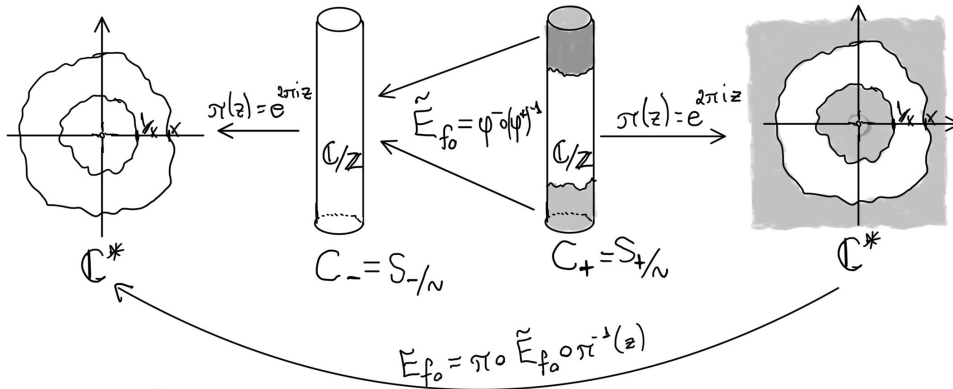
Agora, podemos definir o mapa  $E_{f_0} : D_{E_{f_0}} \rightarrow \mathbb{C}^*$  por:

$$E_{f_0} = \pi \circ \tilde{E}_{f_0} \circ \pi^{-1} = \pi \circ \varphi_- \circ (\varphi_+)^{-1} \circ \pi^{-1} = (\pi \circ \varphi_-) \circ (\pi \circ \varphi_+)^{-1}$$

Chamaremos o mapa  $E_{f_0}$  de **mapa de transição** ou de **transformação de Ecalle**.

Deste modo, definimos um mapa de transição a partir de um isomorfismo relacionando os cilindros de Ecalle com o plano complexo sem o ponto fixo 0, ou seja, definimos um mapa de transição localizado próximo das pontas das regiões com formato de croissant em torno da vizinhança do ponto fixo.

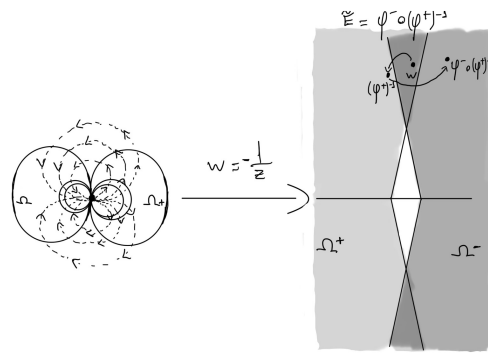
O comportamento assintótico de  $\varphi^\pm$  nos mostra que  $\tilde{E}_{f_0}(w) - w$  tende a um limite, denotando-o, por exemplo, como  $m_+$ , quando  $Im(w) \rightarrow \infty$  e a outro, por exemplo  $m_-$ , quando  $Im(w) \rightarrow -\infty$ . Daí,  $E_{f_0}$  se estende analiticamente para 0 e  $\infty$ , obtendo-se  $E_{f_0}(0) = 0$  e  $E_{f_0}(\infty) = \infty$ , onde  $E'_{f_0}(0) \neq 0$  e  $E'_{f_0}(\infty) \neq 0$ . A exponencial na composição faz com que a extremidade superior ( $+i\infty$ ) seja enviado para 0 e a extremidade inferior ( $-i\infty$ ) seja enviada para  $+\infty$ .



**Figura 3.7:** Representação do ação dos mapas  $\tilde{E}_{f_0}$  e  $E_{f_0}$  sobre as extremidades de  $C_-$

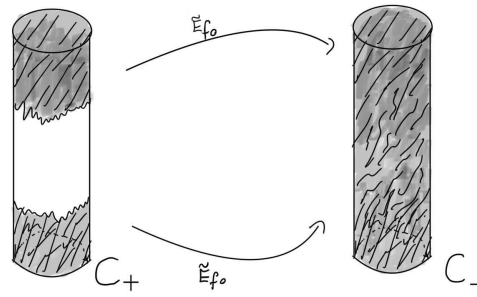
Assim, construímos o mapa de transição, definido em uma vizinhança localizada nas “pontas” do cilindro de saída  $C_+$ , que leva a dinâmica de  $C_+$  para  $C_-$ .

Veja como funciona esta dinâmica nos dois planos:



**Figura 3.8:** Representação da ação da transformação de Ecalle nos planos

Veja na próxima imagem a dinâmica da transformação de Ecalle nos cilindros topológicos.



**Figura 3.9:** Representação da ação da transformação de Ecalle no cilindro  $C_+$



## 4 Bifurcação Parabólica

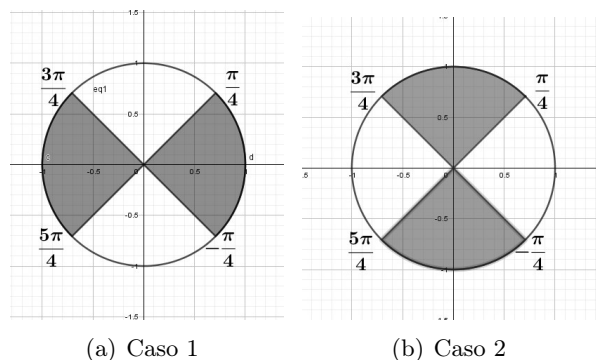
Nesta seção, vamos estudar o comportamento da dinâmica a partir de uma pequena perturbação da função  $f_0$  apresentada anteriormente. Para o desenvolvimento deste capítulo, estudamos os teoremas e proposições publicados no capítulo 3, “Local theory of parabolic bifurcation”, da obra de Shishikura, intitulada “Bifurcation of Parabolic fixed points”, referenciada neste trabalho.

Um dos cenários principais a ser estudado tem um comportamento intrigante. Como visto, antes de  $f_0$  ser perturbada, 0 é um ponto fixo parabólico de multiplicidade 2. Após  $f_0$  sofrer a perturbação, tal ponto fixo parabólico bifurca-se em dois pontos fixos. Seus multiplicadores (o valor absoluto das derivadas em cada ponto fixo) são próximos de 1, assim eles podem ser atratores, repulsores ou indiferentes.

Na seção anterior, vimos que as órbitas de  $f_0(z) = z + z^2 + \dots$  estão contidas em curvas similares a círculos. A aparência das órbitas após a perturbação não muda muito, ou seja, ainda se parecem com curvas “quase circulares”, entretanto há dois casos:

1. o ponto fixo 0 bifurca-se em dois pontos fixos, um atrator e outro repulsor, em direções opostas no plano complexo, fazendo com que as órbitas fluam do ponto fixo repulsor em trajetórias que convergem para o ponto fixo atrator. Nesta situação, o multiplicador  $\lambda$  de um dos pontos fixos que bifurcaram em 0 está mais próximo do eixo real do que do imaginário no círculo unitário, i.e.  $\arg(\lambda - 1) \in \left[ \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$ ;
2. conhecido como “batedor de ovos”, o ponto fixo 0 bifurca-se também em dois pontos fixos em direções opostas, mas desta vez as órbitas podem passar por uma abertura entre eles. Nesta situação, diferentemente do caso 1, o multiplicador  $\lambda$  de um dos pontos fixos que bifurcaram em 0 está mais próximo do eixo imaginário do que do eixo real no círculo unitário, i.e.  $\arg(\lambda - 1) \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$ .

**Figura 4.1:** Localização dos multiplicadores  $\lambda$  e  $\lambda'$  em cada caso



No primeiro caso, a mudança no comportamento das órbitas ao longo das iterações não se altera de forma drástica. Assim, o foco do nosso estudo concentra-se no segundo caso.

No estudo da bifurcação dos pontos fixos parabólicos de funções polinomiais quadráticas, Fatou e Julia usaram uma importante relação com respeito ao comportamento dos multiplicadores em tais

pontos. Para os polinômios quadráticos, existem dois pontos fixos finitos, assim dois multiplicadores,  $\lambda$  e  $\lambda'$ , a serem considerados. Sendo a relação

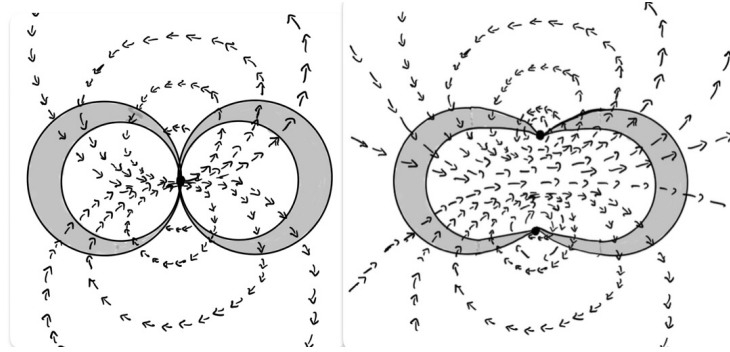
$$\frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda' - 1},$$

limitada na vizinhança de 1, eles devem estar em direções opostas no círculo unitário, assim podemos considerar qualquer um deles na discussão anterior.

Essa relação surge pela definição de *índices holomorfos* para uma função complexa quadrática. Vamos mostrar esta relação com mais detalhes no apêndice B, na página 51 do trabalho.

Analisando o segundo caso, o “bateador de ovos”, é possível que, ao longo de um grande número de iterações, tais órbitas passem pela abertura muitas vezes antes de sair da vizinhança dos pontos fixos. Esse modelo de órbitas provoca grandes mudanças na dinâmica global e até mesmo no conjunto de Julia, porém o efeito da perturbação no parâmetro pode acumular durante a iteração, dificultando o controle do processo.

É importante ressaltar que, após a perturbação no parâmetro, os elementos estudados na seção anterior ainda vão existir, tais como as regiões fundamentais e os cilindros de Ecalle. Contudo, diferentemente do caso não perturbado, as pontas da região em forma de croissant serão localizadas cada uma em um ponto fixo.



**Figura 4.2:** À esquerda a dinâmica do caso não perturbado e à direita a dinâmica do 2º caso após a perturbação

## 4.1 Configuração básica das funções perturbadas

Ao perturbar  $f_0(z) = z + z^2 + \dots \in F_0$ , obtemos uma função próxima de  $f_0$  com dois pontos fixos próximos do ponto fixo de  $f_0$ , no caso, 0. Ao fazermos uma translação a partir de uma mudança de coordenadas próximo da identidade, um desses pontos fixos é transladado para a origem e então  $f$  admite a forma

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

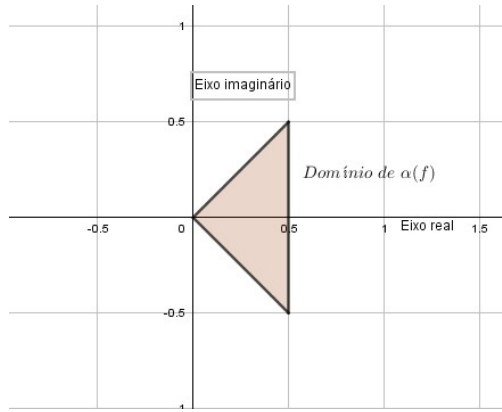
Note que há duas escolhas de ponto fixo para transladar para a origem.

Vamos considerar a família de funções

$$\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ está definida e é analítica na vizinhança da origem, } f(0) = 0, f'(0) \neq 0\}.$$

Como 0 vem da bifurcação de um ponto fixo parabólico, escrevemos a derivada de  $f$  em 0 como  $f'(0) = e^{2\pi i \alpha(f)}$ , tomando  $\alpha(f) \in \mathbb{C}$ , com  $-\frac{1}{2} < \text{Re}(\alpha(f)) \leq \frac{1}{2}$ . Com isso, concentraremos nosso foco nos mapas pertencentes à seguinte família de funções:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ f \in \mathcal{F} : \left| \arg \alpha(f) \right| < \frac{\pi}{4} \right\}.$$



**Figura 4.3:** Domínio de  $\alpha(f)$ .

Vamos agora encontrar uma relação para o valor do outro ponto fixo, denotado por  $\sigma = \sigma(f)$ . Observe que  $\sigma(f)$  é uma das soluções de  $f(z) - z = 0$ . Relembramos que  $f'(0) = e^{2\pi i \alpha(f)}$  e  $f''(0) \sim f_0''(0) = 1$ . Assim, substituindo esses dados na equação com  $z \neq 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \lambda z - z + a_2 z^2 + O(z^3) &= 0 \\ e^{2\pi i \alpha} z - z + a_2 z^2 + O(z^3) &= 0 \\ (e^{2\pi i \alpha} - 1)z + a_2 z^2 + O(z^3) &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando a expansão de Taylor para  $e^{2\pi i \alpha}$  e substituindo-a na expressão, obtemos que

$$\begin{aligned} (1 + 2\pi i \alpha + O(\alpha^2) - 1)z + a_2 z^2 + O(z^3) &= 0 \\ 2\pi i \alpha + O(\alpha^2) + a_2 z + O(z^2) &= 0 \\ \sigma(f) = z = -2\pi i \alpha + O(\alpha^2) + O(z^2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Observe que quando  $\alpha \rightarrow 0$  o termo  $O(z^2) \rightarrow 0$  e, portanto,  $\sigma(f)$  possui a seguinte expansão assintótica:

$$\sigma(f) = -2\pi i \alpha(f)(1 + o(1)),$$

ou seja,  $\sigma(f) = O(\alpha)$  ao passo que  $f \rightarrow f_0$ .

#### **Definição 4.1.1. Topologia compacto-aberto com o domínio de definição**

Dizemos que dois mapas são considerados distintos se eles possuem domínios diferentes, mesmo que porventura um seja uma extensão do outro. Uma vizinhança de um mapa analítico  $f : D(f) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  será definida como um conjunto formado por

$$\{g : D(g) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid g \text{ é analítica, } D(g) \supset K \text{ e } \sup_{z \in K} d(g(z), f(z)) < \epsilon\},$$

considerando  $K$  um compacto em  $D(f)$ ,  $\epsilon > 0$  e  $d(\cdot, \cdot)$  a métrica esférica.

Vamos definir a topologia compacto-aberto com o domínio de definição como o sistema de vizinhanças, no qual uma sequência de funções converge uniformemente em cada subconjunto compacto do domínio se, e somente se, para todo compacto  $K \subset D(f)$  existir um  $n_0 > 0$  tal que se  $n > n_0$ ,  $K \subset D(f_n)$  e  $f_n|_K \rightarrow f|_K$  uniformemente em  $K$  com  $n \rightarrow \infty$ .

A topologia compacto-aberto geralmente é utilizada em estudos envolvendo espaço de funções e pode ser aplicada na teoria de homotopia e análise funcional. Foi primeiramente desenvolvida por Ralph Fox em 1945, mas logo ela também se revelou uma topologia natural e interessante, localmente convexa, do ponto de vista teórico da medida. De fato, nas últimas seis décadas, a



topologia compacto-aberto tem sido amplamente estudada do ponto de vista da topologia geral, bem como da teoria da medida topológica.

#### 4.1.1 Coordenada de desdobramento

Para estudarmos a dinâmica após a perturbação do parâmetro em  $f$  de modo similar ao estudo da dinâmica de  $f_0$  que fizemos na seção anterior, isto é, utilizando regiões fundamentais, coordenadas de Fatou e cilindros de Ecalle, vamos introduzir uma nova coordenada a fim de que o mapa  $f$  se pareça com uma translação, com um pequeno erro comparado à translação por 1. Essa coordenada chama-se *coordenada de desdobramento* e a denotamos por  $w$ .

##### Definição 4.1.2. A mudança de coordenadas a partir de $w$

Suponha que  $f \in \mathcal{F}$  e  $\alpha = \alpha(f) \neq 0$ . Apresentamos uma nova coordenada  $w \in \mathbb{C}$  de modo que  $z$  seja dada através da transformação:

$$\tau_f(w) = z = \frac{\sigma}{1 - e^{-2\pi i \alpha w}}.$$

Assim, podemos definir a translação  $T_f(w)$  a partir dessa transformação, obtendo

$$T_f(w) = w - \frac{1}{\alpha}.$$

Veremos, no decorrer do nosso estudo, que  $T_f$  será responsável por nos dizer, dependendo da variação de  $\alpha(f)$ , como será o formato da região onde a nossa dinâmica estará definida. De forma resumida,  $T_f$  regula o quão inclinado o eixo central da região está e também o afastamento das fronteiras da região.

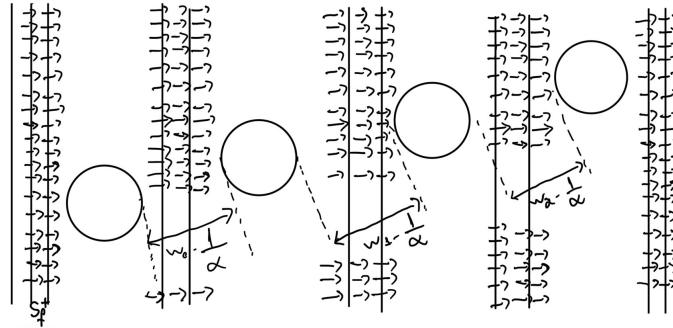


Figura 4.4: A coordenada de desdobramento  $\tau_f$  e a ação da translação  $T_f$

A partir da definição acima e tomando  $f$  suficientemente próxima de  $f_0$  (com  $\alpha(f) \neq 0$ ), podemos listar algumas propriedades da transformação  $\tau_f$ .

##### Proposição 4.1.3. Resultados acerca de $\tau$

1. O mapa  $\tau_f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \sigma\}$  é um recobrimento universal, cujo grupo de transformação de recobrimento é gerado pela translação  $T_f$ . Além disso,  $\tau_f(w) \rightarrow 0$  quando  $Im(\alpha w) \rightarrow +\infty$  e  $\tau_f(w) \rightarrow \sigma$  quando  $Im(\alpha w) \rightarrow -\infty$ .
2. Defina  $\tau_0(w) = I^{-1}(w) = -\frac{1}{w}$ , então temos

$$\sup_{w \in A} d(\tau_f(w), \tau_0(w)) \xrightarrow{f \rightarrow f_0} 0,$$

$d(\cdot, \cdot)$  representa a métrica esférica em  $\widehat{\mathbb{C}}$  e  $A$  é o conjunto dado por  $\left\{ w : |Re(\alpha w)| < \frac{3}{4} \right\}$ .

3. Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $R_0 > 0$  independente de  $f$  tal que se

$$w \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_f^n D_{R_0} \quad \text{então} \quad |\tau_f(w)| < \epsilon,$$

com  $D_{R_0} = \{w' : |w'| < R_0\}$ .

*Demonstração.* 1. Está claro, uma vez que é suficiente calcular os limites em  $\tau_f(w)$ .

2. Seja a função  $\frac{1}{1 - e^{-2\pi i \xi}} - \frac{1}{2\pi i \xi}$ . Observe que esta função é analítica no conjunto  $\{\xi : |Re(\xi)| < 3/4\}$  e limitada na fronteira desse conjunto, inclusive quando  $Im(\xi) \rightarrow \pm\infty$ . Por consequência do princípio do valor máximo<sup>1</sup>, a função também é limitada no interior de tal região. Assim, temos que  $\left| \tau_f - \frac{-\sigma\tau_0}{2\pi i \alpha} \right| < C|\sigma|$ . Como o termo  $-\frac{\sigma}{2\pi i \alpha} \rightarrow 1$ , então a afirmação é verificada. Cabe ressaltar que a demonstração ainda é satisfeita para  $0 < k < 1$  no conjunto  $\{\xi : |Re(\xi)| < k\}$ .

3. Veja que se  $R_0$  é suficientemente grande, pelo item 2,  $\tau_f(\partial D_{R_0})$  está contido em um pequeno disco em torno da origem. □

Vamos estudar a dinâmica de  $f$  usando a coordenada  $w$ . Mas, primeiro, vamos construir um novo mapa dependente dos pontos fixos em uma pequena vizinhança  $V$  da origem. Vamos definir o mapa analítico  $u_f : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  envolvendo os pontos fixos por

$$u_f(z) = \frac{f(z) - z}{z(z - \sigma)}.$$

Veja que, se  $f = f_0$ ,  $\sigma(f_0) = 0$ , pois 0 é o único ponto fixo com multiplicidade 2 para  $f_0$ , logo

$$u_{f_0}(z) = \frac{f_0(z) - z}{z^2} = 1 + O(z).$$

Através de uma integral, podemos ver que as correspondências  $f \rightarrow \sigma(f)$  e  $f \rightarrow u_f(z)$  são contínuas. Além disso, temos que  $\frac{1}{2} < |u_f(z)| < 2$  em  $V$  se supormos que  $\sigma(f) \in V$  e com  $z$  suficientemente pequeno obtemos a seguinte desigualdade:

$$\left| \frac{\sigma(f)u_f(z)}{1 + zu_f(z)} \right| \leq C|\sigma(f)| \leq \frac{1}{2},$$

quando  $f \in \mathcal{F}$  está suficientemente próxima de  $f_0$  e  $R_0 > 0$  é grande, tomando  $w \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_f^n D_{R_0}$  e  $z = \tau_f(w)$ .

**Definição 4.1.4.** Vamos definir agora a função que desenvolverá um papel fundamental na conjugação parcial, usando a coordenada de desdobramento  $w$ . Tal função possui uma dinâmica similar à de  $f_0^*$ . Seja  $D(F_f) \equiv \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_f^n D_{R_0}$ , vamos definir  $F_f : D(F_f) \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$F_f(w) = w + \frac{1}{2\pi i \alpha(f)} \log \left( 1 - \frac{\sigma(f)u_f(z)}{1 + zu_f(z)} \right),$$

onde  $z = \tau_f(w)$ . Lembrando também que consideramos o ramo principal do logaritmo complexo, i.e.  $-\pi < Im[\log(\cdot)] < \pi$ .

<sup>1</sup>O princípio do valor máximo, advindo do estudo de equações parciais parabólicas e elípticas, nos diz que se a função em questão, definida em um determinado domínio, admite um máximo, ou seja, é limitada, seu máximo pode ser encontrado na fronteira desse domínio.

**Proposição 4.1.5.** Para  $f \in \mathcal{F}$  próxima de  $f_0$ ,  $\alpha(f) \neq 0$  e tomando  $R_0 > 0$  grande o suficiente, podemos descrever algumas propriedades importantes sobre a função  $F_f$ :

1.  $f \circ \tau_f = \tau_f \circ F_f$  e  $T_f \circ F_f = F_f \circ T_f$ ;
2. Para  $w \in D(F_f)$ ,  $|F_f(w) - (w + 1)| < \frac{1}{4}$ ,  $|F'_f(w) - 1| < \frac{1}{4}$ ;
3.  $F_f(w) = w + 1 + O\left(\frac{1}{w^2}\right)$  quando  $Im(\alpha w) \rightarrow +\infty$ ;
4. Denotemos  $F_0 = f_0^* = \tau_0^{-1} \circ f_0 \circ \tau_0$ , assim

$$\sup_{w \in D(F_f)} |F_f(w) - F_0(w)| \rightarrow 0,$$

quando  $f \rightarrow f_0$ .

*Demonstração.* 1. Vamos começar mostrando a primeira relação a partir de  $\tau_f \circ F_f(w)$ . Veja que

$$\begin{aligned} \tau_f \circ F_f(w) &= \frac{\sigma}{1 - e^{-2\pi i \alpha \left( w + \frac{1}{2\pi i \alpha} \log \left( 1 - \frac{\sigma u}{1 + zu} \right) \right)}} \\ &= \frac{\sigma}{1 - \left( 1 - \frac{\sigma u}{1 + zu} \right)^{-1} e^{-2\pi i \alpha w}}. \end{aligned}$$

Mas note que, utilizando a relação apresentada  $\tau_f = z = \frac{\sigma}{1 - e^{-2\pi i \alpha w}}$ , temos como chegar em uma relação para a quantidade  $e^{-2\pi i \alpha w}$ , sendo ela dada por  $e^{-2\pi i \alpha w} = 1 - \frac{\sigma}{z}$ . Agora, substituindo na última igualdade, chegamos a

$$\begin{aligned} \tau_f \circ F_f(w) &= \frac{\sigma}{1 - \left( 1 - \frac{\sigma u}{1 + zu} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{\sigma}{z} \right)} = \frac{\sigma}{1 - \frac{1 + zu}{1 + (z - \sigma)u} \left( 1 - \frac{\sigma}{z} \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\frac{z + z(z - \sigma)u - (z - \sigma)(1 + zu)}{z + z(z - \sigma)u}} = \frac{\sigma(z + z(z - \sigma)u)}{z + z(z - \sigma)u - (z - \sigma)(1 + zu)} \end{aligned}$$

Nesse momento, note que de  $u_f(z) = \frac{f(z) - z}{z(z - \sigma)}$ , temos que  $f(z) = z + z(z - \sigma)u$ . Assim, substituindo em  $\tau_f \circ F_f(w)$ , obtemos

$$\tau_f \circ F_f(w) = \frac{\sigma f(z)}{z + (z - \sigma)(zu - 1 - zu)} = \frac{\sigma f(z)}{\sigma} = f(z) = f \circ \tau_f.$$

Logo, concluímos que  $\tau_f \circ F_f(w) = f \circ \tau_f(w)$ . Veremos agora a segunda relação:

$$\begin{aligned} T_f \circ F_f(w) &= w + \frac{1}{2\pi i \alpha(f)} \log \left( 1 - \frac{\sigma(f)u_f(z)}{1 + zu_f(z)} \right) - \frac{1}{\alpha(f)} \\ &= \left( w - \frac{1}{\alpha(f)} \right) + \frac{1}{2\pi i \alpha(f)} \log \left( 1 - \frac{\sigma(f)u_f(z)}{1 + zu_f(z)} \right) = F_f \circ T_f(w). \end{aligned}$$

Portanto,  $T_f \circ F_f(w) = F_f \circ T_f(w)$ .

2. Vamos provar dois itens, 2 e 4, começando pelo item 4. A partir de  $\left| \frac{\sigma(f)u_f(z)}{1 + zu_f(z)} \right| \leq C|\sigma(f)|$ ,

temos  $\left| \frac{\sigma(f)u_f(z)}{1+zu_f(z)} \right| = O(\alpha)$ , pois  $\sigma(f) = O(\alpha)$  e assim, estimando o logaritmo utilizando expansão em série de Taylor, podemos afirmar que

$$\sup_{w \in D(F_f)} \left| F_f(w) - \left( w - \frac{\sigma u(z)}{2\pi i \alpha (1 + zu(z))} \right) \right| = O(\alpha).$$

Pela periodicidade de  $F_f$ , sendo o seu período  $\frac{1}{\alpha}$ , basta fazer as estimativas em  $\left\{ w : |Re(\alpha w)| \leq \frac{1}{2} \right\} \setminus D_{R_0}$ . Sabemos que, quando  $f \rightarrow f_0$ , então  $\sigma(f) \rightarrow 0$ ,  $u_f(z) \rightarrow u_{f_0} = \frac{f_0(z) - z}{z^2}$  uniformemente em  $V$  e  $\tau_f \rightarrow \tau_0$  uniformemente em  $\left\{ w : |Re(\alpha w)| \leq \frac{1}{2} \right\}$ . Portanto, quando  $f \rightarrow f_0$  e relembando que  $\sigma(f) = -2\pi i \alpha(f)(1 + o(1))$ , temos o seguinte:

$$w - \frac{\sigma(f)u_f(\tau_f(w))}{2\pi i \alpha(f)(1 + \tau_f(w)u_f(\tau_f(w)))} \rightarrow w + \frac{u_{f_0}(\tau_0(w))}{1 + \tau_0(w)u_{f_0}(\tau_0(w))}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} w + \frac{u_{f_0}(\tau_0(w))}{1 + \tau_0(w)u_{f_0}(\tau_0(w))} &= -\frac{1}{\tau_0(w)} + \frac{f_0(\tau_0(w)) - \tau_0(w)}{\tau_0(w)^2 \left( 1 + \tau_0(w) \frac{f_0(\tau_0(w)) - \tau_0(w)}{\tau_0(w)^2} \right)} \\ &= -\frac{1}{\tau_0(w)} + \frac{f_0(\tau_0(w)) - \tau_0(w)}{\tau_0(w)^2 + \tau_0(w)(f_0(\tau_0(w)) - \tau_0(w))} = \frac{-f_0(\tau_0(w)) + f_0(\tau_0(w)) - \tau_0(w)}{\tau_0(w)f_0(\tau_0(w))} \\ &= -\frac{1}{f_0(\tau_0(w))} = \tau_0^{-1} \circ f_0 \circ \tau_0(w) = F_0(w), \end{aligned}$$

sendo esta convergência uniforme na referida região  $\left\{ w : |Re(\alpha w)| \leq \frac{1}{2} \right\} \setminus D_{R_0}$ . Portanto, assim provamos o item 4. De forma semelhante, provamos também o item 2, já que  $F_0(w) = w + 1 + O\left(\frac{1}{w}\right)$  e, se necessário, aumentamos  $R_0$ .

3. Para provar o item 3, veja que  $e^{2\pi i \alpha(f)} = f'(0) = 1 - \sigma(f)u_f(0)$ . Assim, podemos notar que  $F_f(w) - (w + 1) \rightarrow 0$  quando  $Im(\alpha(f)w) \rightarrow +\infty$ . Como  $F_f$  possui período de  $\frac{1}{\alpha}$ , o decaimento precisa ser exponencial. Através da expansão por série de Fourier, concluímos que, quando  $Im(\alpha(f)w) \rightarrow +\infty$ ,  $F_f(w) = w + 1 + O\left(\frac{1}{w^2}\right)$ . □

### 4.1.2 Coordenadas de Fatou

A partir de agora, já temos o necessário para dar início à construção das coordenadas de Fatou e das regiões fundamentais para a dinâmica perturbada. Resumidamente, assim como no caso da função não perturbada  $f_0$ , vamos definir duas regiões, chamadas regiões fundamentais, onde nelas serão definidas dois tipos de coordenadas, a coordenada de Fatou atratora e a coordenada de Fatou repulsora.

**Teorema 4.1.6.** *Considere  $f_0 \in \mathcal{F}$ . Levando em conta a topologia compacto-aberto apresentada anteriormente, em uma vizinhança  $\mathcal{V}_0$  de  $f_0$ , tal que se tomarmos  $f \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{F}_1$ , existem dois conjuntos fechados de Jordan, denotados por  $S_{-,f}$  e  $S_{+,f}$ , e dois mapas analíticos,  $\varphi_{-,f}$  e  $\varphi_{+,f}$ , que satisfazem as propriedades descritas abaixo:*

1. A região  $S_{-,f}$  (respectivamente  $S_{+,f}$ ), é limitada por um arco  $l_-$  e sua imagem por  $f$  (respectivamente  $l_+$  e sua imagem  $f(l_+)$ ), de modo que  $l_{\pm}$  liga os dois pontos fixos  $\{0, \sigma(f)\}$  e satisfaz também  $l_{\pm} \cap f(l_{\pm}) = \{0, \sigma(f)\}$  e  $S_{-,f} \cap S_{+,f} = \{0, \sigma(f)\}$ ;
2. Considerando a região  $S'_{\pm,f} = S_{\pm,f} \setminus \{0, \sigma(f)\}$ , podemos definir  $\varphi_{\pm,f}$  de modo que ela seja analítica e injetiva em uma vizinhança de  $S'_{\pm,f}$ ;
3. Tomando  $z \in S'_{-,f}$ , existe  $n \geq 1$  tal que  $f^n(z) \in S'_{+,f}$  e para o menor  $n$  possível, temos que

$$\varphi_{+,f}(f^n(z)) = \varphi_{-,f}(z) - \frac{1}{\alpha(f)} + n;$$

4. Fazendo  $f \in \mathcal{F}_1$  tender para  $f_0$ , temos então que  $S_{\pm,f} \rightarrow S_{\pm,f_0} \cup \{0\}$  na métrica de Hausdorff e  $\varphi_{\pm,f} \rightarrow \varphi_{\pm,f_0}$  na topologia compacto-aberto.

*Demonstração.* Vamos começar definindo os conjuntos onde nosso estudo acontecerá. Considere  $\mathcal{V}$  uma vizinhança de  $f_0 \in \mathcal{F}$ , na qual todas as propriedades a respeito da coordenada de desdobramento sejam válidas para  $f \in \mathcal{F}$ , com  $\alpha(f) \neq 0$ . Em todo o desenvolvimento da demonstração, vamos tomar  $f \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_1$ , ou seja,  $\alpha(f) \neq 0$  e  $|\arg(\alpha(f))| < \frac{\pi}{4}$ .

Tome  $\gamma_1 > 0$  e considere

$$\Omega_f^- = Q\left(\gamma_1, -\gamma_1 + \frac{1}{\alpha(f)}\right) \quad \text{e} \quad \Omega_f^+ = T_f(\Omega_f^-) = Q\left(\gamma_1 - \frac{1}{\alpha(f)}, -\gamma_1\right),$$

onde a região  $Q(\cdot, \cdot)$  é definida da mesma forma que no caso não perturbado, isto é, no nosso caso temos

$$\begin{cases} \Omega_f^- = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w - \gamma_1) > -|\operatorname{Im}(w - \gamma_1)|, \operatorname{Re}\left(w + \gamma_1 - \frac{1}{\alpha(f)}\right) < \left| \operatorname{Im}\left(w + \gamma_1 - \frac{1}{\alpha(f)}\right) \right| \right\} \\ \Omega_f^+ = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(w - \gamma_1 + \frac{1}{\alpha(f)}\right) > -\left| \operatorname{Im}\left(w - \gamma_1 + \frac{1}{\alpha(f)}\right) \right|, \operatorname{Re}(w + \gamma_1) < |\operatorname{Im}(w + \gamma_1)| \right\} \end{cases}$$

e, se  $\gamma_1$  for grande o suficiente, então  $\Omega_f^{\pm} \subset D(F_f)$ ,  $\forall f \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_1$ .

Podemos fixar dois pontos  $w^{\pm} \in \Omega_f^{\pm}$ , para toda  $f \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_1$ , de modo que  $\operatorname{Re}(w^-) > \gamma_1$ ,  $\operatorname{Re}(w^+) < -\gamma_1 - \frac{5}{4}$  e  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha(f)}\right) > 2(\gamma_1 + 1)$ .

Lembremos que, anteriormente, definimos a função  $F_f(w)$  tal que  $|F_f(w) - (w + 1)| < \frac{1}{4}$  e  $|F'_f(w) - 1| < \frac{1}{4}$  em  $\Omega_{\pm,f}$ . Assim, conseqüentemente, podemos utilizar as propriedades da proposição 3.1.4. Pelo item 2 daquela proposição, existe duas regiões,  $S_f^+ \subset \Omega_f^+$  e  $S_f^- \subset \Omega_f^-$ , que são limitadas por  $l^{\pm} = \{w^{\pm} + iy : y \in \mathbb{R}\}$  e por  $F_f(l^{\pm})$ . Tais regiões serão as **regiões fundamentais** para  $f \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_1$ .

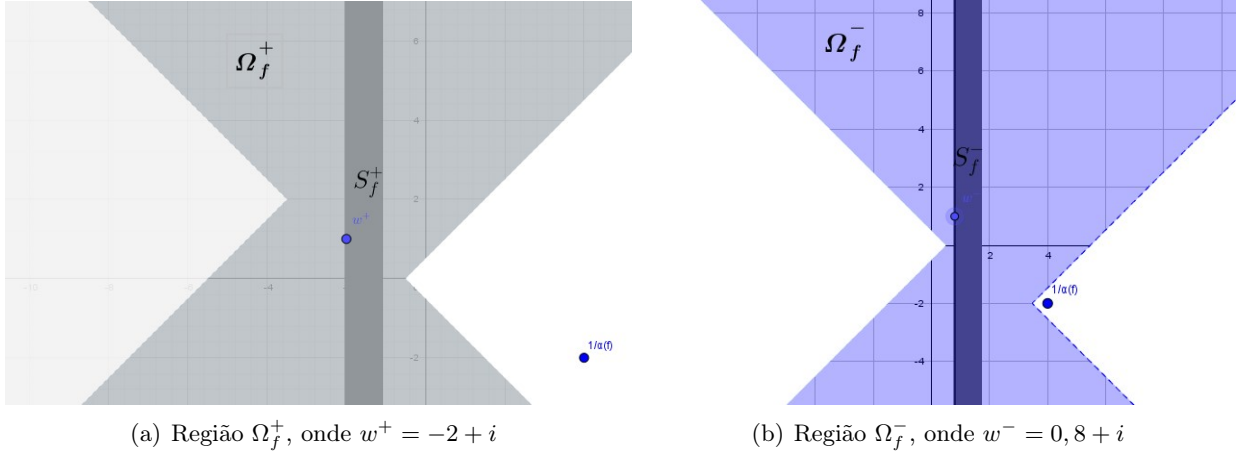
Pelo item 3 da mesma proposição, existem dois mapas univalentes e analíticos,  $\varphi_f^+ : \Omega_f^+ \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\varphi_f^- : \Omega_f^- \rightarrow \mathbb{C}$ , que satisfazem

$$\varphi_f^+(F_f(w)) = \varphi_f^+(w) + 1 \quad \text{e} \quad \varphi_f^-(F_f(w)) = \varphi_f^-(w) + 1.$$

Além disso,  $\varphi_f^{\pm}(w^{\pm}) = \varphi_{f_0}^{\pm}(w^{\pm})$ .

Agora, se aplicarmos a mudança de coordenadas  $\tau_f(w)$  em  $S_f^{\pm}$  e  $l^{\pm}$ , obtemos uma correspondência entre o plano cartesiano usando a coordenada  $w$  e as pétalas atratora e repulsora usando a coordenada  $z$ . Neste caso,  $S_{\pm,f}$  e  $l_{\pm}$  são as imagens pela mudança de coordenadas  $\tau_f$  com os dois pontos fixos adicionados,  $\{0, \sigma(f)\}$ .

**Figura 4.5:** Exemplo de dois domínios  $\Omega_f^+$  e  $\Omega_f^-$  com suas respectivas regiões fundamentais, usando  $\frac{1}{\alpha(f)} = 4 - 2i$  e  $\gamma_1 = \frac{1}{2}$



Agora, podemos provar a afirmação 1 da proposição em questão. Veja que, para provar que  $S_{-,f} \cap S_{+,f} = \{0, \sigma(f)\}$ , é suficiente provar que

$$S_f^- \cap \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_f^n S_f^+ \right) = \emptyset.$$

E isso acontecerá se  $\left| \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\alpha(f)} \right) \right|$  for grande o suficiente, uma vez que quanto mais próximo da origem e do eixo real  $\alpha$  estiver mais distante  $\frac{1}{\alpha}$  se torna da origem e, assim, mais distante fica  $S_f^-$  da translação  $T$  aplicada em  $S_f^+$ .

Para chegarmos na expressão para as coordenadas de Fatou nas pétalas atratora e repulsora,  $\varphi_{\pm, f}$ , vamos defini-las como

$$\varphi_{\pm, f} = \varphi_f^{\pm} \circ (\tau_f |_{S_f^{\pm}})^{-1},$$

uma vez que  $\tau_f$  é injetora numa vizinhança de  $S_f^{\pm}$ , logo podemos estender  $(\tau_f |_{S_f^{\pm}})^{-1}$  a uma vizinhança de  $S'_{\pm, f}$ . Utilizando isso e a forma como foi construída  $\varphi_{\pm}$ , mostramos a propriedade 2 da nossa proposição.

O item 4 decorre da definição das coordenadas de Fatou e do seguinte lema:

**Lema 4.1.7.** Se fixarmos  $z_0 \in Q$  e normalizarmos  $\varphi_{f_0^*}$  de modo que  $\varphi_{f_0^*}(z_0) = 0$ , teremos uma correspondência contínua  $f_0^* \rightarrow \varphi_{f_0^*}$  com respeito à topologia compacto-aberta, tendo  $f_0^*$  as propriedades na proposição 3.1.4.

*Demonstração.* Utilizando as funções  $f$  e  $f_0^*$  definidas em  $Q$  e com as mesmas propriedades na proposição 3.1.4, podemos construir as funções  $G$  e  $H$  para  $f$  e  $G_{f_0^*}$  e  $H_{f_0^*}$  para  $f_0^*$  e temos  $\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \div \frac{\partial G}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial G_{f_0^*}}{\partial \bar{z}} \div \frac{\partial G_{f_0^*}}{\partial z}$  quando  $f \rightarrow f_0^*$ , em qualquer compacto de  $\{z | 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ , pois  $G \rightarrow G_{f_0^*}$  pela construção de  $G$  e  $H \rightarrow H_{f_0^*}$  pelo Teorema da aplicação de Riemann Mensurável com parâmetros. Assim,  $\sigma_f = G^* \sigma_0 \rightarrow \sigma_{f_0^*} = G_{f_0^*}^* \sigma_0$  e  $H \rightarrow H_{f_0^*}$  em qualquer compacto quando  $f \rightarrow f_0^*$ . Por fim, após estender  $\varphi$ , temos que  $\varphi \rightarrow \varphi_{f_0^*}$  quando  $f \rightarrow f_0^*$ .  $\square$

Vamos dar enfoque então na prova do item 3 de nossa proposição. Para dar suporte à construção do que será apresentado, precisaremos enunciar e provar um lema muito útil.

**Lema 4.1.8.**

$$\varphi_f^+ \circ T_f(w) - \varphi_f^-(w) + \frac{1}{\alpha(f)} \rightarrow 0, \text{ quando } f \rightarrow f_0.$$

*Demonstração.* Note que a composição  $\varphi_f^+ \circ T_f$  está definida em  $\Omega_f^-$ , uma vez que  $T_f^{-1}(\Omega_f^+) = \Omega_f^-$ , logo satisfaz a mesma equação funcional que  $\varphi_f^-$ . De acordo com a unicidade apresentada na proposição 3.1.4 (proposição acerca das propriedades das coordenadas de Fatou para o caso não perturbado), existe uma constante  $d$ , dependente de  $f$  tal que

$$\varphi_f^+ \circ T_f = \varphi_f^- + d$$

Vamos relembrar que na proposição 4.1.5 vimos que, quando  $Im(\alpha(f)w) \rightarrow \infty$ ,  $F_f(w) = w + 1 + O\left(\frac{1}{w^2}\right)$ , então, utilizando a mesma comparação da órbita de  $f_0$  com o fluxo  $\frac{dz}{dt} = v(z)$ , visto no caso não perturbado, podemos apropriar da solução desse fluxo, através de integração, e chegar que

$$\int_{w^\pm}^w \frac{d\eta}{F_f(\eta) - \eta} - w$$

converge para uma constante, desde que  $w$  tenda para  $\infty$  dentro do setor  $\frac{\pi}{4} < \arg(w - w_0) < \frac{3\pi}{4}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \int_{w^\pm}^w \frac{d\eta}{F_f(\eta) - \eta} - w &= \int_{w^\pm}^w \frac{d\eta}{1 + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right)} - w = \int_{w^\pm}^w \left(1 - \frac{a}{w^2} + O\left(\frac{1}{w^3}\right)\right) d\eta - w \\ &= w^\pm + a \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w^\pm}\right) + O\left(\frac{1}{w^2}\right) \xrightarrow{w \rightarrow \infty} const. \end{aligned}$$

Assim, segue que existe uma constante dependente de  $f$ , denotaremos por  $c_\pm(f)$ , que faz com que

$$\varphi_f^\pm(w) = w + c_\pm(f) + o(1)$$

quando  $w \rightarrow \infty$  dentro de um setor (mais restrito que no parágrafo anterior) da forma

$$\left\{ w : \frac{\pi}{4} < \rho'_1 < \arg(w - w_0) < \rho'_2 < \frac{3\pi}{4} \right\} \subset \Omega_f^\pm, \text{ com } w_0 \in \mathbb{C}.$$

Logo, podemos representar a constante  $d(f)$  como o seguinte limite

$$d(f) = \lim_{w \rightarrow \infty} (\varphi_f^+ \circ T_f(w) - \varphi_f^-(w))$$

Assim,

$$d(f) = \lim_{w \rightarrow \infty} \left[ \left( w - \frac{1}{\alpha(f)} + c_+(f) \right) - (w + c_-(f)) \right] = c_+(f) - c_-(f) - \frac{1}{\alpha(f)}.$$

Agora, assim como foi estudado anteriormente, vamos definir o mapa  $\tilde{E}_f(w) = \varphi_f^- \circ (\varphi_f^+)^{-1}$  no domínio  $\varphi_f^+(\Omega_f^- \cap \Omega_f^+)$ , o qual contém, pelo menos, a faixa vertical  $\{w : |Re(w)| \leq 1, |Im(w)| \geq \eta_0\}$ , considerando que  $\eta_0 > 0$  seja grande o bastante. Para toda  $f \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_1$ , podemos escolher uniformemente  $\eta_0$ . Deste modo, a equação funcional  $\tilde{E}_f(w + 1) = \tilde{E}_f(w) + 1$  é satisfeita, sempre que ambos os lados estiverem definidos.

O mapa  $\tilde{E}_f$  pode ser estendido à região  $\{w : |Im(w)| > \eta_0\}$  e, utilizando o comportamento assintótico de  $\varphi_f^\pm$ , temos que

$$\tilde{E}_f(w) = w + c_-(f) - c_+(f) + o(1),$$

quando  $Im(w) \rightarrow \infty$ . Veja que  $\tilde{E}_f(w) - w$  também tende para uma constante ao passo que  $Im(w) \rightarrow -\infty$ .

Seja  $\eta_0 < \eta_1 < \eta_2$ . Assim, vamos definir uma região retangular com vértices  $i\eta_1, 1+i\eta_1, 1+i\eta_2$  e  $i\eta_2$  e, a partir disso, vamos calcular a integral de linha de  $\tilde{E}_f(w) - w$  ao longo do contorno desta região. Pelo Teorema de Cauchy, a integral ao longo deste contorno é nula. Além disso, pela periodicidade de  $\tilde{E}_f(w) - w$ , as integrais nos lados verticais são iguais com sinais opostos. Logo, obtemos uma expressão envolvendo apenas as integrais de linha sobre os lados horizontais do contorno definido, e assim:

$$0 = \int_{i\eta_1}^{1+i\eta_1} (\tilde{E}_f(w) - w)dw - \int_{i\eta_2}^{1+i\eta_2} (\tilde{E}_f(w) - w)dw.$$

Agora, fazendo  $\eta_2 \rightarrow \infty$  e desenvolvendo a integral de linha sobre o contorno inferior, obtemos que

$$\int_{i\eta_1}^{1+i\eta_1} (\tilde{E}_f(w) - w)dw = c_-(f) - c_+(f),$$

pois

$$\int_{i\eta_2}^{1+i\eta_2} (\tilde{E}_f(w) - w)dw = \int_{i\eta_2}^{1+i\eta_2} (c_-(f) - c_+(f))dw = c_-(f) - c_+(f)$$

No caso não perturbado, o lema 4.1.7 nos diz que a correspondência  $F \mapsto \varphi_f$  é contínua com respeito à topologia compacto aberto. Da mesma forma, através dessa proposição, obtemos que  $\varphi_f^\pm \rightarrow \varphi_{f_0}^\pm$  ao passo que  $f$  tende para  $f_0$ . Consequentemente,  $\tilde{E}_f \rightarrow \tilde{E}_{f_0}$ , uniformemente no segmento  $[i\eta_1, 1 + i\eta_1]$ .

Finalmente, através da normalização de  $\tilde{E}_{f_0}$  apresentada em 3.1.2, temos então

$$c_-(f) - c_+(f) = \int_{i\eta_1}^{1+i\eta_1} (\tilde{E}_f(w) - w)dw \rightarrow \int_{i\eta_1}^{1+i\eta_1} (\tilde{E}_{f_0}(w) - w)dw = 0.$$

Portanto, podemos concluir a demonstração do item 3 da nossa proposição, uma vez que

$$\varphi_f^+ \circ T_f - \varphi_f^- + \frac{1}{\alpha(f)} = c_+(f) - c_-(f).$$

□

Para normalizarmos  $\varphi_f^-$ , podemos adicionar constantes (sendo no caso  $c_+(f)$  e  $c_-(f)$ ) e usar a relação  $\varphi_f^- + c_+(f) - c_-(f)$  a qual pode-se notar que depende continuamente de  $f$ . Logo, com essa normalização, obtemos:

$$\varphi_f^+ \circ T_f(w) = \varphi_f^-(w) - \frac{1}{\alpha(f)} = T_f \circ \varphi_f^-(w).$$

Vamos, por fim, demonstrar o item 3 da proposição 4.1.6. Lembremos que  $S_f^+$  e  $T_f(S_f^-)$  são faixas verticais, como definidas anteriormente, contidas em  $\Omega_f^+$ , mas repare que  $T_f(S_f^-)$  sempre estará à esquerda de  $S_f^+$ . Pela dinâmica que construímos nessas regiões, sabemos que em algum momento ao longo das iterações por  $F_f$  um ponto  $w_0 \in T_f(S_f^-)$  passa por  $S_f^+$  antes de sair da região  $\Omega_f^+$ . Digamos que  $n$  seja o menor número possível de iterações de  $F_f$  para que  $F_f^n(w_0) \in S_f^+$ . Daí,

$$\varphi_f^+(F_f^n(w_0)) = \varphi_f^+(w_0) + n \underbrace{\quad}_{w_0=T_f(w)} \varphi_f^-(T_f^{-1}(w_0)) - \frac{1}{\alpha(f)} + n,$$

ou, usando  $\varphi_{\pm, f} = \varphi_f^\pm \circ \tau_f^{-1} |_{S_f^\pm}(w)$ ,  $f \circ \tau_f = \tau_f \circ F_f$  e o fato de que  $T$  é a transformação de Deck



do mapa de recobrimento  $\tau_f$  chegamos à expressão desejada:

$$\varphi_{+,f}(f^n(z)) = \varphi_{-,f}(z) - \frac{1}{\alpha(f)} + n.$$

□

Após a demonstração do teorema, conseguimos entender o papel das coordenadas de Fatou na conjugação à translação por 1 durante a perturbação de mapas polinomiais com pontos fixos parabólicos. O objetivo deste trabalho era compreender esta relação através do estudo da dinâmica local da bifurcação parabólica. No artigo de Shishikura, usado na maior parte do estudo, é possível compreender ainda mais. Em sua continuação, ele mostra os efeitos causados pela perturbação nos parâmetros de  $f_0$  quando a dinâmica é definida globalmente, como é no caso das funções racionais. Ele utiliza uma extensão para regiões maiores das coordenadas de Fatou e do mapa de transição para que ele possa fazer uma conexão entre as órbitas globais e as órbitas próximas do ponto fixo.

## 5 Apêndice A

Vamos enunciar e demonstrar o teorema da distorção de Koebe, mas, para isso, precisamos de alguns teoremas e lemas que são usados em sua prova. Veremos o primeiro deles que é o Teorema da área.

Vamos trabalhar com uma coleção específica de mapas complexos. Seja  $\mathcal{M} := \{g : W \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ é univalente em } \Gamma, \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty, g'(\infty) = 1\}$ , onde  $W = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . Um elemento de  $\mathcal{M}$  possui a seguinte expansão em série:

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots,$$

a qual é convergente para todo  $z \in \Gamma$ . Deste modo, vale ressaltar que cada  $g \in \mathcal{M}$  mapeia  $W$  no complemento de um conjunto compacto e conexo em  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 5.0.1** (Teorema da Área). *Se  $g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$  pertence a  $\mathcal{M}$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ , valendo a igualdade se, e somente se,  $\mathbb{C} \setminus f(W)$  tenha medida de Lebesgue nula.*

*Demonstração.* Considere  $r = |z|$ , com  $z \in W$ . Seja  $C_r$  a imagem por  $g$  do círculo de raio  $r$ . Podemos afirmar que cada  $C_r$  é uma curva simples, fechada e suave. Agora, seja  $E_r$  a componente conexa e limitada de  $\mathbb{C} \setminus C_r$ . Aplicando o Teorema de Green, para cada  $r > 1$  e considerando  $w = x + iy$  um elemento da imagem de  $g$ , obtemos:

$$\text{Área}(E_r) = \int_{C_r} x dy = \frac{1}{2i} \int_{C_r} \bar{w} dw = \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz.$$

Adaptando, temos:

$$\text{Área}(E_r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( r e^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n} e^{in\theta} \right) \left( 1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{b}_\nu r^{-\nu-1} e^{-i(\nu+1)\theta} \right) r e^{i\theta} d\theta.$$

Resultando em:

$$\pi \left( r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n} \right).$$

Tirando o limite fazendo  $r$  tender a 1, pela direita, concluímos que

$$\text{Área}(\mathbb{C} \setminus g(\Gamma)) = \pi \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \right).$$

Como o lado esquerdo da equação deve ser positivo, então  $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ . □

A partir do Teorema da Área, podemos fazer uma análise sobre cada termo da série. Como cada termo é positivo, para todo  $n \geq 1$ , teremos  $|b_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Entretanto, esses limites são fortes para  $n = 1$  mas não são para  $n \geq 2$ , pois, por exemplo, a função

$$g_n(z) = z + \frac{1}{\sqrt{n}z^n}$$

não é univalente em  $\Gamma$ , uma vez que sua derivada

$$g'_n(z) = 1 - \frac{\sqrt{n}}{z^{n+1}}$$

se anula em alguns pontos em  $\Gamma$ .

Vamos ver um corolário que vai nos dar uma ideia sobre a variação dos coeficientes  $b_n$ .

**Corolário 5.0.2.** Se  $g \in \mathcal{M}$ , então  $|b_n| \leq 1$ , valendo a igualdade se, e somente se,  $g$  puder ser colocada na forma  $g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z}$ ,  $|b_1| = 1$ .

*Demonstração.* Do teorema anterior, temos diretamente que  $|b_1| \leq 1$ .

Se ocorre a igualdade, todos  $b_n$ , com  $n \geq 2$ , precisam ser necessariamente nulos. Assim, a função  $g$  adquire a forma mencionada.  $\square$

Vamos definir agora uma coleção de funções que também será muito útil para nosso estudo. Estamos falando sobre a coleção de mapas

$$S = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é univalente em } \mathbb{D}, f(0) = 0, f'(0) = 1\},$$

considerando  $\mathbb{D}$  como o conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Uma função dessa coleção pode ser descrita como  $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ , onde  $a_n \in \mathbb{C}$  e  $n \geq 2$ .

Veremos um teorema que será de extrema importância para provarmos os teoremas futuros, uma vez que sempre utilizaremos o seu resultado. Tal teorema recebe o nome do matemático Bieberbach e, assim como o Teorema da Área nos dava um parâmetro de variação dos coeficientes  $b_n$  na função  $g$ , esse teorema nos dará uma estimativa sobre os coeficientes  $a_n$ , com  $n \geq 2$  na função  $f$ .

**Teorema 5.0.3** (Teorema de Bieberbach). *Se  $f \in S$ , então  $|a_2| \leq 2$ , valendo a igualdade se, e só se,  $f$  for uma rotação da função de Koebe.*

*Demonstração.* Seja  $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ . Aplicando a transformação da raiz quadrada e usando que  $(x+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$ , obtemos o seguinte

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{a_2}{2}z^3 + \frac{a_3}{8}z^4 + \dots$$

e, ao aplicarmos a transformação da inversão, chegamos a

$$g(z) = \frac{1}{h(1/z)} = \frac{1}{\sqrt{f(1/z^2)}} = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{a_2}{2z^3} + \dots} = z \left( \frac{1}{1 + \frac{a_2}{2z^2} + \dots} \right) = z - \frac{a_2}{2z} + \dots$$

Assim, o mapa  $g$  pertence à coleção  $\mathcal{M}$ , fazendo com que, pelo corolário 5.0.2,  $|a_2| \leq 2$ .

Se tivermos que  $|a_2| = 2$ , então  $g$  se reduz a:

$$g(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z},$$

implicando em

$$f\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{z^2}{z^4 - 2e^{i\theta}z^2 + e^{2i\theta}}.$$

Fazendo uma transformação de coordenada  $w = \frac{1}{z^2}$  em  $\mathbb{D}$ , podemos concluir que

$$f(w) = \frac{w}{(1 - e^{i\theta}w)^2} = e^{-i\theta} \frac{e^{i\theta}w}{(1 - e^{i\theta}w)^2} = e^{-i\theta} K(e^{i\theta}w),$$

considerando  $K$  como a função de Koebe, i.e.  $K(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}$ . Portanto, obtendo  $f(w)$  como uma rotação da função de Koebe.  $\square$

Vale ressaltar que, do Teorema do mapa aberto que diz que a imagem de todo aberto por uma função holomorfa é aberta, temos que para toda  $f \in S$ ,  $f(\mathbb{D})$  contém um disco de raio  $R > 0$  centrado em 0.

Por volta de 1907, Koebe concluiu que existe uma constante uniforme  $\rho$  tal que, para toda  $f \in S$ , sua imagem contém o disco aberto  $B(0, \rho)$ . Quanto ao mapa de Koebe, definido aqui em  $\mathbb{D}$ , o resultado sugere que  $\rho$  não é maior que  $\frac{1}{4}$ .  $\rho = \frac{1}{4}$  foi conjecturado por Koebe e provado depois, por volta de 1916, por Ludwig Bieberbach.

Veremos então esse importante resultado que será usado na prova do Teorema da distorção de Koebe.

**Teorema 5.0.4** (Teorema do  $\frac{1}{4}$  de Koebe). *Para toda  $f \in S$ , a bola  $|w| < \frac{1}{4}$  está contida em  $f(\mathbb{D})$ .*

*Demonstração.* Considere  $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$  uma função da coleção  $S$  e esta omitindo um valor  $w \in \mathbb{C}$ . Vamos aplicar uma transformação, chamada de transformação do valor omitido, para construir o seguinte mapa na classe  $S$

$$h(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right)z^2 + \dots$$

Pelo Teorema 5.0.3 (Teorema de Bieberbach), deveremos ter

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|-a_2 + a_2 + \frac{1}{w}\right| = \underbrace{|a_2|}_{\leq 2} + \underbrace{\left|a_2 + \frac{1}{w}\right|}_{\leq 2} \leq 2 + 2 = 4 \Rightarrow |w| \geq \frac{1}{4}.$$

Portanto,  $|w| \geq \frac{1}{4}$  e a demonstração está concluída.  $\square$

Ao variar  $f'(z)$ , formas em  $\mathbb{D}$  são distorcidas sob a ação de  $f \in S$ . Por exemplo, se alterarmos rapidamente o tamanho de  $|f'(z)|$ , teremos curvas de mesmo tamanho próximas umas das outras sendo mapeadas em curvas de tamanho completamente diferentes; se alterarmos rapidamente  $\arg f'(z)$ , faremos com que retas sejam mapeadas em curvas com curvaturas acentuadas.

Primeiro, antes de enunciar e demonstrar o Teorema da distorção de Koebe, vamos demonstrar um teorema que servirá de base para o que precisamos.

**Teorema 5.0.5.** *Para cada  $f \in S$ , temos que*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2},$$

*considerando  $|z| < 1$ .*

*Demonstração.* Dada  $f \in S$  e  $z \in \mathbb{D}$ , vamos aplicar a transformação do automorfismo do disco e

assim, obtermos o mapa

$$F(w) = \frac{f\left(\frac{w+z}{1+\bar{z}w}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = w + \frac{1}{2} \left( (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right) w^2 + \dots$$

Note que  $F \in S$ . Assim, pelo Teorema 5.0.3, o módulo do coeficiente de  $w^2$  é menor ou igual a 2. Logo,

$$\left| (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4 \Rightarrow \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4}{1-|z|^2} \Rightarrow \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2},$$

obtendo, portanto, a desigualdade desejada.  $\square$

**Teorema 5.0.6** (Primeira versão do Teorema da Distorção). *Para cada  $f \in S$  e para cada  $z \in \mathbb{D}$ , temos a seguinte relação*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

*Demonstração.* Para provarmos o teorema 5.0.6 vamos mostrar primeiro um lema que será útil para calcularmos as derivadas com relação às coordenadas polares.

**Lema 5.0.7.** Existe um ramo de  $\log f'(z)$  definido em  $\mathbb{D}$  que mapeia 0 em 0. Além disso,  $\forall z \in \mathbb{D}$ , onde  $z = re^{i\theta}$  e  $r = |z|$ , temos que

$$z \frac{f''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} (\log |f'(z)|) + ir \frac{\partial}{\partial r} (\arg f'(z)).$$

*Demonstração.* Vamos restabelecer aqui que, como  $f \in S$ , então  $f'(0) = 1$  e, para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,  $f'(z) \neq 0$ . Assim, existe um ramo contínuo de  $\log f'(z)$  definido em  $\mathbb{D}$  que mapeia 0 em 0. Ainda, considere  $u(z) = u(re^{i\theta})$  uma função holomorfa arbitrária definida em algum aberto  $U \subset \mathbb{C}$ . Usando a substituição por coordenadas polares definida por  $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$ , com  $r = |z|$ , temos

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = r \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} = r \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r(\cos \theta + i \sin \theta)) = r \frac{\partial u}{\partial z} (\cos \theta + i \sin \theta) = z \frac{\partial u}{\partial z}$$

Vamos definir uma função  $u(z)$  por  $u(z) = \log f'(z)$ . Sabendo que  $u'(z) = \frac{1}{f'(z)} f''(z)$  e que  $\log z = \log |z| + i \arg(z)$ , podemos chegar em uma relação a partir da razão  $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ , aplicando

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = z \frac{\partial u}{\partial z}:$$

$$z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} = z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\log f'(z)) = r \frac{\partial}{\partial r} (\log f'(z)) = r \frac{\partial}{\partial r} (\log |f'(z)|) + ir \frac{\partial}{\partial r} (\arg f'(z)).$$

$\square$

Depois que provamos o lema envolvendo as derivadas de uma determinada função, daremos continuidade à prova do teorema em questão.

Assim, observe que a desigualdade  $|w - c| < R$  nos diz que

$$c - R \leq \operatorname{Re}(w) \leq c + R.$$

Usando o Teorema 5.0.5 e considerando  $|z| = r$  obtemos

$$\frac{2r^2}{1-r^2} - \frac{4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} \left( \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \leq \frac{2r^2}{1-r^2} + \frac{4r}{1-r^2}.$$

Simplificando, temos

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} \left( \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}.$$

Segundo o lema que vimos, lema 5.0.7, existe um ramo de  $\log f'(z)$  contínuo definido em  $\mathbb{D}$  que leva 0 em 0 e usando na desigualdade acima a relação envolvendo a derivada  $\frac{\partial}{\partial z}$  apresentada, chegamos a

$$\frac{r(2r-4)}{1-r^2} \leq r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{r(2r+4)}{1-r^2}$$

e, multiplicando pelo termo  $\frac{1}{r}$ , considerando que  $r = |z| \neq 0$ , temos que

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}.$$

Agora, vamos integrar esses termos de 0 até  $R$ . Mas, para isso, fixemos  $\theta$  e damos início à integração pelo método da utilização de frações parciais. Dividiremos cada uma das três partes da desigualdade como três integrais diferentes:

1.  $\int_0^R \frac{2r-4}{1-r^2} dr;$

2.  $\int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| dr;$

3.  $\int_0^R \frac{2r+4}{1-r^2} dr.$

Assim, desenvolvendo a integral, temos

1. Veja que  $\int_0^R \frac{2r-4}{1-r^2} dr = \int_0^R \frac{-1}{1-r} dr - \int_0^R \frac{3}{1+r} dr = \log |1-R| - 3 \log |1+R| = \log \frac{1-R}{(1+R)^3};$

2. Temos diretamente que  $\int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| dr = \log |f'(Re^{i\theta})|;$

3.  $\int_0^R \frac{2r+4}{1-r^2} dr = \int_0^R \frac{1}{1+R} dr + 3 \int_0^R \frac{1}{1-R} dr = \log |1+R| - 3 \log |1-R| = \log \frac{1+R}{(1-R)^3}$

Portanto, nossa desigualdade anterior fica do seguinte modo

$$\log \frac{1-R}{(1+R)^3} \leq \log |f'(Re^{i\theta})| \leq \log \frac{1+R}{(1-R)^3}.$$

Para representar a desigualdade acima sem a necessidade do logaritmo, podemos fazer uso do mapa monótono  $e^x$  e, deste modo, chegamos à desigualdade desejada:

$$\frac{1-R}{(1+R)^3} \leq |f'(Re^{i\theta})| \leq \frac{1+R}{(1-R)^3},$$

ou melhor, com  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

□

Podemos notar que a primeira versão do Teorema da Distorção envolve uma estimativa sobre a norma da primeira derivada de  $f$  em relação a  $z$ . Veremos agora a segunda versão do mesmo teorema, mas envolvendo uma estimativa sobre a norma da própria  $f$ .

**Teorema 5.0.8** (Segunda versão do Teorema da distorção de Koebe). *Para cada  $f \in S$ , cada  $z \in \mathbb{D}$  com  $z \neq 0$ , temos*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, |z| = r.$$

*Demonstração.* Tomando o limite superior em  $|f'(z)|$  na desigualdade da primeira versão do Teorema da Distorção teremos um limite superior em  $|f(z)|$ .

Seja  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$  fixado. Do Teorema Fundamental do Cálculo, sabemos que

$$f(z) = \int_0^r f'(\eta e^{i\theta}) d\eta.$$

Então,

$$|f(z)| = \left| \int_0^r f'(\eta e^{i\theta}) d\eta \right| \leq \int_0^r \frac{1+\eta}{(1-\eta)^3} d\eta$$

Lembramos que, pelo teorema de  $\frac{1}{4}$  de Koebe,  $f(\mathbb{D}) \supset B(0, 1/4)$ . Assim, como estamos em dimensão 2, um limite inferior em  $|f'(z)|$  não nos retorna em um limite inferior em  $|f(z)|$ . Vamos ter duas possibilidades:

1.  $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ ;
2.  $|f(z)| < \frac{1}{4}$ .

Considerando a primeira possibilidade, temos que para todo  $r \in (0, 1)$ ,  $\frac{r}{(1-r)^2} \leq \frac{1}{4}$ , trivialmente obtemos que  $\frac{r}{(1-r)^2} \leq |f(z)|$ .

Considerando, desta vez, a segunda possibilidade, pelo Teorema do  $\frac{1}{4}$  de Koebe, um raio de uma circunferência dado por  $rz$ , com  $r \in [0, 1]$ , está contido na imagem de  $f$ . Sabendo que  $f$  é injetora, podemos afirmar que a pré imagem por  $f$  deste raio é uma curva suave em  $\mathbb{D}$  ligando 0 em  $z$ . Denotando esta curva por  $C$ , temos

$$f(z) = \int_C f'(w) dw.$$

Da definição de  $C$ , para qualquer ponto  $w \in C$ ,  $f'(w)dw$  possui o mesmo argumento que o argumento de  $z$ . Sendo assim,

$$|f(z)| = \left| \int_C f'(w) dw \right| = \int_C |f'(w)| |dw| \geq \int_0^r \frac{1-\eta}{(1+\eta)^3} d\eta = \frac{r}{(1+r)^2}$$

□

## 6 Apêndice B

Neste apêndice vamos abordar os conceitos sobre a teoria dos resíduos.

Vamos tomar um ponto fixo isolado  $f(z_0) = z_0$  de uma função holomorfa com uma variável complexa e, primeiro, vamos definir o que é um resíduo.

Note que toda função complexa analítica pode ser representada na forma de uma expansão em série de Laurent, ou seja, podemos representá-la através da seguinte expansão:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-c)^n,$$

onde  $c \in \mathbb{C}$ . Assumindo que  $f(z)$  seja uma função com um polo de ordem  $p$  na singularidade  $z = z_0$ , podemos adaptar esta representação para a seguinte série de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Para chegarmos na definição do resíduo, vamos tomar a integral de  $f(z)$  em um círculo de raio  $\gamma$  centrado em  $z_0$ , mas que não envolva nenhum outro polo. Assim,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n \oint_{\gamma} (z-z_0)^n dz.$$

Usando-se novamente o Teorema de Cauchy, podemos verificar que, para todos os termos da expansão onde  $n \neq -1$ , a integral se anula e, assim, definimos como **resíduo** de  $f$  o cálculo do coeficiente  $a_{-1}$  da expansão em série de Laurent, ou, da mesma forma, a seguinte relação:

$$\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

Agora que vimos o que é um resíduo, podemos definir o *índice holomorfo* de uma função complexa  $f$  em  $z_0$  (lembrando aqui que  $z_0 \neq \infty$ ) como sendo outro tipo de resíduo:

$$\iota(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-f(z)},$$

onde  $\gamma$  é considerada como uma curva fechada em torno de  $z_0$ . Caso  $z_0 = \infty$ , podemos utilizar uma mudança de coordenadas  $\phi(z) = \frac{1}{z}$ . Assim, podemos relacionar o índice holomorfo de  $f$  em  $\infty$  como sendo o resíduo de  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$  em 0.

Para concretizarmos a razão da relação estudada por Fatou e Julia acerca dos multiplicadores dos pontos fixos, veremos agora o Teorema que afirma tal relação.

**Teorema 6.0.1.** *Para qualquer mapa racional  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que não seja identicamente o mapa*



identidade  $f(z) = z$ , vale a relação:

$$\sum_{f(z)=z} \iota(f, z) = 1,$$

para todos os pontos fixos. No caso de um ponto fixo único, considerando o seu multiplicador da forma  $\lambda = f'(z_0) \neq 1$ , o índice holomorfo é dado por

$$\iota(f, z_0) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

*Demonstração.* Vamos começar conjugando, se necessário,  $f$  por uma mudança de variáveis  $\phi(z) = \frac{1}{z}$ , daí podemos considerar que  $\infty$  não está fixado por  $f$ . Deste modo,  $f(z)$  continua limitada quando  $|z| \rightarrow \infty$  e assim podemos representá-la através de uma expansão em série de Laurent na forma de

$$\frac{1}{z - f(z)} = \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + a_3 \frac{1}{z^3} + a_4 \frac{1}{z^4} + \dots,$$

tomando  $|z|$  grande. Assim, temos que a Integral de Cauchy de  $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - f(z)}$  ao longo de uma curva suficientemente grande em torno de  $z_0$  é igual a 1. Esta integral é igual à soma dos índices holomorfos  $\iota(f, z_j)$  em cada ponto fixo de  $f$  e, conseqüentemente, temos a relação da soma dos índices holomorfos em todos os pontos fixos de uma função complexa racional.

Para calcular  $\iota(f, z_j)$  em um ponto fixo cujo multiplicador  $\lambda_j$  é diferente de 1, podemos utilizar a expansão em série de Laurent de  $\frac{1}{z - f(z)}$  em uma vizinhança de  $z_j$ .

□

O interessante para o caso de polinômios quadráticos, especificamente em 4, é que se  $f$  tiver um ponto fixo com multiplicador  $\lambda_1$  bem próximo de 1, conseqüentemente  $|\iota|$  será grande. Então  $f$  precisa ter pelo menos um outro ponto fixo com  $|\iota|$  grande e, conseqüentemente,  $\lambda_2$  será próximo ou igual a 1.

Toda função complexa polinomial  $p(z)$  de grau  $d \geq 2$  possui  $d + 1$  pontos fixos, sendo um destes um ponto fixo super atrator no infinito, isto é, com multiplicador igual a 0, logo o índice holomorfo  $\iota(p, \infty) = 1$ . Então, conseqüentemente, a soma dos índices para todos os outros  $d$  pontos fixos é igual a zero. No caso de polinômios quadráticos, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os multiplicadores dos pontos fixos finitos, temos então que

$$\frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda' - 1} = 0.$$

Para mais detalhes sobre Índices Holomorfos e a Teoria de Resíduos Complexos, o leitor pode checar [Mil06]

# Referências Bibliográficas

- [Ahl06] Lars V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*. American Mathematical Society, 2006. 11
- [BF14] Bodil Branner e Núria Fagella. *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics*. Number 141. Cambridge University Press, 2014. 11
- [CG13] Lennart Carleson e Theodore W Gamelin. *Complex dynamics*. Springer Science & Business Media, 2013. 1, 9
- [Che17] Davoud Cheraghi. Geometric complex analysis. Disponível em <https://www.ma.imperial.ac.uk/~dcheragh/Teaching/2016-F-GCA/GCA.html>. Acesso em 15 jun. 2023., 2017. 2
- [DH09] Adrien Douady e John Hubbard. Exploring the mandelbrot set. the orsay notes. <https://pi.math.cornell.edu/~hubbard/OrsayEnglish.pdf> Acesso em: 1 fev. 2022., 2009. 8
- [Mil06] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable. (AM-160): Third Edition. (AM-160)*. Princeton University Press, 2006. 1, 4, 5, 6, 7, 52
- [Shi00] Mitsuhiro Shishikura. Bifurcation of parabolic fixed points. *LONDON MATHEMATICAL SOCIETY LECTURE NOTE SERIES*, páginas 325–364, 2000. 19
- [Sul85] Dennis Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics i. solution of the fatou-julia problem on wandering domains. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1971308>. Acesso em 15 jun. 2023., 1985. 7

# Índice Remissivo

DFT, *veja* transformada discreta de Fourier

DSP, *veja* processamento digital de sinais

Fourier

transformada, *veja* transformada de Fourier

STFT, *veja* transformada de Fourier de tempo  
reduzido

TBP, *veja* periodicidade região codificante