

Guilherme Ramalho Saroka

**Análise de equações diferenciais parciais com  
condições de contorno dinâmicas: Teoria,  
implementação e aplicações com o método dos  
elementos finitos**

São Paulo, SP

2023

Guilherme Ramalho Saroka

**Análise de equações diferenciais parciais com condições de contorno dinâmicas: Teoria, implementação e aplicações com o método dos elementos finitos**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística – IME-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Universidade de São Paulo  
Instituto de Matemática e Estatística  
Mestrado em Matemática Aplicada

Orientador: Pedro Tavares Paes Lopes

São Paulo, SP  
2023

Guilherme Ramalho Saroka

**Análise de equações diferenciais parciais com condições de contorno dinâmicas: Teoria, implementação e aplicações com o método dos elementos finitos**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística – IME-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Trabalho aprovado. São Paulo, SP, 09 de novembro de 2023:

---

**Prof. Dr. Pedro Tavares Paes Lopes** – IME-USP  
Orientador

---

**Prof. Dr. Ernani Vitillo Volpe** – POLI-USP

---

**Prof. Dr. Honório Joaquim Fernando** – ICEx-UFF

São Paulo, SP  
2023

*Dedico esta conquista à memória das minhas queridas avós Luzia e Catharina.*

# Agradecimentos

Ao findar este ciclo da minha vida, gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que, de uma forma ou de outra, fizeram parte desta jornada.

Ao meu pai, Altair, e à minha mãe, Sandra, agradeço por todos os conselhos e pelo apoio incansável. Ao meu irmão, Leandro, agradeço pelas horas que passamos juntos em chamadas, sempre sendo uma excelente companhia nos estudos. E à minha noiva, Nedly, minha grande parceira, que esteve presente em cada conquista que alcancei, sendo meu maior incentivo para perseverar.

Nesses anos fui presenteado com grandes amigos e fortaleci laços. Aos meus queridos amigos Giovanna Castelo, Hermes Neto, João Pedro, Marcos Paulo, Rayan Gustavo, Victor Júlio e Vítor Tanajura. Que estiveram presentes em cada obstáculo desta conquista, compartilhando ensinamentos e risos em nosso dia a dia.

Aos meus orientadores de graduação, Alan Prata, Alessandro Gaio e Honório Joaquim, que foram pilares para minha formação como matemático e me prepararam para os desafios do mestrado. Ao meu atual orientador, Pedro Paes Lopes, que prontamente aceitou este desafiador projeto de pesquisa e tem sido uma presença constante em meus estudos, mesmo à distância. Sua contribuição efetiva foi fundamental para minha jornada até a conclusão do mestrado, por me mostrar os melhores caminhos a trilhar e me fortalecer nas adversidades. Vocês quatro são grande fonte de inspiração, e levarei todos seus ensinamentos para minha vida e trajetória profissional.

Agradeço ao IME-USP por ter me proporcionado aprendizado e crescimento profissional. A CNPq por ter tornado possível concluir este ciclo com exclusividade acadêmica, com foco nas disciplinas e na pesquisa.

Por fim, gostaria de agradecer aos ilustres membros da banca examinadora, o Professor Ernani Vitillo Volpe e, mais uma vez, ao Professor Honório Joaquim Fernando, pelas contribuições ao meu trabalho.



# Resumo

Neste trabalho, nosso objetivo é realizar o tratamento analítico e numérico de problemas de equações diferenciais parciais parabólicas com condições de contorno dinâmicas.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$  um domínio limitado e suave. O exemplo-modelo que utilizaremos é denominado problema de Wentzell, e pode ser declarado da seguinte forma: dados  $f \in L^2([0, \infty[, L^2(\Omega))$ ,  $u_0 \in H^1(\Omega)$  e  $\mu, \kappa > 0$ , encontrar  $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \text{ em } \Omega \times [0, \infty[, \\ -\partial_\nu u = \mu \partial_t u + \kappa u \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega. \end{cases}$$

Veremos que há uma única solução fraca

$$u \in L^2([0, \infty[; H^1(\Omega)) \cap H^1([0, \infty[; L^2(\Omega) \oplus L^2(\partial\Omega)),$$

para a formulação fraca do problema de Wentzell:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \kappa \int_{\Gamma} v u \, ds + \int_{\Omega} v \partial_t u \, dx + \mu \int_{\Gamma} \partial_t u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

para cada  $t \in [0, \infty[$  fixado. Cabe destacar que também abordaremos a contrapartida estacionária do problema de Wentzell.

Inicialmente, para o tratamento analítico, apresentaremos alguns resultados da teoria de espaços de Hilbert e Sobolev a fim de obter a existência e unicidade de soluções fracas para os problemas propostos. Após obter a solução fraca, discretizaremos os problemas (com uma e duas dimensões espaciais) para obter soluções aproximadas por meio do método dos elementos finitos. Serão desenvolvidos em Python os métodos Ritz-Rayleigh para problemas elípticos e o método de Crank-Nicolson para problemas parabólicos, tanto em uma quanto em duas dimensões. Em duas dimensões, utilizaremos a biblioteca open-source FEniCS. Por fim, a análise numérica está intrinsecamente relacionada ao estudo do erro e, conseqüentemente, da ordem de convergência. Demonstraremos os teoremas de ordem de convergência dos métodos aplicados aos problemas unidimensionais e ao problema bidimensional elíptico.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais parciais. Problema de Wentzell. Elementos finitos. Ritz-Rayleigh. Crank-Nicolson. FEniCS.

# Abstract

In this work, our objective is to perform the analytical and numerical treatment of problems involving parabolic partial differential equations with dynamic boundary conditions.

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$  be a bounded and smooth domain. The model example we will use is called the Wentzell problem, and it can be stated as follows: given  $f \in L^2([0, \infty[, L^2(\Omega))$ ,  $u_0 \in H^1(\Omega)$ , and  $\mu, \kappa > 0$ , find  $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= f \text{ in } \Omega \times [0, \infty[, \\ -\partial_\nu u &= \mu \partial_t u + \kappa u \text{ on } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ in } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega. \end{cases}$$

We will show that there exists a unique weak solution

$$u \in L^2([0, \infty[; H^1(\Omega)) \cap H^1([0, \infty[; L^2(\Omega) \oplus L^2(\partial\Omega)),$$

for the weak formulation of the Wentzell problem:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \kappa \int_{\Gamma} v u \, ds + \int_{\Omega} v \partial_t u \, dx + \mu \int_{\Gamma} \partial_t u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

for each fixed  $t \in [0, \infty[$ . It is worth noting that we will also address the stationary counterpart of the Wentzell problem.

Initially, for the analytical treatment, we will present some results from the theory of Hilbert and Sobolev spaces in order to obtain the existence and uniqueness of weak solutions for the proposed problems. After obtaining the weak solution, we will discretize the problems (with one and two spatial dimensions) to obtain approximate solutions using the finite element method. We will implement the Ritz-Rayleigh methods for elliptic problems and the Crank-Nicolson method for parabolic problems in Python, both in one and two spatial dimensions. In two dimensions, we will use the open-source FEniCS library. Finally, the numerical analysis is intrinsically related to the study of error and, consequently, the order of convergence. We will demonstrate convergence order theorems for the methods applied to one-dimensional problems and the two-dimensional elliptic problem.

**Keywords:** Partial differential equations. Wentzell problem. Finite elements. Ritz-Rayleigh. Crank-Nicolson. FEniCS.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo: Reservatório de água 3D e sua representação 1D. . . . .	5
Figura 2 – 1D FEM: Base de splines lineares. . . . .	30
Figura 3 – 1D FEM: Splines. . . . .	32
Figura 4 – 1D FEM: Derivadas. . . . .	32
Figura 5 – Aproximações para o problema unidimensional: Poisson Robin. . . . .	34
Figura 6 – Reta de ordem de convergência: Poisson Robin unidimensional. . . . .	41
Figura 7 – 2D FEM: Triangulação em um quadrado unitário. . . . .	43
Figura 8 – 2D FEM: Enumeração e os suportes de $\phi_1$ e $\phi_{19}$ . . . . .	44
Figura 9 – 2D FEM: Suporte de $\phi_{13}$ . . . . .	45
Figura 10 – Cálculo de $A_{13,7}$ : Região de integração. . . . .	45
Figura 11 – Cálculo de $A_{13,8}$ . . . . .	46
Figura 12 – Cálculo de $A_{13,12}$ . . . . .	47
Figura 13 – Cálculo de $A_{13,13}$ . . . . .	47
Figura 14 – FEniCS: Malha. . . . .	49
Figura 15 – Aproximações para o problema bidimensional: Elíptico Robin. . . . .	52
Figura 16 – Reta de ordem de convergência: Poisson Robin bidimensional. . . . .	56
Figura 17 – Aproximações para o problema unidimensional: Calor Robin. . . . .	64
Figura 18 – Aproximações para o problema bidimensional: Calor Robin. . . . .	72
Figura 19 – Método de Newton: Iterações vs Erro. . . . .	77
Figura 20 – Aproximações para o problema unidimensional: Calor Dinâmicas. . . . .	79
Figura 21 – Aproximações para o problema bidimensional: Calor Dinâmicas. . . . .	82
Figura 22 – Aproximações para o problema unidimensional: Laplace Dinâmicas. . . . .	88
Figura 23 – Aproximações para o problema bidimensional: Poisson Dinâmicas. . . . .	91
Figura 24 – Aproximações para a equação do calor unidimensional: Robin Vs Dinâmicas. . . . .	92
Figura 25 – Aproximações para a equação do calor bidimensional: Robin Vs Dinâmicas. . . . .	93
Figura 26 – Interpretação dos operadores – Teorema de Lax-Milgram. . . . .	108
Figura 27 – Função módulo na reta. . . . .	109
Figura 28 – Derivada fraca da função módulo na reta. . . . .	110

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Ordem de convergência ( $\ \cdot\ _{L^\infty}$ ) do problema unidimensional: Poisson Robin. . . . .	39
Tabela 2 – Ordem de convergência ( $\ \cdot\ _{L^2}$ ) do problema unidimensional: Poisson Robin. . . . .	40
Tabela 3 – Ordem de convergência do problema bidimensional: Poisson Robin. . .	55
Tabela 4 – Ordem de convergência do problema unidimensional: Calor Robin. . . .	69
Tabela 5 – Ordem de convergência do problema bidimensional: Calor Robin. . . .	72
Tabela 6 – Ordem de convergência do problema unidimensional: Calor Dinâmicas. .	79
Tabela 7 – Ordem de convergência do problema bidimensional: Calor Dinâmicas. .	82
Tabela 8 – Ordem de convergência do problema unidimensional: Laplace Dinâmicas. .	89
Tabela 9 – Ordem de convergência do problema bidimensional: Poisson Dinâmicas. .	91

# Lista de abreviaturas e siglas

EDO            Equação Diferencial Ordinária

EDP            Equação Diferencial Parcial

$\mu$ -q.t.p         $\mu$ -quase todo ponto

# Lista de símbolos

$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão $n$
$H$	Espaço de Hilbert
$\Omega$	Região do espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$ , $d = 1, \dots, n$
$\Gamma$ ou $\partial\Omega$	Fronteira da região $\Omega$
$\mu$	Medida de Lebesgue
$C^0(\Omega)$	Espaço das funções contínuas definidas de $\Omega$ para $\mathbb{R}$
$C^\infty(\Omega)$	Espaço das funções definidas de $\Omega$ para $\mathbb{R}$ com derivadas contínuas de todas as ordens
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções definidas de $\Omega$ para $\mathbb{R}$ Lebesgue-mensuráveis
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de funções em $L^p(\Omega)$ $k$ -vezes fracamente diferenciáveis
$H^k(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções em $W^{k,2}(\Omega)$
$\nabla \cdot F$	Divergente de $F$
$C_c^\infty(\Omega)$	Espaço das funções de classe $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto
$\partial_{x_j}$	Derivada parcial na direção $x_j$
$C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, \infty[)$	Espaço de funções de classe $C^2$ em $\bar{\Omega}$ e de classe $C^1$ em $[0, \infty[$
$\mathbb{P}^n$	Espaço dos polinômios de grau $n$

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Equações diferenciais</b>	<b>3</b>
1.1.1	Equações de Laplace e Poisson	3
1.1.2	Equação do calor	3
1.1.3	Condições iniciais e de contorno	4
<b>1.2</b>	<b>Ferramentas de análise funcional</b>	<b>7</b>
1.2.1	Espaços de Hilbert	7
1.2.2	Teorema de Lax-Milgram	10
1.2.3	Espaços de Sobolev	12
1.2.4	Espaços de Sobolev com valores em espaços de Hilbert	16
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ABSTRATOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Formulação fraca de problemas elípticos abstratos</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Formulação fraca de problemas parabólicos abstratos</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>EQUAÇÃO DE POISSON COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DE ROBIN</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Formulação fraca do problema de Poisson Robin</b>	<b>25</b>
<b>3.2</b>	<b>Caso unidimensional do problema de Poisson Robin</b>	<b>28</b>
3.2.1	Elementos finitos em uma dimensão	29
3.2.2	Ordem de convergência	34
<b>3.3</b>	<b>Caso bidimensional do problema Poisson Robin</b>	<b>42</b>
3.3.1	Elementos finitos em duas dimensões	42
3.3.2	Esparsidade da matriz global	44
3.3.3	Introdução ao FEniCS	48
<b>3.4</b>	<b>Equação de Poisson bidimensional com condições de contorno de Robin</b>	<b>50</b>
<b>4</b>	<b>PROBLEMAS PARABÓLICOS</b>	<b>57</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>57</b>
<b>4.2</b>	<b>Equação do calor com condições de contorno de Robin</b>	<b>57</b>
4.2.1	Formulação fraca	57
4.2.2	Equação do calor unidimensional com condições de contorno de Robin	58
4.2.3	Equação do calor bidimensional com condições de contorno de Robin	69
<b>4.3</b>	<b>Equação do calor com condições de contorno dinâmicas</b>	<b>72</b>

4.3.1	Formulação fraca do problema de Wentzell . . . . .	73
4.3.2	Problema de Wentzell unidimensional . . . . .	73
4.3.3	Problema de Wentzell bidimensional . . . . .	79
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>5.1</b>	<b>Equação de Poisson com condições de contorno dinâmicas . . . . .</b>	<b>84</b>
5.1.1	Formulação fraca . . . . .	84
5.1.2	Equação de Laplace unidimensional com condições de contorno dinâmicas . . . . .	85
5.1.3	Equação de Poisson bidimensional com condições de contorno dinâmicas . . . . .	89
<b>5.2</b>	<b>Impacto da condição de contorno para uma condição inicial fixa . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>5.3</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>5.4</b>	<b>Projetos futuros . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>A.1</b>	<b>Espaços com produto interno . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>A.2</b>	<b>Espaços de Banach e Hilbert . . . . .</b>	<b>98</b>
A.2.1	Espaços de Banach . . . . .	98
A.2.2	Espaços de Hilbert . . . . .	99
<b>A.3</b>	<b>Projeção Ortogonal . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>A.4</b>	<b>Teoremas de Riez e Lax-Milgram . . . . .</b>	<b>103</b>
A.4.1	Teorema da representação de Riesz . . . . .	103
A.4.2	Teorema de Lax-Milgram . . . . .	104
<b>A.5</b>	<b>Espaços de Sobolev . . . . .</b>	<b>109</b>
A.5.1	Derivada fraca . . . . .	109
A.5.2	Espaços de Sobolev . . . . .	111
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>114</b>

# 1 Introdução

Em muitos fenômenos naturais a necessidade de predição e compreensão adequada surge naturalmente. Fenômenos físicos, biológicos, químicos e a formulação de modelos matemáticos, como probabilísticos, podem ser descritos via **Equações Diferenciais**. Temos como exemplos modelos atmosféricos, de escoamento de fluídos, de problemas de elasticidade, entre outros.

As Equações Diferenciais são divididas entre **Ordinárias** (EDOs), equações cujas derivadas dependem de apenas uma variável independente (geralmente associada ao tempo), e as **Parciais** (EDPs), que são equações cujas derivadas dependem de duas ou mais variáveis independentes (geralmente associadas ao espaço e tempo). Para boa parte das EDOs não é possível explicitar uma solução analítica, isso se agrava nas EDPs. Desse modo, torna-se importante a elaboração de ferramentas computacionais atreladas à teoria de análise numérica.

Quando buscamos aproximar numericamente a solução de uma EDP, dois métodos numéricos se destacam. São eles: Diferenças Finitas, comumente chamado de FDM (Finite Difference Method) e Elementos Finitos, FEM (Finite Elements Method). Sendo que o FDM possui variantes, de acordo com a escolha para aproximação das derivadas e o FEM possui variações de acordo com a definição dos elementos e a classe de funções utilizada. Algumas dessas variantes serão abordadas ao longo do trabalho. Além desses métodos, é relevante mencionar o Método dos Volumes Finitos, que também desempenha um papel crucial na aproximação numérica de soluções de EDPs, especialmente em problemas complexos de fluxo na Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD).

Neste capítulo, apresentaremos os tipos de equações diferenciais e as condições de contorno cruciais para o desenvolvimento deste trabalho. Começaremos estabelecendo as equações de Laplace, Poisson e calor. Em seguida, discutiremos as condições iniciais e apresentaremos algumas das principais condições de contorno encontradas na literatura. Além disso, faremos uso de ferramentas da teoria de análise funcional, como espaços de Hilbert, o teorema de Lax-Milgram e os espaços de Sobolev, que são fundamentais para a compreensão dessas equações e a resolução de problemas mais complexos. Os resultados deste capítulo serão usados ao longo de toda a dissertação.

A título de exemplo, no capítulo 4, estudamos problemas governados pela equação do calor. Mais especificamente, nosso interesse recai a um problema com condições de contorno dinâmicas, denominado: o problema de Wentzell. Este é um dos casos abordados por Balázs Kovács e Christian Lubich em [1], que foi a principal motivação para a elaboração deste trabalho.

Problemas com condições de contorno dinâmicas estão no centro de pesquisas atuais, como destacado por Alain Miranville em [2]. Numericamente, a presença de condições de contorno dinâmicas não homogêneas em problemas parabólicos não lineares (um tópico de estudo para projetos futuros) não havia sido abordada na literatura matemática até a publicação de [2]. Miranville também faz menção a uma série de autores dedicados à investigação numérica dessa classe de problemas.

Como mencionado anteriormente, as EDPs desempenham um papel fundamental em diversos fenômenos de grande relevância, sendo que as condições de contorno dinâmicas. Este tipo de condições de contorno são especialmente importantes para simulações de fluxo compressível, devido ao caráter hiperbólico que o mecanismo convectivo exibe no domínio tempo-espaço. Consulte o trabalho de Lax sobre ondas de choque [3]. Além disso, segundo [2], essas condições de contorno são encontradas em fenômenos como superaquecimento (ou resfriamento), efeitos da tensão superficial, zonas de separação e interações com as paredes em sistemas confinados. Consequentemente, uma ampla variedade de aplicações industriais está relacionada a esse campo de estudo.

Por fim, recomendaremos cinco referências que abordam com maior profundidade os temas do capítulo atual e que foram de extrema importância para a elaboração dos capítulos seguintes: [4], [5], [6], [7] e [8].

Nesse capítulo de introdução (Capítulo 1), o dividimos em duas partes. Primeiramente, na Seção 1.1, fornecemos uma visão geral das equações diferenciais, com foco nas equações de Laplace e Poisson, na equação do calor e nas condições iniciais e de contorno. Em seguida, aprofundamos nas ferramentas da análise funcional, apresentadas na Seção 1.2, introduzindo espaços de Hilbert, o teorema de Lax-Milgram e espaços de Sobolev. No Capítulo 2, formulamos problemas abstratos em equações diferenciais, apresentando formulações fracas para problemas elípticos e parabólicos. Os capítulos subsequentes (3 e 4) aplicam essas formulações a problemas específicos. O tratamento numérico também é discutido, explorando métodos de elementos finitos para casos unidimensionais e bidimensionais. O trabalho conclui com considerações finais no Capítulo 5, abordando um problema adicional, representado pela equação de Poisson com condições de contorno dinâmicas. Analisamos o impacto da escolha das condições de contorno em condições iniciais fixas e apresentamos conclusões e perspectivas futuras. Adicionalmente, um apêndice (Capítulo A) fornece algumas demonstrações de resultados apresentados na Seção 1.2.



## 1.1 Equações diferenciais

### 1.1.1 Equações de Laplace e Poisson

Considere a EDP elíptica:

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$  é um aberto e o **operador de Laplace**  $\Delta$ , também chamado de **Laplaciano**, age apenas nas variáveis  $x$  e é definido por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Dizemos que

- Se  $f = 0$ , então a equação (1.1) é denominada **equação de Laplace**.
- Se  $f \neq 0$ , então a equação (1.1) é denominada **equação de Poisson**.

### 1.1.2 Equação do calor

Considere a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla j(x, t) = f(x, t).$$

Podemos estudar diferentes casos para a equação acima. O primeiro que vale a pena mencionar é a **equação do transporte**, que é obtida através da substituição  $j(x, t) = vu(x, t)$ , sendo  $v$  o **campo de velocidades**, que é constante. Obtemos assim

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + v \nabla u(x, t) = f(x, t), \quad \text{tal que } (x, t) \in \Omega \times ]0, \infty[. \quad (1.2)$$

Um aspecto muito relevante para a mecânica dos fluidos é o fato de que, geralmente, a velocidade de convecção é não uniforme e/ou não constante. Em tais casos, é necessário recorrer à equação de continuidade para simplificar o termo convectivo. Além disso, estamos acostumados a observar uma contração entre o vetor de velocidade e o operador de gradiente, que está ausente porque o problema é unidimensional.

O segundo caso, que nos leva a um dos principais objetos de estudo desse trabalho, é a **equação do calor/difusão**, obtida substituindo  $j(x, t) = -\kappa \nabla u$  em que  $\kappa > 0$  é o **coeficiente de difusão térmica**.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \kappa \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad \text{tal que } (x, t) \in \Omega \times ]0, \infty[. \quad (1.3)$$

Obtemos, assim, uma equação parabólica, em que a variável  $t \in [0, \infty[$  corresponde ao tempo e  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  ao espaço. Além disso, dizemos que a EDP é **homogênea** caso

o termo fonte  $f$  seja zero para todo  $(x, t)$ , e **não-homogênea** caso o contrário. Cabe notar que é possível fazer a combinação entre as equações (1.2) e (1.3). Fisicamente, uma aplicação originada dessa combinação entre as duas equações culmina na modelagem da dispersão de algum poluente em um rio

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \kappa \Delta u(x, t) + v \nabla u(x, t) = f(x, t), \quad \text{tal que } (x, t) \in \Omega \times ]0, \infty[. \quad (1.4)$$

### 1.1.3 Condições iniciais e de contorno

Considere o caso em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , é um aberto limitado e suficientemente regular e denote por  $\partial\Omega$  a fronteira de  $\Omega$ . Inicialmente, vamos nos lembrar um pouco da teoria de EDOs. Sabemos que para obter a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial ordinária do tipo  $u'(t) = f(t, u(t))$  precisamos de uma condição inicial. Com a equação do calor (1.3), o análogo ocorre: precisamos conhecer  $u(x, 0)$  para todo  $x \in \Omega$  para determinar a solução de maneira única. Contudo, para o problema elíptico (1.1) a condição inicial não é necessária, por ser invariante no tempo.

Quanto às condições de contorno, podemos dizer que existem três condições que são as mais presentes em problemas de equações diferenciais. São elas

i) **Dirichlet:** a condição de Dirichlet é dada por

$$u(x, t) = g(x, t), \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.5)$$

De modo que, se  $g \neq 0$ , a condição (1.5) é dita não homogênea. Caso  $g \equiv 0$  a condição (1.5) é dita homogênea. Do ponto de vista da equação do calor (1.3), é como se estivéssemos atribuindo diretamente valores da temperatura  $u$  na fronteira.

ii) **Neumann:** sendo  $j$  o vetor do fluxo de energia ( $J/(m^2s)$ ), dado por  $j(x, t) = -\kappa \nabla u(x, t)$ . A condição de Neumann é dada por:

$$j(x, t) \cdot \nu(x) = g(x, t), \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.6)$$

De modo que, assim como no caso anterior, classificamos a homogeneidade da condição (1.6) de acordo com os valores de  $g$ . Novamente, no ponto de vista da equação do calor (1.3),  $g$  controla o fluxo de calor. Caso não haja fluxo de calor na fronteira, dizemos que o sistema é isolado. Nesse caso, a condição de Neumann equivale a  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ , em que  $\nu$  é a normal que aponta para fora de  $\partial\Omega$ .

iii) **Robin:** a condição de Robin é dada por:

$$j(x, t) \cdot \nu(x) = \lambda u(x, t) + g(x, t), \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.7)$$

Nesse caso, o fluxo de calor é proporcional a temperatura. Essa condição equivale a  $\kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\lambda u - g$ , caso  $j = -\kappa \nabla u$ .

**Observação 1.1.1.** Se  $u$  for suficientemente regular, a derivada direcional  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  pode ser definida como  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ .

**Exemplo 1.1.1.** O curso de análise numérica desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento de muitas das análises que serão feitas ao longo deste trabalho. Especificamente, no projeto final [9], nos concentramos em um problema de dispersão de poluentes que foi resolvido por meio da implementação de elementos finitos. Este exemplo envolve a modelagem da dispersão de um poluente específico em um reservatório de água retangular com comprimento  $L$ .

Se supormos que o comportamento de cada seção transversal do tanque é uniforme, podemos modelar o problema unidimensionalmente, como mostra a Figura 1.

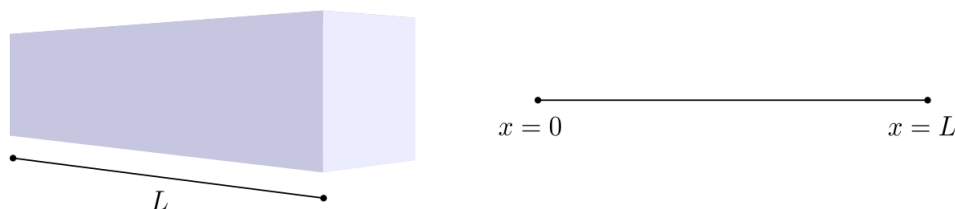


Figura 1 – Exemplo: Reservatório de água 3D e sua representação 1D.

O objetivo é obter a concentração de poluente  $\phi$  no reservatório na posição  $x$  e instante de tempo  $t$ , dada em  $g/m^3$  pela equação

$$\begin{aligned} \phi : [0, L] \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \phi(x, t). \end{aligned}$$

É importante observar que aqui cada ponto  $x \in [0, L]$  representa uma seção transversal do tanque. Vamos adotar as seguintes notações e definições:

- $J(x, t)$ : é o fluxo difusivo, isto é, a quantidade de contaminante que passará por uma certa seção transversal por unidade de tempo. (unidade  $g/(m^2s)$ ).
- $\mu(x)$ : é um coeficiente de difusão, que depende, por exemplo, da viscosidade do meio e da temperatura. Quanto menor for  $\mu$ , mais lento será o processo de difusão. (unidade  $m^2/s$ ).
- $F(x, t)$  representa a fonte de poluentes, em  $g/(m^3s)$ , ou seja, a quantidade de poluentes adicionada ou retirada no ponto  $x$  do tanque no instante  $t$ .

Supomos que a água que preenche o reservatório está inicialmente em repouso. A difusão do poluente no meio se dá, então, de acordo com a **lei de Fick**, que afirma que o poluente é difundido de regiões com concentração mais alta para mais baixa, havendo uma

tendência ao equilíbrio. Com isso, lembrando que o gradiente de uma função aponta para a direção de seu maior crescimento, podemos expressar a lei matematicamente usando menos o gradiente de concentração. Levando em conta a viscosidade do meio, temos a seguinte forma

$$J(x, t) = -\mu(x) \frac{\partial}{\partial x} (\phi(x, t)). \quad (1.8)$$

Fixados intervalos de tempo e espaço  $\Delta t$  e  $\Delta x$ , sabemos que a concentração de poluente no instante  $t + \Delta t$  será igual à concentração do instante anterior somada à variação de concentração devido ao fluxo de difusão  $J$  no intervalo  $[x, x + \Delta x]$ , somada à quantidade de poluentes adicionada ou retirada do reservatório devido à fonte de poluentes  $F$ . Desse modo, podemos modelar a equação da difusão (ou calor) que junto com condições iniciais e de fronteira, definem a distribuição de poluente ao longo do tempo no reservatório.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) - F(x, t) = 0, \quad t \in [0, \infty) \text{ e } x \in [0, L] \\ \phi(t, 0) = a, \quad t \in [0, \infty) \\ \phi(t, L) = b, \quad t \in [0, \infty) \\ \phi(0, x) = \phi_0, \quad x \in (0, L) \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Um caso particular do problema (1.9) é o caso em que a distribuição da concentração de poluente no reservatório é invariante no tempo, isto é,  $\partial_t \phi(x, t) = 0$ . Neste caso, dizemos que o regime é **estacionário**, caso contrário, que é o caso (1.9), o regime é dito **transiente**. Então, obtemos de (1.9) que o problema governante no regime estacionário é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) \right] - F(x, t) = 0, \quad x \in [0, L] \\ \phi(0) = a \\ \phi(L) = b \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Nessa equação, estamos lidando com um problema de difusão em um domínio unidimensional com condições de contorno de Dirichlet. Conhecendo o coeficiente de dispersão  $\mu$ , a fonte de poluentes  $F$  e a concentração de poluentes nas extremidades do reservatório  $\varphi$ , podemos buscar algum modo de obter a solução dos problemas acima.

**Observação 1.1.2.** Temos outras equações que representam outros fenômenos físicos que se assemelham à lei de Fick (1.8). Uma delas é pela **lei de Hooke** na teoria da **elasticidade**, a qual substituímos  $\mu$  por  $\sigma$ , parâmetro relacionada a elasticidade do material. Outra é dada pela **lei de Fourier**, a qual substituímos  $\mu$  por  $\kappa$ , parâmetro relacionada a condução de calor em um material. Para mais detalhes, veja a discussão sobre leis constitutivas em [10].

## 1.2 Ferramentas de análise funcional

Nesta seção, introduziremos alguns resultados de análise funcional no intuito de utilizá-los como ferramentas para provar a boa colocação dos problemas de equações diferenciais que queremos abordar. Inicialmente, introduziremos o conceito de espaços vetoriais com produto interno. A partir do produto interno, podemos definir a norma e a métrica em um espaço vetorial  $V$ , que são duas funções muito importantes em análise e geometria, mais especificamente no estudo de projeções.

**Definição 1.2.1.** Um espaço com **produto interno** é um espaço vetorial  $V$  equipado com uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada de **produto interno**, que satisfaz as propriedades

- i.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,  $\forall x \in V$ ,  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$  (Positividade).
- ii.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (Simetria).
- iii.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  (Homogeneidade).
- iv.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  (Bilinearidade).

A partir do produto interno, podemos definir a **norma**  $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$  em  $V$ , induzindo um **espaço normado**, e a métrica  $d(u, v) = \|u - v\|$ , induzindo um **espaço métrico**.

Podemos relacionar o produto interno de dois vetores com as suas normas, estabelecendo que o valor absoluto do produto interno é menor ou igual ao produto das normas. Esse resultado é denominado **desigualdade de Cauchy-Schwarz**. Ela será amplamente utilizada para provar e estabelecer cotas superiores e inferiores.

**Proposição 1.2.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** *Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  um produto interno em  $V$  com a norma  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ . Então,*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

**Demonstração.** Veja a Proposição [A.1.1](#).

### 1.2.1 Espaços de Hilbert

Em espaços vetoriais normados, é bastante usual caracterizarmos muitas noções de topologia por meio de sequência. Para tanto, são necessários os conceitos de convergência e completude em um espaço normado. Desse modo, apresentaremos as definições de espaço de Banach e o principal tipo de espaço tratado nesse trabalho: o espaço de Hilbert.

**Definição 1.2.2.** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço normado  $M$  é dita **convergente** (ou **fortemente convergente**) se existe  $u \in M$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $N$  tal que, se  $n \geq N$ , então  $|x_n - u| < \varepsilon$ . Além disso, uma sequência é dita de **Cauchy** se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $N$  tal que, se  $m, n \geq N$ , então  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ . Dizemos que um **espaço normado é completo** se toda sequência de Cauchy converge no espaço. Um **espaço de Banach** é um espaço normado completo, por definição. Finalmente, um espaço completo cuja norma seja proveniente de um produto interno é chamado de espaço de **Hilbert**.

Agora, apresentaremos alguns resultados importantes dos espaços de Hilbert. No Capítulo 3, utilizaremos as duas proposições a seguir, cujas demonstrações e outras propriedades dos espaços de Hilbert podem ser encontradas em [7] e [8]. A primeira proposição atua como uma espécie de teorema de Bolzano-Weierstrass generalizado para espaços de Hilbert. Enquanto a segunda proposição demonstra que operadores lineares compactos implicam convergência fraca em convergência forte para espaços de Hilbert. Suas demonstrações são obtidas em [5].

**Definição 1.2.3.** Seja  $X$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$ . Um **funcional linear** em  $X$  é uma aplicação linear  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. O conjunto de todos os funcionais lineares será denotado por  $X^*$ . A norma de  $f$  é

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)|.$$

**Definição 1.2.4.** Dizemos que uma sequência  $(x_n)$  de  $H$  é **fracamente convergente** para um elemento  $x$  se, para cada funcional linear contínuo  $f$  no dual  $H^*$ , a sequência  $(f(x_n))$  converge para  $f(x)$ . Notação:  $(x_n) \rightharpoonup x$ .

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável, isto é, existe um subconjunto  $S \subset H$  que seja enumerável e denso em  $H$ . Então toda sequência limitada em  $H$  admite uma subsequência fracamente convergente.*

**Proposição 1.2.3.** *Sejam  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert, e seja  $T : H_1 \rightarrow H_2$  um operador linear. Então as afirmações são equivalentes:*

- i)  $T$  é compacto.*
- ii) Qualquer sequência  $u_n$  que converge fracamente a  $u$  em  $H_1$  é tal que  $Tu_n$  converge fortemente a  $Tu$  em  $H_2$ .*

Consideremos  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ . Precisamos de algumas definições prévias para apresentar alguns dos mais importantes espaços de Banach e Hilbert deste trabalho.

**Definição 1.2.5.** Dizemos que uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é **mensurável** se para todo  $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \Omega \mid f(x) < a\} \text{ é Lebesgue mensurável.}$$

Se  $f$  e  $g$  são funções mensuráveis, dizemos que  $f = g$  em  $\mu$ -quase todo ponto ( $\mu$ -q.t.p) se diferem apenas em um conjunto de medida de Lebesgue nula. Seja  $1 \leq p < \infty$ , definimos o espaço das funções denominadas  $p$ -Lebesgue integráveis

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} \mid \int_{\Omega} |\varphi|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}.$$

Para  $p = \infty$  definimos o espaço das funções essencialmente limitadas

$$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} \mid \exists M > 0 \text{ tal que } |\varphi| \leq M \quad \mu - q.t.p. \right\}.$$

Observe que o espaço  $\mathcal{L}^p$  tem estrutura de espaço vetorial, mas não é normado, pois se tomarmos  $f, g \in \mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$  onde ambas têm o mesmo valor, exceto em um conjunto de medida nula, então

$$\int_{\Omega} |f - g|^p dx = 0 \not\Rightarrow f = g.$$

Para dar uma estrutura de espaço normado, consideramos a relação de equivalência: duas funções são  $\mu$  equivalentes se são iguais em  $\mu$ -q.t.p.

**Definição 1.2.6.** Seja  $1 \leq p < \infty$ . Definimos o espaço  $L^p(\Omega)$  como o espaço de **todas as classes de equivalência das funções Lebesgue-mensuráveis**. Além disso, o espaço  $L^p(\Omega)$  é munido de uma norma natural  $\|\cdot\|_{L^p}$ , dada por

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para qualquer } f \in L^p(\Omega).$$

Para o espaço  $L^{\infty}(\Omega)$  das funções mensuráveis em  $\Omega$  e que são essencialmente limitadas em  $\Omega$ , definimos a norma

$$\|g\|_{L^{\infty}} := \inf\{M \mid |f(x)| \leq M, \mu\text{-q.t.p.}\}.$$

Por fim, dizemos que  $f$  está **localmente** em  $L^p(\Omega)$ , ou  $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ , se  $f \in L^p(K)$  para todo  $K \subset \Omega$  compacto.

Vale observar que agora obtemos a estrutura de espaços vetoriais normados, mas não só isso. O teorema de Riesz-Fischer (vide [11]) nos dá que  $\|\cdot\|_{L^p}$  é uma norma completa em  $L^p(\Omega)$ . Portanto  $L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach.

Para o caso particular em que  $p = 2$ , temos que para quaisquer  $f, g \in L^2(\Omega)$ , a função  $\|\cdot\|_{L^2}$  dada por

$$\|f\|_{L^2} = \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.11}$$

define uma norma proveniente do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$  definido por

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} fg \, dx. \quad (1.12)$$

Como o espaço  $L^p(\Omega)$  munido da norma  $\|\cdot\|_{L^p}$  é um espaço de Banach para  $p \in [1, \infty)$ , temos que  $L^2(\Omega)$  munido  $\|\cdot\|_{L^2}$  também é. Além disso, como esta norma é derivada do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ , podemos concluir que  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert.

## 1.2.2 Teorema de Lax-Milgram

Sobre espaços de Hilbert, funcionais lineares apresentam limitações quanto a forma que eles podem assumir. O Teorema 1.2.1 da representação de Riesz torna esta ideia mais precisa. Adicionalmente, visando contornar algumas limitações do teorema da representação de Riesz, em especial nos casos em que o operador diferencial não é simétrico, consideramos o estudo do Teorema 1.2.2 de Lax-Milgram. Antes de enunciarmos os teoremas, o exemplo a seguir nos mostra que um produto interno pode facilmente definir um funcional linear.

**Exemplo 1.2.1.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Fixado  $y \in H$ , podemos definir o operador  $\ell_y : H \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), tal que  $\ell_y(x) = \langle x, y \rangle$ .

Note que  $\ell_y$  é linear pela linearidade do produto interno. Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 1.2.1),

$$|\ell_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Logo  $\ell_y$  pertence ao dual de  $H$  ( $H^*$ ). A continuidade é verificada por

$$|\ell_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \implies \frac{|\ell_y(x)|}{\|x\|} \leq \|y\| \implies \|\ell_y\|_{H^*} \leq \|y\|.$$

Além disso, se  $\ell_y \neq 0$ , então  $y \neq 0$ . Logo, para  $x = y$  temos que

$$\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \ell_y(y) \leq \|\ell_y\|_{H^*} \|y\| \implies \|y\| \leq \|\ell_y\|_{H^*}.$$

Portanto,  $\|\ell_y\|_{H^*} = \|y\|$ .

Para cada  $y \in H$ , construímos de maneira natural um funcional  $\ell_y$  associado a  $y$ . Pelo teorema da representação de Riesz estes são os únicos elementos de  $H^*$ . Assim, a aplicação de  $H^*$  para  $H$  que associa a cada  $f \in H^*$  para um único  $y \in H$  tal que  $f(x) = \langle y, x \rangle$  para todo  $x \in H$  é uma isometria linear bijetiva.

**Teorema 1.2.1. (Representação de Riesz)** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $f$  um funcional linear contínuo sobre  $H$ . Então existe um único elemento  $y \in H$  tal que  $f(x) = \langle x, y \rangle$  para todo  $x \in H$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno sobre  $H$ . Além disso,*

$$\|f\|_* := \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_H} = \|y\|_H.$$



**Demonstração.** Veja o Teorema A.4.1.  $\square$

O teorema de Lax-Milgram pode ser interpretado como uma forma alternativa do teorema de Riesz, mas com uma forma bilinear no lugar do produto interno.

**Definição 1.2.7.** Seja  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear. Dizemos que  $b$  é **limitada** (ou **contínua**) se

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } |b(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.13)$$

Dizemos que  $b$  é **coerciva** se

$$\exists \beta > 0 \text{ tal que } b(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H. \quad (1.14)$$

Dizemos que  $b$  é **simétrica** se

$$b(u, v) = b(v, u), \quad \forall u, v \in H. \quad (1.15)$$

**Corolário 1.2.1. (Lax-Milgram Simétrico)** *Seja  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear limitada, coerciva e simétrica. Então, para todo  $f \in H^*$ , existe único  $u_f \in H$ , tal que*

$$b(u_f, v) = f(v), \quad \forall v \in H.$$

**Demonstração.** Veja o Corolário A.4.1.

**Exemplo 1.2.2.** Vamos considerar o seguinte problema com condições de contorno Dirichlet homogêneas:

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \cdot F(u) = f \text{ em } \Omega \times ]0, T] \\ u(x, t) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times ]0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1.16)$$

- i) Caso  $F(u) = -\nabla u$ , temos a equação do calor  $\partial_t u - \Delta u = f$ . Para o problema estacionário, temos a equação elíptica  $-\Delta u = f$ . Na subseção seguinte estudaremos algumas propriedades dos espaços de Sobolev. Dentre eles, daremos maior ênfase ao espaço  $H_0^1(\Omega) = H_0^1$ , um subespaço de  $H^1(\Omega)$  tal que se  $\varphi \in H_0^1$ , então  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \implies \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}.$$

Desse modo, podemos definir  $b : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $b(u, \varphi) = \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2}$ . Então, podemos ver facilmente que  $b$  define uma forma bilinear simétrica. Além disso, no exemplo 1.2.4 mostraremos que  $b$  é limitada e coerciva. Portanto o teorema de Riesz 1.2.1 é suficiente para garantir a existência e unicidade de uma solução fraca para o problema estacionário de (1.16).

- ii) Considere os problemas de difusão com convecção estacionário obtido quando  $F(u) = -\nabla u + uv$ , ou seja,  $-\Delta u + v \nabla u = 0$ , onde  $u$  é um **campo escalar** e  $v$  um **campo vetorial**. Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos reformular o problema para sua forma variacional

$$b(u, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \text{em que} \quad b(u, \varphi) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + v \cdot \nabla u \varphi) \, dx.$$

Contudo, observamos claramente que  $b(u, \varphi) \neq b(\varphi, u)$ . Logo o teorema de Riesz não é suficiente para garantir a existência e unicidade de solução utilizando a forma bilinear  $b$ .

O exemplo anterior nos mostra que o Corolário 1.2.1 estabelece uma condição suficiente para a existência e unicidade de soluções de certas equações diferenciais. No entanto, observando o item ii), surge a questão se essa condição pode ser enfraquecida ou se há uma formulação mais geral do teorema. É nesse contexto que apresentamos o teorema de Lax-Milgram, uma generalização do resultado anterior que permite uma maior flexibilidade nas hipóteses, sem comprometer a validade do resultado. Este teorema é fundamental para o estudo de problemas variacionais em espaços de Hilbert.

**Teorema 1.2.2. (Teorema de Lax-Milgram)** *Seja  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear limitada e coerciva. Então, para todo  $f \in H^*$ , existe único  $u_f \in H$ , tal que*

$$b(u_f, v) = f(v), \quad \forall v \in H.$$

**Demonstração.** Veja o Teorema A.4.2.

**Observação 1.2.1.** Note que no Teorema 1.2.2 não precisamos que  $b$  seja simétrica.

### 1.2.3 Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev são classes de funções fundamentais na análise de equações diferenciais parciais, oferecendo um arcabouço teórico para estudar a regularidade das soluções. Esses espaços dependem diretamente do conceito de derivada fraca, que estende o conceito clássico de derivada, preservando a fórmula de integração por partes e permitindo o cálculo de derivadas que não podem ser obtidas no sentido clássico. Assim, além de fornecer informações sobre a suavidade das funções, os espaços de Sobolev são essenciais na formulação e análise de problemas de valor de contorno, possibilitando estabelecer resultados de existência, unicidade e regularidade das soluções.

**Definição 1.2.8.** Seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  um multi-índice. Definimos o **operador diferencial**  $\partial^\alpha$  de ordem  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  por:

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

**Exemplo 1.2.3.** Considere os possíveis casos para  $\alpha$ .

- Se  $|\alpha| = 0 \implies \alpha = (0, \dots, 0) \implies \partial^\alpha u = u$ .
- Se  $|\alpha| = 1 \implies \alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \implies \partial^\alpha u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ .
- Se  $|\alpha| = 2$  então temos dois casos possíveis
  - i)  $\alpha = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0) \implies \partial^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ .
  - ii)  $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \implies \partial^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ .

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , um aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Partindo do problema de Poisson, temos para toda função teste  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , ou seja,  $\varphi$  é de classe  $C^\infty(\Omega)$  e possui suporte compacto, isto é,

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}} \quad \text{é um conjunto fechado em } \mathbb{R}^n \text{ e limitado.}$$

Podemos integrar por partes e obter que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} f \varphi \, ds - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx.$$

Porém, como  $\varphi$  possui suporte compacto contido em  $\Omega$ , segue que  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x$  na fronteira de  $\Omega$ , ou seja

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx.$$

Agora, repetindo esse processo  $|\alpha|$  vezes, obtemos

$$\int_{\Omega} (\partial^\alpha f) \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f (\partial^\alpha \varphi) \, dx. \quad (1.17)$$

Note que precisamos garantir a existência da derivada  $\partial_{x_j} f$  e precisamos que  $f \in L^1(\Omega)$ , porque  $\partial_{x_j} \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Essa construção nos motiva a umas das principais definições para esse trabalho: a derivada fraca.

**Definição 1.2.9.** Dados  $p \in [1, \infty)$  e  $k \in \mathbb{N}$ , o **espaço de Sobolev**  $W^{k,p}(\Omega)$  é definido como o conjunto de funções  $f \in L^p(\Omega)$  que possuem derivadas fracas de ordem até  $k$ , denotadas por  $\partial^\alpha f$ , com  $0 \leq |\alpha| \leq k$ , pertencentes a  $L^p(\Omega)$ . A  $\alpha$ -ésima **derivada fraca**  $g = \partial^\alpha f$  é uma função  $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  que satisfaz a equação

$$\int_{\Omega} g \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f (\partial^\alpha \varphi) \, dx, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1.18)$$

O Espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  com a norma  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ , dada por

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha f|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach para todo  $1 \leq p < \infty$ . Em particular, iremos trabalhar com o caso em que  $p = 2$ , ou seja,

$$W^{k,2}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

que é um espaço de Hilbert e é denotado por  $H^k(\Omega)$ . O produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k}$  é definido por

$$\langle f, g \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2}.$$

E a norma  $\|\cdot\|_{H^k}$ , proveniente do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k}$  é definida por

$$\|f\|_{H^k}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2.$$

**Definição 1.2.10.** Definimos o espaço  $W_0^{k,p}(\Omega)$  como fecho de  $C_c^\infty(\Omega)$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ .

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}. \quad (1.19)$$

**Observação 1.2.2.** Se  $\Omega$  é de classe  $C^\infty$ , ou seja, a fronteira e a geometria de  $\Omega$  são suaves até infinitas derivadas. Então  $W_0^{k,p}(\Omega)$  é o espaço das funções  $f \in W^{k,p}(\Omega)$ , tais que as derivadas normais de ordem até  $k - 1$  se anulam na fronteira

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k \text{ e } \partial_\nu^j f = 0, j \leq k - 1 \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

Em particular, denotaremos por  $H_0^1(\Omega)$  o espaço (de Hilbert)  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Para toda  $f, g \in H_0^1(\Omega)$  definimos o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$  por

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L^2} + \langle f, g \rangle_{L^2}. \quad (1.20)$$

A norma proveniente do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ , é dada pela função  $\|\cdot\|_{H^1}$  definida por

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2. \quad (1.21)$$

Dentre as características presentes nos espaços de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$ , é importante destacar que  $C^\infty(\Omega)$  e  $C_c^\infty(\Omega)$  são densos em  $H_0^1(\Omega)$  (vide [5]). Essa observação amplia consideravelmente a gama de propriedades disponíveis nesses espaços. Em particular, a inclusão  $H_0^1(\Omega) \subset \overline{C_c^\infty(\Omega)}$  nos permite demonstrar a desigualdade de Poincaré, uma propriedade fundamental no estudo do problema de Dirichlet.

**Teorema 1.2.3. (Desigualdade de Poincaré)** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Então existe uma constante positiva  $C = C(n, \Omega)$  tal que para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$  nós temos*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

**Demonstração.** Veja o Teorema A.5.3.

**Corolário 1.2.2.** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Então existe uma constante positiva  $C = C(n, \Omega)$  tal que para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$  nós temos*

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (1.22)$$

**Demonstração.** Veja o Corolário A.5.1.

**Exemplo 1.2.4.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , um aberto limitado e  $f \in L^2(\Omega)$  o termo fonte do problema de Poisson com condições de contorno de Dirichlet homogênea

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial acima por  $v \in H_0^1(\Omega)$  e integrando sobre  $\Omega$ , temos pela identidade de Green dada por

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \nu \, dx, \quad (1.23)$$

temos que

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \nu \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Como  $v \in H_0^1(\Omega)$ , da expressão precedente somos conduzidos a

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Definindo a forma  $b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  e o funcional  $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$b(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} \quad \text{e} \quad F(v) = \langle f, v \rangle_{L^2},$$

podemos demonstrar facilmente que tanto  $b$  quanto  $F$  são lineares e limitados em  $H_0^1(\Omega)$ . Por exemplo, para a forma bilinear, podemos utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 1.2.1) e a definição da norma  $\|\cdot\|_{H^1}$  (conforme 1.21) para mostrar que:

$$|b(u, v)| = |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2}| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Por fim, o corolário 1.2.2 nos permite facilmente mostrar a coercividade da forma bilinear:

$$b(u, u) = \langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{C} \|u\|_{H^1}.$$

Portanto, segue do Teorema de Lax-Milgram 1.2.2 a existência e unicidade de  $u \in H_0^1(\Omega)$ , uma solução fraca o problema de Poisson com condições de contorno de Dirichlet homogêneas.

Por fim, concluiremos enunciando dois resultados vistos em [8] que são fundamentais para mostrar existência e unicidade de soluções fracas para os problemas elípticos que trataremos no capítulo 3.

**Proposição 1.2.4.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  um aberto limitado com a propriedade de extensão, isto é, para todo  $u \in H^1(\Omega)$ , existe  $w \in H^1(\mathbb{R}^d)$  tal que  $w|_{\Omega} = u$ . Então a imersão de  $H^1(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  é compacta.*

**Proposição 1.2.5.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  um aberto conexo, e seja  $u \in H^1(\Omega)$  tal que  $\partial_{x_j} u(x) = 0$   $\mu$ -q.t.p.  $\Omega$ , para  $j = 1, \dots, d$ . Então existe uma constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x) = c$   $\mu$ -q.t.p.*

## 1.2.4 Espaços de Sobolev com valores em espaços de Hilbert

Para a formulação fraca de problemas parabólicos, que veremos no capítulo a seguir, introduziremos o conceito de espaços com valores em espaços de Hilbert. Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. O espaço  $L^2([0, T]; \mathcal{H})$  é o espaço das funções mensuráveis  $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty.$$

Este é um espaço Hilbert (com identificação usual:  $u \approx v$  se  $\int_{\Omega} \|u - v\|_{\mathcal{H}}^2 dx = 0$ ), cujo produto interno e norma são dados por

$$\langle f, g \rangle_{L^2([0, T]; \mathcal{H})} := \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle_{\mathcal{H}} dt \quad \text{e} \quad \|f\|_{L^2([0, T]; \mathcal{H})}^2 := \int_0^T \|f(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt.$$

De modo análogo, o espaço  $H^1([0, T]; \mathcal{H})$  é o espaço das funções mensuráveis  $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , tais que  $u \in L^2([0, T]; \mathcal{H})$  e para qual existe  $u' \in L^2([0, T]; \mathcal{H})$ , derivada fraca de  $u$ , isto é, que satisfaz

$$\int_0^T u(t)v'(t) dt = - \int_0^T u'(t)v(t) dt, \quad \forall v \in C_c^\infty(]0, \infty[).$$

Este também é um espaço Hilbert. Por questão de simplicidade, denotando  $L^2([0, T]; \mathcal{H})$  por  $L^2(\mathcal{H})$ , temos que seu produto interno e norma são definidos como

$$\langle f, g \rangle_{H^1([0, T]; \mathcal{H})} := \langle f, g \rangle_{L^2(\mathcal{H})} + \langle f', g' \rangle_{L^2(\mathcal{H})} \quad \text{e} \quad \|f\|_{H^1([0, T]; \mathcal{H})}^2 := \|f\|_{L^2(\mathcal{H})}^2 + \|f'\|_{L^2(\mathcal{H})}^2.$$

## 2 Formulação de Problemas Abstratos em Equações Diferenciais

Neste capítulo, iremos explorar a formulação fraca de problemas elípticos e parabólicos sem nos concentrar diretamente em suas condições de fronteira, esses problemas são denominados problemas abstratos. Essa abordagem nos permite compreender e definir alguns aspectos fundamentais da existência de soluções fracas para essas EDPs.

### 2.1 Formulação fraca de problemas elípticos abstratos

Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , com fronteira  $\Gamma$ . Dado  $f \in L^2(\Omega)$ , consideremos a equação de Poisson

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ em } \Omega. \quad (2.1)$$

Suponha que  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  e  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ . Multiplicando a equação (2.1) por  $v$  e integrando sobre  $\Omega$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Gamma} v \nabla u \cdot \nu \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Esta manipulação nos conduz naturalmente ao problema variacional:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.2)$$

A equação (2.2) será usada ao longo do trabalho para definir soluções fracas de problemas governados pela equação de Poisson (2.1). Vamos ilustrar alguns exemplos de formulações fracas abaixo.

**Exemplo 2.1.1.** Vamos considerar três condições de fronteira para o problema de Poisson.

- i. Condição de contorno de Dirichlet:  $u = 0$  em  $\Gamma$ :

Neste caso,  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  e, como  $v(x) = 0$  para  $x \in \Gamma$ , temos por (2.2) que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.3)$$

- ii. Condição de contorno de Neumann (para  $u$  regular):  $\partial_{\nu} u = 0$  em  $\Gamma$ .

Neste caso,  $u, v \in H^1(\Omega)$  e como  $\partial_{\nu} u(x) = 0$  para  $x \in \Gamma$ , temos por (2.2) que vale a formulação fraca dada pela Equação (2.3).

iii. Condição de contorno de Robin:  $-\partial_\nu u = u$  em  $\Gamma$ .

Neste caso,  $u, v \in H^1(\Omega)$ , e pela equação (2.2) a formulação fraca é:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} uv \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Agora surge o seguinte questionamento: sob quais condições garantimos a existência e unicidade de  $u$  que satisfaça a formulação fraca do problema de Poisson?

Suponha  $V \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , um espaço de Hilbert, tal que seja possível definir  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem  $b(u, v) = F(v)$ , para todo  $v \in V$ . As funções  $b$  e  $F$  são associadas a formulação fraca do problema de Poisson.

Nesse contexto, se  $F$  é um funcional linear contínuo e  $b$  é uma forma bilinear contínua e coerciva, então, pelo teorema de Lax-Milgram 1.2.2, existe um único  $u \in V$  que satisfaz  $b(u, v) = F(v)$ , para todo  $v \in V$ .

Portanto, podemos concluir que a boa colocação das soluções fracas está diretamente relacionada as condições de fronteira. O exemplo a seguir ilustra um caso em que não é possível encontrar uma solução.

**Exemplo 2.1.2.** Seja  $\Omega = [0, 1]$ . Não há como garantir a existência e unicidade do problema de Poisson para todo  $f$ .

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{em } \Omega = [0, 1] \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

De fato, pelo teorema fundamental do cálculo, temos que

$$-u'' = f \implies -\int_0^1 u'' \, dx = \int_0^1 f \, dx \implies \int_0^1 f \, dx = -u'(1) + u'(0) = 0.$$

Isso significa que só é possível obter uma solução se  $\int_0^1 f \, dx = 0$ . Contudo, indo mais além no processo de integração, temos que  $u$  é dada por

$$u'(x) = -\int_0^x f(y) \, dy \implies u(x) = u(0) - \int_0^x \int_0^z f(y) \, dy \, dz.$$

Logo, mesmo que  $\int_0^1 f \, dx = 0$ , a solução está determinada a não ser por uma constante.

## 2.2 Formulação fraca de problemas parabólicos abstratos

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , um domínio suave com fronteira  $\Gamma$ . A equação do calor sem condições de contorno é dada por:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{em } \Omega \times ]0, T[ \\ u = u_0 & \text{em } \Omega, t = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$



De modo análogo ao que fizemos na seção anterior, suponha que  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  e  $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0, \infty[)$ . Essa notação é utilizada conforme definida por [6], o que implica que  $u$  é de classe  $C^2$  em  $\overline{\Omega}$  e de classe  $C^1$  em  $[0, \infty[$ . Multiplicando a equação (2.5) por  $v$  e integrando sobre  $\Omega$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= - \int_{\Omega} v \Delta u(t) \, dx + \int_{\Omega} v \partial_t u(t) \, dx \\ &= - \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u(t) \, ds + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \partial_t u(t) \, dx. \end{aligned}$$

Desse modo somos conduzidos naturalmente ao problema variacional:

$$\int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \partial_t u(t) \, dx - \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u(t) \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall t \in [0, \infty[. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) será usada para definir soluções fracas de problemas governados pela equação do calor (2.5). Vamos ilustrar alguns exemplos de formulações fracas abaixo.

**Exemplo 2.2.1.** Vamos considerar três condições de fronteira para a equação do calor.

- i. Condição de contorno de Dirichlet:  $u(t) = 0$  em  $\Gamma$ :

Neste caso, para cada  $t \in [0, \infty[$ ,  $u(t), v \in H_0^1(\Omega)$  e, como  $v(x) = 0$  para  $x \in \Gamma$ , temos por (2.6) que:

$$\int_{\Omega} v \partial_t u(t) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.7)$$

- ii. Condição de contorno de Neumann (para  $u$  regular):  $\partial_{\nu} u = 0$  em  $\Gamma$ .

Neste caso,  $u, v \in H^1(\Omega)$  e como  $\partial_{\nu} u(x) = 0$  para  $x \in \Gamma$ , temos por (2.6) que vale a formulação fraca dada pela Equação (2.7).

- iii. Condição de contorno de Robin:  $-\partial_{\nu} u = u$  em  $\Gamma$ .

Neste caso,  $u, v \in H^1(\Omega)$ , e pela equação (2.6) a formulação fraca é:

$$\int_{\Omega} v \partial_t u(t) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} u(t) v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Sejam  $V$  e  $H$  dois espaços de Hilbert, com normas  $\|\cdot\|_V$  e  $\|\cdot\|_H$ , de modo que a norma  $\|\cdot\|_H$  seja proveniente do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ , e que  $V$  seja denso e contínuo sobre  $H$ . Vamos supor que  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma forma bilinear simétrica, contínua e coerciva associada ao laplaciano da equação (2.5). Nesse caso, no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq T$ , para o dado inicial  $u_0 \in H$  e uma função  $f \in L^2([0, T]; V^*)$ , a formulação fraca consiste em: encontrar  $u \in L^2([0, T]; V) \cap H^1([0, T]; V^*)$  tal que

$$\begin{cases} \langle \dot{u}(t), v \rangle_{V^*, V} + b(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{V^*, V}, & \forall v \in V \text{ e } 0 < t \leq T. \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

A formulação fraca dada pela Equação (2.8) nos faz questionar se há uma forma mais simples de expressá-la. Vamos estudar alguns resultados de [7] para simplificá-la. Como  $V \subset H$  é um espaço de Hilbert denso e contínuo sobre  $H$ . Então, podemos observar que se  $u \in H$ , temos que  $v \in V \mapsto \langle v, u \rangle_H$  é linear e contínua. Logo  $u \in V^*$ . Portanto, temos  $V \subset H \subset V^*$ . Em outras palavras, temos que a imersão  $V \hookrightarrow H$  implica na imersão  $H \hookrightarrow V^*$ .

**Definição 2.2.1.** Sejam  $V \hookrightarrow H$  espaços de Hilbert. Definimos o operador linear  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$  associado a forma  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , como o operador que satisfaz

$$Au := f.$$

Além disso, o espaço  $\mathcal{D}(A)$  é denominado domínio de  $A$  e é dado por

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in V \mid \exists f \in H \text{ tal que } b(u, v) = \langle f, v \rangle_H, \forall v \in V\}.$$

A proposição abaixo é uma variação do teorema de Lax-Milgram simétrico, sua demonstração pode ser obtida em [12].

**Proposição 2.2.1.** *Seja  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear simétrica, contínua e coerciva. Então existe  $\mathcal{A} : V \rightarrow V^*$  tal que*

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{V^*, V} = b(u, v).$$

*Podemos mostrar que  $\mathcal{A}$  é positivo e autoadjunto como operador não limitado em  $V^*$ .*

Assim, vemos que  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{A}^{-1}(H)$  e  $Au = \mathcal{A}u$ , para todo  $u \in \mathcal{D}(A)$ .

**Exemplo 2.2.2.** Sejam  $V = H_0^1(\Omega)$  e  $H = L^2(\Omega)$ , então  $V^* = H^{-1}(\Omega)$ . Se  $b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \text{então } \mathcal{A} = -\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega).$$

**Exemplo 2.2.3.** Sejam  $V = H^1(0, 1)$ ,  $H = L^2(0, 1)$  e  $b : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$b(u, v) = \int_0^1 u'v' \, dx + u(0)v(0) + u(1)v(1).$$

Nesse caso temos que

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H^1 \mid \exists f \in L^2 \text{ t.q. } \int_0^1 u'v' \, dx + u(0)v(0) + u(1)v(1) = \int_0^1 f v \, dx, \forall v \in H^1 \right\}.$$

**Proposição 2.2.2.** *O operador  $A$  e o domínio definido  $\mathcal{D}(A)$  definidos no Exemplo 2.2.3 são dados por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H^2(0, 1) \mid u'(1) + u(1) = u'(0) - u(0) = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\} \text{ e } A(u) = u''.$$

**Demonstração.** A demonstração segue conforme as linhas do Teorema 5.19 de [7].

O próximo teorema garante a existência da solução fraca para problemas parabólicos.

**Teorema 2.2.1.** *Sejam  $V \hookrightarrow H$  espaços de Hilbert,  $f \in L^2([0, T]; V^*)$  e  $u_0 \in H$  definidos no problema (2.8). Então existe único  $u \in H^1([0, T]; V^*) \cap L^2([0, T]; V)$  tal que*

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t) \quad e \quad u(0) = u_0.$$

Consequentemente, para todo  $v \in V$ , vale também a formulação fraca

$$\langle u'(t), v \rangle_{V^*, V} + \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle_{V^*, V} = \langle f(t), v \rangle_{V^*, V}.$$

**Demonstração.** A demonstração segue conforme as linhas do Teorema 8.37 de [7].

Agora, a Seção 8.5 de [7] nos permite concluir que, se  $u \in V$  e  $f \in L^2([0, T]; H)$ . Então  $u \in L^2([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap H^1([0, T]; H)$ . Consequentemente a equação

$$\langle u'(t), v \rangle_{V^*, V} + \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle_{V^*, V} = \langle f(t), v \rangle_{V^*, V},$$

é equivalente a formulação fraca

$$\langle u'(t), v \rangle_H + b(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_H. \quad (2.9)$$

Assim obtemos uma relação que simplifica o processo de obtenção das formulações fracas que iremos trabalhar, como podemos ver no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.2.4.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , um aberto limitado com fronteira  $\Gamma$ . Para a equação do calor com condições de contorno de Robin (Equação (4.2)), teremos que  $V = H^1(\Omega)$ ,  $H = L^2(\Omega)$  e  $\mathcal{D}(A) = H_R^2(\Omega)$ , onde  $H_R^2(\Omega)$  é o espaço das funções  $H^2(\Omega)$  que satisfazem as condições de Robin, isto é,

$$H_R^2(\Omega) = \left\{ u(t) \in H^2(\Omega) \mid -\partial_\nu u(t) = \kappa u(t) \text{ em } \Gamma \right\}$$

Sejam  $u_0 \in H^1(\Omega)$  e  $f \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ . Então, pela Equação (2.9), a formulação fraca do problema Calor Robin consiste em encontrar  $u \in L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \cap H^1([0, T]; L^2(\Omega))$  tal que para cada  $t \in [0, \infty[$ ,  $u(t) \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$\int_{\Omega} v \partial_t u(t) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx + \kappa \int_{\Gamma} u(t) v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Nesta etapa, temos intuito de concluir a boa colocação dos problemas parabólicos. Iremos nos basear fortemente na construção feita em [1], além de assumirmos alguns resultados estudados em [8] e [13], que tornam possível garantir a continuidade e unicidade da solução fraca através da estimativa de energia. Sob as hipóteses da formulação fraca

governada pela Equação (2.8), considere  $f \equiv 0$ . Assim, podemos vê-la como o fluxo gradiente de  $H$

$$\langle \dot{u}, v \rangle_{V^*, V} = -E'(u)(v) \text{ para todo } v \in V,$$

onde o funcional de energia quadrática  $E : V \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$E(v) = \frac{1}{2}b(v, v), \quad \forall v \in V,$$

implica que  $E' : V \rightarrow V^*$  é tal que

$$E'(u)(v) = \frac{1}{2}b(u, v) + \frac{1}{2}b(v, u) = b(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Utilizaremos a **estimativa de energia** para obter uma estimativa da solução fraca. Começaremos supondo  $v = u(t)$ . Além disso, note que

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), u(t) \rangle_H = \langle \dot{u}(t), u(t) \rangle_{V^*, V} + \langle u(t), \dot{u}(t) \rangle_{V, V^*} \implies \langle \dot{u}(t), u(t) \rangle_{V^*, V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2.$$

Ao integrarmos a equação (2.8) de 0 até  $t$ , obtemos

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2 + 2 \int_0^t E(u(s)) \, ds = \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle_{V^*, V} \, ds.$$

Contudo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.2.1), sabemos que

$$|\langle f(s), u(s) \rangle_{V^*, V}| \leq \|f(s)\|_{V^*} \|u(s)\|_V,$$

onde a norma dual  $\|\phi\|_{V^*} = \sup_{\|v\|=1} |\langle \phi, v \rangle_{V^*, V}|$ . Desse modo, podemos dizer que

$$|\langle f(s), u(s) \rangle_{V^*, V}| \leq \frac{1}{2\alpha} \|f(s)\|_{V^*}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u(s)\|_V^2, \quad \alpha > 0.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2 + 2 \int_0^t E(u(s)) \, ds \leq \int_0^t \left[ \frac{1}{2\alpha} \|f(s)\|_{V^*}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u(s)\|_V^2 \right] \, ds \quad (2.10)$$

**Observação 2.2.1.** Uma forma simples de provar as relações acima pode ser vista se considerarmos  $A, B \in \mathbb{R}$ . Assim, vale que  $(A - B)^2 \geq 0 \implies AB \leq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$ . Consequentemente  $AB = \varepsilon A(1/\varepsilon)B \leq (\varepsilon A)^2/2 + B^2/2\varepsilon^2$ . Considerando  $\varepsilon = 1/\sqrt{\alpha}$ , podemos concluir que  $AB \leq (1/2\alpha)A^2 + (\alpha/2)B^2$ . Este resultado também é conhecido como **desigualdade de Young**.

Agora, isolando os termos com integrais da desigualdade (2.10), obtemos que

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2 \leq \int_0^t \frac{1}{2\alpha} \|f(s)\|_{V^*}^2 \, ds + \int_0^t \frac{\alpha}{2} \|u(s)\|_V^2 \, ds - 2 \int_0^t E(u(s)) \, ds.$$

Podemos verificar que, como  $b$  é coerciva, então  $b$  satisfaz a desigualdade de Garding, também conhecida como coercividade fraca: existem  $\alpha > 0$  e  $c \in \mathbb{R}$ , tais que  $b(v, v) \geq$

$\alpha\|v\|_V^2 - c\|v\|_H^2$ . Essa propriedade pode ser estudada em [14]. Então, aplicando a desigualdade de Garding no termo à direita da desigualdade acima, temos que

$$\int_0^t -2E(u(s)) \, ds = \int_0^t -b(s, s) \, ds \leq \int_0^t -\alpha\|u(s)\|_V^2 + c\|u(s)\|_H^2 \, ds,$$

logo

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 \leq \int_0^t \frac{1}{2\alpha}\|f(s)\|_{V^*}^2 \, ds + \int_0^t \frac{\alpha}{2}\|u(s)\|_V^2 \, ds + \int_0^t -\alpha\|u(s)\|_V^2 + c\|u(s)\|_H^2 \, ds.$$

Ao multiplicarmos por dois e reorganizando alguns termos, obtemos que

$$\|u(t)\|_H^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|_V^2 \, ds \leq \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 \, ds + 2c \int_0^t \|u(s)\|_H^2 \, ds. \quad (2.11)$$

Agora, iremos recorrer a **desigualdade de Gronwall**. A desigualdade de Gronwall também é conhecida como o lema de Gronwall, conforme descrito por Larsson em [4].

**Lema 2.2.1.** *Sejam  $a$  e  $b$  constantes reais positivas. Se  $\varphi$  é uma função contínua não negativa tal que*

$$\varphi(t) \leq a + b \int_0^t \varphi(s) \, ds, \quad t > 0. \quad \text{Então} \quad \varphi(t) \leq ae^{bt}, \quad t > 0.$$

**Demonstração.** Veja [4].

Desse modo, na equação (2.11), defina

$$\varphi(t) = \|u(t)\|_H^2, \quad a = \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 \, ds \quad \text{e} \quad b = 2c.$$

Assim, podemos concluir pelo Lema 2.2.1 que

$$\|u(t)\|_H^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|_V^2 \, ds \leq \exp(2ct) \left( \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 \, ds \right). \quad (2.12)$$

Como o Teorema 2.2.1 garante a existência da solução para o problema fraco (2.8), podemos utilizar a desigualdade (2.12) para concluir a boa colocação dessas soluções. De fato, para  $t \in [0, T]$ , temos de (2.12) que:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C_T \left( \|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)} \right) \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_T \left( \|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)} \right).$$

Para a unicidade, suponha que existam  $u, \tilde{u} \in L^\infty([0, T]; H)$  que satisfazem o problema abstrato (2.8), ou seja,

$$\langle u'(t), \phi \rangle + b(u(t), \phi) = \langle f, \phi \rangle, \quad \langle \tilde{u}'(t), \phi \rangle + b(\tilde{u}(t), \phi) = \langle f, \phi \rangle \quad \text{e} \quad u(0) = \tilde{u}(0) = u_0.$$

Logo

$$\langle u'(t) - \tilde{u}'(t), \phi \rangle + b(u(t) - \tilde{u}(t), \phi) = \langle 0, \phi \rangle \quad \text{e} \quad (u - \tilde{u})(0) = 0.$$

Portanto

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;V)} \leq 0 \implies u = \tilde{u}.$$

Agora, em relação à continuidade, se existirem  $u$  e  $\tilde{u}$  em  $L^\infty([0, T]; H)$ , tais que  $u(0) = u_0$  e  $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$ . Então

$$\langle u'(t), \phi \rangle + b(u(t), \phi) = \langle f, \phi \rangle \quad \text{e} \quad \langle \tilde{u}'(t), \phi \rangle + b(\tilde{u}(t), \phi) = \langle \tilde{f}, \phi \rangle.$$

Sendo assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \varepsilon/C_T$  tal que  $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_H + \|f - \tilde{f}\|_{L^2(0,T;V^*)} < \varepsilon/C_T$ , o que implica em:

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_T \left( \|u_0 - \tilde{u}_0\|_H + \|f - \tilde{f}\|_{L^2(0,T;V^*)} \right) < C_T \frac{\varepsilon}{C_T} = \varepsilon.$$

## 3 Equação de Poisson com condições de contorno de Robin

Ao longo deste trabalho, nosso principal objetivo é estudar problemas que variam ao longo do tempo, com foco especial no estudo da equação do calor. No entanto, é importante observar que os problemas de Poisson representam casos estacionários da equação do calor.

Nesse contexto, dedicaremos este capítulo ao estudo de problemas de Poisson com condições de contorno de Robin. A estrutura de abordagem que adotaremos quando apresentarmos um problema de EDPs será a seguinte: começaremos com a formulação fraca do problema, passaremos para uma análise numérica detalhada no cenário unidimensional e, em seguida, expandiremos para uma análise numérica no contexto bidimensional. Neste capítulo, as seções correspondentes a esses tópicos são as 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente.

No decorrer deste capítulo, desenvolveremos um algoritmo de aproximação por elementos finitos utilizando splines lineares, conhecido como o método de Ritz-Raleigh. Além disso, para o caso bidimensional, apresentaremos o software FEniCS, uma ferramenta amplamente reconhecida e utilizada pela comunidade de análise numérica para a aproximação de equações diferenciais via elementos finitos.

Consideremos um domínio aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  e sua fronteira  $\Gamma$ . Sejam  $f \in L^2(\Omega)$  e  $\kappa > 0$ . O problema de Poisson com condições de Robin é definido da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ -\partial_\nu u = \kappa u & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (3.1)$$

### 3.1 Formulação fraca do problema de Poisson Robin

Na seção 2.1 estudamos a formulação fraca de problemas elípticos abstratos, resultando que sua formulação variacional é dada pela Equação (2.2). Nas condições de (3.1), temos, pela condição de Robin, que

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = -\int_{\Gamma} v \partial_\nu u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \kappa \int_{\Gamma} v u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Portanto, o problema variacional nos induz a solução fraca do problema (3.1).

**Definição 3.1.1.** Dizemos que  $u \in H^1(\Omega)$  é uma **solução fraca** para o problema de Poisson com condições de contorno de Robin (3.1), se:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \kappa \int_{\Gamma} v u \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Para garantir a boa colocação dessa solução fraca, iremos verificar as hipóteses do Teorema 1.2.2 de Lax-Milgram. Para isso, nos basearemos no Capítulo Sete de [7].

Primeiro, recorreremos a **continuidade do traço**: existe um único operador linear contínuo  $T : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ , tal que  $T(u) = u|_\Gamma$  para todo  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Portanto, para todo  $u \in H^1(\Omega)$ , temos que

$$\|Tu\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2)$$

Desse modo, considerando  $u$  e  $v$  como elementos de  $H^1(\Omega)$ , podemos utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz e obter a relação

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} \stackrel{1.2.1}{\leq} \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \stackrel{(3.2)}{\leq} C^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Com isso, estamos aptos para demonstrar que a solução fraca 3.1.1 satisfaz as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram 1.2.2.

**Proposição 3.1.1.** *Fixado  $f \in L^2(\Omega)$ , temos que o operador linear  $F : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$F(v) := \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{é contínuo em } H^1(\Omega).$$

**Demonstração.** Para toda  $v \in H^1(\Omega)$ , temos que

$$\begin{aligned} |F(v)| &= |\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}| \stackrel{1.2.1}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \left( \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right) \stackrel{(1.21)}{=} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.1.2.** *Dados  $u, v \in H^1(\Omega)$ , a forma bilinear  $b : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$b(u, v) := \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \kappa \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{é equivalente a } \|\cdot\|_{H^1}.$$

*Ou seja, existem  $c_1, c_2 > 0$  tais que  $c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq b(u, u) \leq c_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ . Em outras palavras, temos que a forma bilinear  $b$  é contínua e coerciva.*

**Demonstração.** Essa demonstração será dividida em duas etapas, tratando da continuidade e da coercividade de  $b$  separadamente.

### 1. Continuidade:

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz 1.2.1 e pela continuidade do traço (3.2), segue

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &= |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \kappa \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)}| \\ &\leq |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}| + \kappa |\langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)}| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \kappa \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \kappa C^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= (\kappa C^2 + 1) (\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$



## 2. Coercividade:

Suponha que  $b$  não seja coerciva, ou seja, que não exista  $C > 0$  tal que

$$b(u, u) \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Desse modo, supondo  $C_n = 1/n$ , temos que não vale a desigualdade

$$b(u, u) \geq C_n \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Isso significa que existe uma sequência não nula  $v_n \in H^1(\Omega)$  tal que

$$b(v_n, v_n) < \frac{1}{n} \|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Agora, definindo  $u_n = v_n / \|v_n\|_{H^1(\Omega)}$ , temos

$$b(u_n, u_n) = b\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_{H^1(\Omega)}}, \frac{v_n}{\|v_n\|_{H^1(\Omega)}}\right) < \frac{1}{n} \frac{\|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2}{\|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2} = \frac{1}{n}.$$

Concluimos que é possível determinar uma sequência  $u_n \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b(u_n, u_n) = 0.$$

Contudo, sabemos pela Proposição 1.2.2 que  $(u_n)$  admite uma subsequência que converge fracamente, em particular, podemos supor que a própria  $(u_n)$  converge fracamente para algum  $u \in H^1(\Omega)$ . Mas pela Proposição 1.2.4 temos que a imersão  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  é compacta, e pela Proposição 1.2.3 temos que operadores lineares compactos levam a convergência fraca em convergência forte para espaços de Hilbert. Logo teremos que  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $L^2(\Omega)$ .

Por outro lado, usando a hipótese de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(u_n, u_n) = 0$ , podemos afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx = 0. \quad (3.4)$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|u_n\|_{H^1(\Omega)} - \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{H^1(\Omega)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Além disso, todas as derivadas fracas de  $u$  são iguais a zero, porque se  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ , então

$$\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_j} v(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) \partial_{x_j} v(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} v(x) \partial_{x_j} u_n(x) dx = 0,$$

e pela Proposição 1.2.5 temos que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x) = c$ ,  $\mu$ -q.t.p. de  $\Omega$ . Com isso podemos concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  em  $H^1(\Omega)$ , porque as derivadas fracas

convergem para zero, assim como a derivada fraca de  $u$ , e  $u_n$  converge para  $u$  em  $L^2(\Omega)$ . Então, pela continuidade do traço, temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n = Tu = c\mathbb{1}_\Gamma$  em  $L^2(\Gamma)$ .

Por fim, pela definição da forma bilinear, obtemos que

$$\begin{aligned} c^2 \int_{\Gamma} ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} |Tu_n(z)|^2 ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma} |Tu_n(z)|^2 ds + \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(u_n, u_n) = 0. \end{aligned}$$

Logo  $c = 0$ , o que é uma contradição com  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Portanto  $b(\cdot, \cdot)$  é coerciva.

□

A Proposição 3.1.1 e a Proposição 3.1.2 nos permitem concluir que a forma bilinear  $b$  e o funcional linear  $F$  satisfazem as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram 1.2.2. Assim, existe uma única solução  $u \in H^1(\Omega)$  para o problema fraco  $b(u, v) = F(v)$ , onde

$$b(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \kappa \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{e} \quad F(v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (3.5)$$

## 3.2 Caso unidimensional do problema de Poisson Robin

Para o problema (3.1), considere  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}$  um aberto limitado (intervalo aberto). Em [15] são apresentados diversos problemas de equações diferenciais, dentre eles temos o exemplo a seguir, que difere apenas em alguns termos de (3.1), como o coeficiente de difusão.

**Exemplo 3.2.1.** Considerando  $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}]$ , com  $0 \leq x_{\min} < x_{\max}$ . O ponto de equilíbrio de um processo de reação-difusão envolvendo uma única substância é dado pelo problema

$$\begin{cases} -(au')' = f \text{ em } \Omega \text{ aberto,} \\ a(x_{\min})u'(x_{\min}) = \kappa(x_{\min})(u(x_{\min}) - g_D(x_{\min})) + g_N(x_{\min}), \\ -a(x_{\max})u'(x_{\max}) = \kappa(x_{\max})(u(x_{\max}) - g_D(x_{\max})) + g_N(x_{\max}), \end{cases}$$

onde  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é quem desejamos calcular, e ela representa a concentração da substância. As outras funções que compõe o problema são:  $a : \bar{\Omega} \rightarrow ]0, \infty[$  que é o coeficiente de difusão,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é o termo fonte,  $\kappa : \Gamma \rightarrow [0, \infty[$  é a permeabilidade nos extremos,  $g_D : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  é o ambiente de concentração e, por fim,  $g_N : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  é fluxo externo induzido através da fronteira. No caso em que  $g_N(x) = 0$ , recaímos no seguinte modelo físico: o fluxo externo é proporcional à diferença de concentração entre o limite do domínio e seus arredores.

Embora seja importante garantir a existência e unicidade da solução, isso nem sempre nos permite expressá-la de forma explícita. Portanto, podemos nos questionar

se há uma maneira de aproximar essas soluções com clareza. A resposta é que, dentro das hipóteses que garantem uma solução fraca para esse grupo de equações diferenciais parciais, é possível utilizar métodos numéricos para obter aproximações das soluções. Optaremos pelo método de **elementos finitos**, que é amplamente utilizado para resolver problemas de equações diferenciais parciais. Simplificadamente, ele se baseia na subdivisão de um domínio em elementos finitos, onde cada elemento finito é apenas um membro de uma partição do domínio  $\Omega$ . Esses elementos são “conectados” uns aos outros por meio de funções de interpolação (polinomiais) que estabelecem uma representação aproximada da solução do problema em todo o domínio. A partir disso, o problema é discretizado em um sistema de equações lineares, que pode ser resolvido numericamente.

Mais precisamente, em [16], Ciarnet define o método de elementos finitos como a tripla  $(\Psi_h, V_{\Psi_h}, G_{\Psi_h})$ , onde  $\Psi_h$  é a malha (partição do domínio  $\Omega$  em elementos finitos),  $V_{\Psi_h}$  é definido como o espaço de funções aproximação e  $G_{\Psi_h}$  é o grau de liberdade.

### 3.2.1 Elementos finitos em uma dimensão

Nesta seção iremos discutir o método de elementos finitos obtido através de splines lineares. Para essa construção, tomaremos como referência [5], [17] e [18]. No intuito de simplificar a aplicação, iremos considerar em (3.1) o caso unidimensional  $\bar{\Omega} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  e  $\kappa = 1$ . Iremos realizar os testes no seguinte problema de Robin unidimensional:

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{em } \Omega \\ u'(0) = u(0) \\ -u'(1) = u(1) \end{cases} \quad (3.6)$$

Pela definição 3.1.1, temos que a solução fraca deve satisfazer a equação

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

que corresponde a seguinte formulação variacional:

$$\int_{\Omega} u'v' \, dx + u(1)v(1) + u(0)v(0) = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.7)$$

Agora, os elementos finitos serão determinados pelo método de **Ritz-Raleigh**, que define a solução como sua aproximação  $u_h$  em um subespaço de dimensão finita  $\tilde{S}_h \subset H^1(0, 1)$ . Cabe evidenciar que  $u_h$  é a projeção ortogonal de  $u$  em  $\tilde{S}_h$  com relação ao produto interno definido pela forma bilinear  $b$ , esse resultado será demonstrado na proposição 3.2.2. Portanto, buscamos  $u_h \in \tilde{S}_h$  tal que

$$\int_{\Omega} u'_h v' \, dx + u_h(1)v(1) + u_h(0)v(0) = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.8)$$

Vamos discutir a definição de  $\tilde{S}_h$  de forma mais detalhada. Primeiro, fixamos uma partição de  $[0, 1]$  usando um parâmetro  $h = 1/n$ , onde  $n$  é o número de subintervalos da

partição. Cada subintervalo é denotado por  $K_j$ , onde  $j$  varia de 1 a  $n$ . Podemos escrever  $K_j$  como  $[x_{j-1}, x_j]$ , em que  $x_j$  é igual a  $jh$ . Por fim, o espaço  $\tilde{S}_h$  será definido como

$$\tilde{S}_h := \left\{ v \in C([0, 1]) : v \text{ é linear em cada partição } \Psi_h(\Omega) := \{K_j\}_{j=1}^n \text{ e } v|_{K_j} \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

Isso significa que se  $v \in \tilde{S}_h$ , então o gráfico de  $v$  em  $K_j$  é a reta que liga os pontos  $(x_{j-1}, v(x_{j-1}))$  a  $(x_j, v(x_j))$ . Uma base para o espaço  $\tilde{S}_h$  é dada pelas funções chapéu  $\phi_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , ou seja, o espaço de **splines lineares**, em que cada função  $\phi_i$  e suas derivadas são dadas por

$$\begin{cases} \phi_i(x) = \frac{x-x_{i-1}}{h}, & [x_{i-1}, x_i], \\ \phi_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h}, & [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \implies \begin{cases} \phi'_i(x) = \frac{1}{h}, & [x_{i-1}, x_i], \\ \phi'_i(x) = -\frac{1}{h}, & [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.9)$$

A figura a seguir representa geometricamente as funções chapéu dos splines (3.9).

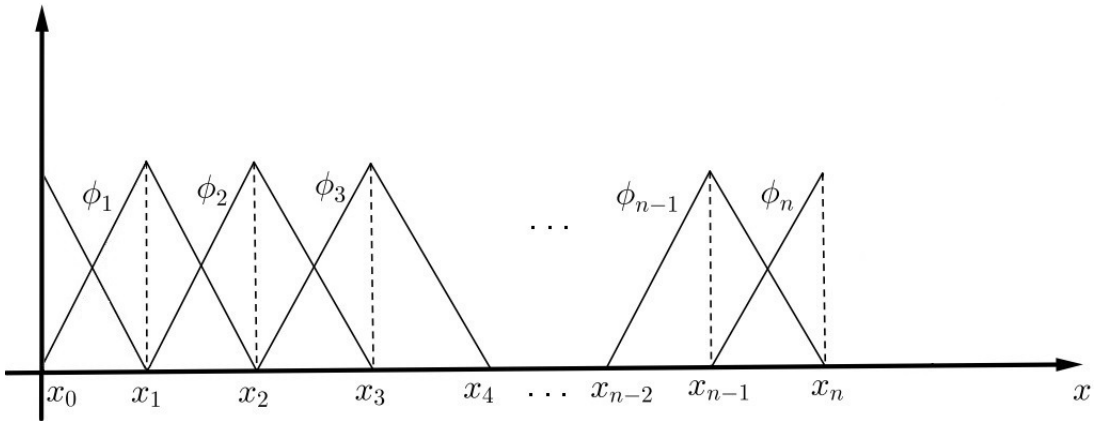


Figura 2 – 1D FEM: Base de splines lineares.

Note que todos chapéus estão presentes, incluindo os extremos  $\phi_0$  e  $\phi_n$ . Isso se dá por estarmos considerando condições de Robin, logo as funções não precisam ser nulas na fronteira  $\Gamma$ . Desse modo, se considerarmos  $v_j = \phi_j$  para  $j = 0, \dots, n$  e  $u_h(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \phi_i$ . Então, pela Equação (3.8),  $\alpha_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , são soluções do sistema de equações normais

$$(A + R)\alpha = b, \quad (3.10)$$

onde  $A + R$  representa a matriz de rigidez com tamanho  $(n + 1) \times (n + 1)$  e  $b$  é o vetor de fonte com tamanho  $n + 1$ , com cada matriz e vetor dados pelas equações

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi'_i \phi'_j \, dx, \quad R_{ij} = \phi_j(1)\phi_i(1) + \phi_j(0)\phi_i(0) \quad \text{e} \quad b_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx.$$

Podemos detalhar ainda mais o sistema (3.10). Para isso, considere o suporte de cada  $\phi_i$  (fecho do conjunto de pontos onde  $\phi_i(x) \neq 0$ ):  $\text{supp}(\phi_i) := [x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Note que a intersecção entre os interiores dos suportes de  $\phi_i$  e  $\phi_j$  será não vazia apenas se  $|i - j| \leq 1$ . Isso nos permite explicitar o sistema matricial

- Para a matriz de rigidez  $A$  temos que  $\langle \phi'_i, \phi'_j \rangle_{L^2} = 0$  se  $|i - j| > 1$ . Isto faz com que a matriz do sistema linear seja tri-diagonal e suas integrais são facilmente obtidas. Além disso, as entradas da matriz  $R$  são todas zero, exceto quando  $i = j = 0$  e  $i = j = n$ , caso em que temos  $R_{00} = 1 = R_{nn}$ . Portanto, como  $h = 1/n$ , a matriz de rigidez  $(A + R)$  é a matriz tri-diagonal dada por

$$A + R = \begin{bmatrix} n+1 & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 2n & -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 2n & -n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -n & 2n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

- O vetor de fonte é dado por

$$b = [\langle f, \phi_0 \rangle_{L^2}, \langle f, \phi_1 \rangle_{L^2}, \dots, \langle f, \phi_{n-1} \rangle_{L^2}, \langle f, \phi_n \rangle_{L^2}]^T. \quad (3.12)$$

Lembrando que o produto interno entre  $f$  e  $\phi_i$  pode ser escrito em termos do suporte de cada  $\phi_i$

$$\langle f, \phi_i \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx.$$

**Exemplo 3.2.2.** Queremos construir uma função  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça as condições de contorno do problema (3.6). Assim, bastará encontrar o termo fonte do problema para determinar uma função que satisfaz (3.6). Essa estratégia é denominada solução manufaturada. Nesse caso, consideraremos  $u(x) = \sin(\pi x) + \pi$ , logo  $u'(x) = \pi \cos(\pi x)$ . Assim, temos que

$$u'(0) = \pi = u(0), \quad u'(1) = -\pi = -u(1) \quad \text{e} \quad f(x) = \pi^2 \sin(\pi x).$$

Portanto, buscaremos aproximações  $u_h \in \tilde{S}_h$  que satisfazem a equação (3.8) associada ao problema

$$\begin{cases} -u'' = \pi^2 \sin \pi x, & \text{em } \Omega = (0, 1), \\ u'(0) = u(0), \\ -u'(1) = u(1). \end{cases} \quad (3.13)$$

cuja solução analítica é dada por  $u(x) = \sin(\pi x) + \pi$ . Como dito anteriormente,  $\tilde{S}_h$  é uma base composta por funções chapéus definidas na equação (3.9). As figuras 3 e 4 mostram o exemplo particular dos splines lineares, e suas derivadas, calculados numericamente em uma discretização de oito pontos pelo código presente no arquivo *SplinesLineares.py*.

```

# Bibliotecas SplinesLineares.py
# Define as funcoes \phi_i
def phi(x, xi, h):
    cond=[((x-xi)>=0) & (x<=xi+h),
          ((x-xi)<=0) & (x>=xi-h),
          (x>xi+h),
          (x<xi-h)]

    fun=[lambda x: ((xi+h)-x)/h,
         lambda x: (x-(xi-h))/h,
         lambda x: 0,
         lambda x: 0]

    return np.piecewise(x,cond,fun)
# Define as funcoes \phi'_i
def phi_der(x, xi, h):
    cond=[((x-xi)>0) & (x<=xi+h),
          ((x-xi)<0) & (x>=xi-h),
          (x>xi+h),
          (x<xi-h)]

    fun=[lambda x: -1/h,
         lambda x: 1/h,
         lambda x: 0,
         lambda x: 0]

    return np.piecewise(x,cond,fun)

```

Figura 3 – 1D FEM: Splines.

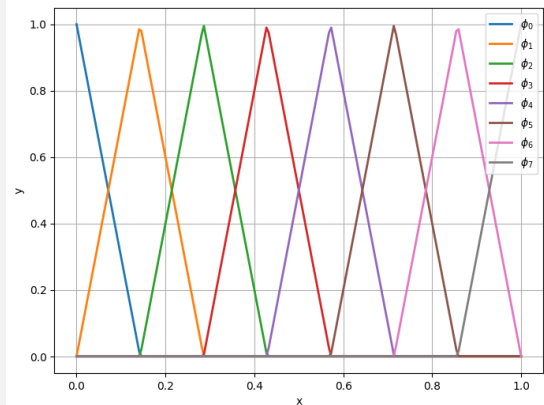
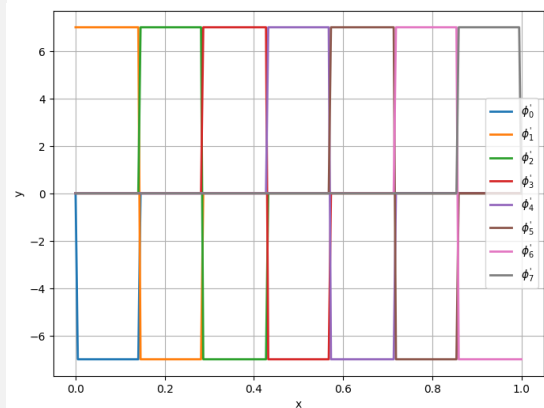


Figura 4 – 1D FEM: Derivadas.



Neste momento, procederemos com a implementação do método de elementos finitos, baseando-nos no método denominado Ritz-Raleigh, conforme desenvolvido em [18], que consiste em resolver (3.10). Para isso serão necessárias duas bibliotecas de código aberto disponíveis em Python. A primeira, que já foi empregada na construção das bases de Splines lineares, e que será amplamente utilizada ao longo deste trabalho, é a **NumPy**. Trata-se de uma biblioteca essencial em Python para computação científica e análise numérica. Ela oferece estruturas de dados eficientes, como arrays multidimensionais (chamados de *ndarrays*), além de funções matemáticas específicas para operações em arrays. A segunda biblioteca, a qual estamos usando exclusivamente para integração, é o **SciPy**. Amplamente empregada em computação científica e análise de dados em conjunto com o NumPy, o SciPy disponibiliza uma variedade de funções e ferramentas para resolver problemas em áreas como álgebra linear, otimização e cálculo numérico.

O código abaixo apresenta as principais funções para aplicação do método de elementos finitos. O programa completo se encontra no arquivo: *MEF.py*.

```

# Bibliotecas MEF.py

```

```

# Calcula a solucao u(x) usando coeficientes e funcoes de base
def u_sol(x, coef, h, x_disc):
    y = 0
    for i in range(len(coef)):
        y += coef[i]*phi(x,x_disc[i],h)
    return y
# Monta a matriz de rigidez do metodo dos elementos finitos
def matriz_rigidez(n):
    A = np.zeros((n+1,n+1))
    diag_principal = np.full(n+1, 2*n)
    diag_principal[0] = n + 1
    diag_principal[n] = n + 1
    diag_adjacente = np.full(n, -n)
    A = np.diag(diag_principal) + np.diag(diag_adjacente, 1) + np
        .diag(diag_adjacente, -1)
    return A
# Monta o vetor fonte do metodo dos elementos finitos
def vetor_fonte(n, f):
    d = np.zeros((n+1,1))
    d[0,0]=integrate.quad(lambda x: n*f(x)*(1/n-x),0,1/n)[0]
    d[n,0]=integrate.quad(lambda x: n*f(x)*(x-1+1/n),1-1/n,1)[0]
    for j in range(1,n):
        d[j,0]=integrate.quad(
            lambda x: n*f(x)*(x-(j-1)/n), (j-1)/n, j/n)[0]
        d[j,0]=d[j,0]+integrate.quad(
            lambda x: -n*f(x)*(x-(j+1)/n), j/n, (j+1)/n)[0]
    return d
# Aplicacao do metodo de Ritz-Raleigh
def RitzRaleigh(n, h, x_disc, f):
    A = matriz_rigidez(n)
    d = vetor_fonte(n, f)
    alpha = np.linalg.solve(A, d)
    u = lambda x: u_sol(x, alpha, h, x_disc)
    return alpha, u

```

Por fim, podemos utilizar os programas escritos em “SplinesLineares.py” e “MEF.py” para implementar de forma simples o método de elementos finitos para resolver o problema (3.13). É importante destacar que o arquivo “MEF.py” precisará ser adaptado para cada aplicação específica em nosso projeto, devido à construção da matriz de rigidez, que varia de acordo com o problema. Por outro lado, não é necessário fazer modificações na base de splines lineares gerada pelo arquivo “SplinesLineares.py”.

O código a seguir representa a estrutura principal do código contido no arquivo *ElipticRobin.ipynb*.

```
# Bibliotecas ElipticRobin.ipynb

# Descricao do problema
u_teo = lambda x: np.sin(np.pi*x) + np.pi # Solucao analitica
f = lambda x: (np.pi**2)*np.sin(np.pi*x) # Termo fonte
x_min = 0; x_max = 1 # Dominio [x_min, x_max]
e = []; e12 = [] # Erros com as normas L^\infty e L^2
M = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256] # Discretizacoes espaciais
# Looping espacial
for n in np.array(M):
    h = 1/n; x = np.linspace(a, L, n+1) # Discretizacao espacial
    alpha, u_num = RitzRaleigh(n, h, x, f) # Funcao de MEF.py
```

A figura 5 apresenta algumas aproximações numéricas obtidas ao variar a discretização do tamanho de passo  $h$ , com valores de  $n$  igual a 4 e 256, respectivamente.

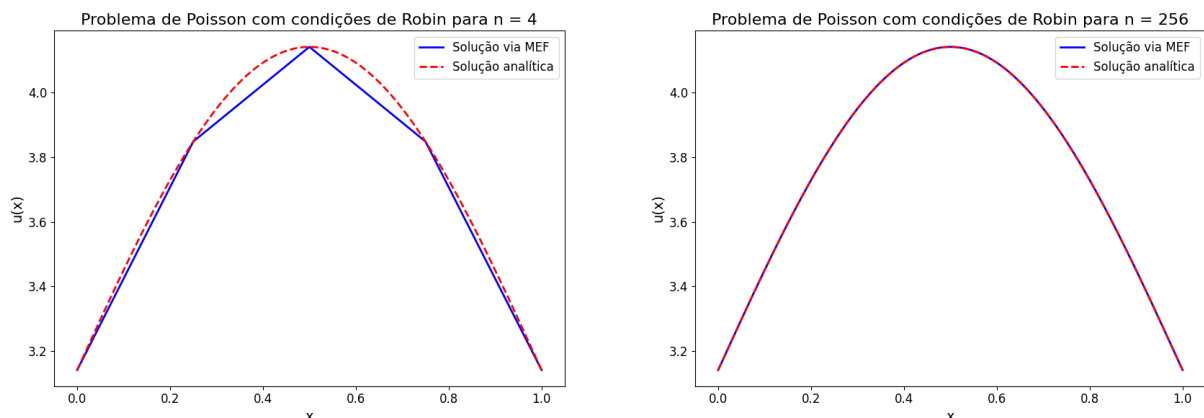


Figura 5 – Aproximações para o problema unidimensional: Poisson Robin.

### 3.2.2 Ordem de convergência

Ao utilizar métodos numéricos para resolver equações diferenciais, é fundamental compreender o comportamento da convergência das aproximações obtidas. A Figura 5 ilustra um exemplo que desperta o interesse nesse aspecto. Observamos que as aproximações numéricas se aproximam progressivamente da solução analítica, o que indica convergência para a solução. No entanto, estimar adequadamente o erro é importante não apenas para garantir a confiabilidade do método, como também para obter a ordem de convergência que o método está proporcionando para a aproximação. A ordem de convergência é uma medida que quantifica o quão rápido o erro diminui a medida que refinamos a malha de discretização. Nesse contexto, precisamos de resultados que nos forneçam as



ferramentas adequadas para investigar o erro cometido e a ordem de convergência do método desenvolvido para o Problema (3.1) e de futuras aplicações.

Queremos mostrar em que sentido  $u_h$  se aproxima de  $u$  quando  $h \rightarrow 0$ . Para isto, vamos começar definindo o interpolante linear contínuo por partes  $I_h : H^1(0, 1) \rightarrow \tilde{S}_h$  pela seguinte expressão

$$I_h(v) = \sum_{j=0}^n v(x_j) \phi_j. \quad (3.14)$$

Com o objetivo de encontrar a ordem de convergência, faremos uma adaptação de alguns resultados estudados em [5] e [17].

**Proposição 3.2.1.** *Existe uma constante  $C > 0$  tal que o interpolador  $I_h$  satisfaz as estimativas*

$$\begin{aligned} \|I_h v - v\|_{L^2(0,1)} &\leq Ch^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall v \in H^2(0, 1). \\ \|(I_h v - v)'\|_{L^2(0,1)} &\leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall v \in H^2(0, 1). \end{aligned}$$

**Demonstração.** Proposição 1.1 de [17].

Sejam  $f \in L^2(0, 1)$  e  $b : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  o termo fonte e a forma bilinear associados a formulação variacional dada pela Equação (3.7), ou seja,  $b$  é definida como

$$b(u, \phi) := \langle u', \phi' \rangle_{L^2(0,1)} + u(0)\phi(0) + u(1)\phi(1). \quad (3.15)$$

A proposição seguinte nos fornece a interpretação geométrica das aproximações que estamos obtendo. Basicamente, temos que as soluções  $u_h$  são as projeções ortogonais de  $u$  no espaço de dimensão finita  $\tilde{S}_h$ .

**Proposição 3.2.2.** *Sejam  $u \in H^2(0, 1)$  e  $u_h \in \tilde{S}_h \subset H^1(0, 1)$  as únicas funções tais que,*

$$b(u, \phi) = \langle f, \phi \rangle_{L^2(0,1)}, \quad \forall \phi \in H^1(0, 1) \quad e \quad b(u_h, \chi) = \langle f, \chi \rangle_{L^2(0,1)}, \quad \forall \chi \in \tilde{S}_h.$$

Então  $\|u - u_h\|_b = \inf_{\chi \in \tilde{S}_h} \|u - \chi\|_b$ , em que  $\|u\|_b = \sqrt{b(u, u)}$ .

**Demonstração.** Como  $\tilde{S}_h \subset H^1(0, 1)$ , podemos fixar  $\phi = \chi \in \tilde{S}_h$ , subtrair as equações, e obter

$$b(u - u_h, \chi) = 0, \quad \forall \chi \in \tilde{S}_h. \quad (3.16)$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_b^2 &= b(u - u_h, u - u_h) = b(u - u_h, u - \chi + \chi - u_h) \\ &= b(u - u_h, u - \chi) + b(u - u_h, \chi - u_h). \end{aligned}$$

Como  $\chi - u_h \in \tilde{S}_h$ , temos pela equação (3.16) que  $b(u - u_h, \chi - u_h) = 0$ . Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz 1.2.1 temos que  $b(u - u_h, u - \chi) \leq \|u - u_h\|_b \|u - \chi\|_b$ .

Portanto, temos que  $\|u - u_h\|_b^2 \leq \|u - u_h\|_b \|u - \chi\|_b$ , logo  $\|u - u_h\|_b \leq \|u - \chi\|_b$ , para todo  $\chi \in \tilde{S}_h$ , ou seja,  $\|u - u_h\|_b = \inf_{\chi \in \tilde{S}_h} \|u - \chi\|_b$ .

□

Estamos quase aptos para provar as estimativas de erro da nossa aproximação. Precisamos apenas do lema a seguir relacionado ao operador  $A$  que definimos em 2.2.1.

**Lema 3.2.1.** *Seja  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow L^2(0, 1)$  o operador linear associado a forma bilinear  $b : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela equação (3.15). Ou seja,*

$$Au := f \quad e \quad \mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H^1 \mid \exists f \in L^2 \text{ onde } b(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2}, \forall v \in H^1 \right\} := H_R^2(0, 1).$$

*Então  $A$  é uma bijeção contínua.*

**Demonstração.** Inicialmente, a Proposição 2.2.2 nos permite verificar facilmente que  $Au$  é contínuo, porque

$$\|Au\|_{L^2} = \|-u''\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^2}.$$

Quanto à bijeção, começaremos mostrando a injetividade. Se  $u \in \mathcal{D}(A)$  é tal que  $Au = 0$ , então, pela coercividade de  $b$ , temos que

$$0 = \langle Au, u \rangle_{L^2} = b(u, u) \geq c\|u\|_{H^1}^2,$$

o que implica em  $\|u\|_{H^1} = 0$ , ou seja,  $u = 0$ . Portanto  $A$  é injetivo.

Por fim, quanto à sobrejetividade, vemos em [5] que é possível obter uma transformação linear contínua  $\mathcal{T} : L^2(0, 1) \rightarrow H^1(0, 1)$  tal que  $\langle \mathcal{T}(f), v \rangle_{H^1} = \langle f, v \rangle_{L^2}$  e, pelo teorema de Lax-Milgram, uma transformação linear contínua e bijetora  $T : H^1(0, 1) \rightarrow H^1(0, 1)$  tal que  $b(u, v) = \langle Tu, v \rangle_{H^1}$ . Desse modo, temos que mostrar que se  $f \in L^2(0, 1)$ , então  $u := (T^{-1} \circ \mathcal{T})(f) \in \mathcal{D}(A)$  e  $Au = f$ . Para isso, basta observar que, para todo  $v \in H^1(0, 1)$ , temos que

$$b(u, v) = b\left((T^{-1}\mathcal{T})(f), v\right) = \left\langle T(T^{-1}\mathcal{T})(f), v \right\rangle_{H^1} = \langle \mathcal{T}(f), v \rangle_{H^1} = \langle f, v \rangle_{L^2}.$$

Logo  $u \in \mathcal{D}(A)$  e  $Au = f$ . Portanto  $A$  é sobrejetor.

□

**Teorema 3.2.1.** *Dada  $f \in L^2(0, 1)$ , sejam  $u \in H^2(0, 1)$  e  $u_h \in \tilde{S}_h \subset H^1(0, 1)$  as únicas funções tais que*

$$b(u, \phi) = \langle f, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in H^1(0, 1) \quad e \quad b(u_h, \chi) = \langle f, \chi \rangle, \quad \forall \chi \in \tilde{S}_h.$$

*Logo existe  $C > 0$  independente de  $\tilde{S}_h$  tal que*

$$1. \quad \|u' - u'_h\|_{L^2(0,1)} \leq Ch\|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

$$2. \|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

**Demonstração.** Demonstrar as desigualdades acima é a garantia de que  $u_h$  converge para  $u$  tanto em  $L^2(0,1)$  como em  $H^1(0,1)$ . Cabe notar que obteremos convergência linear  $O(h)$  em  $H^1(0,1)$ , enquanto para  $L^2(0,1)$  obtemos convergência quadrática  $O(h^2)$ . Além disso, podemos observar que não há como garantir a convergência em  $H^2(0,1)$ . Afinal, as funções  $u_h$  sequer pertencem a  $H^2(0,1)$ .

$$1. \|u' - u'_h\|_{L^2} \leq Ch \|u''\|_{L^2}$$

Observe que é possível obter uma relação natural entre as normas  $\|\cdot\|_{L^2}$  e  $\|\cdot\|_b$

$$\|u'\|_{L^2}^2 = \int_0^1 u'(x)^2 dx \leq \int_0^1 u'(x)^2 dx + u^2(0) + u^2(1) = \|u\|_b^2.$$

Sendo assim, temos

$$\|u' - u'_h\|_{L^2} \leq \|u - u_h\|_b. \quad (3.17)$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar que  $C$  é uma constante que pode ser diferente em cada desigualdade. Pela Proposição 3.2.2, temos que

$$\|u - u_h\|_b = \min_{\chi \in \tilde{S}_h} \|u - \chi\|_b.$$

Pela forma que definimos o interpolante  $I_h$  na Equação (3.14), temos que  $I_h u \in \tilde{S}_h$ . Então temos que

$$\|u - u_h\|_b \leq \|u - I_h u\|_b. \quad (3.18)$$

Contudo, sabemos pela Proposição 3.1.2 que a norma  $\|\cdot\|_b$  é equivalente a norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Logo vale a continuidade

$$\|u - I_h u\|_b \leq C \|u - I_h u\|_{H^1}. \quad (3.19)$$

Observe que a relação obtida com o interpolante  $I_h$  em relação a norma  $\|\cdot\|_{H^1}$  pode ser reescrita em relação a norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ . Daí, pela Proposição 3.2.1, temos que

$$\|u - I_h u\|_{H^1} = \left( \|u - I_h u\|_{L^2}^2 + \|(u - I_h u)'\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq C(h^2 \|u''\|_{L^2} + h \|u''\|_{L^2}). \quad (3.20)$$

Por fim, como  $h < 1$  temos que  $h^2 \leq h$ , logo (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) nos permitem concluir que

$$\|u' - u'_h\|_{L^2} \leq C(h^2 \|u''\|_{L^2} + h \|u''\|_{L^2}) \leq Ch \|u''\|_{L^2}.$$

$$2. \|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2}$$

Seja  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow L^2(0,1)$  o operador associado à forma bilinear  $b : H^1(0,1) \times H^1(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela equação (3.15). Podemos determinar  $\phi \in H^2(0,1)$  de modo que  $A\phi = u - u_h$ , onde  $Au = -u''$ . Portanto,  $\phi$  também será uma solução de

$b(\phi, v) = \langle u - u_h, v \rangle$ , para todo  $v \in H^1(0, 1)$ . De acordo com o Lema 3.2.1, temos que  $A$  é contínua e bijetora de  $H_R^2(0, 1)$  a  $L^2(0, 1)$ . Desse modo

$$\|\phi\|_{H^2} = \|A^{-1}A\phi\|_{H^2} \leq C\|A\phi\|_{L^2} \leq C\|u - u_h\|_{L^2}. \quad (3.21)$$

Dessa forma, se considerarmos  $\phi = u - u_h$ , temos

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2}^2 &= \langle u - u_h, u - u_h \rangle = b(\phi, u - u_h) \\ &= b(\phi - I_h\phi + I_h\phi, u - u_h) = b(\phi - I_h\phi, u - u_h) + b(I_h\phi, u - u_h). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Observe agora que  $I_h\phi \in \tilde{S}_h$  e  $\phi = u - u_h \in \tilde{S}_h^\perp$ , pela relação (3.16). Assim, pela simetria de  $b$  ( $b(I_h\phi, \phi) = b(\phi, I_h\phi) = \langle \phi, I_h\phi \rangle$ ), obtemos

$$b(\phi - I_h\phi, u - u_h) + b(I_h\phi, u - u_h) = b(\phi - I_h\phi, u - u_h) \leq \|\phi - I_h\phi\|_b \|u - u_h\|_b. \quad (3.23)$$

Pela equivalência da norma  $\|\cdot\|_b$  com a norma  $\|\cdot\|_{H^1}$ , temos que  $\exists C_1 > 0$ , tal que

$$\|\phi - I_h\phi\|_b \|u - u_h\|_b \leq C_1 \|\phi - I_h\phi\|_{H^1} \|u - u_h\|_{H^1}. \quad (3.24)$$

Agora, pela proposição 3.2.1, pela relação (3.21) e como  $h^2 \leq h$ , temos que existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|\phi - I_h\phi\|_{H^1} &\leq \|\phi - I_h\phi\|_{L^2} + \|(\phi - I_h\phi)'\|_{L^2} \\ &\leq C_2(h^2\|\phi''\|_{L^2} + h\|\phi''\|_{L^2}) \leq C_2h\|\phi\|_{H^2} \leq C_2h\|u - u_h\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pelo que mostramos no item anterior desse teorema, podemos considerar o mesmo  $C_2 > 0$ , tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \|u - u_h\|_{L^2} + \|(u - u_h)'\|_{L^2} \leq \|u - u_h\|_{L^2} + C_2h\|u''\|_{L^2}. \quad (3.26)$$

Logo, por (3.25) e (3.26), temos que

$$\|\phi - I_h\phi\|_{H^1} \|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch\|u - u_h\|_{L^2} (\|u - u_h\|_{L^2} + C_2h\|u''\|_{L^2}) \quad (3.27)$$

Portanto, por (3.22), (3.23), (3.24) e (3.27), temos que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2}^2 &\leq C_2h\|u - u_h\|_{L^2} (\|u - u_h\|_{L^2} + C_2h\|u''\|_{L^2}) \\ &= C_2h\|u - u_h\|_{L^2}^2 + C_2^2h^2\|u - u_h\|_{L^2}\|u''\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Isolando os termos  $\|u - u_h\|_{L^2}^2$ , obtemos

$$(1 - C_2h)\|u - u_h\|_{L^2}^2 \leq C_2^2h^2\|u - u_h\|_{L^2}\|u''\|_{L^2}$$

Para  $h \leq 1/2C$ , temos que  $(Ch)^2/(1 - Ch) \leq 2(Ch)^2$ . Assim, podemos concluir que

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq \frac{(Ch)^2}{1 - Ch}\|u''\|_{L^2} \leq Ch^2\|u''\|_{L^2}.$$

□

**Exemplo 3.2.3.** O teorema 3.2.1 nos mostra que a ordem de convergência esperada para o exemplo 3.2.2 será quadrática, o que significa que uma redução em  $h = 1/n$  pela metade resulta em uma redução de quatro vezes no erro.

Neste contexto, iremos avaliar duas formas distintas de estimar o erro: a norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  e a norma  $\|\cdot\|_{L^\infty}$ . A norma  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  é frequentemente escolhida em aplicações numéricas devido à sua simplicidade de execução.

Sendo  $u$  a solução analítica do problema (3.13), calcularemos a solução numérica  $u_h$  para  $n \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$ . No entanto, para cada valor de  $n$ , estimaremos o erro em um conjunto maior de pontos, mais especificamente, para cada  $n$ , calcularemos o erro nos pontos  $x_i = i/(10n)$ , com  $i \in \{0, \dots, 10n\}$ . Essa etapa é necessária devido ao fato de que se considerarmos apenas os valores em  $x_i = i/n$ , com  $i \in \{0, \dots, n\}$ , estaríamos calculando o erro diretamente nos nós, o que resultaria em um erro muito pequeno devido ao arredondamento.

A Tabela 1 apresenta os erros e seus quocientes, evidenciando a convergência quadrática na norma  $\|\cdot\|_{L^\infty}$ , definida como

$$\|u_h(x) - u(x)\|_{L^\infty} = \max_{i=0, \dots, 10n} |u_h(x_i) - u(x_i)|.$$

O cálculo dessa norma é realizado através do código abaixo:

```
y = np.linspace(a, L, 10*n + 1)
# Calcula a norma L_infinity do erro
norma_linfinito = np.max(np.abs(u_num(y) - u_teo(y)))
```

Tabela 1 – Ordem de convergência ( $\|\cdot\|_{L^\infty}$ ) do problema unidimensional: Poisson Robin.

Pontos ( $n$ )	Erros ( $e_n$ )	Convergência ( $e_{n-1}/e_n$ )
2	$2.090170e - 01$	
4	$7.032614e - 02$	2.97211
8	$1.884551e - 02$	3.73172
16	$4.792086e - 03$	3.93263
32	$1.203093e - 03$	3.98314
64	$3.010906e - 04$	3.99578
128	$7.529249e - 05$	3.99895
256	$1.882436e - 05$	3.99974

Em contrapartida, a tabela 2 registra os resultados obtidos utilizando a norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ , que é definida como

$$\|u_h(x) - u(x)\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 |u_h(x) - u(x)|^2 dx} = \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} |u_h(x) - u(x)|^2 dx}.$$

Note que, como a solução numérica  $u_h$  é dada por pontos que se aproximam da solução nos nós, é necessária uma interpolação linear da forma:

$$u_h(x) = u_h(x_k) \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} + u_h(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

O código a seguir calcula a norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  do erro:

```
y = np.linspace(a, L, 10*n + 1)
# Calcula a norma L2 do erro
integral = 0
for k in range(len(y)-1):
    interpol = lambda x: u_num(y[k])*(y[k+1] - x)/(y[k+1] - y[k])
        + u_num(y[k+1])*(x-y[k])/(y[k+1] - y[k])
    erro_x = lambda x: (u_teo(x) - interpol(x))**2
    int , error = integrate.quad(erro_x, y[k], y[k+1])
    integral += int
norma_l2 = np.sqrt(integral)
```

Tabela 2 – Ordem de convergência ( $\|\cdot\|_{L^2}$ ) do problema unidimensional: Poisson Robin.

Pontos ( $n$ )	Erros ( $e_n$ )	Convergência ( $e_{n-1}/e_n$ )
2	$1.508770e - 01$	
4	$3.928435e - 02$	3.84064
8	$9.920920e - 03$	3.95975
16	$2.486501e - 03$	3.98991
32	$6.220178e - 04$	3.99748
64	$1.555290e - 04$	3.99937
128	$3.888378e - 05$	3.99984
256	$9.721041e - 06$	3.99996

As Tabelas 1 e 2 comparam os erros e as taxas de convergência usando as normas  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  e  $\|\cdot\|_{L^2}$ , respectivamente. Podemos notar que, à medida que o número de pontos  $n$  aumenta, a convergência quadrática ocorre rapidamente em ambas as normas. Outra maneira de verificar a ordem de convergência quadrática é observando a inclinação da reta obtida no gráfico  $\log(n) \times \log(e_n)$ , para cada  $n$  da discretização, que deverá se aproximar de  $\pm 2$ .

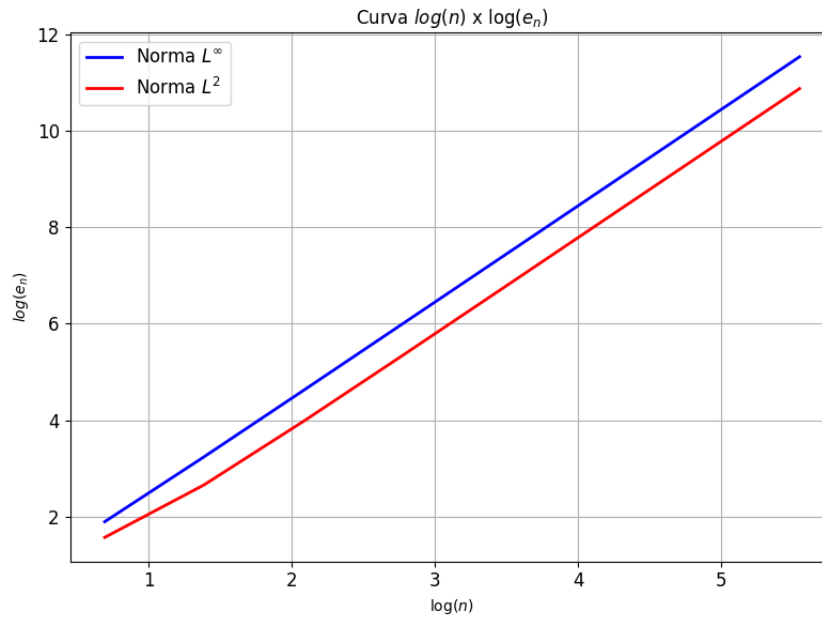


Figura 6 – Reta de ordem de convergência: Poisson Robin unidimensional.

A Figura 6 nos permite constatar novamente a convergência quadrática em ambas as normas. No entanto, cabe observar que os erros calculados na norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  tendem a ser menores e uma taxa de convergência mais veloz em comparação com a norma  $\|\cdot\|_{L^\infty}$ . Portanto, a escolha da norma depende das necessidades específicas do problema, da precisão desejada na análise dos erros e o custo computacional que será gasto, visto que o cálculo na norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  tende a exigir um custo computacional maior.

**Observação 3.2.1.** Enquanto analisamos os resultados de programação, surgiu uma questão interessante: ao construir a matriz  $A + R$  (conforme mostrado na equação (3.11)), nos deparamos com a presença dos termos de  $R$ , que são adicionados aos extremos da matriz  $A$ .

No entanto, cada elemento não nulo da matriz  $A$  depende diretamente de  $n$ , que será grande, se  $n$  o for. Então, surge a dúvida: será que faz muita diferença somar os termos de  $R$  se a matriz  $A$  já é dominante?

Vamos analisar com mais detalhes para entender melhor a situação. Primeiro devemos nos perguntar: que problema de equações diferenciais está definido pelo sistema  $A\alpha = b$ ? Esse seria um problema de Poisson em um sistema isolado (2.4), ou seja, com condições de Neumann.

Agora, o que ocorre numericamente ao removermos o termo  $R$  do sistema? Obtemos  $\det(A) = 0$ , isso implica que não há solução para o sistema  $A\alpha = b$ .

Na verdade, esse é um resultado esperado. Como observamos no exemplo 2.1.2, não há como garantir a existência e unicidade do problema (2.4). Numericamente, isso se reflete no sistema construído, resultando em um sistema para qual não há solução.

### 3.3 Caso bidimensional do problema Poisson Robin

Nesta seção iremos discutir o método de elementos finitos bidimensional obtido através de triangulações. Para essa construção, tomaremos como referência os textos [18], [19] e [20]. No intuito de simplificar a aplicação, iremos considerar em (3.1) o caso bidimensional  $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  e  $\kappa = 1$ . Então, iremos realizar os testes no problema de Robin bidimensional:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ -\partial_\nu u = u & \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

#### 3.3.1 Elementos finitos em duas dimensões

Conforme a Seção 3.1, temos que a formulação fraca do problema de Poisson com condições de Robin é dada pela Equação (3.5). Desse modo, temos que a formulação variacional da aproximação é dada por: buscamos  $u_h \in V_h$  tal que  $b(u_h, v_h) = F(v_h)$ , para todo  $v_h \in V_h$ , onde

$$b(u_h, v_h) = \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u_h, v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{e} \quad F(v_h) = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

e o espaço:

$$V_h \subset \{v \in H^1(\Omega) \mid \partial_\nu v + v = 0 \text{ sobre } \Gamma\}.$$

Escolhendo  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  como uma base de  $V_h$ , podemos definir

$$u_h = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x, y) \quad \text{e} \quad v_h = \phi_i(x, y), \quad i = 1, \dots, N.$$

Substituindo esses resultados na formulação variacional, obtemos um sistema linear da forma:  $Au = r$ , onde  $A$  é uma matriz  $N \times N$ , com  $A_{ij} = b(\phi_i, \phi_j)$  e  $r$  é um vetor de tamanho  $N$  tal que  $r_i = \langle \phi_i, f \rangle_{L^2(\Omega)}$ .

Um polinômio  $p$  de grau  $N$  nas variáveis  $x$  e  $y$  tem a forma  $\sum_{i+j \leq N} a_{ij} x^i y^j$ , onde  $a_{ij}$  são os coeficientes (constantes). Para definir um **polinômio por partes** em  $\Omega$ , o domínio  $\Omega$  precisa ser particionado em subdomínios. Uma função polinomial por partes é uma função definida por um polinômio em cada subdomínio de  $\Omega$ . A coleção de subdomínios é chamada de **malha**. As malhas bidimensionais mais comuns são **triangulações**: o domínio  $\Omega$  é particionado em triângulos. Assumiremos que a interseção de quaisquer dois triângulos é sempre ou um **vértice** (comum aos dois triângulos) ou uma **aresta** (comum aos dois triângulos). A figura abaixo mostra uma triangulação no quadrado  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  particionado em  $N = 5$  pontos.



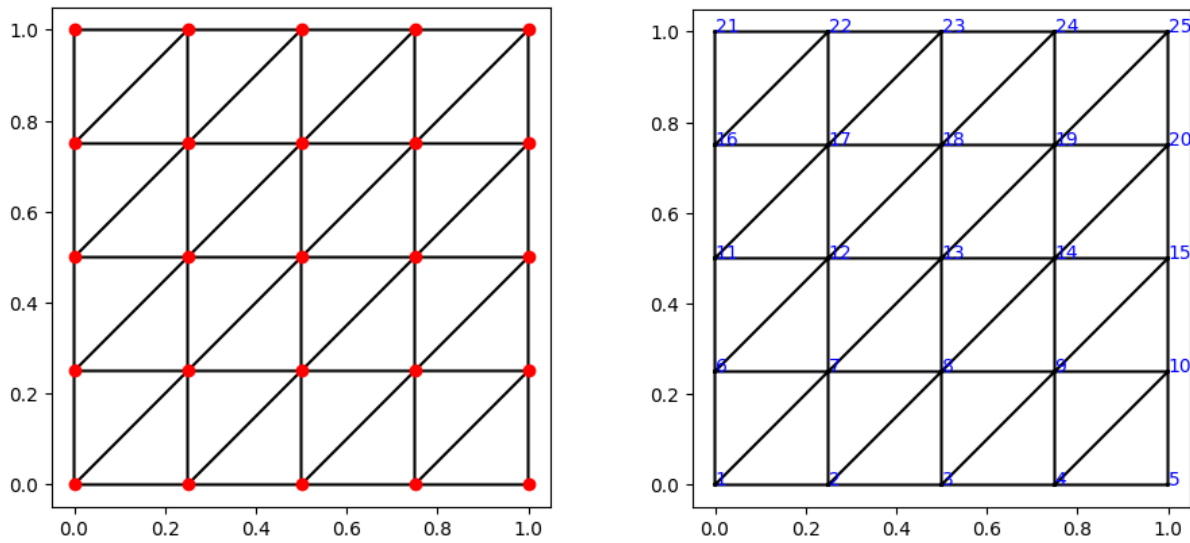


Figura 7 – 2D FEM: Triangulação em um quadrado unitário.

Uma triangulação consiste de  $N_t$  triângulos  $T_i$  e  $N_v$  vértices  $z_j$ , com  $1 \leq i \leq N_t$  e  $1 \leq j \leq N_v$ . A figura 7 mostra a enumeração dos nós em uma malha definida em  $\Omega$ , onde geramos  $N_t = 32$  triângulos (veja a figura 8),  $N_v = 25$  vértices para uma discretização de  $N = 5$  pontos. Cada triângulo é associado a três vértices da lista  $\{z_1, z_2, \dots, z_{N_v}\}$ , que podem ser identificados pelos seus índices na lista:

- i. índices dos vértices do triângulo  $T_i$  :  $n_{i,1}$ ,  $n_{i,2}$  e  $n_{i,3}$
- ii. os vértices de  $T_i$  são  $z_{n_{i,1}}$ ,  $z_{n_{i,2}}$  e  $z_{n_{i,3}}$ . De modo que os índices  $n_{i,j}$  relacionam os índices locais ( $j = 1, 2, 3$ ) com os índices globais.

No processo de análise e implementação do método de elementos finitos, é necessário considerar uma família de triangulações. Cada triangulação é caracterizada pelo seu tamanho de malha  $h$  (comprimento característico de malha), que é definido como o diâmetro máximo dentre todos os diâmetros dos triângulos que compõem a triangulação. Denotamos uma triangulação por  $\mathcal{T}_h$ . O espaço de funções mais simples formado por polinômios por partes contínuos em  $\Omega$ , consiste em funções afins por partes contínuas em  $\mathcal{T}_h$ . Seja  $p$  uma função polinomial linear por partes contínua em  $\Omega$ . Então, a função  $p$  restrita a cada  $T_i \in \mathcal{T}_h$  é da forma

$$p_i(x, y) = p(x, y)|_{T_i} = a_i + b_i x + c_i y,$$

com  $a_i, b_i$  e  $c_i$  são determinados (unicamente) pelos valores de  $p_i(x, y)$  nos vértices de  $T_i$ .

Seja  $V_h$  o conjunto de todas as funções  $v$  lineares por partes contínuas definidas em  $\mathcal{T}_h$ . Desse modo,  $V_h$  é um subespaço vetorial de  $H^1(\Omega)$  de dimensão finita, tal que  $\dim V_h = N_v$ . Cada função  $v \in V_h$  pode ser determinada por um vetor  $a \in \mathbb{R}^{N_v}$  consistindo dos valores nodais da função  $v$ . Assim, é possível determinar uma base  $\{\phi_1, \dots, \phi_{N_v}\}$  para

o espaço  $V_h$  de modo que a função  $v \in V_h$  pode ser escrita como a combinação linear  $v = \sum_{i=1}^{N_v} a_i \phi_i$ . Assim, para todo  $a \in \mathbb{R}^{N_v}$ , temos  $\sum_{i=1}^{N_v} a_i \phi_i(x_j, y_j) = v(x_j, y_j) = a_j$ , então

$$\phi_i \in \left\{ u \in C(\Omega) \mid u|_{T_i} \text{ é afim}, \forall i = 1, \dots, N_v \right\} \quad \text{e} \quad \phi_i(z_j) = \delta_{ij}.$$

### 3.3.2 Esparsidade da matriz global

Se  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  é uma base para  $V_h$ , então a matriz global  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  é dada por

$$A = [A_{ij}], \quad \text{onde} \quad A_{ij} = b(\phi_i, \phi_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

A figura 7 representa a enumeração dos nós, e como dito anteriormente, geramos  $N_T = 32$  triângulos enumerados pela figura 8. Além disso, podemos observar o conjunto suporte de cada  $\phi_i$ . Por exemplo, para  $\phi_1$  e  $\phi_{19}$  temos que

$$\text{supp}(\phi_1) = T_1 \cup T_2, \quad \text{enquanto} \quad \text{supp}(\phi_{19}) = T_{21} \cup T_{22} \cup T_{23} \cup T_{30} \cup T_{31} \cup T_{32}.$$

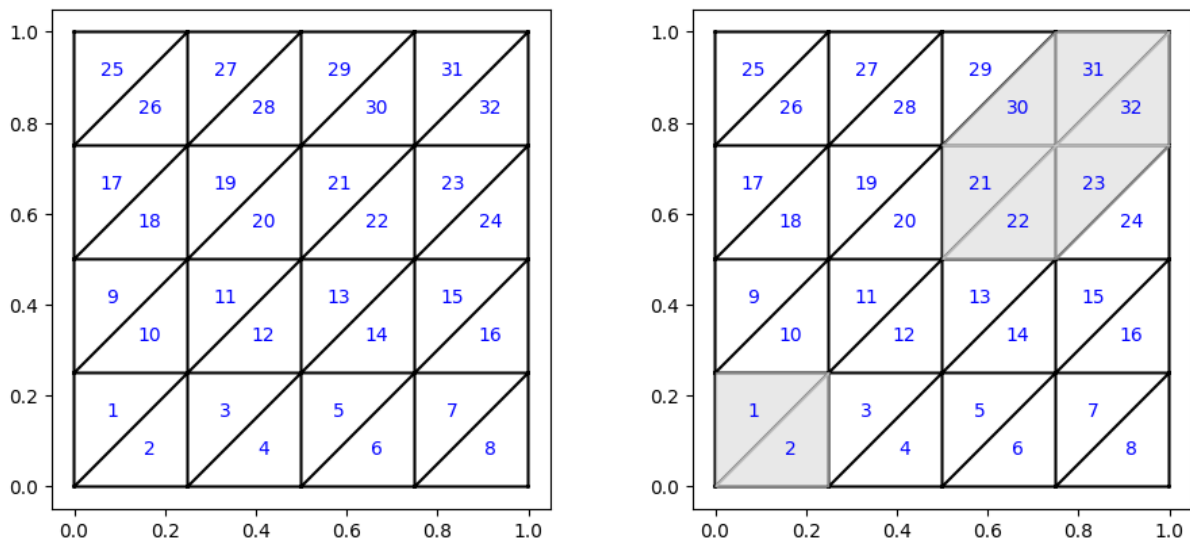


Figura 8 – 2D FEM: Enumeração e os suportes de  $\phi_1$  e  $\phi_{19}$ .

Note que, como esses suportes são disjuntos, temos que  $b(\phi_1, \phi_{19}) = 0$  e, consequentemente  $A_{1,19} = A_{19,1} = 0$ . Isso significa que  $A_{ij} \neq 0$  somente se a interseção entre os suportes de  $\phi_i$  e  $\phi_j$  é não vazia. Isso acontece quando  $i$  e  $j$  são vértices livres de um mesmo triângulo, caso em que esses pontos nodais são chamados de **adjacentes**. Considere o vértice livre 13 e o suporte de  $\phi_{13}$  mostrados na figura 9

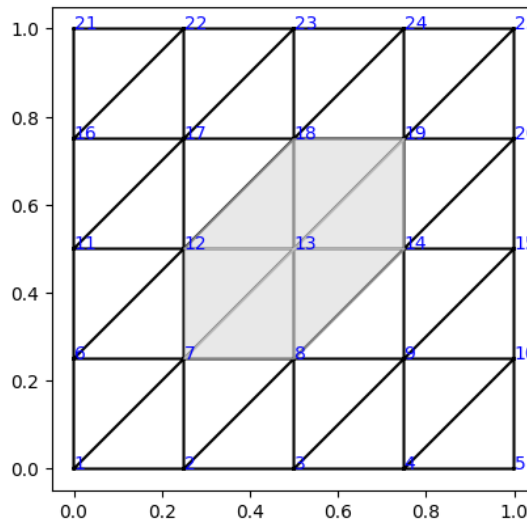


Figura 9 – 2D FEM: Suporte de  $\phi_{13}$ .

Os únicos pontos nodais livres adjacentes ao vértice 13 são: 7, 8, 12, 13, 14, 18 e 19. Supondo que a linha de  $A$  associada ao ponto nodal 13 seja a linha 13, então os únicos valores que podem ser não nulos dessa linha, ocorrem em:  $A_{13,7}$ ,  $A_{13,8}$ ,  $A_{13,12}$ ,  $A_{13,13}$ ,  $A_{13,14}$ ,  $A_{13,18}$  e  $A_{13,19}$ . Nesse caso, podemos observar que a matriz  $A$  possui no máximo cinco números não nulos por linha. Isso acontece devido à simetria da malha. Com auxílio numérico iremos calcular os elementos  $A_{13,j}$ , para  $j = 7, 8, 12, 13, 14, 18$  e  $19$ .

Para o elemento  $A_{13,7}$ , precisamos determinar certos polinômios  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$ , tais que  $p_i(x, y) = a + bx + cy$ , com  $i = 1, 2, 3$  e  $4$ . A figura 10 nos mostra as regiões de integração que devemos considerar para obter cada função  $p_i$ .

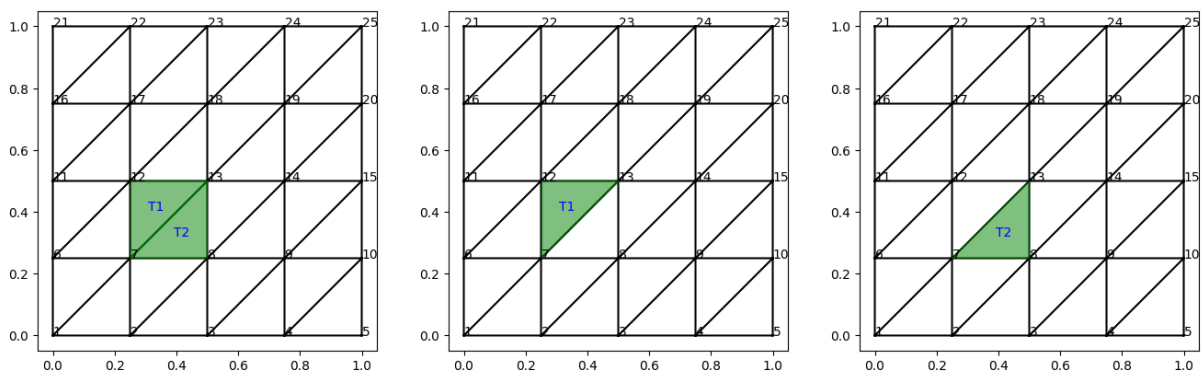


Figura 10 – Cálculo de  $A_{13,7}$ : Região de integração.

Definindo  $p_1 = \phi_{13}|_{T_2}$ , tal que ele seja um em  $(1/2, 1/2)$  e zero em  $(1/2, 1/4)$  e  $(1/4, 1/4)$ . Obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} 1 &= p_1(1/2, 1/2) = a + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} \\ 0 &= p_1(1/2, 1/4) = a + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{4} \\ 0 &= p_1(1/4, 1/4) = a + b\frac{1}{4} + c\frac{1}{4} \end{aligned} \implies p_1(x, y) = 4y - 1 \implies \nabla p_1(x, y) = (0, 4).$$

Definindo  $p_2 = \phi_{13}|_{T_1}$ , tal que ele seja um em  $(1/2, 1/2)$  e zero em  $(1/4, 1/2)$  e  $(1/4, 1/4)$ .

$$\begin{aligned} 1 &= p_2(1/2, 1/2) = a + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} \\ 0 &= p_2(1/4, 1/2) = a + b\frac{1}{4} + c\frac{1}{2} \implies p_2(x, y) = 4x - 1 \implies \nabla p_2(x, y) = (4, 0). \\ 0 &= p_2(1/4, 1/4) = a + b\frac{1}{4} + c\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Definindo  $p_3 = \phi_7|_{T_2}$ , tal que ele seja um em  $(1/4, 1/4)$  e zero em  $(1/2, 1/4)$  e  $(1/2, 1/2)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= p_3(1/2, 1/2) = a + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} \\ 0 &= p_3(1/2, 1/4) = a + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{4} \implies p_3(x, y) = 2 - 4x \implies \nabla p_3(x, y) = (-4, 0). \\ 1 &= p_3(1/4, 1/4) = a + b\frac{1}{4} + c\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Definindo  $p_4 = \phi_7|_{T_1}$ , tal que ele seja um em  $(1/4, 1/4)$  e zero em  $(1/4, 1/2)$  e  $(1/2, 1/2)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= p_4(1/2, 1/2) = a + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} \\ 0 &= p_4(1/4, 1/2) = a + b\frac{1}{4} + c\frac{1}{2} \implies p_4(x, y) = 2 - 4y \implies \nabla p_4(x, y) = (0, -4). \\ 1 &= p_4(1/4, 1/4) = a + b\frac{1}{4} + c\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Desse modo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} A_{13,7} &= \int_{T_2} \nabla p_1 \cdot \nabla p_3 + \underbrace{\int_{\Gamma_{T_2}} p_1 p_3}_0 + \int_{T_1} \nabla p_2 \cdot \nabla p_4 + \underbrace{\int_{\Gamma_{T_1}} p_2 p_4}_0 \\ &= \int_{T_2} (0, 4) \cdot (-4, 0) + \int_{T_1} (4, 0) \cdot (0, -4) = 0 \end{aligned}$$

Além disso, pela simetria da malha, temos analogamente que  $A_{13,19} = A_{13,7} = 0$ .

Agora, para o ponto  $A_{13,8}$ , a região de integração será definida pela figura ao lado. Os polinômios são representados por  $p_i$ , onde  $i = 1, 2, 3$ , e 4. É importante observar que  $p_1 = \phi_{13}|_{T_2}$  já foi calculado anteriormente. A partir deste ponto, omitiremos os sistemas.

$$\begin{aligned} p_1 &= \phi_{13}|_{T_2} \implies p_1(x, y) = 4x - 1 \text{ e } \nabla p_1 = (4, 0) \\ p_2 &= \phi_8|_{T_2} \implies p_2(x, y) = 4x - 4y \text{ e } \nabla p_2 = (4, -4) \\ p_3 &= \phi_{13}|_{T_3} \implies p_3(x, y) = 1 - 4x + 4y \text{ e } \nabla p_3 = (-4, 4) \\ p_4 &= \phi_8|_{T_3} \implies p_4(x, y) = 2 - 4y \text{ e } \nabla p_4 = (0, -4) \end{aligned}$$

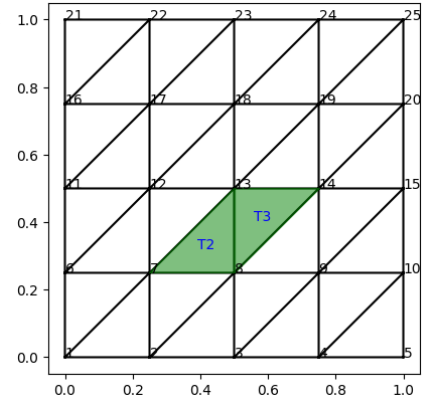


Figura 11 – Cálculo de  $A_{13,8}$ .

Note que as áreas dos triângulos são as mesmas, e serão denotadas por  $A_T$  que, nesse caso  $A_T = 1/32$ . Desse modo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} A_{13,8} &= \int_{T_2} \nabla p_1 \cdot \nabla p_2 + \underbrace{\int_{\Gamma_{T_2}} p_1 p_2}_0 + \int_{T_3} \nabla p_3 \cdot \nabla p_4 + \underbrace{\int_{\Gamma_{T_3}} p_3 p_4}_0 \\ &= \int_{T_2} (4, 0) \cdot (4, -4) + \int_{T_3} (-4, 4) \cdot (0, -4) = \int_{T_2} -16 + \int_{T_3} -16 = -16(2A_T) = -1. \end{aligned}$$

Além disso, novamente pela simetria da malha, é possível mostrar que  $A_{13,18} = A_{13,8} = -1$ .

Para o ponto  $A_{13,12}$  temos que a região de integração é dada pela figura 12 e devemos calcular novamente quatro funções afins, denotadas por  $p_i$ , com  $i = 1, 2, 3$  e  $4$ . É importante observar que o polinômio  $p_1 = \phi_{13}|_{T_1}$  já foi calculado anteriormente.

$$\begin{aligned} p_1 &= \phi_{13}|_{T_1} \implies p_1(x, y) = 4y - 1 \text{ e } \nabla p_1 = (0, 4) \\ p_2 &= \phi_{12}|_{T_1} \implies p_2(x, y) = -4x + 4y \text{ e } \nabla p_2 = (-4, 4) \\ p_3 &= \phi_{13}|_{T_6} \implies p_3(x, y) = 1 + 4x - 4y \text{ e } \nabla p_3 = (4, -4) \\ p_4 &= \phi_{12}|_{T_6} \implies p_4(x, y) = 2 - 4x \text{ e } \nabla p_4 = (-4, 0) \end{aligned}$$

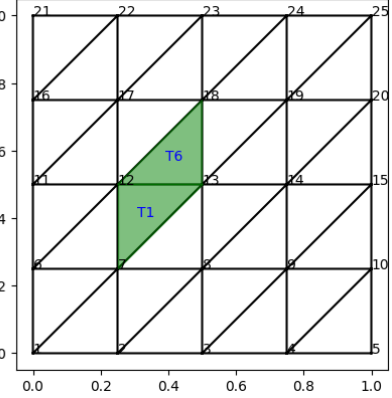


Figura 12 – Cálculo de  $A_{13,12}$ .

Desse modo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} A_{13,12} &= \int_{T_1} \nabla p_1 \cdot \nabla p_2 + \underbrace{\int_{\Gamma_{T_1}} p_1 p_2}_0 + \int_{T_6} \nabla p_3 \cdot \nabla p_4 + \underbrace{\int_{\Gamma_{T_6}} p_3 p_4}_0 \\ &= \int_{T_1} (0, 4) \cdot (-4, 4) + \int_{T_6} (4, -4) \cdot (-4, 0) = \int_{T_1} -16 + \int_{T_6} -16 = -16(2A_T) = -1. \end{aligned}$$

Mais uma vez, pela simetria da malha, temos que  $A_{13,14} = A_{13,12} = -1$ .

Portanto, resta apenas o ponto  $A_{13,13}$ . A figura 13 representa a região de integração e, diferente dos casos anteriores, temos apenas um sistema associado a cada triângulo, mas devemos calcular ao total seis funções, denotadas por  $p_i$ , com  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .

$$\begin{aligned} p_1 &= \phi_{13}|_{T_1} \implies p_1(x, y) = 4y - 1 \text{ e } \nabla p_1 = (0, 4) \\ p_2 &= \phi_{13}|_{T_2} \implies p_2(x, y) = 4x - 1 \text{ e } \nabla p_2 = (4, 0) \\ p_3 &= \phi_{13}|_{T_3} \implies p_3(x, y) = 1 - 4x + 4y \text{ e } \nabla p_3 = (-4, 4) \\ p_4 &= \phi_{13}|_{T_4} \implies p_4(x, y) = -4x + 3 \text{ e } \nabla p_4 = (-4, 0) \\ p_5 &= \phi_{13}|_{T_5} \implies p_5(x, y) = -4y + 3 \text{ e } \nabla p_5 = (0, -4) \\ p_6 &= \phi_{13}|_{T_6} \implies p_6(x, y) = 1 + 4x - 4y \text{ e } \nabla p_6 = (4, -4) \end{aligned}$$

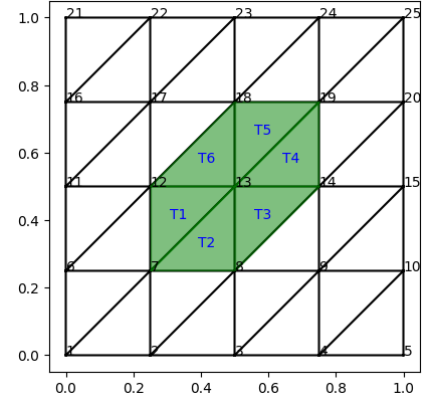


Figura 13 – Cálculo de  $A_{13,13}$ .

Desse modo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} A_{13,13} &= \int_{T_1} (\nabla p_1)^2 + \int_{T_2} (\nabla p_2)^2 + \int_{T_3} (\nabla p_3)^2 + \int_{T_4} (\nabla p_4)^2 + \int_{T_5} (\nabla p_5)^2 + \int_{T_6} (\nabla p_6)^2 \\ &= \int_{T_1} (0, 4)^2 + \int_{T_2} (4, 0)^2 + \int_{T_3} (-4, 4)^2 + \int_{T_4} (-4, 0)^2 + \int_{T_5} (0, -4)^2 + \int_{T_6} (4, -4)^2 \\ &= \int_{T_1} 16 + \int_{T_2} 16 + \int_{T_3} 32 + \int_{T_4} 16 + \int_{T_5} 16 + \int_{T_6} 32 = 16(8A_T) = 4. \end{aligned}$$

Com isso podemos concluir que a linha treze da matriz  $A$  é dada por

$$A_{13,j} = \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{\times 7} \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{\times 7}.$$

Nessa construção, temos que a matriz  $A$  é da ordem de  $25 \times 25$ , ou seja, possui 625 elementos, sendo que somente 107 são não nulos. Isso representa aproximadamente 17% do tamanho total matriz. Quando uma malha é refinada o número de vértices adjacentes a um dado vértice não aumenta. Assim, a esparsidade da matriz global aumenta. Por exemplo, refinando a malha anterior de forma que  $A$  seja da ordem  $72 \times 72$ , teríamos 326 valores não nulos na matriz. Isso representa aproximadamente 6%, de um total de 5184.

### 3.3.3 Introdução ao FEniCS

Na subseção anterior, construímos uma linha do sistema matricial referente a um nó cujo suporte não coincide com a fronteira, que corresponde à interface onde ocorre a condição de Robin. Podemos observar que a complexidade da construção do MEF em duas dimensões aumenta consideravelmente em comparação com o que foi desenvolvido para uma dimensão. Dessa forma, optaremos por utilizar um software específico para a resolução dos MEF.

Escolhemos o **FEniCS**, uma coleção de pacotes de código aberto que permite a aproximação da solução de equações diferenciais utilizando o MEF. A interface do FEniCS é compatível com C++ e Python, e pode ser utilizada nos sistemas operacionais Linux, Mac e Windows. Optamos por empregar a linguagem Python no ambiente Windows, utilizando o subsistema Linux (WSL2). Dessa maneira, conseguimos realizar a instalação conforme as orientações disponíveis em [FEniCS on Ubuntu](#).

Além disso, a própria plataforma disponibiliza um livro-texto com diversos exemplos e pacotes disponíveis: [21]. Entre os pacotes disponíveis, é importante destacar o **DOLFIN**, que é amplamente utilizado em nossas aplicações. Ele representa a interface C++/Python do FEniCS, fornecendo o ambiente de resolução dos problemas.

No entanto, algumas das funções do FEniCS precisam ser melhor aprofundadas. Por exemplo, o DOLFIN permite criar uma malha com uma única linha de código: para obter uma malha triangular uniforme sobre quadrado  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  dividida em  $4 \times 4$  quadrados, utilizamos a função: `UnitSquareMesh`.

```

from dolfin import *
import matplotlib.pyplot as plt

mesh = UnitSquareMesh(4, 4)
plot(mesh); plt.show()

```

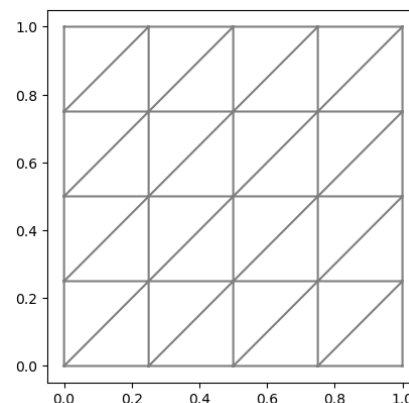


Figura 14 – FEniCS: Malha.

Para definir espaços funcionais e funções, o FEniCS fornece classes. Um espaço funcional é criado com três argumentos: (malha, tipo de elemento, grau do elemento finito). Neste trabalho, utilizaremos apenas espaços de funções da família Lagrange padrão ('P' pode ser escrito como 'Lagrange'). Para funções definidas no espaço funcional, as classes `Function`, `TrialFunction` e `TestFunction` são fornecidas. Desse modo, podemos definir a aproximação  $u$  e a função de teste  $v$ .

```

V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)

```

Para resolver uma EDP, uma opção adicional para especificar condições de contorno deve ser oferecida. Como exemplo inicial, as condições de contorno de Dirichlet necessitam de três argumentos: (espaço funcional, expressão  $u_D$ , função que define os pontos na fronteira).

```

def boundary(x, on_boundary):
    return on_boundary

V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
u_D = Expression('x[0]-c*t', degree=1, c=c, t=0)
bc = DirichletBC(V, u_D, boundary)

```

O problema variacional pode ser definido tanto em sua forma padrão quanto em sua forma abstrata. Definimos a forma variacional discreta e funcional em uma notação próxima às que obtemos analiticamente. A UFL (Unified Form Language) é uma linguagem específica para a descrição de fórmulas variacionais. Em termos simples, a UFL permite que os usuários descrevam equações matemáticas de forma abstrata, sem se preocupar com os detalhes de implementação. Utilizaremos a UFL para escolher espaços de elementos finitos e expressões para formas fracas em uma notação matemática próxima. Nela as integrais são expressas pela multiplicação com uma medida que representa o integrante.

Assim, uma multiplicação com  $dx$  é a integral sobre o interior do domínio  $\Omega$ , com  $ds$  é a integral na fronteira  $\partial\Omega$ . Além disso, a UFL tem uma maneira de expressar derivadas:

```
f = Dx(v, i)
```

que descreve a derivada escalar na direção espacial  $x_i$ . Como um exemplo, a forma abstrata da equação do calor resolvida com o método de Euler implícito pode ser escrito em UFL:

```
F = u*v*dx + dt*dot(grad(u), grad(v))*dx - (u_n + dt*f)*v*dx
a, L = lhs(F), rhs(F)
# 0u
a = u*v*dx + dt*dot(grad(u), grad(v))*dx
L = (u_n + dt*f)*v*dx
```

Além disso, podemos definir elementos finitos com UFL:

```
element = FiniteElement(family, cell, degree)
```

onde `family` é uma das possíveis famílias de elementos, `cell` é o domínio do elemento e `degree` o grau polinomial. Informações sobre como uma célula é definida e quais famílias estão disponíveis também podem ser encontrados na documentação do UFL em [21]. Posteriormente, o passo de tempo com FEniCS é realizado como

```
u = Function(V)
t = 0
for n in range(num_steps):
    t += dt; u_D.t = t      # Atualizacao no tempo
    solve(a == L, u, bc)   # Resolve o problema variacional
    u_n.assign(u)         # u_n recebe u
```

## 3.4 Equação de Poisson bidimensional com condições de contorno de Robin

Nesta seção, realizaremos a aplicação do método dos elementos finitos para resolver equações elípticas bidimensionais com condições de contorno de Robin. Consideraremos  $\Omega = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$  e  $\kappa = 1$ . Então, iremos realizar os testes no seguinte problema de Robin:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ -\partial_\nu u = u & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (3.28)$$

Cabe notar que, uma vez que não estamos lidando com as condições de contorno de Dirichlet, a implementação se torna essencialmente uma aplicação da notação por UFL. Com base na definição 3.1.1, temos que

$$b(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{e} \quad F(v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$



**Exemplo 3.4.1.** Dado que  $\Omega = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ , iremos determinar uma função  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça as condições de contorno do problema (3.28), e assim será possível definir o termo fonte. Seja

$$u(x, y) = (\cos(x) + \sin(x))(\cos(y) + \sin(y)),$$

suas derivadas normais satisfazem as condições de Robin em  $\Gamma$ , dadas abaixo:

$$\partial_x u(0, y) = (-\sin(0) + \cos(0))(\cos(y) + \sin(y)) = \cos(y) + \sin(y) = u(0, y).$$

$$-\partial_x u(\pi/2, y) = (\sin(\pi/2) - \cos(\pi/2))(\cos(y) + \sin(y)) = \cos(y) + \sin(y) = u(\pi/2, y).$$

$$\partial_y u(x, 0) = \cos(x) + \sin(x) = u(x, 0).$$

$$-\partial_y u(x, \pi/2) = \cos(x) + \sin(x) = u(x, \pi/2).$$

Portanto, o problema elíptico bidimensional com condições de Robin é dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = 2(\sin(x) + \cos(x))(\sin(y) + \cos(y)) \text{ em } \Omega, \\ -\partial_\nu u = u \text{ em } \Gamma. \end{cases}$$

O código a seguir ilustra as aproximações  $u_h \in V_h$  que satisfazem a formulação fraca do problema acima, obtida pela Definição 3.1.1. O arquivo completo é intitulado *2D-PoissonRobin.ipynb*.

```
# Bibliotecas 2D-PoissonRobin.ipynb

# Definindo a quantidade de pontos e os vetores de erro
M = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512]; e = []; e12 = []
for n in np.array(M): # Looping espacial
    nx = ny = n # Definindo a malha
    mesh = RectangleMesh(Point(0, 0), Point(pi/2, pi/2), nx, ny)
    Vh = FunctionSpace(mesh, 'Lagrange', 1)
    u_teo = Expression('(sin(x[0])+cos(x[0]))*
                        (sin(x[1])+cos(x[1]))', degree=2)#Teorica
    f = Expression('2*(sin(x[0])+cos(x[0]))*
                   (sin(x[1])+cos(x[1]))', degree=2) # Fonte
    # Fomulacao variacional
    u = TrialFunction(Vh); v = TestFunction(Vh)
    b = (dot(grad(u), grad(v)))*dx + u*v*ds; F = f*v*dx
    # Resolvendo o metodo de Ritz-Raleigh
    u = Function(Vh)
    solve(b == F, u)
    # Erro na norma L2
    error_L2 = errornorm(u_teo, u, 'L2')
    e12.append(error_L2)
```

```
# Erro na norma do maximo
vertex_values_u_teo = u_teo.compute_vertex_values(mesh)
vertex_values_u = u.compute_vertex_values(mesh)
error_max = np.max(np.abs(vertex_values_u_teo -
                           vertex_values_u))

e.append(error_max)
```

A Figura 15 registra as aproximações obtidas com  $n_x = n_y = 4, 16$  e  $512$  pontos, respectivamente.

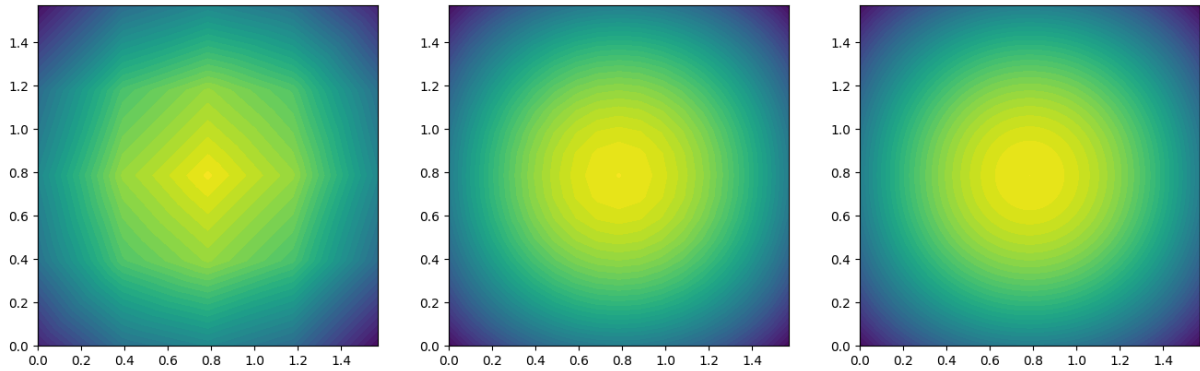


Figura 15 – Aproximações para o problema bidimensional: Elíptico Robin.

O exemplo 3.4.1 mostra como o software FEniCS simplifica a obtenção de aproximações para algumas EDPs. Considerando que, para condições de contorno do tipo Robin, necessitamos apenas da formulação fraca do problema, podemos aplicar a mesma abordagem a problemas variacionais que envolvem domínios temporais, como as EDPs parabólicas. O Capítulo 4 será dedicado a essa categoria de EDPs. Contudo, antes disso, assim como fizemos na seção 3.2, precisamos garantir a confiabilidade da aplicação desenvolvida no Exemplo 3.4.1 por meio do estudo de erro e ordem de convergência.

Nessa etapa seguiremos o desenvolvimento feito em [4], para  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio poligonal convexo, ou seja,  $\Omega$  é o interior de um polígono. Considerando  $f \in L^2(\Omega)$ , definiremos o problema modelo:

$$\mathcal{A}u := -\Delta u = f \text{ em } \Omega \quad \text{com} \quad -\partial_\nu u = u \text{ sobre } \Gamma. \quad (3.29)$$

Acima  $\mathcal{A} : H_R^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , onde  $\mathcal{A} := -\Delta$  é um isomorfismo de  $H_R^2(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  e

$$H_R^2(\Omega) := \{u \in H^2(\Omega) \mid -\partial_\nu u = u \text{ sobre } \Gamma\}.$$

De fato, para mostrar que  $\mathcal{A}$  é injetivo, suponha  $u \in H_R^2$  tal que  $\mathcal{A}u = 0$ . Isso implica que  $u$  é uma solução fraca do problema de Laplace com condições de contorno de Robin. Logo  $b(u, v) = 0$  para todo  $v \in H^1(\Omega)$ , onde  $b$  é a forma bilinear dada pela Equação (3.5). Considerando  $v = u$ , temos que  $b(u, u) = 0$ , e pela coercividade de  $b$ , segue

que  $u = 0$ . Por fim, o teorema de Lax-Milgram 1.2.2 garante a unicidade da solução fraca para o problema de Laplace Robin, portanto  $\mathcal{A}$  é injetivo. Agora, quanto a sobrejetividade, dado  $f \in L^2(\Omega)$ , temos pelo Teorema 3.2.3.1 de [22] que existe um único  $u \in H_R^2(\Omega)$  tal que  $\mathcal{A}u = f$ , portanto  $\mathcal{A}$  é sobrejetivo.

Lembramos da Seção 3.1 que a formulação variacional do problema de Robin (3.29) consiste em encontrar uma única solução  $u \in H^1(\Omega)$  que satisfaça a Definição 3.1.1, onde  $\kappa = 1$ . Além disso, na Subseção 3.2.2, observamos que, sob as hipóteses do Teorema 3.2.1, a estimativa de regularidade implica em uma ordem de convergência quadrática para o Problema (3.6). No trabalho de Larsson em [4], a demonstração do Teorema 3.2.1 parte da suposição de que  $\Omega$  é convexo. Como estamos lidando apenas com domínios retangulares em duas dimensões, podemos sempre assumir a convexidade de  $\Omega$ .

Nossa discussão sobre a aproximação de (3.29) segue linhas semelhantes às do problema (3.6). Desta vez, dividimos o domínio poligonal  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  em triângulos. Mais precisamente, temos  $\mathcal{T}_h = \{K_i \subset \Omega \mid i = 1, \dots, N\}$  um conjunto de triângulos fechados  $K$ , uma triangulação de  $\Omega$ , de modo que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N K_i, \quad h_{K_i} = \text{diam}(K_i), \quad h = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} h_{K_i}.$$

Vamos utilizar a notação  $\tilde{S}_h \subset H^1(\Omega)$  para representar as funções contínuas e lineares por partes na triangulação  $\mathcal{T}_h$ , onde as funções não precisam ser nulas em  $\Gamma$  (novamente, por considerarmos condições de Robin). Com  $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$  denotando todos os nós em  $\mathcal{T}_h$ , e  $\{\phi_j\}_{j=1}^{N_h}$  representando as funções piramidais correspondentes:  $\phi_i(P_j) := \delta_{ij}$ . Definimos o operador de interpolação  $I_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \tilde{S}_h$  da seguinte forma:

$$(I_h v)(x) = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \phi_i(x), \quad \text{onde } v_i = v(P_i). \quad (3.30)$$

O interpolante  $I_h v$  coincide com  $v$  nos nós  $P_j$ , ou seja,

$$(I_h v)(P_i) = v(P_i), \quad \text{para } i = 1, \dots, N_h.$$

Iremos assumir as seguintes estimativas locais de erro para o interpolante:

$$\begin{aligned} \|I_h v - v\|_{L^2(K)} &\leq C_k h_K^2 \|v\|_{H^2(K)}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \text{e} \\ \|\nabla(I_h v - v)\|_{L^2(K)} &\leq C_k h_K \|v\|_{H^2(K)}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como sugerido no Problema 5.12 de [4], as demonstrações são baseadas no Lema de Bramble-Hilbert.

Nesse contexto, se restringirmos as famílias  $\{\mathcal{T}_h\}_{0 < h < 1}$  de triangulações nas quais os ângulos de todos os triângulos  $K$  pertencentes a todos os membros da família  $\{\mathcal{T}_h\}$  são limitados inferiormente, independentemente de  $h$ , então é possível provar que as constantes

$C_K$  são uniformemente limitadas. Assim obtemos as estimativas globais:

$$\|I_h v - v\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_K \|I_h v - v\|_{L^2(K)}^2} \leq \sqrt{\sum_K C_k^2 h_K^4 \|v\|_{H^2(K)}^2} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad (3.32)$$

$$\|I_h v - v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega). \quad (3.33)$$

Agora, podemos demonstrar que  $u_h$  converge para a projeção de  $u$  em  $\tilde{S}_h$ . Definimos a **projeção de Ritz** como o único operador  $R_h : H^1(\Omega) \rightarrow \tilde{S}_h$  que satisfaz  $b(R_h v, \chi) = b(v, \chi)$ , para todo  $\chi \in \tilde{S}_h$ . Isso implica que  $b(v - R_h v, \chi) = 0$  para todos os  $\chi \in \tilde{S}_h$ , o que, por sua vez, implica que  $v - R_h v \perp \tilde{S}_h$ . Outra forma de entender a projeção de Ritz é que  $R_h v$  é a aproximação por elementos finitos da solução do problema elíptico, cuja solução exata é  $v \in H^1(\Omega)$ . Além disso, conforme veremos no Teorema 3.4.1 e Proposição 3.4.1, e semelhante às Equações (3.32) e (3.33), temos as estimativas de erro para a projeção de Ritz:

$$\|R_h v - v\|_{L^2} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2} \quad \text{e} \quad \|R_h v - v\|_{H^1} \leq Ch \|v\|_{H^2}, \quad \forall v \in H^2(\Omega). \quad (3.34)$$

**Proposição 3.4.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio poligonal convexo,  $f \in L^2(\Omega)$  o termo fonte,  $u \in H^2(\Omega)$  e  $u_h \in \tilde{S}_h$  tais que*

$$b(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad b(u_h, \chi) = \langle f, \chi \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \chi \in \tilde{S}_h.$$

Então:

$$\|u_h - u\|_b = \min_{\chi \in \tilde{S}_h} \|\chi - u\|_b \quad \text{e} \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{em que} \quad \|\cdot\|_b = \sqrt{b(\cdot, \cdot)}.$$

**Demonstração.** Podemos considerar  $v = \chi$  pela arbitrariedade de  $v \in H^1(\Omega)$ . Fazendo a diferença  $b(u, \chi) - b(u_h, \chi)$ , temos que  $b(u - u_h, \chi) = 0$ , para todo  $\chi \in \tilde{S}_h$ . Logo  $u_h$  é a projeção ortogonal em  $(H^1, b)$  (espaço  $H^1$  e norma  $\|\cdot\|_b$ ). Portanto  $\|u - u_h\|_b = \min_{\chi \in \tilde{S}_h} \|u - \chi\|_b$ .

Por fim, sabemos que  $b$  é uma forma bilinear contínua e coerciva. Logo

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq C_1 \|u - u_h\|_b = C_1 \min_{\chi \in \tilde{S}_h} \|u - \chi\|_b \leq C_2 \min_{\chi \in \tilde{S}_h} \|u - \chi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_2 \|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por fim, o próximo teorema estima a ordem de convergência na norma  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ .

**Teorema 3.4.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio poligonal convexo,  $u \in H^2(\Omega)$  e  $u_h \in \tilde{S}_h$  soluções da formulação fraca do Problema (3.29). Então:*

$$\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Demonstração.** Seja  $e = u_h - u \in L^2(\Omega)$ . Sabemos  $\mathcal{A}$  define uma bijeção de  $H_R^2(\Omega)$  para  $L^2(\Omega)$ , logo existe único  $\phi \in H_R^2(\Omega)$ , tal que

$$\mathcal{A}\phi = e \quad \text{em } \Omega. \quad (3.35)$$

Além disso, como  $\mathcal{A}$  é um isomorfismo  $\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \approx C\|e\|_{L^2(\Omega)}$ . Consequentemente

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \stackrel{(1)}{=} b(\phi, u - u_h) \stackrel{(2)}{=} b(\phi - I_h\phi, u - u_h) \leq \|\phi - I_h\phi\|_b \|u - u_h\|_b \\ &\leq C\|\phi - I_h\phi\|_{H^1(\Omega)} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq (Ch\|\phi\|_{H^2(\Omega)})(Ch\|f\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\stackrel{(3)}{\leq} (Ch\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)})(Ch\|f\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Onde, em (1) temos que  $\langle u - u_h, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathcal{A}\phi, v \rangle_{L^2(\Omega)} = b(\phi, v)$ , para todo  $v \in H^1(\Omega)$ , em particular consideramos  $v = u - u_h$ . Em (2) temos que  $I_h\phi \in \tilde{S}_h \perp u - u_h$  e em (3) estamos usando que  $\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \approx C\|e\|_{L^2(\Omega)}$ . Então, temos que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^2 \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

O Teorema 3.4.1 nos diz que a ordem de convergência esperada para o problema bidimensional (3.1) será quadrática na norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ . No exemplo a seguir, constataremos a convergência quadrática na norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  para o problema do Exemplo 3.4.1. Também estimaremos a ordem de convergência com a norma  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  e compararemos os resultados.

**Exemplo 3.4.2.** Os resultados dos cálculos dos erros nas normas  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  e  $\|\cdot\|_{L^2}$ , apresentados no algoritmo do Exemplo 3.4.1, que se encontra no arquivo *2D-PoissonRobin.ipynb*, estão listados na Tabela 3. Além disso, podemos calcular a ordem de convergência, definida como:  $\text{ordem} = \text{erro}_n / \text{erro}_{n+1} = 2^n / 2^{n+1}$ .

Tabela 3 – Ordem de convergência do problema bidimensional: Poisson Robin.

Pontos	Erros ( $\ \cdot\ _{L^\infty}$ )	Ordem ( $\ \cdot\ _{L^\infty}$ )	Erros ( $\ \cdot\ _{L^2}$ )	Ordem ( $\ \cdot\ _{L^2}$ )
2	1.409154e - 01		1.594002e - 01	
4	4.497572e - 02	3.13314	4.514228e - 02	3.53106
8	1.802946e - 02	2.49457	1.191309e - 02	3.7893
16	6.343594e - 03	2.84215	3.040602e - 03	3.918
32	2.072156e - 03	3.06135	7.658633e - 04	3.97016
64	6.443303e - 04	3.21598	1.919655e - 04	3.98959
128	1.933934e - 04	3.33171	4.803342e - 05	3.9965
256	5.653277e - 05	3.42091	1.201177e - 05	3.99886
512	1.619394e - 05	3.49098	3.003202e - 06	3.99966

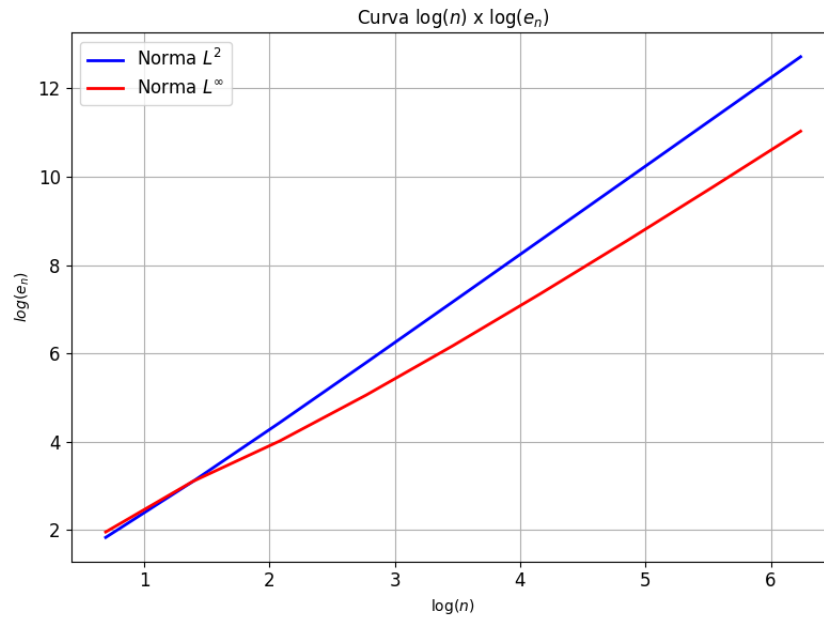


Figura 16 – Reta de ordem de convergência: Poisson Robin bidimensional.

Os resultados da análise de erro e da ordem de convergência apresentados na Tabela 3 e na Figura 16 confirmam a convergência quadrática na norma  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ , conforme esperado pelo Teorema 3.4.1. No entanto, a norma  $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$  não exibe convergência de segunda ordem. No trabalho de [7], somos apresentados ao lema de Aubin-Nitsche, o qual nos permite concluir a existência de um termo  $(|\log h|^{3/2})$  que impede a convergência quadrática na norma  $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ :

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq ch^2 |\log h|^{3/2} \|\nabla u\|_{L^\infty}^2, \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega}).$$

Desse modo, podemos concluir a eficácia do método Ritz-Raleigh utilizando FEniCS para resolver o problema (3.28).

## 4 Problemas parabólicos

### 4.1 Introdução

No capítulo 3 trabalhamos com o problema de Poisson, que é o caso estacionário da equação do calor. Contudo, não justificamos a escolha das condições de fronteira de Robin. Agora estamos aptos para justificá-la. Temos como objetivo estudar o **problema de Wentzell**, que é dado pela equação do calor com condições de contorno dinâmicas. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado, convexo e suave com fronteira  $\Gamma = \partial\Omega$ . O problema de Wentzell é dado por:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ -\partial_\nu u = \mu \partial_t u + \kappa u & \text{em } \Gamma \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (4.1)$$

Podemos observar que o problema (3.1) representa o caso estacionário do problema (4.1).

Este capítulo tem como objetivo estudar as aproximações por elementos finitos do problema Wentzell uni e bidimensional. Contudo, estudaremos inicialmente outra variação do problema (4.1). Na seção seguinte, abordaremos a boa colocação de soluções fracas, a aplicação do método de elementos finitos e a de ordem de convergência para o problema que não envolve a derivada  $\partial_t u$  na fronteira  $\Gamma$ . Este problema é conhecido como a **equação do calor com condições de contorno de Robin** e é definido pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ -\partial_\nu u = \kappa u & \text{em } \Gamma \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

### 4.2 Equação do calor com condições de contorno de Robin

#### 4.2.1 Formulação fraca

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , um domínio aberto, limitado e suave,  $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$  e  $\kappa > 0$  para o Problema (4.2). Vimos na Seção 2.2 que a formulação fraca para a equação do calor é dada pela Equação (2.6). Portanto, pela condição de contorno de Robin, temos que a formulação fraca deve satisfazer

$$\int_{\Omega} f v \, dx = - \int_{\Gamma} v \partial_\nu u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v \partial_t u \, dx = \kappa \int_{\Gamma} v u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v \partial_t u \, dx.$$

**Definição 4.2.1.** Dizemos que  $u \in L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \cap H^1([0, T]; L^2(\Omega))$  é uma **solução fraca** para a equação do calor com condições de contorno de Robin (4.2), se:

$$\int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx + \kappa \int_{\Gamma} v u(t) \, ds + \int_{\Omega} v \partial_t u(t) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \text{ e } t \in [0, \infty[.$$

Definindo a forma bilinear  $b : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  e o funcional linear  $F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que

$$b(u, v) = \langle \nabla u(t), \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \kappa \langle u(t), v \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{e} \quad F(v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0, \infty[.$$

Temos, pela simetria das integrais, que  $b$  é uma forma bilinear simétrica. Além disso, pela Proposição 3.1.2 podemos concluir que  $b$  define uma forma bilinear limitada e coerciva. Portanto, pelo Teorema 2.2.1 e uma discussão que o segue (vide [6] ou [7]), garantimos a existência e unicidade de solução para o problema fraco

$$b(u, v) + \langle \partial_t u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = F(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

## 4.2.2 Equação do calor unidimensional com condições de contorno de Robin

Vamos considerar o caso unidimensional  $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$ ,  $\kappa = 1$ . A equação do calor homogênea com condições de contorno de Robin é dada por:

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u + \partial_t u = 0 & \text{em } \Omega \times [0, T], \\ \partial_x u(0, t) = u(0, t) & \text{em } [0, T], \\ -\partial_x u(L, t) = u(L, t) & \text{em } [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \text{ e } t = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Para a aplicação numérica, devemos discretizar tanto a parte espacial, quanto à temporal. Quanto à discretização espacial, temos para todo  $v \in H^1(\Omega)$ , que a formulação variacional é dada pela Definição 4.2.1. Neste caso, temos

$$\int_{\Omega} v \partial_t u \, dx + \int_{\Omega} \partial_x u \, \partial_x v \, dx + u(L, t)v(L) + u(0, t)v(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.4)$$

Agora, quanto à discretização temporal, utilizaremos o **método de diferenças finitas**, também conhecido como **FDM** (Finite Difference Method). O FDM é um método numérico que se baseia em aproximar as derivadas com diferenças finitas. Sabemos que a derivada de uma função  $\varphi \in C^1(\Omega)$  em um ponto  $a$  no intervalo  $]a - R, a + R[$ , com  $R > 0$ , pode ser calculada por qualquer um dos limites abaixo:

$$\varphi'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(a) - \varphi(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a-h)}{2h}.$$

Utilizando a expansão em série de Taylor, podemos assumir termos suficientemente pequenos e definir as aproximações pelo FDM:

$$\varphi'(a) \approx \underbrace{\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}}_{\text{forward}} \approx \underbrace{\frac{\varphi(a) - \varphi(a-h)}{h}}_{\text{backward}} \approx \underbrace{\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a-h)}{2h}}_{\text{centered}}.$$

Aproximando a derivada de uma solução aproximada  $U^n \approx u(t_n)$ , em que  $t_n = nk$ , por  $\partial_t U^n := k^{-1}(U^{n+1} - U^n)$ , com  $k = t_{n+1} - t_n$ . Para  $\theta \in [0, 1]$ , a solução fraca será aproximada por

$$\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k}, v \right\rangle + b((1-\theta)U^n + \theta U^{n+1}, v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.5)$$



**Exemplo 4.2.1.** Para a formulação fraca (4.5), considere os seguintes valores de  $\theta$ :

- Para  $\theta = 0$ , obtemos a aproximação por forward. De fato, temos

$$\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k}, v \right\rangle + b(U^n, v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

- Para  $\theta = 1$ , obtemos a aproximação por backward. De fato, trocando  $n + 1 \mapsto n$ , segue que

$$\left\langle \frac{U^n - U^{n-1}}{k}, v \right\rangle + b(U^n, v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

- Para  $\theta = 1/2$ , obtemos

$$\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k}, v \right\rangle + b\left(\frac{U^n + U^{n+1}}{2}, v\right) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Esta abordagem descreve um método conhecido como o **método de Crank-Nicolson**, que pode ser visto como a aproximação centrada em  $t_n + k/2$ , em conjunto com a média de  $U^n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Cabe notar que, caso o problema parabólico não seja homogêneo, temos que o método de Crank-Nicolson é dado por

$$\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k}, v \right\rangle + b\left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2}, v\right) = \left\langle \frac{f(t_{n+1}, x) + f(t_n, x)}{2}, v \right\rangle, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Neste trabalho, optaremos pelo método de Crank-Nicolson. A escolha desse método não foi feita ao acaso. Em [4], é possível estudar com maior rigor as diversas consequências da escolha dos métodos possíveis para implementação dos elementos finitos. A escolha do método de Crank-Nicolson é pelo fato de que, como veremos no Teorema 4.2.1, obtemos ordem de convergência quadrática  $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$ , além do método ser incondicionalmente estável, ou seja, ele não necessita de restrições especiais sobre o tamanho do passo ou outras condições para garantir sua estabilidade. Na prática, isso implica que não é necessário utilizar um passo de tempo excessivamente pequeno para garantir a convergência. Para uma compreensão mais aprofundada dos métodos de diferenças finitas e suas variações, recomendamos a leitura de [4] e [18].

Nesse contexto, substituiremos as aproximações na Equação (5.3), enquanto o intervalo de tempo  $[0, T]$  será dividido em instantes  $t_k$ , com  $k = 0, \dots, m$ , onde  $t_k = k\Delta t$  e  $\Delta t = T/m$ . Obtemos assim que o lado esquerdo de (4.4) é aproximado por

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k)}{\Delta t} v \, dx + \int_0^L \partial_x \left[ \frac{u(x, t_{k+1}) + u(x, t_k)}{2} \right] \partial_x v \, dx \\ + v(0) \frac{u(0, t_{k+1}) + u(0, t_k)}{2} + v(L) \frac{u(L, t_{k+1}) + u(L, t_k)}{2}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por  $\Delta t$  e rearranjando alguns termos, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, t_{k+1})v - u(x, t_k)v \, dx + \frac{\Delta t}{2} \int_0^L \partial_x u(x, t_{k+1})\partial_x v + \partial_x u(x, t_k)\partial_x v \, dx \\ + \frac{\Delta t}{2}[u(0, t_{k+1}) + u(0, t_k)]v(0) + \frac{\Delta t}{2}[u(L, t_{k+1}) + u(L, t_k)]v(L). \end{aligned}$$

Utilizando a base de splines lineares dados pela Equação (3.9), temos que  $u_h(x, t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t)\phi_i(x)$ , com  $h = L/n$ . Nesse caso, substituindo  $u$  pelas aproximações  $u_h$  e  $v$  por  $\phi_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \int_0^L \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1})\phi_i\phi_j - \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k)\phi_i\phi_j \, dx + \frac{\Delta t}{2} \int_0^L \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1})\phi_i'\phi_j' + \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k)\phi_i'\phi_j' \, dx \\ + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^n [\alpha_i(t_{k+1})\phi_i(0) + \alpha_i(t_k)\phi_i(0)]\phi_j(0) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^n [\alpha_i(t_{k+1})\phi_i(L) + \alpha_i(t_k)\phi_i(L)]\phi_j(L). \end{aligned}$$

Como o problema (4.3) é homogêneo, podemos simplesmente isolar os termos que possuem  $\alpha_i(t_{k+1})$  no lado esquerdo e os termos que possuem  $\alpha_i(t_k)$  para o lado direito na equação (4.4). Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1}) \left[ \int_0^L \phi_i\phi_j + \frac{\Delta t}{2}\phi_i'\phi_j' \, dx + \frac{\Delta t}{2}\phi_i(0)\phi_j(0) + \frac{\Delta t}{2}\phi_i(L)\phi_j(L) \right] \\ = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k) \left[ \int_0^L \phi_i\phi_j - \frac{\Delta t}{2}\phi_i'\phi_j' \, dx - \frac{\Delta t}{2}\phi_i(0)\phi_j(0) - \frac{\Delta t}{2}\phi_i(L)\phi_j(L) \right]. \end{aligned}$$

Pela definição de  $\tilde{S}_h$ , temos que  $\phi_i(x_j) = 1$  se  $i = j$  e, caso contrário,  $\phi_i(x_j) = 0$ , onde  $x_j = jh = jL/n$ . Assim  $u(x_j, t_k) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k)\phi_i(x_j) = \alpha_j(t_k)$ . Portanto

$$\left( A + \frac{\Delta t}{2}B + \frac{\Delta t}{2}R \right) \begin{bmatrix} \alpha_0(t_{k+1}) \\ \vdots \\ \alpha_n(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \left( A - \frac{\Delta t}{2}B - \frac{\Delta t}{2}R \right) \begin{bmatrix} \alpha_0(t_k) \\ \vdots \\ \alpha_n(t_k) \end{bmatrix}.$$

- A matriz  $A$  é dada por  $A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i\phi_j \, dx = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{L^2}$ . Contudo  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{L^2} = 0$  se  $|i - j| > 1$ . Logo a matriz  $A$  é tri-diagonal e, pela simetria do produto interno, temos que  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{L^2} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{L^2}$ . Então

$$A = \begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \langle \phi_3, \phi_2 \rangle & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \langle \phi_3, \phi_2 \rangle & \langle \phi_3, \phi_3 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Para  $h = x_{j+1} - x_j = L/n$ , com  $j = 0, \dots, n$ . Podemos explicitar os produtos internos

$$\begin{aligned} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle &= \int_0^L \phi_0^2(x) \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - x)^2}{h^2} \, dx = -\frac{(x_0 - x_1)^3}{3h^2} = \frac{h}{3}. \\ \langle \phi_n, \phi_n \rangle &= \int_0^L \phi_n^2(x) \, dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{(x - x_{n-1})^2}{h^2} \, dx = -\frac{(x_{n-1} - x_n)^3}{3h^2} = \frac{h}{3} \\ \langle \phi_i, \phi_i \rangle &= \int_0^L \phi_i^2(x) \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_{i-1})^2}{h^2} \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h^2} \, dx \\ &= -\frac{(x_{i-1} - x_i)^3}{3h^2} - \frac{(x_i - x_{i+1})^3}{3h^2} = \frac{2h}{3}, \quad \text{para } 0 < i < n. \\ \langle \phi_{i+1}, \phi_i \rangle &= \int_0^L \phi_{i+1}(x)\phi_i(x) \, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)}{h} \frac{(x - x_i)}{h} \, dx \\ &= \frac{1}{h^2} \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}(x_{i+1} + x_i) - x(x_{i+1}x_i) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{h}{6} \quad \text{para } 0 \leq i < n. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que  $A$  é dada explicitamente pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} h/3 & h/6 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h/6 & 2h/3 & h/6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h/6 & 2h/3 & h/6 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h/6 & 2h/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h/3 \end{bmatrix}.$$

- A matriz  $B$  representa a matriz de rigidez de problemas elípticos. Ela já foi calculada anteriormente no problema (3.6). Além disso, as entradas da matriz  $R_{ij} = \phi_i(0)\phi_j(0) + \phi_i(L)\phi_j(L)$  são todas zero, exceto quando  $i = j = 0$  ou  $i = j = n$ . Então, como  $h = L/n$ , as matrizes  $B$  e  $R$  são dadas por

$$B = \begin{bmatrix} 1/h & -1/h & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/h & 2/h & -1/h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1/h & 2/h & -1/h & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1/h & 2/h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/h \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 4.2.2.** Sendo  $\Omega = [0, \pi/2]$ , queremos determinar uma função  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça as condições de contorno do problema (4.3). Podemos observar que a função  $u(x, t) = \exp(-t) [\cos(x) + \sin(x)]$  é solução do problema de Robin

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u \text{ em } [0, \pi/2] \times [0, T], \\ \partial_x u(0, t) = u(0, t) \text{ em } [0, T], \\ -\partial_x u(\pi/2, t) = u(\pi/2, t) \text{ em } [0, T], \\ u_0(x) = \cos(x) + \sin(x) \text{ em } [0, \pi/2]. \end{cases} \quad (4.6)$$

De fato, podemos verificar facilmente que  $u$  satisfaz a equação diferencial:

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) \implies -\exp(-t) [\cos(x) + \sin(x)] = \exp(-t) [-\cos(x) - \sin(x)].$$

Além disso, as condições de contorno são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \partial_x u(0, t) = u(0, t) &\implies \exp(-t) = \exp(-t), \\ -\partial_x u(\pi/2, t) = u(\pi/2, t) &\implies \exp(-t) = \exp(-t). \end{aligned}$$

Como dito anteriormente, podemos utilizar o programa *SplinesLineares.py* e fazer pequenas alterações no método *MEF.py* para implementar o método de elementos finitos. Para resolver o problema (4.6), precisamos alterar a matriz de rigidez do programa *MEF.py*, de modo que seja possível aplicar o método de Crank-Nicolson.

```
# Bibliotecas de MEF.py
# Calcula a solucao u(x) usando coeficientes e funcoes de base
def u_sol(x, coef, h, x_disc):
    y = 0
    for i in range(len(coef)):
        y+=coef[i]*phi(x, x_disc[i], h)#phi in SplinesLineares.py
    return y
# Monta a matriz de rigidez do metodo dos elementos finitos
def matriz_rigidez(n, h):
    A = np.zeros((n+1,n+1)); B= np.zeros((n+1,n+1)); R = np.zeros
        ((n+1,n+1))
    A[0,0] = h/3
    A[n,n] = h/3
    for i in range(1,n):
        A[i,i] = 2*h/3
    for i in range(n):
        A[i,i+1] = h/6
        A[i+1,i] = h/6
    B[0,0] = 1/h
    B[n,n] = 1/h
    for i in range(1,n):
        B[i,i] = 2/h
    for i in range(n):
        B[i,i+1] = -1/h
        B[i+1,i] = -1/h
    R[0,0] = 1
    R[n, n] = 1
    return A, B, R
# Aplicacao do metodo de Crank-Nicolson
```

```
def CrankNicolsonGalerkin(n, h, x_disc, alpha, dt):
    A, B, R = matriz_rigidez(n, h)
    MR = A + (dt/2)*B + (dt/2)*R
    VF = A - (dt/2)*B - (dt/2)*R
    VF = np.dot(VF, alpha)
    alpha = np.linalg.solve(MR, VF)
    u = lambda x: u_sol(x, alpha, h, x_disc)
    return alpha, u
```

O código a seguir constitui o cerne do programa intitulado *HeatRobin.ipynb*.

```
# Bibliotecas HeatRobin.ipynb
# Descricao do problema
u_teo = lambda x, t: np.exp(-t)*(np.cos(x) + np.sin(x)) # Solucao
analitica
x_min = 0; x_max = np.pi/2; T = 1.0 # [x_min, x_max]x[0,T]
e = []; e12 = [] # Erros com as normas L^\infty e L^2
M = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128] # Discretizacoes espaciais
N_t = [5, 10, 20, 40, 80, 160, 320] # Discretizacoes temporais
# Looping espacial
for n in range(len(M)):
    # Discretizacao espacial e temporal
    h=(x_max - x_min)/M[n]; x=np.linspace(x_min, x_max, M[n]+1)
    N_t2 = N_t[n]; dt = T/N_t2; t = np.linspace(0, T, N_t2+1)
    alpha = u_teo(x, 0.) # Funcao u_0(x)
    for j in range(1, N_t2+1):
        # CrankNicolsonGalerkin in MEF.py
        alpha, u_num=CrankNicolsonGalerkin(M[n], h, x, alpha, dt)

    # Funcao de plot

    # Aumentando a quantidade de pontos para calcular o erro
    y = np.linspace(x_min, x_max, 10*M[n] + 1)
    erro_ponto = u_num(y) - u_teo(y, T)
    # Norma L_infinity do erro
    norma_linfinity = np.max(np.abs(erro_ponto))
    e.append(norma_linfinity)
    # Calcula a norma L2 do erro
    integral = 0
    for k in range(len(y)-1):
        # Interpolacao para ligar os pontos da solucao numerica
        interpol = lambda x: u_num(y[k])*(y[k+1] - x)/(y[k+1] - y
            [k]) + u_num(y[k+1])*(x-y[k])/(y[k+1] - y[k])
```

```

erro_x = lambda x: (u_teo(x, T) - interpol(x))**2
int , error = integrate.quad(erro_x, y[k], y[k+1])
integral += int
norma_l2 = np.sqrt(integral)
e12.append(norma_l2)

```

A figura 17 apresenta algumas aproximações numéricas obtidas pelo método de elementos finitos no tempo  $t = 1$ . De modo que, o tamanho de passo no espaço está variando em  $h = \pi/(2n)$ , com valores de  $n$  iguais a 4 e 128, e  $k$  assume os valores de  $1/10$  e  $1/320$ , onde  $t_{j+1} = t_j + k = t_0 + (j + 1)k$ .

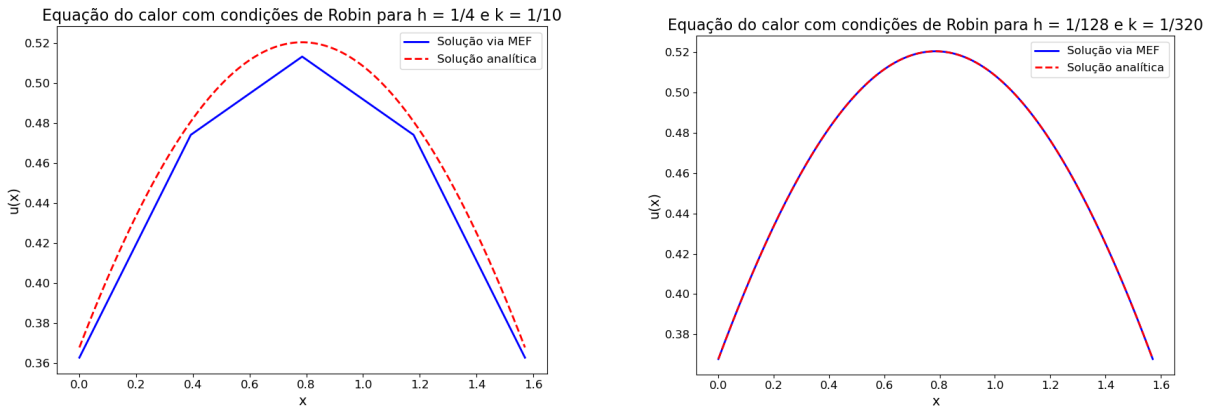


Figura 17 – Aproximações para o problema unidimensional: Calor Robin.

Note que, no exemplo 4.2.2, conforme duplicamos a discretização espacial, também precisamos aumentar duas vezes a discretização temporal. Isso é necessário para verificar a ordem de convergência. Conforme estudado em [4], a ordem de convergência esperada para o método de Crank-Nicolson é  $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$ , como veremos no teorema a seguir.

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $U^n(x) \approx u(x, t_n)$ ,  $n \geq 0$ , uma solução aproximada do Problema (4.2) usando a formulação de Crank-Nicolson:*

$$\begin{aligned} \langle \partial_t U^n, \chi \rangle + b \left( \frac{1}{2}(U^{n+1} + U^n), \chi \right) &= \left\langle \frac{1}{2}(f(t_{n+1}) + f(t_n)), \chi \right\rangle, \quad \forall \chi \in \tilde{S}_h, \quad n \geq 0 \\ U^0 &= I_h v, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\partial_t U^n = k^{-1}(U^{n+1} - U^n)$ , e  $I_h v$  é o operador de interpolação  $I_h v(x_j) = v(x_j)$  (lembramos que, existe  $C > 0$  tal que  $\|v - I_h v\|_{L^2} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2}$ ). Então, para todo  $n > 0$ , temos:

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2} \leq Ch^2 \left( \|v\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds \right) + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{ttt}\|_{L^2} ds.$$

**Demonstração.** Seja  $u(t_n) = u(t_n)(x) = u(x, t_n)$  com  $u(t_0) = v$  a solução exata do problema parabólico (4.2). Ao longo da demonstração omitiremos os índices referentes às normas  $\|\cdot\|_{L^2}$ . Podemos começar observando que

$$U^n - u(t_n) = (U^n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - u(t_n)).$$

Definindo  $\theta^n = U^n - R_h u(t_n)$  e  $\rho^n = R_h u(t_n) - u(t_n)$ , temos que  $U^n - u(t_n) = \theta^n + \rho^n$ . Pelas estimativas de erro da projeção de Ritz (3.34), segue que

$$\|\rho^n\| \leq Ch^2 \|u(t_n)\|_{H^2}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que  $u(t_n) = v + \int_0^{t_n} u_t \, ds$ . Então

$$\|\rho^n\| \leq Ch^2 \left( \|v\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} \, ds \right).$$

Portanto

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq \|\theta^n\| + Ch^2 \left( \|v\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} \, ds \right). \quad (4.8)$$

Agora, devemos estimar  $\|\theta^n\|$ . Primeiramente, podemos observar que é possível obter  $\omega^n$  tal que  $\theta^n$  satisfaça a formulação fraca

$$\langle \partial_t \theta^n, \chi \rangle + b \left( \frac{1}{2} (\theta^{n+1} + \theta^n), \chi \right) = - \langle \omega^n, \chi \rangle. \quad (4.9)$$

De fato, substituindo  $\theta^n$  em (4.9), somos conduzidos a uma série de relações de igualdade

$$(4.9) = \langle \partial_t (U^n - R_h u(t_n)), \chi \rangle + b \left( \frac{1}{2} (U^{n+1} - R_h u(t_{n+1}) + U^n - R_h u(t_n)), \chi \right),$$

pela bilinearidade de  $b(\cdot, \cdot)$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , podemos rearranjar alguns termos da equação acima

$$(4.9) = \langle \partial_t U^n, \chi \rangle + b \left( \frac{1}{2} (U^{n+1} + U^n), \chi \right) - \langle \partial_t R_h u(t_n), \chi \rangle - b \left( \frac{1}{2} (R_h u(t_{n+1}) + R_h u(t_n)), \chi \right).$$

Note que os dois primeiros termos coincidem com a formulação de Crank-Nicolson (4.7). Além disso, utilizaremos que a projeção de Ritz comuta com a derivada discreta (veja a demonstração na Observação 4.2.1)

$$(4.9) = \left\langle \frac{1}{2} (f(t_{n+1}) + f(t_n)), \chi \right\rangle - \langle R_h \partial_t u(t_n), \chi \rangle - b \left( \frac{1}{2} (R_h u(t_{n+1}) + R_h u(t_n)), \chi \right).$$

Note que dados  $x, y \in H^1(\Omega)$ , então  $b(R_h x + R_h y, z) = b(x + y, z)$ , para todo  $z \in \tilde{S}_h$ . Logo

$$(4.9) = \left\langle \frac{1}{2} (f(t_{n+1}) + f(t_n)), \chi \right\rangle - \langle R_h \partial_t u(t_n), \chi \rangle - b \left( \frac{1}{2} (u(t_{n+1}) + u(t_n)), \chi \right).$$

Por fim, novamente pela formulação fraca da solução exata, temos que a forma bilinear satisfaz a equação

$$b \left( \frac{1}{2} (u(t_{n+1}) + u(t_n)), \chi \right) = - \left\langle \frac{1}{2} (u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)), \chi \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} (f(t_{n+1}) + f(t_n)), \chi \right\rangle.$$

Substituindo a forma bilinear  $b$ , resulta em

$$(4.9) = \left\langle \frac{1}{2} (f(t_{n+1}) + f(t_n)), \chi \right\rangle - \langle R_h \partial_t u(t_n), \chi \rangle + \left\langle \frac{1}{2} (u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)), \chi \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2} (f(t_{n+1}) + f(t_n)), \chi \right\rangle,$$

anulando os termos com  $f$  e rearranjando o produto interno restante, a expressão fica

$$(4.9) = - \left\langle R_h \partial_t u(t_n) - \frac{1}{2}(u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)), \chi \right\rangle.$$

Portanto, podemos concluir que para  $\omega^n := R_h \partial_t u(t_n) - \frac{1}{2}(u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n))$ , então  $\theta^n$  satisfaz a formulação (4.9).

Indo mais além, podemos definir

$$\omega_1^n := (R_h - I) \partial_t u(t_n) \quad \text{e} \quad \omega_2^n := \partial_t u(t_n) - \frac{1}{2}(u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)), \quad \text{tais que} \quad \omega^n = \omega_1^n + \omega_2^n.$$

De fato, basta observarmos que

$$\begin{aligned} \omega^n &= R_h \partial_t u(t_n) - \frac{1}{2}(u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)) \\ &= R_h \partial_t u(t_n) - \partial_t u(t_n) + \partial_t u(t_n) - \frac{1}{2}(u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)) \\ &= (R_h - I) \partial_t u(t_n) + \partial_t u(t_n) - \frac{1}{2}(u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)) = \omega_1^n + \omega_2^n. \end{aligned}$$

Por outro lado, a coercividade de  $b$  e a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos possibilita mostrar que o método de Crank-Nicolson é incondicionalmente estável. Considerando  $\chi = U^n + U^{n+1}$  na Equação (4.7), somos conduzidos a uma série de desigualdades

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_t U^n, U^n + U^{n+1} \right\rangle &= - \underbrace{b \left( \frac{1}{2}(U^{n+1} + U^n), U^n + U^{n+1} \right)}_{>0} + \left\langle \frac{1}{2}(f(t_{n+1}) + f(t_n)), U^n + U^{n+1} \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \left\langle f(t_{n+1}) + f(t_n), U^n + U^{n+1} \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \|f(t_{n+1}) + f(t_n)\| (\|U^n\| + \|U^{n+1}\|). \end{aligned}$$

Contudo, pela definição de  $\partial_t$ , obtemos

$$\frac{1}{k} \left\langle U^{n+1} - U^n, U^n + U^{n+1} \right\rangle = \frac{1}{k} (\|U^{n+1}\| - \|U^n\|) (\|U^{n+1}\| + \|U^n\|).$$

Consequentemente

$$(\|U^{n+1}\| - \|U^n\|) (\|U^{n+1}\| + \|U^n\|) \leq \frac{k}{2} \|f(t_{n+1}) + f(t_n)\| (\|U^n\| + \|U^{n+1}\|).$$

Eliminando os termos  $\|U^{n+1}\| + \|U^n\|$ , podemos concluir a estabilidade do método de Crank-Nicolson

$$\|U^{n+1}\| \leq \|U^n\| + k \left\| \frac{1}{2}(f(t_{n+1}) + f(t_n)) \right\|.$$

Seguindo essa linha de raciocínio, temos indutivamente para cada  $n$

$$\begin{aligned} \|U^{n+1}\| &\leq \|U^n\| + k \left\| \frac{1}{2}(f(t_{n+1}) + f(t_n)) \right\| \\ &\leq \|U^{n-1}\| + k \left\| \frac{1}{2}(f(t_n) + f(t_{n-1})) \right\| + k \left\| \frac{1}{2}(f(t_{n+1}) + f(t_n)) \right\| \\ &\vdots \\ &\leq \underbrace{\|U^0\|}_{I_{h,v}} + k \sum_{j=0}^n \left\| \frac{1}{2}(f(t_{j+1}) + f(t_j)) \right\|. \end{aligned}$$



Portanto, podemos concluir que o método de Crank-Nicolson satisfaz

$$\|U^{n+1}\| \leq \|I_h v\| + k \sum_{j=0}^n \left\| \frac{1}{2}(f(t_{n+1}) + f(t_n)) \right\|.$$

Reproduzindo o mesmo processo para a formulação (4.9), segue que  $\theta^n$  satisfaz

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega^j\| = \|\theta^0\| + k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega_1^j\| + k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega_2^j\|.$$

Desse modo, pela Equação (4.8), temos que a ordem de convergência deverá satisfazer

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left( \|v\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds \right) + \|\theta^0\| + k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega_1^j\| + k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega_2^j\|. \quad (4.10)$$

Devemos estimar cada um dos três termos restantes da desigualdade (4.10). Primeiro, para  $\theta^0$ , a estimativa do erro (3.34) nos permite concluir que existe  $C > 0$ , tal que

$$\|\theta^0\| = \|I_h v - R_h v\| \leq \|I_h v - v\| + \|v - R_h v\| \leq Ch^2 \|v\|_{H^2}.$$

Por outro lado, para  $\omega_1$ , temos pelo teorema fundamental do cálculo que

$$\omega_1^j = (R_h - I)\partial_t u = (R_h - I)k^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u_t ds = k^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (R_h - I)u_t ds.$$

Consequentemente, as estimativas de erro com a projeção de Ritz (3.34) nos dão que

$$\begin{aligned} k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega_1^j\| &= k \sum_{j=0}^{n-1} \left\| k^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} R_h u_t - u_t ds \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|R_h u_t - u_t\| ds \leq Ch^2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|u_t\|_{H^2} ds = Ch^2 \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds. \end{aligned}$$

A partir disso, podemos escrever

$$\|\theta^0\| + k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega_1^j\| \leq Ch^2 \|v\|_{H^2} + Ch^2 \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds,$$

e pela desigualdade (4.10), temos que resta apenas estimar  $\omega_2$ , pois

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left( \|v\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds \right) + k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega_2^j\|. \quad (4.11)$$

Esta é uma etapa importante da demonstração. Quando escrevemos  $\omega^n = \omega_1^n + \omega_2^n$ , o objetivo era obter um único termo que estimasse a aproximação da derivada da solução exata  $\partial_t u$  em comparação com a derivada “real” da solução exata  $u_t$ . Nesse contexto, essa etapa depende exclusivamente da discretização temporal, onde esperamos obter uma ordem de convergência de  $\mathcal{O}(k^2)$ .

Pela forma que definimos  $\omega_2$ , temos que

$$\omega_2^n = \partial_t u(t_n) - \frac{u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)}{2} = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} - \frac{u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)}{2}.$$

Agora, utilizaremos a fórmula de Taylor de terceira ordem para aproximar  $u(t_{n+1})$  e  $u(t_n)$  em relação ao ponto médio  $u(t_{n+1/2})$

$$\begin{aligned} u(t_n) &= u(t_{n+1/2}) - \frac{k}{2}u_t(t_{n+1/2}) + \frac{k^2}{8}u_{tt}(t_{n+1/2}) + \frac{1}{2}\int_{t_{n+1/2}}^{t_n} (t_{n+1/2} - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds, \\ u(t_{n+1}) &= u(t_{n+1/2}) + \frac{k}{2}u_t(t_{n+1/2}) + \frac{k^2}{8}u_{tt}(t_{n+1/2}) + \frac{1}{2}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1/2} - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} = u_t(t_{n+1/2}) + \frac{1}{2k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1/2} - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds.$$

Da mesma forma, utilizaremos a fórmula de Taylor de segunda ordem para aproximar  $u_t(t_{n+1})$  e  $u_t(t_n)$  em relação ao ponto médio  $u_t(t_{n+1/2})$

$$\begin{aligned} u_t(t_n) &= u_t(t_{n+1/2}) - \frac{k}{2}u_{tt}(t_{n+1/2}) + \int_{t_{n+1/2}}^{t_n} |t_{n+1/2} - s| u_{ttt}(s) \, ds, \\ u_t(t_{n+1}) &= u_t(t_{n+1/2}) + \frac{k}{2}u_{tt}(t_{n+1/2}) + \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} |t_{n+1/2} - s| u_{ttt}(s) \, ds. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{u_t(t_{n+1}) + u_t(t_n)}{2} = u_t(t_{n+1/2}) + \frac{1}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |t_{n+1/2} - s| u_{ttt}(s) \, ds.$$

Por fim, seguindo essa linha de raciocínio, concluímos que  $\omega_2^n$  satisfaz

$$\omega_2^n = \frac{1}{2k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1/2} - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds - \frac{1}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |t_{n+1/2} - s| u_{ttt}(s) \, ds.$$

Assim, podemos estimar o último termo em (4.11). Pela desigualdade triangular, segue

$$\begin{aligned} k \sum_{j=0}^{n-1} \|\omega_2^j\| &= k \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{2k}\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1/2} - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds - \frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} |t_{j+1/2} - s| u_{ttt}(s) \, ds \right\| \\ &\leq C \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underbrace{(t_{j+1/2} - s)^2}_{\leq k^2} \|u_{ttt}(s)\| \, ds + Ck \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underbrace{|t_{j+1/2} - s|}_{\leq k} \|u_{ttt}(s)\| \, ds \\ &\leq Ck^2 \int_{t_0}^{t_n} \|u_{ttt}(s)\| \, ds + Ck^2 \int_{t_0}^{t_n} \|u_{ttt}(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo a estimativa de  $k \sum_{j=0}^n \|\omega_2^j\|$  em (4.11). Podemos concluir que existe  $C > 0$  tal que o método de Crank-Nicolson converge quadraticamente

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left( \|v\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} \, ds \right) + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{ttt}\| \, ds.$$

□

**Observação 4.2.1.** Seja  $v \in H^1(\Omega)$ . A projeção de Ritz em  $v$  nos dá que  $b(R_h v, \chi) = b(v, \chi)$ , para todo  $\chi \in \tilde{S}_h$ . Derivando no sentido de forward, obtemos

$$\partial_t b(R_h v, \chi) = b(\partial_t R_h v, \chi) + \underbrace{b(R_h v, \partial_t \chi)}_{=0} \quad \text{e} \quad \partial_t b(v, \chi) = b(\partial_t v, \chi) + \underbrace{b(R_h v, \partial_t \chi)}_{=0}.$$

Então

$$b(\partial_t R_h v, \chi) = b(\partial_t v, \chi), \text{ para todo } \chi \in \tilde{S}_h.$$

Por outro lado, aplicando a projeção de Ritz na derivada  $\partial_t v$ , obtemos que

$$b(R_h \partial_t v, \chi) = b(\partial_t v, \chi), \text{ para todo } \chi \in \tilde{S}_h.$$

Consequentemente

$$b(\partial_t R_h v, \chi) = b(\partial_t v, \chi) = b(R_h \partial_t v, \chi), \text{ para todo } \chi \in \tilde{S}_h.$$

Portanto, pela unicidade da projeção, podemos concluir que  $\partial_t R_h = R_h \partial_t$ .

**Exemplo 4.2.3.** O teorema 4.2.1 nos mostra que a ordem de convergência esperada para o exemplo 4.2.2 será quadrática, ou seja, reduzindo  $h = \pi/2n$  e  $k = T/m$  pela metade, resulta em uma redução de quatro vezes no erro. Desse modo, novamente iremos avaliar a ordem de convergência com duas normas distintas no cálculo do erro: a norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  e a norma  $\|\cdot\|_{L^\infty}$ . Sendo  $u$  a solução analítica do problema (4.6), calcularemos a solução numérica  $u_h$  para  $n \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$  e  $m \in \{5, 10, 20, 40, 80, 160, 320\}$ .

Tabela 4 – Ordem de convergência do problema unidimensional: Calor Robin.

Espaço	Tempo	Erros - $L^\infty$	Ordem - $L^\infty$	Erros - $L^2$	Ordem - $L^2$
2	5	$6.174004e - 02$		$6.361246e - 02$	
4	10	$1.670477e - 02$	3.69595	$1.598397e - 02$	3.97977
8	20	$4.259104e - 03$	3.92213	$4.001719e - 03$	3.99428
16	40	$1.070015e - 03$	3.98041	$1.000798e - 03$	3.99853
32	80	$2.678322e - 04$	3.9951	$2.502226e - 04$	3.99963
64	160	$6.697857e - 05$	3.99877	$6.255709e - 05$	3.99991
128	320	$1.674593e - 05$	3.99969	$1.563936e - 05$	3.99998

A Tabela 4 apresenta os erros e seus quocientes, tanto na norma  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  quanto na norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ . Constatamos a convergência quadrática do método de Crank-Nicolson para o problema (4.3), como esperado do Teorema 4.2.1.

### 4.2.3 Equação do calor bidimensional com condições de contorno de Robin

Nesta seção, faremos a aplicação do método de Crank-Nicolson para a equação do calor bidimensional com condições de contorno de Robin:

$$\begin{cases} -\Delta u + \partial_t u = f \text{ em } \Omega \times ]0, T], \\ -\partial_\nu u = u \text{ sobre } \Gamma \times ]0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega. \end{cases} \quad (4.12)$$

Pela definição 4.2.1 a formulação fraca do problema (4.12) é dada pela equação

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_t u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Sendo  $t_k = k\Delta t$  para discretizar a parte temporal, utilizaremos o método de Crank-Nicolson. Denotando  $u(x, y, t_{k+1})$  por  $u$  e  $u(x, y, t_k)$  por  $u_k$ , para cada  $k \in \{0, \dots, n\}$  que discretiza a parte temporal, temos que

$$\int_{\Omega} \nabla \left[ \frac{u + u_k}{2} \right] \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \frac{u - u_k}{\Delta t} v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{u + u_k}{2} v \, ds = \int_{\Omega} \frac{f + f_k}{2} v \, dx.$$

Multiplicando ambos os lados por  $\Delta t$  e rearranjando os termos  $u_k$  à esquerda da equação, obtemos a formulação variacional que será aplicada com o FEniCS. A forma bilinear é dada por

$$b(u, v) = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} uv \, ds,$$

e o funcional linear é dado por

$$F_k(v) = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} (f + f_k)v \, dx - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u_k v \, dx - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} u_k v \, ds.$$

**Exemplo 4.2.4.** Consideremos  $\Omega = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$  e que o termo fonte em (4.12) seja nulo. Nesse caso, podemos construir uma solução para o problema bidimensional, dada por  $u(x, y, t) = \phi(x, t)\phi(y, t)$ , onde  $\phi$  representa a solução em uma dimensão. Estudamos o caso unidimensional na subseção 4.2.2, e lá verificamos que  $\phi(x, t) = e^{-t}(\cos(x) + \sin(x))$  é solução para o problema unidimensional. Nesse contexto, iremos verificar que  $u(x, y, t) = e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x))(\cos(y) + \sin(y))$  é solução de (4.12). De fato, se

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x))(\cos(y) + \sin(y)) \\ \partial_x u(x, y, t) &= e^{-2t}(-\sin(x) + \cos(x))(\cos(y) + \sin(y)) \\ \partial_y u(x, y, t) &= e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x))(-\sin(y) + \cos(y)) \\ \Delta u(x, y, t) &= -2e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x))(\cos(y) + \sin(y)) \\ \partial_t u(x, y, t) &= -2e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x))(\cos(y) + \sin(y)) \end{aligned}$$

Então temos que  $\Delta u = \partial_t u$ , satisfazendo a equação do calor. Além disso, as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} \partial_x u(0, y, t) = u(0, y, t) &\implies e^{-2t}(\cos(y) + \sin(y)) = e^{-2t}(\cos(y) + \sin(y)) \\ -\partial_x u(\pi/2, y, t) = u(\pi/2, y, t) &\implies -e^{-2t}(-1)(\cos(y) + \sin(y)) = e^{-2t}(\cos(y) + \sin(y)) \\ \partial_y u(x, 0, t) = u(x, 0, t) &\implies e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x)) = e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x)) \\ -\partial_y u(x, \pi/2, t) = u(x, \pi/2, t) &\implies -e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x))(-1) = e^{-2t}(\cos(x) + \sin(x)) \end{aligned}$$

Portanto, iremos avaliar o método de Crank-Nicolson para o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{em } \Omega \times ]0, T], \\ -\partial_\nu u = u & \text{sobre } \Gamma \times ]0, T], \\ u_0(x, y) = (\cos(x) + \sin(x))(\cos(y) + \sin(y)) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

O código abaixo constitui o cerne da execução do programa: *2D-HeatRobin.ipynb*

```

# Bibliotecas 2D-HeatRobin.ipynb

N = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256] # Discretizacao espacial
K = [5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640] # Discretizacao temporal
e = []; e12 = [] # Erros
Time = 1.0 # Tempo final

for n in range(len(N)): # Looping espacial
    nx = ny = N[n]
    mesh=RectangleMesh(Point(0,0),Point(pi/2,pi/2),nx,ny) # Malha
    Vh = FunctionSpace(mesh, 'Lagrange', 1) # Espaco de funcoes
    u = TrialFunction(Vh); v = TestFunction(Vh)
    u_teo = Expression('exp(-2*t)*(cos(x[0]) + sin(x[0]))*(cos(x
        [1]) + sin(x[1]))', degree=2, t=0)
    u_k = interpolate(u_teo, Vh)
    t = 0.0; num_steps = K[n]; dt = Time / num_steps
    # Formulacao variacional
    b = (dt/2)*dot(grad(u), grad(v))*dx + u*v*dx + (dt/2)*u*v*ds
    F = u_k*v*dx-(dt/2)*dot(grad(u_k),grad(v))*dx-(dt/2)*u_k*v*ds
    u = Function(Vh)
    for k in range(num_steps): # Looping temporal
        t += dt; u_teo.t = t
        solve(b == F, u)
        u_k.assign(u) # u_k recebe u

# Bloco de Plots

# Erro na norma L2
error_L2 = errornorm(u_teo, u, 'L2')
e12.append(error_L2)
# Erro na norma do maximo
vertex_values_u_teo = u_teo.compute_vertex_values(mesh)
vertex_values_u = u.compute_vertex_values(mesh)
error_max = np.max(np.abs(vertex_values_u_teo -
    vertex_values_u))
e.append(error_max)

```

Aqui  $\Delta x = \Delta y = \pi/2n$  e  $\Delta t = 1/m$ , onde  $n \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$  e  $m \in \{5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640\}$ . Calculamos as aproximações no instante de tempo fixo em  $t = 1.0$ , para  $n$  e  $m$ . A Figura 18 mostra algumas aproximações obtidas com  $n = 8, 256$  e  $m = 20, 640$ , respectivamente.

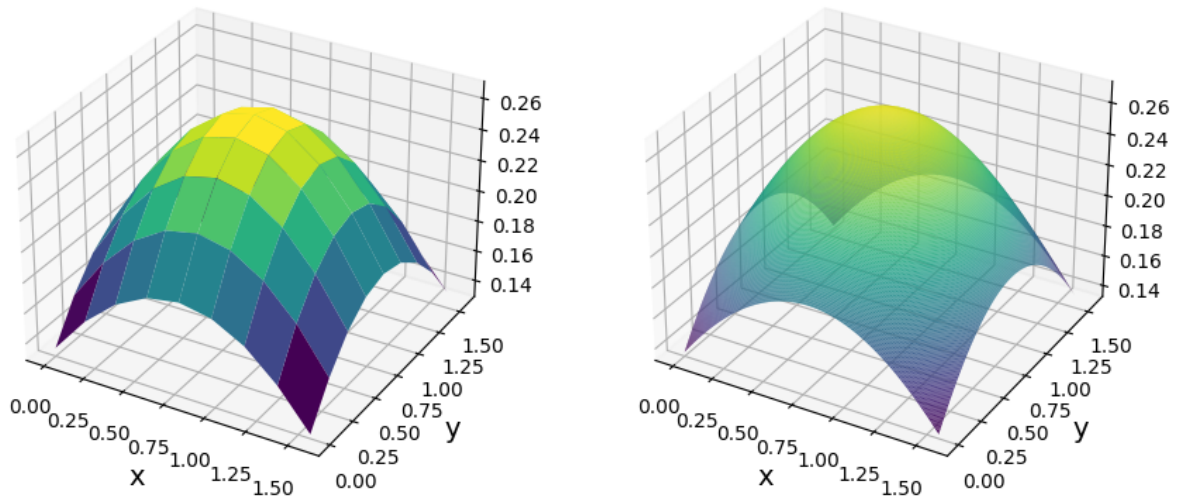


Figura 18 – Aproximações para o problema bidimensional: Calor Robin.

Os erros obtidos são dados pela tabela 5, onde constatamos a convergência quadrática do método de Crank-Nicolson para o problema (4.12) pela norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ , como esperávamos pelo Teorema 4.2.1.

Tabela 5 – Ordem de convergência do problema bidimensional: Calor Robin.

Espaço	Tempo	Erros - $L^\infty$	Ordem - $L^\infty$	Erros - $L^2$	Ordem - $L^2$
2	5	$4.952953e - 02$		$7.456322e - 02$	
4	10	$1.010985e - 02$	4.89914	$2.051546e - 02$	3.63449
8	20	$3.443942e - 03$	2.93554	$5.319508e - 03$	3.85665
16	40	$1.127914e - 03$	3.05337	$1.345948e - 03$	3.95224
32	80	$3.497594e - 04$	3.22483	$3.377565e - 04$	3.98496
64	160	$1.047400e - 04$	3.33931	$8.453627e - 05$	3.9954
128	320	$3.058002e - 05$	3.42511	$2.114134e - 05$	3.99862
256	640	$8.755072e - 06$	3.49283	$5.285872e - 06$	3.99959

### 4.3 Equação do calor com condições de contorno dinâmicas

Finalmente, estamos aptos para estudar o problema central deste trabalho, o Problema (4.1), também conhecido como o **problema de Wentzell**. As seções anteriores surgiram naturalmente a partir dos experimentos realizados nesta seção. Como observamos ao longo do trabalho, os Problemas (3.1) e (4.2) representam particularidades estacionárias do problema (4.1), onde (4.2) é “estacionário em  $\Gamma$ ” no sentido de ter condições de contorno que não dependem da derivada  $\partial_t u$ . Abordá-los primeiramente nos permitiu explorar vários exemplos, cada um com suas características únicas, e adquirir as ferramentas necessárias e suficientes para lidar com maior clareza com o problema de Wentzell.

Nesta seção, realizaremos as aproximações e análises numéricas para a equação do calor com condições de contorno dinâmicas (4.1). Para isso, organizaremos as subseções da mesma forma que fizemos ao longo do trabalho, começando com a Subseção 4.3.1, na qual detalharemos a formulação fraca do problema. O estudo do caso unidimensional é apresentado na Subseção 4.3.2. Por fim, exploramos o caso bidimensional na Subseção 4.3.3. Assim, é possível estudar o método de Crank-Nicolson unidimensional e sua aplicação bidimensional usando a biblioteca FEniCS.

### 4.3.1 Formulação fraca do problema de Wentzell

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio aberto, limitado e suave,  $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$  e  $\kappa, \mu > 0$  para o problema (4.1). De acordo com a formulação fraca (2.6), podemos escrever

$$\int_{\Omega} f v \, dx = - \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \partial_t u \, dx.$$

Considerando a condição de contorno dinâmica, a formulação fraca deve satisfazer:

$$- \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v \partial_t u \, dx = \int_{\Gamma} (\kappa u + \mu \partial_t u) v \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v \partial_t u \, dx.$$

**Definição 4.3.1.** Dizemos que  $u \in L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \cap H^1([0, T]; L^2(\Omega) \oplus L^2(\Gamma))$  é uma **solução fraca** para a equação do calor com condições de contorno dinâmicas (4.1), se:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \kappa \int_{\Gamma} v u \, ds + \int_{\Omega} v \partial_t u \, dx + \mu \int_{\Gamma} \partial_t u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Note que  $H^1(\Omega)$  pode ser considerado um subconjunto denso de  $L^2(\Omega) \oplus L^2(\Gamma)$  através da identificação  $u \in H^1(\Omega) \mapsto (u, u|_{\Gamma}) \in L^2(\Omega) \oplus L^2(\Gamma)$ . Desse modo, podemos seguir o raciocínio adotado ao longo do trabalho e definir

$$b(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \kappa \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{e} \quad F(v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

de modo que  $F$  e  $b$  satisfaçam o Teorema 2.2.1, com  $V = H^1(\Omega)$  e  $H = L^2(\Omega) \oplus L^2(\Gamma)$  (vide [6] ou [7]). Portanto, asseguramos a existência e unicidade da solução para o problema fraco

$$b(u, v) + \langle \partial_t u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \mu \langle \partial_t u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} = F(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

### 4.3.2 Problema de Wentzell unidimensional

Vamos considerar o seguinte caso unidimensional homogêneo:  $\bar{\Omega} = [0, L] \subset \mathbb{R}$  e  $\kappa = \mu = 1$ . Portanto, a equação do calor homogênea com condições de contorno dinâmicas é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_x^2 u(x, t) + \partial_t u(x, t) = 0 & \text{em } \Omega \times ]0, T], \\ \partial_x u(0, t) = u(0, t) + \partial_t u(0, t) & \text{em } ]0, T], \\ -\partial_x u(L, t) = u(L, t) + \partial_t u(L, t) & \text{em } ]0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \bar{\Omega} \text{ e } t = 0, \end{array} \right. \quad (4.13)$$

em que  $u_0 \in H^1(\Omega)$ . Nesse caso, para todo  $v \in H^1(\Omega)$ , a formulação variacional será dada por: determinar  $u \in L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \cap H^1([0, T]; L^2(\Omega) \oplus L^2(\Gamma))$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t uv \, dx + \int_{\Omega} \partial_x u \partial_x v \, dx &+ u(0, t)v(0) + \partial_t u(0, t)v(0) \\ &+ u(L, t)v(L) + \partial_t u(L, t)v(L) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Agora, para discretizar a parte temporal, utilizaremos o método forward FDM em conjunto com a média de  $u(x, t_k)$ , onde  $k \in \mathbb{N}$  e  $t_k = k\Delta t$ . Como dito na Seção 4.2, essa abordagem resulta no método de Crank-Nicolson.

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k)}{\Delta t} v \, dx + \int_0^L \partial_x \left[ \frac{u(x, t_{k+1}) + u(x, t_k)}{2} \right] \partial_x v \, dx \\ + \frac{u(0, t_{k+1}) + u(0, t_k)}{2} v(0) + \frac{u(L, t_{k+1}) + u(L, t_k)}{2} v(L) \\ + \frac{u(0, t_{k+1}) - u(0, t_k)}{\Delta t} v(0) + \frac{u(L, t_{k+1}) - u(L, t_k)}{\Delta t} v(L). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por  $\Delta t$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^L [u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k)] v \, dx + \frac{\Delta t}{2} \int_0^L \partial_x [u(x, t_{k+1}) + u(x, t_k)] \partial_x v \, dx \\ + \frac{\Delta t}{2} [u(0, t_{k+1}) + u(0, t_k)] v(0) + \frac{\Delta t}{2} [u(L, t_{k+1}) + u(L, t_k)] v(L) \\ + [u(0, t_{k+1}) - u(0, t_k)] v(0) + [u(L, t_{k+1}) - u(L, t_k)] v(L). \end{aligned}$$

Rearranjando os termos das integrais e utilizando a base de splines lineares dados pela Equação (3.9), temos que  $u_h(x, t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) \phi_i(x)$ . Nesse caso, substituindo  $u$  pelas aproximações  $u_h$  e  $v$  por  $\phi_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \int_0^L \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1}) \phi_i \phi_j - \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k) \phi_i \phi_j \, dx + \frac{\Delta t}{2} \int_0^L \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1}) \phi_i' \phi_j' + \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k) \phi_i' \phi_j' \, dx \\ + \sum_{i=0}^n \frac{\Delta t}{2} [\alpha_i(t_{k+1}) \phi_i(0) + \alpha_i(t_k) \phi_i(0)] \phi_j(0) + \sum_{i=0}^n \frac{\Delta t}{2} [\alpha_i(t_{k+1}) \phi_i(L) + \alpha_i(t_k) \phi_i(L)] \phi_j(L) \\ + \sum_{i=0}^n [\alpha_i(t_{k+1}) \phi_i(0) - \alpha_i(t_k) \phi_i(0)] \phi_j(0) + \sum_{i=0}^n [\alpha_i(t_{k+1}) \phi_i(L) - \alpha_i(t_k) \phi_i(L)] \phi_j(L). \end{aligned}$$

Pela Equação (4.13), podemos evidenciar todos os termos que possuem  $\alpha_i(t_{k+1})$  no lado esquerdo e os termos que possuem  $\alpha_i(t_k)$  no lado direito. Assim, como estamos tomando  $f = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1}) \left[ \int_0^L \phi_i \phi_j + \frac{\Delta t}{2} \phi_i' \phi_j' \, dx + \left( \frac{\Delta t}{2} + 1 \right) \phi_i(0) \phi_j(0) + \left( \frac{\Delta t}{2} + 1 \right) \phi_i(L) \phi_j(L) \right] \\ = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k) \left[ \int_0^L \phi_i \phi_j - \frac{\Delta t}{2} \phi_i' \phi_j' \, dx + \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \right) \phi_i(0) \phi_j(0) + \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \right) \phi_i(L) \phi_j(L) \right]. \end{aligned}$$



Novamente, pela definição de  $\tilde{S}_h$ , temos que  $\phi_i(x_j) = 1$  se  $i = j$  e, caso contrário,  $\phi_i(x_j) = 0$ . Assim,  $u(x_j, t_{k+1}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1})\phi_i(x_j) = \alpha_j(t_{k+1})$  e obtemos o sistema linear

$$\left( A + \frac{\Delta t}{2}B + \left( \frac{\Delta t}{2} + 1 \right) R \right) \begin{bmatrix} \alpha_0(t_{k+1}) \\ \vdots \\ \alpha_n(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \left( A - \frac{\Delta t}{2}B + \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \right) R \right) \begin{bmatrix} \alpha_0(t_k) \\ \vdots \\ \alpha_n(t_k) \end{bmatrix}.$$

Onde a matriz de rigidez e o vetor de transporte, são dados pelas equações

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, dx, \quad B_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i' \phi_j' \, dx \quad \text{e} \quad R_{ij} = \phi_j(L)\phi_i(L) + \phi_j(0)\phi_i(0).$$

Fazendo uma adaptação do estudo realizado por Strauss na seção 4.3, que aborda as condições de contorno de Robin, no trabalho [23], podemos formular o próximo exemplo.

**Exemplo 4.3.1.** Vamos determinar os possíveis valores de  $\beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$u(x, t) = \exp(-\beta^2 t) \left( \frac{1}{1 - \beta^2} \cos(\beta x) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta x) \right),$$

seja uma solução em  $\Omega = [0, 1]$  do problema

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u(x, t) + \partial_t u(x, t) = 0 & \text{em } \Omega \times ]0, T], \\ \partial_x u(0, t) = u(0, t) + \partial_t u(0, t) & \text{em } ]0, T], \\ -\partial_x u(1, t) = u(1, t) + \partial_t u(1, t) & \text{em } ]0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Primeiro, vamos verificar sob quais condições  $u$  satisfaz a equação do calor. As derivadas de  $u$  são dadas por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp(-\beta^2 t) \left( \frac{1}{1 - \beta^2} \cos(\beta x) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta x) \right). \\ \partial_x u(x, t) &= \exp(-\beta^2 t) \left( \frac{-\beta}{1 - \beta^2} \sin(\beta x) + \cos(\beta x) \right). \\ \partial_x^2 u(x, t) &= \exp(-\beta^2 t) \left( \frac{-\beta^2}{1 - \beta^2} \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x) \right). \\ \partial_t u(x, t) &= -\beta^2 \exp(-\beta^2 t) \left( \frac{1}{1 - \beta^2} \cos(\beta x) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta x) \right). \end{aligned}$$

Note que  $\partial_x^2 u(x, t) = \partial_t u(x, t)$ , satisfazendo a equação do calor. Além disso, a primeira equação de contorno  $\partial_x u(0, t) = u(0, t) + \partial_t u(0, t)$  é satisfeita, pois

$$\exp(-\beta^2 t) = \frac{1}{1 - \beta^2} \exp(-\beta^2 t) - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \exp(-\beta^2 t).$$

Agora, vamos verificar para quais valores de  $\beta$  a condição  $-\partial_x u(1, t) = u(1, t) + \partial_t u(1, t)$  é satisfeita

$$\begin{aligned} -\exp(-\beta^2 t) \left( \frac{-\beta}{1-\beta^2} \sin(\beta) + \cos(\beta) \right) &= \exp(-\beta^2 t) \left( \frac{1}{1-\beta^2} \cos(\beta) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta) \right) \\ &\quad - \beta^2 \exp(-\beta^2 t) \left( \frac{1}{1-\beta^2} \cos(\beta) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta) \right) \\ \implies \sin(\beta) \left( \frac{\beta}{1-\beta^2} - \frac{1}{\beta} + \beta \right) &= \cos(\beta) \left( 1 + \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right) \\ \implies \tan(\beta) \left( \frac{\beta^2 - (1-\beta^2) + (1-\beta^2)\beta^2}{(1-\beta^2)\beta} \right) &= \frac{1-\beta^2 + 1-\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{2(1-\beta^2)}{1-\beta^2} = 2 \\ \implies \tan(\beta) &= \frac{2(1-\beta^2)\beta}{-\beta^4 + 3\beta^2 - 1}. \end{aligned}$$

Portanto, o problema que iremos estudar as aproximações é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_x^2 u(x, t) + \partial_t u(x, t) = 0 & \text{em } ]0, 1[ \times ]0, T], \\ \partial_x u(0, t) = u(0, t) + \partial_t u(0, t) & \text{em } ]0, T], \\ -\partial_x u(1, t) = u(1, t) + \partial_t u(1, t) & \text{em } ]0, T], \\ u_0(x) = \frac{1}{1-\beta^2} \cos(\beta x) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta x) & \text{onde } \tan(\beta) = \frac{2(1-\beta^2)\beta}{-\beta^4 + 3\beta^2 - 1}. \end{array} \right.$$

Primeiramente, é importante observar que a condição  $\tan(\beta) = \frac{2(1-\beta^2)\beta}{-\beta^4 + 3\beta^2 - 1}$  possui mais de uma solução. Para encontrar um valor adequado de  $\beta$ , utilizaremos o método de Newton, que requer um chute inicial  $x_0$ .

Por exemplo, se escolhermos  $x_0 = 0.5$ , aplicando o método de Newton com uma precisão de  $10^{-15}$ , obtemos que  $\beta = 3.5215818298571164 \times 10^{-17}$ , e é fácil verificar que  $\beta = 0$  é uma das soluções para esse problema de raízes. No entanto, essa solução implica que  $(1/\beta)\sin(\beta x)$  não existe. Desse modo, optaremos por  $x_0 = 1$ , assim o método de Newton, contido no arquivo *Newton.py* retorna  $\beta = 0.8086750733914313$ .

```
# Bibliotecas Newton.py

# f e a funcao que queremos encontrar as raizes
def f(x):
    return(np.tan(x) + (2*x*(1 - x**2))/(x**4 - 3*x**2 + 1))

# Derivada de f
def Df(x):
    return((1/(np.cos(x)**2))+(2*(1 + x**6))/(1-3*x**2+x**4)**2)

# x0 e o chute inicial e eps o criterio de parada.
# Aqui x0 = 1. e eps = 1e-15
def newton(f, Df, x0, eps):
    i=0; x=[]; x.append(x0)
    while ((f(x[i] + eps)*f(x[i] - eps)) > 0):
```

```

xn = x[i] - f(x[i])/Df(x[i])
x.append(xn)
i = i+1
return x, i

```

Para concluir a aproximação, foram necessárias um total de cinco iterações. A figura a seguir representa o erro em relação ao número de iterações, até que o critério de parada de  $10^{-15}$  seja alcançado.

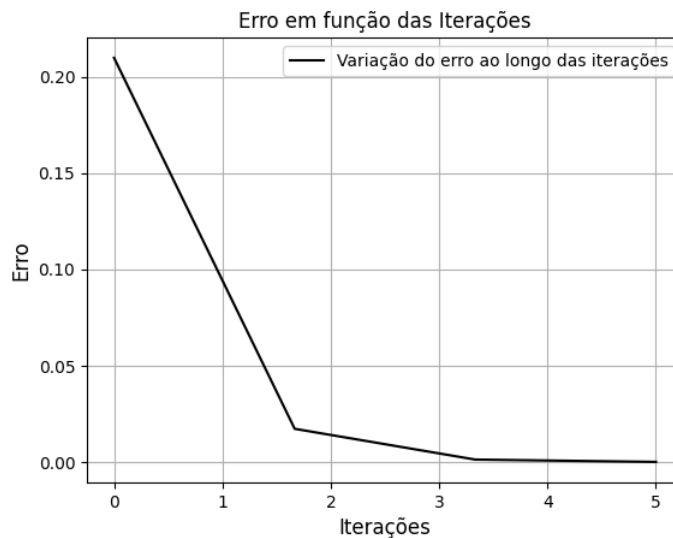


Figura 19 – Método de Newton: Iterações vs Erro.

As matrizes do método de elementos finitos são as mesmas que as calculadas no Exemplo 4.2.2. Contudo, precisamos fazer a alteração referente ao sistema da função *CrankNicolsonGalerkin* no arquivo *MEF.py*.

```

# Bibliotecas de MEF.py
# Blocos de codigos para calcular as matrizes
# Metodo de Crank-Nicolson
def CrankNicolsonGalerkin(n, h, x_disc, alpha, dt):
    A, B, R = matriz_rigidez(n, h)
    MR = A + (dt/2)*B + (1 + (dt/2))*R
    VF = A - (dt/2)*B + (1 - (dt/2))*R
    VF = np.dot(VF, alpha)
    alpha = np.linalg.solve(MR, VF)
    u = lambda x: u_sol(x, alpha, h, x_disc)
    return alpha, u

```

Agora, fazendo uso dos programas *Newton.py*, *SplinesLineares.py* e *MEF.py*, podemos aproximar o problema de Wentzell com o programa intitulado *HeatDynamic.ipynb*.

```

# Bibliotecas HeatDynamic.ipynb

# Chute inicial para a raiz
x0=1.; eps=1e-15
nzero, qtditera = newton(f, Df, x0, eps) # Newton.py
beta = nzero[qtditera]

# Descricao do problema
u_teo = lambda x, t: np.exp(-t*beta**2)*((1./(1.-(beta**2)))*np.
    cos(beta*x) + (1./beta)*np.sin(beta*x))
x_min = 0; x_max = 1; T = 1.0
M = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256] # Discretizacoes espaciais
N_t = [5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640] # Discretizacoes
    temporais
e = []; e12 = [] # Erros com as normas  $L^\infty$  e  $L^2$ 
# Looping espacial
for n in range(len(M)):
    # Discretizacao espacial e temporal
    h = (x_max - x_min)/M[n]; x=np.linspace(x_min,x_max,M[n]+1)
    N_t2 = N_t[n]; dt = T/N_t2; t = np.linspace(0, T, N_t2+1)
    alpha = u_teo(x, 0.) # Funcao u_0(x)
    # Looping temporal
    for j in range(1, N_t2+1):
        alpha, u_num=CrankNicolsonGalerkin(M[n], h, x, alpha, dt)
            # MEF.py

    # Funcao de plot

    # Aumentando a quantidade de pontos para calcular o erro
    y = np.linspace(x_min, x_max, 10*(M[n]+1))
    # Norma  $L_\infty$  do erro
    norma_linfinito = np.max(np.abs(u_num(y) - u_teo(y, T)))
    e.append(norma_linfinito)
    # Calcula a norma  $L_2$  do erro
    integral = 0
    for k in range(len(y)-1):
        interpol = lambda x: u_num(y[k])*(y[k+1] - x)/(y[k+1] - y
            [k]) + u_num(y[k+1])*(x-y[k])/(y[k+1] - y[k])
        erro_x = lambda x: (u_teo(x, T) - interpol(x))**2
        int , error = integrate.quad(erro_x, y[k], y[k+1])

```

```

integral += int
norma_l2 = np.sqrt(integral)
e12.append(norma_l2)

```

A figura 20 apresenta algumas aproximações numéricas obtidas no tempo  $t = 1$  fixado. De modo que, o tamanho de passo no espaço está variando em  $h = 1/n$ , com valores de  $n$  iguais a 4 e 256, e o passo no tempo  $k$  assume os valores de  $1/10$  e  $1/640$ , onde  $t_{j+1} = t_j + k = t_0 + (j + 1)k$ .

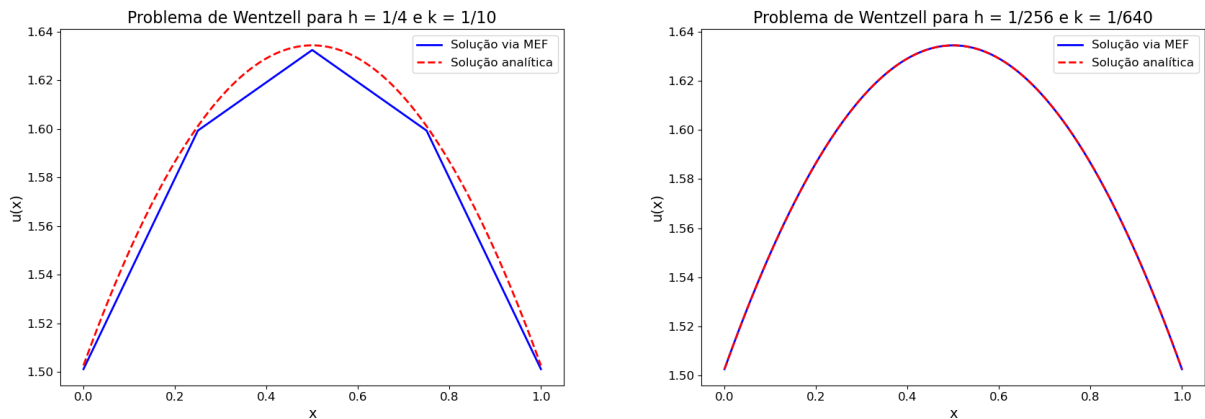


Figura 20 – Aproximações para o problema unidimensional: Calor Dinâmicas.

Por fim, a Tabela 6 apresenta os erros e seus quocientes, tanto na norma  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  quanto na norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ . Novamente vemos a ordem de convergência quadrática do método de Crank-Nicolson para o problema (4.13).

Tabela 6 – Ordem de convergência do problema unidimensional: Calor Dinâmicas.

Espaço	Tempo	Erros - $L^\infty$	Ordem - $L^\infty$	Erros - $L^2$	Ordem - $L^2$
2	5	$3.939743e - 02$		$3.023951e - 02$	
4	10	$1.013309e - 02$	3.888	$7.593930e - 03$	3.98206
8	20	$2.561174e - 03$	3.95642	$1.901295e - 03$	3.99408
16	40	$6.406336e - 04$	3.99788	$4.755459e - 04$	3.99813
32	80	$1.602914e - 04$	3.99668	$1.189120e - 04$	3.99914
64	160	$4.006795e - 05$	4.00049	$2.973094e - 05$	3.99961
128	320	$1.001832e - 05$	3.99947	$7.433070e - 06$	3.99982
256	640	$2.504653e - 06$	3.99988	$1.858310e - 06$	3.99991

### 4.3.3 Problema de Wentzell bidimensional

Considerando  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $\kappa = \mu = 1$  na equação (4.1). Realizaremos a aplicação do método de Crank-Nicolson para a equação do calor bidimensional com condições de

contorno dinâmicas, dada por:

$$\begin{cases} -\Delta u + \partial_t u = f \text{ em } \Omega \times ]0, T], \\ -\partial_\nu u = u + \partial_t u \text{ em } \Gamma \times ]0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \bar{\Omega} \end{cases} \quad (4.15)$$

em que  $f \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$  e  $u_0 \in H^1(\Omega)$ . Pela Definição 4.3.1, a formulação fraca do problema (4.15) é dada por

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_t u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_t u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , tal que  $t_k = k\Delta t$ , denotaremos  $u(x, y, t_{k+1})$  por  $u$  e  $u(x, y, t_k)$  por  $u_k$ . Então, temos pelo método de Crank-Nicolson que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \left[ \frac{u + u_k}{2} \right] \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \frac{u - u_k}{\Delta t} v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{u - u_k}{\Delta t} v \, ds \\ + \int_{\Gamma} \frac{u + u_k}{2} v \, ds = \int_{\Omega} \frac{f + f_k}{2} v \, dx. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por  $\Delta t$  e rearranjando os termos  $u_k$  à direita da equação, obtemos a formulação variacional que será aplicada com o FEniCS. A forma bilinear é dada por  $b : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$b(u, v) = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx + \left( \frac{\Delta t}{2} + 1 \right) \int_{\Gamma} uv \, ds,$$

e o funcional linear  $F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é escrito como

$$F_k(v) = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} (f + f_k)v \, dx - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u_k v \, dx + \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \right) \int_{\Gamma} u_k v \, ds.$$

**Exemplo 4.3.2.** Seja  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , podemos observar que  $u : \bar{\Omega} \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$u(x, y, t) = e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y),$$

satisfaz as condições de contorno dinâmicas do problema (4.15).

$$u(x, y, t) = e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$\implies u(0, y, t) = e^{-t} \cos(\pi y) \quad \text{e} \quad u(1, y, t) = -e^{-t} \cos(\pi y)$$

$$\implies u(x, 0, t) = e^{-t} \cos(\pi x) \quad \text{e} \quad u(x, 1, t) = -e^{-t} \cos(\pi x)$$

$$\partial_x u(x, y, t) = -\pi e^{-t} \sin(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$\implies \partial_x u(0, y, t) = -\partial_x u(1, y, t) = 0$$

$$\partial_y u(x, y, t) = -\pi e^{-t} \cos(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$\implies \partial_y u(x, 0, t) = -\partial_y u(x, 1, t) = 0$$

$$\partial_t u(x, y, t) = -e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$\implies \partial_t u(0, y, t) = -e^{-t} \cos(\pi y) \quad \text{e} \quad \partial_t u(1, y, t) = e^{-t} \cos(\pi y)$$

$$\implies \partial_t u(x, 0, t) = -e^{-t} \cos(\pi x) \quad \text{e} \quad \partial_t u(x, 1, t) = e^{-t} \cos(\pi x)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\partial_x u(0, y, t) = u(0, y, t) + \partial_t u(0, y, t) &\implies 0 = e^{-t} \cos(\pi y) - e^{-t} \cos(\pi y) \\ -\partial_x u(1, y, t) = u(1, y, t) + \partial_t u(1, y, t) &\implies 0 = -e^{-t} \cos(\pi y) + e^{-t} \cos(\pi y) \\ \partial_y u(x, 0, t) = u(x, 0, t) + \partial_t u(x, 0, t) &\implies 0 = e^{-t} \cos(\pi x) - e^{-t} \cos(\pi x) \\ -\partial_y u(x, 1, t) = u(x, 1, t) + \partial_t u(x, 1, t) &\implies 0 = -e^{-t} \cos(\pi x) + e^{-t} \cos(\pi x).\end{aligned}$$

Como  $u$  satisfaz as condições de contorno, podemos determinar o termo fonte

$$\begin{aligned}-\Delta u + \partial_t u = f &\implies 2e^{-t} \pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) - e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y) = f \\ &\implies f(x, y, t) = (2\pi^2 - 1)e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y).\end{aligned}$$

Portanto, iremos fazer a aproximação numérica do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + \partial_t u = (2\pi^2 - 1)e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y) \text{ em } \Omega \times ]0, T], \\ -\partial_\nu u = u + \partial_t u \text{ sobre } \Gamma \times ]0, T], \\ u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \text{ em } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

O código abaixo está presente no arquivo *2D-HeatDynamic.ipynb*. Apresentaremos o cerne do algoritmo e os resultados obtidos na sequência.

```
# Bibliotecas 2D-HeatDynamic.ipynb
N = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256] # Discretizacao espacial
K = [5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640] # Discretizacao temporal
e = []; e12 = [] # Erros
Time = 1.0 # Tempo final
for n in range(len(N)): # Looping espacial
    nx = ny = N[n]; mesh = UnitSquareMesh(nx, ny) # Malha
    Vh=FunctionSpace(mesh, 'Lagrange', 1) # Espaco de funcoes
    t=0.0; steps=K[n]; dt=Time/steps # Discretizacao temporal
    u = TrialFunction(Vh); v = TestFunction(Vh)
    u_teo = Expression('exp(-t)*cos(pi*x[0])*cos(pi*x[1])',
        degree=2, t=0) # Solucao analitica
    u_k = interpolate(u_teo, Vh)
    f = Expression('(2*pi*pi - 1)*exp(-t)*cos(pi*x[0])*cos(pi*x
        [1])', degree=2, t=0) # Termo fonte: f_{k+1}
    f_k = Expression('(2*pi*pi - 1)*exp(-t)*cos(pi*x[0])*cos(pi*
        x[1])', degree=2, t=0) # Termo fonte: f_{k}
    # Formulacao variacional
    b=(dt/2)*dot(grad(u), grad(v))*dx + u*v*dx+((dt/2)+1)*u*v*ds
    F = (dt/2)*(f + f_k)*v*dx - (dt/2)*dot(grad(u_k), grad(v))*dx
        + u_k*v*dx + (1 - (dt/2))*u_k*v*ds
    u = Function(Vh)
    for k in range(steps): # Looping temporal
```

```

t += dt; u_teo.t = t; f.t=t; f_k.t = t-dt # Atualizacao
solve(b == F, u)
u_k.assign(u) # u_k recebe u
# Erro na norma L2

# Erro na norma do maximo

```

A figura 21 mostra algumas das aproximações obtidas com  $t = 1.0$ . As discretizações espaciais são representadas por  $h = 1/N$ , onde  $N = n_x = n_y$ , e  $N = 8$  e  $256$ . As discretizações temporais são definidas por  $k = 1/K$  em que  $K = 20$  e  $640$ , respectivamente.

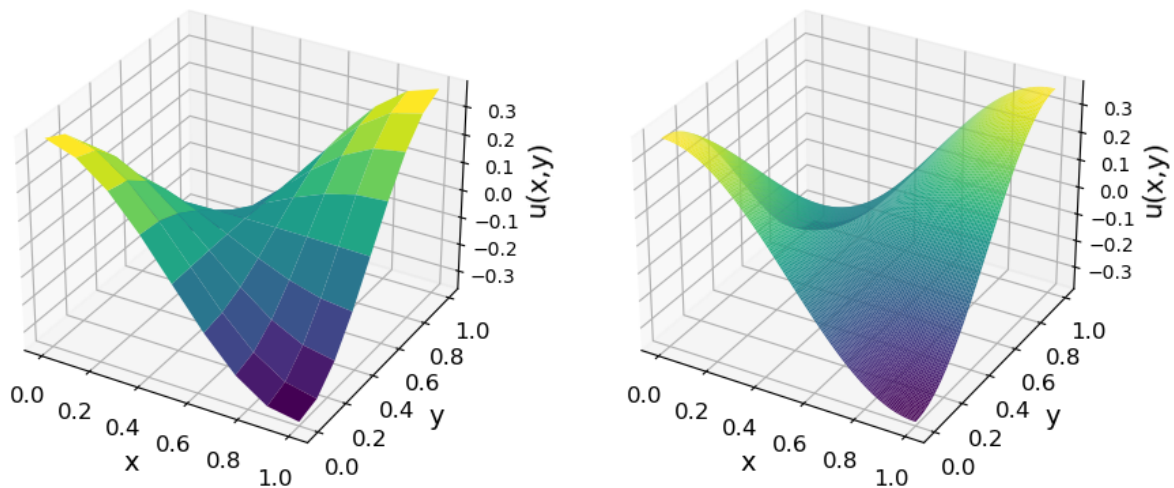


Figura 21 – Aproximações para o problema bidimensional: Calor Dinâmicas.

Os erros obtidos decorrentes de diferentes discretizações são dados pela tabela 7. Concluímos que foi possível constatar a convergência quadrática do método de Crank-Nicolson para o problema (4.15) pela norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ .

Tabela 7 – Ordem de convergência do problema bidimensional: Calor Dinâmicas.

Espaço	Tempo	Erros - $L^\infty$	Ordem - $L^\infty$	Erros - $L^2$	Ordem - $L^2$
2	5	$1.146597e - 01$		$8.985074e - 02$	
4	10	$4.524432e - 02$	2.53423	$2.903279e - 02$	3.0948
8	20	$1.594249e - 02$	2.83797	$8.027891e - 03$	3.61649
16	40	$5.089329e - 03$	3.13253	$2.070771e - 03$	3.87676
32	80	$1.538989e - 03$	3.30693	$5.224234e - 04$	3.96378
64	160	$4.504488e - 04$	3.41657	$1.309408e - 04$	3.98977
128	320	$1.289515e - 04$	3.49316	$3.275846e - 05$	3.99716
256	640	$3.631560e - 05$	3.55086	$8.191210e - 06$	3.99922

Os exemplos 4.3.1 e 4.3.2 nos permitem concluir a eficácia do método de Crank-Nicolson na aproximação do problema Wentzell unidimensional e bidimensional. É im-



---

portante destacar que a ordem de convergência ( $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$ ) é demonstrada de maneira semelhante à abordagem que utilizamos para o Teorema 4.2.1. Uma análise detalhada é conduzida por Kovács e Lubich, conforme documentado em [1].

## 5 Considerações finais

### 5.1 Equação de Poisson com condições de contorno dinâmicas

Ao longo do trabalho, estudamos alguns casos particulares da equação do calor com condições de contorno dinâmicas (4.1). De modo análogo ao que foi feito para os Problemas (3.1) e (4.2), podemos pensar no caso em que a equação no domínio  $\Omega$  não dependa da derivada  $\partial_t u$ . Nesse caso, teremos condições de contorno dinâmicas e a condição inicial  $u_0 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . Esse problema é denominado **problema de Poisson com condições de contorno dinâmicas** e é definido pela seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \times ]0, T], \\ -\partial_\nu u = \mu \partial_t u + \kappa u & \text{sobre } \Gamma \times ]0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (5.1)$$

Assim como fizemos anteriormente, dedicaremos uma seção para definir a formulação fraca do problema (5.1), outra para sua aplicação unidimensional e, por fim, uma para sua aplicação bidimensional via FEniCS.

Este é um problema que gostaríamos de avaliar com maior rigor futuramente. Isso porque  $u_0$  está definida apenas em  $\Gamma$  e, desse modo, se torna inviável calcular as aproximações  $u_1, \dots, u_n$  ao longo do domínio  $\Omega$ . Pense assim, para  $\Omega = [x_0, x_n]$ , temos que  $u_0(x)$  será apenas  $\{u_0(x_0), u_0(x_n)\}$ . Contudo, fizemos as aplicações do método de Crank-Nicolson considerando uma extensão  $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  adequada, e como veremos nas Seções 5.1.2 e 5.1.3, obtivemos não somente a convergência da solução aproximada para solução analítica, quanto a convergência do método com ordem  $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$ . Nesse contexto, surge o questionamento: será que é suficiente achar uma extensão adequada da condição inicial  $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  em problemas que envolvem a derivada  $\partial_t u$  apenas na fronteira? Independente disso, apresentaremos os resultados obtidos e consideraremos o problema (5.1) como objeto de estudos inicial após a conclusão deste trabalho. Cabe observar que o problema descrito aqui não foi abordado por Kovács e Lubich em [1]. Portanto, ainda não somos capazes de justificar completamente os métodos e a convergência de forma rigorosa.

#### 5.1.1 Formulação fraca

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, \dots, n$ , um domínio aberto, limitado e suave,  $\mu, \kappa > 0$  e  $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$  para o Problema (5.1). Note que, mesmo se tratando de um problema parabólico, temos que o domínio  $\Omega$  é governado por um problema elíptico. Desse modo, a formulação fraca do problema (5.1) satisfaz a Equação (2.2). Portanto, pela condição de

contorno dinâmica, temos que a formulação fraca deve satisfazer

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= - \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} v (\mu \partial_t u + \kappa u) \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \kappa \int_{\Gamma} v u \, ds + \mu \int_{\Gamma} v \partial_t u \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

**Definição 5.1.1.** Dizemos que  $u \in L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \cap H^1([0, T]; L^2(\Gamma))$  é uma **solução fraca** para o problema de Poisson com condições de contorno dinâmicas (5.1), se:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \kappa \int_{\Gamma} v u \, ds + \mu \int_{\Gamma} v \partial_t u \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Definindo

$$b(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \kappa \langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{e} \quad F(v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

já vimos que  $b$  é uma forma bilinear simétrica, limitada e coerciva. Recomendamos os trabalhos [24] e [25] para verificar a existência e unicidade de solução para o problema fraco

$$b(u, v) + \mu \langle \partial_t u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} = F(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

### 5.1.2 Equação de Laplace unidimensional com condições de contorno dinâmicas

Vamos considerar o caso unidimensional  $\bar{\Omega} = [0, L] \subset \mathbb{R}$  e que  $\kappa = \mu = 1$ :

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u(x, t) &= 0 \text{ em } \Omega \times ]0, T] \\ \partial_x u(0, t) &= u(0, t) + \partial_t u(0, t) \text{ em } ]0, T] \\ -\partial_x u(L, t) &= u(L, t) + \partial_t u(L, t) \text{ em } ]0, T] \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ em } \Gamma \end{cases} \quad (5.2)$$

Nesse caso temos que  $u(0, 0) = u_0(0)$  e  $u(L, 0) = u_0(L)$ . Faremos extensão de  $u_0$  para  $\bar{\Omega}$  como a única solução de  $-\partial_x^2 u = 0$ ,  $u_0(0)$  e  $u_0(L) = u_L$ . Logo

$$u_0(x) = \frac{L-x}{L} u_0 + \frac{x}{L} u_L.$$

O problema fraco será dado por: para todo  $v \in H^1(\Omega)$ , a determinar  $u \in L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \cap H^1([0, T]; L^2(\Gamma))$  tal que

$$\int_{\Omega} \partial_x u \partial_x v \, dx + u(L, t)v(L) + u(0, t)v(0) + \partial_t u(L, t)v(L) + \partial_t u(0, t)v(0) = 0. \quad (5.3)$$

Agora, discretizaremos a parte temporal pelo método Crank-Nicolson, discutido na Seção 4.2. Sendo  $t_k = k\Delta t$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L \partial_x \left[ \frac{u(x, t_{k+1}) + u(x, t_k)}{2} \right] \partial_x v \, dx &+ \frac{u(0, t_{k+1}) + u(0, t_k)}{2} v(0) + \frac{u(L, t_{k+1}) + u(L, t_k)}{2} v(L) \\ &+ \frac{u(0, t_{k+1}) - u(0, t_k)}{\Delta t} v(0) + \frac{u(L, t_{k+1}) - u(L, t_k)}{\Delta t} v(L). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por  $\Delta t$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} \int_0^L \partial_x u(x, t_{k+1}) \partial_x v + \partial_x u(x, t_k) \partial_x v \, dx &+ \frac{\Delta t}{2} [u(0, t_{k+1}) + u(0, t_k)] v(0) \\ &+ \frac{\Delta t}{2} [u(L, t_{k+1}) + u(L, t_k)] v(L) \\ &+ [u(0, t_{k+1}) - u(0, t_k)] v(0) \\ &+ [u(L, t_{k+1}) - u(L, t_k)] v(L) = 0 \end{aligned}$$

Em relação à base de splines lineares  $\tilde{S}_h$ , nosso problema pode ser formulado da seguinte maneira: determinar os coeficientes  $\alpha_j(t)$  tais que

$$u_h(x, t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) \phi_i(x).$$

Ao substituirmos  $u$  pela combinação linear acima e  $v$  por  $\phi_j$  (onde  $j = 0, \dots, n$ ) na equação que obtivemos anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} \int_0^L \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1}) \phi_i' \phi_j' + \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k) \phi_i' \phi_j' \, dx &+ \sum_{i=0}^n \frac{\Delta t}{2} [\alpha_i(t_{k+1}) \phi_i(0) + \alpha_i(t_k) \phi_i(0)] \phi_j(0) \\ &+ \sum_{i=0}^n \frac{\Delta t}{2} [\alpha_i(t_{k+1}) \phi_i(L) + \alpha_i(t_k) \phi_i(L)] \phi_j(L) \\ &+ \sum_{i=0}^n [\alpha_i(t_{k+1}) \phi_i(0) - \alpha_i(t_k) \phi_i(0)] \phi_j(0) \\ &+ \sum_{i=0}^n [\alpha_i(t_{k+1}) \phi_i(L) - \alpha_i(t_k) \phi_i(L)] \phi_j(L) = 0. \end{aligned}$$

Evidenciando os termos que possuem  $\alpha_i(t_{k+1})$  à esquerda e os que possuem  $\alpha_i(t_k)$  à direita

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_{k+1}) \left[ \int_0^L \frac{\Delta t}{2} \phi_i' \phi_j' \, dx + \left( \frac{\Delta t}{2} + 1 \right) \phi_i(0) \phi_j(0) + \left( \frac{\Delta t}{2} + 1 \right) \phi_i(L) \phi_j(L) \right] \\ = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t_k) \left[ \int_0^L -\frac{\Delta t}{2} \phi_i' \phi_j' \, dx + \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \right) \phi_i(0) \phi_j(0) + \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \right) \phi_i(L) \phi_j(L) \right]. \end{aligned}$$

Contudo, vimos que pela definição de  $\tilde{S}_h$ ,  $\phi_i(x_j) = 1$  se  $i = j$  e, caso contrário,  $\phi_i(x_j) = 0$ . Desse modo, podemos reescrever a equação acima como um sistema de equações

$$\left[ \frac{\Delta t}{2} A + \left( \frac{\Delta t}{2} + 1 \right) R \right] \begin{bmatrix} \alpha_0(t_{k+1}) \\ \vdots \\ \alpha_n(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \left[ -\frac{\Delta t}{2} A + \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \right) R \right] \begin{bmatrix} \alpha_0(t_k) \\ \vdots \\ \alpha_n(t_k) \end{bmatrix}.$$

Onde as matrizes, já calculadas, são explicitadas pelas equações

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i' \phi_j' \, dx \quad \text{e} \quad R_{ij} = \phi_j(L) \phi_i(L) + \phi_j(0) \phi_i(0).$$

**Exemplo 5.1.1.** Sendo  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ , temos que  $u(x, t) = 2x \exp(-3t) - \exp(-3t) + \exp(-t)$  é solução do problema de Laplace

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{em } \Omega \times ]0, T], \\ \partial_x u(0, t) = u(0, t) + \partial_t u(0, t), \\ -\partial_x u(1, t) = u(1, t) + \partial_t u(1, t), \\ u_0(x) = 2x & \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

Note que, fazendo a extensão de  $u_0$  para  $\bar{\Omega}$ , temos  $\partial_x^2 = 0$  e  $u$  satisfaz as condições as condições de contorno dinâmicas

$$\begin{aligned} \partial_x u(0, t) &= u(0, t) + \partial_t u(0, t) \\ \iff 2 \exp(-3t) &= -\exp(-3t) + \exp(-t) + 3 \exp(-3t) - \exp(-t). \\ -\partial_x u(1, t) &= u(1, t) + \partial_t u(1, t) \\ \iff -2 \exp(-3t) &= 2 \exp(-3t) - \exp(-3t) + \exp(-t) \\ &\quad - 6 \exp(-3t) + 3 \exp(-3t) - \exp(-t). \end{aligned}$$

Portanto, a função dada satisfaz o problema de Laplace com condições de contorno dinâmicas. As matrizes do método de elementos finitos são as mesmas que as calculadas no Exemplo 3.2.2. Contudo, precisamos fazer a alteração referente ao sistema da função *CrankNicolsonGalerkin* no arquivo *MEF.py*.

```
# Bibliotecas de MEF.py
# Blocos de codigos para calcular as matrizes
# Metodo de Crank-Nicolson
def CrankNicolsonGalerkin(n, h, x_disc, alpha, dt):
    A, R = matriz_rigidez(n)
    MR = (dt/2)*A + (1 + dt/2)*R
    VF = (-dt/2)*A + (1 - dt/2)*R
    VF = np.dot(VF, alpha)
    alpha = np.linalg.solve(MR, VF)
    u = lambda x: u_sol(x, alpha, h, x_disc)
    return alpha, u
```

Agora, fazendo uso dos programas *SplinesLineares.py* e *MEF.py*, podemos aproximar o problema de Laplace com condições de contorno dinâmicas com o programa intitulado *LaplaceDynamic.ipynb*.

```
# Bibliotecas LaplaceDynamic.ipynb

# Descricao do problema
u_teo = lambda x, t: 2*x*np.exp(-3*t) - np.exp(-3*t) + np.exp(-t)
x_min = 0; x_max = 1; T = 1.0
```

```

M = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256] # Discretizacoes espaciais
N_t = [5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640] # Discretizacoes temporais
e = []; e12 = [] # Erros com as normas L^\infty e L^2
# Looping espacial
for n in range(len(M)):
    # Discretizacao espacial e temporal
    h = (x_max - x_min)/M[n]; x=np.linspace(x_min,x_max,M[n]+1)
    N_t2 = N_t[n]; dt = T/N_t2; t = np.linspace(0, T, N_t2+1)
    alpha = u_teo(x, 0.) # Funcao u_0(x) - Estamos pegando todo x
    # Looping temporal
    for j in range(1, N_t2+1):
        alpha, u_num=CrankNicolsonGalerkin(M[n], h, x, alpha, dt)
        # MEF.py

    # Funcao de plot

    # Calculando os erros na Norma L_infinity e na norma L2

```

A figura 22 apresenta algumas aproximações numéricas obtidas no tempo  $t = 1$  fixado. De modo que, o tamanho de passo no espaço está variando em  $h = 1/n$ , com valores de  $n$  iguais a 4 e 256, e  $k$  assume os valores de  $1/10$  e  $1/640$ , onde  $t_{j+1} = t_j + k = t_0 + (j+1)k$ .

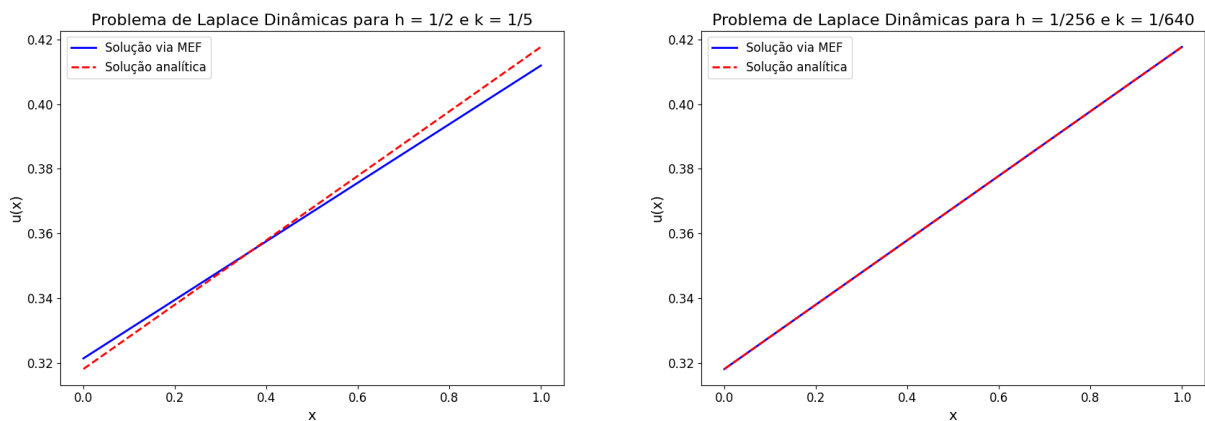


Figura 22 – Aproximações para o problema unidimensional: Laplace Dinâmicas.

Por fim, a Tabela 8 exhibe os erros e seus quocientes nas normas  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  e  $\|\cdot\|_{L^2}$ . A ordem de convergência quadrática do método de Crank-Nicolson nas duas normas é evidente. Era esperada a convergência quadrática na norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ , conforme o Teorema 4.2.1, embora ainda esteja claro como adaptá-lo para este caso. Portanto, podemos concluir a eficácia do método numérico aplicado para resolver o problema (5.2).

Tabela 8 – Ordem de convergência do problema unidimensional: Laplace Dinâmicas.

Espaço	Tempo	Erros - $L^\infty$	Ordem - $L^\infty$	Erros - $L^2$	Ordem - $L^2$
2	5	$5.752540e - 03$		$2.886139e - 03$	
4	10	$1.429625e - 03$	4.02381	$7.171879e - 04$	4.02424
8	20	$3.568721e - 04$	4.00599	$1.790241e - 04$	4.0061
16	40	$8.918459e - 05$	4.0015	$4.473894e - 05$	4.00153
32	80	$2.229406e - 05$	4.00037	$1.118367e - 05$	4.00038
64	160	$5.573384e - 06$	4.00009	$2.795850e - 06$	4.0001
128	320	$1.393338e - 06$	4.00002	$6.989584e - 07$	4.00002
256	640	$3.483340e - 07$	4.00001	$1.747397e - 07$	4.0

### 5.1.3 Equação de Poisson bidimensional com condições de contorno dinâmicas

Nesta seção, realizaremos a aplicação do método de Crank-Nicolson por elementos finitos para a equação de Poisson bidimensional com condições de contorno dinâmicas. Consideraremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $\mu = \kappa = 1$  na equação (5.1). Ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, t) = f(x, y, t) \text{ em } \Omega \times ]0, T], \\ -\partial_\nu u = u + \partial_t u \text{ em } \Gamma \times ]0, T], \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \text{ em } \Gamma. \end{cases} \quad (5.4)$$

Como fizemos na seção anterior, vamos estender  $u_0$  para  $\bar{\Omega}$  determinando o único  $u_0$  que satisfaz  $-\Delta u_0(x, y) = f(x, y, 0)$  e  $u_0|_\Gamma = u(x, y, 0)$ . A definição 5.1.1 nos permite explicitar a formulação fraca do problema (5.4). Para discretizar a parte temporal, utilizaremos o método de Crank-Nicolson. Denotando  $u(x, y, t_{k+1})$  por  $u$  e  $u(x, y, t_k)$  por  $u_k$ , para cada  $k \in \{1, \dots, N_t\}$  que discretiza a parte temporal, temos

$$\int_\Omega \nabla \left[ \frac{u + u_k}{2} \right] \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \frac{u - u_k}{\Delta t} v \, dx + \int_\Gamma \frac{u + u_k}{2} v \, ds = \int_\Omega \frac{f + f_k}{2} v \, dx.$$

Multiplicando ambos os lados por  $\Delta t$  e rearranjando os termos  $u_k$  à direita da equação, obtemos a formulação variacional que será aplicada com o FEniCS. A forma bilinear é

$$b(u, v) = \frac{\Delta t}{2} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma uv \, ds + \frac{\Delta t}{2} \int_\Gamma uv \, ds,$$

e o funcional linear é escrito como

$$F_k(v) = \frac{\Delta t}{2} \int_\Omega (f + f_k)v \, dx - \frac{\Delta t}{2} \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma u_k v \, ds - \frac{\Delta t}{2} \int_\Gamma u_k v \, ds.$$

**Exemplo 5.1.2.** Seja  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Vimos no exemplo 4.3.2 que  $u(x, y, t) = e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y)$  satisfaz as condições de contorno dinâmicas. Sendo assim, podemos determinar o termo fonte do Problema (5.4):

$$-\Delta u = f \implies f(x, y, t) = 2\pi^2 e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y).$$

Portanto, o problema teste será:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, t) = 2\pi^2 e^{-t} \cos(\pi x) \cos(\pi y) \text{ em } \Omega \times ]0, T], \\ -\partial_\nu u = u + \partial_t u \text{ sobre } \Gamma \times ]0, T], \\ u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \text{ em } \Gamma. \end{cases}$$

Note que a extensão de  $u_0$  a  $\bar{\Omega}$  satisfaz  $-\Delta u_0 = \pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y)$  e  $u|_\Gamma = u_0$ . O código abaixo está presente no arquivo *2D-PoissonDynamic.ipynb*.

```
# Bibliotecas 2D-PoissonDynamic.ipynb
N = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256] # Discretizacao espacial
K = [5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640] # Discretizacao temporal
e = []; e12 = [] # Erros
Time = 1.0 # Tempo final
for n in range(len(N)): # Looping espacial
    nx = ny = N[n]; mesh = UnitSquareMesh(nx, ny) # Malha
    Vh=FunctionSpace(mesh, 'Lagrange', 1) # Espaco de funcoes
    t=0.0; steps=K[n]; dt=Time/steps
    u = TrialFunction(Vh); v = TestFunction(Vh)
    u_teo = Expression('exp(-t)*cos(pi*x[0])*cos(pi*x[1])',
        degree=2, t=0)
    u_k = interpolate(u_teo, Vh)
    f = Expression('(2*pi*pi)*exp(-t)*cos(pi*x[0])*cos(pi*x[1])',
        degree=2, t=0)
    f_k = Expression('(2*pi*pi)*exp(-t)*cos(pi*x[0])*cos(pi*x
        [1])', degree=2, t=0)
    # Formulacao variacional
    b = (dt/2)*dot(grad(u), grad(v))*dx + u*v*ds + (dt/2)*u*v*ds
    F = (dt/2)*(f + f_k)*v*dx - (dt/2)*dot(grad(u_k), grad(v))*dx
        + u_k*v*ds - (dt/2)*u_k*v*ds
    u = Function(Vh)
    for k in range(steps): # Looping temporal
        t += dt; u_teo.t = t; f.t=t; f_k.t = t-dt
        solve(b == F, u) # solucao
        u_k.assign(u) # u_k recebe u
    # Funcao de plot
    # Calculando os erros na Norma L_infinity e na norma L2
```

A figura 23 mostra algumas das aproximações obtidas com  $t = 1.0$ . As discretizações espaciais são representadas por  $h = 1/N$ , onde  $N = n_x = n_y$ , e  $N = 8$  e  $256$ . As discretizações temporais são definidas por  $k = 1/K$  em que  $K = 20$  e  $640$ , respectivamente.



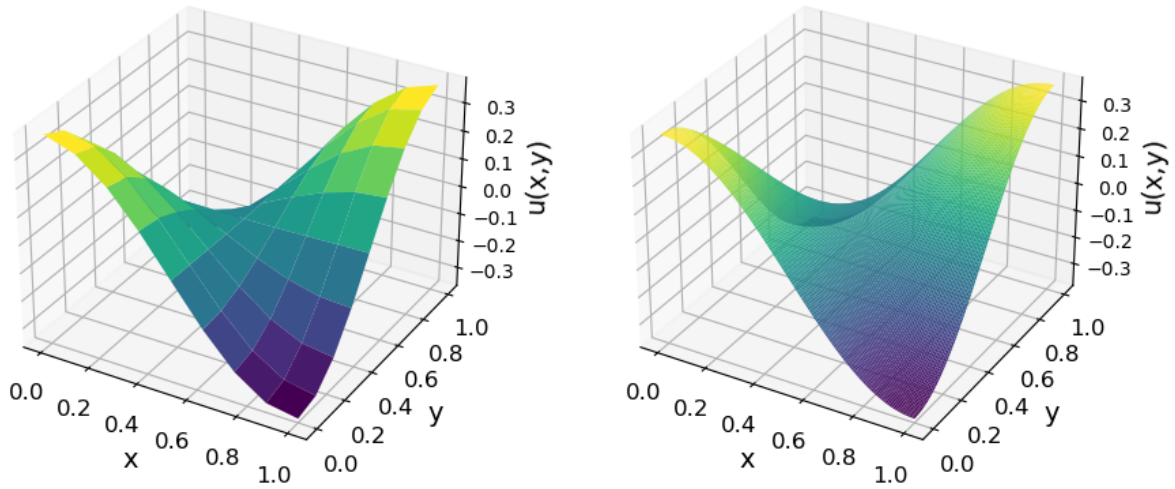


Figura 23 – Aproximações para o problema bidimensional: Poisson Dinâmicas.

Por fim, a Tabela 9 exibe os erros e seus quocientes nas normas  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  e  $\|\cdot\|_{L^2}$ . A ordem de convergência quadrática do método de Crank-Nicolson na norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  é evidente, e é esperada caso valha o equivalente do Teorema 4.2.1. Portanto, podemos concluir a eficácia do método numérico aplicado para resolver o Problema (5.4).

Tabela 9 – Ordem de convergência do problema bidimensional: Poisson Dinâmicas.

Espaço	Tempo	Erros - $L^\infty$	Ordem - $L^\infty$	Erros - $L^2$	Ordem - $L^2$
2	5	$2.413560e - 01$		$1.156153e - 01$	
4	10	$4.242033e - 02$	5.68963	$2.933237e - 02$	3.94156
8	20	$1.517180e - 02$	2.796	$7.501543e - 03$	3.91018
16	40	$4.890708e - 03$	3.10217	$1.889984e - 03$	3.9691
32	80	$1.488757e - 03$	3.28509	$4.738523e - 04$	3.98855
64	160	$4.378372e - 04$	3.40025	$1.185813e - 04$	3.99601
128	320	$1.257939e - 04$	3.48059	$2.965494e - 05$	3.9987
256	640	$3.552579e - 05$	3.54092	$7.414477e - 06$	3.9996

## 5.2 Impacto da condição de contorno para uma condição inicial fixa

Ao longo deste trabalho, dedicamos esforços à resolução de quatro problemas distintos de EDPs, cada uma com suas próprias características e abordagens específicas. No entanto, agora direcionamos nosso foco para um cenário singular em duas delas: a condição inicial  $u_0$  será a mesma para os Problemas (4.1) e (4.2).

**Exemplo 5.2.1.** No caso unidimensional, vamos considerar  $\bar{\Omega} \times ]0, T] = [-2\pi, 2\pi] \times ]0, 3.0]$ . Fixaremos os tamanhos de passo em um único valor. Para discretização espacial faremos

$h = 4\pi/128$ , enquanto para a discretização temporal será de  $k = 3/100$ . A Figura 24 apresenta as aproximações obtidas, com as seguintes condições iniciais:

$$u_0(x) = \cos(\pi x^2), \quad u_0(x) = \sin(\pi x^2), \quad u_0(x) = x^2 \quad \text{e} \quad u_0(x) = x^3$$

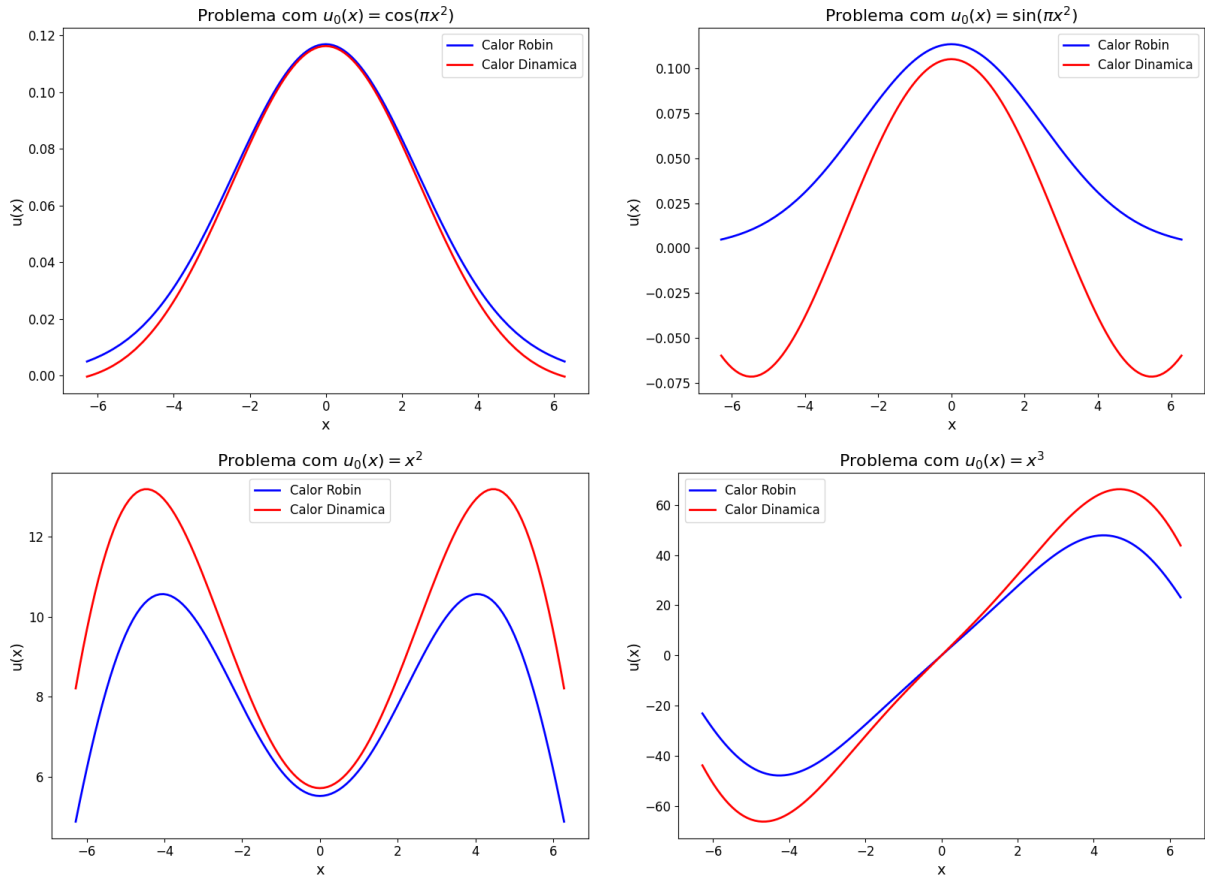
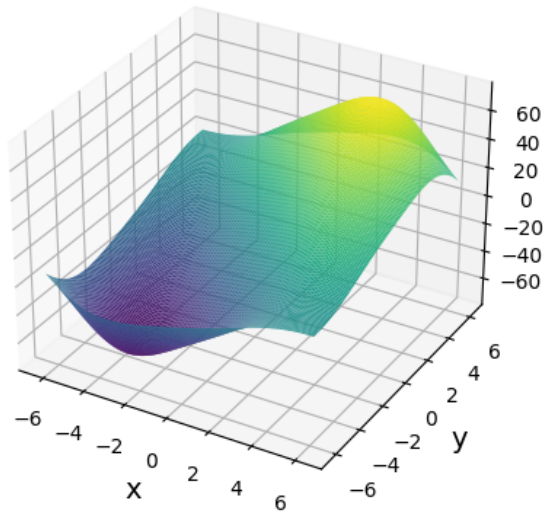


Figura 24 – Aproximações para a equação do calor unidimensional: Robin Vs Dinâmicas.

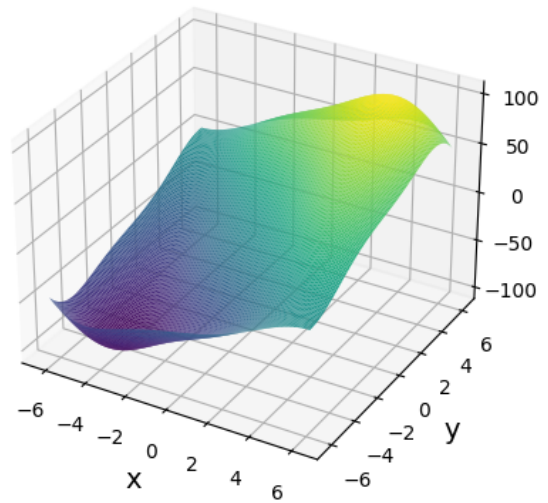
**Exemplo 5.2.2.** No caso bidimensional, vamos considerar  $\bar{\Omega} \times ]0, T] = [-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi] \times ]0, 3.0]$ . Fixaremos novamente os tamanhos de passo em um único valor. Para a discretização temporal será de  $k = 3/100$ , enquanto para discretização espacial será  $h = 4\pi/128$  tanto em  $x$ , quanto em  $y$ . A Figura 25 apresenta as aproximações obtidas, com as seguintes condições iniciais:

$$u_0(x, y) = x^3 + y^3, \quad u_0(x, y) = \cos(\pi x^2) + \sin(\pi y^2) \quad \text{e} \quad u_0(x, y) = (\cos x + \sin x)(\cos y + \sin y).$$

Calor Robin:  $u_0(x, y) = x^3 + y^3$



Calor Dinâmicas:  $u_0(x, y) = x^3 + y^3$

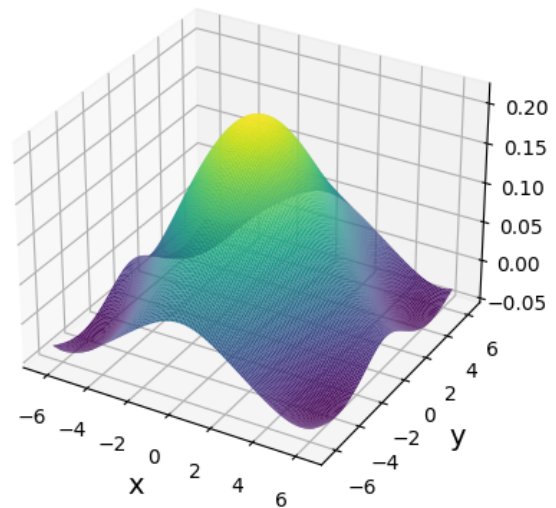
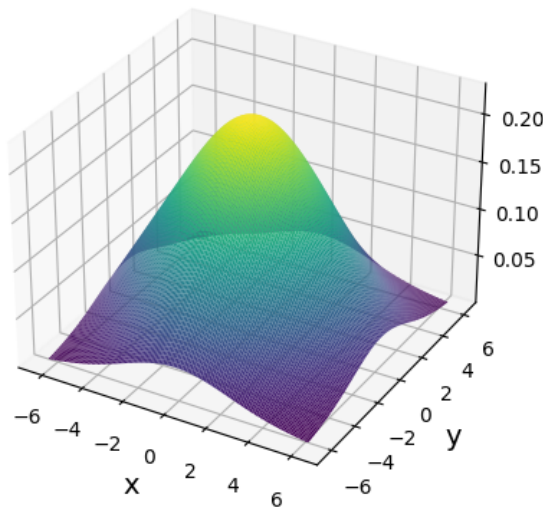


Calor Robin

$$u_0(x, y) = \cos(\pi x^2) + \sin(\pi y^2)$$

Calor Dinâmicas

$$u_0(x, y) = \cos(\pi x^2) + \sin(\pi y^2)$$



Calor Robin

$$u_0(x, y) = (\cos(x) + \sin(x))(\cos(y) + \sin(y))$$

Calor Dinâmicas

$$u_0(x, y) = (\cos(x) + \sin(x))(\cos(y) + \sin(y))$$

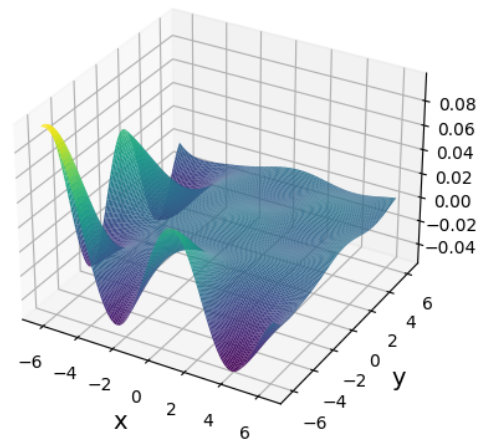
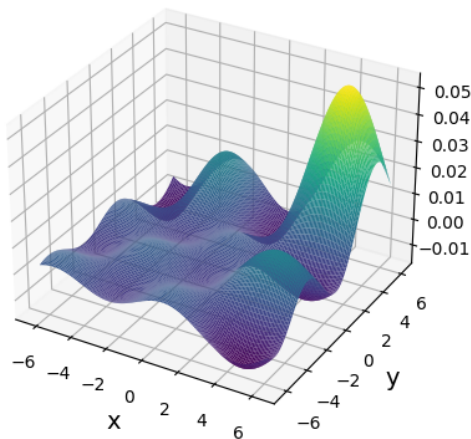


Figura 25 – Aproximações para a equação do calor bidimensional: Robin Vs Dinâmicas.

Os Exemplos 5.2.1 e 5.2.2 nos permitem conjecturar um comportamento interessante das aproximações. Note que os problemas propostos ((4.2) e (4.1)) diferem apenas por um termo  $\partial_t u$  na fronteira. A presença da derivada temporal  $\partial_t u$  desempenha um fator crítico na influência das aproximações. De fato, como podemos ver nas Imagens 24 e 25, observamos que as aproximações divergem consideravelmente nas proximidades da fronteira, enquanto o comportamento no interior do domínio se mantém semelhante. Este estudo de caso não apenas enriquece nossa compreensão da dinâmica das EDPs com diferentes condições de contorno, mas também oferece “insights” para aplicações de modelos mais complexos no futuro.

### 5.3 Conclusão

Em síntese, este trabalho concentrou-se na resolução de equações diferenciais parciais, com destaque ao problema de Wentzell. Para compreender melhor a abordagem necessária para resolver o problema de Wentzell, exploramos alguns casos específicos, incluindo as equações de Laplace/Poisson e a equação do calor, ambas com condições de contorno de Robin.

Utilizando ferramentas de análise funcional, como espaços de Hilbert, o Teorema de Lax-Milgram e espaços de Sobolev, formulamos adequadamente os problemas variacionais para cada EDP, com o objetivo de obter suas soluções fracas. Como subproduto dessa abordagem, sob certas condições de regularidade das soluções fracas, demonstramos a viabilidade de métodos numéricos para aproximar as soluções de forma precisa e eficiente. Optamos pelos métodos de elementos finitos, essencialmente por duas razões. A primeira é que os métodos de elementos finitos baseiam-se em problemas variacionais, principal objeto de estudo deste trabalho. A segunda razão é que tal família de métodos é a mais amplamente usada na aproximação numérica de soluções de problemas do mundo real e/ou científicos.

Para resolver a formulação fraca de equações elípticas, empregamos o método de Ritz-Rayleigh, enquanto a formulação fraca de equações parabólicas foi abordada por meio do método de Crank-Nicolson. Em ambos os métodos, utilizamos uma base global de funções afins, conhecida como base de Splines lineares, para aproximar o espaço de funções que define a formulação fraca em um espaço de dimensão finita. Essa escolha metodológica permitiu a obtenção de soluções numéricas com convergência quadrática, e isso representa um passo significativo em direção à resolução de problemas complexos regidos por EDPs com condições de contorno dinâmicas. Vale destacar a contribuição da biblioteca FEniCS, que simplificou significativamente a aplicação desses métodos nos casos bidimensionais, facilitando a implementação das relações matemáticas necessárias para a construção do método de elementos finitos.

## 5.4 Projetos futuros

Em termos de trabalhos futuros, há um vasto campo de pesquisa em modelagem matemática e simulação numérica de fenômenos físicos complexos. Novas extensões deste trabalho podem incluir a análise de problemas multidimensionais, a consideração de equações diferenciais não-lineares e a exploração de condições de contorno ainda mais complexas. A pesquisa nesta área continuará a desempenhar um papel importante na compreensão e na resolução de uma variedade de problemas do mundo real.

# A Introdução à análise funcional

## A.1 Espaços com produto interno

Assumindo a Definição 1.2.1, vimos na Seção 1.2 todo espaço vetorial com produto interno possui uma propriedade importante denominada desigualdade de Cauchy-Schwarz.

**Proposição A.1.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** *Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  um produto interno em  $V$  com a norma  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ . Então,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

**Demonstração.** Pela definição produto interno, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos que  $\|x - \lambda y\|^2 \geq 0$ . Por outro lado, da definição de norma:

$$\begin{aligned} \|x - \lambda y\|^2 &= \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x - \lambda y \rangle - \lambda \langle y, x - \lambda y \rangle \\ &= \|x\|^2 - \lambda \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \|x - \lambda y\|^2 &= \|x\|^2 - \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \right) \langle x, y \rangle - \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \right) \langle y, x \rangle + \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \right|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, segue que  $\|x\|^2 \geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \implies \|x\|^2 \|y\|^2 \geq |\langle x, y \rangle|^2$ .

□

Vimos acima que um produto interno induz uma norma, que é sempre a norma que usamos no espaço com produto interno, a menos que seja declarado o contrário. A proposição seguinte fornece uma caracterização de uma tal norma.

**Proposição A.1.2.** *Todo espaço normado com norma  $\|\cdot\|$  induzida por um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  satisfaz a **lei do paralelogramo**:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in V.$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).
\end{aligned}$$

□

**Observação A.1.1.** Se uma norma for proveniente de um produto interno, podemos recuperar o produto interno através da **identidade de polarização**:

$$4 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

Logo, em qualquer espaço vetorial normado, pode existir no máximo um produto interno que gera a norma.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz e a lei do Paralelogramo são ferramentas de extrema importância. Como exemplo, a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos possibilita provar que o produto interno preserva a continuidade.

**Proposição A.1.3.** *Sejam  $U$  um espaço com produto interno e  $(x_n)$  e  $(y_n)$  duas seqüências em  $U$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in U$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in U$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$ .*

**Demonstração.** Note que a desigualdade triangular nos dá que

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\
&\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|,
\end{aligned}$$

e a desigualdade de Cauchy-Schwarz [A.1.1](#) nos dá que

$$0 \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) = 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - y) = 0$ . Portanto pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = 0.$$

□

**Definição A.1.1.** Dizemos que dois elementos  $x$  e  $y$  de um espaço com produto interno  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  são **ortogonais**, indicado por  $x \perp y$ , se  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Definição A.1.2.** Seja  $U$  um subconjunto de um espaço com produto interno  $V$ . Definimos o **complemento ortogonal** de  $U$  em  $V$  como sendo o conjunto

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U\}$$

## A.2 Espaços de Banach e Hilbert

Com base na Definição 1.2.2, as subseções seguintes serão dedicadas à apresentação de alguns exemplos elucidativos de espaços de Banach e espaços de Hilbert.

### A.2.1 Espaços de Banach

Relembrando, podemos dizer que um espaço de Banach é um espaço vetorial munido de uma norma que o torna completo.

**Exemplo A.2.1.** O espaço  $\mathbb{R}$  munido da norma  $\|x\| = |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  é um espaço de Banach, pois sabemos que toda sequência de Cauchy de números reais converge.

**Exemplo A.2.2.** O espaço  $\mathbb{R}^p = \{x = (x_1, \dots, x_p) \mid x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}\}$  munido da norma  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^p$  é um espaço de Banach.

De fato, ao considerarmos  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^p$  com  $n \in \mathbb{N}$  temos que cada  $x_n$  é uma  $p$ -upla de números reais, isto é,  $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(p)})$ . Como  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy, então para todo  $\varepsilon > 0$  existe algum  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n, m > n_0 \implies \|x_n - x_m\| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + (x_n^{(2)} - x_m^{(2)})^2 + \dots + (x_n^{(p)} - x_m^{(p)})^2} < \varepsilon$$

Em particular, para cada  $i = 1, 2, \dots, p$ , temos que  $n, m > n_0$  implica que  $|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| < \varepsilon$ . Isso nos mostra que cada sequência  $(x_n^{(i)})$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$  e portanto converge, pelo exemplo anterior. Podemos então definir  $x^{(i)} = \lim x_n^{(i)}$  com  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$ . Claro que  $x \in \mathbb{R}^p$ , agora nos resta mostrar apenas que este é o limite da sequência  $(x_n)$ . Para isso, tome  $\varepsilon > 0$ . Como  $x^{(i)} = \lim x_n^{(i)}$ , então para cada  $i = 1, 2, \dots, p$ , existe algum  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_i \implies |x_n^{(i)} - x^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}} \implies |x_n^{(i)} - x^{(i)}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{p}$$

Tome  $n_{\max} = \max\{n_i\}$ , com  $i = 1, 2, \dots, p$ , então

$$n > n_{\max} \implies \|x_n - x\| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x^{(1)})^2 + (x_n^{(2)} - x^{(2)})^2 + \dots + (x_n^{(p)} - x^{(p)})^2} < \sqrt{\frac{p\varepsilon^2}{p}} = \varepsilon$$

Portanto  $(x_n)$  converge para  $x$  em  $\mathbb{R}^p$ .

**Observação A.2.1.** Como o espaço normado  $\mathbb{C}$  é idêntico ao  $\mathbb{R}^2$ , segue então pelo exemplo anterior que  $\mathbb{C}$  é um espaço de Banach. Portanto,  $\mathbb{C}^p$  também é um espaço de Banach.

**Exemplo A.2.3.** O espaço vetorial das sequências de escalares absolutamente  $p$ -somáveis é denotado por  $\ell^p$ . Ou seja,

$$\ell^p = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

Tal espaço é munido de uma norma natural, dada por  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ . Além de que para  $1 \leq p < \infty$ ,  $\ell^p$  é um espaço de Banach.



**Exemplo A.2.4.** Seja  $X \subset \Omega$  um espaço de medida. Denotamos por  $L^p(X, \mu)$  o espaço vetorial das classes de equivalências das funções escalares Lebesgue-mensuráveis tais que

$$L^p(\Omega) = \left\{ \varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int |\varphi|^p d\mu < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

onde  $\mu$  denota a medida de Lebesgue em um espaço mensurável. Aqui duas funções estão na mesma classe se são iguais em quase todo ponto ( $\mu - q.t.p.$ ). Este espaço é munido de uma norma natural, dada por  $\|f\|_p = (\int |\varphi|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ . Este também é um espaço de Banach.

## A.2.2 Espaços de Hilbert

Relembrando, um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno que é completo com respeito a norma definida pelo produto interno (e é conseqüentemente um espaço de Banach).

**Exemplo A.2.5.** O caso particular do Exemplo A.2.3 com  $p = 2$

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

De fato, primeiro mostraremos que  $\ell^2$  é um espaço vetorial relativamente às operações  $x + y = (x_n + y_n)$  e  $\lambda x = (\lambda x_n)$ . Observe primeiro que caso  $x = (x_n)$  e  $y = (y_n)$  pertençam a  $\ell^2$  então a série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$  é convergente e que a convergência de uma série é simplesmente a convergência de uma seqüência de somas parciais. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \implies \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} < \infty.$$

Portanto a série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$  é convergente.

Além disso, temos que  $(x + y) \in \ell^2$ , pois

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| < \infty. \end{aligned}$$

Agora, para  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x \in \ell^2$  temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda x_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2 = \lambda^2 \|x\|^2 < \infty.$$

Assim,  $\lambda x \in \ell^2$ . Consequentemente  $\ell^2$  é um espaço vetorial.

Para mostrar que  $\ell^2$  é um espaço de Hilbert basta mostrar que  $\ell^2$  é um espaço normado completo, isto é, que toda sequência de Cauchy em  $\ell^2$  é convergente em  $\ell^2$ .

Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\ell^2$ , então fixado  $i \in \mathbb{N}$  temos para cada  $m, n \in \mathbb{N}$  que

$$|x_m^{(i)} - x_n^{(i)}| = \sqrt{(x_m^{(i)} - x_n^{(i)})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_m^{(i)} - x_n^{(i)})^2} = \|x_m - x_n\| < \varepsilon. \quad (\text{A.1})$$

Logo  $(x_n^{(i)})$  é de Cauchy. Consequentemente para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe um número real  $l_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(i)}$ . Defina  $l = (l_1, l_2, \dots, l_i, \dots)$ . Pela última desigualdade de (A.1), para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  implica que  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ , ou seja,  $\sum_{i=1}^{\infty} (x_m^{(i)} - x_n^{(i)})^2 < \varepsilon^2$ . Ao tomarmos  $m \rightarrow \infty$ , obtemos que para todo  $n > n_0$  implica que  $\sum_{i=1}^{\infty} (l_i - x_n^{(i)})^2 < \varepsilon^2$ , isto mostra que  $(l - x_n) \in \ell^2$ . Mais ainda,  $l = (l - x_n) + x_n \in \ell^2$ , pois  $\ell^2$  é espaço vetorial, e  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Portanto, toda sequência de Cauchy em  $\ell^2$  é convergente, isto é,  $\ell^2$  é um espaço de Hilbert.

**Exemplo A.2.6.** O espaço  $\ell^p$  com  $p \neq 2$  não é um espaço de Hilbert. Suponha, por absurdo, que  $\ell^p$  seja um espaço de Hilbert para todo  $p \neq 2$  natural. Considere as seguintes sequências  $x_n, y_n \in \ell^p$ :

- $x = (x_n) = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$
- $y = (y_n) = (1, -1, 0, 0, 0, \dots)$

Pela definição de  $\ell^p$  dizemos que a norma de  $(x_n)$  é dada por

$$\|x\| = (|1|^p + |1|^p + |0|^p + \dots)^{\frac{1}{p}} = (1 + 1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}, \text{ para qualquer } 1 \leq p < \infty.$$

E a norma de  $(y_n)$

$$\|y\| = (|1|^p + |-1|^p + |0|^p + \dots)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}, \text{ para qualquer } 1 \leq p < \infty.$$

Além disso temos que

$$\begin{aligned} (x + y) &= (2, 0, 0, 0, \dots) \implies \|x + y\| = (2^p)^{\frac{1}{p}} = 2 \\ (x - y) &= (0, 2, 0, 0, \dots) \implies \|x - y\| = (2^p)^{\frac{1}{p}} = 2 \\ \implies \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

E estas sequências devem satisfazer a lei do paralelogramo

$$8 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \implies 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 8$$

Então para todo  $p$  temos:

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2((2^{\frac{1}{p}})^2 + (2^{\frac{1}{p}})^2) = 8 \implies p = 2.$$

Contradição. Concluindo que caso  $p \neq 2$  o conjunto  $\ell^p$  não será um espaço de Hilbert.

### A.3 Projeção Ortogonal

O próximo teorema nos mostra que dados um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert, e  $x \in H$ , sempre há um ponto deste subespaço que minimiza a distância deste subespaço com o ponto  $x$ .

**Teorema A.3.1.** *Sejam  $U \subset H$  um subespaço vetorial fechado e  $x \in H$ . Então existe único  $\hat{a} \in U$ , tal que:*

$$\|x - \hat{a}\| = \inf\{\|x - a\| \mid a \in U\}.$$

Além disso,  $x - \hat{a} \in U^\perp$ , onde  $U^\perp = \{u \in H \mid \langle u, x \rangle = 0, \forall x \in U\}$ .

**Demonstração.** Organizamos a prova em duas partes. Na primeira provamos a existência de  $\hat{a}$  em  $U$ , e na segunda a sua unicidade. Portanto, na primeira parte mostraremos que para todo  $x \in H$ , existe  $\hat{a}$  tal que

$$d(x, \hat{a}) = \|x - \hat{a}\| = \inf\{\|x - a\| \mid a \in U\}.$$

Seja  $\delta = \inf\{\|x - a\| \mid a \in U\}$  e  $(a_n)$  em  $U \subset H$ , tal que  $\|x - a_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n}$ . Pela lei do paralelogramo (Proposição A.1.2), temos que:

$$\begin{aligned} & \|(x - a_n) + (x - a_m)\|^2 + \|(x - a_n) - (x - a_m)\|^2 = 2(\|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2) \\ \implies & \|2x - (a_n + a_m)\|^2 + \|a_n - a_m\|^2 = 2\|x - a_n\|^2 + 2\|x - a_m\|^2 \\ \implies & \|2x - (a_n + a_m)\|^2 + \|a_n - a_m\|^2 \leq 2\delta^2 + \frac{2}{n} + 2\delta^2 + \frac{2}{m} \\ \implies & \|2x - (a_n + a_m)\|^2 + \|a_n - a_m\|^2 \leq 4\delta^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} \\ \implies & \|a_n - a_m\|^2 \leq 4\delta^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 4\left\|x - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\right\|^2 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Vamos usar nessa demonstração o fato de que sempre existe um ponto mais próximo de um subconjunto convexo fechado de  $H$ . Lembramos que um conjunto  $U$  é convexo se para todo  $u, v \in U$  temos  $\lambda u + (1 - \lambda)v \in U$ , para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Já que  $U$  é um subespaço

vetorial fechado, temos que  $\lambda u + (1 - \lambda)v \in U$ ,  $\forall u, v \in U$  e  $\lambda \in [0, 1]$ , satisfazendo a definição de conjunto convexo. Logo,  $a_n + a_m \in U$  e então  $\left\|x - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\right\|^2 \geq \delta^2$ . Isso se dá pelo fato de  $U$  ser um espaço vetorial e assim  $\hat{u} = \frac{1}{2}(a_n + a_m) \implies \hat{u} \in U$ , além de  $\|x - \hat{u}\|$  ser a distância entre  $x$  e  $\hat{u}$ , e  $\delta$  ser o ínfimo das distâncias possíveis.

Pela equação A.2 temos que:

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\|^2 &\leq 4\delta^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 4\left\|x - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\right\|^2 \\ &\leq 4\delta^2 + \frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 4\delta^2 = \frac{2}{m} + \frac{2}{n} \\ &\implies \|a_n - a_m\|^2 \leq \frac{2}{m} + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Portanto  $(a_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $U$ , logo converge para  $\hat{a} \in H$ . Como  $U$  é fechado  $\hat{a} \in U$ .

Tendo mostrado que  $\hat{a} \in U$ , devemos verificar a unicidade de  $\hat{a}$ . Suponha que exista  $a^* \in U$  tal que  $\|x - a^*\| = \delta$ , com  $a^* \neq \hat{a}$ . Então

$$\left\|u - \frac{1}{2}(a^* + \hat{a})\right\| \geq \delta,$$

pela equação (A.2), temos que

$$\|a^* - \hat{a}\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \implies a^* = \hat{a}.$$

Portanto, vale a unicidade de  $\hat{a}$ .

Agora, defina  $v = x - \hat{a}$  com  $x \in H$ , mostraremos que  $v \in U^\perp$ , ou seja  $\langle v, y \rangle = 0$ ,  $\forall y \in U$ . Considere  $\|x - (\hat{a} - ty)\| = \|v + ty\|$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , podemos desenvolver a partir da definição de uma norma. Seja  $\Delta(t) = \|v + ty\|^2$ , temos que

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \|v + ty\|^2 = \langle v + ty, v + ty \rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle v, ty \rangle + \langle ty, v \rangle + \|ty\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2t \langle y, v \rangle + t^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Por construção temos que  $\Delta(t) = \|v + ty\|^2$  admite valor mínimo quando  $t = 0$ , afinal  $\|x - \hat{a}\|$  é o ínfimo das distâncias e  $\Delta(0) = \|x - \hat{a}\|^2$ . Agora, para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  podemos derivar e obter que a função admite valor mínimo apenas quando  $t = 0$  ( $\frac{d}{dt}\Delta(0) = 0$ ) e  $\langle y, v \rangle = 0$ , afinal

$$\frac{d}{dt}\Delta(t) = 2 \langle y, v \rangle + 2t\|y\|^2 \implies \frac{d}{dt}\Delta(0) = 2 \langle y, v \rangle = 0.$$

Logo  $\langle y, v \rangle = 0$ ,  $\forall y \in U$ , concluindo assim que  $v = x - \hat{a} \in U^\perp$ . □

O Teorema A.3.1 nos motiva naturalmente ao conceito de projeção ortogonal, isto é, a função  $P : H \rightarrow U$  dada por  $x \mapsto \hat{a}$  (obtido através do Teorema A.3.1) é a **Projeção Ortogonal** de  $x$  sobre  $U$ , e  $P$  satisfaz  $P^2 = P$  e  $\|P(x)\| \leq \|x\|$ .

De fato  $P^2 = P$ , afinal

$$P(P(x)) = P(\hat{a}) = \hat{a}.$$

Além disso, como  $\|x\|^2 = \|\hat{a}\|^2 + 2\langle \hat{a}, x - \hat{a} \rangle + \|x - \hat{a}\|^2 = \|\hat{a}\|^2 + \|x - \hat{a}\|^2$ , segue-se que

$$\|P(x)\|^2 = \|\hat{a}\|^2 \leq \|\hat{a}\|^2 + \|x - \hat{a}\|^2 = \|x\|^2 \implies \|P(x)\| \leq \|x\|.$$

**Definição A.3.1.** Se existe único  $\hat{a} \in U$  que minimiza a distância de  $x \in H$  a  $U$ , dizemos que  $\hat{a}$  é a **Projeção Ortogonal** de  $x$  sobre  $U$  dada pela função

$$\begin{aligned} P : H &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto \hat{a}. \end{aligned}$$

A projeção  $P$  tem as propriedades

$$P^2 = P \quad \text{e} \quad \|P(x)\| \leq \|x\|, \quad \text{para todo } x \in U.$$

**Definição A.3.2.** Se  $U = V + W$  e  $V \cap W = \emptyset$ , dizemos que  $U$  é **soma direta** de  $V$  e  $W$ , e é denotada por

$$U = V \oplus W.$$

## A.4 Teoremas de Riez e Lax-Milgram

### A.4.1 Teorema da representação de Riesz

**Teorema A.4.1. (Teorema da Representação de Riesz)** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert, e  $f$  funcional linear contínuo sobre  $H$ . Então existe um único elemento  $y \in H$  tal que  $f(x) = \langle x, y \rangle$  para todo  $x \in H$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno sobre  $H$ . Além disso,  $\|f\|_* = \|y\|_H$ .*

**Demonstração.** Organizamos a prova em 3 passos a saber: passo 1: Unicidade do representante, passo 2: Existência do representante e passo 3: Isometria.

1. Unicidade do representante.

Suponha que além de  $y \in H$ ,  $w \in H$  também satisfaz

$$f(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, w \rangle, \quad \text{para todo } x \in H.$$

Então  $\langle x, y - w \rangle = 0$  para todo  $x \in H$ . Como a igualdade precedente vale para todo  $x \in H$ , podemos tomar em particular  $x = y - w$  que nos conduz a  $\|y - w\| = 0$ , a partir da qual concluímos que  $y = w$ . Isto prova a unicidade de  $y$ .

## 2. Existência do representante.

Queremos mostrar que todo elemento  $f \in H^*$  é da forma  $f_y$  para algum  $y \in H$  onde  $f(x) := f_y(x) = \langle x, y \rangle$ , para todo  $x \in H$ . O caso  $f \equiv 0$  é trivial, sendo suficiente escolher  $y = 0$ . Assumiremos que  $f \neq 0$ . Como o funcional  $f$  é contínuo, o espaço nulo  $K = f^{-1}(0) = \text{Ker } f = \{w \in H \mid f(w) = 0\}$  é um subespaço vetorial fechado próprio de  $H$ , e conseqüentemente pelo Teorema da Decomposição Ortogonal (Teorema A.3.1), o espaço  $H$  pode ser representado na forma de soma direta ortogonal  $H = K \oplus K^\perp$ . Portanto, existe  $v \in K^\perp$  com  $\|v\| = 1$  que pode ser um candidato para representar  $f$ , pois é ortogonal ao núcleo desse funcional. Observe que o elemento  $(f(u)v - f(v)u) \in K$  para todo  $u \in H$ , afinal:

$$f(f(u)v - f(v)u) = f(u)f(v) - f(v)f(u) = 0 \implies (f(u)v - f(v)u) \in K.$$

Podemos concluir que  $\langle v, f(u)v - f(v)u \rangle = 0$  para todo  $u \in H$ , e conseqüentemente:

$$\langle v, f(u)v \rangle = \langle v, f(v)u \rangle \implies f(u) \langle v, v \rangle = \langle f(v)v, u \rangle \implies f(u) = \langle f(v)v, u \rangle,$$

para todo  $u \in H$ . Portanto, temos como representante de  $f$  em  $H$ , o elemento  $y = vf(v)$ .

## 3. Isometria.

Se  $f \neq 0$ , então  $y \neq 0$ . Logo, para  $x = y$  temos que

$$\|y\|_H^2 = \langle y, y \rangle = f(y) \leq \|f\|_* \|y\|_H.$$

Dividindo por  $\|y\|_H$  segue que  $\|y\|_H \leq \|f\|_*$ .

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz  $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \|y\|_H$ . Além disso  $\sup_{\|x\|=1} |\langle x, y \rangle| \leq \|y\|_H$ . Portanto  $\|f\|_* \leq \|y\|_H$ . Se  $\|y\|_H \leq \|f\|_*$  e  $\|f\|_* \leq \|y\|_H$  segue que  $\|f\|_* = \|y\|_H$  que é o resultado desejado.

□

**Observação A.4.1.** O teorema de Riesz fornece uma aplicação de  $H^*$  para  $H$  que associa a cada  $f \in H^*$  o único  $y \in H$  tal que  $f(x) = \langle y, x \rangle$  para todo  $x \in H$ . Pelo Teorema da Representação de Riesz, essa aplicação é uma isometria linear bijetiva.

## A.4.2 Teorema de Lax-Milgram

O Teorema de Lax-Milgram pode ser interpretado como uma forma do Teorema de Riesz, mas com uma forma bilinear em lugar do produto interno. Admitindo as definições dadas por (1.13), (1.14) e (1.15), podemos enunciar um caso “mais forte” do Teorema de Lax-Milgram, por exigir mais hipóteses. O chamaremos de Teorema de Lax-Milgram simétrico.

**Corolário A.4.1. (Lax-Milgram Simétrico)** *Seja  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear limitada, coerciva e simétrica. Então, para todo  $f \in H^*$ , existe único  $u_f \in H$ , tal que*

$$b(u_f, v) = f(v), \quad \forall v \in H.$$

**Demonstração.** Perceba que por  $b$  ser coerciva e simétrica, então  $b$  satisfaz os axiomas de produto interno. Dado  $u \in H$ , considere

$$\begin{aligned} b_u : H &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto b(u, v) = b_u(v) \end{aligned}$$

que é um funcional linear limitado. De fato  $b_u \in H^*$ , já que dados  $v_1, v_2 \in H$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$b_u(\alpha v_1 + v_2) = b(u, \alpha v_1 + v_2) = \alpha b(u, v_1) + b(u, v_2) = \alpha b_u(v_1) + b_u(v_2).$$

E por  $b(u, v)$  ser limitada, fixado  $u \in H$  existe  $\beta > 0$ , tal que

$$|b_u(v)| = |b(u, v)| \leq \beta \|u\|_H \cdot \|v\|_H = K \|v\|_H, \text{ com } K = \beta \|u\|_H.$$

Então, fixado  $u \in H$  temos pelo Teorema de Riesz que existe um único  $w_{b_u} \in H$  tal que  $b_u(v) = \langle w_{b_u}, v \rangle$  para todo  $v \in H$ .

Devemos encontrar  $u_f \in H$  tal que

$$b(u_f, v) = \langle u_f, v \rangle = f(v), \forall v \in H.$$

De fato, novamente pelo Teorema de Riesz existe um único  $C_f \in H$  tal que

$$f(v) = \langle C_f, v \rangle, \forall v \in H.$$

Assim, das duas últimas expressões acima, segue que  $u_f = C_f$ . Consequentemente,  $b(u_f, v) = \langle u_f, v \rangle = f(v)$ ,  $\forall v \in H$ .

□

**Observação A.4.2.** A solução  $u := u_f$  em no Teorema A.4.1 satisfaz

$$\|u\|_H \leq \frac{\|f\|_*}{\beta}. \tag{A.3}$$

De fato, pela coercividade de  $b$  temos que para qualquer  $u \in H$

$$\beta \|u\|_H^2 \leq b(u, u) = f(u) \leq \|f\|_* \|u\|_H \implies \beta \|u\|_H^2 \leq \|f\|_* \|u\|_H \implies \|u\|_H \leq \frac{\|f\|_*}{\beta}.$$

Importa ressaltar que a desigualdade em (A.3) representa um resultado de dependência contínua com respeito aos dados para o problema  $b(u_f, v) = f(v)$  para todo  $v \in H$ . Realmente, dados  $f_1, f_2 \in H^*$ , denotemos por  $u_1, u_2 \in H$  as correspondentes

soluções garantidas pelo Teorema A.4.1 dos problemas  $b(u_1, v) = f_1(v)$  para todo  $v \in H$  e  $b(u_2, v) = f_2(v)$  para todo  $v \in H$ . Então, segue-se que  $u := u_1 - u_2 \in H$  é portanto a única solução de  $b(u, v) = (f_1 - f_2)(v)$  para todo  $v \in H$ , de modo que (A.3) implica em

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{\|f_1 - f_2\|_*}{\beta}.$$

A desigualdade precedente mostra que a estabilidade da solução de  $b(u_f, v) = f(v)$ , para todo  $v \in H$ , depende fortemente do recíproco da constante de elipticidade  $\beta$ . Em outras palavras, quanto maior a constante  $\beta$ , melhor será sua estabilidade.

O próximo lema irá nos auxiliar em uma das etapas da demonstração do Teorema de Lax-Milgram.

**Lema A.4.1.** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $K \neq \emptyset$  um subconjunto qualquer de  $H$ . O subespaço vetorial gerado por  $K$  é denso em  $H$  se, e somente se,  $K^\perp = \{0\}$ .*

**Demonstração.** Suponha que o subespaço gerado por  $K$  é denso em  $H$  e  $x \in K^\perp$ . É preciso mostrar que  $x = 0$ . De fato, se  $x \in K^\perp$  então  $x \in H = \overline{K}$ . Logo, existe uma sequência  $(x_n)$  em  $K$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Agora, como  $x \in K^\perp$ , segue que  $\langle x_n, x \rangle = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pela Proposição A.1.3, resulta que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = \langle x, x \rangle$ . Pela unicidade do limite, segue que  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$ , ou seja,  $x = 0$ . Portanto,  $K^\perp = \{0\}$ .

Reciprocamente, suponha que  $K^\perp = \{0\}$ . Então, conforme a Observação A.3.2 podemos escrever

$$H = \overline{K} \oplus \overline{K^\perp}.$$

Como  $\overline{K^\perp} = \{0\}$ , segue que  $H = \overline{K}$ .

□

**Teorema A.4.2. (Lax-Milgram)** *Seja  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear limitada e coerciva. Então, para todo  $f \in H^*$ , existe único  $u_f \in H$ , tal que*

$$b(u_f, v) = f(v), \quad \forall v \in H.$$

**Demonstração.** Inicialmente faremos uma construção análoga a feita na demonstração do Corolário A.4.1. Contudo, pelo fato da forma bilinear não poder mais ser representada diretamente por um produto interno, precisaremos de um resultado omitido na demonstração de sua “versão simétrica”.

- **Uma maneira de representar a forma bilinear como produto interno.**

Fixado  $u \in H$ ,  $b_u(v) = b(u, v)$  define um funcional de  $H^*$ . Pelo Teorema de Riesz, existe único  $w_{b_u} \in H$  tal que

$$b_u(v) = \langle w_{b_u}, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$



Isto define um operador  $A$  dado por

$$\begin{aligned} A : H &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto w_{b_u} = A(u) \end{aligned}$$

Então

$$b(u, v) = \langle A(u), v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

• **O que sabemos do operador  $A$ ?**

i)  $A$  é um operador linear limitado.

De fato  $A$  é linear já que dados  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $u_1, u_2 \in H$  temos

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha u_1 + u_2), v \rangle &= b(\alpha u_1 + u_2, v) \\ &= \alpha b(u_1, v) + b(u_2, v) \\ &= \alpha \langle A(u_1), v \rangle + \langle A(u_2), v \rangle \\ &= \langle \alpha A(u_1) + A(u_2), v \rangle. \end{aligned}$$

$A$  é limitado, afinal, dado  $u \in H$

$$\|A(u)\|_H^2 = \langle A(u), A(u) \rangle = b(u, A(u)) \leq \alpha \|u\|_H \|A(u)\|_H \implies \|A(u)\|_H \leq \alpha \|u\|_H.$$

ii)  $A$  é uma bijeção.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e por  $b$  ser coerciva, temos

$$\|A(u)\|_H \|u\|_H \geq |\langle A(u), u \rangle| = |b(u, u)| \geq \beta \|u\|_H^2 \implies \|A(u)\|_H \geq \beta \|u\|_H.$$

Logo,  $A$  é injetiva, pois  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ .

$A$  é sobrejetiva: agora veremos que  $\text{Im}(A) = H$ . Essa demonstração consiste em dois passos

- $\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)}$ .
- $H \subset \overline{\text{Im}(A)}$  ( $H = \overline{\text{Im}(A)}$ ).

Denote  $w_{b_u} = w$ . Para mostrarmos que  $\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)}$ , basta supormos uma seqüência de Cauchy  $w_n \in \text{Im}(A)$  com  $w_n \longrightarrow w$ . Por definição de imagem, existe uma seqüência de pontos  $u_n \in H$  tal que  $A(u_n) = w_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\|u_n - u_m\|_H \leq \frac{1}{\beta} \|A(u_n) - A(u_m)\|_H = \frac{1}{\beta} \|w_n - w_m\|_H.$$

Como  $(w_n)$  é uma seqüência de Cauchy, segue que  $(u_n)$  também será uma seqüência de Cauchy e pela completude de  $H$ , existe  $u \in H$  tal que  $u_n \longrightarrow u$ .

Por outro lado, temos que se  $A$  é um operador linear e limitado, ou seja,  $A$  é contínuo. Logo

$$w_n = A(u_n) \longrightarrow A(u) = w.$$

Portanto  $w \in \text{Im}(A)$ . Assim  $\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)}$ .

Agora, mostraremos que  $\text{Im}(A)$  é denso em  $H$ . Como  $\text{Im}(A)$  é um subespaço vetorial fechado de  $H$  o Teorema A.3.1 nos garante a existência de  $v \in H$  ortogonal a  $\text{Im}(A)$ , isto é

$$0 = \langle A(u), v \rangle = b(u, v)$$

para todo  $u \in H$ .

Em particular considerando  $u = v$ , obtemos

$$b(v, v) = 0$$

e pela coercividade de  $b$

$$\beta \|v\|^2 \leq b(v, v) = 0,$$

segue que  $v = 0$ . Assim pelo lema A.4.1 temos que o conjunto  $\text{Im}(A)$  é denso em  $H$ . Logo  $\text{Im}(A) = H$ , ou seja,  $A$  é sobrejetiva. Portanto  $A$  é bijetiva.

• **Consequência**

$A : H \longrightarrow H$  e o mapeamento de Riesz  $C : H \longrightarrow H^*$  são isomorfismos, como sugere a Figura 26.

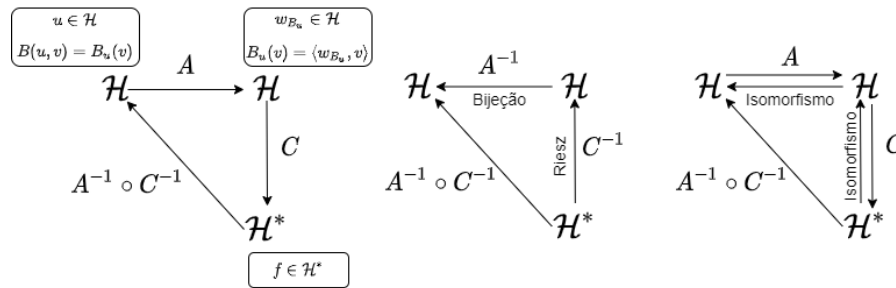


Figura 26 – Interpretação dos operadores – Teorema de Lax-Milgram.

Fixado  $f \in H^*$ , o candidato a solução é  $u_f = A^{-1}(C^{-1}(f))$ .

$$b(u_f, v) = \langle A(u_f), v \rangle = \langle A(A^{-1}(C^{-1}(f))), v \rangle = \langle C^{-1}(f), v \rangle = f(v).$$

• **Existência da Solução**

Fixado  $u \in H$ ,  $b_u(v) = b(u, v)$  define um funcional linear em  $H^*$ . Pelo Teorema de Riesz

$$b(u, v) = \langle A(u), v \rangle, \forall v \in H,$$

e  $A$  é um operador linear, limitado e bijetivo. Então, para todo  $f \in H^*$ , o Teorema de Riesz garante a existência e unicidade de um  $y \in H$  tal que  $f(v) = \langle y, v \rangle$ . Finalmente, considere  $u_f = A^{-1}(y)$ . Concluimos que

$$b(u_f, v) = \langle A(A^{-1}(y)), v \rangle = \langle y, v \rangle = f(v).$$

- **Unicidade da Solução**

Suponha que existam  $u_1, u_2 \in H$  tais que para todo  $f \in H^*$  temos

$$b(u_1, v) = f(v) = b(u_2, v), \quad \forall v \in H \implies b(u_1 - u_2, v) = 0.$$

Substituindo  $v = u_1 - u_2$ , segue pela coercividade de  $b$  que

$$\begin{aligned} \beta \|u_1 - u_2\|_H^2 &\leq b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \\ \implies \beta \|u_1 - u_2\|_H^2 &\leq 0 \implies u_1 - u_2 = 0 \implies u_1 = u_2. \end{aligned}$$

□

## A.5 Espaços de Sobolev

Assumiremos a construção feita na Subseção 1.2.3, a qual nos conduz a Definição 1.2.9. Nesta seção apresentaremos alguns resultados e exemplos associados às derivadas fracas e aos espaços de Sobolev.

### A.5.1 Derivada fraca

O conceito derivada fraca estende o conceito clássico de derivada, com a particularidade de preservar a fórmula de integração por partes. Além disso, exigindo apenas que a função pertença a  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , podemos calcular derivadas que não são calculadas no sentido clássico.

**Observação A.5.1.** Dizemos que  $f$  está **localmente** em  $L^p(\Omega)$ , ou  $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ , se  $f \in L^p(K)$  para todo  $K \subset \Omega$  compacto.

**Exemplo A.5.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $x \mapsto |x|$  a função módulo na reta.

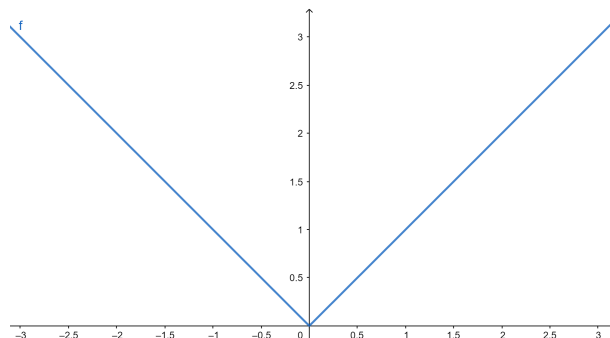


Figura 27 – Função módulo na reta.

Podemos listar algumas particularidades da função  $f$ .

- i.**  $f$  não é derivável em  $\Omega = \mathbb{R}$ .
- ii.**  $f \notin L^1(\Omega)$ .
- iii.**  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ .
- iv.**  $f$  admite derivada fraca.

i) De fato  $f$  não é derivável em  $\Omega = \mathbb{R}$ , o **quociente de Newton** nos dá que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0^+ + h) - f(0^+)}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0^- + h) - f(0^-)}{h}.$$

ii) A Figura 27 gera uma boa interpretação geométrica do porquê  $f \notin L^1(\Omega)$ . O fato decorre pela área abaixo da curva não convergir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k |x| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^0 -x dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k x dx = \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 = \infty.$$

iii) Como  $|f(x)| = |x|$  é contínua para todo  $x$  no compacto  $K \subset \Omega$ , existe  $M = \max\{|f(x)| \mid \forall x \in K\}$ . Consequentemente:

$$\int_K |f(x)| dx \leq \int_K M dx = M\mu(K) < \infty. \quad \text{Portanto } f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

iv) Por fim, a derivada fraca de  $f$  é dada pela função  $\text{sgn} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

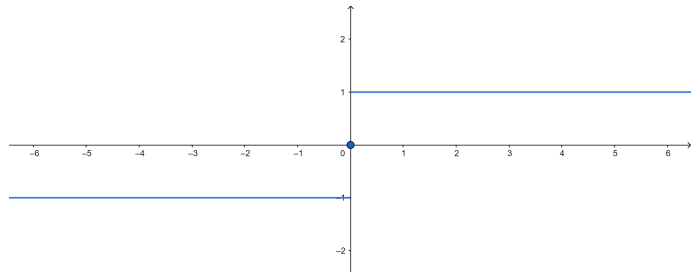


Figura 28 – Derivada fraca da função módulo na reta.

Seja  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{sgn}(x)\varphi(x) dx &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \\ &= - \left( x\varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x) dx \right) + x\varphi(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x\varphi'(x) dx \\ &= \int_{\Omega} |x|\varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

**Observação A.5.2.** A escolha de  $f$  no Exemplo A.5.1 não foi por acaso. Este é um importante exemplo que nos ajuda ter melhor compreensão dos objetos apresentados. Além de que nos itens *ii)* e *iii)*, estamos explicitando um exemplo em que  $L^1(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , mas  $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \not\subset L^1(\Omega)$  ( $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  só ocorre quando  $\Omega$  for compacto). Isso mostra a maior generalidade de  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , e por isso exigimos  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  em 1.2.9.

**Exemplo A.5.2.** Sejam  $\Omega = (0, 2)$  e

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Dada  $\varphi \in C_c^\infty(0, 2)$

$$\begin{aligned} - \int_0^2 u(x)\varphi'(x) dx &= - \int_0^1 x\varphi'(x) dx - \int_1^2 \varphi'(x) dx \\ &= -[x\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x) dx - \varphi(2) + \varphi(1) \\ &= -\varphi(1) + \varphi(1) - \varphi(2) + \int_0^1 \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

sendo que  $\varphi(2) = 0$  pois o suporte de  $\varphi$  está contido em  $(0, 2)$ . Logo

$$- \int_0^2 u(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 \varphi(x) dx$$

Portanto a derivada fraca de  $u(x)$  é dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

O próximo teorema nos garante que se  $f$  admite derivada fraca, então a derivada fraca de  $f$  é única. Contudo, faremos uso do seguinte lema:

**Lema A.5.1.** *Seja  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad \text{Então, } f = 0, \mu - q.t.p.$$

**Teorema A.5.1.** *Sejam  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Se  $g$  e  $h$ , ambas em  $L_{loc}^1(\Omega)$ , são as  $\alpha$ -ésimas derivadas fracas de  $f$ . Então,  $g = h$   $\mu - q.t.p.$*

**Demonstração.** Dada  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Pelas hipóteses do teorema, se  $g$  e  $h$  são ambas  $\alpha$ -ésimas derivadas fracas de  $f$ , então

$$\int_{\Omega} g\varphi dx = (-1)^\alpha \int_{\Omega} f\partial^\alpha \varphi dx = \int_{\Omega} h\varphi dx.$$

Então

$$\int_{\Omega} g\varphi dx - \int_{\Omega} h\varphi dx = \int_{\Omega} (g - h)\varphi dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Portanto, pelo Lema A.5.1, temos que  $g - h = 0$   $\mu - q.t.p.$ , logo  $g = h$ .

□

## A.5.2 Espaços de Sobolev

Conforme a Definição 1.2.10, o espaço  $W_0^{k,p}(\Omega)$  pode ser interpretado informalmente como o espaço das funções  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  que se anulam na fronteira

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k \text{ e } f = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

**Teorema A.5.2.** *Os espaços  $C^\infty(\Omega)$  e  $C_c^\infty(\Omega)$  são densos em  $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

**Teorema A.5.3. Desigualdade de Poincaré** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Então existe uma constante positiva  $C = C(n, \Omega)$  tal que para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$  nós temos*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (\text{A.4})$$

**Demonstração.** Pelo Teorema A.5.2,  $H_0^1(\Omega) \subset \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ . Isso significa que podemos provar para  $u \in C_c^\infty(\Omega)$  que, por densidade, o mesmo resultado valerá para  $u \in H_0^1$ .

Sem perda de generalidade como  $\Omega$  é limitado, suponha que  $\text{supp}(u)$  esteja “exclusivamente no primeiro quadrante”, isto é

$$u(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ caso ao menos um } x_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, n$$

em particular utilizaremos que  $u(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) = 0$ . Como  $u \in C_c^\infty(\Omega)$ , podemos utilizar do Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} |u(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| &= \left| \int_0^{x_i} \partial_i u(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \right| \\ &\leq \int_0^{x_i} |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)| dt. \end{aligned}$$

Sendo  $f(t) = 1$ ,  $g(t) = |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|$  na Desigualdade de Cauchy-Schwarz e  $a = \sup\{|x_i| \in \Omega \mid i = 1, \dots, n\}$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)| dt &\leq \left( \int_0^a 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Consequentemente:

$$|u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 \leq a \int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt.$$

Integrando novamente

$$\int_0^a |u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt \leq a^2 \int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt. \quad (\text{A.5})$$

Ao integrarmos sobre as demais variáveis, obtemos

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq a^{n+1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Portanto

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

□

**Observação A.5.3.** No passo onde obtemos a Equação (A.5) temos do lado direito uma integral dupla

$$a \int_0^a \left( \int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt \right) dt.$$

Contudo, a integral de dentro será constante ao substituirmos os limites de integração, obtendo assim que se

$$\int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt = K$$

então

$$a \int_0^a \left( \int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt \right) dt = a \int_0^a K dt = a^2 K = a^2 \int_0^a |\partial_i u(x_1, x_2, \dots, t, x_n)|^2 dt.$$

**Corolário A.5.1.** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Então existe uma constante positiva  $C = C(n, \Omega)$  tal que para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$  nós temos*

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (\text{A.6})$$

**Demonstração.** Pela Desigualdade de Poincaré existe  $C = C(n, \Omega)$  constante, tal que:

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \implies \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \implies \|u\|_{H^1} \leq (C+1) \|\nabla u\|_{L^2}.$$

□

## Referências

- 1 KOVACS, B. *Numerical analysis of parabolic problems with dynamic boundary conditions*. [S.l.]: IMA Journal of Numerical Analysis, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 1, 21, 83 e 84.
- 2 MIRANVILLE, C. M. A. *Qualitative and Quantitative Analysis for the Mathematical Models of Phase Separation and Transition. Applications*. [S.l.]: AIMS - American Institute of Mathematical Sciences, 2020. Citado na página 2.
- 3 LAX, P. D. The formation and decay of shock waves. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 79, n. 3, p. 227–241, 1972. Citado na página 2.
- 4 LARSSON, V. T. S. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 6 vezes nas páginas 2, 23, 52, 53, 59 e 64.
- 5 LOPES, P. T. P. *Notas de Aula, Curso de Espaços de Hilbert e Equações Diferenciais Parciais*. São Paulo: USP, 2022. Citado 6 vezes nas páginas 2, 8, 14, 29, 35 e 36.
- 6 EVANS, L. C. *Partial Differential Equations, Volume 19 de Graduate studies in mathematics*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. Citado 4 vezes nas páginas 2, 19, 58 e 73.
- 7 ARENDT, K. U. W. *Partial Differential Equations: An Introduction to Analytical and Numerical Methods (Graduate Texts in Mathematics, 294)*. 1st ed. 2023. ed. [S.l.]: Springer, 2023. Citado 8 vezes nas páginas 2, 8, 20, 21, 25, 56, 58 e 73.
- 8 BREZIS, H. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. France: Springer, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 2, 8, 15 e 21.
- 9 PEIXOTO, P. *Modelagem de dispersão de poluentes em reservatórios de água*. 2022. Citado na página 5.
- 10 LIU, I.-S. et al. *Continuum mechanics*. [S.l.]: Springer, 2002. v. 5. Citado na página 6.
- 11 BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley, 1995. Citado na página 9.
- 12 YAGI, A. *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*. [S.l.]: Springer, 2010. Citado na página 20.
- 13 DAUTRAY, J.-L. L. R. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 5*. France: Springer, 2000. Citado na página 21.
- 14 YOSIDA, K. *Functional Analysis*. 6st ed. 1980. ed. [S.l.]: Springer, 1980. Citado na página 23.
- 15 SVANSTEDT, N. E. M. *Notas de Aula, Kf1 - Applied Mathematics, TMA 225*. University of Gothenburg: Chalmers, 2010. Disponível em: <<http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma225/1011/indexe.html>>. Citado na página 28.



- 16 CIARLET, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. [S.l.]: SIAM, 2002. Citado na página 29.
- 17 LARSON, F. B. M. G. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. [S.l.]: Springer, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 35.
- 18 BURDEN J. DOUGLAS FAIRES, A. M. B. R. L. *Análise Numérica, ed 10*. Ohio: Cengage, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 29, 32, 42 e 59.
- 19 LIU, M. R. e I.-S. *INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2020. Disponível em: <[http://www.im.ufrj.br/images/noticias/Ebook\\_Mauro\\_Liu.pdf](http://www.im.ufrj.br/images/noticias/Ebook_Mauro_Liu.pdf)>. Citado na página 42.
- 20 SANTOS, I. *Notas de Aula, Curso de Elementos Finitos - 2018/2*. UFES, 2018. Disponível em: <<https://blog.ufes.br/isaacsantos/ensino/topicos-avancados-de-elementos-finitos/>>. Citado na página 42.
- 21 LOGG, K.-A. M. e G. N. W. A. *The FEniCS Book - Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. [S.l.]: Springer, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 50.
- 22 GRISVARD, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Boston: Pitman, 1985. Citado na página 53.
- 23 STRAUSS, W. A. *Partial Differential Equations, ed 2*. Brown University: Wiley, 2007. Citado na página 75.
- 24 ESCHER, J. *Nonlinear elliptic systems with dynamic boundary conditions*. [S.l.]: Mathematische Zeitschrift - Springer, 1992. Citado na página 85.
- 25 HINTERMANN, T. *Evolution equations with dynamic boundary conditions*. [S.l.]: University of Zurich, 1989. Citado na página 85.