Cálculo de forma usando formas diferenciais e cálculo exterior

Diego Fernando Ruge Vásquez

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Antoine Laurain

São Paulo, 23 de Abril de 2021

Cálculo de forma usando formas diferenciais e cálculo exterior

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo
candidato Diego Fernando Ruge Vásquez, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Sou muito grato ao meu orientador, o Professor Dr. Antoine Laurain, por sua supervisão constante e seu entusiasmo pelo trabalho realizado aqui. Agradeço também a Diana por todo seu apoio nos dias mais calmos e principalmente nos dias mais escuros. Sério, muito obrigado.

Resumo

Ruge, V. D. F. **Cálculo de forma usando formas diferenciais e cálculo exterior**. 2021. Dissertação-Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

No presente trabalho se aborda o cálculo de forma usando o formalismo das formas diferenciais. Isso fornece uma abordagem unificada e consistente para computar derivadas de forma de ordem superior e evitar as tediosas manipulações envolvidas pelo cálculo vetorial clássico. A derivada exterior de formas diferenciais é a linguagem natural para expressar princípios de conservação subjacentes a muitos modelos baseados em equações diferenciais parciais. Se apresenta a derivada de forma de soluções de problemas de valor de fronteira (PVF) elíptico de segunda ordem com condição de fronteira de Neumann, Robin e Dirichlet.

Palavras-chave: forma diferencial, derivada de forma, derivada de Lie, teoremas de estrutura de Hadamard-Zolésio.

Abstract

Ruge, V. D. F. **Shape Calculus using differential forms and exterior calculus**. 2021. Dissertação-Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

In the present document, the shape calculus is approached using the formalism of differential forms. This provides a unified and consistent approach to computing higher-order derivatives and avoids the tedious manipulations involved in classical vector calculus. The exterior derivative of differential forms is a natural language for expressing conservation principles underlying many partial differential equations based models. We present the shape derivatives of solutions of second order elliptic boundary value problems with Neumann, Robin and Dirichlet boundary conditions.

Keywords: differential form, shape derivative, Lie derivative, Hadamard-Zolésio structure theorems.

Conteúdo

Introdução

A geometria é o estudo do espaço e das propriedades das formas no espaço. Consequentemente, a geometria está na base de muitas teorias físicas atuais: relatividade geral, eletromagnetismo, mecânica de fluidos, todas têm fortes estruturas geométricas subjacentes. A teoria de Einstein, por exemplo, afirma que a força do campo gravitacional é diretamente proporcional à curvatura do espaço-tempo. A geometria diferencial é, portanto, a língua materna de numerosas teorias físicas e matemáticas. Infelizmente, a natureza geométrica inerente de tais teorias é frequentemente obstruída por sua formulação em notações vetoriais ou tensoriais: o uso tradicional de um sistema de coordenadas, no qual as equações definidoras são expressas, muitas vezes obscurece as estruturas subjacentes por um uso esmagador de índices. Além disso, tais expressões complexas emaranham o conteúdo topológico e geométrico do modelo.

A natureza geométrica desses modelos é mais bem expressa e elucidada através do uso do cálculo exterior de formas diferenciais, introduzido pela primeira vez por Élie Cartan. Este cálculo baseado em geometria foi desenvolvido e refinado ao longo do século XX para se tornar a base da geometria diferencial moderna. O cálculo das formas externas permite expressar equações diferenciais e integrais em espaços suaves e curvos de maneira consistente, enquanto revela os invariantes geométricos em jogo. Por exemplo, as operações clássicas de gradiente, de divergência e rotacional, bem como os teoremas de Green, de Gauss e de Stokes, podem ser todos expressos concisamente em termos de formas diferenciais e de um operador nessas formas chamado de derivada exterior.

Um dos fundamentos matemáticos da otimização de forma é o cálculo de forma, que consiste na diferenciação de funcionais e de operadores com respeito às variações de um domínio espacial. Normalmente os problemas de otimização de forma são resolvidos mediante métodos numéricos iterativos, mas também é necessário ter alguma informação do gradiente e/ou da Hessiana de forma. Para estudar isto, o trabalho a seguir baseia-se nos resultados publicados por Ralf Hiptmair e Jingzhi Li em [1]. O cálculo de forma é aproximado a partir do método de velocidade, isto é, as perturbações de forma são dependentes de fluxos gerados por campos vetoriais.

Para obter as derivadas de forma usamos o cálculo de formas diferenciais em oposição ao cálculo vetorial classico; a adoção de formas diferenciais nos permite ter algumas vantagens:

1. O cálculo de formas diferenciais geralmente fornece fórmulas simples, enquanto o cálculo vetorial deve recorrer a expressões complicadas.

2. Invariantes são facilmente descobertas quando são expressas como formas diferenciais invocando o teorema de Stokes, o lema de Poincare, ou aplicando diferenciação exterior. Observe também que a derivada externa das formas diferenciais - a parte antissimétrica das derivadas - é uma das partes mais importantes da diferenciação, uma vez que é invariante sob a mudança do sistema de coordenadas.

3. As formas diferenciais oferecem uma descrição independente de coordenadas para modelos, em contrapartida o cálculo vetorial depende das coordenadas, cuja escolha geralmente é arbitrária.

4. A derivada exterior de formas diferenciais é a linguagem natural para expressar princípios de conservação subjacentes a muitos modelos baseados em Equações Diferenciais Parciais (EDP's). As derivadas de forma têm um papel fundamental na otimização de forma.

No primeiro capítulo são apresentados alguns conceitos básicos: definições e notações associadas às formas diferenciais, especialmente as operações do cálculo exterior como derivada exterior; produto interior; o *pullback*, entre outros. Ao final do capítulo é apresentado o teorema de Stokes, um resultado essencial para o entendimento deste trabalho que relaciona a derivada exterior com a integração de formas diferenciais.

No capítulo seguinte, se expõe as correspondências entre formas diferenciais e os *proxies* vetoriais, isto é, a relação entre as operações do cálculo exterior de formas com as operações de funções escalares ou funções vetoriais para o caso da variedade $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

No terceiro capítulo, se usa o cálculo exterior de formas diferenciais e a derivada de Lie para apresentar o teorema fundamental de estrutura de Hadamard, que afirma essencialmente que as derivadas de forma dependem apenas do componente normal das deformações na fronteira do domínio de referência. Também se mostra como obter as derivadas de ordem superior de maneira recursiva, repetindo os mesmos argumentos usados ao obter o gradiente de forma.

No quarto capítulo, se expressa a teoria abstrata apresentada no terceiro capítulo em termos de *proxies* vetoriais, isto é, funções escalares e campos vetoriais com ênfase no gradiente e na Hessiana de forma de integrais de domínio ou de fronteira.

Por último, como as formas diferenciais facilitam o tratamento de diferentes classes de Problemas de Valor na Fronteira (PVF), se analisa o caso de uma equação diferencial parcial de segunda ordem e se apresenta a maneira de determinar a derivada de forma de uma solução para um problema variacional, aplicando os teoremas de estrutura expostos nos capítulos anteriores. No final do capítulo se deriva, através do método variacional, um Problema de Valor na Fronteira discutido a partir da perspectiva dual, com a condição de Dirichlet.

Preliminares

Nesta seção preliminar, apresentaremos algumas noções importantes do cálculo exterior de formas diferenciais. Para revisar com mais detalhes as definições e teoremas expostos nesta seção se recomenda ao leitor ler as referências [3, 4].

1 Aplicações multilineares alternadas

Suponha que E, F e H são espaços vetoriais normados. Vamos considerar o espaço vetorial normado $L^l(E;F)$ de aplicações l-lineares contínuas $E^l \to F$.

Definição 1. *Uma aplicação l-linear $f \in L^l(E;F)$ é chamada de alternada se $f(x_1,\ldots,x_l) = 0$ sempre que exista pelo menos um índice i, $(1 \leq i \leq l-1)$ tal que $x_i = x_{i+1}$ (em outras palavras, quando dois elementos adjacentes são iguais). Para $l = 1$, toda função linear $E \to F$ é alternada.*

É evidente que as aplicações l-lineares alternadas formam um subespaço fechado em $L^l(E;F)$ que será denotado por $\Lambda^l(E;F)$; de fato, suponha que $f \in L^l(E;F)$ é o limite de uma sequência $f_n \in \Lambda^l(E;F)$: então $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n|| = 0$, isto é, para $x_1,\ldots,x_l \in E$ o limite de $f_n(x_1,\ldots,x_l)$ é $f(x_1,\ldots,x_l)$.
Quando trocamos dois argumentos adjacentes de f, o valor f muda de sinal:

$$f(\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots) = -f(\ldots,x_{i+1},x_i,\ldots).$$

Podemos trocar sucessivamente argumentos adjacentes de f até obter uma n-tupla de elementos de E, tal que dois argumentos adjacentes sejam iguais. Portanto, se $x_i = x_j$ para $i \neq j$, então $f(x_1,\ldots,x_p) = 0$.

1.1 Produto de aplicações multilineares alternadas

Sejam $f \in \Lambda^l(E;F)$ e $g \in \Lambda^m(E;G)$ duas aplicações alternadas, para definir o produto entre f e g vamos introduzir uma aplicação bilinear contínua

$$\Phi : F \times G \to H$$

com valores no espaço vetorial normado H. Isto permite que f e g sejam associadas mediante uma aplicação $h : E^{l+m} \to H$ como segue,

$$h(x_1, \ldots, x_{l+m}) = \Phi(f(x_1, \ldots, x_l), g(x_{l+1}, \ldots, x_{l+m})). \tag{1}$$

Evidentemente h é multilinear e contínua, mas em geral não é alternada; h é alternada quando é considerada como função das primeiras l variáveis $x_1, \ldots, x_l$ e alternada quando é considerada como função das últimas m variáveis $x_{l+1}, \ldots, x_{l+m}$. Denotaremos este espaço por $\Lambda^{l,m}(E; H)$.

Podemos associar a cada $h \in \Lambda^{l,m}(E; H)$ um $\tilde{h} \in \Lambda^{l+m}(E; H)$ mediante uma aplicação bilinear contínua:

$$\phi_{l,m} : \Lambda^{l,m}(E; H) \to \Lambda^{l+m}(E; H). \tag{2}$$

Por definição, $\phi_{l,m}(h)$ é a aplicação multilinear

$$\tilde{h} = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)(\sigma h) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) h(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l+m)}) \tag{3}$$

onde $\epsilon(\sigma)$ é o sinal da permutação σ e o somatório sendo sobre todas as permutações do conjunto $\{1, \ldots, l+m\}$ tal que

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(l) \qquad e \qquad \sigma(l+1) < \ldots < \sigma(l+m). \tag{4}$$

Podemos ver que $\tilde{h}$, definida em (3) é de fato alternada, ou seja, que dada uma sequência de vetores $x_1, \ldots, x_{l+m} \in E$ na qual dois elementos consecutivos são iguais, isto é, $x_i = x_{i+1}$, temos que $h(x_1, \ldots, x_{l+m}) = 0$. (ver [3, p. 12])

Definição 2. *O produto exterior de $f \in \Lambda^l(E; F)$ e $g \in \Lambda^m(E; G)$ relativo a $\Phi : F \times G \to H$, denotado por $f \wedge g$, é o elemento $\phi_{l,m}(h) \in \Lambda^{l+m}(E; H)$ onde h é elemento de $\Lambda^{l,m}(E; H)$ definido por (1). Como a fórmula:*

$$(f \wedge g)(x_1, \ldots, x_{l+m}) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \Phi(f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l)}), g(x_{\sigma(l+1)}, \ldots, x_{\sigma(l+m)})), \tag{5}$$

sendo o somatório sobre todas as permutações σ de $\{1, \ldots, l+m\}$, satisfazendo (4).

Exemplo: No caso em que $l = m = 1$; $f \in \Lambda^1(E; F)$ e $g \in \Lambda^1(E; G)$, então $f \wedge g \in \Lambda^2(E; H)$ é uma aplicação bilinear

$$(x_1, x_2) \to \Phi(f(x_1), g(x_2)) - \Phi(f(x_2), g(x_1)).$$

Neste caso simples é claro que é alternada já que o lado direito é zero quando $x_1 = x_2$. De maneira mais geral, se $l = 1$ e m é arbitrário, então:

$$(f \wedge g)(x_0, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \Phi(f(x_i), g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)).$$

Suponha que E tem dimensão finita k, e escolhemos uma base para E. Então vamos identificar E com $\mathbb{R}^k$. Um resultado importante é que toda aplicação l-linear alternada $f \in \Lambda^p(\mathbb{R}^k; F)$ possui uma única descrição da forma:

$$f = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_l \leq k} c_{i_1, \ldots, i_l} u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_l}. \tag{6}$$

No lado direito de (6) cada termo da soma é o produto entre uma constante $c_{i_1, \ldots, i_l} \in F$ e uma forma l-linear alternada $u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_l}$. O símbolo $\wedge$ representa um produto exterior de formas l-lineares (que será definido de maneira mais precisa na próxima seção).

2 Formas diferenciais

Seja p um ponto de $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos vetores $q - p, p \in \mathbb{R}^3$(com a origem em p) será chamado de espaço tangente de $\mathbb{R}^3$ em p e denotado por $\mathbb{R}^3_p$. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ da base canônica de $\mathbb{R}^3_0$ serão identificados com os seus transladados $(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p$ no ponto p. A cada espaço tangente $\mathbb{R}^3_p$ podemos associar um espaço dual $(\mathbb{R}^3_p)^*$, que é o conjunto das aplicações lineares $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Uma base para $(\mathbb{R}^3_p)^*$ é obtida a partir de $(dx_i)_p, i = 1, 2, 3$, onde $x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a aplicação que associa a cada ponto sua i-ésima coordenada. O conjunto

$$(dx_i)_p, i = 1, 2, 3$$

é de fato a base dual de $(e_i)_p$ onde

$$(dx_i)_p(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & se \quad i \neq j \\ \\ 1, & se \quad i = j. \end{cases}$$

Definição 3. *Um campo de formas lineares em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação ω que associa a cada $p \in \mathbb{R}^3$ um elemento $\omega(p) \in (\mathbb{R}^3_p)^*$. ω pode ser escrito como*

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} a_i dx_i,$$

onde a_i são funções reais em $\mathbb{R}^3$. Se as funções a_i fossem diferenciáveis, ω seria chamada de forma diferencial de grau 1.

Agora, vamos estender a noção de forma diferencial a $\mathbb{R}^n$. Seja $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$ o espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ no ponto p e $(\mathbb{R}^n_p)^*$ seu espaço dual, seja $\Lambda^l(\mathbb{R}^n_p)^*$ o conjunto de todas as aplicações l-lineares alternadas

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n_p \times \ldots \times \mathbb{R}^n_p}_{l-vezes} \to \mathbb{R}.$$

Com as operações usuais, $\Lambda^l(\mathbb{R}^n_p)^*$ é um espaço vetorial. Dados $\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in (\mathbb{R}^n_p)^*$, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_l$ de $\Lambda^l(\mathbb{R}^n_p)^*$ colocando

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_l)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l) = \det(\varphi_i(\mathbf{v}_j)), \quad i, j = 1, \ldots, l.$$

Podemos concluir a partir das propriedades de determinantes que $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_l$ é de fato l-linear alternada. Em particular $(dx_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge (dx_{i_l})_p \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n_p)^*, i_1 = 1, \ldots, i_l = n$. Esse elemento será denotado por $(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l})_p$.

O conjunto $\{(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l})_p, i_1 < \ldots < i_l, i_j \in \{1 \ldots, n\}\}$ é uma base para $\Lambda^l(\mathbb{R}^n_p)^*$ (veja [4]).

Definição 4. *Uma l-forma em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que associa a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n_p)^*$. ω pode ser escrita como*

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_l} a_{i_1,\ldots,i_l}(p)(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l})_p, i_j \in 1 \ldots, l,$$

onde $a_{i_1,\ldots,i_l}$ são funções reais de $\mathbb{R}^n$, que se fossem diferenciáveis, a ω seria chamada de l-forma diferencial.

Exemplo: Seja f, g, h, s funções reais diferenciais em $\mathbb{R}^4$, podemos escrever as seguintes formas:
0-formas, f, g, h e s são funções reais em $\mathbb{R}^4$,
1-formas, $f\ dx_1 + g\ dx_2 + h\ dx_3 + s\ dx_4$,
2-formas, $f\ dx_1 \wedge dx_2 + s\ dx_3 \wedge dx_4$,
3-formas, $h\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + g\ dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$,
4-formas, $f\ \ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

Vamos denotar por $\mathscr{DF}^{l,m}(\Omega)$ o conjunto de todas as l-formas diferenciais de classe C^m, definidas em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Para o nosso trabalho vamos manter a notação usada em [1]. Logo, uma l-forma diferencial ω em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é uma aplicação com valores no espaço de formas multilineares alternadas $\Lambda^l(\mathbb{R}^d)$

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \mapsto \omega(x) \in \Lambda^l(\mathbb{R}^d), \tag{7}$$

onde todos os componentes $\omega_I \in C^m(\bar{\Omega})$ e a somatória aplicada sobre todas as l-permutações crescentes $I = (i_1 \ldots, i_l)$ com $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq d$, e denotamos $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}$.

Anteriormente definimos o produto de formas multilineares alternadas, e isso nos permite introduzir o produto exterior de formas diferenciais.

2.1 Produto exterior

Definição 5. *O produto exterior das formas diferenciais ω (uma l-forma) e η (uma k-forma), denotado por $\omega \wedge \eta$ é a forma diferencial*

$$p \mapsto \omega(p) \wedge \eta(p).$$

Se ω e η são de classe C^m, seu produto exterior $\omega \wedge \eta$ é de classe C^m. Nós definimos assim uma aplicação bilinear

$$\mathscr{D}\mathscr{F}^{l,m}(\bar{\Omega}) \times \mathscr{D}\mathscr{F}^{k,m}(\bar{\Omega}) \to \mathscr{D}\mathscr{F}^{l+k,m}(\bar{\Omega}).$$

Usando (5), a forma explícita dessa definição é

$$(\omega \wedge \eta)(x; \xi_1, \ldots, \xi_{l+k}) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\Phi(\omega(x; \xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(l)}), \eta(x; \xi_{\sigma(l+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(l+k)})), \tag{8}$$

sendo a somatória sobre todas as permutações σ de $\{1, \ldots, l+k\}$, satisfazendo (4).

Usando as representações canônicas de ω e η:

$$\omega = \omega(p)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l},$$

$$\eta = \eta(p)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k},$$

o produto $\omega \wedge \eta$, relativo a uma aplicação linear contínua Φ, definida em (2), é

$$\omega \wedge \eta = \Phi(\omega(p), \eta(p))\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

Aqui, $\Phi(\omega(p), \eta(p))$ é o produto das funções ω e η relativo a Φ; por exemplo, se tanto ω como η são funções numéricas e $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é multiplicação de escalares, $\Phi(\omega(p), \eta(p))$ é simplesmente o produto das funções ω e η. Resta determinar a forma canônica de

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

Podemos determinar dois casos. Primeiro, se $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k$ não são todos diferentes, o produto é zero. Segundo, se $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k$ são todos distintos, temos que escrever a permutação σ em ordem estritamente crescente $r_1, \ldots, r_{l+k}$, temos então

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} = \epsilon(\sigma)\, dx_{r_1} \wedge \ldots \wedge dx_{r_{l+k}}.$$

Exemplo: Seja $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$ e $\eta = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$ uma 2-forma em $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\omega \wedge \eta = x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_3 x_1 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = (x_3 x_1 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

2.2 Produto interior

Vamos definir o produto interior (ou contração) de uma forma diferencial $\omega \in \mathscr{DF}^{l,m}(\bar{\Omega})$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definição 6. *[18] Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ um campo vetorial e $\omega \in \Lambda^l(\Omega)$ uma l-forma, o produto interior $i_{\mathbf{v}}\omega$ é uma $(l-1)$-forma definida por :*

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}}\omega &= 0 && se\ \omega\ \text{é}\ uma\ 0 - forma, \\ i_{\mathbf{v}}\omega &= \omega(\mathbf{v}) && se\ \omega\ \text{é}\ uma\ 1 - forma, \\ i_{\mathbf{v}}\omega(\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_l) &= \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_l) && se\ \omega\ \text{é}\ uma\ l - forma. \end{aligned}$$

Para ver como isto funciona vamos estudar um exemplo simples. Vamos considerar umas 2-formas básicas, $dx \wedge dy, dy \wedge dz$ e $dx \wedge dz$. Seja $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, temos

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}}(dx \wedge dy) &= (dx \wedge dy)(\mathbf{v}, \cdot) \\ &= dx(\mathbf{v})dy(\cdot) - dy(\mathbf{v})dx(\cdot) \\ &= v_1 dy - v_2 dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}}(dy \wedge dz) &= (dy \wedge dz)(\mathbf{v}, \cdot) \\ &= dy(\mathbf{v})dz(\cdot) - dz(\mathbf{v})dy(\cdot) \\ &= v_2 dz - v_3 dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}}(dx \wedge dz) &= (dx \wedge dz)(\mathbf{v}, \cdot) \\ &= dx(\mathbf{v})dz(\cdot) - dz(\mathbf{v})dx(\cdot) \\ &= v_1 dz - v_3 dx. \end{aligned}$$

Relembramos que o conjunto de todas as formas diferenciais de classe C^m será denotado por $\mathscr{DF}^{l,m}(\Omega)$ e por $\mathscr{DF}^{l,\infty}(\bar{\Omega})$ para formas diferenciais de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$. Além disso, $\mathbf{H}^s(\Omega; \Lambda^l(\mathbb{R}^d))(s \in \mathbb{R}_0^+)$ denota o espaço de todas as formas diferenciais com cada componente em $\mathbf{H}^s(\Omega)$, onde $\mathbf{H}^s(\Omega)$ é um espaço de Sobolev, que pode ser visto como um espaço de Hilbert obtido completando $\mathscr{D}\mathscr{F}^{l,\infty}(\bar{\Omega})$ com respeito à norma

$$\|\omega\|^2_{\mathbf{H}^s(\Omega;\Lambda^l(\mathbb{R}^d))} = \sum_I \|\omega_I\|^2_{\mathbf{H}^s(\Omega)}. \tag{9}$$

Em particular, usaremos a notação $\mathbf{L}^2(\Omega;\Lambda^l(\mathbb{R}^d))$ em vez de $\mathbf{H}^0(\Omega;\Lambda^l(\mathbb{R}^d))$.

2.3 Derivada exterior

Vamos considerar uma operação importante que não possui procedimento análogo na teoria das aplicações alternadas. Seja um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, queremos associar a cada $\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{l,\infty}(\bar{\Omega})$ sua $(l+1)$-forma diferencial, denotada por $\boldsymbol{d}\omega$ e chamada de derivada exterior. Pode-se representar como:

$$\boldsymbol{d}\omega = \sum_{i=1}^{d} \sum_I \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{l+1,\infty}(\bar{\Omega}). \tag{10}$$

Exemplo: vamos mostrar um exemplo clássico em $\mathbb{R}^3$ com as coordenadas x, y, z, seja

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

onde P, Q e R são funções de classe C^1 de x, y, z. Um cálculo simples tem como resultado a forma canônica:

$$\boldsymbol{d}\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$$

isto é:

$$\boldsymbol{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Vamos escrever uma propriedade fundamental da derivada exterior.

Teorema 1. *Seja $\omega \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{l,m}(\bar{\Omega})$ uma forma diferencial de classe C^m com $m \geq 2$, então*

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}\omega = 0. \tag{11}$$

Prova: Primeiro, vamos assumir que $\omega \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{0,m}(\bar{\Omega})$, isto é, ω é uma função $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ que associa a cada $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ um valor $f(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}f) &= \boldsymbol{d}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j\right), \end{aligned}$$

onde
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$
e $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Portanto, obtemos
$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}f) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0. \tag{12}$$
Agora, seja $\omega = \sum a_I dx_I$, sem perda de generalidade pode-se supor o caso $\omega = a_I dx_I$ com $a_I \neq 0$. Temos
$$\boldsymbol{d}\omega = da_I \wedge (dx_I) + a_I d(dx_I),$$
onde $d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0$, logo,
$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d(da_I) \wedge (dx_I) + da_I \wedge d(dx_I) = 0,$$
já que $d(da_I) = 0$ e $d(dx_I) = 0$, provando assim o teorema. $\square$

2.4 *Pullback*

Se $\mathscr{T} : \hat{\Omega} \to \Omega$ for um difeomorfismo entre duas variedades suaves de $\mathbb{R}^d$, então o *pullback* $\mathscr{T}^* : \mathscr{DF}^{l,\infty}(\bar{\Omega}) \to \mathscr{DF}^{l,\infty}(\hat{\Omega})$ é dado por:
$$((\mathscr{T}^*\omega)(\hat{x})\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l) = (\omega(\mathscr{T}(\hat{x})))\,(D\mathscr{T}(\hat{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathscr{T}(\hat{x})\mathbf{v}_l), \tag{13}$$
onde $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \in \mathbb{R}^d$ e a aplicação linear $D\mathscr{T}(\hat{x}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é o jacobiano de $\mathscr{T}$ em $\hat{x}$. O *pullback* satisfaz a regra de transformação
$$\int_{\mathscr{T}(\hat{\Omega})} \omega = \int_{\hat{\Omega}} \mathscr{T}^*\omega. \tag{14}$$
É importante lembrar que o *pullback* comuta com a derivada exterior, isto é,
$$\mathscr{T}^*(\boldsymbol{d}\omega) = \boldsymbol{d}(\mathscr{T}^*\omega), \qquad \forall \omega \in \mathscr{DF}^{l,\infty}(\bar{\Omega}), \tag{15}$$
e com o produto exterior
$$\mathscr{T}^*(\omega \wedge \eta) = \mathscr{T}^*\omega \wedge \mathscr{T}^*\eta, \qquad \forall \omega \in \mathscr{DF}^{l,\infty}(\bar{\Omega}), \forall \eta \in \mathscr{DF}^{k,\infty}(\bar{\Omega}). \tag{16}$$

2.5 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes é um resultado central na teoria de integração em variedades que relaciona a derivada exterior e a integração de formas diferenciais, além de generalizar o teorema fundamental do cálculo.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ uma variedade diferenciável de dimensão d orientada com fronteira $\partial\Omega$. A fronteira tem orientação induzida [13].

Teorema 2 (Teorema de Stokes (formas diferenciais))**.** *Seja ω uma $(l-1)$-forma $(l \leq d)$ em Ω, então:*

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{d}\omega = \int\limits_{\partial\Omega} \omega. \tag{17}$$

O integrando ω no lado direito pode se entender como a restrição de ω em $\partial\Omega$. Se a fronteira for vazia, o lado direito pode se interpretar como zero.

Prova: Ver [5, p.310]. □

O teorema de Stokes mostra que, conhecendo ω na fronteira de Ω, podemos prever uma propriedade dela no interior: a integral total da sua derivada.

Exemplos

1. Seja $\Omega = [a, b]$, então $d = 1$, e uma 0-forma ω, isto é, uma função $f \in C^\infty([a, b])$. A fronteira $\partial\Omega$ consiste em dois pontos a e b, orientados por -1 e $+1$, respectivamente, então:

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{d}\omega = \int\limits_{a}^{b} \boldsymbol{d}f = \int\limits_{a}^{b} f'(x)dx$$

e

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = f(b) - f(a).$$

A interpretação da integral de uma 0-forma sobre uma variedade de dimensão 1 é uma soma ponderada pelo peso das suas orientações ± 1. Pode-se ver que o teorema de Stokes se reduz ao teorema fundamental do cálculo.

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ fechado e limitado, cuja fronteira é uma curva simples fechada $\partial\Omega$. Seja $\mathbf{v} = (f, g)$ um campo de funções de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ definido em Ω, consideremos uma 1-forma $\omega = f\ dx + g\ dy$ em Ω, então:

$$\boldsymbol{d}\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy.$$

Suponha que fixamos a orientação $dx \wedge dy$ tal que a ordem das coordenadas seja (x, y).

Usando o teorema de Stokes temos:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\Omega} f\ dx + g\ dy &= \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy \\ &= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.\end{aligned}$$

O único que resta descobrir é a orientação da integral de linha; para isso, vamos assumir que $\gamma : [0, T] \to \partial\Omega$ é uma parametrização da curva com pontos $\gamma(0) = \gamma(T)$ (uma curva de Jordan), cuja orientação é determinada como segue: se **n** e **t** são o vetor normal unitário à curva e o vetor tangente unitário positivo, respectivamente, em algum ponto dado t de γ, então (**n**,**t**) está orientado positivamente.

Nos exemplos a seguir vamos usar algumas definições da geometria diferencial úteis que o leitor encontrará na seção de Anexos (atlas, partição de unidade, etc).

3. Seja Ω uma superfície compacta suave e orientada em $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ são vetores unitários nas direções dos eixos x, y e z, respectivamente. Seja $\mathbf{v} = (f, g, h)$ um campo diferenciável (f, g, h funções de três variaveis) e consideremos ω uma 1-forma em Ω, isto é,

$$\omega = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$$

definida em uma vizinhança aberta de Ω em $\mathbb{R}^3$. Por cálculo direto da derivada exterior de ω temos

$$\boldsymbol{d}\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Considerando um atlas orientado $\mathcal{A} = \{F_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) : U_\alpha \to \mathbb{R}^3\}$ de Ω com uma partição de unidade $\{\rho_\alpha : \Omega \to [0, 1]\}$, podemos expressar cada um dos termos $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$ e $dz \wedge dx$ em termos de $du_\alpha \wedge dv_\alpha$, logo,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}\omega &= \sum_\alpha \rho_\alpha \boldsymbol{d}\omega \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha \left[\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy\right] \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha \left\{\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)}\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)}\right\} du_\alpha \wedge dv_\alpha.\end{aligned}$$

Em cada carta de coordenadas locais $F_\alpha(U_\alpha)$, o vetor normal a Ω em $\mathbb{R}^3$ pode-se encontrar usando o produto vetorial

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha} = \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)}\mathbf{i} + \det \frac{\partial(x,z)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)}\mathbf{j} + \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)}\mathbf{k}.$$

Temos que o rotacional do campo vetorial $\mathbf{v}$ é

$$\mathbf{curl\ v} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Portanto, $\boldsymbol{d}\omega$ pode ser reescrito como

$$\boldsymbol{d}\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha (\mathbf{curl\ v}) \cdot \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}\right) du_\alpha \wedge dv_\alpha.$$

O vetor normal unitário à superfície Ω é

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}}{\left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}\right|},$$

e usando o fato de

$$dS = \sum_\alpha \rho_\alpha \left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}\right| du_\alpha dv_\alpha,$$

(ver página 64 em anexos) temos que

$$\int_\Omega \boldsymbol{d}\omega = \int_\Omega \mathbf{curl\ v} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Usando o teorema de Stokes (17), temos finalmente

$$\int_\Omega (\mathbf{curl\ v}) \cdot \mathbf{N} dS = \int_{\partial\Omega} f dx + g dy + h dz.$$

Os vetores $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ tem a mesma orientação de $\{\nu, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ onde ν é um vetor binormal da curva $\partial\Omega$, $\mathbf{T}$ é o vetor tangencial a $\partial\Omega$ e $\mathbf{N}$ é o vetor normal a Ω em $\mathbb{R}^3$.

Para entender a orientação de $\partial\Omega$, pode-se parametrizar localmente Ω pelas coordenadas (s,t), tal que $\{t = 0\}$ são os pontos na curva $\partial\Omega$, ou seja, $\partial\Omega$ é localmente parametrizada por s. O vetor binormal unitário a $\partial\Omega$ é dado por $\nu = -\frac{\partial}{\partial t}$ e escolhemos por convenção que a orientação de $\{\nu, \frac{\partial}{\partial s}\}$ seja a mesma que $\{\frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\}$. Portanto, $\{\nu, \frac{\partial}{\partial s}, \mathbf{N}\}$ tem a mesma orientação de $\{\frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha}, \mathbf{N}\}$. Finalmente vemos que $\{\frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha}, \mathbf{N}\}$ tem a orientação usual $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o domínio de integração fechado e limitado com fronteira $\partial\Omega$, seja $\mathbf{v} = (f, g, h)$ um campo diferenciável definido em Ω, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ são vetores unitários nas direções

dos eixos x, y e z, respectivamente. Consideremos ω uma 2-forma em Ω definida como

$$\omega = f(x,y,z)dy \wedge dz + g(x,y,z)dz \wedge dx + h(x,y,z)dx \wedge dy.$$

Então

$$\boldsymbol{d}\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Portanto, temos que

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{d}\omega = \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{v})dV,$$

onde $\mathrm{div}(f,g,h) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$ é a divergência do campo vetorial $\mathbf{v}$. Por outro lado, vamos considerar um atlas $\mathscr{A} = \left\{F_\alpha(u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha) : U_\alpha \to \mathbb{R}^3\right\}$ de Ω tal que, para uma parametrização local da fronteira, os pontos da fronteira estão dados por $\{w_\alpha = 0\}$ e os pontos do interior por $\{w_\alpha > 0\}$, logo $\partial\Omega$ está localmente parametrizada por (u_α, v_α).

Podemos escolher a orientação de (u_α, v_α) de tal forma que $\left\{-\frac{\partial}{\partial w_\alpha}, \frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right\}$ tenha a mesma orientação de $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, equivalentemente $\left\{\frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha}, -\frac{\partial}{\partial w_\alpha}\right\}$ tem a mesma orientação de $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Além disso, seja $\mathbf{N}$ um vetor normal (ver [7]) a $\partial\Omega$, dado por

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}}{\left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}\right|}.$$

Logo, $\left\{\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}, \mathbf{N}\right\}$ tem a mesma orientação de $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Portanto, $-\frac{\partial}{\partial w_\alpha}$ e $\mathbf{N}$ apontam na mesma direção. Vamos reescrever ω em termos de $\boldsymbol{d}u_\alpha \wedge \boldsymbol{d}v_\alpha$ sobre cada carta coordenada:

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_\alpha \rho_\alpha \omega \\
&= \sum_\alpha \rho_\alpha \left(f \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)} + g \det \frac{\partial(x,z)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)} + h \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u_\alpha, v_\alpha)}\right) \boldsymbol{d}u_\alpha \wedge \boldsymbol{d}v_\alpha \\
&= \sum_\alpha \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}\right) \rho_\alpha \boldsymbol{d}u_\alpha \wedge \boldsymbol{d}v_\alpha \\
&= \sum_\alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \rho_\alpha \left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}\right| \boldsymbol{d}u_\alpha \wedge \boldsymbol{d}v_\alpha.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \rho_\alpha \left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}\right| \boldsymbol{d}u_\alpha \boldsymbol{d}v_\alpha = \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA.$$

Podemos concluir para este exemplo, que o teorema de Stokes se reduz ao teorema da divergência.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA.$$

Os exemplos anteriores mostram como o teorema de Stokes generaliza o teorema fundamental do cálculo e os três teoremas clássicos do cálculo vetorial. Esses resultados serão úteis mais tarde.

2.6 Espaços de Sobolev de formas diferenciais

Sobre uma variedade orientada riemanniana podemos definir os espaços de Sobolev $H^s(\Omega)$ e $W_p^s(\Omega)$ de funções com derivadas em $L^2(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$, respectivamente. Tais espaços de Sobolev são espaços de Hilbert de formas diferenciais [2, 15]. Os espaços de Hilbert importantes para as formas diferenciais são

$$H^k\left(\boldsymbol{d}, \Omega, \Lambda_l(\mathbb{R}^d)\right) := \left\{\omega \in H^k\left(\Omega, \Lambda_l(\mathbb{R}^d)\right) | \boldsymbol{d}\omega \in H^k\left(\Omega, \Lambda_{l+1}(\mathbb{R}^d)\right)\right\}$$

para $k \in \mathbb{N}$, e a norma está definida por:

$$\| \omega \|^2_{H^k\left(\mathbf{d}, \Omega, \Lambda_l(\mathbb{R}^d)\right)} := \| \omega \|^2_{H^k\left(\Omega, \Lambda_l(\mathbb{R}^d)\right)} + \| \boldsymbol{d}\omega \|^2_{H^k\left(\Omega, \Lambda_{l+1}(\mathbb{R}^d)\right)} .$$

Quando $k = 0$, simplesmente escrevemos $H\left(\boldsymbol{d}, \Omega, \Lambda_l(\mathbb{R}^d)\right)$.
Definimos os espaços de Banach:

$$\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) |\operatorname{div}(\mathbf{u}) \in L^2(\Omega)\},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) |\ \mathbf{curl}(\mathbf{u}) \in L^2(\Omega)\},$$

onde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, que terá definições especiais em termos de *proxies* vetoriais em $\mathbb{R}^3$ (ver capítulo 3).

2.7 Operador de Hodge

Antes de falar do operador de Hodge precisamos conhecer a definição de métrica riemanniana.

Definição 7. *Uma métrica riemanniana g sobre uma variedade suave Ω em $\mathbb{R}^n$ é um produto interno escolhido, tal que, para cada $x \in \Omega$, $g_x : T_x\Omega \times T_x\Omega \to \mathbb{R}$, ($T_x\Omega$ é o plano tangente a Ω em x), $g = g_x$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$g(u, v) = g(v, u)$ para todo $u, v \in T_x\Omega$,*

2. *$g(u, u) \geq 0$ para todo $u \in T_x\Omega$,*

3. *$g(u, u) = 0$ se e somente se $u = 0$.*

Em $\mathbb{R}^n$ a métrica riemanniana é o próprio produto interno de $\mathbb{R}^n$, isto é, $g_x(u,v) = \langle u, v\rangle$. Agora, podemos definir o operador de Hodge, que será representado por $(*)$.

Definição 8. *Seja Ω uma variedade de dimensão d e g uma métrica riemanniana, o operador de Hodge $* : \Lambda^l(\Omega) \to \Lambda^{d-l}(\Omega)$ será o único isomorfismo que aplica qualquer uma l-forma em sua $(d-l)$-forma dual sobre a variedade, e satisfaz:*

$$\omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta\rangle \nu \qquad \omega, \eta \in \Lambda^l(\Omega),$$

onde ν é o elemento de volume. O operador $*$ depende da métrica riemanniana g em Ω e também da orientação escolhida. O volume de forma ν é definido (ver [14]) em coordenadas locais sobre a variedade Ω, como

$$\nu = \mathrm{vol} = *(1) = \sqrt{g} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

O volume total da variedade Ω é dado por

$$\mathrm{vol}\,\Omega = \int_\Omega *(1).$$

Por exemplo, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas temos

$$*dx = dy \wedge dz, \quad *dy = dz \wedge dx, \quad *dz = dx \wedge dy.$$

O operador $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $* * \omega = (-1)^{l(d-l)}\omega$,
2. $*(c_1\omega + c_2\eta) = c_1(*\omega) + c_2(*\eta)$,
3. $\omega \wedge *\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0$.

Definição 9. *(Produto interno Hodge) Para quaisquer duas l-formas ω e η em $\Lambda^l(\Omega)$ com suporte compacto sobre uma variedade Ω de dimensão d, podemos definir o produto L^2-interno de Hodge como*

$$(\omega, \eta) = \int_\Omega \langle \omega, \eta\rangle * (1) = \int_\Omega \omega \wedge *\eta,$$

onde $\omega \wedge *\eta$ é uma d-forma, o produto interno é linear e simétrico, $(\omega, \eta) = (\eta, \omega)$.

Para especificar a métrica riemanniana do operador Hodge será usada a notação $*_g$, onde g é uma métrica riemanniana.

Cálculo de forma

Existem muitas funções e funcionais que dependem da forma de um conjunto ou domínio. Um exemplo é o funcional de volume,

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} 1,$$

para um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Outro é o funcional de área da supérficie

$$A(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1.$$

Esses tipos de quantidades aparecem em uma variedade de problemas de otimização. O objetivo principal do cálculo de forma é calcular as derivadas de funções com respeito a uma geometria Ω. Frequentemente essas derivadas de forma podem ser escritas como integrais na fronteira, neste caso falamos de fórmula de Hadamard. Também, com as derivadas de forma podemos estudar a dependência de soluções de equações diferenciais parciais em deformações de um domínio. Neste trabalho o estudo do cálculo de forma está baseado no método de velocidade [11, 16, 17].

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um domínio limitado de classe C^m $(m \geq 2)$ com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ e seja $D \subset \mathbb{R}^d$ um *hold-all domain* com fronteira suficientemente suave, tal que $\Omega \Subset D$. Consideramos $\bar{t} > 0$ e $\mathbf{v} : [0, \bar{t}] \times \bar{D} \to \mathbb{R}^d$, onde $\mathbf{v} \in C([0, \bar{t}], \mathbb{R}^d)$ é Lipschitz em x e $\mathbf{v}(\cdot, x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, \forall x \in \partial\bar{D}$, e uma configuração inicial $\mathbf{x}(0, X) = X \in \mathbb{R}^d$. Introduzimos uma família de fluxos $T_t(\mathbf{v})X = \mathbf{x}(t, X)$, definida como solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t, X) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t, X)), \qquad t \in [0, \bar{t}] \tag{19}$$

$$\mathbf{x}(0, X) = X, \qquad X \in D. \tag{20}$$

Sabemos pelo teorema de Picard-Lindelöf que a solução do problema (19), (20) existe e é única. O fluxo gera uma família de difeomorfismos de classe C^m

$$T_t(\mathbf{v})X := \mathbf{x}(t, X), \quad t \geq 0, \quad X \in D. \tag{21}$$

Portanto, podemos definir uma família de domínios deformados

$$\Omega_t(\mathbf{v}) := T_t(\mathbf{v})(\Omega) = \{T_t(\mathbf{v})(X) : X \in \Omega\}\,. \tag{22}$$

Note que o campo normal $\mathbf{n}_t(\mathbf{v})$ sobre a fronteira $\Gamma_t(\mathbf{v}) = \partial(\Omega_t(\mathbf{v}))$ pertence a $C^{m-1}(\Gamma_t, \mathbb{R}^d)$, (ver [**?** , p.16].

Definição 10. *(derivada de Lie [18]) Seja ω uma l-forma, T_t um fluxo em direção de um campo vetorial $\mathbf{v}$, a derivada de Lie $\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega$ se define como*

$$\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega := \frac{d}{dt}T_t(\mathbf{v})^*\omega\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{T_t(\mathbf{v})^*\omega - \omega}{t}, \tag{23}$$

onde $T_t(\mathbf{v})^*$ é o pullback de $T_t(\mathbf{v})$, que já havíamos mencionado na seção 2.4.

Pela fórmula de Cartan [18], podemos representar a derivada de Lie como

$$\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{d})\omega. \tag{24}$$

Note-se que a derivada de Lie e a derivada exterior comutam:

$$\boldsymbol{d}\mathscr{L}_{\mathbf{v}} = \mathscr{L}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{d}. \tag{25}$$

3 Cálculo de forma para formas diferenciais

O primeiro passo é conhecer os teoremas de estrutura fundamentais de Hadamard da perspectiva das formas diferenciais e das integrais de domínio e de fronteira. Em virtude do teorema de Stokes podemos tratar as integrais de fronteira como integrais de domínio.
Vamos considerar o conjunto $\mathscr{P}(D) = \{\Omega : \Omega \Subset D, \Omega \text{ de classe } C^m\}$ de subconjuntos de D. Um funcional de forma é uma aplicação

$$J : \mathscr{A}(D) \to \mathbb{K}, \tag{26}$$

onde $\mathscr{A}(D)$ é um subconjunto de $\mathscr{P}(D)$ e $\mathbb{K}$ é uma representação de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um domínio Ω de classe C^m transformado por um campo de velocidade $\mathbf{v} \in C^m(D, \mathbb{R}^d)$ será representado mediante $\Omega_t(fv)$. Podemos escolher $\mathscr{A}(D) = \{\Omega_t(\mathbf{v}); t \in [0, \bar{t}]\}$ onde $\Omega_0(\mathbf{v}) = \Omega$ e dado em $\mathscr{P}(D)$. (**Nota:** é provável que precisemos ter domínios de classe C^∞).

Definição 11. *(Derivada de forma para funcionais de forma) Seja um campo vetorial $\mathbf{v} \in C^m(D, \mathbb{R}^d)$. Dizemos que o funcional de forma J tem uma derivada de forma em Ω na direção*

$\mathbf{v}$*, se o limite a seguir existir e for finito, linear e continuo*

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(T_t(\mathbf{v})(\Omega)) - J(\Omega)}{t}. \tag{27}$$

Denotaremos este limite como $\langle dJ(\Omega); \mathbf{v}\rangle$*.*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ uma variedade de dimensão d, limitada, e de classe C^m. O funcional de domínio para uma densidade de forma $\omega \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{d,m}(\mathbb{R}^d)$ definida globalmente é

$$J(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \omega. \tag{28}$$

Para definir as derivadas de forma de ordem superior para integrais de domínio e de fronteira introduzimos os campos vetoriais $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, e definimos o domínio transformado como

$$\Omega_{t_1,\ldots,t_k}(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}) = T_{t_1}(\mathbf{v_1})(\ldots (T_{t_k}(\mathbf{v_k})(\Omega))). \tag{29}$$

Portanto, a integral sobre o domínio transformado é

$$J_{\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_k}}(t_1, \ldots, t_k) = \int\limits_{\Omega_{t_1,\ldots,t_k}(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_k})} \omega. \tag{30}$$

Definição 12. *(Derivadas de forma para integrais de domínio [11]). Para um funcional de domínio* $J(\Omega)$ *e os campos de velocidade* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ *definimos as derivadas de forma*

$$\begin{aligned}
\langle dJ(\Omega); \mathbf{v}\rangle &= \frac{d}{dt} J_{\mathbf{v}}(t)\Big|_{t=0}, \\
\left\langle d^2 J(\Omega); \mathbf{v}, \mathbf{w}\right\rangle &= \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial}{\partial t} J_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(t,s)\Big|_{t=0}\right\}\Big|_{s=0}, \\
\left\langle d^k J(\Omega); \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}\right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t_k}\left\{\ldots \frac{\partial}{\partial t_1} J_{\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_k}}(t_1, \ldots, t_k)\Big|_{t_1=0} \ldots\right\}\Big|_{t_k=0}.
\end{aligned}$$

Em particular, $dJ(\Omega)$ *e* $d^2J(\Omega)$ *são o gradiente de forma e a Hessiana de forma, respectivamente.*

4 Integrais de domínio

A seguir vamos apresentar os primeiros resultados registrados em [1] referentes às integrais de domínio.

Teorema 3. *(Primeiro teorema de estrutura fundamental) O funcional de domínio* $J(\Omega)$ *dado por (28) tem derivada de forma de primeira ordem*

$$\langle dJ(\Omega);\mathbf{v}\rangle = \int\limits_{\Omega} \mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\omega = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\omega, \tag{31}$$

derivada de forma de segunda ordem

$$\langle d^2 J(\Omega);\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \int\limits_{\Omega} \mathscr{L}_{\mathbf{w}}\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{w}}(\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{v}\omega) = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{i}_{w}(\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{v}\omega), \tag{32}$$

e derivadas de forma para ordem superior $k > 2$

$$\begin{aligned}\left\langle d^k J(\Omega);\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_k}\right\rangle &= \int\limits_{\Omega} (\mathscr{L}_{\mathbf{v_k}}\ldots\mathscr{L}_{\mathbf{v_1}})\omega \\ &= \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v_k}}(\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v_{k-1}}}(\ldots(\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v_1}}\omega))) \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{i}_{\mathbf{v_k}}(\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v_{k-1}}}(\ldots(\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v_1}}\omega))).\end{aligned} \tag{33}$$

Prova: Para transformar o domínio deformado Ω_t em Ω usamos o *pullback* e a definição da derivada de Lie de uma densidade de forma junto com a fórmula de Cartan.

$$\begin{aligned}\langle dJ(\Omega);\mathbf{v}\rangle &= \frac{d}{dt}J_{\mathbf{v}}(t)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t(\mathbf{v})}\omega\right)\Bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\int\limits_{T_t(\mathbf{v})\Omega}\omega\right)\Bigg|_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} T_t(\mathbf{v})^*\omega\right)\Bigg|_{t=0} = \int\limits_{\Omega}\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega = \int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{d})\omega \\ &= \int\limits_{\Omega}\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\omega = \int\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\omega.\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{d}\omega$ é uma $(d{+}1)$-forma numa variedade d-dimensional, temos que $\boldsymbol{d}\omega = 0$. Uma análise semelhante é usada para obter a derivada de forma de segunda ordem:

$$
\begin{aligned}
\left\langle d^2 J(\Omega); \mathbf{v}, \mathbf{w} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial s}\left\{ \frac{\partial}{\partial t} J_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(t,s)\Big|_{t=0} \right\}\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_{t,s}(\mathbf{v},\mathbf{w})} \omega\right)\Bigg|_{t=0}\right)\Bigg|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} T_s(\mathbf{w})^* T_t(\mathbf{v}))^* \omega\right)\Bigg|_{t=0}\right)\Bigg|_{s=0} \\
&= \int_{\Omega} \mathscr{L}_{\mathbf{w}} \mathscr{L}_{\mathbf{v}} \omega = \int_{\Omega} (\boldsymbol{d i}_{\mathbf{w}} + \boldsymbol{i}_{\mathbf{w}} \boldsymbol{d})(\boldsymbol{d i}_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{d})\omega \\
&= \int_{\Omega} \boldsymbol{d i}_{\mathbf{w}}(\boldsymbol{d i}_{\mathbf{v}}\omega) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{i}_{\mathbf{w}}(\boldsymbol{d i}_{\mathbf{v}}\omega).
\end{aligned}
$$

Mediante passos recursivos podemos obter as derivadas de forma para ordens superiores. □

Os colchetes de Lie entram em jogo para conhecer a estrutura da Hessiana de forma, isto é, a composição de transformações consecutivas de Ω ao longo de dois campos de velocidade. Para dois campos de velocidade $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ diferenciáveis, o colchete de Lie é definido como

$$[\mathbf{w}, \mathbf{v}] = (D\mathbf{v})\mathbf{w} - (D\mathbf{w})\mathbf{v},$$

com $D\mathbf{w}$ e $D\mathbf{v}$ sendo os jacobianos de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, respectivamente. Observando a expressão (32) temos que:

$$\langle d^2 J(\Omega); \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \int_{\Omega} \mathscr{L}_{\mathbf{w}} \mathscr{L}_{\mathbf{v}} \omega \quad \text{e} \quad \langle d^2 J(\Omega); \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathscr{L}_{\mathbf{v}} \mathscr{L}_{\mathbf{w}} \omega, \tag{34}$$

que, junto com a identidade da derivada de Lie (ver [18, s. 4.1]) seguinte:

$$\mathscr{L}_{[\mathbf{w},\mathbf{v}]}\omega = \mathscr{L}_{\mathbf{w}} \mathscr{L}_{\mathbf{v}} \omega - \mathscr{L}_{\mathbf{v}} \mathscr{L}_{\mathbf{w}} \omega, \tag{35}$$

nos permite mostrar a seguinte condição de simetria, condição que também pode ser encontrada por cálculo vetorial [11, p.504].

Corolário 1. *A condição suficiente para a simetria da Hessiana de forma de uma integral de domínio, isto é,*

$$\langle d^2 J(\Omega); \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle d^2 J(\Omega); \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle, \tag{36}$$

é

$$\int_{\Omega} \mathscr{L}_{[\mathbf{w},\mathbf{v}]}\omega = 0. \tag{37}$$

Prova: É suficiente usar a identidade dos colchetes de Lie (35). □

É importante dizer que, em geral, a Hessiana não é simétrica, ou seja, podem existir dois campos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, tais que

$$\langle d^2 J(\Omega); \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle \neq \langle d^2 J(\Omega); \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle.$$

Exemplo: Seja Ω um disco unitário em $\mathbb{R}^2$, cuja fronteira Γ é um círculo unitário. Considere o funcional

$$J(\Omega) = \int_\Omega dx.$$

Então

$$\langle dJ(\Omega); \mathbf{v}\rangle = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_\Gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} d\Gamma,$$

e

$$\langle d^2 J(\Omega); \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \int_\Gamma \operatorname{div}(\mathbf{v})\mathbf{w}\cdot\mathbf{n} d\Gamma.$$

Logo, escolhendo os campos $\mathbf{v}(x,y) = (1,0)$ e $\mathbf{w}(x,y) = (\frac{x^2}{2}, 0)$, temos

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{w}|_\Gamma = x = \cos\theta \;\; em \;\; \Gamma.$$

Logo, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \cos\theta$ em Γ. Obtemos então

$$\langle d^2 J(\Omega); \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0,$$

enquanto

$$\langle d^2 J(\Omega); \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = \int_\Gamma \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) d\Gamma = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta > 0.$$

5 Integrais de fronteira

Seja

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma \eta \tag{38}$$

um funcional de fronteira de uma densidade de forma superficial (globalmente definida em D) $\eta \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{d-1,m}(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 4. *(Segundo teorema de estrutura fundamental) O funcional de fronteira $I(\Gamma)$ tem as seguintes derivadas de forma sob condições adequadas de suavidade no domínio e nos campos de velocidade $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$, para $k = 1$*

$$\langle dI(\Gamma); \mathbf{v}\rangle = \int_\Gamma \boldsymbol{i}_\mathbf{v} \boldsymbol{d}(\eta), \tag{39}$$

para $k = 2$

$$\langle d^2 I(\Gamma); \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{w}} \boldsymbol{d} \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}(\eta), \tag{40}$$

e para $k \geq 3$

$$\langle d^k I(\Gamma); \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \rangle = \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{v_k}} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{i}_{\mathbf{v_{k-1}}} \boldsymbol{d} \ldots (\boldsymbol{i}_{\mathbf{v_1}} \boldsymbol{d}(\eta))). \tag{41}$$

Pelo teorema de Stokes temos que $I(\Gamma) = \int_\Omega \boldsymbol{d}\eta$. Portanto, o resultado (41) é consequência imediata do Teorema 3 e do fato de que a derivada exterior e a derivada de Lie comutam. Um resultado similar ao Corolário 1 envolve os colchetes de Lie:

$$\langle d^2 I(\Gamma); \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \int_\Omega \mathscr{L}_{\mathbf{w}} \mathscr{L}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{d}\eta \tag{42}$$

e

$$\langle d^2 I(\Gamma); \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega \mathscr{L}_{\mathbf{v}} \mathscr{L}_{\mathbf{w}} \boldsymbol{d}\eta. \tag{43}$$

Portanto, a condição de simetria para a Hessiana de forma para integrais de fronteira é:

$$\int_\Gamma \mathscr{L}_{[\mathbf{w},\mathbf{v}]} \eta = 0, \tag{44}$$

que é semelhante ao resultado do Corolário 1, exceto pelo domínio de integração Γ.

6 Derivadas de forma para formas bilineares

Em problemas de otimização de forma que são representados mediante equações diferencias parciais (com formulação variacional) surgem formas bilineares. Para isso introduzimos o seguinte lema:

Lema 1. *Para duas l-formas,* $\omega, \eta \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{l,m}(\bar{\Omega})$ $(0 \leqslant l \leqslant d-1)$*, a forma bilinear dada por*

$$J(\Omega) = \int_\Omega * \boldsymbol{d}\omega \wedge \boldsymbol{d}\eta, \tag{45}$$

onde $*$ *é o operador Hodge estrela, tem a seguinte derivada de forma:*

$$\langle dJ(\Omega); \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega \mathscr{L}_{\mathbf{v}}(* \boldsymbol{d}\omega \wedge \boldsymbol{d}\eta) = \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}(* \boldsymbol{d}\omega \wedge \boldsymbol{d}\eta). \tag{46}$$

Prova: Como foi mostrado no capítulo de preliminares, o operador de Hodge, a derivada exterior e o produto exterior definem uma forma, logo, $* \boldsymbol{d}\omega \wedge \boldsymbol{d}\eta$ pode ser entendido como uma forma. Portanto, o resultado é consequência direta do primeiro teorema de estrutura fundamental (Teorema 3). $\square$

Formas diferenciais como *proxies* vetoriais

Para entender este trabalho, precisamos de algumas equivalências entre formas e *proxies* vetoriais que serão apresentadas nesta seção. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

7 Correspondência entre formas diferenciais e funções escalares ou vetoriais

As correspondências na Tabela 1. estabelecem isomorfismos Υ_l entre l-formas diferenciais, $0 \leq l \leq 3$, em $\mathbb{R}^3$ e funções contínuas u ou campos vetoriais $\mathbf{u}$, chamados *proxies* vetoriais. Isto é, quando uma variedade Ω é considerada como um espaço afín $A(\mathbb{R}^3)$, o espaço tangente a $x \in \Omega$ é denotado por $T_x(A(\mathbb{R}^3))$ pode-se identificar como $\mathbb{R}^3$ dotado do produto interno euclidiano. Portanto, identificações naturais de $\Lambda^0(A(\mathbb{R}^3))$ e $\Lambda^3(A(\mathbb{R}^3))$ com $\mathbb{R}$ e de $\Lambda^1(A(\mathbb{R}^3))$ e $\Lambda^2(A(\mathbb{R}^3))$ com $\mathbb{R}^3$ podem ser estabelecidas como segue: sejam $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$,

Tabela 1. Correspondência de formas diferenciais ω com funções escalares u ou campos vetoriais $\mathbf{u}$.

l	forma diferencial	função u/campo vetorial $\mathbf{u}$
$l=0$	$x \to \omega(x)$	$u(x) = \omega(x)$
$l=1$	$x \to \{\mathbf{v} \to \omega(x)(\mathbf{v})\}$	$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}\rangle = \omega(x)(\mathbf{v})$
$l=2$	$x \to \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \to \omega(x)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\}$	$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\rangle = \omega(x)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$
$l=3$	$x \to \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \to \omega(x)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\}$	$u(x)\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \omega(x)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

Por exemplo, seja $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$ um campo vetorial suave em $\mathbb{R}^3$, a correspondente 1-forma é $\omega = f_1(\mathbf{x})dx_1 + f_2(\mathbf{x})dx_2 + f_3(\mathbf{x})dx_3$, enquanto a 2-forma correspodente é $\eta = f_1(\mathbf{x})dx_2 \wedge dx_3 - f_2(\mathbf{x})dx_1 \wedge dx_3 + f_3(\mathbf{x})dx_1 \wedge dx_2$. Logo, para qualquer campo vetorial $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ temos que $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}\rangle = \omega(\mathbf{x})\mathbf{v}$.

Podemos interpretar geometricamente as l-formas neste espaço de uma maneira simples. Por exemplo, suponha que os eixos coordenados do espaço são x_1, x_2 e x_3, então, para uma

2-forma $dx_1 \wedge dx_2$ e um par de vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em $\mathbb{R}^3$, temos

$$dx_1 \wedge dx_2 \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2,$$

onde $a_1 b_2 - b_1 a_2$ é a área do paralelogramo projetado pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ no plano (x_1, x_2). $dx_1 \wedge dx_2$ é chamada de componente (x_1, x_2) da área assinada, enquanto $dx_2 \wedge dx_3$ e $dx_1 \wedge dx_3$ são as componentes (x_2, x_3) e (x_1, x_3) das áreas assinadas, respectivamente. No caso de uma 3-forma temos o volume do paralelepípedo que é gerado pelos três vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. De forma similar, para uma 1-forma, dx_1 representa o valor do comprimento do vetor na coordenada x_1 e dx_2, o valor do comprimento do vetor na coordenada x_2, assim:

$$dx_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \det a_1 = a_1, \qquad \text{e} \qquad dx_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \det a_2 = a_2.$$

8 Correspondência entre operadores

Na Tabela 2.[2, 20] apresentamos as correspondências entre os operadores (derivada exterior, produto interior e derivada de Lie), os espaços de uma l-forma ω com os operadores de funções escalares u ou campos vetoriais $\mathbf{u}$ em um espaço euclidiano de três dimensões.

Tabela 2. [28] Correspondência de espaços/operadores de formas ω com espaços/operadores de funções escalares u ou campos vetoriais $\mathbf{u}$.

ω	$\boldsymbol{d}\omega$	$i_{\mathbf{v}}\omega$	$\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega$	$H\Lambda_l(\Omega)$
$l = 0$	$\mathbf{grad}\ u$		$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\ u$	$H^1(\Omega)$
$l = 1$	$\mathbf{curl\ u}$	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	$\mathbf{grad\ v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{curl\ u} \times \mathbf{v}$	$\mathbf{H}(\mathbf{curl}; \Omega)$
$l = 2$	$\operatorname{div} \mathbf{u}$	$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	$\mathbf{curl\ u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u}$	$\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)$
$l = 3$		$u\mathbf{v}$	$\operatorname{div}(u\mathbf{v})$	$L^2(\Omega)$

Observação: Se $\longleftrightarrow$ denota uma correspondência fundamental e $\boldsymbol{d}$ a derivada exterior, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
\{0 - \text{forma}\} & \longleftrightarrow & \{\text{funções}\} \\
\big\downarrow \boldsymbol{d} & & \big\downarrow \mathbf{grad} \\
\{1 - \text{forma}\} & \longleftrightarrow & \{\text{campo vetorial}\} \\
\big\downarrow \boldsymbol{d} & & \big\downarrow \mathbf{curl} \\
\{2 - \text{forma}\} & \longleftrightarrow & \{\text{campo vetorial}\} \\
\big\downarrow \boldsymbol{d} & & \big\downarrow \operatorname{div} \\
\{3 - \text{forma}\} & \longleftrightarrow & \{\text{funções}\}
\end{array}$$

Esta comutação baseia-se no seguinte:

a) Se a 0-forma $\omega \longleftrightarrow$ a uma função A, então a 1-forma $\boldsymbol{d}\omega \longleftrightarrow$ ao campo vetorial **grad** A.

b) Se a 1-forma $\omega \longleftrightarrow$ a campo vetorial $\mathbf{F}$, então a 2-forma $\boldsymbol{d}\omega \longleftrightarrow$ ao campo vetorial **curl** $\mathbf{F}$.

c) Se a 2-forma $\omega \longleftrightarrow$ a campo vetorial $\mathbf{F}$, então a 3-forma $\boldsymbol{d}\omega \longleftrightarrow$ à função $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

Isto é simples de provar:

a) Suponha que $\omega = A$ é uma 0-forma que corresponde a uma funçâo $A(x, y, z)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$com eixos x, y, z). Pela definição de derivada exterior temos que $\boldsymbol{d}\omega = A_x dx + A_y dy + A_z dz$, e temos que **grad** $A = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$, onde **i, j, k** são vetores unitários nas direções x, y, z, respectivamente. Pelas definições do cálculo vetorial vemos que há uma correspondência entre $\boldsymbol{d}\omega$ e **grad** A.

b) Se $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ for uma 1-forma correspondente ao campo vetorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, temos que $\boldsymbol{d}\omega = (P_y - Q_z)\, dy \wedge dz + (P_z - R_x)\, dz \wedge dx + (Q_x - P_y)\, dx \wedge dy$, enquanto pela definição do rotacional temos que $\mathbf{curl}\ \mathbf{F} = (P_y - Q_z)\,\mathbf{i} + (P_z - R_x)\,\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\,\mathbf{k}$. Portanto, $\boldsymbol{d}\omega$ e **curl F** correspondem.

c) Se $\omega = Pdy \wedge dz + Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy$ for uma 2-forma correspondente ao campo vetorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, temos que $\boldsymbol{d}\omega = (P_x + Q_y + R_z)\, dx \wedge dy \wedge dz$, enquanto da definição da divergência de um campo temos $\operatorname{div}\mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$. Portanto, há uma correspondência entre $\boldsymbol{d}\omega$ e $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

Embora a prova seja fácil, apenas cálculo, as implicações são importantes. Unimos as operações díspares de **grad**, div e **curl** e, usando a correspondência fundamental, mostramos que todos são casos especiais da derivada exterior. Como consequência do resultado anterior temos o seguinte corolário:

Corolário 2.

a) Para qualquer função A de classe C^2, temos $\mathbf{curl}(\mathbf{grad}\ A) = 0$.

b) Para qualquer campo vetorial $\boldsymbol{F}$ de classe C^2, temos $\operatorname{div}(\mathbf{curl}\ \boldsymbol{F}) = 0$.

Prova:

a) Seja $\omega \longleftrightarrow A$, então $\boldsymbol{d}\omega \longleftrightarrow \mathbf{grad}\ A$, logo, $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}\omega) \longleftrightarrow \mathbf{curl}(\mathbf{grad}\ A)$. Segundo o Teorema 1, temos $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}\omega) = 0$, portanto, $\mathbf{curl}(\mathbf{grad} A) = 0$.

b) Seja $\omega \longleftrightarrow \mathbf{F}$, então $\boldsymbol{d}\omega \longleftrightarrow \mathbf{curl}\ \mathbf{F}$, logo, $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}\omega) \longleftrightarrow \operatorname{div}(\mathbf{curl}\ \mathbf{F})$. De maneira similar ao item anterior, considerando novamente o Teorema 1, temos que $\operatorname{div}(\mathbf{curl}\ \mathbf{F}) = 0$.

□

No caso da derivada de Lie, vamos analisar o caso $l = 1$. Representemos a derivada de Lie da 1-forma por meio da fórmula de Cartan (24):

$$\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{d})\omega.$$

Da Tabela 1 temos a correspondência $\omega \longleftrightarrow \mathbf{u}$. Logo, olhando as correspondências do produto interno e da derivada exterior, temos:

$$\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\omega \longleftrightarrow \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\omega \longleftrightarrow \mathbf{grad}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}),$$

e

$$\boldsymbol{d}\omega \longleftrightarrow \mathbf{curl}\ \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{d}\omega \longleftrightarrow (\mathbf{curl}\ \mathbf{u})\times\mathbf{v}.$$

Finalmente, temos que a correspondência é

$$\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\omega \longleftrightarrow \mathbf{grad}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) + (\mathbf{curl}\ \mathbf{u})\times\mathbf{v}.$$

De maneira similar, pode-se construir as correspondências para $l = 0, 2$ e 3.

9 Correspondência entre integrais

No cálculo vetorial nós sabemos como integrar campos vetoriais sobre curvas parametrizadas e superfícies. Primeiro, suponha que γ é uma curva parametrizada e $\mathbf{F}$ é um campo de funções suaves. Então podemos integrar o componente de $\mathbf{F}$, que aponta na direção dos vetores tangentes a γ. Esta integral é usualmente denotada por $\int_\gamma \mathbf{F}d\mathbf{s}$ e esta definição é exatamente a mesma de $\int_\gamma \omega$, quando ω é uma 1-forma.
A partir do cálculo vetorial, sabemos como integrar campos vetoriais sobre superfícies parametrizadas. Neste caso, a componente do campo vetorial a integrar é aquela que é normal à superfície, e usualmente denotamos esta integral como $\int_S \mathbf{F}d\mathbf{S}$, que é justamente a mesma definição de $\int_S \omega$, quando ω é uma 2-forma.
Por último, para uma região 3-dimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ integramos uma função $f(x_1, x_2, x_3)$. Em cálculo usualmente denotamos esta integral como $\int_\Omega f dV$, que é precisamente a mesma definição para $\int_\Omega \omega$, quando ω é uma 3-forma.

Tabela 3. Correspondência entre integrais de formas diferenciais e *proxies* vetoriais em $\mathbb{R}^3$.

l	integral de forma diferencial	integral de função f/campo vetorial $\mathbf{F}$
$l = 0$	$\int_p \omega$	$\int_p f dx = f(p)$
$l = 1$	$\int_\gamma \omega$	$\int_\gamma \mathbf{F}d\mathbf{s}$
$l = 2$	$\int_S \omega$	$\int_S \mathbf{F}d\mathbf{S}$
$l = 3$	$\int_\Omega \omega$	$\int_\Omega f dV$

10 Correspondência entre o produto exterior e o operador de Hodge

A correspondência entre o produto exterior e o operador de Hodge para formas diferenciais e *proxies* vetoriais pode-se encontrar na tabela seguinte [21] :

Tabela 4. Correspondência entre o produto exterior e o operador de Hodge para formas diferenciais e *proxies* vetoriais

	Formas diferenciais	*Proxies* vetoriais
Produto $\wedge$	$\wedge : \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \times \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ $\wedge : \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \times \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \to \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$	$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (produto vetorial) $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (produto escalar)
Operador Hodge $*$	$* : \Lambda^0(\mathbb{R}^3) \to \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ $* : \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$	id: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ id: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Na Tabela 4 podemos ver que, em termos de *proxies* vetoriais de um espaço euclidiano, o produto exterior pode-se ler como

$$\Upsilon_2(\omega \wedge \eta) = (\Upsilon_1 \omega) \times (\Upsilon_1 \eta) \qquad \forall \omega, \eta \in \mathscr{DF}^{1,0}(\Omega),$$

$$\Upsilon_3(\omega \wedge \eta) = (\Upsilon_2 \omega) \cdot (\Upsilon_1 \eta) \qquad \forall \omega \in \mathscr{DF}^{2,0}(\Omega), \eta \in \mathscr{DF}^{1,0}(\Omega),$$

onde Υ_l $(0 \leq l \leq 3)$ estabelece o isomorfismo já mencionado entre uma l-forma e funções contínuas/campos vetoriais (Tabela 1). Finalmente, devemos indicar que o produto externo com uma 0-forma equivale a uma multiplicação pontual com sua função associada (ver [28]).

Cálculo de forma em *proxies* vetoriais

Neste capítulo vamos introduzir alguns resultados da geometria diferencial (ver [8, 17]), mais especificamente do cálculo diferencial tangencial, que são frequentemente usados para calcular derivadas de forma. Expressaremos a teoria apresentada no capítulo do cálculo de forma em termos de *proxies* vetoriais, em um espaço euclidiano de dimensão d.

Seja $\tilde{u} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ($\tilde{\mathbf{v}} \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^d)$) uma extensão clássica de alguma função escalar u (campo vetorial $\mathbf{v}$) na superfície Γ (alguma vizinhança de Γ [23]) para todo o espaço $\mathbb{R}^d$, por meio da função distância assinada (a função de distância assinada (ou função de distância orientada) de um conjunto Ω em um espaço métrico determina a distância de um dado ponto x da fronteira de $|Omega$, com o sinal determinado por se x está em Ω) ver [11, 29]. Logo, podemos definir os seguintes operadores:

Definição 13. *Gradiente de superfície:*

$$\mathbf{grad}_\Gamma u = \mathbf{grad}\ \tilde{u} - (\mathbf{grad}\ \tilde{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \tag{47}$$

Divergência de superfície:

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - D\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \tag{48}$$

onde $\mathbf{n}$ *é o vetor normal unitário exterior em* Γ.

Definição 14. *Assumindo que* Ω *é de classe* C^2, *a curvatura média* $\mathfrak{H}$ *de* Γ *é definida por* $\mathfrak{H} = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{n}$.

Para um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ podemos definir a componente tangencial $\mathbf{v}_\Gamma$, isto é, a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre o plano tangencial a Γ, como

$$\mathbf{v}_\Gamma = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Isto nos permite escrever os seguintes resultados:

Proposição 1. *[17] Assuma que* Ω *é de classe* C^2, $f \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^d)$ *e* $\mathbf{v} \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^d)$, *então*

$$\mathbf{grad} f \,|_\Gamma = \mathbf{grad}_\Gamma f + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}, \tag{49}$$

$$\mathrm{div}_\Gamma (f\mathbf{n}) = \mathfrak{H} f, \tag{50}$$

$$\mathrm{div}_\Gamma \, \mathbf{v} = \mathrm{div}_\Gamma \, \mathbf{v}_\Gamma + \mathfrak{H} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \tag{51}$$

$$\mathrm{div}(f\mathbf{v}) = \mathbf{grad}(f) \cdot \mathbf{v} + f \, \mathrm{div}(\mathbf{v}), \tag{52}$$

$$\int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma \, \mathbf{v} = \int_\Gamma \mathfrak{H} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \tag{53}$$

$$\int_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma f \cdot \mathbf{v} = \int_\Gamma -f \, \mathrm{div}_\Gamma \, \mathbf{v} + \mathfrak{H} f \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{54}$$

As fórmulas (53) e (54) são conhecidas como a fórmula tangencial de Stokes e a fórmula tangencial de Green, respectivamente. Essas expressões podem se encontrar em [11, 32].

11 Integrais de Domínio

Seja Ω um domínio de classe C^m com fronteira Γ e f uma função suave, definimos um funcional de domínio como

$$J(\Omega) = \int_\Omega f dx. \tag{55}$$

Pode-se entender f como um *proxy* vetorial para uma forma $\omega \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{d,m}$ em um volume de dimensão d. Usando formulação do Teorema 3, podemos escrever o seguinte lema:

Lema 2. *Seja Ω de classe C^m $(m \geq 1)$, f uma função suave e dois campos de velocidade $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. O gradiente de forma de J, definido em (55), existe e pode-se escrever como*

$$\langle dJ(\Omega); \mathbf{v} \rangle = \int_\Gamma (f\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds, \tag{56}$$

e a Hessiana de forma

$$\begin{aligned} \langle d^2 J(\Omega); \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = &\int_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial n} + \mathfrak{H} f \right) (\mathbf{v}, \mathbf{n})(\mathbf{w}, \mathbf{n}) \\ &- \int_\Gamma f \left((S\mathbf{v}_\Gamma, \mathbf{w}_\Gamma) - \mathbf{w}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \right) ds \\ &+ \int_\Gamma f (D\mathbf{v}\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} ds, \end{aligned} \tag{57}$$

onde $S = D\mathbf{n}$ é a segunda forma fundamental (aplicação de Weingarten) [19].

Prova: Como já tínhamos visto, uma função escalar f pode ser vista como um *proxy* vetorial de uma forma, onde a contração (produto interno) com um campo de velocidade $\mathbf{v}$ equivale ao produto entre uma função escalar f e um campo vetorial (veja a Tabela 2), e o operador $\boldsymbol{d}$ corresponde ao operador div neste caso. Então, pelo Teorema 3 (primeiro teorema fundamental de estrutura), a derivada primeira é dada por:

$$\begin{aligned}\langle dJ(\Omega);\mathbf{v}\rangle &= \frac{d}{dt}J_{\mathbf{v}}(t)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} f dx\right) = \frac{d}{dt}\int\limits_{T_t(\mathbf{v})\Omega} f dx \\ &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} T_t(\mathbf{v})^* f dx = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{di}_{\mathbf{v}} f dx = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(f\mathbf{v})dx \\ &= \int\limits_{\Gamma} (f\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}ds,\end{aligned}$$

onde o último passo foi obtido pela aplicação direta do teorema de Stokes. Para obter a derivada de forma de segunda ordem, vamos usar também o Teorema 3. Temos

$$\begin{aligned}\langle d^2J(\Omega);\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle &= \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial}{\partial t}J_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(t,s)\Big|_{t=0}\right\}\Big|_{s=0} = \int\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\mathbf{w}\operatorname{div}(f\mathbf{v}))dx \\ &= \int\limits_{\Gamma}\operatorname{div}(f\mathbf{v})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds = \int\limits_{\Gamma}(\mathbf{grad} f\cdot\mathbf{v} + f\operatorname{div}\ \mathbf{v})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds \\ &\underset{\langle 5\rangle}{=} \int\limits_{\partial\Omega}\left(\mathbf{grad}_\Gamma f\cdot\mathbf{v}_\Gamma + \frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} + f(D\mathbf{v}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + \operatorname{div}_\Gamma\mathbf{v})\right)(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds \\ &\underset{\langle 6\rangle}{=} \int\limits_{\Gamma}\left(\mathbf{grad}_\Gamma f\cdot\mathbf{v}_\Gamma + \left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}} + \mathfrak{H}f\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} + fD\mathbf{v}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + f\operatorname{div}_\Gamma\mathbf{v}_\Gamma\right)(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds. \qquad (58)\end{aligned}$$

Na quinta igualdade $\langle 5\rangle$ temos usado a identidade (49) e substituído div $\mathbf{v}$ por (48), e em $\langle 6\rangle$, a identidade (51). Aplicando a fórmula tangencial de Green (54) para $\mathbf{v}_\Gamma$ e $(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})f$, obtemos

$$\int\limits_{\Gamma}\mathbf{grad}_\Gamma((\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})f)\cdot\mathbf{v}_\Gamma + (\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})f\operatorname{div}_\Gamma\mathbf{v}_\Gamma ds = \int\limits_{\Gamma}\mathfrak{H}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})f\mathbf{v}_\Gamma\cdot\mathbf{n}ds = 0. \qquad (59)$$

Expandindo o gradiente do primeiro termo e usando o resultado (59), podemos reescrever o lado direito de (58) como

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}} + \mathfrak{H}f\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} + f(D\mathbf{v}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\right)(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}) - f\mathbf{v}_\Gamma\mathbf{grad}_\Gamma(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds. \qquad (60)$$

Note que nos cálculos feitos até agora não temos usado a função de distância auxiliar que geralmente usa-se para obter a expressão (60), ver [11, p.504].

Logo, para obter a simetria da expressão (60), os colchetes de Lie $[\mathbf{w},\mathbf{v}] = D\mathbf{v}\mathbf{w} - D\mathbf{w}\mathbf{v}$ desempenham um papel importante. Consideremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} D\mathbf{v}\mathbf{w}\cdot\mathbf{n} &= D\mathbf{v}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}) + D\mathbf{v}\mathbf{w}_\Gamma\cdot\mathbf{n} \\ &= D\mathbf{v}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}) + D_\Gamma\mathbf{v}\mathbf{w}_\Gamma\cdot\mathbf{n} + (D\mathbf{v}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\mathbf{w}_\Gamma\cdot\mathbf{n} \\ &= D\mathbf{v}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{grad}_\Gamma(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{w}_\Gamma - D_\Gamma\mathbf{n}\mathbf{w}_\Gamma\cdot\mathbf{v}_\Gamma, \end{aligned} \tag{61}$$

onde temos usado a decomposição dos campos em suas partes tangencial e normal. O último termo pode ser reescrito como $\mathbf{w}_\Gamma\cdot D_\Gamma\mathbf{n}\mathbf{v}_\Gamma$, pois $D_\Gamma\mathbf{n}$ é a aplicação de Weingarten, que é simétrica. Resta apenas substituir (61) em (60) para encontrar a expressão (57) da Hessiana de forma. $\square$

Para ter a simetria da Hessiana de forma no caso dos *proxies* vetoriais f, a condição suficiente de simetria do Corolário 1 (no caso das integrais de domínio com formas diferenciais) é equivalente a

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f[\mathbf{w},\mathbf{v}])dx = \int_{\partial\Omega}(f[\mathbf{w},\mathbf{v}])\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_{\partial\Omega} f((D\mathbf{v})\mathbf{w} - (D\mathbf{w})\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,ds.$$

12 Integrais de Fronteira

Seja f uma função suave definida em $\mathbb{R}^d$, a integral de fronteira definida em $\Gamma = \partial\Omega$ é

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma f\,ds. \tag{62}$$

Observe que

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma f\,ds = \int_\Gamma f\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\,ds, \tag{63}$$

onde pode-se entender $f\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$ como uma contração $\boldsymbol{i}_\mathbf{n}\omega$, com f sendo o *proxy* vetorial de alguma densidade volumétrica de forma $\omega \in \mathscr{DF}^{l,d}(\bar{\Omega})$. Note-se que, conhecido Γ, podemos estender o vetor normal unitário (apontando para fora) para tornar-se um campo globalmente definido, tal que $\boldsymbol{i}_\mathbf{n}\omega$ seja uma $(d-1)$-forma que não depende de Ω.

Lema 3. *Seja Ω de classe C^m $(m \geq 2)$, f uma função suave e sejam dois campos de velocidade $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ diferenciáveis. A derivada primeira (associada ao gradiente de forma) da integral de fronteira $I(\Gamma)$, dada por (62), é*

$$\langle dI(\Gamma);\mathbf{v}\rangle = \int_\Gamma (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}} + \mathfrak{H}f\right)ds. \tag{64}$$

A derivada de segunda ordem (associada à Hessiana de forma) da integral de fronteira é

$$\begin{aligned}\langle d^2 I(\Gamma); \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \int\limits_\Gamma & \left(D^2 f \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2\mathfrak{H} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \left(\mathfrak{H}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{trace}(S^2) \right) f \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) (S(\mathbf{v}_\Gamma, \mathbf{w}_\Gamma) - \mathbf{w}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) ((D\mathbf{v})\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} ds.\end{aligned}$$

Prova: Quando introduzimos um campo vetorial $\mathbf{v}$, temos um domínio transformado $\partial\Omega_t(\mathbf{v})$ ao longo do campo $\mathbf{v}$, usando (63)

$$\langle dI(\Gamma); \mathbf{v}\rangle = \frac{d}{dt} I(\Gamma) = \frac{d}{dt} \int\limits_\Gamma f \mathbf{n}_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_t(\mathbf{v})\; ds. \tag{65}$$

O integrando $f\mathbf{n}_t(\mathbf{v})$ pode-se entender como uma densidade superficial de forma sobre a fronteira, sendo $\mathbf{n}_t(\mathbf{v})$ o campo normal em $\partial\Omega_t$ transformado ao longo do campo de velocidade $\mathbf{v}$ (dependendo naturalmente do pseudotempo t). No instante inicial $\mathbf{n} = \mathbf{n}_t(\mathbf{v})|_{t=0}$ aplicamos a derivada de um produto na expressão acima e obtemos que o integrando se transforma em $f'\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2f\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}$. Portanto, a expressão (65) é

$$\langle dI(\Gamma); \mathbf{v}\rangle = \int\limits_\Gamma \operatorname{div}(f\mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\; ds + 2 \int\limits_\Gamma f(\mathbf{n}_t'(\mathbf{v})|_{t=0}) \cdot \mathbf{n}\; ds, \tag{66}$$

onde temos interpretado $\boldsymbol{d}$ como div e a contração (ver Teorema 4) como um produto, além de estender unitariamente pelo domínio global mediante a técnica de distância assinada (ver [11]). No segundo integrando, temos a derivada temporal de $f\mathbf{n}_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_t(\mathbf{v})$ quando $t = 0$. Note que a derivada do campo normal $\mathbf{n}_t(\mathbf{v})$ [32] (a extensão de $\mathbf{n}$ é unitária) é

$$\mathbf{n}_t'(\mathbf{v})|_{t=0} = -\mathbf{grad}_\Gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), \tag{67}$$

que é um campo tangencial em Γ e portanto, este integrando é zero. Usando a identidade (52), obtemos

$$\begin{aligned}\langle dI(\Gamma); \mathbf{v}\rangle &= \int\limits_\Gamma [\mathbf{grad}(f) \cdot \mathbf{n} + f \operatorname{div}(\mathbf{n})] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds \\ &= \int\limits_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) ds,\end{aligned}$$

onde $\operatorname{div}(\mathbf{n}) = \operatorname{trace}(D\mathbf{n}) = \mathfrak{H}$. O resultado (66) pode-se encontrar em [29, p.354] mas nesta dissertação é apresentado de uma maneira mais simples e direta.

Para a derivada de forma de segunda ordem (associada à Hessiana de forma) podemos repetir os mesmos argumentos da derivada de primeira ordem junto com o Teorema 4, isto é, aplicamos a regra da derivação de um produto e ortogonalidade (67) duas vezes, para os pseudotempos t e s.

$$\begin{aligned}
\langle d^2 I(\Gamma); \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = & \; \frac{\partial}{\partial s}\left\{ \frac{\partial}{\partial t} I_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\Gamma)\Big|_{t=0} \right\}\Big|_{s=0} \\
= & \int_\Gamma \operatorname{div}(\mathbf{v}\operatorname{div}(f\mathbf{n}))(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds \\
= & \int_\Gamma \operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{grad}(f)\cdot\mathbf{n} + f\operatorname{div}(\mathbf{n})))(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds \\
= & \int_\Gamma (\operatorname{div}\; \mathbf{v}(\mathbf{grad}(f)\cdot\mathbf{n} + f\operatorname{div}(\mathbf{n})) \\
& \quad + \mathbf{grad}(\mathbf{grad}(f)\cdot\mathbf{n} + f\operatorname{div}(\mathbf{n}))\cdot\mathbf{v}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds. \qquad (68)
\end{aligned}$$

Podemos escrever o resultado acima como

$$
\begin{aligned}
\langle d^2 I(\Gamma); \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \int\limits_\Gamma \left(\operatorname{div}\ \mathbf{v} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) + \mathbf{grad} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) \right) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) ds \\
&\underset{\langle 2 \rangle}{=} \int\limits_\Gamma \left((\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_\Gamma + \mathfrak{H} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + D\mathbf{v}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) \right. \\
&\qquad \left. + \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) \right) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) ds \\
&\underset{\langle 3 \rangle}{=} \int\limits_\Gamma (\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_\Gamma + D\mathbf{v}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) + \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \\
&\qquad + \left(\mathfrak{H} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H}^2 f + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathbf{n}} f + \mathfrak{H} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) ds \\
&\underset{\langle 4 \rangle}{=} \int\limits_\Gamma (\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_\Gamma + D\mathbf{v}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) + \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \\
&\qquad + \left(D^2 f \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2\mathfrak{H} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + (\mathfrak{H}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{trace}(S^2)) f \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) ds \\
&\underset{\langle 5 \rangle}{=} \int_\Gamma \left(D^2 f \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2\mathfrak{H} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + (\mathfrak{H}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{trace}(S^2)) f \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) (D\mathbf{v}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) \mathbf{v}_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) ds \\
&\underset{\langle 6 \rangle}{=} \int\limits_\Gamma \left(D^2 f \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2\mathfrak{H} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \left(\mathfrak{H}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{trace}(S^2) \right) f \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) (S(\mathbf{v}_\Gamma, \mathbf{w}_\Gamma) - \mathbf{w}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{grad}_\Gamma (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) ((D\mathbf{v})\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} ds.
\end{aligned}
$$

No passo $\langle 2 \rangle$, foram utilizadas as identidades (48) e (50) para o primeiro termo, e no segundo termo usamos a decomposição do campo $\mathbf{v}$ em sua componente tangencial e normal. De modo que, organizando os termos, obtivemos $\langle 3 \rangle$. Usando o teorema 5 (ver Anexo) que relaciona a mudança da curvatura média ao longo da curva com a traça de S ($\operatorname{trace}(S)$), podemos escrever $\langle 4 \rangle$. Logo, aplicando a fórmula de Green para superfícies, obtemos $\langle 5 \rangle$, e para chegar à expressão final $\langle 6 \rangle$ basta decompor $(D\mathbf{v}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})$ da mesma maneira que foi feito na discussão da Hessiana de forma para integrais de domínio (61).

Sendo f uma função escalar, a condição de simetria dessa Hessiana de forma para uma integral de fronteira é

$$
\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) [\mathbf{w},\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n}\ ds = \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H} f \right) ((D\mathbf{v})\mathbf{w} - (D\mathbf{w})\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\ ds = 0.
$$

$\square$

13 Derivada normal

Seja Γ a fronteira de um domínio limitado de classe C^m e seja $f \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$. Consideremos o seguinte funcional de forma:

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_\Gamma \mathbf{grad}\ f \cdot \mathbf{n} ds. \tag{69}$$

Entendemos f como uma 0-forma ω e **grad** como substituto de $\boldsymbol{d} : \mathscr{DF}^{0,m}(\bar{\Omega}) \mapsto \mathscr{DF}^{1,m}(\bar{\Omega})$, portanto, podemos expressar

$$\int_\Gamma \mathbf{grad}\ f \cdot \mathbf{n} ds$$

como

$$\int_\Gamma *\boldsymbol{d}\omega.$$

De fato, $\boldsymbol{d}\omega$ é uma 1-forma que é aplicada pelo operador de Hodge $*\boldsymbol{d}\omega$ em uma $(d-1)$-forma (cujo *proxy* vetorial seria $\mathbf{grad} f$). Podemos aplicar o Teorema 4 para este caso da seguinte maneira:

Lema 4. *Com condições adequadas de suavidade sobre o domínio Ω e os campos de velocidade $\mathbf{v}$, a derivada de forma de (69) existe e pode-se representar como*

$$\langle dI(\Gamma); \mathbf{v}\rangle = \int_\Gamma (\mathrm{div}_\Gamma\ \mathbf{grad}_\Gamma f + D^2 f \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \mathfrak{H} \mathbf{grad}\ f \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds. \tag{70}$$

Prova: Em virtude do Teorema 4 temos

$$\langle dI(\Gamma); \mathbf{v}\rangle = \langle d \int_\Gamma \mathbf{grad}\ f \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle, \tag{71}$$

logo, usando as expressões (48) e (51) podemos obter o resultado

$$\begin{aligned}
\langle d \int_\Gamma \mathbf{grad}\ f \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle &= \int_\Gamma (\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ f)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds \\
&= \int_\Gamma D(\mathbf{grad} f)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{grad} f))(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds \\
&= \int_\Gamma (D^2 f \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{grad}_\Gamma f) + \mathfrak{H} \mathbf{grad}\ f \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds.
\end{aligned}$$

$\square$

Os três últimos resultados apresentados nesta seção, os Lemas 2, 3, e 4, podem ser encontrados em [1].

Aplicações: Derivada de forma

14 Derivada de forma para soluções de PVF de segunda ordem

Muitos problemas surgidos da física (eletrodinâmica, mecânica de fluidos, entre outros) podem ser formulados mediante o cálculo de formas diferenciais. EDPs lineares podem-se representar mediante Problemas de Valor na Fronteira (PVF), que encaixam-se perfeitamente na estrutura fornecida pelo cálculo de formas diferenciais. O princípio é que, considerando as quantidades envolvidas como funções ou campos vetoriais, podemos fazer uma análise superficial que induz ao erro. No entanto, a física nos diz qual é a sua verdadeira natureza. Algumas quantidades como $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ e a **grad** u são medidas como fluxos através de superfícies; outras, como $\mathbf{E}$ podem ser expressadas através de integrais de caminho. Em suma, todas essas quantidades devem ser consideradas como formas diferenciais. Por exemplo, para as equações lineares de Maxwell: seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, vamos considerar $h \in \Lambda^1(\Omega)$, $e \in \Lambda^1(\Omega)$, $b \in \Lambda^2(\Omega)$, $j \in \Lambda^2(\Omega)$ e $j_0 \in \Lambda^2(\Omega)$, que são respectivamente: campo magnético, campo elétrico, indução magnética, densidade de corrente e densidade de corrente imposta. A seguir se apresentam as equações de Maxwell de forma vetorial à esquerda, e a sua forma diferencial correspondente à direita:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{curl}\ \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \qquad \boldsymbol{d}e &= -\partial_t b,\\
\mathbf{curl}\ \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \mathbf{J}_0, & \boldsymbol{d}h &= j + j_0,\\
\mathbf{J} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), & j &= *_\sigma(e - \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} b),\\
\zeta \mathbf{H} &= \mathbf{B}, & *_\zeta h &= b.
\end{aligned}
$$

Nosso interesse particular é estudar um modelo elíptico de um PVF e expressar a derivada de forma da solução fraca deste problema, por meio do cálculo de forma de integrais de domínio e de fronteira.

Dado um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de classe C^m, pode-se considerar um PVF elíptico para uma l-forma ω

$$(-1)^{d-l} \boldsymbol{d} *_\alpha \boldsymbol{d}\omega + *_\gamma \omega = \psi \qquad \text{em } \Omega, \tag{72}$$

$$Tr(*_\alpha \boldsymbol{d}\omega) = (-1)^{d-l} Tr(*_\beta \omega + \phi) \text{ em } \Gamma, \tag{73}$$

onde $*_\alpha, *_\gamma$ e $*_\beta$ são operadores de Hodge, $*_\alpha, *_\gamma$ em Ω e $*_\beta$ em Γ (ver Definição 8). Sendo, α e γ métricas riemannianas em Ω e β uma métrica riemanniana em Γ. Tr é o operador traça (não confundir com operador traça da álgebra linear, observe que trace $\neq Tr$) [24], e ψ ($(d-l)$-forma) e ϕ ($(d-l-1)$-forma) são duas formas diferenciais suaves definidas globalmente. A equação (73) corresponde à condição de fronteira de Robin, que se reduz ao caso Neumann quando $*_\beta = 0$.

O operador traça Tr possibilita, por meio de uma formulação em um espaço de Sobolev, estender para a fronteira de um domínio a noção de restrição de uma função. Isto é importante no estudo das equações diferenciais parciais com condições de fronteira, onde soluções fracas podem não ser suficientemente regulares para satisfazer as condições de fronteira. A seguir vamos explicar isso de uma forma mais concisa:

Seja Ω um domínio limitado com uma fronteira $\partial\Omega$ diferenciável. Se u for uma função de classe C^1 em $\bar{\Omega}$, sua restrição é bem definida e contínua em $\partial\Omega$. Em outras palavras, podemos conhecer os valores de u na fronteira $\partial\Omega$, porque a função é contínua e avançamos do interior até a fronteira do domínio. Nós chamamos essa função $Tr : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ de traça de u, tal que para cada $x \in \partial\Omega$, ela tem o mesmo valor de $u : \Omega \to \mathbb{R}$, quando nos movemos do interior de Ω até x. Porém, se u for solução de alguma equação diferencial parcial, geralmente a solução fraca que pertence apenas a um espaço de Sobolev, podemos encontrar dificuldades, já que, tais funções geralmente não são contínuas. E a operação limite de u quando nos movemos do interior de Ω em direção a x, que usamos anteriormente, pode não ser permitida para algum x, porque esse limite não produziria um valor único para todas as sequências de pontos que convergem a x. A maneira mais simples de sair dessa dificuldade é observando que, embora um elemento u de um espaço de Sobolev possa estar mal definido como uma função, ele pode ser aproximado por uma sequência de funções u_n de classe C^1, definidas em $\bar{\Omega}$. Então a restrição de u na fronteira pode ser redefinida como o limite da sequência de restrições u_n em $\partial\Omega$.

Precisamos dos espaços de Sobolev que prescrevem traças:

$$H\Lambda^l(\Omega, \psi) = \left\{ \omega \in H\Lambda^l(\Omega); \qquad Tr\omega = \psi \right\}.$$

É importante lembrar que a traça de uma l-forma $\omega \in \Lambda^l(\Omega)$, denotada com $Tr\omega$, com respeito a alguma variedade $(n-1)$-dimensional, resulta em uma l-forma na mesma variedade [26]. A traça Tr comuta com a derivada e o produto exterior, isto é, $\boldsymbol{d}Tr\omega = Tr\boldsymbol{d}\omega$ e $Tr(\omega \wedge \eta) = Tr\omega \wedge Tr\eta$, respectivamente.

Quando falamos de soluções do problema (72),(73), temos em mente a solução fraca, que se pode obter a partir da fórmula de integração por partes (ver [28, p. 247]), isto é, procuramos uma única forma $\omega \in \{\eta \in H(\boldsymbol{d}, \Omega, \Lambda^l(\mathbb{R}^d)), Tr(\eta) \in L^2(\Gamma, \Lambda^l(\mathbb{R}^d))\}$, tal que para toda forma diferenciável $\eta \in H(\boldsymbol{d}, \Omega, \Lambda^l(\mathbb{R}^d))$

$$\int_\Omega (*_\alpha \boldsymbol{d}\omega \wedge \boldsymbol{d}\eta + *_\gamma \omega \wedge \eta) + \int_\Gamma Tr(*_\beta \omega \wedge \eta) = \int_\Omega \psi \wedge \eta - \int_\Gamma Tr(\phi \wedge \eta). \tag{74}$$

Definição 15. *Seja um campo de velocidade* $\mathbf{v} \in C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ *e o domínio perturbado* $\Omega_t = T_t(\mathbf{v})\Omega$. *Seja* $\omega(\Omega_t)$ *a solução de (72),(73) no domínio* Ω_t. *A derivada de forma de* $\omega(\Omega_t)$ *na direção* $\mathbf{v}$, *denotada por* $\delta\omega$, *é definida como*

$$\delta\omega = \frac{d}{dt}\omega(\Omega_t)\bigg|_{t=0}. \tag{75}$$

Podemos caracterizar a correspondente derivada de forma da solução do problema (72),(73) derivando a expressão (74) com respeito a t, substituindo Ω e $\omega(\Omega)$ por Ω_t e $\omega(\Omega_t)$, respectivamente. Por aplicação direta do Teorema 3, do Teorema 4 e da Definição 15, temos o seguinte lema:

Lema 5. *A derivada de forma* $\delta\omega \in \{\eta \in H(\boldsymbol{d}, \Omega, \Lambda^l(\mathbb{R}^d)); Tr(\eta) \in L^2(\Gamma, \Lambda^l(\mathbb{R}^d))\}$, *da solução* $\omega \in H^1(\boldsymbol{d}, \Omega, \Lambda^l(\mathbb{R}^d))$ *de (74) é a única solução do seguinte problema variacional:*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big(*_\alpha \boldsymbol{d}(\delta\omega) \wedge \boldsymbol{d}\eta + *_\gamma \delta\omega \wedge \eta\big) + \int_\Gamma Tr(*_\beta \delta\omega) \wedge \eta \\
&= \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}(\psi \wedge \eta) - \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}(*_\alpha \boldsymbol{d}\omega \wedge \boldsymbol{d}\eta + *_\gamma \omega \wedge \eta) \\
&\quad - \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{d} Tr((*_\beta \omega + \phi) \wedge \eta).
\end{aligned} \tag{76}$$

Para todas as formas suaves $\eta \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{l,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

No caso $d = 3$, a forma fraca (74) do problema variacional elíptico corresponde a $H^1(\Omega)$, $H(\mathbf{curl}; \Omega)$ e $H(\mathrm{div}; \Omega)$, quando $l = 0, l = 1$ e $l = 2$, respectivamente. Em termos de *proxies* vetoriais, podemos representar os operadores de Hodge como um produto com as funções coeficientes denotadas por α, β e γ.

Para uma 0-forma e duas funções escalares $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^2(\Omega)$, que são representações em *proxies* vetoriais das formas ψ e ϕ em (74). Sendo assim, temos o seguinte:

Corolário 3. *A derivada de forma* $\delta u \in \{\omega \in H^1(\Omega) : \omega|_{\partial\Omega} \in H^1(\Gamma)\}$ *da solução* $u \in H^2(\Omega)$ *de (74), para* $l = 0$, *é a única solução do seguinte problema variacional:*

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} (\alpha\ \mathbf{grad}\ \delta u \cdot \mathbf{grad}\ v + \gamma \delta u v) + \int_{\Gamma} \beta \delta u v \\
&= \int_{\Gamma} f u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \int_{\Gamma} (\alpha\ \mathbf{grad}_{\Gamma} u \cdot \mathbf{grad}_{\Gamma} v + \gamma \delta u v)\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\
&\quad - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\beta u + g) + \mathfrak{H}(\beta u + g) \right) v,
\end{aligned} \tag{77}$$

para todo $v \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Prova: Usando as correspondências entre formas diferenciais e *proxies* vetoriais apresentados na Tabela 2, pode-se escrever o lado esquerdo da expressão (76):

$$\int_{\Omega} (*_{\alpha} \boldsymbol{d} \delta\omega \wedge \boldsymbol{d}\eta + *_{\gamma} \delta\omega \wedge \eta) + \int_{\Gamma} Tr(*_{\beta} \delta\omega \wedge \eta) = \int_{\Omega} (\alpha\ \mathbf{grad}\ \delta u \cdot \mathbf{grad}\ v + \gamma \delta u v) + \int_{\Gamma} \beta \delta u v. \tag{78}$$

Por outro lado, aplicando os Lemas 2 e 3 podemos reescrever cada uma das integrais do lado direito da expressão (76), da seguinte maneira:

1. Usando o Lema 2, temos para o primeiro integrando

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} (\psi \wedge \eta) = \int_{\Gamma} (f v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

2. Novamente usando o Lema 2, temos para o segundo integrando

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} (*_{\alpha} \boldsymbol{d}\omega \wedge \boldsymbol{d}\eta + *_{\gamma} \omega \wedge \eta) = \int_{\Gamma} (\alpha\ \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v + \gamma u v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

3. Usando o Lema 3, temos para o último integrando do lado direito de (77)

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{d} Tr((*_{\beta}\omega + \phi) \wedge \eta) = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ((\beta u + g) v) + \mathfrak{H}((\beta u + g) v) \right),$$

resultando na expressão a seguir

$$\int_{\Gamma} (f v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \int_{\Gamma} (\alpha\ \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v + \gamma u v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ((\beta u + g) v) + \mathfrak{H}((\beta u + g) v) \right),$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ((\beta u + g) v) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\beta u + g) v + (\beta u + g) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$$

e

$$\alpha\ \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v = \alpha\ \mathbf{grad}_{\Gamma} u \cdot \mathbf{grad}_{\Gamma} v + \alpha \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}.$$

Somando as duas últimas expressões e usando a condição de fronteira de Robin $\alpha\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + (\beta u + g) = 0$, terminamos a prova. $\square$

Logo, podemos reformular a forma forte da equação diferencial parcial para a derivada de forma δu, sob as condições já mencionadas de suavidade. Testando (77), primeiro com funções suaves v com traça nula, e posteriormente funções suaves v com traça não-nula. A forma forte de (77) segue de (54)

$$-\operatorname{div}(\alpha \ \mathbf{grad}\ \delta u) + \gamma\delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{79}$$

$$\begin{aligned}\alpha\frac{\partial(\delta u)}{\partial \mathbf{n}} + \beta\delta u = {} & \operatorname{div}_\Gamma((\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\alpha\ \mathbf{grad}_\Gamma u) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\left(\frac{\partial(\beta u + g)}{\partial \mathbf{n}} + \mathfrak{H}(\beta u + g)\right) \\ & + (f - \gamma u)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}. \qquad\qquad \text{em} \quad \Gamma,\end{aligned} \tag{80}$$

obtendo desta forma o PVF elíptico para uma derivada de forma δu e sua condição de Robin associada (ou de Neumann quando $\beta = 0$).

Em [6] pode-se encontrar as derivadas de forma de soluções de problemas de espalhamentos (*scattering*) acústicos e/ou eletromagnéticos, ou seja, podemos estudar esses problemas da perspectiva das formas diferenciais. Uma equação que aparece frequentemente em problemas de espalhamento elasto-acústico é a equação de Helmholtz (ver [27, p.575]). Podemos aplicar os conhecimentos até aqui expostos para reescrever a equação de Helmholtz em termos de formas diferenciais.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (onde Γ_1 representa uma fronteira exterior e Γ_2 representa uma fronteira interior), a equação de Helmholtz para uma l-forma ω é

$$(-1)^{d-l}\boldsymbol{d} * \boldsymbol{d}\omega - *_\gamma\omega = 0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{81}$$

com condições de fronteira

$$Tr(*\boldsymbol{d}\omega) = (-1)^{d-l}Tr(\Phi(u)) \text{ em } \Gamma_1, \tag{82}$$

$$Tr(*\boldsymbol{d}\omega) = (-1)^{d-l}Tr(\Psi) \quad \text{ em } \Gamma_2, \tag{83}$$

onde $*_\alpha$ é o operador de Hodge que representa o produto com o coeficiente da equação de Helmholtz k^2, conhecido como o número de onda. Nas condições de fronteira (82),(83), Ψ e Φ correspondem a $(d-l-1)$-formas diferenciais sobre a fronteira Γ_1 e Γ_2, respectivamente.

Como no exemplo anterior, podemos obter a forma fraca do Problema de Valor na Fronteira (81),(82),(83) mediante a fórmula de integração por partes. Procuramos uma forma $\omega \in \{\xi \in$

$H(\boldsymbol{d},\Omega,\Lambda^l(\mathbb{R}^d)), Tr(\xi)\in L^2(\Gamma,\Lambda^l(\mathbb{R}^d))\}$, tal que para toda forma diferencial ξ temos:

$$\int_\Omega (*\boldsymbol{d}\omega\wedge\boldsymbol{d}\xi - *_\gamma\omega\wedge\xi) + \int_{\Gamma_1} Tr(\Psi(u)\wedge\xi) = -\int_{\Gamma_2} Tr(\Phi\wedge\xi). \tag{84}$$

Se mudamos de notação, de formas diferenciais a *proxies* vetoriais, podemos representar $\omega\longleftrightarrow\rho$ e $u\longleftrightarrow\mathbf{u}$. O par $(\rho,\mathbf{u})$ é conhecido como o campo de espalhamento elasto-acústico, onde ρ é a pressão do fluido em Ω, enquanto $\mathbf{u}$ é o campo de deslocamento no domínio interno a Γ_2 (para maior detalhamento do problema de espalhamento elasto-acústico escrito em *proxies* vetoriais ver [27, p.575]). De maneira similar ao PVF elíptico, podemos caracterizar as derivadas de forma das soluções ω e u do PVF (81),(82),(83), denotadas por $\delta\omega$ e δu. Logo, pela aplicação direta do Teorema 3, do Teorema 4 e da Definição 15, quando $d=0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big(*\boldsymbol{d}(\delta\omega)\wedge\boldsymbol{d}\xi - *_\alpha\boldsymbol{d}\delta\omega\wedge\xi\big) + \int_{\Gamma_1}\boldsymbol{i}_{\mathbf{v}}(*\boldsymbol{d}\omega\wedge\boldsymbol{d}\xi - *_\alpha\omega\wedge\xi)\\ + \int_{\Gamma_2} Tr(\Phi(\delta\omega)\wedge\xi + \int_{\Gamma_1} Tr(\Phi(\delta u)\wedge\xi) + \int_{\Gamma_1}\boldsymbol{d}Tr(\Phi\wedge\xi) = 0.\end{aligned} \tag{85}$$

15 Formulação dual

A seguir vamos estudar a derivada de forma para um PVF em uma formulação variacional dual, ou seja, vamos discutir o PVF (72),(73) a partir de uma perspectiva dual e equipada da condição de fronteira de Dirichlet

$$\omega=\phi \qquad \text{em} \quad \Gamma. \tag{86}$$

Para entender a perspectiva dual introduzimos uma $(d-l-1)-$forma

$$\rho = *_\alpha\boldsymbol{d}\omega, \tag{87}$$

ou

$$*_{\alpha^{-1}}\rho = (-1)^{(d-l-1)(l+1)}\boldsymbol{d}\omega, \tag{88}$$

onde $*_{\alpha^{-1}}$ é o inverso do operador Hodge $*_\alpha$ com

$$*_{\alpha^{-1}}\circ *_\alpha = (-1)^{(d-l-1)(l+1)}Id$$

num espaço euclidiano orientado positivamente, sendo Id o operador identidade. Então, (72) pode-se reescrever usando (87) como

$$(-1)^{d-l}\boldsymbol{d}\rho + *_\gamma\omega = \psi \qquad \text{em } \Omega. \tag{89}$$

Podemos escrever a forma fraca da formulação dual de (88) e (89) de maneira similar a como foi definido em (74). Para todas as formas diferenciais $\tau \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{d-l-1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e $\nu \in \mathscr{D}\mathscr{F}^{d-l,\infty}(\mathbb{R}^d)$, temos

$$\int_\Omega *_{\alpha^{-1}}\rho \wedge \tau + (-1)^{(d-l)(l+1)}\omega \wedge \boldsymbol{d}\tau + (-1)^{(d-l-1)(l+1)} \int_\Gamma Tr\phi \wedge Tr\tau = 0, \tag{90}$$

$$\int_\Omega (-1)^{(d-l)} \boldsymbol{d}\rho \wedge \nu + \int_\Omega *_\gamma \omega \wedge \nu = \int_\Omega \psi \wedge \nu. \tag{91}$$

A partir da derivada de forma da formulação dual em um domínio perturbado Ω_t, e seguindo os mesmos passos do caso do PVF com condição de Robin, ou seja, derivando com respeito ao pseudotempo t e fazendo uso do Teorema 3 e do Teorema 4, encontramos

$$\begin{aligned} \int_\Omega *_{\alpha^{-1}}\delta\rho \wedge \tau + (-1)^{(d-l)(l+1)}\delta\omega \wedge \boldsymbol{d}\tau + (-1)^{(d-l-1)(l+1)} \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{d}(Tr\phi \wedge Tr\tau) \\ + \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} Tr(*_{\alpha^{-1}}\rho \wedge \tau + (-1)^{(d-l)(l+1)}\omega \wedge \boldsymbol{d}\tau) = 0, \end{aligned} \tag{92}$$

$$\int_\Omega (-1)^{(d-l)} \boldsymbol{d}\delta\rho \wedge \nu + \int_\Omega *_\gamma \delta\omega \wedge \nu + \int_\Gamma \boldsymbol{i}_{\mathbf{v}} Tr\left((-1)^{(d-l)} \boldsymbol{d}\rho \wedge \nu + *_\gamma\omega \wedge \nu) - \Psi \wedge \nu\right) = 0. \tag{93}$$

Até aqui temos caracterizado as derivadas de forma $\delta\omega$ e $\delta\rho$ da forma primal ω e da forma dual ρ.

A seguir, vamos discutir o caso $l = 0$ e, por uma questão de simplicidade, assumimos os coeficientes $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$ dos operadores de Hodge, isto é, $*_\gamma = 0$. Podemos interpretar as formas diferenciais ψ e ϕ em (72) e (74) como duas funções escalares $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $g \in H^2(\mathbb{R}^d)$. E usando as expressões (92) e (93) como referência, podemos escrever a formulação dual do problema de Dirichlet em termos de *proxies* vetoriais. Para o problema de Dirchlet

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{94}$$

$$u = g \quad \text{em} \quad \Gamma, \tag{95}$$

obtemos a forma dual fraca fazendo

$$\mathbf{q} = \mathbf{grad}\ u. \tag{96}$$

Logo, procuramos $u \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{q} \in H(\text{div};\Omega)$, tal que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{q}\cdot\mathbf{p}\, dx + \int_\Omega u \operatorname{div}\mathbf{p}\, dx = \int_\Gamma g\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \qquad && \forall \mathbf{p} \in H(\text{div};\Omega), \\ &\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{q}\ v dx + \int_\Omega f v dx = 0 && \forall v \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{97}$$

Com as condições adequadas de suavidade no domínio e nas funções podemos assumir que $u \in H^2(\Omega)$ e $\mathbf{q} \in H^1(\mathrm{div};\Omega)$. A seguir, vamos representar δu e $\delta\mathbf{q}$ como as derivadas de forma de u e $\mathbf{q}$ em direção a algum campo de velocidade $\mathbf{v}$. Interpretando $\mathbf{q}$ como uma $(d-1)$-forma e u como uma 0-forma em $\mathbb{R}^d$, e reinterpretando (92) e (93) em termos de *proxies* vetoriais temos para a forma variacional das derivadas de forma é: procuramos $\delta\mathbf{q} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ e $\delta u \in L^2(\Omega)$, tal que para todo $\mathbf{p} \in (C^\infty(\Omega))^d$ e $v \in C^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \delta\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}\, dx + \int_\Omega \delta u \operatorname{div}\mathbf{p}\, dx + \int_\Gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} + u\operatorname{div}\mathbf{p})ds \\
&= \int_\Gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\left(\frac{\partial(g\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{n})}{\partial\mathbf{n}} + \mathfrak{H}g\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}\right) ds, \\
&\int_\Omega \operatorname{div}\delta\mathbf{q}\ v dx + \int_\Gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}(\operatorname{div}\mathbf{q} - f)v dx = 0.
\end{aligned} \tag{98}$$

A perda de regularidade nas derivadas de forma $\delta\mathbf{q}$ e δu comparadas com $\mathbf{q}$ e u é consequência da diferenciação com respeito ao domínio, em particular, se deve à regularidade fraca dos dados da fronteira. Isto é, $u \in H^2(\Omega)$ enquanto $\delta u \in H^1(\Omega)$, da mesma maneira para $\mathbf{q}$ e a sua derivada de forma $\delta\mathbf{q}$. É importante ter em conta isto, já que, como consequência da perda de regularidade nas derivadas de forma, formulações variacionais para formas não suaves poderão ser elegidas.

Para determinar que a condição de fronteira é satisfeita pela derivada de forma δu, devemos observar o seguinte: inicialmente, testar a primeira equação de (98) com $\mathbf{p} \in (C^\infty(\Omega))^d$ e $v \in C^\infty(\Omega)$ implica que

$$\delta\mathbf{q} = \mathbf{grad}\ \delta u. \tag{99}$$

Portanto, $\delta u \in L^2(\Omega)$ e $\delta\mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ implica que $\delta u \in H^1(\Omega)$. Logo, testando a primeira equação de (98) com $\mathbf{p} \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^d$ e expandindo o terceiro termo nas direções tangencial e normal, e usando as expressões (48) e (53), vemos que

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} + u\operatorname{div}\mathbf{p} = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{q}_\Gamma\cdot\mathbf{p}_\Gamma + u(D\mathbf{p})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + u\operatorname{div}_\Gamma\mathbf{p}_\Gamma + \mathfrak{H}u\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}. \tag{100}$$

Note que pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial(g\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{n})}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} + g(D\mathbf{p})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + g(D\mathbf{n})\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}. \tag{101}$$

Onde $(D\mathbf{n})\mathbf{p} = S\mathbf{p}$ é o vetor tangencial, logo, $g(D\mathbf{n})\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = 0$, devido à ortogonalidade da aplicação de Weingarten ([19]). Fazendo um cálculo direto com $u = g$ em Γ, (96) e (54) para $\mathbf{q}_\Gamma\cdot\mathbf{p}_\Gamma$ e $u\operatorname{div}\mathbf{p}_\Gamma$ temos

$$\int_\Gamma \left(\delta u + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}\right)\right)\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} ds = 0. \tag{102}$$

Como $\mathbf{p}$ é arbitrário, temos que

$$\delta u = -\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \quad \text{em} \quad \Gamma, \tag{103}$$

no espaço traça $H^{1/2}(\Omega)$, sendo u e $g \in H^2(\Omega)$.

Considerações finais

É evidente que a estrutura das formas diferenciais facilita a compreensão do conteúdo geométrico e topológico de modelos de otimização ou de modelos físicos de mecânica de fluidos, eletromagnéticos, entre outros. O método de velocidade de Delfour-Zolésio é útil para definir e estudar o gradiente de forma e os teoremas de estrutura. Como foi apresentado, a estrutura essencial das derivadas de forma pode ser facilmente compreendida em termos da derivada de Lie. Também conhecemos a condição de simetria da Hessiana de forma em termos dos colchetes de Lie. Ditas aproximações são convenientes para obter as derivadas de forma de soluções de Problemas de Valor na Fronteira (PVF) de segunda ordem.

Pode-se ver o potencial das derivadas de forma para estudar problemas de espalhamento (*scattering*), por exemplo, sistemas elasto-acústicos de equações acopladas, pois, a caracterização das derivativas de forma serve para garantir a estabilidade, a taxa de convergência e a eficiência numérica dos métodos iterativos usados para resolver problemas inversos [6].

Anexos

A seguir, vamos introduzir alguns conceitos e resultados da geometria diferencial (ver [19]) que foram usados quando apresentamos na seção (2.5) a integral para uma forma diferencial sobre uma variedade Ω.

Quando uma variedade é coberta por múltiplas parametrizações, onde nenhuma das quais pode cobrir toda a variedade, podemos dividir uma l-forma definida em (Ω) em pedaços menores, para que cada peça seja completamente coberta por uma única parametrização. Isso foi feito usando a partição da unidade a ser discutida.

Introduzimos primeiro a noção de suporte:

Definição 16. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ uma variedade suave. Dada uma l-forma ω $(0 \leq l \leq d)$ em Ω, podemos definir o suporte de ω como*

$$\operatorname{Supp} \omega = \overline{p \in \Omega; \omega(p) \neq 0},$$

isto é, o fecho do conjunto $\{p \in \Omega : \omega(p)\} \neq 0$.

Suponha que Ω é uma variedade orientada com $F(u_1, \ldots, u_d) : U \to \Omega$ como uma das muitas parametrizações locais. Se uma d-forma ω em Ω só aparece em $F(U)$, ou precisamente

$$\operatorname{Supp} \omega \subset F(U),$$

então podemos definir $\int_\Omega \omega$. Isto é, se em $F(U)$ temos $\omega = \phi du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n$, definimos

$$\int_\Omega \omega = \int_{F(U)} \omega.$$

Outra ferramenta importante é chamada de partição da unidade, que "divide" uma forma diferencial em pequenos pedaços, tal que cada pedaço seja coberto por uma parametrização simples. Antes de definir a partição de unidade definamos a noção de atlas:

Definição 17. *Um atlas de classe C^k numa variedade Ω é uma coleção $\mathcal{A}$ de parametrizações $F : U \to \Omega$ de classe C^k, cujas imagens cobrem Ω.*

Definição 18. *(ver [30]) Seja Ω uma variedade suave com um atlas $\mathcal{A} = \{F_\alpha : U_\alpha \to \Omega\}$, tal que $\Omega = \bigcup_{\alpha' s} F_\alpha(U_\alpha)$. A partição da unidade subordinada ao atlas $\mathcal{A}$ é uma família de funções suaves $\rho_\alpha : \Omega \to [0,1]$ com as seguintes propriedades:*

1. $\operatorname{Supp} \rho_\alpha \subset F_\alpha(U_\alpha)$ *para qualquer α;*

2. *para qualquer $p \in \Omega$ existe um conjunto aberto $\mathcal{O} \subset \Omega$, contendo p, tal que*

$$\operatorname{Supp}\ \rho_\alpha \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$$

   para uma quantidade finita α;

3. $\sum\limits_{\alpha' s} \rho_\alpha \equiv 1.$

A partir de uma d-forma ω definida em uma variedade orientável Ω que está parametrizada por um atlas orientado $\mathcal{A} = \{F_\alpha : U_\alpha \to \Omega\}$. Seja $\{\rho_\alpha : \Omega \to [0,1]\}$ a partição da unidade subordinada a $\mathcal{A}$, então, pela terceira propriedade na definição ([30]) temos:

$$\omega = \underbrace{\left(\sum_{\alpha' s} \rho_\alpha\right)}_{=1} \omega = \sum_{\alpha' s} \rho_\alpha \omega.$$

Nota final do Teorema de Stokes: Se $F(u,v) : U \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma parametrização para cobrir toda a variedade Ω, podemos definir o elemento de superfície como

$$dS = \sum_\alpha \left| \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha} \right| du_\alpha dv_\alpha.$$

Porém, não toda superfície pode ser coberta com uma única parametrização, logo, podemos definir um atlas orientado $\mathcal{A} = \{F_\alpha : U_\alpha \to \Omega\}$ com uma partição de unidade $\{\rho_\alpha : \Omega \to [0,1]\}$ subordinada ao atlas $\mathcal{A}$. Temos

$$dS = \sum_\alpha \rho_\alpha \left| \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha} \times \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha} \right| du_\alpha dv_\alpha.$$

Teorema 5. *O operador curvatura $\mathfrak{R}_s$ é um operador simétrico que atua sobre o plano tangente. Podemos denotar $\frac{1}{\mathfrak{R}_1(s)}$ e $\frac{1}{\mathfrak{R}_2(s)}$ como seus valores próprios, chamados curvaturas principais. Podemos definir que curvatura média $\mathfrak{H}_s$ é a metade da traça, assim*

$$\mathfrak{H}_s = \frac{1}{2} \operatorname{div} n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1(s)} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2(s)}\right).$$

Definimos a curvatura gaussiana como

$$G_s = \frac{1}{\mathfrak{R}_1(s)\mathfrak{R}_2(s)} = \det(\mathfrak{R}_s|_\Gamma).$$

O elemento de área sobre uma superfície Γ_s no ponto $y = x + sn(x)$ está relacionado com o elemento de área da superfície Γ no ponto x, através da relação

$$d\zeta_s(y) = \big(1 + 2s\mathfrak{h}(x) + s^2 G(x)\big)\, d\zeta(x).$$

A derivada normal do operador de curvatura $\mathfrak{R}_s$ é

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathfrak{R}_s = -\mathfrak{R}_s^2.$$

Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathfrak{H}_s = -\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(\mathfrak{R}_s^2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1^2(s)} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2^2(s)}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial s}G_s = -2\mathfrak{H}_s G_s.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em [25].

Referências

[1] Ralf Hiptmair, Jingzhi Li, *Shape derivatives in differential forms I: an intrinsic perspective* Annali di Matematica 192: 1077-1098 (2013).

[2] Douglas N. Arnold, Richard S. Falk, *Finite element exterior calculus, homological techniques and aplications*, Acta numerica 15: 1-155 (2006).

[3] Henry Cartan, *Differential Forms*, Paris, (1970).

[4] Manfredo do Carmo, *Differential forms and aplications*, Springer science and business media (1998)

[5] Serge Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, 1995

[6] Ralf Hiptmair, Jingzhi Li, *Shape derivatives in differential forms II:Shape derivative for scattering problems*, Inverse problems, volume 34, Number 10 (2018).

[7] Manfredo do Carmo, *Differential Geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall (1976).

[8] David Bachmann, *A geometric approach to differentialforms*, Birkhauser (2012).

[9] John Pierce Fortney, *A visual introduction to differential forms and calculus on manifolds*, Birkhauser (2018).

[10] Steven H. Weintraub, *Differential forms, A complement to vector calculus*, Academic Press (1997).

[11] M.C. Delfour,J.P Zolésio , *Shapes and Geometries, Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization*, Volume 22 of advances in design and control. (SIAM) Philadelphia (2011).

[12] M.C. Delfour,J.P Zolésio , *Shapes and Geometries, Analysis, Differential Calculus and Optimization*, (SIAM) Philadelphia (2001).

[13] John Milnor, *Topology: From the differentiable viewpoint*, Princeton Press (1965).

[14] Vladimir G. Ivancevic, Tijana T. Ivancevic, C. Voisin, *Undergraduate Lecture Notes in De Rham–Hodge Theory*propus ou propuz Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I. Cambridge Univ. Press,Cambridge, (2002).

[15] Giovanni Leoni, *A First course in Sobolev spaces*, Second editon, American Mathematical society (2010)

[16] Jan Zokolowski, J.P Zolésio,C. Voisin, *Introduction to shape optimization* Shape sensitive analysis, Springer (1991).

[17] Antoine Laurain, *Lecture Notes: Shape calculus and shape optimization: An introduction* São Paulo (2018)

[18] T. Frankel, *The geometry of physics: An introduction* Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[19] Berrett O'Neill, *Elementary differential geometry* Second Editio, American Press. Los Angeles (2006)

[20] Holger Heumann, Ralf Hiptmair, *Convergence of Lowest Order Semi-LagrangianSchemes* Foundations of computational mathematics 13:187-220, (2013).

[21] Cecilia Pagliantini, *Computational magnetohydrodinamics with discrete differential forms* Thesis doctoral, Zurich (2016).

[22] Ralf Hiptmair, *Finite elements in computational electromagnetism* Acta Numerica (2002) 237-339 Cambridge University Press (2002)

[23] Aníbal Chicco-Ruiz, Pedro Morin, M. Sebastian Pauletti, *The shape derivative of the Gauss curvature* Optimization and Control (2017)

[24] Alain Bossavit, *On the geometry of the electromagnetism (4): Maxwell's house* AEM Vol.6 No 4. (1998)

[25] Jean Claude Nédélec, *Acoustic and electromagnetics aquations: Integral representations for harmonic problems* Springer, Science and business media (2001)

[26] Ralf Hiptmair, *Discrete hodge operator* Numer. Math 90265-289 (2001)

[27] Hélène Barucq, Rabia Djellouli, Elodie Estecahandy. On the existence and the uniqueness of the solution of a fluid–structure interaction scattering problem, Journal of Mathematical Analysis and Applications 412 571-588 (2014)

[28] Ralf Hiptmair, *Finite elements in computational electromagnetism* Acta Numerica (2002) 237-339 Cambridge University Press (2002)

[29] M.C. Delfour,J.P Zolésio, *Anatomy of the shape Hessian* Annali di Matematica Pura Ed Applicata 159:315-339 (1991)

[30] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall Inc. (1974)

[31] Frank Hettlich, *Frechet derivatives in inverse obstacle scattering*, Inverse Problems 11 371-382 (1995)

[32] Shawn W. Walker, *The Shape of Things*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2015