Um Sistema Local e Não Local via Equações de Evolução

Luiza Camile Rosa da Silva

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Matemática

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Sergio Muniz Oliva Filho

Durante o desenvolvimento deste trabalho o candidato recebeu apoio financeiro do CNPQ.

São Paulo, 11 de Março de 2022

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 22/03/2022. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Sergio Muniz Oliva Filho (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho - ICMC-USP
- Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves - UEL-PR

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por me guiar. Agradeço fortemente à minha família, aos meus pais, Patricia e Antonio César por sempre me darem segurança, apoio e incentivo. E pela minha irmã Julia, por quem eu me orgulho muito de ter ao meu lado. Obrigada pelos conselhos, paciência, me incentivar a praticar esportes e resolver a maioria dos meus problemas. Mesmo em momentos de grandes equívocos, passou pano para mim e eu te amo por isso.

Tenho a maior gratidão pelo Prof. Sérgio Muniz pela parceria, a super paciência e orientação neste ano de trabalho, principalmente, por me ouvir e sempre estar do meu lado. Obrigada pela amizade, pelas conversas de Matemática na AUCANI e MEET, por confiar em mim e sempre me incentivar. Sem sua calma, as coisas não seriam as mesmas. Agradecimento especial ao Prof. Alexandre Nolasco, em que me acolheu presencialmente na disciplina de Semilineares, sempre disposto a ajudar. Sua animação foi de grande motivação para mim.

Sou eternamente grata a todos os amigos que sempre estiveram do meu lado, em especial, Pedro Takemura, Gabriela Rangel, Isadora Andrade e Guilherme Ortega. Gratidão ao pessoal da Academia Pro Olímpica, por me ajudarem nos meus treinos, especialmente, nesse último semestre de mestrado.

Agradeço aos professores e professoras do Departamento de Matemática, tanto da Universidade de São Paulo quanto da Universidade Estadual de Londrina, pelos ensinamentos e conhecimentos transmitidos e por contribuírem em minha formação acadêmica e pessoal. Em especial, aos Professores Márcio Jorge, Michele Alves, Pedro Lopes, Mary Lilian e Jorge Sotomayor(in memorium), que de vossas maneiras, me ajudaram a crescer academicamente.

Por fim, agradeço o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro durante o mestrado e graduação. Essa é uma oportunidade para poucos e agradeço muito por tê-la, principalmente nestes tempos difíceis.

Resumo

SILVA, L.C.R. **Um Sistema Local e Não Local via Equações de Evolução.**. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Este trabalho tem como principal objetivo estudar um sistema unidimensional de uma equação diferencial parcial local com uma não local, acoplados pela fronteira. Para este fim, estudaremos a boa colocação da equação linear local, que será dada pelo laplaciano pertubado por um múltiplo da identidade e da parte linear não local, dada por uma convolução, também pertubado por um múltiplo da identidade.

Abstract

The present work aims as its primary objective to study an unidimensional system of a local partial differential equation with a non-local partial differential equation, couple by the boundeness. In order to achieve that objective, we will study the well posedness of linear local equation, given by a Laplacian disturbed by a multiple of the identity, and of the linear non-local equation, given by a convolution, also disturbed by a multiple of the identity.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^N$	espaço euclidiano N dimensional
Ω	subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ não vazio
$\overline{\Omega}$	fecho de Ω
$\partial\Omega$	fronteira de Ω
$\mathbb{N}$	o conjunto dos números inteiros estritamente positivos
$\mathbb{R}$	o corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	o corpo dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$C(K)$	espaço das funções contínuas de K em $\mathbb{R}$
$\\|f\\|$	$\sup_{z\in K} \|f(z)\|$
X'	espaço dual de X
$\mathcal{L}(X)$	espaço das aplicações lineares contínuas $A : X \to X$

Introdução

Considerações Preliminares

O objetivo deste trabalho é estudar o acoplamento das equações abaixo, com uma pertubação específica, no subconjunto unidimensional $\Omega = (-1,1)$, com $t \geq 0$ e $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \lambda u(x,t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1,t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \displaystyle\int_0^1 J(-y)(v(y,t) - u(0,t))dy \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

para $x \in (-1,0), t > 0$ e

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \displaystyle\int_0^1 J(x-y)(v(y,t) - v(x,t))dy - \int_{-1}^0 J(x-y)dy(v(x,t) - u(0,t)) \\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

para $x \in (0,1), t > 0$.

Chamamos a (1) de *problema linear local*, que está definida em $\Omega_l = (-1,0)$ e a (2), de *problema não linear local* em $\Omega_{nl} = (0,1)$. Aqui, teremos $(u,v) \in X^\alpha \times L^2(0,1)$, em que X^α, com $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, é o domínio das potências fracionárias do operador $A_0 u = -\Delta u + \lambda u$, que é um operador setorial $A_0 : D(A_0) \subset L^2(-1,0) \to L^2(-1,0)$, com domínio $D(A_0) = X^0 = H^2(-1,0)$ munido da condição de Neumann homogêneo. Na segunda equação, temos que J é uma função não negativa, contínua, simétrica de suporte compacto com $\text{supp}(J) = [-R,R]$, $\int_{\mathbb{R}} J(z)dz = 1$ e $h_0 = \int_0^1 J(x-y)dy$. Observe que as equações estão acopladas pela fronteira em $x = 0$, o intuito do trabalho será mostrar que o sistema está bem posto.

Com o auxílio dos resultados de existência e unicidade de [8], tomando o operador linear $A : D(A) \subset X^\alpha \times L^2(0,1) \to X^\beta \times L^2(0,1)$, com $\beta \in (0, -\frac{1}{2})$, e considerando

$$\begin{aligned} X' &= AX + F(t,X), t \geq 0 \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{3}$$

em $\Omega = (-1,1)$ e $D(A) = X^\alpha \times L^2(\Omega_{nl})$, mostraremos que o sistema está bem posto no sentido de semigrupos. Como estamos em um espaço produto, o objetivo é mostrar que cada equação está bem posta.

A equação local, que é definida a partir do laplaciano, terá sua forma abstrata dada por

$$\begin{aligned} x' &= Lx + f_1(t,x), t \geq 0 \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{4}$$

em que L é uma extensão do laplaciano, $\lambda > 0$, é um operador setorial em um apropriado espaço de Banach X, no domínio $D(L) = H^1(-1,0)$, munido da condição de Neumann, a priori, diremos homogêneo. Denotaremos por X^α, com $\alpha \in \mathbb{C}$, as potências fracionárias de X e $\mathbf{e}^{-A_0 t}$ o semigrupo analítico gerado por $-A_0$. É bem conhecido que se $f_1 : X^\alpha \to X^\beta$ for uma função Lipschitz contínua em conjuntos limitados de X^α, então o problema (4) está localmente bem posto em X^α. Assim, para cada $x_0 \in X^\alpha$, temos a solução dada pela fórmula da variação das constantes, isto é,

$$x(t) = \mathbf{e}^{-At}x_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(s-t_0)} f(s, x(s)) ds.$$

Aqui, usamos o Teorema de Existência e Unicidade para semigrupos, estes quando são gerados a partir de um operador setorial (veja [8]) e então, podemos trabalhar com a boa colocação da equação parabólica associada ao operador (4),

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + \lambda u + f(u) = 0 &\quad \in \ (-1,0) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + g(u) = 0 &\quad \in \ x = -1, 0, \end{aligned} \tag{5}$$

com $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções suaves. Quando $g = 0$, as considerações acima são válidas. Quando $g \neq 0$, como será o caso da equação acima, precisaremos carregar as informações do problema de contorno de fronteira no domínio do operador, o que não fará dele ser um espaço vetorial. Assim, utilizaremos de técnicas do [4] para colocar a boa posição da equação (3).

O problema não local, apresentado em [1, 2], fará presença na segunda parte do operador (3). Redigiremos pela equação abstrata

$$\begin{aligned} v' &= A_1 v + f_2(t,v), \ t \geq 0 \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{6}$$

em que $A_1(v) = J * v + h_0 \cdot v$ é um operador linear limitado com $v \in L^2(\Omega)$. Aqui, carregaremos as hipóteses como em [3], em que o núcleo J é uma função contínua $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ não negativa, simétrica, com $J(x,x) > 0$, com suporte compacto $\operatorname{supp}(J) = [-R, R]$, $\int_{\mathbb{R}} J(z) = 1$ e $h_0(x) = \int J(x-y)dy$. Veja que como o operador A_1 é limitado, então A gera um C_0 semigrupo, denotado por $e^{A_1 v}$, isto é, gera um semigrupo uniformemente contínuo e, se f_2 for contínua e localmente Lipschitziana no segundo argumento, temos o conhecido resultado de existência e unicidade via solução fraca (ver [9, 11]) e é possível ver que ela também é dada pela fórmula da variação das constantes,

$$v(t) = e^{A_1 t}x_0 + \int_0^t e^{A_1(s-t)} f(s, x(s)) ds.$$

Assim, a equação abstrata acima estará bem posta e portanto, teremos que a equação tem solução em $L^2(\Omega_{nl})$.

Com essas considerações, conseguiremos, no espaço produto $X^\alpha \times L^2$, em que α será escolhido apropriadamente, ver que o operador (3) está bem posto e, então o sistema estará bem posto em Ω.

Organização do Trabalho

Nesta seção, descreveremos os assuntos abordados em cada Capítulo.

O Capítulo 1 será uma abordagem de alguns resultados preliminares que serão necessários para os próximos Capítulos, em especial, as Identidades de Green, o Teorema do Traço e alguns resultados sobre os espaços de Hilbert. O Capítulo 2 será um estudo das equações de evolução, quando os operadores em questão são contínuos ou setoriais. O Capítulo 3 é reservado para o estudo do Teorema de Existência e Unicidade da equação 4, este quando o operador é visto como setorial com seu espectro localizado em uma parte específica do plano. Esses resultados gerarão consequências sobre a solução, como a regularização. Tanto o Capítulo 4 e 6 são seções em que provaremos a boa colocação, de forma independente, dos problemas (1) e (2), sendo o primeiro analítico e o segundo, um semigrupo uniformemente contínuo. Usamos as referências [4] e [1, 2] como apoio. O Capítulo 5 é uma breve exposição sobre o Teorema de Existência e Unicidade de um problema hiperbólico, que gera um semigrupo uniformemente contínuo e que auxilia a boa colocação da equação do Capítulo 6. O Capítulo 7 é uma junção dos problemas (4) e (6). Inspirado em [3], vamos mostrar que o problema acoplado tem uma boa colocação em um espaço produto específico. Assim, podemos aplicar os resultados do Capítulo 4 e 6 para mostrar que o problema tem uma solução única, via semigrupos.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os pré-requisitos para a leitura desta dissertação. Boa parte dos resultados abaixo são clássicos e são estudadas em disciplinas. Indicamos os autores [6, 7, 8] para um bom aprofundamento. Também traremos alguns resultados básicos de distribuições, em que são apresentadas detalhadamente em [14, 15].

1.1 Resultados de Análise Funcional

Durante o trabalho, precisaremos relembrar algumas definições e resultados de Análise Funcional e Distribuições, além dos Espaços de Sobolev e seus mergulhos. Começaremos enunciando o Teorema do Ponto Fixo, teorema de grande importância para as Equações Diferenciais e que será utilizado com frequência durante o texto.

1.1.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Em Matemática, existem várias versões para o Teorema do Ponto Fixo. Nesse texto, trataremos do Teorema do Ponto Fixo de Banach qual trata-se de um problema de existência e unicidade de pontos fixos para aplicações do tipo $T : X \to X$ com uma certa propriedade. Provado em 1922 por Banach, o teorema traz várias aplicações no universo das equações diferenciais e a possibilidade de trazer soluções para algumas equações integrais, como veremos durante o texto.

Definição 1.1.1. *Um ponto fixo de uma aplicação $T : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $T(x) = x$.*

Definição 1.1.2. *Seja X um espaço vetorial normado. Diz-se que uma aplicação $T : X \to X$ é uma contração se existir constante $C < 1$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$ tem-se*

$$\|Tx - Ty\|_X \leq C\|x - y\|_X.$$

.

Teorema 1.1.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja X um espaço de Banach com $X \neq \emptyset$ e $T : X \to X$ uma contração em X. Então, T possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Ver [6]. □

1.1.2 Espaços L^p

Nessa seção, vamos rapidamente revisar os fatos básicos dos espaços de funções. Assuma Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis em Ω em $\mathbb{R}$ tais que

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C \geq 0; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p.}\},$$

será denotado por $\mathcal{L}^p(\Omega)$ e $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$, respectivamente.

Ao longo deste trabalho estaremos considerando funções assumindo valores reais. Note que $\|.\|_{L^p}$ não é, em geral, uma norma em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, pois pode acontecer $\|u\|_{L^p} = 0$ para u não identicamente nula. De modo geral, se Ω é um espaço de medida, introduzimos uma relação de equivalência dizendo que duas funções $f, u : \Omega \to \mathbb{R}$ são equivalentes se $f = u$ q.t.p, isto é, se existe um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = u(x)$ para todo $x \notin A$. Denotando a classe de equivalência de uma função u por $[u]$, é imediato que no conjunto quociente

$$L^p(\Omega) := \{[u] : u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}$$

as operações $[f]+[u] = [f+u]$ e $c[u] = [cu]$ estão bem definidas e tornam $L^p(\Omega)$ um espaço vetorial. Além disso, definindo $\|[u]\|_{L^p} := \|u\|_{L^p}$, corrigimos o que faltava para $\|.\|_{L^p}$ ser uma norma.

Com isso, é possível demonstrar que os espaços $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach. Além disso, dado $1 < p < \infty$, se p' é seu expoente conjugado, isto é, $1/p + 1/p' = 1$, então o dual de $L^p(\Omega)$ é $L^{p'}(\Omega)$.

Trabalharemos mais especificamente com o espaço $L^2(\Omega)$ por este ser conhecidamente um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_\Omega uvdx.$$

Uma das mais notáveis desigualdades que temos em $L^2(\Omega)$ é a Desigualdade de Hölder (ou Cauchy-Schwarz, neste caso), dada por

$$|\langle u, v\rangle_{L^2}| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

1.1.3 Teoremas Importantes em Espaços de Hilbert

Nessa seção, vamos listar alguns resultados úteis que é possível demonstrar exclusivamente em Espaços de Hilbert H em $\mathbb{R}$, estes munidos com um produto interno $\langle ., .\rangle_H$.

O primeiro conceito revelante é o de Operadores Auto-Adjuntos. Relembre que o adjunto $A^\bullet$ de A é definido por

$$D(A^\bullet) = \{u \in H : v \mapsto \langle Av, u\rangle_H : D(A) \to \mathbb{R} \text{ é limitado}\}$$

e, se $u \in D(A^\bullet)$, $A^\bullet u$ é o único elemento de H tal que

$$\langle v, A^\bullet u\rangle_H = \langle Av, u\rangle_H, \forall v \in D(A).$$

Daqui em diante usaremos a notação A^* para denotar os operadores dual e adjunto. Nos referiremos a ambos como operador adjunto.

Definição 1.1.3. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Diremos que um operador $A : D(A) \subset H \to H$ é simétrico se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$; isto é, $\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_H$ para todo $x, y \in D(A)$. Diremos que A é auto-adjunto se $A = A^*$.*

Proposição 1.1.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador auto-adjunto, injetor e com imagem densa, então A^{-1} é auto-adjunto.*

Demonstração. Como A é auto-adjunto, é fácil ver que

$$\{(x, -Ax) : x \in D(A)\}^\perp = \{(Ax, x) : x \in D(A)\} = G(A^{-1}).$$

Como A é injetor e tem imagem densa, como vale a igualdade $G(A^*) = \{(-Ax, x) : x \in D(A)\}^\perp$ (aqui $M^\perp$ representa o ortogonal de M), temos que

$$G((A^{-1})^*) = \{(-A^{-1}x, x) : x \in R(A)\}^\perp = G(A^{-1}).$$

Logo $A^{-1} = (A^{-1})^*$. $\square$

É simples verificar que todo operador auto-adjunto é simétrico. O próximo teorema mostra em quais condições a recíproca vale.

Teorema 1.1.2. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador simétrico e sobrejetor, então A é auto-adjunto.*

Demonstração. Primeiramente mostremos que A e A^* são injetores. Se $x \in D(A)$ e $Ax = 0$, temos que $\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_H$ para todo $y \in D(A)$ e consequentemente, do fato que $R(A) = H$ temos que $x = 0$. Para ver que A^* é injetor procedemos da mesma forma.

Agora mostremos que A é fechado. De fato, se $D(A)^* \supset D(A) \ni x_n \to x \in X$ e $Ax_n = A^*x_n \to y$, então $x \in D(A^*)$ e $A^*x = y$. Como A é sobrejetor, existe $w \in D(A)$ tal que $Aw = A^*w = A^*x$ e da injetividade de A^* temos que $w = x$. Com isto $x \in D(A)$ e $Ax = y$, mostrando que A é fechado.

Segue que do Teorema do Gráfico Fechado que a A tem inversa $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Claramente A^{-1} é auto-adjunto e da Proposição 1.1.1 segue que A é auto-adjunto. $\square$

Definição 1.1.4. *Uma forma bilinear $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é*

1. *contínua se existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H$, para todo $u, v \in H$.*
2. *coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha\|v\|_H^2$, para todo $v \in H$.*

O próximo teorema, cuja demonstração se baseará no Teorema do Ponto Fixo de Banach e no Teorema de Representação de Riesz-Fréchet, é o caso geral do famoso teorema de Lax Milgram. É um resultado de existência e unicidade e nos diz como conseguimos uma majoração para um funcional em H', em função de elementos de um conjunto fechado e convexo.

Teorema 1.1.3 (Stampacchia)**.** *Assuma $a(u, v)$ uma forma bilinear contínua coerciva em H. Seja $K \subset H$ um subconjunto não vazio fechado e convexo. Então, dado $\varphi \in H'$ existe um único elemento $u \in K$ tal que*

$$a(u, v - u) \geq \varphi(v - u), \forall v \in K. \tag{1.1}$$

Demonstração. Do Teorema de Representação de Riesz, sabemos que existe uma única $f \in H$ tal que $\langle f, v\rangle = \varphi(v), \in v \in H$. Por outro lado, fixado $u \in H$, a aplicação $v \to a(u, v)$ é um funcional linear contínuo em H. Usando mais uma vez o Teorema da Representação de Riesz, encontramos um único elemento em H, denotado em Au, tal que $a(u, v) = \langle Au, v\rangle, \forall v \in H$. Por A ser contínuo em H, temos

$$|Au|_H \leq C\|u\|_H, \forall u \in H.$$

Pela coercividade de a, temos

$$\langle Au, u\rangle_H \geq \alpha|u|_H^2, \forall u \in H.$$

Para conseguirmos (1.1.3), temos que encontrar $u \in K$ tal que

$$\langle Au, v - u\rangle_H \geq \langle f, v - u\rangle_H, \forall v \in K.$$

Seja $\rho > 0$ uma constante que determinaremos adiante. Mostrar a desigualdade acima é equivalente a mostrar que vale

$$\langle \rho f - \rho Au + u - u, v - u\rangle_H \leq 0, \forall v \in K,$$

isto é,

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u),$$

em que P_K é a projeção de f em K. Para cada $v \in K$, se $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$, afirmamos que, colocando condições em $\rho > 0$, temos que S é uma contração estrita. De fato, como vale a desigualdade $|P_K f_1 - P_K f_2|_H \leq |f_1 - f_2|_H, \forall f_1, f_2 \in H$ (veja [5], página 134), temos:

$$|Sv_1 - Sv_2|_H \leq |(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)|_H,$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}|Sv_1 - Sv_2|^2 &= |v_1 - v_2|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2|Av_1 - Av_2|^2 \\ &= |v_1 - v_2|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2).\end{aligned}$$

Escolhendo $\rho > 0$ tal que $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$, isto é, $0 < \rho < 2\alpha/C^2$, temos que S tem um único ponto fixo. □

O próximo teorema, Teorema de Lax-Milgram, é um resultado bastante simples e eficiente para resolver Equações Diferenciais Elípticas.

Teorema 1.1.4 (Lax Milgram). *Assuma $a(u,v)$ é uma forma bilinear coerciva contínua. Então, dado $\varphi \in H'$ existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \varphi(v), \forall v \in H.$$

Para ver a demonstração, basta colocar o teorema nas hipóteses do Teorema 1.1.3, isto é, vamos mostrar que H é convexo, e posteriori, basta observar que se $v, u \in H$ então $w = \pm v + u \in H$. Substituindo em (1.1) obtemos a igualdade $a(u,v) = \varphi(v), \forall v \in H$.

Mostraremos que H é uniformemente convexo, o que implicará que será convexo. Aqui, B_X denota uma bola em X.

Definição 1.1.5. *Dizemos que um espaço normado X é uniformemente convexo, ou, mais precisamente, que sua norma é uniformemente convexa se, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in B_X$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$ tem-se*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_X \leq 1 - \delta.$$

Como dois pontos de B_X distam no máximo 2 entre si, é suficiente mostrar a condição acima para $0 < \epsilon \leq 2$

Proposição 1.1.2. *Todo espaço de Hilbert H é uniformemente convexo. Em especial, $H = L^2(\Omega)$.*

Demonstração. Dados $x, y \in B_H$ e $0 < \epsilon \leq 2$, usando a Lei do Paralelogramo, resulta que se $\|x - y\| \geq \epsilon$ então

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_H^2 = \frac{\|x\|_H^2}{2} + \frac{\|y\|_H^2}{2} - \frac{\|x-y\|_H^2}{4} \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Basta tomar $\delta = 1 - (1 - \frac{\epsilon^2}{4})^{\frac{1}{2}} > 0$. □

1.2 Teoria Espectral

Aqui, faremos uma breve revisão sobre o conjunto resolvente de um operador A, que fará grande presença em nosso texto. Também relembraremos sobre o operador resolvente e, veremos condições sobre quando ele pode ser compacto.

Definição 1.2.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Se I denota o operador identidade, então um número complexo λ é dito ser um valor regular se valer*

- *$A - \lambda I$ é injetor;*
- *$(A - \lambda I)^{-1} : R(A - \lambda I) \to X$ é um operador linear limitado;*
- *$A - \lambda I$ tem imagem densa em X.*

O conjunto dos valores regulares é chamado de conjunto resolvente do operador A e é denotado por $\rho(A)$. O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é chamado espectro do operador A.

Definição 1.2.2. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Diremos que um operador linear $T : X \to Y$ é compacto se dada uma sequência x_n limitada em X então Tx_n tem uma subsequência convergente. Denotamos por $\mathcal{K}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares compactos $K : X \to Y$.*

Para aprimorarmos, introduziremos algumas considerações do operador $(\lambda I - A)^{-1}$, quando $\lambda \in \rho(A)$.

Lema 1.2.1 (Identidade do Resolvente)**.** *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Se $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \tag{1.2}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1} &= (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} \\ &= (\mu - A)^{-1}[(\mu - A) + (\lambda - \mu)I](\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1},\end{aligned}$$

o que prova (1.2). □

Definição 1.2.3. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e com resolvente não vazio. Diremos que A tem resolvente compacto se para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$ temos que $(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{K}(X)$.*

Uma consequência simples da identidade do resolvente (1.2) é que se A tem resolvente compacto, então $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Antes de mais nada, relembraremos que, dados X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subset Y$, dizemos que X está *imerso continuamente* em Y se existe $c > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, para todo $x \in X$. Neste caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$ ou $X \subset Y$. Dizemos que a imersão de X em Y é compacta se a aplicação identidade $id : X \to Y$ for compacta. Com isso, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.2.1. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com $0 \in \rho(A)$. Em $D(A)$ defina a norma do gráfico $\|x\|_{G(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$ e denote por Y o espaço $D(A)$ munido da norma $\|\cdot\|_{G(A)}$. Mostre que Y é um espaço de Banach e que se Y está compactamente imerso em X, então A tem resolvente compacto.*

Demonstração. Note que $\|x\|_{G(A)}$ é equivalente a $\|Ax\|_X$. Pela observação acima, é suficiente mostrar que A^{-1} é compacto. Como $Y \hookrightarrow X$ é compacto, então dada uma sequência limitada x_n em Y então existe uma subsequência de x_n (com a norma de X) que converge, ou seja, se $\|Ax_n\|_X$ é limitado então $\|x_n\|_X$ tem subsequência convergente. Assim, $A^{-1} : R(A) \to X$ é compacto pois dada sequência limitada $\{Ax_n\}$ em $R(A)$ segue que $A^{-1}(Ax_n) = x_n$ tem subsequência convergente. □

1.3 Distribuições

Nesta seção, Ω é um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}^N$. Aqui, daremos uma revisão no conceito de distribuições, ferramenta em que nos ajudará a compreender melhor os espaços que serão introduzidos posteriormente, os Espaços de Sobolev.

Por [15], sabemos que as funções que são diferenciáveis no sentido clássico não são suficientes para o estudo das equações diferenciais parciais e, como veremos, distribuições são mais que apenas funções. Veremos que elas podem ser vistas como funções que serão diferenciáveis infinitamente, mesmo que não seja no sentido clássico, e futuramente nos ajudará a definir o famoso espaço de funções onde buscamos as soluções para as equações, os Espaços de Sobolev.

Relembremos a notação de multi-índice para derivada parcial. Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ um multi-índice. O inteiro $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha$ é a norma de α e colocamos

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_i x^{\alpha_1} x_1 \partial x^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial x^{\alpha_N} x_N},$$

em que a função u é $|\alpha|$ vezes diferenciável e as derivadas parciais comutam. Denotamos o espaço $C^0(\Omega)$ como o espaço real das funções reais contínuas em Ω e, para todo $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$C^k(\Omega) = \{u; \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in C^0(\Omega)\},$$

como o espaço k-vezes das funções continuamente diferenciáveis em Ω. O espaço das funções diferencialmente diferenciáveis em Ω é definido por

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega).$$

O suporte de uma função u, $\operatorname{supp} u$, é o complementar do maior subconjunto aberto de Ω no qual u se anula. Funções com o suporte compacto fazem um papel importante e para isso denotamos por $C_c^k(\Omega) := \mathcal{D}^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); \operatorname{supp} u \text{ é compacto}\}$ e

$$C_c^\infty(\Omega) := \mathcal{D}(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D^k(\Omega).$$

Veja que a definição acima as funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ são sensíveis a derivação de qualquer ordem, isto é, dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ para qualquer multi-índice α. A próxima definição nos diz como uma sequência em $D(\Omega)$ converge.

Definição 1.3.1. *Uma sequência $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ no sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$ se e somente se*

1. *Existe um subconjunto compacto K de Ω tal que $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ para todo n.*
2. *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$, uniformemente.*

Finalmente, definiremos o espaço de distribuições:

Definição 1.3.2. *O espaço de distribuições em Ω, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o dual do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Uma proposição bastante clássica que iremos admitir nos fornece quando conseguimos reconhecer se uma forma linear é uma distribuição:

Proposição 1.3.1. *Uma forma linear em $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição se e somente se $T(\varphi_n) \to 0$ para toda sequência $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tais que $\varphi_n \to 0$ no sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [15]. □

Em alguns momentos oportunos, é conveniente escrever $T(\varphi_n) = \langle T, \varphi_n \rangle$, como veremos durante o escopo do texto. Além disso, a convergência de sequências é dada de forma bastante natural, como é enunciada na proposição abaixo:

Proposição 1.3.2. *Uma sequência $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge em $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$ se e somente se $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Iremos admitir a demonstração da Proposição 1.3.2 acima, em que demonstração pode ser vista em [15]. A noção de convergência acima nos permite demonstrar:

Proposição 1.3.3. *Seja $u_n \to u$ em L^p para algum $p \in [1, \infty]$. Então, $u_n \to u$ no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração. Note que para qualquer $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos que pela Desigualdade de Hölder,

$$|\langle u_n, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle| \leq \int_\Omega |u - u_n|\,|\varphi|\,dx \leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \to 0.$$

□

Além do mais, como dito anteriormente, conseguimos diferenciar infinitamente uma distribuição, no seguinte sentido:

Definição 1.3.3. *Seja T uma distribuição em Ω. A fórmula:*

$$S(\varphi) = (-1)T(\partial\varphi),\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.3}$$

define uma distribuição que é denominada de derivada parcial distribucional de T.

Mostraremos agora que essa definição está bem definida:

De fato, observe que claramente (1.3) define uma forma linear em $\mathcal{D}(\Omega)$. Vejamos se é contínua. Seja uma sequência $\varphi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Note que $\partial\varphi_n \to 0$, uma vez que a condição de suporte é a mesma, pelo fato de que o suporte da derivada parcial de uma função está incluído no suporte dessa função e que as derivadas de $\partial\varphi_n$ são derivadas de φ_n. Assim,

$$S(\varphi) = (-1)T(\partial\varphi) \to 0,$$

para qualquer sequência $\varphi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Observe que essa definição faz sentido pois é simples mostrar que, tomando $u \in C^1(\Omega)$, então a derivada parcial distribuição coincide com a derivada parcial clássica. É um resultado bastante clássico, porém como usa ferramenta que está fora do escopo desse texto, será ocultada.

Por indução, conseguimos ampliar a Definição 1.3.3 para derivadas de ordens maiores, isto é, dada T uma distribuição de α um multi-índice, temos

$$\langle\partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Proposição 1.3.4. *Seja $T_n \to T$ no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Então, para todos multi-índices α, temos $\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T$ no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração. Para qualquer $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, basta ver que

$$\partial^\alpha T_n(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T_n(\partial^\alpha\varphi) \to (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\varphi) = \partial^\alpha T(\varphi).$$

□

Com esses resultados em mente, iremos introduzir os Espaços de Sobolev.

1.4 Espaços de Sobolev

Nessa seção, introduziremos a mais importante classe de espaços de funções para as Equações Diferenciais Parciais (EDP's), os Espaços de Sobolev. Como sabemos, toda função em $L^p(\Omega)$ é uma distribuição, então existe a derivada no sentido distribucional. Em geral, essas derivadas não são funções. Essa é a motivação de se definir:

Definição 1.4.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$. Definimos os Espaços de Sobolev como*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

Quando $p = 2$, usaremos a notação $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

As normas usuais dos Espaços de Sobolev são:

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, para o caso $p = 2$, temos:

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Essa norma pode ser facilmente associada ao produto escalar:

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha u \rangle_{L^2} \right).$$

Teorema 1.4.1. *Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach. Em particular, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.*

Demonstração. Precisamos provar que $W^{m,p}(\Omega)$ é completo com sua norma. Tomemos uma sequência de Cauchy $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Em vista de como foi definida a norma, segue que para cada multi-índice α, $|\alpha| \leq m$, a sequência de derivadas parciais $\partial^\alpha u_n$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Por $L^p(\Omega)$ ser completo, existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $\partial^\alpha u_n \to g_\alpha$ em $L^p(\Omega)$. Assim, podemos concluir que $\partial^\alpha u_n \to g_\alpha$ no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, sabemos também que $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$, onde $u = g_{(0,0,\dots,0)}$ é o limite da sequência em $L^p(\Omega)$. Portanto, $\partial^\alpha u = g_\alpha \in L^p(\Omega)$. Isso mostra que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e que $u_n \to u$ em $W^{m,p}(\Omega)$ desde que

$$\|u_n - u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u_n - g_\alpha\|^p_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

para $p < +\infty$ ou ainda, para $p = +\infty$. Assim, $W^{m,p}(\Omega)$ é completo, como queríamos. □

Um importante fato sobre os espaços de Sobolev, em que demonstração pode ser encontrada em [5], é que para $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo. A partir de agora, vamos nos concentrar apenas o caso $p = 2$. Vamos introduzir um importante subconjunto $H^m(\Omega)$:

Definição 1.4.2. *O fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$.*

Em outras palavras, $H_0^m(\Omega)$ consiste exatamente das funções u em $H^m(\Omega)$ que pode ser aproximado no sentido de $H^m(\Omega)$ por funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. Por definição, temos que $H_0^m(\Omega)$ é um subespaço vetorial fechado de $H^m(\Omega)$, e portanto, é um espaço de Hilbert com o mesmo produto escalar de $H^m(\Omega)$. Introduziremos a seminorma:

$$|u|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 1.4.2. [Desigualdade de Poincaré] *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Então, existe uma constante C que depende apenas de Ω tal que, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^2} \leq C|u|_{H^1}.$$

Demonstração. Ver [7]. □

Observação 1.4.1. *A Desigualdade de Poincaré mostra que $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço estrito de $H^1(\Omega)$ quando Ω é limitado. Um exemplo disso é a função constante u=1 que está em $H^1(\Omega)$, mas não satisfaz a desigualdade. Disso, segue que é impossível aproximar uma função constante não nula por sequências de $\mathcal{D}(\Omega)$ na norma $H^1(\Omega)$.*

Veja que se $u \in H^1(\Omega)$, então $\nabla u \in L^2(\Omega)$, daí temos o corolário:

Corolário 1.4.1. *Seja Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$. A seminorma H^1 $|\cdot|_{H^1}$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ e é equivalente a norma de H^1 e também vale*

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Demonstração. É claro que $|u|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1}$, para todo $u \in H^1(\Omega)$, consequentemente $u \in H_0^1(\Omega)$. Para termos a desigualdade inversa, usaremos o Teorema 1.4.2. De fato, se $u \in H_0^1(\Omega)$, temos $\|u\|_{L^2} \leq C|u|_{H^1}$, logo

$$\|u\|_{H^1} = \Big(\|u\|_{L^2}^2 + |u|_{H^1}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(C^2+1\Big)^{\frac{1}{2}} |u|_{H^1}.$$

Isso mostra que a seminorma é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ e que é equivalente a norma H^1. □

Agora, vamos identificar o dual de $H_0^1(\Omega)$:

Proposição 1.4.1. *Definimos*

$$H^{-1}(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega); \exists C > 0 \ |T(\varphi)| \leq C|\varphi|, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\},$$

com a norma $\|T\|_{H^{-1}} = \sup \frac{|T\varphi|}{|\varphi|}_{H^1(\Omega)}$. Então H^{-1} é isometricamente isomorfo a $(H_0^1(\Omega))'$.

Demonstração. Como $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ por definição então qualquer funcional linear ℓ em $H_0^1(\Omega)$ define um funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$ (basta restringir). Ademais, se $\varphi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então temos que $\varphi_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$) também. Consequentemente, como ℓ é contínuo, então a restrição a $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição T em $\mathcal{D}(\Omega)$ e pertence a $H^{-1}(\Omega)$.
Por outro lado, dado $T \in H^{-1}(\Omega)$, por definição, é um funcional linear definido em um subespaço denso de $H_0^{-1}(\Omega)$ e continuo com respeito a norma $H_0^{-1}(\Omega)$. E isso se estende a um elemento ℓ do espaço $(H_0^{-1}(\Omega))'$ com a mesma norma. □

Proposição 1.4.2. *Seja $f \in L^2(\Omega)$, então $\partial_i f \in H^{-1}(\Omega)$ e $\langle \partial_i f, \varphi\rangle = -\int_\Omega f \partial_i \varphi dx$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

Demonstração. Pela definição de derivada distribucional, temos

$$\langle \partial_i f, \varphi\rangle = -\langle f, \partial_i \varphi\rangle = -\int_\Omega f \partial_i \varphi dx.$$

Pela Desiguadade de Cauchy Schwarz, temos

$$|\langle \partial_i f, \varphi\rangle| \leq \|f\|_{L^2}\|\partial_i \varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}|\varphi|_{H_0^1},$$

logo $\partial_i f \in H^{-1}(\Omega)$ com $\|\partial_i f\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{L^2}$. □

A Proposição 1.4.2 mostrou que ∂_i é um operador linear contínuo de $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Reciprocamente, quando Ω é um conjunto regular, uma distribuição em $H^{-1}(\Omega)$, em que suas derivadas parciais estão em $H^{-1}(\Omega)$, é uma função em $L^2(\Omega)$. O próximo resultado que veremos é conhecido como Lema de Lions.

Corolário 1.4.2. *O operador linear $-\Delta$ é contínuo de $H_0^1(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$ e, para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$, temos:*

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

O dual de $H_0^m(\Omega)$ é identificado com um subespaço de $H^{-m}(\Omega)$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.4.1 Teoremas de Mergulho

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ de classe C^∞. Vimos que os espaços de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, com $m \geq 0$, $p \in [1, \infty)$ são todas funções em $\mathbb{R}^N$ com derivada distribucional de ordem menor e igual m. Uma pergunta natural que podemos fazer sobre esses espaços é se existem inclusões entre eles eles próprios ou em outros espaços. Para isso, destacamos o termo "$m - \frac{N}{p}$", qual será chamado de *net smoothing* das funções em $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. O net smoothing é o jeito mais natural de descrever os Espaços de Sobolev. Abaixo, listaremos os principais resultados que respondem quando temos as inclusões. Para mais detalhes, indicamos [8], [9].

Fato 1: Para $k, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q < \infty$, temos a inclusão contínua

$$W^{m,p} \subset W^{k,q}(\Omega),$$

se $m - \frac{N}{p} \geq k - \frac{N}{q}, q \geq p$ (exceto se $m - \frac{N}{p} \neq k$). Se Ω for limitado e $m - \frac{N}{p} > k - \frac{N}{q}$ temos que as imersões são compactas.

Fato 2: Para $m \geq 0$, $p \in [1, \infty)$ e $\mu \in [0, \infty)$, vale a imersão contínua

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^\mu(\Omega),$$

se $m - \frac{N}{p} \geq \mu$ (exceto $m - \frac{N}{p} = \mu \in \mathbb{Z}$). Se Ω for limitado e $m - \frac{N}{p} = \mu$, as imersões são compactas.

Os casos particulares e relevantes do primeiro fato é que valem as inclusões compactas $L^q(\Omega) \subset L^s(\Omega)$, com $q \geq s$ e $H^q(\Omega) \subset H^s(\Omega), q \geq s$, para Ω limitado.

1.4.2 Teorema do Traço

Seja Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ limitado. Veremos quando as funções $u \in H^s(\Omega)$ podem ser estendidas a valores de fronteira $\partial\Omega$. Para abordar essa possibilidade, encontramos alguns problemas pois uma função de $H^s(\Omega)$, em geral, não é contínua ou até mesmo pode ser definida quase todo ponto de Ω e, pela complexidade desses espaços, seriam necessários várias ferramentas que estão fora do escopo desse texto. Sem entrar em detalhes, enunciaremos a forma geral do Teorema do Traço em abertos limitados suaves, em que indicamos ([7] página 285) para uma leitura completa, bem como sua demonstração.

Seja $u \in C^\infty(\Omega)$. Definimos o *operador traço* por $\gamma_0(u(x)) = u(x)$ em $\partial\Omega$.

Teorema 1.4.3 (Teorema do Traço, forma geral)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado C^∞ com fronteira $\partial\Omega$.*

1. *Para $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, γ_0 tem uma única extensão ao operador linear limitado*

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\partial\Omega).$$

2. *Para qualquer $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ e para $v \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$, existe $V := Tv \in H^s(\Omega)$ tal que $\gamma_0(V) = v$ e*

$$\|Tv\|_{H^s(\Omega)} \leq C_s \|v\|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)}, \ \forall v \in H^{s-1/2}(\partial\Omega).$$

Após essas considerações, podemos enunciar o teorema que nos permite generalizar a clássica fórmula da Integração por Partes, mas agora para Espaços de Sobolev:

Teorema 1.4.4. *Sejam Ω um subconjunto aberto de classe C^∞ de $\mathbb{R}^N$ e $u, v \in H^1(\Omega)$. Então,*

$$\int_\Omega \partial_i uvdx = -\int_\Omega u\partial_i vdx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)vn_i d\Gamma, \ i = 1, \cdots, N \tag{1.4}$$

Demonstração. Argumentaremos por densidade, visto que (1.4) é válido para $C^1(\overline{\Omega})$. Sejam $u, v \in H^1(\Omega)$, então existem u_n, v_n sequências em $C^1(\overline{\Omega})$ tais que $u_n \to u$ e $\nu_n \to v$ em $H^1(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Isso significa que $u_n \to u$, $v_n \to v$, $\partial_i u_n \to \partial u$ e $\partial_i v_n \to \partial v$, $i = 1, \cdots, N$, em $L^2(\Omega)$. Assim, $\partial_i u_n \cdot v \to \partial_i u \cdot v$ e $u_n \partial_i v_n \to u\partial_i v_n$ em $L^1(\Omega)$, $i = 1, \cdots, N$. Isso justifica os termos integrais de (1.4). Agora, pelo Teorema 1.4.3, temos $\gamma_0(u_n) \to \gamma_0(u)$ e $\gamma_0(v_n) \to \gamma_0(v)$. Assim,

$$\gamma_0(u_n)\gamma_0(v_n) \to \gamma_0(u)\gamma_0(v) \in L^1(\partial\Omega),$$

implica em

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_0(u_n)\gamma_0(v_n)n_i \to \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)n_i, , i = 1, \cdot, N,$$

concluindo a igualdade (1.4). □

Uma consequência imediata do resultado acima, que será muito útil, é considerar as funções em $H^2(\Omega)$, isto é, se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, então de (1.4):

$$\int_\Omega \Delta uvdx = -\int_\Omega \nabla u \nabla vdx + \int_\Gamma \gamma_0(\partial_i u) \cdot n_i \gamma_0(v) d\Gamma, i = 1, \cdots, N.$$

Veja que, se $u \in H^2(\Omega)$ então $\partial u \in H^1(\Omega)$. Logo a aplicação $\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^N \gamma_0(\partial_i u)n_i$ está bem definida e é contínua em $H^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Ademais, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ então $\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n}$, pois vale a identidade acima em $C^2(\overline{\Omega})$. Assim, como $C^2(\overline{\Omega})$ e $C^1(\overline{\Omega})$ são densos em $H^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, respectivamente, por argumentos de densidade, conseguimos concluir que vale

$$\int_\Omega \Delta uvdx = -\int_\Omega \nabla u \nabla vdx + \int_\Gamma \gamma_1(u)\gamma_0(v)d\Gamma, \tag{1.5}$$

com $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$. Veja que a equação acima é a famosa Identidade de Green, na sua versão para Espaços de Sobolev.

1.4.3 Espaços de Lebesgue Generalizado

No que vem a seguir, vamos definir uma classe de espaços que ajudarão a analisar o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda u = f, \in \Omega \\ \tfrac{\partial u}{\partial n} = g, \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.6}$$

com $\lambda > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, com Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. O problema (1.6) é chamado de *problema de Neumann não homogêneo.* A próxima definição nos motiva uma generalização da condição de contorno de Neumann.

Definição 1.4.3. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ de classe C^∞ e*

$$B_j f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha} a(x) \partial^\alpha f, \ b_{j,\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega),$$

com $j = 1, \ldots, N$, operadores diferenciais em $\partial\Omega$. Então, $\{B_j\}_{j=1}^k$ é um sistema normal se $0 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ e, para qualquer vetor normal n_x com respeito a $\partial\Omega$ e $v \in \partial\Omega$, *vale que*

$$\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j,a} n_x \neq 0, \ j = 1, \dots, k.$$

Se $\mathcal{F}$ é a transformada de Fourier e S é o espaço das funções que decrescem rapidamente, então podemos definir uma nova classe de funções, aquelas que generalizam os espaços de Sobolev, que são denominados de Espaços de Lebesgue Generalizado:

Definição 1.4.4. *Seja $-\infty < s < \infty$ e $1 < p < \infty$. Então*

$$H_p^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in S'(\mathbb{R}^N); \|f\|_{H_p^s} = \|\mathcal{F}^{-1}(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f\|_{L^p} < \infty\}. \tag{1.7}$$

Se Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^N$, então podemos definir $H_p^s(\Omega)$ como sendo restrição de $H_p^s(\mathbb{R}^N)$ em Ω, com

$$\|f\|_{H_p^s(\Omega)} = \inf_{g|_\Omega g \in H_p^s(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{H_p^s(\mathbb{R}^N)},$$

em que $g|_\Omega$ denota a restrição de g em Ω.

Antes de enunciar os próximos resultados, faremos um repasso para ver que o espaço da Definição 1.4.4 coincide com os Sobolev, no caso Hilbertiano abaixo e $\Omega = \mathbb{R}^N$. O caso Ω, subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, a veracidade continua, apenas restringindo o espaço com a norma acima. Relembre que

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N); \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}, \tag{1.8}$$

em que, para facilitar a notação, usaremos:

$$(u,v) := \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha u \overline{\partial^\alpha v} dx = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2}.$$

Consideremos

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), |1 + \|x\|^2|^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}, \tag{1.9}$$

onde

$$(((u,v))) := \int_{\mathbb{R}^N} (1+\|x\|^2)^m \mathcal{F}u(x)\overline{\mathcal{F}v(x)} dx = ((1+\|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\mathcal{F}u, (1+\|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\mathcal{F}v)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Vamos mostrar que (1.8) e (1.9) são iguais.

Com algumas contas, o lema abaixo pode ser verificado:

Lema 1.4.1. *Existem $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ que dependem de m tais que*

$$c_1 \sum_{|\alpha|\leq m} x^{2\alpha} \leq (1+\|x\|^2)^m \leq x_2 \sum_{|\alpha|\leq m} x^{2\alpha}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver [7]. □

Proposição 1.4.3. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que*

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), |1+\|x\|^2|^{\frac{m}{2}}\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Demonstração. Identificando $L^2(\mathbb{R}^N)$ com o dual, temos a cadeia $H^m(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^N)$. Seja $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$. Como vale a cadeia, então $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e além disso, $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$,

$|\alpha| \leq m$. Por Plancherel, $\mathcal{F}\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ mas $\mathcal{F}D^\alpha u = (ix)^\alpha \mathcal{F}u$ e do Lema acima, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^2)^m |\mathcal{F}u(x)|^2 dx \leq c_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} x^{2\alpha} |\mathcal{F}u(x)|^2 dx$$
$$= c_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} |x^\alpha \mathcal{F}u(x)|^2 dx = c_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}\partial^\alpha u(x)|^2 dx,$$

que por Plancharel, é igual a

$$c_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}\partial^\alpha u(x)|^2 dx \leq \infty.$$

Assim,

$$H^m(\mathbb{R}^N) \subset \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

e além disso vale

$$|||u||| \leq \sqrt{c_2}\|u\|_m, \forall u \in H^m(\mathbb{R}^N).$$

Reciprocamente, se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $(1 + \|x\|^2)^m |\mathcal{F}u(x)|^2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, logo como vale $\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}u(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^m) |\mathcal{F}u(x)|^2 dx \leq \infty$, temos que $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Resta mostrar que $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq m$. Das propriedades, temos

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}\partial^\alpha u(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha| \leq m} x^{2\alpha} |\mathcal{F}u(x)|^2,$$

que pelo Lema 1.4.1 acima é menor ou igual a

$$\frac{1}{c_1} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^2)^m |\mathcal{F}u(x)| dx \leq \infty,$$

logo $\mathcal{F}\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e por Plancherel, resulta que $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e $|\alpha| \leq m$. Consequentemente,

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), |1 + \|x\|^2|^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\} \subset H^m(\mathbb{R}^N),$$

e também

$$\|u\| \leq (\frac{1}{c_1})^{\frac{1}{2}} |||w|||,$$

concluindo o que queríamos. □

O primeiro resultado a ser citado é a caracterização de [[10], página 321], em que conseguimos ver que, diante algumas condições, não há distinção entre $H_p^s(\Omega)$ e o espaço de Banach (com a mesma norma de H_p^s):

$$H^s_{p,\{B_j\}} := \left\{ f; f \in H^s(\Omega), B_j f|_{\partial\Omega} = 0,\ m_j < s - \frac{1}{p} \right\},$$

em que $\{B_j\}_{j=1}^k$ é um sistema normal.

Definição 1.4.5. *Se Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, de classe C^∞. Seja $\{B_j\}_{j=1}^k$ um sistema normal. Para $s \geq 0$ e $1 < p < \infty$, temos, para $s - \frac{1}{p} < m_1$*

$$H^s_{p,\{B_j\}}(\Omega) = H^s_p(\Omega).$$

Observação 1.4.2. *No que vem a seguir, destacaremos o caso em que $k = 1$, $m_1 = 1$, $p = 2$ e $Bu = \frac{\partial u}{\partial n}$. Portanto, teremos que $s < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.*

1.4.4 Formulação Variacional das Equações Diferenciais Elípticas

Nesse breve capítulo, vamos estudar uma das formas que resolvemos Equações Diferenciais Elípticas, que embora tenham um tratamento bastante simples, são úteis para mostrar existência e unicidade dessas equações em espaços apropriados.

Para melhor adaptarmos ao que apresentaremos mais tarde, focaremos novamente no problema de Neumann, em Ω um aberto de classe C^∞ de $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.10}$$

Estamos em busca de uma classe de funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisfaça (1.10) em algum sentido, com $\lambda > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Para isso, vamos transformar o problema (1.10) em um problema com um formato diferenciado e que é mais simples para aplicar a teoria de Existência e Unicidade.

Proposição 1.4.4. *Assuma $u \in H^2(\Omega)$ é solução do problema (1.10). Então, para todo $v \in H^1(\Omega)$, temos*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \lambda uv dx = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} gv d\Gamma. \tag{1.11}$$

Demonstração. Dado $v \in H^1(\Omega)$, multiplicando a equação por v, temos

$$-(\Delta u)v + \lambda uv = fv.$$

Queremos integrar sobre Ω. Veja que cada termo é integrável, pois como $u \in H^2(\Omega)$, consequentemente, $\Delta u \in L^2(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$. Isso implica que $(\Delta u)v \in L^1(\Omega), \lambda \in L^\infty(\Omega), u \in L^2(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$. Daí, $\lambda uv \in L^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ implica $fv \in L^1(\Omega)$. Logo, obtemos

$$-\int_\Omega (\Delta u)v dx + \int_\Omega \lambda uv dx = \int_\Omega fv dx.$$

Usando a fórmula de Green, temos

$$\int_\Omega (\Delta u)v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} gv d\Gamma,$$

em que foi usado a condição de fronteira da equação (1.10). □

A formulação (1.11) é chamada de forma variacional do problema (1.10). Veja que, embora assumido $u \in H^2(\Omega)$, a forma variacional vale para uma classe maior de funções. Para o problema de Neumann, é conveniente escolher $v \in H^1(\Omega)$, estas são chamadas de função teste.

Reescreveremos a forma variacional na forma abstrata. Seja $V = H^1(\Omega)$, sabemos que este é um Espaço de Hilbert. Definindo a forma bilinear em $V \times V$

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) + \lambda uv dx$$

e o funcional linear em V

$$h(v) = \int_\Omega fv dx,$$

podemos reescrever a fórmula variacional (1.11) por $a(u, v) = h(v)$, para todo $v \in V$. Veja que se $u \in H^2(\Omega)$, temos a veracidade da igualdade. Estamos interessados em saber se, dada a forma abstrata com $u \in V$, isso nos faz saber se o problema (1.10) tem solução.

Proposição 1.4.5. *Se $u \in V$ satisfaz a forma variacional (1.10), então temos que*

$$-\nabla u + \lambda v = f, \text{no sentido de } \mathcal{D}',$$

e $\nabla u \in L^2(\Omega)$.

Demonstração. Veja que $\mathcal{D} \subset H^1(\Omega)$, logo tomando $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ como função teste em (1.11), vamos analisar termo a termo.
Primeiramente, veja que

$$\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta \varphi dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \partial_i u \partial_i \varphi dx = \sum_{i=1}^{N} \langle \partial_i u, \partial_i \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{N} -\langle \partial_{ii} u, \varphi \rangle = -\langle \Delta u, \varphi \rangle,$$

em que foi usado a definição de derivada distribucional. Analogamente,

$$\int_\Omega \lambda u \varphi dx = \langle \lambda u, \varphi \rangle \text{ e } \int_\Omega f \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Logo, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle -\Delta u + \lambda u - f, \varphi \rangle = 0,$$

ou

$$-\Delta u + \lambda u = f, \text{no sentido de } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Para o segundo passo, tomando $v \in H^1(\Omega)$, pela fórmula de Green, temos:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega (\Delta u) v dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u) \gamma_0(v) d\Gamma,$$

em que $\gamma_1(u)$ faz papel da derivada normal. Como u é uma solução do problema variacional, segue que

$$\int_\Omega (-\Delta u + \lambda u) v dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(v) d\Gamma = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g \gamma_0(v) d\Gamma,$$

Sabemos que $\int_\Omega (-\Delta u + \lambda u) v dx = \int_\Omega f v dx$, logo nos sobra:

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_1(v)\gamma_0(v) d\Gamma = \int_{\partial\Omega} g \gamma_0(v) d\Gamma,$$

para toda $v \in H^1(\Omega)$. Por simplicidade, assuma $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, a imagem do traço γ_0. Como $u \in H^2(\Omega)$, segue que $\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_0(\partial_i u) n_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Consequentemente, existe $v \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(v) = \gamma_1(u) - g$. Com essa escolha de v, temos

$$\int_{\partial\Omega} (\gamma_1(u) - g)^2 d\Gamma = 0,$$

e consequentemente temos que $\gamma_1(u) = g$, que é a condição de Neumann. Para concluir, vejamos que $\Delta u = \lambda u - f \in L^2(\Omega)$. Isso implica que a equação está satisfeita quase todo ponto. □

Observação 1.4.3. *Os dois problemas são equivalentes, exceto o fato que havíamos assumido* $u \in H^2(\Omega)$. *Essa hipóteses foi uma forma artificial para conseguirmos usar a fórmula de Green. Apesar disso, como vimos acima, conseguimos recuperar que* $\Delta u \in L^2(\Omega)$.
Neste contexto, é muito importante ressaltar que temos um resultado clássico de regularização, cuja demonstração é possível encontrar em [[5] página 299], que se $u \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)$ *e* Ω *de classe* $C^2(\Omega)$ *então isso nos dá* $u \in H^2(\Omega)$:

Teorema 1.4.5 (Regularidade do Problema de Neumann)**.** *Seja* Ω *um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^N$ *de classe* C^2 *com* $\partial\Omega$ *limitada. Seja* $f \in L^1(\Omega)$ *e* $u \in H^1(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u \varphi = \int_\Omega f \varphi, \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ *e* $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$.

Veja que não temos indícios que o problema (1.10) tem solução, mas o fato é que a fórmula variacional é mais significante e simples em vários casos, como veremos adiante.

Capítulo 2

Equações de Evolução

O objetivo desse capítulo é estudar as Equações de Evolução em um espaço de Banach X,

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $u_0 \in X$ e $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear. É claro que a construção e as propriedades da solução dependem de uma classe de operadores especial. O tratamento mais simples de (2.1), que já conhecemos, é o caso em que X é de dimensão finita e A é uma matriz. Para motivação, daremos uma breve abordagem no caso em que A é um operador limitado em um espaço de Banach X e, quando A é um operador ilimitado, não podemos generalizar os casos acima, mas veremos que na classe de operadores denominados de *operadores setoriais*, (2.1) admite um bom comportamento. Discutiremos essa classe mais a frente e veremos como o papel dela será importante para a equação principal desse trabalho. Operadores setoriais e semigrupos são ferramentas básicas na Teoria de Problemas Parabólicos Abstratos. Muitos dos resultados aqui citados podem ser encontrados em [8, 11]

2.1 Operadores Limitados

Seja $A : X \to X$ um operador linear contínuo, isto é, $A \in \mathcal{L}(X)$ em que o espaço está munido com a norma $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x \in X} \|Ax\|_X$. Então, daremos uma solução para (2.1) como uma série de potência da forma exponencial.

Proposição 2.1.1. *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$. Então, a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \ t \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

converge em $\mathcal{L}(X)$ uniformemente em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$. Se $u(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k u_0/k!$ é a restrição de u em $[0, \infty)$, então é uma solução única do problema de Cauchy (2.1).

Demonstração. Existência: Usando o Teorema Fundamental do Cálculo no caso de dimensão finita, podemos verificar que resolver (2.1) é equivalente em encontrar uma função contínua $v : [0, \infty) \to X$ que satisfaz

$$v(t) = u_0 + \int_0^t Av(s)ds, \ t \geq 0. \tag{2.3}$$

Para mostrar que u resolve a forma integral acima, fixa-se $[0, T]$ e defina

$$u_0(t) = u_0, \ u_{n+1}(t) = u_0 + \int_0^t Au_n(s)ds, \ n \in \mathbb{N}.$$

Temos

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} u_0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Como vale

$$\left\| \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \frac{T^k \|A\|^k}{k!}, \ t \in [0, T],$$

a série $\sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k / k!$ converge em $\mathcal{L}(X)$, uniformemente em $t \in [0, T]$. Ademais, a sequência $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $u(t)$ uniformemente para $t \in [0, T]$. Se $n \to \infty$, temos que u é solução de (2.3).
Unicidade: Se u,v são duas soluções de (2.3) em $[0, T]$, temos que vale

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|A\| \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds$$

e, da Desigualdade de Gronwall (3.0.1), vale $u = v$. □

Como no caso de dimensão finita, definimos

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Na demonstração da Proposição 2.1.1, vimos que para todo operador limitado A, a série (2.4) converge em $\mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se A é um operador ilimitado, o domínio A^k pode se tornar menor quando k cresce e pode não ser verdade que dado $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D(A^k)$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k / k!$ converge. Por exemplo, tomar $X = C([0, 1]), D(A) = C^1([0, 1]), Af = f'$. Apesar disso, nas próximas linhas, olharemos para uma outra representação da solução de (2.1), e veremos que é possível generalizar para o caso ilimitado. Para isso, é importante lembrarmos da Série de Neumann, que afirma que dado um operador $T \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T\| \leq 1$, então podemos escrever $(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

Lema 2.1.1. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n. \tag{2.5}$$

Consequentemente $\sigma(A)$ é compacto e, se $R > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, a série acima converge uniformemente em $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq R\}$.

Demonstração. O resultado segue observando que $(\lambda - A) = \lambda(I - \lambda^{-1} A)$ e aplicando a observação da série de Neumann acima. □

Em particular, conseguimos dizer que $Re(\sigma(A)) \in [-\|A\|, \|A\|]$.

Proposição 2.1.2. *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e seja $\gamma \in \mathbb{C}$ um círculo de centro 0 e raio $r > \|A\|$. Então,*

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{t\lambda} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Demonstração. De (2.4) e da observação acima, temos que

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}, \ |\lambda| > \|A\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{t\lambda}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_\gamma \lambda^n(\lambda I - A)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_\gamma \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}A^k\int_\gamma \lambda^{n-k-1}d\lambda = \mathbf{e}^{tA}, \end{aligned}$$

em que a última igualdade se justifica pois a integral é $2\pi i$ se $n = k$ ou 0, caso contrário. A troca da integral com a soma é justificada pela convergência uniforme da série. □

Como consequência da Proposição 2.1.2, temos uma estimativa importante.

Proposição 2.1.3. *Seja $\delta > 0$ e $A \in \mathcal{L}(X)$ com $Re(\sigma(A)) \leq \delta$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $C_0 > 0$ tal que*

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 e^{\delta+\epsilon}|t|, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Demonstração. Seja γ como dada acima. Assim, se $Re(\lambda) \leq \delta + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e para todo $\lambda \in \gamma$, tem-se

$$\begin{aligned} \|e^{\lambda t}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma e^{Re(\lambda)|t|}|(\lambda I - A)^{-1}|d|\lambda| \\ &\leq C_0 e^{(\delta+\epsilon)|t|}. \end{aligned}$$

□

Vamos generalizar a discussão acima para o caso de dimensão infinita a partir da fórmula da variação das constantes, que é uma solução para o problema de Cauchy não homogêneo:

$$\begin{aligned} &u'(t) = Au(t) + f(t), 0 \leq t \leq T, \\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $A \in \mathcal{L}(X)$, $u_0 \in X$, $f \in C([0,T]; X)$ e $T > 0$.

Proposição 2.1.4. *O problema de Cauchy (2.8) tem uma única solução em $[0,T]$ dada por*

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds, \ t \in [0,T] \tag{2.9}$$

Demonstração. Pode ser verificado diretamente que (3.3) é uma solução de (2.8). Para a unicidade, sejam u_1, u_2 duas soluções, então $v = u_1 - u_2$ satisfaz $v'(t) = Av(t)$ para $0 \leq t \leq T$, $v(0) = 0$. Pela Proposição 2.1.1, concluímos que $v = 0$. □

2.2 Operadores Setoriais

A noção de *Operadores Setoriais* é relevante nos estudos de algumas Equações Diferenciais. Há vários fenômenos que são descritos por sistemas de equações que o operador em questão é um operador setorial. Para conseguirmos definir esses operadores, vamos denotar por $S_{a,\phi}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, o setor do plano complexo dado pela relação

$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \ \lambda \neq a\} \tag{2.10}$$

Definição 2.2.1. *Considere o operador linear, fechado e densamente definido $A : D(A) \subset X \to X$ em um espaço de Banach X. Então, A é um operador setorial em X se, e somente se, existem $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $M > 0$ tal que*

1. *O conjunto resolvente $\rho(A)$ contem o setor $S_{a,\phi}$,*
2. *$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$, para cada $\lambda \in S_{a,\phi}$.*

Observação 2.2.1. *Seja $w \in \mathbb{R}$ arbitrário. É fácil ver que A é setorial se e somente se $A_w = A + wI$ é setorial, pois por argumento de translação, $S_{a,\phi} \subset \rho(A)$ e o item 2 da Definição 2.2.1 ocorre se e somente se,*

$$S_{a+w,\phi} = \{\lambda' \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda' - (a+w))| \leq \pi, \lambda' \neq a + w\} \subset p(A_w)$$

e, simultaneamente,

$$\|(\lambda' I - A_w)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda' - (a+w)|}, \forall \lambda' \in S_{a+w,\phi}.$$

Adicionalmente, temos $Re(\sigma(A_w)) \geq a + w$, em que isso é sempre possível pois para algum $w > 0$ tem-se $Re\sigma(A_w) > 0$.

Agora, vamos enunciar algumas equivalências que também comprovam que A é setorial.

Proposição 2.2.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e densamente definido em um espaço de Banach X e considere $A_w = A + wI$ com $w \in \mathbb{R}$. Então são equivalentes*

1. *A_w é setorial em X para algum $w \in \mathbb{R}$,*
2. *A_w é setorial em X para todo $w \in \mathbb{R}$,*
3. *Existem $k, w \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto resolvente $\rho(A_w)$ de A_w contem o plano $\{\lambda \in \mathbb{R} : Re\lambda \leq k\}$ e*
$$\|\lambda(\lambda I - A_w)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \ Re\lambda \leq k$$

Demonstração. Pela observação acima, temos que as duas primeiras condições são equivalentes. Vamos mostrar (1) implica (3). De fato, se A_{w_0} satisfaz as condições da Definição 2.2.1 então repetindo os argumentos da Observação 2.2.1, temos que $S_{0,\phi} \subset \rho(A_{w_0} - aI)$ e $\|\lambda'(\lambda' - (A_{w_0} - aI))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, para todo $\lambda \in S_{0,\phi}$, então (3) está satisfeito com $w = w_0 - a$ e $k < 0$ arbitrário.
Assumiremos que vale (3) implica (1), em que a demonstração pode ser encontrada em [[12], página 33]. □

Para ilustrar as proposições acima, vamos dar dois exemplos:

Exemplo 2.2.1. 1. *Todo operador linear limitado definido em um espaço de Banach X é setorial.*

De fato, se A é um operador linear limitado em X então decorre das observações feitas antes que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\} \subset \rho(A)$$

e $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$. Em particular, o plano

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \leq -2\|A\|_{\mathcal{L}(X)}\} \subset \rho(A)$$

e vale que

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}{|\lambda|}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

Assim, pela Proposição 2.2.1, temos que A é setorial.

2. *Se X, Y são espaços de Banach e A é setorial em X, B setorial em Y então o operador $(A,B) : D(A) \times D(B) \to X \times Y$, em que $(A,B)(x,y) = (Ax, By)$ é setorial em $X \times Y$.*

   De fato, sejam $S_{a,\phi_A}, S_{b,\phi_B}$ setores de A e B, respectivamente, vindos da Definição 2.10. Defina $a' = \min\{a,b\}$, $T = (A,B)$ e $T_{-a'} = (A - a'I, B - a'I)$. Então $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\} \subset \rho(T_{-a'})$ e vale

$$\|(\lambda I - T_{-a'})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X\times Y)} \leq \frac{C}{|\lambda|},\ Re\lambda < 0.$$

   Consequentemente, (A,B) é setorial em $X \times Y$.

A próxima proposição carrega condições importantes que provará quando o operador será setorial, este quando definido em espaço de Hilbert H:

Proposição 2.2.2. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear auto-adjunto e densamente definido em um espaço de Hilbert H. Se A for limitado inferiormente em H, isto é, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle Ax, x\rangle_H \geq m\|x\|_H^2,$$

então A é um operador setorial em H.

Demonstração. Mostremos pela Definição 2.10 que A é setorial. Como A é autoadjunto então o espectro está contido no eixo real. Ademais, como A é limitado por baixo, então $\sigma(A) \subset [m, \infty)$. Isso implica que

$$S_{m,\frac{\pi}{4}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq |\arg(\lambda - m)| \leq \pi, \lambda \neq m\},$$

está contido no complementar de $\sigma(A)$. Assim, $S_{m,\frac{\pi}{4}} \subset \rho(A)$ e temos a primeira condição da Definição 2.10 satisfeita. Agora temos que mostrar que para todo $\lambda \in S_{m,\frac{\pi}{4}}$, vale a estimativa do item 2. da Definição 2.10.

Seja $\lambda \in S_{m,\frac{\pi}{4}}$ e seja $\lambda' = \lambda - m$. Então dois casos são possíveis:

- Caso 1: $\lambda = \lambda' + m$, com $Re(\lambda') < 0$. Nesse caso $A - mI$ deve ser simétrico e não negativo com $-2Re(\lambda') > 0$, daí

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)x\|_H^2 &= \|(\lambda' I - (A - mI))x\|_H^2\\ &= |\lambda'|\|x\|_H^2 - 2Re(\lambda')\langle (A - mI)x, x\rangle_H + \|(A - mI)x\|_H^2\\ &\geq |\lambda'|^2\|x\|_H^2.\end{aligned}$$

- Caso 2: $\lambda = \lambda' + m$ onde $|Im(\lambda')| \geq |Re(\lambda')|$, então:

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)x\|_H^2 &= \|(\lambda' I - (A - mI))x\|_H^2\\ &= |Im(\lambda')|^2\|x\|_H^2 + \|(Re(\lambda')I - (A - mI))x\|_H^2\\ &\geq |Im(\lambda')|^2\|x\|_H^2 \geq \frac{|\lambda'|^2}{2}\|x\|_H^2.\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\|(\lambda I - A)x\|_H \geq \frac{|\lambda - m|}{\sqrt{2}}\|x\|_H, \forall \lambda \in S_{m,\frac{\pi}{4}}, x \in D(A),$$

que é o que gostaríamos para obter a desigualdade necessária. □

Agora, recordaremos o conceito de semigrupo C_0, presente na Teoria de Semigrupos. Este fará papel crucial para falarmos da boa colocação dos problemas que serão citados posteriormente. Os resultados citados aqui são conhecidos e podem ser encontrados em [8, 11]. O próximo objetivo é apresentar o resultado de caracterização os operadores setoriais via geração de semigrupos e as estimativas com que fazem as potências fracionárias serem bem definidas.

Definição 2.2.2. *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, $T(t) : X \to X$ $t \geq 0$ é um C^0 semigrupo se:*

1. *$T(0) = Id$ em X,*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $s, t \geq 0$,*
3. *A função $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \to T(t)x \in X$ é contínua para cada ponto $(t, x) \in [0, \infty) \times X$.*

Definição 2.2.3. *Se $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu* **gerador infinitesimal** *é o operador definido por $B : D(B) \subset X \to X$, onde*

$$D(B) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}, \quad Bx = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Um exemplo clássico da Definição 2.2.3 é que, em termos dos conceitos dados na seção de operadores limitados, temos que A é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado. Alguns fatos conhecidos e úteis sobre C^0 semigrupos serão citados abaixo. A demonstração pode ser encontrado em [11].

Teorema 2.2.1. *Suponha que $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo.*

1. *Existe $M \geq 1$ e β tais que*
$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$
2. *Para qualquer $x \in X$, $t \to T(t)x$ é contínuo para $t \geq 0$.*
3. *$t \to \|T(t)\|_{L(X)}$ é semicontínua inferiormente e portanto mensurável.*
4. *Seja B o gerador infinitesimal de $T(t)$; então, B é densamente definido e fechado. Para $x \in D(A)$, $t \mapsto T(t)e$ é continuamente diferenciável e*
$$\frac{d}{dt}T(t)x = BT(t)x = T(t)Bx, \quad t > 0.$$
5. *$\bigcap_{m\geq 1} D(A^m)$ é denso em X.*
6. *Para $\mathrm{Re}\lambda > \beta$ e β dado no item 1, λ está no resolvente $\rho(B)$ de B e*
$$(\lambda - B)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt, \quad \forall x \in X$$

Definição 2.2.4. *Seja X um espaço de Banach e $\{T(t)\}$ um C^0 semigrupo em X. Dizemos que $\{T(t)\}$ é um semigrupo analítico se $t \to T(t)x$ é real analítica em $0 < t < \infty$ para cada $x \in X$.*

Agora, a notação $\{\mathbf{e}^{Bt}\}$ será usada para denotar o semigrupo analítico $T(t)$. Disto, temos o seguinte resultado, em que daremos uma síntese da demonstração:

Teorema 2.2.2. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Se A é um operador setorial em X, então $-A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{\boldsymbol{e}^{-At}\}$, onde*

$$\boldsymbol{e}^{-At} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

em que Γ é contorno em $\rho(-A)$ com $\arg\lambda \to \pm\theta$, quando $|\lambda| \to \infty$ para algum $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Ademais, $\boldsymbol{e}^{-At}$ pode ser estendida analiticamente no setor $\{t \neq 0, |\arg t| < \epsilon\}$ contendo o eixo real positivo.

Se $Re\sigma(A) > a > 0$, então existe $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|\boldsymbol{e}^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_1 e^{-at}, \text{ e } \|A\boldsymbol{e}^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_2}{t} e^{-at}, t > 0. \tag{2.11}$$

Ademais, $\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}^{-At} = -A\boldsymbol{e}^{-At}$, para $t > 0$.

Demonstração. Se A é setorial, então sem perda de generalidade, podemos considerar $a = 0$ do 2.10, já que vale o Teorema 2.2.1. Assim,

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda| + \delta}, \tag{2.12}$$

para $|\pi - \arg\lambda| \geq \phi$, para as constantes $\delta > 0$ e $M > 0$ e $\phi \in (0, \pi/2)$. Pelo Teorema 2.2.1, podemos voltar a considerar o operador A. Seja $\phi \in (\pi/2, \pi - \phi)$, então defina e^{-At} como a integral acima. Veja que pela estimativa acima, a integral está bem definida. Vamos mostrar que e^{-At} satisfaz as condições de semigrupo C_0 analítico. Primeiro vejamos as condições:

1. $e^{-A0} = I$ é válido por definição.
2. $e^{-At}e^{-As} = e^{-A(t+s)}(\lambda I + A)^{-1}e^{\mu t}(\mu I + A)^{-1}$, com $t > 0$ e $s > 0$.

   Pelo Teorema de Cauchy, a integral não muda quando o contorno Γ tem um pequeno deslocamento a direita. Considere Γ' esse novo contorno. Então, para $t > 0$ e $s > 0$

$$e^{-At}e^{-As} = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \int_{\Gamma'} e^{\lambda t}(\lambda I + A)^{-1} e^{\mu s}(\mu I + A)^{-1} d\mu d\lambda \tag{2.13}$$

$$= (2\pi i)^{-2} \int_\Gamma \int_{\Gamma'} e^{\lambda + \mu t}(\mu - \lambda)^{-1}[(\lambda I + A)^{-1} - (\mu I + A)^{-1}] d\mu d\lambda \tag{2.14}$$

   em que usamos a Identidade do Resolvente (Lema 1.2). Veja que, se $\lambda \in \Gamma$ e $\mu \in \Gamma'$, temos:

$$\int_\Gamma e^{\lambda t}(\mu - \lambda)^{-1} d\lambda = 0$$

   e

$$\int_{\Gamma'} e^{\mu s}(\mu - \lambda)^{-1} d\mu = 2\pi i e^{\lambda s},$$

   pela Fórmula Integral de Cauchy. Assim

$$e^{-At}e^{-As} = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma e^{\lambda(t+s)}(\lambda I - A)^{-1} ds = e^{-A(t-s)}.$$

Agora, veja que, para $0 < \epsilon < \theta - \pi/2$, e integral converge uniformemente no conjunto compacto $\{|\arg t| < \epsilon\}$. Logo o semigrupo é analítico nessa região.

Veja que, se $\mu = \lambda t$, com $t > 0$, por (2.12) temos as majorações:

$$\|e^{-At}\| = \|\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^\mu (\frac{\mu}{t} + A)^{-1} \frac{d\mu}{t}\| \leq \frac{M}{2\pi} \int_\Gamma |e^\mu| \frac{|d\mu|}{|\mu|} = C_1$$

e

$$\|Ae^{-At}\| \leq \frac{1}{2\pi i} \frac{M}{\delta} \int_\Gamma |e^\mu| \frac{|d\mu|}{|\mu|} \frac{1}{t} = \frac{C_2}{t},$$

já que a integral acima é convergente. Agora, vamos mostrar que $e^{-At}x \to x$, quando $t \to 0^+$ para cada $x \in X$. Acabamos de ver que como $\|e^{-At}\| \leq C_1$ para todo $t \geq 0$. Se A é setorial, então A é densamente definido, logo basta mostrar que vale para cada $x \in D(A)$. Seja $t > 0$ (o caso $t = 0$ é óbvio):

$$\begin{aligned} e^{-At}x - x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda I + A)^{-1}x d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\lambda^{-1}x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}[(\lambda I + A)^{-1} - \lambda^{-1}]x d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1}e^{\lambda t}A(\lambda I + A)^{-1}x d\lambda, \end{aligned}$$

em que, na última passagem foi usado a identidade do resolvente (Lema 1.2) para $\mu = 0$, isto é, se $(\lambda - A)^{-1} = A^{-1}(-\lambda(\lambda + A)^{-1} + 1)$ implica que $-\lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1} = (\lambda + A)^{-1} - \lambda^{-1}$. Então,

$$\begin{aligned} \|e^{-At}x - x\| &= \|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1}e^{\lambda t}A(\lambda I + A)^{-1}x d\lambda\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |\lambda^{-1}\|e^{\lambda t}\|\|Ax\|\|(\lambda I + A)^{-1}\|d\lambda \\ &\leq C\|Ax\|t \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Fazendo $t \to 0$, temos o desejado. Consequentemente, $\{e^{-At}\}$ é um semigrupo C_0 que se estende ao semigrupo analítico em $|\arg t| < \epsilon$.

Para ver que vale $\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At}$, para $t > 0$, basta notar que $x \in D(A)$, $t > 0$, tem-se

$$\frac{d}{dt}e^{-At}x + Ae^{-At}x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda + A)(\lambda + A)^{-1}x d\lambda = 0.$$

Assim, se $x \in D(A)$, com $t \to 0^+$, temos

$$\frac{1}{t}(e^{-At}x - x) = -\frac{1}{t}\int_0^t e^{-As}Axds \to -Ax.$$

Veja que isso mostra que $-A$ está contido no gerador G do semigrupo. Vamos mostrar que $-A$ é realmente o gerador. Para isso, defina, para $\lambda \geq 0$:

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-At}xdt.$$

Dado x, $e^{-At}x \in D(A)$ para $t > 0$ e, para $\delta > 0$:

$$A\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}e^{-At}xdt = e^{-\lambda\delta}e^{-A\delta}x - \lambda\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}e^{-At}xdt.$$

Como A é fechado, segue que $R(\lambda)x \in D(A) \subset D(G)$ para todo $\lambda \geq 0$, $x \in X$. Se $x \in D(G)$, então $e^{-At}x \in D(G)$ para todo $t \geq 0$ e $Ge^{-At}x = \frac{d}{dt}e^{-At}x = e^{-At}x$ e por argumentos similares, temos

$$R(\lambda)(\lambda - G) = 0, x \in D(G).$$

Assim $D(G) \subset Im(R(\lambda)) \subset D(A)$, como gostaríamos. □

As estimativas provadas acima, ambas mostram em como controlar o crescimento do semigrupo na norma $\mathcal{L}(X)$. Estas estimativas são válidas especialmente no caso em que $Re\sigma(A) > 0$ e que vimos que o processo decai conforme o tempo aumenta.

A partir das estimativas da Proposição 2.11, podemos ver que estão bem definidas as potências fracionárias. Seja X um espaço de Banach e A um operador setorial em X com $Re\sigma(A) > 0$. Se $\alpha \in (0, \infty)$, os operadores $A^{-\alpha} : X \to X$ são dados pela fórmula integral

$$A^{-\alpha}v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-At}v dt \tag{2.15}$$

Em que Γ denota a Função Gama, $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ para $t \in [0,\infty)$. Os próximos resultados mostraram algumas propriedades das potências fracionárias, em que suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [8]:

Proposição 2.2.3. *Suponha que X seja um espaço de Banach e A um operador setorial em X com $Re\sigma(A) > 0$. Então,*

1. *para $\alpha > 0$, o operador linear $A^{-\alpha}$ é limitados em X.*

2. *$A^{-\alpha}$ é injetor sob a imagem $R(A^{-\alpha})$.*

3. *Para $\alpha > 0$, $\beta > 0$, temos*
$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

4. *Ademais, se $0 < \alpha < 1$, então*
$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1}d\lambda.$$

Demonstração. 1. Seja $\delta > 0$ tal que $Re\sigma(A) > \delta$, então pelas estimativas (2.11), temos $\|e^{-At}\| \leq Ce^{-\delta t}$, para $t > 0$. Assim, dado $x \in X$ temos

$$\begin{aligned}\|A^{-\alpha}x\| &= \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-At}x dt\right\| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\|\mathbf{e}^{-At}\|\|x\|dt \\ &\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-\delta t}dt\|x\|.\end{aligned}$$

Logo $A^{-\alpha}$ é limitado em $\alpha > 0$.

2. Para ver que a aplicação é injetora, se $A^\alpha x = 0$ e tomando um inteiro $n > \alpha$, logo $A^{-n} = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x = 0$. Como $0 \in \rho(A)$ então A^{-1} é injetor, assim A^{-n} é injetor e, consequentemente, $x = 0$.

3. Para $\alpha > 0$,$\beta > 0$:

$$\begin{aligned}A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}\mathbf{e}^{-A(t-s)}dsdt \\ &\overset{t+s=u}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_t^\infty t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}\mathbf{e}^{-Au}dudt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_t^\infty t^{\alpha-1}u^{\beta-1}(1-\frac{t}{u})^{\beta-1}\mathbf{e}^{-Au}dudt \\ &\overset{z=t/u}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_0^1 (uz)^{\alpha-1}u^{\beta-1}(1-z)^{\beta-1}\mathbf{e}^{-Au}\frac{dz}{u}du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty u^{(\alpha+\beta)-1}\mathbf{e}^{Au}du\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz \\ &= A^{-(\alpha+\beta)},\end{aligned}$$

em que foi usado a propriedade da função Γ, $\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

4. Como $(\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-At} e^{-\lambda t} dt$, para $\lambda \geq 0$ então

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1} d\lambda &= \int_0^\infty \mathbf{e}^{-At}\lambda^{-\alpha} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} e^{\lambda t} d\lambda dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{e}^{-At}\lambda^{-\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) dt \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} A^{-\alpha},\end{aligned}$$

em que foi utilizado o fato da função gamma $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$

□

Como visto, $A^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ é invertível. Vamos denotar essa inversa por A^α e usaremos o símbolo X^α para o domínio de A^α que é $X^\alpha = R(A^{-\alpha})$. Vamos estender a noção do operador fracionário para o caso $\alpha = 0$, tomando $A^0 := I$ em $X^0 := X$.

Com algumas contas similares a de cima, conseguimos provar as próximas proposições. Para mais detalhes, pode ser vista em [8].

Proposição 2.2.4. *Suponha que X seja um espaço de Banach e A um operador setorial em X com $Re\sigma(A) > 0$. Então, X^α, $\alpha \in [0, \infty)$ com a norma $\|v\|_{X^\alpha} := \|A^\alpha v\|_X$ são espaços de Banach. Ademais, $A^\alpha : X^\alpha \to X$ são operadores lineares fechados e densamente definido em X satisfazendo*

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

Ademais, X^α é um subconjunto denso de X^β para $\alpha \geq \beta \geq 0$, então as inclusões

$$X^\alpha \subset X^\beta, \ \alpha > \beta \geq 0,$$

são densos e contínuos e, se o resolvente de A for compacto, então a inclusão é compacta.

Proposição 2.2.5. *Suponha que X seja um espaço de Banach e A um operador setorial em X com $Re\sigma(A) > 0$. Para $\alpha \geq 0$, $t \geq 0$, $A^\alpha \boldsymbol{e}^{-At}$ é um operador linear limitado em X tal que*

$$\|A^\alpha \boldsymbol{e}^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c\frac{e^{-at}}{t^\alpha}, \quad t > 0 \tag{2.16}$$

$$A^\alpha \boldsymbol{e}^{-At} = \boldsymbol{e}^{-At} A^\alpha, \ \text{em } X^\alpha, \quad t \geq 0;$$

em $a > 0$ é tal como $Re\sigma(A) > a$.

Proposição 2.2.6. *Seja A um operador setorial, satisfazendo a Definição 2.2.1, para algum $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Se valer $Re(\sigma(A)) > 0$, então $(A^\beta)^\alpha = A^{\alpha\beta}$, para $\beta \in (0, \frac{\pi}{\phi})$ e $\alpha > 0$.*

Para finalizar o capítulo, enunciaremos a proposição abaixo afirma que, restringindo o operador setorial $A : D(A) \subset X \to X$ para os espaços X^β, $\beta > 0$, a setorialidade continua válida e será muito útil para verificar a suavidade das soluções das equações diferenciais em sua forma abstrata.

Proposição 2.2.7. *Seja X^1 domínio de um operador setorial $A|_X : X^1 \subset X \to X$, em X um espaço de Banach satisfazendo $Re\sigma(A|_X) > 0$. Seja $\beta > 0$ e $A|_{X^\beta} : X^{1+\beta} \subset X^\beta \to X^\beta$, em que $X^{1+\beta} \subset X^1$, denote a restrição de $A|_X$ ao espaço das potências fracionárias $X^\beta \subset X$ então*

$$A|_X x = A|_{X^\beta} x, \quad \forall\, x \in X^{1+\beta}. \tag{2.17}$$

Então, $A|_{X^\beta}$ é um operador setorial em X^β e $Re\sigma(A|_{X^\beta}) > 0$

Demonstração. Sabemos que a inclusão $X^{1+\beta} \subset X^\beta$ é densa para cada $\beta > 0$. $A|_{X^\beta}$ é um operador linear e densamente definido em X^β, $\beta > 0$. Ademais $A|_{X^\beta}$ é fechado em X^β, que é uma consequência direta do fato de $A|_X$ ser fechado em X.

Agora, estimaremos o operador resolvente de $A|_{X^\beta}$ em X^β. Como $A|_X$, existe $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $S_{a,\phi}$ está contido no conjunto resolvente $\rho(A|_X)$ de $A|_X$ e

$$\|(\lambda I - A|_X)^{-1}x\|_X \leq \frac{M}{|\lambda - a|}\|x\|_X, \ \lambda \in S_{a,\phi}, \ x \in X.$$

Devemos mostrar que a restrição $A|_{X^\beta}$ de $A|_X$ que

$$S_{a,\phi} \subset \rho(A|_{X^\beta}),$$

$$\|(\lambda I - A|_{X^\beta})^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}\|y\|_{X^\beta}, \ \lambda \in S_{a,\phi}, \ y \in X^\beta.$$

Se $\lambda \in S_{a,\phi}$, então para todo $y \in X^\beta$ corresponde a um único $x \in X^1$ satisfazendo $(\lambda I - A|_X)x = A|_X^\beta x = A|_X^\beta y$. Aplicando $A|_X^{-\beta}$ em ambos os lados, temos

$$A|_X^{-\beta}(\lambda I - A|_X)x = (\lambda I - A|_X)A|_X^{-\beta}x = (\lambda I - A|_X)A|_X^{-\beta}, x \in X^1,$$

concluímos por (2.17), a equação $(\lambda I - A|_\beta)\tilde{x} = y$ tem uma única solução $\tilde{x} \in X^{1+\beta}$ para cada $y \in X^\beta$. Consequentemente, a inversa $(\lambda I - A|_{X^\beta})^{-1}$ está definido em X^β e por (2.17), temos

$$(\lambda I - A|_{X^\beta})^{-1}y = (\lambda I - A|_X)^{-1}y, \ y \in X^\beta.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A|)^{-1}y\|_{X^\beta} &= \|(\lambda I - A_X)^{-1}y\|_{X^\beta} \\
&= \|A|_X^\beta(\lambda I - A|_X)^{-1}y\|_X = \|(\lambda I - A|_X)^{-1}A|_X^\beta y\|_X \\
&\leq \frac{M}{|\lambda - a|}\|A|_X^\beta y\|_X = \frac{M}{|\lambda - a|}\|y\|_{X^\beta}, \lambda \in S_{a,\phi}, \ y \in X^\beta.
\end{aligned}$$

Cálculos similares mostram $Re\sigma(A|_X^\beta) > 0$, se $Re\sigma(A|_X) > 0$. □

Capítulo 3

O Problema de Cauchy Semilinear

O objetivo dessa seção é apresentar a parte teórica do problema de Cauchy abstrato. Os resultados desse capítulo serão cruciais para conseguirmos garantir o bom posicionamento das equações diferenciais parciais não lineares que apresentaremos posteriormente, que serão da forma abaixo:

$$\begin{aligned} &u' + Au = F(t,u),\\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador setorial em um espaço de Banach X. Sem perder a generalidade, podemos supor que A é um operador setorial com $Re\sigma(A) > 0$ e, para facilitar as contas, trataremos o problema (3.1) com $F(t,u) = F(u)$. Como o conjunto resolvente de um operador linear fechado é um conjunto aberto do plano complexo, temos que $Re\sigma(A) > a$, para algum a positivo. Então, o espaço das potências fracionárias X^α, para algum $\alpha > 0$, são definidos de maneira usual como imagem de apropriadas potências de operadores $A^{-\alpha}$. Nesta situação, para todo $\alpha \in [0,1)$ fixo, tomaremos o termo não linear F em (3.1) como uma aplicação Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de X^α. Isto é, se existir uma função não decrescente $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que vale a estimativa

$$\|F(v) - F(w)\|_X \leq L(r)\|v - w\|_{X^\alpha},$$

para todo $v, w \in B_{X^\alpha}(r)$, onde $B_{X^\alpha}(r)$ denota a bola aberta em X^α centrada no zero com raio r.

Neste capítulo, assumiremos que:

Hipótese 3.0.1. *Seja X é um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial com $Re(\sigma(A)) > 0$ em X e $F : X^\alpha \to X$ uma aplicação Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de X^α para algum $\alpha \in [0,1)$.*

Definição 3.0.1. *Seja X um espaço de Banach, $\alpha \in [0,1)$ e $u_0 \in X^\alpha$. Se para algum real $\tau > 0$ a função $u \in C([0,\tau), X^\alpha)$ verificar*

$$\begin{aligned} &u(0) = u_0,\\ &u \in C^1((0,\tau), X),\\ &u(t) \text{ pertence a } D(A) \text{ para todo } t \in (0,\tau),\\ &\text{a primeira equação de (3.1) em } X \text{ para todo } t \in (0,\tau), \end{aligned} \tag{3.2}$$

então chamamos u de solução local em X^α de (3.1).

Mostraremos adiante que a solução local em X^α estende-se regularmente por continuidade para as potências fracionárias de X, isto é

$$u \in C((0,\tau), X^1) \text{ e } u' \in C((0,\tau), X^\gamma), \gamma \in [0,1).$$

Nosso principal objetivo nesse capítulo é provar o seguinte resultado de existência e unicidade.

Teorema 3.0.1. *Assumindo as Hipóteses 3.0.1 e, para cada $u_o \in X^\alpha$, existe uma única solução em X^α de (3.1) definida no intervalo maximal de existência $[0, \tau_{u_0})$, o que significa que ou $\tau_{u_0} = +\infty$ ou se $\tau_{u_0} < \infty$, então*

$$\limsup_{t \to \tau_{u_0}} \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} = +\infty.$$

Como consequência dos mergulhos entre os espaços das potências fracionárias enunciados na Proposição 2.2.4, se a função F é Lipschitz em conjuntos limitados de X^α, com $\alpha \in [0, 1)$, então se considerarmos $G : X^\beta \to X$ uma extensão de F, com $\beta \in [\alpha, 1)$, também temos que G é Lipschitz em conjuntos limitados. Esse fato nos permite que os resultados que serão apresentados abaixo também valha em espaços de potências fracionárias maiores, e como consequência, o corolário abaixo.

Corolário 3.0.1. *Assumindo as Hipóteses 3.0.1, para cada $\beta \in [\alpha, 1]$ e $u_0 \in X^\beta$, existe uma única solução $u = u(t, u_0)$ de (3.1) definida no seu intervalo máximo de existência $[0, \tau_{u_0})$.*

Uma desigualdade que ajuda a encontrar estimativas é a Desigualdade de Gronwall, em que a demonstração pode ser encontrada em [13]:

Lema 3.0.1 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Seja $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $a \geq 0$, $b > 0$ e seja $y : [0, \tau) \to [0, \infty)$ uma função contínua que satisfaz:*

$$y(t) = \frac{a}{t^\alpha} + b \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\beta} y(s) ds, \ t \in (0, \tau).$$

Então,

$$\sup_{t \in [0, \tau)} t^\alpha y(t) \leq C \cdot a$$

em que a constante C, dependente de b,α, β e τ é uma função contínua crescente em relação a τ.

3.1 Fórmula da Variação das Constantes

O próximo lema nos dá uma equivalência para conhecer quando u é uma solução local X^α. Em sua demonstração, para não carregar a notação, usaremos o termo $'const'$ para denotar uma constante que depende de várias outras.

Lema 3.1.1. *Assumindo as Hipóteses* (3.0.1) *com $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$. Então, u é uma solução local X^α de* (3.1) *se, e somente se, u satisfaz em X a fórmula integral*

$$u(t) = \boldsymbol{e}^{-At} u_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u(s)) ds, \ \forall t \in [0, \tau). \tag{3.3}$$

Demonstração. Vamos demonstrar que, se $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$ satisfaz (3.3) então, u é uma solução local X^α de (3.1). Separaremos a demonstração em passos:

Passo 1. Vamos começar provando a seguinte estimativa auxiliar:

$$\|(\mathbf{e}^{-At} - I)v\|_X \leq \frac{c_{1-\delta}}{\delta} t^\delta \|v\|_\delta, \ \delta \in (0, 1], \ v \in X^\delta. \tag{3.4}$$

Isso é uma consequência da igualdade:

$$(\mathbf{e}^{-At} - I)v = \int_0^t \frac{d}{ds}(\mathbf{e}^{-As} v) ds = -\int_0^t A\mathbf{e}^{-As} v ds = -\int_0^t A^{1-\delta} \mathbf{e}^{-As} A^\delta v ds. \tag{3.5}$$

Aplicando a função norma, temos

$$\|(\mathbf{e}^{-At} - I)v\|_X \leq \int_0^t \|A^{1-\delta} \mathbf{e}^{As}\|_{\mathcal{L}(X)} \|A^\delta v\|_X ds \leq c_{1-\delta} \|v\|_{X^\delta} \int_0^t \frac{e^{-as}}{s^{1-\delta}} ds \leq \frac{c_{1-\delta}}{\delta} t^s \|v\|_{X^\delta}.$$

Passo 2. Vamos usar a estimativa acima para mostrar que, para todo $t_0, t_1 \in (0,\tau)$ e para todo $\delta \in (0,1)$, existe $C > 0$ tal que, para todo $t, \bar{t} \in (t_0, t_1)$, temos

$$\|u(t) - u(\bar{t})\| \leq C|t - \bar{t}|^{\delta}, \tag{3.6}$$

em que constante C depende de α, δ, t_0, t_1. Seja $0 < h < t_1 < \tau$. Então, de (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= (\mathbf{e}^{-Ah} - I)\mathbf{e}^{-At}u_0 \\ &+ \left(\int_0^h + \int_h^{t+h}\right)\mathbf{e}^{-A(t+h-s)}F(u(s))ds - \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s))ds \\ &= (\mathbf{e}^{-Ah} - I)\mathbf{e}^{-At}u_0 + \int_0^h \mathbf{e}^{-A(t+h-s)}F(u(s))ds \\ &+ \int_0^h \mathbf{e}^{-A(t-s)}(F(u(s+h)) - F(u(s)))ds, \quad t \in (0, t_1 - h). \end{aligned}$$

Usando a estimativa provada no Passo 1 com $0 < \delta < 1$ e o fato de F ser Lipschitz, temos:

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\|_{X^\alpha} &\leq \|(\mathbf{e}^{-Ah} - I)\mathbf{e}^{-At}A^\alpha u_0\|_{X^\alpha} + \int_0^h \mathbf{e}^{-A(t+h-s)}\|F(u(s))\|_{X^\alpha}ds \\ &+ \int_0^h \mathbf{e}^{-A(t-s)}\|F(u(s+h)) - F(u(s))\|_{X^\alpha}ds \\ &\leq h^\delta \frac{c_{1-\delta}c_\delta}{\delta t^\delta}\|u_0\|_{X^\alpha} + \frac{c_\alpha \sup_{s\in[0,t_1]}\|F(u(s))\|_X}{t^\alpha}h \\ &+ c_\alpha L_{t_1}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha}\|u(s+h) - u(s)\|_{X^\alpha}ds \\ &\leq \frac{h^\delta}{t^{\delta_{\max}}}\left(\frac{c_{1-\delta}c_\delta}{\delta}t_1^{\delta_{\max}-\delta}\|u_0\|_{X^\alpha} + c_\alpha t_1^{1-\delta}t_1^{\delta_{\max}-\alpha}\sup_{s\in[0,t_1]}\|F(u(s))\|_X\right) \\ &+ c_\alpha L_{t_1}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha}\|u(s+h) - u(s)\|_{X^\alpha}ds \;, t \in (0, t_1 - h), \end{aligned}$$

em que $\delta_{\max} = \max\{\alpha, \delta\}$. Pela Desigualdade de Gronwall (3.0.1), temos

$$t^{\delta_{\max}}\|u(t+h) - u(t)\|_{X^\alpha} \leq Ch^\delta, \; t \in (0, t_1 - h),$$

em que C depende de t_1, δ e α. Assim, vale a estimativa que queríamos.

Passo 3. A condição provada no Passo 2 garante que

$$\int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s))ds \in D(A), \; t \in (0,\tau), \tag{3.7}$$

$$u(t) \in D(A), \; t \in (0,\tau), \tag{3.8}$$

e além disso

$$\int_0^t A\mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s))ds = A\int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s))ds, \; t \in (0,\tau). \tag{3.9}$$

Em que a última integral é considerada uma integral imprópria. De fato, $\mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s)) \in D(A)$ para $s \in [0,t)$, de (3.6) e de F ser Lipschitz, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} \|A\mathbf{e}^{-A(t-s)}[F(u(t)) - F(u(s))]\|_X, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} c_1 \frac{e^{-a(t-s)}}{t-s} \|F(u(t)) - F(u(s))\|_X ds \\
&\leq c_1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t-s} L \|u(t) - u(s)\|_{X^\alpha} ds \\
&\leq c_1 L \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t-s} const.(t-s)^\delta ds \\
&= \tfrac{c_1 C L}{\delta} (t-t_0)^\delta,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} A\mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u(t)) ds = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds} (\mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u(t))) ds, \\
&= (I - \mathbf{e}^{-A(t-t_0)}) F(u(t)).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Isso mostra a existência da integral imprópria $A \displaystyle\int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u(s)) ds$. É claro que existe $\int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u(s)) ds$ como integral de função contínua, então vale (3.7) e (3.9) segue (Veja que $s \to A\mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u(s) \in X$ é contínua). Assim, (3.8) segue de (3.7) e (3.3).

Passo 4. Para

$$
u(t) = \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} (F(u(s)) - F(u(t))) ds, \tag{3.12}
$$

agora conseguimos provar que

$$
Au_1 \in C((0,\tau), X^\gamma), \ \gamma \in (0,1). \tag{3.13}
$$

Note que $u_1(t) \in D(A), t \in [0,\tau)$ é uma consequência de (3.10). Mais precisamente, precisamos justificar que, para todo $0 < \gamma < \delta < 1$ e para todo $0 < \epsilon < \overline{\epsilon} < \tau$ existe $C > 0$ tal que, para todo $t_1, t_2 \in (\epsilon, \overline{\epsilon})$

$$
\|Au_1(t_2) - Au_1(t_1)\| \leq const.|t_2 - t_1|^{\delta-\gamma}, \tag{3.14}
$$

em que a constante está em função de $\epsilon, \overline{\epsilon}, \gamma, \delta$. Para verificarmos (3.14), tomando $0 < \gamma < \delta < 1$, $0 < \epsilon \leq t_1 < t_2 < \overline{\epsilon} < \tau$ e considere:

$$
\begin{aligned}
&Au_1(t_2) - Au_1(t_1) \\
&= \int_0^{t_1} A(\mathbf{e}^{-A(t_2-s)} - \mathbf{e}^{-A(t_1-s)})(F(u(s)) - F(u(t_1))) ds \\
&+ (\mathbf{e}^{-A(t_2-t_1)} - \mathbf{e}^{-A(t_2})(F(u(t_1)) - F(u(t_2))) \\
&+ \int_{t_1}^{t^2} A\mathbf{e}^{-A(t_2-s)} (F(u(t_1)) - F(u(t_2))) ds \\
&=: B_1 + B_2 + B_3.
\end{aligned}
$$

É suficiente mostrar que $\|B_k\|_{X^\gamma}$, $k = 1,2,3$ não cresce mais que $(t_2 - t_1)^{\delta-\gamma}$. Para as estimativas abaixo, usaremos as condições (3.4), (3.6), F Lipschitz e as estimativas usuais de semigrupo. Assim:

$$
\begin{aligned}
\|B_1\|_{X^\gamma} &\leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \left\| A^\gamma A (\mathbf{e}^{-A(t_2-t_1)} - I) \mathbf{e}^{-A(t_1-s)} \left(F(u(s)) - F(u(t_1)) \right) \right\|_X ds \\
&+ \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{t_1} \left\| A^\gamma A (\mathbf{e}^{-A(t_2-t_1)} - I) \mathbf{e}^{-A(t_1-s)} \left(F(u(s)) - F(u(t_1)) \right) \right\|_X ds \\
&=: B_{11} + B_{12},
\end{aligned}
$$

onde,

$$\begin{aligned}
B_{11} &\leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \left\|(\mathbf{e}^{-A(t_2-t_1)} - I)A^{\gamma}A\mathbf{e}^{-A(t_1-s)}\left(F(u(s)) - F(u(t_1))\right)\right\|_X ds \\
&\leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{c_{1-(\delta-\gamma)}}{\delta-\gamma}(t_2-t_1)^{\delta-\gamma}\left\|A^{(\delta-\gamma)}A^{\gamma}A\mathbf{e}^{-A(t_1-s)}\left(F(u(s)) - F(u(t_1))\right)\right\|_X ds \\
&\leq \left(\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{c_{1-\delta+\gamma}}{\delta-\gamma}\frac{c_{1+\delta}}{(t_1-s)^{1+\delta}} 2\sup_{s\in[0,\bar{\varepsilon}]}\left\|F(u(s))\right\|_X ds\right)(t_2-t_1)^{\delta-\gamma} \\
&\leq 2\sup_{s\in[0,\bar{\varepsilon}]}\left\|F(u(s))\right\|_X \frac{c_{1-\delta+\gamma}}{\delta-\gamma}\frac{c_{1+\delta}}{\delta}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\delta}(t_2-t_1)^{\delta-\gamma},
\end{aligned}$$

e

$$B_{12} \leq \left(\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{t_1} \frac{c_{1-\delta+\gamma}}{\delta-\gamma}\frac{c_{1+\delta}}{(t_1-s)^{1+\delta}} L_{\bar{\varepsilon}} const._{\bar{\varepsilon},\varepsilon,\delta_1}(t_1-s)^{\delta_1} ds\right)(t_2-t_1)^{\delta-\gamma}.$$

De modo análogo, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|B_2\|_{X^{\gamma}} &\leq \left\|A^{\gamma}e^{-A(t_2-t_1)}(e^{-At_1} - I)\left(F(u(t_1)) - F(u(t_2))\right)\right\|_X \\
&\leq (c_0+1)\frac{c_{\gamma}}{(t_2-t_1)^{\gamma}} L_{\bar{\varepsilon}} const._{\bar{\varepsilon},\varepsilon,\delta}(t_2-t_1)^{\delta},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|B_3\|_{X^{\gamma}} &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left\|A^{\gamma}A\mathbf{e}^{-A(t_2-s)}\left(F(u(s)) - F(u(t_2))\right)\right\|_X ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{c_{1+\gamma}}{(t_2-s)^{1+\gamma}} L_{\bar{\varepsilon}} const._{\bar{\varepsilon},\varepsilon,\delta}(t_2-s)^{\delta} ds \\
&= c_{1+\gamma} L_{\bar{\varepsilon}} const._{\bar{\varepsilon},\varepsilon,\delta}\frac{(t_2-t_1)^{\delta-\gamma}}{\delta-\gamma}.
\end{aligned}$$

Pelas estimativas anteriores, cada $\|B_k\|_{X^{\gamma}}$ $(k = 1, 2, 3)$ é proporcional a $(t_2-t_1)^{\delta-\gamma}$, como queríamos.

Passo 5. Como consequência de (3.7), é fácil verificar que a derivada lateral a direita $u'_+(t)$ satisfaz para $t \in (0, \tau)$ a igualdade:

$$u'_+(t) + A\left(\mathbf{e}^{-At}u_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)F(u(s))} ds\right) = F(u(t)). \tag{3.15}$$

De fato, se $h \to 0^+$ na fórmula

$$\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) = \frac{1}{h}(\mathbf{e}^{-Ah}I)\mathbf{e}^{-At}u_0 \tag{3.16}$$

$$+\frac{1}{h}(\mathbf{e}^{-Ah} - I)\int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s))ds + \frac{t}{t+h}\mathbf{e}^{-A(t+h-s)}F(u(s))ds, \tag{3.17}$$

segue (3.15).

Passo 6. Por fim, veja que

$$Au_1(t) = A\int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s)) - \int_0^t A\mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(t))ds \tag{3.18}$$

$$= A\int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s))ds - F(u(t) + \mathbf{e}^{-At}F(u(t)). \tag{3.19}$$

Relacionando (3.15), (3.18) e podemos ver que u'_+ pode ser escrito como

$$u'_+ = -A\mathbf{e}^{-At}u_0 + \mathbf{e}^{-At}F(u(t)) - Au_1(t).$$

As funções $(0,\tau) \ni t \to A\mathbf{e}^{-At}u_0 \in X^\gamma$ e $(0,\tau) \ni t \to \mathbf{e}^{-At}F(u(t)) \in X^\gamma$ são contínuas, então, de (3.12), temos que $Au_1 \in C((0,\gamma), X^\gamma)$. Ademais, $u'_+ : (0,\tau) \to X$ é contínuo. Portanto u deve ser continuamente diferenciável em $(0,\tau)$, isto é:

$$u'(t) = u'_+(t) \text{ e } u \in C^1((0,\tau), X).$$

Para justificar o afirmado acima, consideremos a função auxiliar $\omega : [t_0,\tau) \to X$ ($t_0 \in (0,\tau)$) arbitrária:

$$\omega(t) = \int_{t_0}^t u'_+(s)ds + u(t_0),\ t \in [0,\tau).$$

Veja que $\omega \in C^1([t_0,\tau), X)$ e $w'_+ = u'_+$ então dado $\varphi \in X'$ então $[\varphi(\omega(t)) - \varphi(u(t))]'_+ = 0$ em $[t_0,\tau)$. Como $\omega(t_0) = u(t_0)$, temos

$$\varphi(\omega(t) - u(t)) = 0,\ t \in [t_0,\tau), \varphi \in X',$$

pelo Teorema de Hahn Banach, $\omega = u$. Assim, pelos passos 3,5,6, temos que u é uma X^α solução.

Por fim, mostraremos que dada $u \in C([0,\tau), X^\alpha)$ solução local X^α de (3.1), então vale (3.3). De fato, para $0 < s < t < \tau$, de (3.1), temos

$$\mathbf{e}^{-A(t-s)}u'(s) + \mathbf{e}^{-A(t-s)}Au(s) = \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s)). \tag{3.20}$$

Como $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t,s) \to \mathbf{e}^{-At}u(s) \in X$ tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas então considere $(0,t) \ni s \to \mathbf{e}^{-A(t-s)}u(s) \in X$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\mathbf{e}^{-A(t-s)u(s)}) &= A\mathbf{e}^{-A(t-s)}u(s) + \mathbf{e}^{-A(t-s)}u'(s)\\ &= \mathbf{e}^{-A(t-s)}u'(s) + \mathbf{e}^{-A(t-s)}Au(s). \end{aligned} \tag{3.21}$$

□

Por (3.20) e (3.21), concluímos que

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{e}^{-A(t-s)}u(s)) = \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u(s)),\ 0 < s < t < \tau, \tag{3.22}$$

então segue o resultado integrando (3.22) em $(0,t)$.

3.1.1 Soluções locais X^α

Nessa seção, iremos provar o Teorema (3.0.1). Para isso, invocaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach em uma contração T em uma bola fechada $B_{C([0,\delta],X^\alpha)}(u_0,r)$ em $C([0,\delta), X^\alpha)$, este com a norma do supremo:

$$\|v\|_{C([0,\delta],X^\alpha)} := \sup_{t\in[0,\delta]} \|v(t)\|_{X^\alpha}.$$

Esse teorema nos fornecerá algumas propriedades adicionais da solução (3.1), como a dependência contínua em relação aos dados iniciais. Além disso, desempenhará papel essencial na prova da existência local do problema original.

Demonstração do Teorema 3.0.1. **Passo 1.** Começaremos com a unicidade. Sejam $u_1, u_2 \in C([0,\delta], X^\alpha)$ com $u_1(0) = u_2(0) = u_0 \in X^\alpha$ tal que

$$u_i(t) = \mathbf{e}^{-At}u_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(u_i(s))ds,$$

para $t \in [0, \delta]$, $i = 1, 2$. Como F é Lipschitziana em conjuntos limitados, temos

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{X^\alpha} &\leq \int_0^t \|A^\alpha \mathbf{e}^{-A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \left\|F(u_1(s)) - F(u_2(s))\right\|_X ds \\ &\leq L_\delta c_\alpha \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha}\|u_1(s) - u_2(s)\|_{X^\alpha} ds. \end{aligned}$$

que, pela Desigualdade de Gronwall (3.0.1), temos que $u_1 = u_2$ em $[0, \delta]$, o que mostra a unicidade.

Agora, vamos mostrar a existência da solução de (3.1):

Passo 2. Seja $u_0 \in X^\alpha$, $r > 0$ e considere a aplicação

$$\begin{aligned} &T : B_{C([0,\delta],X^\alpha)}(u_0, r) \to C([0, \delta], X^\alpha) \\ &T(v)(t) = \mathbf{e}^{-At}u_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}F(v(s))ds, \quad t \in [0, \delta], \end{aligned}$$

em que $B_{C([0,\delta],X^\alpha)}(u_0, r)$ denota a bola fechada em $C([0, \delta], X^\alpha)$ centrada em u_0 com raio $r > 0$, em que, posteriori, escolheremos um δ específico. Pelo lema anterior (passo 2), conseguimos ver que $T(v)(t)$ é uma função contínua com $t > 0$.

Para mostrarmos a continuidade pela direita em $t = 0$ basta ver que F é limitada em conjuntos limitados de X^α e $v \in B_{C([0,\delta],X^\alpha)}(u_0, r)$. De fato,

$$\begin{aligned} \|T(v)(t) - u_0\| &\leq \left\|A^\alpha(\mathbf{e}^{-At} - I)u_0\right\|_X + \int_0^t \left\|A^\alpha \mathbf{e}^{-At}F(v(s))\right\|_X ds \\ &\leq \left\|(\mathbf{e}^{-At} - I)A^\alpha u_0\right\|_X + \sup_{\|v\|_{X^\alpha} \leq r + \|u_0\|_{X^\alpha}} \|F(v)\|_X C_\alpha \int_0^t \frac{e^{-a(t-s)}}{(t-s)^\alpha} ds \\ &\leq \|(\mathbf{e})A^\alpha u_0\|_X + \sup_{\|v\|_{X^\alpha} \leq r + \|u_0\|_{X^\alpha}} \|F(v)\|_X C_\alpha \tfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad t \in [0, \delta]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Consequentemente, temos que T está bem definida.

Passo 3. Agora, vamos escolher $\delta > 0$ tal que a imagem de T esteja contida em $B_{C([0,\delta],X^\alpha}(u_0, r)$. De (3.23) temos

$$\begin{aligned} \|T(v)(t) - u_0\|_{X^\alpha} &\leq \varepsilon\|u_0\|_{X^\alpha} + \sup_{\|v\|_{X^\alpha} \leq r + \|u_0\|_{X^\alpha}} \|F(v)\|_X C_\alpha \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \text{ para } t \in [0, \delta], \text{ se } \delta \leq \delta_1. \end{aligned}$$

Escolhendo δ_1 em função de $\varepsilon := \frac{r}{2\|u_0\|_{X^\alpha}}$, relacionado a continuidade de $\mathbf{e}^{-At} : X \to X$ em $t = 0$ e, então temos:

$$\sup_{\|v\|_{X^\alpha} \leq r + \|u_0\|_{X^\alpha}} \|F(v)\|_X C_\alpha \frac{\delta_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{r}{2}.$$

Passo 4. Vamos estipular condições sobre δ para que T seja uma contração.

Sejam $v_1, v_2 \in B_{C([0,\delta],X^\alpha)}(u_0, r)$ e $w \in (0, 1)$ fixado. Por consequência de F ser uma função

Lipschitziana em conjuntos limitados, temos:

$$\begin{aligned}\|T(v_1)(t) - T(v_2)(t)\| &\leq \int_0^t \|A^\alpha \mathbf{e}^{-A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|F(v_1)(s) - F(v_2)(s)\|_X ds \\ &\leq L_{2r} \sup_{s\in[0,t]} \|v_1(s) - v_2(s)\|_{X^\alpha} C_\alpha \int_0^t \frac{e^{-a(t-s)}}{(t-s)^\alpha} ds \\ &\leq L_{2r} \sup_{s\in[0,t]} \|v_1(s) - v_2(s)\|_{X^\alpha} C_\alpha \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &\leq w \sup_{s\in[0,t]} \|v_1(s) - v_2(s)\|_{X^\alpha},\end{aligned}$$

em que $w = L_{2r} C_\alpha \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ e δ não excede δ_2.

Passo 5. Aplicaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Tomando $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ então T é uma contração em $B_{C([0,\delta],X^\alpha)}(u_0, r)$ que, por sua vez, é um espaço métrico completo. Assim, aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $u \in B_{C([0,\delta],X^\alpha)}(u_0, r)$ tal que $T(u) = u$, isto é,

$$u(t) = \mathbf{e}^{-At} u_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u(s)) ds, \ t \in [0, \delta_0]. \tag{3.24}$$

Passo 6. Vamos caracterizar o intervalo maximal de existência de soluções para (3.15). Consideremos o conjunto I_{u_0}:

$$I_{u_0} = \{\delta > 0; \exists u^\delta \in C([0,\delta), X^\alpha), \forall t \in [0,\delta] \text{ que satisfaz } (3.3)\}.$$

Sejam $\delta_1, \delta_2 \in I_{u_0}$ e $\delta_1 < \delta_2$ então, pela unicidade, temos $u^{\delta_1} = u^{\delta_2}$ em $[0, \delta_1]$. Defina $\tau_{u_0} := \sup I_{u_0}$. Afirmamos que $\tau_{u_0} \neq I_{u_0}$.

De fato, se $\tau_{u_0} \in I_{u_0}$, existe $u^{\tau_{u_0}} \in C([0, \tau_{u_0], X^\alpha})$ satisfazendo

$$u^{\tau_{u_0}}(t) = \mathbf{e}^{-At} u_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u^{\tau_{u_0}}(s)) ds, \ t \in [0, \delta_0].$$

Por outro lado, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Passo 1-4), existe $w \in C([0,\epsilon], X^\alpha)$ que satisfaz

$$w(t) = \mathbf{e}^{-At} u^{\tau_{u_0}}(\tau_{u_0}) + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} F(w(s)) ds, \ t \in [0, \epsilon].$$

Definindo

$$u(x) = \begin{cases} u^{\tau_0}(t), & t \in [0, \tau_0] \\ w(t - \tau_{u_0}), & t \in [\tau_{u_0}, \tau_{u_0} + \epsilon] \end{cases}$$

então $u \in C([0, \tau_{u_0} + \epsilon], X^\alpha)$ e $\tau_{u_0+\epsilon} \in I_{u_0}$ o que contradiz o fato que $\tau_{u_0} = \sup I_{u_0}$ e então, mostramos que $I_{u_0} = (0, \tau_{u_0})$.

Passo 7. Como $I_{u_0} = (0, \tau_{u_0})$ e considerando $u : [0, \tau_{u_0}) \to X^\alpha$ dada por

$$u(t, u_0) := u^\delta(t), \ \delta \in I_{u_0} t \in [0, \delta].$$

está bem definida para todo $u_0 \in X^\alpha$,$u(., u_0) \in C([0, \tau_{u_0}, X^\alpha)$ e $u(., u_0)$ satisfaz

$$u(t, u_0) = \mathbf{e}^{-At} u_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} F(u(s, u_0)) ds, \ t \in [0, \tau_0].$$

Segue do Lema 3.1.1 que $u(., u_0)$ é uma solução local X^α de (3.1) em $[0, \tau_{u_0})$ que, pelo Passo 1, é único.

Falta mostrar que $[0, \tau_0)$ é o intervalo máximo de existência, isto é,

$$\tau_{u_0} \leq \infty \implies \limsup_{t \to \tau_{u_0}^-} \|u(t, x_0)\|_{X^\alpha} = \infty.$$

Assuma por contradição que

$$\limsup_{t \to \tau_{u_0}^-} \|u(t, x_0)\|_{X^\alpha} < C,$$

para algum $\tau_0 < \infty$ e defina $M := \sup_{t \in [0, \tau_{u_0})} \|F(u(t, u_0))\|_X$. Por cálculos análogos ao do Passo 2 do Lema 3.1.1 com $\delta = a$, $t_0 = \tau_{u_0}/2$ e $t_1 = \tau_{u_0}$ então vale

$$\|u(t, u_0) - u(\bar{t}, u_0)\|_{X^\alpha} \leq const(t - \bar{t})^\alpha, \frac{\tau_{u_0}}{2} < \bar{t} < t < \tau_{u_0}. \tag{3.25}$$

Veja que $\lim_{t \to \tau_{u_0}} u(t, u_0)$ existe. Ademais, $u : [0, \tau_{u_0}) \to X^\alpha$ pode ser estendido para uma $\overline{u} \in C([0, \tau_{u_0}, X^\alpha)$ e $\overline{u}$ satisfaz (3.25), o que implica que $\tau_{u_0} \in I_{u_0}$. Contradição, o que prova o Teorema 3.0.1. □

3.1.2 Propriedades Adicionais das soluções X^α:

Para mostrarmos a regularidade das soluções X^α, precisaremos das considerações do Lema (3.1.1) e colocar algumas hipóteses de suavidade sob a derivada de de u.

Corolário 3.1.1. *Sob as hipóteses iniciais e $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$. Se u satisfaz em X a fórmula integral* (3.3)*, então*

$$\begin{aligned} &u \in C((0, \tau), X^1), \\ &u' \in C((0, \tau), X^\tau), \quad \tau \in [0, 1). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Demonstração. Como $u \in C((0, \tau), X^\alpha \cap C^1((0, \tau), X)$ e $F : X^\alpha \to X$ é contínuo, então $Au = F(u) - u$ pertence a $C((0, \tau), X)$, provando a primeira condição de (3.26). Seja u_1 tal que:

$$u_1(t) = \int_0^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}(F(u(s)) - F(u(t)))ds,$$

então vale

$$u' = -A\mathbf{e}^{-At}u_0 + \mathbf{e}^{-At}F(u(t)) - Au_1(t),$$

e assim obtemos a segunda condição de (3.26), pois as aplicações

$$\begin{aligned} &(0, \tau) \ni t \to A\mathbf{e}^{-At}u_0 \in X^\gamma, \\ &(0, \tau) \ni t \to \mathbf{e}^{-At}F(u(t)) \in X^\gamma, \quad \gamma \in [0, 1). \end{aligned} \tag{3.27}$$

são contínuas e também porque $Au_1 \in C((0, \tau), X^\gamma)$, para todo $\gamma \in (0, 1)$. □

A proposição abaixo afirma que as soluções de (3.1) permanecem em um conjunto limitado B até um tempo $t_B > 0$

Proposição 3.1.1. *Sob as condições e dado qualquer limitado $B \subset X^\alpha$, então existe um tempo $\tau_B > 0$ tal que as soluções $u(t, x_0)$ de (3.1) com $u_0 \in B$ existe e são limitadas em X^α uniformemente para $t \in [0, \tau_B]$ e $u_0 \in B$.*

Demonstração. Sejam $\rho = \sup_{\phi \in B} \|\phi\|_B$ e $B_1 = B_{X^\alpha}(0, c_0\rho + 1)$ uma bola em X^α, em que c_0 é a constante que aparece na estimativa

$$\|\mathbf{e}^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_0 e^{-at}, t > 0,$$

e defina $b := \sup_{v \in B_1} \|F(v)\|_X$. Usando a fórmula da variação das constantes para $u_0 \in B$ e impondo que $u(t, u_0) \in B_1$, temos

$$\begin{aligned} \|u(t,u_0)\|_{X^\alpha} &\leq c_0 e^{-at}\|u_0\|_{X^\alpha} \\ &+ \int_0^t \|A^\alpha \mathbf{e}^{-A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)}\|F(u(s,u_0))\|_X ds \\ &\leq c_0\rho + b\int_0^t c_\alpha \frac{e^{-a(t-s)}}{(t-s)^\alpha} \leq c_0\rho + bc_a \int_0^t \frac{dy}{y^\alpha} \\ &= c_0\rho + \tfrac{bc_\alpha}{1-\alpha} t^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Como as soluções começando em B não necessariamente caem em B_1, precisamos impor para um tempo τ_B que:

$$\frac{bc_\alpha}{1-\alpha}\tau_B^{1-a} = 1.$$

Logo, para $t \in [0, \tau_B]$, conseguimos que

$$\sup_{u_0 \in B} \|u(t,u_0)\|_{X^\alpha} \leq c_0\rho + 1,$$

demonstrando o desejado. $\square$

Capítulo 4

Parte Local

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ de classe C^∞ e $\lambda > 0$. Nessa seção, vamos buscar condições em que a vale a existência e unicidade de soluções para a equação

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + \lambda u + f(u) = 0, \text{em } \Omega \\ &\tfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = 0, \text{em } \Gamma := \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ são respectivamente funções $C^1(\mathbb{R}^N)$ e $C^2(\mathbb{R}^N)$. O que faremos a seguir é provar o resultado para o caso em que f, g não dependem do tempo, mas com argumentos similares é possível estender para o caso não autônomo.

Com base nas ideias do artigo [4] e nos resultados de existência e unicidade de equações parabólicas do livro [8, 10], o objetivo nesse capítulo é estipular condições em que vale o Teorema 3.0.1 para um operador apropriado e assim, conseguirmos induzir a boa colocação de (4.1). Para isso, introduziremos o operador, em $L^2(\Omega)$, $A_0 : D(A_0) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$\begin{aligned} &D(A_0) = \{u \in H^2(\Omega) : \tfrac{\partial u}{\partial n} = 0\} \\ &A_0 u = -\Delta u + \lambda u, u \in D(A_0), \end{aligned} \tag{4.2}$$

com $\lambda > 0$.

Veja que o operador (4.2) está bem definido e $D(A_0)$ é um espaço de Hilbert com a norma induzida de $H^2(\Omega)$ e que o operador não carrega todas as informações da equação (4.1), pois se assim fosse, $D(A_0)$ não seria um espaço vetorial (teríamos a condição $\frac{\partial u}{\partial n} = -g(u) \neq 0$ no domínio).

Para retornarmos a condição original e aplicarmos o Teorema 3.0.1, a estratégia será trabalhar, a priori, com a condição de Neumann de $D(A_0)$ homogênea e retirá-la no meio do processo, para depois inserir condição original manualmente na equação, assim como no artigo [4]. As ferramentas necessárias serão considerar a formulação fraca do operador, o Teorema do Traço (Teorema 1.4.3) e as potências fracionárias de A_0 e suas interpolações. Faremos uma breve motivação do processo.

Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega)$ e consideremos

$$-\Delta u + \lambda u = f(u). \tag{4.3}$$

Multiplicando (4.3) por $\phi \in H^1(\Omega)$ e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega -\Delta u\phi + \int_\Omega \lambda u\phi = \int_\Omega f(u)\phi.$$

Aplicando o Teorema de Green, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\phi + \int_\Omega \lambda u\phi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\phi = \int_\Omega f(u)\phi.$$

Considerando o funcional linear em $H^1(\Omega)$

$$H^1(\Omega) \ni \phi \to \int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u\phi, \tag{4.4}$$

temos que, definindo o operador L em $H^{-1}(\Omega)$, com $D(L) = \{u \in H^1(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}$ como

$$\begin{aligned} &L(u) : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\mathbb{R}) \\ &L(u)\phi = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u\phi \end{aligned} \tag{4.5}$$

com $\lambda > 0$, tem-se que L é a formulação fraca (ou fórmula variacional) do operador A_0. Veja que encontrar o bom posicionamento de (4.1) significa encontrar um espaço de Banach apropriado em que conseguimos aplicar o Teorema de Existência e Unicidade, Teorema 3.0.1, para o operador associado. Veremos que trabalhar com a formulação fraca facilita nesse processo, pois veremos que conseguiremos impor condições em que valha o Teorema 3.0.1 e quando conseguiremos desfazer a integração por partes com auxilio do Teorema de Regularização para Operadores Elípticos (Teorema 1.4.3), mantendo os termos não lineares f e g.

Antes de mais nada, vejamos que A_0 carrega propriedades bastante notáveis:

Proposição 4.0.1. *O operador A_0 é auto adjunto e positivo, isto é, $\langle A_0 u, u\rangle_{L^2} \geq 0$ para todo $u \in D(A_0)$. Em particular, A_0 é um operador setorial.*

Demonstração. Para mostrar que A_0 é positivo, basta ver que, para todo $u \in D(A_0)$:

$$\langle A_0 u, u\rangle_{L^2} = \int_\Omega A_0 u \cdot u = \int_\Omega (-\Delta u + \lambda u)\cdot u = \int_\Omega (\nabla u)^2 + \lambda \int_\Omega u^2 \geq 0,$$

onde na última igualdade foi usada a Identidade de Green, concluindo que$\langle A_0 u, u\rangle_{L^2} \geq 0$
Para mostrar que A_0 é auto adjunto, pela Proposição 1.1.2, basta mostrar que o operador é simétrico e sobrejetor. Para a simetria, dados $u, v \in D(A_0)$, temos

$$\begin{aligned} \langle A_0 u, v\rangle_{L^2} &= \int_\Omega A_0 u \cdot v dx = \int_\Omega (-\Delta u + \lambda u)\cdot v dx = \int_\Omega -\Delta u \cdot v + \int_\Omega \lambda u \cdot v dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS + \lambda \int_\Omega u \cdot v dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS + \lambda \int_\Omega u \cdot v dx \\ &= \int_\Omega -\Delta v \cdot u + \lambda \int_\Omega u \cdot v dx \\ &= \langle u, A_0 v\rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

em que foram usadas, respectivamente, a Identidade de Green, o fato de $u, v \in D(A_0)$ e novamente, Identidade de Green. Assim, temos que $\langle A_0 u, v\rangle_{L^2} = \langle u, A_0 v\rangle_{L^2}$. Por fim, vamos mostrar que o operador é sobrejetor, isto é, dado $f \in L^2(\Omega)$, existe $u \in D(A_0)$ tal que $-\Delta u + \lambda u = f$.

1. Primeiramente, mostraremos que existe um único $u \in H^1(\Omega)$ tal que vale $-\Delta u + \lambda u = f$ na sua formulação fraca. Sabemos que $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar previamente definido. Defina $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por:

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv dx$$

e $\ell : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\ell(v) = \int_\Omega f v dx$$

É claro que a define uma forma bilinear em $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ e ℓ define um funcional linear em $H^1(\Omega)$.
Vamos aplicar o Teorema de Lax Milgram (Teorema 1.1.4). Para isso, vemos que a satisfaz as hipóteses do teorema:

- a é contínuo: Seja $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, logo

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| + \lambda |uv| dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \lambda \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \max\{\lambda, 1\} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1},\end{aligned}$$

  em que foi usada a Desigualdade de Cauchy Schwarz.
- a é coerciva: Seja $v \in H^1(\Omega)$, logo

$$a(v,v) = \int_\Omega \|\nabla v\|^2 + \lambda v^2 dx \geq \min\{1, \lambda\} \int_\Omega \|\nabla v\|^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \geq \min\{1, \lambda\} \|u\|_{H^1}^2$$

- Vejamos que ℓ é um funcional linear limitado:

$$|\ell(v)| = \left| \int_\Omega fv \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}.$$

Assim, o Teorema de Lax Milgram é satisfeito e tem-se uma única solução $v \in H^1(\Omega)$.

2. Pelo Teorema de Regularização citado em Observação 1.4.3, temos que $u \in H^2(\Omega)$. Agora falta mostrarmos que $u \in D(A)$. Seja $\phi \in H^1(\Omega)$, então multiplicando a equação $-\Delta u + \lambda u = f$ por ϕ e aplicando o Teorema de Green, temos

$$-\int_\Omega \Delta u \phi + \lambda \int_\Omega u\phi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \phi = \int_\Omega f\phi.$$

Tomando ϕ de suporte compacto, temos que

$$-\Delta u + \lambda u = f, \text{q.t.p.}.$$

Logo da primeira igualdade, temos:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \phi = 0,$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega)$, isto implica que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Com esse argumento, concluímos que $u \in D(A) = \{u \in H^2 : \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}$.

Isto é, mostramos que o operador A_0 é sobrejetor. Pela Proposição 1.1.2, temos que A_0 é auto adjunto. Por fim, a Proposição 2.2.1 nos mostra que A_0 é um operador setorial em $L^2(\Omega)$. □

Proposição 4.0.2. *O operador A_0 possui resolvente compacto.*

Demonstração. Aplicaremos a Proposição 1.2.1 para mostrar que o operador A_0 tem resolvente compacto. Pelas imersões de Sobolev, temos que $D(A_0)$ está compactamente imerso em X. Falta mostrar que $0 \in \rho(A_0)$. Seja $\epsilon > 0$, mostraremos que $-(m+\epsilon) \notin \sigma(A)$, já que pela Proposição 4.0.1, vimos que A_0 é auto adjunto, isto é, $\sigma(A_0)$ pertence ao eixo real. Considerando $B = A_0 + (m + \epsilon I)$, mostraremos que B é inversível para todo $\epsilon > 0$. É claro que B é auto adjunto e $\langle Bu, u\rangle \geq \epsilon\|u\|^2$, para todo $u \in D(A_0)$. Logo

$$\|Bu\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \geq \langle Bu, u\rangle_{L^2} \geq \epsilon\|u\|_{L^2}^2 \implies \|Bu\| \geq \epsilon\|u\|_{L^2}.$$

Assim B é injetor, isto é, $\ker B = \{0\}$. Como B é auto adjunto, então B é fechado e vale $\overline{Im(B)} = (KerB)^{\perp} = L^2$. Como B^{-1} é limitado, logo B é inversível. Concluímos, então que $\sigma(A_0) \subset [m, \infty)$ e, portanto, $0 \in \rho(A_0)$. □

Relembre que, como A_0 é setorial, então todas as potências fracionárias estão bem definidas. E, para considerar todas interpolações complexas, precisamos que A_0^{it} sejam limitadas, para todo $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, para algum $\epsilon > 0$. Pelo Teorema A.0.4 (ver apêndice), basta vermos que A_0^{-1} é limitado e que o operador A_0 é maximal acretivo (ver Definição A.0.3).

Proposição 4.0.3. *O operador A_0 é maximal acretivo.*

Demonstração. Pelo mesmo argumento que utilizamos na Proposição 4.0.1, conseguimos mostrar que $R(I + A_0) = H$. Falta mostrar que A_0 é dissipativo. Para isso, mostraremos primeiramente que o operador $\Delta : D(A_0) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é dissipativo.

Seja $\|u\|_{L^2} = 1$ e defina $\xi_u : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\xi_u(v) = \int_\Omega uvdx, \forall v \in L^2(\Omega),$$

então, pela Desigualdade de Hölder, ξ_u é um funcional linear contínuo e vale

$$\xi_u(u) = \|\xi u\| = \|u\| = 1.$$

Como $L^2(\Omega)$ é um conjunto uniformemente convexo, segue que ξ_u é o único funcional com a propriedade acima. Com esse fato, mostraremos que Δ é dissipativo. Veja que, dado $\mu > 0$ e $u \in D(A)$ com $\|u\|_2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(\mu u - \Delta u)dx &= \mu \int_\Omega u^2 + \int_\Omega u\Delta u \\ &= \mu + \int_\Omega \nabla u \nabla u \geq \mu,\end{aligned}$$

em que foi usada a Identidade de Green 1.5. Por Hölder, temos

$$\int_\Omega u^2 \cdot \int_\Omega (\lambda u - \Delta u)^2 \geq \mu,$$

implica em

$$\|\mu u - \Delta u\|_{L^2} \geq \mu\|u\|_{L^2}, \forall \mu > 0,$$

mostrando que Δ é dissipativo.

Por fim, para mostrar que A_0 é dissipativo, veja que

$$\begin{aligned}\|\mu u - \Delta u + \lambda u\|_{L^2} &\geq \|\mu u - \Delta u\|_{L^2} + \lambda\|u\|_{L^2} \\ &\geq \mu\|u\|_{L^2} + \lambda\|u\|_{L^2} \\ &= (\mu + \lambda)\|u\|_{L^2} \geq \mu\|u\|_{L^2},\end{aligned}$$

em que $\lambda > 0$. Concluindo que A_0 é dissipativo. □

Consequentemente, podemos considerar os resultados de interpolação, em especial a Proposição A.0.4, em que temos que $X^\alpha = H^{2\alpha}(\Omega)$, para todo $\alpha < \frac{3}{4}$, em que X^α denota as potências fracionárias de X. Veja que a proposição nos mostra em quais espaços X^α não incorporam a condição de fronteira ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$), isto é, $\alpha < \frac{3}{4}$. Ademais, como estamos admitindo que $\partial\Omega$ é suave, pelo Teorema A.0.2, conseguimos interpolar os espaços e conseguir que valha a condição (veja [10]), para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$X^\alpha = H^{2\alpha}(\Omega).$$

Com essas considerações, conseguimos enunciar a principal função do operador L, que é ser uma extensão do operador A_0:

Proposição 4.0.4. *A restrição do operador L para $L^2(\Omega)$, isto é, a restrição de L ao domínio $D = \{u \in H^1(\Omega), L(u) \in L^2(\Omega)\}$ coincide com A_0 e $D = D(A_0)$. Ademais, L é um operador setorial em $H^{-1}(\Omega)$ com domínio $H^1(\Omega)$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Regularidade, temos que $u \in H^2(\Omega)$, logo conseguimos aplicar a Identidade de Green e segue o resultado. Para mostrar que é setorial, basta ver que o resolvente é de L é igual ao resolvente de A_0. □

Queremos aplicar o Teorema 3.0.1 para L, isto é, para ver que A_0 tem um bom posicionamento nas condições citadas acima, admitiremos hipóteses sobre L. Pela Proposição 4.0.4, podemos estender A_0 ao operador L de $H^1(\Omega)$ e seu dual, $H^{-1}(\Omega)$, que também é setorial. Pela teoria de semigrupos, o semigrupo analítico gerado por $-L$ em $X^{-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{e}^{-Lt}$, é a única extensão de $\mathbf{e}^{-A_0 t}$ ao espaço. Pela Proposição 2.2.7, se L é um operador setorial em X, então L é setorial em X^μ com domínio $X^{\mu+1}$, com $\mu > 0$.

Veja que L é uma das extensões do operador A_0. Como queremos que $u_0 \in H^1(\Omega)$, escolhemos a extensão que é dada em $H^1(\Omega)$. Veja que o Teorema 3.0.1 exige um termo não linear lipschitziano. Pela nossa motivação, é natural exigirmos uma $h \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle h, \phi\rangle_{-1,1} &:= \langle f, \phi\rangle_\Omega + \langle \gamma_0(g), \gamma_0(\phi)\rangle_\Gamma \\ &:= \textstyle\int_\Omega f\phi + \int_\Gamma g\phi \\ &:= f_\Omega(\phi) + g_\Gamma(\phi), \end{aligned} \tag{4.6}$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega)$. Aqui, $\Gamma = \partial\Omega$ denota a fronteira de Ω. Como f e g são de classe $C^1(\Omega)$ e $C^2(\Gamma)$, respectivamente, então $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Logo estão bem definidas as aplicações $f_\Omega(\phi)$ e $g_\Gamma(\phi)$, isto é,

$$\begin{gathered} f_\Omega : H^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ f_\Omega(\phi) = \int_\Omega f\phi \end{gathered}$$

e

$$\begin{gathered} g_\Gamma : H^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ g_\Gamma(\phi) = \int_\Gamma g\gamma_0(\phi) \end{gathered}$$

em que, se $\phi \in H^1(\Omega)$, pelo teorema do traço, $\gamma_0(\phi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. A partir de agora, denotaremos a aplicação (4.6) por $h := f_\Omega + g_\Gamma$.

Vamos re-enunciar o Teorema 3.0.1 nas notações acima de forma genérica e depois reajustar o domínio de h a partir das condições fornecidas do próximo Teorema de Existência e Unicidade.

Teorema 4.0.1. *Seja $A : X^{\beta+1} \subset X^\beta \to X^\beta$ um operador setorial em X^β. Assuma $h : X^\alpha \to X^\beta$ local Lipschitz e limitado em conjuntos limitados, com $0 \leq \alpha - \beta < 1$. Então, o problema*

$$\begin{aligned} &u_t + Au + h(u) = 0 \\ &u(0) = u_0 \in X^\alpha, \end{aligned}$$

tem uma única solução u definida. Pelo Lema 3.0.1, temos que u é dada pela fórmula da variação das constantes, isto é

$$u(t) = \boldsymbol{e}^{-At}u_0 - \int_0^t \boldsymbol{e}^{-A(t-s)}h(u(s))ds,$$

em que $\boldsymbol{e}^{-At}$ *denota o semigrupo analítico gerado por* $-A$. *Ademais, pelo Lema 3.26, temos que*

$$u \in C([0,T), X^\alpha) \cap C(0,T,X^{\beta+1}),\ u_t \in C(0,T,X^\mu),$$

para $\mu < \beta + 1$ *e portanto, a equação está em* X^β.

Aplicaremos o Teorema 4.0.1 para L e consideremos o termo não linear

$$h(u) := f_\Omega(u) + g_\Gamma(u),$$

com $f_\Omega : X^\alpha \to L^2(\Omega)$ e $g_\Gamma : X^\alpha \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, para algum $\alpha > 0$, que escolheremos adiante. Veja que h atua nas funções teste $\phi \in H^r(\Omega)$ para $r > \frac{1}{2}$, isto é,

$$\langle h(u), \phi\rangle = \langle f_\Omega(u), \phi\rangle_\Omega + \langle g_\Gamma(u), \gamma_0(\phi)\rangle_\Gamma.$$

Lembramos que estamos em busca de α e β de forma que valha o Teorema 4.0.1, isto é, $0 \le \alpha - \beta < 1$. Para isso, devemos exigir que h seja considerado de X^α a X^β, para apropriados $\alpha > 0$ e $\beta \le 0$. Como estamos trabalhando com um termo não homogêneo na fronteira, então temos que $\beta < 0$, isto é, forçamos que o trabalho seja feito em espaços duais. Ademais, a equação deve estar em $H^{-1}(\Omega) = X^{-\frac{1}{2}}$, então $0 > \beta > -\frac{1}{2}$. Para aplicarmos a regularidade do Teorema 4.0.1, devemos ter $u, u_t \in H^1(\Omega)$, para $t > 0$, isto é $\beta > -\frac{1}{2}$.

Queremos que, u e a função teste $\phi \in H^{-1}(\Omega)$ tenha traço, isto é, o Teorema do Traço (Teorema 1.4.3) deve ser levado em consideração. Para isso, pedimos que $\frac{3}{2} > 2\alpha > \frac{1}{2}$, isto é, $\frac{3}{4} > \alpha > \frac{1}{4}$. Veja que aqui usamos a condição $X^\alpha = H^{2\alpha}$. Como estamos com a equação associada ao operador L, isto é, a equação está em $H^{-1}(\Omega)$, ampliamos as outras possíveis condições iniciais u_0, isto é, podemos considerar $u_0 \in H^1(\Omega) = X^{\frac{1}{2}}$, isto é, $\alpha > \frac{1}{2}$. Como queremos resgatar a equação 4.2 a partir de L, queremos espaços em que não incorpore com a condição de fronteira ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$). Usando os resultados de interpolação, precisamos que $\alpha < \frac{3}{4}$. Por fim, pelo Teorema 4.0.1, temos a condição $0 < \alpha - \beta < 1$ e então temos que $\beta + 1 \le \frac{3}{4}$, isto é, $\beta < -\frac{1}{4}$.

Resumindo, como $g \neq 0$, vamos considerar as hipóteses:

Hipótese 4.0.1.

$$\frac{3}{4} > \alpha > \frac{1}{4},\quad \frac{-1}{4} > \beta > \frac{-1}{2},\quad 0 \le \alpha - \beta < 1.$$

Formalizando, temos o resultado de existência e unicidade:

Teorema 4.0.2. *Seja* f_Ω, g_Γ, α *e* β *como acima e* $h : X^\alpha \to X^\beta$ *localmente Lipschitz e limitado em conjuntos limitados. Então, para todo* $u_0 \in X^\alpha$, *existe uma única solução, localmente definida de*

$$\begin{aligned} &u_t + Lu + h(u) = 0 \\ &u(0) = u_0 \in X^\alpha, \end{aligned} \tag{4.7}$$

dada por

$$u(t) = \boldsymbol{e}^{-Lt}u_0 - \int_0^t \boldsymbol{e}^{-L(t-s)}h(u(s))ds,$$

que verifica

$$u \in C([0,T), X^\alpha) \cap C(0,T,X^{\beta+1}),\ u_t \in C(0,T,X^\gamma),$$

para todo $\gamma < \beta + 1$ *e*

$$\int_\Omega u_t\phi + \int_\Omega \nabla u\nabla\phi + \lambda\int_\Omega u\phi + \int_\Omega f(u)\phi + \langle g(u), \varphi_0(\phi)\rangle_\Omega = 0,$$

para todo $\phi \in H^1(\Omega)$. Em particular, conseguimos recuperar a equação original, isto é:

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + \lambda u + f(u) = 0 \in \Omega \\ &\tfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = 0 \in \Gamma \end{aligned} \tag{4.8}$$

e a solução é definida para todo $t > 0$ ou explode, na norma X^α, em tempo finito. Ademais, assumindo

$$\begin{aligned} &f_\Omega : X^\alpha \to L^2(\Omega) \\ &g_\Gamma : X^\alpha \to L^2(\Omega) \quad \text{ou} \quad H^{-r}(\Gamma), 0 \le r < \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

funções localmente Lipschizianas e não lineares para $\alpha + \frac{r}{2} < \frac{3}{4}$, então existe β tal que $-\frac{1}{4} > \beta > -\frac{1}{2}$ satisfazendo todas as condições acima.

Demonstração. Pelo Teorema 4.0.1, temos que a equação (4.7) possui solução e é única. Para $\beta > -\frac{1}{2}$, a equação

$$u_t + L(u) + h(u) = 0 \in X^\beta.$$

Pelos mergulhos de Sobolev, pertence em $H^{-1}(\Omega)$. Do Teorema 4.0.1 e como $\beta + 1 > \frac{1}{2}$, para todo $t > 0$, temos que $u(t) \in H^1(\Omega)$ e $u_t \in L^2(\Omega)$, então, aplicando $\phi \in H^1(\Omega)$ em (4.7), temos

$$\int_\Omega u_t \phi + \int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u \phi + \int_\Omega f(u)\phi + \langle g(u), \varphi_0(\phi) \rangle_\Omega = 0.$$

Veja que, aplicando o teorema de regularidade em

$$L(u) = -(u_t + f(u)) - g_\Gamma u,$$

garantimos que $u \in H^2(\Omega)$ e, finalmente, usando o Teorema de Green, conseguimos desfazer a equação por partes. Assim, temos a equação (4.8). $\square$

Observe que, pelo Teorema 4.0.2, temos bem definido um semigrupo $S(t)$ em X^α tal que $S(t)u_0 = u(t)$, a única solução de (4.1).

Observação 4.0.1.

- *A escolha de α e β em função da relação $X^\alpha = H^{2\alpha}$ pode ser estipulada desde que $\partial\Omega$ seja C^∞. No caso da equação (1), que está no domínio unidimensional $\Omega = (-1, 0)$, podemos usar a Definição1.4.5.*

- *Também no caso unidimensional, podemos incluir os extremos das desigualdades dadas pelas Hipóteses 4.0.1, isto é, $\beta = -\frac{1}{2}$ e $\alpha \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.*

Capítulo 5

Problema de Valor Inicial Não Homogêneo

Diferente do Capítulo 3, aqui daremos outras condições de quando o problema

$$\begin{aligned} &u' + Au = f(t,u), \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

possui algum tipo de solução, em que $f : U \to X$ é uma função contínua em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R} \times X$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear em X espaço de Banach. Nesse capítulo, vamos assumir que A é gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e definir dois tipos de soluções.

Definição 5.0.1.

a) *Uma* **solução forte** *de (5.1) em* $[t_0, t_1)$ *é uma função contínua* $u : [t_0, t_1) \to X$ *tal que* $u : (t_0, t_1) \to X$ *é continuamente diferenciável,* $u(t_0) = u_0$, $(t, u(t)) \in U$, $u(t) \in D(A)$ *e (5.1) vale,* $t_0 < t < t_1$.

b) *Uma* **solução fraca** *de (5.1) em* $[t_0, t_1)$ *é uma função contínua* $u : [t_0, t_1) \to X$ *tal que* $u(t_0) = u_0$ $(t, u(t)) \in U$, *para todo* $u^* \in D(A^*)$, $t \mapsto \langle u^*, u(t)\rangle$ *é diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}\langle u^*, u(t)\rangle = \langle A^* u^*, u(t)\rangle + \langle u^*, f(t, u(t))\rangle, \quad t_0 < t < t_1. \tag{5.2}$$

Com isto temos o seguinte teorema, que impõe condições de como relacionar os dois tipos de soluções. Para mais detalhes, indicamos [[11], página 109] e [[9], Capítulo 2].

Teorema 5.0.1.

1. *Se* $u : [t_0, t_1) \to X$ *é uma solução forte de* (5.1), *então é também uma solução fraca de (5.1).*

2. *Uma solução fraca* $u : [t_0, t_1) \to X$ *de* (5.1) *é também uma solução forte se, e somente se, é continuamente diferenciável em* (t_0, t_1) *se, e somente se,* $u(t) \in D(A)$ *com* $t \mapsto Au(t)$ *contínua em* (t_0, t_1).

3. *Se* $u : [t_0, t_1) \to X$ *é uma solução fraca de* (5.1), *então*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t) f(s, u(s)) ds, \quad t_0 \leq t < t_1. \tag{5.3}$$

4. *Se* $u : [t_0, t_1) \to X$ *é contínua com* $(t, u(t)) \in U$, $t_0 \leq t < t_1$ *e satisfaz (5.3), então* $u : [t_0, t_1) \to X$ *é uma solução fraca de (5.1).*

O teorema abaixo nos diz quando (5.1) possui uma única solução fraca.

Teorema 5.0.2. *Assuma que* $\{T(t); t \geq 0\}$ *é um semigrupo fortemente contínuo,* $U \subset \mathbb{R} \times X$ *um aberto e* $f : U \to X$ *contínua e localmente Lipschitz contínua em seu segundo argumento; isto é, dado* $(t_0, u_0) \in U$ *existe* $\delta > 0$ *e* L *tal que*

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\|_X \leq L\|u_1 - u_2\|_X, \tag{5.4}$$

quando $|t - t_0| \leq \delta$ *e* $\|u_i - u_0\|_X \leq \delta$, $i = 1, 2$. *Então, dado qualquer* $(t_0, u_0) \in U$ *existe* $t_1 > t_0$ *e uma solução fraca* $u : [t_0, t_1) \to X$ *de (5.1). Adicionalmente, qualquer solução fraca* $\tilde{u} : [t_0, \tilde{t}_1) \to X$ *é tal que* $\tilde{u}(t) = u(t)$ *para* $t_0 \leq t < \min\{t_1, \tilde{t}_1\}$.

Demonstração. Existe $\delta > 0$ e constantes L, M tais que se $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$, $\|u_i - u_0\|_X \leq \delta$, $i = 1, 2$, então

$$\begin{aligned} &\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\|_X \leq L\|u_1 - u_2\|_X \\ &\|f(t, u_1)\|_X \leq M. \end{aligned}$$

Escolha $t_1 > t_0$ tal que

$$0 < t_1 - t_0 \leq \min\left\{\frac{\delta}{2MM_0}, \frac{1}{2M_0L}, \delta, \epsilon\right\},$$

onde $\|T(\tau)\|_{L(X)} \leq M_0$, $0 \leq \tau \leq \epsilon$, $\|T(\tau)u_0 - u_0\|_X \leq \delta/2$ quando $0 \leq \tau \leq \epsilon$.

Seja S o conjunto das funções contínuas $u : [t_0, t_1] \to X$ tal que $\|u(t) - u_0\|_X \leq \delta$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Se $u, \tilde{u} \in S$, defina $d(u, \tilde{u}) = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_X$; então (S, d) é um espaço métrico completo. Para $u \in S$ defina $G(u) : [t_0, t_1] \to X$ por

$$G(e)(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)f(s, u(s))ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Então $G(S) \subset S$, $d(G(e), G(\tilde{e})) \leq \frac{1}{2}d(e, \tilde{e})$ para $e, \tilde{e} \in S$ e, do Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 1.1.1), G tem um único ponto fixo em S. Isto prova a afirmativa pelo Teorema 5.0.1 partes (3) e (4). $\square$

Observação 5.0.1. *Relembremos que quando o operador* A *é um operador linear limitado em* X, *então* A *gera um* C_0 *semigrupo e este é dado por* $T(t) = e^{At}$.

Capítulo 6

Equações Lineares Não Locais

Existe um interesse considerável em estudar equações de difusão e reação, que são responsáveis por modelar reações químicas e crescimento de população. Dadas certas condições iniciais e de fronteira, essas equações descrevem evolução no tempo de sistemas que podem ser consideradas complexos.

Vamos fazer uma apresentação teórica sobre um tipo de equação de difusão, as Equações Não Locais, que são representadas pela equação

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)u(y,t)dy - h_0 u(x,t), x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

em que $h_0(x) = \int_\Omega J(x-y)dy$.

O objetivo dessa seção é mostrar que o problema não local de evolução em Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ limitado, tem uma única solução. Aqui, J satisfará as seguintes hipóteses:

Hipótese 6.0.1. *$J \in C(\Omega, \mathbb{R})$ é uma função não negativa, simétrica, com suporte compacto $\mathrm{supp}(J) = [-R, R]$, com $J(0) > 0$ e*

$$\int_{\mathbb{R}} J(x)dx = 1.$$

Dizemos que uma função com as propriedades acima é uma função de densidade radial probabilística. No contexto aplicado, a Equação (6.1) é usada no modelo de processo de difusão. Para ilustrarmos essa situação, se $u(x,t)$ é a densidade da massa no ponto x no tempo t e $J(x-y)$ é a probabilidade distribuição do deslocamento de y a x, então $J * u(x,t)$ é a taxa de quantos indivíduos estão chegando a posição x e, $-J * u(x,t)$, é a taxa de quantos são saindo da posição x.

Usaremos essas considerações para mostrar existência e unicidade, que será com base no Teorema do Ponto Fixo (Teorema 1.1.1) Ademais, como estamos trabalhando com problemas não locais de difusão, é viável trabalhar com específicos espaços de Lebesgue em que serão possíveis amplificar as ferramentas necessárias, no nosso caso, o $L^2(\Omega)$.

6.1 Existência e Unicidade do Problema não Local

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, $X = L^2(\Omega)$ e $K \in \mathcal{L}(X)$. Vamos considerar a equação:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (K - hI)(u)(x,t) + f(x, u(x,t)) = B(u)(x,t) + f(x, u(x,t)), x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t_0) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

em que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o termo local de reação, $u_0 \in X$, $h \in L^\infty(\Omega)$ e I, o operador identidade. O objetivo é escrever a solução de (6.2) em termos de um semigrupo C_0, associado ao operador linear $B = K - hI$, isto é, usaremos o Teorema 5.0.1 para mostrar a boa colocação do problema (6.2). Veja que como B é um operador limitado, vimos que o semigrupo é dado por $\{e^{Bt}\}$. De fato, escreveremos a solução via fórmula da variação das constantes e provaremos que a equação (6.2) possui uma única solução, se f for Lipschitz.

É possível mostrar que, se f for uma função Lipschitz, que a solução (6.2) com dado inicial $u_0 \in X$ é uma solução global tal que $u \in C^1([0,T],X)$ para todos $T>0$, denotada por $u(x,t,u_0)$. Para isso, usaremos a reformulação do Teorema 5.0.2, junto com um resultado de regularização, que é possível ver em [[11], página 109].

Teorema 6.1.1. *Seja X um espaço de Banach e assuma que $H : D(H) \subset X \to X$ gera um C_0 semigrupo em X, denotado por $T(t)$. Considere o problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = H(u)(t) + g(t), t > t_0, \\ u(t_0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{6.3}$$

Assuma que $g \in C([t_0,t_1],X)$, $u_0 \in D(H)$ e u é uma solução fraca de (6.3), isto é, é dada por

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-t_0)g(s)ds.$$

Ademais, assuma que

- *$g \in C([t_0,t_1],D(H))$, isto é, as aplicações $t \to g(t) \in X$ e $t \to Hg(t) \in X$ são contínuas;*
- *$g \in C^1([t_0,t_1],X)$,*

então $u \in C^1([t_0,t_1],X) \cap C([t_0,t_1],D(H))$ e u é uma solução forte de (6.3) em X

Vamos considerar o operador globalmente Lipschitz $G : X \to X$, isto é, $G(u) = g(x,u(t))$.
e o problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (K-hI)(u)(x,t) + G(u)(x,t) = L(u)(x,t) + G(u)(x,t), x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t_0) = u_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{6.4}$$

Proposição 6.1.1. *Sejam $X = L^2(\Omega)$, $h \in L^\infty(\Omega)$, $B = K - hI \in \mathcal{L}(X)$ e $G : X \to X$ globalmente Lipschitziano. Então, o problema (6.4) tem uma única solução $u \in C((-\infty,\infty),X)$ para $u_0 \in X$ com*

$$u(\cdot,t) = e^{Bt}u_0 + \int_0^t e^{B(t-s)}G(u)(\cdot,s)ds.$$

Demonstração. Consideremos o operador em $V = C([-T,T],X)$

$$F : V \to V$$
$$F(u)(t) = e^{Bt}u_0 + \int_0^t e^{B(t-s)}G(u)(\cdot,s)ds$$

Veja que V é um espaço de Banach com a norma do supremo. Vamos mostrar que F vai de V em V, isto é, se $u \in V$, $F(u) \in C([-T,T],X)$. Primeiramente, se $u \in V$, $G(u) \in C([-T,T],V)$, já que $G : X \to X$ é globalmente Lipschitz. Como $B = K - hI \in \mathcal{L}(X)$ então pela Teoria Espectral, temos que $-\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < |\sigma(L)| < \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$. Ademais, vale a estimativa da Proposição 2.1.3, isto é, tomando $a \in (0,\|B\|_{\mathcal{L}})$ e $M \in \mathbb{R}$, temos que

$$\|e^{Bt}\|_{\mathcal{L}} \leq Me^{a|t|}.$$

Como $G(u) \in C([-T,T],X)$ e pela estimativa acima, temos

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t)\|_X &\leq \|e^{Bt}u_0\| + \|\int_0^t e^{B(t-s)}G(u)(\cdot,s)ds\|_X \\
&\leq \|e^{Bt}\|\|u_0\|_X + \int_0^t \|e^{B(t-s)}G(u)(\cdot,s)\|ds \\
&\leq Me^{a|t|}\|u_0\|_X + \int_0^t Me^{a|t-s|}\|G(u)(s)\|_X ds \\
&\leq Me^{a|t|}\|u_0\|_X + M|t|e^{a|t|},
\end{aligned}$$

logo $F(u)(t) \in X$. Para mostrar a continuidade no tempo, seja $t \in [-T,T]$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$, então

$$F(u)(t+\epsilon) = e^{B\epsilon}F(u)(t) + \int_t^{t+\epsilon} e^{B(t+\epsilon+s)}G(u)(\cdot,s)ds.$$

Consequentemente,

$$\|F(u)(t+\epsilon) - F(u)(t)\|_X \leq \|(e^{B\epsilon}-I)F(u)(t)\| + \int_t^{t+\epsilon} \|e^{B(t+\epsilon-s)}\|_{\mathcal{L}(x)}\|G(u)(s)\|_X ds.$$

Quando $\epsilon \to 0$, temos que e^{Bs} vai a zero pois é um C_0 semigrupo e $F(u)(t) \in X$. O segundo termo, $G(u) \in C((-T,T),X)$ para $u \in V$ e $\|e^{B(t+\epsilon-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{a(t+\epsilon-s)}$. Assim, o termo integral vai a zero se ϵ vai a zero. Assim $F(V) \subset V$. Vamos mostrar que F é uma contração em V, se T é pequeno. Sejam $u_1, u_2 \in V$ e $t \in [-T,T]$, então

$$\|F(u_1)(t) - F(u_2)(t)\| \leq \int_0^t \|e^{B(t-s)}\|_{\mathcal{L}}\|G(u_1)(\cdot,s) - G(u_2)(\cdot,s)\|ds.$$

Como G é localmente Lipschitz e $\|e^{Bt}\|_{\mathcal{L}} \leq Me^{a|t|}$, temos

$$\begin{aligned}
\|F(u_1)(t) - F(u_2)(t)\|_X &\leq L_G \int_0^t \|e^{B(t-s)}\|_{\mathcal{L}}(X)\|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\
&\leq ML_G \int_0^t e^{a|t-s|}\|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\
&\leq ML_G|t|e^{a|t|} \sup_{s\in[-t,t]} \|u_1(s) - u_2(s)\|_X.
\end{aligned}$$

Como $t \in [-T,T]$, temos que para T pequeno, vale $ML_G|T|e^{a|T|} < 1$. Assim F é uma contração e tem um único ponto fixo. Agora, vamos argumentar por continuidade que o resultado vale para todo $T \in \mathbb{R}$. Como $T > 0$ não depende de u_0, considerando o mesmo problema com valor inicial $u(x,T)$, podemos encontrar uma única solução para $t \in [0, 2T]$ Veja que, se considerarmos o mesmo problema com valor inicial $u(x,-T)$ encontramos que existe uma única solução em $t \in [-2T, 0]$. Por sorte, temos a unicidade, logo existe uma única solução u para todo $t \in [-2T, 2T]$. Repetindo esse argumento, existe uma única solução $u \in C^1([-T,T),X]$ da equação (6.4) para todo $T > 0$. Assim, existe uma única solução $u \in C([-T,T],X)$ de (6.4) para $T > 0$ que satisfaz a fórmula da variação das constantes. Ademais, considerando $g(t) = G(u(t))$, como $u : [-T,T] \to X$ e $G : X \to X$ são aplicações contínuas, temos que $g : [-T,T] \to X$ é contínuo. Ademais, como $D(L) = X$ e $L \in \mathcal{L}(X)$, podemos aplicar o Teorema 6.1.1. Assim $u \in C^1([-T,T],X)$ é uma solução forte em X, para todo $t > 0$ □

Veja que, fazendo K como sendo $Ku = J * u$, temos que $K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$, pois vale $\|K(u)\|_{L^2} = \|K * u\|_{L^2} \leq \|K\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$. Assim, temos a boa colocação da equação (6.2).

Capítulo 7

Resultados Finais

O intuito desse capítulo final é apresentar a boa colocação do sistema de equações que será apresentada a seguir, em que envolverá a equação (4.1), que foi inspirada no artigo [4], e a equação (6.2), que foi apresentada em [1]. Isto é, vamos combinar a equação linear local de difusão, a equação do calor pertubada pela identidade, com $\lambda > 0$ e $t > 0$,

$$u_t(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \lambda u(x,t),$$

em $\Omega = (-1,0)$, $t > 0$, com a equação linear não local com núcleo integrável:

$$v_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)(v(y,t) - v(x,t))dy,$$

em $\Omega = (0,1)$, $t > 0$, em que J satisfaz as condições das hipóteses 6.0.1. Vamos acoplar os dois problemas acima e mostrar que, em adequados espaços de Banach, vale o resultado de existência e unicidade no sentido de semigrupos com uma função Lipschitziana específica, como visto nos capítulos anteriores. Como feito em [3], acrescentaremos um termo não linear na equação não local de forma que o acoplamento entre as duas equações faça sentido, ao considerar a nova equação diferencial com a condição de Neumann. Para facilitar a exposição dos resultados, iremos considerar o domínio Ω como sendo o subconjunto unidimensional $(-1,1)$, em que dividiremos em dois, $\Omega_l = (-1,0)$ e $\Omega_{nl} = (0,1)$, em que as equações são acopladas em $x = 0$, pela condição de fronteira de Neumann.

Em termos aplicados, a interpretação dada por essa nova equação é o movimento de uma partícula, que em $(-1,0)$ teremos o movimento browniano, que é dada pela equação

$$u_t(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \lambda u$$

com reflexão em $x = -1$ $\left(\frac{\partial u}{\partial x}(-1,0) = 0\right)$ e quando a partícula chega em $x = 0$, ela passa para outro domínio, $(0,1)$. Neste intervalo, a partícula obedece um processo dado pela função de probabilidade descrita em função de J.

Com essas considerações, defina o sistema no subconjunto unidimensional $\Omega = (-1,1)$, com $t > 0$ e $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \lambda u(x,t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1,t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \displaystyle\int_0^1 J(-y)(v(y,t) - u(0,t))dy \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{7.1}$$

para $x \in (-1,0), t > 0$ e

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \int_0^1 J(x-y)(v(y,t)-v(x,t))dy - \int_{-1}^0 J(x-y)dy(v(x,t)-u(0,t)) \\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{7.2}$$

para $x \in (0,1), t > 0$.

Vejamos que estamos no caso unidimensional, então o operador abstrato relativo a (7.1) é o A_0 definido em (4.2). Lembramos que, para aplicar o Teorema 4.0.2 com a não linearidade definida no teorema, precisamos admitir as potências fracionárias de A_0 e aplicar o Teorema 4.0.2 para a extensão deste, o operador L definido anteriormente. Aqui, como estamos no caso unidimensional, pelas hipóteses (4.0.1) e pela observação 4.0.1, precisamos que $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e $\beta > -\frac{1}{2}$ para conseguirmos recuperar a condição de fronteira da equação (7.1). Lembre-se que temos a relação $X^\alpha = H^{2\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e as notáveis relações:

$$X^0 = D(A_0) = \{u \in H^2(\Omega_l); \tfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \in \{0,1\}\}; \quad X^1 = L^2(\Omega); \quad X^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega); \quad X^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)$$

Defina o operador A como sendo

$$\begin{aligned} A :&D(A) \subset X^\beta(-1,0) \times L^2(0,1) \to X^\beta \times L^2(0,1) \\ A(u,v) = (L(u), B(v)) =& \left(\int_{\Omega_l} \nabla u \nabla \phi + \lambda \int_{\Omega_l} u\phi, - \int_0^1 J(x-y)(v(y)-v(x))dx \right), \end{aligned} \tag{7.3}$$

em que

$$D(A) = X^\alpha \times L^2(0,1), \tag{7.4}$$

com $B : L^2(\Omega_{nl}) \to L^2(\Omega_{nl})$ são, respectivamente, os operadores referente a parte locais e não locais, visto nos capítulos anteriores. Aqui, $\lambda > 0$ e J satisfaz as hipóteses 6.0.1. Relembremos que X^α é a potência fracionária em que temos a função com traço, mas a derivada não, isto é, conseguimos retirar a condição de Neumann da parte local.

Vamos definir a equação principal abstrata

$$\begin{aligned} X' =& AX + H(X), t > 0 \\ X(0) =& X_0 \in X^\alpha \times L^2(\Omega_{nl}), \end{aligned} \tag{7.5}$$

onde H é o termo não linear contínuo localmente lipschitziano

$$\begin{aligned} H : X^\alpha \times L^2(0,1) &\to X^\beta \times L^2(0,1) \\ H(u,v) &= (F_1(u,v), F_2(u,v)), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} &F_1 : X^\alpha \times L^2(\Omega_{nl}) \to X^\beta \\ &F_1(u,v)(\phi) : X^{-\beta} \to \mathbb{R} \\ &F(u,v)(\phi) = \int_0^1 J(-y)(v(y)-u(0))dy\phi(0) \end{aligned}$$

que é um funcional linear com $\phi \in X^{-\beta}$ ($\beta \in \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$) e

$$\begin{aligned} &F_2 : X^\alpha \times L^2(\Omega_{nl}) \to L^2(\Omega_{nl}) \\ &F_2(u,v) = \int_{-1}^0 J(.-y)dy(v(.)-u(0)). \end{aligned}$$

De fato é fácil ver que ambas funções são Lipschitziana, pois dados $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in X^\alpha \times L^2(\Omega_{nl})$

$$\begin{aligned}
\|F_2(u_1,v_1) - F_2(u_2,v_2)\|_{L^2} &= \left\| \int_{-1}^{0} J(.-y)dy(v_1(.) - u_1(0)) - \int_{-1}^{0} J(.-y)dy(v_2(.) - u_2(0)) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \int_{-1}^{0} J(.-y)dy((v_1(.) - v_2(.)) - (u_1(0) - u_2(0)) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \int_{-1}^{0} J(.-y)dy \right\|_{L^2} (\|v_1 - v_2\|_{L^2} + \|u_1 - u_2\|_{L^2}) \\
&\leq \left\| \int_{-1}^{0} J(.-y)dy \right\|_{L^2} (\|v_1 - v_2\|_{L^2} + \|u_1 - u_2\|_{X^\alpha}),
\end{aligned}$$

em que adotamos temos a norma do gráfico para X^α. O argumento para F_1 é similar, usando a norma do supremo em X^β, aplicando a Desigualdade de Hölder e o mergulho $X^\alpha \subset L^2(\Omega)$.

Queremos mostrar o bom posicionamento de (7.5) e concluir que o sistema acoplado possui uma única solução. Para isso, procederemos como no capítulo 4 para tratar do bom posicionamento da primeira coordenada, isto é, consideremos L, que é a extensão do operador laplaciano A_0 (ver (4.2)) em H^1, com a condição de Neumann e depois desfazer a integração por partes e voltar à equação original.

7.1 Existência e Unicidade do Problema Final

Definimos o termo não linear contínuo F como sendo

$$\begin{aligned}
&F : X^\alpha \times L^2(0,1) \to X^\beta \times L^2(0,1) \\
&F(u,v)(\phi) = \left(\left\langle \int_0^1 J(-y)(v(y) - u(0))dy, \phi(0) \right\rangle, \int_{-1}^{0} J(.-y)dy(v(.) - u(0)) \right),
\end{aligned} \tag{7.6}$$

em que $\phi \in X^{-\beta}$, X^α é definido como nas hipóteses 4.0.1 e F satisfaz as condições do Teorema 4.0.2. Veja que a não linearidade da forma local verifica com o definido acima, pois dadas as aplicações $F_{\Omega_l}(u,v)$ e $G_{\Gamma_l}(u,v)$ definidas por

$$\begin{aligned}
F_{\Omega_l} &: X^\alpha \times L^2(0,1) \to X^\beta \\
F_{\Omega_l}(u,v) &:= f_{\Omega_l}(u),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{\Gamma_l} &: X^\alpha \times L^2(0,1) \to X^\beta \\
G_{\Gamma_l}(u,v) &:= g_{\Gamma_l}(u,v),
\end{aligned}$$

em que $f_{\Omega_l}(u)\phi = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(u(x))\phi(x)dx$, f é a mesma que satisfaz (4.1) (no nosso caso é $f = 0$) e em que $\Gamma_l = \{0, 1\}$ e $\langle g_{\Gamma_l}, \phi\rangle = \displaystyle\int_{\Gamma_l} \gamma(g(u,v))\gamma(\phi)dS$, em que γ é a função traço e g é dado por (4.1), isto é, no nosso caso, g satisfaz as condições de (7.1), isto é, temos

$$g(u,v)(x) = \begin{cases} 0, \ se \ x = -1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{0} \int_0^1 J(x-y)(v(y,t) - u(0,t))dydx, \ se \ x = 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Por uma conta simples, é fácil ver que $G_{\{0,1\}}(u,v)$ é uma aplicação Lipschitziana.

Veja que com as contas acima, entramos nas hipóteses do Teorema 4.0.2 para a primeira coordenada do operador A, onde o termo não linear do Teorema 4.0.2 corresponde ao $G_{\Gamma_l} + F_{\Omega_l}$. Nas condições acima, vamos enunciar o Teorema de Existência e Unicidade:

Teorema 7.1.1. *Sejam F_Ω, G_Γ, α, β como acima. Então, o problema parabólico abstrato*

$$\begin{aligned} X_t =& AX + H(X), t > 0 \\ X(0) =& X_0 \in X^\alpha \times L^2(\Omega_{nl}) \end{aligned} \tag{7.8}$$

possui uma única solução dada por

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}H(X(s))ds,$$

em que $e^{At} = (-\boldsymbol{e}^{Lt}, e^{Bt})$ é um semigrupo C_0, estes como na Proposição (6.4) e no Teorema (4.0.2) em que verifica

$$X \in C([0,T], X^\alpha \times L^2(\Omega_{nl})) \cap C(0,T, X^{\beta+1} \times L^2(\Omega_{nl})),$$
$$X_t \in C(0,T, X^\gamma \times L^2(\Omega_{nl})),$$

para todo $\gamma < \beta + 1$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 6.4 na primeira coordenada de A e a Proposição 4.0.2 na segunda coordenada de $\tilde{A}$. □

Como o Teorema 4.0.2 e fixando $v \in L^2(\Omega_{nl})$, conseguimos desfazer a equação por partes da primeira coordenada de A. Assim, pela teoria de semigrupos e pelos resultados de regularização, conseguimos concluir que o sistema que acopla (7.1) e (7.2) possui uma única solução em $H^2(\Omega_l) \times L^2(\Omega_{nl})$.

Apêndice A

Potências Fracionárias Imaginárias

Nesse apêndice, será apresentado os operadores setoriais na abordagem de Kato [17, 18, 19]. Para isso, relembremos algumas definições e resultados, em que pode ser encontrado em ([11], seção 1.4). O objetivo desse apêndice é coletar informações necessárias para enunciarmos o resultado em que permite as potências fracionárias de um operador linear definido em um espaço de Hilbert. serem estendidas a potências imaginárias e, mesmo assim, continuarem limitadas. Assim, conseguimos aplicar os resultados de interpolação de [10].

Definição A.0.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ com norma $\|\cdot\|_X$ e seja $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ o seu dual com a norma usual $\|\cdot\|_{X'}$ ($\|f\|_{X'} = \sup\{\mathrm{Re}\langle f, x\rangle : \|x\|_X \leq 1\}$). A aplicação dualidade $J : X \to 2^{X'}$ é uma função multívoca definida por*

$$J(x) = \{f \in X' : \mathrm{Re}\langle f, x\rangle = \|x\|_X^2,\ \|f\|_{X'} = \|x\|_X\}.$$

$J(e) \neq \emptyset$, pelo Teorema de Hahn-Banach.

Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é **dissipativo** *se para cada $x \in D(A)$ existe $f \in J(x)$ tal que $Re\,\langle f, Ax\rangle \leq 0$.*

Lema A.0.1. *O operador linear A é dissipativo se e somente se*

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X \tag{A.1}$$

para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Demonstração. Seja A dissipativo, $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$. Se $f \in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax, f\rangle \leq 0$ então

$$\|\lambda x - Ax\|_X \|x\|_X \geq |\langle \lambda x - Ax, f\rangle| \geq \mathrm{Re}\langle \lambda x - Ax, f\rangle \geq \lambda \|x\|_X^2$$

e (A.1) segue. Reciprocamente, seja $x \in D(A)$ e assuma que $\lambda\|x\|_X \leq \|\lambda x - Ax\|_X$ para todo $\lambda > 0$. Se $f_\lambda \in J(\lambda x - Ax)$ e $g_\lambda = f_\lambda / \|f_\lambda\|_{X'}$ temos

$$\begin{aligned} \lambda\|x\|_X &\leq \|\lambda x - Ax\|_X = \langle \lambda x - Ax, g\lambda\rangle \\ &= \lambda Re\langle x, g_\lambda\rangle - Re\langle Ax, g_\lambda\rangle \leq \lambda\|x\|_X - \mathrm{Re}\langle Ax, g_\lambda\rangle \end{aligned} \tag{A.2}$$

Como a bola unitária de X' é compacta na topologia fraca* temos que existe $g \in X'$, $\|g\|_{X'} \leq 1$, e sequência $\lambda_n \to \infty$ tais que $g_{\lambda_n} \xrightarrow{w} g$. De (A.2) segue que $\mathrm{Re}\langle Ax, g\rangle \leq 0$ e $\mathrm{Re}\langle x, g\rangle \geq \|x\|_X$. Mas $\mathrm{Re}\langle x, g\rangle \leq |\langle x, g\rangle| \leq \|x\|_X$ e portanto $\langle x, g\rangle = \|x\|_X$. Tomando $f = \|x\|_X g$ temos $f \in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax, f\rangle \leq 0$. Portanto, para todo $x \in D(A)$ existe $f \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle Ax, f\rangle \leq 0$ e A é dissipativo. ☐

O próximo teorema, de forte ferramenta na teoria de semigrupos, nos afirma quando o operador linear A gera um semigrupo fortemente contínuo de contração. A demonstração pode ser encontrada em [11, 13] e, como pré requisito, utiliza-se o Teorema de Hille Yosida (ver [11]).

Teorema A.0.1 (Lumer-Phillips)**.** *Suponha que A é um operador linear densamente definido em um espaço de Banach X.*

(i) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, então A é dissipativo (de fato,* $\operatorname{Re}\langle e^*, Ae\rangle \leq 0$ *para todo* $e^* \in J(e)$*) e* $R(\lambda - A) = X$ *para algum* $\lambda > 0$,

(ii) *Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Uma consequência do Teorema A.0.1 é o resultado abaixo, valido para espaços reflexivos. No nosso trabalho, como trabalharemos em espaços de Hilbert, vale nesse caso em particular.

Teorema A.0.2. *Seja A dissipativo com $R(I - A) = X$. Se X é reflexivo então $\overline{D(A)} = X$.*

Agora, veremos a Teoria de Potências Fracionárias segundo [17], em que auxiliará no cálculo das potências fracionárias em espaço de Hilbert. Os próximos resultados dizem que, se $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador que gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial, então A tem as potências imaginárias limitadas.

Definição A.0.2. *Dizemos que $A : D(A) \subset X \to X$ é do tipo (ω, M) em um espaço de Banach X se A é fechado, densamente definido e o resolvente de $-A$ contém um setor aberto $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg\lambda| < \pi - \omega\}$ e $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é uniformemente limitado em cada setor menor $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg\lambda| < \pi - \omega - \epsilon\}$, $\epsilon > 0$ e*

$$\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq M, \lambda \geq 0.$$

O teorema a seguir terá importância fundamental na demonstração de que para todo operador dissipativo A em um espaço de Hilbert H com $0 \in \rho(A)$ podemos definir o grupo fortemente contínuo $\{A^{it} \in L(H) : t \in \mathbb{R}\}$. Com isso, conseguimos aplicar os resultados de interpolação do Capítulo 4 no operador (4.1). A demonstração pode ser vista em [13, 17].

Teorema A.0.3 (Kato)**.** *Seja A um operador de tipo (ω, M) em um espaço de Banach X com $0 \in \rho(A)$ e $0 < \alpha < 1$, então*

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda + (-\mu)^\alpha}(\mu + A)^{-1}d\mu, \quad \lambda \geq 0, \tag{A.3}$$

onde Γ é qualquer curva simples por partes em $\mathbb{C}/\mathbb{R}^+$ indo de $\infty e^{-i\varphi}$ a $\infty e^{i\varphi}$ para algum $\varphi \in (0, \pi)$ tal que $\sigma(-A)$ fica estritamente a esquerda de Γ. Deformando Γ sobre $\mathbb{R}^+$ segue que

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^\alpha(s + A)^{-1}}{s^{2\alpha} + 2\lambda s^\alpha \cos \pi\alpha + \lambda^2}\, ds, \quad \lambda \geq 0. \tag{A.4}$$

Além disso, A^α e de tipo $(\alpha\omega, M)$. Se $\alpha\omega < \pi/2$ então $-A^\alpha$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T_\alpha(t) : t \in \Sigma_{\pi/2-\alpha\omega}\}$. No caso em que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial $T_\alpha(t)$ é dado por

$$T_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty T(\tau)\int_\Gamma \boldsymbol{e}^{-\tau\mu - t(-\mu)^\alpha}d\mu\, d\tau. \tag{A.5}$$

Lembre-se que um operador linear A em X é dito ter potências imaginárias limitadas se A for setorial com $0 \in \rho(A)$ e existe $\epsilon > 0$ e $M \geq 1$ tal que $A^{it} \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, para todo $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Vamos mostrar que, em quais hipóteses, um operador setorial $A : D(A) \subset X \to X$, com X Banach, pode admitir as potências imaginárias limitadas.

Definição A.0.3. *Diz-se que A é acretivo se $-A$ é dissipativo. Se além disso, $R(I + A) = H$, isto é, para toda $f \in H$ existir $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$, dizemos que A é maximal acretivo.*

Lema A.0.2. *Se A é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ em um espaço de Hilbert H e $0 < \alpha < 1$. Para todo $\epsilon > 0$, temos que $I + \epsilon A$ é também do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ de forma que $(I + \epsilon A)^{\alpha}$ existe e*

$$\|(I + \epsilon A)^{-\alpha}\|_H \leq M.$$

Demonstração. Para ver que $(I + \epsilon A)$´é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$, note que

$$\begin{aligned}
\|(s + (I + \epsilon A))^{-1}\|_H &= \|(s + 1 + \epsilon A)^{-1}\|_H \\
&= \|\epsilon^{-1}((s+1)\epsilon^{-1} + A^{-1})\|_H \\
&\leq \frac{M}{s+2} \leq \frac{M}{s}.
\end{aligned}$$

Como $(I + \epsilon A)^{-1}$ é limitado, pelo Teorema A.0.3, vale para $\lambda = 0$ se Aé substituindo por $I + \epsilon A$. Como $\|(\mu + I + \epsilon A)^{-1}\|_H \leq M(\mu + 1)^{-1}$, segue que

$$\|(I + \epsilon A)^{-\alpha}\|_H \leq \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \mu^{-\alpha} M(\mu + 1)^{-1} d\mu = M.$$

□

Lema A.0.3. *Seja H é um espaço de Hilbert e A um operador linear em H. A é do tipo $(\frac{\pi}{2}, 1)$ se e somente se A é fechado e maximal acretivo.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que A é do tipo $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Logo, por definição A é fechado e $\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|_H \leq 1$. Se $u \in D(A)$, então

$$\|u\|_H \leq \lambda^{-1}\|(\lambda + A)u\|_H.$$

Elevando a desigualdade acima ao quadrado, segue

$$\begin{aligned}
\|u\|_H^2 \leq \lambda^{-2}\|(\lambda + A)u\|_H^2 &= \lambda^{-2}\langle(\lambda + A)u, (\lambda + A)u\rangle_H \\
&= \lambda^{-2}(\|\lambda u\|_H^2 + 2\lambda Re\langle Au, u\rangle_H + \|Au\|_H^2) \\
&= \|u\|_H^2 + 2\lambda^{-1} Re\langle Au, u\rangle_H + \lambda^{-2}\|Au\|_H^2.
\end{aligned}$$

Agora, se $\lambda \to \infty$, temos $Re\langle Au, u\rangle \geq 0$, como queríamos.

Por outro lado, se A é maximal acretivo e fechado, então $Re\langle Au, u\rangle \geq 0$, ou seja, $-A$ é dissipativo. Do lema anterior, temos que

$$\|\lambda + A\|_H \geq \lambda \implies \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|_H \leq 1.$$

Resta msotrar que $\overline{D(A)} = H$, $\{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}\}\rho(-A)$. Como $D(A)$ é a imagem de $(\lambda + A)^{-1}$, $\lambda > 0$, é suficiente mostrar que $\langle(A + \lambda)^{-1}u, v\rangle_H = 0$, para todo $u \in H$ implica que $v = 0$. Fazendo $u = v$ e $(\lambda + A)^{-1}v = w$, temos:

$$\begin{aligned}
0 = Re\langle(\lambda + A)^{-1}v, v\rangle_H &= Re\langle w, (A + \lambda)w\rangle_H \\
&= Re\langle w, Aw\rangle_H + Re\langle w, \lambda w\rangle_H \geq \lambda\|w\|_H^2.
\end{aligned}$$

e assim $w, v = 0$. Veja que aplicando o Teorema A.0.1, o resultado segue. □

Lema A.0.4. *Seja A fechado e maximal acretivo em um espaço de Hilbert H. Então $H = \overline{D(A)}$. Se A é fechado, maximal acretivo e 0 não é auto valor de A então $\overline{R(A)} = H$.*

Demonstração. Basta ver que se A é fechado e maximal acretivo então do Teorema A.0.2, A tem domínio denso. A segunda afirmativa segue do fato que se A é fechado, maximal acretivo e 0 não é um autovalor de A então sua inversa sobre a imagem é um operador fechado e maximal acretivo. □

Teorema A.0.4. *Seja A um operador limitado e maximal acretivo em um espaço de Hilbert H. Então A^α pode ser estendido a α complexo de forma que seja analítico para* $\mathrm{Re}\alpha > 0$ *e*

$$\|A^\alpha\| \leq \frac{\sin \pi\xi'}{\pi\xi'(1-\xi')}\|A\|^\xi \boldsymbol{e}^{\pi\frac{|\eta|}{2}} \leq \frac{4}{\pi}\|A\|^\xi \boldsymbol{e}^{\pi\frac{|\eta|}{2}}, \quad \alpha = \xi + i\eta,\ \xi' = \xi - [\xi]. \tag{A.6}$$

Se A não tem autovalor nulo A^α pode ser estendido a $\mathrm{Re}\alpha \geq 0$ *de forma que A^α é fortemente contínuo e (A.6) vale para* $\mathrm{Re}\alpha \geq 0$. *Em particular $A^{i\eta}$ é um semigrupo fortemente contínuo em η com $\|A^{i\eta}\| \leq \boldsymbol{e}^{\pi\frac{|\eta|}{2}}$.*

Demonstração. As potências A^α de A podem ser definidas para $0 < \mathrm{Re}\alpha < 1$ por

$$A^\alpha = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}A(\lambda + A)^{-1}d\lambda.$$

Já vimos que A^α é analítica para $\mathrm{Re}\alpha > 0$ e que $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ para α e β com parte real positiva. Segue que, para $0 < \xi < 1$

$$\begin{aligned}
\|A^\xi\| &\leq \tfrac{\sin \pi\xi}{\pi}\int_0^\infty \|\lambda^{\xi-1}A(\lambda+A)^{-1}\|d\lambda \\
&\leq \tfrac{\sin \pi\xi}{\pi}\left\{\int_0^{\|A\|}\lambda^{\xi-1}d\lambda + \|A\|\int_{\|A\|}^\infty \lambda^{\xi-2}d\lambda\right\} \\
&\leq \tfrac{\sin \pi\xi}{\pi}\left\{\tfrac{\|A\|^\xi}{\xi} + \tfrac{\|A\|^\xi}{1-\xi}\right\} \\
&= \tfrac{\sin \pi\xi}{\pi}\tfrac{\|A\|^\xi}{\xi(1-\xi)} \leq \tfrac{4}{\pi}\|A\|^\xi
\end{aligned}$$

onde usamos que $\|A(\lambda + A)^{-1}\| \leq \min(1, \lambda^{-1}\|A\|)$. Assuma por um instante que $\mathrm{Re}A \geq \delta > 0$ de forma que A^α está definido para todo α complexo e mostremos que

$$\|A^{it}\| \leq \mathbf{e}^{\pi\frac{|\eta|}{2}}. \tag{A.7}$$

Assim segue (A.6) notando que $A^\alpha = A^{\xi+i\eta} = A^{[\xi]}A^{\xi'}A^{i\eta}$.

O caso geral segue substituindo A por $A + \epsilon$ e fazendo $\epsilon \to 0$.

Para mostrar (A.7), tomando $\mathcal{H}_\alpha = \frac{A^\alpha + A^{*\alpha}}{2}$ d $\mathcal{K}_\alpha = \frac{A^\alpha - A^{*\alpha}}{2i}$ (veja que, como A^* é maximal acretivo e fechado, então $A^{\alpha *}$ também é), temos que que $A^\alpha = \mathcal{H}_\alpha + i\mathcal{K}_\alpha$ e $A^{*\alpha} = \mathcal{H}_\alpha - i\mathcal{K}_\alpha$, $\|\mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-1}\| \leq |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|$. Portanto

$$\begin{aligned}
\|A^{*\alpha}A^{-\alpha}\| &= \frac{\|\mathcal{H}_\alpha - i\mathcal{K}_\alpha\|}{\mathcal{H}_\alpha - i\mathcal{K}_\alpha} \\
&= \frac{\|\mathcal{H}_\alpha\|\|i - \mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-1}\|}{\|\mathcal{H}_\alpha\|\|1 - (-i\mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-1})\|} \\
&\leq \frac{1 + \left|\frac{\tan \pi\alpha}{2}\right|}{\|1 - (-i\mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-1})\|} \\
&\leq \frac{1 + \left|\frac{\tan \pi\alpha}{2}\right|}{|1 - \|\mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-\infty}\|} \\
&= \frac{1 + |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|}{1 - \|\mathcal{K}_\alpha\mathcal{H}_\alpha^{-1}\|} \\
&\leq \frac{1 + |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|}{1 - |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|},
\end{aligned}$$

que para $\alpha = i\eta$ nos dá

$$\|A^{i\eta}\|^2 \leq \|A^{*-i\eta}A^{i\eta}\| \leq \frac{1 + \tan\frac{\pi\alpha}{2}}{1 - |\tan\frac{\pi\alpha}{2}|} \leq \mathbf{e}^{\pi|\eta|}, \tag{A.8}$$

provando (A.7). Aqui usamos que

$$\langle A^{*-i\eta}A^{i\eta}u, u\rangle = \langle A^{i\eta}u, A^{*-i\eta*}u\rangle = \|A^{i\eta}u\|^2$$

para concluir a primeira igualdade em (A.8) e

$$\tan\pi\frac{i\eta}{2} = \frac{\mathbf{e}^{\pi\frac{-\eta}{2}} - \mathbf{e}^{\pi\frac{+\eta}{2}}}{\mathbf{e}^{\pi\frac{-\eta}{2}} + \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}}}i,$$

$$\left|\tan\pi\frac{i\eta}{2}\right| = \left|\frac{\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}} - \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}}}{\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}} + \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}}}\right| = \frac{|2\mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}} - \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}} - \mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}}|}{\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}} + \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}}} = \frac{2\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}}}{\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}} + \mathbf{e}^{+\pi\frac{\eta}{2}}} - 1,$$

$$-\left|\tan\pi\frac{i\eta}{2}\right| = -\left|\frac{\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}} - \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}}}{\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}} + \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}}}\right| = -\frac{|-2\mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}} + \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}} + \mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}}|}{\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}} + \mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}}} = \frac{2\mathbf{e}^{\pi\frac{\eta}{2}}}{\mathbf{e}^{-\pi\frac{\eta}{2}} + \mathbf{e}^{+\pi\frac{\eta}{2}}} - 1,$$

concluímos que

$$\frac{1 + |\tan\pi\frac{i\eta}{2}|}{1 - |\tan\pi\frac{i\eta}{2}|} = \mathbf{e}^{\pi|\eta|}.$$

Mostremos que $\alpha \to A^\alpha$ é contínuo para $u \in H$, $\alpha \in \{\xi + i\eta \in C : 0 < \xi \leq 1, |\eta| \leq R\} = D$. Como A^α é limitado para $\alpha \in D$ por (A.6) é suficiente mostra isto para um denso de H. Se A não tem autovalor nulo a imagem de A é densa como mostra o lema anterior, logo é suficiente mostrar que isto vale para $u = Av$. Então $A^\alpha u = A^{1+\alpha}v$ e isto é obviamente uniformemente contínuo em D. $\square$

Apêndice A

Espaços de Interpolação

No capítulo acima, vimos como estender as potências fracionárias para $\mathbb{C}$ no sentido de Kato. Neste capítulo, usaremos os argumentos de Triebel de como podemos estender as potências fracionárias para $\mathbb{C}$ para usarmos os argumentos de interpolação, em que podem ser vistos em [10].

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear setorial em X espaço de Banach, $\alpha \in (0, 1)$. Vimos que, se A é setorial, então podemos considerar as suas potências fracionárias, X^α, para todo α. Em alguns momentos, é interessante descrever esses conjuntos em função do domínio de A, $D(A)$. Nosso objetivo é descrever os espaços X^α com argumentos de interpolação. Para isso, vamos reescrever a fórmula (2.15) em termos do operador resolvente. Seja $v \in D(A)$, então:

$$\begin{aligned} A^\alpha v = A^{-(1-\alpha)} A^{1-\alpha} A^\alpha v &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha} \mathbf{e}^{-At} A^{1-\alpha} A^\alpha v dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha} \mathbf{e}^{-At} A v dt \end{aligned}$$

Como A é um operador setorial com $Re\sigma(A) > 0$ então $-A$ gera um semigrupo analítico e, lembrando que resolvente de $-A$ é escrito como

$$(sI + A)^{-1} w = \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{e}^{-At} w dt, \; w \in X, s \geq 0 \tag{A.1}$$

Usando (A.1) e a igualdade

$$t^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-ts} ds,$$

temos, com $v \in D(A^\alpha)$

$$\begin{aligned} A^\alpha v &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-ts} ds \right) \mathbf{e}^{-At} A v dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-ts} \mathbf{e}^{-At} A v dt \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} (sI + A)^{-1} A v ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} A (sI + A)^{-1} v ds. \end{aligned}$$

A conta acima coincide com a definição de potência fracionária A^α enunciada em ([10], Remark 1.15.1/2), para $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1)$. Segundo [10], podemos estender o operador A para $\alpha \in \mathbb{C}$, e nisso, obtemos a descrição de X^α como espaços de interpolação em $\mathbb{C}$. Aqui, vamos assumir que as potências imaginárias A^{it} de A, com $t \in \mathbb{R}$ são uniformemente limitadas. Antes de mais nada, vamos introduzir os espaços de interpolação, isto é, dados dois espaços de Banach X e Y, se ambos imersos continuamente em um espaço métrico, dizemos que $\{X,Y\}$ é um *par de interpolação*. Assim, denotamos o espaço de interpolação complexo por $[X,Y]$, que são os espaços intermediários entre X e Y.

Conseguimos então enunciar um importante resultado de interpolação, que pode ser visto em [[10], Teorema 1.15.3]:

Proposição A.0.1. *Vale a fórmula de interpolação:*

$$[X^\alpha, X^\beta]_\theta = X^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta},$$

com $\alpha,\beta \geq 0$, $\theta \in (0,1)$ proveniente de A um operador setorial em um espaço de Banach X tal que $Re\sigma(A) > 0$ e $\|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$ para todo $t \in [-\epsilon,\epsilon]$.

Se $X = X^0$ e $D(A) = X^1$, tomando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ na proposição acima, temos

Corolário A.0.1. *Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X com $Re\sigma(A) > 0$ e $\|A^{it}\| \leq C$ para todo $t \in [-\epsilon,\epsilon]$, então X^θ, $\theta \in (0,1)$, são espaços intermediários entre X e $D(A)$, isto é,*

$$X^\theta = D(A^\theta) = [X, D(A)]_\theta.$$

Além disso, um importante resultado, que também é citado em [10], diz que o dual do interpolado é o interpolado dos duais:

Proposição A.0.2. *Seja X_0, X_1 um par de interpolação de espaços de Banach e assuma $X_0 \cap X_1$ denso em X_0 e X_1. Se X_0, X_1 são reflexivos, então*

$$([X_0, X_1]_\theta)' = (X_0', X_1')_\theta, 0 < \theta < 1.$$

Para alguns casos, como o do operador 4.2, precisamos interpolar a partir do $D(A)$, quando este está embutido com uma condição diferencial. Ademais, [[10], Teorema 2.4.2] afirma que conseguimos interpolar os espaços (1.7):

Teorema A.0.1. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ tal que $\partial\Omega$ de classe C^∞. Se $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ com $s_0 \neq s_1$. Se $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, com $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, temos*

$$[H^{s_0}_{p_0}, H^{s_1}_{p_1}]_{\theta,p} = H^s_p(\Omega)$$

Observação A.0.1. *No nosso caso, tomaremos $p_0 = p_1 = 2$ e s_0, s_1 inteiros em $[-1,2]$. Isto é, conseguimos interpolar os espaços de Sobolev.*

Diante essas considerações, assumindo que as potências imaginárias do operador linear e setorial $A : D(A) \subset H \to H$, com H espaço de Hilbert, são limitadas, podemos enunciar os seguintes resultados, que podem ser vistos em [[10], seção 4.3.1] e [[10], seção 1.9.1], respectivamente:

Teorema A.0.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto de classe C^∞, então*

$$[L^2(\Omega), H^2(\Omega)]_\alpha = H^{2\alpha}_2(\Omega), \alpha \in (0,1)$$

.

Proposição A.0.3. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto de classe C^∞ e $\{B_j\}$ é um sistema normal, temos:*

$$[L^2(\Omega), H^{2m}_{\{B_j\}}(\Omega)]_\alpha \subset [L^2(\Omega), H^{2m}(\Omega)]_\alpha, \alpha \in (0,1).$$

Os resultados acima são ingredientes essenciais para concluirmos o seguinte resultado, em que pode ser visto na demonstração do Teorema de Escalas em [[10], Seção 4.9.2]. Adaptamos o resultado para o caso em que o espaço é de Hilbert.

Proposição A.0.4. *Seja Ω for um domínio C^∞ e A um operador elíptico em um espaço de Hilbert. Então, para $\theta < \frac{3}{4}$, tem-se, com $\lambda > 0$,*

$$D((A + \lambda I)^\theta) = H_2^{2\theta}(\Omega)$$

.

Referências Bibliográficas

[1] Fuensanta Andreu-Vaillo, José M. Mazón, Julio D. Rossi e J Julián Toledo-Melero. *Nonlocal diffusion problems* Number 165. American Mathematical Soc. xii, xiv, 53

[2] Silvia Satre.*Nonlocal Diffusion Problem.* Tesis, Universidade Computense de Madri, 2014. xii, xiv

[3] Bruna Santos, Sergio Oliva, Julio Rossi.*A local/nonlocal diffusion model* Applicable Analysis Journal;2021;1-33. xii, xiv, 53

[4] Alexandre Carvalho; Sergio Oliva; Antonio Pereira; Aníbal Bernal Aníbal.*Attractors For Parabolic Problems With Nonlinear Boundary Conditions.* Journal Of Mathematical Analysis and Applications. 1997; 409-461. xii, xiv, 39, 53

[5] Haim Brezis.*Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011. 3, 8, 15

[6] Lawrence Evans. *Partial Differential Equation.* American Mathematics Society, 1998. 1

[7] Marcelo Cavalcanti, Valéria D. Cavalcanti. *Introdução à Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev.* EDUEM, Maringá, 2009. 1, 8, 10, 12

[8] Dan Henry. *Geometry Theory of Semilinear Parabolic Equations* Springer-Verlag Berlin Heindelberg, 1981. xi, xii, 1, 10, 17, 22, 25, 26, 39

[9] Dan Henry. *Semigroups. Course Notes.* IME/USP. São Paulo, Brazil, 1981. xii, 10, 47

[10] Hans Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Diferential Operators.* North-Holland, Amsterdan, 1978. 13, 39, 43, 57, 63, 64

[11] A. Pazy.*Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1963. xii, 17, 22, 47, 50, 57

[12] J. Cholewa, T. Dlotko. *Global Attractors in Abstract Parabolics Problems.* Cambridige University Press, 2000. 20

[13] Alexandre Nolasco. *Equações Parabolicas Semilineares. Notas de Aula.* ICMC/USP. São Carlos, 2021. 30, 57, 58

[14] Javier Duoandikoetxea. *Fourier Analysis.* American Mathematics Society, 1995. 1

[15] Lars Hôrmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983. 1, 5, 6

[16] John Conway. *Function of One Complex Variable I.* Springer-Verlag. New York, 1978.

[17] Tosio Kato. *Note on Fractional Powers of Linear Operators.* Proc. Japan Acad., **36**. 1960, 94-96 57, 58

[18] Tosio Kato. *Fractional Power of Linear Operators.* J. Math Soc. Japan, **13**. 1961, 246-574. 57

[19] Tosio Kato. *Fractional Power of Linear Operators, II.* Proc. Japan Acad., **14**. 1962, 242-248. 57