

Sistemas Newtonianos Reversíveis Bidimensionais

Francisco José dos Santos Nascimento

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, setembro de 2023

Sistemas Newtonianos Reversíveis Bidimensionais

Esta é a versão original da tese elaborada pelo candidato Francisco José dos Santos Nascimento, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Sistemas Newtonianos Reversíveis Bidimensionais

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 15/09/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia - USP - IME-USP
- Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira - UNICAMP-IMECC
- Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins - UNICAMP-IMECC
- Prof. Dr. Luis Fernando Mello-UNIFEI

Agradecimentos

A Deus, meu refugio e fortaleza, por sempre estar presente em minha vida me dando forças para enfrentar os desafios e me ajudando a realizar mais uma conquista pessoal e profissional. A Ele toda honra e toda glória!

Ao Professor Clodoaldo, meu orientador, pelo acompanhamento dedicado a este trabalho, pela sua importância em minha formação e pela sua amizade.

Aos membros da banca examinadora, pelas correções e sugestões.

A minha esposa, Cláudia, pelo companheirismo, amor e apoio. Agradeço por estar junto a mim, neste percurso tão difícil e tão importante.

Aos meus pais, Pedro e Francisca, meu exemplo de vida, pelas preces, pelo apoio, amor e palavras de incentivo. Estendo aqui a minha gratidão aos meus irmãos (Ricardo, Ravena, Keila e Marcos) e a meus sobrinhos (Arthur e Bárbara) pelo carinho e apoio.

A cada membro de minha família, avó (Inácia), tios e tias, primos e primas, pelo apoio e por torcerem para que eu alcance esse objetivo. Agradeço também aos meus amigos pelo apoio e incentivo, em especial, a meu amigo Francycell Moura.

Aos professores do IME que de alguma forma contribuíram na minha formação acadêmica. Em especial, ao professor Gláucio Terra, pela disponibilidade e pela orientação no estágio PAE.

A todos os funcionários do IME, em especial, aos funcionários da CCP-MAT, da gráfica e do salão de chá.

A CAPES pelo auxílio financeiro, sem o qual a realização desse trabalho seria inviável.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou de forma indireta durante esse trajeto.

Resumo

Nascimento, F. J. S. **Sistemas Newtonianos Reversíveis Bidimensionais**. 2023. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Este trabalho é dedicado ao estudo da equação diferencial ordinária (EDO) autônoma de segunda ordem $\ddot{u} = F(u, \dot{u})$, onde $F \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, é uma função par na segunda variável, ou seja, $F(u, -\dot{u}) = F(u, \dot{u})$. Essa EDO é equivalente ao sistema newtoniano planar de equações diferenciais de primeira ordem $(\dot{u} = v, \dot{v} = F(u, v))$ (\star) .

Na primeira parte do estudo, supomos que F é analítica em uma vizinhança da origem com $\partial_u f(0, 0) \neq 0$. Nessas condições, (\star) é analiticamente conjugado, em uma vizinhança de $(0, 0)$, a um sistema hamiltoniano. Se $\partial_u f(0, 0) < 0$, (\star) tem um centro não degenerado em $(0, 0)$. Nesse caso mostramos que (\star) é analiticamente conjugado, em uma vizinhança de $(0, 0)$, a um sistema hamiltoniano da forma $(\dot{x} = y, \dot{y} = g(x))$ $(\star\star)$.

Na segunda parte, sob uma condição adicional, mostramos que (\star) é conjugado, em todo o \mathbb{R}^2 , a um sistema hamiltoniano. No principal resultado deste trabalho mostramos que, se o único equilíbrio de (\star) é um centro não degenerado, então (\star) é globalmente conjugado a um sistema hamiltoniano do tipo $(\star\star)$. Nesse caso, $(\star\star)$ não está, necessariamente, definido em todo o \mathbb{R}^2 .

Palavras-chave: Sistemas Newtonianos, Sistemas Hamiltonianos, Sistemas Potenciais.

Abstract

Nascimento, F. J. S. **Two-Dimensional Reversible Newtonian Systems**. 2023. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

This work focuses on the analysis of a second-order autonomous ordinary differential equation (ODE) $\ddot{u} = F(u, \dot{u})$, where $F \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, with $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, and F is an even function with respect to the second variable, that is, $F(u, -\dot{u}) = F(u, \dot{u})$. This ODE is equivalent to the planar Newtonian first-order system $(\dot{u} = v, \dot{v} = F(u, v))$ (\star).

In the first part of the study, we work under the assumption that F is analytic near the origin, with $\partial_u f(0, 0) \neq 0$. Under these conditions, the system (\star) is analytically conjugate, in a neighborhood of $(0, 0)$, to a Hamiltonian system. If $\partial_u f(0, 0) < 0$, (\star) possesses a non-degenerate center at $(0, 0)$. In such cases, we demonstrate that (\star) is analytically conjugate, in a neighborhood of $(0, 0)$, to a Hamiltonian system of the form $(\dot{x} = y, \dot{y} = g(x))$ ($\star\star$).

In the second part, under an additional condition, we establish that (\star) is conjugate, across the entirety of \mathbb{R}^2 , to a Hamiltonian system. The main result of this paper proves that if the only equilibrium of (\star) is a non-degenerate center, then (\star) is globally conjugate to a Hamiltonian system of type ($\star\star$). Note that in this case, ($\star\star$) is not necessarily defined on the whole \mathbb{R}^2 .

Keywords: Newtonian Systems, Hamiltonian Systems, Potential Systems. .

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
2 Preliminares	7
2.1 Campos Vetoriais e Equações Diferenciais	7
2.2 Equivalência de Campos Vetoriais	11
2.3 Formas Normais	12
2.4 Campos Reversíveis	14
2.5 Campos Hamiltonianos no Plano	16
2.6 Sistemas Potenciais	18
2.6.1 Função Período	21
2.6.2 Problema Inverso	27
3 Resultados Locais	33
3.1 Demonstrações	34
3.1.1 Demonstração do Teorema 3.0.3	34
3.1.2 Demonstração do Teorema 3.0.1	42
3.1.3 Demonstração do Teorema Teorema 3.0.2	43
4 Resultados Globais	49
4.1 A Demonstração do Teorema 4.0.1	51
4.1.1 Demonstração do item (i) do Teorema 4.0.1	51
4.1.2 Demonstração do item (ii) do Teorema 4.0.1	54
4.1.3 Demonstração do item (iii) do Teorema 4.0.1	56
4.1.4 Sobre as hipóteses do Teorema 4.0.1	57
4.1.5 Consequências do Teorema 4.0.1	62
4.1.6 Exemplos	66
4.2 Demonstração do Teorema 4.0.2	72
4.2.1 Construção do campo 4.60	74
4.2.2 Construção do difeomorfismo	82

4.2.3 Exemplos	87
5 Considerações finais	93
5.1 Problemas em aberto e trabalhos futuros	93
A Sobre a Equação de Abel	95
Referências Bibliográficas	99

Lista de Símbolos

- Ω conjunto aberto de \mathbb{R}^2 ;
- $C^0(\Omega, \mathbb{R})$, o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em Ω ;
- $C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $1 \leq k < \infty$, o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que possui derivadas parciais contínuas até ordem k ;
- $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ o conjuntos das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis, i.e, $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$;
- $C^k(\Omega, \mathbb{R}^2)$ o conjunto das funções $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ tal que $f_i \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $i \in \{1, 2\}$;
- $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ o conjunto das funções $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ tal que $f_i \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $i \in \{1, 2\}$;
- $C^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ o conjuntos das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ analíticas reais em Ω ;
- $C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^2)$ o conjunto das funções $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ tal que $f_i \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R})$, $i \in \{1, 2\}$;
- $C^r(\Omega, \cdot)$, $r \in \{k, \infty, \omega\}$.

Lista de Figuras

2.1	Retrato de fase de X	20
2.2	Retrato de fase de X	20
2.3	Retrato de fase de X	21
2.4	V com quatro máximos e três mínimos / retrato de fase de X	21
2.5	Órbita periódica γ_E	22
2.6	Gráficos de V e \mathbf{x}_+	28
4.1	Região \mathcal{A}_γ	50
4.2	Ilustração do Teorema 4.0.2	51
4.3	Construção de h	52
4.4	Linhas de fluxo de W	53
4.5	Soluções de W	58
4.6	Soluções de W com condições iniciais $(0, z_0)$	60
4.7	Colagem das soluções	61
4.8	Solução $Z(u, z_0)$	62
4.9	Equilíbrios não degenerados de X	68
4.10	Retrato de fase de X	69
4.11	Retrato de fase de X	69
4.12	Gráfico do potencial G	70
4.13	Retrato de fase de X	70
4.14	Retrato de fase de \hat{X}	70
4.15	Retrato de fase de X	71
4.16	Gráfico do potencial G	71
4.17	Retrato de fase de \hat{X}	72
4.18	Ilustração da construção de Y	73
4.19	Ilustração	74
4.20	Construção de β	76
4.21	Construção de φ_+	80
4.22	Definição de V em $[-x_{\max}, x_{\max}]$	82
4.23	Construção de Φ_+	83
4.24	Definição de Φ	86

4.25	Simetrização de \mathcal{A}_G	87
5.1	Retrato de fase de \hat{X} com dois e três equilíbrios respectivamente.	93
A.1	Problema de Mecânica.	95

Capítulo 1

Introdução

Uma equação da forma $F(t, u, du/dt, d^2u/dt^2, \dots, d^nu/dt^n) = 0$, onde a incógnita u é uma função da variável real t , chama-se equação diferencial ordinária de ordem n . Muitas das leis gerais da Física, Biologia e Economia, entre outras Ciências, encontram sua expressão geral nestas equações. Por outro lado, inúmeras questões dentro da própria Matemática (por exemplo na Geometria Diferencial e no Cálculo de Variações) formuladas convenientemente se reduzem a essas equações.

Segundo [Sot79], as equações diferenciais evoluíram dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral, descobertos por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), e elaborados no último quarto do século XVII para resolver problemas motivados por considerações de natureza física ou geométrica. Esses métodos conduziram gradualmente à consolidação de um novo ramo da Matemática, que em meados do século XVIII transformou-se em uma disciplina independente.

A natureza daquilo que era considerado solução foi evoluindo gradualmente, num processo que acompanhou e, às vezes, propiciou o desenvolvimento do próprio conceito de função. Inicialmente buscavam-se soluções expressas em termos de funções elementares: polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais. Posteriormente, passou-se a considerar satisfatório expressar a solução em termos de uma integral – quadratura – contendo operações elementares envolvendo tais funções. Quando esses procedimentos deixaram de resolver os problemas focalizados, surgiram as soluções expressas por meio de séries infinitas (ainda sem a preocupação com a análise da convergência).

Em fins do século XVIII a Teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das disciplinas matemáticas mais importantes e o método mais efetivo para pesquisa científica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace, entre outros, expandiram notavelmente o conhecimento dentro do Cálculo de Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica dos Fluidos, etc.

Após o início do século XIX, os métodos gerais de resolução explícita das equações diferenciais perderam a sua proeminência e nenhum método de maior relevância foi desenvolvido até o aparecimento do cálculo operacional. Contudo, já no final do século XIX iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade e, no ano de 1876, Rudolf Lipschitz (1832-1903) desenvolveu o teorema da existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem.

Um marco de referência fundamental na evolução das equações diferenciais é o trabalho de H. Poincaré (1854-1912) *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, de 1881, no qual são lançadas as bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Essa teoria tem por objetivo a investigação de propriedades inerentes às soluções das equações que definem o problema sem se preocupar com as possíveis expressões que tais soluções venham

a ter.

Um dos problemas pertencentes a essa teoria no plano é o de apresentar, para uma dada equação diferencial planar, a classificação topológica de seu retrato de fase. A depender da complexidade da equação diferencial dada, é comum procurar uma mudança de variáveis que a transforme em uma nova equação diferencial cuja compreensão do retrato de fase seja mais simples.

O presente trabalho tem por objetivo contribuir com essa investigação para a equação diferencial Newtoniana autônoma

$$\ddot{u} = F(u, \dot{u}), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

onde $F \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, é uma função par na segunda variável, ou seja, $F(u, -\dot{u}) = F(u, \dot{u})$. A equação diferencial de segunda ordem (1.1) pode ser transformada, via introdução da nova variável $v = \dot{u}$, no sistema newtoniano planar

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = F(u, v), \end{cases} \quad (1.2)$$

com $F(u, -v) = F(u, v)$.

Quando a função F não depende da velocidade, isto é, $F(u, v) = F(u)$, o sistema (1.2) é equivalente a o sistema potencial

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -V'(u), \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $V \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ é a função potencial definida por

$$V(u) = - \int_{u_0}^u F(\zeta) d\zeta.$$

Neste caso, (1.3) é um sistema hamiltoniano com função hamiltoniana

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} + V(u).$$

A análise qualitativa do sistema (1.3) é relativamente simples, a saber, seu retrato de fase é completamente determinado pela função potencial V (ver Seção 2.6.1). Já a análise quantitativa foi e ainda é tema de pesquisa que atraiu e atrai o interesse de vários pesquisadores. Dentre as questões abordadas, duas se destacam e ambas estão relacionadas com a função período associado a um equilíbrio elíptico do sistema (1.3). A primeira questão indaga sobre propriedades da função período, tais como, se ela é constante ou monótona crescente ou monótona decrescente. Essa questão é tratada em diversos artigos, por exemplo, em [Chi87], [GGMM97], [CS99], [Sch06], [YZ09], [Sfe15], dentre outros. A segunda questão trata da possibilidade de recuperar a função potencial V a partir de uma dada função período T . Essa questão foi abordada nos artigos [Ura64], [Ura67], [Alf84b], [Alf84a], [Sch06], [MT08], [Kam10], [KK13], dentre outros.

No já mencionado artigo [Chi87], Chicone desenvolveu um método simples que nos permite dizer se a função período associada a um centro de (1.3) é monótona crescente ou monótona decrescente a partir de uma expressão que só depende da função potencial V . Após fazer diversas aplicações, Chicone conclui o artigo com a seguinte questão

Questão 1.0.1. Suponha que o sistema planar de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v), \\ \dot{v} = Q(u, v), \end{cases} \quad (1.4)$$

tem um centro na origem e seja R a região em torno da origem composta por órbitas periódicas de (1.4). Quando há uma mudança de coordenadas definidas em R tal que nessas novas coordenadas o sistema (1.4) é um sistema hamiltoniano do tipo (1.3)?

No artigo [Sab04], Sabatini abordou o caso particular de (1.2) em que $F(u, v) = f(u)v^2 + g(u)$, com $f, g \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. A saber, Sabatini obteve uma mudança de variáveis de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 tal que nessas novas variáveis o sistema é do tipo (1.3). Além disso, Sabatini abordou a questão da monotonicidade da função período e obteve resultados que nos permite dizer se a função é decrescente ou constante ou decrescente analisando uma expressão que só depende das funções f e g .

Em [Roc07] Carlos Rocha usou os mapas de períodos realizáveis por sistemas hamiltonianos planares da forma (1.3) para caracterizar as classes de atratores Morse-Smale que são realizáveis por equações parabólicas semilineares dissipativas da forma $u_t = u_{xx} + f(u, u_x)$ definidas no círculo, $x \in S^1$. Motivado por esse trabalho, Carlos Rocha propôs para Clodoaldo Ragazzo a seguinte questão:

Questão 1.0.2. Sob quais condições adicionais existe uma mudança de coordenadas definida em todo \mathbb{R}^2 tal que nessas novas coordenadas o sistema (1.2) é um sistema hamiltoniano do tipo (1.3)?

Embora as questões 1.0.1 e 1.0.2 surgirem de motivações diferentes, ambas estão relacionadas, visto que uma resposta afirmativa para a segunda questão, no caso em que (1.2) tem um centro na origem, é uma uma resposta parcial para a primeira questão.

Em [Rag12] C. Ragazzo abordou a questão 1.0.2 sob hipóteses bastantes gerais. No Teorema 1.1 do referido artigo, C. Ragazzo mostrou que se as soluções da equação diferencial auxiliar $dz/du = F(u, z)$ estão definidas para todo $u \in \mathbb{R}$, então o sistema (1.2) é hamiltoniano e que, além disso, existe uma mudança de coordenadas $(u, v) \rightarrow (u, \hat{v})$ C^∞ de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 tal que nessas novas variáveis o sistema (1.2) é um sistema hamiltoniano do tipo

$$\begin{cases} \dot{u} = a(u, \hat{v})\hat{v}, \\ \dot{\hat{v}} = -a(u, \hat{v})G'(u), \end{cases} \quad (1.5)$$

onde a função $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é uma função tal que $a(u, \hat{v}) > 0$ para todo $(u, \hat{v}) \in \mathbb{R}^2$. Nesse caso, (1.5) é um sistema hamiltoniano com função hamiltoniana

$$\hat{H}(u, \hat{v}) = \frac{\hat{v}^2}{2} + G(u)$$

e forma simplética

$$\mu(u, \hat{v}) = \frac{du \wedge d\hat{v}}{a(u, \hat{v})}.$$

Esse resultado nos mostra que, do ponto de vista qualitativo, o sistema (1.2) é equivalente a um sistema hamiltoniano do tipo (1.3), visto que, os retratos de fase de (1.5) e de

$$\begin{cases} \dot{u} = \hat{v}, \\ \dot{\hat{v}} = -G'(u), \end{cases} \quad (1.6)$$

são indistinguíveis. Em outras palavras, o sistema hamiltoniano (1.5) é uma reparametrização temporal de (1.6).

O Teorema 1.2, anunciado como resultado principal do referido artigo, tinha como finalidade construir uma mudança de coordenadas, definida em todo \mathbb{R}^2 , tal que nas novas variáveis o sistema hamiltoniano (1.5) tivesse o formato do sistema hamiltoniano (1.3). A demonstração desse teorema contém erros, identificados pelo próprio C. Ragazzo, que crê ele, podem ser sanados.

A presente tese é fruto da tentativa de sanar tais erros. A seguir listamos nossas principais contribuições.

Na primeira parte deste trabalho estudamos o sistema (1.2) no cenário das funções analíticas locais. A saber, admitimos $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio não degenerado do sistema (1.2), isto é, $\partial_u F(0, 0) \neq 0$, e que F pode ser escrita como série de potência convergente em uma vizinhança de $(0, 0)$.

Nossa primeira contribuição é o Teorema 3.0.2. Nesse teorema foi provado que se $\partial_u F(0, 0) < 0$, então existe uma mudança de variáveis analítica em uma vizinhança de $(0, 0)$ tal que nas novas variáveis o sistema (1.2) é um sistema hamiltoniano do tipo (1.3). Note que o Teorema 3.0.2 é uma resposta local para a questão 1.0.1 para o caso em que $P(u, v) = v$ e $Q(u, v) = F(u, v)$. No Teorema 3.0.3, provamos que as conclusões dos teoremas 3.0.1 e 3.0.2 são verdadeiros para o sistema (1.4) se P e Q satisfazem as seguintes condições

$$P(u, -v) = -P(u, v) \text{ e } Q(u, -v) = Q(u, v).$$

Na segunda parte do trabalho abordamos o problema na perspectiva global, ou seja, admitindo que $F \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. Nesse cenário, nosso primeiro resultado é o Teorema 4.0.1 que é uma versão melhorada do Teorema 1.2 de [Rag12] cujo resultado já foi mencionado acima. O segundo resultado do capítulo que é, também, o principal resultado desse trabalho, é o Teorema 4.0.2. Admitindo que (1.5) tem apenas um equilíbrio e que este seja um equilíbrio elíptico, provamos no Teorema 4.0.2 que existe uma mudança de coordenadas de classe $F \in C^r$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ de um aberto $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ para um aberto $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que nessas novas coordenadas o sistema (1.2) é do tipo (1.3). Esse resultado responde, parcialmente, as questões 1.0.1 e 1.0.2.

Esse trabalho está organizado seguindo o seguinte roteiro:

No Capítulo 2 introduzimos o aparato teórico necessário para a compreensão dos capítulos subsequentes. Este capítulo é subdividido em algumas seções:

- Na seção 2.1 recordamos um pouco a respeito de equações diferenciais e campos vetoriais em \mathbb{R}^2 ;
- Na seção 2.2 introduzimos o conceito de equivalência de campos vetoriais;
- Na seção 2.3 recordamos um pouco sobre a teoria das formas normais;
- Nas seções 2.4 e 2.5 introduzimos os conceitos de campos vetoriais reversíveis e de campos vetoriais hamiltonianos;
- Por fim, na seção 2.6 recordamos as principais propriedades dos sistemas potenciais.

No capítulo 3 abordamos nosso problema no cenário das funções analíticas locais. Esse capítulo tem apenas uma seção a qual está dividida em três subseções:

- Na subseção 3.1.1 demonstramos o Teorema 3.0.3.
- Na subseção 3.1.2 demonstramos o Teorema 3.0.1.

- Na subseção 3.1.3 demonstramos o Teorema 3.0.2

No capítulo 4 abordamos nosso problema no cenário global. Esse capítulo foi dividido em três seções:

- Na seção 4.1 demonstramos o Teorema 4.0.1.
- Na seção 4.2 demonstramos o Teorema 4.0.2.

No capítulo 5 fizemos algumas considerações sobre questões em aberto e trabalhos futuros. Por fim, no apêndice A discorremos brevemente sobre a equação integral de Abel, que desempenha papel fundamental nos resultados principais deste trabalho.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos o aparato teórico necessário para a compreensão de todo texto. As demonstrações, que serão omitidas, podem ser encontradas em referências que serão citadas no início de cada seção. Na Seção 2.1 recordamos um pouco a respeito de equações diferenciais e campos vetoriais em \mathbb{R}^2 , na Seção 2.2 introduzimos o conceito de equivalência de campos vetoriais, na Seção 2.3 recordamos um pouco sobre a teoria das formas normais, nas Seções 2.4 e 2.5 introduzimos os conceitos de campos vetoriais reversíveis e de campos vetoriais hamiltonianos e, por fim, na seção 2.6 recordamos as principais propriedades dos sistemas potenciais.

2.1 Campos Vetoriais e Equações Diferenciais

Nesta seção iremos introduzir a definição de campos vetoriais no plano. O exposto subsequente é baseado nas referências [Sot79] e [DLA06].

Definição 2.1.1. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. Um campo de vetores $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ é uma aplicação $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$X(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})),$$

onde $f_i \in C^r(\Omega, \mathbb{R})$, $i \in \{1, 2\}$ são as funções coordenadas de X e $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$.

Um campo vetorial X de funções coordenadas f_i , $i \in \{1, 2\}$ é, também, representado como operador diferencial por

$$X = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Definição 2.1.2. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. O campo $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ de coordenadas $f_i \in C^r(\Omega, \mathbb{R})$, $i \in \{1, 2\}$, define em Ω o sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}, \dot{y}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) = X(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Essa relação, entre campos vetoriais e equações diferenciais, nos permite estudar propriedades dos campos vetoriais utilizando a teoria das equações diferenciais e vice-versa.

Definição 2.1.3. Uma solução da EDO (2.1) é uma curva $\varphi : I \rightarrow \Omega$ diferenciável no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo $t \in I$.

Observação 2.1.1.

1. A curva $\varphi(t)$ é chamada de trajetória, órbita ou curva integral de X .
2. Se $X \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^2)$, a curva $\varphi : I \rightarrow \Omega$ é de classe C^{k+1} em I , ou seja, $\varphi \in C^{k+1}(I, \Omega)$.
3. Geometricamente, $\varphi : I \rightarrow \Omega$ é uma curva integral de $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ se, e somente se, o vetor tangente $\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t)$ (ou vetor velocidade) coincide com o valor do campo X no ponto $\varphi(t)$ para todo $t \in I$.

Definição 2.1.4. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Dados $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, o problema de valor inicial (PVI) associado a X é dado por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Uma solução do PVI (2.2) é uma curva $\varphi : I \rightarrow \Omega$ diferenciável no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que

1. $t_0 \in I$,
2. $\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$ para todo $t \in I$,
3. $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Definição 2.1.5. Uma solução $\varphi : I \rightarrow \Omega$ do PVI (2.2) é dita solução maximal se para qualquer outra curva solução $\psi : J \rightarrow \Omega$ de (2.2) com $I \subset J$ e $\psi|_I = \varphi$, implicar $I = J$ e consequentemente, $\varphi = \psi$. Neste caso, I é chamado de intervalo maximal.

Observação 2.1.2.

- Tanto o intervalo maximal I quanto a solução maximal $\varphi : I \rightarrow \Omega$ dependem da condição inicial (t_0, \mathbf{x}_0) . Por esse motivo, escreve-se $I = I_{(t_0, \mathbf{x}_0)}$ e $\varphi = \varphi_{(t_0, \mathbf{x}_0)}$.
- Uma vez que a EDO $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$ é autônoma, ou seja, não depende de t , podemos escolher $t_0 = 0$. No que segue, denotaremos $I(0, \mathbf{x}_0)$ por $I_{\mathbf{x}_0}$ e $\varphi(0, \mathbf{x}_0)$ por $\varphi_{\mathbf{x}_0}$.

Teorema 2.1.3 (Teorema do fluxo local). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Então:

- (i) (Existência e unicidade de soluções máximas) Para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ existe um intervalo aberto $I_{\mathbf{x}_0}$ onde está definida uma única solução máxima $\varphi_{\mathbf{x}_0}(t)$ do PVI $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.
- (ii) (Propriedade de Grupo) Se $\mathbf{x}_1 = \varphi_{\mathbf{x}_0}(t_0)$ com $t_0 \in I_{\mathbf{x}_0}$ então $I_{\mathbf{x}_1} = I_{\mathbf{x}_0} - t = \{s - t : s \in I_{\mathbf{x}_0}\}$ e $\varphi_{\mathbf{x}_1}(s) = \varphi_{\mathbf{x}_0}(t_0 + s)$ para todo $s \in I_{\mathbf{x}_1}$.
- (iii) (Diferenciabilidade em relação às condições iniciais) O conjunto $\mathcal{D} = \{(t, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega, t \in I_{\mathbf{x}_0}\}$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^3 e a aplicação $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \Omega$ definida por $\varphi(t, \mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{x}}(t)$ é de classe C^r . Além disso, vale a seguinte relação

$$D_t D_{\mathbf{x}} \varphi(t, \mathbf{x}) = DX(\varphi(t, \mathbf{x})) D_{\mathbf{x}} \varphi(t, \mathbf{x}), \quad D_{\mathbf{x}} \varphi(t, \mathbf{x})|_{t=0} = id$$

para cada $(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{D}$, onde D_t denota a derivada parcial com respeito ao tempo, $D_{\mathbf{x}}$ denota a derivada com respeito a \mathbf{x} , DX denota a parte linear do campo vetorial X e id denota a identidade em \mathbb{R}^2 .

Demonstração. A demonstração pode ser consultada em [Sot79], Seção 3.2. \square

Definição 2.1.6. A aplicação $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \Omega$ definida no item (iii) do Teorema (2.1.3) chama-se **fluxo local** gerado pelo campo X . Essa aplicação possui as seguintes propriedades:

1. $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$;
2. $\varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x})) = \varphi(t + s, \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, e para todos s e t tal que $s, t + s \in I_{\mathbf{x}}$;
3. $\varphi(-t, \mathbf{x}) = \varphi^{-1}(t, \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $t, -t \in I_{\mathbf{x}}$.

Definição 2.1.7. Dizemos que o fluxo gerado por X é **completo** se $I_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, ou seja, se $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \Omega$.

A forma mais viável para verificar se X é completo é supondo que $I_{\mathbf{x}} \neq \mathbb{R}$ e, a partir de informações sobre X , chegar a alguma contradição. Nesse sentido o próximo resultado é muito útil.

Corolário 2.1.3.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Sejam $\mathbf{x} \in \Omega$ e $I_{\mathbf{x}} = (\omega_-(\mathbf{x}), \omega_+(\mathbf{x}))$ o intervalo maximal da solução $\varphi_{\mathbf{x}}(t) = \varphi(t, \mathbf{x})$ que satisfaz $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Então se $\omega_+(\mathbf{x}) < +\infty$ temos que $\varphi_{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \partial\Omega$ quando $t \rightarrow \omega_+(\mathbf{x})$. Resultado análogo vale se $\omega_-(\mathbf{x}) > -\infty$.*

Com auxílio do Corolário 2.1.3.1 prova-se o seguinte resultado.

Corolário 2.1.3.2. *Sejam $X \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e $M > 0$ uma constante real. Se $|X(\mathbf{x})| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, então X é completo (ver [Zeh10], proposição IV.2).*

Com auxílio do Corolário 2.1.3.1 e do Lema de Gronwall (ver [Zeh10], Lema IV.4) prova-se o seguinte resultado.

Corolário 2.1.3.3. *Sejam $X \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ constantes não negativas. Se $|X(\mathbf{x})| \leq a + b|\mathbf{x}|$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, então X é completo (ver [Zeh10], proposição iv.3).*

Teorema 2.1.4. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ um campo de vetores completo. Então o fluxo de X , $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$, satisfaz:*

1. $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$;
2. $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = X(\varphi(t, \mathbf{x}))$ para todo $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega$;
3. $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{x})|_{t=0} = X(\mathbf{x})$;
4. $\varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x})) = \varphi(t + s, \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, e para todos $s, t \in \mathbb{R}$;
5. Dado $t \in \mathbb{R}$, a função $\varphi_t : \Omega \rightarrow \Omega$ definida por $\varphi_t(\mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x})$ é um difeomorfismo de classe C^r em Ω .

Definição 2.1.8. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ um campo de vetores. Uma solução $\varphi_{\mathbf{x}_0}(t)$ de X com condição inicial $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$ é dita periódica se existir $T > 0$ tal que $\varphi_{\mathbf{x}_0}(t + T) = \varphi_{\mathbf{x}_0}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a imagem $\gamma(\mathbf{x}_0) := \{\varphi_{\mathbf{x}_0}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é chamada órbita periódica.

Definição 2.1.9. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Um ponto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ é dito ponto singular ou singularidade de X se $X(\mathbf{x}_0) = 0$. Caso contrário \mathbf{x}_0 é chamado de regular.

Observação 2.1.5. Se \mathbf{x}_0 é um ponto singular de X , então $I_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{R}$ e $\varphi_{\mathbf{x}_0}(t) = \mathbf{x}_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a imagem $\gamma(\mathbf{x}_0) = \{\varphi_{\mathbf{x}_0}(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x}_0\}$.

Proposição 2.1.6. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, φ a solução maximal definida em um intervalo I e $\gamma = \varphi(I)$ a órbita correspondente. Então temos as seguintes possibilidades:

1. φ é constante e $I = \mathbb{R}$. Nesse caso, $\gamma = \{\mathbf{x}_0\}$;
2. φ é injetiva. Nesse caso, γ é difeomorfa à reta;
3. $I = \mathbb{R}$ e φ é periódica. Nesse caso, γ é difeomorfa ao círculo unitário.

Definição 2.1.10. O retrato de fase do campo X é representação das órbitas de X em Ω (espaço de fase), segundo a classificação acima, juntamente com a indicação do sentido de percurso da trajetória.

O comportamento de um campo de vetores X em um (ou próximo de um) ponto regular é bastante simples (ver [Sot79], Teorema 3.26). Assim, para desenhar o retrato de fase de X é necessário compreender o comportamento de X na vizinhança de seus pontos singulares.

Em relação aos pontos singulares de um campo vetorial X , temos a seguinte classificação.

Definição 2.1.11. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ um ponto singular de X e $DX(\mathbf{x}_0)$ a derivada do campo X em \mathbf{x}_0 . O ponto \mathbf{x}_0 é chamado de:

- **poço**, se existir uma vizinhança $V_{\mathbf{x}_0}$ de \mathbf{x}_0 tal que toda solução de X em $V_{\mathbf{x}_0}$ tende para \mathbf{x}_0 . Isso ocorre quando os autovalores de $DX(\mathbf{x}_0)$ têm partes reais negativas;
- **fonte**, se existir uma vizinhança $V_{\mathbf{x}_0}$ tal que toda solução de X em $V_{\mathbf{x}_0} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ deixa $V_{\mathbf{x}_0}$. Isso ocorre quando os autovalores de $DX(\mathbf{x}_0)$ têm partes reais positivas;
- **sela**, quando os autovalores de $DX(\mathbf{x}_0)$ são reais e de sinais opostos;
- **centro**, se existir uma vizinhança $V_{\mathbf{x}_0}$ tal que toda solução de X em $V_{\mathbf{x}_0} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ é periódica.

Definição 2.1.12 (Anel periódico). Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, \mathbf{x}_0 um centro de X e $V_{\mathbf{x}_0}$ a maior vizinhança de \mathbf{x}_0 folheada por órbitas periódicas de X . A vizinhança perfurada $V_{\mathbf{x}_0} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ é chamada de anel periódico de \mathbf{x}_0 e será denotado por $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$.

Definição 2.1.13 (Função período). Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, \mathbf{x}_0 um centro de X e $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$ o anel periódico de \mathbf{x}_0 . Em $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$, define-se a chamada função período $T : \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \mathbb{R}^+$, que atribui a cada $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$ o período mínimo $T(\mathbf{x})$ da órbita periódica que passa por \mathbf{x} . A função $T(\mathbf{x})$ é de classe C^r em $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$ e $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_0) > 0$.

Observação 2.1.7. Sejam $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e \mathbf{x}_0 um centro de X . Então,

- \mathbf{x}_0 é dito não degenerado se $\det DX(\mathbf{x}_0) \neq 0$.
- \mathbf{x}_0 é dito global se $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.
- \mathbf{x}_0 é dito isócrono se $T(\mathbf{x})$ é constante para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$.

2.2 Equivalência de Campos Vetoriais

Nesta seção introduziremos o conceito de Campos Vetoriais Equivalentes. A ideia central desse conceito é, dado um campo vetorial, encontrar uma mudança de variáveis que transforma o dado campo em um outro campo vetorial mais simples do ponto de vista qualitativo e/ou quantitativo.

Sejam $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial, $h : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo e $\mathbf{x}(t) = \varphi_t(\mathbf{x})$ uma solução da equação diferencial $\dot{\mathbf{x}} = X_1(\mathbf{x})$. Nessas condições, podemos associar à curva diferenciável $\mathbf{x}(t)$ em Ω_1 outra curva diferenciável $\mathbf{y}(t)$ em $\Omega_2 := h(\Omega_1)$ definida por $\mathbf{y}(t) = h(\mathbf{x}(t))$. A curva $\mathbf{y}(t)$ é solução de uma EDO associada a um campo vetorial X_2 definido em Ω_2 .

De fato,

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = Dh(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) = Dh(h^{-1}(\mathbf{y}(t)))X_1(h^{-1}(\mathbf{y}(t)))$$

segue que a curva $\mathbf{y}(t)$ é solução da equação diferencial

$$\dot{\mathbf{y}} = Dh(h^{-1}(\mathbf{y}))X_1(h^{-1}(\mathbf{y})),$$

a qual esta associada ao campo vetorial

$$X_2(\mathbf{y}) = Dh(h^{-1}(\mathbf{y}))X_1(h^{-1}(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in \Omega_2.$$

O campo vetorial X_2 é chamado de pushforward do campo vetorial X_1 pelo difeomorfismo h , i.e, $X_2 = h_*X_1$.

Definição 2.2.1. Sejam Ω_i , $i \in \{1, 2\}$, abertos de \mathbb{R}^2 . Os campos $X_1 \in C^r(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ e $X_2 \in C^r(\Omega_2, \mathbb{R}^2)$ são ditos C^r -**equivalentes**, se existir um difeomorfismo $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ de classe C^r satisfazendo a seguinte igualdade

$$Dh(\mathbf{x})X_1(\mathbf{x}) = X_2(h(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1. \quad (2.3)$$

Ou equivalentemente,

$$X_2(\mathbf{y}) = Dh(h^{-1}(\mathbf{y}))X_1(h^{-1}(\mathbf{y})), \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_2. \quad (2.4)$$

Dado um campo vetorial X , às vezes é mais conveniente trabalhar com o fluxo gerado pelo campo vetorial X do que com o próprio campo vetorial X . A seguir damos a definição de conjugação de fluxos.

Definição 2.2.2. Sejam $\varphi_1 : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_2 : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os fluxos gerados pelos campos vetoriais $X_1 \in C^r(\Omega_1)$ e $X_2 \in C^r(\Omega_2)$ respectivamente. Os fluxos $\varphi_1(t, \cdot)$, $\varphi_2(t, \cdot)$ são ditos C^r -**conjugados** se existir um difeomorfismo $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, \mathbf{x})) = \varphi_2(t, h(\mathbf{x})) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{D}_1. \quad (2.5)$$

A proposição a seguir fornece a relação entre equivalência de campos vetoriais e conjugação de fluxos gerado por campos vetoriais.

Proposição 2.2.1. Sejam $X_1 \in C^r(\Omega_1)$ e $X_2 \in C^r(\Omega_2)$ com fluxos $\varphi_1 : \mathcal{D}_1 \rightarrow \Omega_1$, $\varphi_2 : \mathcal{D}_2 \rightarrow \Omega_2$ respectivamente. Seja $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ um difeomorfismo de classe C^r . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

$$(i) Dh(p)X_1(\mathbf{x}) = X_2(h(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1;$$

$$(ii) \quad h(\varphi_1(t, \mathbf{x})) = \varphi_2(t, h(\mathbf{x})) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{D}_1.$$

A proposição acima afirma que dois campos vetoriais são equivalentes se e somente se seus fluxos locais são conjugados. Um aspecto essencial da conjugação h entre X e Y é a preservação dos pontos de equilíbrios e das órbitas periódicas juntamente com seus períodos. São estas características que tornam essas relações úteis para comparação de retratos de fase.

2.3 Formas Normais

Nesta seção introduziremos o conceito de forma normal de um campo vetorial, que é uma ferramenta muito útil para estudar o comportamento de um de campo vetorial em uma vizinhança de um ponto singular. Essa seção é baseada nas referências [DLA06], [Arn12] e [CLW94].

Na seção anterior, vimos que dois campos X_1 e X_2 são ditos conjugados se existir um difeomorfismo h tal que $X_2 = h_*X_1$. A ideia central da teoria das formas normais é, dado um campo X_1 , encontrar um difeomorfismo h que transforma X_1 em um campo de vetores X_2 "mais simples" (forma normal), e portanto, mais conveniente para o estudo do campo vetorial em questão.

Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^2 com $(0,0) \in \Omega$ e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{\infty, \omega\}$, tal que $X(0,0) = (0,0)$. A seguir iremos trabalhar com a expansão formal de X em uma série de potência na vizinhança de $(0,0)$. Antes vamos introduzir duas definições.

Definição 2.3.1. Um polinômio homogêneo de grau k em \mathbb{R}^2 é uma combinação linear de monômios $\mathbf{x}^q = x_1^{q_1}x_2^{q_2}$ com $|q| = q_1 + q_2 = k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Denotaremos por H_2^k o espaço das funções vetoriais em \mathbb{R}^2 cujas coordenadas são polinômios homogêneos de grau k .

Definição 2.3.2. Uma função formal $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma série da forma

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} F^k(\mathbf{x}), \quad F^k \in H_2^k,$$

não necessariamente convergente.

Definição 2.3.3. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Escrevemos $F(x) = \mathcal{O}(|x|^k)$ sempre que $F(\mathbf{x})/|\mathbf{x}|^k \rightarrow (0,0)$ quando $\mathbf{x} \rightarrow (0,0)$.

Agora, consideremos a expansão em série de Taylor de X em torno do ponto $(0,0)$

$$X(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + X^2(\mathbf{x}) + X^3(\mathbf{x}) + \cdots + X^k(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{k+1}), \quad (2.6)$$

onde $A := DX(0)$ é uma matriz 2×2 e $X^k \in H_2^k$, para todo $k \geq 2$. Uma aplicação formal da forma

$$x = h(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \sum_{k \geq 2} h^k(\mathbf{x}), \quad h^k \in H_2^k \quad (2.7)$$

transforma o campo vetorial formal (2.6) em um novo campo vetorial formal, da forma

$$Y(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} + Y^2(\mathbf{y}) + Y^3(\mathbf{y}) + \cdots + Y^k(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{k+1}), \quad (2.8)$$

com $Y^k \in H_2^k$ para todo $k \geq 2$.

Definição 2.3.4. Os campos vetoriais (2.6) e (2.8) são ditos *formalmente conjugados*. Além disso, se X, Y e h são convergentes, então os campos vetoriais (2.6) e (2.8) são ditos *analiticamente conjugados*.

O objetivo é simplificar (2.8), o quanto for possível, eliminando alguns termos por meio de uma mudança de variáveis da forma (2.7), começando a partir dos termos de segunda ordem. Para isso, considere a mudança de variáveis $\mathbf{x} = \mathbf{y} + h^2(\mathbf{y})$, com $h^2 \in H_2^2$ a ser determinado posteriormente. Temos que

$$\dot{\mathbf{x}} = (Id + Dh^2(\mathbf{y}))\dot{\mathbf{y}}.$$

Uma vez que $(Id + Dh^2(\mathbf{y}))$ é invertível, para \mathbf{y} suficientemente pequeno, segue que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= (Id + Dh^2(\mathbf{y}))^{-1}\dot{\mathbf{x}} \\ &= (Id - Dh^2(\mathbf{y}) + o(|\mathbf{y}|^2)) [A(\mathbf{y} + h^2(\mathbf{y})) + X_2(\mathbf{y} + h^2(\mathbf{y})) + o(|\mathbf{y}|^3)] \\ &= A\mathbf{y} + Ah^2(\mathbf{y}) + X^2(\mathbf{y}) - Dh^2(\mathbf{y})A\mathbf{y} + o(|\mathbf{y}|^3) \\ &= A\mathbf{y} - (Dh^2(\mathbf{y})A\mathbf{y} - Ah^2(\mathbf{y})) + X^2(\mathbf{y}) + o(|\mathbf{y}|^3) \end{aligned}$$

Agora, consideremos o operador linear $L_A^{(2)} : H_2^2 \rightarrow H_2^2$ definido por

$$(L_A^{(2)}h^2)(\mathbf{y}) := Dh^2(\mathbf{y})A\mathbf{y} - Ah^2(\mathbf{y}).$$

Assim, se X^2 estiver na imagem de $L_A^{(2)}$ podemos eliminar os termos quadráticos em (2.6) escolhendo $h^2 \in H_2^2$ tal que $(L_A^{(2)}h^2)(\mathbf{y}) = X^2(\mathbf{y})$. Feito isso, obtemos

$$Y(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} + o(|\mathbf{y}|^3).$$

O procedimento acima pode ser repetido para os termos de ordem $k \geq 3$. Devemos ressaltar que nem sempre é possível eliminar todos os termos em (2.6), no entanto, as mudanças de coordenadas $\mathbf{x} = \mathbf{y} + h^s(\mathbf{y})$, para $s > k$, não alteram os termos de ordem k em (2.6).

Definição 2.3.5. Dado $k \geq 2$ o operador linear $L_A^k : H_2^k \rightarrow H_2^k$ definido por

$$(L_A^k h^k)(\mathbf{y}) \doteq Dh^k A\mathbf{y} - Ah^k(\mathbf{y}) \tag{2.9}$$

é chamado *operador homológico*.

Definição 2.3.6. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ os autovalores de $A := DX(0, 0)$. A matriz A é dita *ressonante* se existirem $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$ e $j \in \{1, 2\}$ tal que

$$\lambda_j = \langle q, \lambda \rangle = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2, \quad |q| = q_1 + q_2 \geq 2.$$

Neste caso, a ressonância é dita de ordem $|q|$. Se $\langle q, \lambda \rangle - \lambda_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, 2\}$ diz-se que A é *não-ressonante*.

Definição 2.3.7. Um monômio $a_q x^q$ é dito *ressonante* de ordem $|q|$ se $\lambda_j = \langle q, \lambda \rangle = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$.

Proposição 2.3.1. *Suponha que $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Então $L_A^{(k)}$ também é diagonal na base de autovetores $\mathbf{x}^q \frac{\partial}{\partial x_j}$ e vale*

$$L_A^{(k)} \left(\mathbf{x}^q \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = [\langle q, \lambda \rangle - \lambda_j] \mathbf{x}^q \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2. \tag{2.10}$$

Observação 2.3.2. *Se a matriz A é não-ressonante, ou seja, se $\langle q, \lambda \rangle - \lambda_j \neq 0$ para $j = 1, 2$, então o operador $L_A^{(k)}$ é invertível e, portanto, é possível eliminar todos os termos de ordem maior ou igual a 2.*

Teorema 2.3.3 (Poincaré, [Arn12]). *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^2 com $(0,0) \in \Omega$ e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{\infty, \omega\}$, tal que $X(0,0) = (0,0)$. Se a matriz $A = DX(0)$ é não-ressonante, existe uma mudança de variáveis $\mathbf{x} = \mathbf{y} + h(\mathbf{y})$ definida em uma vizinhança de $(0,0)$ tal*

$$Y(\mathbf{y}) = A\mathbf{y}.$$

Mesmo nos casos em que A é ressonante ainda é possível eliminar alguns termos da forma normal.

Teorema 2.3.4 (Poincaré-Dulac, [Arn12]). *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^2 com $(0,0) \in \Omega$ e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{\infty, \omega\}$, tal que $X(0,0) = (0,0)$. Se a matriz $A = DX(0)$ for ressonante, existe uma mudança de variáveis $\mathbf{x} = \mathbf{y} + h(\mathbf{y})$ definida em uma vizinhança de $(0,0)$ tal que*

$$Y = A\mathbf{y} + G(\mathbf{y}),$$

onde todos os monômios na expressão de $G(\mathbf{y})$ são ressonantes.

Finalizamos essa seção com o Teorema da Forma Normal de Poincaré para um centro não degenerado.

Teorema 2.3.5 (Poincaré-Lyapunov, [MRT95]). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto com $(0,0) \in \Omega$ e $X \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^2)$ tal que $X(0,0) = (0,0)$. Então $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ é um centro não degenerado se, e somente se, existe uma mudança analítica de variáveis $\mathbf{x} = \mathbf{y} + h(\mathbf{y})$ definida em uma vizinhança de $(0,0)$ tal que*

$$Y = (y(1 + g(x^2 + y^2))) \frac{\partial}{\partial x} + (-x(1 + g(x^2 + y^2))) \frac{\partial}{\partial y}$$

onde g é uma função analítica em uma vizinhança de zero com $g(0) = 0$.

2.4 Campos Reversíveis

Nesta seção discorreremos brevemente sobre campos vetoriais reversíveis. As definições subsequentes são baseadas nas referências [TY] e [Gae94].

Definição 2.4.1. Uma involução sobre \mathbb{R}^2 é um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo $\varphi \circ \varphi = Id$. Um campo $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é reversível em relação a φ ou φ -reversível em Ω se

$$D\varphi(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) = -X \circ \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.11)$$

Estamos interessados apenas em campos reversíveis em relação a involuções lineares. Nesse contexto, temos a seguinte definição.

Definição 2.4.2. Uma aplicação linear $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamada de *involução linear* sobre \mathbb{R}^2 se $R^2 = Id$. Um campo $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *reversível* em relação a R ou R -reversível em Ω se

$$R \circ X(\mathbf{x}) = -X \circ R(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.12)$$

Definição 2.4.3. Diremos que um difeomorfismo $h : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ comuta com a involução R em Ω se

$$h \circ R(\mathbf{x}) = R \circ h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.13)$$

Listamos, a seguir, algumas propriedades clássicas dos campos vetoriais reversíveis que serão úteis na demonstração dos principais resultados desse trabalho. Essas propriedades foram adaptadas das referências [TY], [BT04] e [Dev76].

Para isso, seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma campo R -reversível. Uma órbita γ de X é dita *simétrica* se $R(\gamma) = \gamma$. Seja, ainda, S o conjunto dos pontos fixos de R , ou seja, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R(x, y) = (x, y)\}$. Vale as seguintes propriedades:

Proposição 2.4.1. *Sejam $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma campo R - reversível e S o conjunto dos pontos fixos de R . Então:*

1. *O retrato de fase de X é simétrico em relação a S ;*
2. *Um ponto crítico simétrico ou órbita periódica simétrica (i.e, uma órbita periódica γ tal que $R(\gamma) = \gamma$) não pode ser atrator(a) ou repulsor(a);*
3. *Se $X(\mathbf{x}_0) = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_0 \notin T_{\mathbf{x}_0}S$ então $X(R(\mathbf{x}_0)) = (0, 0)$;*
4. *Se uma órbita regular γ intercepta S em dois pontos distintos, então γ é uma órbita periódica simétrica;*
5. *Se $X(\mathbf{x}) \neq 0$ e $\mathbf{x} \in S$, então $X(\mathbf{x}) \notin S$;*
6. *Se γ é uma órbita periódica que não intercepta S , então $R(\gamma)$ também é uma órbita periódica que não intercepta S ;*
7. *$\phi_t \circ R = R \circ \phi_{-t}$, onde ϕ_t é fluxo de X ;*
8. *Uma órbita periódica simétrica de X com período T intercepta S em dois pontos distintos, digamos $\mathbf{x}_0 = \phi_0(\mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{x}_1 = \phi_{T/2}(\mathbf{x}_0)$.*

Exemplo 2.4.2. *O campo vetorial X definido por (1.2) é reversível em relação a involução linear $R(u, v) = (u, -v)$.*

De fato, como $F(u, v) = F(u, -v)$, temos que

$$X \circ R(u, v) = X(u, -v) = (-v, F(u, v)).$$

Por outro lado,

$$R \cdot X(u, v) = (v, -F(u, v)) = -(-v, F(u, v)).$$

Portanto,

$$R \circ X(u, v) = -X \circ R(u, v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Nesse caso, o conjunto dos pontos fixos de R é o eixo u .

Deixamos a cargo do leitor, verificar que os campos vetoriais em \mathbb{R}^2 reversíveis em relação $R(u, v) = (u, -v)$ são da forma

$$X(u, v) = (P(u, v), Q(u, v))$$

com P e Q satisfaz as seguintes condições

$$P(u, -v) = -P(u, v) \quad \text{e} \quad Q(u, -v) = Q(u, v).$$

2.5 Campos Hamiltonianos no Plano

Iniciamos nessa seção a parte mais importante desse capítulo. No que segue, iremos fazer uma breve revisão sobre campos vetoriais hamiltonianos no plano, enfatizando suas principais propriedades.

As definições que daremos a seguir são válidas em espaços bem mais gerais do que o \mathbb{R}^2 , ver por exemplo, [Arn13] e [Zeh10].

Definição 2.5.1. Uma forma bilinear B definida em \mathbb{R}^2 é uma aplicação $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que é linear nas duas componentes, i.e.

- $B(x + u, y) = B(x, y) + B(u, y)$;
- $B(x, y + v) = B(x, y) + B(x, v)$;
- $B(\lambda x, y) = B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$,

para todos $x, y, u, v, \lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 2.5.2. Uma forma bilinear $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *anti-simétrica*, se $B(x, y) = -B(y, x)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e, é dita *não-degenerada*, se $B(x, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, então, $x = 0$.

Definição 2.5.3. Uma **forma simplética** μ em um \mathbb{R}^2 é uma forma bilinear não-degenerada e anti-simétrica. O par (\mathbb{R}^2, μ) é chamado *espaço vetorial simplético*.

Definição 2.5.4. Sejam (\mathbb{R}^2, μ) espaço vetorial simplético e $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^r . Um campo vetorial $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ é dito hamiltoniano, se a seguinte igualdade é satisfeita

$$\mu(X, v) = dH \cdot v, \quad \forall v \in \Omega. \quad (2.14)$$

Quando a igualdade (2.14) é satisfeita, dizemos que X é hamiltoniano com função hamiltoniana H e forma diferencial simplética μ .

Observação 2.5.1.

- A igualdade (2.14) é, geralmente, representada por $\iota_X \mu = dH$.
- As formas simpléticas em \mathbb{R}^2 são as formas de áreas do plano.

Definição 2.5.5. A forma simplética μ_0 definida por

$$\mu_0(u, v) = \langle u, \mathbb{J}v \rangle, \quad u, v \in \mathbb{R}^2,$$

onde \mathbb{J} e a matriz 2×2

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de \mathbb{R}^2 , é a forma simplética padrão do espaço vetorial simplético \mathbb{R}^2 .

Observe que

$$\mu_0(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = dx \wedge dy(u, v),$$

onde

$$dx \wedge dy(u, v) = \det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Ou seja, $\mu_0(u, v)$ é a 2-forma (ou forma de área) padrão de \mathbb{R}^2 . Enfatizamos que toda forma de área é do tipo $a(x, y)dx \wedge dy$, com $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(x, y) > 0$.

Agora, vamos obter o campo vetorial hamiltoniano dado pelo par (μ_0, H) , onde H é uma função $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r em Ω . Para isso, considere o campo $X = (X_1, X_2)$. Por um lado temos que,

$$\mu_0(X, v) = X_1v_2 - X_2v_1$$

e, por outro lado, temos que

$$dH \cdot v = \langle \nabla H, v \rangle = \frac{\partial H}{\partial x}v_1 + \frac{\partial H}{\partial y}v_2.$$

Segue da igualdade

$$\mu_0(X, v) = dH \cdot v$$

que

$$X_1 = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{e} \quad X_2 = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

ou seja,

$$X(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right). \quad (2.15)$$

Definição 2.5.6. O campo X definido em (2.15) é o campo hamiltoniano padrão de \mathbb{R}^2 . Esse campo define o sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \end{cases} \quad (2.16)$$

o qual é chamado de sistema hamiltoniano planar.

A seguir, listamos algumas propriedades do campo vetorial hamiltoniano (2.15). Antes, vamos introduzir os conceitos de integral primeira, divergência e de fluxos que preservam áreas.

Definição 2.5.7. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Uma função não constante $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R})$ é uma integral primeira de X se

$$Xf = X_1 \frac{\partial f}{\partial x} + X_2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Definição 2.5.8. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$. A divergência de X , em relação a forma de área padrão, é o traço da matriz jacobiana de X , ou seja,

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y}.$$

Definição 2.5.9. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Dizemos que o fluxo $\varphi_t(x, y)$ de X preserva área se

$$\text{área } \varphi_t(U) = \text{área } U,$$

para cada $U \subseteq \Omega$ com $\text{área} U < \infty$ e para cada $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.5.2 (Teorema de Liouville). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Se X tem divergência nula, então seu fluxo preserva área.*

Proposição 2.5.3. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto $H \in C^r(\Omega, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ o campo vetorial hamiltoniano definido por (2.15). Então,*

1. a função hamiltoniana H é uma integral primeira de X ;
2. $\text{div} X = 0$ e, conseqüentemente, o fluxo de X preserva área;
3. as singularidades não degeneradas de X são do tipo centro ou do tipo sela;
4. os mínimos (ou máximos) locais não degenerados de H são centros de X e os pontos de selas' locais não degenerados de H são selas de X ;
5. X é tangente às curvas de nível de H ;
6. as curvas soluções de X estão contidas nas curvas de nível de H .

As demonstrações dos itens (1) e (2) são imediatos e as demonstrações dos itens (3)-(6) podem ser consultadas em [JL94] ou em [Me105, MS04].

Em suma, a proposição nos diz que o retrato de fase de um campo Hamiltoniano planar é completamente determinado pela função Hamiltoniana. De fato, dada a função hamiltoniana H , podemos, pelo item (4), calcular os pontos singulares de X e, uma vez que, pelo item (6), as curvas soluções de X estão contidas nas curvas de níveis de H , para determinarmos o retrato de fase de X , basta encontrarmos um mapa de nível da hamiltoniana H e orientar as curvas convenientemente.

Como vimos acima, quando X é hamiltoniano, as órbitas de X estão contidas nas curvas de nível $H = E$. Dessa forma, se \mathbf{x}_0 é um centro de X , podemos definir a função período em função dos níveis de energia $H = E$. De fato, segundo [CMV99], podemos supor que $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, $H(0, 0) = 0$ e $H(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$. Além disso, $H(\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}) = [0, E_{\max})$, onde $E_{\max} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, e quando E_{\max} é finito, a fronteira de \mathcal{A} está contida no nível de energia $H = E_{\max}$.

Definição 2.5.10 (Função período). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ um campo vetorial hamiltoniano com um centro em $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. Seja, ainda, $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$ o anel periódico de $(0, 0)$ e $H(\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}) = [0, E_{\max})$. A função $\hat{T} : [0, E_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ que atribuí a cada $E \in (0, E_{\max})$ o período mínimo $\hat{T}(E)$ da órbita periódica em $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$ de nível E é chamada de função período parametrizada por $H = E$. A função $\hat{T}(E)$ é de classe C^r em $(0, E_{\max})$ e $\lim_{E \rightarrow 0} \hat{T}(E) = \hat{T}(0) > 0$. Além disso, as funções $T(\mathbf{x})$, definida em (2.1.13), e $\hat{T}(E)$ estão relacionadas pela seguinte igualdade*

$$T(\mathbf{x}) = \hat{T} \circ H(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}. \quad (2.17)$$

2.6 Sistemas Potenciais

A classe de sistemas hamiltonianos mais simples são os chamados sistemas potenciais, sistemas esses, que provêm dos sistemas conservativos unidimensionais. A exposição seguinte é baseada em ([Arn92], Cap. 2, Seção 12).

Definição 2.6.1. Um sistema conservativo unidimensional (ou sistema conservativo com um grau de liberdade) é o sistema descrito pela EDO de segunda ordem

$$\ddot{x} = F(x), \quad (2.18)$$

onde F é uma função definida em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. A EDO (2.18) é equivalente ao sistema de EDO's de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F(x), \end{cases} \quad (x, y) \in I \times \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

A equação (2.18) pode ser interpretada como a segunda Lei de Newton aplicada a uma partícula de massa $m = 1$ que se move sob o efeito de uma força $F(x)$ que só depende da posição x . A seguinte terminologia é usual em mecânica:

- I é chamado de espaço de configuração;
- x é posição;
- \dot{x} é a velocidade;
- \ddot{x} é a aceleração;
- $I \times \mathbb{R}$ é o espaço de fase;
- (2.18) e a equação de Newton;
- F é o campo de força;
- $F(x)$ é a força;
- $T(y) = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{y^2}{2}$ é a energia cinética;
- $V(x) = -\int_{x_0}^x F(\xi)d\xi$ é a energia potencial;
- $E = T + V$ é a energia mecânica total.

Observe que $F(x) = -V'(x)$ e, portanto, a energia potencial determina o sistema (2.19). Por esse motivo (2.19) é, também, chamado de *sistema potencial*. Esse sistema define em $I \times \mathbb{R}$ o campo vetorial

$$X(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} - V'(x) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.20)$$

o qual é hamiltoniano com função hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x). \quad (2.21)$$

A seguir apresentamos as principais propriedades do campo potencial (2.20).

Proposição 2.6.1. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ aberto, $V \in C^r$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ e X o campo vetorial hamiltoniano definido por (2.20). Então, $X \in C^r(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ e valem as seguintes propriedades:*

1. As singularidades de X são da forma $(x_0, 0)$, com $x_0 \in I$, ou seja, x_0 é um ponto crítico de V ;
2. Se $(x_0, 0)$ é um centro de X se x_0 for um ponto de mínimo de V e, é uma sela de X se x_0 for um ponto de máximo;
3. O retrato de fase de X é completamente determinado pelo potencial V .

Como mostram as figuras abaixo, o aspecto do retrato de fase do campo potencial X depende da quantidade e da natureza dos equilíbrios do potencial V . Note que não existe dois pontos de equilíbrios do mesmo tipo (sela ou centro) consecutivos. Isso se deve a impossibilidade do potencial V possuir dois máximos ou dois mínimos consecutivos.

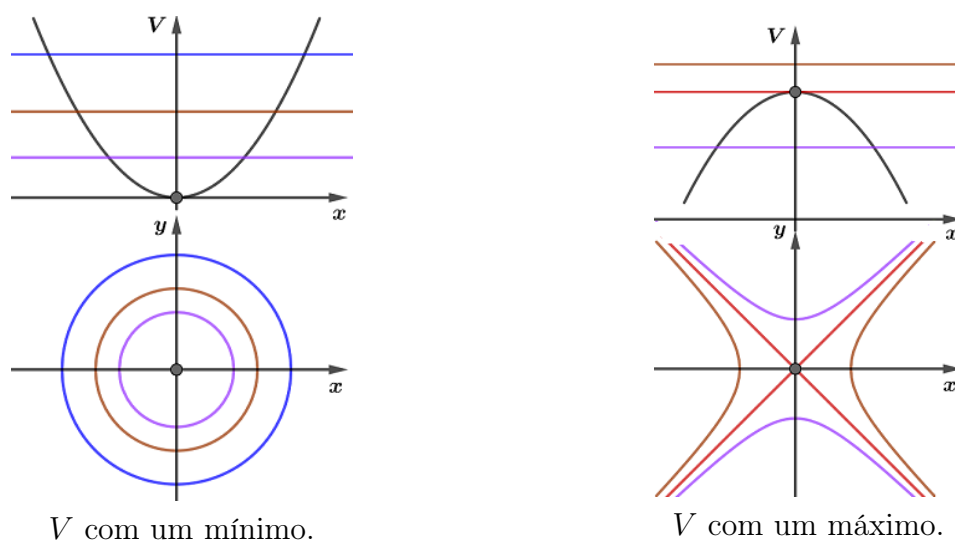


Figura 2.1: Retrato de fase de X

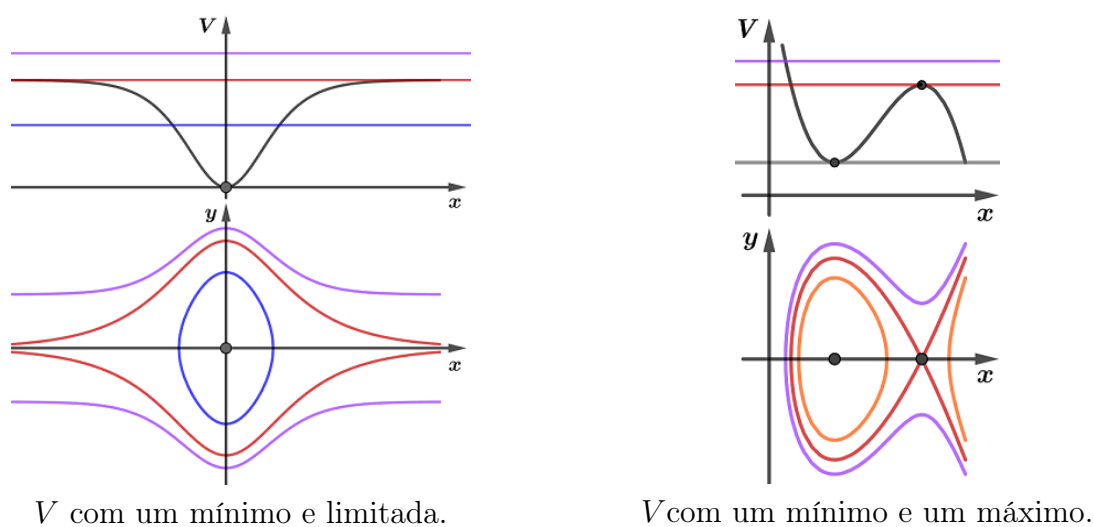


Figura 2.2: Retrato de fase de X

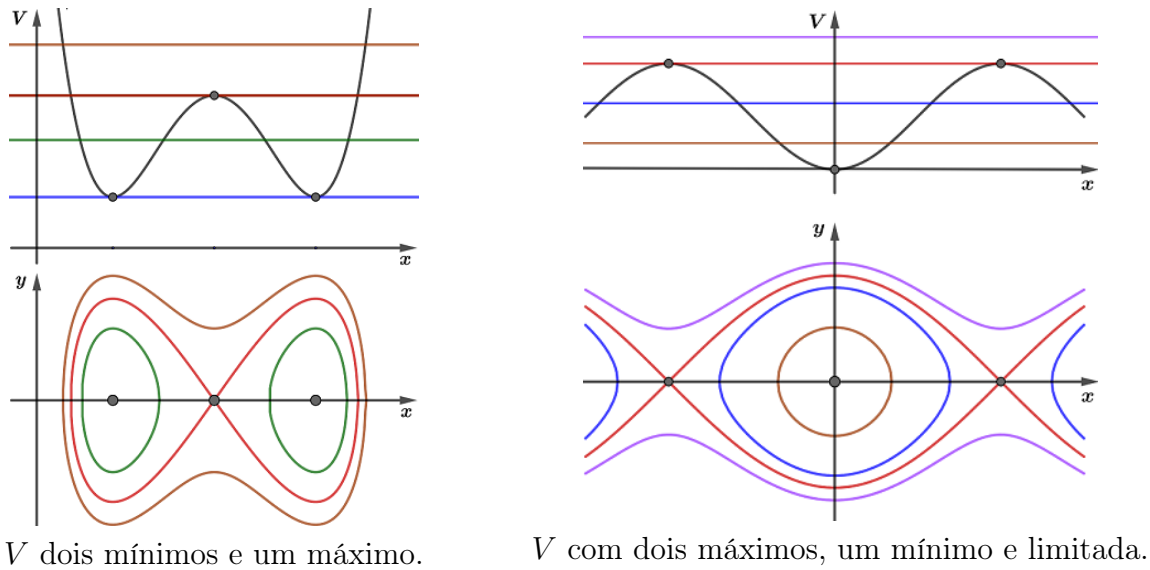


Figura 2.3: Retrato de fase de X

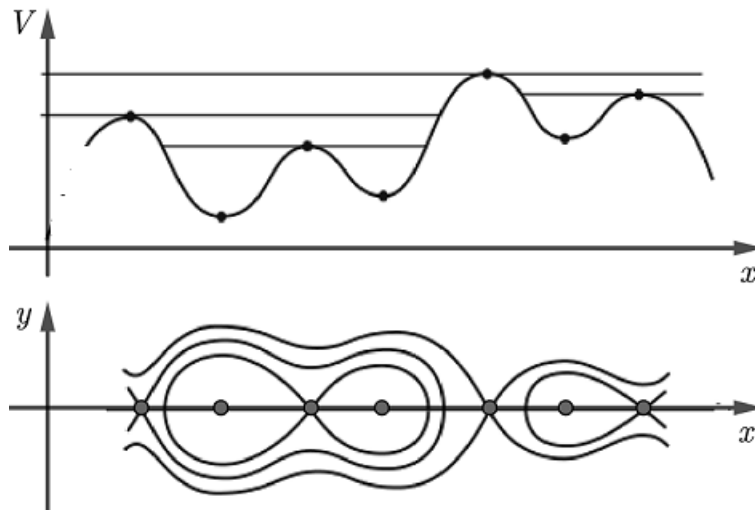


Figura 2.4: V com quatro máximos e três mínimos / retrato de fase de X

2.6.1 Função Período

Nesta subseção admitiremos que o campo X definido por (2.20) tem um equilíbrio \mathbf{x}_0 do tipo centro em $(0, 0)$ e vamos deduzir fórmulas que nos permitem calcular o período das órbitas periódicas de X no anel periódico de $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$. Uma boa referência sobre esse tópico é o livro ([LL04], capítulo 3).

Sejam, então, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto com $0 \in I$ e $V \in C^r(I, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ tal que $V(0) = V'(0) = 0$ e

$$xV'(x) > 0, \quad \forall x \in I \setminus \{0\}. \tag{2.22}$$

Nessas condições o campo vetorial $X \in C^r(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ definido por (2.20) tem um centro em $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. Sejam $[b_0, a_0] \times \{0\}$, $b_0 < 0 < a_0$, a interseção do anel periódico $\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}$ com I e $V(b_0) = V(a_0) = E_0$. Dado $E \in (0, E_0]$, a órbita periódica $\gamma_E \subset \mathcal{A}$, correspondente ao nível E , corta o eixo x em dois pontos, os quais denotaremos por $(a, 0)$ com $a > 0$ e $(b, 0)$ com $b < 0$ (ver fig.2.5). Os números a e b são chamados de meias amplitudes, positiva e negativa respectivamente, de γ_E . Já o número $A = (a - b)/2$ é

chamado de amplitude da órbita periódica γ_E .

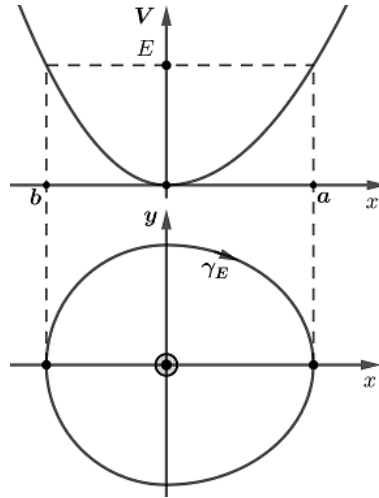


Figura 2.5: Órbita periódica γ_E .

A seguir vamos obter uma expressão que nos permite calcular o período da órbita periódica γ_E em função do nível de energia E . Para isso, seja T_0 o período de γ_E . Pela simetria em relação a x , o tempo que uma solução de X com condição inicial $(b, 0)$ leva para chegar a $(a, 0)$ é igual a $T_0/2$. Seja, então, $t \rightarrow (x(t), y(t))$ a solução de X tal que $(x(t_0), y(t_0)) = (a, 0)$ e $(x(t_1), y(t_1)) = (b, 0)$. Logo

$$T_0/2 = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{x}(t)dt}{\dot{x}(t)} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{x}(t)dt}{y(t)}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, temos que $u_0 = x(t_0) = b$, $u_1 = x(t_1) = a$ e $du = \dot{x}(t)dt$. Da última equação segue que

$$T_0/2 = \int_b^a \frac{du}{y(t)}, \quad b \leq u \leq a.$$

Uma vez que, H definido em (2.21) é uma integral primeira de X , segue que $H(x(t), y(t)) = E$, ou seja,

$$\frac{y^2(t)}{2} + V(x(t)) = E.$$

Daí, para $y > 0$, temos que

$$y(t) = \sqrt{2(E - V(x(t)))}$$

e, conseqüentemente,

$$T_0/2 = \int_b^a \frac{du}{\sqrt{2(E - V(u))}} = \int_b^0 \frac{du}{\sqrt{2(E - V(u))}} + \int_0^a \frac{du}{\sqrt{2(E - V(u))}}.$$

Portanto

$$T_0 = \sqrt{2} \int_0^a \frac{du}{\sqrt{E - V(u)}} - \sqrt{2} \int_0^b \frac{du}{\sqrt{E - V(u)}}. \quad (2.23)$$

Segue de (2.22) que V é estritamente crescente em $[0, a_0]$ e estritamente decrescente em $[b_0, 0]$. Logo, V possui inversa em $[b_0, a_0]$. Sejam $u = x_-(s)$ e $u = x_+(s)$, $0 \leq s \leq E$, as

funções inversas de V em $[b, 0]$ e $[0, a]$, respectivamente. Assim $du = \mathbf{x}'_{\pm}(s)ds$, $b = \mathbf{x}_-(E)$ e $a = \mathbf{x}_+(E)$. Fazendo a mudança de variáveis $u = \mathbf{x}_{\pm}(s)$ na equação (2.23), obtemos que

$$T_0 = \sqrt{2} \left(\int_0^E \frac{\mathbf{x}'_+(s)ds}{\sqrt{E-s}} - \int_0^E \frac{\mathbf{x}'_-(s)ds}{\sqrt{E-s}} \right) = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s)ds}{\sqrt{E-s}},$$

onde $\mathbf{x}(E)$ é a função definida por

$$\mathbf{x}(E) = \frac{\mathbf{x}_+(E) - \mathbf{x}_-(E)}{2}. \quad (2.24)$$

Finalmente, o período T_0 da órbita γ_E é dado por

$$T_0 = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s)ds}{\sqrt{E-s}}. \quad (2.25)$$

Com base no exposto acima, temos a seguinte definição.

Definição 2.6.2. Sejam $b_0 < 0 < a_0$ e $E_0 = V(a_0) = V(b_0) > 0$. A função $\tilde{T} : [0, E_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\tilde{T}(E) = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s)ds}{\sqrt{E-s}}, \quad 0 \leq s \leq E \quad (2.26)$$

é a função período do campo X definida em termos dos níveis de energia $E \in [0, E_0]$.

A função $A = \mathbf{x}(E)$ definida por (2.24) é chamada de função amplitude de γ_E e as funções $b = \mathbf{x}_-(E)$ e $a = \mathbf{x}_+(E)$ são as meias amplitudes negativa e positiva de γ_E em função de E . Essas funções são obtidas a partir de V pela seguinte relação

$$V(\mathbf{x}_-(E)) = V(\mathbf{x}_+(E)) = E.$$

A partir da função $\tilde{T}(E)$ é possível definir a função período $T(x)$, que calcula o período da órbita periódica em termos de $x \in [b_0, a_0]$, e a função período $\bar{T}(A)$, que calcula o período da órbita periódica em termos da amplitude $A = \mathbf{x}(E)$.

Definição 2.6.3. A função $T : [b_0, a_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ que atribui a cada $x \in [b_0, a_0]$ o período da órbita periódica que passa por $(x, 0)$ é dada a partir de \tilde{T} por

$$T(x) = \tilde{T} \circ V(x). \quad (2.27)$$

Agora, seja $A_0 = (\mathbf{x}_+(E_0) - \mathbf{x}_-(E_0))/2 = \mathbf{x}(E_0)$. A função $A : [0, E_0] \rightarrow [0, A_0]$ definida por $A = \mathbf{x}(E)$ é estritamente crescente e, conseqüentemente, $A = \mathbf{x}(E)$ possui inversa $\mathbf{x}^{-1}(A)$ para cada $A \in [0, A_0]$. Temos a seguinte definição.

Definição 2.6.4. A função $\bar{T} : [0, A_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\bar{T}(A) = \tilde{T}(\mathbf{x}^{-1}(A)) \quad (2.28)$$

é a função período definida em termos das amplitudes $A \in [0, A_0]$. Reciprocamente, temos $\tilde{T}(E) = \bar{T}(\mathbf{x}(E))$. Em particular, se V for par, $A = \mathbf{x}_+(E) = \mathbf{x}_+(V(x)) = x$, $0 \leq x \leq a_0$. Logo, nesse caso,

$$T(A) = \tilde{T}(\mathbf{x}_+^{-1}(x)) = \tilde{T}(V(A)). \quad (2.29)$$

Em suma, podemos resumir as duas definições acima na seguinte proposição.

Proposição 2.6.2. *Sejam $b_0 < 0 < a_0$, $V(b_0) = V(a_0) = E_0$ e $\tilde{T} : [0, E_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por (2.26). Então,*

$$T(x) = \tilde{T} \circ V(x), \quad x \in [b_0, a_0] \quad (2.30)$$

e

$$\bar{T}(A) = \tilde{T}(\mathbf{x}^{-1}(A)), \quad A \in [0, \mathbf{x}(E_0)]. \quad (2.31)$$

Em particular, se V for um potencial par,

$$\bar{T}(A) = \tilde{T}(V(A)) = T(A), \quad A \in [0, \mathbf{x}(E_0)]. \quad (2.32)$$

A seguir iremos calcular \tilde{T} , T e \bar{T} para alguns exemplos.

Exemplo 2.6.3. *Considere o potencial V definido por*

$$V(x) = k|x|^n,$$

onde k é uma constante positiva.

Iniciamos por $\tilde{T}(E)$. Para isso, seja $E > 0$ tal que $V(x) = E$. Logo $|x| = (E/k)^{1/n}$ e, conseqüentemente, $\mathbf{x}_+(E) = (E/k)^{1/n}$ e $\mathbf{x}_-(E) = -(E/k)^{1/n}$. Segue que

$$\mathbf{x}(E) = (\mathbf{x}_+(E) - \mathbf{x}_-(E))/2 = (E/k)^{1/n}$$

e, portanto,

$$\mathbf{x}'(E) = \frac{E^{(1-n)/n}}{nk^{1/n}}.$$

Logo,

$$\tilde{T}(E) = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s)ds}{\sqrt{E-s}} = \frac{2\sqrt{2}}{nk^{1/n}} \int_0^E \frac{s^{(1-n)/n}ds}{\sqrt{E-s}} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\Gamma(1/n)}{nk^{1/n}\Gamma(1/n+1/2)} E^{(2-n)/2n},$$

onde Γ é a função gamma de Euler, i.e,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0. \quad (2.33)$$

Decorre da definição de T que

$$\begin{aligned} T(x) &= \tilde{T}(V(x)) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\Gamma(1/n)}{nk^{1/n}\Gamma(1/n+1/2)} (k|A|^n)^{(2-n)/2n} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\Gamma(1/n)}{nk^{1/n}\Gamma(1/n+1/2)} k^{(2-n)/2n} |x|^{(2-n)/2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\Gamma(1/n)}{nk^{1/2}\Gamma(1/n+1/2)} |x|^{(2-n)/2}. \end{aligned}$$

Uma vez que V é par, obtemos que

$$\bar{T}(A) = T(A) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\Gamma(1/n)}{nk^{1/2}\Gamma(1/n+1/2)} A^{(2-n)/2}.$$

Em particular, se $V(x) = x^2/2$, temos que

$$\tilde{T}(E) = \bar{T}(A) = T(x) = 2\pi.$$

Exemplo 2.6.4. Considere o potencial V definido por $V(x) = \frac{1}{2} \tan^2(x)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Como acima, seja $E > 0$ tal que $V(x) = E$. Segue que $x = \pm \tan^{-1}(\sqrt{2E})$ e, consequentemente, $\mathbf{x}_{\pm}(E) = \pm \tan^{-1}(\sqrt{2E})$. Logo $\mathbf{x}(E) = (\mathbf{x}_+(E) - \mathbf{x}_-(E))/2 = \tan^{-1}(\sqrt{2E})$ e, portanto,

$$\mathbf{x}'(E) = \frac{1}{\sqrt{2E}(1+2E)}.$$

Assim, por definição,

$$\begin{aligned} \tilde{T}(E) &= 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s)ds}{\sqrt{E-s}} = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{ds}{\sqrt{2s}(1+2s)\sqrt{E-s}} = 2 \int_0^E \frac{ds}{(1+2s)\sqrt{(E-s)s}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1+2E}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$T(x) = \tilde{T}(V(x)) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = 2\pi \cos(x)$$

e, como V é par, temos que

$$\bar{T}(A) = T(A) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\tan^2(A)}} = 2\pi \cos(A).$$

Exemplo 2.6.5. Considere o potencial V definido por $V(x) = \frac{1}{2}(e^x - 1)^2$, com $-\infty < x < \ln(2)$.

Seja $0 \leq E < 1/2$. Então, $V(x) = E$ se, e somente se, $x = \ln(1 \pm \sqrt{2E})$ e, consequentemente, $\mathbf{x}_-(E) = \ln(1 - \sqrt{2E})$ e $\mathbf{x}_+(E) = \ln(1 + \sqrt{2E})$. Portanto

$$\mathbf{x}(E) = (\mathbf{x}_+(E) - \mathbf{x}_-(E))/2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{2E}}{1 - \sqrt{2E}}\right) = \tanh^{-1}(\sqrt{2E}).$$

Logo

$$\mathbf{x}'(E) = \frac{1}{\sqrt{2E}(1-2E)}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{T}(E) &= 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s)ds}{\sqrt{E-s}} = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{ds}{\sqrt{2s}(1-2s)\sqrt{E-s}} = 2 \int_0^E \frac{ds}{(1-2s)\sqrt{(E-s)s}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-2E}}, \quad 0 < E < 1/2. \end{aligned}$$

Segue que

$$T(x) = \tilde{T}(V(x)) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-(e^x - 1)^2}}, \quad -\infty < x < \ln(2).$$

Agora, como V não é par, $\bar{T}(A) \neq T(A)$. Para calcular $\bar{T}(A)$, vamos usar a definição de \bar{T} para o caso geral. Para isso, note que $\mathbf{x}'(E) > 0$ para todo $0 < E < 1/2$ e, portanto,

$A = \mathbf{x}(E)$ é inversível. A saber,

$$E = \mathbf{x}^{-1}(A) = \frac{1}{2} \tanh^2(A).$$

Logo,

$$T(A) = \tilde{T}(\mathbf{x}^{-1}(A)) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \tanh^2(A)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\operatorname{sech}^2(A)}} = 2\pi \cosh(A).$$

Aproveitamos esse exemplo para fazer a seguinte observação.

Observação 2.6.6. *Se o potencial V não for par em $[b_0, a_0]$, podemos, a partir de V , construir um difeomorfismo $d : [b_0, a_0] \rightarrow [d(b_0), d(a_0)]$, com $d(b_0) = -d(a_0)$, de tal forma que o potencial U definido em $[-d(a_0), d(a_0)]$ por $U = V \circ d$ é par. A saber, d é construído da seguinte forma. Seja $V \in C^r([b_0, a_0], \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ satisfazendo a condição 2.22. Como V é estritamente decrescente em $[b_0, 0)$, estritamente crescente em $(0, a_0]$ e $V(0) = 0$, para cada $x \in [b_0, a_0]$, existe um difeomorfismo $b \in C^r([b_0, a_0], \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ tal que $V(b(x)) = V(x)$ e $xb(x) < 0$ (ver [Alf84b]). Assim, por definição, $b(0) = 0$ e $b'(x) < 0$ para todo $x \in [b_0, a_0]$. Consideremos d definido em $[b_0, a_0]$ por*

$$d(x) = \frac{x - b(x)}{2}.$$

Assim, por definição, $d'(x) > 0$ e, portanto, d é um difeomorfismo de classe C^r que satisfaz $d_0 := d(b_0) = -d(a_0) = -d_0$. Seja $u = d(x)$. O potencial $U(u)$ definido em $[-d_0, d_0]$ por

$$U(u) = V \circ d^{-1}(u)$$

é par e, além disso, $U \in C^r([-d_0, d_0], \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$. Sejam \tilde{T}_V e $\tilde{T}_U(E)$ as funções períodos dos potenciais V e U definidas em $[0, E_0]$, $E_0 = V(a_0) = V(b_0)$. Vale a seguinte igualdade

$$\tilde{T}_V(E) = \tilde{T}_U(E), \quad E \in [0, E_0].$$

De fato, dado $E \in [0, E_0]$, seja $A = \mathbf{x}(E)$ da órbita periódica associada a V . Então,

$$\mathbf{x}(E) = \frac{\mathbf{x}_+(E) - \mathbf{x}(E)}{2} = \frac{\mathbf{x}_+(E) - b(\mathbf{x}_+(E))}{2} = d(\mathbf{x}_+(E)) = U_+^{-1}(E).$$

Como U é par, temos que

$$\tilde{T}_U(E) = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{(U_+^{-1})'(s) ds}{\sqrt{E-s}} = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s) ds}{\sqrt{E-s}} = \tilde{T}_V(E).$$

Consequentemente, temos que $T_U(u) = T_V(x)$ e $\bar{T}_U(A) = \bar{T}_V(A)$. Além disso, vale a igualdade

$$\bar{T}_U(A) = T_U(A).$$

No caso do exemplo anterior, $b(x) = \ln(2 - e^x)$ e, consequentemente, $d(x) = \frac{1}{2}(x - \ln(2 - e^x))$. Logo $d^{-1}(u) = \ln\left(\frac{2e^{2u}}{1 + e^{2u}}\right)$. Segue que,

$$U(u) = V \circ d^{-1}(u) = \frac{1}{2}(e^{d^{-1}(u)} - 1)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2u} - 1}{1 + e^{2u}} \right)^2 = \frac{1}{2} \tanh^2(u).$$

Agora, dado $0 \leq E < 1/2$ tal que $U(u) = E$, obtemos $u_{\pm}(E) = \pm \tanh^{-1}(\sqrt{2E})$. Logo

$$u(E) = (u_+(E) - u_-(E))/2 = \tanh^{-1}(\sqrt{2E}).$$

Como já vimos,

$$u'(E) = \frac{1}{\sqrt{2E}(1-2E)}$$

e, conseqüentemente,

$$\tilde{T}_U(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-2E}}, \quad 0 \leq E < 1/2.$$

Ou seja, $\tilde{T}_U(E) = \tilde{T}_V(E)$. Portanto,

$$T_U(u) = \tilde{T}_U(U(u)) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\tanh^2(u)}} = 2\pi \cosh(u)$$

e, como U é par, temos que

$$T_U(A) = T_U(A) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\tanh^2(A)}} = 2\pi \cosh(A) = T_V(A).$$

A observação (2.6.6) será útil na próxima seção.

2.6.2 Problema Inverso

O *Problema Inverso (P.I)* trata da possibilidade de reconstruir a função potencial V a partir de uma função período T dada, ou seja, T é dada e V é uma função desconhecida a ser determinada a partir de T (ver [LL04], Cap. 3, seção 12). Esse problema consiste nas três perguntas a seguir:

1. Dada uma função T , existe V tal que $T_V = T$?
2. Se tal V existe, ela é única?
3. Qual condição adicional determina V exclusivamente?

O P.I foi estudado por vários pesquisadores. A seguir listamos os resultados mais clássicos.

- Urabe [Ura64] (ver também [Ura67], cap 13) provou que, dada uma função positiva $\bar{T} = \bar{T}(A)$ com derivada Lipschitz contínua, existe uma infinidade de funções V tais que $\bar{T}_V(A) = \bar{T}(A)$, para A suficientemente pequeno.
- Alfawicka [Alf84a] estabeleceu a existência local de V sob uma suposição mais fraca, a saber, de que $\bar{T}(A)$ é Lipschitz positiva para A suficientemente pequeno.
- A existência global de V realizando a função de meio período $T(x)$, $x \in [0, a_0]$ foi estabelecida por Kamimura [Kam10], sob as mesmas premissas de Alfawicka.
- A versão analítica (local) do problema de recuperar V da função de meio período $T(x)$ foi estabelecida por Alfawicka [Alf84a].
- A versão analítica (local) do problema de recuperar V da função período $T(x)$, $x \in [b_0, a_0]$ foi tratada por F. Mañosas e Pedro J. Torres em [MT08].

- Cima, Mañosas, Villadelprat [CMV99] mostraram que, para determinar V exclusivamente, é útil considerar um mapa que associa cada meia-amplitude positiva a outra meia-amplitude negativa.
- A existência global de V realizando a função período $\tilde{T}(A)$ foi estabelecida por Kamimura e Kaneya sob a hipótese de que $T(A)$ é Lipschitz positiva [KK13].
- Problemas relacionados para determinar V de uma função de período parametrizada em termos da energia total E , ou seja, em termos de $\tilde{T}(E)$ foram investigados por Schaaf [Sch06], Cima, Mañosas, Villadelprat [CMV99], Cima, Gasull, Mañosas [CGM00].

A seguir vamos discorrer, resumidamente, sobre a solução do P.I a fim de apresentar resultados que serão fundamentais na demonstração dos resultados principais do Capítulo 4.

Em razão da observação (2.6.6) podemos admitir que o potencial V é par. Nesse caso, $x_-(E) = -x_+(E)$ e, conseqüentemente, $x(E) = (x_+(E) - x_-(E))/2 = x_+(E)$, onde $x_+(E)$ a função inversa de V em $[0, a_0]$ (ver fig.2.6). Logo, por (2.26) segue que a função período $\tilde{T}(E)$ associada a V é dada por $\tilde{T}(E) = 2\tilde{T}(E)$, onde $\tilde{T}(E)$ é a função meio-período

$$\tilde{T}(E) = \sqrt{2} \int_0^E \frac{x'_+(s) ds}{\sqrt{E-s}}, \quad 0 \leq s \leq E. \quad (2.34)$$

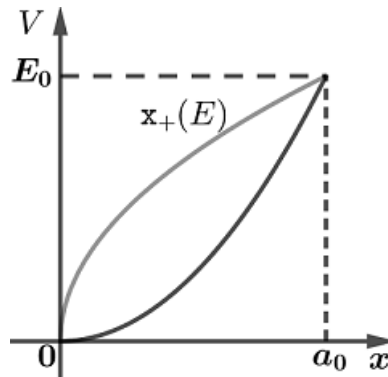


Figura 2.6: Gráficos de V e x_+ .

A partir da equação (2.34) podemos obter uma condição necessária para o P.I. A fim de tornar a discussão subsequente mais concisa, vamos introduzir o seguinte operador integral.

Definição 2.6.5 (Transformada de Abel). Sejam $E_0 > 0$ e $\phi \in C^0[0, E_0]$, $\phi \in C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. A transformada de Abel é o operador linear integral definido em $[0, E_0]$ por

$$\mathcal{J}\phi(E) = \int_0^E \frac{\phi(s) ds}{\sqrt{E-s}}. \quad (2.35)$$

Segue da regularidade de ϕ em $[0, E_0]$ que $\mathcal{J}\phi(0) = 0$ e $\mathcal{J}\phi \in C^0[0, E_0]$, $\mathcal{J}\phi \in C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ (ver apêndice A, lema A.0.1). A transformada de Abel satisfaz as seguintes propriedades

P.1 A derivada de $\mathcal{J}\phi(E)$ em relação a E é dada por

$$\mathcal{D}\mathcal{J}\phi(E) = \frac{\phi(0)}{\sqrt{E}} + \int_0^E \frac{\phi'(s)ds}{\sqrt{E-s}}. \quad (2.36)$$

P.2 Propriedade fundamental

$$\mathcal{J}(\mathcal{J}\phi)(E) = \pi\mathcal{I}\phi(E), \quad (2.37)$$

onde $\mathcal{I}\phi(E) = \int_0^E \phi(s)ds$, $E \in (0, E_0]$.

Voltando ao problema inverso, dados $E_0 > 0$ e $\tilde{T} : [0, E_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$, queremos determinar $x = \mathbf{x}_+(E)$, $E \in [0, E_0]$ com $\mathbf{x}(0) = 0$, tal que

$$\tilde{T}(E) = \sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s)ds}{\sqrt{E-s}}, \quad 0 \leq s \leq E. \quad (2.38)$$

Note que $\tilde{T}(E) = \sqrt{2}\mathcal{J}\mathbf{x}'_+(E)$. Aplicando \mathcal{J} em ambos os lados dessa identidade, obtemos que

$$\mathcal{J}\tilde{T}_+(E) = \sqrt{2}\mathcal{J}\mathcal{J}\mathbf{x}'_+(E) \stackrel{p.2}{=} \sqrt{2}\pi\mathcal{I}\mathbf{x}'_+(E) = \sqrt{2}\pi\mathbf{x}_+(E),$$

pois estamos supondo que $\mathbf{x}_+(0) = 0$. Logo, a função $\mathbf{x}_+(E)$ deve satisfazer, necessariamente, a chamada equação integral de Abel

$$\mathbf{x}_+(E) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\mathcal{J}\tilde{T}(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\tilde{T}(s)ds}{\sqrt{E-s}}, \quad 0 \leq s \leq E. \quad (2.39)$$

Proposição 2.6.7. *Sejam $E_0 > 0$ e $\tilde{T} \in C^0([0, E_0], \mathbb{R}^+)$ tal que $\tilde{T} \in C^r((0, E_0], \mathbb{R}^+)$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. Se $\mathbf{x}_+ : [0, E_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por (2.39) satisfaz*

$$\mathbf{x}'_+(E) > 0 \forall E \in (0, E_0] \quad e \quad \lim_{E \rightarrow +0} \mathbf{x}'_+(E) = +\infty, \quad (2.40)$$

então o potencial $V_+(x) = \mathbf{x}_+^{-1}(x)$ é C^1 em $[0, a_0]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, a_0]$ com $V_+(0) = V'_+(0) = 0$, onde $a_0 = \mathbf{x}_+^{-1}(E_0)$. Além disso, $\tilde{T}_{V_+}(E) = \tilde{T}(E)$, onde \tilde{T}_{V_+} é a função meio período associado a V_+ .

Demonstração. De fato, uma vez que $\mathbf{x}_+(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\mathcal{J}\tilde{T}(E)$, segue da definição 2.6.5 que $\mathbf{x}_+(0) = 0$, $\mathbf{x}_+ \in C^0[0, E_0]$ e $\mathbf{x}_+ \in C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. Além disso, por (2.40) temos que $\mathbf{x}'_+(E)$ em $(0, E_0]$ com $\lim_{E \rightarrow +0} \mathbf{x}'_+(E) = +\infty$ e, conseqüentemente, $x = \mathbf{x}_+(E)$ possui inversa contínua em $[0, a_0]$ e de classe $C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, a_0]$. Seja $V_+(x) = \mathbf{x}_+^{-1}(x)$. Por L'hospital, $V'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} V_+(x)/x = \lim_{x \rightarrow +0} V'_+(x)$. Como $V'_+(x) = 1/\mathbf{x}'_+(\mathbf{x}_+^{-1}(x))$, segue que $\lim_{x \rightarrow +0} V'_+(x) = \lim_{E \rightarrow +0} 1/\mathbf{x}'_+(E) = 0$ e, conseqüentemente, $V'_+(0) = 0$. Agora, seja $E > 0$ tal que $V_+(x) = E$. Temos, por construção, que $V_+^{-1}(E) = \mathbf{x}_+(E)$. Logo, por (2.34) temos que

$$\tilde{T}_{V_+}(E) = \sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'_+(s)ds}{\sqrt{E-s}} = \tilde{T}(E).$$

□

Segue da proposição 2.6.7 que se $x = \mathbf{x}_+(E)$ satisfaz as (2.40) o problema de determinar

V_+ a partir de $\tilde{\mathbf{T}}(E)$ está resolvido. Uma vez que $\mathbf{x}_+(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \mathcal{J}\tilde{\mathbf{T}}(E)$ segue de (2.36) que

$$\mathbf{x}'_+(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \mathcal{D}\mathcal{J}\tilde{\mathbf{T}}(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left[\frac{\tilde{\mathbf{T}}(0)}{\sqrt{E}} + \int_0^E \frac{\tilde{\mathbf{T}}'(s)ds}{\sqrt{E-s}} \right]. \quad (2.41)$$

Como $\tilde{\mathbf{T}} \in C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, segue que $\tilde{\mathbf{T}}' \in C^r(0, E_0]$ e, conseqüentemente,

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \mathbf{J}\tilde{\mathbf{T}}'(E) = \mathbf{J}\tilde{\mathbf{T}}'(0) = 0.$$

Logo, $\lim_{E \rightarrow 0^+} \mathbf{x}'_+(E) = +\infty$. Assim, o problema de determinar V_+ a partir de $\tilde{\mathbf{T}}$ reduz-se a mostrar que $\mathbf{x}'_+(E) > 0$ em $(0, E_0]$.

Note que se $\tilde{\mathbf{T}}'(E) \geq 0$ em $(0, E_0]$, então $\mathbf{x}'_+(E) > 0$ em $(0, E_0]$ e, nesse caso, o problema está resolvido. Mesmo para o caso em que $\tilde{\mathbf{T}}'(E) < 0$ em $[0, E_0]$ pode ocorrer $\mathbf{x}'_+(E) > 0$ para todo E em $[0, E_0]$. Por exemplo,

Exemplo 2.6.8. *Seja $\tilde{\mathbf{T}}(E) = \frac{\pi}{\sqrt{1+2E}}$, definida em $E \in [0, E_0]$, $E_0 < \infty$. Note que $\tilde{\mathbf{T}}'(E) < 0$ para todo $E \in [0, E_0]$. No entanto,*

$$\mathbf{x}_+(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \mathcal{J}\tilde{\mathbf{T}}(E) = \tan^{-1}(\sqrt{2E}).$$

Portanto,

$$\mathbf{x}'_+(E) = \frac{1}{\sqrt{2E}(1+2E)} > 0,$$

para todo $E \in [0, E_0]$. Nesse caso, o potencial V_+ é

$$V_+(x) = \frac{1}{2} \tan^2(x), \quad \forall x \in [0, \pi/2)$$

e, conseqüentemente,

$$V(x) = \frac{1}{2} \tan^2(x), \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Em [Kam10], Kamimura resolveu o problema inverso a partir da função meio-período $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x)$ parametrizada por $x \in [0, a_0]$. Lembrando (da seção anterior) que \mathbf{T} pode ser obtida de $\tilde{\mathbf{T}}$ por

$$\mathbf{T}(x) = \tilde{\mathbf{T}}(V_+(x))$$

e, reciprocamente,

$$\tilde{\mathbf{T}}(E) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_+(E)).$$

Nesse caso, a equação integral que conecta as meias amplitudes $x = \mathbf{x}_+(E)$ com a função \mathbf{T} é a equação de Abel não linear

$$\mathbf{x}_+(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\mathbf{T}(\mathbf{x}_+(s))ds}{\sqrt{E-s}}. \quad (2.42)$$

Usando um método de aproximações sucessivas, Kamimura mostrou em [Kam10] que a equação (2.42) possui solução global. Mais precisamente, Kamimura provou o seguinte resultado.

Teorema 2.6.9. *Seja \mathbf{T} uma função lipschitz contínua e positiva em um intervalo $[0, a_0]$. Então existe um número positivo E_0 e uma função $x = \mathbf{x}_+(E)$ contínua em $[0, E_0]$ e de classe C^1 em $(0, E_0]$ tal que*

- i) $\mathbf{x}_+(0) = 0$ e $\mathbf{x}_+(E_0) = a_0$ com $0 < \mathbf{x}_+(E) < a_0$ para $E \in (0, E_0)$,
- ii) $\mathbf{x}'_+(E) > 0$ para todo $E \in (0, E_0]$,
- iii) $\lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \mathbf{x}'_+(E) = \frac{\sqrt{2}\mathbf{T}(0)}{2\pi}$.

Nesse caso, $V_+(x) = (\mathbf{x}_+)^{-1}(x)$ é de classe C^1 em $[0, a_0]$ e $T_{V_+}(x) = \mathbf{T}(x)$ para todo $x \in [0, a_0]$. Uma questão que surge naturalmente, e que permanece sem resposta, é a seguinte.

Questão 2.6.1. Seja \mathbf{T} positiva contínua em $[0, a_0]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, a_0]$. Existe uma solução $x = \mathbf{x}_+(E)$ de (2.42) contínua em $[0, E_0]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, E_0]$ tal que $\mathbf{x}'_+(E) > 0$ para $E \in (0, E_0]$?

A resposta afirmativa dessa questão seria fundamental para nossos propósitos. Infelizmente não se sabe se a solução é mais regular que C^1 . O problema de provar a regularidade reside no fato da equação (2.42) ser não linear, ou seja, a função desconhecida $\mathbf{x}_+(E)$ aparece dentro do argumento de \mathbf{T} na equação integral (2.42) e, conseqüentemente, a regularidade de $\mathbf{T} \circ \mathbf{x}_+$ depende da regularidade de \mathbf{x}_+ que é, por sua vez, desconhecida.

O próximo exemplo mostra que é possível obter uma função \mathbf{x}_+ de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ satisfazendo as condições da proposição 2.6.9.

Exemplo 2.6.10. Seja $\mathbf{T} \in C^r([0, a_0], \mathbb{R})$, $0 < a_0 < \pi/2$, definida por $\mathbf{T}(x) = \pi \cos(x)$. Por (2.42) temos que

$$\mathbf{x}_+(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\pi \cos(\mathbf{x}_+(s)) ds}{\sqrt{E-s}}$$

e, como $\cos(\tan^{-1}(\sqrt{2E})) = \frac{1}{\sqrt{1+2E}}$, segue que

$$\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{ds}{\sqrt{(E-s)(1+2s)}} = \tan^{-1}(\sqrt{2E}).$$

Portanto,

$$\mathbf{x}_+(E) = \tan^{-1}(\sqrt{2E}).$$

Logo $\mathbf{x}_+(E)$ é contínua em $[0, E_0]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ em $(0, E_0]$ com $\mathbf{x}'(E) > 0$ em $(0, E_0]$ e $\lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \zeta'(E) = \sqrt{2}\mathbf{T}(0)/2\pi$. Nesse caso, o potencial V_+ é dado por

$$V_+(x) = \frac{1}{2} \tan^2(x), \forall x \in [0, \pi/2).$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow \pm\pi/2} V(x) = +\infty$. Isso ocorre porque $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \mathbf{T}(x) = \mathbf{T}(\pi/2) = 0$. Em geral vale o seguinte resultado.

Proposição 2.6.11 ([Kam10], prop. 5.2.). *Seja $k > 0$ e suponha que \mathbf{T} lipschitz contínua em $[0, k]$, positiva em $[0, k]$ e $\mathbf{T}(k) = 0$. Então, $\lim_{x \rightarrow k} V'_+(x) = +\infty$.*

As proposições 2.6.7 e 2.6.9 serão fundamentais na demonstração do Teorema principal do capítulo 4.

Capítulo 3

Resultados Locais

Neste capítulo vamos abordar a questão (1.0.2) no cenário analítico local. A saber, vamos supor que as funções envolvidas no sistema inicial são séries de potências convergentes em uma vizinhança da origem de \mathbb{R}^2 . Os resultados principais do capítulo são os teoremas 3.0.1, 3.0.2 e 3.0.3. As demonstrações desses resultados são baseadas na teoria das formas normais de campos vetoriais, introduzida na seção 2.3 do capítulo 2.

No que segue, dado um aberto Ω de \mathbb{R}^2 tal que $(0, 0) \in \Omega$, denotaremos por $C_0^\omega(\Omega, \mathbb{R})$, respectivamente $C_0^\omega(\Omega, \mathbb{R}^2)$, o conjunto das funções $\varphi \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R})$, respectivamente $\varphi \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^2)$, tal que $\varphi(0, 0) = 0$, respectivamente $\varphi(0, 0) = (0, 0)$. Sejam Ω_j um aberto de \mathbb{R}^2 tal que $(0, 0) \in \Omega_j$ e $\phi \in C_0^\omega(\Omega_j, \mathbb{R}^2)$, denotaremos por $\Omega_{j+1} \ni (0, 0)$ o aberto de \mathbb{R}^2 dado por $\phi(\Omega_j)$, $j \in \{1, 2\}$.

Seja $f \in C_0^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $\partial_u f(0, 0) \neq 0$ e considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = f(u, v), \end{cases} \quad (3.1)$$

tal que $f(u, -v) = f(u, v)$ para todo $(u, v) \in \Omega$. Seja $X(u, v)$ campo vetorial definido por (3.1), ou seja,

$$X(u, v) = (v, f(u, v)). \quad (3.2)$$

Então $X \in C_0^\omega(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $d = \det DX(0, 0) = -\partial_u f(0, 0) \neq 0$. Além disso, X é reversível em relação a involução linear $R(u, v) = (u, -v)$. O primeiro resultado a respeito de (3.2) é o seguinte teorema.

Teorema 3.0.1. *Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ e $X \in C_0^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ o campo vetorial definido em (3.2). Então, existem um difeomorfismo $h \in C_0^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ e um campo vetorial hamiltoniano $\hat{X} \in C_0^\omega(\Omega_2, \mathbb{R}^2)$ tal que*

$$Dh(p)X(p) = \hat{X}(h(p)) \quad \forall p = (u, v) \in \Omega_1. \quad (3.3)$$

A saber, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo zero e $\hat{g} \in C^\omega(I, \mathbb{R})$ com $\hat{g}(0) \neq 0$, tal que

$$\hat{X}(x, y) = (y\hat{g}(x^2 + y^2), -x\hat{g}(x^2 + y^2)), \quad (3.4)$$

se $d > 0$ e

$$\hat{X}(x, y) = (y\hat{g}(x^2 - y^2), x\hat{g}(x^2 - y^2)), \quad (3.5)$$

se $d < 0$.

No primeiro caso \hat{X} é hamiltoniano com função hamiltoniana $H(x, y) = G(x^2 + y^2)$ e, no segundo caso, \hat{X} é hamiltoniano com função hamiltoniana $H(x, y) = -G(x^2 - y^2)$, onde $G \in C^\omega(I, \mathbb{R})$ é a função definida por

$$G(r) = \frac{1}{2} \int_0^r \hat{g}(s) ds.$$

Quando $d > 0$, o campo hamiltoniano \hat{X} é dado por (3.4) e, nesse caso, \hat{X} tem um centro não degenerado na origem. Esse fato nos permite construir uma função V analítica em uma vizinhança de zero satisfazendo as seguintes condições

$$V(0) = V'(0) = 0 \text{ e } V''(0) > 0. \quad (3.6)$$

Com essas condições enunciamos a seguir o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.0.2. *Seja $\hat{X} \in C_0^\omega(\Omega_2, \mathbb{R}^2)$ o campo vetorial hamiltoniano definido por (3.4). Então, existem um difeomorfismo $\hat{h} \in C_0^\omega(\Omega_2, \mathbb{R}^2)$ e um campo vetorial hamiltoniano $Y \in C_0^\omega(\Omega_3, \mathbb{R}^2)$ do tipo*

$$Y(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{y}, -V'(\tilde{x})) \quad (3.7)$$

com V satisfazendo as condições (3.6) tal que

$$D\hat{h}(q)\hat{X}(q) = Y(\hat{h}(q)) \quad \forall q = (x, y) \in \Omega_2. \quad (3.8)$$

Segue dos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2 que se $d > 0$, então o campo vetorial X definido em (3.2) é analiticamente conjugado ao campo vetorial hamiltoniano Y definido em (3.7).

As conclusões dos teoremas 3.0.1 e 3.0.2 são verdadeiras para sistemas mais gerais, a saber, vale o seguinte teorema.

Teorema 3.0.3. *Seja $X \in C_0^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ um campo vetorial tal que $d = \det DX(0, 0) \neq 0$ e suponha que X é R -reversível, onde $R(u, v) = (u, -v)$. Então, existem um difeomorfismo $h \in C_0^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ e um campo vetorial hamiltoniano $\hat{X} \in C_0^\omega(\Omega_2, \mathbb{R}^2)$ tal que*

$$Dh(p)X(p) = \hat{X}(h(p)) \quad \forall p = (u, v) \in \Omega. \quad (3.9)$$

A saber, \hat{X} é da forma (3.4) se $d > 0$ e da forma (3.5) se $d < 0$. Além disso, no caso em que $d > 0$, o campo X é analiticamente conjugado a um campo Y do tipo (3.7).

É fácil verificar que um campo vetorial $X(u, v)$ é reversível em relação a $R(u, v) = (u, -v)$ se e somente se $X(u, v) = (P(u, v), Q(u, v))$, onde $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais $P(u, -v) = -P(u, v)$ e $Q(u, -v) = Q(u, v)$.

3.1 Demonstrações

Nesta seção demonstraremos os Teoremas 3.0.1, 3.0.2 e 3.0.3, começando pelo Teorema 3.0.3.

3.1.1 Demonstração do Teorema 3.0.3

Precisamos provar que existe um difeomorfismo analítico $(x, y) = h(u, v)$, que conjuga os campos vetoriais $X(u, v)$ e $\hat{X}(x, y)$, onde X é o campo da hipótese do Teorema 3.0.3 e \hat{X} é o campo definido em (3.4)–(3.5).

Demonstração. Seja $X = X(u, v)$ um campo vetorial que satisfaz as hipóteses do Teorema 3.0.3. Como X é reversível em relação a $R(u, v) = (u, -v)$, segue que a matriz $A := DX(0, 0)$ satisfaz a relação $R \cdot A = -A \cdot R$. Logo A deve ter a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Uma vez que $d = \det D(0, 0) \neq 0$, temos $d = -a \cdot b \neq 0$ e, conseqüentemente, a e b são diferentes de zero. Sem perda de generalidade, vamos supor que $a = 1$ e $b = \pm 1$. Assim o sistema de equações diferenciais associado a X é da forma

$$\begin{cases} \dot{u} = v + P(u, v), \\ \dot{v} = -u + Q(u, v), \end{cases} \quad \text{se } d > 0, \quad (3.11)$$

ou

$$\begin{cases} \dot{u} = v + P(u, v), \\ \dot{v} = u + Q(u, v), \end{cases} \quad \text{se } d < 0, \quad (3.12)$$

com $P, Q \in C^\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tais que $P(0, 0) = Q(0, 0) = \partial_u P(0, 0) = \partial_v P(0, 0) = \partial_u Q(0, 0) = \partial_v Q(0, 0) = 0$, $P(u, -v) = -P(u, v)$ e $Q(u, -v) = Q(u, v)$.

No caso do sistema (3.11), o campo $X(u, v)$ tem um centro não degenerado na origem (ver [TY01], Teorema 1). Logo, pelo Teorema de Poincaré-Lyapunov (ver Teorema 2.3.5), existe um difeomorfismo analítico

$$h(x, y) = (x + h_1(x, y), y + h_2(x, y)),$$

com $h_i(0, 0) = \partial_x h_i(0, 0) = \partial_y h_i(0, 0) = 0$, $i = 1, 2$, tal que a mudança de variáveis $(u, v) = h(x, y)$ transforma o sistema analítico (3.11) para um sistema analítico da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y(1 + g(x^2 + y^2)), \\ \dot{y} = -x(1 + g(x^2 + y^2)), \end{cases} \quad (3.13)$$

onde g é uma função analítica, em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo zero, tal que $g(0) = 0$.

Note que o campo (3.4) é o campo vetorial associado a (3.13) com $\tilde{g}(t) = 1 + g(t)$. Com isso concluímos a demonstração do Teorema 3.0.3 para o caso $d > 0$.

No caso do sistema (3.12), a existência da conjugação formal do campo $X(u, v)$ com um campo hamiltoniano foi mencionada em ([MM14], Proposição 3.1). No entanto, não encontramos nenhuma referência que tratasse da conjugação analítica. A seguir faremos uma demonstração para esse caso. A demonstração será feita em duas etapas: primeiro construímos a conjugação formal e depois provaremos que as séries formais, obtidas na primeira parte, são convergentes em uma vizinhança da origem.

Conjugação formal: Os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

são -1 e 1 . Logo A é diagonalizável, isto é, existem matrizes B (diagonal) e C (invertível)

tal que $B = C^{-1}AC$. A saber,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A mudança de variáveis $(u, v) = C(\xi, \eta)$ transforma o sistema (3.12) no novo sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi + f_1(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} = \eta + f_2(\xi, \eta), \end{cases} \quad (3.14)$$

com $f_i \in C^\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, tais que $f_i(0, 0) = \partial_\xi f_i(0, 0) = \partial_\eta f_i(0, 0) = 0$, para $i = 1, 2$. A saber, $f_1(\xi, \eta) = P(\xi + \eta, -\xi + \eta) - Q(\xi + \eta, -\xi + \eta)$ e $f_2(\xi, \eta) = P(\xi + \eta, -\xi + \eta) + Q(\xi + \eta, -\xi + \eta)$. Uma vez que o sistema (3.12) é reversível em relação a involução linear

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

o sistema (3.14) é reversível em relação a involução linear

$$S = C^{-1}RC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, conseqüentemente,

$$f_2(\xi, \eta) = -f_1 \circ S(\xi, \eta) = -f_1(\eta, \xi). \quad (3.15)$$

Observe que a mudança de variáveis $(u, v) = C(\xi, \eta)$ transformou um sistema reversível em relação a $R(u, v) = (u, -v)$ em um sistema reversível em relação a $S(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$, ou seja, a mudança de variáveis não preservou a involução inicial. Em geral isso sempre ocorre, ou seja, não é qualquer mudança de variáveis que preserva a involução. Nosso objetivo seguinte é construir uma mudança de variáveis $(\xi, \eta) \rightarrow h(\xi, \eta)$ que preserva a involução S , ou seja, $h(\xi, \eta)$ será construída de tal forma que o novo sistema será S -reversível. Para isso, usaremos o seguinte resultado.

Lema 3.1.1. *Sejam X o campo vetorial associado a (3.14) e*

$$h(\xi, \eta) = (\xi + h_1(\xi, \eta), \eta + h_2(\xi, \eta))$$

um difeomorfismo tal que $h \circ S = S \circ h$. Então a mudança de variáveis $(\xi, \eta) \rightarrow h(\xi, \eta)$ transforma o campo S -reversível X em um novo campo S -reversível \tilde{X} . Ou seja, as mudanças de variáveis que comutam com S preservam a reversibilidade do campo inicial.

Demonstração. A demonstração deste lema pode ser consultada em ([Gae94], Lema IV). Vale ressaltar que nesse artigo G. Gaeta provou a existência da forma normal para sistemas reversíveis mais gerais do que este que estamos tratando aqui. Um estudo detalhado desse artigo foi feito na referência [dS⁺02]. \square

Nossa construção será feita por indução. Para isso, seja

$$X_1(\xi, \eta) = B(\xi, \eta) + X_1^2(\xi, \eta) + \dots$$

a expansão em série de potências do campo vetorial X_1 associado a (3.14). Como X_1 é reversível em relação a $S(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$, as funções coordenadas de X_1^2 satisfazem a relação

(3.15). Logo X_1^2 pode ser escrito da seguinte forma

$$X_1^2(\xi, \eta) = (-a_{20}\xi^2 - a_{11}\xi\eta - a_{02}\eta^2, a_{02}\xi^2 + a_{11}\xi\eta + a_{20}\eta^2),$$

onde os coeficientes a_{kj} são obtidos a partir dos coeficientes da série de Taylor da função f_1 . De igual modo, seja

$$h(\xi, \eta) = (\xi, \eta) + h^2(\xi, \eta) + \dots$$

a expansão em série de potências de h . Como queremos que h comute com S , devemos impor que $h \circ S = S \circ h$. Essa relação é satisfeita se, e somente se,

$$h_2(\xi, \eta) = h_1 \circ S(\xi, \eta) = h_1(\eta, \xi). \quad (3.16)$$

Logo h^2 pode ser escrito como

$$h^2(\xi, \eta) = (b_{20}\xi^2 + b_{11}\xi\eta + b_{02}\eta^2, b_{02}\xi^2 + b_{11}\xi\eta + b_{20}\eta^2),$$

onde os coeficientes b_{kj} são, a priori, indeterminados. Como foi visto na Seção 2.3 do Capítulo 2, o operador homológico $(L_B^{(2)}h^2)$ é, por definição,

$$(L_B^{(2)}h^2)(\xi, \eta) = Dh^2B(\xi, \eta) - Bh^2(\xi, \eta).$$

Logo, após um cálculo elementar, obtemos que

$$(L_B^{(2)}h^2)(\xi, \eta) = \left(-b_{20}\xi^2 + b_{11}\xi\eta + 3b_{02}\eta^2, -3b_{02}\xi^2 - b_{11}\xi\eta + b_{20}\eta^2 \right).$$

Impondo a igualdade

$$(L_B^{(2)}h^2)(\xi, \eta) = X_1^2(\xi, \eta),$$

obtemos

$$b_{20} = a_{20}, \quad b_{11} = -a_{11} \text{ e } b_{02} = -a_{02}/3.$$

Logo, todos os coeficientes de h^2 são determinados a partir dos coeficientes de X_1^2 . Isso implica que a mudança de variáveis $(\xi, \eta) + h^2(\xi, \eta)$ transforma o campo X_1 em um novo campo X_2 , da seguinte forma,

$$X_2(\xi, \eta) = B(\xi, \eta) + X_2^3(\xi, \eta) + \dots$$

Além disso, como $h^2(\xi, \eta)$ comuta com S , pelo lema 3.1.1, X_2 é reversível em relação a S . Logo X_2^3 pode ser escrito da seguinte forma

$$X_2^3(\xi, \eta) = (-a_{30}\xi^3 - a_{21}\xi^2\eta - a_{12}\xi\eta^2 - a_{03}\eta^3, a_{03}\xi^3 + a_{12}\xi^2\eta + a_{21}\xi\eta^2 + a_{30}\eta^3).$$

Repetindo o argumento anterior, temos

$$h^3(\xi, \eta) = (b_{30}\xi^3 + b_{21}\xi^2\eta + b_{12}\xi\eta^2 + b_{03}\eta^3, b_{03}\xi^3 + b_{12}\xi^2\eta + b_{21}\xi\eta^2 + b_{30}\eta^3)$$

e

$$(L_B^{(3)}h^3)(\xi, \eta) = \left(-2b_{30}\xi^3 + 2b_{12}\xi\eta^2 + 4b_{03}\eta^3, -4b_{03}\xi^3 - 2b_{12}\xi^2\eta + 2b_{30}\eta^3 \right).$$

Impondo a igualdade

$$(L_B^{(3)}h^3)(\xi, \eta) = X_2^3(\xi, \eta),$$

obtemos

$$b_{30} = a_{30}/2, \quad b_{12} = -a_{12}/2, \quad \text{e } b_{03} = -a_{03}/4.$$

Observe que não foi possível determinar o coeficiente b_{21} em função dos coeficientes de X_2^3 . Isso significa que o coeficiente a_{21} não pode ser removido com a mudança de variáveis. Logo, a mudança de variáveis $(\xi, \eta) + h^3(\xi, \eta)$ transforma o campo X_2 em um novo campo X_3 , da seguinte forma,

$$X_3(\xi, \eta) = B(\xi, \eta) + (-a_{21}\xi^2\eta, a_{21}\xi\eta^2) + X_3^4 + \dots$$

Além disso, como $h^3(\xi, \eta)$ comuta com S , pelo lema 3.1.1, X_3 é reversível em relação a S .

O procedimento acima pode ser feito indutivamente para todo $k \geq 2$. De fato, na etapa $k \geq 2$, o polinômio h^k é determinado pela involução S e pelos coeficientes do polinômio X_{k-1}^k , os quais já estão determinados pela etapa anterior. Aplicando a mudança de variáveis $(\xi, \eta) + h^k(\xi, \eta)$ ao campo X_{k-1} , obtemos o novo campo X_k que é, por construção, reversível em relação a S . Como esse procedimento é válido para $k = 2$, pelo princípio da indução matemática, o argumento é válido para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$.

Agora vamos obter a expressão de h^k a partir de X_{k-1}^k , para todo $k \geq 2$. Uma vez que X_{k-1}^k é S -reversível e h^k comuta com S , temos que

$$X_{k-1}^k(\xi, \eta) = \left(-\sum_{j=0}^k a_{k-j,j} \xi^{k-j} \eta^j, \sum_{j=0}^k a_{j,k-j} \xi^{k-j} \eta^j \right)$$

e

$$h^k(\xi, \eta) = \left(\sum_{j=0}^k b_{k-j,j} \xi^{k-j} \eta^j, \sum_{j=0}^k b_{j,k-j} \xi^{k-j} \eta^j \right),$$

onde os $a_{k-j,j}$ são determinados pelas etapas anteriores e os $b_{j,k-j}$ são, a priori, indeterminados. O operador homológico $(L_B^{(k)}h^k)$ é, por definição,

$$(L_B^{(k)}h^k)(\xi, \eta) = Dh^k B(\xi, \eta) - Bh^k(\xi, \eta).$$

Após um cálculo elementar, obtemos que

$$(L_B h^k)(\xi, \eta) = \left(\sum_{j=0}^k (-k + 2j + 1) b_{k-j,j} \xi^{k-j} \eta^j, \sum_{j=0}^k (-k + 2j - 1) b_{j,k-j} \xi^{k-j} \eta^j \right).$$

Impondo a igualdade

$$(L_B^{(k)}h^k)(\xi, \eta) = X_{k-1}^k(\xi, \eta),$$

chegamos nas seguintes igualdades

$$\begin{cases} (-k + 2j + 1) b_{k-j,j} = -a_{k-j,j}, \\ (-k + 2j - 1) b_{j,k-j} = a_{j,k-j}, \end{cases}$$

para todo $k \geq 2$ e todo $0 \leq j \leq k$.

Note que as duas equações acima produzem os mesmos coeficientes. Assim basta resolver uma das duas. Da primeira equação segue que $-k + 2j + 1 = 0$ se, e somente se, $k = 2j + 1$

se, e somente se, k for ímpar. Logo, se k for par, temos que

$$b_{k-j,j} = \frac{a_{k-j,j}}{k-2j-1}, \quad (3.17)$$

para todo $k \geq 2$ e $0 \leq j \leq k$. Isso significa que os polinômios X_{k-1}^k com k par são removidos quando efetuamos a mudança de variáveis $(\xi, \eta) + h^k(\xi, \eta)$. Foi isso que ocorreu para o caso $k = 2$.

Suponha que k é ímpar, ou seja, $k = 2m + 1$ com $m \geq 1$. Logo $-k + 2j + 1 = -2(m - j)$ e, conseqüentemente,

$$b_{2m+1-j,j} = \frac{a_{2m+1-j,j}}{2(m-j)}, \quad (3.18)$$

para todo $m \neq j$. Os termos do polinômio X_{k-1}^k , com k ímpar, associados a esses coeficientes, também são removidos pela mudança de coordenadas. Para $m = j$, os coeficientes $b_{m+1,m}$ não podem ser determinados em função dos coeficientes $a_{m+1,m}$. Logo os termos de X_{k-1}^k da forma

$$(-a_{m+1,m}\xi^{m+1}\eta^m, a_{m+1,m}\xi^m\eta^{m+1})$$

não podem ser removidos pela mudança de variáveis $(\xi, \eta) + h^k(\xi, \eta)$, com k ímpar. Foi isso que ocorreu para o caso $k = 3$. Quando $k = 2m + 1$, os coeficientes $b_{m+1,m}$ ficam livres, ou seja, temos a liberdade para atribuímos valores a esses coeficientes. Por simplicidade, vamos supor que $b_{m+1,m} = 0$ para todo $m \geq 1$.

Agora, seja

$$h(\xi, \eta) = (\xi + h_1(\xi, \eta), \eta + h_2(\xi, \eta))$$

o difeomorfismo construído pelo procedimento anterior. Então, h comuta com S e, a mudança de variáveis

$$(\xi, \eta) \rightarrow (\xi + h_1(\xi, \eta), \eta + h_2(\xi, \eta)), \quad (3.19)$$

transforma o sistema S -reversível (3.14) em um novo sistema S -reversível, o qual pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi - \sum_{m \geq 1} g_m(\xi\eta)^m \xi \\ \dot{\eta} = \eta + \sum_{m \geq 1} g_m(\xi\eta)^m \eta, \end{cases} \quad (3.20)$$

onde g_m representa os coeficientes da forma $a_{m+1,m}$ que não são removidos pela mudança de variáveis. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \sum_{m \geq 1} g_m t^m. \quad (3.21)$$

Assim, o sistema (3.20) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi - \xi g(\xi\eta), \\ \dot{\eta} = \eta + \eta g(\xi\eta), \end{cases} \quad (3.22)$$

com $g(0) = 0$.

A mudança de variáveis $(x, y) = C^{-1}(\xi, \eta)$, transforma o sistema (3.22) no novo sistema

$$\hat{X}(x, y) := \begin{cases} \dot{x} = y\tilde{g}(x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x\tilde{g}(x^2 - y^2), \end{cases} \quad (3.23)$$

onde $\tilde{g}(t) := 1 + g(t/4)$. É claro que o sistema (3.23) é reversível em relação a $R(x, y) = (x, -y)$, pois como no início da conjugação formal, $S = C^{-1}RC$ e, conseqüentemente,

$$R = CSC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com isso terminamos a conjugação formal.

Em suma, o campo R -reversível $X(u, v)$ definido pelo sistema (3.12) é formalmente conjugado ao campo R -reversível $\hat{X}(x, y)$ definido pelo sistema (3.23). Além disso, o difeomorfismo formal $(x, y) = \bar{h}(u, v)$ que conjuga os campos X e \hat{X} comuta com R . De fato, o difeomorfismo \bar{h} é, por construção,

$$\bar{h}(u, v) = C \cdot h \circ C^{-1}(u, v), \quad (3.24)$$

onde $h(\xi, \eta)$ é o difeomorfismo que conjuga os sistemas (3.14) e (3.22). Uma vez que $h \circ S = S \cdot h$ e $CS = R \cdot C$, temos que

$$\begin{aligned} \bar{h} \circ R(u, v) &= C \cdot h \circ C^{-1}R(u, v) \\ &= C \cdot h \circ S \cdot C^{-1}(u, v) \\ &= C \cdot S \cdot h \circ C^{-1}(u, v) \\ &= R \cdot C \cdot h \circ C^{-1}(u, v) = R \cdot \bar{h}(u, v), \end{aligned}$$

ou seja, $(x, y) = \bar{h}(u, v)$ comuta com R .

Convergência: Observe que, como C e C^{-1} são lineares, a convergência $\bar{h}(u, v)$ é equivalente a convergência de $h(\xi, \eta)$, isto é, $\bar{h}(u, v)$ converge se, e somente se, $h(\xi, \eta)$ converge, onde $h(\xi, \eta)$ é o difeomorfismo que conjuga os sistemas (3.14) e (3.22).

Sejam

$$h(\zeta, \eta) = (\zeta + h_1(\zeta, \eta), \eta + h_2(\zeta, \eta)), \quad h_1(0, 0) = h_2(0, 0) = 0, \quad (3.25)$$

o difeomorfismo formal que conjuga os sistemas (3.14) e (3.22) e g a função formal definida em (3.21). O objetivo subsequente é mostrar que h e g são convergentes em uma vizinhança da origem.

Uma vez que h comuta com S , decorre de (3.16) que $h_2(\xi, \eta) = h_1(\eta, \xi)$ e, portanto, a convergência de h_1 implica na convergência de h_2 . Logo a convergência de h é reduzida a convergência de h_1 . Sejam

$$f_1(\xi, \eta) = \sum_{k=2}^{\infty} f_1^k(\xi, \eta) \quad \text{e} \quad h_1(\xi, \eta) = \sum_{k=2}^{\infty} h_1^k(\xi, \eta)$$

as expansões em séries de Taylor de f_1 e h_1 , onde

$$f_1^k(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^k a_{k-j,j} \xi^{k-j} \eta^j \quad \text{e} \quad h_1^k(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^k b_{k-j,j} \xi^{k-j} \eta^j.$$

Aplicando a mudança de variáveis e reorganizando os termos obtemos a seguinte relação

$$(-k + 2j + 1)b_{k-j,j} = \tilde{a}_{k-j,j} - \sum_{m=1}^n (k - 2j)g_m b_{k-j-m,j-m}, \quad (3.26)$$

onde $\tilde{a}_{k-j,j}$ denota os coeficientes de $\zeta^{k-1}\eta^j$ após a reexpansão de $f_1(h(\zeta, \eta))$ em série de potência nas variáveis ζ e η e $n = \min\{k - j, j\}$ (ver [SM12], Cap. 2, §17). Assim, para os valores de k tal que $-k + 2j + 1 \neq 0$ temos que

$$b_{k-j,j} = \frac{1}{(-k + 2j + 1)} \left(\tilde{a}_{k-j,j} - \sum_{m=1}^n (k - 2j)g_m b_{k-j-m,j-m} \right). \quad (3.27)$$

Lembrando que quando $k = 2m + 1$, temos que $-k + 2j + 1 = 0$ sempre que $m = j$. Nesse caso temos que $k - 2j = 2m + 1 - 2j = 2(m - j) + 1$ e quando $m = j$ teremos $k - 2m = 1$. Substituindo $k = 2m + 1$ em (3.26), obtemos

$$-2(m - j)b_{2m+1-j,j} = \tilde{a}_{2m+1-j,j} - \sum_{m=1}^n (2(m - j) + 1)g_m b_{m-j+1,j-m}.$$

Fazendo $m = j$, obtemos $0 = \tilde{a}_{m+1,m} - g_m b_{1,0}$. Como $b_{1,0} = 1$, segue que $g_m = \tilde{a}_{m+1,m}$. Nesse caso, escolhemos $b_{m+1,m} = 0$. Em suma, temos que

$$g_m = \tilde{a}_{m+1,m} \text{ e } b_{m+1,m} = 0 \text{ se } k = 2m + 1 \text{ e } m = j. \quad (3.28)$$

$$b_{k-j,j} = \frac{\tilde{a}_{k-j,j}}{(-k + 2j + 1)} - \sum_{m=1}^n \frac{(k - 2j)}{(-k + 2j + 1)} g_m b_{k-j-m,j-m} \text{ caso contrário.} \quad (3.29)$$

O próximo passo é encontrar as majorações para g_m e $b_{k-j,j}$. Decorre da primeira equação de (3.28) que

$$|g_m| \leq |\tilde{a}_{m+1,m}|$$

e, conseqüentemente,

$$\hat{g}(\xi\eta) := \sum_{m=1}^{\infty} |g_m| (\xi\eta)^m \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\tilde{a}_{m+1,m}| (\xi\eta)^m \leq \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k |\tilde{a}_{k-j,j}| \xi^{k-j} \eta^j := \hat{f}(\xi, \eta). \quad (3.30)$$

Note que \hat{f} é uma função analítica em uma vizinhança de zero, visto que \hat{f} é a função que se obtém da função

$$f(\xi, \eta) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \tilde{a}_{k-j,j} \xi^{k-j} \eta^j$$

trocando os coeficientes $\tilde{a}_{k-j,j} \xi^{k-j} \eta^j$ pelos seus respectivos valores absolutos. Como f é analítica em torno da origem, pois foi obtida da composição da função f_1 com polinômios, segue que \hat{f} é analítica em torno da origem. Como \hat{g} é majorada por \hat{f} , segue que \hat{g} é analítica em

uma vizinhança de zero e, conseqüentemente,

$$g(t) = \sum_{m \geq 1} g_m t^m,$$

também é analítica em uma vizinhança de zero.

Da segunda equação de (3.28) temos que

$$|b_{k-j,j}| \leq \left| \frac{1}{-k+2j+1} \right| |\tilde{a}_{k-j,j}| + \sum_{m=1}^n \left| \frac{(k-2j)}{(-k+2j+1)} \right| |g_m| |b_{k-j-m,j-m}|. \quad (3.31)$$

Agora, note que, existe uma constante $c > 0$, que não depende de k nem de j , tal que

$$\left| \frac{1}{-k+2j+1} \right| < c \text{ e } \left| \frac{(k-2j)}{(-k+2j+1)} \right| < c.$$

Logo

$$|b_{k-j,j}| \leq c |\tilde{a}_{k-j,j}| + c \sum_{m=1}^n |g_m| |b_{k-j-m,j-m}|.$$

Decorre da última desigualdade que

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi, \eta) &:= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k |b_{k-j,j}| \xi^{k-j} \eta^j \\ &\leq c \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k |\tilde{a}_{k-j,j}| \xi^{k-j} \eta^j + c \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{m=1}^n |g_m| |b_{k-j-m,j-m}| \xi^{k-j} \eta^j \\ &\leq c \hat{f}(\xi, \eta) + c \hat{g}(\xi, \eta) \hat{h}(\xi, \eta) \leq c \hat{f}(\xi, \eta) + c \hat{f}(\xi, \eta) \hat{h}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Logo

$$\hat{h}(\xi, \eta) \leq \frac{c \hat{f}(\xi, \eta)}{1 - c \hat{f}(\xi, \eta)} := W(\xi, \eta).$$

Como W é analítica em torno da origem, pois é a composição das função analíticas $x/(1-x)$, $x \geq 0$, e $c \hat{f}$, segue que \hat{h} é analítica em torno da origem. Finalmente, como h_1 é majorada por \hat{h} , segue que h_1 também é analítica em uma vizinhança da origem.

Portanto, as funções h_i , $i = 1, 2$ e g são convergentes em uma vizinhança da origem. Com isso terminamos a demonstração do Teorema 3.0.3. \square

3.1.2 Demonstração do Teorema 3.0.1

A demonstração deste teorema segue imediatamente do Teorema 3.0.3.

Demonstração. De fato, seja $X \in C_0^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ o campo vetorial associado ao (3.2). Por hipótese $d = \det DX(0, 0) = \partial_u f(0, 0) \neq 0$. Além disso, $X(u, v)$ é reversível em relação a $R(u, v) = (u, -v)$, pois por hipótese $f(u, -v) = f(u, v)$. Portanto, pelo Teorema 3.0.3 as conclusões do Teorema 3.0.1 são verdadeiras. \square

3.1.3 Demonstração do Teorema Teorema 3.0.2

Demonstração. Seja $X \in C_0^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ o campo vetorial associado a (3.2) e suponha que $d > 0$. Então, pelo teorema 3.0.1, X é analiticamente conjugado, em uma vizinhança da origem, ao campo hamiltoniano \hat{X} definido pelo sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y\hat{g}(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x\hat{g}(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (3.32)$$

onde $\hat{g} \in C^\omega(I, \mathbb{R})$, com $\hat{g}(0) = 1$. Lembrando que, nesse caso, a função hamiltoniana é dada por $H(x, y) = G(x^2 + y^2)$, onde

$$G(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^\zeta \hat{g}(s) ds.$$

Portanto, dado $E \geq 0$, podemos calcular a função período $\tilde{T}(E)$ parametrizada pelos níveis de energia $H = E$.

Grosso modo, dois sistemas hamiltonianos planares com centros não degenerados são analiticamente conjugados em uma vizinhança desses equilíbrios se e somente se suas funções períodos são iguais (ver [MV02]). Com base nessa informação, a demonstração do Teorema 3.0.2 seguirá o seguinte roteiro: dada $\tilde{T}(E)$, construiremos um sistema hamiltoniano analítico do tipo (3.7), de tal forma que a função período $\tilde{T}_V(E)$ do novo sistema seja igual a $\tilde{T}(E)$. Feito isso, construiremos o difeomorfismo analítico que conjuga os sistemas (3.32) e (3.7). Começaremos provando o seguinte resultado, que será fundamental na demonstração do Teorema 3.0.2.

Lema 3.1.2. *Sejam $E \geq 0$ e $\tilde{T}(E)$ a função período do sistema (3.32) parametrizada em função dos níveis de energia $H = E$. Então, existe uma função V analítica em uma vizinhança de 0 com $V(0) = V'(0) = 0$ e $V''(0) > 0$. Além disso, a função período $\tilde{T}_V(E)$ do sistema potencial associado a V é igual a $\tilde{T}(E)$.*

Demonstração. Seja $E \geq 0$, a função período $\tilde{T}(E)$ do sistema (3.32) parametrizada em função dos níveis de energia $H = E$ é a função analítica definida em uma vizinhança de zero por

$$\tilde{T}(E) = \frac{\pi}{G'(G^{-1}(E))} = \pi(G^{-1})'(E). \quad (3.33)$$

De fato, a mudança de coordenadas

$$x = \sqrt{I} \operatorname{sen}(\theta), \quad y = \sqrt{I} \operatorname{cos}(\theta),$$

transforma o sistema hamiltoniano (3.32) no sistema em coordenada ação-ângulo

$$\dot{\theta} = \hat{g}(I), \quad \dot{I} = 0. \quad (3.34)$$

Consequentemente, as soluções de (3.34) são dadas explicitamente por

$$\theta(t) = \theta_0 + t\hat{g}(I),$$

onde $\theta_0 = \theta(0)$ e $I = I(0)$. Uma vez que as soluções de (3.34) são 2π -periódicas, segue que

$$2\pi = \theta(t) - \theta_0 = T\hat{g}(I)$$

e, conseqüentemente, a função período de (3.34) parametrizada por I , é dada por

$$T(I) = \frac{2\pi}{\hat{g}(I)}.$$

Uma vez que $2G'(I) = \hat{g}(I)$, segue que

$$T(I) = \frac{\pi}{G'(I)}.$$

Agora, como $G'(0) = \hat{g}(0) = 1 > 0$, segue que G possui inversa analítica em uma vizinhança de zero. Assim, dado $E \geq 0$ tal que $H(x, y) = G(x^2 + y^2) = E$, temos $x^2 + y^2 = G^{-1}(E)$ e, conseqüentemente, $I = G^{-1}(E)$. Portanto,

$$\tilde{T}(E) = T(G^{-1}(E)) = \frac{\pi}{G'(G^{-1}(E))} = \pi(G^{-1})'(E).$$

Assim, por definição, $\tilde{T}(E)$ é analítica em uma vizinhança de zero com $\tilde{T}(0) = \pi/G'(0) > 0$.

O próximo passo é construir o potencial V de tal forma que a função período $\tilde{T}_V(E)$ seja igual a $\tilde{T}(E)$. Uma vez que $G^{-1}(0) = 0$ e $G^{-1}(E)$ é analítica em torno de zero, existe uma seqüência de números reais $(a_n)_{n \geq 1}$ tal que

$$G^{-1}(E) = \sum_{n \geq 1} a_n E^n \quad (3.35)$$

e, conseqüentemente,

$$(G^{-1})'(E) = \sum_{n \geq 1} n a_n E^{n-1}. \quad (3.36)$$

Como $(G^{-1})'(0) = 1/G'(0)$, segue que $a_1 = 1/G'(0) > 0$. Considere, agora, a seqüência real $(b_n)_{n \geq 1}$ definida por

$$b_n = \frac{n\sqrt{2\pi}\Gamma(n)}{4\Gamma(n + 1/2)} a_n. \quad (3.37)$$

Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n + 1/2)} = 0,$$

existe um constante $M > 0$ tal que

$$|b_n| \leq nM|a_n|.$$

Portanto, a função $\varphi(E)$ definida por

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^{2n-1} \quad (3.38)$$

é analítica em uma vizinhança de zero, com $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = b_1 = \sqrt{2}a_1/2 > 0$. Seja $\zeta(E)$ definida em uma vizinhança de zero por

$$\zeta(E) = \varphi(\sqrt{E}) = \sum_{n \geq 1} b_n E^{(2n-1)/2}. \quad (3.39)$$

Como

$$\zeta'(E) = \frac{\varphi'(E)}{2\sqrt{E}},$$

segue que $\lim_{E \rightarrow 0^+} \zeta'(E) = +\infty$ e, conseqüentemente, $\zeta(E)$ é inversível em uma vizinhança de zero. Seja V a função definida em uma vizinhança de zero por $V(\tilde{x}) = \zeta^{-1}(\tilde{x})$. Por definição, V é analítica em uma vizinhança de zero com $V(0) = V'(0) = 0$ e $V''(0) > 0$. De fato, como $\varphi'(0) > 0$, $\varphi(z)$ possui inversa analítica definida em uma vizinhança de zero. Assim, $\tilde{x} = \zeta(E) = \varphi(\sqrt{E})$ implica que $\zeta^{-1}(\tilde{x}) = [\varphi^{-1}(\tilde{x})]^2$. Logo $V(\tilde{x}) = \zeta^{-1}(\tilde{x}) = [\varphi^{-1}(\tilde{x})]^2$ é analítica em uma vizinhança de zero. Além disso, segue da definição de V que $V(0) = V'(0) = 0$ e

$$V''(0) = 2(\varphi^{-1})'(0) = 2/\varphi'(0) = 2/b_1 > 0.$$

Finalmente, para mostrar que $\tilde{T}_V(E) = \tilde{T}(E)$, note inicialmente que V é uma função par, pois $\varphi(z)$ é uma função ímpar e, conseqüentemente, φ^{-1} é uma função ímpar. Logo,

$$V(-\tilde{x}) = [\varphi^{-1}(-\tilde{x})]^2 = [-\varphi^{-1}(\tilde{x})]^2 = [\varphi^{-1}(\tilde{x})]^2 = V(\tilde{x}).$$

Pela definição (2.26), a função período $\tilde{T}_V(E)$ do sistema potencial associado a V é dada por

$$\tilde{T}_V(E) = 2\sqrt{2} \int_0^E \frac{(V^{-1})'(s) ds}{\sqrt{E-s}}. \quad (3.40)$$

Por definição,

$$V^{-1}(E) = \varphi(\sqrt{E}) = \sum_{n \geq 1} b_n E^{(2n-1)/2}$$

e, portanto,

$$(V^{-1})'(E) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)}{2} b_n E^{(2n-3)/2}.$$

Substituindo a série de $(V^{-1})'(E)$ em (3.40), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_V(E) &= 2\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)}{2} b_n \int_0^E \frac{s^{(2n-3)/2} ds}{\sqrt{(E-s)}} \\ &= 2\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)}{2} b_n \int_0^1 \frac{(Et)^{(2n-3)/2} E dt}{\sqrt{(E-Et)}} \\ &= 2\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)}{2} b_n E^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{(2n-3)/2} dt}{\sqrt{(1-t)}} \\ &= 2\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)}{2} b_n E^{n-1} 2 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)} \\ &= 2\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} b_n \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} E^{n-1}. \end{aligned}$$

Por definição,

$$b_n = \frac{n\sqrt{2\pi}\Gamma(n)}{4\Gamma(n+1/2)} a_n.$$

Logo

$$b_n \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} E^{n-1} = \frac{n\sqrt{2\pi}\Gamma(n)}{4\Gamma(n+1/2)} a_n \cdot \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{2\pi}na_n}{4}.$$

Portanto,

$$\tilde{T}_V(E) = 2\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{2\pi}na_n}{4} E^{n-1} = \pi \sum_{n \geq 1} na_n E^{n-1} = \pi(G^{-1})'(E) = \frac{\pi}{G'(G^{-1}(E))} = \tilde{T}(E).$$

Com isso, concluímos a demonstração do Lema 3.1.2. \square

Construção do Difeomorfismo: Seja $\tilde{T}(E)$ a função período do sistema hamiltoniano (3.32). Pelo Lema 3.1.2, existe um sistema potencial analítico do tipo (3.7) tal que $\tilde{T}_V(E) = \tilde{T}(E) = \pi(G^{-1})'(E)$. Por construção, o campo vetorial hamiltoniano analítico Y definido por (3.7) satisfaz $\det D\tilde{X}(0,0) = V'(0) > 0$ e é reversível em relação a involução $R(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, -\tilde{y})$. Logo, pelo Teorema 3.0.1, existe uma mudança de variáveis analítica $(x, y) = \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ que transforma o sistema analítico (3.7) em um sistema hamiltoniano analítico da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y\bar{g}(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x\bar{g}(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (3.41)$$

Neste caso, a função hamiltoniana é dada por $\bar{H}(x, y) = \bar{G}(x^2 + y^2)$, onde

$$\bar{G}(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^\zeta \bar{g}(s) ds$$

e, conseqüentemente, a função período em função de $\bar{H} = E$ é dada por

$$\bar{T}(E) = \frac{\pi}{\bar{G}'(\bar{G}^{-1}(E))} = \pi(\bar{G}^{-1})'(E).$$

Uma vez que, por construção, a função período $\bar{T}(E)$ é igual à função período $\tilde{T}_V(E)$, segue que

$$\pi(\bar{G}^{-1})'(E) = \bar{T}(E) = \tilde{T}_V(E) = \pi(G^{-1})'(E).$$

Como $\bar{G}^{-1}(0) = G^{-1}(0) = 0$, temos que

$$\bar{G}^{-1}(E) = \int_0^E (\bar{G}^{-1})'(s) ds = \int_0^E (G^{-1})'(s) ds = G^{-1}(E)$$

e, portanto, \bar{G} é igual a G e, conseqüentemente, os sistemas (3.32) e (3.41) são iguais. Finalmente, o difeomorfismo analítico \hat{h} conjuga os campos hamiltonianos \hat{X} definido por (3.32) e Y definido por (3.7) é dado por

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \hat{h}(x, y) = \tilde{\Phi}^{-1}(x, y). \quad (3.42)$$

Com isso, concluímos a demonstração do Teorema 3.0.2. \square

Note que \hat{h} também comuta com R . De fato, como $\tilde{\Phi}$ comuta com R , temos que

$$R = \tilde{\Phi}^{-1} \circ \tilde{\Phi} \circ R = \tilde{\Phi}^{-1} \circ R \circ \tilde{\Phi}$$

e, conseqüentemente,

$$R \circ \tilde{\Phi}^{-1} = \tilde{\Phi}^{-1} \circ R \circ \hat{h} = R \circ \tilde{\Phi} \circ \tilde{\Phi}^{-1} = \tilde{\Phi}^{-1} \circ R = \hat{h} \circ R.$$

Segue como consequência dos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2 o seguinte corolário.

Corolário 3.1.2.1. *Seja $X \in C_0^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ o campo vetorial definido em (3.2) e suponha que $\partial_u f(0,0) < 0$. Então, existe um difeomorfismo $\psi \in C^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ tal que*

$$D\psi(p)X(p) = Y(\psi(p)) \quad \forall p \in \Omega_1, \quad (3.43)$$

onde Y é o campo vetorial hamiltoniano analítico definido em uma vizinhança da origem por (3.7). Além disso, o difeomorfismo h comuta com $R(u, v) = (u, -v)$, isto é,

$$\psi \circ R(u, v) = R \cdot \psi(u, v). \quad (3.44)$$

Demonstração. De fato, $\psi \in C_0^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ é o difeomorfismo definido por

$$\psi(u, v) = \hat{h} \circ h(u, v),$$

onde h é o difeomorfismo do Teorema 3.0.1 e \hat{h} é o difeomorfismo do Teorema 3.0.2. Como h e \hat{h} comutam com R , segue que

$$\psi \circ R(u, v) = \hat{h} \circ h \circ R(u, v) = \hat{h} \circ R \circ h(u, v) = R \circ \hat{h} \circ h(u, v) = R \circ \psi(u, v).$$

□

Em suma, os resultados deste Capítulo respondem de forma parcial às questões (1.0.1) e (1.0.2) postas na introdução do trabalho. O Teorema 3.0.3 no caso em que X tem um centro na origem é uma resposta afirmativa para a questão (1.0.1) e o Teorema 3.0.1 no caso em que X tem um centro na origem é uma resposta afirmativa para a questão (1.0.2). Para a questão (1.0.2), faltou mostrar que o Teorema 4.0.2 é válido para o caso em que a origem é uma sela não degenerada. Essa última questão é mais complicada, visto que, não temos a função período para construir o potencial V .

Na teoria dos campos vetoriais reversíveis, existe o interesse em saber quando um campo vetorial reversível é conjugado a um sistema hamiltoniano. A conjugação formal (em dimensões superiores a 2) foi abordada nos artigos [LLM⁺20], [MT11] e [MM14]. A proposição 3.1 de [MM14], afirma que os campos vetoriais no plano reversíveis em relação a $\varphi(x, y) = (x, -y)$ são *formalmente conjugados* a um sistema hamiltoniano. Nesse contexto, o Teorema 3.0.3 prova que os campos vetoriais no plano reversíveis em relação a $\varphi(x, y) = (x, -y)$ são *analiticamente conjugados* a um sistema hamiltoniano.

Capítulo 4

Resultados Globais

Neste capítulo abordaremos a questão (1.0.2) no cenário global. Os resultados principais deste capítulo são os Teoremas 4.0.1 e 4.0.2, os quais serão demonstrados nas seções 4.1 e 4.2 respectivamente. Na subseção 4.1.4 discutiremos a necessidade das hipóteses do Teorema 4.0.1. Na subseção 4.1.5 apresentamos algumas consequências do Teorema 4.0.1. Nas subseções 4.1.6 e 4.2.3 aplicamos os Teoremas 4.0.1 e 4.0.2 respectivamente em alguns exemplos.

Sejam $F \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ tal que $F(u, -v) = F(u, v)$. Nessas condições, existe uma função $f \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ tal que $F(u, v) = f(u, v^2/2)$ (ver [KP02], Teorema 6.1.3 para o caso analítico e [Whi43] para os demais casos). Seja $X \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ o campo vetorial definido pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = f(u, v^2/2), \end{cases} \quad (4.1)$$

ou seja,

$$X(u, v) = v\partial_u + f(u, v^2/2)\partial_v. \quad (4.2)$$

Considere, ainda, o campo vetorial $W \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definido no plano de coordenadas (u, z) por

$$W = \partial_u + f(u, z)\partial_z. \quad (4.3)$$

Nosso primeiro resultado deste capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 4.0.1. *Seja $X \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ o campo vetorial definido por (4.2) e suponha que o fluxo do campo vetorial definido por (4.3) é completo. Então:*

i) o campo $X(u, v)$ é hamiltoniano, com função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ e forma simplética $\mu(u, v) = \partial_2 h(u, v^2/2) du \wedge dv$, onde $h(u, z)$ é uma integral primeira de (4.3) e $\partial_2 h(u, v^2/2) := \partial_z h(u, z)|_{z=v^2/2} > 0$.

ii) existem um difeomorfismo $\Phi \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e um campo vetorial hamiltoniano $\hat{X} \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que

$$D\Phi(p)X(p) = \hat{X}(\Phi(p)) \quad \forall p = (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.4)$$

A saber, o campo \hat{X} é dado por

$$\hat{X}(u, \hat{v}) = a(u, \hat{v}) \left(\hat{v}\partial_u - G'(u)\partial_{\hat{v}} \right), \quad (4.5)$$

onde $a \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é uma função positiva e $G \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é a função definida por $G(u) = h(u, 0)$. O campo vetorial (4.5) é hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$\hat{H}(u, \hat{v}) = \frac{\hat{v}^2}{2} + G(u) \quad (4.6)$$

e forma simplética

$$\hat{\mu}(u, \hat{v}) = [a(u, \hat{v})]^{-1} du \wedge d\hat{v}. \quad (4.7)$$

iii) O difeomorfismo $(u, \hat{v}) = \Phi(u, v)$ comuta com $R(u, v) = (u, -v)$ e o campo $\hat{X}(u, \hat{v})$ é reversível em relação a R .

Para o próximo resultado, admitiremos que (4.5) tem um único equilíbrio e que este equilíbrio é um centro não degenerado em $(0, 0)$. Sejam \mathcal{A}_G o anel periódico associado a esse centro e γ uma órbita qualquer de (4.5) em \mathcal{A}_G . Denotaremos por \mathcal{A}_γ a região anular formada por γ e seu interior menos o equilíbrio $(0, 0)$ (ver figura 4.1).

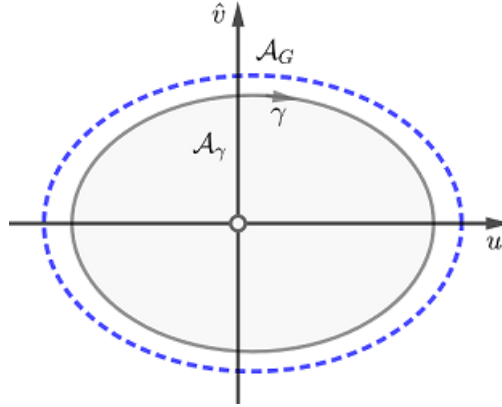


Figura 4.1: Região \mathcal{A}_γ

O principal resultado desta tese é o seguinte teorema.

Teorema 4.0.2. *Suponha que o campo vetorial hamiltoniano $\hat{X}(u, \hat{v})$ definido em (4.5) tem um centro não degenerado em $(0, 0)$. Para qualquer γ em \mathcal{A}_G , existem uma região anular \mathcal{A}_V e um difeomorfismo $\Psi : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}_V$ tal que*

$$D\Psi(p)\hat{X}(p) = Y(\Psi(p)) \quad \forall p \in \mathcal{A}_\gamma, \quad (4.8)$$

onde Y é o campo vetorial hamiltoniano definido em \mathcal{A}_V por

$$Y(x, y) = y\partial_x - V'(x)\partial_y, \quad (4.9)$$

em que V é uma função que depende de γ e satisfaz $V(0) = V'(0) = 0$, $V''(0) > 0$ e $xV'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. O difeomorfismo Ψ é de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em \mathcal{A}_γ e, se estende continuamente para $(0, 0)$, ou seja, $\lim_{p \rightarrow (0,0)} \Psi(p) = \Psi(0, 0) = (0, 0)$. Além disso,

Ψ comuta com $R(u, \hat{v}) = (u, -\hat{v})$.

O Teorema 4.0.1 é uma versão melhorada do Teorema 1 de [Rag12]. A saber, Ragazzo demonstrou os itens (i) e (ii) para o caso em que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

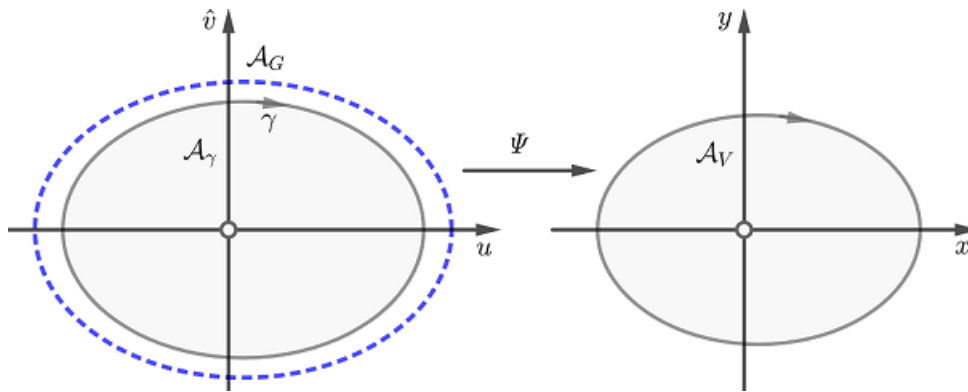


Figura 4.2: Ilustração do Teorema 4.0.2

Nesta versão, a demonstração do item (i) é análoga à demonstração feita por Ragazzo. A demonstração do item (ii) e os Corolários da seção 4.1.5 são contribuições deste trabalho. Por fim, o Teorema 4.0.2 é o resultado principal deste capítulo e também da tese.

4.1 A Demonstração do Teorema 4.0.1

Demonstração. A demonstração do Teorema 4.0.1 será dividida em partes de acordo com seus itens.

4.1.1 Demonstração do item (i) do Teorema 4.0.1

Demonstração. A demonstração do item (i) será feita em duas etapas: na primeira construiremos uma integral primeira para o campo W definido em (4.3) e, na segunda etapa, usaremos essa integral para mostrar que o campo X definido em (4.2) é hamiltoniano.

Construção da integral primeira: Sejam $f \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ a função dada na hipótese do Teorema 4.0.1 e $W \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$ o campo vetorial completo definido por $W(u, z) = \partial_u + f(u, z)\partial_z$. De $\dot{u} = 1$, obtemos que $u(t) = t + u(0)$. Supondo $u(0) = 0$, segue que $u = t$ e, conseqüentemente, $dz/du = dz/dt = f(u, z)$. Seja $\zeta_u(0, z_0)$ a solução do P.V.I $dz/du = f(u, z)$, $z(0) = z_0$. Então o fluxo Ψ_u do campo vetorial W que passa pelos pontos da forma $(0, z_0)$ pode ser escrito como $\Psi_u(0, z_0) = (u, \zeta_u(0, z_0))$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Seja Γ_u a reta vertical que passa por $(u, 0)$ parametrizada e orientada por z . Observe que Γ_u é transversal ao fluxo de W para todo u , ou seja, Γ_u corta transversalmente cada linha de fluxo exatamente uma única vez (ver figura 4.3), em particular, para $u = 0$, Γ_0 coincide com o eixo z . Seja $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Z(u, z_0) = \zeta_u(0, z_0)$. Então, pelos resultados básicos da teoria clássica das equações ordinárias introduzidos na seção 2.1 do capítulo 2, temos que $Z \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ e satisfaz

$$\partial_{z_0} Z(u, z_0) = \partial_{z_0} \zeta_u(0, z_0) > 0$$

para todo $z_0 \in \Gamma_0$. Portanto a função $Z(u, \cdot) : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_u$ é um difeomorfismo de classe C^r que preserva orientação. Seja $Z^{-1}(u, \cdot) : \Gamma_u \rightarrow \Gamma_0$ a função inversa de Z e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(u, z) = Z^{-1}(u, z)$. A função $h(u, z)$ pode ser interpretada como a coordenada z da interseção de Γ_0 e a trajetória de Ψ_t que passa por (u, z) (ver figura 4.3). Por definição $h \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ e, satisfaz $\partial_z h(u, z) = \partial_z Z^{-1}(u, z) > 0$. Além disso, por construção, $h(u, z)$ é uma integral primeira de W . Com isso, concluímos a primeira parte da

demonstração do item (i) do Teorema 4.0.1.

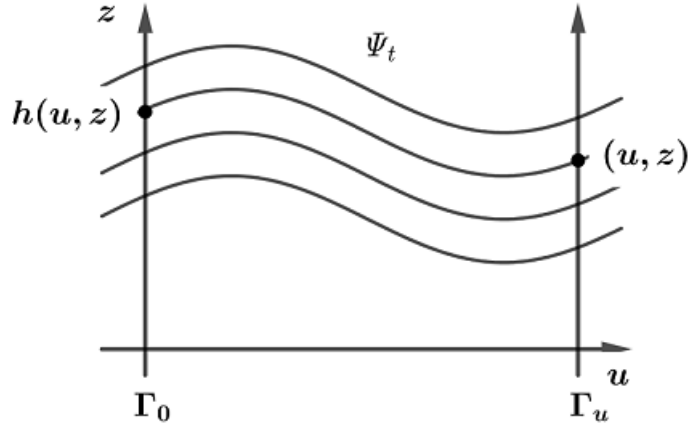


Figura 4.3: Construção de h

Seja $h(u, z)$ a integral primeira do campo $W(u, z) = \partial_u + f(u, z)\partial_z$ construída acima. A seguir mostraremos que o campo vetorial

$$X(u, v) = v\partial + f(u, v^2/2)\partial_v$$

é hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$H(u, v) = h(u, v^2/2) \quad (4.10)$$

e forma simplética

$$\mu(u, v) = \partial_2 h(u, v^2/2) du \wedge dv, \quad (4.11)$$

onde $\partial_2 h(u, v^2/2) = \partial_z h(u, z)|_{z=v^2/2}$.

Por definição, temos que

$$dh \cdot W = \langle \nabla h, W \rangle = \partial_u h(u, z) + f(u, z)\partial_z h(u, z) = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\partial_u h(u, z) = -f(u, z)\partial_z h(u, z). \quad (4.12)$$

Logo, as derivadas parciais de $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ satisfazem

$$\partial_u H(u, v) = \partial_u h(u, v^2/2) \stackrel{(4.12)}{=} -f(u, v^2/2)\partial_2 h(u, v^2/2) \quad (4.13)$$

e

$$\partial_v H(u, v) = v\partial_2 h(u, v^2/2). \quad (4.14)$$

Seja $Y = (Y_1, Y_2)$ um campo vetorial em \mathbb{R}^2 . Por um lado temos que

$$\begin{aligned} dH \cdot Y &= \langle \nabla H, Y \rangle = \partial_u H(u, v)Y_1 + \partial_v H(u, v)Y_2 \\ &= \partial_u h(u, v^2/2)Y_1 + v\partial_2 h(u, v^2/2)Y_2 \\ &= -f(u, v^2/2)\partial_2 h(u, v^2/2)Y_1 + \partial_2 h(u, v^2/2)Y_2 \\ &= \partial_2 h(u, v^2/2)(-f(u, v^2/2)Y_1 + vY_2). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mu(X, Y) &= \partial_2 h(u, v^2/2) du \wedge dv(X, Y) \\ &= \partial_2 h(u, v^2/2) \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix} \\ &= \partial_2 h(u, v^2/2) (X_1 Y_2 - X_2 Y_1). \end{aligned}$$

Impondo $\mu(X, Y) = dH \cdot Y$ obtemos que

$$X_1 = v \quad \text{e} \quad X_2 = f(u, v^2/2).$$

Portanto, o campo vetorial $X(u, v) = v\partial + f(u, v^2/2)\partial_v$ é hamiltoniano com função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ e forma simplética $\mu = \partial_2 h(u, v^2/2) du \wedge dv$. Com isso, concluímos a demonstração do item (i) do Teorema 4.0.1. \square

Observação 4.1.1.

1ª) Note que $\lim_{z \rightarrow \infty} h(u, z) = \infty$ para todo $u \in \mathbb{R}$, ou seja, $h(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$. De fato, suponha (por absurdo) que exista \hat{u} tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} h(\hat{u}, z) = \hat{z}_0 < \infty$. Uma vez que $Z(u, h(u, z)) = z$, segue que

$$\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} Z(\hat{u}, h(\hat{u}, z)) = Z(\hat{u}, \lim_{z \rightarrow \infty} h(\hat{u}, z)) = Z(\hat{u}, \hat{z}_0).$$

Isso implica que a solução com condição inicial \hat{z}_0 explode para $\hat{u} < \infty$, contrariando a completude do fluxo de W .

2ª) Para construir a função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ só precisamos que $h(u, z)$ esteja definida em $\mathbb{R}_{z \geq 0}^2 := \{(u, z) \in \mathbb{R}^2 : z \geq 0\}$. Isso sugere que as hipóteses do Teorema 4.0.1 são mais do que suficientes.

3ª) Pode ocorrer situações em que as soluções de W com condição inicial $(0, z_0)$, $z_0 \geq 0$ escaparem para baixo, conforme mostra a figura 4.4.

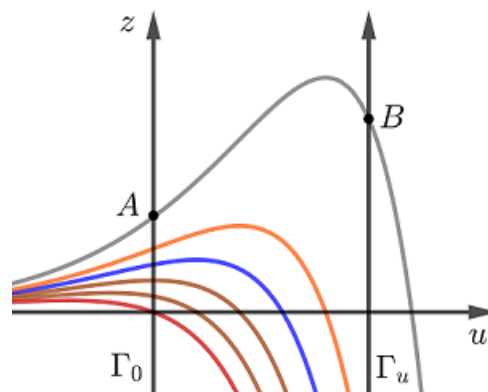


Figura 4.4: Linhas de fluxo de W

De fato, a figura 4.4 mostra as linhas de fluxo do campo

$$W(u, z) = \partial_u + (z - e^u)\partial_z.$$

Note que o fluxo de W com condição inicial $(0, z_0)$, $z_0 \geq 0$, é dado por

$$\Psi_u(0, z_0) = (u, (z_0 - u)e^u)$$

e, portanto, é completo. Esse tipo de situação não afeta a construção de integral primeira $h(u, z)$. Observe que dada uma vertical Γ_u em $\mathbb{R}_{z \geq 0}^2$ e um ponto $B = (u, z > 0)$ sobre Γ_u , sempre existe um ponto $A = (0, z_0)$ tal que a linha de fluxo que passa por A intercepta Γ_u em B , conforme mostra a figura 4.4. Nesse exemplo, a integral primeira é dada por

$$h(u, z) = u + ze^{-u}.$$

Na seção 4.1.4 daremos mais detalhes sobre as hipóteses do Teorema 4.0.1.

4.1.2 Demonstração do item (ii) do Teorema 4.0.1

Para o item (ii), consideramos a função $d \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ definida por

$$d(u, z) := h(u, z) - h(u, 0). \quad (4.15)$$

Assim, por definição, $d(u, z) \geq 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} d(u, z) = \infty$ para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$\partial_u d(u, z) = \partial_u h(u, z) - \partial_u h(u, 0) \quad (4.16)$$

e

$$\partial_z d(u, z) = \partial_z h(u, z) > 0, \quad (4.17)$$

para todo $(u, z) \in \mathbb{R}^2$ com $z \geq 0$. Uma vez que $d(u, 0) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$, pelo Lema de Hadamard (ver [Had68], pg. 352-353), existe $b \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ tal que

$$d(u, z) = zb(u, z), \quad b(u, z) > 0 \forall z \geq 0. \quad (4.18)$$

Logo

$$\partial_u d(u, z) = z\partial_u b(u, z) \quad (4.19)$$

e

$$\partial_z h(u, z) = \partial_z d(u, z) = d(u, z) + z\partial_z b(u, z). \quad (4.20)$$

Uma vez que $b(u, z) = d(u, z)/z = (h(u, z) - h(u, 0))/z$, com $z > 0$, e $\lim_{z \rightarrow +\infty} d(u, z)/z = +\infty / +\infty$, por L'hospital temos que

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} b(u, z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \partial_z d(u, z)/1 = \lim_{z \rightarrow +\infty} \partial_z h(u, z) > 0,$$

logo a função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(u, v) = v\sqrt{b(u, v^2/2)} \quad (4.21)$$

satisfaz $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} \phi(u, v) = \pm\infty$. Além disso,

$$\partial_u \phi(u, v) = \frac{v\partial_u b(u, v^2/2)}{2\sqrt{b(u, v^2/2)}} \quad (4.22)$$

e

$$\partial_v \phi(u, v) = \frac{b(u, v^2/2) + \partial_2 b(u, v^2/2)v^2/2}{\sqrt{b(u, v^2/2)}} \stackrel{(4.20)}{=} \frac{\partial_2 h(u, v^2/2)}{\sqrt{b(u, v^2/2)}} > 0. \quad (4.23)$$

Segue que $\phi \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. Além disso, $\partial_v \phi(u, v) > 0$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ e, conseqüentemente, para cada u , a função $v \rightarrow \hat{v} = \phi(u, v)$ possui inversa de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. Substituindo $v = \phi^{-1}(u, \hat{v})$ em (4.21) obtemos que

$$\hat{v} = \phi(u, \phi^{-1}(u, \hat{v})) = \phi^{-1}(u, \hat{v}) \sqrt{b(u, [\phi^{-1}(u, \hat{v})]^2/2)}$$

e, portanto,

$$v = \phi^{-1}(u, \hat{v}) = \frac{\hat{v}}{\sqrt{b(u, [\phi^{-1}(u, \hat{v})]^2/2)}} = \hat{v}a(u, \hat{v}), \quad (4.24)$$

onde $a \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ é a função positiva definida por

$$a(u, \hat{v}) = (b(u, [\phi^{-1}(u, \hat{v})]^2/2))^{-1/2} > 0, \quad \forall (u, \hat{v}) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.25)$$

Note que $\lim_{\hat{v} \rightarrow \infty} \phi^{-1}(u, \hat{v}) = \infty$, pois se $\lim_{\hat{v} \rightarrow \infty} \phi^{-1}(u, \hat{v}) = L \neq \infty$, teríamos

$$L = \lim_{\hat{v} \rightarrow \infty} \phi^{-1}(u, \hat{v}) = \lim_{\hat{v} \rightarrow \infty} \frac{\hat{v}}{\sqrt{b(u, [\phi^{-1}(u, \hat{v})]^2/2)}} = \frac{1}{\sqrt{b(u, L^2/2)}} \lim_{\hat{v} \rightarrow \infty} \hat{v} = \infty,$$

o que seria uma contradição.

Agora, consideremos o difeomorfismo de $\Phi \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, definido por

$$(u, \hat{v}) = \Phi(u, v) = (u, \phi(u, v)), \quad (4.26)$$

onde ϕ é a função definida em (4.21). Temos que

$$\dot{u} = v = a(u, \hat{v})\hat{v}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{v}} &= \partial_u \phi(u, v) \dot{u} + \partial_v \phi(u, v) \dot{v} \\
(4.22-4.23) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{\partial_u b(u, v^2/2) v^2}{2\sqrt{b(u, v^2/2)}} + \frac{\partial_2 h(u, v^2/2) f(u, v^2/2)}{\sqrt{b(u, v^2/2)}} \\
&= \frac{\partial_u b(u, v^2/2) v^2/2 + \partial_2 h(u, v^2/2) f(u, v^2/2)}{\sqrt{b(u, v^2/2)}} \\
(4.19) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{\partial_u d(u, v^2/2) + \partial_2 h(u, v^2/2) f(u, v^2/2)}{\sqrt{b(u, v^2/2)}} \\
(4.16) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{\partial_u h(u, v^2/2) - \partial_u h(u, 0) + \partial_2 h(u, v^2/2) f(u, v^2/2)}{\sqrt{b(u, v^2/2)}} \\
(4.12) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{\overbrace{\partial_u h(u, v^2/2) + \partial_2 h(u, v^2/2) f(u, v^2/2)}^{=0} - \partial_u h(u, 0)}{\sqrt{b(u, v^2/2)}} \\
&= -\frac{\partial_u h(u, 0)}{\sqrt{b(u, [\phi^{-1}(u, \hat{v})]^2/2)}} \\
(4.25) \quad &\stackrel{=}{=} -a(u, \hat{v}) G'(u),
\end{aligned}$$

onde G é a função definida por $G(u) = h(u, 0)$. Em suma, o difeomorfismo $(u, \hat{v}) = \Phi(u, v)$ transforma o sistema de equações diferenciais (4.1) no sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{u} = a(u, \hat{v}) \hat{v}, \\ \dot{\hat{v}} = -a(u, \hat{v}) G'(u), \end{cases} \quad (4.27)$$

cujo o campo vetorial associado é dado por

$$\hat{X}(u, \hat{v}) = a(u, \hat{v}) \left(\hat{v} \partial_u - G'(u) \partial_{\hat{v}} \right). \quad (4.28)$$

Isso implica que

$$D\Phi(p)X(p) = \hat{X}(\Phi(p)) \quad \forall p = (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Além disso, o campo \hat{X} é hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$\hat{H}(u, \hat{v}) = \frac{\hat{v}^2}{2} + G(u)$$

e forma simplética

$$\hat{\mu}(u, \hat{v}) = [a(u, \hat{v})]^{-1} du \wedge d\hat{v}.$$

Com isso, concluímos a demonstração do item (ii).

4.1.3 Demonstração do item (iii) do Teorema 4.0.1

Queremos mostrar que $\Phi \circ R = R \circ \Phi$ e $\hat{X} \circ R = -R \circ \hat{X}$ em que $R(u, v) = (u, -v)$ e $\Phi(u, v) = (u, \phi(u, v))$ com $\phi(u, v) = v\sqrt{b(u, v^2/2)}$. Note que

$$\Phi \circ R(u, v) = \Phi(u, -v) = (u, \phi(u, -v)) = (u, -v\sqrt{\phi(u, v^2/2)}) = (u, -\phi(u, v)) = R \circ \Phi(u, v)$$

e, portanto, Φ comuta com R .

Agora, como $\phi(u, -v) = -\phi(u, v)$, temos que

$$\begin{aligned} a(u, -\hat{v}) &= a(u, -\phi(u, v)) = a(u, \phi(u, -v)) \stackrel{(4.25)}{=} (b(u, [\phi^{-1}(u, \phi(u, -v))]^2/2))^{-1/2} \\ &= (b(u, v^2/2))^{-1/2} = (b(u, [\phi^{-1}(u, \hat{v})]^2/2))^{-1/2} = a(u, \hat{v}) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\hat{X} \circ R(u, \hat{v}) = \hat{X}(u, -\hat{v}) \stackrel{(4.28)}{=} (a(u, -\hat{v})(-\hat{v}), -a(u, -\hat{v})G'(u)) = -(a(u, \hat{v})\hat{v}, a(u, \hat{v})G'(u)).$$

Por outro lado,

$$R \circ \hat{X}(u, \hat{v}) = R(\dot{u}, \dot{v}) = (\dot{u}, -\dot{v}) \stackrel{(4.28)}{=} (a(u, \hat{v})\hat{v}, a(u, \hat{v})G'(u)).$$

Logo

$$\hat{X} \circ R(u, \hat{v}) = -R \circ \hat{X}(u, \hat{v})$$

e, portanto, \hat{X} é reversível em relação a R . Com isso, concluímos a demonstração do Teorema 4.0.1. \square

4.1.4 Sobre as hipóteses do Teorema 4.0.1

Nesta subseção iremos discutir sobre a necessidade da hipótese de completude do campo W do Teorema 4.0.1. Especificamente, mostraremos através de três exemplos o que pode ocorrer caso o campo W não seja completo.

Exemplo 4.1.2. *Considere, por exemplo, o campo vetorial*

$$X(u, v) = v\partial_u + v^4/4\partial_v.$$

Neste caso, o campo W é dado por

$$W(u, z) = \partial_u + z^2\partial_z$$

e, portanto,

$$\frac{dz}{du} = z^2.$$

A solução dessa EDO com condição inicial z_0 é dada por

$$Z(u, z_0) = \frac{z_0}{1 - uz_0}$$

e, conseqüentemente, os intervalos maximais de definição de $Z(u, z_0)$ são

$$\begin{aligned} I_{z_0} &= (-\infty, 1/z_0) \text{ se } z_0 > 0, \\ I_{z_0} &= (-\infty, +\infty) \text{ se } z_0 = 0, \\ I_{z_0} &= (1/z_0, +\infty) \text{ se } z_0 < 0. \end{aligned}$$

Logo, o campo W não é completo (ver fig 4.5). Conseqüentemente, a integral primeira

$$h(u, z) = Z^{-1}(u, z) = \frac{z}{1 + uz}$$

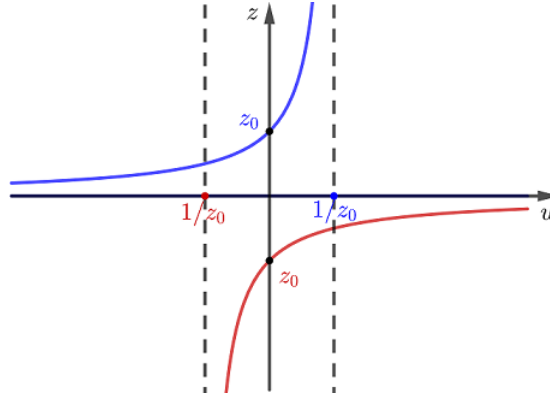


Figura 4.5: Soluções de W

não está definida em todo o \mathbb{R}^2 . Nem mesmo em todo o $\mathbb{R}_{z \geq 0}^2$. Mais precisamente, $h(u, z)$ só está definida em $\mathbb{R}^2 \setminus D_{uz}$, onde

$$D_{uz} = \{(u, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 + uz = 0\}.$$

Logo

$$H(u, v) = h(u, v^2/2) = \frac{v^2/2}{1 + uv^2/2}$$

só está definida em $\mathbb{R}^2 \setminus D_{uv}$, onde

$$D_{uv} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 + uv^2/2 = 0\}.$$

Uma vez que

$$\partial_z h(u, z) = \frac{1}{(1 + uz)^2} > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus D_{uz},$$

segue que

$$\partial_2 h(u, v^2/2) = \frac{1}{(1 + uv^2/2)^2} > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus D_{uv}.$$

Logo X é hamiltoniano em $\mathbb{R}^2 \setminus D_{uv}$ com função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ e forma simplética

$$\mu = \frac{du \wedge dv}{(1 + uv^2/2)^2}.$$

Portanto, o item (i) do Teorema (4.0.1) vale em $\mathbb{R}^2 \setminus D_{uv}$.

Agora, vamos verificar o item (ii). Para isso, note que,

$$d(u, z) = h(u, z) - h(u, 0) = \frac{z}{1 + uz} = zb(u, z),$$

onde $d(u, z) = \frac{1}{1+uz}$ e, conseqüentemente,

$$\phi(u, v) = v\sqrt{b(u, v^2/2)} = \frac{v}{\sqrt{1 + uv^2/2}}.$$

Logo $\phi(u, v)$ está definida em

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) : 1 + uv^2/2 > 0\}.$$

A mudança de variáveis $(u, \hat{v}) = (u, \phi(u, v))$ transforma o campo X restrito a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) : 1 + uv^2/2 > 0\}$ no campo

$$\hat{X}(u, \hat{v}) = a(u, \hat{v})\hat{v}\partial_u,$$

em que $a(u, \hat{v}) = \frac{1}{\sqrt{1-u\hat{v}^2}}$, o qual está definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(u, \hat{v}) \in \mathbb{R}^2 : 1 - u\hat{v}^2/2 > 0\}$. Portanto, o item (ii) do Teorema (4.0.1) só é válido no subconjunto

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) : 1 + uv^2/2 > 0\}.$$

Em suma, se o fluxo do campo W não for completo, não podemos garantir que o campo X seja hamiltoniano em todo o plano e, muito menos, que a mudança de variáveis $(u, v) \rightarrow (u, \hat{v}) = (u, \phi(u, v))$ esteja definida em todo plano.

Uma vez que X está definido em todo o \mathbb{R}^2 , é plausível nos perguntarmos o que acontece com X restrito ao conjunto $D_{uv} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 + uv^2/2 = 0\}$. Será que X é hamiltoniano?

Observe que $h(u, z) = uz$ é uma integral primeira para W restrito ao conjunto $D_{uz} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 + uz = 0\}$. De fato,

$$\partial_u(u, z)\dot{u} + \partial_z h(u, z)\dot{z} = z + uz^2 = z(1 + uz) = 0$$

para todo $(u, z) \in D_{uz}$. Consequentemente

$$H(u, v) = h(u, v^2/2) = \frac{uv^2}{2}$$

é uma integral primeira de X em D_{uv} . Porém, X não é hamiltoniano em D_{uv} com a função H definida acima. De fato, note que $(u, v) \in D_{uv}$ implica $u < 0$. Como $\partial_z h(u, z) = u$, temos que $\partial_2 h(u, v^2/2) = u < 0$ e, conseqüentemente,

$$\mu = \partial_2 h(u, v^2/2)du \wedge dv = udu \wedge dv < 0.$$

Logo o item (i) não vale para esse caso. O item (ii) também não é válido, pois a mudança de variáveis que transformaria o campo X no campo \hat{X} seria $(u, \hat{v}) = (u, v\sqrt{u})$. Mas, como $u < 0$, $\sqrt{u} \notin \mathbb{R}$.

Exemplo 4.1.3. *Consideramos o sistema de equações diferenciais planar definido por*

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = \frac{2u}{1+v^2}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Neste caso, o campo vetorial X definido por (4.29) está definido em todo \mathbb{R}^2 e o campo

$$W(u, z) = \partial_u + \left(\frac{2u}{1+2z}\right)\partial_z$$

associado a (4.29) está definido em \mathbb{R}^2 menos a reta $z = -1/2$. A solução da equação diferencial

$$\frac{dz}{du} = \frac{2u}{1+2z} \quad (4.30)$$

com condição inicial z_0 é dada por

$$z = Z(u, z_0) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1+2z_0)^2 + 4u^2} - 1 \right) \quad (4.31)$$

se $z_0 \geq 0$ e

$$z = Z(u, z_0) = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{(1+2z_0)^2 + 4u^2} - 1 \right) \quad (4.32)$$

se z_0 . Em ambos os casos as soluções estão definidas para todo $u \in \mathbb{R}$ (ver figura 4.6).

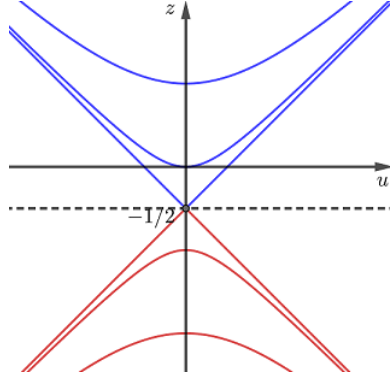


Figura 4.6: Soluções de W com condições iniciais $(0, z_0)$

Neste caso, a integral primeira $h(u, z)$ para $z \geq 0$ é dada por

$$h(u, z) = Z^{-1}(u, z) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1+2z)^2 - 4u^2} - 1 \right),$$

a qual só está definida no subconjunto

$$R = \{(u, z) \in \mathbb{R}^2 : (1+2z)^2 - 4u^2 \geq 0\}.$$

Portanto, assim como no exemplo anterior, X não é hamiltoniano em todo o \mathbb{R}^2 . Nesse caso só não é possível construir a $h(u, z)$ em, pelo menos, $\mathbb{R}_{z \geq 0}^2$, porque existem pontos de $\mathbb{R}_{z \geq 0}^2$ que não podem ser alcançados por uma solução $Z(u, z_0)$. Na figura (4.6) é possível constatar que, nenhum ponto $(u, z) \in \mathbb{R}_{z \geq 0}^2$ abaixo das retas (em azul), pode ser alcançado por uma solução que passa por $(0, z_0)$. Esse tipo de situação pode ser contornada usando o seguinte processo de corte-colagem. Considere a função corte $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq -1/8, \\ \frac{8}{3}(2z+1)(4z+1) & \text{se } -1/4 \leq z \leq -1/8, \\ 0 & \text{se } z \leq -1/4. \end{cases}$$

Consideremos, agora, a EDO definida por partes por

$$\frac{dz}{du} = \chi(z)f(u, z) = \begin{cases} \frac{2u}{1+2z} & \text{se } z \geq -1/8, \\ \frac{16}{3}u(1+4z) & \text{se } -1/4 \leq z \leq -1/8, \\ 0 & \text{se } z \leq -1/4. \end{cases} \quad (4.33)$$

Note que, se $z \geq -1/8$ temos

$$\frac{dz}{du} = \frac{2u}{1+2z}$$

e, conseqüentemente, a solução geral com condição inicial (u_0, z_0) , $z_0 \geq -1/8$ é dada por

$$\zeta(u, u_0, z_0) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 + 2z_0)^2 + 4u^2 - 4u_0^2} - 1 \right). \quad (4.34)$$

Já, para $-1/4 \leq z \leq -1/8$ temos que

$$\frac{dz}{du} = \frac{16}{3} u(1 + 4z).$$

Nesse caso, a solução geral com condição inicial (u_0, z_0) é dada por

$$\eta(u, u_0, z_0) = \frac{1}{4} \left((1 + 4z_0) e^{(32/3)(u^2 - u_0^2)} - 1 \right). \quad (4.35)$$

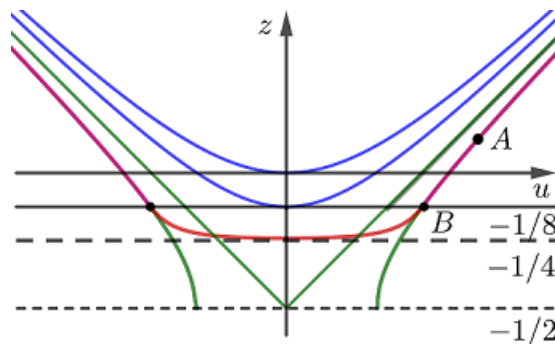


Figura 4.7: Colagem das soluções

Para fazer a colagem das soluções, prosseguimos da seguinte maneira: consideramos a solução $\zeta(u, u_0, z_0)$ que passa pelo ponto A (ver fig. 4.7). Essa solução corta o eixo $z = -1/8$ em um ponto $B = (u^*, -1/8)$ para algum $u^* > 0$. Em seguida, consideramos a solução $\eta(u, B)$ (em vermelho) que passa por B e encontra, necessariamente, o eixo z em algum ponto $(0, z_0)$ como $-1/4 < z_0 < -1/8$ (ver fig. 4.7). É claro que durante esse processo, as soluções podem perder regularidade nos pontos de colagem (ponto B), de modo que a nova integral primeira $h(u, z)$ não tenha mais a regularidade desejada.

Exibiremos a seguir, um exemplo em que as duas hipóteses do Teorema 4.0.1 falham e, mesmo assim, é possível construir $h(u, z)$ definida em todo $\mathbb{R}_{z \geq 0}^2$.

Exemplo 4.1.4. Considere o sistema de equações diferenciais planar

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\frac{2u}{1+v^2}. \end{cases} \quad (4.36)$$

Neste caso, o campo vetorial X definido (4.36) está definido em todo \mathbb{R}^2 e o campo

$$W(u, z) = \partial_u - \left(\frac{2u}{1+2z} \right) \partial_z$$

associado a (4.29) está definido em \mathbb{R}^2 menos a reta $z = -1/2$. A solução da equação diferencial

$$\frac{dz}{du} = -\frac{2u}{1+2z} \quad (4.37)$$

com condição inicial $z_0 \geq 0$ é dada por

$$z = Z(u, z_0) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 + 2z_0)^2 - 4u^2} - 1 \right) \quad (4.38)$$

e, portanto, só está definida para $|u| < (1 + 2z_0)/2$. Ou seja, o fluxo de W não é completo. No entanto, a integral primeira de W é dada por

$$h(u, z) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 + 2z)^2 + 4u^2} - 1 \right),$$

a qual está definida em todo $\mathbb{R}_{z \geq 0}^2$. Observe que, nesse caso, dado qualquer $(u, z) \in \mathbb{R}_{z \geq 0}^2$ é sempre possível chegar a (u, z) com a solução $Z(u, z_0)$ que passa por algum ponto $(0, z_0)$, $z_0 \geq 0$, antes que $|u| = (1 + 2z_0)/2$, conforme mostra a figura (4.8).

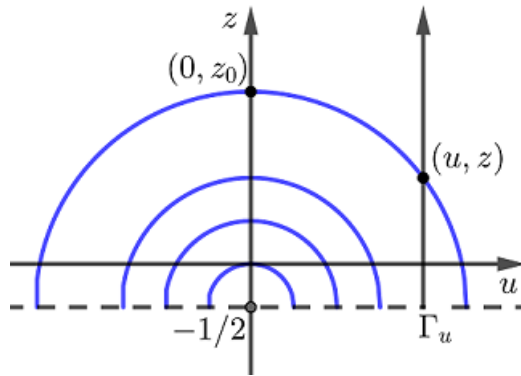


Figura 4.8: Solução $Z(u, z_0)$

Nesse caso, $\partial_z h(u, z) > 0$ para todo $(u, z) \in \mathbb{R}_{z \geq 0}^2$ e o campo X é hamiltoniano em todo o \mathbb{R}^2 , com função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ e forma simplética $\mu = \partial_2 h(u, v^2/2) du \wedge dv$. Além disso, vale também as conclusões do item (ii) do Teorema (4.0.1).

O item 3ª da observação (4.1.1) e o exemplo anterior sugerem que a hipótese da completude do campo W pode ser modificada: basta que para toda vertical Γ_u no plano $\mathbb{R}_{z \geq 0}^2$ e todo (u, z) sobre Γ_u , exista uma solução com condição inicial $(0, z_0)$ que intersecta Γ_u em (u, z) , conforme mostra a figura (4.8).

4.1.5 Consequências do Teorema 4.0.1

A seguir apresentaremos algumas consequências do Teorema 4.0.1.

Corolário 4.1.4.1. *Sejam $X(u, v) = v\partial_u + f(u, v^2/2)\partial_v$ como no Teorema 4.0.1, h o fluxo do campo $W(u, z) = \partial_u + f(u, z)\partial_z$ e $g(u) = f(u, 0)$. Seja $(u_0, 0)$ um equilíbrio não degenerado de X . Se $g'(u_0) = \partial_u f(u_0, 0) < 0$, então $(u_0, 0)$ é um centro não degenerado de X . Se $g'(u_0) = \partial_u f(u_0, 0) > 0$, então $(u_0, 0)$ é uma sela não degenerada de X .*

Demonstração. De fato, nessas condições, pelo Teorema 4.0.1, item (i), o campo X é hamiltoniano com função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$, em que h é uma integral primeira de W . Por outro lado, $h(u, z)$ é uma integral primeira de W e, como vimos em (4.12), vale a igualdade

$$\partial_u h(u, z) = -f(u, z)\partial_z h(u, z). \quad (4.39)$$

Seja $(u_0, 0)$ um equilíbrio não degenerado de X . Então $g(u_0) = f(u_0, 0) = 0$ e, a partir da equação (4.39) obtemos que

$$\partial_u^2 H(u_0, 0) = -\partial_u f(u_0, 0) \partial_2 h(u_0, 0), \quad \partial_u \partial_v H(u_0, 0) = 0 \text{ e } \partial_v^2 H(u_0, 0) = \partial_2 h(u_0, 0) > 0.$$

Logo o determinante da matriz hessiana de H avaliada em $(u_0, 0)$ é dado por

$$D = -\partial_u f(u_0, 0) [\partial_2 h(u_0, 0)]^2.$$

Uma vez que $\partial_2 h(u_0, 0) > 0$, o sinal de D só depende do sinal de $g'(u_0) = \partial_u f(u_0, 0)$. Assim, se $g'(u_0) = \partial_u f(u_0, 0) < 0$, temos que $D > 0$ e $\partial_u^2 H(u_0, 0) > 0$. Logo, nesse caso, $(u_0, 0)$ é um mínimo local de H e, conseqüentemente, $(u_0, 0)$ é um centro não degenerado de X . Se $g'(u) = \partial_u f(u_0, 0) > 0$, temos que $D < 0$ e, conseqüentemente, $(u_0, 0)$ será um ponto de sela de H . Logo, nesse caso, $(u_0, 0)$ é uma sela não degenerada de X . \square

Corolário 4.1.4.2. *Sejam \hat{X} o campo hamiltoniano do item (ii) do Teorema 4.0.1 e $(u_0, 0)$ um equilíbrio não degenerado de \hat{X} . Se $G'(u_0) = 0$ e $G''(u_0) > 0$, então $(u_0, 0)$ é um centro não degenerado de \hat{X} . Se $G'(u_0) = 0$ e $G''(u_0) < 0$, então $(u_0, 0)$ é uma sela não degenerada de \hat{X} .*

Demonstração. Seja $(u_0, 0)$ um equilíbrio de \hat{X} . Então $G'(u_0) = 0$. Pela a equação (4.39), temos que

$$G'(u) = \partial_u h(u_0, z) \Big|_{z=0} \stackrel{(4.12)}{=} -f(u, 0) \partial_z h(u, z) \Big|_{z=0}$$

e, conseqüentemente, $f(u_0, 0) = 0$. Da última igualdade temos que,

$$G''(u) = -\partial_u f(u, 0) \partial_z h(u, z) \Big|_{z=0} - f(u, 0) \partial_u \partial_z h(u, z) \Big|_{z=0}.$$

Logo

$$G''(u_0) = -\partial_u f(u_0, 0) \partial_z h(u_0, 0).$$

Assim, teremos $G''(u_0) > 0$ se $\partial_u f(u_0, 0) < 0$ e $G''(u_0) < 0$ se $\partial_u f(u_0, 0) > 0$. Como X e \hat{X} são conjugados, segue do Corolário 4.1.4.1 que $(u_0, 0)$ é um centro não degenerado de \hat{X} se $G''(u_0) < 0$ e uma sela não degenerada de \hat{X} se $G''(u_0) > 0$. \square

Corolário 4.1.4.3. *Suponha que $f(u, 0) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Então $G(u) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Nesse caso,*

$$\hat{X}(u, \hat{v}) = a(u, \hat{v}) \hat{v} \partial_u. \tag{4.40}$$

Demonstração. Suponha que $f(u, 0) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Por (4.39) segue que

$$\partial_u h(u, 0) = -f(u, 0) \partial_2 h(u, 0) = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$h(u, 0) - h(0, 0) = \int_0^u \partial_u h(t, 0) dt = 0,$$

ou seja, $h(u, 0) = h(0, 0) = 0$. Logo $G(u) = h(u, 0) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. \square

Corolário 4.1.4.4. *Suponha que existe $z^* > 0$ tal que $f(u, z^*) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Então $G(u) = h(u, 0) < z^*$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Se, além disso, $(0, 0)$ é um centro não degenerado de X , então $0 \leq G(u) < z^*$.*

Demonstração. Suponha que $f(u, z^*) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Por (4.39) segue que

$$\partial_u h(u, z^*) = -f(u, z^*) \partial_2 h(u, z^*) = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$h(u, z^*) - h(0, z^*) = \int_0^u \partial_u h(t, z^*) dt = 0,$$

ou seja, $h(u, z^*) = h(0, z^*) = z^*$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Uma vez que $\partial_z h(u, z) > 0$, segue que a função $z \rightarrow h(u, z)$ é estritamente crescente para todo u fixo e, conseqüentemente, $h(u, 0) < h(u, z^*) = z^*$. Logo $G(u) = h(u, 0) < z^*$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Se, além disso, $(0, 0)$ é um centro não degenerado de X , temos que $G'(0) = 0$ e $G''(0) > 0$, ou seja, $G(u)$ é crescente para $u > 0$ e decrescente para $u < 0$. Como $G(0) = 0$, segue que $G(u) \geq 0$. Portanto, $0 \leq G(u) < z_0$. \square

O Corolário (4.1.4.4) nos diz que para desenhar o retrato de fase de \hat{X} , basta saber o comportamento de \hat{X} entre as retas $v^* = \pm\sqrt{2z^*}$, já que, fora dessa região, o comportamento de \hat{X} fica completamente determinado.

Esse resultado vale em situações mais gerais, a saber, se trocamos a reta $z = z^*$ pelo gráfico de uma curva solução que vai de menos infinito a mais infinito, obtemos a seguinte generalização do Corolário (4.1.4.4).

Corolário 4.1.4.5. *Seja $\bar{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $0 < \bar{v}(u) \leq a + b|u|$, com $a, b > 0$ constantes, e suponha que $t \rightarrow (u(t), \bar{v}(u(t)))$ seja uma solução particular do sistema*

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = f(u, v^2/2). \end{cases} \quad (4.41)$$

Então existe uma mudança de variáveis $(x, y) \rightarrow (u(x), v(x, y))$ em \mathbb{R}^2 tal que nas novas variáveis o sistema (4.41) é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F(x, y^2/2). \end{cases} \quad (4.42)$$

Além disso, $F(x, \pm) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Consideramos, inicialmente, a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = \alpha(x), \\ v = y\alpha'(x), \end{cases} \quad (4.43)$$

onde $\alpha(x)$ é um difeomorfismo de \mathbb{R} para \mathbb{R} . Essa mudança de variáveis transforma o sistema (4.41) no sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F(x, y^2/2), \end{cases}$$

onde

$$F(x, y^2/2) := \frac{1}{\alpha'(x)} \left(f(\alpha(x), (\alpha'(x))^2 y^2/2) - \alpha''(x) y^2 \right). \quad (4.44)$$

O próximo passo é determinar $\alpha(x)$ em função de $\bar{v}(u)$. De (4.43) obtemos que

$$v = y\alpha'(\alpha^{-1}(u)) = \frac{y}{(\alpha^{-1}(u))'}.$$

Uma vez que $\bar{v}(u)$ é uma solução particular, podemos determinar $\alpha(x)$ de modo que

$$\bar{v}(u) = \frac{1}{(\alpha^{-1}(u))'},$$

para isso, basta tomar $y = 1$. Da última igualdade, obtemos

$$x = \alpha^{-1}(u) = \int_0^u \frac{ds}{\bar{v}(s)}.$$

Por hipótese, temos que $0 < \bar{v}(u) \leq a + b|u|$, e, conseqüentemente, $\frac{1}{\bar{v}(u)} \geq \frac{1}{a+b|u|}$. Segue que

$$x = \alpha^{-1}(u) = \int_0^u \frac{ds}{\bar{v}(s)} \geq \int_0^u \frac{ds}{a+bs} = \frac{1}{b}(\ln(a+bu) - \ln(a)), \quad \text{se } u > 0$$

e,

$$x = \alpha^{-1}(u) = \int_u^0 \frac{ds}{\bar{v}(s)} \geq \int_u^0 \frac{ds}{a-bs} = \frac{1}{b}(\ln(a-bu) - \ln(a)), \quad \text{se } u < 0.$$

Portanto, $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \alpha^{-1}(u) = +\infty$. Agora, por um lado temos que

$$(\alpha^{-1})'(u) = \frac{1}{\bar{v}(u)} \implies (\alpha^{-1})''(u) = -\frac{\bar{v}'(u)}{(\bar{v}(u))^2}$$

e, por outro lado, temos

$$(\alpha^{-1})'(u) = \frac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(u))} \implies (\alpha^{-1})''(u) = -\frac{\alpha''(\alpha^{-1}(u))(\alpha^{-1}(u))'}{(\alpha'(\alpha^{-1}(u)))^2} = -\frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^3} = -\frac{\alpha''(x)}{(\bar{v}(u))^3}.$$

Segue dessas identidades que,

$$\alpha''(x) = \bar{v}'(u)\bar{v}(u).$$

Agora, como $(u(t), \bar{v}(u(t)))$ é solução de (4.41), segue que

$$\frac{d\bar{v}(u(t))}{dt} = \frac{d\bar{v}(u)}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \bar{v}'(u) \cdot \dot{u}(t) = \underbrace{\bar{v}'(u)\bar{v}(u)}_{=\alpha''(x)} = f(u, (\bar{v}(u))^2/2) = f(\alpha(x), (\alpha'(x))^2/2).$$

Portanto,

$$\alpha''(x) = \bar{v}'(u)\bar{v}(u).$$

$$\alpha''(x) = f(\alpha(x), (\alpha'(x))^2/2). \tag{4.45}$$

Substituindo (4.45) em (4.44) obtemos

$$F(x, y^2/2) = \frac{1}{\alpha'(x)} \left(f(\alpha(x), (\alpha'(x))^2 y^2/2) - f(\alpha(x), (\alpha'(x))^2/2) y^2 \right)$$

e, conseqüentemente, $F(x, \pm 1) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Observe que $F(x, y^2/2)$ é par na segunda variável e satisfaz a condição $F(x, \pm 1) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, podemos aplicar o Corolário (4.1.4.4) e obter os resultados anteriores.

4.1.6 Exemplos

Nesta seção aplicamos o Teorema 4.0.1 em alguns exemplos.

Exemplo 4.1.5. ([Sab04], [Rag12]) Considere o campo vetorial X definido em todo o \mathbb{R}^2 por

$$X(u, v) = v\partial_u + f(u, v^2/2)\partial_v, \quad (4.46)$$

onde $f(u, v^2/2) = \alpha(u)v^2/2 + \beta(u)$, com $\alpha, \beta \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$.

Esse exemplo é um caso em que é possível fazer todas as etapas da demonstração do Teorema 4.0.1.

De fato, o campo vetorial W associado a X é dado por

$$W(u, z) = \partial_u + f(u, z)\partial_v$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{dz}{du} = \alpha(u)z + \beta(u). \quad (4.47)$$

A solução da EDO linear (4.47) com condição inicial $z(0) = z_0$ é dada por

$$z = Z(u, z_0) = z_0 \exp\left(\int_0^u \alpha(t)dt\right) + \int_0^u \exp\left(\int_s^u \alpha(t)dt\right)\beta(s)ds$$

e, portanto,

$$z_0 = h(u, z) = z \exp\left(-\int_0^u \alpha(t)dt\right) - \int_0^u \exp\left(-\int_0^s \alpha(t)dt\right)\beta(s)ds.$$

Segue que

$$d(u, z) = h(u, z) - h(u, 0) = z \exp\left(-\int_0^u \alpha(t)dt\right) = z\varphi(u, z),$$

onde $b(u, z) = \exp\left(-\int_0^u \alpha(t)dt\right)$. Logo,

$$\hat{v} = \phi(u, v) = v\sqrt{\varphi(u, v^2/2)}$$

e, conseqüentemente,

$$\phi^{-1}(u, \hat{v}) = \hat{v}a(u),$$

onde $a(u) = \exp\left(1/2 \int_0^u \alpha(t)dt\right)$. O difeomorfismo

$$\Phi(u, v) = (u, \phi(u, v))$$

transforma o campo $X(u, v)$ no campo vetorial hamiltoniano

$$\hat{X}(u, \hat{v}) = a(u)(\hat{v}\partial_u - G'(u)\partial_v), \quad (4.48)$$

onde

$$G(u) = h(u, 0) = - \int_0^u \exp \left(- \int_0^s \alpha(t) dt \right) \beta(s) ds.$$

Assim, a função hamiltoniana é dada por

$$H(u, v) = \frac{\hat{v}^2}{2} + G(u)$$

e a forma simplética por

$$\mu(u, \hat{v}) = \left(-1/2 \int_0^u \alpha(t) dt \right) du \wedge d\hat{v}.$$

Exemplo 4.1.6. Em 1944 Kukles [Kuk44] estudou o seguinte sistema polinomial de grau 3

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -u + a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_5 u^2 v + a_6 uv^2 + a_7 v^3. \end{cases} \quad (4.49)$$

O foco principal de seu estudo era estabelecer condição sobre os a_i , $i \in \{1, \dots, 7\}$, de modo que o ponto de equilíbrio na origem fosse um centro (ver [DM20]).

Em [CL90], o autor considerou o caso em que $a_7 = 0$ e estabeleceu condições sobre os a_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, sob as quais o equilíbrio $(0, 0)$ é um centro. Por exemplo, se $a_2 = a_5 = 0$, então $(0, 0)$ é um centro. Nesse caso (4.49) é reduzido para o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -u + a_1 u^2 + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_6 uv^2. \end{cases} \quad (4.50)$$

Observe que o campo X associado ao sistema (4.50) é um campo do tipo $X(u, v) = v\partial_u + f(u, v^2/2)\partial_v$, em que

$$f(u, v^2/2) = -u + a_1 u^2 + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_6 uv^2.$$

Dessa forma, o campo W é dado por $W(u, z) = \partial_u + f(u, z)\partial_z$, onde

$$f(u, z) = -u + a_1 u^2 + 2a_3 z + a_4 u^3 + 2a_6 uz = u(-1 + a_1 u + a_4 u^2) + 2(a_3 + a_6 u)z.$$

Note que esse caso é um caso particular do exemplo (4.1.6) e, conseqüentemente, W é completo e X admite uma representação hamiltoniana. A seguir, iremos usar o Corolário (4.1.4.1) para caracterizar os equilíbrios não degenerados de (4.50). Para isso, seja $a = a_1$ e $b = a_4$. Dessa forma,

$$g(u) = f(u, 0) = u(-1 + au + bu^3).$$

Os equilíbrios de X são os pontos da forma $(u_0, 0)$ tais que $g(u_0) = 0$. Assim, são equilíbrios de X : $(0, 0)$; $(1/a, 0)$ se $a \neq 0$ e $b = 0$ e $(u_{\pm}, 0)$ se $b \neq 0$, onde

$$u_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2b}.$$

A derivada de g é dada por

$$g'(u) = -1 + 2au + 3bu^2.$$

Logo, $g'(0) = -1 < 0$ e, portanto, pelo Corolário (4.1.4.1), $(0, 0)$ é um centro não degenerado. Note que $g'(1/a) = 2 > 0$, logo, pelo Corolário (4.1.4.1), $(1/a, 0)$ é uma sela não degenerada. Para os demais casos, temos que

$$g'(u_+) = \frac{a^2 + 4b - a\sqrt{a^2 + 4b}}{2b} \quad \text{e} \quad g'(u_-) = \frac{a^2 + 4b + a\sqrt{a^2 + 4b}}{2b}.$$

Segue que $g'(u_+) < 0$ se $a < 0$ e $-\frac{a^2}{4} < b < 0$. Nesse caso, X tem um centro em $(u_+, 0)$. Se $(a \neq 0$ e $b > 0)$ ou $(a > 0$ e $-\frac{a^2}{4} < b < 0)$ ou $a = 0$, então $g'(u_+) > 0$ e, pelo Corolário (4.1.4.1), $(u_+, 0)$ é uma sela não degenerada. A figura 4.9(a) mostra as regiões onde $(u_+, 0)$ é um centro ou uma sela de X . Para o equilíbrio $(u_-, 0)$, teremos $g'(u_-) < 0$ se $a > 0$ e $-\frac{a^2}{4} < b < 0$. Nesse caso, $(u_-, 0)$ é um centro não degenerado de X . Se $(a \neq 0$ e $b > 0)$ ou $(a < 0$ e $-\frac{a^2}{4} < b < 0)$ ou $a = 0$, então $g'(u_-) > 0$ e, nesse caso, $(u_-, 0)$ é uma sela não degenerada. A figura 4.9(b) mostra as regiões onde $(u_-, 0)$ é um centro ou uma sela de X .

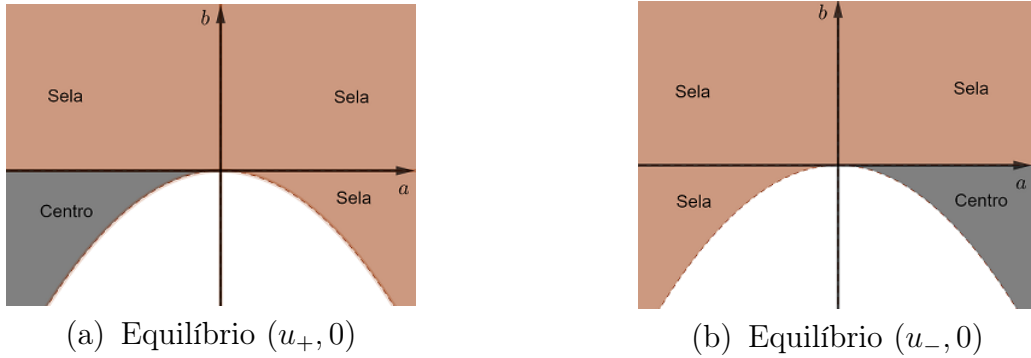


Figura 4.9: Equilíbrios não degenerados de X

Exemplo 4.1.7. Consideramos X definido por

$$X(u, v) = v\partial_u + f(u, v^2/2)\partial_v, \quad (4.51)$$

onde $f(u, v^2/2) = au(b - c(v^2/2))$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes tais que $a \neq 0$, $b \geq 0$ e $c > 0$.

Observe que $f(u, v^2/2) = au(b - c(v^2/2))$ possui raízes nos pontos $(0, v)$ (para todo v) e $(u, \pm\sqrt{2b/c})$ (para todo u), e portanto $X(0, v) = v\partial_u$ e $X(u, \pm\sqrt{2b/c}) = \pm\sqrt{2b/c}\partial_u$. Assim, o campo X é constante ao longo das retas paralelas $v = \sqrt{2b/c}$ (com sentido positivo) e $v = -\sqrt{2b/c}$ (com sentido negativo). O comportamento de X fora dessas retas depende da natureza do equilíbrio de X em $(0, 0)$. Note que $g(u) = f(u, 0) = abu$ e, conseqüentemente, $g'(u) = \partial_u f(u, 0) = ab$. Assim, se $a < 0$ e $b > 0$, $\partial_u f(u, 0) = ab < 0$ e, conseqüentemente, X tem um centro na origem, conforme vimos no Corolário 4.1.4.1. Se $a > 0$ e $b > 0$, $\partial_u f(u, 0) = ab > 0$ e, conseqüentemente, X tem uma sela na origem conforme vimos no Corolário 4.1.4.1 (ver fig 4.11). Se $b = 0$, $\partial_u f(u, 0) = 0$ e, conseqüentemente, $(0, 0)$ é um equilíbrio não degenerado (ver fig 4.10). Uma vez que $f(u, z) = au(b - zc)$, temos que $f(u, 0) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ se $b = 0$ e, $f(u, b/c) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ se $b > 0$. No primeiro caso, o Corolário (4.1.4.3) nos garante que $G(u) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ e, no segundo caso, o Corolário (4.1.4.4) nos garante que $G(u) < b/c$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Além disso, se $a < 0$, X tem um centro na origem e, nesse caso, o Corolário (4.1.4.4) nos garante que $0 \leq G(u) < b/c$.

A fim de comprovar o que foi dito acima, note que o campo X é um caso particular do exemplo 4.1.5, a saber, é o caso em que $\alpha(u) = -acu$ e $\beta(u) = abu$. Substituindo essas

funções na expressão de h , obtemos

$$h(u, z) = \frac{1}{c} \left(b + (cz - b) \exp(acu^2/2) \right)$$

e, conseqüentemente, X é hamiltoniano com função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ e forma simplética $\mu = \partial_2 h(u, v^2/2) du \wedge dv$. O retrato de fase de X é apresentado na figura 4.10 para o caso em que $b = 0$ e na figura 4.11 para o caso em que $b > 0$. As retas pontilhadas são as retas $v = \pm\sqrt{2b/c}$ mencionadas acima.

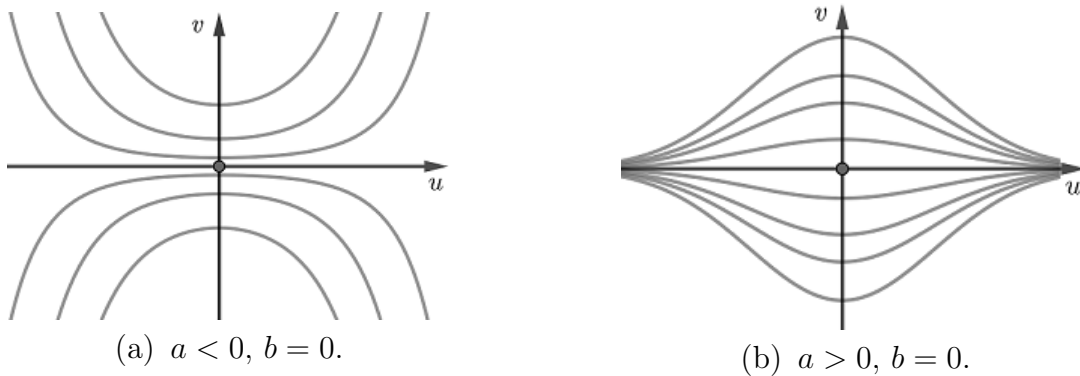


Figura 4.10: Retrato de fase de X

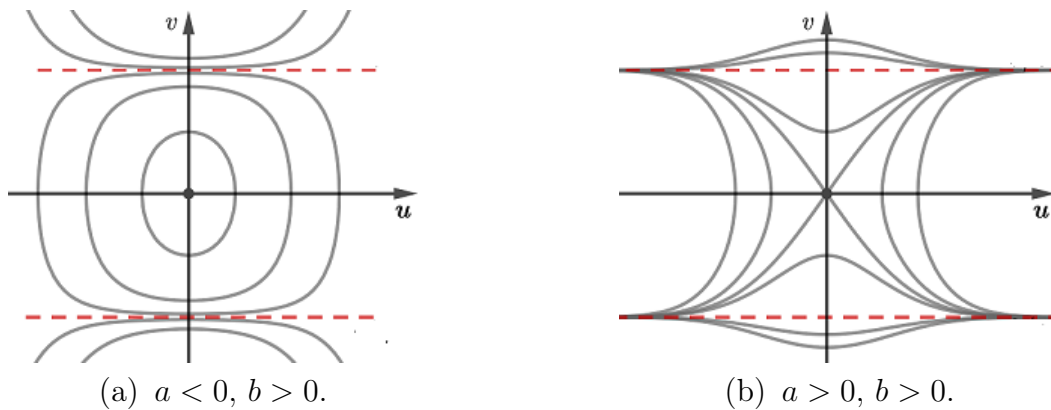


Figura 4.11: Retrato de fase de X

Agora, a mudança de variáveis $(u, v) \rightarrow (u, \hat{v}) = v \exp(acu^2/4)$ transforma o campo X no campo

$$\hat{X}(u, \hat{v}) = \hat{a}(u)(\hat{v}\partial_u - G'(u)\partial_v)$$

em que $\hat{a}(u) = \exp(-acu^2/4)$ e

$$G(u) = h(u, 0) = \frac{b}{c} (1 - \exp(acu^2/2)).$$

Portanto, se $b = 0$, $G(u) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$, conforme prever o Corolário (4.1.4.3). Se $b > 0$, G é limitada superiormente por b/c , conforme prever o Corolário (4.1.4.4), veja a figura (4.12).

Note que no caso (a), $0 \leq G(u) < b/c$ para todo $u \in \mathbb{R}$, o que tá de acordo com o Corolário (4.1.4.4). As figuras 4.13 e 4.14 apresentam o retrato de fase do campo \hat{X} para os casos $b = 0$ e $b > 0$ respectivamente.

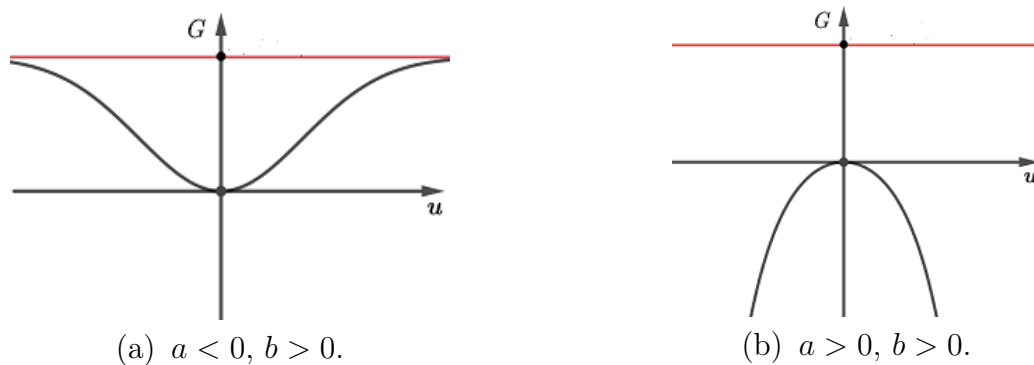


Figura 4.12: Gráfico do potencial G

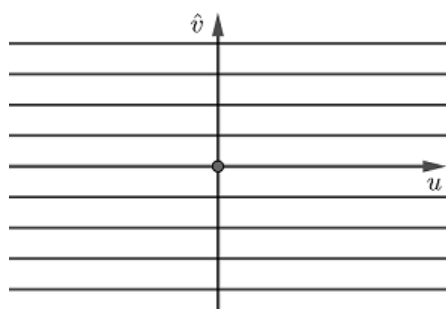


Figura 4.13: Retrato de fase de X

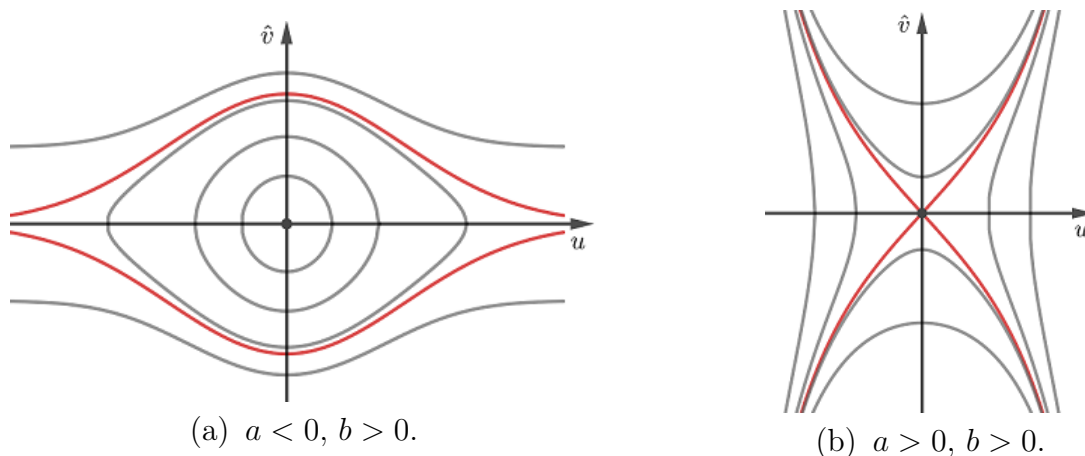


Figura 4.14: Retrato de fase de \hat{X}

Exemplo 4.1.8 ([Chi87]). Considere o sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi(1 - \eta), \\ \dot{\eta} = -\eta(1 - \xi). \end{cases} \quad (4.52)$$

A mudança de variáveis

$$u = \frac{2 - \xi - \eta}{2}, \quad v = \frac{\eta - \xi}{2}$$

transforma o sistema (4.52) no sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -u + u^2 - v^2. \end{cases} \quad (4.53)$$

O campo $X(u, v)$ definido por (4.53) apresenta dois equilíbrios, $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Esse campo é, mais uma vez, um caso particular do exemplo 4.1.5. Nesse caso, $\alpha(u) = -2$ e $\beta(u) = -u + u^2$. Dessa forma,

$$h(u, z) = \frac{1}{2} \left(2z \exp(2u) - (u - 1)^2 \exp(2u) + 1 \right)$$

e, portanto, X é hamiltoniano com função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ e forma simplética $\mu = \partial_2 h(u, v^2/2) du \wedge dv$. O retrato de fase de X é apresentado na figura 4.15.

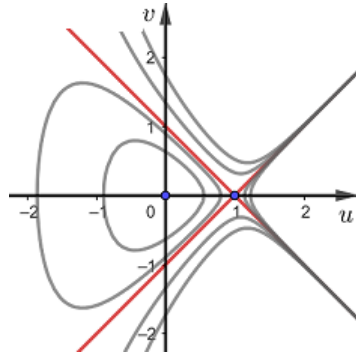


Figura 4.15: Retrato de fase de X

Agora, a mudança de variáveis $(u, v) \rightarrow (u, \hat{v}) = v \exp(u)$ transforma o campo X no campo

$$\hat{X}(u, \hat{v}) = a(u)(\hat{v}\partial_u - G'(u)\partial_v)$$

em que $a(u) = \exp(-u)$ e

$$G(u) = \frac{1}{2}(1 - e^{2u}(u - 1)^2).$$

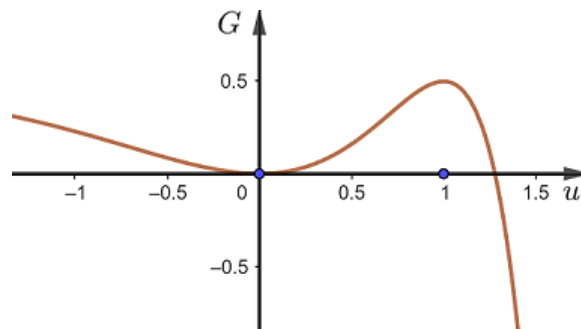


Figura 4.16: Gráfico do potencial G

O potencial G tem dois pontos críticos, um mínimo local em 0 e um máximo global em 1 (ver fig.4.16). Nesse caso, $G'(0) = G'(1) = 0$ com $G''(0) > 0$ e $G''(1) < 0$. Assim, pelo Corolário 4.1.4.2, o equilíbrio $(0, 0)$ é um centro não degenerado de \hat{X} e o equilíbrio $(1, 0)$ é uma sela não degenerada de \hat{X} . A figura 4.17 apresenta o retrato de fase do campo \hat{X} .

O exemplo anterior nos motiva a pensar na seguinte questão.

Questão 4.1.1. Quais sistemas de equações diferenciais no plano podem ser transformados em um sistema de equações diferenciais do tipo

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = f(u, v^2/2), \end{cases} \quad (4.54)$$

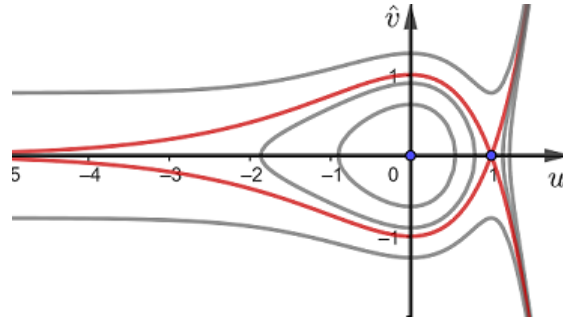


Figura 4.17: Retrato de fase de \hat{X}

através de uma mudança de coordenadas que estejam definida em todo plano?

Resposta parcial: Sejam $F \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $g \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, tal que $g(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Então existe uma mudança de variáveis definida em todo \mathbb{R}^2 que transforma o sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta g(\xi), \\ \dot{\eta} = F(\xi, \eta^2/2), \end{cases} \quad (4.55)$$

em um sistema do tipo (4.54). num sistema do tipo (4.54).

De fato, considere a mudança de variáveis $\xi = u$ e $v = \eta g(\xi)$. Assim, $\dot{u} = \dot{\xi} = \eta g(\xi) = v$ e,

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \eta g'(\xi) \dot{\xi} + \dot{\eta} g(\xi) \\ &= \eta g'(\xi) \eta g(\xi) + F(\xi, \eta^2/2) g(\xi) \\ &= \frac{v^2}{g(u)^2} g'(u) g(u) + F(u, v^2/2g(u)^2) g(u) \\ &= \frac{1}{g(u)} (g'(u) v^2 + F(u, v^2/2g(u)^2) g(u)^2). \end{aligned}$$

Agora, basta definir $f(u, v^2/2)$ como

$$f(u, v^2/2) = \frac{1}{g(u)} (g'(u) v^2 + F(u, v^2/2g(u)^2) g(u)^2).$$

4.2 Demonstração do Teorema 4.0.2

O Teorema 4.0.1 nos garante que o campo inicial $X(u, v) = v\partial_u + f(u, v^2/2)\partial_v$ é hamiltoniano, com função hamiltoniana $H(u, v) = h(u, v^2/2)$ e forma simplética $\mu = \partial_2 h(u, v^2/2) du \wedge dv$, onde h é a integral primeira do campo $W = \partial_u + f(u, z)\partial_z$ construída na demonstração do Teorema 4.0.1. Além disso, existe uma mudança de variáveis $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \rightarrow (u, \hat{v}) \in \mathbb{R}^2$ que transforma o campo X em um campo da forma

$$\hat{X}(u, \hat{v}) = a(u, \hat{v}) \left(\hat{v} \partial_u - G'(u) \partial_{\hat{v}} \right), \quad (4.56)$$

onde $a \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é uma função positiva e $G \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é a função definida por $G(u) = h(u, 0)$. Esse campo vetorial é hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$\hat{H}(u, \hat{v}) = \frac{\hat{v}^2}{2} + G(u) \tag{4.57}$$

e forma simplética $\hat{\mu}(u, \hat{v}) = [a(u, \hat{v})]^{-1} du \wedge d\hat{v}$.

Para a demonstração do Teorema 4.0.2 vamos supor que $(0, 0)$ é o único equilíbrio do campo $\hat{X}(u, \hat{v})$ e que esse equilíbrio é um centro não degenerado. Dessa forma, pelo Corolário (4.1.4.2), a função G satisfaz a condição

$$G(0) = G'(0) = 0 \quad G''(0) > 0, \quad \text{e } uG'(u) > 0 \forall u \neq 0. \tag{4.58}$$

No que segue denotaremos por \mathcal{A}_G o anel periódico do centro $(0, 0)$ e por $T_G(u)$ a função período das órbitas periódicas de (4.56) em \mathcal{A}_G parametrizadas por $(u, 0)$ e por $\tilde{T}(E)$ a função período das órbitas periódicas de (4.56) em \mathcal{A}_G parametrizadas pelos níveis $\hat{H} = E$. Recordamos, do capítulo 2, que essas funções estão relacionadas por

$$T_G(u) = \tilde{T}_G \circ \hat{H}(u, 0) = \tilde{T}_G \circ G(u). \tag{4.59}$$

Além disso, $T_G(u)$ e $\tilde{T}(E)$ têm a mesma regularidade do campo \hat{X} exceto, possivelmente, para $u = 0$ e $E = 0$ respectivamente. Já em $u = E = 0$, $T_G(u)$ e $\tilde{T}(E)$ são, pelo menos, contínuas com $T_G(0) = \tilde{T}(0) > 0$.

A demonstração é longa e será dividida em duas partes principais. Na primeira parte construiremos um campo vetorial hamiltoniano do tipo

$$Y(x, y) = y\partial_x - V'(x)\partial_y \tag{4.60}$$

de tal forma que Y tenha um centro não degenerado em $(0, 0)$. A construção é feita de tal que para cada órbita em \mathcal{A}_γ (a qual corda corta o eixo u em um ponto $(u_0, 0)$) existem uma órbita em \mathcal{A}_V (a qual corta o eixo x em um ponto $(x_0, 0)$) e um difeomorfismo $x_0 = \varphi(u_0)$ tal que $T_V(x_0) = T_G(u_0)$, onde T_V é a função período das órbitas periódicas de (4.60) parametrizada por $(x, 0)$ (ver figura 4.18).

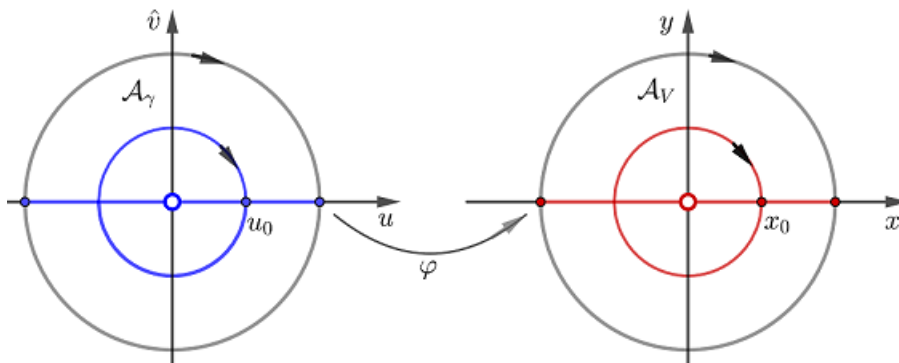


Figura 4.18: Ilustração da construção de Y .

Na segunda construiremos a conjugação entre os campos vetoriais hamiltonianos (4.56) e (4.60).

Demonstração. (do Teorema 4.0.2) A demonstração será feita, inicialmente, para o caso em que \mathcal{A}_G é simétrico em relação ao eixo \hat{v} . Feito isso, mostraremos que o caso geral é reduzido a esse caso por meio de um processo de simetrização.

Seja γ uma órbita qualquer de (4.56) em \mathcal{A}_G . Como \mathcal{A}_G é simétrico em relação ao eixo \hat{v} , a órbita γ intercepta o eixo u em dois pontos simétricos, os quais denotaremos por $(-u_{\max}, 0)$ e $(u_{\max}, 0)$, com $0 < u_{\max} < \infty$. Dessa forma, a intersecção de \mathcal{A}_γ com o eixo u é um intervalo da forma $[-u_{\max}, u_{\max}] \times \{0\}$ (ver fig. 4.19).

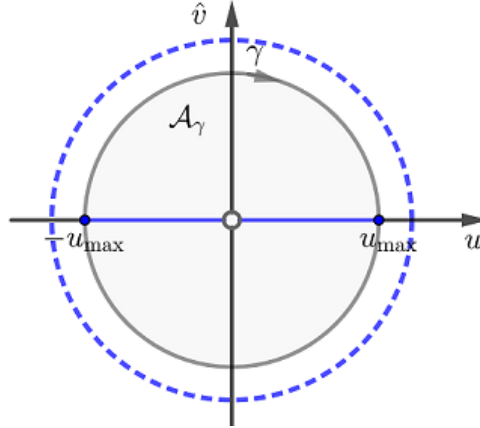


Figura 4.19: Ilustração

Por hipótese, \hat{X} é de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $[-u_{\max}, u_{\max}] \times \mathbb{R}$ e, consequentemente, $T_G(u)$ é contínua em $[-u_{\max}, u_{\max}]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $[-u_{\max}, u_{\max}] \setminus \{0\}$. Por (4.57), temos que $\hat{H}(u_{\max}, 0) = \hat{H}(-u_{\max}, 0) = G(u_{\max}) := h_0$ e, consequentemente, a função $\tilde{T}_G(h)$ definida em função dos níveis $\hat{H} = h$ é contínua em $[0, h_0]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, h_0]$ e vale a relação $T_G(u) = \tilde{T}_G \circ \hat{H}(u, 0) = \tilde{T}_G \circ G(u)$ para todo u em $[-u_{\max}, u_{\max}]$.

Com essas informações em mente, vamos iniciar a demonstração do Teorema 4.0.2, começando pela construção do campo (4.60).

4.2.1 Construção do campo 4.60

O campo (4.60) é determinado pela função potencial V . Assim, precisamos construir uma função V que tenha as propriedades requeridas. Para isso, provaremos o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Seja $[-u_{\max}, u_{\max}] \times \{0\}$ a intersecção de \mathcal{A}_γ com o eixo u e seja $T_G(u)$ a função período de (4.56) parametrizada por $u \in [-u_{\max}, u_{\max}]$. Então existem um intervalo simétrico $[-x_{\max}, x_{\max}]$, um difeomorfismo $\varphi : [-u_{\max}, u_{\max}] \rightarrow [-x_{\max}, x_{\max}]$ e uma função par V definida em $[-x_{\max}, x_{\max}]$ tais que:*

- (i) *O difeomorfismo φ é de classe C^1 em $[-u_{\max}, u_{\max}]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ em $[-u_{\max}, u_{\max}] \setminus \{0\}$ com $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [-u_{\max}, u_{\max}]$;*
- (ii) *A função V é de classe C^1 em $[-x_{\max}, x_{\max}]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ em $[-x_{\max}, x_{\max}] \setminus \{0\}$ com $V(0) = V'(0) = 0$ e $xV'(x) > 0$ para todo $x \in [-x_{\max}, x_{\max}] \setminus \{0\}$;*
- (iii) *A função V é derivável em $x = 0$ com $V''(0) > 0$.*

Nessas condições, o campo (4.60) tem um centro não degenerado em $(0, 0)$ e vale a seguinte igualdade

$$T_V(x) = T_G(\varphi^{-1}(x)), \quad (4.61)$$

onde $T_V(x)$ é a função período do centro (4.60) parametrizada por $x \in [-x_{\max}, x_{\max}]$.

A fim de compreender o Teorema 4.2.1, considere uma órbita de (4.56) em \mathcal{A}_γ . Essa órbita corta o eixo u em um ponto $(u_0, 0)$ e tem período igual a $T_G(u_0)$. O Teorema 4.2.1 nos diz que existe um ponto $x_0 \in [-x_{\max}, x_{\max}]$ tal que a órbita de (4.60) em \mathcal{A}_V que corta o eixo x em $(x_0, 0)$ tem período igual a $T_G(u_0)$, onde $x_0 = \varphi(u_0)$ (ver figura 4.18). Esse resultado será crucial na construção do difeomorfismo que conjuga os campos (4.56) e (4.60).

Demonstração. A demonstração do Teorema 4.2.1 é construtiva e as funções períodos T_G e \tilde{T}_G são os ingredientes principais da demonstração. A demonstração será dividida em dois lemas, sendo o primeiro lema a parte fundamental da demonstração. Antes, faremos mais uma simplificação.

Uma vez que \mathcal{A}_γ é simétrico, temos que $T_G(-u) = T_G(u)$ e, portanto, podemos considerar T_G definida em função $u \in [0, u_{\max}]$. Nos dois lemas seguintes vamos considerar a função de meio período $\mathbb{T}(u) = T_G(u)/2$ parametrizada por $u \in [0, u_{\max}]$. Com essa notação, temos que $\tilde{\mathbb{T}}(E) = \tilde{T}_G(E)/2$, onde $\tilde{\mathbb{T}}$ é a função de meio período parametrizada pelos níveis $\hat{H} = E$.

Como foi visto na seção (2.6.2) o problema de determinar a função potencial a partir de uma função de meio período $\tilde{\mathbb{T}}(E)$ é reduz-se a mostrar que a função \mathbf{x} definida pela a equação de Abel

$$\mathbf{x}(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\tilde{\mathbb{T}}(s) ds}{\sqrt{E-s}} \quad (4.62)$$

tem derivada positiva em um intervalo da forma $(0, E_0]$, com E_0 suficientemente grande. Nesse caso sabemos que $\mathbf{x}(E)$ é tão regular em $(0, E_0]$ quanto a função $\tilde{\mathbb{T}}(E)$. No entanto, é possível que se tenha $\mathbf{x}'(E) \leq 0$ em $(0, E_0]$ quando a derivada de $\tilde{\mathbb{T}}(E)$ for negativa.

Por outro lado, vimos, também, que se considerarmos a função de meio período em função das meias amplitudes $\mathbb{T}(u)$, a equação não linear

$$\zeta(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\mathbb{T}(\zeta(s)) ds}{\sqrt{E-s}} \quad (4.63)$$

possui uma solução ζ definida em um intervalo $[0, E_0]$ com $\zeta'(E) > 0$ para todo $E \in (0, E_0]$ (ver Teorema (2.6.9)). Nesse caso a função potencial desejada é dada por $\zeta^{-1}(x)$. Porém, não sabemos se a solução ζ é mais regular do que C^1 em $(0, E_0]$, mesmo supondo que \mathbb{T} é de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, u_{\max}]$.

No próximo lema vamos mostrar que, para nosso caso, é possível contornar o problema da positividade da derivada de $\mathbf{x}(E)$ trocando $\tilde{\mathbb{T}}(E)$ em (4.62) por $\tilde{\mathbb{T}}(b(E))$, onde $b(E)$ é uma função apropriada. Para isso, vamos usar, fortemente, o fato da equação (4.63) ter uma solução de classe C^1 em $(0, E_0]$ com $\zeta'(E) > 0$ para todo $E \in (0, E_0]$.

Lema 4.2.2. *Sejam $\mathbb{T} : [0, u_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ parametrizada em termos de $u \in [0, u_{\max}]$, $h_0 := G(u_{\max}) > 0$ e $\tilde{\mathbb{T}} : [0, h_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ parametrizada em termos dos níveis de energia $G(u) = h \in [0, h_0]$. Então, existem $E_0 > 0$ e um difeomorfismo $b : [0, E_0] \rightarrow [0, h_0]$ de classe C^1 em $[0, E_0]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, E_0]$ tal que a função \mathbf{x} definida em $[0, E_0]$ por*

$$\mathbf{x}(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\tilde{\mathbb{T}} \circ b(s) ds}{\sqrt{E-s}} \quad (4.64)$$

é contínua em $[0, E_0]$ e de classe C^r em $(0, E_0]$ com $\mathbf{x}'(E) > 0$ para todo $E \in (0, E_0]$ e $\lim_{E \rightarrow 0^+} \mathbf{x}'(E) = +\infty$.

É bom deixar claro que a finalidade do lema é mostrar que sempre é possível obter uma função $\mathbf{x}(E)$ em $[0, E_0]$ tal que $\mathbf{x}'(E) > 0$ em $(0, E_0]$ para E_0 suficientemente grande. Se $\tilde{\mathbb{T}}(E)$

for não decrescente, ou seja, se $\tilde{T}'(E) \geq 0$, então $\mathbf{x}'(E) > 0$ e, nesse caso, a função $b(E)$ é a função identidade, ou seja, $b(E) = E$. Se $\tilde{T}'(E) \geq 0$ pode ocorrer $\mathbf{x}'(E) < 0$ em $(0, E_0]$ para E_0 suficientemente grande e, nesse caso, $b(E)$ não é, necessariamente, a função identidade.

Demonstração. A demonstração se resume a encontrar o difeomorfismo $b(E)$ que torna as conclusões do lema verdadeiras.

Por hipótese, $T(u)$ e $\tilde{T}(h)$ são contínuas em $[0, u_{\max}]$ e $[0, h_0]$ respectivamente e de classe C^r em $(0, u_{\max}]$ e $(0, h_0]$ respectivamente. Além disso, vale a igualdade

$$T(u) = \tilde{T} \circ G_+(u), \quad (4.65)$$

onde G_+ é a restrição da função G ao intervalo $[0, u_{\max}]$. Uma vez que $T(u)$ é, em particular, lipschitz contínua em $[0, u_{\max}]$, pelo Teorema (2.6.9), existem $E_0 > 0$ e uma solução $\zeta(E)$ da equação (4.63) definida em $[0, E_0]$ tal que $\zeta(0) = 0$ e $\zeta(E_0) = u_{\max}$. Além disso, $u = \zeta(E)$ é contínua em $[0, E_0]$, de classe C^1 em $(0, E_0]$ com $\zeta'(E) > 0$ para todo $E \in (0, E_0]$ e

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \zeta'(E) = \frac{\sqrt{2}T(0)}{2\pi}. \quad (4.66)$$

Agora, como $G_+(u) = h \in [0, h_0]$ para todo $u \in [0, u_{\max}]$, temos que $u = G_+^{-1}(h)$ e, identificando, $\zeta(E) = u = G_+^{-1}(\tilde{E})$, obtemos

$$h = G_+(\zeta(E)) := \beta(E),$$

para todo $E \in [0, E_0]$ (ver fig. 4.20). Logo,

$$\tilde{T}(h) = \tilde{T}(\beta(E)) = \tilde{T}(G_+(\zeta(E))) = T(\zeta(E))$$

e, conseqüentemente,

$$\tilde{T}(\beta(E)) = T(\zeta(E)) \quad \text{e} \quad \tilde{T}(0) = T(0). \quad (4.67)$$

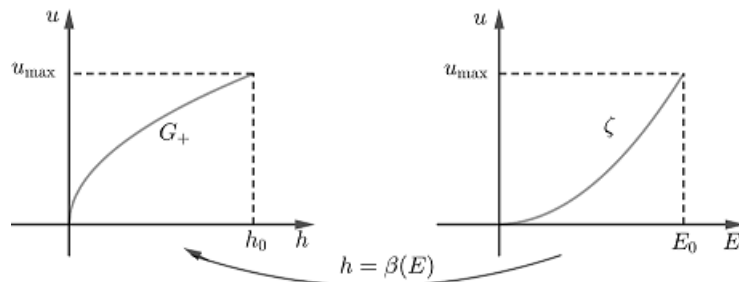


Figura 4.20: Construção de β .

Afirmção 4.2.1. A função $\beta : [0, E_0] \rightarrow [0, h_0]$ é de classe C^1 em $[0, E_0]$ com $\beta'(E) > 0$ para todo E em $[0, E_0]$.

De fato, como G é de classe C^r em $[0, u_{\max}]$ e ζ é de classe C^1 em $(0, E_0]$, segue que $\beta = G_+ \circ \zeta$ é de classe C^1 em $(0, E_0]$ com $\beta'(E) = G'_+(\zeta(E))\zeta'(E) > 0$ para todo E em $(0, E_0]$, pois G'_+ e ζ' são positivas em $(0, E_0]$. Assim, basta mostrar que β é C^1 em 0 e que $\beta'(0) > 0$.

Por (4.58), temos que $G(0) = G'(0) = 0$ e $G''(0) > 0$. Logo, $G_+(u) = G''_+(0)u^2/2 + o(u^3)$ e, conseqüentemente,

$$G'_+(u) = G''_+(0)u + o(u^2).$$

Decorre da equação (4.63) que

$$\zeta(E) = \frac{\sqrt{2\mathbb{T}(0)}}{2\pi} \sqrt{E} + o(E).$$

Logo que

$$\beta'(E) = G'_+(\zeta(E))\zeta'(E) = \frac{G''_+(0)\sqrt{2\mathbb{T}(0)}}{2\pi} \sqrt{E}\zeta'(E) + o(E).$$

Segue da última igualdade e da igualdade (4.66) que

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \beta'(E) = \frac{G''_+(0)\sqrt{2\mathbb{T}(0)}}{2\pi} \lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E}\zeta'(E) = \frac{G''_+(0)\sqrt{2\mathbb{T}(0)}}{2\pi} \frac{\sqrt{2\mathbb{T}(0)}}{2\pi} = G''_+(0) \left(\frac{\mathbb{T}(0)}{2\pi} \right)^2 > 0.$$

Por outro lado, como $\beta(E)$ é contínua em 0, com $\beta(0) = 0$, temos que $\lim_{E \rightarrow 0^+} \beta(E)/E = 0/0$.

Usando L'Hôpital, obtemos que

$$\beta'(0) = \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\beta(E)}{E} = \lim_{E \rightarrow 0^+} \beta'(E) = G''_+(0) \left(\frac{\mathbb{T}(0)}{2\pi} \right)^2.$$

Portanto

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \beta'(E) = \beta'(0) = G''_+(0) \left(\frac{\mathbb{T}(0)}{2\pi} \right)^2 > 0.$$

Com isso, concluímos que β é de classe C^1 em $[0, E_0]$ com $\beta'(E) > 0$ para todo $E \in [0, E_0]$.

Uma vez que $\beta : [0, E_0] \rightarrow [0, h_0]$ é de classe C^1 , $\beta(E)$ pode ser aproximada na topologia C^1 por funções de classe C^r , $r \in \{k \geq 2, \infty, \omega\}$. Esse será nosso próximo passo.

Afirmção 4.2.2. Dado $\epsilon > 0$, existe $b_\epsilon : [0, E_0] \rightarrow [0, \tilde{E}_0]$ de classe C^1 em $[0, E_0]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, E_0]$ tal que:

- i) $b_\epsilon(0) = \beta(0) = 0$ e $b'_\epsilon(0) = \beta'(0)$;
- ii) $|b_\epsilon(E) - \beta(E)| < \epsilon$, $\forall E \in [0, E_0]$;
- iii) $|b'_\epsilon(E) - \beta'(E)| < \epsilon$, $\forall E \in [0, E_0]$;
- (iv) $b'_\epsilon(E) > 0$ para todo $E \in [0, E_0]$.

De fato, como $\beta(E)$ é C^1 em $[0, E_0]$, $\beta'(E)$ é contínua em $[0, E_0]$. Logo, dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema de Aproximação de Weierstras ([Bar76], Teorema 24.8), existe uma função $b'_\epsilon(E)$ de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $[0, E_0]$ tal que $b'_\epsilon(0) = \beta'(0)$ e $|\beta'(E) - b'_\epsilon(E)| < \epsilon/E_0$ para todo $E \in [0, E_0]$. Definimos $b_\epsilon(E)$ em $[0, E_0]$ por $b_\epsilon(E) = \int_0^E b'_\epsilon(s) ds$. Assim, $b_\epsilon(0) = \beta(0) = 0$ e

$$|\beta(E) - b_\epsilon(E)| = \left| \int_0^E (\beta'(s) - b'_\epsilon(s)) ds \right| \leq \int_0^E |\beta'(s) - b'_\epsilon(s)| < \int_0^E \epsilon/E_0 ds = E\epsilon/E_0 < \epsilon.$$

Além disso, como $\beta'(E) > 0$ é contínua em $[0, E_0]$, é possível escolher o ϵ de tal forma que $b'_\epsilon(E) > 0$ para todo $E \in [0, E_0]$.

Agora, como \tilde{T} e b_ϵ são funções contínuas em $[0, E_0]$ e $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, E_0]$, a função $\tilde{T} \circ b_\epsilon$ é contínua em $[0, E_0]$ e de classe $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ em $(0, E_0]$. Seja \mathbf{x}_ϵ definida em $[0, E_0]$ por

$$\mathbf{x}_\epsilon(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\tilde{T} \circ b_\epsilon(s) ds}{\sqrt{E-s}}. \quad (4.68)$$

Observe que a função $b_\epsilon(E)$ é candidata a função $b(E)$ que estamos procurando. A seguir, vamos verificar se com essa $b_\epsilon(E)$ a função $\mathbf{x}_\epsilon(E)$ satisfaz as conclusões do lema.

Afirmção 4.2.3. É possível escolher o ϵ da afirmação 4.2.2 de tal forma que:

- (i) $\mathbf{x}_\epsilon(E)$ é contínua em $[0, E_0]$ e de classe $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ em $(0, E_0]$;
- (ii) $\mathbf{x}'_\epsilon(E) > 0$ para todo E em $(0, E_0]$;
- (iii) $\lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \mathbf{x}'_\epsilon(E) = \frac{\sqrt{2}\tilde{T}(0)}{2\pi}$.

O item (i) segue, imediatamente, da Proposição 2.6.7. Para o item (ii), temos, pela a equação (4.68), que

$$\mathbf{x}'_\epsilon(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left[\frac{\tilde{T}(0)}{\sqrt{E}} + \int_0^E \frac{(\tilde{T} \circ b_\epsilon(s))' ds}{\sqrt{E-s}} \right]. \quad (4.69)$$

Seque de (4.63) e (4.67) que

$$\zeta(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\mathbf{T}(\zeta(s)) ds}{\sqrt{E-s}} \stackrel{(4.67)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\tilde{T} \circ \beta(s) ds}{\sqrt{E-s}} \quad (4.70)$$

e, conseqüentemente,

$$\zeta'(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left[\frac{\tilde{T}(0)}{\sqrt{E}} + \int_0^E \frac{(\tilde{T} \circ \beta(s))' ds}{\sqrt{E-s}} \right]. \quad (4.71)$$

De (4.69) e (4.71) obtemos que

$$\mathbf{x}'_\epsilon(E) - \zeta'(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{(\tilde{T} \circ b_\epsilon(s) - \tilde{T} \circ \beta(s))' ds}{\sqrt{E-s}} := \Delta_\epsilon(E).$$

Logo

$$\mathbf{x}'_\epsilon(E) = \zeta'(E) + \Delta_\epsilon(E). \quad (4.72)$$

Mostraremos, a seguir, que é possível escolher o ϵ de tal forma que $\Delta_\epsilon(E)$ seja pequeno o suficiente para que $\mathbf{x}'_\epsilon(E) > 0$ em $(0, E_0]$. Para isso, sejam $M_1 = \max_{0 \leq E \leq E_0} |\beta'(E)|$, $M_2 = \max_{\delta \leq E \leq E_0} |\tilde{T}'(b_\epsilon(E))|$ e $M = \max\{M_1, M_2\}$, em que $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Temos que

$$\begin{aligned} (\tilde{T} \circ b_\epsilon(s) - \tilde{T} \circ \beta(s))' &= \tilde{T}'(b_\epsilon(s))b'_\epsilon(s) - \tilde{T}'(\beta(s))\beta'(s) \\ &= \tilde{T}'(b_\epsilon(s))b'_\epsilon(s) - \tilde{T}'(b_\epsilon(s))\beta'(s) + \tilde{T}'(b_\epsilon(s))\beta'(s) - \tilde{T}'(\beta(s))\beta'(s). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |(\tilde{\mathbf{T}} \circ b_\epsilon(s) - \tilde{\mathbf{T}} \circ \beta(s))'| &\leq |\tilde{\mathbf{T}}'(b_\epsilon(s))| |b'_\epsilon(s) - \beta'(s)| + |\beta'(s)| |\tilde{\mathbf{T}}'(b_\epsilon(s)) - \tilde{\mathbf{T}}'(\beta(s))| \\ &\leq M(|b'_\epsilon(s) - \beta'(s)| + |\tilde{\mathbf{T}}'(b_\epsilon(s)) - \tilde{\mathbf{T}}'(\beta(s))|). \end{aligned}$$

Agora, diminuindo o valor de ϵ (se necessário), podemos tomar $|b'_\epsilon(s) - \beta'(s)| < \pi\epsilon/(2M\sqrt{2E_0})$ (pelo Teorema de aproximação) e $|\tilde{\mathbf{T}}'(b_\epsilon(s)) - \tilde{\mathbf{T}}'(\beta(s))| < \pi\epsilon/(2M\sqrt{2E_0})$ (usando a continuidade de $\tilde{\mathbf{T}}'$). Segue que $|(\tilde{\mathbf{T}} \circ b_\epsilon(s) - \tilde{\mathbf{T}} \circ \beta(s))'| < \pi\epsilon/(\sqrt{2E_0})$ e, conseqüentemente,

$$|\Delta_\epsilon(E)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{|(\tilde{\mathbf{T}} \circ b_\epsilon(s) - \tilde{\mathbf{T}} \circ \beta(s))'| ds}{\sqrt{E-s}} < \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{\pi\epsilon}{\sqrt{2E_0}} \int_0^E \frac{ds}{\sqrt{E-s}} = \frac{2\epsilon\sqrt{E}}{2\sqrt{E_0}} < \epsilon,$$

pois $\sqrt{E} \leq \sqrt{E_0}$. Seja $M_0 = \min_{\delta \leq E \leq E_0} \zeta'(E) > 0$. Escolhendo ϵ tal que $|\Delta_\epsilon(E)| < M_0$ para todo $[\delta, E_0]$, teremos

$$\mathbf{x}'_\epsilon(E) = \zeta'(E) + \Delta_\epsilon(E) > 0 \quad \text{em } [\delta, E_0].$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0^+$, obtemos que $\mathbf{x}'_\epsilon(E) > 0$ para todo $(0, E_0]$. Com isso, concluímos a demonstração do item (ii). Finalmente,

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \mathbf{x}'_\epsilon(E) = \lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \zeta'(E) + \lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \Delta_\epsilon(E) = \lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \zeta'(E) \stackrel{(4.66)}{=} \frac{\sqrt{2}\mathbf{T}(0)}{2\pi}.$$

Com isso, concluímos a demonstração do item (iii).

Finalmente, seja $b(E)$ definida em $[0, E_0]$ pela função $b_\epsilon(E)$ construída pelo procedimento acima. Dessa forma, $b(E)$ é C^1 em $[0, E_0]$ e $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ em $(0, E_0]$ com $b'(E) > 0$ para todo $E \in [0, E_0]$ e a função $\mathbf{x}(E)$ definida em $[0, E_0]$ por

$$\mathbf{x}(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\tilde{\mathbf{T}} \circ b(s) ds}{\sqrt{E-s}} \quad (4.73)$$

é contínua em $[0, E_0]$ e de classe $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ em $(0, E_0]$ com $\mathbf{x}'(E) > 0$ para todo $E \in (0, E_0]$. Além disso,

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \sqrt{E} \mathbf{x}'(E) = \frac{\sqrt{2}\mathbf{T}(0)}{2\pi}. \quad (4.74)$$

De (4.74) segue que $\lim_{E \rightarrow 0^+} \mathbf{x}'(E) = +\infty$ e, com isso, concluímos a demonstração do Lema 4.2.2. \square

Note que a função $\mathbf{x}(E)$ definida em (4.73) satisfaz as hipóteses da Proposição 2.6.7 para a função de meio período $\tilde{\mathbf{T}} \circ b(E)$. Logo, o potencial V_+ definido por $V_+(x) = \mathbf{x}_+^{-1}(x)$ é de classe C^1 em $[0, x_{\max}]$ e de classe C^r em $(0, x_{\max}]$ com $V_+(0) = V'_+(0) = 0$, onde $x_{\max} = \mathbf{x}_+^{-1}(E_0)$. Além disso, $\tilde{\mathbf{T}}_{V_+}(E) = \tilde{\mathbf{T}} \circ b(E)$, onde $\tilde{\mathbf{T}}_{V_+}$ é a função de meio período parametrizada por $V_+(x) = E$.

Lema 4.2.3. *Seja $\mathbf{T} : [0, u_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ como no Lema 4.2.2. Então existem um intervalo $[0, x_{\max}]$, um difeomorfismo $\varphi_+ : [0, u_{\max}] \rightarrow [0, x_{\max}]$ e um potencial V_+ de classe C^1 em $[0, x_{\max}]$ e de classe $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $[0, x_{\max}]$ tal que $\mathbf{T}_{V_+}(x) = \mathbf{T}(\varphi_+^{-1}(x))$, onde \mathbf{T}_{V_+} e a função de meio período parametrizada por $x \in [0, x_{\max}]$.*

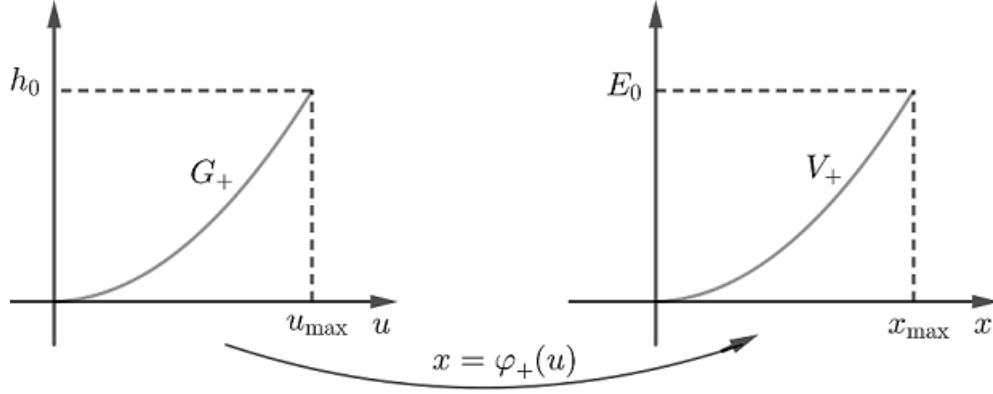


Figura 4.21: Construção de φ_+ .

Demonstração. Seja V_+ definida em $[0, x_{\max}]$ por $V_+(x) = \mathbf{x}^{-1}(x)$, onde \mathbf{x} é função definida por (4.73). Pelo Lema 4.2.2, temos que $\tilde{T}_{V_+}(E) = \tilde{T} \circ b(E)$. Dado $u \in [0, u_{\max}]$, seja $h = H(u, 0) = G_+(u)$. Como vimos acima, existe $E_0 > 0$ e $b(E)$ definida em $[0, E_0]$ tal que $h = b(E)$. Como $b(E)$ é invertível, temos que $V_+(x) = E = b^{-1}(h) = b^{-1}(G_+(u))$ e, portanto,

$$x = \mathbf{x} \circ b^{-1} \circ G_+(u) := \varphi_+(u). \quad (4.75)$$

Por construção, φ_+ é (pelo menos) contínua em $[0, u_{\max}]$ com $\varphi_+(0) = 0$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, u_{\max}]$ com $\varphi'_+(u) > 0$ em $(0, u_{\max}]$. Mostraremos a seguir que $\varphi'_+(u)$ é contínua em $u = 0$ com $\varphi'_+(0) > 0$. Para isso, note que

$$\varphi'_+(u) = \mathbf{x}'(b^{-1}(G_+(u)))(b^{-1})'(G_+(u))G'_+(u),$$

para todo $u > 0$. Para $u > 0$ próximo de zero ($u \approx 0$), temos que

$$\begin{aligned} G_+(u) &\approx G''_+(0)u^2/2 \\ b(E) &\approx b'(0)E = \beta'(0)E \\ b^{-1}(E) &\approx \frac{1}{\beta'(0)}E \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} b^{-1}(G_+(u)) &\approx \frac{G''_+(0)}{2\beta'(0)}u^2 \\ (b^{-1})'(G_+(u)) &\approx \frac{1}{\beta'(0)} \\ G'_+(u) &\approx G''_+(0)u. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi'_+(u) &= \mathbf{x}'(b^{-1}(G_+(u)))(b^{-1})'(G_+(u))G'_+(u) \\ &\approx \mathbf{x}'\left(\frac{G''_+(0)}{2\beta'(0)}u^2\right)\frac{1}{\beta'(0)}G''_+(0)u \\ &\approx \mathbf{x}'\left(\frac{G''_+(0)}{2\beta'(0)}u^2\right)\frac{G''_+(0)}{\beta'(0)}u. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = \frac{G_+''(0)}{2\beta'(0)}u^2$, obtemos que $t \rightarrow 0^+$ quando $u \rightarrow 0^+$ e, além disso,

$$\mathbf{x}'\left(\frac{G_+''(0)}{2\beta'(0)}u^2\right)\frac{G_+''(0)}{\beta'(0)}u = \frac{\sqrt{2\beta'(0)G_+''(0)}}{\beta'(0)}\mathbf{x}'(t)\sqrt{t}.$$

Logo,

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \varphi'_+(u) = \frac{\sqrt{2\beta'(0)G_+''(0)}}{\beta'(0)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t}\mathbf{x}'(t) \stackrel{(4.74)}{=} \frac{\sqrt{2\beta'(0)G_+''(0)}}{\beta'(0)} \frac{\sqrt{2\mathbf{T}(0)}}{2\pi} > 0. \quad (4.76)$$

Agora, como $\varphi(0) = 0$, temos que $\lim_{u \rightarrow 0^+} \varphi(u)/u = 0/0$ e, conseqüentemente,

$$\varphi'_+(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \varphi'_+(u) = \frac{\sqrt{2\beta'(0)G_+''(0)}}{\beta'(0)} \frac{\sqrt{2\mathbf{T}(0)}}{2\pi}.$$

Portanto, $\varphi'_+(u)$ é contínua em $u = 0$. Com isso, podemos concluir que $\varphi_+(u)$ é de classe C^1 em $[0, u_{\max}]$ e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $(0, u_{\max}]$, com $\varphi_+(0) = 0$ e $\varphi'_+(u) > 0$ para todo u em $[0, u_{\max}]$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{V_+}(x) &= \tilde{\mathbf{T}}_{V_+} \circ V_+(x) = \tilde{\mathbf{T}} \circ b \circ V_+(x) = \tilde{\mathbf{T}} \circ b \circ V_+(\varphi_+(u)) = \tilde{\mathbf{T}} \circ b \circ V_+ \circ \mathbf{x} \circ b^{-1} \circ G_+(u) \\ &= \tilde{\mathbf{T}} \circ G_+(u) = \mathbf{T}(u) = \mathbf{T}(\varphi_+^{-1}(x)), \end{aligned}$$

para todo x em $[0, x_{\max}]$. □

Com esses resultados podemos concluir a demonstração do Teorema 4.2.1. Recordamos que $T_G(u) = 2\mathbf{T}(u)$, com \mathbf{T} parametrizada por $u \in [0, u_{\max}]$. Seja V definida em $[-x_{\max}, x_{\max}]$ por $V(x) = V_+(|x|)$, onde V_+ é a função obtida no Lema 4.2.3. Note que V é par e, conseqüentemente, $T_V(-x) = T_V(x)$. Logo $T_V(x) = 2\mathbf{T}_{V_+}(x)$ onde $\mathbf{T}_{V_+}(x)$, $x \in [0, x_{\max}]$, é a função dada pelo Lema 4.2.3. Seja, ainda, $\varphi : [-u_{\max}, u_{\max}] \rightarrow [-x_{\max}, x_{\max}]$ o difeomorfismo definido por

$$\varphi(u) = \begin{cases} \varphi_+(u) & \text{se } u \geq 0, \\ -\varphi_+(-u) & \text{se } u < 0, \end{cases} \quad (4.77)$$

onde $\varphi_+(u)$ é o difeomorfismo definido em (4.75). Dessa forma, φ é de classe C^1 em $[-u_{\max}, u_{\max}]$, com $\varphi(0) = 0$, e de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, em $[-u_{\max}, u_{\max}] \setminus \{0\}$ com $\varphi'(u) > 0$ em $[-u_{\max}, u_{\max}]$. Note que φ é ímpar. Segue que

$$T_V(x) = 2\mathbf{T}_{V_+}(x) = 2\mathbf{T}(\varphi_+^{-1}(x)) = 2\mathbf{T}(u) = T_G(u) = T_G(\varphi^{-1}(x)). \quad (4.78)$$

Além disso, por definição, temos que $V(0) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = 0$ e

$$V'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbf{x}'(\mathbf{x}^{-1}(x))} & \text{se } x > 0, \\ -\frac{1}{\mathbf{x}'(\mathbf{x}^{-1}(-x))} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por (4.2.3), temos que $\mathbf{x}'(E) \rightarrow +\infty$ quando $E \rightarrow 0^+$ e, conseqüentemente,

$$V'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathbf{x}'(\mathbf{x}^{-1}(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{\mathbf{x}'(\mathbf{x}^{-1}(-x))} = 0.$$

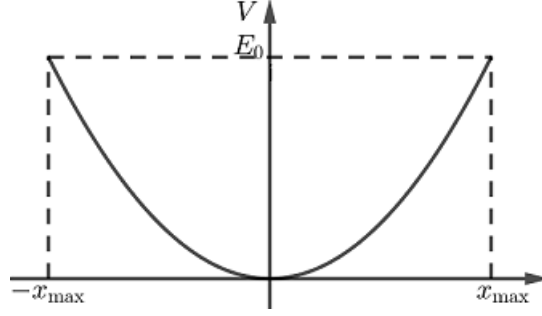


Figura 4.22: Definição de V em $[-x_{\max}, x_{\max}]$.

Finalmente,

$$V''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{V'(x) - V'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{V'(x)}{x}.$$

Para $x > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{V'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\mathbf{x}'(\mathbf{x}^{-1}(x))} = \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathbf{x}(E)\mathbf{x}'(E)} = \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{E}}{\mathbf{x}(E)} \cdot \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{E}\mathbf{x}'(E)} \\ &= \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{E}\mathbf{x}'(E)} \cdot \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{E}\mathbf{x}'(E)} \stackrel{(4.74)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}\mathbb{T}(0)} \right) \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}\mathbb{T}(0)} \right) = \left(\frac{\pi}{\mathbb{T}(0)} \right)^2 \end{aligned}$$

Analogamente, para $x < 0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{V'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x\mathbf{x}'(\mathbf{x}^{-1}(x))} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s\mathbf{x}'(\mathbf{x}^{-1}(s))} = \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathbf{x}(E)\mathbf{x}'(E)} = \left(\frac{\pi}{\mathbb{T}(0)} \right)^2.$$

Logo,

$$V''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{V'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{V'(x)}{x} = \left(\frac{\pi}{\mathbb{T}(0)} \right)^2 > 0.$$

Por fim, como V é estritamente crescente em $(0, x_{\max}]$ e estritamente decrescente em $[-x_{\max}, 0)$, segue que

$$xV'(x) > 0, \forall x \in [-x_{\max}, x_{\max}] \setminus \{0\}.$$

Com isso concluímos a demonstração do Teorema (4.2.1). \square

Finalmente, o campo vetorial hamiltoniano

$$Y(x, y) = y\partial_x - V'(x)\partial_y, \quad (4.79)$$

onde V é o potencial do Teorema (4.2.1) possui os requisitos necessários para a construção do difeomorfismo que conjuga os campos hamiltonianos \hat{X} e Y .

4.2.2 Construção do difeomorfismo

Sejam $I = [-u_{\max}, u_{\max}]$ a interseção do anel periódico \mathcal{A}_γ com o eixo u e $T_G(u)$ a função período parametrizada por $u \in I$. Pelo Teorema 4.2.1 existem um $J = [-x_{\max}, x_{\max}]$, um difeomorfismo $\varphi : I \rightarrow J$ e um potencial par V definido em J tal que tal que $T_V(x) = T_G(\varphi^{-1}(x))$ para todo $x \in J$ ou, equivalentemente, $T_G(u) = T_V(\varphi(u))$ para todo $u \in I$, onde T_V é a função período do campo (4.79) parametrizada por $x \in J$. Para o que segue,

denotaremos por I_+, I_-, J_+ e J_- os subintervalos $[-u_{\max}, 0), (0, u_{\max}]$, $[-x_{\max}, 0)$ e $(0, x_{\max}]$ respectivamente.

Sejam ϕ_t o fluxo do campo vetorial \hat{X} definido em (4.56) e ψ_t o fluxo do campo vetorial Y definido em (4.79). Dado um ponto $p = (u, \hat{v}) \in \mathcal{A}_\gamma$, definimos $\tau(p)$ como o único valor de tempo tal que $(u_0, 0) = \phi_\tau(p) \in I_+ \times \{0\}$ e $\phi_s(p) \in \mathcal{A}_\gamma$ para todo $s \in (0, \tau)$.

Afirmção 4.2.4. A função $\tau : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$.

De fato, seja $\phi_t(p)$ a solução de X com condição inicial p . Uma vez que $\tau(p)$ mede o tempo que $\phi_t(p)$ leva para tocar $I_+ \times \{0\}$, segue que $\tau(p)$ é dada implicitamente por $\langle \xi, X(\xi) \rangle \Big|_{\xi=\phi_{\tau(p)}(p)} = 0$. Consideremos a função $F \in C^r(\mathbb{R} \times \mathcal{A}_\gamma, \mathbb{R})$ definida por

$$F(t, p) = \langle \phi_t(p), X(\xi) \rangle.$$

Note que $F(\tau(p), p) = 0$ e

$$\begin{aligned} \partial_t F(\tau(p), p) &= \partial_t F(t, p) \Big|_{t=\tau(p)} = \langle \partial_t \phi_t(p), X(\xi) \rangle \Big|_{t=\tau(p)} = \langle X(\phi_t(p)), X(\xi) \rangle \Big|_{t=\tau(p)} \\ &= \langle X(\xi), X(\xi) \rangle = |X(\xi)|^2 > 0. \end{aligned}$$

A conclusão da afirmação segue do Teorema da Função Implícita.

Agora, definimos $\Phi_+ : \mathcal{A}_\gamma \setminus I_- \times \{0\} \rightarrow \mathcal{A}_V$ por

$$q = (x, y) = \Phi_+(p) = \psi_{-\tau(p)} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau(p)}(p), \quad (4.80)$$

em que $\sigma_+(u, 0) = (\varphi_+(u), 0)$ com $u \in I_+$ e φ_+ é o difeomorfismo definido em (4.75). Uma vez que ϕ_t, ψ_t, σ_+ e τ são funções de classe $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, segue que Φ_+ é de classe $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. Além disso, temos que $T_G(u) = T_V(\varphi(u))$, ou seja, o período $T_V(x)$ da órbita periódica de Y que passa pelo ponto $q = (x, y)$ parametrizado por $x = \varphi_+(u)$ é igual ao período $T_G(u)$ da órbita periódica de X que passa pelo ponto $p = (u, v)$ parametrizado por u .

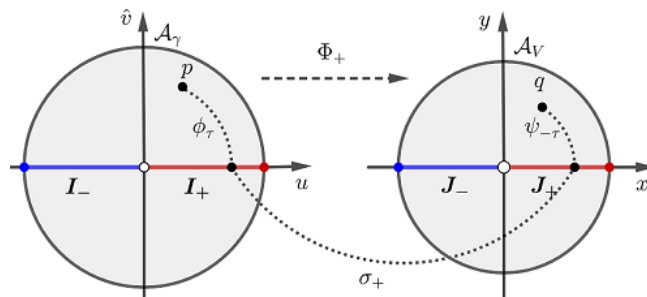


Figura 4.23: Construção de Φ_+ .

Afirmção 4.2.5. A aplicação $q = \Phi_+(p)$ admite uma inversa $p = \Phi_+^{-1}(q)$ de classe $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$.

De fato, seja $\tilde{\tau}(q)$ o único valor de tempo tal que $(x_0, 0) = \psi_{\tilde{\tau}(q)}(q) \in J_+ \times \{0\}$ e $\psi_s(q) \in \mathcal{A}_V$ para todo $s \in (0, \tilde{\tau})$. Temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{A}_V \rightarrow \mathbb{R}$ é $C^r, r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ e satisfaz

$$\tau(p) = \tilde{\tau}(q) = \tilde{\tau} \circ \Phi_+(p).$$

De fato, por definição $\psi_{-\tilde{\tau}(q)}(q) = \sigma_+ \circ \phi_{\tau(p)}(p)$. Aplicando $\psi_{-\tau(p)}$ em ambos os lados da última igualdade, obtemos

$$\psi_{-\tau(p)} \circ \phi_{-\tilde{\tau}(q)}(q) = \psi_{-\tau(p)} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau(p)}(p) = q.$$

Logo, $\tau(p) = \tilde{\tau}(q) = \tilde{\tau} \circ \Phi_+(p)$. Para mostrar que Φ_+ é injetiva, sejam p_1 e p_2 em \mathcal{A}_G tais que $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$. Como $\tau(p) = \tilde{\tau} \circ \Phi_+(p)$, segue que

$$\tau(p_1) = \tilde{\tau} \circ \Phi_+(p_1) = \tilde{\tau} \circ \Phi_+(p_2) = \tau(p_2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_1 &= \phi_{-\tau(p_1)} \circ \phi_{\tau(p_1)}(p_1) \\ &= \phi_{-\tau(p_1)} \circ \sigma_+^{-1} \circ \psi_{\tilde{\tau}(\Phi_+(p_1))}(\Phi_+(p_1)) \\ &= \phi_{-\tau(p_1)} \circ \sigma_+^{-1} \circ \psi_{\tilde{\tau}(\Phi_+(p_2))}(\Phi_+(p_2)) \\ &= \phi_{-\tau(p_1)} \circ \phi_{\tau(p_2)}(p_2) \\ &= p_2. \end{aligned}$$

Portanto, Φ_+ é injetiva. Agora, note que

$$\phi_{-\tilde{\tau} \circ \Phi_+(p)} \circ \sigma_+^{-1} \circ \psi_{\tilde{\tau} \circ \Phi_+(p)} \circ \Phi_+(p) = p,$$

donde concluímos que

$$p = \Phi_+^{-1}(q) = \phi_{-\tilde{\tau}(q)} \circ \sigma_+^{-1} \circ \psi_{\tilde{\tau}(q)}(q). \quad (4.81)$$

Afirmção 4.2.6. O difeomorfismo Φ_+ conjuga os fluxos de X e Y , ou seja, vale a seguinte propriedade:

$$\Phi_+ \circ \phi_t(p) = \psi_t \circ \Phi_+(p) \quad (4.82)$$

De fato, uma vez que $\phi_{\tau(p)}(p) \in I_+ \times \{0\}$ temos que $\tau(\phi_t(p)) = \tau(p) - t$ com $\phi_t(p) \in \mathcal{A}_V \setminus I_- \times \{0\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \Phi_+ \circ \phi_t(p) &= \psi_{-\tau \circ \phi_t(p)} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau \circ \phi_t(p)} \circ \phi_t(p) = \psi_{-\tau(p)+t} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau(p)-t} \circ \phi_t(p) \\ &= \psi_t \circ \psi_{-\tau(p)} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau(p)}(p) = \psi_t \circ \Phi_+(p). \end{aligned}$$

A igualdade (4.82) implica que

$$D\Phi_+(p)Y(p) = X(\Phi_+(p)) \quad \forall p \in \mathcal{A}_\gamma \setminus I_- \times \{0\}. \quad (4.83)$$

Afirmção 4.2.7. O difeomorfismo Φ_+ comuta com a involução linear $R(u, \hat{v}) = (u, -\hat{v})$, ou seja, vale a seguinte igualdade

$$\Phi_+ \circ R(p) = R \circ \Phi_+(p). \quad (4.84)$$

De fato, uma vez que X e Y são reversíveis em relação a R , temos que

$$\phi_t \circ R = R \circ \phi_{-t}, \quad \psi_t \circ R = R \circ \psi_{-t}, \quad \tau \circ R = -\tau, \quad \tilde{\tau} \circ R = -\tilde{\tau}.$$

Usando o fato que R atua como a identidade em $I_+ \times \{0\}$ temos

$$\begin{aligned}
 \Phi_+ \circ R(p) &= \psi_{-\tau \circ R(p)} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau \circ R(p)} \circ R(p) \\
 &= \psi_{\tau(p)} \circ \sigma_+ \circ \phi_{-\tau(p)} \circ R(p) \\
 &= \psi_{\tau(p)} \circ \sigma_+ \circ R \circ \phi_{\tau(p)}(p) \\
 &= \psi_{\tau(p)} \circ R \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau(p)}(p) \\
 &= R \circ \psi_{-\tau(p)} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau(p)}(p) \\
 &= R \circ \Phi_+(p),
 \end{aligned}$$

donde concluímos que R comuta com Φ_+ . Segue daí que $R(q) = \Phi_+ \circ R \circ \Phi_+^{-1}(q)$, para todo $q \in \mathcal{A}_V \setminus J_- \times \{0\}$.

Em suma, construímos um difeomorfismo $\Phi_+ : \mathcal{A}_\gamma \setminus I_- \times \{0\} \rightarrow \mathcal{A}_V \setminus J_- \times \{0\}$ de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, satisfazendo

$$\Phi_+ \circ \phi_t(p) = \psi_t \circ \Phi_+(p), \quad \Phi_+ \circ R(p) = R \circ \Phi_+(p), \quad \forall p \in \mathcal{A}_V \setminus I_- \times \{0\} \quad e \quad \lim_{p \rightarrow (0,0)} \Phi_+(p) = (0,0).$$

Analogamente, para um dado $p \in \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\}$, definimos $\hat{\tau}(p)$ como o único valor de tempo tal que $\phi_{\hat{\tau}(p)}(p) \in I_- \times \{0\}$ e $\phi_s(p) \in \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\}$ para todo $s \in (0, \hat{\tau}(p))$. Repetindo o mesmo argumento anterior, definimos Φ_- em $\mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\}$ por

$$q = \Phi_-(p) = \psi_{-\hat{\tau}(p)} \circ \sigma_- \circ \phi_{\hat{\tau}(p)}(p),$$

onde $\sigma_-(u, 0) = (\varphi_-(u), 0)$ e $\varphi_-(u)$ é a restrição do difeomorfismo φ definido em (4.77) ao intervalo I_- , ou seja, $\varphi_-(u) = -\varphi_+(-u)$. Dessa forma

$$\sigma_-(u, 0) = -\sigma_+(-u, 0), \quad \forall u \in I_-.$$

Seguindo o mesmo roteiro anterior, mostra-se que $\Phi_- : \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\} \rightarrow \mathcal{A}_V \setminus J_+ \times \{0\}$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, satisfazendo as mesmas propriedades de Φ_+ , isto é,

$$\Phi_- \circ \phi_t(p) = \psi_t \circ \Phi_-(p), \quad \Phi_- \circ R(p) = R \circ \Phi_-(p), \quad \forall p \in \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\} \quad e \quad \lim_{p \rightarrow (0,0)} \Phi_-(p) = (0,0).$$

Observe que $\mathcal{A}_\gamma \setminus I_- \times \{0\} \cup \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\} = \mathcal{A}_\gamma$. Definimos $\Phi : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}_V$ por

$$\Phi(p) := \begin{cases} \Phi_+(p), & p \in \mathcal{A}_\gamma \setminus I_- \times \{0\}, \\ (0,0), & p = (0,0), \\ \Phi_-(z), & p \in \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\}. \end{cases} \quad (4.85)$$

Afirmção 4.2.8. Se $p \in \mathcal{A}_\gamma \setminus I_- \times \{0\} \cap \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\}$ então $\Phi_+(p) = \Phi_-(p)$.

De fato, sem perda de generalidade, seja $p = (u, \hat{v}) \in \mathcal{A}_\gamma \setminus I_- \times \{0\} \cup \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\}$ com $\hat{v} > 0$ e $T = T_G$ o período da órbita periódica de X que passa pelo ponto p parametrizada

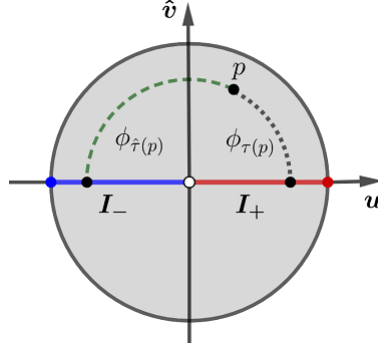


Figura 4.24: Definição de Φ .

por $(u, 0)$. Então $\tau(p) - \hat{\tau}(p) = T/2$, ou seja, $\tau(p) = T/2 + \hat{\tau}(p)$. Segue que

$$\begin{aligned}
 \Phi_+(p) &= \psi_{-\tau(p)} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\tau(p)}(p) \\
 &= \psi_{-\hat{\tau}(p)-T/2} \circ \sigma_+ \circ \phi_{\hat{\tau}(p)+T/2}(p) \\
 &= \psi_{-\hat{\tau}(p)} \circ \sigma_+ \circ \psi_{-T/2} \circ \phi_{\hat{\tau}(p)} \circ \phi_{T/2}(p) \\
 &= \psi_{-\hat{\tau}(p)} \circ \underbrace{\psi_{-T/2} \circ \sigma_+ \circ \phi_{T/2}}_{=\sigma_-} \circ \phi_{\hat{\tau}(p)}(p) \\
 &= \psi_{-\hat{\tau}(p)} \circ \sigma_- \circ \phi_{\hat{\tau}(p)}(p) = \Phi_-(p).
 \end{aligned}$$

Logo, Φ_+ e Φ_- coincidem em $\mathcal{A}_\gamma \setminus I_- \times \{0\} \cap \mathcal{A}_\gamma \setminus I_+ \times \{0\}$. Isso implica que $\Phi(p)$ dada em (4.85) está bem definida. Além disso, por construção, $\Phi : \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}_V$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, que satisfaz

$$\Phi \circ \phi_t(p) = \psi_t \circ \Phi(p), \quad \Phi \circ R(p) = R \circ \Phi(p), \quad \forall p \in \mathcal{A}_G \quad e \quad \Phi(0, 0) = (0, 0). \quad (4.86)$$

Além disso, Φ se estende continuamente para $(0, 0)$, ou seja, $\lim_{p \rightarrow (0,0)} \Phi(p) = \Phi(0, 0) = (0, 0)$.

Com isso, terminamos a demonstração do Teorema (4.0.2) para o caso em que \mathcal{A}_γ é simétrico em relação a o eixo \hat{v} .

Antes de passarmos para o caso geral, chamaremos a atenção para a seguinte questão.

Questão 4.2.1. Qual é a regularidade de Φ em $(0, 0)$? Será que Φ se estende analiticamente para $(0, 0)$? A solução dessa questão reduz-se a mostrar que o difeomorfismo Φ construído acima coincide, em uma vizinhança de $(0, 0)$, com o difeomorfismo ψ construído no caso analítico local (Teorema (3.0.2)). Em ambos os casos, os difeomorfismos comutam com a involução R . Essa informação pode ser relevante no processo de colagem.

O caso geral do Teorema (4.0.2) pode ser reduzido ao caso anterior via o seguinte processo de simetrização. Seja $-u_{\min} < 0 \leq u_{\max}$ e para cada $u \in [u_{\min}, u_{\max}]$, seja $\sigma(u) =: \Phi_{T_G(u)/2}(u, 0)$, onde Φ é o fluxo do campo vetorial (4.56) e $T_G(u)$ a função período parametrizada por $(u, 0)$. Por definição, $\sigma \circ \sigma(u) = u$ e $\sigma(u_{\max}) = u_{\min}$. Seja $\hat{u} = g(u)$ definida por

$$g(u) = \frac{u - \sigma(u)}{2}.$$

Segue da definição que $g'(u) > 0$ e, conseqüentemente, $\hat{u} = g(u)$ é um difeomorfismo de

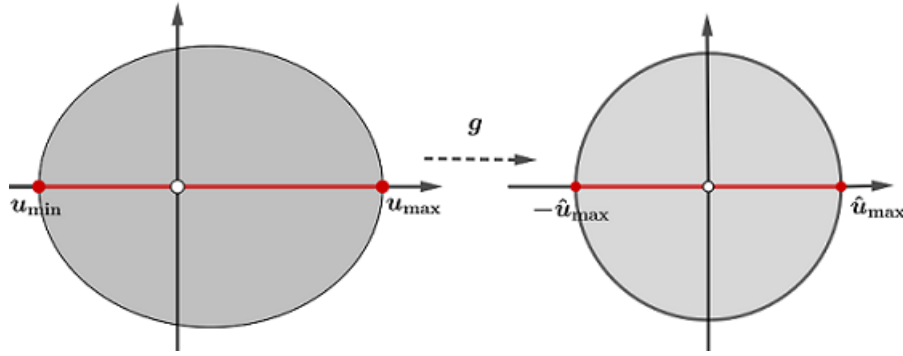


Figura 4.25: Simetrização de \mathcal{A}_G .

$[u_{\min}, u_{\max}]$ para $[-\hat{u}_{\max}, \hat{u}_{\max}]$, onde

$$\hat{u}_{\max} = g(u_{\max}) = \frac{u_{\max} - \sigma(u_{\max})}{2} = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} > 0.$$

Como

$$g(\sigma(u)) = \frac{\sigma(u) - \sigma(\sigma(u))}{2} = \frac{\sigma(u) - u}{2} = -g(u),$$

segue que $g(u_{\min}) = g(\sigma(u_{\max})) = -g(u_{\max}) = -\hat{u}_{\max}$. O potencial \hat{G} definido em $[-\hat{u}_{\max}, \hat{u}_{\max}]$ por $\hat{G} = G \circ g^{-1}$ é par. De fato,

$$\hat{G}(-\hat{u}) = \hat{G}(-g(u)) = \hat{G}(g(\sigma(u))) = G \circ g^{-1}(g(\sigma(u))) = G \circ (\sigma(u)) = G(u) = \hat{G}(g(u)) = \hat{G}(\hat{u}).$$

Além disso, a mudança de variáveis $\hat{u} = g(u)$ transforma o sistema a associado ao campo vetorial (4.56), isto é, o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = a(u, \tilde{v})\tilde{v}, \\ \dot{\tilde{v}} = -a(u, \tilde{v})G'(u), \end{cases} \quad (4.87)$$

no sistema

$$\begin{cases} \dot{\hat{u}} = \hat{a}(\hat{u}, \tilde{v})\tilde{v}, \\ \dot{\tilde{v}} = -\hat{a}(\hat{u}, \tilde{v})\hat{G}'(\hat{u}), \end{cases} \quad (4.88)$$

onde

$$\hat{a}(\hat{u}, \tilde{v}) = g'(g^{-1}(\hat{u}))a(g^{-1}(\hat{u}), \tilde{v}) \text{ e } \hat{H}(\hat{u}, \tilde{v}) = \frac{\tilde{v}^2}{2} + \hat{G}(\hat{u}).$$

Assim, reduzimos o caso geral ao caso anterior, já demonstrado. Com isso, a demonstração do Teorema (4.0.2) está completa. \square

4.2.3 Exemplos

A seguir faremos aplicações do Teorema (4.0.2) em três exemplos. Antes apresentaremos uma fórmula que nos permite calcular a função período do campo vetorial (4.56).

4.2.3.1 A função período do campo vetorial (4.56)

Considere o sistema hamiltoniano associado ao campo vetorial (4.56), isto é,

$$\begin{cases} \dot{u} = a(u, \hat{v})\hat{v}, \\ \dot{\hat{v}} = -a(u, \hat{v})G'(u), \end{cases} \quad (4.89)$$

onde

$$\hat{H}(u, \hat{v}) = \frac{\hat{v}^2}{2} + G(u).$$

Seja $E > 0$ e $H(u, \hat{v}) = E$. Então, para $\hat{v} > 0$, temos que

$$\hat{v} = \sqrt{2(E - G(u))}$$

e, conseqüentemente, o meio período da órbita periódica que passa por $(u_0, 0)$, $u_0 \in [0, u_{\max}]$ é dado por

$$\sqrt{2} \int_0^{u_0} \frac{du}{a(u, \sqrt{2(E - G(u))})\sqrt{E - G(u)}}.$$

Seja $u = \zeta(E)$ a inversa de G em $[0, E_0]$, onde $E_0 = G(u_{\max})$. Então, a função meio período $\tilde{T}_G(E)$ definida em $[0, E_0]$ é dada por

$$\tilde{T}_G(E) = \sqrt{2} \int_0^E \frac{\zeta'(s)ds}{a(\zeta(s), \sqrt{2(E - s)})\sqrt{E - s}}.$$

Exemplo 4.2.4. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -u(1 + u^2)^2 + \frac{2uv^2}{1 + u^2}. \end{cases} \quad (4.90)$$

Neste caso temos que $W = \partial_u + f(u, z)\partial_z$, onde

$$f(u, z) = -u(1 + u^2)^2 + \frac{4uz}{1 + u^2}.$$

O fluxo de W é dado por

$$Z(u, z_0) = z_0(1 + u^2)^2 - \frac{u^2(1 + u^2)^2}{2}$$

o qual está definido para todo $u \in \mathbb{R}$, ou seja, o fluxo é completo. O sistema (4.90) é hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2(1 + u^2)^2} + \frac{u^2}{2}$$

e forma de área

$$\mu(u, v) = \frac{1}{(1 + u^2)^2} du \wedge dv.$$

A mudança de variáveis $(u, \hat{v}) = (u, \frac{v}{1 + u^2})$, a qual está definida em todo plano, transforma o

sistema (4.90) no sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = (1 + u^2)\hat{v}, \\ \dot{\hat{v}} = -(1 + u^2)u, \end{cases} \quad (4.91)$$

que é hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$\hat{H}(u, \hat{v}) = \frac{\hat{v}^2}{2} + \frac{u^2}{2}$$

e forma de área

$$\mu(u, \hat{v}) = \frac{1}{1 + u^2} du \wedge d\hat{v}.$$

Note que

$$a(u, \hat{v}) = 1 + u^2 > 0 \quad \text{e} \quad G(u) = \frac{u^2}{2}.$$

Logo $\zeta(E) = \sqrt{2s}$ e $a(\zeta(E)) = 1 + 2E$ e, conseqüentemente,

$$\tilde{T}_G(E) = \sqrt{2} \int_0^E \frac{(\sqrt{2s})' ds}{(1 + 2s)\sqrt{E - S}} = \int_0^E \frac{ds}{((1 + 2s)s\sqrt{E - S})} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + 2E}}.$$

Neste caso, a função meio período $T_G(u)$ parametrizada por $(u, 0)$, $u \in [0, u_{\max}]$ é dada por

$$T_G(u) = \tilde{T}(G(u)) = \frac{\pi}{\sqrt{1 + 2u^2/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Como já vimos no capítulo 2 na subseção 2.6.2, a solução da equação de Abel (2.39) para a função $2\tilde{T}_G(E)$ é dada por

$$\mathbf{x}(E) = \tan^{-1}(\sqrt{2E})$$

e, portanto,

$$\zeta'(E) = \frac{1}{\sqrt{2E}(1 + 2E)} > 0,$$

para todo $E \in [0, E_0]$, $0 < E_0 < \infty$. Nesse caso podemos tomar $b(E) = E$, onde $b(E)$ é o difeomorfismo construído no lema 4.2.2. Assim, o potencial V é dado por

$$V(x) = 1/2 \tan^2(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

onde

$$x = \varphi(u) = V^{-1} \circ G(u) = \tan^{-1}(u).$$

Note que

$$T_V(x) = \tilde{T}_V(V(x)) = 2\pi \cos(x) = 2\pi \cos(\varphi(u)) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + u^2}} = T_G(u).$$

Pelo Teorema 4.0.2, existe uma mudança de coordenadas que transforma o sistema (4.91) no sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x) = -\tan(x) \sec^2(x). \end{cases} \quad (4.92)$$

Neste caso, a mudança de variáveis é dada por

$$(x, y) = (\tan^{-1}(u), \hat{v}).$$

Neste exemplo temos um caso de um sistema definido em todo \mathbb{R}^2 que é transformado em um sistema potencial que está definido em $(-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$. Isso ocorre em virtude da seguinte proposição.

Proposição 4.2.5. *Se $\lim_{u \rightarrow u_0} T_G(u) = 0$, $u_0 \in (0, \infty)$, então $\lim_{u \rightarrow u_0} T_V(\varphi(u)) = 0$ e, pela Proposição 2.6.11,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = +\infty,$$

onde $x = \varphi(u)$ e $x_0 = \lim_{u \rightarrow u_0} \varphi(u)$.

No exemplo anterior $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} T_G(u) = 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} T_V(x) = 0$.

Exemplo 4.2.6. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\frac{u}{(1+u^2)^2} - \frac{2uv^2}{1+u^2}. \end{cases} \quad (4.93)$$

Neste caso temos $W = \partial_u + f(u, z)\partial_z$, onde

$$f(u, z) = -\frac{u}{(1+u^2)^2} - \frac{4uz}{1+u^2}.$$

O fluxo de W é dado por

$$Z(u, z_0) = \frac{z_0}{(1+u^2)^2} - \frac{u^2}{2(1+u^2)^2}$$

o qual está definido para todo $u \in \mathbb{R}$, ou seja, o fluxo é completo. O sistema (4.93) é hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$H(u, v) = \frac{(1+u^2)^2 v^2}{2} + \frac{u^2}{2}$$

e forma de área

$$\mu(u, v) = (1+u^2)^2 du \wedge dv.$$

A mudança de variáveis $(u, \hat{v}) = (u, (1+u^2)v)$, a qual está definida em todo plano, transforma o sistema (4.93) para o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\hat{v}}{1+u^2}, \\ \dot{\hat{v}} = -\frac{u}{1+u^2}, \end{cases} \quad (4.94)$$

que é hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$\hat{H}(u, \hat{v}) = \frac{\hat{v}^2}{2} + \frac{u^2}{2}$$

e forma de área

$$\mu(u, \hat{v}) = (1+u^2) du \wedge d\hat{v}.$$

Segue que

$$a(u, \hat{v}) = \frac{1}{1+u^2} \quad \text{e} \quad G(u) = \frac{u^2}{2}.$$

Logo $\zeta(E) = \sqrt{2E}$, $a(\zeta(E)) = \frac{1}{1+2E}$ e período

$$\tilde{T}_G(E) = \sqrt{2} \int_0^E \frac{(1+2s)(\sqrt{2s})' ds}{\sqrt{E-s}} = \int_0^E \frac{(1+2s) du}{\sqrt{(E-s)s}} = \pi(1+E).$$

Substituindo essa $2\tilde{T}(E)$ na equação de Abel (2.39), obtemos

$$\mathbf{x}(E) = \frac{1}{3}\sqrt{2E}(2E+3).$$

Note que $\mathbf{x}'(E) > 0$ para todo $E > 0$ e portanto $\mathbf{x}(E)$ possui inversa $V = V(x)$. Seja $x = \varphi(u) := u + u^3/3$. Note que $\varphi'(u) = 1 + u^2 > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ e portanto $x = \varphi(u)$ é globalmente invertível. Por outro lado, temos que $\mathbf{x}(E) = \varphi(\sqrt{2E})$. Logo $x = \mathbf{x}(V(x)) = \varphi(\sqrt{2V(x)})$ e, portanto, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{2V(x)}$. Assim, concluímos que

$$V(x) = \frac{1}{2}[\varphi^{-1}(x)]^2.$$

O novo sistema hamiltoniano é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x) = -\frac{\varphi^{-1}(x)}{1+[\varphi^{-1}(x)]^2}. \end{cases} \quad (4.95)$$

A mudança de variáveis

$$(x, y) = (\varphi(u), \hat{v})$$

transforma o sistema hamiltoniano (4.94) no sistema hamiltoniano (4.95). Neste exemplo, tanto (4.94) quanto (4.95), estão definidos em todo \mathbb{R}^2 .

Exemplo 4.2.7. Considere o sistema associado ao campo \hat{X} do exemplo (4.1.5), ou seja,

$$\begin{cases} \dot{u} = a(u)\hat{v}, \\ \dot{\hat{v}} = -a(u)G'(u), \end{cases} \quad (4.96)$$

e suponha que G satisfaz as condições (4.58), ou seja, (4.96) tem um centro em $(0, 0)$. Nesse caso,

$$\tilde{T}_G(E) = \sqrt{2} \int_0^E \frac{\zeta'(s) ds}{a(\zeta(s))\sqrt{E-s}},$$

onde $\zeta(E)$ é a inversa de G em $[0, u_{\max}]$. Seja \mathbf{x} definida em $[0, E_0]$ por

$$\mathbf{x}(E) = \int_0^E \frac{\zeta'(s)}{a(\zeta(s))} ds.$$

segue que

$$\mathbf{x}'(E) = \frac{\zeta'(E)}{a(\zeta(E))} > 0$$

e, conseqüentemente, $x = \mathbf{x}(E)$ é invertível em $[0, E_0]$. Seja V definida em $[0, \mathbf{x}(E_0)]$ por

$V(x) = \mathbf{x}^{-1}(x)$. Assim, dado $E \in [0, E_0]$, $V(x) = E$ implica em $V^{-1}(E) = \mathbf{x}(E)$ e, conseqüentemente,

$$\tilde{T}_V(E) = \sqrt{2} \int_0^E \frac{\mathbf{x}'(s)ds}{\sqrt{E-s}} = \sqrt{2} \int_0^E \frac{\zeta'(s)ds}{a(\zeta(s))\sqrt{E-s}} = \tilde{T}_G(E).$$

Pelo Teorema 4.0.2, existe uma mudança de coordenadas que transforma o sistema (4.96) no sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases} \quad (4.97)$$

onde $V'(x) = -\frac{1}{\mathbf{x}'(V(x))}$.

Nesse caso, a mudança de variáveis $(x, y) = (\varphi(u), \hat{v})$, onde $\varphi(u) = \mathbf{x} \circ G(u)$, transforma (4.96) em (4.97). De fato, note que

$$\dot{x} = \mathbf{x}'(G(u))G'(u)\dot{u} = \frac{\zeta'(G(u))}{a(\zeta(G(u)))}G'(u)a(u)\hat{v} = \frac{\zeta'(G(u))}{\zeta'(G(u))}\hat{v} = \hat{v} = y,$$

pois ζ é a inversa de G . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{\hat{v}} = -a(u)G'(u) = -a(\zeta(V(x)))G'(\zeta(V(x))) = -a(\zeta(V(x)))\frac{1}{\zeta'(G(\zeta(V(x))))} \\ &= -\frac{a(\zeta(V(x)))}{\zeta'(V(x))} = -\frac{1}{\mathbf{x}'(V(x))} = -V'(x). \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.8. Continuação do exemplo anterior. Seja $\lambda(u) = \int_0^u \frac{ds}{a(s)}$ e considere o difeomorfismo $(x, y) = (\lambda(u), \hat{v})$. Temos que

$$\dot{x} = \lambda'(u)\dot{u} = \frac{1}{a(u)}a(u)\hat{v} = \hat{v} = y$$

e

$$\dot{y} = \dot{\hat{v}} = -G'(\lambda^{-1}(x))a(\lambda^{-1}(x)).$$

Logo o sistema (4.97) é conjugado ao sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases} \quad (4.98)$$

onde

$$V(x) = G \circ \lambda^{-1}(x).$$

Observe que no exemplo anterior, a conjugação foi feita sem levar em conta a natureza dos equilíbrios de (4.97). Isso implica que a hipótese de que \hat{X} tenha um único ponto de equilíbrio e que este seja do tipo centro não é necessária para que a conclusão do Teorema 4.0.2 seja verdadeira.

Capítulo 5

Considerações finais

Os teoremas 3.0.2 (caso local) e 4.0.2 (caso global) resolvem a questão 1.0.2 para o caso em que o único equilíbrio de (1.2) é um equilíbrio do tipo centro.

5.1 Problemas em aberto e trabalhos futuros

A primeira questão a ser pensada é a questão da extensão analítica do difeomorfismo Φ para $(0, 0)$ (ver Questão 4.2.1). Observe que em todos os exemplos analisados na seção anterior, o difeomorfismo Φ é analítico em $(0, 0)$.

A segunda pergunta que surge, naturalmente, é a seguinte.

Questão 5.1.1. Os Teoremas 3.0.2 e 4.0.2 são verdadeiros se trocamos o equilíbrio do tipo centro por um equilíbrio tipo sela?

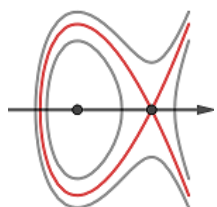
O exemplo 4.2.8 é uma resposta parcial para esta questão.

Questão 5.1.2. Se o campo W não for completo o que sobra do Teorema 4.0.2? Os exemplos 1 e 2 da Seção 4.1.4 sugerem que o teorema ainda permanece válido em algumas regiões do plano.

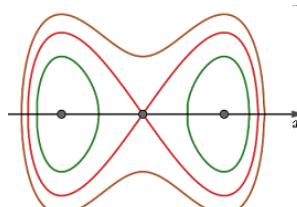
Questão 5.1.3. Quais são as hipóteses minimais sobre o campo W para que as conclusões do Teorema 4.0.2 sejam válidas? O exemplo 3 da Seção 4.1.4 sugere que tais hipóteses existem.

Outra questão a ser verificada é se a questão 1.0.2 é verdadeira para o caso em que o sistema (1.2) tem mais de um ponto de equilíbrio, começando pelo seguinte caso.

Questão 5.1.4. Suponha que o sistema (1.2) tem dois ou mais pontos de equilíbrio. Existe uma mudança de variáveis tais que nessas novas variáveis o sistema é da forma (1.3)?



Dois equilíbrios.



Três equilíbrios.

Figura 5.1: Retrato de fase de \hat{X} com dois e três equilíbrios respectivamente.

O sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -u + u^2 - v^2, \end{cases} \quad (5.1)$$

tem dois equilíbrios, um centro em $(0, 0)$ e uma sela em $(1, 0)$. No exemplo (4.1.8) vimos que (5.1) é conjugado ao sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = a(u)\tilde{v}, \\ \dot{\tilde{v}} = -a(u)G'(u), \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $a(u) = e^{-u}$ e

$$G(u) = \frac{1}{2}(1 - e^{2u}(u - 1)^2).$$

A mudança de variáveis $x = e^u - 1$, $y = \tilde{v}$, transforma o sistema (5.2) no sistema potencial

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $V(x) = G(\ln(1 + x))$.

Além dessas questões, recordamos a questão 2.6.1 que trata da regularidade da solução da equação de Abel (2.42) que é de interesse geral.

Questão 5.1.5. Seja $\mathsf{T}(u)$ positiva e de classe C^r , $r \in \{1, \dots, \infty, \omega\}$, em $(0, u_{\max}]$. Prove que

$$\zeta(E) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^E \frac{\mathsf{T}(\zeta(s))ds}{\sqrt{E-s}}, \quad 0 \leq s \leq E. \quad (5.4)$$

$\zeta(E)$ é de classe C^r , $r \in \{2, \dots, \infty, \omega\}$, em $(0, E_0]$.

Por fim, recordamos também a questão 4.1.1 posta no final da seção 4.1.

Apêndice A

Sobre a Equação de Abel

Em 1823 N.H. Abel considerou o seguinte problema de mecânica: No plano vertical xy encontrar uma curva C que seja o gráfico de uma função crescente $x = \varphi(y)$, $y \in [0, h]$ ao longo da qual uma partícula, sob aceleração constante para baixo g , é forçada a cair, de modo que o tempo de queda seja igual a uma função prescrita $\tau(y_0)$ da altura inicial y_0 . Na

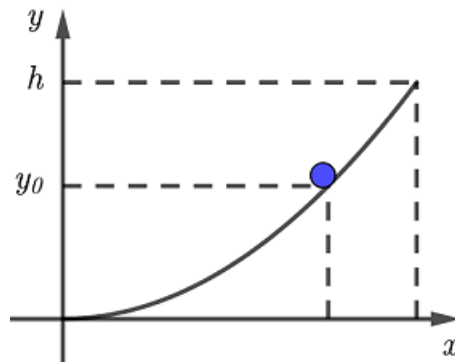


Figura A.1: *Problema de Mecânica.*

ausência de atrito, o problema reduz-se a resolver a seguinte equação

$$\int_0^y \frac{u(s)ds}{(y-s)^{1/2}} = \sqrt{2g}\tau(y), \quad y \in [0, h],$$

onde $u(s) = \sqrt{1 + [\varphi'(s)]^2}$. (ver [GV91])

Segundo [GV91], Abel resolveu essa equação em dois artigos, publicados nos anos de 1823 e 1826. A saber, Abel resolveu a seguinte equação integral

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y \frac{u(s)ds}{(y-s)^{1-\alpha}} = f(y), \quad y \in [0, h], \quad (\text{A.1})$$

onde α é um número racional com $0 < \alpha < 1$ e Γ é a função gamma de Euler. A equação integral (A.1) é chamada *Equação Integral de Abel*, em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829).

A equação (A.1) tem importância histórica, visto que, sua solução é uma das primeiras aplicações do Cálculo Fracionário. Para mais informações sobre a teoria do cálculo fracionário, indicamos as referências [KMS93] e [GV91].

Nos artigos de 1823 e 1826 Abel resolveu a equação (A.1) no espaço das funções analíticas, no entanto, (A.1) pode ser resolvida em espaços bem mais amplos. Por exemplo, se f for absolutamente contínua em $[0, h]$, (A.1) tem uma única solução em $L_1(0, h)$ se e somente se

$\mathcal{I}u(0) = 0$, onde $\mathcal{I}u(y) = \int_0^y u(s)ds$ e $L_1(0, h)$ é o espaço das funções integráveis em $(0, h)$ tal que $\mathcal{I}|u(y)| < \infty$. A saber, a solução de (A.1) é dada por

$$u(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(0)}{y^\alpha} + \int_0^y \frac{f'(s)ds}{(y-s)^\alpha} \right].$$

Para detalhes consulte [KMS93]. Tomando $\alpha = 1/2$, obtemos da última igualdade que

$$u(y) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left[\frac{f(0)}{\sqrt{y}} + \int_0^y \frac{f'(s)ds}{\sqrt{y-s}} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Note que se $f(0) \neq 0$, $u(y)$ não é sequer continua em $y = 0$, independente da regularidade de f em $[0, h]$.

A seguir vamos introduzir um operador integral associado a equação de Abel (A.1), no caso em que $\alpha = 1/2$, e provar algumas propriedades que foram utilizadas na seção 2.6.2 do capítulo 2.

Definição A.0.1 (Transformada de Abel). Sejam $E_0 > 0$ e $\phi \in C^0[0, E_0]$, $\phi \in C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. A transformada de Abel é o operador integral definido em $[0, E_0]$ por

$$\mathcal{J}\phi(E) = \int_0^E \frac{\phi(s)ds}{\sqrt{E-s}}. \quad (\text{A.3})$$

No lema a seguir elencamos algumas propriedades do operador linear $\mathcal{J}\phi(E)$.

Lema A.0.1. O operador linear integral (A.3) possui as seguintes propriedades:

P.1 A derivada de $\mathcal{J}\phi(E)$ em relação a E é dada por

$$\mathcal{D}\mathcal{J}\phi(E) = \frac{\phi(0)}{\sqrt{E}} + \int_0^E \frac{\phi'(s)ds}{\sqrt{E-s}} = \frac{\phi(0)}{\sqrt{E}} + \mathcal{J}\phi'(E), \quad E \in (0, E_0]. \quad (\text{A.4})$$

P.2 Propriedade fundamental

$$\mathcal{J}(\mathcal{J}\phi)(E) = \pi\mathcal{I}\phi(E), \quad (\text{A.5})$$

onde $\mathcal{I}\phi(E) = \int_0^E \phi(s)ds$, $E \in (0, E_0]$.

P.3

$$\mathcal{J}(\mathcal{D}\mathcal{J}\phi(E)) = \pi\phi(E). \quad (\text{A.6})$$

P.4 $\mathcal{J}\phi \in C^0[0, E_0]$, $\mathcal{J}\phi \in C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$ e $\mathcal{J}\phi(0) = 0$.

Demonstração. Integrando (A.3) por partes e derivando em relação a E , obtemos a primeira propriedade, que é

$$\mathcal{D}\mathcal{J}\phi(E) = \frac{\phi(0)}{\sqrt{E}} + \int_0^E \frac{\phi'(s)ds}{\sqrt{E-s}} = \frac{\phi(0)}{\sqrt{E}} + \mathcal{J}\phi'(E), \quad E \in (0, E_0], \quad (\text{A.7})$$

onde $\mathcal{D} := \frac{d}{dE}$. Em particular, se $\phi(0) = 0$, temos

$$\mathcal{D}\mathcal{J}\phi(E) = \mathcal{J}\phi'(E).$$

Com isso, provamos o item P.1. Para o item P.2, temos que

$$\mathcal{J}(\mathcal{J}\phi)(E) = \int_0^E \frac{1}{\sqrt{E-t}} \left(\int_0^t \frac{\phi(s)ds}{\sqrt{t-s}} \right) dt.$$

Invertendo a ordem de integração (pelo Teorema de Fubini) e levando em conta que

$$\int_s^E \frac{dt}{\sqrt{(E-t)(t-s)}} = \pi,$$

obtemos

$$\mathcal{J}(\mathcal{J}\phi)(E) = \int_0^E \left(\int_s^E \frac{dt}{\sqrt{(E-t)(t-s)}} \right) \phi(s)ds = \pi \int_0^E u(s)ds = \pi \mathcal{I}\phi(E).$$

O item P.3 segue de (A.7) e (A.5), visto que,

$$\mathcal{J}(\mathcal{D}\mathcal{J}\phi(E)) = \phi(0)\mathcal{J}(1/\sqrt{E}) + \mathcal{J}\mathcal{J}\phi'(E) = u(0)\pi + \pi\mathcal{I}\phi'(E) = \pi\phi(E). \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, o item P.4 segue do seguinte raciocínio. Uma vez que $\phi \in C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$, dado $\epsilon > 0$ a função $\phi \in C^r[\epsilon/2, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. Mostraremos a seguir que $\mathcal{J}\phi \in C^r[\epsilon, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. Para isso, note que $\mathcal{J}\phi$ restrito a $[\epsilon/2, E_0]$ é dado por

$$\mathcal{J}_\epsilon\phi(E) = \int_{\epsilon/2}^E \frac{\phi(s)ds}{\sqrt{E-s}}, \quad 0 < \epsilon/2 < \epsilon \leq s \leq E.$$

Integrando por partes e derivando em relação a E , obtemos

$$\mathcal{D}\mathcal{J}_\epsilon\phi(E) = \frac{\phi(\epsilon/2)}{\sqrt{E-\epsilon/2}} + \int_{\epsilon/2}^E \frac{\phi'(s)ds}{\sqrt{E-s}} = 2\phi(\epsilon/2)\varphi_0'(E) + \mathcal{J}_\epsilon\phi'(E),$$

onde $\varphi_0(E) := \sqrt{E-\epsilon/2}$. Derivando $\mathcal{J}_\epsilon\phi(E)$ sucessivamente, obtemos que a n -ésima derivada é dada pela seguinte expressão

$$\mathcal{D}^n \mathcal{J}_\epsilon\phi(E) = 2 \sum_{j=0}^{n-1} \phi^{(j)}(\epsilon/2)\varphi_0^{(n-j)}(E) + \mathcal{J}_\epsilon\phi^{(n)}(E). \quad (\text{A.9})$$

Como $\varphi_0(E)$ e $\varphi(E)$ são C^k, C^∞ em $[\epsilon, E_0]$, segue de (A.9) que $\mathcal{J}_\epsilon\phi(E)$ é C^k, C^∞ em $[\epsilon, E_0]$.

Uma vez que $\mathcal{J}_\epsilon\phi(E) \in C^\infty[\epsilon, E_0]$, pela proposição 1.2.12 de [KP02], para mostrar que $\mathcal{J}_\epsilon\phi(E)$ é analítica em $[\epsilon, E_0]$, basta mostrar que $\mathcal{D}^n \mathcal{J}_\epsilon\phi(E)$ é limitada em $[\epsilon, E_0]$. Como $\phi_0(E)$ e $\phi(E)$ são analíticas em $[\epsilon, E_0]$, segue da proposição 1.2.12, já citada acima, que as derivadas $\varphi_0^{(n-j)}(E)$ e $\phi^{(n)}(E)$ são uniformemente limitadas no compacto $[\epsilon, E_0]$. A saber, existe constantes C_0, C_1, R_0 e R_1 tal que $|\varphi_0^{(n-j)}(\epsilon/2)| \leq \frac{C_0(n-j)!}{R_0^{n-j}}$ e $|\phi^{(j)}(E)| \leq \frac{C_1j!}{R_1^n}$. Logo,

$$|\varphi_0^{(n-j)}(\epsilon/2)||\phi^{(j)}(E)| \leq \frac{C_0(n-j)!}{R_0^{n-j}} \frac{C_1j!}{R_1^n} \leq \frac{Cn!}{R^n},$$

onde $C = C_0C_1$ e $R = \min\{R_0, R_1\}$. Segue dessa desigualdade que a primeira parcela de

(A.9) é limitada por $\frac{2C_1 n!}{R_1^n}$. Para a segunda parcela temos que

$$\int_0^E \frac{|\varphi^{(n)}(s)| ds}{\sqrt{E-s}} \leq \frac{C_1 n!}{R_1^n} \int_0^E \frac{ds}{\sqrt{E-s}} = \frac{2\sqrt{E} C_1 n!}{R_1^n} \leq \frac{2\sqrt{E_0} C_1 n!}{R_1^n}.$$

Logo $\mathcal{D}^n \mathcal{J}_\epsilon \phi(E)$ é limitada para todo E no compacto $[\epsilon, E_0]$ e, conseqüentemente, $\mathcal{J}_\epsilon \phi(E)$ é analítica em $[\epsilon, E_0]$, com $0 < E_0 < \infty$. Uma vez que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon \phi(E) = \mathcal{J} \phi(E)$, temos que $\mathcal{J} \phi \in C^0[0, E_0]$, $\mathcal{J} \phi \in C^r(0, E_0]$, $r \in \{k \geq 1, \infty, \omega\}$. \square

Referências Bibliográficas

- [Alf84a] Barbara Alfawicka. Inverse problem connected with half-period function analytic at the origin. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math*, 32(5–6):267–274, 1984. [2](#), [27](#)
- [Alf84b] Barbara Alfawicka. Inverse problems connected with periods of oscillations described by $\ddot{x} + g(x) = 0$. Em *Annales Polonici Mathematici*, volume 3, páginas 297–308, 1984. [2](#), [26](#)
- [Arn92] Vladimir I Arnold. *Ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media, 1992. [18](#)
- [Arn12] Vladimir I Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, volume 250. Springer Science & Business Media, 2012. [12](#), [14](#)
- [Arn13] Vladimir I Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013. [16](#)
- [Bar76] Robert G Bartle. The elements of real analysis. 1976. [77](#)
- [Bib06] Yuri N Bibikov. *Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations*, volume 702. Springer, 2006.
- [BJS64] Lipman Bers, Fritz John e Martin Schechter. *Partial differential equations*. American Mathematical Soc., 1964.
- [BL04] Claudio Buzzi e Jeroen Lamb. Reversible hamiltonian liapunov center theorem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2004.
- [BRT10] Claudio Buzzi, Luci Any Roberto e Marco Antonio Teixeira. Branching of periodic orbits in reversible hamiltonian systems. *arXiv preprint arXiv:1003.0656*, 2010.
- [BT04] CA Buzzi e MA Teixeira. Time-reversible hamiltonian vector fields with symplectic symmetries. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 16(2):559–574, 2004. [15](#)
- [CD97] CJ Christopher e J Devlin. Isochronous centers in planar polynomial systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 28(1):162–177, 1997.
- [CDD00] Guoting Chen e Jean Della Dora. Further reductions of normal forms for dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 166(1):79–106, 2000.
- [CGGL99] Javier Chavarriga, Hector Giacomini, Jaume Giné e Jaume Llibre. On the integrability of two-dimensional flows. *journal of differential equations*, 157(1):163–182, 1999.

- [CGM00] Anna Cima, Armengol Gasull e Francesc Mañosas. Period function for a class of hamiltonian systems. *Journal of Differential Equations*, 168(1):180–199, 2000. 28
- [Chi87] Carmen Chicone. The monotonicity of the period function for planar hamiltonian vector fields. *Journal of Differential equations*, 69(3):310–321, 1987. 2, 70
- [Chi06] Carmen Chicone. *Ordinary differential equations with applications*, volume 34. Springer Science & Business Media, 2006.
- [CL90] Colin J Christopher e Noel G Lloyd. On the paper of jin and wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 22(1):5–12, 1990. 67
- [CLW94] Shui-Nee Chow, Chengzhi Li e Duo Wang. *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*. Cambridge University Press, 1994. 12
- [CMV99] Anna Cima, Francesc Manosas e Jordi Villadelprat. Isochronicity for several classes of hamiltonian systems. *journal of differential equations*, 157(2):373–413, 1999. 18, 28
- [CS99] Javier Chavarriga e Marco Sabatini. A survey of isochronous centers. *Qualitative theory of dynamical systems*, 1:1–70, 1999. 2
- [Dev76] Robert L Devaney. Reversible diffeomorphisms and flows. *Transactions of the American Mathematical Society*, 218:89–113, 1976. 15
- [DLA06] Freddy Dumortier, Jaume Llibre e Joan C Artés. *Qualitative theory of planar differential systems*, volume 2. Springer, 2006. 7, 12
- [DM20] Fabio Scalco Dias e Luis Fernando Mello. Globally asymptotically stable equilibrium points in kukles systems. *Qualitative theory of dynamical systems*, 19:1–7, 2020. 67
- [dS⁺02] Gilmar Fernandes da Silva et al. *Formas normais de sistemas dinamicos reversiveis*. Tese de Doutorado, Tese de Mestrado, Unicamp, 2002. 36
- [Gae94] Giuseppe Gaeta. Normal forms of reversible dynamical systems. *International Journal of Theoretical Physics*, 33:1917–1928, 1994. 14, 36
- [GGMM97] Armengol Gasull, Antoni Guillamon, V Manosa e Francesc Mañosas. The period function for hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities. *journal of differential equations*, 139(2):237–260, 1997. 2
- [GGV03] Armengol Gasull, Antoni Guillamon e Jordi Villadelprat. The period function for second-order quadratic odes is monotone. *The Period Function for Second-Order Quadratic ODEs is Monotone*, páginas 329–352, 2003.
- [GM11] Jaume Giné e Susanna Maza. The reversibility and the center problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74(2):695–704, 2011.
- [GV91] Rudolf Gorenflo e Sergio Vessella. *Abel integral equations*, volume 1461. Springer, 1991. 95

- [Had68] Jacques Hadamard. *Œuvres de Jacques Hadamard...*, volume 4. Éditions du Centre national de la recherche scientifique, 1968. 54
- [Hal09] Jack K Hale. *Ordinary differential equations*. Courier Corporation, 2009.
- [HSD12] Morris W Hirsch, Stephen Smale e Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [JL94] Xavier Jarque e Jaume Llibre. Structural stability of planar hamiltonian polynomial vector fields. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3):617–640, 1994. 18
- [Kam10] Yutaka Kamimura. Global existence of a restoring force realizing a prescribed half-period. *Journal of Differential Equations*, 248(10):2562–2584, 2010. 2, 27, 30, 31
- [KK13] Yutaka Kamimura e Takeshi Kaneya. Global determination of a nonlinearity from a periodic motion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 403(2):506–521, 2013. 2, 28
- [KKH95] Anatole Katok, AB Katok e Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Number 54. Cambridge university press, 1995.
- [KMS93] Anatoly A Kilbas, Oleg I Marichev e Stefan G Samko. *Fractional integrals and derivatives (theory and applications)*, 1993. 95, 96
- [KP02] Steven G Krantz e Harold R Parks. *A primer of real analytic functions*. Springer Science & Business Media, 2002. 49, 97
- [Kuk44] Isaak S Kukles. Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre. Em *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, volume 42, páginas 208–211, 1944. 67
- [LL04] L Landau e E Lifchitz. *CURSO DE FISICA-MECANICA*. Hemus, 2004. 21, 27
- [LLM⁺20] Jeroen SW Lamb, Mauricio FS Lima, Ricardo M Martins, Marco Antonio Teixeira e Jiazhong Yang. On the hamiltonian structure of normal forms at elliptic equilibria of reversible vector fields in r_4 . *Journal of Differential Equations*, 269(12):11366–11395, 2020. 47
- [LR98] Jeroen SW Lamb e John AG Roberts. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 112(1-2):1–39, 1998.
- [LT12] Lev M Lerman e Dimitry Turaev. Breakdown of symmetry in reversible systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, 17:318–336, 2012.
- [Mel05] Luis Mello. *Campos Hamiltonianos Planares e Aplicações*. Notas de aulas, 08 2005. 18
- [MM14] Ricardo Miranda Maartins. Formal equivalence between normal forms of reversible and hamiltonian dynamical systems. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 13(2), 2014. 35, 47
- [MRT95] P Mardesic, Christiane Rousseau e Bourama Toni. Linearization of isochronous centers. *Journal of differential equations*, 121(1):67–108, 1995. 14

- [MS04] Luis Fernando Mello e Grasielle Batista dos Santos. A saddle-center bifurcation in planar hamiltonian vector fields. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26:371–377, 2004. 18
- [MT08] F Mañosas e Pedro J Torres. Two inverse problems for analytic potential systems. *Journal of Differential Equations*, 245(12):3664–3673, 2008. 2, 27
- [MT11] Ricardo Miranda Martins e Marco Antonio Teixeira. On the similarity of hamiltonian and reversible vector fields in 4d. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 10(4):1257–1266, 2011. 47
- [MV02] F Manosas e J Villadelprat. Area-preserving normalizations for centers of planar hamiltonian systems. *Journal of Differential Equations*, 179(2):625–646, 2002. 43
- [Per13] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Rag12] C Ragazzo. Scalar autonomous second order ordinary differential equations. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 11(2):277–415, 2012. 3, 4, 50, 66
- [Roc07] Carlos Rocha. Realization of period maps of planar hamiltonian systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 19(3):571–592, 2007. 3
- [Sab04] M Sabatini. On the period function of $\ddot{x} + f(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$. *Journal of Differential Equations*, 196(1):151–168, 2004. 3, 66
- [Sab15] Marco Sabatini. Centers with equal period functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 430(1):296–305, 2015.
- [Sab17] Marco Sabatini. Every period annulus is both reversible and symmetric. *Qualitative theory of dynamical systems*, 16(1):175–185, 2017.
- [Sch06] Renate Schaaf. *Global solution branches of two point boundary value problems*. Springer, 2006. 2, 28
- [Sev06] Mikhail B Sevryuk. *Reversible systems*, volume 1211. Springer, 2006.
- [Sfe15] Andrea Sfecci. From isochronous potentials to isochronous systems. *Journal of Differential Equations*, 258(5):1791–1800, 2015. 2
- [SM12] Carl L Siegel e Jürgen K Moser. *Lectures on celestial mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012. 41
- [Sot79] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. 1, 7, 9, 10
- [Tei97] Marco Antonio Teixeira. Singularities of reversible vector fields. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 100(1-2):101–118, 1997.
- [TM11] Marco A Teixeira e Ricardo M Martins. Reversible-equivariant systems and matricial equations. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 83:375–390, 2011.

- [TY] Marco Antônio Teixeira e Jiazhong Yang. Equações diferenciais reversíveis. *Matemática Universitária*, (24/25):33–47. 14, 15
- [TY01] Marco Antonio Teixeira e Jiazhong Yang. The center-focus problem and reversibility. *Journal of Differential Equations*, 174(1):237–251, 2001. 35
- [Ura64] Minoru Urabe. Relations between periods and amplitudes of periodic solutions of $\ddot{x} + g(x) = 0$. *Funkcialaj Ekvacioj*, 6:63–88, 1964. 2, 27
- [Ura67] Minoru Urabe. *Nonlinear autonomous oscillations: Analytical theory*, volume 34. Academic Press, 1967. 2, 27
- [Whi43] Hassler Whitney. Differentiable even functions. *Duke Mathematical Journal*, 10(1):159–166, 1943. 49
- [YZ09] Lijun Yang e Xianwu Zeng. The period function of potential systems of polynomials with real zeros. *Bulletin des sciences mathématiques*, 133(6):555–577, 2009. 2
- [Zeh10] Eduard Zehnder. *Lectures on dynamical systems: Hamiltonian vector fields and symplectic capacities*, volume 11. European Mathematical Society, 2010. 9, 16
- [Zha04] Xiang Zhang. Planar analytic systems having locally analytic first integrals at an isolated singular point. *Nonlinearity*, 17(3):791, 2004.
- [Zha08] Xiang Zhang. Analytic normalization of analytic integrable systems and the embedding flows. *Journal of Differential Equations*, 244(5):1080–1092, 2008.