Alguns resultados sobre otimização ergódica em espaços não compactos

Tatiane Cardoso Batista

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Fabio Armando Tal

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, julho de 2009

Alguns resultados sobre otimização ergódica em espaços não compactos

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Tatiane Cardoso Batista
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Fabio Armando Tal (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo - IME-USP.
- Prof. Dr. Eduardo Garibaldi - UNICAMP.

Dedicatória

Aos meus pais,

Mauricio e Sinézia.

Agradecimentos

Agradeço...

A Deus, sempre presente em minha vida.

Aos meus pais e meu irmão Rodolfo, por todo amor que recebi. Obrigada por acreditarem em mim e fazerem com que isso acontecesse. Amo vocês!

À toda minha família. Em especial, meus avós Benedito e Elisa, pelo carinho que recebi durante esse tempo.

Ao meu namorado Diego, que participou dessa caminhada ao meu lado.

Ao professor Dr. Fabio Tal, pelo excelente trabalho de orientação e por sua dedicação, não só durante a elaboração dessa dissertação, mas durante todo o mestrado.

Ao meu amigo Juliano, pela ajuda fundamental nesse trabalho... e pela paciência!

À minha amiga Débora, por me apresentar essa área e pelos agradáveis finais de semana estudando...

Aos meus amigos, Pricila, Gustavo, Rose, Gra, Humberto e Bráulio, tanto pelos momentos de estudos, quanto pela importante amizade aqui iniciada.

Aos companheiros da sala 154-B e aos amigos estrangeiros, sempre tão atenciosos.

Aos funcionários e professores do IME, pelo ambiente acolhedor proporcionado.

À Universidade de São Paulo, pela oportunidade de estudo e por toda a infraestrutura oferecida.

Aos meus amigos UNESPIANOS, que almejaram isso junto comigo.

Ao pessoal da república, e ao meu amigo Renan, companheiros de todas as horas!

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que contribuíram, mesmo que indiretamente, na realização desse trabalho. Muito obrigada!

Resumo

Sejam X um espaço topológico não necessariamente compacto e $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, daremos condições sobre f que garantam a existência de medidas maximizantes caracterizadas em termos de seu suporte.

Palavras-chave: medida maximizante, forma normal, compacidade essencial.

Abstract

Let X be a topological space not necessarily compact, and $T : X \to X$ a continuous map. If $f : X \to \mathbb{R}$ is a continuous function, we seek conditions on f in order to guarantee existence of maximizing measures that are characterized in terms of its support.

Keywords: maximizing measure, normal form, essential compactness.

SUMÁRIO

Introdução

A teoria ergódica diz respeito a iteração de transformações T que preservam medida em espaços $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e, em particular, se o espaço é de probabilidade e $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, estuda as médias temporais:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)).$$

Um dos resultados fundamentais dessa teoria é o teorema ergódico de Birkhoff, que relaciona a média temporal com a média espacial:

$$\int_X f \; d\mu, \;\; \mu \in \mathcal{M}_T,$$

onde $\mathcal{M}_T$ é o conjunto das medidas de probabilidade T-invariantes.

O objeto de interesse da otimização ergódica são as medidas invariantes que maximizam a média espacial, chamadas medidas maximizantes.

Considere $T : X \to X$ contínua e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel. Em nosso estudo, X é um espaço topológico não necessariamente compacto e, por isso, são colocadas condições sobre a função f que garantam a existência de medida maximizante.

O capítulo 1 trata dos conceitos básicos da teoria ergódica, estudando sistemas dinâmicos munidos de medidas invariantes. Em geral, $\mathcal{M}_T$ pode ser vazio, mas se X é um espaço metrizável, compacto e não vazio, então $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$.

O capítulo 2 introduz noções de otimização ergódica e apresenta alguns resultados considerando a compacidade do espaço X. Nesse caso, o conjunto das medidas maximizantes para f, denotado por $\mathcal{M}_{max}(f)$, é não vazio.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo da otimização ergódica em espaços não necessariamente compactos. Verificamos que é suficiente f ter uma forma normal para que exista medida maximizante, e que tais medidas são caracterizadas em termos de seu suporte. No caso em que X é compacto e metrizável, basta que f tenha uma forma do ponto fixo para garantir a existência de uma forma normal, mas no caso mais geral, onde X é um espaço polonês, é necessário a compacidade essencial como condição adicional. Esses são resultados de Jenkinson, Mauldin e Urbański, provados em [6].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo lembraremos os conceitos da Teoria Ergódica necessários para o desenvolvimento da Otimização Ergódica. Algumas das demonstrações dos resultados não serão feitas, mas podem ser encontradas em [16] e [13]. As referências para as definições da Teoria da Medida, não apresentadas aqui, são [14] e [1].

1.1 Medidas invariantes

Denotaremos por $(X, \mathcal{B}, \mu)$ o espaço de medida onde, X é um conjunto qualquer, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ é a σ-álgebra considerada e μ é a medida em $(X, \mathcal{B})$. Além disso, se $\mu(X) = 1$, o espaço é chamado de probabilidade.

Definição 1.1.1. *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $T : X \to X$ uma transformação mensurável*[1]*. Dizemos que T preserva medida ou μ é T-invariante, se para todo $A \in \mathcal{B}$,*

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

[1] T é mensurável se para todo $A \in \mathcal{B}$ tem-se que $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$.

No nosso caso, estamos interessados quando T é um automorfismo[2] num espaço $(X, \mathcal{B}, \mu)$ onde, em geral, X é um espaço topológico, $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel e $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é de probabilidade.

Uma outra maneira de se verificar a invariância das medidas é dada a seguir:

Lema 1.1.2. *Seja X um espaço métrico, $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel e μ medida de probabilidade. Considere $T : X \to X$ uma transformação contínua. Se $\int_X f \circ T \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ para toda função continua $f : X \to \mathbb{R}$ então μ é medida T-invariante.*

Para o próximo lema, lembremos do seguinte resultado de Teoria da Medida encontrado em [14]:

Teorema 1.1.3. ***(convergência monótona)*** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Considere $f_n : X \to [0, +\infty]$ sequência crescente de funções mensuráveis e não negativas convergindo para uma função $f : X \to [0, +\infty]$. Então,*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Lema 1.1.4. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e μ é uma medida T-invariante, então $\int_X f \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu$, no sentido de que se uma das integrais existe então a outra também existe, e neste caso, elas são iguais.*

Demonstração.

Primeiramente, para $f = \chi_A$, a função característica de A com $A \subset X$ qualquer:

$$\int_X \chi_A \, d\mu - \int_X \chi_A \circ T \, d\mu = \int_A 1 \, d\mu - \int_X \chi_{T^{-1}(A)} \, d\mu = \mu(A) - \mu(T^{-1}(A)) = 0.$$

Se f é função simples o resultado é análogo, pois $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, onde $A_i \subset X$ são distintos e $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

---

[2] $T : X \to X$ é um isomorfismo, ou seja, uma função bijetora.

Se f é uma função mensurável não negativa, existe uma sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ de funções simples, com $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots \leq f$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$. Usando (1.1.3), analogamente,

$$\begin{aligned} \int_X f\ d\mu - \int_X f \circ T\ d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\ d\mu - \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \circ T\ d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n\ d\mu - \int_X f_n \circ T\ d\mu \right) = 0. \end{aligned}$$

Se f é uma função mensurável qualquer, basta considerar $f = f^+ - f^-$.

□

Vejamos alguns exemplos de medidas invariantes:

Exemplo 1.1.5. *Suponha que X é um espaço topológico e p um ponto tal que $T^n(p) = p$. Seja δ_x a medida de Dirac associada a um ponto x definida por:* $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in A \\ 0, \text{ se } x \notin A \end{cases}$. *Então a medida*

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(p)}$$

é invariante por T. Lembramos que,

$$\int_X f\ d\delta_x = f(x).$$

Resolução 1.1.6. *Seja $A \subset X$ um conjunto mensurável qualquer. Mostremos que $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(p)}(T^{-1}(A)) &= \frac{1}{n} \# \left\{ 0 \leq j \leq n-1,\ T^j(p) \in T^{-1}(A) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \# \left\{ 0 \leq j \leq n-1,\ T^{j+1}(p) \in A \right\} \\ &= \frac{1}{n} \# \left\{ 1 \leq j \leq n,\ T^j(p) \in A \right\}. \end{aligned}$$

Mas, como $T^n(p) = p$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\#\left\{1 \le j \le n,\ T^j(p) \in A\right\} &= \frac{1}{n}\#\left\{0 \le j \le n-1,\ T^j(p) \in A\right\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(p)}(A). \end{aligned}$$

□

No exemplo seguinte, usamos o teorema descrito em [13]:

Teorema 1.1.7. ***(extensão de Hahn-Kolmogorov)*** *Seja X um conjunto, $\mathcal{B}_0$ uma álgebra de subconjuntos de X e $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0,1]$ uma medida. Então, se $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{B}_0$, existe uma única medida $\mu : \mathcal{B} \to [0,1]$ tal que $\mu\big|_{\mathcal{B}_0} = \mu_0$.*

Exemplo 1.1.8. *Seja $X = \{1, \dots, d\}^{\mathbb{N}}$, isto é, o conjunto de todas as sequências $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros em $\{1, \dots, d\}$.*

Se $w = (w_1, \dots, w_k)$, com $w_i \in \{1, \dots, d\}$ para $1 \le i \le k$, definimos em X o cilindro de comprimento k (k-cilindro) pelo conjunto:

$$[w] := \{x \in X : x_i = w_i \text{ para } 1 \le i \le k\}.$$

A σ-álgebra $\mathcal{B}$ considerada em X é a extensão da álgebra gerada pela semi-álgebra dos cilindros de X.

Uma medida de probabilidade em $(X, \mathcal{B})$ é definida a partir de d números não negativos $p_1, \dots, p_d$, com $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$. A medida de um k-cilindro em X é dada por:

$$\mu([w]) = p_{w_1} p_{w_2} \dots p_{w_k}.$$

Consideramos neste espaço a aplicação shift $T : X \to X$ definida por $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Essa função é contínua com respeito a métrica $d(x,y) = 2^{-min\{n : x_n \neq y_n\}}$ e preserva a medida μ.

Resolução 1.1.9. *Mostremos que T é contínua.*

Dado $\epsilon > 0$, escolha n tal que $2^{-(n+1)} < \epsilon$.

Tome $\delta = \dfrac{1}{2^{n+2}}$. Se $d(x,y) < \delta$, então $x_j = y_j$, $j = 1, \ldots, n+1$. Assim,

$$d\left(T(x), T(y)\right) = d\left((x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots), (y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots)\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \epsilon.$$

Para mostrar que T preserva medida, basta olhar para os cilindros:

$$\begin{aligned} \mu\left(T^{-1}([w])\right) &= \mu\left(\bigcup_{x_1=1}^{d} (x_1, w_1, \ldots, w_k, x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} p_i p_{w_1} \ldots p_{w_k} = 1 \cdot (p_{w_1} \ldots p_{w_k}) = \mu([w]). \end{aligned}$$

□

O próximo teorema enunciado merece destaque por suas várias aplicações.

Teorema 1.1.10. ***(recorrência de Poincaré)*** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de probabilidade e T um automorfismo que preserva μ nesse espaço. Considere $E \in \mathcal{B}$ e $\hat{E} \in \mathcal{B}$ subconjunto de E tal que seus pontos retornam infinitas vezes a E, isto é, $\hat{E} = E \cap \left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{i \geq n} T^{-i}(E)\right)$. Então $\mu(E) = \mu(\hat{E})$.*

Demonstração. Considere $E_n = \bigcup_{i\geq n} T^{-i}(E)$, para $n \geq 0$.

Observe que $E_0 \supset E_1 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$

Além disso, $T^{-1}(E_i) = E_{i+1}$, ou seja,

$$\mu(E_i) = \mu\left(T^{-1}(E_i)\right) = \mu(E_{i+1}).$$

Segue que

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} E_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_N) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_0) = \mu(E_0).$$

Como $\bigcap_{n\geq 0} E_n \subset E_0$ e vale a igualdade acima, então existe $B \in \mathcal{B}$, com $\mu(B) = 0$, tal que:

$$E_0 = \bigcap_{n\geq 0} E_n \cup B$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n\geq 0} E_n = E_0 \cap B^C,$$

com $\mu(B^C) = 1$. Portanto,

$$\mu(\hat{E}) = \mu\left(E \cap \bigcap_{n\geq 0} E_n\right) = \mu\left(E \cap E_0 \cap B^C\right) \overset{E\subseteq E_0}{=} \mu(E \cap B^C) = \mu(E).$$

□

A versão métrica desse resultado diz que, se X é um espaço métrico separável e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel, então μ-quase todo ponto é recorrente, ou seja,

$$\mu\left(\{p \in X : p \notin \omega(p)\}\right) = 0,$$

onde $\omega(p)$ é chamado de ω-limite[3] de p.

1.2 O conjunto das medidas invariantes

Considere X um espaço métrico compacto e $\mathcal{M}(X)$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre os borelianos de X. Para uma transformação $T : X \to X$, definimos $\mathcal{M}_T(X) \subset \mathcal{M}(X)$ o conjunto das medidas invariantes por T.

Para estudar $\mathcal{M}(X)$, será útil introduzir uma métrica nesse conjunto. Para isso, lembremos dos seguintes teoremas encontrados respectivamente em [14] e [10]:

Teorema 1.2.1. ***(representação de Riesz)*** *Se X é espaço métrico compacto e se $\xi : \mathcal{C}^0(X) \to \mathbb{R}$ é funcional linear, contínuo, positivo, com $\xi(1) = 1$, então existe uma única probabilidade $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que*

$$\int_X f \; d\mu = \xi(f),$$

para toda $f \in \mathcal{C}^0(X)$.

[3] Lembremos que $\omega(p) := \left\{x \in X : \exists \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \text{ tal que } n_k \to \infty \text{ e } \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = p\right\}$

Teorema 1.2.2. *Seja E um espaço normado separável e seja E^* o espaço dual*[4] *a E. Considere S a bola unitária fechada de E^*.*

A topologia induzida em S pela topologia fraca- pode ser definida mediante a métrica*

$$d(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left| (\xi_1 - \xi_2)(z_n) \right|,$$

onde $\{z_n\}$ é um conjunto enumerável e denso na bola unitária de E.

Assim, consideremos $\mathcal{C}^0(X)$ o espaço vetorial das funções contínuas provido da norma do supremo $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Como X é métrico compacto, existe um conjunto enumerável $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ denso na bola unitária

$$B = \{f \in \mathcal{C}^0(X) : \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Consideremos também o espaço dual de $\mathcal{C}^0(X)$. Dado $\xi \in \mathcal{C}^0(X)^*$ nas condições de 1.2.1, existe uma única medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que

$$\int_X f \, d\mu = \xi(f),$$

para toda $f \in \mathcal{C}^0(X)$. Ou seja, $\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{C}^0(X)^*$.

Tomando o conjunto $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, teremos que $\|\xi\|_\infty = \sup\limits_{\|g_i\|=1} |\xi(g_i)| \leq 1$, e utilizando 1.2.2, definimos em $\mathcal{M}(X)$ a seguinte métrica:

$$d(\mu, \upsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left| \int_X g_i \, d\mu - \int_X g_i \, d\upsilon \right|.$$

Para mostrar a convergência em $\mathcal{M}(X)$ podemos usar o seguinte lema:

Lema 1.2.3. *Seja X espaço métrico compacto e $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ um conjunto enumerável denso na bola unitária B. Se $\{\mu_n\}_n \subset \mathcal{M}(X)$ é sequência de probabilidades, então são equivalentes:*

[4] O espaço dual E^* é constituído de todos os funcionais lineares contínuos definidos num espaço normado E.

1. $\lim_{n\to\infty} d(\mu_n, \mu) = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \int_X g_i \; d\mu_n = \int_X g_i \; d\mu$, *para todo* $i \geq 1$.

3. $\lim_{n\to\infty} \int_X g \; d\mu_n = \int_X g \; d\mu$, *para toda* $g \in \mathcal{C}^0(X)$.

Outro resultado muito importante que pode ser visto em [10] é:

Teorema 1.2.4. ***(Banach-Alaoglu)*** *Seja* E *um espaço normado separável e seja* E^* *o espaço dual a* E. *Toda bola fechada de* E^* *é compacta na topologia fraca-*.*

A consequência direta desse teorema é,

Teorema 1.2.5. $\mathcal{M}(X)$ *é um espaço métrico compacto (com a métrica definida anteriormente).*

Demonstração. Basta mostrar que $\mathcal{M}(X)$ é fechado em $\mathcal{C}^0(X)^*$.

Considere $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ com $\mu_n \to \mu$.

Por 1.2.3, $\lim_{n\to\infty} \int_X g \; d\mu_n = \int_X g \; d\mu$, para toda $g \in \mathcal{C}^0(X)$. Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X).$$

Logo, μ é uma medida de probabilidade, ou seja, $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

$\square$

Sobre o conjunto das medidas invariantes, podemos concluir:

Teorema 1.2.6. ***(Krylov-Bogolioubov)*** $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$.

Demonstração.

Consideremos a sequência $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(X)$ dada por:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x}.$$

Por causa da compacidade de $\mathcal{M}(X)$, existe subsequência $\{\mu_{n_m}\}$ que converge na topologia fraca-* a uma medida de probabilidade μ, isto é,

$$\int_X g \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X g \, d\mu_{n_m}$$

para qualquer função contínua g.

Para verificar que μ é uma medida invariante, é suficiente mostrar que $\displaystyle\int_X g \circ T \, d\mu = \int_X g \, d\mu$ para toda função contínua g (1.1.2). Temos que T é contínua então $g \circ T$ também é, e então,

$$\begin{aligned}
\int_X g \circ T \, d\mu &= \lim_{m\to\infty} \int_X g \circ T \, d\mu_{n_m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} g(T^{k+1}(x)) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} g(T^k(x)) + \frac{1}{n_m} \left[g(T^{n_m}(x)) - g(x) \right] \right).
\end{aligned}$$

Como g é limitada em X,

$$\int_X g \circ T \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} g(T^k(x)) = \lim_{m\to\infty} \int_X g \, d\mu_{n_m} = \int_X g \, d\mu.$$

Logo, $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$.

$\square$

Lema 1.2.7. *$\mathcal{M}_T(X)$ é convexo e compacto.*

Demonstração.

Mostremos que $\mathcal{M}_T(X)$ é convexo, ou seja, se para quaisquer $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$ e para qualquer $t \in [0,1]$,

$$\mu_t = (1-t)\mu_1 + t\mu_2 \ \in \mathcal{M}_T(X).$$

De fato,

$$\mu_t(A) = (1-t)\mu_1(A) + t\mu_2(A) = (1-t)\mu_1(T^{-1}A) + t\mu_2(T^{-1}A) = \mu_t(T^{-1}A),$$

para todo $A \subset X$ mensurável.

Mostremos que $\mathcal{M}_T(X)$ é fechado, ou seja, se $\mu_n \in \mathcal{M}_T(X)$ com $\mu_n \to \mu$, então $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$.

De fato, considerando f uma função contínua qualquer e usando 1.2.3,

$$\int_X f \circ T \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f \circ T \, d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int_X f \, d\mu_n = \int_X f \, d\mu$$

Logo, por 1.1.2, μ é uma medida invariante.

Além disso, temos que todo subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é compacto [14]. Como $\mathcal{M}(X)$ é compacto, então $\mathcal{M}_T(X) \subset \mathcal{M}(X)$ é compacto.

□

O teorema seguinte será utilizado posteriormente no trabalho.

Teorema 1.2.8. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, onde X é um espaço métrico compacto e $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel. Se $\mu_n \to \mu$ na topologia fraca-*, então, para todo $F \in \mathcal{B}$ fechado,*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F).$$

Demonstração. Defina os abertos:

$$U_k = \left\{ x \in X : d(x, F) < \frac{1}{k} \right\}$$

para todo $k \geq 1$.

Temos que toda medida finita é contínua [15], ou seja, é contínua por cima. Logo, medidas de probabilidades são contínuas por cima[5]:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(U_k) = \mu(F),$$

[5]Uma medida $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ é contínua por cima se para toda sequência $\{E_i\} \subset \mathcal{B}$, com $E_{i+1} \subset E_i$, tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E$, vale $\lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = \mu(E)$. Ela é contínua por baixo se para toda sequência $\{E_i\} \subset \mathcal{B}$, com $E_i \subset E_{i+1}$, tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$, vale $\lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = \mu(E)$.

onde $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$.

Tome $f_k \in \mathcal{C}^0(X)$ tal que $0 \leq f_k \leq 1$ em $U_k \backslash F$, $f_k = 1$ em F e $f_k = 0$ em $X \backslash U_k$. Então,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) &= \limsup_{n\to\infty} \int_X \chi_F \, d\mu_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_k \, d\mu_n \overset{1.2.3}{=} \int_X f_k \, d\mu \\ &= \int_{X\backslash U_k} f_k \, d\mu + \int_{U_k \backslash F} f_k \, d\mu + \int_F f_k \, d\mu \leq \mu(U_k).\end{aligned}$$

Em particular, quando $k \to \infty$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F).$$

□

1.3 Ergodicidade

Um resultado fundamental da teoria ergódica é o teorema que diz respeito a média temporal:

Teorema 1.3.1. ***(ergódico de Birkhoff)*** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \to X$ uma transformação que preserva medida. Então,*

1. *se $f \in \mathcal{L}^1(X)$, o limite*

$$\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

   existe para quase todo ponto $x \in X$.

2. *$\tilde{f}$ é uma função invariante, ou seja, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(T(x))$ quase todo ponto.*

3. $\displaystyle\int_X \tilde{f} \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\| \tilde{f} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right\|_1 = 0$

A seguir, veremos que a ergodicidade é condição suficiente e necessária para essa média temporal ser igual a média espacial em quase todo ponto. Mais precisamente, se T é ergódica e $f \in \mathcal{L}^1(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int_X f \, d\mu,$$

em μ-quase todo ponto $x \in X$.

Definição 1.3.2. *Considere T um automorfismo que preserva medida em $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Um conjunto $A \in \mathcal{B}$ é dito invariante se $T^{-1}(A) = A$.*

Definição 1.3.3. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Uma transformação T que preserva medida nesse espaço é chamada ergódica se todo conjunto invariante tem medida zero ou um.*

Lema 1.3.4. *Seja T uma transformação que preserva medida em um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. T é ergódica se, e somente se, qualquer função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ invariante μ-q.t.p. for constante μ-q.t.p.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que toda função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ invariante μ-q.t.p. é constante μ-q.t.p.

Considere $B \in \mathcal{B}$ um conjunto invariante e tome $f = \chi_B$. Vejamos que f é invariante:

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B = T^{-1}(B) \\ 0, & \text{se } x \notin B = T^{-1}(B) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) \in B \\ 0, & \text{se } T(x) \notin B \end{cases} \\ &= \chi_B(T(x)). \end{aligned}$$

Mas, para χ_B ser constante μ-q.t.p., $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$. Portanto, T é ergódica.

Suponha agora que existe $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável, tal que $f = f \circ T$ quase todo ponto, e f não é constante μ-q.t.p. Logo, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, se

$$E := \{x \in X : f(x) < M\},$$

então $0 < \mu(E) < 1$ e $0 < \mu(E^C) < 1$.

Observe que E é invariante, ou seja, $T(E) = E$. De fato, se $x \in E$ então $f(T(x)) = f(x) < M$, implicando que $T(x) \in E$. Analogamente, se $T(x) \in E$ então $x \in E$.

Mas, $\mu(E)$ é diferente de zero e de um. Portanto, μ não é ergódica.

□

O próximo lema mostra uma maneira alternativa de verificar a condição de ergodicidade.

Lema 1.3.5. *Seja T um automorfismo num espaço $(X, \mathcal{B}, \mu)$ que preserva medida. Então T é ergódica se, e somente se, para todo $A, B \in \mathcal{B}$, vale*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu\left(T^{-i}(A) \cap B\right) = \mu(A)\mu(B).$$

Vejamos alguns exemplos de ergodicidade:

Exemplo 1.3.6. *A medida definida em 1.1.5 é ergódica.*

Resolução 1.3.7. *Seja $N = \{p, T(p), T^2(p), \dots, T^{n-1}(p)\}$. Observemos que $\mu(N)$=1. Tomemos $A \subset X$ um conjunto mensurável invariante.*

Se $p \in A$ então N está contido em A, e nesse caso, $\mu(A) = 1$.

Se $p \notin A$ então A não intersecta N, e nesse caso, $\mu(A) = 0$.

Logo, todo conjunto invariante tem medida zero ou um, ou seja, T é ergódica.

O conjunto N é dito o suporte da medida μ, como veremos em breve.

□

Exemplo 1.3.8. *Uma rotação do círculo é ergódica com respeito a medida de Lebesgue se, e somente se, for irracional.*

O teorema seguinte auxiliará na caracterização das medidas de probabilidade ergódicas de T.

Teorema 1.3.9. *Seja X espaço métrico compacto e $T : X \to X$ contínua. Se μ é ergódica e $\upsilon \in \mathcal{M}_T(X)$ é absolutamente contínua*[6] *com respeito a μ então, $\upsilon = \mu$.*

Lema 1.3.10. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $T : X \to X$ contínua, onde X é um espaço métrico compacto. Então μ é ergódica se, e somente se, μ é ponto extremal de $\mathcal{M}_T(X)$.*[7]

Se $\mathcal{M}_T(X)$ consistir de um único elemento, T é dita unicamente ergódica.

Demonstração. Suponha que μ é ergódica e $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$, com $0 < t < 1$ e $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$. Então,

como μ_1 e μ_2 são absolutamente contínuas com respeito a μ, do teorema anterior segue que $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \mu$. Portanto, μ é ponto extremal de $\mathcal{M}_T(X)$.

Suponha agora que μ não é ergódica. Então existe $A \in \mathcal{B}$ um conjunto invariante com $0 < \mu(A) < 1$. Observemos que para todo $B \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A) \cdot \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} + \mu(A^C) \cdot \frac{\mu(B \cap A^C)}{\mu(A^C)} \\ \mu(B) &= \mu(A) \cdot \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} + (1 - \mu(A)) \cdot \frac{\mu(B \cap A^C)}{\mu(A^C)}. \end{aligned}$$

Assim, basta tomar $\mu_1(B) = \dfrac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}$ e $\mu_2(B) = \dfrac{\mu(B \cap A^C)}{\mu(A^C)}$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

[6] A medida υ é absolutamente contínua com respeito a μ se $\upsilon(A)=0$ sempre que $\mu(A) = 0$, para A mensurável.

[7] μ é ponto extremal de $\mathcal{M}_T(X)$ se, para quaisquer $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$ e $t \in [0, 1]$, a identidade $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ implicar que $t = 0$ ou $t = 1$.

Temos que $\mu_1 \in \mathcal{M}_T(X)$ pois, usando que $T^{-1}(A) = A$,

$$\mu_1(T^{-1}(B)) = \frac{\mu(T^{-1}(B) \cap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(T^{-1}(B \cap A))}{\mu(A)} = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \mu_1(B).$$

Analogamente $\mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$.

Portanto, μ não é ponto extremal de $\mathcal{M}_T(X)$.

□

Abaixo, definiremos o suporte de uma medida, conceito essencial no nosso trabalho.

Definição 1.3.11. *Sejam X espaço métrico separável e μ medida de probabilidade sobre os borelianos. O suporte de μ é dado por*

$$\operatorname{supp}(\mu) = \{x \in X : \forall \text{ aberto } U \text{ com } x \in U, \mu(U) > 0 \ \}.$$

Lema 1.3.12. *O suporte de μ é um conjunto fechado e $\mu\left(\operatorname{supp}(\mu)\right) = 1$.*

A fim de entender melhor o conjunto das medidas invariantes, considere X um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ uma transformação contínua. O teorema descrito abaixo diz que cada medida de $\mathcal{M}_T(X)$ pode ser escrita em termos dos pontos extremais de $\mathcal{M}_T(X)$, ou seja, das medidas ergódicas.

Teorema 1.3.13. ***(decomposição ergódica)*** *Sejam X um espaço compacto e $T : X \to X$ uma função contínua. Então, para cada $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$, existe ρ_μ uma medida definida sobre os borelianos do espaço métrico compacto $\mathcal{M}_T(X)$, com a propriedade que $\rho_\mu(E\mathcal{M}_T(X)) = 1$ e*

$$\mu = \int_{E\mathcal{M}_T(X)} m \ d\rho_\mu(m),$$

onde $E\mathcal{M}_T(X)$ são as medidas ergódicas em $\mathcal{M}_T(X)$.

A seguir, veremos um resultado extra, importante na otimização ergódica.

Definição 1.3.14. *Uma sequência $x_n, n \geq 1$, é chamada subaditiva se satisfaz:* $x_{n+m} \leq x_n + x_m$.

Lema 1.3.15. *Para toda sequência subaditiva $x_n, n \geq 1$, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ existe e é igual a $\inf\limits_n \frac{x_n}{n}$.*

Demonstração.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ fixado e $n > m$ com $n = km + p$, $0 \leq p \leq m-1$. Então,

$$
\begin{aligned}
x_n = x_{km+p} \leq x_{km} + x_p = x_{(m+\ldots+m)} + x_p \leq k \cdot x_m + x_p \\
\Rightarrow \quad \frac{x_n}{n} \leq \frac{k \cdot x_m}{n} + \frac{x_p}{n} = \frac{k \cdot x_m}{km+p} + \frac{x_p}{n} = \frac{x_m}{m + \frac{p}{k}} + \frac{x_p}{n}.
\end{aligned}
$$

Em particular, quando $n \to \infty$, $k \to \infty$ e

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_m}{m} \\
\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \leq \inf_{m \in N} \frac{x_m}{m} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}.
\end{aligned}
$$

Portanto, existe o limite de $\frac{x_n}{n}$ e ele é igual a $\inf\limits_n \frac{x_n}{n}$.

$\square$

CAPÍTULO 2

Otimização ergódica

Esse capítulo tratará da teoria básica utilizada no foco principal do nosso trabalho, o capítulo 3. As referências para o estudo dos resultados aqui colocados são encontradas em [6] e [8].

2.1 Motivação

Suponha uma aplicação $T : X \to X$ num conjunto X qualquer, e uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Seja $S_n f = \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$. Nosso interesse será determinar o valor máximo da média temporal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x). \tag{2.1}$$

Em outras palavras, estamos interessados no supremo do limite 2.1 sobre todas as escolhas da posição inicial x. Mais do que isso, estamos particularmente interessados em verificar se para algum x, o supremo é atingido.

Os pontos x cujo os quais o limite em 2.1 atingem o supremo, bem como suas órbitas $\{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$, serão chamados de maximizantes.

Em geral, o limite acima não precisa existir. Para contornar esse problema podemos usar dois caminhos. O primeiro é definirmos

$$Reg(X, T, f) := \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \ \text{ existe}^1 \right\},$$

e então calcularmos o supremo sobre esses pontos.

O segundo caminho é usar o lim sup no lugar do limite e, então, calcular o supremo sobre todos os pontos $x \in X$.

Exemplo 2.1.1. *Tome um subconjunto $A \subset X$, e seja $f = \chi_A$ a função característica associada. Nesse caso, a média temporal é dada por*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ \# \left\{ 1 \leq i \leq n : T^i(x) \in A \right\}.$$

Se o limite existe, ele é a frequência de visitação, ou seja, a frequência com que a órbita de x "fica" no conjunto A.

Então,

$$\sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \# \left\{ 1 \leq i \leq n : T^i(x) \in A \right\} \quad \text{e}$$

$$\sup_{x\in X} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \# \left\{ 1 \leq i \leq n : T^i(x) \in A \right\}$$

podem ser interpretados como a máxima frequência de visitação para o conjunto A. Note que os valores não precisam coincidir.

Será conveniente relacionarmos a média temporal com a média espacial. Para isso, assumiremos que X é um espaço topológico, e que $T : X \to X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ são contínuas. Considere também:

$$\mathcal{M}_f := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_T : \int_X f \ d\mu \ \text{ existe}^2 \right\}.$$

A partir dessas motivações, podemos definir,

[1] O limite existe se é diferente de $+\infty$ ou $-\infty$.

[2] Observemos que, para alguma medida μ, a integral $\int_X f \ d\mu \in [-\infty, \infty]$ existe se $\int_X f^+ d\mu$ e $\int_X f^- d\mu$ são não ambas infinito.

Definição 2.1.2. *Seja X um espaço topológico, e suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua. Então:*

$$\begin{aligned}
\alpha(f) &= \alpha(f,T) = \sup_{m \in \mathcal{M}_f} \int_X f \, dm \\
\beta(f) &= \beta(f,T) = \sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \\
\gamma(f) &= \gamma(f,T) = \sup_{x \in X} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \\
\delta(f) &= \delta(f,T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in X} S_n f(x).
\end{aligned}$$

Por convenção, o supremo do conjunto vazio será $-\infty$.

A seguir, faremos algumas observações que podem ser úteis nos estudos.

Observação 2.1.3. *Se f é mensurável e é limitada superiormente ou inferiormente, então $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_T$.*

Demonstração.

Por definição, $\mathcal{M}_f \subset \mathcal{M}_T$. Provemos que $\mathcal{M}_T \subset \mathcal{M}_f$:

Sejam $\mu \in \mathcal{M}_T$ e c o limite superior de f:

$$\begin{aligned}
\int_X f^+ d\mu \leq \int_X c \, d\mu = c \, \mu(X) = c < +\infty \quad &\Rightarrow \quad \int_X f \, d\mu \text{ existe} \\
&\Rightarrow \quad \mu \in \mathcal{M}_f.
\end{aligned}$$

Analogamente se mostra que $\mathcal{M}_T \subset \mathcal{M}_f$ quando f é limitada inferiormente. □

Observação 2.1.4. *Se X é compacto, então $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_T$ para toda função contínua f.*

Demonstração.

Como f é uma função contínua, f é limitada em X compacto, ou seja, f é limitada superiormente e inferiormente. Assim, segue o resultado da Observação anterior.

□

Observação 2.1.5. *Se $\mathcal{M}_f = \emptyset$, então $\alpha(f) = -\infty$. Em particular, se $\mathcal{M}_T = \emptyset$, então $\alpha(f) = -\infty$ para toda função contínua f.*

Observação 2.1.6. *Se $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$, e $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ para alguma $\mu \in \mathcal{M}_T$, então $\alpha(f) > -\infty$.*

Demonstração.

Como $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_X |f|\, d\mu &= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < \infty \\ &\Rightarrow \int_X f^+ d\mu < \infty \text{ e} \int_X f^- d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \sup_{m \in \mathcal{M}_f} \int_X f\ dm \geq \int_X f\ d\mu \\ &= \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu > -\infty. \end{aligned}$$

□

Observação 2.1.7. *Se f é mensurável e limitada superiormente, então $\alpha(f) < \infty$.*

Demonstração.

Seja c o limite superior de f. Logo,

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X c\ d\mu = c\ \mu(X) = c < +\infty$$

para $\mu \in \mathcal{M}_T$ qualquer.

Então,

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} \int_X f\ d\mu = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) \\ &\leq \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} \left(c - \int_X f^- d\mu \right) \leq c + \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} \left(- \int_X f^- d\mu \right) \leq c < +\infty. \end{aligned}$$

□

Observação 2.1.8. *Se f, g são contínuas e $f - g$ é limitada, então $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$.*

Demonstração.

Como $f - g$ é limitada, $\int_X f - g \, d\mu$ existe para $\mu \in \mathcal{M}_T$.

Provemos que $\mathcal{M}_f \subset \mathcal{M}_g$.

Se $\mu \in \mathcal{M}_f$, então

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d\mu \; existe \quad &\Rightarrow \quad \int_X f - g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \; existe \\
&\Rightarrow \quad \int_X -g \, d\mu \; existe \\
&\Rightarrow \quad \int_X g \, d\mu \; existe \\
&\Rightarrow \quad \mu \in \mathcal{M}_g.
\end{aligned}$$

$\mathcal{M}_g \subset \mathcal{M}_f$ é análogo.

$\square$

Observação 2.1.9. *Se $\delta(f) \in [-\infty, \infty)$, então $\sup_{x \in X} S_n f(x)$ é finito para todo n suficientemente grande, e é uma sequência subaditiva de reais. Então, de fato, o limite $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in X} S_n f(x) \in [-\infty, \infty)$ existe e é igual a $\inf_n \frac{1}{n} \sup_{x \in X} S_n f(x)$.*

Demonstração.

Inicialmente, lembremos que, para uma sequência x_n,

$$\limsup x_n = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup\{x_k : k \geq n\} \right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\delta(f) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} S_n f(x) < \infty \\
&= \inf_{n\geq 1} \left\{ \sup \left\{ \frac{1}{k} \sup_{x\in X} S_n f(x) : k \geq n \right\} \right\} < \infty \\
&\Rightarrow \quad \exists\, n_0 \;:\; \sup \left\{ \frac{1}{k} \sup_{x\in X} S_n f(x) : k \geq n_0 \right\} < \infty \\
&\Rightarrow \quad \forall k \geq n_0,\ \frac{1}{k} \sup_{x\in X} S_n f(x) < \infty \\
&\Rightarrow \quad \forall k \geq n_0,\ \sup_{x\in X} S_n f(x) < \infty.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
S_{n+m} f(x) = \sum_{i=0}^{n+m-1} f \circ T^i(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) + \sum_{i=n}^{n+m-1} f \circ T^i(x) \\
&= S_n f(x) + S_m f(T^n(x))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in X} S_{n+m} f(x) \;\leq\; \sup_{x\in X} S_n f(x) \;+\; \sup_{x\in X} S_m f(T^n(x)).$$

Como $T^n(X) \subset X$, então

$$\sup_{x\in X} S_m f(T^n(x)) \;\leq\; \sup_{x\in X} S_m f(x),$$

donde,

$$\sup_{x\in X} S_{n+m} f(x) \;\leq\; \sup_{x\in X} S_n f(x) + \sup_{x\in X} S_m f(x).$$

Logo, a sequência é subaditiva, e pelo lema 1.3.15:

o limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} S_n f(x) \in [-\infty, \infty)$ existe e é igual a $\displaystyle\inf_n \frac{1}{n} \sup_{x\in X} S_n f(x)$.

$\square$

2.2 Média ergódica máxima e medidas maximizantes

Em geral, $\alpha(f), \beta(f), \gamma(f), \delta(f)$ não coincidem, embora possam ser impostas condições sobre X e T para que sejam iguais e então definir a média ergódica máxima.

Se X é espaço métrico compacto não vazio, e $T : X \to X$ é contínua, então o conjunto $\mathcal{M}_T(X)$ é não vazio (1.2.6) e, quando equipado da topologia fraca-*, é compacto (1.2.7). Estamos interessados nos casos nos quais f é uma função característica de um subconjunto fechado ou é contínua.

Teorema 2.2.1. *Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua num espaço métrico compacto. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, ou uma função característica de um subconjunto fechado, então*

$$\alpha(f) = \beta(f) = \gamma(f) = \delta(f) \neq \pm\infty.$$

Demonstração.

Primeiramente verificaremos as desigualdades $\alpha(f) \leq \beta(f) \leq \gamma(f) \leq \delta(f)$.

Observemos que, para essa parte da prova, f pode ser contínua ou a função característica de um subconjunto fechado.

É imediato da definição que $\beta(f) \leq \gamma(f)$ e $\gamma(f) \leq \delta(f)$, pois:

$$\begin{aligned}
\beta(f) &= \sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \\
&\leq \sup_{x\in X} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \\
&= \gamma(f),
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} S_n f(x) \leq \frac{1}{n} \sup_{y\in X} S_n f(y) \\
\Rightarrow\ & \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{y\in X} S_n f(y) \\
\Rightarrow\ & \gamma(f) = \sup_{x\in X} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{y\in X} S_n f(y) = \delta(f).
\end{aligned}$$

Assim, basta mostrar que $\alpha(f) \leq \beta(f)$.

Por hipótese, X é compacto e f é contínua, ou f é característica de um subconjunto fechado, ou seja, f é limitada em X. Então,pode-se aplicar o teorema de Birkhoff (1.3.1) para qualquer medida de probabilidade T-invariante.

Se $\mu \in M_T(X)$ é uma medida ergódica, para μ-quase todo ponto $x \in X$,

$$\int_X f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \leq \sup_{y \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(y) = \beta(f).$$

Se $\mu \in M_T(X)$ é uma medida qualquer, usando 1.3.13 e a desigualdade anterior:

$$\int_X f\ d\mu = \int_{E\mathcal{M}_T(X)} \int_X f\ dm\ d\rho_\mu(m) \leq \int_{E\mathcal{M}_T(X)} \beta(f)\ d\rho_\mu(m) = \beta(f).$$

Em particular,

$$\alpha(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} \int_X f\ d\mu \leq \beta(f).$$

Logo, $\alpha(f) \leq \beta(f) \leq \gamma(f) \leq \delta(f)$.

Para provar a igualdade, é suficiente mostrar que $\alpha(f) \geq \delta(f)$.

Consideremos $\mu_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i x_n} \in \mathcal{M}(X)$, onde x_n é tal que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sup_{x \in X} S_n f(x) &= \frac{1}{n} S_n f(x_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x_n) \\ &= \int_X \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\ d\delta_{T^i x_n} = \int_X f\ d\mu_n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $\mathcal{M}(X)$ é compacto (1.2.5), existe subsequência μ_{n_k} tal que $\mu_{n_k} \to \bar{\mu}$, com $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(X)$.

Por argumento análogo ao da prova de 1.2.6, pode-se mostrar que na verdade $\bar{\mu}$ é T-invariante, ou seja, $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_T$.

- Se f é contínua:

Pela igualdade acima e pela definição de convergência fraca,

$$\lim_{n_k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sup_{x\in X}S_{n_k}f(x)=\lim_{n_k\to\infty}\int_X f\ d\mu_{n_k}=\int_X f\ d\bar{\mu}.$$

Assim,

$$\limsup_{n_k\to\infty}\int_X f\ d\mu_{n_k}=\int_X f\ d\bar{\mu}, \tag{2.3}$$

e

$$\begin{aligned}\delta(f) &= \limsup_{n_k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sup_{x\in X}S_{n_k}f(x)=\limsup_{n_k\to\infty}\int_X f\ d\mu_{n_k}\\ &= \int_X f\ d\mu \leq \sup_{m\in\mathcal{M}_f}\int_X f\ dm=\alpha(f).\end{aligned}$$

- Se f é função característica de um subconjunto fechado F:

$$\begin{aligned}\delta(f) &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}S_nf(x)\overset{2.2}{=}\limsup_{n\to\infty}\int_X f\ d\mu_n\\ &= \limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\overset{1.2.8}{\leq}\bar{\mu}(F)=\int_X f\ d\bar{\mu}\leq\alpha(f).\end{aligned}$$

Além disso, em ambos os casos, f é limitada em X. Pela observação 2.1.6, $\alpha(f)>-\infty$. Analogamente, $\alpha(f)<\infty$.

Portanto,

$$\alpha(f)=\beta(f)=\gamma(f)=\delta(f)\neq\pm\infty.$$

□

A prova do teorema anterior sugere uma generalização. Para isso, lembremos dos seguintes conceitos encontrados em [2]:

Definição 2.2.2. *Seja $f:X\to\mathbb{R}$ uma função, onde X é um espaço topológico. Tal função é dita semi-contínua superiormente em $x_0\in X$ quando, dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, se $|x-x_0|<\delta$, então*

$$f(x)\leq f(x_0)+\epsilon.$$

Equivalentemente,

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Teorema 2.2.3. *Seja $f : E \to [-\infty, \infty)$. Se E é compacto e f é uma função semi-contínua superiormente então f alcança sua cota superior.*

Teorema 2.2.4. *Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua num espaço métrico compacto. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é semi-contínua superiormente, então*

$$\alpha(f) = \beta(f) = \gamma(f) = \delta(f) \in [-\infty, \infty).$$

Demonstração.

Analogamente a 2.2.1, $\alpha(f) \leq \beta(f) \leq \gamma(f) \leq \delta(f)$. Basta verificar que para usar o teorema de Birkhoff, na prova em que $\alpha(f) \leq \beta(f)$, podemos supor $\displaystyle\int_X f \, d\mu > -\infty$, pois senão:

$$\int_X f \, d\mu = -\infty, \ \forall \mu \in \mathcal{M}_f \ \Rightarrow \ \alpha(f) = -\infty \leq \beta(f).$$

E como f é semi-contínua superiormente em X compacto, usando 2.2.3, $\displaystyle\int_X f \, d\mu < \infty$.

Falta mostrar que $\delta(f) \leq \alpha(f)$. Essa parte também é análoga, observando que basta conseguir uma desigualdade em 2.3 e seguirá o restante.

Para isso considere a aplicação $F : \mathcal{M}(X) \to [-\infty, \infty)$ definida da seguinte maneira:

$$F(\mu) = \int_X f \, d\mu.$$

$F(\mu) \in [-\infty, \infty)$ para toda $\mu \in \mathcal{M}(X)$ pois f é limitada superiormente.

Mostremos que F é semi-contínua superiormente, ou seja, se $\mu_n \to \mu \in \mathcal{M}(X)$, então

$$\int_X f \, d\mu \geq \limsup_{n \to \infty} \int_X f \, d\mu_n,$$

como o que queríamos.

Iniciemos utilizando uma equivalência de semi-continuidade superior para f. Existe subsequência de funções contínuas $f_i : X \to \mathbb{R}$ com $f_i \geq f_{i+1}$, para todo i tal que,

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x).$$

- Se $\displaystyle\int_X f \; d\mu > -\infty$,

  tome $g_i = f - f_i$, implicando que $g_i \leq g_{i+1}$ e $g_i \to 0$. Pelo Teorema da convergência monótona (1.1.3),

  $$\lim_{i\to\infty} \int_X f - f_i \; d\mu = 0.$$

  Logo, dado $\epsilon > 0$, $\displaystyle\int_X f - f_i \; d\mu > -\epsilon$ para i suficientemente grande, e

  $$\begin{aligned} \int_X f \; d\mu &= \int_X f - f_i \; d\mu + \int_X f_i \; d\mu \\ &> -\epsilon + \int_X f_i \; d\mu \\ &= -\epsilon + \limsup_{n\to\infty} \int_X f_i \; d\mu_n \\ &\geq -\epsilon + \limsup_{n\to\infty} \int_X f \; d\mu_n, \end{aligned}$$

  ou seja,

  $$\int_X f \; d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f \; d\mu_n. \tag{2.4}$$

- Se $\displaystyle\int_X f \; d\mu = -\infty$,

  para todo $j \in \mathbb{N}$,

  $$\limsup_{n\to\infty} \int_X f \; d\mu_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X \max\{f, -j\} \; d\mu_n \overset{2.4}{\leq} \int_X \max\{f, -j\} \; d\mu.$$

  Fazendo $j \to \infty$, temos que

  $$\limsup_{n\to\infty} \int_X f \; d\mu_n = -\infty.$$

Portanto, vale a desigualdade em 2.3, e o teorema está provado.

□

Definição 2.2.5. *Seja X um espaço topológico, e suponha que $T : X \to X$ é contínua. A quantidade*

$$\alpha(f) = \sup_{m \in \mathcal{M}_f} \int_X f \, d\mu$$

é chamada de média ergódica máxima para f. Uma medida $\mu \in \mathcal{M}_T$ é chamada f-maximizante se $\alpha(f) = \int_X f \, d\mu$, e o conjunto de todas as medidas maximizantes é denotado por $\mathcal{M}_{max}(f)$.

2.3 O conjunto das medidas maximizantes

O objeto de interesse da otimização ergódica são essas medidas maximizantes. Daí, segue a importância de estudar a existência dessas medidas e a caracterização de $\mathcal{M}_{max}(f)$.

Teorema 2.3.1. *Se X é um espaço métrico compacto e f é contínua, então $\mathcal{M}_{max}(f) \neq \emptyset$.*

Demonstração.

Considere $F : \mathcal{M}_T(X) \to (-\infty, \infty)$ definida por $F(\mu) = \int_X f \, d\mu$. Essa função é contínua na topologia fraca-*.

De fato, seja $\mu_n \to \mu$ em $\mathcal{M}_T(X)$. Por 1.2.3,

$$\int_X g \, d\mu_n \to \int_X g \, d\mu$$

para toda $g \in \mathcal{C}^0(X)$. Em particular,

$$F(\mu_n) \to F(\mu).$$

Além disso, como X é um espaço métrico compacto, $\mathcal{M}_T(X)$ é compacto (1.2.7).

Assim, segue que essa função assume máximo em $\mathcal{M}_T(X)$.

□

Abaixo, segue a generalização:

Teorema 2.3.2. *Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua num espaço métrico compacto e suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ é semi-contínua superiormente. Então*

i) $\mathcal{M}_{max}(f) \neq \emptyset$.

ii) $\mathcal{M}_{max}(f)$ *é convexo e compacto.*

Demonstração.

i) Considere $F : \mathcal{M}_T(X) \to [-\infty, \infty)$ como definida em 2.2.4. Essa função é semi-contínua superiormente e $\mathcal{M}_T(X)$ é compacto. Por 2.2.3, F assume máximo em $M_T(X)$ e, portanto $\mathcal{M}_{max}(f) \neq \emptyset$.

ii) Mostremos que $\mathcal{M}_{max}(f)$ é convexo, ou seja, se para quaisquer $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{max}(f)$ e para qualquer $t \in [0, 1]$,

$$\mu_t = (1 - t)\mu_1 + t\mu_2 \ \in \mathcal{M}_{max}(f).$$

De fato, como $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{max}(f)$ então $\displaystyle\int_X f \ d\mu_1 = \int_X f \ d\mu_2 = \sup_{m \in \mathcal{M}_f} \int_X f \ dm$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_X f \ d\mu_t &= \int_X f \ d\left((1-t)\mu_1\right) + \int_X f \ d\left(t\mu_2\right) \\ &= (1-t)\int_X f \ d\mu_1 + t\int_X f \ d\mu_1 = \sup_{m \in \mathcal{M}_f} \int_X f \ dm. \end{aligned}$$

Mostremos que $\mathcal{M}_T(X)$ é fechado, ou seja, se $\mu_n \in \mathcal{M}_{max}(f)$ com $\mu_n \to \mu$, então $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$.

Como $\mu_n \in \mathcal{M}_T(X)$ e $\mathcal{M}_T(X)$ é fechado então $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$, ou seja,

$$\int_X f \ d\mu \leq \sup_{m \in \mathcal{M}_f} \int_X f \ dm.$$

Também, como a função F considerada anteriormente é semi-contínua superiormente:

$$\int_X f\ d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f\ d\mu_n \geq \int_X f\ d\mu_n = \sup_{m\in\mathcal{M}_f} \int_X f\ dm.$$

Portanto,

$$\int_X f\ d\mu = \sup_{m\in\mathcal{M}_f} \int_X f\ dm.$$

Além disso, como $\mathcal{M}_T(X)$ é compacto, então $\mathcal{M}_{max}(f) \subset \mathcal{M}_T(X)$ é compacto.

□

Com respeito a caracterização do conjunto das medidas maximizantes, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.3. *O conjunto $\{\mathcal{M}_{max}(f) : f \in \mathcal{C}(X)\}$ é precisamente o conjunto das faces*[1] *fechadas de $\mathcal{M}_T$.*

A demonstração pode ser encontrada em [9].

[1] Um subconjunto convexo e não-vazio $F \subset K$ é chamado de face de K se, quando $\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 \in F$ com $k_1, k_2 \in K$ e $0 < \lambda < 1$, então $k_1, k_2 \in F$.

CAPÍTULO 3

Otimização ergódica para sistemas dinâmicos não-compactos

Iniciaremos o estudo da otimização ergódica para sistemas dinâmicos topológicos gerais $T : X \to X$, onde o espaço topológico X não é necessariamente compacto. Se $f : X \to X$ é contínua, apresentaremos condições que garantem a existência de medidas f-maximizantes, as quais serão caracterizadas pelo seu suporte. Esses são resultados de [6].

3.1 Introdução

Seja X um espaço topológico, não necessariamente compacto. No capítulo 1 vimos que para o caso em que X é compacto, $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$ (1.2.6). Mas, em geral, $\mathcal{M}_T$ pode ser vazio, como mostra o exemplo seguinte:

Exemplo 3.1.1. *Seja* $X = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *e* $T : X \to X$ *tal que* $T\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1}, n > 1.$

Suponhamos que exista $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$*. Então:*

$$\mu\left(\frac{1}{n}\right) = \mu\left(\frac{1}{n+1}\right), n \geq 1.$$

Mas,

$$\mu(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c\ ,$$

onde $c \in \mathbb{N}$ *é constante.*

Se $c = 0$ *então* $\mu(X) = 0$.

Se $c > 0$ *então* $\mu(X) = \infty$.

Absurdo, pois a medida é de probabilidade. Logo, $\mathcal{M}_T(X) = \emptyset$.

$\square$

A fim de estudar espaços mais abrangentes que os compactos, definimos:

Definição 3.1.2. *Um espaço polonês é um espaço topológico completamente metrizável e separável.*

Para o próximo resultado, precisaremos dos seguintes lema e teorema vistos respectivamente em [11] e [4]:

Lema 3.1.3. *Se* T *é um endomorfismo ergódico de um espaço de probabilidade* $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $f \geq 0$ *e* $\int_X f\ d\mu = \infty$, *então o teorema de Birkhoff implica* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f = \infty$.

Teorema 3.1.4. *Sejam* X *um espaço polonês e* $T : X \to X$ *uma função contínua. Então, para cada* $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$, *existe* ρ_μ *uma medida definida sobre os borelianos de* $\mathcal{M}_T(X)$, *com a propriedade que* $\rho_\mu(E\mathcal{M}_T(X)) = 1$ *e*

$$\mu = \int_{E\mathcal{M}_T(X)} m\ d\rho_\mu(m),$$

onde $E\mathcal{M}_T(X)$ *são as medidas ergódicas em* $\mathcal{M}_T(X)$.

Teorema 3.1.5. *Seja* X *um espaço polonês. Se* $T : X \to X$ *e* $f : X \to \mathbb{R}$ *são contínuas, então* $\alpha(f) \leq \beta(f) \leq \gamma(f) \leq \delta(f)$.

Demonstração. Observemos que bastam alguns ajustes na primeira parte de 2.2.1 para analogamente provar a desigualdade:

$$\alpha(f) \leq \beta(f) \leq \gamma(f) \leq \delta(f).$$

Como tínhamos que X era compacto, utilizamos a limitação de f no teorema ergódico de Birkhoff na prova de $\alpha(f) \leq \beta(f)$. Aqui, como não temos essa hipótese, dividimos em dois casos:

Se $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, vale o teorema de Birkhoff (1.3.1).

Se $f \notin \mathcal{L}^1(\mu)$, como $\displaystyle\int_X |f| \ d\mu = \infty$, usamos o lema 3.1.3. Observe que se f assume valores negativos, basta considerar $f = f^+ - f^-$ e trabalhar com as funções não-negativas f^+ e f^-. Como $f \in \mathcal{M}_f$, $\displaystyle\int_X f^+ \ d\mu < \infty$ ou $\displaystyle\int_X f^- \ d\mu < \infty$, e usando o teorema de Birkhoff para uma dessas funções e o lema para a outra, chegamos ao mesmo resultado.

Além disso, utilizamos a decomposição ergódica no espaço X compacto. A generalização desse teorema para um espaço polonês é dada em 3.1.4, e o restante da demonstração será análoga.

□

O próximo exemplo mostra que as desigualdades do teorema anterior podem ser estritas.

Exemplo 3.1.6. *Consideremos $\mathbb{Z}$ com a topologia discreta.*

$$\text{Defina } T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ por } T(i) = \begin{cases} i+1, & \text{se } i < 0 \\ i, & \text{se } i = 0 \\ i+2, & \text{se } i > 0 \end{cases}.$$

$$\textit{Defina } f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \textit{ por } f(i)=\begin{cases} 2, \text{ se } i<0 \\ -1, \text{ se } i=0 \\ 0, \text{ se } i>0 \text{ é ímpar} \\ \frac{i}{2}, \text{ se } i>0 \text{ e } i\equiv 2\ (mod 4) \\ 1-\frac{i}{2}, \text{ se } i>0 \text{ e } i\equiv 0\ (mod 4) \end{cases}.$$

Para encontrar o valor de $\alpha(f)$, vejamos quem são as medidas $\mu \in \mathcal{M}_T$.

Se $i < 0$, $\mu(i) = \mu(i-1)$, ou seja, $\mu(i) = c$, onde $c \geq 0$ é constante. Como a medida é de probabilidade, resulta que $\mu(i) = 0$.

Se $i > 0$, $\mu(i) = \mu(i-2)$, e analogamente $\mu(i) = 0$.

Se $i = 0$, $\mu(i) = \mu(T^{-1}(i)) = 1$, pois a medida é de probabilidade.

Logo, a única medida T-invariante é a medida de Dirac concentrada no zero, donde

$$\alpha(f) = \sup_{m\in\mathcal{M}_f} \int_{\mathbb{Z}} f\ dm = \int_{\mathbb{Z}} f\ d\delta_0 = f(0) = -1.$$

Para encontrar os outros valores, analisemos $S_n f(i)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$:

- $i > 0$:

$$S_n f(i) = \sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j(i) = \sum_{j=0}^{n-1} f(i+2j).$$

1. *i ímpar*

$$S_n f(i) = f(i) + f(\underbrace{i+2}_{\text{ímpar}}) + \ldots + f(\underbrace{i+2n-2}_{\text{ímpar}}) = 0+0+\ldots+0 = 0.$$

2. $i \equiv 2 \quad (mod\ 4)$

Para n ímpar,

$$\begin{aligned} S_n f(i) &= f(i) + f\underbrace{(i+2)}_{i\equiv 0 (mod 4)} + \ldots + f(\underbrace{i+2n-2}_{i\equiv 2(mod4)}) \\ &= \frac{i}{2} + \left(1 - \frac{i+2}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{i}{2} + n - 1\right) \\ &= 0 + \ldots + \left(\frac{i}{2} + n - 1\right) = \frac{i}{2} + n - 1. \end{aligned}$$

Para n par,

$$\begin{aligned}
S_nf(i) &= f(i) + f\underbrace{(i+2)}_{i\equiv 0(mod4)} + \ldots + f(\underbrace{i+2n-4}_{i\equiv 2(mod4)}) + f(\underbrace{i+2n-2}_{i\equiv 0(mod4)}) \\
&= \frac{i}{2} + \left(1 - \frac{i+2}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{i}{2} + n - 2\right) + \left(1 - \frac{i+2n-2}{2}\right) \\
&= 0 + \ldots + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Assim, não existe $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_nf(i)$, *ou seja,* $i \notin Reg(\mathbb{Z}, T, f)$.

3. $i \equiv 0 \pmod 4$

Para n ímpar,

$$\begin{aligned}
S_nf(i) &= f(i) + f\underbrace{(i+2)}_{i\equiv 2(mod4)} + \ldots + f(\underbrace{i+2n-2}_{i\equiv 0(mod4)}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{i+2}{2}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{i+2n-2}{2}\right) \\
&= 2 + \cdots + \left(2 - \frac{i}{2} - n\right) = (n-1) + \left(2 - \frac{i}{2} - n\right) = -\frac{i}{2} + 1.
\end{aligned}$$

Para n par,

$$\begin{aligned}
S_nf(i) &= f(i) + f\underbrace{(i+2)}_{i\equiv 2(mod4)} + \ldots + f(\underbrace{i+2n-4}_{i\equiv 0(mod4)}) + f(\underbrace{i+2n-2}_{i\equiv 2(mod4)}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{i+2}{2}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{i+2n-4}{2}\right) + \left(\frac{i+2n-2}{2}\right) \\
&= 2 + \cdots + 2 = n.
\end{aligned}$$

Assim, não existe $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_nf(i)$, *ou seja,* $i \notin Reg(\mathbb{Z}, T, f)$.

- $i < 0$:

$$\begin{aligned}
S_nf(i) &= \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(i) = f(i) + \ldots + f(-1) + f(0) + \ldots + f(0) \\
&= 2 + \ldots + 2 + (-1) + \ldots + (-1) \\
&= 2(-i) + (n - (-i))(-1) = -3i - n.
\end{aligned}$$

- *$i = 0$:*

$$S_n f(i) = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(0) = \sum_{j=0}^{n-1} f(0) = -n.$$

Implicando que,

$$\begin{aligned}
\beta(f) &= \sup_{i \in Reg(\mathbb{Z},T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(i) = \max\{-1, 0\} = 0 \\
\gamma(f) &= \sup_{i\in\mathbb{Z}} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(i) = \max\{-1, 0, 1\} = 1
\end{aligned}$$

Finalizando, para $i = -n < 0$, $S_n f(i) = -3(-n) - n = 2n$.

Então,

$$\delta(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{i\in\mathbb{Z}} S_n f(i) = 2.$$

□

Já vimos que a compacidade de X garante a existência de medida maximizante (2.3.1). O próximo exemplo mostra que $\mathcal{M}_{max}(f)$ pode ser vazio, mesmo quando $\mathcal{M}_f \neq \emptyset$.

Exemplo 3.1.7. *Sejam $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - e^{-x}$.*

Primeiramente, observemos que toda medida μ de probabilidade é T-invariante.

Como f é limitada superiormente, usando a observação 2.1.3, $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_T \neq \emptyset$, como queríamos.

Temos também que $\int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-x}\ d\mu < \int_{\mathbb{R}} 1\ d\mu = \mu(\mathbb{R}) = 1$, ou seja, 1 é uma cota superior de $\int_{\mathbb{R}} f\ d\mu$. Mostremos que é a menor.

Dado $\epsilon > 0$, existe δ_p, medida de Dirac concentrada no ponto p, tal que

$$1 - \epsilon < \int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-x}\ d\delta_p = f(p) = 1 - e^{-p} < 1.$$

Portanto,

$$\alpha(f) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f} \int_{\mathbb{R}} f\ d\mu = 1.$$

Entretanto, como $\int_{\mathbb{R}} f \; d\mu < 1$*, não existe* $\mu \in \mathcal{M}_f$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-x} \; d\mu = \alpha(f)$*.*

□

3.2 Forma normal e caracterização das medidas maximizantes

Consideraremos o conjunto das medidas f-maximizantes onde $\alpha(f) = \delta(f) \neq \pm\infty$. Para estudar e entender esse conjunto, tentaremos modificar a função f.

Denotemos por $\mathcal{CB}(X)$ o conjunto das funções contínuas em X e limitadas por valores reais.

Definição 3.2.1. *Para uma função contínua* $T : X \to X$*, uma função da forma* $\varphi - \varphi \circ T$*, onde* $\varphi \in \mathcal{CB}(X)$*, é chamada função cobordo.*

Definição 3.2.2. *Duas funções* f, g *são chamadas cohomólogas se a diferença entre elas é dada por uma função cobordo.*

Denotamos por $f \sim g$*.*

Os resultados seguintes mostram a importância de considerar funções cohomólogas no estuda da otimização ergódica:

Lema 3.2.3. *Suponha* $T : X \to X$ *uma função contínua no espaço topológico* X*, e a função contínua* $f : X \to \mathbb{R}$ *cohomóloga a* $\tilde{f}$*. Então,* $\int_X f \; dm = \int_X \tilde{f} \; dm$*, para* $m \in \mathcal{M}_T$ *qualquer.*

Demonstração.

$$\int_X f - \tilde{f} \; dm = \int_X \varphi \; dm - \int_X \varphi \circ T \; dm = 0 \quad \text{(por 1.1.4)},$$

onde $\varphi \in \mathcal{CB}(X)$.

$\square$

Corolário 3.2.4. *Se $T : X \to X$ é uma função contínua no espaço topológico X e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua com uma função cohomóloga $\tilde{f}$, então $\alpha(f) = \alpha(\tilde{f})$. Mais do que isso, $\alpha(f) < \sup \tilde{f}$.*

Demonstração.

$$\alpha(f) = \sup_{m \in \mathcal{M}_f} \int_X f \, dm = \sup_{m \in \mathcal{M}_f} \int_X \tilde{f} \, dm = \alpha(\tilde{f}) \leq \sup \tilde{f}$$

$\square$

Lema 3.2.5. *Seja $T : X \to X$ uma função contínua no espaço topológico X. Considere $\tilde{f}$ cohomóloga a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$. Então,*

$$\beta(f) = \beta(\tilde{f}), \;\; \gamma(f) = \gamma(\tilde{f}) \;\; \text{e} \;\; \delta(f) = \delta(\tilde{f}).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{CB}(X)$. Então,

$$\begin{aligned}
\beta(\tilde{f}) &= \sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n \tilde{f}(x) \\
&= \sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f + \varphi - \varphi \circ T)(T^i(x)) \\
&= \sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i(x)) - \sum_{i=1}^{n} \varphi(T^i(x)) \right) \\
&= \sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) + \underbrace{\varphi(x) - \varphi(T^n(x))}_{constante} \right) \\
&= \sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \right) = \beta(f).
\end{aligned}$$

A prova para $\gamma(f)$ e $\delta(f)$ são análogas.

$\square$

Dentro do conjunto das funções cohomólogas, procuramos aquela que melhor caracteriza $\mathcal{M}_{max}$.

Definição 3.2.6. *Uma função contínua $\tilde{f} \sim f$ é chamada uma forma normal para f se $\tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right) \supset \operatorname{supp}(\mu)$, para alguma medida μ T-invariante.*

Lema 3.2.7. *Se $T : X \to X$ é uma função contínua no espaço topológico X e $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que tem uma forma normal $\tilde{f}$, então*

$$\alpha(f) = \sup \tilde{f}.$$

Demonstração. Como f e $\tilde{f}$ são cohomólogas, por 3.2.4, $\alpha(f) \leq \sup \tilde{f}$.

Além disso, se $\mu \in \mathcal{M}_T$ satisfaz $\operatorname{supp}(\mu) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)$, então:

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d\mu &= \int_X \tilde{f} \, d\mu = \int_{\tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)} \tilde{f} \, d\mu = \int_X \tilde{f} \cdot \chi_{\tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)} \, d\mu \\
&= \int_X \sup \tilde{f} \, d\mu = \sup \tilde{f} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\alpha(f) = \sup \tilde{f}$. Mais do que isso, μ é medida maximizante.

$\square$

Lema 3.2.8. *Seja $T : X \to X$ uma função contínua no espaço topológico X. Considere $\tilde{f}$ uma forma normal para a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$. Então,*

$$\alpha(f) = \beta(f) = \gamma(f) = \delta(f).$$

Demonstração. Mostremos que $\alpha(f) \leq \beta(f)$:

Seja $\bar{x} \in \operatorname{supp}(\mu)$. Então $T^i(\bar{x}) \in \operatorname{supp}(\mu) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}(T^i(\bar{x})) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sup \tilde{f} = \sup \tilde{f} < \infty.$$

Assim, $\bar{x} \in Reg(X,T,f)$ e consequentemente

$$\begin{aligned}\beta(f) = \beta(\tilde{f}) &= \sup_{x \in Reg(X,T,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_n \tilde{f}(x) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}(T^i(\bar{x})) = \sup \tilde{f} = \alpha(f).\end{aligned}$$

Analogamente ao feito em 2.2.1, pela definição temos também que $\beta(f) \leq \gamma(f)$ e $\gamma(f) \leq \delta(f)$.

Por fim, $\delta(f) \leq \alpha(f)$:

$$\begin{aligned}\delta(f) = \delta(\tilde{f}) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} S_n \tilde{f}(x) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \sum_{i=0}^{n-1} \sup \tilde{f} = \sup \tilde{f} = \alpha(f).\end{aligned}$$

□

O próximo teorema mostra que, se f tem uma forma normal, suas medidas maximizantes são caracterizadas pelo seu suporte.

Teorema 3.2.9. *Suponha $T : X \to X$ uma função contínua no espaço topológico X. Assuma que a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tem uma forma normal $\tilde{f}$. Então $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_T$ e*

$$\mathcal{M}_{max}(f) = \left\{\mu \in \mathcal{M}_T : \operatorname{supp}(\mu) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)\right\} \neq \emptyset.$$

Demonstração.

Pela própria definição de forma normal, $\tilde{f}$ é limitada superiormente, e de 2.1.3, resulta que $\mathcal{M}_{\tilde{f}} = \mathcal{M}_T$. Além disso, $\tilde{f} \sim f$, ou seja, $\tilde{f} - f \in \mathcal{CB}(X)$; pela observação 2.1.8, $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_{\tilde{f}} = \mathcal{M}_T$.

Como $\tilde{f}$ é uma forma normal de f, a própria definição garante que

$$\left\{\mu \in \mathcal{M}_T : \operatorname{supp}(\mu) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)\right\} \neq \emptyset,$$

Por 3.2.7, temos que $\alpha(f) = \sup \tilde{f}$ e μ é uma medida maximizante. Assim,

$$\mathcal{M}_{max}(f) \supset \left\{m \in \mathcal{M}_T : \operatorname{supp}(m) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)\right\}.$$

Mostremos agora que $\mathcal{M}_{max}(f) \subset \left\{m \in \mathcal{M}_T : \text{supp}(m) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)\right\}$.

Seja $\mu \in \mathcal{M}_{max}$. Como $\sup \tilde{f} - \tilde{f} \geq 0$ e

$$0 = \alpha(f) - \int_X f \; d\mu = \sup \tilde{f} - \int_X \tilde{f} \; d\mu = \int_X \sup \tilde{f} - \tilde{f} \; d\mu,$$

necessariamente $\left(\sup \tilde{f} - \tilde{f}\right) = 0$ μ-q.t.p., donde $\text{supp}(\mu) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)$.

□

Nem toda função contínua tem uma forma normal, como mostra o corolário do próximo teorema, provado em [3].

Teorema 3.2.10. *Considere $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por $T(x) = 2x \ (mod\ 1)$, ou seja, a função que duplica o ângulo no círculo. Para uma função $f \in \mathcal{C}^0(R/\mathbb{Z})$ genérica*[1]*, toda medida maximizante de f tem suporte total.*

Corolário 3.2.11. *Seja $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por $T(x) = 2x \ (mod\ 1)$. Para uma $f \in C^0(R/\mathbb{Z})$ genérica, não existe função não-positiva cohomóloga a $f - \alpha(f)$.*

Demonstração. Observe primeiro que se $g \sim f - \alpha(f)$ e $g \leq 0$, então g é forma normal para f e $\sup g = 0$, ou seja, $g^{-1}(0) \supset \text{supp}(\mu)$ para alguma μ T-invariante.

Para isso, como $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é compacto, basta considerar $\bar{\mu}$ uma medida maximizante e por 3.2.3

$$0 = \int_X f - \alpha(f) \; d\bar{\mu} = \int_X g \; d\bar{\mu}.$$

Se $g \leq 0$, então $g(x) = 0$ em $\text{supp}(\bar{\mu})$, como o que queríamos.

Assim, voltando a prova do corolário, suponha que existe g função não-positiva cohomóloga a $f - \alpha(f)$. Pela observação acima,

$$\text{supp}(\mu) \subset g^{-1}(\sup g) = g^{-1}(0),$$

[1]Um conjunto de um espaço topológico é dito genérico se puder ser escrito como a interseção enumerável de conjuntos abertos densos.

para alguma medida $\mu \in \mathcal{M}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Pelo teorema anterior e pelo lema 3.2.9, segue que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset g^{-1}(0)$, ou seja, g é identicamente nula.

Logo, para $m \in \mathcal{M}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ qualquer,

$$\begin{aligned}
\int_X f - \alpha(f)\ dm &= \int_X g\ dm = 0 \\
\Rightarrow \int_X f\ dm &= \alpha(f),
\end{aligned}$$

contrariando portanto a propriedade de genericidade da função f.

□

Com respeito a possibilidade de conseguir regularidade na função normal, vejamos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.12. *Seja $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por $T(x) = 2x$ (mod 1). O polinômio trigonométrico $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos 2\pi x + C \operatorname{sen} 2\pi x - 1 \\
&= \sqrt{1 + C^2} \cos 2\pi(x - \omega) - 1,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1 - \cos(\pi/2^n)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(\pi/2^n)} = 1.368231157\ldots \\
\omega &= \frac{\arctan C}{2\pi} = 0.149550073,
\end{aligned}$$

satisfaz $\displaystyle\max_{\mu \in M_f} \int_X f\ d\mu = 0$ *e não é cohomólogo a uma função não-negativa em* $\mathcal{C}^1(X)$.

A demonstração pode ser encontrada em [3].

No entanto, a partir de pontos fixos de um certo operador não linear M_f introduzido a seguir, poderão ser obtidas formas normais para f.

Definição 3.2.13. *Sejam $T : X \to X$ aplicação sobrejetora num conjunto X não vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ alguma função. Dada função $\varphi : X \to \mathbb{R}$, então, para cada $x \in X$, defina $M_f\varphi(x) \in (-\infty, \infty]$ por:*

$$M_f\varphi(x) := \sup_{y\in T^{-1}(x)} (f+\varphi)(y).$$

As iteradas de M_f podem ser expressas por:

$$M_f^n\varphi(x) := \sup_{y\in T^{-n}(x)} (S_nf+\varphi)(y), \ \forall x \in X.$$

De fato, para quaisquer $\bar{y} = T^{-1}(x)$ e $\bar{z} = T^{-1}(\bar{y}) = T^{-2}(x)$,

$$\begin{aligned} M_f^2\varphi(x) &= M_f\left(M_f\varphi(x)\right) \\ &= \sup_{y\in T^{-1}(x)} \left(f + M_f\varphi\right)(y) \ \geq \ f(\bar{y}) + M_f\varphi(\bar{y}) \\ &= f(\bar{y}) + \sup_{z\in T^{-1}(y)} (f+\varphi)(z) \ \geq \ f(\bar{y}) + f(\bar{z}) + \varphi(\bar{z}) \\ &= f\circ T(\bar{z}) + f(\bar{z}) + \varphi(\bar{z}) = (S_2f+\varphi)(\bar{z}) \end{aligned}$$

Além disso, pela definição de supremo, dado $\epsilon > 0$, existe $y \in T^{-1}(x)$ e $z \in T^{-2}(x)$ tais que

$$M_f^2\varphi(x) - 2\epsilon \leq f\circ T(z) + f(z) + \varphi(z) = (S_2f+\varphi)(z),$$

resultando assim que $M_f^2\varphi(x) := \sup_{y\in T^{-2}(x)} (S_2f+\varphi)(y), \ \forall x \in X$.

Com um argumento análogo, a prova para n qualquer é feita por indução.

Lema 3.2.14. *Sejam $T : X \to X$ aplicação sobrejetora num conjunto X não vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ alguma função. Se existem $c \in \mathbb{R}$ e uma função limitada $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tais que*

$$M_f\varphi = \varphi + c,$$

então $c = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} S_nf(x) = \delta(f)$.

Demonstração. Primeiramente, para todo $x \in X$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = M_f\varphi(x) - c &= \left(\sup_{y \in T^{-1}(x)} (f + \varphi)(y) \right) - c \\
&= \sup_{y \in T^{-1}(x)} ((f - c) + \varphi)(y) = M_{f-c}\varphi(x).
\end{aligned}$$

e assim, a equação $M_f\varphi = \varphi + c$ é equivalente a $M_{f-c}\varphi = \varphi$. Consequentemente, $\varphi = M^n_{f-c}\varphi$, ou seja,

$$\varphi = -nc + \sup_{y \in T^{-n}(x)} (S_n f + \varphi)(y)$$

para todo $n \in \mathbb{N},\ x \in X$.

Por hipótese, φ é limitada, e escrevemos $a \leq \varphi \leq b$ onde $a = \inf \varphi$ e $b = \sup \varphi$. Logo,

$$a \leq -nc + \sup_{y \in T^{-n}(x)} (S_n f + \varphi)(y) \leq b$$

$$\frac{a}{n} + c \leq \frac{1}{n} \sup_{y \in T^{-n}(x)} (S_n f + \varphi)(y) \leq \frac{b}{n} + c,$$

para todo $n \in \mathbb{N},\ x \in X$.

Usando o $\inf \varphi$ e a segunda parte da desigualdade anterior:

$$\frac{a}{n} + \frac{1}{n} \sup_{y \in T^{-n}(x)} S_n f(y) \leq \frac{1}{n} \sup_{y \in T^{-n}(x)} (S_n f + \varphi)(y) \leq \frac{b}{n} + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sup_{y \in T^{-n}(x)} S_n f(y) \leq \frac{b-a}{n} + c, \text{ para todo } n > 0 \text{ e } x \in X.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{n} \sup_{y \in T^{-n}(x)} S_n f(y) \geq \frac{a-b}{n} + c, \text{ para todo } n > 0 \text{ e } x \in X.$$

Em particular,

$$\frac{a-b}{n} + c \leq \frac{1}{n} \sup_{x \in X} \sup_{y \in T^{-n}(x)} S_n f(y) \leq \frac{b-a}{n} + c$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{n} + c \leq \frac{1}{n} \sup_{y \in X} S_n f(y) \leq \frac{b-a}{n} + c$$

para todo $n > 0$. Fazendo $n \to \infty$, concluímos o que queríamos,

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} S_n f(x) = \delta(f).$$

□

Definição 3.2.15. *Seja X um espaço topológico. Suponha que $T : X \to X$ é uma função sobrejetora contínua, e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua. Se $\varphi \in \mathcal{CB}(X)$ é um ponto fixo de $M_{f-\delta(f)}$, então a função $\tilde{f} := f + \varphi - \varphi \circ T$ é chamada uma forma do ponto fixo para f.*

Lema 3.2.16. *Seja X um espaço topológico. Suponha que $T : X \to X$ é uma função sobrejetora contínua, e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.*

1. *Se $\tilde{f}$ é uma forma do ponto fixo para f, então $\tilde{f} \leq \delta(f)$.*

2. *Se além disso, X é compacto e metrizável, então qualquer forma do ponto fixo é também uma forma normal.*

Demonstração.

1. Por hipótese, $\tilde{f} := f + \varphi - \varphi \circ T$ para alguma $\varphi \in \mathcal{CB}(X)$ que satisfaz:

$$\varphi(x) + \delta(f) = \sup_{y\in T^{-1}(x)} (f+\varphi)(y), \text{ para todo } x \in X.$$

Substituindo $x \in X$ por $T(x) \in X$, temos

$$\varphi \circ T(x) + \delta(f) = \sup_{y\in T^{-1}(T(x))} (f+\varphi)(y), \text{ para todo } x \in X.$$

Ao adicionar $f + \varphi$, resulta

$$\delta(f) - \underbrace{\left(\sup_{y\in T^{-1}(T(x))} (f+\varphi)(y) - (f+\varphi)(x)\right)}_{\geq 0} = (f + \varphi - \varphi \circ T)(x) = \tilde{f}.$$

Logo, $\tilde{f} \leq \delta(f)$.

2. Adicionalmente, X é compacto. Por 2.2.1, $\alpha(f) = \beta(f) = \gamma(f) = \delta(f)$, donde, pelo item 1, $\sup \tilde{f} \leq \alpha(f)$. Como f e $\tilde{f}$ são cohomólogas, usando 3.2.7, $\alpha(f) = \sup \tilde{f}$.

   Seja μ uma medida f-maximizante (sua existência é garantida por 2.3.1). Considere $A := \left\{x \in X : \tilde{f}(x) = \sup \tilde{f}\right\}$.

   Se $\tilde{f}$ não é uma forma normal então toda $m \in \mathcal{M}_T$ satisfaz $\operatorname{supp}(m) \not\subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)$. Em particular, isso vale para μ, então $\mu(A) < 1$ e $\mu(A^C) < 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \int_A f \, d\mu + \int_{A^C} f \, d\mu \\ &< \sup \tilde{f} \cdot \left(\mu(A) + \mu(A^C)\right) \\ &= \sup \tilde{f} = \alpha(f), \end{aligned}$$

   ou seja, $\mu \notin \mathcal{M}_{max}$, o que é uma contradição.

□

O lema anterior implica que, quando X é compacto e metrizável, para encontrar uma forma normal para f, é suficiente encontrar uma forma do ponto fixo.

Se X não é compacto então isso não é válido, mesmo quando $\alpha(f) = \delta(f) \neq \pm\infty$, como veremos a seguir:

Exemplo 3.2.17. *Seja $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, isto é, o conjunto de todas as sequências $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros estritamente positivos.*

Consideremos a função shift $T : X \to X$ definida por $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Se $w = (w_1, \ldots, w_k)$, então o cilindro de comprimento k correspondente (k-cilindro) é o conjunto $[w] := \{x \in X : x_i = w_i \text{ para } 1 \leq i \leq k\}$.

Defina $f : X \to \mathbb{R}$ constante sobre 2-cilindros por:

$$f[m,n] = \begin{cases} -\dfrac{1}{n(n+1)}, \text{ se } m = n+1 \\ -1, \text{ se } m \neq n+1 \end{cases} .$$

Seja $\varphi \in \mathcal{CB}(X)$ *constante sobre 1-cilindros, definida por:*

$$\varphi[n] = -\frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Vamos encontrar o valor de $f + \varphi - \varphi \circ T$ *que será necessário a seguir. Calculemos nos 2-cilindros da forma* $[m, n]$.

- *se* $m = n + 1$*:*

$$\begin{aligned} (f + \varphi - \varphi\circ) \, T[m, n] &= f[n + 1, n] + \varphi[n + 1, n] - \varphi[n] \\ &= -\frac{1}{n(n + 1)} - \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

- *se* $m \neq n + 1$*:*

$$\begin{aligned} (f + \varphi - \varphi \circ T) \, [m, n] &= f[m, n] + \varphi[m, n] - \varphi[n] \\ &= -1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 0. \end{aligned}$$

Primeiramente observemos que φ *é um ponto fixo para* $M_{f-\delta(f)}$*, pois satisfaz* $M_f \varphi = \varphi + c$ *com* $c = \delta(f) = 0$*. De fato,*

$$\begin{aligned} (M_f \varphi - \varphi) \, (x) &= \sup_{y \in T^{-1}(x)} (f + \varphi)(y) - \varphi(x) \\ &= \sup_{y \in T^{-1}(x)} (f(y) + \varphi(y) - \varphi(x)) \\ &= \sup_{y \in T^{-1}(x)} (f + \varphi - \varphi \circ T)(y) = 0 \end{aligned}$$

pelo feito anteriormente. Logo, f *tem forma do ponto fixo.*

Por 3.1.5, $\alpha(f) \leq \delta(f) = 0$.

A fim de estimar $\alpha(f)$*, denotemos por* $v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x^{(n)})}$ *a medida invariante suportada na órbita periódica gerada por* $x^{(n)} = \overline{(n, n - 1, \ldots, 1)}$.

Note que

$$\begin{aligned}
\int_X f\ d\nu_n &= \int_X f\ d\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{T^j(x^{(n)})}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_X f\ d\delta_{T^j(x^{(n)})} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j(x^{(n)})\\
&= -\frac{1}{n}\left[\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{(n-j-1)(n-j)}\right]-\frac{1}{n}\\
&= -\frac{1}{n}\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{n-j-1}-\frac{1}{n-j}\right]}_{\text{série telescópica}}-\frac{1}{n}\\
&= -\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}+1\right]-\frac{1}{n}=\frac{1-2n}{n^2},
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha(f)=\sup_{m\in\mathcal{M}_f}\int_X f\ dm \geq \sup_{n\geq 1}\int_X f\ d\nu_n = 0,$$

e portanto $\alpha(f)=0=\delta(f)$.

Como $f<0$ *então* $\int_X f\ dm < 0$ *para toda* $m\in\mathcal{M}_f$, *implicando que* f *não tem medida maximizante. Concluímos assim, por 3.2.9, que* f *não tem forma normal.*

□

3.3 Funções essencialmente compactas

Nessa seção definiremos compacidade essencial, o que garantirá que uma forma do ponto fixo é, de fato, uma forma normal.

Definição 3.3.1. *Seja* $T: X\to X$ *uma sobrejeção contínua no espaço topológico* X. *Uma função contínua* $f: X\to\mathbb{R}$ *é essencialmente compacta (com respeito a* T*) se existem um ponto fixo* $\varphi\in\mathcal{CB}(X)$ *de* $M_{f-\delta(f)}$ *e um subconjunto* $Y\subset X$ *tais que*

1. $\hat{Y} := \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}Y$ *é não vazio e compacto;*

2. $T(Y) = X$*;*

3. *para cada* $x \in X$*,* $\varphi(x) + \delta(f) = \sup_{y \in T^{-1}(x) \cap Y} (f + \varphi)(y)$*.*

Teorema 3.3.2. *Seja* $T : X \to X$ *uma sobrejeção contínua num espaço polonês* X*. Se a função contínua* $f : X \to \mathbb{R}$ *é essencialmente compacta com* $\varphi \in \mathcal{CB}(X)$ *ponto fixo de* $M_{f-\delta(f)}$*, então* $\tilde{f} = f + \varphi - \varphi \circ T$ *é uma forma normal para* f*. Em particular,*

$$\mathcal{M}_{max}(f) = \left\{\mu \in \mathcal{M}_T : \operatorname{supp}(\mu) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)\right\} \neq \emptyset.$$

Demonstração.

É suficiente mostrar que $\tilde{f}$ é uma forma normal; a caracterização de $\mathcal{M}_{max}(f)$ segue de 3.2.9.

Por hipótese, f é essencialmente compacta, e da terceira condição, para $x \in \hat{Y}$,

$$\varphi(x) + \delta(f) = \sup_{y \in T^{-1}(x) \cap Y} (f + \varphi)(y) = \sup_{y \in T^{-1}(x) \cap \hat{Y}} (f + \varphi)(y),$$

pois observemos que $\hat{Y} = Y \cap T^{-1}(\hat{Y})$ pela própria definição de $\hat{Y}$.

Consequentemente, $\varphi \in \mathcal{CB}(X)$ é ponto fixo de $M_{f\big|_{\hat{Y}} - \delta(f)}$, ou seja, $\tilde{f}\big|_{\hat{Y}}$ é uma forma do ponto fixo para $f\big|_{\hat{Y}}$ (com respeito a $T\big|_{\hat{Y}}$). Pela igualdade anterior e por 3.2.14,

$$\delta(f\big|_{\hat{Y}}) = \delta(f). \tag{3.1}$$

Continuando, pelo item 1 de 3.1, $\sup \tilde{f}\big|_{\hat{Y}} \leq \delta(f\big|_{\hat{Y}})$. Adicionalmente,

$$\alpha(f\big|_{\hat{Y}}) = \sup_{m \in \mathcal{M}_{f|_{\hat{Y}}}} \int_X f\big|_{\hat{Y}} \, dm = \sup_{m \in \mathcal{M}_{f|_{\hat{Y}}}} \int_X \tilde{f}\big|_{\hat{Y}} \, dm \leq \sup \tilde{f}\big|_{\hat{Y}},$$

ou seja, como $\hat{Y}$ é compacto, $\delta(f\big|_{\hat{Y}}) = \alpha(f\big|_{\hat{Y}}) \leq \sup \tilde{f}\big|_{\hat{Y}}$. Resultando assim que,

$$\sup \tilde{f}\big|_{\hat{Y}} = \delta(f\big|_{\hat{Y}}). \tag{3.2}$$

Também observemos que $\tilde{f}$ é uma forma do ponto fixo para f, e pelo item 1 de 3.1,

$$\tilde{f} \leq \delta(f). \tag{3.3}$$

Usando 3.1, 3.2, 3.3,

$$\tilde{f} \leq \delta(f) = \delta(f\big|_{\hat{Y}}) = \sup \tilde{f}\big|_{\hat{Y}}$$
$$\Rightarrow \sup \tilde{f} \leq \sup \tilde{f}\big|_{\hat{Y}}$$

e como a desigualdade contrária é sempre válida,

$$\sup \tilde{f} = \sup \tilde{f}\big|_{\hat{Y}}.$$

Finalmente, como $\hat{Y}$ é compacto, pelo item 2 de 3.1, $\tilde{f}\big|_{\hat{Y}}$ é uma forma normal para $f\big|_{\hat{Y}}$. E usando a igualdade anterior,

$$\mathrm{supp}(\mu) \subset \tilde{f}\big|_{\hat{Y}}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\big|_{\hat{Y}}\right) = \tilde{f}\big|_{\hat{Y}}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)$$

para alguma medida μ $T\big|_{\hat{Y}}$-invariante.

Para μ ser T-invariante, basta defini-la em X como sendo nula no complementar de $\hat{Y}$. Logo, $\tilde{f}$ é uma forma normal para f.

□

Compacidade essencial é uma noção abstrata, então para sistemas específicos é útil substituir isso por condições mais fáceis de se verificar. Antes, lembraremos de alguns resultados e dos teoremas de [12] e [5] que serão úteis na última prova:

Definição 3.3.3. *Sejam X e Y dois espaços normados*[2]*. Dizemos que X e Y são isométricos se existe $T : (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ bijeção tal que $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$.*

Teorema 3.3.4. ***(ponto fixo de Banach)*** *Seja (X, d) um espaço métrico, onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e seja $f : X \to X$ uma contração em X, isto é, existe λ com $0 \leq \lambda < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ $\forall x, y \in X$. Então existe um único ponto fixo $p \in X$ para f.*

[2]Lembremos que $(X, \| \ \|_X)$ denota o par: espaço X com norma $\| \ \|_X$.

Definição 3.3.5. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $H \subset X$ é relativamente compacto se $\bar{H}$ é compacto. Lembramos que $\bar{H}$ é o fecho de H.*

Definição 3.3.6. *Uma família H de funções definidas em X é equicontínua no ponto $x_0 \in X$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x, x_0) < \delta$, então para qualquer $f \in H$,*

$$d\left(f(x), f(x_0)\right) < \epsilon.$$

Teorema 3.3.7. ***(Arzelà-Ascoli)*** *Seja X um espaço métrico. Dizemos que $H \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, ou seja, uma família de funções contínuas definidas em X com valores em $\mathbb{R}$, é relativamente compacto se, e somente se:*

1. *para todo $x \in X$, o conjunto $H(x)$ é um conjunto limitado;*

2. *H é equicontínua.*

Definição 3.3.8. *Seja $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $g : X \to \mathbb{R}$. Para $x, y \in X$, definimos:*

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_0(g) &= \sup g - \inf g \\ \mathrm{var}_1(g) &= \sup_{x_1 = y_1} |g(x) - g(y)|. \end{aligned}$$

Se $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, para $x \in X$ e um inteiro $n \geq 1$, o elemento $y \in X$ com $y_1 = n$ e $y_i = x_{i-1}$ para todo $i \geq 2$ será denotado por nx.

Lema 3.3.9. *$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é separável e completo com respeito a métrica $d(x, y) = 2^{-min\{n : x_n \neq y_n\}}$.*

Demonstração.

Mostremos que $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é separável:

Consideremos $A = \{x \in X \text{ tal que } x \text{ é periódica}\}$. A é claramente enumerável.

Dado $\epsilon > 0$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-i} < \epsilon$. Se $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ e considere $a \in A$ a sequência periódica gerada por $\overline{(x_1, \ldots, x_{i-1})}$, então:

$$d(x, a) = 2^{-i} < \epsilon, \text{ onde } i = \min\{n,\ x_n \neq a_n\},$$

implicando que A é um subconjunto enumerável e denso em X.

Mostremos que $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é completo:

Seja $(x_n) \subset X$ sequência de Cauchy qualquer, com $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots)$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > N_0$, $d(x_n, x_m) = 2^{-i} < \epsilon$, onde $i = \min\{j,\ \xi_j^{(n)} \neq \xi_j^{(m)}\}$, ou seja, $\xi_k^{(n)} = \xi_k^{(m)}$ para $k < i$.

Para qualquer k fixo, $\{\xi_k^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{N}$. Basta tomar $n, m > N_0$ e $\epsilon = 2^{-k}$ para que $\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right| = 0$, e como $\mathbb{N}$ é completo, $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \bar{x}_k \in \mathbb{N}$. Logo, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \in X$. Mais ainda, $\bar{x}_k = \xi_k^{(n)} = \xi_k^{(m)}$ para $k < i$ e $m, n > N_0$.

Consequentemente, tomando $n > N_0$,

$$d(x_n, \bar{x}) = 2^{-min\{j,\ \xi_j^{(n)} \neq \bar{x}_j\}} = 2^{-i} < \epsilon,$$

ou seja, $x_n \to \bar{x} \in X$.

$\square$

Finalmente, o teorema de Jenkinson, Mauldin e Urbański, encontrados em [6], enuncia o que queríamos.

Teorema 3.3.10. *Seja $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $T : X \to X$ a aplicação shift. Suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente e constante nos 2-cilindros, e que existe $n \geq 1$ tal que*

$$\mathrm{var}_1(f) < \inf f\Big|_{[n]} - \sup f\Big|_{[i]} \tag{3.4}$$

para todo $i \geq 1$ suficientemente grande.

Então f é essencialmente compacta, portanto tem uma forma normal $\tilde{f}$, e

$$\mathcal{M}_{max}(f) = \left\{\mu \in \mathcal{M}_T : \mathrm{supp}(\mu) \subset \tilde{f}^{-1}\left(\sup \tilde{f}\right)\right\} \neq \emptyset.$$

Demonstração.

Considere o espaço $K(X)$ das funções $\varphi : X \to \mathbb{R}$ limitadas que são constantes nos 1-cilindros. A seguir, faremos a identificação do espaço das funções limitadas que são constantes nos 1-cilindros com o espaço das sequências ℓ^∞, equipado com a norma usual.

Seja $F : K \to l^\infty$ dada por $F(\varphi) = x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, onde $x_i = \varphi[i]$, para $i \geq 1$.

F está bem definida e é bijetora. De fato,

$$\|F\varphi\|_\infty = \|x\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\varphi[m]| = \sup_{x\in X} |\varphi(x)| < \infty.$$

implicando que $F(\varphi) \in l^\infty$ e, por 3.3.3, temos também que os espaços são isométricos.

Inicialmente, para utilizar (3.3.4) em M_f verifiquemos que:

- A função M_f preserva o espaço K.

  Considere $\varphi \in K$. Como f é constante nos 2-cilindros,

$$\begin{aligned} M_f\left(\varphi(x)\right) &= \sup_{y\in T^{-1}(x)} (f+\varphi)(y) \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(f(mx) + \varphi(mx)\right) \end{aligned}$$

  depende só da primeira coordenada de x, ou seja, $M_f(\varphi)$ é constante nos 1-cilindros.

  Além disso, como f é limitada superiormente,

$$M_f\left(\varphi(x)\right) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} f(mx) + \sup_{m\in\mathbb{N}} \varphi(mx) < \infty$$

  e por 3.4, para i suficientemente grande,

$$\begin{aligned} M_f\left(\varphi(x)\right) &\geq \inf(f+\varphi)\big|_{[n]} \\ &\geq \inf f\big|_{[n]} + \inf \varphi \\ &\geq \mathrm{var}_1(f) + \sup f\big|_{[i]} + \inf \varphi \geq -\infty, \end{aligned}$$

  ou seja, $M_f(\varphi)$ é limitada.

- O espaço é completo, já que l^∞ é um espaço de Banach.

- Para $0 \leq \lambda < 1$, a função $\varphi \mapsto M_{f,\lambda}(\varphi) = M_f(\lambda\varphi)$ é λ-Lipschitz em l^∞.

$$\begin{aligned}
\|M_{f,\lambda}\varphi_1 - M_{f,\lambda}\varphi_2\|_\infty &= \sup_{x\in X}\left|\sup_{y\in T^{-1}(x)}(f+\lambda\varphi_1)(y) - \sup_{y\in T^{-1}(x)}(f+\lambda\varphi_2)(y)\right| \\
&\leq \sup_{x\in X}\left|\sup_{m\in\mathbb{N}}(f+\lambda\varphi_1 - f - \lambda\varphi_2)(mx)\right| \\
&= \sup_{x\in X}\left|\sup_{m\in\mathbb{N}}\lambda(\varphi_1-\varphi_2)(mx)\right| \\
&= \lambda\sup_{x\in X}\left|\sup_{m\in\mathbb{N}}(\varphi_1-\varphi_2)(mx)\right| \\
&= \lambda\sup_{x\in X}|(\varphi_1-\varphi_2)(x)| \\
&= \lambda\|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty .
\end{aligned}$$

Portanto, para $0 \leq \lambda < 1$, $M_{f,\lambda}$ tem um único ponto fixo φ_λ, ou seja,

$$M_{f,\lambda}(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda$$

$$\Rightarrow \sup_{y\in T^{-1}(x)}(f(y)+\lambda\varphi_\lambda(y)) = \sup_{m\in\mathbb{N}}(f(mx)+\lambda\varphi_\lambda(mx)) = \varphi_\lambda(x).$$

Além disso,

$$\mathrm{var}_0(\varphi_\lambda) \leq \mathrm{var}_1(f) \tag{3.5}$$

para todo $0 \leq \lambda < 1$, pois

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(y) &= \sup_{m\in\mathbb{N}}(f(mx)+\lambda\varphi_\lambda(mx)) - \sup_{m\in\mathbb{N}}(f(my)+\lambda\varphi_\lambda(my)) \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{N}}(f(mx)+\lambda\varphi_\lambda(mx) - f(my)+\lambda\varphi_\lambda(my)) \\
&= \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(f(mx)+\lambda\underbrace{(\varphi_\lambda(mx)-\varphi_\lambda(my))}_{\varphi\text{ é constante nos 1-cilindros}} - f(my)\right) \\
&= \sup_{m\in\mathbb{N}}(f(mx)-f(my)) = \mathrm{var}_1(f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sup_{x,y\in X}(\varphi_\lambda(x)-\varphi_\lambda(y)) \leq \mathrm{var}_1(f) \\
&\Rightarrow \mathrm{var}_0(\varphi_\lambda) = \sup_{x\in X}\varphi_\lambda(x) - \inf_{y\in Y}\varphi_\lambda(y) \leq \mathrm{var}_1(f).
\end{aligned}$$

Consideremos agora, para $0 \leq \lambda < 1$, $\varphi_\lambda^* := \varphi_\lambda - \inf \varphi_\lambda$.

$$\begin{aligned} \|\varphi_\lambda^*\| &= \sup_{x\in X} |\varphi_\lambda^*(x)| = \sup_{x \in X} |(\varphi_\lambda - \inf \varphi_\lambda)(x)| \\ &= \sup_{x\in X} (\varphi_\lambda - \inf \varphi_\lambda)(x) = \sup \varphi_\lambda - \inf \varphi_\lambda \\ &= \operatorname{var}_0(\varphi_\lambda) \overset{3.5}{\leq} \operatorname{var}_1(f). \end{aligned}$$

Além disso, como φ_λ^* são constantes nos 1-cilindros, claramente $(\varphi_\lambda^*)_{0\leq\lambda<1}$ é equicontínua. Logo, utilizando 3.3.7 temos que $(\varphi_\lambda^*)_{0\leq\lambda<1}$ é relativamente compacto em ℓ^∞. Lembremos que, como o espaço é completo, isso é equivalente a toda sequência de pontos de X conter uma subsequência convergente em ℓ^∞ [5]. Segue que, existe sequência λ_i tal que

$$\lim_{\lambda_i \to 1} \varphi_{\lambda_i}^* = \bar{\varphi}$$

e,

$$\lim_{\lambda_i \to 1} M_{f,\lambda_i} \varphi_{\lambda_i}^* = M_f \bar{\varphi}.$$

Também temos que, se $0 \leq \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} M_{f,\lambda}\varphi_\lambda^*(x) &= M_{f,\lambda}(\varphi_\lambda - \inf \varphi_\lambda)(x) \\ &= \sup_{y \in T^{-1}(x)} (f + \lambda(\varphi_\lambda - \inf \varphi_\lambda))(y) \\ &= \sup_{y \in T^{-1}(x)} (f + \lambda\varphi_\lambda)(y) - \lambda \inf \varphi_\lambda + \inf \varphi_\lambda - \inf \varphi_\lambda \\ &= M_{f,\lambda}\varphi_\lambda(x) - \inf \varphi_\lambda + (1-\lambda) \inf \varphi_\lambda \\ &= (\varphi_\lambda - \inf \varphi_\lambda) + (1-\lambda) \inf \varphi_\lambda \\ &= \varphi_\lambda^*(x) + (1-\lambda) \inf \varphi_\lambda \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Logo,

$$\lim_{\lambda_i \to 1} ((1-\lambda_i) \inf \varphi_{\lambda_i}) = 0$$

e,

$$M_f \bar{\varphi} = \bar{\varphi} + \delta(f). \tag{3.6}$$

Note que, analogamente a 3.5,

$$\mathrm{var}_0(\bar{\varphi}) \leq \mathrm{var}_1(f).$$

Portanto, para $x \in X$ e $i > I_0$,

$$\bar{\varphi}(ix) - \bar{\varphi}(nx) \leq \mathrm{var}_0(\bar{\varphi}) \leq \mathrm{var}_1(f) < \inf f\Big|_{[n]} - \sup f\Big|_{[i]} \leq f(nx) - f(ix)$$

$$\Rightarrow (f + \bar{\varphi})(ix) < (f + \bar{\varphi})(nx) \text{ para todo } x \in X \text{ e } i > I_0 > n.$$

Em outros termos, se $J > n$ satisfaz $\mathrm{var}_1(f) < \inf f\Big|_{[n]} - \sup f\Big|_{[i]}$ para $i > J$, então

$$M_f\bar{\varphi}(x) = \sup_{y \in T^{-1}(x)} (f + \bar{\varphi})(y) = \max_{1 \leq j \leq J} (f + \bar{\varphi})(jx) \tag{3.7}$$

para todo $x \in X$.

Notemos que f é essencialmente compacta. Por 3.6, existe $\bar{\varphi} \in \mathcal{CB}(X)$ ponto fixo de $M_{f-\delta(f)}$. Ao considerar $Y = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{J} [j]$,

1. Para $x \in X$,

$$\begin{aligned} \hat{Y} : &= \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} Y \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^{J} [j] \right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1,\ldots,J} [x_1, j] \right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1,\ldots,J} [x_1, x_2, j] \right) \bigcap \ldots \\ &= \bigcup_{j_i=1}^{J} [j_1, j_2, j_3, \ldots] = \{1, 2, \ldots, J\}^{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

   é não vazio e compacto.

2. $T(Y) = X$.

3. para cada $x \in X$,

$$M_f\bar{\varphi}(x) \overset{3.6}{=} \bar{\varphi} + \delta(f) \overset{3.7}{=} \max_{1 \leq j \leq J} (f + \bar{\varphi})(jx) = \sup_{y \in T^{-1}(x) \cap Y} (f + \bar{\varphi})(y).$$

Finalmente, como a aplicação shift em X é sobrejetora e contínua (com respeito a métrica definida) e $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é separável e completo (portanto é um espaço polonês), ao utilizar 3.3.2 concluimos que $\tilde{f}$ é uma forma normal para f.

$\square$

Exemplo 3.3.11. *Considere $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $T : X \to X$ a aplicação shift. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ constante nos 2-cilindros, definida por $f[i,j] = \max g\big|_{C(i,j)}$, onde $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x(1-x)$ e*

$$C(i,j) = \left[\frac{1}{i+1+\frac{1}{j}}, \frac{1}{i+\frac{1}{j+1}}\right] \subset [0,1]$$

para $i, j \geq 1$.

Escolhendo $n = 2$, veremos que,

$$\mathrm{var}_1(f) < \inf f\big|_{[n]} - \sup f\big|_{[i]}.$$

Resolução 3.3.12. *Analisemos $f\big|_{[2]}$:*

$$f\big|_{[2]} = \max g\big|_{C(2,j)} = \max g\big|_{\left[\frac{1}{3+\frac{1}{j}}, \frac{1}{2+\frac{1}{j+1}}\right]}$$

Se $j = 1$, $\left[\dfrac{1}{3+\frac{1}{j}}, \dfrac{1}{2+\frac{1}{j+1}}\right] = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{5}\right]$.

Se $j \to \infty$, $\left[\dfrac{1}{3+\frac{1}{j}}, \dfrac{1}{2+\frac{1}{j+1}}\right] \to \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Implicando assim que,

$$\inf f\big|_{[2]} = \max g\big|_{\left[\frac{1}{4},\frac{2}{5}\right]} = g\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{25}.$$

Analisemos $\sup f\big|_{[i]}$ para i suficientemente grande:

$$\sup f\big|_{[i]} = g\left(\frac{1}{i}\right) \;\Rightarrow\; \limsup_{i\to\infty} f\big|_{[i]} = g(0) = 0$$

Logo, quando $i \to \infty$

$$\inf f\Big|_{[2]} - \sup f\Big|_{[i]} \;\to\; \frac{6}{25} - 0 = \frac{6}{25}.$$

Finalizando, analisemos $\mathrm{var}_1(f) = \sup |f[l, j_1] - f[l, j_2]|$.

Tomando $l = 1$, estaremos olhando para os intervalos que incluem o máximo e mínimo da função g:

$$f[1, j] = \max g\Big|_{\left[\frac{1}{2+\frac{1}{j}}, \frac{1}{1+\frac{1}{j+1}}\right]}.$$

Observemos que $\dfrac{1}{2+\frac{1}{j}} \leq \dfrac{1}{2}$ *e* $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+\frac{1}{j+1}} \leq 1$. *Então, o máximo da função g (quando g assume $1/2$) está em todo os intervalos. Ou seja,* $f[1, j] = g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. *Implicando assim,*

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_1(f) &= \sup |f[l, j_1] - f[l, j_2]| = \sup_{j_1, j_2 \in \mathbb{N}} f[1, j_1] - f[1, j_2] \\ &= g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Assim, vale 3.4. Pelo teorema anterior, f é essencialmente compacta, portanto tem uma forma normal que garante a existência de uma medida f-maximizante caracterizada pelo seu suporte.

□

Observação 3.3.13. *A função f do exemplo 3.2.17 não satisfaz 3.4, pois, para $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$-\frac{1}{2} \leq f[n+1, n] < 0 \text{ e } f[m, n] = -1 \text{ para } m \neq n+1,$$

resultando que:

$\inf f\Big|_{[n]} = -1$ *para todo n,*

$\sup f\Big|_{[i]} = 0$ *para i suficientemente grande.*

Como $\mathrm{var}_1(f) > 0$, *temos*

$$\mathrm{var}_1(f) > \inf f\big|_{[n]} - \sup f\big|_{[i]} = -1,$$

para i suficientemente grande e n qualquer.

Observação 3.3.14. *O teorema 3.3.10 pode ser estendido a subshifts do tipo finito em alfabetos contáveis e funções f de variação somável. Um estudo explorando esse assunto é encontrado em [7].*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Bartle, R. G., The elements of integration, New York, Wiley & Sons (1966).

[2] Brézis, H., Análisis funcional: Teoría y aplicaciones, Madrid, Alianza (1984).

[3] Bousch, T. e Jenkinson, O., Cohomology classes of dynamically non-negative C^k functions, *Inventiones Mathematicae,* **148** (2002), 207-217.

[4] Deuschel, J. D. e Stroock, D. W., Large Deviations, London, Academic Press (1989).

[5] Hoñig, C. S., Aplicações da topologia à análise, Rio de Janeiro, Impa (1976).

[6] Jenkinson, O., Mauldin, R. D. e Urbański, M., Ergodic optimization for noncompact dynamical systems, *Dynamical Systems,* **22** (2007), 379-388.

[7] Jenkinson, O., Mauldin, R. D. e Urbański, M., Ergodic optimization for countable alphabet subshifts of finite type, *Ergodic Theory and Dynamical Systems,* **26** (2006), 1791-1803.

[8] Jenkinson, O., Ergodic optimization, *Discrete and Continuous Dynamical Systems,* **15** (2006), 197-224.

[9] Jenkinson, O., Every ergodic measure is uniquely maximizing, *Discrete and Continuous Dynamical Systems,* **16** (2006), 383-392.

[10] Kolmogorov, A. N. e Fomin, S. V., Elementos de la teoria de funciones y del analisis funcional, Moscou, Mir (1972).

[11] Krengel, U., Ergodic theorems, Berlin, Walter de Guyter (1985).

[12] Lima, E. L., Espaços métricos, Rio de Janeiro, Impa (1993).

[13] Mañé, R., Introdução à teoria ergódica, Rio de Janeiro, Impa (1983).

[14] Rudin, W., Real and complex analysis, New York, McGraw-Hill (1987).

[15] Vestrup, E. M., The theory of measures and integration, New Jersey, Wiley (2003).

[16] Walters, P., An introduction to Ergodic Theory, New York, Springer-Verlag (1982).