Atratores *pullback* para uma equação parabólica semilinear com condições de fronteira de Neumann homogêneas e domínios variando com o tempo

Lucas Galhego Mendonça

Tese de Doutorado apresentado
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo.

Programa: Matemática Aplicada
Orientadora: Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão

O aluno em questão recebeu auxílio financeiro do CNPq.

São Paulo, dezembro de 2023.

Atratores *pullback* para uma equação parabólica semilinear com condições de fronteira de Neumann homogêneas e domínios variando com o tempo

Esta é a versão corrigida da tese elaborada pelo candidato Lucas Galhego Mendonça, tal como submetida e aprovada pela comissão julgadora.

Comissão Julgadora

- Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão - UNIFESP
- Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira - IME
- Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB
- Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento - UFScar
- Profa. Dra. Pricila da Silva Barbosa - UTFPR

Agradecimentos

Queria começar agradecendo a espiritualidade e a Deus por ter me amparado em todo o curso deste doutorado e me proporcionou a oportunidade de terminar esse ciclo da minha vida.

Gostaria de agradecer a minha orientadora, Gleiciane, parceira de longa data, uma pessoa justa, humana e genial, que me acompanha e me incentiva desde o meu primeiro contato com a pesquisa, não existem palavras que definem a gratidão que tenho por ela, o tempo que ela doou para a minha história vai ficar eternamente guardado no que é de mais importante para mim.

Nesse mesmo sentido também gostaria de agradecer a minha família, em especial, a minha mãe e tia, Vilma e Sandra, que me apoiam e estão ao meu lado desde que eu me entendo por indíviduo e fazem parte de muitas peças do quebra-cabeça da minha vida.

Quando penso nesse trabalho e todo o processo no qual ele foi construído, existem várias pessoas e grupos que foram fundamentais no início, no processo e agora na eminência do fim, uma delas é o Flank, o qual conversou, concendeu um tempo precioso e fundamental para a execução deste trabalho, foram várias tardes que ficamos conversando, eu, ele e a Gleiciane, sobre as formas de entender o problema aqui exposto. Também no sentido de doação de tempo e auxílios a esta pesquisa, gostaria de agradecer ao Marcelo e ao Rodiak que num momento crítico estiveram disponíveis para ceder um tempo pontual, mas fundamental, para conversar sobre a continuidade deste trabalho. Acredito que os laços e a construção das relações humanas é o que torna o ser humano tão incrível, e doar seu tempo para ajudar a consolidar uma outra história que não é diretamente a sua é a forma mais genuína de ser humano, serei eternamente grato.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer a todos os meus amigos, as pessoas que fizeram parte da minha história e me acompanharam de alguma forma, sendo um funcionário da USP ou um amigo intímo, em especial, gostaria de agradecer ao pessoal que dividiram a esfera social da música e da bateria que com certeza foi o meu refúgio para todos os momentos difíceis.

Resumo

Mendonça, L.G. **Atratores *pullback* para uma equação parabólica semilinear com condições de fronteira de Neumann homogêneas e domínios variando com o tempo**. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Neste trabalho estamos interessados em estudar uma equação diferencial parcial parabólica semilinear com condições de fronteira de Neumann homogêneas e domínios variando com o parâmetro tempo. Vamos verificar a existência e unicidade de soluções dessa equação e provar a existência de atratores *pullback*.

Palavras-chave: equação parabólica semilinear, domínios variando com o tempo, Neumann homogêneo, atratores *pullback*.

Abstract

Mendonça, L.G. **Pullback attractors for a semilinear parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions and time-varying domains**. PHd Project - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

In this research we are interested in studying a semilinear parabolic partial differential equation with homogeneous Neumann boundary conditions and time-varying domains. We will verify the existence and uniqueness of solutions for this equation and we will prove the existence of *pullback* attractors.

Keywords: semilinear parabolic equation, time-varying domains, homogeneous Neumann, pullback attractors.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto histórico

As Equações Diferenciais é uma área da Matemática que surgiu junto com o Cálculo e suas aplicações nas Ciências Naturais, principalmente, na Mecânica Clássica, já a Teoria Geométrica de Equações Diferenciais, Sistemas Dinâmicos, Equações Diferenciais Parciais e Funcionais (E.D.P. e E.D.F.) e outras subáreas desenvolvem até hoje diferentes técnicas e abordagens para estudar, tanto de forma abstrata, quanto de forma aplicada, os diferentes problemas que surgem devido ao avanço tecnológico.

Uma recorrente busca do avanço tecnológico é a habilidade de previsão de eventos, essa habilidade, afeta de forma brusca as escolhas e as ações efetivas da humanidade, para isso as Equações Diferenciais são amplamente utilizadas como ferramenta para a modelagem matemática de fenômenos e entender o comportamento dessas equações atinge diretamente essa habilidade de prever eventos, e consequentemente, molda as ações do movimento político, social, econômico e científico da sociedade moderna.

Em geral, resolver um problema de Equações Diferenciais com condições de fronteira consiste em exibir uma função que satisfaz as condições de fronteira, as condições iniciais e a equação diferencial do problema, todavia, nem sempre é possível exibir uma função matemática específica que descreve a solução do problema, e por isso, uma outra abordagem é necessária: a teoria qualitativa das Equações Diferenciais.

Como o próprio nome sugere, com a teoria qualitativa é possível fazer inferências sobre às propriedades da solução, dentre elas: o comportamento assintótico, isto é, saber qual o comportamento da solução em tempos grandes; a limitação da solução; a existência de conjuntos atratores e entre outras características. Assim, apesar de não ser possível exibir a solução do problema, ainda é possível responder algumas perguntas e inferir previsões.

A teoria qualitativa obteve um grande avanço com os estudos de Henry Poincaré e outros matemáticos em meados do século XIX, aproximadamente em 1800, e no Século XX, a teoria das Equações Funcionais e Sistemas Dinâmicos obtiveram grandes avanços, principalmente com os trabalhos de Jack Hale.

Apesar de jovem, a teoria qualitativa das Equações Diferenciais Parciais está bem estruturada e subsidiada pelos resultados da Análise Funcional e Teoria de Operadores, as quais podemos citar as bibliografias [1, 8, 16, 17, 27, 28, 29]. Em específico, a teoria de Equações Diferenciais Parciais (E.D.P's) Parabólicas vista pela perspectiva da Análise Funcional e da Teoria de Operadores, apesar de ser recente, possui diversos resultados quando olhamos para o problema como uma equação de evolução em um espaço de dimensão infinita, por exemplo, de Banach, isto é, reescrevemos de alguma forma o problema parabólico original como uma equação que faz sentido em algum espaço de Banach, na qual, futuramente, denominaremos de formulação abstrata do problema, e a resposta desse problema abstrato é algum sistema dinâmico envolvendo o processo de evolução obtido desse problema e o espaço de Banach utilizado. Dentre os diversos resultados, vale ressaltar novamente as principais bibliografias sobre este assunto que serão usadas neste trabalho [3, 9, 10, 15, 16, 17, 27, 28].

Além disso, nos atentamos as classificações do nosso processo, isto é, ao ver as Equações Diferenciais Parciais como um sistema dinâmico, dentro das diversas técnicas, nos atentamos a duas classificações importantes no que tange o processo de evolução: autônomos e não autônomos.

A teoria que estuda os problemas autônomos e os processos de evolução autônomos é a de semigrupos, que pode ser encontrada em [10, 23].

Neste trabalho, estamos interessados em estudar um problema abstrato não autônomo e não linear, bem como os processos não autônomos, cujas propriedades são bem semelhantes a dos semigrupos, ou melhor dizendo, são processos que generalizam a ideia de semigrupo (abrindo a mão de algumas propriedades). Os principais resultados dessa teoria que vamos utilizar são discutidos em [9, 11, 12, 13, 23], outras bibliografias pioneiras podem ser obtidas nos textos de Kato e Sobolevskii como em [25], contudo, para esse trabalho, os artigos acima compilam todas as informações necessárias de forma pragmática, objetiva e suficiente. Além disso, também utilizaremos a teoria de atratores *pullback* para estudar a existência de atratores e o comportamento assintótico do nosso problema. Essa última pode ser encontrada, principalmente, em [9, 23].

1.2 Domínio variando com o tempo

Problemas com domínio variando com um parâmetro, que não é o tempo, foram considerados por diversos autores. Por exemplo, em [6, 24], os autores estudaram continuidade de atratores, no entanto, inicialmente, aplicaram a técnica de [18] para reescrever o problema original, que está posto em um domínio perturbado em algum domínio fixo. Já em [4, 5], os autores utilizaram outra técnica, o conceito de E-convergência, que tem como ingrediente chave o uso de operadores de extensão, para poder comparar funções ou operadores definidos em espaços diferentes e continuar com os domínios variando. Neste trabalho vamos optar, em algum sentido, pela técnica de [18].

O trabalho [14] é um dos primeiros sobre o tema de problemas com domínio variando com o parâmetro tempo. Nesse artigo, o autor discute uma equação parabólica de segunda ordem com condições de fronteira mista (ou até mais geral) com um termo não linear e usa como domínio variável com o tempo o que ele chama de domínio quase cilíndrico, caracterizado por ter o comportamento cilíndrico quando $t \to \infty$, nessa primeira parte ele estabelece as questões do comportamento assintótico das soluções. Numa segunda parte, estuda um problema de qualquer ordem em um domínio quase cilíndrico a fim de também estudar o comportamento assintótico. Dentro os resultados demonstrados, o autor conclui que as soluções convergem para a solução do problema elíptico limite na norma L^2 associado ao domínio limitado gerado quando $t \to \infty$, além disso, estende essa convergência para a topologia da convergência uniforme. O autor também usa essas estimativas para estudar o comportamento assintótico das soluções. O trabalho em si é bem completo e trás diversos resultados bem gerais sobre o problema em questão, contudo, o autor utiliza hipóteses fortes de convergência (convergência uniforme) e uma regularidade bem alta para os coeficientes da equação e as não linearidades da equação, diferente deste nosso trabalho, que visa estudar o problema com hipóteses menos regulares e num outro espaço de fase. Além disso, no caso de condições de fronteira não linear, o autor não mostra a existência de soluções, apenas estuda o comportamento assintótico considerando que o problema tem solução.

Já [19, 20] são trabalhos mais recentes sobre problemas parabólicos com domínio não cilíndrico e com domínio variando com o tempo, respectivamente, onde os autores estudam um problema semilinear com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. Problemas parabólicos semilineares sobre domínios variando com o tempo são intrinsecamente não autônomos, mesmo se os termos no problema não dependam explicitamente do tempo. Com uma simbologia e nomenclatura mais atualizada no que se refere ao estudo do comportamento assintótico, os autores procuram estabelecer a existência de atratores *pullback* para o problema não autônomo gerado pelas soluções fracas do problema, utilizando os espaços de Sobolev-Bockner, o que torna o problema não trivial, porém com outras técnicas distintas do nosso problema. Além disso, [20] utiliza uma técnica na mesma linha de [18], para reescrever o problema original, que está posto em um domínio variando com o tempo, em algum problema em um domínio fixo.

Podemos citar também outros trabalhos nesta linha, como [22], onde foi estudado a existência de atratores *pullback* para uma equação da onda definida sobre domínios de $\mathbb{R}^3$ que estão variando com o tempo. Recentemente, em [21], os autores estudaram a existência, unicidade e comportamento assintótico de uma equação de Laplace sobre domínios não cilíndricos.

Com base nos trabalhos citados, o presente trabalho traz como proposta o estudo de um problema que envolve os tópicos acima: os atratores *pullback* de uma equação diferencial parcial parabólica semilinear com condições de fronteira de Neumann homogêneas e domínios variando com o parâmetro tempo. Dessa forma, este trabalho estende os resultados obtidos em [20] para o caso de condições de fronteira de Neumann.

É importante ressaltar que as condições de fronteira de Neumann com a formulação abstrata do problema não foram consideradas nos trabalhos citados anteriormente.

Além disso, vamos também trabalhar com a parte não linear da equação dependendo do gradiente, isto é, $f = f(t, u, \nabla u)$, fato o qual não é usual e pode ser justificado pela necessidade de ter um operador autoadjunto na parte principal do operador, conforme [13].

Os problemas de equações diferenciais em domínios variando com o tempo, ou domínios do tipo espaço-tempo, ou domínios não cilíndricos é um tema que aperece nos estudos das equações diferenciais desde a década de 60 com o artigo [14], principalmente, por suas diversas aplicações nas ciências naturais.

Segundo [26], como motivação para nosso estudo, podemos citar os modelos de formação de cristais, bem como o controle da formação de cristais, o escape de partículas de poços potenciais, o estudo da vibração de determinados instrumentos musicais e o modelo de equações estudadas nesse trabalho, são modelos com termos de reação-difusão, assim como no controle de processo têmperas de metais, os quais estão intrinsicamente relacionados a equação de difusão de calor.

1.3 Objetivos

Para descrevermos o problema que estamos interessados em estudar, vamos fixar $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um aberto limitado com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe C^2. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (t,y) & \mapsto & r(t,y) \end{array}$$

tal que $r \in C^1(\mathbb{R}\times\overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t,\cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeormorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $\mathcal{O}_t = r(t, \mathcal{O})$. Denotamos por $r^{-1}(t, \cdot)$ a função inversa de $r(t,\cdot)$, com $r(t,y) = (r_1(t,y), r_2(t,y), ..., r_n(t,y))$, para todo $(t,y) \in \mathbb{R}\times\overline{\mathcal{O}}$, e $r^{-1}(t,x) = (r_1^{-1}(t,x), r_2^{-1}(t,x), ..., r_n^{-1}(t,x))$, para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}}_t$.

Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, denotamos

$$\mathcal{O}_{t_0} = \{r(t_0,y) : y \in \mathcal{O}\} \quad \text{e} \quad \partial\mathcal{O}_{t_0} = \{r(t_0,y) : y \in \partial\mathcal{O}\}.$$

Definimos

$$Q_{\tau,T} = \bigcup_{t\in(\tau,T)} \{t\} \times \mathcal{O}_t \quad \text{e} \quad \Sigma_{\tau,T} = \bigcup_{t\in(\tau,T)} \{t\} \times \partial\mathcal{O}_t, \quad \text{para} \quad T > \tau,$$

e denotamos por $Q_\tau = Q_{\tau,\infty}$ e $\Sigma_\tau = \Sigma_{\tau,\infty}$.

Estamos interessados em estudar o problema parabólico semilinear com condições de fronteira de Neumann homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) + \beta u(t,x) = f(t,u), & (t,x) \in Q_\tau \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_t}(t,x) = 0, & (t,x) \in \Sigma_\tau \\ u(\tau,x) = u_\tau(x), & x \in \mathcal{O}_\tau \end{cases}, \tag{1.1}$$

onde $\beta > 0$, $n_t(x)$ é o vetor unitário normal exterior ao ponto $x \in \partial\mathcal{O}_t$, $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau : \mathcal{O}_\tau \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada. Vamos verificar a existência e unicidade de soluções para esse problema e provar a existência de atratores *pullback*.

A seguir, destacaremos as hipóteses que serão necessárias neste trabalho. A primeira hipótese será fundamental para garantirmos a boa colocação de um operador abstrato, isto é, um operador localmente uniformemente setorial e localmente uniformemente Hölder contínuo, cujo domínio é independente do tempo em intervalos limitados:

(H1) Hipótese sobre o difeomorfismo.

Considere

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (t,y) & \mapsto & r(t,y) \end{array}$$

tal que $r \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t,\cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeormorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$.

Suponha que $r^{-1}(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \overline{\mathcal{O}}_t$ e que a função $\frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(\cdot, x) : I \to \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente $\theta \in (0,1]$, uniformemente em $x \in \overline{\mathcal{O}}_t$, onde r_k^{-1} é a projeção do difeomorfismo r^{-1} na k-ésima coordenada, $i, k = 1, ..., n$, e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo limitado qualquer.

Suponha também que existem funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \in C(\mathbb{R})$, e $p_{i,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_{i,k} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tais que

$$\frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y)) = h(t) p_{i,k}(y), \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall y \in \overline{\mathcal{O}},$$

com $i, k = 1, ..., n$.

Para obtermos a existência local e unicidade de soluções do problema (1.1), precisaremos estudar a não linearidade e sua respectiva aplicação abstrata. Para tanto, além da hipótese **(H1)**, assumiremos a seguinte condição de regularidade e crescimento da não linearidade:

(H2) Hipótese de regularidade e crescimento da não linearidade.

Dados $n \geq 3$, $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado qualquer, suponha que $f(\cdot, u) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, para todo $u \in \mathbb{R}$, $f(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para todo $t \in I$, e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte condição de crescimento:

$$|\partial_u f(t,u)| \leq c(1 + |u|^\rho), \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

para alguma constante $c > 0$ independente de t e com coeficiente de crescimento $0 < \rho \leq \dfrac{4\alpha}{n - 4\alpha}$.

Para garantir a limitação das soluções em intervalos de tempo limitados e a existência global, precisaremos de uma condição de sinal:

(H3) Hipótese de sinal da não linearidade.

Suponha que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte condição de sinal:

$$|f(t,u)| \leq k_1|u| + k_2, \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

para constantes $k_1, k_2 > 0$ independentes de t e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado qualquer.

Para estudar os atratores *pullback*, além das hipóteses anteriores, assumiremos uma hipótese adicional, que de certa forma pode ser interpretada como uma hipótese de convergência sobre os domínios que estão variando com o tempo. Além disso, garante o decaimento exponencial do processo de evolução do problema parabólico homogêneo associado ao problema parabólico semilinear (1.1).

(H4) Comportamento assintótico do difeomorfismo.

Suponha que existe uma constante $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to-\infty} h(t) = L.$$

Vale ressaltar que os autores [20, 22] trabalham com difeomorfismo linear e separável em seus respectivos desenvolvimento teórico e/ou exemplos. Em [20], este tipo de difeomorfismo aparece em uma aplicação para o caso de uma equação do calor. Todo o trabalho [22] é realizado para esse tipo de difeomorfismo, no caso de uma equação da onda com domínio em $\mathbb{R}^3$. Apesar de nosso trabalho seguir a mesma ideia, exigimos em **(H1)** que cada derivada da projeção da inversa do difeomorfismo composta com o difeomorfismo é apenas separável, ou seja, uma condição mais fraca do que a exigência do próprio difeomorfismo ser linear e separável.

Com as hipóteses descritas acima e com base na técnica apresentada em [18, 20], vamos reescrever o problema original (1.1), que está posto no domínio $\mathcal{O}_t$ (variando com o parâmetro t), como um problema auxiliar no domínio fixo $\mathcal{O}$. Utilizando a mudança de coordenada

$$v(t,y) = u(t, \underbrace{r(t,y)}_{x}), \quad \text{para todo } (t,y) \in [\tau, T] \times \mathcal{O},$$

ou de forma equivalente,

$$u(t,x) = v(t, \underbrace{r^{-1}(t,x)}_{y}), \quad \text{para todo } (t,x) \in [\tau, T] \times \mathcal{O}_t,$$

o problema (1.1) poderá ser reescrito como o seguinte problema parabólico semilinear não autônomo em domínio fixo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \displaystyle\sum_{k,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\dfrac{\partial v}{\partial y_k}\right) + \beta v = f(t,v) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k(t,y)\dfrac{\partial v}{\partial y_k}, & (\tau, T] \times \mathcal{O} \\ \Gamma(t,v) = 0, & (\tau, T] \times \partial\mathcal{O} \\ v(\tau, y) = u_\tau(r(\tau, y)), & \mathcal{O} \end{cases}, \tag{1.2}$$

com $v = v(t,y)$ e a condição de fronteira dada por

$$\Gamma(t,v) = K(r, r^{-1}, n(y)) \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} a_{jk}(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k},$$

onde $n(y)$ é o vetor unitário normal exterior ao ponto $y \in \partial\mathcal{O}$, $n_k(y)$ são suas projeções, $k = 1, ..., n$, $K(r, r^{-1}, n(y))$ é uma função estritamente positiva que será descrita posteriormente e os coeficientes $a_{jk}(t,y)$ e $b_k(t,y)$, $j, k = 1, ..., n$, são dados por

$$a_{jk}(t,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y)) \frac{\partial r_j^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y)),$$

$$b_k(t,y) = \frac{\partial r_k^{-1}}{\partial t}(t, r(t,y)) - \Delta_x r_k^{-1}(t, r(t,y)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}(t,y).$$

Estamos entendendo Δ_x como o laplaciano usual na variável $x = (x_1, ..., x_n)$. A construção detalhada do problema auxiliar (1.2) será feita posteriormente.

Dessa forma, basta analisarmos o problema (1.2), que está posto em um domínio fixo. Vamos provar a existência e unicidade de soluções para (1.2) e provar a existência de atratores *pullback*.

1.4 Organização do trabalho

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: estudo e resumo com toda a fundamentação teórica utilizada para resolver o problema (1.1). Vamos dividir nos seguintes temas:

    1. Estudo da teoria dos espaços funcionais, principalmente, os espaços de Lebesgue, Sobolev e Bessel, para isso vamos utilizar as principais referências da teoria de Análise Funcional, ver [1, 8, 16, 27, 28, 29];
    2. Estudo da teoria dos Operadores Lineares e Operadores Setoriais, para isso vamos utilizar as referências [3, 8, 10, 16, 27, 28];
    3. Estudo dos processos de evolução não autônomos, para isso vamos utilizar as referências [9, 10, 11, 12, 13, 23];
    4. Estudo da teoria de atratores *pullback*, para isso vamos utilizar como referência [9].

- Capítulo 3: vamos aplicar a teoria do Capítulo 2 para estudar nosso problema. Esse capítulo é o mais importante, uma vez que descreve os resultados obtidos neste trabalho.

    1. Primeiramente, na Seção 3.1, vamos fazer uma mudança de coordenada para descrever com detalhes o problema (1.2) no domínio fixo $\mathcal{O}$, que é equivalente ao problema original (1.1);
    2. Na Seção 3.2, vamos fazer uma motivação para apresentar a formulação abstrata do problema (1.2);
    3. Na Seção 3.3, vamos escrever (1.2) como um problema de evolução parabólico abstrato em algum espaço de Banach. Depois, vamos verificar que esse problema abstrato está bem posto, isto é, provaremos a existência local e a unicidade de soluções. Para tanto, usaremos as hipóteses **(H1)** e **(H2)**;
    4. Na Seção 3.4, assumindo adicionalmente a hipótese **(H3)**, provaremos que as soluções estão globalmente definidas;
    5. Na Seção 3.5, provaremos que existe uma família de atratores *pullback* para o problema (1.2). Para tanto, além das hipóteses anteriores, será necessário assumir a hipótese **(H4)**;

6. Por fim, na Seção 3.6, vamos explorar uma aplicação com difeomorfismo linear e separável e um exemplo para mostrar que a classe de funções que satisfezem nossas hipóteses não é vazia.

- Capítulo 4: vamos concluir o trabalho e sugerir outras situações que podem ser exploradas utilizando esse trabalho como base e motivação.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

Ao estudar um problema de Equações Diferenciais procura-se estabelecer algumas conclusões quanto a existência, unicidade, regularidade e propriedades dinâmicas das soluções. Assim, surge, naturalmente, a necessidade de desenvolver teorias que tangem o cenário dessas questões.

Classicamente, tentamos exibir soluções com base nos conceitos clássicos do Cálculo, os quais envolvem principalmente as noções de diferenciabilidade clássica. Contudo, nem sempre é possível encontrar uma solução no sentido clássico em problemas de equações diferenciais, então utiliza-se das teorias da Análise Funcional, Operadores Lineares e Processos de Evolução para entender os problemas numa outra perspectiva, entretanto, sem perder a sua relação com problema original. Para tanto, essas teorias reformulam o problema em uma forma abstrata e a escolha de alguns espaços funcionais adequados auxilia a obter soluções para o problema original em algum sentido.

Este trabalho tem como objetivo investigar as questões discutidas acima para um problema específico, citado na Seção 1.3 do Capítulo 1.

Assim, utilizaremos esse primeiro espaço para introduzir da forma mais geral possível notações, definições e resultados que usaremos ao longo da resolução do problema. Mais detalhes e demonstrações dos resultados que serão expostos aqui podem ser encontrados nas bibliografias citadas.

2.1 Notações e resultados fundamentais de análise

As definições e resultados a seguir são discutidas por [1, 8, 16, 27, 28].

Considere $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto ou $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ e quando necessário faremos a distinção. Alguns resultados enunciados aqui podem ser obtidos para domínios $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira menos regulares, como por exemplo, Lipschitz. Como vamos trabalhar com fronteira pelo menos de classe C^2, não abordaremos essa questão aqui. Para mais detalhes ver, por exemplo, [28].

2.1.1 O espaço das funções contínuas, Hölder contínuas e de classe m-diferenciáveis

O espaço da funções contínuas, $C^0(\mathcal{O})$, é formado por todas as funções $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ que são contínuas. Escolhendo a norma do supremo, isto é,

$$\|u\|_{C^0(\mathcal{O})} = \sup_{x\in\mathcal{O}} |u(x)|,$$

segue que $C^0(\mathcal{O})$ é um espaço de Banach.

O espaço das funções Hölder contínuas, $C^{0,l}(\mathcal{O})$, $0 < l \leq 1$, é constituído de todas as funções que satisfazem

$$|u(x) - u(y)| \leq K|x - y|^l, \quad \forall x, y \in \mathcal{O},$$

para algum $K > 0$. Se $l = 1$ dizemos que a função é Lipschitziana. Escolhendo a norma

$$\|u\|_{C^{0,l}(\mathcal{O})} = \sup_{x\in\mathcal{O}} |u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\mathcal{O}\\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^l},$$

segue que $C^{0,l}(\mathcal{O})$ é um espaço de Banach.

Antes de definirmos os espaços de diferenciabilidade, falaremos sobre os multi-índice. Um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é uma n-upla de inteiros não negativos. Definimos:

- $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$;

- $\alpha! = (\alpha_1!)(\alpha_2!)...(\alpha_n!)$;
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$, onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$;
- $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$, onde $\partial_i^{\alpha_i} = \dfrac{\partial^{\alpha_i}}{\partial {x_i}^{\alpha_i}}, \quad \forall i = 1, .., n.$

Seja $m \in \mathbb{N}$, o espaço das funções de classe m-diferenciáveis, $C^m(\mathcal{O})$, consiste de todas as funções $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ que são m vezes diferenciáveis e as suas diferenciais até a ordem m são contínuas. Tomando a norma

$$\|u\|_{C^m(\mathcal{O})} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \sup_{x \in \mathcal{O}} |D^\alpha u(x)|,$$

segue que $C^m(\mathcal{O})$ é um espaço de Banach.

O espaço das funções de classe m-diferenciáveis e l-Hölder contínuas, $C^{m,l}(\mathcal{O})$, consiste de todas as funções $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ que são m vezes diferenciáveis e as suas diferenciais até a ordem m são Hölder contínuas com coeficiente l. Tomando a norma

$$\|u\|_{C^{m,l}(\mathcal{O})} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \left(\sup_{x \in \mathcal{O}} |D^\alpha u(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \mathcal{O} \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^l} \right),$$

segue que $C^{m,l}(\mathcal{O})$ é um espaço de Banach.

2.1.2 O espaço das funções infinitamente diferenciáveis e o espaço de Schwartz

Definimos o espaço das funções infinitamente diferenciáveis como

$$C^\infty(\mathcal{O}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\mathcal{O}).$$

Quando u é infinitamente diferenciável então dizemos que u é uma função suave.

Seja u uma função suave, definimos o suporte de u como sendo o conjunto $\mathrm{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathcal{O} : u(x) \neq 0\}}$.

Vamos denotar por $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, o espaço das funções suaves com suporte compacto em $\mathcal{O}$, isto é, $\mathrm{supp}(u)$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{O}$. Vamos chamar $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ por espaço das funções teste.

O espaço de Schwartz (ou das funções rapidamente decrescentes) é um subconjunto do espaços das infinitamente diferenciável, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e contém todas as funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha u(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+.$$

O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é de Banach com a norma

$$\|u\|_{k,l} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha|\leq l} |D^\alpha u(x)|, \quad \forall k, l \in \mathbb{N} \right\}.$$

O espaço de Schwartz possui algumas propriedades importantes relacionadas a transformada de Fourier, que veremos mais pra frente.

2.1.3 O espaço das funções p-Lebesgue integráveis

Também define-se, sobre as classes de equivalências das funções Lebesgue mensuráveis, o espaço de Lebesgue das funções p-integráveis. Para tanto, considere o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Caso $1 \leq p < \infty$, definimos

$$L^p(\mathcal{O}) = \left\{ u : \mathcal{O} \to \mathbb{K} \quad \text{Lebesgue mensurável} : \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{O})} = \left(\int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}},$$

segue que $L^p(\mathcal{O})$ é um espaço de Banach.

Caso $p = \infty$, obtemos o espaço das funções Lebesgue mensuráveis essencialmente limitadas,

$$L^\infty(\mathcal{O}) = \left\{ u : \mathcal{O} \to \mathbb{K} \quad \text{Lebesgue mensurável} : \sup_{x\in\mathcal{O}} |u(x)| < \infty \right\},$$

com a norma do supremo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathcal{O})} = \sup_{x\in\mathcal{O}} |u(x)|,$$

segue que $L^\infty(\mathcal{O})$ também é um espaço de Banach.

Em particular, o espaço $L^2(\mathcal{O})$ é um espaço de Hilbert, isto é, é possível munir o espaço com uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{O})} : L^2(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O}) \to \mathbb{K}$ chamada de produto interno, que é dada por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} u(x)\overline{v(x)}\mathrm{d}x, \quad u, v \in L^2(\mathcal{O}).$$

A seguir, enunciaremos duas desigualdades que serão muito usadas ao longo deste trabalho.

Teorema 2.1.1 (Desigualdade de Hölder) *Se $u \in L^p(\mathcal{O})$ e $v \in L^q(\mathcal{O})$, onde $1 < p, q < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, ou $p = 1$ e $q = \infty$, então $uv \in L^1(\mathcal{O})$ e*

$$\|uv\|_{L^1(\mathcal{O})} \leq \|u\|_{L^p(\mathcal{O})} \|v\|_{L^q(\mathcal{O})}.$$

Demonstração: Ver [29, Lema 1].

□

Para $p = q = 2$, a desigualdade acima é chamada de desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Teorema 2.1.2 (Desigualdade de Minkowski) *Se $u, v \in L^p(\mathcal{O})$, onde $1 \leq p \leq \infty$, então $u + v \in L^p(\mathcal{O})$ e*

$$\|u + v\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq \|u\|_{L^p(\mathcal{O})} + \|v\|_{L^p(\mathcal{O})}.$$

Demonstração: Ver [29, Lema 1].

□

Também podemos definir $L^p_{loc}(\mathcal{O})$ como o espaço das funções Lebesgue mensuráveis que são localmente p-integráveis em $\mathcal{O}$, isto é, em subconjuntos $K \subset \mathcal{O}$ obtemos que

$$\int_K |u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty.$$

2.1.4 O espaço das distribuições, transformada de Fourier e o espaço das distribuições temperadas

Considere o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ e seu dual topológico $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, isto é, o espaço de todos os funcionais lineares e contínuos

$$T : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \to \mathbb{K},$$

que será chamado de espaço das distribuições. E ainda, $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ é chamada de distribuição.

Como não é o foco desse trabalho discutir a teoria das distribuições e estamos difinindo os termos a título de uso, enunciaremos as seguintes propriedades para a teoria das distribuições.

Primeiro temos as seguintes inclusões dos espaços:

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) \subset C^{\infty}(\mathcal{O}) \subset L^{p}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O}).$$

Dado α, um multi-índice, temos que as derivada de distribuições $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ são dadas por

$$D^{\alpha}T(\phi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

As distribuições assumem um papel importante no espaço de Schwartz, pois seu dual topológico, denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, é chamado de espaço das distribuições temperadas. E temos as seguintes inclusões:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Agora, vamos falar sobre a transformada de Fourier. Considere $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\xi, x \in \mathbb{R}^n$, a transformada de Fourier e a transformada inversa de u são definidas, respectivamente, por

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}u(x)\mathrm{d}x,$$

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(x) = \check{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

onde $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$, isto é, o produto interno usual do espaço euclidiano.

Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}T(u) = T(\mathcal{F}(u)), \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De forma análoga para a transformada inversa.

2.1.5 Espaço de Sobolev

Nas definições dadas a seguir $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto ou $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, quando necessário faremos a distinção.

Definição 2.1.3 (Espaço de Sobolev clássico) *Seja $k \in \mathbb{N}$, α um multi-índice e $1 \leq p < \infty$, definimos*

$$W_p^k(\mathcal{O}) = \{u \in L^p(\mathcal{O}) : D^\alpha u \in L^p(\mathcal{O}), \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

como o espaço clássico de Sobolev e D^α é a derivada fraca, isto é, a derivada no sentido das distribuições.

Sob a definição acima, o espaço $W_p^k(\mathcal{O})$ com a norma

$$\|u\|_{W_p^k(\mathcal{O})} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathcal{O})} \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se $p = 2$, $W_2^k(\mathcal{O})$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{W_2^k(\mathcal{O})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\mathcal{O})}, \quad u, v \in W_2^k(\mathcal{O}).$$

Vamos estender o espaço de Sobolev clássico para $s \in \mathbb{R}^+$.

Definição 2.1.4 (Extensão do espaço de Sobolev clássico) *Seja $s = k + \sigma$, onde $k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (0, 1)$ e $1 \leq p < \infty$. Então, define-se*

$$W_p^s(\mathcal{O}) = \Big\{ u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}) : u \in W_p^k(\mathcal{O}) \text{ e } \int\int_{\mathcal{O}\times\mathcal{O}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\sigma}} dx\, dy < \infty \text{ para } \quad |\alpha| = k \Big\}.$$

Definimos a norma em $W_p^s(\mathcal{O})$ que o torna Banach, como

$$\|u\|_{W_p^s(\mathcal{O})} = \left(\|u\|^p{}_{W_p^k(\mathcal{O})} + \sum_{|\alpha| = k} \int\int_{\mathcal{O}\times\mathcal{O}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\sigma}} dx\, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definiremos para $s \in \mathbb{R}^-$, nesta situação, vamos dividir em casos, pois há diferença entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Para os resultados a seguir, considere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, com $1 < p, q < \infty$, também vamos denotar o espaço dual $(L^p(\mathcal{O}))' = L^q(\mathcal{O})$ (ver [1, Lema 3.7]).

Para $\mathbb{R}^n$ segue do espaço dual, isto é,

Definição 2.1.5 *Para $s < 0$ denotamos por $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ o espaço dual de $W_q^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Já para o $W_p^s(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ aberto, primeiro definimos

Definição 2.1.6 *Para $s > 0$ denotamos por $\tilde{W}_p^s(\mathcal{O})$ o fecho de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ em $W_p^s(\mathcal{O})$.*

Por fim,

Definição 2.1.7 *Para $s < 0$ denotamos por $W_p^s(\mathcal{O})$ o espaço dual de $\tilde{W}_q^{-s}(\mathcal{O})$.*

Uma caracterização mais detalhada dos espaços de Sobolev com potências negativas pode ser vistas em [1, 28].

2.1.6 Espaço de Bessel

Uma caracterização mais detalhada dos espaços de Bessel pode ser vista em [1, 16, 27, 28].

Considere $w_s = (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$, e defina sobre o espaço das distribuições temperadas a aplicação:

$$J^s u = \mathcal{F}^{-1}(w_s \mathcal{F} u), \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

onde J^s é chamado de potencial de Bessel de u de ordem s.

Se $s > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$ ou, se $s \geq 0$ e $1 < p < \infty$, o potencial de Bessel, J^s, transforma continuamente $L^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, e o mesmo acontece para $D^\alpha J^{s+|\alpha|}$, onde α é um multi-índice (ver [1, pág. 220-221]).

Definição 2.1.8 (Potencial de Bessel em $\mathbb{R}^n$) *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 < p < \infty$. Definimos*

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

como o espaço Potencial de Bessel.

Assim como todos os espaços citados anteriormente, o Potencial de Bessel é um espaço de Banach munido da norma

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|J^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

No caso $p = 2$ usaremos a notação $H^s(\mathbb{R}^n)$ ao invés de $H_2^s(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.

O resultado a seguir relaciona os espaços de Bessel e Sobolev, os expoentes dos espaços de Bessel com seu dual e as respectivas imersões.

Teorema 2.1.9 *Valem os seguintes resultados:*

1. *Se* $s \geq 0$ *e* $1 \leq p < \infty$, *então* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $H_p^s(\mathbb{R}^n)$*;*
2. *Se* $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *então* $(H_p^s(\mathbb{R}^n))' = H_q^{-s}(\mathbb{R}^n)$*;*
3. *Se* $t < s$ *e* $1 < p < \infty$, *então* $H_p^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_p^t(\mathbb{R}^n)$*;*
4. *Se* $t \leq s$ *e também* $1 < p \leq q \leq \dfrac{np}{n-(s-t)p} < \infty$ *ou* $p = 1$ *e* $1 \leq q < \dfrac{n}{n-s+t}$, *então* $H_p^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)$*;*
5. *Se* $0 \leq l \leq s - \dfrac{n}{p} < 1$, *então* $H_p^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,l}(\mathbb{R}^n)$*;*
6. $H_p^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n)$ *se, e somente se,* $s \in \mathbb{R}$ *e* $p = 2$ *ou* $s \in \mathbb{Z}$ *e* $1 < p < \infty$.

Demonstração: Ver [1, Teorema 7.63].

$\square$

Agora, iremos definir os espaços de Bessel para um $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário por restrição. Depois, definiremos por interpolação.

Considere o operador restrição em relação à $\mathcal{O}$, $r_{\mathcal{O}} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}'(\mathcal{O}))$, dado por

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{O}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{D}'(\mathcal{O}) \\ v \quad &\mapsto \quad r_{\mathcal{O}} v \end{aligned}$$

tal que

$$\langle r_{\mathcal{O}} v, \phi \rangle = \langle v, \phi \rangle, \quad v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Definição 2.1.10 (Potencial de Bessel em $\mathcal{O}$) *Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Então, define-se o espaço Potencial de Bessel como*

$$H_p^s(\mathcal{O}) = r_{\mathcal{O}} H_p^s(\mathbb{R}^n).$$

O Potencial de Bessel, $H_p^s(\mathcal{O})$, munido da norma

$$\|u\|_{H_p^s(\mathcal{O})} = \inf_{\substack{v \in H_p^s(\mathbb{R}^n) \\ u = r_{\mathcal{O}} v}} \|v\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}$$

é um espaço de Banach para todo $s \in \mathbb{R}$. Caso $p = 2$, $H_2^s(\mathcal{O})$ também é um espaço de Hilbert e será denotado por $H^s(\mathcal{O})$.

2.1.7 Teoria de interpolação e os espaços de Bessel

Uma outra forma de definirmos $H_p^s(\mathcal{O})$ é utilizando a teoria de interpolação (ver [1, 27, 28]).

Sejam E^0 e E^1 espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_{E^0}$ e $\|\cdot\|_{E^1}$, respectivamente, tais que $E^1 \hookrightarrow E^0$ densamente. Com essas condições (E^0, E^1) é chamado de par de interpolação. Definimos a faixa no plano complexo

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\right\}.$$

Vamos denotar por $\mathcal{H}(E^0, E^1)$ o espaço das funções analíticas com as seguintes propriedades:

Se $F \in \mathcal{H}(E^0, E^1)$ então $F(z)$ é analítica para $z \in S$ com valores em E^0 e é contínua e limitada para $z = 1 + iy$ com valores em E^1.

Definindo a norma

$$\|F\|_{\mathcal{H}(E^0,E^1)} = \max_{j=0,1} \left\{ \sup_{y \in \mathbb{R}} \left(\|F(j+iy)\|_{E^j} \right) \right\}, \quad F \in \mathcal{H}(E^0, E^1),$$

segue que $\mathcal{H}(E^0, E^1)$ é um espaço de Banach.

Dado (E^0, E^1) um par de interpolação, para cada $\theta \in [0,1]$ definimos o espaço

$$E^\theta = [E^0, E^1]_\theta = \left\{U \in E^0 : \text{existe} \quad F \in \mathcal{H}(E^0, E^1) \quad \text{tal que} \quad U = F(\theta)\right\}.$$

Definindo a norma

$$\|U\|_{E^\theta} = \inf_{\substack{F \in \mathcal{H}(E^0, E^1) \\ U = F(\theta)}} \|F\|_{\mathcal{H}(E^0,E^1)}, \quad U \in E^\theta,$$

segue que E^θ é um espaço de Banach.

Seguem algumas propriedades:

Teorema 2.1.11 (Propriedades de interpolação) *Sob as notações acima, são válidas:*

1. $[E^0, E^1]_0 = E^0$ *e* $[E^0, E^1]_1 = E^1$ *isometricamente;*
2. *Se* $0 < \theta < 1$ *então* $E^1 \hookrightarrow E^\theta \hookrightarrow E^0$ *densamente;*
3. *Se* $0 < \theta < 1$ *então* $\|U\|_{E^\theta} \leq \|U\|_{E^0}^{1-\theta} \|U\|_{E^1}^{\theta}$*, para todo* $U \in E^1$;
4. *Sejam* (Y^0, Y^1) *um par de interpolação e* $B \in \mathcal{L}(E^j, Y^j)$*,* $j = 0, 1$*, então* $B \in \mathcal{L}(E^\theta, Y^\theta)$*. E ainda, se* $\|Bx\|_{Y^0} \leq c_0 \|x\|_{E^0}$ *e* $\|Bx\|_{Y^1} \leq c_1 \|x\|_{E^1}$*, então* $\|Bx\|_{Y^\theta} \leq c_\theta \|x\|_{E^\theta}$*, onde* $c_\theta = c_0^{1-\theta} c_1^\theta$.

Demonstração: Ver [27, Teorema 1.9.3].

□

Como mencionado, vamos definir o espaço de Bessel por interpolação.

Teorema 2.1.12 *Sejam* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado suave,* $1 < p < \infty$ *e* $0 \leq s_0 < s_1 < \infty$*. Então,*

$$H_p^s(\mathcal{O}) = [H_p^{s_0}(\mathcal{O}), H_p^{s_1}(\mathcal{O})]_\theta,$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *e* $s = s_0(1-\theta) + \theta s_1$.

Demonstração: Ver [27, Teorema 1].

□

Por fim, assim como foi feito para $\mathbb{R}^n$, seguem os resultados de imersões e equivalências dos espaços, relacionando os respectivos expoentes.

Teorema 2.1.13 *Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado suave e $1 < p < \infty$. Então:*

1. *Se $-\infty < s \leq \dfrac{1}{p}$ então $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ é denso em $H_p^s(\mathcal{O})$;*

2. *Se $\dfrac{1}{p} - 1 < s < \dfrac{1}{p}$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então $(H_p^s(\mathcal{O}))' = H_q^{-s}(\mathcal{O})$.*

Demonstração: Ver [27, Teorema 4.8.2].

□

Teorema 2.1.14 *Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um domínio arbitário, $1 < p, q < \infty$. Então:*

1. *Se $m \geq 0$ e $s > m + \dfrac{n}{p}$, então $H_p^s(\mathcal{O}) \hookrightarrow C^m(\mathcal{O})$.*

   Se além disso, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, temos:

2. *Se $s - \dfrac{n}{p} \geq t - \dfrac{n}{q}$ e $s \geq t$, então $H_p^s(\mathcal{O}) \hookrightarrow H_q^t(\mathcal{O})$;*

3. *Se $s > t$, $p \geq q$ e $s > \dfrac{1}{p}$, então $H_p^s(\mathcal{O}) \hookrightarrow H_q^t(\mathcal{O})$ é compacta.*

Demonstração: Ver [27, Teorema 4.6.1].

□

O teorema a seguir relaciona os espaços de Bessel e Sobolev.

Teorema 2.1.15 *Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um domínio arbitrário, $1 < p < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Então,*

$$H_p^s(\mathcal{O}) = W_p^s(\mathcal{O}),$$

se, e somente se, $s \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Ver [27, pág. 310].

□

2.2 Resultados sobre operadores de evolução

Nessa seção faremos uma breve recapitulação de informações importantes sobre operadores lineares e processos de evolução associados, os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [9, 10, 12, 23, 28].

2.2.1 Processo de evolução

Seja X um espaço métrico, definimos um processo de evolução como uma família de operadores contínuos em X, $\{S(t,s) : t \geq s\}$, com as seguintes propriedades:

1. $S(t,t) = I$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

2. $S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s)$, para todo $t \geq \tau \geq s$;

3. A aplicação $(t,s,x) \to S(t,s)x$ é contínua, $t \geq s$, $x \in X$.

Um processo de evolução que satisfaz a propriedade de $S(t,s) = S(t-s,0)$, para todo $t \geq s$, é chamado de **autônomo**. No caso de processos autônomos, consideramos a família de operadores, $\{T(t) : t \geq 0\}$ dada por $T(t) = S(t,0)$, $t \geq 0$. Decorrente das propriedades de processo de evolução, obtemos:

1. $T(0) = I$;

2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$;

3. A aplicação $(t,x) \to T(t)x$ é contínua de $[0,\infty) \times X$ em X.

Uma família $\{T(t) : t \geq 0\}$ com as propriedades acima é chamada de um semigrupo contínuo. Além disso, a partir de um semigrupo contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ definimos um processo de evolução autônomo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ fazendo $S(t,s) = T(t-s)$, $t \geq s$.

Estudar processos de evolução e suas propriedades é de suma importância para compreender o comportamento de soluções de Equações Diferenciais, principalmente, as que podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A(t)u = F(t,u), \quad t \in (\tau, \infty) \\ u(\tau) = u_\tau \in X \end{cases}, \tag{2.1}$$

onde $\tau \in \mathbb{R}$, $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$, $t \in \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \times X \to X$ e $u_\tau \in X$ são dados.

Uma das intenção desse trabalho é utilizar as teorias de processos de evolução para tentar entender um problema não-autônomo, portanto, no que tange a teoria dos processos autônomos e semigrupos faremos apenas um breve apanhado dos resultados necessários para um trabalho mais auto contido.

2.2.2 Processo autônomo

Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Denotaremos por $\sigma(A)$, o conjunto espectro de A, e $\rho(A)$, o conjunto resolvente de A.

Motivado pelas Equações Diferenciais Ordinárias e os fluxos, a teoria dos semigrupos estabelece uma noção de solução para problemas do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - Au = F(u), \quad t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}, \tag{2.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$, $F : X \to X$ e $u_0 \in X$ são dados.

As principais perguntas que são feitas ao problema (2.2) são:

1. Quais as condições sobre o operador A para que possamos definir um fluxo $T(t)$, assim como era feito na teoria das Equações Diferencias Ordinárias autônomas quando A era uma matriz?

2. Quais as condições sobre a não linearidade F para que o problema esteja bem posto, isto é, existe uma única solução que depende continuamente do dado inicial que resolva o problema.

As definições e resultados a seguir respondem essas perguntas e podem ser encontrados com mais especificidade em [10, 23].

Definição 2.2.1 (Continuidade de semigrupos) *Considere o semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$.

1. *Se* $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ *quando* $t \to 0^+$, *dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo;*

2. *Se* $\|T(t)x - x\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ *quando* $t \to 0^+$, $\forall x \in X$, *dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo ou* C_0*-semigrupo.*

Definição 2.2.2 (Gerador infinitesimal) *Suponha que* $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *é um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuo, seu gerador infinitesimal é o operador definido por* $A : D(A) \subset X \to X$, *onde*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \textit{existe } \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\} \quad e \quad Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial, que é dada a seguir.

Proposição 2.2.3 *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuo. Então, existe* $M \geq 1$ *e* β *tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Para qualquer $l > 0$, *podemos escolher* $\beta \geq \dfrac{1}{l} \ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ *e então escolher* M.

Demonstração: Ver [10, Teorema 1.1.1].

□

Definição 2.2.4 (Semigrupo de contrações) *Considere* $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuo. Se*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0,$$

dizemos que $T(t)$ *é um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Conforme a Proposição 2.2.3, observe que basta que exista um $\beta \leq 0$ e $M = 1$ para que um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuo seja um semigrupo de contrações.

Proposição 2.2.5 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuo e A o seu gerador infinitesimal. Então, A é fechado, densamente definido e, para $x \in D(A)$, $t \to T(t)x$ é continuamente diferenciável satisfazendo:*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

Demonstração: Ver [10, Teorema 1.1.2].

□

Observe que a proposição acima indica uma resposta para a primeira pergunta que devemos responder, isto é, semigrupos de operadores lineares fortemente contínuos são solução para problemas da forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - Au = 0, \quad t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases},$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de $T(t)$. Logo, basta responder quais as condições sobre A para que ele seja gerador de um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuo.

Teorema 2.2.6 (Hille-Yosida) *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

1. *A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que*
$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0;$$

2. *A é fechado, densamente definido, o conjunto resolvente de A contém (β, ∞) e*
$$\left\|(\lambda I - A)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - \beta)^{-n}, \quad \forall \lambda > \beta \quad e \quad n = 1, 2, ...$$

Demonstração: Ver [10, Teorema 1.2.2].

□

Definição 2.2.7 (Operadores dissipativos) *Considere X um espaço de Banach e X' seu dual topológico. A aplicação dualidade*

$$J : X \to 2^{X'}$$

é uma aplicação multívoca definida por

$$J(u) = \left\{ f \in X' : Re\langle f, u\rangle = \|u\|_X^2 \quad e \quad \|f\|_{X'} = \|u\|_X \right\}.$$

Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissapativo se para cada $u \in D(A)$, existe $f \in J(u)$ tal que $Re\langle f, Au\rangle \leq 0$.

Observação 2.2.8 *Como consequência do Teorema de Hahn-Banach, $J(u) \neq \emptyset$.*

Uma caracterização bem útil para operadores dissipativos é dada no lema a seguir.

Lema 2.2.9 *Um operador linear A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X\,, \quad \forall x \in D(A) \quad e \quad \lambda > 0.$$

Demonstração: Ver [10, Lema 1.3.1].

□

Consequentemente, obtemos o seguinte resultado

Teorema 2.2.10 (Lumer-Philips) *Seja A um operador linear densamente definido em X. Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 I - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Demonstração: Ver [10, Teorema 1.3.1].

□

Os Teoremas 2.2.6 e 2.2.10 estabelecem condições mínimas para que um operador seja gerador de um semigrupo de operadores fortemente contínuo, algumas outras formas também podem ser utilizadas, e uma delas se relaciona com a noção de operador setorial e, em particular, esses operadores geram uma classe mais específica de semigrupos: os analíticos.

Definição 2.2.11 (Setorialidade) *Dizemos que o operador A é setorial se é fechado, densamente definido e existem constantes $C > 0, a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in [0, \frac{\pi}{2})$ tais que $\Sigma_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg(\lambda - a)| < \phi\} \subset \rho(A)$ e*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{a,\phi}.$$

Um resultado importante é pertubação contínua de operadores setoriais.

Proposição 2.2.12 *Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial e $B : D(B) \subset X \to X$, com $D(A) \subset D(B)$, um operador linear tal que*

$$\|Bu\|_X \leq \epsilon \|Au\|_X + K \|u\|_X, \quad \forall x \in D(A),$$

para algum $\epsilon > 0$ e alguma constante K. Então, o operador $(A + B)$ é setorial.

Demonstração: Ver [10, Teorema 3.2.1].

□

Definição 2.2.13 (Semigrupo analítico) *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuo em X, se, adicionalmente, $t \to T(t)x$ é uma função analítica sobre $0 < t < \infty$, para cada $x \in X$, então dizemos que $T(t)$ é um semigrupo analítico.*

Todo operador A tal que $-A$ é setorial gera um semigrupo analítico.

Teorema 2.2.14 *Assuma que $-A : D(A) \subset X \to X$ é um operador setorial. Então, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ e existem $K > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ke^{at}, \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Kt^{-1}e^{at}, \quad \forall t > 0.$$

E ainda,

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t), \quad \forall t > 0.$$

Demonstração: Ver [10, Teorema 1.8.1].

□

Dadas as devidas hipóteses sobre uma aplicação F e A, $T(t)$ motiva a construção, de forma análoga ao método do fator integrante, de um processo de evolução autônomo dado por:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$

onde, por construção, sugere ser solução de problemas da forma (2.2).

Também podemos estabelecer uma relação importante entre operadores setoriais e operadores associados a formas bilineares, para mais detalhes consultar [23, 28, 29].

Vamos considerar Z e X espaços de Hilbert e Z' o espaço dual topológico de Z, com $Z \hookrightarrow X \hookrightarrow Z'$.

Definição 2.2.15 (Continuidade e coercividade) *Seja $B : Z \times Z \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear. Então, definimos:*

1. *Se existe $M > 0$ tal que $|B(u,v)| \leq M \|u\|_Z \|v\|_Z$, para todos $u, v \in Z$, dizemos que B é uma forma sesquilinear contínua;*

2. *Se existe $\delta > 0$ tal que $Re[B(u,u)] \geq \delta \|u\|_Z^2$ dizemos que B é uma forma sesquilinear coerciva.*

Uma consequência de [28, Teorema 1.17] é dada por

Teorema 2.2.16 (Representação de Riesz) *Seja $B : Z \times Z \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua, então para cada $u \in Z$, $B(u,\cdot)$ é um funcional linear contínuo em Z e existe uma única $A_u \in Z'$, tal que*

$$B(u,v) = \langle A_u, v\rangle, \quad \forall v \in Z.$$

Demonstração: Ver [28, Teorema 1.17].

□

Motivado pelo Teorema da Representação de Riesz, podemos definir o operador $A : Z \to Z'$, o qual, para cada $u \in Z$, associa o elemento $A(u) = A_u \in Z'$, tal que

$$B(u,v) = \langle A_u, v\rangle, \quad \forall u, v \in Z.$$

Dizemos que A é o operador linear associado a forma sesquilinear B, e como operador de Z em Z', A herda a continuidade proveniente de B, de fato

$$\|A(u)\|_{Z'} = \sup_{\|v\|_Z=1} |\langle A_u, v\rangle| = \sup_{\|v\|_Z=1} |B(u,v)| \leq M \|u\|_Z, \quad \forall u \in Z.$$

Logo, $\|A\|_{\mathcal{L}(Z,Z')} \leq M$.

O Teorema da Representação de Riesz é um dos lados que garantem que esse operador A é um isomorfismo entre Z' e Z, o outro lado é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 2.2.17 (Lax Milgram) *Seja $B : Z \times Z \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva, então para todo elemento $\Phi \in Z'$, existe um único elemento $v \in Z$, tal que*

$$\Phi(u) = B(u,v), \quad \forall u \in Z.$$

Demonstração: Ver [28, Teorema 1.23].

$\square$

Por fim, como uma consequência de [28, Teorema 1.24], temos

Teorema 2.2.18 *Seja $B : Z \times Z \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva e A o seu operador linear associado. Então, A é um isomorfismo entre Z e Z' satisfazendo*

$$\delta \|u\|_Z \leq \|A(u)\|_{Z'} \leq M \|u\|_Z.$$

Além disso, A é um operador fechado e densamente definido em Z'.

Demonstração: Ver [28, Teorema 1.24].

$\square$

Como $D(A) \subset X$, a parte de A em X é dada por

$$D(A|_X) = \{u \in Z : Au \in X\}$$

$$A|_X u = Au.$$

Analogamente, como $Z = D(A)$, a parte de A em Z é dada por

$$D(A|_Z) = \{u \in Z : Au \in Z\}$$

$$A|_Z u = Au.$$

Quando $B : Z \times Z \to \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear coerciva, então as partes $A|_X$ e $A|_Z$ são operadores fechados e densamente definidos em X e Z, respectivamente.

Teorema 2.2.19 *Seja A o operador linear associado a uma forma sesquilinear contínua e coerciva $B : Z \times Z \to \mathbb{C}$ com constantes M e δ, respectivamente. Então, A e suas respectivas partes $A|_X$ e $A|_Z$ são operadores setoriais de Z', X e Z, respectivamente, com ângulo $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $a = 0$ e constante $\frac{M+\delta}{\delta}$ em Definição 2.2.11.*

Demonstração: Este teorema é uma adaptação de [28, Teorema 2.1] e a demonstração segue análoga, uma vez que as definições de setorialidade são equivalentes para $a = 0$ nas duas bibliografias.

□

2.2.3 Processo não-autônomo

Motivado pelo problema autônomo é possível construir, sob determinadas hipóteses, uma família de operadores contínuos com propriedades semelhantes a dos semigrupos/processos autônomos para o problema (2.1). Esse processo foi realizado primeiramente por Tosio Kato, no caso hiperbólico, e por Sobolevskii, no caso parabólico. Os resultados aqui expostos foram estudados com base em [11, 12, 13, 23].

Seja X um espaço de Banach e considere o problema parabólico abstrato homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A(t)u = 0, & t \in (\tau, \infty) \\ u(\tau) = u_\tau \in X \end{cases}, \tag{2.3}$$

onde $\tau \in \mathbb{R}$, $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$, $t \in \mathbb{R}$, e $u_\tau \in X$ são dados. Para obter soluções para (2.1) precisamos obter boas propriedades para o operador solução de (2.3).

Dado $\tau \in \mathbb{R}$ fixo, suponhamos que o operador $A(\tau)$ define um processo autônomo $\left\{e^{-(t-\tau)A(\tau)}) : t \geq \tau\right\}$ solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A(\tau)u = 0, & t \in (\tau, \infty) \\ u(\tau) = u_\tau \in X \end{cases}.$$

Por outro lado, se $U(t,\tau)$ é um processo de evolução linear associado ao problema (2.3), então a diferença

$$\left\{U(t,\tau) - e^{-(t-\tau)A(\tau)} : t \geq \tau\right\},$$

ainda é um processo de evolução e está associado ao problema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A(t)u = -\left[A(t) - A(\tau)\right] e^{-(t-\tau)A(\tau)}, & t \in (\tau, \infty) \\ u(\tau) = 0 \end{cases}. \tag{2.4}$$

Agora, note que se $S(t,\tau)$ resolve o problema (2.4), podemos esperar que

$$\begin{aligned} S(t,\tau) &= S(t,\tau)0 - \int_\tau^t S(s-\tau,\tau)\left[A(s) - A(\tau)\right] e^{-(s-\tau)A(\tau)}\mathrm{d}s \\ &= \int_\tau^t S(s-\tau,\tau)\left[A(\tau) - A(s)\right] e^{-(s-\tau)A(\tau)}\mathrm{d}s \\ &= \int_\tau^t U(t,s)\left[A(\tau) - A(s)\right] e^{-(s-\tau)A(\tau)}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

é solução do problema (2.4). Mas, por construção,

$$S(t,\tau) = U(t,\tau) - e^{-(t-\tau)A(\tau)},$$

substituindo, obtemos a seguinte fórmula para $U(t,\tau)$:

$$U(t,\tau) = e^{-(t-\tau)A(\tau)} + \int_\tau^t U(t,s)\left[A(\tau) - A(s)\right] e^{-(s-\tau)A(\tau)}\mathrm{d}s. \tag{2.5}$$

Portanto, se o processo $U(t,\tau)$ existir, por construção, ele satisfaz (2.5), logo, mostrar a existência de uma solução para o problema integral (2.5) é seguir um caminho parecido a construção dos semigrupos que resolvem problemas autônomos homogêneos.

A seguir, vamos definir as condições mínimas exigidas sobre $A(t)$ para que exista um processo dessa forma. Fixamos $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, uma família de operadores lineares ilimitados, fechados e com domínios $D(A(t)) = D \subset X$ densamente definidos e independentes de t.

Definição 2.2.20 (Operador uniformemente setorial) *Dizemos que um operador $A(t) : D \subset X \to X$ é uniformemente setorial, se existe uma constante $M > 0$ independente de $t \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\left\|(\lambda I - A(t))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda| + 1}, \quad \forall \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) \leq 0\}. \tag{2.6}$$

Observação 2.2.21 *Dizemos que um operador $A(t) : D \subset X \to X$ é* ***localmente uniformemente setorial*** *se para qualquer intervalo de tempo limitado $I \subset \mathbb{R}$, existe $M > 0$ tal que vale (2.6) para todo $t \in I$.*

Vamos fazer algumas observações, para isso vamos supor que $A(t)$ é uma família de operadores uniformemente setorial.

Sabemos que $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) \leq 0\} \subset \rho(A(t))$ e ao mesmo tempo sabendo que o resolvente de um operador ilimitado fechado e densamente definido é um aberto do plano complexo, logo existe $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ pequeno o suficiente, tal que

$$\Sigma_{0,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg(\lambda)| < \phi\} \subset \rho(A(t)).$$

Note que ϕ não depende de t e $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) \leq 0\} \subset \rho(A(t))$ para todo t. Logo, a seguinte desigualdade vale para todos $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$|\lambda| \leq |\lambda| + 1 \Leftrightarrow \frac{M}{|\lambda| + 1} \leq \frac{M}{|\lambda|}.$$

O que implica,

$$\left\|(\lambda I - A(t))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{0,\phi}.$$

Portanto, note que supor que $A(t)$ é uniformemente setorial é análogo a dizer que $A(t)$ é um operador setorial num setor $\Sigma_{0,\phi}$ para todo t com constante M independente de $t \in \mathbb{R}$.

Consequentemente, pelo Teorema 2.2.14, $-A(t)$ gera um semigrupo analítico $\left\{e^{-\tau A(t)} \in \mathcal{L}(X) : \tau \geq 0\right\}$. Em particular, nessa situação como $0 \in \rho(A(t))$, $-A(t)$ gera um C^0- semigrupo de contrações em X satisfazendo

$$\left\|e^{-\tau A(t)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{-a_I \tau}, \quad \left\|A(t)e^{-\tau A(t)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_1}{\tau} e^{-a_I \tau}, \quad \tau > 0,$$

onde C, C_1 e a_I são constantes positivas independentes de τ e t em intervalos limitados I.

Observação 2.2.22 *A recíproca nem sempre é verdade, isto é, uma família de operadores setoriais ou geradoras de um semigrupo analítico nem sempre é uniformemente setorial.*

Definição 2.2.23 (Operador uniformemente Hölder contínuo) *Se existem constantes $C > 0$ e $\theta \in (0, 1]$, independentes de $t, \tau, s \in \mathbb{R}$, tais que*

$$\left\|[A(t) - A(\tau)]A^{-1}(s)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(t - \tau)^{\theta}, \quad \forall t, s, \tau \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

então dizemos que o operador $A(t) : D \subset X \to X$ é uniformemente Hölder contínuo.

Observação 2.2.24 *Dizemos que um operador $A(t) : D \subset X \to X$ é* ***localmente uniformemente Hölder contínuo*** *se para qualquer intervalo de tempo limitado $I \subset \mathbb{R}$, existem $C > 0$ e $\theta \in (0, 1]$ tais que vale (2.7) para todo $t, s, \tau \in I$.*

A seguir exibimos um resultado de [23], que garante a existência do processo de evolução e damos algumas estimativas. Note que escolhemos o intervalo $[0, T]$ somente por conveniência na notação da referência utilizada, todavia o resultado vale para qualquer intervalo de tempo limitado $I = [\tau, T] \subset \mathbb{R}$, onde as hipóteses são satisfeitas.

Teorema 2.2.25 *Seja $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de operadores com domínio independente de t, isto é, $D(A(t)) = D$ para todo $t \in [0, T]$, localmente uniformemente setorial e localmente uniformemente Hölder contínuo para $t \in [0, T]$, então existe um único processo de evolução $U(t, \tau)$ do problema (2.3), em $0 \leq \tau \leq t \leq T$, e uma constante $C > 0$ satisfazendo:*

1. *$\|U(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$, para $0 \leq \tau \leq t \leq T$;*
2. *Para $0 \leq \tau \leq t \leq T$, $U(t, \tau) : X \to D$ e $t \to U(t, \tau)$ é fortemente diferenciável em X. A derivada $\dfrac{\partial U(t,\tau)}{\partial t}$ é fortemente contínua, satisfazendo:*

$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t} + A(t)U(t, \tau) = 0, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

$$\left\|\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t}\right\|_{\mathcal{L}(X)} = \|A(t)U(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{t - \tau}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

$$\left\|A(t)U(t, \tau)A(\tau)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \quad 0 \leq \tau < t \leq T;$$

3. *Para todo $v \in D$ e $0 \leq \tau \leq t \leq T$, $U(t,\tau)v$ é diferenciável em respeito a τ e*
$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial \tau}v + U(t,\tau)A(\tau)v = 0, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

Demonstração: Ver [23, Teorema 6.1].

□

Para estudar o comportamento assintótico das soluções de problemas parabólicos da forma (2.1), como por exemplo os atratores *pullback*, é necessário assumir que as hipóteses do Teorema 2.2.25 valem uniformemente sobre $\mathbb{R}$, isto é, valem para qualquer $-\infty < \tau < T < \infty$ com constantes M, C e θ, nas Definições 2.2.20 e 2.2.23, independentes de T. O teorema a seguir é uma adaptação do resultado em [23, Teorema 8.1], visando o estudo do atrator *pullback*, com ele, é possível obter que a solução do problema parabólico abstrato homogêneo (2.3) decaí exponencialmente a partir de um instante.

Teorema 2.2.26 *Seja $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de operadores que satistaz as hipóteses do Teorema 2.2.25 uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$. Se o operador $A(t)A(\tau)^{-1}$ é uniformemente limitado para $\tau, t \in \mathbb{R}$ e*
$$\left\|(A(t) - A(\tau))A^{-1}(r)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty \text{ e } \tau \to -\infty,$$
uniformemente para todo $r \in \mathbb{R}$, então existem constantes $K > 0$ e $b > 0$ independentes de t e τ tais que
$$\|U(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ke^{-b(t-\tau)}, \quad t \geq \tau,$$
onde $U(t,\tau)$ é o processo de evolução do problema (2.3).

Demonstração: Definimos
$$\rho(\mu_1,\mu_2) = \sup_{r\in\mathbb{R}}\{\left\|(A(t) - A(\tau))A(r)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} : \ \tau \leq \mu_1 \leq t \quad \text{e} \quad \tau \leq \mu_2\}. \tag{2.8}$$

Por hipótese, $\rho(\mu_1,\mu_2)$ é finito e
$$\rho(\mu_1,\mu_2) \to 0, \quad \text{quando } \mu_1 \to \infty \text{ e } \mu_2 \to -\infty.$$
Vamos denotar por $\rho(\mu) = \rho(\mu_1,\mu_2)$.

Combinando (2.8) e o fato que $A(t)$ é um operador uniformemente Hölder contínuo para todo $t \in \mathbb{R}$, existem constantes $C > 0$ e $\theta \in (0,1]$ independentes de t, τ e r tais que

$$\begin{aligned} & \left\|(A(t)-A(\tau))A(r)^{-1}\right\|^2_{\mathcal{L}(X)} \\ = & \left\|(A(t)-A(\tau))A(r)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\|(A(t)-A(\tau))A(r)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \leq & \ \rho(\mu)C|t-\tau|^{\theta}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left\|(A(t)-A(\tau))A(r)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \tilde{c}(\rho(\mu)|t-\tau|^{\theta})^{\frac{1}{2}} = \tilde{c}\sqrt{\rho(\mu)}|t-\tau|^{\frac{\theta}{2}}, \tag{2.9}$$

para alguma constante $\tilde{c} > 0$ independente de t, τ e r, com $r \in \mathbb{R}$, $\tau \leq \mu_1 \leq t$ e $\tau \leq \mu_2$.

Pela fórmula (2.5), temos

$$U(t,\tau) = e^{-(t-\tau)A(\tau)} + \int_\tau^t U(t,z)\left[A(\tau)-A(z)\right] e^{-(z-\tau)A(\tau)}\mathrm{d}z.$$

Além disso, utilizando a construção em [23, Seção 5.6], podemos escrever

$$\int_\tau^t U(t,z)\left[A(\tau)-A(z)\right] e^{-(z-\tau)A(\tau)}dz = \int_\tau^t e^{-(t-z)A(z)}R(z,\tau)\mathrm{d}z,$$

onde $R(z,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(z,\tau)$, com a sequência de operadores R_m definida de forma indutiva por

$$\begin{cases} R_1(t,\tau) = (A(\tau)-A(t))e^{-(t-\tau)A(\tau)} \\ R_m(t,\tau) = \displaystyle\int_\tau^t R_1(t,z)R_{m-1}(z,\tau)\mathrm{d}z, \quad m \geq 2. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$U(t,\tau) = e^{-(t-\tau)A(\tau)} + \int_\tau^t e^{-(t-z)A(z)}R(z,\tau)\mathrm{d}z. \tag{2.10}$$

Como $A(t)$ é um operador uniformemente setorial para todo $t \in \mathbb{R}$, então $e^{-(t-\tau)A(\tau)}$, $t \geq \tau$, é o semigrupo analítico gerado por $A(\tau)$ (um operador tipo positivo com uniformidade em $\tau, t \in \mathbb{R}$ e $t \geq \tau$). Portanto, existem constantes $\nu_0 > 0$ e $M > 0$ independentes de $t, \tau \in \mathbb{R}$ tais que

$$\left\| e^{-(t-\tau)A(\tau)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\nu_0 (t-\tau)}, \quad \text{para } t \geq \tau, \tag{2.11}$$

$$\left\| A(\tau) e^{-(t-\tau)A(\tau)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t-\tau} e^{-\nu_0 (t-\tau)}, \quad \text{para } t > \tau. \tag{2.12}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|R_1(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| (A(\tau) - A(t)) e^{-(t-\tau)A(\tau)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \left\| (A(\tau) - A(t)) A(\tau)^{-1} A(\tau) e^{-(t-\tau)A(\tau)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \left\| (A(\tau) - A(t)) A(\tau)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| A(\tau) e^{-(t-\tau)A(\tau)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \left\| (A(t) - A(\tau)) A(\tau)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| A(\tau) e^{-(t-\tau)A(\tau)} \right\|_{\mathcal{L}(X)}.
\end{aligned}$$

Utilizando (2.9) e (2.12), para $\tau \leq \mu_1 \leq t$ e $\tau \leq \mu_2$, obtemos

$$\|R_1(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \tilde{c} \sqrt{\rho(\mu)} (t-\tau)^{\frac{\theta}{2}} \frac{M}{t-\tau} e^{-\nu_0(t-\tau)} = C \sqrt{\rho(\mu)} (t-\tau)^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\nu_0(t-\tau)}.$$

Por indução sobre $m \in \mathbb{N}$, podemos obter

$$\begin{aligned}
\|R_m(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \int_\tau^t R_1(t,z) R_{m-1}(z,\tau) dz \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \frac{e^{-\nu_0(t-\tau)}}{t-\tau} \frac{(C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}})^m}{\Gamma(\frac{m\theta}{2})}.
\end{aligned}$$

Para $\beta \in (0,1]$ existe uma constante $C_\beta > 0$ tal que vale a seguinte desigualdade

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(m\beta)} \leq C_\beta x e^{2x^{\frac{1}{\beta}}}, \quad \text{para todo } x \geq 0. \tag{2.13}$$

Como $\theta \in (0,1]$ então $\frac{\theta}{2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ e $C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}} \geq 0$ desde que $t \geq \tau$.

Logo, usando (2.13), para $\tau \leq \mu_1 \leq t$ e $\tau \leq \mu_2$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \|R_m(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu_0(t-\tau)}}{t-\tau} \frac{(C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}})^m}{\Gamma(\frac{m\theta}{2})} \\
&\leq \frac{e^{-\nu_0(t-\tau)}}{t-\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}})^m}{\Gamma(\frac{m\theta}{2})} \\
&\leq \frac{e^{-\nu_0(t-\tau)}}{t-\tau} C_\theta C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}} e^{2(C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}})^{\frac{2}{\theta}}} \\
&\leq \frac{e^{-\nu_0(t-\tau)}}{t-\tau} C_\theta C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}} e^{2(C^2\rho(\mu))^{\frac{1}{\theta}}(t-\tau)} \\
&\leq C_\theta C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}-1} e^{2(C^2\rho(\mu))^{\frac{1}{\theta}}(t-\tau)-\nu_0(t-\tau)} \\
&\leq C_\theta C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\left[\nu_0 - 2(C^2\rho(\mu))^{\frac{1}{\theta}}\right](t-\tau)}.
\end{aligned}$$

Como $\rho(\mu) \to 0$ quando $\mu_1 \to \infty$ e $\mu_2 \to -\infty$, então existe um $\mu_0 > 0$ tal que, se $\tau \leq \mu_0 \leq \mu_1 \leq t$ e $\tau \leq \mu_2 \leq -\mu_0$, então $\nu = \nu_0 - 2(C^2\rho(\mu))^{\frac{1}{\theta}} > 0$ e

$$\|R(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|R_m(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\theta C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\nu(t-\tau)}. \quad (2.14)$$

Usando (2.11) e (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\tau^t e^{-(t-z)A(z)} R(z,\tau) \mathrm{d}z \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \int_\tau^t \left\| e^{-(t-z)A(z)} R(z,\tau) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \mathrm{d}z \\
&\leq \int_\tau^t \left\| e^{-(t-z)A(z)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \|R(z,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \mathrm{d}z \\
&\leq MC_\theta C\sqrt{\rho(\mu)} \int_\tau^t e^{-\nu_0(t-z)}(z-\tau)^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\nu(z-\tau)} \mathrm{d}z \\
&\leq MC_\theta C\sqrt{\rho(\mu)} \int_\tau^t e^{-b(t-z)}(z-\tau)^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-b(z-\tau)} \mathrm{d}z \\
&\leq MC_\theta C\sqrt{\rho(\mu)} \int_\tau^t (z-\tau)^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-b(t-\tau)} \mathrm{d}z \\
&= MC_\theta C\sqrt{\rho(\mu)} e^{-b(t-\tau)} \int_\tau^t (z-\tau)^{\frac{\theta}{2}-1} \mathrm{d}z \\
&= \tilde{K}\sqrt{\rho(\mu)} e^{-b(t-\tau)}(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}}, \quad (2.15)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{K} = \frac{2}{\theta} M C_\theta C > 0$ e $b = \min\{\nu_0, \nu\} > 0$ não dependem de t e τ.

Assim, usando (2.10), (2.11) e (2.15), concluímos

$$\begin{aligned}
\|U(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \left\|e^{-(t-\tau)A(\tau)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} + \left\|\int_\tau^t e^{-(t-z)A(z)} R(z,\tau) \mathrm{d}z\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq M e^{-\nu_0(t-\tau)} + \tilde{K}\sqrt{\rho(\mu)} e^{-b(t-\tau)} (t-\tau)^{\frac{\theta}{2}} \\
&\leq e^{-b(t-\tau)} \left[M + \tilde{K}\sqrt{\rho(\mu)} (t-\tau)^{\frac{\theta}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Por fim, usando novamente $\rho(\mu) \to 0$ quando $\mu_1 \to \infty$ e $\mu_2 \to -\infty$, existe uma constante $K > 0$ independente de t e τ tal que

$$\|U(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{-b(t-\tau)}, \quad t \geq \tau.$$

□

Um segundo problema ao estudar problemas desses tipos é dada pela condição de fronteira e o espaço ambiente da equação.

Nem sempre $A(t)$ e F estão propriamente bem definidos no espaço ambiente ideal, principalmente, $A(t)$, nesse caso, extrapolamos/interpolamos o operador para algum outro espaço no qual a equação faça algum sentido e o mecanismo funcional funcione de forma melhor.

Uma forma de extrapolar esses operadores é definir as potências fracionárias.

Se $A(t) : D \subset X \to X$ é uniformemente setorial, então podemos definir as potências fracionárias $A(t)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, da seguinte forma

$$A(t)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\tau A(t)} \tau^{\alpha-1} \mathrm{d}\tau, \quad \text{se} \quad \alpha > 0,$$

onde denotamos por $e^{-\tau A(t)}$, o C_0-semigrupo gerado por $A(t)$, $\Gamma(\alpha)$ é a função gamma e $A(t)^\alpha = (A(t)^{-\alpha})^{-1}$ se $\alpha > 0$.

O resultado a seguir relaciona as potências fracionárias com propriedades de interpolação.

Lema 2.2.27 *Assuma que $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ é uma família de operadores com domínio independente de t e uniformemente setorial. Para $\alpha < \beta < \gamma$, existe uma constante $C > 0$, independente de t, tal que*

$$\left\|A(t)^\beta u\right\|_X < C \left\|A(t)^\gamma u\right\|_X^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \left\|A(t)^\alpha u\right\|_X^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}, \quad \forall u \in D(A(t)^\gamma).$$

Existem constantes $C > 0$ e $\delta > 0$, independentes de t e β, tais que

$$\left\|A(t)^{\beta} e^{-\tau A(t)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < C e^{-\delta\tau} \tau^{-\beta}, \quad \beta \geq 0,$$

$$\left\|[e^{-\tau A(t)} - I] A(t)^{-\beta}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < C\tau^{\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Demonstração: Ver [12, Lema 2.6].

□

Do Lema 2.2.27, podemos estabelecer as estimativas a seguir.

Corolário 2.2.28 *Para todo $\tau, r, t, \xi \in \mathbb{R}$, $t \leq r$, $\tau > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\epsilon \in (0,1]$, temos*

$$\left\|A(\xi)^{\alpha} \left[e^{-\tau A(r)} - e^{-\tau A(t)}\right]\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\tau^{-\alpha}(r-t)^{\epsilon},$$

$$\left\|A(\xi)^{\alpha} \left[A(r)e^{-\tau A(r)} - A(t)e^{-\tau A(t)}\right]\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\tau^{-\alpha-1}(r-t)^{\epsilon(1-\alpha)}.$$

Demonstração: Ver [12, Corolário 2.5].

□

Lema 2.2.29 *Para $\tau, t \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in (0,1)$, $\delta > 0$, $0 \leq \beta \leq \alpha$ e $\beta \leq 1 + \epsilon$, existe uma constante $K(\alpha, \beta) > 0$ tal que*

$$\left\|A(t)^{\alpha} e^{-(t-\tau)A(t)} A(\tau)^{-\beta}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K(\alpha, \beta)(t-\tau)^{\beta-\alpha} e^{-\delta(t-\tau)}.$$

Demonstração: Ver [12, Lema 2.7].

□

Com o Lema 2.2.29, obtemos o resultado a seguir.

Corolário 2.2.30 *Para todo $0 \leq \alpha \leq 1$, $\theta \in [0, \infty)$, $0 \leq \beta \leq \theta$ e $\xi, r, t \in \mathbb{R}$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\|A(\xi)^{\alpha} A(r)^{\theta} e^{-sA(r)} A(\tau)^{-\beta}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C s^{-\alpha-\theta+\beta}, \quad \forall s > 0.$$

Demonstração: Ver [12, Corolário 2.6].

□

Por fim, as estimativa mais importantee dessa subseção, isto é, as estimativas que relacionam as potências fracionárias $A(t)^{\alpha}$ de forma uniforme em $\mathcal{L}(X, X^{\alpha})$ e o processo de evolução $U(t,\tau)$.

Lema 2.2.31 *Sejam* $0 \leq \beta \leq \alpha < 1+\epsilon$, $\epsilon \in (0,1]$, *então*

$$\left\|A(t)^{\alpha}U(t,\tau)A(\tau)^{-\beta}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K(\alpha,\beta)(t-\tau)^{\beta-\alpha}.$$

Demonstração: Ver [12, Lema 2.9].

□

Corolário 2.2.32 *Sejam* $0 \leq \alpha \leq \epsilon$, $0 \leq \beta \leq 1$ *e* $\epsilon \in (0,1]$, *então*

$$\left\|A(\xi)^{\alpha}A(t)U(t,\tau)A(\tau)^{-\beta}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K(\alpha,\beta)(t-\tau)^{\beta-\alpha-1}.$$

Demonstração: Ver [12, Corolário 2.7].

□

Proposição 2.2.33 *Se* $\beta > \alpha$ *e* $0 < \beta - \alpha \leq 1$, *então*

$$\left\|A(t)^{\alpha}[U(t,\tau)-I]A(\tau)^{-\beta}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K(\alpha,\beta)(t-\tau)^{\beta-\alpha}.$$

Demonstração: Ver [12, Lema 2.10].

□

Se $A(t) : D \subset X \to X$ é localmente uniformemente setorial, além das potências fracionárias, é possível definir os espaços de potências fracionárias $X^{\alpha}(t) = D(A^{\alpha}(t))$, $\alpha \geq 0$, com a norma dada por $\|u\|_{X^{\alpha}(t)} = \|A^{\alpha}(t)u\|_{X}$, para $u \in X^{\alpha}(t)$ e $\alpha > 0$. Para $\alpha = 0$ tomamos $A^0(t) = I$ e $X^0(t) = X$.

Os resultados a seguir podem ser encontrados também em [11] e fornecem condições sobre $A(t)$ para que cada X^{α} seja independente de t.

Como $A(t)$ coincide com a inversa de $A^{-1}(t)$, segue que $X^1(t)$ coincide como um conjunto D para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.2.34 *Se $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família localmente uniformemente setorial com domínio independente de t e $I \subset \mathbb{R}$ limitado é tal que*

$$\sup_{t,s\in I} \left\| A(t)A^{-1}(s) \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

então $X^1(t)$ é independente de t exceto para norma, as quais são uniformemente equivalente sobre I.

Demonstração: Ver [11, Proposição 3.2].

□

Definição 2.2.35 *Uma família de operadores positivos $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tal que existe $\epsilon > 0$ satisfazendo*

$$\sup_{s\in[-\epsilon,\epsilon]} \left\| A^{is}(t) \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

é dita uma família com potências imaginárias limitadas.

Se uma família de operadores possui as potências imaginárias limitadas, então o espaço de potências fracionárias pode ser caracterizado pelo interpolador $[\cdot,\cdot]_\theta$ da seguinte forma

$$X^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}(t) = [X^\alpha(t), X^\beta(t)]_\theta,$$

onde $0 < \theta < 1$ e $0 \leq \alpha < \beta < \infty$. Como consequência, temos o seguinte resultado

Proposição 2.2.36 *Se $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família localmente uniformemente setorial com domínio independente de t e potências imiginárias limitadas e $I \subset \mathbb{R}$ limitado é tal que*

$$\sup_{t,s\in I} \left\| A(t)A^{-1}(s) \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

então $X^\theta(t)$, $\theta \in [0,1]$, é independente de $t \in I$ a menos da norma, as quais são uniformemente equivalentes sobre I, isto é, existem constantes $c_1, c_2 > 0$, independentes de $t \in I$, tais que

$$c_1 \left\| x \right\|_{X^\theta(t)} \leq \left\| x \right\|_{X^\theta(s)} \leq c_2 \left\| x \right\|_{X^\theta(t)}.$$

Demonstração: Ver [11, Corolário 3.5].

□

Considere como $X^{-1}(t)$ o completamento do espaço $(X, \|A(t)^{-1}\|_X)$, segundo [11] uma vez que $A(t)$ é, ao menos localmente uniformemente setorial, $X^{-1}(t)$ é o mesmo para todo t vide o resultado a seguir.

Proposição 2.2.37 *Se $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família localmente uniformemente setorial com domínio independente de t e $I \subset \mathbb{R}$ limitado é tal que*

$$\sup_{t,s\in I} \left\| \overline{A^{-1}(t)A(s)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

então $X^{-1}(t)$ é independente de t exceto para normas, as quais são uniformemente equivalentes sobre I.

Demonstração: Ver [11, Proposição 3.6].

□

Vamos estender a independência em t para toda a escala negativa. Para isso, tomando $Y(t) = X^{-1}(t)$, considere $X^{\alpha}(t) := Y^{\alpha+1}(t)$, onde $\alpha \in [-1, \infty)$, o qual é a escala de potência fracionária extrapolada de ordem 1 gerada por $(X, A(t))$. Assim, temos o seguinte resultado

Proposição 2.2.38 *Se $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família localmente uniformemente setorial com domínio independente de t e potências imiginárias limitadas e $I \subset \mathbb{R}$ limitado é tal que*

$$\sup_{t,s\in I} \left\| A(t)A^{-1}(s) \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$$

e

$$\sup_{t,s\in I} \left\| \overline{A^{-1}(t)A(s)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

então para cada $\theta \in [-1, 1]$, o espaço $Y^{\theta+1}(t) = X^{\theta}(t)$ é independente de $t \in I$ exceto para normas, as quais são uniformemente equivalentes sobre I.

Demonstração: Ver [11, Corolário 3.7].

□

Aqui estamos entendendo $\overline{A^{-1}(t)A(s)}$ como a extensão fechada de $A^{-1}(t)A(s)$.

2.3 Existência e unicidade de solução para problemas parabólicos

Essa seção será utilizada para mostrar a boa colocação de problemas parabólicos abstratos para determinada regularidade da não linearidade. Para mais detalhes, consultar [13].

Sejam X^0 e X^1 espaços de Banach com $X^1 \hookrightarrow X^0$ e $T > 0$ qualquer. Considere $\{A(t) : t \in [0,T]\}$, uma família de operadores lineares fechados em X^0 com $D(A(t)) = X^1$, para todo $t \in [0,T]$, e suponha que $A(t) : D(A(t)) \subset X^0 \to X^0$ é localmente uniformemente setorial e localmente uniformemente Hölder contínuo para $t \in [0,T]$. Novamente, em [13], o autor considera o intervalo $[0,T]$, no entanto os resultados apesentados valem para qualquer intervalo de tempo limitado $I \subset \mathbb{R}$, onde as hipóteses são satisfeitas.

Fixado um número $\alpha \in [0,1]$, considere a escala de espaços de Banach X^α construída por interpolação. Note que se X^0 e X^1 são espaços de Hilbert, essa escala coincide com os espaços de potências fracionárias.

Observação 2.3.1 *Considere que estamos na condição onde $X^\alpha(t) = X^\alpha(t_0) = X^\alpha$, para todo $t \in [0,T]$ e para algum t_0 fixado. Dessa forma, denotaremos simplesmente por X^α.*

Considere o problema parabólico abstrato não homogêneo,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A(t)u = F(t,u), \quad t \in (\tau, T] \\ u(\tau) = u_\tau \in X^\alpha \end{cases}, \tag{2.16}$$

onde $\tau \in [0,T)$ e a não linearidade $F : [0,T] \times X^\alpha \to X^0$ satisfaz a seguinte hipótese:

(H) Dado $\alpha < 1$, suponha que $F \in C([0,T] \times X^\alpha, X^0)$ e $F(t,\cdot) : X^\alpha \to X^0$ é localmente Lipschitz, uniformemente em $t \in [0,T]$, isto é, para todo $r > 0$, existe uma constante $L(r) > 0$, tal que

$$\|F(t,u) - F(t,v)\|_{X^0} \leq L(r)\,\|u - v\|_{X^\alpha},$$

para todo $t \in [0,T]$ e para todo $u, v \in X^\alpha$ com $\|u\|_{X^\alpha}, \|v\|_{X^\alpha} < r$.

Observação 2.3.2 *Observe que $L(r) > 0$ pode depender de T, mas não depende de t.*

Definição 2.3.3 (Mild solution) *Dado $u_\tau \in X^\alpha$, dizemos que $u : [\tau, T] \to X^\alpha$ é uma mild solução de (2.16), se $u \in C([\tau, T], X^\alpha)$, e*

$$u(t) = U(t,\tau)u_\tau + \int_\tau^t U(t,s)F(s,u(s))ds,$$

onde $U(t,\tau)$ é o processo de evolução do problema homogêneo (2.3).

Observação 2.3.4 *A existência e unicidade do processo $U(t,\tau)$ é dada pelo Teorema 2.2.25.*

Observe que a definição acima está no intervalo $[\tau, T]$, nesse caso dizemos que a solução é local e mais, se T é o maior real tal que existe, $u(t)$, solução do problema (2.16), dizemos que esta é a solução maximal e $[\tau, T]$ é o intervalo maximal de existência. Se $T = \infty$, isto é, a solução está definida para todo $t \geq \tau$, dizemos que a solução é global.

Agora, obtemos o teorema de existência e unicidade local de *mild* solução.

Teorema 2.3.5 *Suponha que $\{A(t) : t \in [0,T]\}$ é localmente uniformemente setorial e localmente uniformemente Hölder contínuo com $D(A(t)) = X^1$, para todo $t \in [0,T]$, e que $F : [0,T] \times X^\alpha \to X^0$ satisfaz **(H)**. Então, dado qualquer $r > 0$, existe um $T_1 = T_1(\alpha, r) > 0$ tal que para todo $(\tau, u_\tau) \in [0,T) \times \{x \in X^\alpha : \|x\|_{X^\alpha} \leq r\}$, o problema (2.16) possui uma única mild solução $u \in C(I, X^\alpha)$, onde $I = [\tau, \min\{T, \tau + T_1\}]$.*

Além disso, existe um intervalo $[\tau, T_{max}(\tau, u_\tau))$ tal que a solução pode ser estendida de forma maximal.

Por último, dado $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $x, y \in X^\alpha$, satisfazendo $\|x\|_{X^\alpha}, \|y\|_{X^\alpha} \leq r$, temos

$$\|u(t,\tau;x) - u(t,\tau;y)\|_{X^\alpha} \leq C(t-\tau)^{\beta-\alpha} \|x-y\|_{X^\beta}, \quad \forall t \in \tilde{I},$$

onde $\tilde{I} \subset [\tau, T_{max}(\tau, x)) \cap [\tau, T_{max}(\tau, y))$.

Demonstração: Ver [13, Lemas 16.1, 16.2 e 16.7].

□

Para garantir que o intervalo maximal é infinito, isto é, a solução está definida globalmente, temos o seguinte resultado

Teorema 2.3.6 *Sob as hipóteses do Teorema 2.3.5. Seja $u(t,\tau;u_\tau)$ a mild solução maximal em $[\tau, T_{max}(\tau,u_\tau))$ de (2.16). Então, vale uma das alternativas:*

1. $T_{max}(\tau,u_\tau) < \infty$;
2. *A órbita positiva*
$$\gamma^+(\tau,u_\tau) := \{u(t,\tau;u_\tau) : t \in [\tau, T_{max}(\tau,u_\tau))\}$$
é um conjunto não limitado em X^α.

Demonstração: Ver [13, Corolário 16.3].

□

2.4 Atratores *pullback*

Nessa seção vamos expor as principais definições e resultados que serão utilizados nesse trabalho para estudar a existência de conjuntos atratores *pullback* para o problema (2.16).

Para problemas autônomos a existência de atratores globais para um processo de evolução (no caso do semigrupo) é caracterizada pela união de todas as soluções globais limitadas. É possível construir uma caracterização equivalente para problemas não autônomos. Além disso, é possível desenvolver uma versão não autônoma de resultados clássicos da teoria autônoma, seguindo os resultados e definições de [9], o qual apresenta os pontos com mais profundidade do que abordaremos aqui.

Vamos fixar $S(\cdot,\cdot) : X \to X$ um processo de evolução sobre um espaço de Banach X.

Vamos definir uma série de propriedades e classificações importantes para desenvolver a teoria.

Definição 2.4.1 (Invariância) *Uma família de conjuntos dependentes do tempo, $\mathcal{A}(\cdot)$, é invariante sob o processo $S(\cdot,\cdot)$ se*
$$S(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t), \quad \text{para todo } t,s \in \mathbb{R} \text{ com } t \geq s.$$

Definição 2.4.2 (Solução global) *Uma solução global de um processo $S(\cdot,\cdot)$ é uma função $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que $S(t,s)\xi(s) = \xi(t)$, para todo $t \geq s$.*

Uma das caracterizações usuais na teoria de atratores globais e semigrupos é a conjunto atrator global ser caracterizado pela união de todas as soluções globais limitadas, todavia, nos casos não autônomos, é necessário fazer uma distinção por conta das restrições nas propriedades dos processos de evolução em relação aos semigrupos. Para isso vamos definir os conceitos *pullback*.

Definição 2.4.3 (Atração *pullback*) *Dado $t \in \mathbb{R}$, dizemos que um conjunto $K \subset X$ atrai pullback um conjunto D no tempo t sob a ação de $S(\cdot,\cdot)$ se*

$$\lim_{s \to -\infty} dist(S(t,s)D, K) = 0. \tag{2.17}$$

Aqui estamos entendendo por

$$\mathrm{dist}(A,B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_X$$

a semidistância de Hausdorff entre A e B.

Observação 2.4.4 *Sobre a atração pullback ainda podemos definir casos particulares:*

- *Um subconjunto $K \subset X$ atrai pullback conjuntos limitados no tempo t, se vale (2.17) para todo subconjunto limitado D de X;*
- *Uma família de subconjuntos de X dependentes do tempo, $K(\cdot)$, atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $S(\cdot,\cdot)$, se $K(t)$ atrai pullback conjuntos limitados no tempo t sob $S(t,\cdot)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.4.5 (Absorvente *pullback*) *Um conjunto $B \subset X$ absorve pullback conjuntos limitados no tempo $t \in \mathbb{R}$ se, para cada subconjunto limitado D de X, existe $T = T(t,D) \leq t$ tal que*

$$S(t,s)D \subseteq B, \quad \textit{para todo } s \leq T.$$

Uma família $B(\cdot)$ absorve pullback conjuntos limitados se $B(t)$ absorve pullback conjuntos limitados no tempo t, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Com isso definimos a família atrator *pullback*.

Definição 2.4.6 (Atrator *pullback*) *Dizemos que uma família* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é um atrator pullback de* $S(\cdot,\cdot)$*, se:*

1. $\mathcal{A}(t)$ *é compacto para cada* $t \in \mathbb{R}$*;*

2. $\mathcal{A}(\cdot)$ *é invariante sob a ação de* $S(\cdot,\cdot)$;

3. $\mathcal{A}(\cdot)$ *atrai pullback subconjuntos limitados de* X*;*

4. $\mathcal{A}(\cdot)$ *é a menor família de conjuntos fechados com a propriedade 3.*

Observação 2.4.7 *A propriedade 4 é exigida para garantir a unicidade da família atratora pullback, isto é, qualquer outra família,* $\tilde{\mathcal{A}}(\cdot)$ *satisfazendo 1, 2 e 3, é tal que*

$$\mathcal{A}(t) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}(t), \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.4.8 *Dizemos que uma solução global* $\xi : \mathbb{R} \to X$ *de um processo de evolução* $S(\cdot,\cdot)$ *é:*

- *limitada no passado, se existe um* $\tau \in \mathbb{R}$ *tal que* $\{\xi(t) : t \leq \tau\}$ *é um subconjunto limitado de* X;

- *limitada no futuro, se existe um* $\tau \in \mathbb{R}$ *tal que* $\{\xi(t) : t \geq \tau\}$ *é um subconjunto limitado de* X*;*

- *limitada, se for limitado no passado e limitado no futuro uniformemente em* t*.*

De forma análoga, uma família de conjuntos que dependem do tempo, $\mathcal{A}(\cdot)$*, é limitada no passado (futuro) se existe um conjunto limitado* B *e um tempo* τ *tal que* $\mathcal{A}(t) \subset B$ *para todo* $t \leq \tau$ $(t \geq \tau)$*. Se* $\mathcal{A}(t)$ *é uniformemente limitado em* t*, então dizemos que* $\mathcal{A}(t)$ *é limitado.*

Uma primeira caracterização para o atrator *pullback* $\mathcal{A}(\cdot)$ é dada a seguir.

Teorema 2.4.9 *Se um atrator pullback* $\mathcal{A}(\cdot)$ *é limitado no passado, então*

$$\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \ \xi : \mathbb{R} \to X \ \textit{é uma solução global limitada no passado}\}.$$

Demonstração: Ver [9, Teorema 1.17].

$\square$

Corolário 2.4.10 *Se um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ é limitado, então*

$$\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \ \xi : \mathbb{R} \to X \ \text{é uma solução global limitada}\}.$$

Demonstração: Ver [9, Corolário 1.18].

$\square$

Algumas classes de processos de evolução são importantes no estudo da existência de atratores *pullback*, como veremos a seguir.

Definição 2.4.11 (Assintoticamente compacto *pullback*) *Dizemos que um processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$ é assintoticamente compacto pullback se, para cada $t \in \mathbb{R}$, para cada $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \leq t$ com $s_k \to -\infty$ quando $k \to \infty$, e para cada sequência limitada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$, a sequência $\{S(t,s_k)x_k\}$ possui subsequência convergente.*

Veremos uma condição suficiente para um processo ser assintoticamente compacto *pullback*, que pode ser verificada em aplicações.

Definição 2.4.12 (Limitado *pullback*) *Dizemos que um processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$ é limitado pullback se, para cada conjunto limitado $B \subset X$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, a 'órbita pullback' de B no tempo t,*

$$\gamma_p(B,t) := \bigcup_{s\leq t} S(t,s)B, \quad \text{é limitada.}$$

Definição 2.4.13 (Eventualmente compacto *pullback*) *Dizemos que um processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$ é eventualmente compacto pullback se é limitado pullback e existe um $\tau \geq 0$ tal que, se B é um subconjunto limitado de X e $t \in \mathbb{R}$, então $\overline{S(t,t-\tau)B}$ é compacto.*

Lema 2.4.14 *Se o processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$ é eventualmente compacto pullback, então $S(\cdot,\cdot)$ é assintoticamente compacto pullback.*

Demonstração: Ver [9, Lema 2.17].

$\square$

Generalizamos a noção de um conjunto omega limite no caso de processos.

Definição 2.4.15 (Omega limite *pullback*) *O conjunto ω-limite pullback no tempo t de um subconjunto B de X é definido por*

$$\omega(B,t) := \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t,s)B}.$$

Agora, adicionamos uma condição de dissipatividade à compacidade assintótica a fim de obter propriedades de atração dos conjuntos ω-limite.

Definição 2.4.16 (Limitado dissipativo *pullback*) *Dizemos que um processo $S(\cdot,\cdot)$ é limitado dissipativo pullback se existe uma família $B(\cdot)$ de conjuntos limitados tais que $B(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no tempo t, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

No entanto, para obtermos um resultado que garante a existência de um atrator compacto *pullback*, que é limitado no passado, precisamos exigir uma condição mais forte, que impõe alguma uniformidade na dissipatividade do processo $S(\cdot,\cdot)$.

Definição 2.4.17 (Fortemente limitado dissipativo *pullback*) *Dizemos que um processo $S(\cdot,\cdot)$ é fortemente limitado dissipativo pullback se para cada $t \in \mathbb{R}$ existe um subconjunto limitado $B(t)$ de X que atrai pullback subconjuntos limitados de X no tempo τ para cada $\tau \leq t$, isto é, dado um subconjunto limitado $D \subset X$ e $\tau \leq t$,*

$$\lim_{s \to -\infty} dist(S(\tau,s)D, B(t)) = 0.$$

Teorema 2.4.18 *Se um processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$ é fortemente limitado dissipativo pullback e assintoticamente compacto pullback, e $B(\cdot)$ é uma família de subconjuntos limitados de X tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $B(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no tempo τ para cada $\tau \leq t$, então $S(\cdot,\cdot)$ possui um atrator pullback compacto $\mathcal{A}(\cdot)$ tal que $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B}(t),t)$ e $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Ver [9, Teorema 2.23].

$\square$

Vamos fazer um paralelo com os resultados da teoria autônoma que apenas faz as suposições de dissipatividade pontual e compacidade assintótica, mas ainda assim deduz resultados sobre a atração de subconjuntos limitados. O desenvolvimento de uma versão não autônoma desses resultados completa as generalizações da teoria autônoma.

Definição 2.4.19 (Uniformemente fort. ponto dissipativo *pullback*) *Dizemos que um conjunto limitado $B(\cdot)$ uniformemente fortemente atrai pullback pontos de X no tempo t se*

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[\sup_{s\leq t} dist(S(s,s-\tau)x,B(t))\right]=0.$$

Se existe uma família limitada $B(\cdot)$ tal que $B(t)$ uniformemente fortemente atrai pullback pontos de X no tempo t, para cada $t\in\mathbb{R}$, então dizemos que $S(\cdot,\cdot)$ é uniformemente fortemente ponto dissipativo pullback.

Obtemos a definição correspondente de uniformemente fortemente compacto dissipativo *pullback*, substituindo x por um conjunto compacto K na Definição 2.4.19, e de uniformemente fortemente limitado dissipativo *pullback*, substituindo x por um conjunto limitado B.

Definição 2.4.20 (Fortemente limitado *pullback*) *Dizemos que um processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$ é fortemente limitado pullback se, para cada $t\in\mathbb{R}$ e subconjunto limitado $B\subset X$,*

$$\bigcup_{\tau\leq t}\gamma_p(B,\tau)=\bigcup_{\tau\leq t}\bigcup_{s\leq\tau}S(\tau,s)B \quad \textit{é limitado.}$$

Para passar da dissipatividade compacta para a dissipatividade limitada, precisamos da definição forte de compacidade assintótica dada a seguir.

Definição 2.4.21 (Fortemente assintoticamente compacto *pullback*) *Dizemos que um processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$ é fortemente assintoticamente compacto pullback se, para cada $t\in\mathbb{R}$, para cada sequência limitada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in X$, e quaisquer sequências $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $s_k\leq\tau_k\leq t$ e $\tau_k-s_k\to\infty$ quando $k\to\infty$, a sequência $\{S(\tau_k,s_k)x_k\}$ é relativamente compacta.*

Teorema 2.4.22 *Se um processo $S(\cdot,\cdot)$ é uniformemente fortemente compacto dissipativo pullback e fortemente assintoticamente compacto pullback, então $S(\cdot,\cdot)$ é fortemente limitado dissipativo pullback.*

Demonstração: Ver [9, Teorema 2.33].

□

Assim, obtemos um dos principais resultados da teoria.

Teorema 2.4.23 *Seja $S(\cdot,\cdot)$ um processo tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\tau > 0$, $\{S(s, s-\tau) : s \leq t\}$ é uma família equicontínua em x, para cada $x \in X$. Se $S(\cdot,\cdot)$ é uniformemente fortemente ponto dissipativo pullback, fortemente limitado pullback e fortemente assintoticamente compacto pullback, então $S(\cdot,\cdot)$ é fortemente limitado dissipativo pullback. Consequentemente, $S(\cdot,\cdot)$ possui um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ que é limitado no passado.*

Demonstração: Ver [9, Teorema 2.34].

□

Verificar que um processo é fortemente assintoticamente compacto *pullback* é uma tarefa delicada e para isso vamos utilizar alguns resultados auxiliares.

Definição 2.4.24 (Fortemente compacto) *Dizemos que uma família de aplicações $\{U(t,s) : t \geq s\} \subset \mathcal{C}(X)$ (que não precisa ser um processo) é fortemente compacta, se para cada tempo t e para cada conjunto limitado $B \subset X$, existe um $T_B \geq 0$ e um conjunto compacto $K \subset X$ tal que $U(\tau, s)B \subset K$ para todo $s \leq \tau \leq t$ com $\tau - s \geq T_B$.*

Teorema 2.4.25 *Seja $S(\cdot,\cdot)$ um processo de evolução fortemente limitado pullback tal que*

$$S(t,s) = T(t,s) + U(t,s),$$

onde $U(\cdot,\cdot)$ é fortemente compacto e existe uma função

$$k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

com $k(\cdot, r)$ não-crescente para cada $r > 0$ e $k(\sigma, r) \to 0$ quando $\sigma \to \infty$, tal que para todo $s \leq t$ e $x \in X$, com $\|x\|_X \leq r$, temos

$$\|T(t,s)x\|_X \leq k(t-s, r).$$

Então, o processo $S(\cdot,\cdot)$ é fortemente assintoticamente compacto pullback.

Demonstração: Ver [9, Teorena 2.37].

□

Capítulo 3

A equação com domínio variando com o tempo

Nesse capítulo pretendemos aplicar toda teoria exposta no Capítulo 2 para estudar o problema parabólico semilinear com condições de fronteira de Neumann homogêneas e domínio variando com o tempo, dado por (1.1). A técnica abordada aqui pode ser encontrada em [18, 20], na qual consiste em realizar uma mudança de coordenadas para reescrever o problema original que está posto em um domínio variando com o tempo, em algum problema em um domínio fixo.

Vamos retomar nosso problema introduzido no começo desse trabalho e fixar algumas notações utilizadas.

Vamos fixar $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um aberto limitado com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe C^2, isto é, para cada $y_0 \in \partial\mathcal{O}$, existem $r > 0$ e uma função de classe C^2, $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{O} \cap B_r(y_0) = \{y \in B_r(y_0) : y_n > \psi(y_1, ..., y_{n-1})\},$$

onde $B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n$ denota uma bola aberta de raio r e centro y_0.

Além disso, considere a função

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (t, y) & \mapsto & r(t, y) \end{array}$$

tal que $r \in C^1(\mathbb{R}\times\overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t, \cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeormorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $\mathcal{O}_t = r(t, \mathcal{O})$. Denotamos por $r^{-1}(t, \cdot)$ a função inversa de $r(t, \cdot)$, com $r(t, y) = (r_1(t, y), r_2(t, y), ..., r_n(t, y))$, para todo $(t, y) \in \mathbb{R}\times\overline{\mathcal{O}}$, e $r^{-1}(t, x) = (r_1^{-1}(t, x), r_2^{-1}(t, x), ..., r_n^{-1}(t, x))$, para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}}_t$.

Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, denotamos

$$\mathcal{O}_{t_0} = \{r(t_0, y) : y \in \mathcal{O}\}, \ \partial\mathcal{O}_{t_0} = \{r(t_0, y) : y \in \partial\mathcal{O}\}, \text{ e } \overline{\mathcal{O}_{t_0}} = \mathcal{O}_{t_0} \cup \partial\mathcal{O}_{t_0}.$$

Definimos

$$Q_{\tau,T} = \bigcup_{t\in(\tau,T)} \{t\} \times \mathcal{O}_t \quad \text{e} \quad \Sigma_{\tau,T} = \bigcup_{t\in(\tau,T)} \{t\} \times \partial\mathcal{O}_t, \quad \text{para} \quad T > \tau,$$

e denotamos por $Q_\tau = Q_{\tau,\infty}$ e $\Sigma_\tau = \Sigma_{\tau,\infty}$.

Para qualquer $T > \tau$, o conjunto $Q_{\tau,T}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira

$$\partial Q_{\tau,T} = \Sigma_{\tau,T} \cup (\mathcal{O}_\tau \times \{\tau\}) \cup (\mathcal{O}_T \times \{T\}).$$

Estamos interessados em estudar o problema parabólico semilinear com condições de fronteira de Neumann homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) + \beta u(t,x) = f(t, u(t,x)), & (t,x) \in Q_\tau \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_t}(t,x) = 0, & (t,x) \in \Sigma_\tau \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), & x \in \mathcal{O}_\tau \end{cases}, \tag{3.1}$$

onde $\beta > 0$, $n_t(x)$ é o vetor unitário que é normal exterior ao ponto $x \in \partial\mathcal{O}_t$, $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau : \mathcal{O}_\tau \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função.

A seguir destacaremos as hipóteses que serão necessárias neste trabalho. A primeira hipótese será fundamental para garantirmos a boa colocação de um operador abstrato, e em conjunto da segunda hipótese, vamos estudar a existência e unicidade local de soluções.

(H1) Hipótese sobre o difeomorfismo.

Considere

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (t,y) & \mapsto & r(t,y) \end{array}$$

tal que $r \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t,\cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeormorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$.

Suponha que $r^{-1}(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \overline{\mathcal{O}}_t$ e que a função $\frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(\cdot, x) : I \to \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente $\theta \in (0, 1]$, uniformemente em $x \in \overline{\mathcal{O}}_t$, onde r_k^{-1} é a projeção do difeomorfismo r^{-1} na k-ésima coordenada, $i, k = 1, ..., n$, e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo limitado qualquer.

Suponha também que existem funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \in C(\mathbb{R})$, e $p_{i,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_{i,k} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tais que

$$\frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y)) = h(t) p_{i,k}(y), \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall y \in \overline{\mathcal{O}},$$

com $i, k = 1, ..., n$.

(H2) Hipótese de regularidade e crescimento da não linearidade.

Dados $n \geq 3$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado qualquer, suponha que $f(\cdot, u) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, para todo $u \in \mathbb{R}$, $f(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para todo $t \in I$, e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte condição de crescimento:

$$|\partial_u f(t,u)| \leq c(1 + |u|^\rho), \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

para alguma constante $c > 0$ independente de t e com coeficiente de crescimento $0 < \rho \leq \dfrac{4\alpha}{n - 4\alpha}$.

Para garantir a existência global de soluções, além das hipóteses anteriores, assumiremos a hipótese a seguir.

(H3) Hipótese de sinal da não linearidade.

Suponha que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte condição de sinal:

$$|f(t,u)| \leq k_1 |u| + k_2, \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

para constantes $k_1, k_2 > 0$ independentes de t e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado qualquer.

Para estudar os atratores *pullback*, assumiremos uma hipótese adicional, que de certa forma pode ser interpretada como uma hipótese de convergência sobre os domínios que estão variando com o tempo.

(H4) Comportamento assintótico do difeomorfismo.

Suponha que existe uma constante $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{t \to -\infty} h(t) = L.$$

Da forma como colocamos nosso problema, estamos encarando um problema que para cada $t > \tau$ a equação (3.1) reside em um ambiente Q_τ, ou seja, o domínio do nosso problema varia enquanto o parâmetro t vai sofrendo alterações, para resolver essa família de problemas, aplicamos a técnica de mudança de variável e encontramos um novo problema em um domínio fixo e para isso utilizamos com bastante destaque a hipótese **(H1)**.

3.1 Mudança de coordenada

Essa técnica é resultado da construção de uma parametrização utilizando a aplicação definida anteriormente e só pode ser feita, pois $r(t,\cdot)$ é um difeomorfismo de classe C^2 para cada $t \in \mathbb{R}$.

Considere o intervalo $[\tau, T]$, isto é, estudaremos inicialmente o problema local de (3.1) em algum $Q_{\tau,T}$. Definimos a seguinte mudança de coordenada

$$v(t,y) = u(t, \underbrace{r(t,y)}_{x}), \quad \text{para todo } (t,y) \in [\tau, T] \times \mathcal{O}.$$

Denotamos por $r^{-1}(t,\cdot)$ a inversa de $r(t,\cdot)$ e como $r(t,\cdot)$ é um difeomorfismo, podemos escrever de forma equivalente:

$$u(t,x) = v(t, \underbrace{r^{-1}(t,x)}_{y}), \quad \text{para todo } (t,x) \in [\tau, T] \times \mathcal{O}_t.$$

Utilizando as propriedades da derivada clássica e supondo que $u(t,x)$ é uma solução de (3.1), fixamos o índice $i = 1, ..., n$, para encontrar a relação entre as derivadas de v e u e reescrever o problema (3.1).

A primeira derivada é dada por

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j} \frac{\partial r_j^{-1}(t,x)}{\partial x_i}.$$

A segunda derivada é dada por

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j} \frac{\partial^2 r_j^{-1}(t,x)}{\partial x_i^2} + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial r_j^{-1}(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial r_k^{-1}(t,x)}{\partial x_i}.$$

A derivada temporal é dada por

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial v(t,y)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_k^{-1}(t, r(t,y))}{\partial t} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta u(t,x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j} \frac{\partial^2 r_j^{-1}(t,x)}{\partial x_i^2} + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial r_j^{-1}(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial r_k^{-1}(t,x)}{\partial x_i} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j} \Delta_x r_j^{-1}(t,x) + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_j \partial y_k} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_j^{-1}(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial r_k^{-1}(t,x)}{\partial x_i}}_{a_{jk}(t,y)}.
\end{aligned}
$$

Aqui estamos entendendo Δ_x como o laplaciano usual na variável $x = (x_1, ..., x_n)$ e r_k^{-1} como a projeção do difeomorfismo r^{-1} na k-ésima coordenada, $k = 1, ..., n$. Como $x = r(t,y)$, vamos denotar por

$$
a_{jk}(t,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_j^{-1}(t, r(t,y))}{\partial x_i} \frac{\partial r_k^{-1}(t, r(t,y))}{\partial x_i}, \quad \text{para } j,k = 1, ..., n. \tag{3.2}
$$

Logo,

$$
\Delta u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j} \Delta_x r_j^{-1}(t, r(t,y)) + \sum_{k,j=1}^{n} a_{jk}(t,y) \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_j \partial y_k}.
$$

Somando e subtraindo o termo

$$
T_1 = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial a_{jk}(t,y)}{\partial y_j} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}
$$

em $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x)$, obtemos

$$
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) \quad = \quad \frac{\partial v(t,y)}{\partial t} + S_1 - (S_2 + S_3) - T_1 + T_1,
$$

onde:

- $S_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_j^{-1}(t, r(t,y))}{\partial t} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j}$;

- $S_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j} \Delta_x r_j^{-1}(t, r(t,y))$;

- $S_3 = \displaystyle\sum_{k,j=1}^{n} a_{jk}(t,y) \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_j \partial y_k}$.

Pela identidade do divergente, obtemos

$$-(S_3 + T_1) = -\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}\right).$$

Como S_1 e S_2 são somas independentes de a_{jk} e a_{jk} é simétrico, podemos trocar seu índice para k. Denotando por

$$b_k(t,y) = \frac{\partial r_k^{-1}}{\partial t}(t, r(t,y)) - \Delta_x r_k^{-1}(t, r(t,y)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}(t,y),$$

para $k = 1, ..., n$, obtemos

$$S_1 - S_2 + T_1 = \sum_{k=1}^{n} b_k(t,y) \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}.$$

Substituindo em $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x)$, temos

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) = \frac{\partial v(t,y)}{\partial t} - \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k(t,y)\frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}.$$

Observação 3.1.1 *Pela [7, Proposição IX.6], pág. 156, temos que se para cada $t \in (\tau, T)$ a função $u(t,\cdot) \in H^1(\mathcal{O}_t)$, então a função*

$$v(t,\cdot) = u(t, r(t,\cdot)) \in H^1(\mathcal{O}).$$

Para a transformação da condição de fronteira, primeiro vamos construir uma função $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(y) = 0$ e $\nabla\psi(y) \neq 0$, em uma vizinhança da $\partial\mathcal{O}$. Para mais informações ver [18], onde o autor faz uma construção mais detalhada e demonstra os resultados que iremos enunciar a seguir.

Teorema 3.1.2 *Um domínio $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ possui uma fronteira de classe C^m, pelo menos C^1, se, e somente se, existem constantes $r, M > 0$ tais que para qualquer bola aberta $B_r \subset \mathbb{R}^n$ de raio r, após rotações e translação apropriadas das coordenadas, temos*

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \cap B_r &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \psi(\overline{x})\} \cap B_r, \quad \overline{x} = (x_1, ..., x_{n-1}), \\ \partial\mathcal{O} \cap B_r &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = \psi(\overline{x})\} \cap B_r, \end{aligned}$$

para alguma $\psi \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ com norma $\leq M$.

Demonstração: Ver [18, Teorema 1.3].

□

Corolário 3.1.3 *Um domínio $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^m, $m \geq 2$, pode ser representado por $\{y \in \mathbb{R}^n : \psi(y) > 0\}$, onde $\|\nabla_y \psi(y)\|_{\mathbb{R}^n} \equiv 1$, em uma vizinhança de $\partial\mathcal{O}$. Nesse caso, ψ é única para cada vizinhança de $\partial\mathcal{O}$.*

Demonstração: Ver [18, Corolário 1.6].

□

Portanto, se $\mathcal{O}$ possui uma fronteira de classe C^2, para cada bola aberta B_r, $r > 0$, existe uma única função $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que

$$\psi(y) = 0, \quad \text{para todo } y \in \partial\mathcal{O} \cap B_r,$$

e $\|\nabla\psi(y)\|_{\mathbb{R}^n} \equiv 1 \neq 0$.

Consequentemente, como $r(t, \cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeormorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$, $\psi(r^{-1}(t, x))$ representa $\mathcal{O}_t$ com $\psi(r^{-1}(t, x)) \equiv 0$ e $\|\nabla_y \psi(r^{-1}(t, x))\|_{\mathbb{R}^n} \neq 0$.

Vamos denotar por $T(t, y) := G(t, r(t, y))$, onde

$$G(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_1}(t, x) & ... & \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_1}(t, x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_n}(t, x) & ... & \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_n}(t, x) \end{pmatrix}.$$

Seja $T^*(t, y)$ a matriz transposta de $T(t, y)$ e $G^*(t, x)$ a matriz transposta de $G(t, x)$. Note que $T^*(t, y) = G^*(t, r(t, y))$, onde

$$G^*(t, x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_1}(t, x) & ... & \dfrac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_n}(t, x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_1}(t, x) & ... & \dfrac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_n}(t, x) \end{pmatrix}.$$

Observação 3.1.4 *Vale notar que $G(t,x)$ é o transposto do jacobiano de $r^{-1}(t,x)$, isto é, $G(t,x) = J_x^T(r^{-1}(t,x))$, com $T(t,y) = J_x^T(r^{-1}(t,r(t,y)))$ e $T^*(t,y) = J_x(r^{-1}(t,r(t,y)))$. Por simplificação, optamos por usar T e G ao longo do trabalho.*

Lema 3.1.5 *Seja $\partial\mathcal{O}$ uma superfície de classe C^2 definida por $\psi(y) = 0$ e $\partial\mathcal{O}_t = r(t,\partial\mathcal{O})$, a superfície deformada por um difeomorfismo r de classe C^2. Então, seus respectivos representantes de vetores normais se relacionam pela expressão*

$$n_{\mathcal{O}_t}(x) = G(t,x)n_{\mathcal{O}}(r^{-1}(t,x)).$$

Demonstração: Como $\partial\mathcal{O}$ é definida por $\psi(y) = 0$, um candidato a vetor normal à $\partial\mathcal{O}$ é dado da seguinte forma

$$n_{\mathcal{O}}(y) = \nabla_y\psi(y), \quad \forall y \in \partial\mathcal{O}.$$

Por outro lado, se $\psi(y) = 0$ define $\partial\mathcal{O}$, dado t fixo, $\psi(y) = \psi(r^{-1}(t,x)) = 0$ define $\partial\mathcal{O}_t$, pois r é um difeomorfismo. De forma análoga, um candidato a vetor normal à $\partial\mathcal{O}_t$, é dado por

$$n_{\mathcal{O}_t}(x) = \nabla_x\psi(r^{-1}(t,x)), \quad \forall x \in \partial\mathcal{O}_t.$$

Computando o gradiente, obtemos

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{O}_t}(x) &= \nabla_x\psi(r^{-1}(t,x)) \\ &= G(t,x)\nabla_y\psi(r^{-1}(t,x)) \\ &= G(t,x)n_{\mathcal{O}}(r^{-1}(t,x)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$n_{\mathcal{O}_t}(x) = G(t,x)n_{\mathcal{O}}(r^{-1}(t,x)).$$

□

Para normalizar e obtermos, de fato, um vetor normal unitário, definimos

$$\tilde{n}_{\mathcal{O}_t}(x) = \frac{1}{\|G(t,x)n_{\mathcal{O}}(r^{-1}(t,x))\|_{\mathbb{R}^n}} G(t,x)n_{\mathcal{O}}(r^{-1}(t,x)).$$

Se $y = r^{-1}(t,x)$ então

$$\tilde{n}_{\mathcal{O}_t}(r(t,y)) = \frac{1}{\|T(t,y)n_{\mathcal{O}}(y)\|_{\mathbb{R}^n}} T(t,y)n_{\mathcal{O}}(y).$$

Vamos denotar por $n_t(x) = n(t,x)$ o vetor normal unitário exterior ao ponto $x \in \partial\mathcal{O}_t$ e $n(y)$ o vetor normal unitário exterior ao ponto $y \in \partial\mathcal{O}$. Assim, podemos utilizar o lema anterior para encontrar a derivada normal na condição de fronteira. Note que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial n_t}(t,x)\\
&= \langle \nabla_x u(t,x), n(t,x)\rangle\\
&= \langle \nabla_x u(t,x), n(t,r(t,y))\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} n_i(t,r(t,y))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}\frac{\partial r_k^{-1}(t,r(t,y))}{\partial x_i} n_i(t,r(t,y))\\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_x r_k^{-1}(t,r(t,y)), n(t,x)\rangle \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_x r_k^{-1}(t,r(t,y)), K(r,r^{-1},n(y))T(t,y)n(y)\rangle \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}\\
&= \ K(r,r^{-1},n(y))\langle T(t,y)\nabla_y v(t,y), T(t,y)n(y)\rangle\\
&= \ K(r,r^{-1},n(y))\langle \nabla_y v(t,y), T^*(t,y)T(t,y)n(y)\rangle\\
&= K(r,r^{-1},n(y))\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial r_j^{-1}(t,r(t,y))}{\partial x_i}\frac{\partial r_k^{-1}(t,r(t,y))}{\partial x_i} n_k(y)\\
&= K(r,r^{-1},n(y))\sum_{k=1}^{n} n_k(y)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial r_j^{-1}(t,r(t,y))}{\partial x_i}\frac{\partial r_k^{-1}(t,r(t,y))}{\partial x_i}\frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k},
\end{aligned}
$$

onde $K(r,r^{-1},n(y)) = \dfrac{1}{\|T(t,y)n(y)\|_{\mathbb{R}^n}} > 0$ é uma função que depende apenas do difeomorfismo e de suas derivadas e $n_k(y)$ é a projeção do vetor normal $n(y)$ na k-ésima coordenada, $k = 1, ..., n$.

Retomando a notação de (3.2), podemos reescrever a representação acima como

$$\frac{\partial u}{\partial n_t}(t, r^{-1}(t,y)) = K(r,r^{-1},n(y))\sum_{k=1}^{n} n_k(y)\sum_{j=1}^{n} a_{jk}(t,y)\frac{\partial v(t,y)}{\partial y_k}.$$

Por fim, podemos reescrever o problema original (3.1) no seguinte problema em um domínio fixo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \displaystyle\sum_{k,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\dfrac{\partial v}{\partial y_k}\right) + \beta v = f(t,v) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k(t,y)\dfrac{\partial v}{\partial y_k}, & (\tau,T]\times\mathcal{O} \\ \Gamma(t,v) = 0, & (\tau,T]\times\partial\mathcal{O} \\ v(\tau,y) = u_\tau(r(\tau,y)), & \mathcal{O} \end{cases}, \tag{3.3}$$

onde $v = v(t,y)$ e a condição de fronteira é dada por

$$\Gamma(t,v) = K(r, r^{-1}, n(y)) \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} a_{jk}(t,y)\frac{\partial v}{\partial y_k}.$$

Os coeficientes $a_{jk}(t,y)$ e $b_k(t,y)$, $j,k = 1,...,n$, são dados por

$$a_{jk}(t,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y))\frac{\partial r_j^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y)), \tag{3.4}$$

$$b_k(t,y) = \frac{\partial r_k^{-1}}{\partial t}(t, r(t,y)) - \Delta_x r_k^{-1}(t, r(t,y)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}(t,y). \tag{3.5}$$

Estamos entendendo Δ_x como o laplaciano usual na variável $x = (x_1, ..., x_n)$ e r_k^{-1} como a projeção do difeomorfismo r^{-1} na k-ésima coordenada, $k = 1, ..., n$.

Como $r(t,\cdot)$ é um difeomorfismo para todo t podemos fazer uma construção análoga para qualquer que seja $T > \tau$, inclusive, o problema global, isto é, $T = \infty$.

Observação 3.1.6 *Observe que u é solução clássica de (3.1) se, e somente se, v é solução clássica de (3.3), e isso se dá por construção do problema no domínio fixo. Nosso interesse é estudar soluções em algum outro sentido do clássico, as soluções fracas do problema.*

3.2 Motivação para formulação abstrata

Encontrar uma solução de (3.3) no sentido forte é uma tarefa díficil e, as vezes, exige hipóteses fortes sobre nossos dados, todavia, podemos encontrar uma solução num sentido mais fraco para tanto escrevemos uma formulação variacional ou integral do problema. Essa é a motivação para introduzirmos a formulação abstrata.

A formulação variacional de um problema consiste em estudar as funções que preservam a energia do sistema, mesmo que essas não possuam um grau de diferenciabilidade alto o suficiente para satisfazer o problema no sentido da derivada clássica.

Para a construção do problema variacional, suponha que $v = v(t, y)$ é uma solução clássica do problema (3.3) e seja $\phi = \phi(t, y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{O})$.

Para cada $t \in [0, \infty)$ podemos integrar a primeira equação de (3.3) em $\mathcal{O}$ e obter

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jk}(t, y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) + \beta v \right] \phi \mathrm{d}y \\ = \quad & \int_{\mathcal{O}} \left(f(t, v) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t, y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) \phi \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para cada $j = 1, ..., n$, considere n campos vetorais com n entradas dadas por:

$$\overrightarrow{w^j} = \begin{cases} w^j_m = 0, & m \neq j \\ w^j_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t, y) \frac{\partial v}{\partial y_k}, & m = j \end{cases}.$$

Agora, note que

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jk}(t, y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) \phi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t, y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) \phi = \sum_{j=1}^{n} div \left(\overrightarrow{w^j} \right) \phi.$$

Se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial, podemos usar a regra do produto para o divergente: $div(\phi F) = \langle \nabla \phi, F \rangle + \phi div(F)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} div \left(\phi \overrightarrow{w^j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left[div \left(\overrightarrow{w^j} \right) \phi + \langle \overrightarrow{w^j}, \nabla_y \phi \rangle \right] \\ \Longrightarrow & \sum_{j=1}^{n} div \left(\overrightarrow{w^j} \right) \phi = \sum_{j=1}^{n} \left[div \left(\phi \overrightarrow{w^j} \right) - \langle \overrightarrow{w^j}, \nabla_y \phi \rangle \right]. \end{aligned}$$

Substituindo na integral, obtemos

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jk}(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) \phi dy \\
= & -\int_{\mathcal{O}} \sum_{j=1}^{n} div \left(\overrightarrow{w^j} \right) \phi dy \\
= & \int_{\mathcal{O}} \sum_{j=1}^{n} \left[\langle \overrightarrow{w^j}, \nabla_y \phi \rangle - div \left(\phi \overrightarrow{w^j} \right) \right] dy \\
= & \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{\mathcal{O}} \langle \overrightarrow{w^j}, \nabla_y \phi \rangle dy - \int_{\mathcal{O}} div \left(\phi \overrightarrow{w^j} \right) dy \right].
\end{aligned}
$$

Aplicando o Teorema da divergência para o j-ésimo campo vetorial, temos

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{O}} div \left(\phi \overrightarrow{w^j} \right) dy \\
= & \int_{\partial \mathcal{O}} \langle \phi \overrightarrow{w^j}, n(y) \rangle dS_y \\
= & \int_{\partial \mathcal{O}} \phi \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k}(t,y) n_j(y) dS_y.
\end{aligned}
$$

Somando em j, temos

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} div \left(\phi \overrightarrow{w^j} \right) dy \\
= & \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \mathcal{O}} \phi \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k}(t,y) n_j(y) dS_y \\
= & \int_{\partial \mathcal{O}} \phi \sum_{j=1}^{n} n_j(y) \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k}(t,y) dS_y \\
= & \int_{\partial \mathcal{O}} \frac{1}{K\left(r, r^{-1}, n(y)\right)} \Gamma(t,v) \phi dS_y.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $\Gamma(t,v) = 0$, concluímos

$$
\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} div \left(\phi \overrightarrow{w^j} \right) dy = 0.
$$

Substituindo em (3.6), obtemos

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial v}{\partial t}\phi + \sum_{j=1}^{n} \langle \overrightarrow{w^j}, \nabla_y \phi \rangle + \beta v \phi \right) dy = \int_{\mathcal{O}} \left(f(t,v) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) \phi dy,$$

isto é,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial v}{\partial t}\phi + \sum_{k,j=1}^{n} a_{jk}(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} + \beta v \phi \right) \mathrm{d}y \\ = \; &\int_{\mathcal{O}} \left(f(t,v) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) \phi \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Assim, uma vez v é solução clássica e ϕ tem regularidade o suficiente, para cada t, a nossa solução satisfaz a igualdade acima, isto é, o problema integral. Portanto, estamos interessados em encontrar soluções que satisfazem o problema integral acima, em espaços adequados menos regulares. Para tanto, precisamos definir o problema abstrato associado a (3.3) e mostrar que possui solução.

Note que para a formulação integral estar bem definida, basta que as funções sejam ao menos integráveis, no caso, utilizando a desigualdade de Hölder, para cada t, obtemos

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^{n} a_{jk}(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \mathrm{d}y \right| \leq \sum_{k,j=1}^{n} \sup_{y \in \overline{\mathcal{O}}} |a_{jk}(t,y)| \left\| \frac{\partial v}{\partial y_k} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \sum_{k=1}^{n} b_k(t,y) \frac{\partial v}{\partial y_k} \phi \mathrm{d}y \right| \leq \sum_{k,j=1}^{n} \sup_{y \in \overline{\mathcal{O}}} |b_k(t,y)| \left\| \frac{\partial v}{\partial y_k} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \|\phi\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Portanto, para que as integrais do lado esquerdo façam sentido é suficiente que $a_{jk}(t,\cdot), b_k(t,\cdot)$ sejam dados limitados na norma uniforme e $v(t,\cdot), \phi(t,\cdot) \in H^1(\mathcal{O})$, para cada t. Por último, nós precisamos tratar a não linearidade da equação, para a integral no interior mantemos a mesma construção, isto é,

$$\left| \int_{\mathcal{O}} f(t,v) \phi \mathrm{d}y \right| \leq \|f(t,v)\|_{L^2(\mathcal{O})} \|\phi\|_{L^2(\mathcal{O})},$$

ou seja, precisamos que $f(t, v(\cdot)) \in L^2(\mathcal{O})$ e $\phi(t,\cdot) \in L^2(\mathcal{O})$, para cada t.

Na próxima seção, vamos construir um problema abstrato e verificar as condições para que ele esteja localmente bem posto, isto é, exista uma única solução local para o problema abstrato, bem como verificar as condições para garantir que essa solução está globalmente definida.

3.3 Existência local e unicidade de solução

Nessa seção, vamos introduzir uma formulação abstrata para o problema (3.3), que está em um domínio fixo, e usar os resultados da Seção 2.3 para obter existência local e unicidade deste problema. Consequentemente, estaremos obtendo existência e unicidade para o problema original (3.1), onde o domínio está variando com o tempo.

Vamos dividir em dois estudos, primeiro um estudo sobre o operador e depois um estudo sobre a não linearidade.

Considere a família de operadores $A(t) : D(A(t)) \subset L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$, dada por

$$A(t)v := -\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\frac{\partial v}{\partial y_k}\right) + \beta v, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

onde $\beta > 0$, o coeficiente $a_{jk}(t,y)$, $j,k = 1,...,n$, é dado por (3.4) e o domínio de $A(t)$ é dado por

$$D(A(t)) = \left\{v \in H^2(\mathcal{O}) : \Gamma(t,v) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{O}\right\},$$

com $\Gamma(t,v) = K(r, r^{-1}, n(y)) \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}(t,y)\dfrac{\partial v}{\partial y_k}$.

Para a construção do problema abstrato, utilizaremos a teoria em [11, 12, 13], o qual exige em suas hipóteses que o domínio da família de operadores seja independente de $t \in \mathbb{R}$, pelo menos localmente. Para tal, considere a seguinte hipótese:

(H1) Hipótese sobre o difeomorfismo.

Considere

$$\begin{array}{rrcl} r: & \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (t,y) & \mapsto & r(t,y) \end{array}$$

tal que $r \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t,\cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeormorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$.

Suponha que $r^{-1}(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \overline{\mathcal{O}}_t$ e que a função $\frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(\cdot, x) : I \to \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente $\theta \in (0,1]$, uniformemente em $x \in \overline{\mathcal{O}}_t$, onde r_k^{-1} é a projeção do difeomorfismo r^{-1} na k-ésima coordenada, $i,k = 1,...,n$, e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo limitado qualquer.

Suponha também que existem funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \in C(\mathbb{R})$, e $p_{i,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_{i,k} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tais que

$$\frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y)) = h(t) p_{i,k}(y), \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall y \in \overline{\mathcal{O}},$$

com $i, k = 1, ..., n$.

Proposição 3.3.1 *Se a hipótese **(H1)** é satisfeita, então $D(A(t)) = D$ para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde*

$$D = \left\{ v \in H^2(\mathcal{O}) : \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_{j,k}(y) \frac{\partial v}{\partial y_k} = 0 \quad em \quad \partial\mathcal{O} \right\}, \tag{3.8}$$

com $\tilde{p}_{j,k}(y) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}(y) p_{i,k}(y)$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado qualquer.

Demonstração: Seja $v \in D(A(t))$ com $t \in I$, por definição,

$$D(A(t)) = \left\{ v \in H^2(\mathcal{O}) : \Gamma(t, v) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{O} \right\},$$

onde $\Gamma(t, v) = K(r, r^{-1}, n(y)) \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}(t, y) \frac{\partial v}{\partial y_k}$.

Por (3.4) temos

$$a_{jk}(t, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y)) \frac{\partial r_j^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t,y)).$$

Usando a hipótese **(H1)**, existem funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_{i,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que

$$a_{jk}(t, y) = h^2(t) \sum_{i=1}^{n} p_{i,k}(y) p_{i,j}(y), \tag{3.9}$$

para $t \in I$, $y \in \overline{\mathcal{O}}$ e $j, k = 1, ..., n$.

Vamos denotar por $\tilde{p}_{j,k}(y) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,k}(y) p_{i,j}(y)$. Assim,

$$\Gamma(t, v) = K(r, r^{-1}, n(y)) h^2(t) \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_{j,k}(y) \frac{\partial v}{\partial y_k}.$$

Afirmação: $h^2(t) > 0$ para qualquer que seja $t \in I$.

A positividade é trivial, vamos supor que $h^2(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in I$.

Portanto, para todo $i, k \in [1, n]$ obtemos como consequência

$$\frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t_0, r(t_0, y)) = 0, \quad \forall y \in \overline{\mathcal{O}}.$$

Logo, a matriz jacobiana de $r^{-1}(t_0, r(t_0, y))$ é identicamente nula, fato absurdo, pois para todo $t \in I$, inclusive t_0, $r^{-1}(t, \cdot)$ é um difeomorfismo e sua matriz jacobiana nunca é identicamente nula.

Logo, como $K(r, r^{-1}, n(y))h^2(t) > 0$, para todo $t \in I$, obtemos

$$\Gamma(t, v) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_{j,k}(y) \frac{\partial v}{\partial y_k} = 0.$$

Portanto,

$$D(A(t)) \subset \left\{ v \in H^2(\mathcal{O}) : \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_{j,k}(y) \frac{\partial v}{\partial y_k} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{O} \right\}, \quad \forall t \in I.$$

Por outro lado, se $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_{j,k}(y) \frac{\partial v}{\partial y_k} = 0$, claramente, $\Gamma(t, v) = 0$ para qualquer que seja $t \in I$.

Logo,

$$\left\{ v \in H^2(\mathcal{O}) : \sum_{k=1}^{n} n_k(y) \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_{j,k}(y) \frac{\partial v}{\partial y_k} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{O} \right\} \subset D(A(t)), \quad \forall t \in I.$$

□

Observação 3.3.2 *De agora em diante, vamos usar* $D(A(t)) = D$, $\forall t \in I$, *onde* $I \subset \mathbb{R}$ *é um limitado. Note que na Seção 2.3 é suficiente que os resultados sejam válidos localmente.*

Pelos resultados em [11, 12, 13, 20], precisamos que nosso operador, ou alguma extensão dele seja um operador localmente uniformemente setorial e localmente Hölder contínuo para algum limitado I, em particular vamos tomar $I = [\tau, T]$, em algum $(H^s(\mathcal{O}))'$, $s > \dfrac{1}{2}$, para isso vamos utilizar condições de elipticidade forte, a teoria de operadores e formas bilineares associadas.

Definição 3.3.3 (Elipticidade forte) *Dizemos que o operador $A(t)$ é uniformemente fortemente elíptico, se os coeficientes a_{jk}, $j,k=1,...,n$, satisfazem:*

1. $\displaystyle\sum_{k,j=1}^{n} a_{jk}(t,y)z_jz_k \geq \mathrm{C}\|z\|^2_{\mathbb{R}^n}$, *para todo* $z=(z_1,...,z_n)\in\mathbb{R}^n$ *e todo* $(t,y)\in[\tau,T]\times\overline{\mathcal{O}}$ *para alguma constante* $\mathrm{C}>0$.

2. $a_{jk}\in C^1([\tau,T]\times\overline{\mathcal{O}}), \quad j,k=1,...,n.$

De maneira análoga ao [20, Lema 4.2], podemos obter o seguinte resultado.

Lema 3.3.4 *Se a hipótese* ***(H1)*** *é satisfeita e os coeficientes a_{jk} são como em (3.4), então o operador $A(t)$ é uniformemente fortemente elíptico para todo $t\in[\tau,T]$.*

Demonstração: Pela hipótese **(H1)**, $r\in C^1(\mathbb{R}\times\overline{\mathcal{O}},\mathbb{R}^n)$ e $r(t,\cdot):\overline{\mathcal{O}}\to\overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeomorfismo de classe C^2 para todo $t\in\mathbb{R}$, então, em particular, $a_{jk}\in C^1([\tau,T]\times\overline{\mathcal{O}})$, $j,k=1,...,n$.

Portanto, basta mostrarmos a primeira desigualdade.

Denote por $M(t,y)=(a_{jk}(t,y))_{n\times n}$ uma matriz $n\times n$ com os coeficientes $a_{jk}(t,y)$ dados por (3.4). Podemos escrever $M(t,y)=T^*(t,y)T(t,y)$, onde $T(t,y):=G(t,r(t,y))$ com

$$G(t,x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_1}(t,x) & ... & \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_1}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_n}(t,x) & ... & \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_n}(t,x) \end{pmatrix},$$

e $T^*(t,y)$ é a matriz transposta de $T(t,y)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
M(t,y) &= \begin{pmatrix} a_{11}(t,y) & ... & a_{1n}(t,y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t,y) & ... & a_{nn}(t,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_i}(t,r(t,y))\frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_i}(t,r(t,y)) & ... & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_i}(t,r(t,y))\frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_i}(t,r(t,y)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_i}(t,r(t,y))\frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_i}(t,r(t,y)) & ... & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_i}(t,r(t,y))\frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_i}(t,r(t,y)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_1}(t,x) & ... & \dfrac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_n}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_1}(t,x) & ... & \dfrac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_n}(t,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_1}(t,x) & ... & \dfrac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_1}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_n}(t,x) & ... & \dfrac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_n}(t,x) \end{pmatrix} \\
&= T^*(t,y)T(t,y),
\end{aligned}
$$

onde $x = r(t,y)$.

Para todo $z \in \mathbb{R}^n$ vale

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,j=1}^{n} a_{jk}(t,y) z_j z_k &= \langle M(t,y)z, z\rangle = \langle T^*(t,y)T(t,y)z, z\rangle \\
&= \langle T(t,y)z, T(t,y)z\rangle = \|T(t,y)z\|_{\mathbb{R}^n}^2 ,
\end{aligned}
$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Como $r(t,\cdot)$ é um difeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$, então $T(t,y)$ é inversível e

$$\|T(t,y)z\|_{\mathbb{R}^n} \geq \left\|T^{-1}(t,y)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}^{-1} \|z\|_{\mathbb{R}^n} .$$

Por fim, devido a continuidade de $T^{-1}(t,y)$ e compacidade de $[\tau,T]\times\overline{\mathcal{O}}$ temos que $\left\|T^{-1}(t,y)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ é uniformemente limitada em $[\tau,T]\times\overline{\mathcal{O}}$. Logo, existe $\mathrm{c} = \mathrm{c}(r,\tau,T) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\sum_{k,j=1}^{n} a_{jk}(t,y) z_j z_k &= \|T(t,y)z\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &\geq \left\|T^{-1}(t,y)\right\|^{-2}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \|z\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &\geq \frac{1}{\mathrm{c}^2}\|z\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &= \mathrm{C}\,\|z\|^2_{\mathbb{R}^n},\end{aligned}$$

para todo $(t,y) \in [\tau,T]\times\overline{\mathcal{O}}$.

□

Lema 3.3.5 *Se a hipótese **(H1)** é satisfeita, então $A(t)$ é uma família de operadores autoadjuntos para todo $t \in [\tau,T]$.*

Demonstração: Precisamos mostrar que dado $v, u \in D(A(t)) = D$ e $t \in [\tau,T]$ vale a igualdade

$$\langle A(t)v, u\rangle_{L^2(\mathcal{O})} = \langle v, A(t)u\rangle_{L^2(\mathcal{O})}.$$

$$\begin{aligned}\langle A(t)v, u\rangle_{L^2(\mathcal{O})} &= \int_{\mathcal{O}} A(t)v(y)u(y)\mathrm{d}y \\ &= -\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\mathcal{O}}\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\frac{\partial v(y)}{\partial y_k}\right) + \beta v(y)\right]u(y)\mathrm{d}y \\ &= -\sum_{k,j=1}^{n}\left[\int_{\mathcal{O}}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\frac{\partial v(y)}{\partial y_k}\right)u(y) + v(y)\beta u(y)\right]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Green,

$$\begin{aligned}&-\sum_{k,j=1}^{n}\int_{O}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\frac{\partial v(y)}{\partial y_k}\right)u(y)\mathrm{d}y \\ &= \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\mathcal{O}} a_{jk}(t,y)\frac{\partial v(y)}{\partial y_j}\frac{\partial u(y)}{\partial y_k}\mathrm{d}y - \int_{\partial\mathcal{O}}\frac{1}{K(r,r^{-1},n(y))}\Gamma(t,v)u(y)\mathrm{d}S_y.\end{aligned}$$

Uma vez que $K(r, r^{-1}, n(y)) > 0$ e $v \in D$, então $\Gamma(t, v) = 0$.

$$-\sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jk}(t, y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} \right) \mathrm{d}y = \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} a_{jk}(t, y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_j} \frac{\partial u(y)}{\partial y_k} \mathrm{d}y.$$

Aplicando novamente o Teorema de Green,

$$\begin{aligned} & \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} a_{jk}(t, y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_j} \frac{\partial u(y)}{\partial y_k} \mathrm{d}y \\ = \quad - & \sum_{k,j=1}^{n} \int_{O} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{jk}(t, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} \right) v(y) \mathrm{d}y + \int_{\partial \mathcal{O}} \frac{1}{K(r, r^{-1}, n(y))} \Gamma(t, u) v(y) \mathrm{d}S_y. \end{aligned}$$

Usando que $u \in D$ temos $\Gamma(t, u) = 0$. E ainda, uma vez que $a_{jk} = a_{kj}$ obtemos

$$\sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} a_{jk}(t, y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_j} \frac{\partial u(y)}{\partial y_k} \mathrm{d}y = -\sum_{k,j=1}^{n} \int_{O} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{kj}(t, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} \right) v(y) \mathrm{d}y.$$

Portanto,

$$\langle A(t)v, u \rangle_{L^2(\mathcal{O})} = \langle v, A(t)u \rangle_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Como $0 \in \rho(A(t))$ para todo $t \in [\tau, T]$, $A(t)$ além de ser simétrico, é autoadjunto.

□

Lema 3.3.6 *Se a hipótese **(H1)** é satisfeita, então $A(t)$ pode ser estendido em um operador setorial $\tilde{A}(t) : H^1(\mathcal{O}) \subset (H^1(\mathcal{O}))' \to (H^1(\mathcal{O}))'$ para todo $t \in [\tau, T]$.*

Demonstração: Fixemos $t \in [\tau, T]$ e considere a seguinte forma billinear $B_t : H^1(\mathcal{O}) \times H^1(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$, tal que

$$B_t(u, v) = \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} a_{jk}(t, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} + \beta u(y) v(y) \mathrm{d}y, \quad u, v \in H^1(\mathcal{O}),$$

onde a_{jk} é dado por (3.4).

Vamos mostrar que B_t satisfaz as condições da Definição 2.2.15, isto é, B_t é uma forma bilinear contínua e coerciva.

Pelo Lema 3.3.4,

$$\begin{aligned} B_t(u,u) &= \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} a_{jk}(t,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_j}\frac{\partial u(y)}{\partial y_k} + \beta u^2(y)\mathrm{d}y, \\ &\geq \int_{\mathcal{O}} C\left\|\nabla u(y)\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta u^2(y)\mathrm{d}y \\ &\geq \delta\left\|u\right\|_{H^1(\mathcal{O})}^2, \end{aligned}$$

onde $\delta = \min\{C, \beta\}$ é independente de t.

Agora como $r \in C^1(\mathbb{R}\times\overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t,\cdot) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_t$ é um difeomorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $a_{jk} \in C^1(\mathbb{R}\times\overline{\mathcal{O}})$. Em particular, existe $c_{jk} > 0$, independente de t, tal que $\left\|a_{jk}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \leq c_{jk}$ para todo $t \in [\tau, T]$. Assim,

$$\begin{aligned} |B_t(u,v)| &= \left|\sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} a_{jk}(t,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_j}\frac{\partial v(y)}{\partial y_k} + \beta u(y)v(y)\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \left|a_{jk}(t,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_j}\frac{\partial v(y)}{\partial y_k} + \beta u(y)v(y)\right|\mathrm{d}y \\ &\leq \sum_{k,j=1}^{n} \left\|a_{jk}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \int_{\mathcal{O}} \left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_j}\frac{\partial v(y)}{\partial y_k}\right|\mathrm{d}y + \beta\int_{\mathcal{O}} |u(y)v(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \sum_{k,j=1}^{n} c_{jk}\left\|\frac{\partial u}{\partial y_j}\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\left\|\frac{\partial v}{\partial y_k}\right\|_{L^2(\mathcal{O})} + \beta\left\|u\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\left\|v\right\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ &\leq \max_{k,j=1,..,n} c_{jk}\sum_{k,j=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial y_j}\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\left\|\frac{\partial v}{\partial y_k}\right\|_{L^2(\mathcal{O})} + \beta\left\|u\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\left\|v\right\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ &\leq M\left\|u\right\|_{H^1(\mathcal{O})}\left\|v\right\|_{H^1(\mathcal{O})}, \end{aligned}$$

onde $M = \max\left\{\max_{k,j=1,..,n} c_{jk}, \beta\right\}$ é independente de t.

Portanto, B_t é uma forma bilinear coerciva e contínua definida em $H^1(\mathcal{O})$ e segue do Teorema 2.2.19 que os operadores lineares associados (suas partes) são setoriais em $H^1(\mathcal{O})$, $L^2(\mathcal{O})$ e $(H^1(\mathcal{O}))'$ com constante $\dfrac{M+\delta}{\delta}$.

Por fim, sejam $u, v \in D$. Note que $H^1(\mathcal{O})$ é denso em $C^1(\mathcal{O})$ e como $a_{jk}(t, \cdot) \in C^1(\overline{\mathcal{O}})$ para cada t, então aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned} B_t(u,v) = & - \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \left[\frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{jk}(t,y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} \right) \right] + \beta u(y) v(y) \mathrm{d}y \\ & + \int_{\partial \mathcal{O}} \frac{\Gamma(t,u)}{K(r, r^{-1}, n(y))} v \mathrm{d}S. \end{aligned}$$

Utilizando as condições sobre a fronteira dadas em D, isto é, $\Gamma(t, u) = 0$, obtemos

$$B_t(u,v) = - \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \left[\frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{jk}(t,y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} \right) + \beta u(y) \right] v(y) \mathrm{d}y, \quad \forall u, v \in D.$$

Agora se existe $A(t)$ tal que $\langle A(t)u, v \rangle = B_t(u, v)$, é claro que

$$A(t)u := - \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{jk}(t,y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} \right) + \beta u(y), \quad \forall u \in D.$$

$\square$

Mostramos que $A(t)$ pode ser estendido em um operador setorial de $H^1(\mathcal{O})$ em $(H^1(\mathcal{O}))'$ para algum ângulo ϕ no setor $\Sigma_{0,\phi}$ com constante $\dfrac{M+\delta}{\delta}$. Entretanto, na Subseção 2.2.3, apontamos que apesar da uniformidade setorial implicar na setorialidade em um setor $\Sigma_{0,\phi}$, o contrário pode não acontecer.

Teorema 3.3.7 *Se a hipótese **(H1)** é satisfeita, então existe $k > 0$ tal que $\tilde{A}(t) + kI : H^1(\mathcal{O}) \subset (H^1(\mathcal{O}))' \to (H^1(\mathcal{O}))'$ é um operador uniformemente setorial e uniformemente Hölder contínuo em $\mathcal{L}(H^1(\mathcal{O}), (H^1(\mathcal{O}))')$ para todo $t \in [\tau, T]$.*

Demonstração: Sejam $u \in H^1(\mathcal{O})$ e $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$. Usando o Lema 3.3.6, existem constantes M e δ independentes de $t \in [\tau, T]$ tais que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\mathcal{O})} &= \left\| [\lambda I - (-\tilde{A}(t))]^{-1} [\lambda I - (-\tilde{A}(t))] u \right\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\leq \frac{M+\delta}{\delta |\lambda|} \left\| (\lambda I + \tilde{A}(t)) u \right\|_{(H^1(\mathcal{O}))'}. \end{aligned}$$

Escolhendo $k > 1$, obtemos que $k + \lambda$ é um elemento de $\Sigma_{0,\phi}$, assim

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq \frac{M+\delta}{\delta|\lambda+k|}\left\|[(\lambda+k)I-(-\tilde{A}(t))]u\right\|_{(H^1(\mathcal{O}))'} \\
&\leq \frac{M+\delta}{\delta(|\lambda|+1)}\left\|[(\lambda+k)I-(-\tilde{A}(t))]u\right\|_{(H^1(\mathcal{O}))'}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\lambda + k \in \rho(-A(t))$ é claro que $\lambda \in \rho(-(A(t)+k))$, portanto, sabemos que existe

$$[\lambda I - (-\tilde{A}(t) - kI)]^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{0,\phi},$$

e vale

$$\left\|[\lambda I - (-\tilde{A}(t) - kI)]^{-1}\right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))', H^1(\mathcal{O}))} \leq \frac{M+\delta}{\delta(|\lambda|+1)},$$

isto é, o operador $\tilde{A}(t) + kI$ é uniformente setorial para $t \in [\tau, T]$.

Por último, vamos mostrar que o operador é uniformemente Hölder contínuo. Inicialmente, note que como consequência da hipótese **(H1)**, existe constante $c_{jk} > 0$, independente de t, tal que

$$\|a_{jk}(s,\cdot) - a_{jk}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \leq c_{jk}|s-t|^\theta, \quad \forall t,s \in [\tau, T], \tag{3.10}$$

para algum $\theta \in (0,1]$, onde a_{jk} é dado por (3.4).

Sejam $v \in D$, $\phi \in H^1(\mathcal{O})$ e $t, s \in [\tau, T]$, podemos aplicar o Teorema da divergência para obter

$$\left|\int_{\mathcal{O}} [A(t)v(y) - A(s)v(y)]\phi \mathrm{d}y\right| = |I|,$$

onde

$$I = \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^{n} [a_{jk}(s,y) - a_{jk}(t,y)] \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial \phi}{\partial y_k} \mathrm{d}y.$$

Estimando a integral I:

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^{n} \left| [a_{jk}(s,y) - a_{jk}(t,y)] \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial \phi}{\partial y_k} \right| \mathrm{d}y \\
&\leq \sum_{k,j=1}^{n} \sup_{y \in \overline{\mathcal{O}}} |a_{jk}(s,y) - a_{jk}(t,y)| \left\| \frac{\partial v}{\partial y_k} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial y_k} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
&\leq \sum_{k,j=1}^{n} \|a_{jk}(s,\cdot) - a_{jk}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

Usando (3.10) temos

$$|I| \leq c|t-s|^\theta \|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})},$$

onde $c = n \max\limits_{k,j=1,..,n} c_{jk}$.

Logo,

$$\left| \int_{\mathcal{O}} [A(t)v(y) - A(s)v(y)]\phi \mathrm{d}y \right| \leq c|t-s|^\theta \|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Tomando $u \in H^1(\mathcal{O})$, como D é denso em $H^1(\mathcal{O})$ existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ na qual podemos utilizar pra definir

$$\tilde{A}(t)u = \lim_{n\to\infty} A(t)u_n.$$

Pelo Teorema da convergência dominada e pela densidade, obtemos

$$\left\| [\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)]u \right\|_{(H^1(\mathcal{O}))'} \leq c|t-s|^\theta \|u\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{3.11}$$

Tomando o supremo com $\|u\|_{H^1(\mathcal{O})} = 1$ concluímos que

$$\left\| [\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)] \right\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathcal{O}),(H^1(\mathcal{O}))')} \leq c|t-s|^\theta.$$

□

Retomando a notação original, considere $A(t) : D \subset L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$ e $\overline{A}(t) = \tilde{A}(t) : H^1(\mathcal{O}) \subset (H^1(\mathcal{O}))' \to (H^1(\mathcal{O}))'$ sua extensão.

Proposição 3.3.8 *Se a hipótese **(H1)** é satisfeita e $\beta > 0$ é grande o suficiente, os operadores $A(t)A^{-1}(s)$ e $\overline{A(t)A^{-1}(s)}$ são uniformemente limitados em $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{O}))$ e $\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))')$ para $t, s \in [\tau, T]$, respectivamente.*

Demonstração: Pela hipótese **(H1)**, $\overline{A^{-1}(s)}$ é um operador uniformemente setorial e $0 \in \rho(\overline{A^{-1}(s)})$, então existem constantes postitivas M e δ independentes de $s \in [\tau, T]$ tais que

$$\left\| \overline{A^{-1}(s)} \right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))', H^1(\mathcal{O}))} \leq \frac{M + \delta}{\delta}.$$

Além disso, $\overline{A(t)}$ também é um isomorfismo de $H^1(\mathcal{O})$ em $(H^1(\mathcal{O}))'$, então existe uma constante positiva $C > 0$ independente de $t \in [\tau, T]$ tal que

$$\left\| \overline{A(t)} \right\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathcal{O}), (H^1(\mathcal{O}))')} \leq C.$$

Com esses dois fatos concluímos a primeira desigualdade, isto é, existe uma constante $L > 0$ independente de $t, s \in [\tau, T]$ tal que

$$\left\| \overline{A(t)A^{-1}(s)} \right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))')} \leq L.$$

Como $A(t)$ é um operador densamente definido e $\overline{A(t)}$ é a sua única extensão, por densidade, existe uma constante $\tilde{L} > 0$ independente em $t, s \in [\tau, T]$ tal que

$$\left\| A(t)A^{-1}(s) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{O}))} \leq \tilde{L}.$$

□

Observação 3.3.9 *Note que é suficiente que a constante $\beta > 0$ seja grande o suficiente para que o zero esteja no resolvente da famílía de operadores e o resolvente tenha decaimento de um operador uniformemente setorial.*

Note que caso β não fosse tal, bastava somar e subtrair o operador kI na equação abstrata em ambos os lados, gerando um deslocamento no operador e um termo linear em u na aplicação abstrata que representa as informações da f.

Por comodidade, vamos supor que β é grande o suficiente para que não seja necessário esse deslocamento.

Além disso, por abuso de notação vamos denotar a extensão de $A(t)$ e todas suas partes, isto é, as realizações, por $A(t)$.

Uma vez que $A(t)$ é autoadjunto e positivo, todas as suas potências imaginárias são limitadas (ver [28, Cap 2, Sec 8.2, pag. 106]), e pela Proposição 3.3.8, $A(t)A^{-1}(s)$ e $\overline{A(t)A^{-1}(s)}$ são uniformemente limitados. Dessa forma, estamos nas condições das Proposições 2.2.36, 2.2.37 e 2.2.38. Assim, podemos construir um escala de espaços de Banach que independem de t.

Considere a família de operadores $A(t) : D(A(t)) \subset L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$ dada por (3.7) e sejam $E^0 = L^2(\mathcal{O})$ e $E^1 = D(A(t)) = D$, onde o domínio D é independente de t e é dado por (3.8). Existe uma escala de espaços de potências fracionárias E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, associadas a $A(t)$, que satisfazem

$$E^\alpha \hookrightarrow H^{2\alpha}(\mathcal{O}), \quad \alpha \geq 0,$$

com $E^{\frac{1}{2}} = H^1(\mathcal{O})$.

Uma vez que a família de operadores $\{A(t) : t \in [\tau, T]\}$ já está nas condições do Teorema 2.3.5, então para obtermos a existência local e unicidade de soluções do problema (3.3), precisaremos estudar a não linearidade e sua respectiva aplicação abstrata. Para tanto, assumiremos a seguinte condição de regularidade e crescimento da não linearidade:

(H2) Hipótese de regularidade e crescimento da não linearidade.

Dados $n \geq 3$, $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado qualquer, suponha que $f(\cdot, u) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, para todo $u \in \mathbb{R}$, $f(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para todo $t \in I$, e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte condição de crescimento:

$$|\partial_u f(t, u)| \leq c(1 + |u|^\rho), \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

para alguma constante $c > 0$ independente de t e com coeficiente de crescimento $0 < \rho \leq \dfrac{4\alpha}{n - 4\alpha}$.

Usando o Teorema do Valor Médio, a condição de crescimento em **(H2)** implica na seguinte condição:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq c|u - v|(1 + |u|^\rho + |v|^\rho), \quad \forall t \in I \ \text{ e } \ \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Observação 3.3.10 *Note que se* $\alpha = \dfrac{1}{2}$*, isto é, para o estudo do problema* (3.3) *com dado inicial em* $E^{\frac{1}{2}} = H^1(\mathcal{O})$*, o coeficiente de crescimento em*

(H2) *ou* (3.12) *satisfaz* $0 < \rho \leq \dfrac{2}{n-2}$*. Em particular, para* $n = 3$*, obtemos* $0 < \rho \leq 2$*.*

Agora, sob as condições da hipótese **(H2)**, dado $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, vamos definir a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} \times E^\alpha & \to & E^0 \\ & (t,v) & \mapsto & F(t,v) = f^e(t,v) - \langle \vec{b}(t,\cdot), \nabla v \rangle \end{array} \tag{3.13}$$

onde $f^e : \mathbb{R} \times E^\alpha \to E^0$ é o operador de Nemitskiĭ associado a f, dado por $f^e(t,v)(y) := f(t, v(y))$ para qualquer $(t,v) \in \mathbb{R} \times E^\alpha$ e $y \in \mathcal{O}$, $\vec{b}(t,y) = (b_1(t,y), ..., b_n(t,y)) \in \mathbb{R}^n$, com cada coeficiente $b_k(t,y)$, $k = 1, ..., n$, dado em (3.5) e

$$\langle \vec{b}(t,y), \nabla v(y) \rangle = \sum_{k=1}^{n} b_k(t,y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_k}, \quad \text{para todo } (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}. \tag{3.14}$$

Com o operador abstrato dado por (3.7) e a não linearidade abstrata definida em (3.13), para $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, podemos escrever (3.3) como a seguinte equação parabólica abstrata

$$\begin{cases} \dot{v}(t) + A(t)v(t) = F(t, v(t)), & t > \tau \\ v(\tau) = v_\tau \in E^\alpha. \end{cases} \tag{3.15}$$

Agora, para obtermos existência e unicidade do problema parabólico abstrato (3.15), ainda falta verificarmos que a não linearidade abstrata $F : \mathbb{R} \times E^\alpha \to E^0$ satisfaz as condições da Seção 2.3.

Proposição 3.3.11 *Suponha que as hipóteses **(H1)** e **(H2)** sejam satisfeitas e sejam* $\frac{1}{2} \leq \alpha < \min\left\{1, \frac{n}{4}\right\}$ *e* $I \subset \mathbb{R}$ *limitado. Então, existe* $c > 0$ *independente de* t *tal que*

$$\|F(t,v) - F(t,w)\|_{E^0} \leq c \|v - w\|_{E^\alpha} (1 + \|v\|_{E^\alpha}^\rho + \|w\|_{E^\alpha}^\rho),$$

para todo $t \in I$ *e para todos* $v, w \in E^\alpha$*.*

Em particular, para todo $r > 0$*, existe uma constante* $L(r) > 0$*, tal que*

$$\|F(t,v) - F(t,w)\|_{E^0} \leq L(r) \|v - w\|_{E^\alpha}, \tag{3.16}$$

para todo $t \in I$ *e para todos* $v, w \in E^\alpha$ *com* $\|v\|_{E^\alpha}, \|w\|_{E^\alpha} < r$*, isto é, a aplicação* $F : (t, \cdot) : E^\alpha \to E^0$ *é localmente Lipschitz, uniformemente em* $t \in I$*.*

Demonstração: Dados $t \in I$ e $v, w \in E^\alpha$, usando (3.12) e as desigualdades de Hölder e Minkowski, obtemos

$$\begin{aligned}
& \|f^e(t,v) - f^e(t,w)\|_{E^0} \\
= \;& \|f^e(t,v) - f^e(t,w)\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
\leq \;& c\,\||v-w|(1+|v|^\rho + |w|^\rho)\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
\leq \;& c\,\|v-w\|_{L^{2q}(\mathcal{O})} \left(\|1+|v|^\rho + |w|^\rho\|_{L^{2q'}(\mathcal{O})}\right) \\
\leq \;& c\,\|v-w\|_{L^{2q}(\mathcal{O})} \left(|\mathcal{O}|^{\frac{1}{2q'}} + \||v|^\rho\|_{L^{2q'}(\mathcal{O})} + \||w|^\rho\|_{L^{2q'}(\mathcal{O})}\right) \\
\leq \;& c\,\|v-w\|_{L^{2q}(\mathcal{O})} \left(|\mathcal{O}|^{\frac{1}{2q'}} + \||v|^\rho\|_{L^{2q'}(\mathcal{O})} + \||w|^\rho\|_{L^{2q'}(\mathcal{O})}\right) \\
\leq \;& \tilde{c}\,\|v-w\|_{L^{2q}(\mathcal{O})} \left(1 + \|v\|^\rho_{L^{2q'\rho}(\mathcal{O})} + \|w\|^\rho_{L^{2q'\rho}(\mathcal{O})}\right),
\end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$ e $|\mathcal{O}|$ é a medida de $\mathcal{O}$.

Pelo Teorema 2.1.14,

$$E^\alpha \hookrightarrow H^{2\alpha}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{2q}(\mathcal{O}) \Longleftrightarrow q \leq \frac{n}{n-4\alpha}, \quad \text{com } 0 \leq \alpha < \min\left\{1, \frac{n}{4}\right\}.$$

Fixando $q = \dfrac{n}{n-4\alpha}$, temos

$$\frac{1}{q} = \frac{n-4\alpha}{n} \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{q'} = \frac{n-4\alpha}{n} \Longleftrightarrow \frac{1}{q'} = \frac{4\alpha}{n} \Longleftrightarrow q' = \frac{n}{4\alpha}.$$

Novamente, pelo Teorema 2.1.14,

$$E^\alpha \hookrightarrow H^{2\alpha}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{2q'\rho}(\mathcal{O}) \Longleftrightarrow q'\rho \leq \frac{n}{n-4\alpha}, \quad \text{com } \frac{1}{2} \leq \alpha < \min\left\{1, \frac{n}{4}\right\}.$$

Portanto, fixado q, q' basta que

$$q'\rho = \frac{n}{4\alpha}\rho \leq \frac{n}{n-4\alpha} \Longleftrightarrow \rho \leq \frac{4\alpha}{n-4\alpha},$$

para obtermos

$$E^\alpha \hookrightarrow L^{2q'\rho}(\mathcal{O}) \quad \text{e} \quad E^\alpha \hookrightarrow L^{2q}(\mathcal{O}).$$

Assim, existe uma constante $c_1 > 0$ independente de t tal que

$$\|f^e(t,v) - f^e(t,w)\|_{E^0} \leq c_1 \|v-w\|_{E^\alpha} (1 + \|v\|^\rho_{E^\alpha} + \|w\|^\rho_{E^\alpha}), \tag{3.17}$$

para todo $t \in I$ e para todos $v, w \in E^\alpha$.

Como $r \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t,\cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeomorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$, então $b_k \in C(\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}})$, $k = 1, ..., n$. Em particular, existe $c_k > 0$ independente de t tal que

$$\|b_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \leq c_k, \quad \forall t \in I.$$

Por outro lado, dados $t \in I$ e $v, w \in E^\alpha$ e usando (3.14), temos

$$\begin{aligned}
& \|\langle \vec{b}(t,\cdot), \nabla(v-w)\rangle\|_{E^0} \\
= \ & \|\langle \vec{b}(t,\cdot), \nabla(v-w)\rangle\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
= \ & \left[\int_{\mathcal{O}} |\langle \vec{b}(t,y), \nabla(v(y)-w(y))\rangle|^2 \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}} \\
= \ & \left[\int_{\mathcal{O}} \left|\sum_{k=1}^n b_k(t,y)\frac{\partial}{\partial y_k}(v(y)-w(y))\right|^2 \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq \ & \left[\int_{\mathcal{O}} \sum_{k=1}^n \left|b_k(t,y)\frac{\partial}{\partial y_k}(v(y)-w(y))\right|^2 \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}} \\
= \ & \left[\sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{O}} \left|b_k(t,y)\frac{\partial}{\partial y_k}(v(y)-w(y))\right|^2 \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq \ & \sum_{k=1}^n \left[\int_{\mathcal{O}} \left|b_k(t,y)\frac{\partial}{\partial y_k}(v(y)-w(y))\right|^2 \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq \ & \sum_{k=1}^n \|b_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \left[\int_{\mathcal{O}} \left|\frac{\partial}{\partial y_k}(v(y)-w(y))\right|^2 \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq \ & \max_{k=1,\ldots,n}\{c_k\} \sum_{k=1}^n \left\|\frac{\partial}{\partial y_k}(v-w)\right\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
\leq \ & \max_{k=1,..,n}\{c_k\} \|v-w\|_{E^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Logo, existe $c_2 > 0$ independente de t tal que

$$\|\langle \vec{b}(t,\cdot), \nabla(v-w)\rangle\|_{E^0} \leq c_2 \|v-w\|_{E^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.18}$$

para todo $t \in I$ e para todos $v, w \in E^\alpha$.

Agora, para $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$, como $E^{\alpha} \hookrightarrow E^{\frac{1}{2}}$ então existe $c_3 > 0$ independente de t tal que

$$\|\langle \vec{b}(t,\cdot), \nabla(v-w)\rangle\|_{E^0} \leq c_3 \|v-w\|_{E^{\alpha}}, \tag{3.19}$$

para todo $t \in I$ e para todos $v, w \in E^{\alpha}$.

Portanto, de (3.17), (3.18) e (3.19), existe $c > 0$ independente de t tal que

$$\|F(t,v) - F(t,w)\|_{E^0} \leq c \|v-w\|_{E^{\alpha}} (1 + \|v\|_{E^{\alpha}}^{\rho} + \|w\|_{E^{\alpha}}^{\rho}), \tag{3.20}$$

para todo $t \in I$ e para todos $v, w \in E^{\alpha}$.

Em particular, tomando em (3.20), $\|v\|_{E^{\alpha}}, \|w\|_{E^{\alpha}} < r$ com $r > 0$, obtemos a desigualdade (3.16).

□

Finalmente, podemos obter que o problema (3.15) está bem posto em E^{α}, para $\dfrac{1}{2} \leq \alpha < \min\left\{1, \dfrac{n}{4}\right\}$.

Teorema 3.3.12 *Suponha que as hipóteses **(H1)** e **(H2)** sejam satisfeitas e seja* $\dfrac{1}{2} \leq \alpha < \min\left\{1, \dfrac{n}{4}\right\}$. *Se* $v_\tau \in E^{\alpha}$, *com* $\|v_\tau\|_{E^{\alpha}} \leq r$, *para algum* $r > 0$, *então existe um* $T_{max} = T_{max}(\tau, \alpha, r) > \tau$ *tal que o problema (3.15) tem uma única mild solução maximal* $v(\cdot, \tau; v_\tau) : [\tau, T_{max}) \to E^{\alpha}$.

Dado $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$, *existe uma constante* $C > 0$ *tal que para todo* $x, y \in E^{\alpha}$, *satisfazendo* $\|x\|_{E^{\alpha}}, \|y\|_{E^{\alpha}} \leq r$, *temos*

$$\|v(t,\tau;x) - v(t,\tau;y)\|_{E^{\alpha}} \leq L(t-\tau)^{\beta-\alpha} \|x-y\|_{E^{\beta}}, \quad \forall t \in \tilde{I},$$

onde $\tilde{I} \subset [\tau, T_{max}(\tau,x)) \cap [\tau, T_{max}(\tau,y))$.

Demonstração: Segue da aplicação direta das Proposições 3.3.7 e 3.3.11 e do Teorema 2.3.5.

□

3.4 Existência global

Estudar a existência de atratores *pullback* de um problema, bem como seu comportamento assintótico, exige a constatação da existência global de soluções.

O resultado obtido da seção anterior garantiu a existência de uma única solução para o problema (3.15) em algum intervalo $[\tau, T_{max})$ e nada podemos inferir sobre o tamanho desse intervalo, muito menos inferir que $T_{max} = +\infty$.

Para provar que a solução local de (3.15) está globalmente definida, usaremos o Teorema 2.3.6, para tanto, precisaremos da seguinte condição de sinal sobre a não linearidade:

(H3) Hipótese de sinal da não linearidade.

Suponha que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte condição de sinal:

$$|f(t,u)| \leq k_1|u| + k_2, \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

para constantes $k_1, k_2 > 0$ independentes de t e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado qualquer.

Dessa forma, obtemos a seguinte estimativa para nossa aplicação não linear abstrata $F : \mathbb{R} \times E^\alpha \to E^0$ dada por (3.13).

Proposição 3.4.1 *Suponha que as hipóteses **(H1)**, **(H2)** e **(H3)** sejam satisfeitas e sejam* $\frac{1}{2} \leq \alpha < \min\left\{1, \frac{n}{4}\right\}$ *e* $I \subset \mathbb{R}$ *limitado. Então, existem* $K_1, K_2 > 0$ *independentes de* t *tais que*

$$\|F(t,v)\|_{E^0} \leq K_1 \|v\|_{E^\alpha} + K_2, \quad \forall t \in I \ e \ v \in E^\alpha.$$

Em particular, $F : \mathbb{R} \times E^\alpha \to E^0$ *leva subconjuntos limitados de* E^α *em subconjuntos limitados de* E^0*.*

Demonstração: Dados $t \in I$ e $v \in E^\alpha$, usando a desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\begin{aligned} \|f^e(t,v)\|_{E^0} &= \|f^e(t,v)\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ &\leq \|k_1|v| + k_2\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ &\leq k_1 \|v\|_{L^2(\mathcal{O})} + k_2|\mathcal{O}|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tilde{k}_1 \|v\|_{E^{\frac{1}{2}}} + \tilde{k}_2, \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $|\mathcal{O}|$ é a medida de $\mathcal{O}$ e $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 > 0$ não dependem de t.

Agora, para $\alpha > \dfrac{1}{2}$, como $E^\alpha \hookrightarrow E^{\frac{1}{2}}$ então existe $\tilde{k}_3 > 0$ independente de t tal que

$$\|f^e(t,v)\|_{E^0} \leq \tilde{k}_3 \|v\|_{E^\alpha} + \tilde{k}_2, \quad \forall t \in I \text{ e } \forall v \in E^\alpha. \tag{3.22}$$

Além disso, de (3.18) e (3.19), existe $\tilde{k}_4 > 0$ independente de t tal que

$$\|\langle \vec{b}(t,\cdot), \nabla v\rangle\|_{E^0} \leq \tilde{k}_4 \|v\|_{E^\alpha}, \quad \forall t \in I \text{ e } \forall v \in E^\alpha. \tag{3.23}$$

Assim, o resultado segue de (3.21), (3.22) e (3.23).

□

Como consequência desse resultado, obtemos a existência global de solução.

Teorema 3.4.2 *Suponha que as hipóteses **(H1)**, **(H2)** e **(H3)** sejam satisfeitas e seja* $\dfrac{1}{2} \leq \alpha < \min\left\{1, \dfrac{n}{4}\right\}$. *Se* $v_\tau \in E^\alpha$, *com* $\|v_\tau\|_{E^\alpha} \leq r$, *para algum* $r > 0$, *então a única mild solução* $v(t,\tau;v_\tau) \in E^\alpha$ *do problema (3.15) existe globalmente.*

Demonstração: Basta mostrarmos que a solução não explode em intervalos de tempo finitos, pois usando isso e o Teorema 2.3.6 teremos que essa solução pode ser estendida globalmente para todo $t \geq \tau$.

Inicialmente, pelo Teorema 3.3.12, sabemos que existe uma única *mild* solução para o problema (3.15) dada pela fórmula da variação das constantes

$$v(t,\tau;v_\tau) = U(t,\tau)v_\tau + \int_\tau^t U(t,s)F(s, v(s,\tau;v_\tau))\mathrm{d}s, \quad t \in [\tau, T_{max}),$$

com dado inicial $v(\tau,\tau;v_\tau) = v_\tau$, onde $U(t,\tau)$ é o processo de evolução associado ao problema homogêneo

$$\begin{cases} \dot{v}(t) + A(t)v(t) = 0, & t > \tau \\ v(\tau) = v_\tau \in E^\alpha. \end{cases} \tag{3.24}$$

A existência e unicidade do processo $U(t,\tau)$ é garantida pelo Teorema 2.2.25.

Para simplificar, vamos usar simplesmente $v(t) := v(t,\tau;v_\tau)$.

Assim, para $t \in (\tau, T]$ e $v_\tau \in E^\alpha$, com $\|v_\tau\|_{E^\alpha} \leq r$, para algum $r > 0$, usando o Lema 2.2.31 e Proposição 3.4.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{E^\alpha} &= \left\| U(t,\tau)v_\tau + \int_\tau^t U(t,s)F(s,v(s))\mathrm{d}s \right\|_{E^\alpha} \\
&\leq \|U(t,\tau)v_\tau\|_{E^\alpha} + \int_\tau^t \|U(t,s)F(s,v(s))\|_{E^\alpha} \mathrm{d}s \\
&\leq M_\alpha(t-\tau)^{-\alpha} \|v_\tau\|_{E^\alpha} + M_\alpha \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} \|F(s,v(s))\|_{E^0} \mathrm{d}s \\
&\leq M_\alpha(t-\tau)^{-\alpha} \|v_\tau\|_{E^\alpha} + M_\alpha \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}(K_1 \|v(s)\|_{E^\alpha} + K_2)\mathrm{d}s \\
&= M_\alpha(t-\tau)^{-\alpha} \|v_\tau\|_{E^\alpha} + M_\alpha K_1 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} \|v(s)\|_{E^\alpha} \mathrm{d}s \\
&+ M_\alpha K_2 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Note que, como $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ então $1 - \alpha > 0$. Daí, para $t \in (\tau, T]$, temos

$$\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s = -\frac{(t-s)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_\tau^t = \frac{(t-\tau)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{(T-\tau)}{1-\alpha}(t-\tau)^{-\alpha}. \tag{3.25}$$

Consequentemente, de (3.25) obtemos

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{E^\alpha} &\leq M_\alpha \left(\|v_\tau\|_{E^\alpha} + \frac{K_2(T-\tau)}{1-\alpha} \right)(t-\tau)^{-\alpha} \\
&+ M_\alpha K_1 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} \|v(s)\|_{E^\alpha} \mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.26) (ver [13, Corolário 16.6]), segue que existe uma constante $c(\alpha, M_\alpha, K_1, T) > 0$ tal que

$$\|v(t)\|_{E^\alpha} \leq M_\alpha \left(\|v_\tau\|_{E^\alpha} + \frac{K_2(T-\tau)}{1-\alpha} \right) c(\alpha, M_\alpha, K_1, T)(t-\tau)^{-\alpha}, \quad \forall t \in (\tau, T].$$

Portanto, dado $r > 0$, existe uma constante $C = C(r) > 0$ tal que

$$\sup\{\|v(t)\|_{E^\alpha} : \ \|v_\tau\|_{E^\alpha} \leq r, \ \tau \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ t \in [\tau, T_{max})\} \leq C.$$

Com isso concluímos que $\|v(t)\|_{E^\alpha}$ permanece limitada em intervalos de tempo finitos.

□

Observação 3.4.3 *O Teorema 3.4.2 implica que para cada $\tau \in \mathbb{R}$ e $v_\tau \in E^\alpha$, a solução $v(t,\tau;v_\tau)$ de (3.15), com $v(\tau,\tau;v_\tau) = v_\tau$, é definida para todo $t \geq \tau$, isto é, $T_{max} = +\infty$. Consequentemente, podemos definir um processo $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ em E^α por $S(t,\tau)v_\tau = v(t,\tau;v_\tau)$, $t \geq \tau$. Além disso, cada subconjunto limitado de E^α tem órbita e órbita pullback limitada.*

3.5 Existência de atratores *pullback*

Nessa seção, vamos provar que o problema (3.15) possui um atrator *pullback* em $E^{\frac{1}{2}}$.

Inicialmente, considere a família de operadores $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ definida em (3.7) com domínio $D(A(t)) = D$, onde D é dado por (3.8). Para estudar o comportamento assintótico da solução da equação de evolução parabólica (3.15), note que as condições sobre o operador $A(t)$, dadas nas Proposições 3.3.1 e 3.3.8 e no Teorema 3.3.7, valem uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, será necessário que a solução da equação de evolução homogênea (3.24) tenha decaimento exponencial para zero.

3.5.1 Comportamento assintótico do difeomorfirmo

Uma das formas de obter o decaimento exponencial da solução da equação de evolução homogênea (3.24) é estudando o comportamento assintótico do difeomorfismo, com base na seguinte hipótese:

(H4) Comportamento assintótico do difeomorfismo.

Suponha que existe uma constante $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to-\infty} h(t) = L.$$

Com a hipótese acima, será possível obter que

$$\left\|(A(t) - A(\tau))A^{-1}(r)\right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))')} \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty \text{ e } \tau \to -\infty, \tag{3.27}$$

uniformemente para todo $r \in \mathbb{R}$.

Por fim, com (3.27) e com base no Teorema 2.2.26, será possível garantir que o processo de evolução $U(t,\tau)$ de (3.24) tem decaimento exponencial.

Para verificarmos (3.27), usando a hipótese **(H1)** e (3.9), podemos escrever

$$a_{jk}(t,y) = h^2(t)\tilde{p}_{j,k}(y),$$

para $t \in \mathbb{R}$, $y \in \overline{\mathcal{O}}$ e $j,k = 1,...,n$, onde $\tilde{p}_{j,k}(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{i,k}(y)p_{i,j}(y)$.

Além disso, assim como na demonstração do Lema 3.3.4, podemos utilizar a notação acima para escrever a seguinte matriz $n \times n$,

$$M(t,y) = (a_{jk}(t,y))_{n\times n} = h^2(t)\left(\tilde{p}_{j,k}(y)\right)_{n\times n} = T^*(t,y)T(t,y),$$

onde $T(t,y) := G(t, r(t,y))$ com

$$G(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_1}(t,x) & ... & \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_1}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_n}(t,x) & ... & \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_n}(t,x) \end{pmatrix}.$$

Em particular, note que,

$$\begin{aligned} T(t,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_1}(t,r(t,y)) & ... & \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_1}(t,r(t,y)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial x_n}(t,r(t,y)) & ... & \frac{\partial r_n^{-1}}{\partial x_n}(t,r(t,y)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h(t)p_{1,1}(y) & ... & h(t)p_{1,n}(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h(t)p_{n,1}(y) & ... & h(t)p_{n,n}(y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$T(t,y) = h(t)\begin{pmatrix} p_{1,1}(y) & ... & p_{1,n}(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1}(y) & ... & p_{n,n}(y) \end{pmatrix}$$

e $T^*(t,y)$ é a matriz transposta de $T(t,y)$. E ainda,

$$\begin{aligned} M(t,y) &= \begin{pmatrix} a_{11}(t,y) & ... & a_{1n}(t,y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t,y) & ... & a_{nn}(t,y) \end{pmatrix} \\ &= h(t)^2 \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,1}(y) & ... & \tilde{p}_{1,n}(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{p}_{n,1}(y) & ... & \tilde{p}_{n,n}(y) \end{pmatrix} \\ &= h(t)^2 \begin{pmatrix} p_{1,1}(y) & ... & p_{n,1}(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{1,n}(y) & ... & p_{n,n}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1}(y) & ... & p_{1,n}(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1}(y) & ... & p_{n,n}(y) \end{pmatrix} \\ &= T^*(t,y)T(t,y). \end{aligned}$$

Pela hipótese **(H4)**, $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = L$. Assim, definimos $M^\infty(y) = \left(a_{jk}^\infty(y)\right)_{n\times n} = L^2\left(\tilde{p}_{j,k}(y)\right)_{n\times n}$ uma matriz $n\times n$. Note que, por construção,

$$\begin{aligned} M^\infty(y) &= \begin{pmatrix} a_{11}^\infty(y) & ... & a_{1n}^\infty(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^\infty(y) & ... & a_{nn}^\infty(y) \end{pmatrix} \\ &= L^2\left(\tilde{p}_{j,k}(y)\right)_{n\times n} \\ &= \left(\lim_{t\to\infty} h(t)^2\right) \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,1}(y) & ... & \tilde{p}_{1,n}(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{p}_{n,1}(y) & ... & \tilde{p}_{n,n}(y) \end{pmatrix} \\ &= \lim_{t\to\infty} T^*(t,y)T(t,y). \end{aligned} \tag{3.28}$$

De forma análoga,

$$M^\infty(y) = \lim_{t\to-\infty} T^*(t,y)T(t,y).$$

Consequentemente, olhando para cada projeção de $M(t,y)$ e $M^\infty(y)$, temos

$$\|a_{jk}(t,\cdot) - a_{jk}^\infty(\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \to 0, \quad \text{quando } t\to\pm\infty.$$

Note que, para $\tau, t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|a_{jk}(t,\cdot) - a_{jk}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} &= \|a_{jk}(t,\cdot) - a_{jk}^\infty(\cdot) + a_{jk}^\infty(\cdot) - a_{jk}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \\ &\le \|a_{jk}(t,\cdot) - a_{jk}^\infty(\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} + \|a_{jk}(\tau,\cdot) - a_{jk}^\infty(\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|a_{jk}(t,\cdot) - a_{jk}(\tau,\cdot)(\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty \text{ e } \tau \to -\infty.$$

Essa convergência será usada a seguir, para provar (3.27).

Proposição 3.5.1 *Suponha que as hipóteses **(H1)** e **(H4)** sejam satisfeitas. Então,*

$$\left\|(A(t) - A(\tau))A^{-1}(r)\right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))')} \to 0, \quad \textit{quando } t \to \infty \ \textit{e } \tau \to -\infty,$$

uniformemente para todo $r \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sejam $\tau, t \in \mathbb{R}$, $v \in D$ e $\phi \in H^1(\mathcal{O})$. Utilizando o Teorema de Green e desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
&|\langle (A(t) - A(\tau))v, \phi\rangle| \\
= & \left|\int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^{n} \left[-\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(t,y)\frac{\partial v}{\partial y_k}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(\tau,y)\frac{\partial v}{\partial y_k}\right)\right]\phi \mathrm{d}y\right| \\
= & \left|\sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \left[a_{jk}(t,y) - a_{jk}(\tau,y)\right] \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial \phi}{\partial y_j} \mathrm{d}y\right| \\
\leq & \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} |a_{jk}(t,y) - a_{jk}(\tau,y)| \left|\frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial \phi}{\partial y_j}\right| \mathrm{d}y \\
\leq & \sum_{k,j=1}^{n} \|a_{jk}(t,\cdot) - a_{jk}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \left\|\frac{\partial v}{\partial y_k}\right\|_{L^2(\mathcal{O})} \left\|\frac{\partial \phi}{\partial y_j}\right\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
\leq & \sum_{k,j=1}^{n} \|a_{jk}(t,\cdot) - a_{jk}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\|a_{jk}(t,\cdot) - a_{jk}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty \text{ e } \tau \to -\infty,$$

e D é denso em $H^1(\mathcal{O})$, obtemos

$$\|A(t) - A(\tau)\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathcal{O}),(H^1(\mathcal{O}))')} \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty \text{ e } \tau \to -\infty.$$

Como $0 \in \rho(-A(r))$, para todo $r \in \mathbb{R}$, então pelo Teorema 3.3.7, existe uma constante $M > 0$ independente de $r, \tau, t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left\|(A(r))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))', H^1(\mathcal{O}))} = \left\|[0I - (-A(r))]^{-1}\right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))', H^1(\mathcal{O}))} \leq \frac{M}{0+1} = M.$$

Logo,

$$\left\|(A(t) - A(\tau))A(r)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))')} \leq M \left\|(A(t) - A(\tau))\right\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathcal{O}), (H^1(\mathcal{O}))')}.$$

Portanto,

$$\left\|(A(t) - A(\tau))A^{-1}(r)\right\|_{\mathcal{L}((H^1(\mathcal{O}))')} \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty \text{ e } \tau \to -\infty,$$

uniformemente para todo $r \in \mathbb{R}$.

$\square$

3.5.2 Atratores *pullback*

Vamos utilizar o Teorema 2.4.18 para deduzir que o problema (3.15) possui um atrator *pullback* em $E^{\frac{1}{2}}$. Para tanto, precisamos mostrar que o processo $S(\cdot, \cdot)$ gerado por (3.15) é fortemente limitado dissipativo *pullback* (ver Definição 2.4.17) e também é assintoticamente compacto *pullback* (ver Definição 2.4.11).

Com base nos resultados da Subseção 3.5.1, concluímos que o processo de evolução $U(t, \tau)$ de (3.24) tem decaimento exponencial.

Proposição 3.5.2 *Suponha que as hipóteses **(H1)** e **(H4)** sejam satisfeitas. Então, existem constantes $b > 0$, $M > 0$ e $M_\alpha > 0$ tais que o processo de evolução $U(t, \tau) : E^\alpha \to E^\alpha$, $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, da equação homogênea (3.24) satisfaz*

$$\|U(t, \tau)w\|_{E^\alpha} \leq Me^{-b(t-\tau)} \|w\|_{E^\alpha}, \quad t \geq \tau, \tag{3.29}$$

e

$$\|U(t, \tau)w\|_{E^\alpha} \leq M_\alpha (t-\tau)^{-\alpha} e^{-b(t-\tau)} \|w\|_{E^0}, \quad t > \tau, \tag{3.30}$$

para todo $w \in E^\alpha$.

Demonstração: Da Proposição 3.3.8 temos que $A(t)A(\tau)^{-1}$ é uniformemente limitado, para $\tau, t \in \mathbb{R}$. Com isso e a Proposição 3.5.1, podemos aplicar o Teorema 2.2.26 e obter a desigualdade (3.29).

Já (3.30) segue do fato que

$$\|A^{\alpha}(\xi)U(t,\tau)w\|_{E^0} \leq MK(\alpha)(t-\tau)^{-\alpha}e^{-b(t-\tau)}\|w\|_{E^0},$$

conforme o Lema 2.2.31.

□

Agora, iremos provar que $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ é fortemente limitado dissipativo *pullback* no sentido da Definição 2.4.17.

Proposição 3.5.3 *Suponha que as hipóteses* ***(H1)****,* ***(H2)****,* ***(H3)*** *e* ***(H4)*** *sejam satisfeitas e seja* $\dfrac{1}{2} \leq \alpha < \min\left\{1, \dfrac{n}{4}\right\}$. *Se* $v_\tau \in E^{\alpha}$*, com* $\|v_\tau\|_{E^{\alpha}} \leq r$*, para algum* $r > 0$*, então existe uma constante* $R > 0$ *independente de* t *tal que*

$$\lim_{\tau \to -\infty} \|v(t,\tau;v_\tau)\|_{E^{\alpha}} \leq R,$$

onde $v(t,\tau;v_\tau)$ *é a solução de (3.15). Consequentemente, o processo* $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ *é fortemente limitado dissipativo pullback.*

Demonstração: Inicialmente, pelos Teoremas 3.3.12 e 3.4.2, sabemos que existe uma única *mild* solução global para o problema (3.15) dada pela fórmula da variação das constantes

$$v(t,\tau;v_\tau) = U(t,\tau)v_\tau + \int_{\tau}^{t} U(t,s)F(s,v(s,\tau;v_\tau))\mathrm{d}s, \quad t \geq \tau,$$

com dado inicial $v(\tau,\tau;v_\tau) = v_\tau$, onde $U(t,\tau)$ é o processo de evolução associado ao problema homogêneo (3.24). Para simplificar, vamos usar simplesmente $v(t) := v(t,\tau;v_\tau)$.

Agora, tomando $t \geq \tau$ e $v_\tau \in E^{\alpha}$, com $\|v_\tau\|_{E^{\alpha}} \leq r$, para algum $r > 0$, e usando as Proposições 3.5.2 e 3.4.1, temos

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{E^\alpha} &= \left\| U(t,\tau)v_\tau + \int_\tau^t U(t,s)F(s,v(s))\mathrm{d}s \right\|_{E^\alpha} \\
&\leq \|U(t,\tau)v_\tau\|_{E^\alpha} + \int_\tau^t \|U(t,s)F(s,v(s))\|_{E^\alpha} \mathrm{d}s \\
&\leq Me^{-b(t-\tau)} \|v_\tau\|_{E^\alpha} + M_\alpha \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} e^{-b(t-s)} \|F(s,v(s))\|_{E^0} \mathrm{d}s \\
&\leq Me^{-b(t-\tau)} \|v_\tau\|_{E^\alpha} + M_\alpha \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} e^{-b(t-s)} (K_1 \|v(s)\|_{E^\alpha} + K_2)\mathrm{d}s \\
&= Me^{-b(t-\tau)} \|v_\tau\|_{E^\alpha} + M_\alpha K_1 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} e^{-b(t-s)} \|v(s)\|_{E^\alpha} \mathrm{d}s \\
&+ M_\alpha K_2 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} e^{-b(t-s)} \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Tomando $\xi = b(t-s)$ temos $\mathrm{d}\xi = -b\mathrm{d}s$. Se $s = \tau$ então $\xi = b(t-\tau)$ e se $s = t$ então $\xi = 0$. Substituindo,

$$\begin{aligned}
\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} e^{-b(t-s)} \mathrm{d}s &= \int_0^{b(t-\tau)} b^\alpha \xi^{-\alpha} e^{-\xi} \frac{1}{b} \mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_0^\infty b^{\alpha-1} \xi^{-\alpha} e^{-\xi} \mathrm{d}\xi \\
&= b^{\alpha-1} \int_0^\infty \xi^{(1-\alpha)-1} e^{-\xi} \mathrm{d}\xi \\
&= b^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha), \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

onde $\Gamma(z) = \int_0^\infty \xi^{z-1} e^{-\xi} \mathrm{d}\xi$, com $\mathrm{Re}(z) > 0$, é a função Gama.

Consequentemente, de (3.31) obtemos

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{E^\alpha} &\leq Me^{-b(t-\tau)} \|v_\tau\|_{E^\alpha} + M_\alpha K_2 b^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \\
&+ M_\alpha K_1 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} e^{-b(t-s)} \|v(s)\|_{E^\alpha} \mathrm{d}s. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.32) (ver [9, Lema 6.23]) e usando novamente (3.31), temos

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{E^\alpha} &\leq [Me^{-b(t-\tau)} \|v_\tau\|_{E^\alpha} + M_\alpha K_2 b^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)] e^{M_\alpha K_1 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} e^{-b(t-s)} \mathrm{d}s} \\
&\leq [Mre^{-b(t-\tau)} + M_\alpha K_2 b^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)] e^{M_\alpha K_1 b^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $b > 0$ e $\tau \to -\infty$ implica que $t - \tau \to \infty$, segue que

$$\lim_{\tau \to -\infty} \|v(t,\tau;v_\tau)\|_{E^\alpha} = \lim_{t-\tau \to \infty} \|v(t,\tau;v_\tau)\|_{E^\alpha} \leq R,$$

onde $R = M_\alpha K_2 b^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)e^{M_\alpha K_1 b^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)} > 0$ não depende de t.

Consequentemente, isso prova que para qualquer conjunto limitado $B \subset E^\alpha$, existe uma constante $R > 0$ e um tempo $\tau_0(B)$ tal que

$$S(t,\tau)B \subset B_{E^\alpha}(0,R), \quad \text{para todo} \quad \tau \leq \tau_0(B) \quad \text{e} \quad t \geq \tau_0(B), \tag{3.33}$$

uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $B_{E^\alpha}(0,R)$ é a bola fechada em E^α com centro na origem e raio R, isto é, $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ é fortemente limitado dissipativo *pullback*.

$\square$

Observação 3.5.4 *É importante ressaltar que os resultados obtidos podem ser adaptados para o estudo dos atratores uniformes (ver [9]) do problema não autônomo (3.15).*

Considere a seguinte decomposição de $S(t,\tau)$,

$$S(t,\tau) = U(t,\tau) + L(t,\tau),$$

onde $U(t,\tau)$ é o operador solução do problema homogêneo (3.24) e

$$L(t,\tau)v_\tau = \int_\tau^t U(t,s)F(s,S(s,\tau)v_\tau)\mathrm{d}s. \tag{3.34}$$

Agora, vamos provar que $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ é assintoticamente compacto *pullback* em $E^{\frac{1}{2}}$ (ver Definição 2.4.11) usando o Teorema 2.4.25. Na verdade, como iremos usar o Teorema 2.4.25, vamos obter que $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ é fortemente assintoticamente compacto *pullback* (ver Definição 2.4.21) e, consequentemente, também é assintoticamente compacto *pullback*. Para tanto, precisamos verificar que $U(t,\tau)$ decai quando $t - \tau \to \infty$ e que $L(t,\tau)$ é compacto para todo $t > \tau$.

Proposição 3.5.5 *Suponha que as hipóteses **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** e **(H4)** sejam satisfeitas. Então, existem constantes $b > 0$ e $M > 0$ tais que*

$$\|U(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(E^{\frac{1}{2}})} \leq Me^{-b(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau.$$

Além disso, $L(t,\tau)$ é compacto em $E^{\frac{1}{2}}$ para todo $t>\tau$. Consequentemente, o processo $\{S(t,\tau): t\geq\tau\}$ é fortemente assintoticamente compacto pullback em $E^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração: Pela Proposição 3.5.2, o processo de evolução $U(t,\tau)$ associado ao problema homogêneo (3.24) e ao operador $A(t)$ tem decaimento exponencial, isto é, existem constantes $b>0$ e $M>0$ tais que

$$\|U(t,\tau)w\|_{E^{\frac{1}{2}}} \leq Me^{-b(t-\tau)}\|w\|_{E^{\frac{1}{2}}}, \quad t\geq\tau,$$

para todo $w\in E^{\frac{1}{2}}$.

Agora, vamos analisar o operador $L(t,\tau)$ dado por (3.34). Usando as Proposições 3.5.2 e 3.4.1, obtemos

$$\begin{aligned}\|L(t,\tau)v_\tau\|_{E^\alpha} &\leq \int_\tau^t \|U(t,s)F(s,S(s,\tau)v_\tau)\|_{E^\alpha}\,\mathrm{d}s\\ &\leq M_\alpha\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}e^{-b(t-s)}\|F(s,S(s,\tau)v_\tau)\|_{E^0}\,\mathrm{d}s\\ &\leq M_\alpha\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}e^{-b(t-s)}(K_1\|v(s,\tau;v_\tau)\|_{E^{\frac{1}{2}}}+K_2)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

para todo $\dfrac{1}{2}\leq\alpha<1$.

Pela Proposição 3.5.3, se $\|v_\tau\|_{E^{\frac{1}{2}}}\leq r$ para algum $r>0$, então $v(s,\tau;v_\tau)$ é limitada em $E^{\frac{1}{2}}$, no passado, uniformemente para todo $s\in\mathbb{R}$. Logo, existe uma constante $R>0$ independente de $s\in\mathbb{R}$ tal que

$$\|L(t,\tau)v_\tau\|_{E^\alpha}\leq M_\alpha(K_1R+K_2)\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}e^{-b(t-s)}\mathrm{d}s.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi=b(t-s)$, temos $\mathrm{d}\xi=-b\mathrm{d}s$. Se $s=\tau$ então $\xi=b(t-\tau)$ e se $s=t$ então $\xi=0$. Além disso, para cada $t\in\mathbb{R}$, quando $\tau\to-\infty$ então $b(t-\tau)\to\infty$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}e^{-b(t-s)}\mathrm{d}s &= \int_0^{b(t-\tau)} b^\alpha\xi^{-\alpha}e^{-\xi}\frac{1}{b}\mathrm{d}\xi\\ &\leq \int_0^\infty b^{\alpha-1}\xi^{-\alpha}e^{-\xi}\mathrm{d}\xi\\ &= b^{\alpha-1}\int_0^\infty \xi^{(1-\alpha)-1}e^{-\xi}\mathrm{d}\xi\\ &= b^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|L(t,\tau)v_\tau\|_{E^\alpha} \leq M_\alpha(K_1R+K_2)b^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

Isto é, $L(t,\tau)$ leva limitados de $E^{\frac{1}{2}}$ em limitados de E^α.

Como $E^\alpha \hookrightarrow E^{\frac{1}{2}}$ de forma compacta, para $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Assim, concluímos que $L(t,\tau)$ é compacto em $E^{\frac{1}{2}}$ para todo $t > \tau$.

Portanto, pelo Teorema 2.4.25, $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ é fortemente assintoticamente compacto *pullback* em $E^{\frac{1}{2}}$.

□

Finalmente, concluímos o principal resultado dessa seção.

Teorema 3.5.6 *Suponha que as hipóteses **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** e **(H4)** sejam satisfeitas. Então, $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ possui um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ em $E^{\frac{1}{2}}$ e*

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t) \text{ é limitado em } E^{\frac{1}{2}}. \tag{3.35}$$

Demonstração: Pelas Proposições 3.5.3 e 3.5.5, $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ é fortemente limitado dissipativo *pullback* e assintoticamente compacto *pullback*, logo aplicando o Teorema 2.4.18, obtemos que $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ possui um atrator *pullback* em $E^{\frac{1}{2}}$. Agora, devido a (3.33) concluímos (3.35).

□

3.6 Aplicações e exemplos

Nessa seção, vamos explorar uma aplicação com difeomorfismo linear e separável e um exemplo para mostrar que a classe de funções que satisfazem nossas hipóteses não é vazia.

3.6.1 Aplicação com difeomorfismo linear e separável

Vamos reescrever o problema parabólico semilinear (3.1), onde o domínio esta variando com o parâmetro t, em um novo problema num domínio fixo, utilizando uma mudança de coordenada, no caso particular em que temos um difeomorfismo linear e "separável". Cabe ressaltar que alguns autores trabalham apenas com esse caso particular de difeomorfismo. Por exemplo, para o caso de uma equação do calor, este tipo de difeomorfismo aparece em uma aplicação em [20]. Para o caso de uma equação da onda, todo o trabalho [22] é realizado para esse tipo de difeomorfismo e com domínio em $\mathbb{R}^3$.

Seja $r(t,y) = h(t)y$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in \overline{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^n$, onde $h \in C^1(\mathbb{R})$ com $h(t) \neq 0$ e $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Hölder contínua, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\mathcal{O}_t = h(t)\mathcal{O} \quad \text{e} \quad r^{-1}(t,x) = h^{-1}(t)x,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{O}_t$.

Note que

$$r(t,y) = (r_1(t,y), ..., r_n(t,y)) = (h(t)y_1, ..., h(t)y_n)$$

e

$$r^{-1}(t,x) = (r_1^{-1}(t,x), \ldots, r_n^{-1}(t,x)) = (h^{-1}(t)x_1, \ldots, h^{-1}(t)x_n).$$

Definimos a seguinte mudança de coordenada

$$v(t,y) = u(t, \underbrace{r(t,y)}_{x}), \quad \text{para todo } (t,y) \in [\tau, T] \times \mathcal{O}.$$

Podemos escrever de forma equivalente:

$$u(t,x) = v(t, \underbrace{r^{-1}(t,x)}_{y}), \quad \text{para todo } (t,x) \in [\tau, T] \times \mathcal{O}_t.$$

Para cada $i = 1, ..., n$, temos

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_j} \frac{\partial r_j^{-1}(t,x)}{\partial x_i} = \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_i} h^{-1}(t),$$

pois

$$r_j^{-1}(t,x) = h^{-1}(t)x_j \quad \text{e} \quad \frac{\partial r_j^{-1}(t,x)}{\partial x_i} = \begin{cases} h^{-1}(t), & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} = h^{-1}(t) \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_i}, \quad i = 1, ..., n.$$

Para cada $i = 1, ..., n$, temos

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i^2} = h^{-1}(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial r_k^{-1}(t,x)}{\partial x_i} = h^{-2}(t) \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_i^2},$$

pois

$$r_k^{-1}(t,x) = h^{-1}(t) x_k \quad \text{e} \quad \frac{\partial r_k^{-1}(t,x)}{\partial x_i} = \begin{cases} h^{-1}(t), & \text{se } k = i \\ 0, & \text{se } k \neq i. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_x u(t,x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} h^{-2}(t) \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_i^2} \\ &= h^{-2}(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_i^2} \\ &= h^{-2}(t) \Delta_y v(t,y). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial v(t,y)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_i} \frac{\partial r_i^{-1}(t,x)}{\partial t}.$$

Para cada $i = 1, ..., n$, $r_i^{-1}(t,x) = h^{-1}(t) x_i$ e $\dfrac{\partial r_i^{-1}(t,x)}{\partial t} = -h^{-2}(t) h'(t) x_i$. Usando que $x_i = r_i(t,y) = h(t) y_i$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i^{-1}(t,x)}{\partial t} &= -h^{-2}(t) h'(t) r_i(t,y) \\ &= -h^{-2}(t) h'(t) h(t) y_i \\ &= -h^{-1}(t) h'(t) y_i. \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \frac{\partial v(t,y)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_i}\left(-h^{-1}(t)h'(t)y_i\right) \\
&= \frac{\partial v(t,y)}{\partial t} - h^{-1}(t)h'(t)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(t,y)}{\partial y_i} y_i \\
&= \frac{\partial v(t,y)}{\partial t} - h^{-1}(t)h'(t)\langle \nabla_y v(t,y), y\rangle. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Por último a condição de fronteira,

$$\begin{aligned}
\nabla_x u(t,x) &= \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_1}, .., \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right) \\
&= \left(h^{-1}(t)\frac{\partial v(t,y)}{\partial y_1}, ..., h^{-1}(t)\frac{\partial v(t,y)}{\partial y_n}\right) \\
&= h^{-1}(t)\nabla_y v(t,y).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n_{\mathcal{O}_t}} = \langle \nabla_x u(t,x), n_{\mathcal{O}_t}(x)\rangle = \langle h^{-1}(t)\nabla_y v(t,y), n_{\mathcal{O}_t}(x)\rangle. \qquad (3.38)$$

Assim como no Lema 3.1.5, existe uma função Ψ tal que podemos escrever as fronteiras localmente como $\partial\mathcal{O} = \{y \in \mathbb{R}^n : \Psi(y) = 0\}$ e $\partial\mathcal{O}_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(r^{-1}(t,x)) = 0\}$.

Assim,

$$n_{\mathcal{O}_t}(x) = \nabla_x \Psi(\underbrace{r^{-1}(t,x)}_{y}) = \left(\frac{\partial \Psi(y)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \Psi(y)}{\partial x_n}\right).$$

Para cada $i = 1, ..., n$, temos

$$\frac{\partial \Psi(y)}{\partial x_i} = \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_i}\frac{\partial r_i^{-1}(t,x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_i} h^{-1}(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{O}_t}(x) &= \left(\frac{\partial \Psi(y)}{\partial x_1}, .., \frac{\partial \Psi(y)}{\partial x_n}\right) \\ &= \left(h^{-1}(t)\frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_1}, .., h^{-1}(t)\frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_n}\right) \\ &= h^{-1}(t)\left(\frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_1}, .., (t)\frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_n}\right) \\ &= h^{-1}\nabla_y \Psi(y) \\ &= h^{-1}(t) n_{\mathcal{O}}(y). \end{aligned}$$

Normalizando o vetor, obtemos

$$n_{\mathcal{O}_t}(x) = \frac{1}{\|h^{-1}(t)n_{\mathcal{O}}(y)\|_{\mathbb{R}^n}} h^{-1}(t) n_{\mathcal{O}}(y).$$

Note que estamos abusando da notação e usando novamente $n_{\mathcal{O}_t}$ para o vetor unitário.

Substituindo na derivada normal em (3.38), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,x)}{\partial n_{\mathcal{O}_t}} &= = \langle h^{-1}(t)\nabla_y v(t,y), n_{\mathcal{O}_t}(x)\rangle \\ &= \langle h^{-1}(t)\nabla_y v(t,y), \frac{1}{\|h^{-1}(t)n_{\mathcal{O}}(y)\|_{\mathbb{R}^n}} h^{-1}(t) n_{\mathcal{O}}(y)\rangle \\ &= \frac{h^{-2}(t)}{\|h^{-1}(t)n_{\mathcal{O}}(y)\|_{\mathbb{R}^n}} \langle \nabla_y v(t,y), n_{\mathcal{O}}(y)\rangle \\ &= \frac{h^{-2}(t)}{\|h^{-1}(t)n_{\mathcal{O}}(y)\|_{\mathbb{R}^n}} \frac{\partial v(t,y)}{\partial n_{\mathcal{O}}} \\ &= K(t,y)h^{-2}(t)\frac{\partial v(t,y)}{\partial n_{\mathcal{O}}}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde $K(t,y) = \dfrac{1}{\|h^{-1}(t)n_{\mathcal{O}}(y)\|_{\mathbb{R}^n}}$.

Usando (3.36), (3.37) e (3.39), podemos reescrever o problema (3.1) em um domínio fixo da seguinte forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - h^{-2}(t)\Delta_y v + \beta v = f(t,v) + h'(t)h^{-1}(t)\langle \nabla_y v, y\rangle, & (t,y) \in (\tau, T] \times \mathcal{O} \\ K(t,y)h^{-2}(t)\dfrac{\partial v}{\partial n_{\mathcal{O}}} = 0, & (t,y) \in (\tau, T] \times \mathcal{O} \\ v(\tau, y) = u_\tau(h(\tau)y), & y \in \mathcal{O} \end{cases} .$$

3.6.2 Exemplo de difeomorfismo

A título de mostrar que a classe de funções que satisfazem nossas hipóteses não é vazia. Vamos trazer um exemplo com funções dadas. Para tanto, precisamos construir um difeomorfismo com as seguintes propriedades:

1. $r \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t, \cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeormorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. $r(t, y) \neq 0$ para todo t, pois caso contrário $\mathcal{O}_t = \{(0, 0, 0)\}$.

3. As derivadas espaciais de primeira ordem das projeções de $r^{-1}(\cdot, x)$ precisam ser Hölder contínuas em intervalos limitados $I \subset \mathbb{R}$, uniformemente em $x \in \overline{\mathcal{O}}_t$.

4. Existem funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \in C(\mathbb{R})$, e $p_{i,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_{i,k} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tais que

$$\frac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t, y)) = h(t) p_{i,k}(y), \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall y \in \overline{\mathcal{O}},$$

   com $i, k = 1, ..., n$.

5. Por último, existe uma constante $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{t \to -\infty} h(t) = L.$$

Para isso considere o domínio em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathcal{O} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 1\}.$$

E o difeomorfismo

$$r : \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^3$$

dado por

$$r(t, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{e^{-t^2} + 1}(y_1, y_2, y_3),$$

com inversa

$$r^{-1}(t, x_1, x_2, x_3) = (e^{-t^2} + 1)(x_1, x_2, x_3).$$

Vamos mostrar que $r(t, y)$ satisfaz os 5 requisitos acima:

1. $r(\cdot, y_1, y_2, y_3)$ é uma função de classe C^∞, para todo $(y_1, y_2, y_3) \in \overline{\mathcal{O}}$, e linear na variável espacial, portanto $r \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ e $r(t, \cdot) : \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}_t$ é um difeormorfismo de classe C^2 para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. Não existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $r(t, y) = 0$, $\forall y \in \overline{\mathcal{O}} - \{(0, 0, 0)\}$, ou ainda, tal que $r^{-1}(t, x) = 0$, $\forall x \in \overline{\mathcal{O}}_t - \{(0, 0, 0)\}$.

3. As derivadas espaciais são computadas por

$$\frac{\partial r_i^{-1}(t, x)}{\partial x_i} = (e^{-t^2} + 1) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial r_k^{-1}(t, x)}{\partial x_i} = 0, \quad \text{se } i \neq k.$$

   Logo, todas as derivadas espaciais são Hölder contínuas em intervalos limitados $I \subset \mathbb{R}$.

4. Portanto, $\dfrac{\partial r_k^{-1}}{\partial x_i}(t, r(t, y)) = h(t) p_{i,k}(y)$, onde $h(t) = e^{-t^2} + 1$, $p_{i,k} = 1$ para todo $i = k = 1, ..., n$ e $p_{i,k} = 0$ para todo $i \neq k$.

5. Note que $h(t) = e^{-t^2} + 1 \to 1$, quando $t \to \pm\infty$.

   Destacamos que para os coeficientes a_{jk}, obtemos a forma

$$a_{jk}(t, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_k^{-1}(t, r(t, y))}{\partial x_i} \frac{\partial r_j^{-1}(t, r(t, y))}{\partial x_i} = (e^{-t^2} + 1)^2.$$

   E ainda,

$$M(t, y) = (e^{-t^2} + 1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^\infty(y),$$

   e "$A(t) \to (-\Delta + \beta I)$", quando $t \to \infty$.

Com as afirmativas acima, concluímos que $r(t, y)$ é um candidato a elemento da classe de funções que exigimos nesse trabalho. Por fim, vale ressaltar que esse exemplo foi motivado e adaptado a partir dos comentários de alguns autores, como [20] que garante que a hipótese **(H1)** é satisfeita quando $r(t, y) = h(t)y$, onde $h(t)$ é alguma função que não se anula e é limitada uniformemente.

Capítulo 4

Conclusão

Utilizando as hipóteses **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** e **(H4)** conseguimos realizar todos os objetivos deste trabalho, isto é, estudar existência local e unicidade, estender globalmente essa solução e estudar os atratores *pullback* associados a essa solução global.

Gostaríamos de sugerir que num futuro o problema (3.1) seja abordado com termos não lineares na fronteira, uma possível forma de abordar o problema seria utilizar a teoria abstrata em [2]. Sugerimos também estudar o mesmo problema com o operador principal não autoadjunto clássico dado pela fórmula do divergente com uma perturbação do primeiro grau, em busca de novas hipóteses ou resultados para o mesmo trabalho.

Seria interessante verificar a regularidade do atrator *pullback* e sua estrutura *gradiente-like*.

Além disso, seria interessante tentar utilizar a técnica de E-convergência e operadores de extensão, para poder comparar funções ou operadores definidos em espaços diferentes e continuar com os domínios variando com o tempo, como abordado em [4, 5].

Por fim, também seria interessante estudar a classe do difeomorfismo do problema, uma vez que introduzimos, em **(H1)**, uma hipótese genérica de que cada derivada da projeção da inversa do difeomorfismo composta com o difeomorfismo é separável. Contudo, não conseguimos achar difeomorfismos e operadores tão genéricos quanto a hipótese sugere, mante-lá dessa forma foi uma escolha afim de promover o estudo de exemplos tão genéricos quanto.

Todas as sugestões acima foram pensadas de alguma forma no decorrer deste trabalho e devido a dificuldades técnicas, optamos pelo caminho exposto por [18, 19, 20] e utilizando as teorias em [9, 11, 12, 13, 23], mas deixamos aqui como sugestão para contribuir com possíveis avanços na teoria abstrata utilizada no estudo qualitativo desse tipo de equação de evolução.

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams. *Sobolev space.* Academic Press - Columbia University, New York, 1975. 10, 17, 20, 26, 27, 28

[2] H. Amann. Parabolic evolution equations and nonlinear boundary conditions. *Journal of Differential Equations*, 72:201–269, 1988. 111

[3] H. Amann. *Linear and quasilinear parabolic problems. Abstract linear theory.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1995. 10, 17

[4] G. S. Aragão and S. M. Bruschi. Concentrated terms and varying domains in elliptic equations: Lipschitz case. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39:3450–3460, 2016. 11, 111

[5] J. M. Arrieta and S. M. Bruschi. Rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. the case of a lipschitz deformation. *Mathematical Models Methods In Applied Sciences*, 17:1555–1585, 2007. 11, 111

[6] P. S. Barbosa, A. L. Pereira, and M. C. Pereira. Continuity of attractors for a family of c^1 perturbations of the square. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 196:1365–1398, 2017. 11

[7] H. Brézis. *Functional analysis. Theory and applications. (Analyse fonctionnelle. Théorie et applications). Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise.* Paris: Masson, 1994. 66

[8] H. Brezis. *Functional analisys, sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Verlag, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2010. 10, 17, 20

[9] A. Carvalho, J. A. Langa, and J. Robinson. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, volume 182. Springer Science & Business Media, 2012. 10, 11, 17, 31, 54, 56, 57, 58, 60, 100, 101, 111

[10] A. N. Carvalho. *Equações semilineares parabólicas.* Junho 2001. 10, 17, 31, 32, 33, 34, 35, 36

[11] A. N. Carvalho, J. W. Cholewa, and M. J. Nascimento. On the continuation of solutions of non-autonomous semilinear parabolic problems. *Proceedings of Hedinburgh Mathematical Society*, 59:17–55, 2016. 10, 17, 39, 49, 50, 51, 74, 76, 111

[12] A. N. Carvalho and M. J. D. Nascimento. Singularly non-autonomous semilinear parabolic problems with critical exponents and applications. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S*, 02:449–471, 2009. 10, 17, 31, 39, 48, 49, 74, 76, 111

[13] D. Daners and M. P. K. *Abstract evolution equations, periodic problems and applications.* Longman Scientific and Technical, E.U.A, 1992. 10, 12, 17, 39, 52, 53, 54, 74, 76, 93, 111

[14] A. Fridman. Assymptotic behavior of solutions of parabolic equations of any order. *Acta Mathematica*, 106, 1961. 11, 12

[15] J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems.* American Mathematical Society, Rhode Island, 1988. 10

[16] D. D. Haroske and H. Triebel. *Distribuitions, sobolev spaces, elliptic equations.* EMS, Germany, 2008. 10, 17, 20, 26

[17] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981. 10

[18] D. Henry. *Pertubation of the boundary-value problems of partial differential equation.* Cambridge University Press, 2005. 11, 12, 16, 61, 66, 67, 111

[19] P. E. Kloeden, P. Marín-Rubio, and J. Real. Pullback attractors for a semilinear heat equation in a non-cylindrical domain. *Journal of Differential Equations*, 244:2062–2090, 2008. 12, 111

[20] P. E. Kloeden, J. Real, and C. Sun. Pullback attractors for a semilinear heat equation on time-varying domains. *Journal of Differential Equations*, 246:4702–4730, 2009. 12, 15, 16, 61, 76, 77, 104, 109, 111

[21] P. T. Lopes and M. C. Pereira. Dynamical boundary conditions in a noncylindrical domain for the laplace equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 465:379–402, 2018. 12

[22] T. F. Ma, P. Marín-Rubio, and C. M. S. C. no. Dynamics of wave equations with moving boundary. *Journal of Differential Equations*, 262:3317–3342, 2017. 12, 15, 104

[23] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and Applications to Partial Differential Equaitons*. Springer Verlag, New York,, 19830. 10, 11, 17, 31, 32, 37, 39, 42, 43, 44, 111

[24] A. L. Pereira and M. C. Pereira. Continuity of attractos for a reaction-diffusion problem with nonlinear boundary conditions with respect to variations of the domain. *Journal of Differential Equations*, 239, 2007. 11

[25] P. Sobolevskii. Equations of parabolic type in a banach space. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 10, 1961. 10

[26] X. Song, C. Sun, and L. Yang. Pullback attractors for 2d navier–stokes equations on time-varying domains. *Nonlinear Analysis:Real World Applications*, 45:437–460, 2019. 12

[27] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. NH Publishing Company, Amsterdan, New York, Oxford, 1978. 10, 17, 20, 26, 28, 29, 30

[28] A. Yagi. *Abstract parabolic evolution equations and their applications*. Springer Science & Business Media, 2009. 10, 17, 20, 26, 28, 31, 37, 38, 39, 86

[29] K. Yosida. *Functional analisys*. Springe Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980. 10, 17, 23, 37