

**Subálgebras Maximais das
Álgebras de Lie Semisimples,
Quebra de Simetria e
o Código Genético**

Fernando Martins Antoneli Júnior

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Michael Forger**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da CAPES

-São Paulo, agosto de 1998-

**Subalgebras Maximais das
Álgebras de Lie Semisimples,
Quebra de Simetria e
o Código Genético**

Este exemplar corresponde à redação final da
dissertação devidamente corrigida e defendida
por Fernando Martins Antoneli Júnior
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 30 de agosto de 1998.

COMISSÃO JULGADORA

- Prof. Dr. Frank Michael Forger (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos - IFSC-USP
- Prof. Dr. Said Najati Sidki - UnB

Resumo

O propósito deste trabalho é dar uma contribuição ao projeto iniciado por Hornos & Hornos que visa explicar as degenerescências do código genético como resultado de sucessivas quebras de simetria ocorridas durante sua evolução. O modelo matemático usado requer a construção de todas as representações irredutíveis de dimensão 64 das álgebras de Lie simples (chamadas representações de códons) e a análise de suas regras de ramificação sob redução a subálgebras. A classificação de todas as possibilidades é baseada na classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie semisimples obtida por Dynkin. No presente trabalho, os resultados de Dynkin são apresentados em linguagem e notação moderna e são aplicados ao problema de construir todas as possíveis cadeias de subálgebras maximais das álgebras de Lie simples $B_6 = \mathfrak{so}(13)$ e $D_7 = \mathfrak{so}(14)$ e de identificar aquelas que reproduzem as degenerescências do código genético.

Abstract

The purpose of this work is to make a contribution to the project initiated by Hornos & Hornos which aims at explaining the degeneracy of the genetic code as the result of a sequence of symmetry breakings that occurred during its evolution. The mathematical model employed requires the construction of all 64-dimensional irreducible representations of simple Lie algebras (called codon representations) and the analysis of their branching rules under reduction to subalgebras. The classification of all possibilities is based on Dynkin's classification of the maximal subalgebras of semisimple Lie algebras. In the present work, Dynkin's results are presented in modern language and notation and are applied to the problem of constructing all possible chains of maximal subalgebras of the simple Lie algebras $B_6 = \mathfrak{so}(13)$ and $D_7 = \mathfrak{so}(14)$ and of identifying all those that reproduce the degeneracies of the genetic code.

*Aos meus pais,
Fernando e Eideni.*

*... não é nada natural que existam “leis da natureza”,
muito menos ainda que o homem seja capaz de descobri-las.*

E. P. Wigner.

Agradecimentos

Ao Prof. Michael Forger, meu orientador, pelo incentivo, confiança, compreensão, paciência. A sua experiência como pesquisador e professor tornou possível a realização desta dissertação e contribuiu para a minha formação matemática e cultural.

Aos meus pais, Fernando e Eideni, a quem também dedico este trabalho, pelo apoio e compreensão desde que eu decidi seguir a carreira acadêmica.

Ao Daniel, Samuel, Sidnei, Walquíria, Cecília, Irene, Zé, Jorge, e Regina, colegas de pós-graduação, pela ajuda nas disciplinas e pelas horas de estudo em grupo, mas também pelas festas e momentos de descontração durante estes dois anos de estudo. Ao Raul, Rodrigo, e Lílian, colegas do tempo da graduação que também ingressaram na pós-graduação, pelo apoio e companheirismo. Ao Klaus, Fátima e Karin, colegas de CPUSP, onde descarregamos na bola de vôlei as tensões e irritações do dia a dia. Aos colegas Sandro e Mário, pela ajuda e pelas discussões sobre matemática, física, filosofia, biologia, etc, que foram muito úteis na hora de escrever esta dissertação.

Aos professores da graduação, em especial à Prof. Zara, a Prof. Maria Lucia, o Prof. Francisco Miraglia, o Prof. Jacob Zimbarg, o Prof. Ivan de Camargo, que inspiram seus alunos sendo profissionais exemplares.

Conteúdo

Introdução	vii
1 Subalgebras Maximais das Álgebras de Lie Semisimples	1
1.1 Conceitos Básicos	1
1.2 Estrutura das Subalgebras Maximais das Álgebras de Lie Semisimples	7
1.3 Álgebras de Lie Redutivas e Compactas	15
1.4 Classificação das Subalgebras Maximais das Álgebras de Lie Simples	23
2 Quebra de Simetrias no Código Genético	41
2.1 Modelo Geral de Quebra de Simetrias	41
2.2 Produto Tensorial e Restrição de Representações	44
2.3 Subalgebras Maximais das Álgebras Simples para o Código Genético	47
2.4 Cadeias de Subalgebras Semisimples para o Código Genético	62
A Cadeias Sobreviventes de B_6	83
B Cadeias Sobreviventes de D_7	93

Bibliografia

123

Lista de Figuras

1.1	Peso $(1, 1)$ da álgebra excepcional G_2	4
-----	--	---

Lista de Tabelas

1.1	Numeração das raízes simples no diagrama de Dynkin.	5
1.2	Álgebras de Lie clássicas.	25
1.3	Representações de dimensão mínima das álgebras clássicas.	26
1.4	Subálgebras maximais redutíveis.	28
1.5	Subálgebras maximais irredutíveis não simples.	31
1.6	Subálgebras irredutíveis simples não maximais.	35
1.7	Subálgebras maximais das álgebras de Lie excepcionais.	37
1.8	Espaços simétricos riemannianos excepcionais.	38
2.1	Representações de Códon.	48
2.2	Subálgebras maximais de $A_2 = \mathfrak{su}(3)$	51
2.3	Subálgebras maximais de $A_3 = \mathfrak{su}(4)$	51
2.4	Subálgebras maximais de $A_4 = \mathfrak{su}(5)$	51
2.5	Subálgebras maximais de $A_5 = \mathfrak{su}(6)$	52
2.6	Subálgebras maximais de $A_6 = \mathfrak{su}(7)$	52
2.7	Subálgebras maximais de $B_2 = \mathfrak{so}(5)$	53
2.8	Subálgebras maximais de $B_3 = \mathfrak{so}(7)$	53
2.9	Subálgebras maximais de $B_4 = \mathfrak{so}(9)$	53
2.10	Subálgebras maximais de $B_5 = \mathfrak{so}(11)$	54
2.11	Subálgebras maximais de $B_6 = \mathfrak{so}(13)$	54

2.12	Subalgebras maximais de $C_3 = \mathfrak{sp}(6)$	55
2.13	Subalgebras maximais de $D_4 = \mathfrak{so}(8)$	56
2.14	Subalgebras maximais de $D_5 = \mathfrak{so}(10)$	56
2.15	Subalgebras maximais de $D_6 = \mathfrak{so}(12)$	57
2.16	Subalgebras maximais de $D_7 = \mathfrak{so}(14)$	57
2.17	Subalgebras maximais de G_2	58
2.18	Subalgebras maximais de $C_{32} = \mathfrak{sp}(64)$	59
2.19	Subalgebras maximais de $D_{32} = \mathfrak{so}(64)$	60
2.20	Subalgebras maximais de $A_{63} = \mathfrak{su}(64)$	61
2.21	Multipletos que aparecem em B_6 e D_7	68
2.22	Cadeia 1 de D_7	69
2.23	Cadeia 2 de D_7	71
2.24	Cadeia 3 de D_7	74
2.25	Cadeia 4 de D_7	76
2.26	Cadeia 5 de D_7	79

Introdução

O propósito deste trabalho é dar uma contribuição ao projeto iniciado por Hornos & Hornos [22], onde é proposta uma nova abordagem ao problema da evolução do código genético. Neste trabalho, que teve grande repercussão na comunidade científica internacional [33], [50], os autores apresentam um modelo algébrico que interpreta as degenerescências do código genético como sendo o resultado de um processo evolutivo acompanhado por uma sequência de quebras de simetria e, portanto, intimamente relacionado com a teoria dos grupos. O principal resultado deste artigo é que no contexto dos grupos de Lie compactos existe um grupo, juntamente com uma cadeia descendente de subgrupos fechados conexos, que chega a reproduzir as degenerescências do código genético: este modelo é baseado no grupo simplético $Sp(6)$ e inclui a hipótese de um “congelamento” do processo de quebra no último passo. Mais recentemente, foi proposta uma ligeira generalização do esquema, dentro da qual surge uma nova cadeia, desta vez baseada no grupo G_2 [14].

Dentro deste contexto, nosso objetivo é abordar a questão da sistematização da análise que foi feita em [22]. Há dois aspectos que serão discutidos em capítulos separados e que a primeira vista são independentes, mas na verdade estão interligados pela aplicação dos resultados ao modelo algébrico para a evolução do código genético. No primeiro capítulo, apresentamos os resultados de Dynkin sobre a classificação das subálgebras semisimples maximais das álgebras de Lie semisimples [10, 11]. Estes resultados participam indiretamente da análise feita em [22], pois esta se baseia nas tabelas de McKay & Patera [35] que, por sua vez, foram construídas utilizando a classificação de Dynkin. A inclusão deste assunto se deve à tentativa de compreender melhor a estrutura das subálgebras maximais das álgebras de Lie semisimples, o que se mostrou um desafio devido à dificuldade de leitura dos trabalhos originais de Dynkin. A nossa meta aqui é apresentar os resultados de Dynkin numa linguagem moderna e de modo a facilitar a aplicação em problemas concretos. Não apresentamos as demonstrações de todos os teoremas, pois isto nos levaria muito longe, fugindo assim do objetivo principal do presente trabalho.

Um destes teoremas, porém, tem um papel fundamental na discussão do segundo capítulo e por isto damos também a sua demonstração: ele descreve a estrutura geral das subálgebras maximais das álgebras de Lie *semisimples* e reduz o problema da sua classificação ao da classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie *simples*. A parte do trabalho de Dynkin que apresentaremos sem demonstração é justamente a classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie simples. Por fim, mostraremos que a classificação das subálgebras semisimples maximais das álgebras de Lie semisimples complexas é essencialmente equivalente à classificação dos subgrupos conexos maximais (fechados) dos grupos de Lie compactos. Isto justifica a afirmação de que a análise das degenerescências do código genético no contexto das álgebras de Lie semisimples é, em princípio, equivalente à análise no contexto dos grupos de Lie compactos.

No segundo capítulo daremos uma sistematização da análise das cadeias descendentes de subálgebras maximais das álgebras de Lie simples que admitem representações irredutíveis de dimensão 64: são estes os candidatos para um modelo algébrico para a evolução do código genético. Esta análise tem por objetivo identificar aquelas cadeias que reproduzem a degenerescência do código genético. Como o número de cadeias cresce muito em função do posto da álgebra, torna-se necessário formular critérios [23] para eliminar cadeias que, por algum motivo ou outro, são incapazes de reproduzir a distribuição de multipletos encontrada no código genético, independentemente dos eventuais passos posteriores no processo de quebra de simetrias. Em [23], tais critérios de eliminação prévia – ou seja, de identificação de cadeias “não-sobreviventes” – foram explicitamente formulados e aplicados às cadeias oriundas das álgebras de Lie simples de posto baixo (menor ou igual a 3) que possuem representações irredutíveis de dimensão 64. No caso das álgebras de Lie simples de posto médio que possuem representações irredutíveis de dimensão 64, que são $B_6 = \mathfrak{so}(13)$ e $D_7 = \mathfrak{so}(14)$, essa simplificação torna-se ainda mais importante, pois mesmo após a aplicação dos critérios de eliminação estipulados em [23], encontramos várias cadeias sobreviventes, 2 para B_6 e 9 para D_7 , que precisam ser analisadas até o fim, sendo que uma das cadeias para D_7 realmente fornece as degenerescências do código genético [23]. Os detalhes desta análise podem ser encontrados na dissertação de Mestrado de L. Braggion [3].

Uma das metas principais de presente trabalho é incluir nesta análise uma outra possibilidade de construir subálgebras maximais, possibilidade esta que não foi contemplada em [22] (em [23] ela já foi incorporada ao esquema geral) mas que é legítima de acordo com o teorema de estrutura das subálgebras maximais das álgebras de Lie semisimples. Com esta extensão, surgem novas cadeias, aumentando mais ainda o número de cadeias a serem analisadas e, no caso de D_7 , aparecem mais 7 cadeias que realmente fornecem as degenerescências do código genético. Por outro lado, é possível garantir que com essa extensão, a análise está completa: não há nenhuma outra possibilidade de construir cadeias descendentes de subálgebras das álgebras de Lie simples que possuem representações irredutíveis de dimensão 64 capazes de fornecer as degenerescências do código genético.

Desta forma, a implementação do projeto proposto em [22] no contexto dos grupos de Lie compactos está completa. Porém já foi observado [22] que uma análise da mesma natureza pode ser realizada em outros contextos, tais como: grupos finitos, grupos quânticos e superálgebras de Lie. Algumas destas opções estão atualmente sob investigação.

Quanto ao estilo de apresentação escolhido, optamos por não incluir conceitos e resultados básicos da teoria geral dos grupos e álgebras de Lie, tendo em vista a extensa literatura sobre esta área [2], [6], [7], [15], [19], [20], [24], [39], [45], [44], [47], [48], [54], em particular os clássicos [8], [58], [61]. A única exceção se dá com respeito aos resultados de Dynkin sobre a classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie semisimples, cujas fontes principais ainda são os trabalhos originais de Dynkin [10, 11] complementados por alguns “surveys” [53], [42]. Estes dois últimos trabalhos fornecem uma visão geral dos teoremas de Dynkin (sem os detalhes das demonstrações) e servem de guia para a leitura de [10, 11], sendo que [42] apresenta estes resultados em linguagem moderna. Mas mesmo neste caso, a apresentação procura dar ênfase à aplicação dos teoremas em casos concretos, colocando os resultados em tabelas de fácil consulta. Também incluímos uma generalização da teoria de formas reais compactas para álgebras de Lie reductivas, o que permite estender a teoria de Dynkin, originalmente formulada no contexto das álgebras de Lie semisimples, à classe das álgebras de Lie reductivas e leva a uma formulação mais uniforme e mais transparente dos resultados. Finalmente, apresentamos no segundo capítulo uma lista de todas as subálgebras maximais das álgebras de Lie simples que aparecem dentro de alguma cadeia oriunda de uma álgebra de Lie simples que possui uma representação irreduzível de dimensão 64, com a finalidade de exemplificar a aplicação dos teoremas de classificação que enunciamos no primeiro capítulo. Estas listas de subálgebras fazem parte das tabelas de McKay & Patera [35], onde porém não se explica como foram construídas.

Subálgebras Maximais das Álgebras de Lie Semisimples

Neste capítulo, as álgebras de Lie podem ser reais ou complexas, a menos que se mencione explicitamente o corpo base, e todas as representações são de dimensão finita.

1.1 Conceitos Básicos

Nesta seção daremos algumas definições elementares que constam da literatura especializada em álgebras de Lie, com o intuito de uniformizar nossa terminologia.

Se \mathfrak{h} é uma subálgebra de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} e φ é um automorfismo de \mathfrak{g} então $\varphi(\mathfrak{h})$ também é uma subálgebra de \mathfrak{g} . Portanto, como existe uma infinidade de automorfismos em uma álgebra de Lie, existe uma infinidade de subálgebras isomorfas entre si. É fácil ver que tais subálgebras formam uma classe de equivalência, e por isso basta classificar estas classes de equivalência para que se tenha um classificação das subálgebras.

Definição 1.1.1. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Sejam \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 duas subálgebras de \mathfrak{g} . Dizemos que \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 são conjugadas em \mathfrak{g} se existe um automorfismo interno σ de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{g}_1 = \sigma(\mathfrak{g}_2)$.*

É fácil mostrar que a conjugação constitui uma relação de equivalência no conjunto das subálgebras de uma álgebra de Lie, e as classes de equivalência correspondentes são chamadas *classes de conjugação de subálgebras*.

As vezes é comum que uma subálgebra seja definida através de um homomorfismo, portanto precisamos formular uma noção análoga de conjugação quando estamos nesta situação.

Definição 1.1.2. *Sejam \mathfrak{f} e \mathfrak{g} duas álgebras de Lie. Uma inclusão de \mathfrak{f} em \mathfrak{g} é um homomorfismo injetor $\varphi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ de álgebras de Lie.*

É claro que, se φ é uma inclusão de \mathfrak{f} em \mathfrak{g} , o conjunto $\varphi(\mathfrak{f})$ é uma subálgebra de \mathfrak{g} isomorfa a \mathfrak{f} . Por outro lado se $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$, então a aplicação identidade de \mathfrak{g} restrita a \mathfrak{f} é uma inclusão de \mathfrak{f} em \mathfrak{g} .

Definição 1.1.3. *Sejam \mathfrak{f} e \mathfrak{g} duas álgebras de Lie e $\varphi, \psi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ duas inclusões de \mathfrak{f} em \mathfrak{g} . Dizemos que φ e ψ são conjugados se existe um automorfismo interno σ de \mathfrak{g} tal que $\varphi = \sigma \circ \psi$.*

A proposição seguinte é a chave para entender como se relacionam os conceitos de conjugação de subálgebras e conjugação de inclusões.

Proposição 1.1.1. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{f} duas álgebras de Lie. Sejam $\varphi, \psi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ duas inclusões e $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$. Então $\varphi(\mathfrak{f}) = \sigma(\psi(\mathfrak{f}))$ se e somente se $\varphi = \sigma \circ \psi \circ \tau$, onde $\tau \in \text{Aut}(\mathfrak{f})$.*

DEMONSTRAÇÃO. É óbvio que $\varphi = \sigma \circ \psi \circ \tau$ implica $\varphi(\mathfrak{f}) = \sigma(\psi(\mathfrak{f}))$. Reciprocamente, suponhamos que $\varphi(\mathfrak{f}) = \sigma(\psi(\mathfrak{f}))$, como φ e $\sigma \circ \psi$ são inclusões temos que:

$$\tilde{\varphi} : \mathfrak{f} \longrightarrow \varphi(\mathfrak{f})$$

$$\sigma \circ \tilde{\psi} : \mathfrak{f} \longrightarrow \varphi(\mathfrak{f})$$

são isomorfismos de álgebras de Lie. Consideremos $(\sigma \circ \tilde{\psi})^{-1} : \varphi(\mathfrak{f}) \rightarrow \mathfrak{f}$ o isomorfismo inverso a $\sigma \circ \tilde{\psi}$; então o isomorfismo de álgebras de Lie dado por

$$\tau = (\sigma \circ \tilde{\psi})^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}$$

é um automorfismo de \mathfrak{f} que satisfaz $\varphi = \sigma \circ \psi \circ \tau$. ■

Corolário 1.1.1. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{f} duas álgebras de Lie e $\varphi, \psi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ duas inclusões. Se todos os automorfismos de \mathfrak{f} são internos, as subálgebras $\varphi(\mathfrak{f})$ e $\psi(\mathfrak{f})$ são conjugadas em \mathfrak{g} se e somente se as inclusões φ e ψ são conjugadas.*

DEMONSTRAÇÃO. Se as inclusões φ e ψ são conjugadas é óbvio que as subálgebras $\varphi(\mathfrak{f})$ e $\psi(\mathfrak{f})$ são conjugadas. Reciprocamente, se $\varphi(\mathfrak{f})$ e $\psi(\mathfrak{f})$ são subálgebras conjugadas, a proposição anterior implica que existem $\tau \in \text{Aut}(\mathfrak{f})$ e $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ tais que $\varphi = \sigma \circ \psi \circ \tau$. Mas por hipótese τ é um automorfismo interno de \mathfrak{f} , ou seja $\tau = \exp \text{ad}(Y_1) \cdot \dots \cdot \exp \text{ad}(Y_k)$ com $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{f}$. Podemos considerar $\tilde{\tau} = \exp \text{ad}(\psi(Y_1)) \cdot \dots \cdot \exp \text{ad}(\psi(Y_k))$, que é um automorfismo interno de \mathfrak{g} . Porém $\tilde{\tau}$ restrito à subálgebra $\psi(\mathfrak{f})$ é um automorfismo interno desta subálgebra.

Definimos então $\varsigma = \sigma \circ \tilde{\tau}$, que também é um automorfismo interno de \mathfrak{g} . Seja agora $X \in \mathfrak{f}$, então

$$\begin{aligned} (\varsigma \circ \psi)(X) &= (\sigma \circ \tilde{\tau} \circ \psi)(X) \\ &= \sigma((\exp \operatorname{ad}(\psi(Y_1)) \cdot \dots \cdot \exp \operatorname{ad}(\psi(Y_k)))(\psi(X))) \\ &= \sigma(\psi(\exp \operatorname{ad}(Y_1) \cdot \dots \cdot \exp \operatorname{ad}(Y_k))(X)) \\ &= \sigma((\psi \circ \tau)(X)) = (\sigma \circ \psi \circ \tau)(X) = \varphi(X), \end{aligned}$$

ou seja, temos a conjugação de inclusões $\varphi = \varsigma \circ \psi$. ■

Quando \mathfrak{f} possuir automorfismos externos devemos determinar as classes de conjugação de homomorfismos e depois verificar quais classes são transformadas umas nas outras por automorfismos externos de \mathfrak{f} . Isto esclarece, em princípio, a relação entre conjugação de subálgebras e conjugação de inclusões.

Há ainda uma noção mais fraca que a de conjugação que foi introduzida por Dynkin e é muito importante para a formulação do teorema de classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie excepcionais.

Definição 1.1.4. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \subset \mathfrak{g}$ duas subálgebras. Dizemos que \mathfrak{f}_1 e \mathfrak{f}_2 são linearmente conjugadas ou L -conjugadas se para toda representação $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ em um espaço vetorial complexo V as subálgebras $\rho(\mathfrak{f}_1)$ e $\rho(\mathfrak{f}_2)$ são conjugadas em $\mathfrak{gl}(V)$. Analogamente, se \mathfrak{f} é uma álgebra de Lie e $\varphi_1, \varphi_2 : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ são inclusões dizemos que φ_1 e φ_2 são linearmente conjugadas ou L -conjugadas se para toda representação $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ em um espaço vetorial complexo V as representações $\rho \circ \varphi_1 : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $\rho \circ \varphi_2 : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ são equivalentes.*

A L -conjugação também é uma relação de equivalência no conjunto das subálgebras de uma álgebra de Lie. É fácil mostrar que se duas subálgebras são conjugadas então elas são L -conjugadas, porém a recíproca é falsa. O máximo que se pode dizer, em geral, é que toda classe de L -conjugação é a reunião de certas classes de conjugação.

Consideremos uma álgebra de Lie \mathfrak{g} e fixemos uma subálgebra $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$. Seja $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de \mathfrak{g} em um espaço vetorial complexo V . Vamos definir a *restrição da representação ρ à subálgebra \mathfrak{f}* pondo

$$\operatorname{Res}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{g}}(\rho) : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Claramente $\operatorname{Res}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{g}}(\rho)$ é uma representação de \mathfrak{f} em V . Supondo agora que ρ é irredutível e que $\operatorname{Res}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{g}}(\rho)$ é completamente redutível definimos a *regra de ramificação de ρ com respeito a \mathfrak{f}* como sendo o conjunto dos pares ordenados de representações irredutíveis e respectivas multiplicidades $\{(\pi_{\ell}, c_{\ell}) \mid \ell = 1, \dots, n\}$ de \mathfrak{f} tais que

$$\operatorname{Res}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{g}}(\rho) = \bigoplus_{\ell=1}^n c_{\ell} \pi_{\ell}$$

É claro que a regra de ramificação só depende da representação ρ e da classe de L -conjugação de \mathfrak{f} .

Introduziremos agora uma notação que será muito útil para representar regras de ramificação. Suponhamos que \mathfrak{g} seja uma álgebra de Lie simples de posto r e fixemos uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . Seja $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ o sistema de raízes de \mathfrak{g} e $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ um conjunto de raízes simples em Δ . Seja (\cdot, \cdot) um produto escalar em \mathfrak{h}^* , invariante sob a ação do grupo de Weyl \mathcal{W} de Δ e normalizado pela condição

$$(\alpha, \alpha) = 2$$

para toda raiz longa $\alpha \in \Delta$: existe um único produto escalar em \mathfrak{h}^* com esta normalização, chamado *produto escalar padrão*. Considere a base $\Pi' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ de \mathfrak{h}^* definida por

$$(\alpha_i, \lambda_j) = \delta_{ij}; \quad (1.1)$$

os elementos desta base chamam-se *pesos fundamentais*. Para $\vartheta \in \mathfrak{h}^*$ qualquer, se escrevermos

$$\vartheta = \sum_{i=1}^r p_i \lambda_i,$$

temos que

$$p_i = (\vartheta, \alpha_i).$$

Como as raízes simples são os vértices do diagrama de Dynkin de \mathfrak{g} e os pesos fundamentais correspondem aos mesmos vértices do diagrama de Dynkin através da fórmula (1.1), podemos então representar um peso graficamente, desenhando o diagrama de Dynkin e rotulando o vértice i com o coeficiente p_i . Para isto precisamos fixar uma numeração das raízes simples no diagrama de Dynkin: a tabela 1.1 apresenta uma tal numeração. Assim podemos, por exemplo, escrever o peso $\lambda_1 + \lambda_2$ da álgebra G_2 da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \circ \rightleftarrows \circ \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

Figura 1.1: Peso $(1, 1)$ da álgebra excepcional G_2 .

Agora, pelo teorema do peso máximo de Cartan, um elemento $\vartheta \in \mathfrak{h}^*$ é o peso máximo de uma representação irredutível¹ de \mathfrak{g} se e somente se os números p_i são inteiros

¹Lembremos que todas as representações consideradas neste trabalho são de dimensão finita.

A_r ($r \geq 1$)	
B_r ($r \geq 2$)	
C_r ($r \geq 3$)	
D_r ($r \geq 4$)	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

Tabela 1.1: Numeração das raízes simples no diagrama de Dynkin.

não-negativos: tais elementos $\vartheta \in \mathfrak{h}^*$ são chamados *pesos dominantes integrais*. Então se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação irredutível de \mathfrak{g} com peso máximo ϑ , denotaremos tal representação pela r -upla das coordenadas de ϑ em relação à base de pesos fundamentais

$$\rho \equiv (p_1, p_2, \dots, p_r).$$

Suponhamos agora que \mathfrak{g} é semisimples, com decomposição em ideais simples $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$ tal que $\text{rk } \mathfrak{g}_j = r_j$ ($j = 1, \dots, k$); então se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação irredutível de \mathfrak{g} , existem representações irredutíveis $\rho_j : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{gl}(V_j)$ dos ideais \mathfrak{g}_j ($j = 1, \dots, k$), unicamente determinadas por ρ , tais que

$$\rho = \bigotimes_{j=1}^k \rho_j, \quad V = \bigotimes_{j=1}^k V_j,$$

isto é, se para $X \in \mathfrak{g}$ escrevemos $X = X_1 + \dots + X_k$ com $X_j \in \mathfrak{g}_j$, então

$$\rho(X) = \rho_1(X_1) \otimes \dots \otimes \rho_k(X_k).$$

Desta forma, as representações ρ_j determinam completamente a representação ρ , e se $\vartheta^{(j)}$ são os respectivos pesos máximos das representações ρ_j , podemos escrever $\rho_j \equiv (p_1^{(j)}, \dots, p_{r_j}^{(j)})$ ($j = 1, \dots, k$), obtendo

$$\rho \equiv (p_1^{(1)}, \dots, p_{r_1}^{(1)}; \dots; p_1^{(k)}, \dots, p_{r_k}^{(k)}).$$

Finalmente, se ρ é uma representação completamente redutível, com decomposição

$$\rho = \bigoplus_{\ell=1}^n c_\ell \pi_\ell$$

então cada representação π_ℓ se decompõe num produto tensorial de representações irredutíveis dos ideais simples de \mathfrak{g} conforme

$$\pi_\ell = \bigotimes_{j=1}^k (\pi_\ell)^{(j)},$$

e podemos escrever $(\pi_\ell)^{(j)} \equiv ((p_\ell)_1^{(j)}, \dots, (p_\ell)_{r_j}^{(j)})$ ($j = 1, \dots, k$), obtendo

$$\pi_\ell \equiv ((p_\ell)_1^{(1)}, \dots, (p_\ell)_{r_1}^{(1)}; \dots; (p_\ell)_1^{(k)}, \dots, (p_\ell)_{r_k}^{(k)}).$$

Juntando tudo podemos escrever:

$$\rho \equiv \begin{cases} c_1 ((p_1)_1^{(1)}, \dots, (p_1)_{r_1}^{(1)}; \dots; (p_1)_1^{(k)}, \dots, (p_1)_{r_k}^{(k)}) \\ \vdots \\ c_n ((p_n)_1^{(1)}, \dots, (p_n)_{r_1}^{(1)}; \dots; (p_n)_1^{(k)}, \dots, (p_n)_{r_k}^{(k)}) \end{cases}$$

Portanto, se $\{(\pi_\ell, c_\ell) \mid \ell = 1, \dots, n\}$ é a regra de ramificação de uma representação irredutível de uma álgebra simples \mathfrak{g} com peso máximo (p_1, \dots, p_r) em relação a uma subálgebra semi-simples \mathfrak{f} , podemos indicar esta regra de ramificação através de

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & & \mathfrak{f} \\ (p_1, \dots, p_r) & \rightsquigarrow & c_1 ((p_1)_1^{(1)}, \dots, (p_1)_{r_1}^{(1)}; \dots; (p_1)_1^{(k)}, \dots, (p_1)_{r_k}^{(k)}) \\ & & \vdots \\ & & c_n ((p_n)_1^{(1)}, \dots, (p_n)_{r_1}^{(1)}; \dots; (p_n)_1^{(k)}, \dots, (p_n)_{r_k}^{(k)}) \end{array}$$

A notação parece pesada, mas quando escrevemos os pesos das representações explicitamente, os índices desaparecem e a notação fica muito clara.

Exemplo. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$ e ρ a representação com peso máximo $(1, 1, 0)$. Então a regra de ramificação de ρ com respeito à subálgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ é

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sp}(6, \mathbb{C}) & & \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ (1, 1, 0) & \rightsquigarrow & (2, 0; 1) \\ & & (1, 1; 0) \\ & & (1, 0; 1) \\ & & (0, 1; 1) \\ & & (1, 0; 0) \\ & & (0, 0; 1) \end{array}$$

Finalmente, há um caso especial que merece um comentário: o da álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, que corresponde ao tipo A_1 na notação de Cartan. Esta álgebra tem posto 1 e portanto seus pesos máximos são simplesmente números inteiros não-negativos. Como $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ tem uma única representação irredutível em cada dimensão, o conjunto dos pesos máximos é o conjunto dos números naturais, e a dimensão da representação de peso n é simplesmente $n+1$. Mas existe uma convenção, usada principalmente pelos físicos, que consiste em indexar as representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ por números semi-inteiros não-negativos: este número é chamado de *spin* da representação e é igual a $\frac{n}{2}$; isto é, a dimensão da representação irredutível de spin s de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ é $2s + 1$ e seu peso máximo é $2s$ ($s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$).

1.2 Estrutura das Subálgebras Maximais das Álgebras de Lie Semisimples

Nesta seção provaremos teoremas que reduzem o problema da classificação das subálgebras maximais de uma álgebra de Lie semisimples à classificação das subálgebras maximais de uma álgebras de Lie simples.

Primeiramente daremos uma definição de subálgebra maximal, que é a mais conveniente para as demonstrações que faremos.

Definição 1.2.1. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é dita maximal se $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ e para toda subálgebra \mathfrak{f} tal que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$ temos que $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}$ ou $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$.*

Para provar o teorema principal precisaremos de um lema que foi provado pela primeira vez por Morozov¹ e depois reproduzido por Golubitsky [16], que é fundamental para a demonstração que daremos para o teorema de Dynkin.

Lema 1.2.1 (Morozov-Golubitsky). *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semisimples e não simples e \mathfrak{h} uma subálgebra maximal de \mathfrak{g} tal que \mathfrak{h} não contém nenhum ideal não-trivial de \mathfrak{g} . Então existe uma álgebra de Lie simples \mathfrak{g}_0 tal que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}_0$ com a inclusão diagonal: $\mathfrak{h} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}_0\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja \mathfrak{g}_0 um ideal próprio não-trivial de \mathfrak{g} e \mathfrak{g}'_0 o ideal complementar. (Isto significa que \mathfrak{g}_0 é uma soma direta qualquer dos ideais simples de \mathfrak{g} e \mathfrak{g}'_0 é a soma direta dos demais, ambos não-triviais.) Então $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'_0$ e isto implica que $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}'_0$ são subálgebras de \mathfrak{g} que contêm \mathfrak{h} no sentido estrito, $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathfrak{g}'_0$; portanto, pela maximalidade de \mathfrak{h} , $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}'_0$. Por outro lado, $[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ e $[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}'_0] = \{0\}$; portanto, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ é um ideal em \mathfrak{g} , obviamente contido em \mathfrak{h} , o que pela hipótese implica $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 = \{0\}$ e, finalmente,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_0.$$

Como \mathfrak{g}_0 era um ideal próprio não-trivial de \mathfrak{g} qualquer, isto significa que todos os ideais próprios não-triviais de \mathfrak{g} têm a mesma dimensão. Isso é possível apenas no caso em que \mathfrak{g} é a soma direta de exatamente dois ideais simples \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 da mesma dimensão,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2,$$

tal que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_2.$$

O próximo passo consiste em provar que $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$, não apenas como espaços vetoriais mas também como álgebras de Lie. Para $i = 1, 2$, introduzimos as projeções

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 &\longrightarrow \mathfrak{g}_i \\ X &\longmapsto X_i \end{aligned}$$

¹Em sua tese de doutorado *On Nonsemisimple Maximal Subgroups of Simple Groups*, apresentada em 1943 na Universidade de Kazan. Infelizmente só existe a versão em russo deste trabalho.

de \mathfrak{g} sobre \mathfrak{g}_i que são homomorfismos de álgebras de Lie devido ao fato de que os \mathfrak{g}_i são ideais em \mathfrak{g} . Para construir isomorfismos explícitos $P_{12} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ e $P_{21} : \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{g}_1$, observamos que a restrição de π_i à subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} é sobrejetora e injetora. De fato, se tivéssemos $\pi_i(\mathfrak{h}) \subsetneq \mathfrak{g}_i$, existiria uma subálgebra maximal $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ de \mathfrak{g}_i tal que $\pi_i(\mathfrak{h}) \subset \tilde{\mathfrak{g}}_i$, e então a subálgebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (para $i = 1$) ou $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_2$ (para $i = 2$) claramente conteria \mathfrak{h} e seria diferente de \mathfrak{g} , o que contradiria a maximalidade de \mathfrak{h} , mostrando assim que a projeção π_i é sobrejetora. Por outro lado, se $X \in \mathfrak{h}$ satisfaz $\pi_i(X) = 0$, então $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$ (para $i = 1$) ou $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$ (para $i = 2$), mostrando assim que a projeção π_i é injetora. Logo, $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}_2$ e $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. ■

O próximo teorema, que se encontra em Dynkin [10, pag. 235, teo. 15.1], é o principal teorema desta seção.

Teorema 1.2.1 (Dynkin [10]). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semisimples e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r$ sua decomposição em soma direta de ideais simples. As subálgebras maximais $\tilde{\mathfrak{g}}$ de \mathfrak{g} são de dois tipos:*

1. *Tipo simples:*

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_i \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r \quad (1 \leq i \leq r), \text{ onde } \tilde{\mathfrak{g}}_i \text{ é subálgebra maximal de } \mathfrak{g}_i;$$

2. *Tipo diagonal:*

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{i-1} \oplus \mathfrak{g}_{i+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{j-1} \oplus \mathfrak{g}_{j+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r \oplus \mathfrak{g}_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq r),$$

onde \mathfrak{g}_i e \mathfrak{g}_j são ideais simples isomorfos de \mathfrak{g} , $P_{ij} : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_j$ é algum isomorfismo e $\mathfrak{g}_{ij} = \{(X, P_{ij}X) \in \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j \mid X \in \mathfrak{g}_i\}$.

Observação. *A existência de subálgebras maximais do tipo diagonal requer que pelo menos dois dos ideais simples $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$ de \mathfrak{g} sejam iguais (a menos de um isomorfismo).*

DEMONSTRAÇÃO. Pela decomposição em soma direta, todo elemento $X \in \mathfrak{g}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$X = X_1 + \dots + X_r \quad \text{com } X_i \in \mathfrak{g}_i.$$

Além disso, como esta representação é única, cada X_i é determinado por X . Assim definimos as projeções sobre cada fator \mathfrak{g}_i por

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}_i \\ X &\longmapsto X_i \end{aligned}$$

que são homomorfismos de álgebras de Lie devido ao fato de que os \mathfrak{g}_i são ideais em \mathfrak{g} .

Seja então \mathfrak{h} uma subálgebra maximal de \mathfrak{g} .

Consideramos primeiro o caso em que $\pi_i(\mathfrak{h}) \subsetneq \mathfrak{g}_i$ para ao menos um i . Seja $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ uma subálgebra maximal de \mathfrak{g}_i tal que $\pi_i(\mathfrak{h}) \subset \tilde{\mathfrak{g}}_i$. A subálgebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_i \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r$

claramente contém \mathfrak{h} e é diferente de \mathfrak{g} , mas como \mathfrak{h} é maximal, temos que $\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{g}}$. Agora consideraremos o caso em que

$$\pi_k(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_k \quad \text{para } k = 1, \dots, r.$$

Mostraremos primeiro que para $k = 1, 2, \dots, r$, $\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h}$ é um ideal em \mathfrak{g}_k . De fato, dados $Y \in \mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h}$ e $Z \in \mathfrak{g}_k$, podemos escolher $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\pi_k(X) = Z$ e, escrevendo $X = X_1 + \dots + X_r$, temos $X_k = Z$ e $[Y, X_l] \in \mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{g}_l = \{0\}$ se $l \neq k$; logo $[Y, X] = [Y, X_1 + \dots + X_r] = [Y, X_k] = [Y, Z]$ e portanto $[Y, Z] = [Y, X] \in \mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h}$. Como \mathfrak{g}_k é simples, devemos ter

$$\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_k, \quad \text{i.e. } \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{h}, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h} = \{0\}.$$

Em geral, sejam

$$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h} = \{0\}} \mathfrak{g}_k \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}'' = \bigoplus_{\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{h}} \mathfrak{g}_k.$$

Obviamente, temos $\mathfrak{g}'' \subset \mathfrak{h}$ e, portanto, pondo $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$, podemos escrever $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}''$. Observamos também que o conjunto de índices k para os quais $\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ não é vazio (pois $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$) e contém pelo menos dois elementos (se tivéssemos $\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ para um único índice k , poderíamos concluir que $\mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{k-1} \oplus \mathfrak{g}_{k+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r \subset \mathfrak{h}$, e como $\pi_k(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_k$, teríamos também que $\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{h}$, o que é absurdo). Portanto, a álgebra de Lie \mathfrak{g}' é semisimples e não é simples, e \mathfrak{h}' é uma subálgebra maximal de \mathfrak{g}' que não contém nenhum ideal próprio de \mathfrak{g}' . Aplicação do lema 1.2.1 termina a demonstração. ■

Este teorema fornece um procedimento para se determinar todas as subálgebras maximais semisimples de uma álgebra de Lie semisimples, desde que se tenha uma classificação de todas as subálgebras maximais semisimples das álgebras de Lie simples.

Agora vamos determinar as classes de conjugação destas subálgebras. Para tanto, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.2.2. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semisimples e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r$ sua decomposição em soma direta de ideais simples. Então*

$$\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{Int}(\mathfrak{g}_1) \times \dots \times \text{Int}(\mathfrak{g}_r)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja σ um automorfismo interno de \mathfrak{g} ; estudaremos primeiro o caso em que σ é da forma $\exp \text{ad}(X)$ para $X \in \mathfrak{g}$. Vamos escrever $X = X_1 + \dots + X_r$ com $X_i \in \mathfrak{g}_i$, então é claro que $\text{ad}(X_i) \text{ad}(X_j) = \text{ad}(X_j) \text{ad}(X_i)$, para i, j quaisquer. Portanto para todo $X \in \mathfrak{g}$ temos:

$$\begin{aligned} \exp \text{ad}(X) &= \exp \text{ad}(X_1 + \dots + X_r) \\ &= \exp(\text{ad}(X_1) + \dots + \text{ad}(X_r)) \\ &= \exp \text{ad}(X_1) \cdot \dots \cdot \exp \text{ad}(X_r). \end{aligned}$$

Escrevendo $Y = Y_1 + \dots + Y_r$ com $Y_j \in \mathfrak{g}_j$, temos $\exp \operatorname{ad}(X_i)(Y_j) = Y_j$ para $i \neq j$ e portanto

$$\begin{aligned} \exp \operatorname{ad}(X_i)(Y) &= \exp \operatorname{ad}(X_i)(Y_1 + \dots + Y_r) \\ &= \exp \operatorname{ad}(X_i)(Y_1) + \dots + \exp \operatorname{ad}(X_i)(Y_r) \\ &= Y_1 + \dots + Y_{i-1} + \exp \operatorname{ad}(X_i)(Y_i) + Y_{i+1} + \dots + Y_r. \end{aligned}$$

Daí,

$$\exp \operatorname{ad}(X)(Y) = \prod_{i=1}^r \exp \operatorname{ad}(X_i)(Y_i).$$

Isto mostra que para todo $i = 1, \dots, r$, $\sigma(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i$ e σ restrito a \mathfrak{g}_i coincide com $\exp \operatorname{ad}(X_i)$. Agora, escrevendo $\sigma_i = \exp \operatorname{ad}(X_i)$, que é um automorfismo interno de \mathfrak{g}_i , temos que $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_r$ com $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ se $i \neq j$.

Passando ao caso geral, seja $\sigma \in \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ qualquer, então $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_k$, onde cada σ_i é da forma $\exp \operatorname{ad}(X)$ com $X \in \mathfrak{g}$. Então podemos escrever cada σ_i como produto de automorfismos internos de cada ideal de \mathfrak{g} , como automorfismos que correspondem a ideais diferentes comutam, podemos escrever o automorfismo interno σ de \mathfrak{g} como um produto de automorfismos internos de seus ideais $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$. Com isso, mostramos que

$$\operatorname{Int}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Int}(\mathfrak{g}_1) \cdot \dots \cdot \operatorname{Int}(\mathfrak{g}_r).$$

Para mostrar que o produto é direto precisamos provar que

$$\operatorname{Int}(\mathfrak{g}_i) \cap (\operatorname{Int}(\mathfrak{g}_{i+1}) \cdot \dots \cdot \operatorname{Int}(\mathfrak{g}_r)) = \{1\}$$

para todo $i = 1, \dots, r$. Mas isto decorre do fato de que o centro do grupo de automorfismos internos de uma álgebra de Lie semisimples é trivial [19, pag.129, cor. 5.3]. ■

Agora podemos demonstrar o teorema de conjugação, que reduz o problema de decidir se duas subálgebras maximais de uma álgebra de Lie semisimples \mathfrak{g} são conjugadas ao caso em que \mathfrak{g} é simples. Este teorema aparece junto com o teorema 1.2.1 na versão original de Dynkin [10].

Teorema 1.2.2 (Dynkin [10]). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semisimples e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r$ sua decomposição em soma direta de ideais simples. Seja \mathfrak{h} uma subálgebra maximal de \mathfrak{g} . Se \mathfrak{h} for do tipo simples vamos escrever $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(i, \tilde{\mathfrak{g}}_i)$ com*

$$\mathfrak{h}(i, \tilde{\mathfrak{g}}_i) = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \mathfrak{g}_k \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_i \tag{1.2}$$

com $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ subálgebra maximal de \mathfrak{g}_i e se \mathfrak{h} for do tipo diagonal vamos escrever $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(i, j, P_{ij})$ com

$$\mathfrak{h}(i, j, P_{ij}) = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^r \mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_{ij} \quad (1.3)$$

onde $i \neq j$ e $\mathfrak{g}_{ij} = \{(X_i, P_{ij}(X_i)) \mid X_i \in \mathfrak{g}_i\}$ para algum isomorfismo $P_{ij} : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_j$. Então:

1. A condição necessária e suficiente para que $\mathfrak{h}(i_1, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_1})$ e $\mathfrak{h}(i_2, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_2})$ sejam conjugadas em \mathfrak{g} é que $i_1 = i_2$ e que $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_1}$ e $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_2}$ sejam conjugadas em $\mathfrak{g}_{i_1} = \mathfrak{g}_{i_2}$.
2. A condição necessária e suficiente para que $\mathfrak{h}(i_1, j_1, P_{i_1 j_1})$ e $\mathfrak{h}(i_2, j_2, P_{i_2 j_2})$ sejam conjugadas em \mathfrak{g} é que $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$ e que $P_{i_1 j_1}$ seja levado em $P_{i_2 j_2}$ por composição com automorfismos internos de $\mathfrak{g}_{i_1} = \mathfrak{g}_{i_2}$ e de $\mathfrak{g}_{j_1} = \mathfrak{g}_{j_2}$.

Além disto $\mathfrak{h}(i, \tilde{\mathfrak{g}}_i)$ e $\mathfrak{h}(i, j, P_{ij})$ nunca são conjugadas.

DEMONSTRAÇÃO. Observe que o lema 1.2.2 mostra que os automorfismos internos de \mathfrak{g} sempre preservam a decomposição direta de \mathfrak{g} em ideais simples: automorfismos que induzem permutações entre ideais simples isomorfos são necessariamente externos. Além disto, como $\mathfrak{h}(j, i, P_{ji}) = \mathfrak{h}(i, j, P_{ij})$ com $P_{ij} = P_{ji}^{-1}$ podemos supor desde já que $i < j$.

Mostraremos primeiro a afirmação 1. Obviamente, se $i_1 = i_2$ e se $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_1}$ e $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_2}$ são conjugadas em $\mathfrak{g}_{i_1} = \mathfrak{g}_{i_2}$, basta estender o automorfismo interno de $\mathfrak{g}_{i_1} = \mathfrak{g}_{i_2}$ que leva $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_1}$ para $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_2}$ pela identidade nos demais ideais simples de \mathfrak{g} para obter um automorfismo interno de \mathfrak{g} que leva $\mathfrak{h}(i_1, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_1})$ para $\mathfrak{h}(i_2, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_2})$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathfrak{h}(i_1, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_1})$ e $\mathfrak{h}(i_2, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_2})$ são conjugadas em \mathfrak{g} , isto é, existe um automorfismo interno σ de \mathfrak{g} tal que $\sigma(\mathfrak{h}(i_1, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_1})) = \mathfrak{h}(i_2, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_2})$. Pelo lema 1.2.2 podemos escrever $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ com automorfismos internos σ_ℓ de \mathfrak{g}_ℓ ($\ell = 1, \dots, r$) e usando a decomposição (1.2), obtemos

$$\mathfrak{h}(i_2, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_2}) = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i_2}}^r \mathfrak{g}_k \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_{i_2}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(i_2, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_2}) &= \sigma(\mathfrak{h}(i_1, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_1})) \\ &= (\sigma_1 \dots \sigma_r)(\mathfrak{h}(i_1, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_1})) \\ &= \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1}}^r \mathfrak{g}_k \oplus \sigma_{i_1}(\tilde{\mathfrak{g}}_{i_1}) \end{aligned}$$

o que, pela unicidade da decomposição (1.2) e pelo fato de que $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_1} \subsetneq \mathfrak{g}_{i_1}$ e $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_2} \subsetneq \mathfrak{g}_{i_2}$, implica que $i_1 = i_2$ e $\sigma_{i_1}(\tilde{\mathfrak{g}}_{i_1}) = \tilde{\mathfrak{g}}_{i_2}$.

Antes de mostrar a afirmação 2 faremos algumas observações. Suponhamos que \mathfrak{g}_i e \mathfrak{g}_j são dois ideais isomorfos de \mathfrak{g} e, dado um isomorfismo $P_{ij} : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_j$, consideremos a aplicação $\psi_{ij} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definida por

$$\psi_{ij}(X' + X_i + X_j) = X' + (P_{ij})^{-1}(X_j) + P_{ij}(X_i)$$

onde $X = X' + X_i + X_j$ é a decomposição direta de $X \in \mathfrak{g}$ induzida pela decomposição direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j$, com

$$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^r \mathfrak{g}_k.$$

É claro que ψ_{ij} é um automorfismo de \mathfrak{g} e que a subálgebra $\mathfrak{h}(i, j, P_{ij}) = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}_{ij}$ com $\mathfrak{g}_{ij} = \{(X_i, P_{ij}(X_i)) \mid X_i \in \mathfrak{g}_i\}$ é a subálgebra dos elementos fixos por ψ_{ij} . Como este automorfismo permuta dois ideais isomorfos o lema 1.2.2 implica que ele é um automorfismo externo de \mathfrak{g} . Agora suponhamos que o isomorfismo $P_{ij}^{(2)} : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_j$ definindo $\mathfrak{g}_{ij}^{(2)}$ é obtido do isomorfismo $P_{ij}^{(1)} : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_j$ definindo $\mathfrak{g}_{ij}^{(1)}$ pondo $P_{ij}^{(2)} = \sigma_j \circ P_{ij}^{(1)} \circ \sigma_i^{-1}$ com automorfismos internos σ_i de \mathfrak{g}_i e σ_j de \mathfrak{g}_j , então se definimos o automorfismo interno σ de \mathfrak{g} pondo $\sigma = 1 \oplus \sigma_i \oplus \sigma_j$ temos que $\psi_{ij}^{(2)} = \sigma \circ \psi_{ij}^{(1)} \circ \sigma^{-1}$. Por outro lado, se σ é um automorfismo interno de \mathfrak{g} tal que $\psi_{ij}^{(2)}$ e $\psi_{ij}^{(1)}$ sejam conjugados, isto é, $\psi_{ij}^{(2)} = \sigma \circ \psi_{ij}^{(1)} \circ \sigma^{-1}$ então pelo lema 1.2.2 podemos escrever $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_r$ com automorfismos internos σ_ℓ de \mathfrak{g}_ℓ ($\ell = 1, \dots, r$) e portanto temos que $P_{ij}^{(2)} = \sigma_j \circ P_{ij}^{(1)} \circ \sigma_i^{-1}$. Ou seja, os isomorfismos $P_{ij}^{(2)}$ e $P_{ij}^{(1)}$ são levados um no outro por automorfismos internos de \mathfrak{g}_i e de \mathfrak{g}_j se e somente se os automorfismos $\psi_{ij}^{(2)}$ e $\psi_{ij}^{(1)}$ de \mathfrak{g} são conjugados em $\text{Aut } \mathfrak{g}$ por um automorfismo interno de \mathfrak{g} .

Agora passaremos a demonstração da afirmação do item 2. Obviamente, se $i_1 = i = i_2$, $j_1 = j = j_2$ e se o isomorfismo $P_{ij}^{(2)} : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_j$ definindo $\mathfrak{g}_{ij}^{(2)}$ é obtido do isomorfismo $P_{ij}^{(1)} : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_j$ definindo $\mathfrak{g}_{ij}^{(1)}$ pondo $P_{ij}^{(2)} = \sigma_j \circ P_{ij}^{(1)} \circ \sigma_i^{-1}$ com automorfismos internos σ_i de \mathfrak{g}_i e σ_j de \mathfrak{g}_j , então pelas observações acima podemos construir um automorfismo interno σ de \mathfrak{g} tal que $\psi_{ij}^{(2)} = \sigma \circ \psi_{ij}^{(1)} \circ \sigma^{-1}$ e obtemos

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{h}(i, j, P_{ij}^{(1)}) &\iff \psi_{ij}^{(1)}(X) = X \\ &\iff \psi_{ij}^{(2)}(\sigma(X)) = \sigma(\psi_{ij}^{(1)}(X)) = \sigma(X) \\ &\iff \sigma(X) \in \mathfrak{h}(i, j, P_{ij}^{(2)}) \end{aligned}$$

mostrando que σ leva $\mathfrak{h}(i, j, P_{ij}^{(1)})$ para $\mathfrak{h}(i, j, P_{ij}^{(2)})$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathfrak{h}(i_1, j_1, P_{i_1 j_1})$ e $\mathfrak{h}(i_2, j_2, P_{i_2 j_2})$ são conjugadas em \mathfrak{g} , isto é, existe um automorfismo interno σ de \mathfrak{g} tal que $\sigma(\mathfrak{h}(i_1, j_1, P_{i_1 j_1})) = \mathfrak{h}(i_2, j_2, P_{i_2 j_2})$. Aplicando o lema 1.2.2 a σ temos a

decomposição $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_r$ com automorfismos internos σ_ℓ de \mathfrak{g}_ℓ ($\ell = 1, \dots, r$) e usando a decomposição (1.3), obtemos

$$\mathfrak{h}(i_2, j_2, P_{i_2 j_2}) = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i_2, j_2}}^r \mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_{i_2 j_2},$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(i_2, j_2, P_{i_2 j_2}) &= \sigma(\mathfrak{h}(i_1, j_1, P_{i_1 j_1})) \\ &= (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_r)(\mathfrak{h}(i_1, j_1, P_{i_1 j_1})) \\ &= \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1, j_1}}^r \mathfrak{g}_k \oplus (\sigma_{i_1} \oplus \sigma_{j_1})(\mathfrak{g}_{i_1 j_1}) \end{aligned}$$

o que, pela unicidade da decomposição (1.2) e pelo fato de que $i_1 < j_1$ e $i_2 < j_2$, implica que $i_1 = i = i_2$ e $j_1 = j = j_2$. Portanto, podemos escrever $P_{i_1 j_1} = P_{ij}^{(1)}$ e $P_{i_2 j_2} = P_{ij}^{(2)}$ e obtemos

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^{(1)}(X) = X &\iff X \in \mathfrak{h}(i, j, P_{ij}^{(1)}) \\ &\iff \sigma(X) \in \mathfrak{h}(i, j, P_{ij}^{(2)}) \\ &\iff \psi_{ij}^{(2)}(\sigma(X)) = \sigma(X) \\ &\iff (\sigma^{-1} \circ \psi_{ij}^{(2)} \circ \sigma)(X) = X, \end{aligned}$$

isto é, $\psi_{ij}^{(2)} = \sigma \circ \psi_{ij}^{(1)} \circ \sigma^{-1}$. Pelas observações acima, podemos concluir que $P_{ij}^{(2)} = \sigma_j \circ P_{ij}^{(1)} \circ \sigma_i^{-1}$ com σ_i automorfismo interno de \mathfrak{g}_i e σ_j automorfismo interno de \mathfrak{g}_j . Provamos então que $\mathfrak{h}(i_1, j_1, P_{i_1 j_1})$ e $\mathfrak{h}(i_2, j_2, P_{i_2 j_2})$ são conjugadas em \mathfrak{g} se e somente se $\psi_{ij}^{(2)}$ e $\psi_{ij}^{(1)}$ são levados um no outro por automorfismos internos de \mathfrak{g} , o que é equivalente a $P_{ij}^{(2)}$ ser levado em $P_{ij}^{(1)}$ por automorfismos internos de \mathfrak{g}_i e de \mathfrak{g}_j . ■

Este teorema juntamente com o teorema 1.2.1 reduz o problema de classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie *semisimples* a menos de conjugação ao problema de classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie *simples* a menos de conjugação: este problema será discutido na próxima seção.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e τ um automorfismo qualquer de \mathfrak{g} . Defina a subálgebra \mathfrak{g}_τ de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ pondo

$$\mathfrak{g}_\tau = \{(X, \tau(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

e extenda o automorfismo τ de \mathfrak{g} para um automorfismo τ' de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ pondo

$$\begin{aligned} \tau' : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \\ X + Y &\longmapsto \tau^{-1}(Y) + \tau(X) \end{aligned}$$

de modo que \mathfrak{g}_τ é a subálgebra dos pontos fixos de τ' . Por exemplo, se $\tau = 1$, então $\tau' = 1$ também, e \mathfrak{g}_1 é a inclusão diagonal de \mathfrak{g} em $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Dizemos que dois automorfismos τ_1 e τ_2 de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} são conjugados se existe um automorfismo interno σ de \mathfrak{g} tal que $\tau_1 = \sigma\tau_2\sigma^{-1}$. É claro então que \mathfrak{g}_{τ_1} e \mathfrak{g}_{τ_2} são conjugadas em $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ se e somente se τ_1 e τ_2 são conjugados. Como $\text{Int}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo normal do grupo $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, o conjunto das classes de conjugação de automorfismos de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é o grupo quociente $\text{Aut}(\mathfrak{g})/\text{Int}(\mathfrak{g})$, chamado *grupo de automorfismos externos* de \mathfrak{g} . No caso em que a álgebra \mathfrak{g} só possui automorfismos internos, todas as inclusões diagonais de \mathfrak{g} em $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ são conjugadas à inclusão canônica dada por $\tau = 1$. Por outro lado se \mathfrak{g} possui automorfismos externos o número de classes de conjugação de inclusões será igual ao número de classes de conjugação de automorfismos de \mathfrak{g} . Quando a álgebra \mathfrak{g} é semisimples, o grupo $\text{Int}(\mathfrak{g})$ é igual à componente conexa de 1 do grupo $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ e portanto a ordem do grupo de automorfismos externos é igual ao número de componentes conexas do grupo $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. É um fato bem conhecido que quando \mathfrak{g} é semisimples seu grupo de automorfismos externos $\text{Aut}(\mathfrak{g})/\text{Int}(\mathfrak{g})$ é isomorfo ao grupo dos automorfismos de seu diagrama de Dynkin (ver [15, pag. 498]), isto é, se Π é um conjunto de raízes simples de \mathfrak{g} então $\text{Aut}(\Pi)$ é o grupo de permutações de Π que preservam o ângulo entre duas raízes simples quaisquer e também preservam o comprimento de todas as raízes simples. Estas observações juntamente com o teorema 1.2.2 fornecem o seguinte

Corolário 1.2.1. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semisimples e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ sua decomposição em soma direta de ideais simples. Então o número de classes de conjugação de uma subálgebra maximal do tipo diagonal \mathfrak{h} , isto é*

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^r \mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_{ij}$$

onde $i \neq j$ e $\mathfrak{g}_{ij} = \{(X_i, P_{ij}(X_i)) \mid X_i \in \mathfrak{g}_i\}$ para algum isomorfismo $P_{ij} : \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{g}_j$, é igual a ordem do grupo de automorfismos externos da álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}_{ij} \cong \mathfrak{g}_i \cong \mathfrak{g}_j$.

No próximo capítulo, usaremos os teoremas desta seção para analisar o que acontece quando restringimos uma representação irreduzível de uma álgebra de Lie semisimples \mathfrak{g} a uma de suas subálgebras maximais, obtendo assim as regras de ramificação necessárias para implementação do modelo de quebra de simetrias para o código genético.

1.3 Álgebras de Lie Redutivas e Compactas

Nesta seção definiremos duas classes de álgebras de Lie que são intimamente relacionadas, e a partir destas relações poderemos reduzir o problema de classificação das subálgebras maximais de uma álgebra de Lie compacta ao problema de classificação das subálgebras maximais redutivas de uma álgebra de Lie semisimples.

Definição 1.3.1. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} real ou complexa é chamada redutiva se o seu radical $\text{Rad } \mathfrak{g}$ é igual ao seu centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.*

Pelo teorema de Levi-Malcev [24, pags. 91,92] sabemos que toda álgebra de Lie \mathfrak{g} admite uma decomposição na soma direta (como espaço vetorial) de seu radical $\text{Rad } \mathfrak{g}$ (que é o ideal solúvel máximo de \mathfrak{g}) e uma subálgebra semisimples maximal \mathfrak{g}_{ss} , e esta decomposição é única no sentido de que duas subálgebras maximais semisimples que realizam uma tal decomposição são conjugadas em \mathfrak{g} . Agora $\text{Rad } \mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ implica que \mathfrak{g}_{ss} também é um ideal em \mathfrak{g} e que \mathfrak{g} é a soma direta (como álgebra de Lie) de $\text{Rad } \mathfrak{g}$ e \mathfrak{g}_{ss} . É claro que a álgebra derivada de \mathfrak{g} denotada por $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é igual a \mathfrak{g}_{ss} . Logo, uma álgebra de Lie redutiva se decompõe de forma única na soma direta de uma álgebra abeliana (seu centro) e uma álgebra semisimples (sua subálgebra derivada). Observe que qualquer subespaço do centro de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um ideal em \mathfrak{g} , mostrando que uma álgebra redutiva admite uma decomposição em soma direta (não necessariamente única) de ideais simples, sendo que alguns destes ideais são abelianos unidimensionais. Portanto, álgebras de Lie abelianas e álgebras de Lie semisimples são exemplos de álgebras de Lie redutivas.

A seguinte proposição dá outra caracterização de álgebras redutivas que será útil para estabelecermos a relação destas com as álgebras compactas.

Proposição 1.3.1 (Knapp [28]). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real ou complexa. São equivalentes:*

- (i) \mathfrak{g} é redutiva;
- (ii) Para todo ideal \mathfrak{a} em \mathfrak{g} existe um ideal \mathfrak{a}' complementar a \mathfrak{a} em \mathfrak{g} , isto é, tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}'$.

DEMONSTRAÇÃO.

(i) \Rightarrow (ii) Suponhamos que \mathfrak{g} é redutiva, e seja \mathfrak{a} um ideal qualquer em \mathfrak{g} ; provaremos primeiro que $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ e além disso que

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

e

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Claramente $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Para mostrar a igualdade, decompomos a álgebra semisimples $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_{ss}$ em soma direta de ideais simples, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$, e usamos o fato de que qualquer ideal de uma álgebra semisimples é soma direta de certos dos seus ideais simples. Por exemplo, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ e $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ são ideais de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; portanto, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subsetneq \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ implicaria que

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_j = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

onde $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_j$ seriam certos ideais simples de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Mas se $X, Y \in \mathfrak{g}_\ell$ para algum ℓ ($1 \leq \ell \leq j$), então $[X, Y] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{g}_\ell = \{0\}$, isto é, $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}_\ell$, o que é absurdo, pois \mathfrak{g}_ℓ é ideal simples. Logo

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

De forma análoga, para mostrar que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, suponha que $A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, e seja \mathfrak{g}_i um ideal simples qualquer de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Se $\mathfrak{g}_i \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ então para $X_i \in \mathfrak{g}_i$, $X_i \in \mathfrak{a}$ e portanto $[A, X_i] = 0$. Se $\mathfrak{g}_i \not\subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, $\mathfrak{g}_i \cap [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$ e, para $X_i \in \mathfrak{g}_i$, $[A, X_i] \in \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e, pela relação que acabamos de demonstrar, $[A, X_i] \in \mathfrak{g}_i \cap [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$, isto é, $[A, X_i] = 0$. Portanto, $[A, X] = 0$ para $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, e como é óbvio que $[A, X] = 0$ para $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, concluímos que $[A, X] = 0$ para $X \in \mathfrak{g}$, isto é, $A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Logo

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Isso posto, podemos após uma permutação dos índices escrever

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_\ell$$

com $\ell \leq k$, isto é, temos apenas duas possibilidades: $\mathfrak{g}_i \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ se $i \leq \ell$ e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{g}_i = \{0\}$ se $i > \ell$. Agora, seja $A \in \mathfrak{a}$, e escrevemos $A = A_0 + A_1 + \dots + A_k$ com $A_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ e $A_i \in \mathfrak{g}_i$ ($1 \leq i \leq k$). Seja \mathfrak{g}_j um ideal simples qualquer de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Então para $X_j \in \mathfrak{g}_j$,

$$[A, X_j] = [A_1, X_j] + \dots + [A_k, X_j] = [A_j, X_j] \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_j = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{g}_j$$

e portanto, $A_j \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_j) = \{0\}$, isto é, $A_j = 0$ para $j > \ell$. Logo $A = A_0 + A_1 + \dots + A_\ell$ com $A_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ e $A_i \in \mathfrak{g}_i$ ($1 \leq i \leq \ell$), o que mostra que

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}].$$

Finalmente, para demonstrar a afirmação $(i) \Rightarrow (ii)$ basta definir \mathfrak{a}' como sendo a soma direta de um subespaço complementar a $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ em $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (que é um ideal em \mathfrak{g}) com o ideal complementar a $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ em $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$: \mathfrak{a}' é um ideal em \mathfrak{g} que satisfaz

$$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \mathfrak{g}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja \mathfrak{a} um ideal de \mathfrak{g} e \mathfrak{a}' um ideal de \mathfrak{g} complementar a \mathfrak{a} . Se \mathfrak{b} é um ideal qualquer de \mathfrak{a} , \mathfrak{b} também é ideal de \mathfrak{g} , pois $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b}$ e $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}'] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' = \{0\}$. Portanto, existe um ideal \mathfrak{b}' de \mathfrak{g} complementar a \mathfrak{b} em \mathfrak{g} , e $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}'$ é ideal de \mathfrak{a} complementar a \mathfrak{b} em \mathfrak{a} . Portanto concluímos que se \mathfrak{g} satisfaz a propriedade (ii) então todo ideal de \mathfrak{g} também satisfaz esta propriedade. Se \mathfrak{g} admite ideais próprios não triviais, podemos escolher um ideal \mathfrak{g}_1 próprio não-trivial de \mathfrak{g} e um ideal \mathfrak{g}'_1 de \mathfrak{g} complementar a \mathfrak{g}_1 em \mathfrak{g} . Repetindo

este processo decomponemos \mathfrak{g} em uma soma direta de ideais que não contêm ideais próprios não-triviais. Escrevemos esta soma direta na forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_j \oplus \mathfrak{a}_{j+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_k,$$

onde $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_j$ são unidimensionais e $\mathfrak{a}_{j+1}, \dots, \mathfrak{a}_k$ são álgebras de Lie simples. Como $[\mathfrak{a}_\ell, \mathfrak{a}_\ell] = \mathfrak{a}_\ell$ para $\ell = j+1, \dots, k$, temos

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}_{j+1}, \mathfrak{a}_{j+1}] \oplus \dots \oplus [\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k] = \mathfrak{a}_{j+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_k,$$

que é semisimples. Agora provaremos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_j$. Claramente, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \supset \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_j$. Na outra direção, se $X = X_1 + \dots + X_k$ está em $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ com $X_i \in \mathfrak{a}_i$, então $X_i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a}_i)$ que é $\{0\}$ para $i > j$, pois \mathfrak{a}_i é simples nestes casos. Portanto $X = X_1 + \dots + X_j$, e concluímos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_j$. ■

Finalmente, para descrever a estrutura do grupo $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ de automorfismos e do grupo $\text{Int}(\mathfrak{g})$ de automorfismos internos de uma álgebra reductiva \mathfrak{g} , observamos primeiro que uma álgebra de Lie abeliana \mathfrak{h} não possui automorfismos internos não-triviais, porém qualquer transformação linear é um automorfismo (mais precisamente, um automorfismo externo) de \mathfrak{h} . Tendo em vista que automorfismos (arbitrários/internos) σ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{ss}$ levam $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ em $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{g}_{ss} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ em $\mathfrak{g}_{ss} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e portanto se decompõem em soma direta de automorfismos (arbitrários/internos) $\sigma_{\mathfrak{z}}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ e σ_{ss} de \mathfrak{g}_{ss} , temos

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathfrak{g}) &= GL(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \times \text{Aut}(\mathfrak{g}_{ss}) \\ \text{Int}(\mathfrak{g}) &= \text{Int}(\mathfrak{g}_{ss}). \end{aligned}$$

Agora passaremos a discutir uma outra classe de álgebras de Lie, as álgebras de Lie compactas, que têm papel fundamental em toda teoria de álgebras e grupos de Lie.

Definição 1.3.2. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real. Dizemos que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie compacta se existe uma forma bilinear simétrica invariante (\cdot, \cdot) sobre \mathfrak{g} que é positiva definida. A invariância de (\cdot, \cdot) significa que:*

$$([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0 \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \quad (1.4)$$

Nesta definição há um certo abuso de linguagem, pois uma álgebra de Lie nunca é compacta no sentido topológico, pois é um espaço vetorial real; por isso alguns autores usam o termo “álgebra de tipo compacto”.

A identidade (1.4) é a versão “infinitesimal” da afirmação de que o produto escalar (\cdot, \cdot) é invariante sob o grupo de automorfismos internos de \mathfrak{g} , isto é

$$(\sigma(X), \sigma(Y)) = (X, Y) \quad (1.5)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e todo $\sigma \in \text{Int}(\mathfrak{g})$. Observe que (1.5) implica que, relativamente a este produto escalar, o grupo $\text{Int}(\mathfrak{g})$ age por transformações ortogonais e portanto a aplicação $\text{ad}(Z)$ é anti-simétrica para todo $Z \in \mathfrak{g}$.

Obviamente, toda subálgebra de uma álgebra de Lie compacta é também uma álgebra de Lie compacta. Uma outra consequência óbvia da definição 1.3.2, é que toda álgebra de Lie real abeliana é compacta, pois, neste caso, a condição de invariância (1.4 é trivialmente satisfeita por qualquer forma bilinear, e em particular pelo produto escalar canônico de um espaço vetorial real.

A principal motivação para a definição 1.3.2 é sugerida pela seguinte proposição.

Proposição 1.3.2. *Seja G um grupo de Lie compacto e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Então \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie compacta.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando integração sobre o grupo $\text{Ad}(G)$, que também é compacto, introduzimos um produto escalar (\cdot, \cdot) invariante, começando por um produto escalar qualquer $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pondo:

$$(X, Y) = \int_{\text{Ad}(G)} \langle gX, gY \rangle d\mu(g),$$

onde μ é a medida de Haar bi-invariante em $\text{Ad}(G)$ normalizada por $\mu(\text{Ad}(G)) = 1$ (para a construção de μ veja Warner [56, pag. 151] ou Bröcker & tomDieck [7, pag. 40]). É fácil ver que (\cdot, \cdot) é positiva definida, pois para todo $X \in \mathfrak{g}$, a função $\langle \cdot X, \cdot X \rangle$ sobre $\text{Ad}(G)$ é não-negativa e se anula se e somente se $X = 0$. Só falta mostrar que (\cdot, \cdot) é invariante. De fato, se $h = \text{Ad}(k) \in \text{Ad}(G)$ é fixo, temos

$$\begin{aligned} (\text{Ad}(k)X, \text{Ad}(k)Y) &= \int_{\text{Ad}(G)} \langle ghX, ghY \rangle d\mu(g) \\ &= \int_{\text{Ad}(G)} \langle lX, lY \rangle d\mu(lh^{-1}) \\ &= \int_{\text{Ad}(G)} \langle lX, lY \rangle d\mu(l) \\ &= (X, Y) \end{aligned}$$

e portanto para todo $k \in G$ a transformação $\text{Ad}(k)$ é ortogonal. Isto é equivalente a

$$(\text{ad}(Z)X, Y) + (X, \text{ad}(Z)Y) = 0$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, demonstrando assim que (\cdot, \cdot) satisfaz a identidade (1.4). ■

Teorema 1.3.1. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie compacta. Então \mathfrak{g} é reductiva, e portanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, onde $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é o centro de \mathfrak{g} e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é semisimples.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja (\cdot, \cdot) uma forma bilinear simétrica invariante e positiva definida em \mathfrak{g} . Os subespaços invariantes de \mathfrak{g} sob $\text{ad}(\mathfrak{g})$ são os ideais de \mathfrak{g} . Portanto, se \mathfrak{a} é um ideal de \mathfrak{g} , então seu complemento ortogonal

$$\mathfrak{a}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid (X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{a}\}$$

também é um ideal de \mathfrak{g} . Como (\cdot, \cdot) é positiva definida, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. Portanto \mathfrak{a} tem \mathfrak{a}^\perp como ideal complementar e, pela proposição 1.3.1, \mathfrak{g} é reductiva. ■

O próximo teorema é o clássico “critério de Weyl”, que caracteriza as álgebras de Lie semisimples que são compactas.

Teorema 1.3.2 (Weyl). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real semisimples. Então \mathfrak{g} é compacta se e somente se a sua forma de Killing é negativa definida.*

DEMONSTRAÇÃO. Se a forma de Killing de \mathfrak{g} é negativa definida, então é óbvio que \mathfrak{g} é compacta. Reciprocamente, suponhamos que \mathfrak{g} é compacta e que (\cdot, \cdot) seja uma forma invariante positiva definida sobre \mathfrak{g} . A condição de invariância implica que para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(X)$ é anti-simétrico: isto significa que $\text{ad}(X)$ é diagonalizável sobre \mathbb{C} e que todos os seus valores próprios são imaginários puros. Portanto, $\text{tr}(\text{ad}(X)^2) \leq 0$ e, como \mathfrak{g} é semisimples, $\text{tr}(\text{ad}(X)^2) = 0$ se e somente se $X = 0$. ■

Corolário 1.3.1. *Toda álgebra de Lie compacta é isomorfa à álgebra de Lie de um grupo de Lie compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja \mathfrak{k} uma álgebra de Lie compacta, então como \mathfrak{k} é reductiva podemos escrever $\mathfrak{k} = \mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \oplus [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$, e basta mostrar que a cada um destes dois ideais corresponde um grupo de Lie compacto, pois então o produto direto destes dois grupos tem álgebra de Lie isomorfa a \mathfrak{k} (ver Knapp [28, pag. 58]) e é obviamente compacto. Como $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ é abeliana, ela é isomorfa à álgebra de Lie de um torus, que é um grupo de Lie compacto. Falta mostrar que $\mathfrak{l} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ é isomorfa à álgebra de Lie de um grupo compacto. Como \mathfrak{l} é semisimples, ela é isomorfa a $\text{ad}(\mathfrak{l})$ que é a álgebra de Lie do grupo de Lie $\text{Int}(\mathfrak{l})$ que por sua vez é a componente conexa de 1 do grupo $\text{Aut}(\mathfrak{l}) \subset GL(\mathfrak{l})$ e portanto $\text{Int}(\mathfrak{l})$ é fechado em $GL(\mathfrak{l})$. Por outro lado, cada membro de $\text{ad}(\mathfrak{l})$ é uma transformação anti-simétrica e portanto o grupo correspondente $\text{Int}(\mathfrak{l})$ age por transformações ortogonais. Exibimos então um grupo de Lie que possui álgebra de Lie isomorfa a \mathfrak{l} e, sendo um subgrupo fechado do grupo $SO(\mathfrak{l})$, é compacto. ■

Juntos, a proposição 1.3.2 e o corolário 1.3.1 justificam o abuso de linguagem do termo “álgebra de Lie compacta”.

Na seção anterior mostramos como determinar as subálgebras maximais de uma álgebra de Lie *semisimples*. Agora mostraremos como determinar as subálgebras maximais de uma álgebra de Lie *reductiva*.

Teorema 1.3.3. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie reductiva e $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sua decomposição na soma direta de seu centro e sua álgebra derivada. As subálgebras maximais \mathfrak{h} de \mathfrak{g} são da forma*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{f}$$

onde \mathfrak{f} é uma subálgebra maximal de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja \mathfrak{f} uma subálgebra maximal de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, então a subálgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{f}$ é obviamente maximal em \mathfrak{g} . Reciprocamente, seja \mathfrak{h} uma subálgebra maximal de \mathfrak{g} . Obviamente temos que

$$\mathfrak{h} \supset (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h}) \oplus ([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}).$$

Porém \mathfrak{h} não pode conter $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pois senão teríamos que $\mathfrak{h} = (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e a única possibilidade de ter \mathfrak{h} maximal seria com $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, o que contraria a hipótese de que $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Por outro lado \mathfrak{h} deve conter $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. De fato, se existisse $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ tal que $X \notin \mathfrak{h}$ a subálgebra \mathfrak{h}' gerada por X e \mathfrak{h} seria igual a \mathfrak{g} , portanto $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, e como já mostramos isto não pode ocorrer. Portanto, definindo a subálgebra \mathfrak{f} de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ por

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h},$$

temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{f}$ com \mathfrak{f} subálgebra maximal de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. ■

Portanto, para determinar todas as subálgebras reductivas maximais de uma álgebra de Lie reductiva \mathfrak{g} , basta determinar todas as subálgebras reductivas maximais de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Mostraremos agora que a classificação das subálgebras maximais de uma álgebra de Lie semi-simples compacta é equivalente à classificação das subálgebras reductivas maximais da sua complexificação. Para tanto precisamos discutir a relação entre álgebras de Lie compactas e álgebras de Lie complexas reductivas, e suas respectivas subálgebras. Obviamente a complexificação de uma álgebra de Lie compacta \mathfrak{k} fornece uma álgebra de Lie complexa reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, e como toda subálgebra \mathfrak{l} de \mathfrak{k} é compacta (e portanto reductiva), sua complexificação $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ será uma subálgebra complexa reductiva de \mathfrak{g} . Mas em geral nem toda subálgebra complexa reductiva \mathfrak{f} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ corresponde a uma subálgebra \mathfrak{l} de \mathfrak{k} tal que $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$.

Para analisar a questão quais subálgebras complexas reductivas de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ provêm de subálgebras de \mathfrak{k} por complexificação, observemos primeiro que devido ao teorema 1.3.3 acima, podemos nos restringir a responder esta pergunta para o caso em que \mathfrak{k} e \mathfrak{g} são semisimples.

No caso em que \mathfrak{f} é subálgebra complexa *semisimples* de \mathfrak{g} , podemos afirmar que $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ para alguma subálgebra \mathfrak{l} de \mathfrak{k} . De fato, \mathfrak{f} possui uma forma real compacta \mathfrak{l} que está contida em uma subálgebra compacta maximal \mathfrak{k} de \mathfrak{g} . Mas todas as subálgebras compactas maximais de uma álgebra de Lie complexa semisimples são conjugadas ([19, pag. 256, teo. 2.2]) e toda forma real compacta de uma álgebra de Lie complexa semisimples é uma

subálgebra compacta maximal ([19, pag. 184, prop. 7.3]). Portanto, \mathfrak{k} é uma forma real compacta de \mathfrak{g} e $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{f} \cap \mathfrak{k}$, mas \mathfrak{l} é subálgebra compacta maximal de \mathfrak{f} , logo $\mathfrak{l} = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{k}$.

Para analisar o caso em que \mathfrak{f} é uma subálgebra *reductiva* de \mathfrak{g} consideremos a decomposição de Cartan de \mathfrak{g} ,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k},$$

junto com a correspondente involução de Cartan θ , que é o automorfismo de \mathfrak{g} (como álgebra de Lie real) definido como a identidade sobre \mathfrak{k} e menos a identidade sobre $i\mathfrak{k}$. Observamos que uma subálgebra \mathfrak{f} de \mathfrak{g} é a complexificação de uma subálgebra \mathfrak{l} de \mathfrak{k} se e somente se \mathfrak{f} é θ -invariante:

$$\theta(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}.$$

Portanto, podemos reformular a afirmação anterior como dizendo que qualquer subálgebra complexa semisimples \mathfrak{f} de \mathfrak{g} é necessariamente θ -invariante. Além disto, pode-se provar que toda subálgebra θ -invariante de \mathfrak{g} é necessariamente reductiva ([28, pag. 304, cor. 6.29]).

Definição 1.3.3. *Uma subálgebra \mathfrak{f} de uma álgebra de Lie complexa reductiva \mathfrak{g} é dita de posto máximo se \mathfrak{f} contém alguma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} .*

Uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de uma álgebra de Lie complexa reductiva \mathfrak{g} (como no caso das álgebras semisimples) é uma subálgebra abeliana maximal tal que $\text{ad}(X)$ é semisimples para todo $X \in \mathfrak{h}$. É fácil ver que \mathfrak{h} é a soma direta de uma subálgebra de Cartan da subálgebra derivada $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ com $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. É claro então que o centro de \mathfrak{g} é a intersecção de todas as subálgebras de Cartan de \mathfrak{g} . Ademais se \mathfrak{f} é uma subálgebra reductiva de posto máximo de uma álgebra de Lie semisimples \mathfrak{g} , então uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{f} também é uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Lembremos também que, fixada uma decomposição de Cartan de uma álgebra de Lie complexa semisimples \mathfrak{g} com involução θ , sempre existe uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} que é θ -invariante ([55, pag. 57]).

Teorema 1.3.4. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa semisimples com forma real compacta \mathfrak{k} e seja \mathfrak{f} uma subálgebra reductiva maximal de \mathfrak{g} com centro não-trivial. Se \mathfrak{f} é a complexificação de uma subálgebra \mathfrak{l} de \mathfrak{k} então \mathfrak{f} é uma subálgebra de posto máximo. Reciprocamente, se \mathfrak{f} é uma subálgebra de posto máximo então \mathfrak{f} é conjugada a uma subálgebra de \mathfrak{g} que é complexificação de uma subálgebra de \mathfrak{k} .*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos primeiro que existe uma subálgebra \mathfrak{l} de \mathfrak{k} tal que $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$. Como \mathfrak{f} é subálgebra reductiva maximal de \mathfrak{g} com centro não-trivial, \mathfrak{l} é subálgebra maximal de \mathfrak{k} com centro não-trivial (De fato, se o centro de \mathfrak{l} fosse trivial, \mathfrak{l} seria semisimples e portanto \mathfrak{f} seria semisimples). Seja X um elemento não-nulo qualquer do centro de \mathfrak{l} , e seja $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(X)$ seu centralizador em \mathfrak{k} . Mas obviamente, $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(X)$ (pois X está no centro de \mathfrak{l}), e como \mathfrak{l} é maximal em \mathfrak{k} , concluímos que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(X) = \mathfrak{l}$ ou $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(X) = \mathfrak{k}$. O segundo caso é excluído porque

\mathfrak{g} e \mathfrak{k} são semisimples. Seja agora \mathfrak{t} uma subálgebra abeliana maximal de \mathfrak{k} que contém X : então

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(X) = \mathfrak{l},$$

e portanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} contida em \mathfrak{f} .

Reciprocamente, suponhamos que \mathfrak{f} é uma subálgebra reductiva de \mathfrak{g} com centro não-trivial e de posto máximo. Escrevemos $\mathfrak{f} = \mathfrak{z}(\mathfrak{f}) \oplus [\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]$ e observamos que existe uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} contida em \mathfrak{f} ; portanto temos $\mathfrak{z}(\mathfrak{f}) \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{f}$.¹ Ademais, como já vimos anteriormente, a parte semisimples $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]$ de \mathfrak{f} é θ -invariante: $\theta([\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]) = [\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]$. Portanto, precisamos apenas mostrar que o centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{f})$ de \mathfrak{f} também é θ -invariante. Seja então $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{f})$. Logo $X \in \mathfrak{h}$ e $\theta(X) \in \mathfrak{h}$ e $\theta(X) \in \mathfrak{f}$. Por outro lado, $\theta(X)$ comuta não apenas com $\mathfrak{z}(\mathfrak{f})$ mas também com $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}] = \theta([\mathfrak{f}, \mathfrak{f}])$:

$$[\theta(X), \theta([Y, Z])] = \theta([X, [Y, Z]]) = 0 \quad \text{para} \quad Y, Z \in \mathfrak{f}.$$

Logo $\theta(X) \in \mathfrak{f}$. ■

Como veremos na próxima seção, uma subálgebra reductiva maximal de uma álgebra de Lie simples \mathfrak{g} ou é semisimples ou é reductiva de posto máximo com centro unidimensional; portanto, cada classe de conjugação de subálgebras complexas reductivas maximais de \mathfrak{g} define uma classe de conjugação de subálgebras maximais da forma real compacta de \mathfrak{g} .

1.4 Classificação das Subálgebras Maximais das Álgebras de Lie Simples

Nesta seção enunciamos os teoremas de Dynkin que classificam todas as subálgebras maximais das álgebras de Lie simples: as quatro séries infinitas de álgebras clássicas e as cinco álgebras excepcionais, segundo a classificação de Cartan. Todas as álgebras de Lie nesta seção são complexas, a menos que se mencione explicitamente o contrário.

Como estamos interessados na classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie compactas e os teoremas são formulados para álgebras complexas, vamos considerar sempre subálgebras reductivas. Portanto quando apresentamos uma lista de subálgebras maximais de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , fica subentendido que esta lista se refere a subálgebras reductivas maximais, ou seja, subálgebras que são maximais dentro de todas as subálgebras reductivas de \mathfrak{g} . É perfeitamente possível que tais subálgebras não sejam maximais dentro

¹Como todas as subálgebras de Cartan de \mathfrak{g} são conjugadas e como a complexificação de qualquer subálgebra abeliana maximal de \mathfrak{k} é uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} , podemos supor sem perda de generalidade (isto é, após efetuarmos uma conjugação apropriada de \mathfrak{h} e \mathfrak{f}) que \mathfrak{h} é θ -invariante.

de todas as subálgebras de \mathfrak{g} e que existam outras subálgebras maximais, com radical não-abeliano e portanto não redutivas. Porém, esta ambiguidade é eliminada quando passamos à forma compacta \mathfrak{k} de \mathfrak{g} , pois as subálgebras maximais de \mathfrak{g} podem ser agrupadas em subálgebras maximais que contêm uma determinada subálgebra redutiva maximal. De fato, se $\tilde{\mathfrak{f}}$ é uma subálgebra maximal de \mathfrak{g} , redutiva ou não, então $\mathfrak{l} = \tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{k}$ é uma subálgebra maximal de \mathfrak{k} e $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra redutiva maximal de \mathfrak{g} com $\mathfrak{f} \subset \tilde{\mathfrak{f}}$.

Nos limitaremos a enunciar e comentar os teoremas, pois a demonstração nos levaria muito longe e não é essencial para a compreensão do modelo algébrico para a evolução do código genético que motivou o presente trabalho. Por outro lado os resultados destes teoremas são fundamentais para a implementação do modelo.

Os resultados que enunciaremos se encontram em dois artigos de Dynkin [10, 11] que por sua vez se baseiam principalmente sobre um trabalho anterior de Malcev [34]. Alguns destes resultados já haviam sido obtidos por Borel e Siebenthal [4] por métodos diferentes, e depois por Golubitsky [16], que também reproduz vários resultados de Morozov e Karpelevich. A forma em que apresentamos os teoremas, que difere um pouco da forma original, se baseia em um artigo de Tits [53] e na apresentação moderna de Onishchik & Vinberg [42].

Estudaremos primeiro as álgebras clássicas que são naturalmente definidas como álgebras de matrizes e portanto possuem uma representação linear preferencial. Esta representação pode ser caracterizada como sendo a representação irredutível de menor dimensão possível, com algumas exceções: a série A_r com $r \geq 2$ e a álgebra D_4 . As álgebras A_r possuem duas representações irredutíveis de dimensão mínima que são inequivalentes, sendo que uma é a conjugada complexa da outra: são equivalentes apenas quando $r = 1$. A álgebra D_4 possui três representações irredutíveis de dimensão mínima, 8 no caso, que são inequivalentes: uma vetorial e as outras duas spinoriais. Mas, mesmo nestes casos, podemos fixar uma representação preferencial definindo-a explicitamente. Ademais, quando escolhemos uma representação de uma álgebra complexa \mathfrak{g} , fixamos automaticamente uma única representação da sua forma real compacta \mathfrak{k} .

Então quando dissermos que uma álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} é uma *álgebra de Lie clássica complexa*, estaremos nos referindo a uma das seguintes álgebras de Lie:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{tr}(X) = 0\}, & \text{para } n \geq 2, \\ \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^T = 0\}, & \text{para } n \geq 2, \\ \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid X^T J_{2n} + J_{2n} X = 0\}, & \text{para } n \geq 1, \end{aligned}$$

onde X^T é a matriz transposta de X e J_{2n} é a matriz $2n$ por $2n$ dada por

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

É claro que estas definições carregam consigo uma representação linear, que tem dimensão mínima: são estas representações que fixaremos para as álgebras de Lie clássicas. Há formas alternativas de definir as álgebras $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ que são muito úteis, e cujas representações lineares associadas são equivalentes às que apresentamos:

$$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} A, B, C \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \\ B, C \text{ anti-simétricas} \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} A, B, C \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \\ B, C \text{ simétricas} \end{array} \right\}.$$

Uma das vantagens destas definições é que fica óbvia a relação

$$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

As respectivas formas compactas das álgebras clássicas são

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^\dagger = 0, \text{tr}(X) = 0\}, & \text{para } n \geq 2, \\ \mathfrak{so}(n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^\dagger = 0\}, & \text{para } n \geq 2, \\ \mathfrak{sp}(2n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \mid X + X^\dagger = 0\}, & \text{para } n \geq 1, \end{aligned}$$

onde X^\dagger é a matriz transposta conjugada a X .


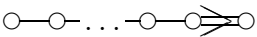
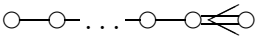
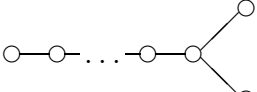
Notação de Cartan	Álgebra Complexa	Forma Real Compacta	Dimensão	Diagrama de Dynkin
A_r ($r \geq 1$)	$\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(r+1)$	$r(r+2)$	
B_r ($r \geq 2$)	$\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2r+1)$	$r(2r+1)$	
C_r ($r \geq 3$)	$\mathfrak{sp}(2r, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(2r)$	$r(2r+1)$	
D_r ($r \geq 4$)	$\mathfrak{so}(2r, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2r)$	$r(2r-1)$	

Tabela 1.2: Álgebras de Lie clássicas.

Assim fixamos para cada álgebra de Lie clássica \mathfrak{g} uma representação especial com dimensão mínima, que chamaremos a *representação fundamental* de \mathfrak{g} .

A tabela 1.2 apresenta as álgebras de Lie clássicas complexas, de acordo com a classificação de Cartan, e suas respectivas formas reais compactas, nas respectivas representações fundamentais, bem como a dimensão e o diagrama de Dynkin de cada uma.

Na tabela 1.3 apresentamos as representações de dimensão mínima das álgebras clássicas na notação que introduzimos na seção 2.1, com seus pesos máximos e suas dimensões. A representação fundamental aparece em negrito.

Notação de Cartan	Peso Máximo	Dimensão da Representação
A_1	(1)	2
A_r ($r \geq 2$)	(10...0) e (0...01)	$r + 1$
B_r ($r \geq 2$)	(10...0)	$2r + 1$
C_r ($r \geq 3$)	(10...0)	$2r$
D_4	(1000) , (0010) e (0001)	8
D_r ($r \geq 5$)	(10...0)	$2r$

Tabela 1.3: Representações de dimensão mínima das álgebras clássicas.

Observe que as álgebras clássicas que possuem mais de uma representação irredutível de dimensão mínima são exatamente as que possuem automorfismos do diagrama de Dynkin, o que não é nenhuma surpresa: são estes automorfismos que induzem automorfismos externos das respectivas álgebras, e estes por sua vez transformam uma representação em outra, inequivalente. Vale também observar que, devido ao isomorfismo $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, a álgebra $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ possui uma representação de dimensão 4 (a representação fundamental de $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$), mas de acordo com a nossa definição sua representação fundamental tem dimensão 5. Isto não causa problema pois, como veremos no próximo capítulo, os teoremas de classificação fornecem o mesmo resultado independentemente da representação que escolhemos: basta identificar quais subálgebras maximais de $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ correspondem por este isomorfismo as subálgebras maximais de $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$.

Notemos também que, na tabela 1.3, omitimos as vírgulas ao escrevermos os pesos, o que não causa confusão pois todos os números envolvidos estão na faixa $0 \leq n \leq 9$. Portanto, sabemos que cada algarismo corresponde a um dos coeficientes p_i que introduzimos anteriormente, e a notação fica mais fácil de se ler. Neste caso usaremos a vírgula para separar os pesos correspondentes aos ideais simples de uma álgebra semisimples: por exemplo, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$, escreveremos (100, 1000) para indicar a representação de \mathfrak{g} composta pelas representações fundamentais de seus ideais simples.

Para podermos formular os teoremas de classificação, precisaremos de mais algumas definições. Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie clássica com sua representação fundamental fixada, diremos que uma subálgebra maximal $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$ é *irredutível* se a restrição da representação fundamental de \mathfrak{g} à subálgebra \mathfrak{f} for irredutível; caso contrário, diremos que \mathfrak{f} é *redutível*. Assim dividimos o conjunto das subálgebras maximais¹ de \mathfrak{g} em três subconjuntos, obviamente disjuntos:

- Subálgebras maximais redutíveis,
- Subálgebras maximais irredutíveis não simples,
- Subálgebras maximais irredutíveis simples.

Lembremos primeiramente dos seguintes isomorfismos entre algumas álgebras de Lie:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(1, \mathbb{C}) &= \mathfrak{so}(1, \mathbb{C}) = \{0\} \\ \mathfrak{so}(2, \mathbb{C}) &= \mathbb{C} \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &= \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{so}(5, \mathbb{C}) &= \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C}) &= \mathfrak{so}(6, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) &= \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) &= \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Estes isomorfismos devem ser levados em conta quando se aplicam os teoremas a seguir. Além disto, sempre que possível, indexaremos as séries infinitas de álgebras clássicas pelo seu posto r . No caso em que esta indexação for por outro parâmetro usaremos uma letra diferente.

¹Mais exatamente, seria o conjunto das subálgebras redutivas maximais, conforme explicado anteriormente.

Teorema 1.4.1 (Dynkin [10, 11]). *As subalgebras maximais redutíveis \mathfrak{f} de uma álgebra de Lie clássica \mathfrak{g} são conjugadas a uma, e somente uma, das subalgebras listadas na tabela 1.4.*

\mathfrak{g}	Tipo	\mathfrak{f}	$\dim \mathfrak{f}$
$\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$ $r \geq 1$	I	$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(\ell, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(r-\ell+1, \mathbb{C})$ $1 \leq \ell \leq [(r+1)/2]$	$(r-\ell)^2 + \ell^2 +$ $+ 2(r-\ell)$
$\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$ $r \geq 2$	II	$\mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2(r-\ell)+1, \mathbb{C})$ $1 \leq \ell \leq r$	$2(r-\ell)^2 +$ $+ 2\ell(\ell-1) + r$
$\mathfrak{sp}(2r, \mathbb{C})$ $r \geq 3$	III	$\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2(r-\ell), \mathbb{C})$ $1 \leq \ell \leq [r/2]$	$2(r-\ell)^2 +$ $+ 2\ell^2 + r$
	IV	$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$	r^2
$\mathfrak{so}(2r, \mathbb{C})$ $r \geq 4$	V	$\mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2(r-\ell), \mathbb{C})$ $1 \leq \ell \leq [r/2]$	$2(r-\ell)^2 +$ $+ 2\ell^2 - r$
	VI	$\mathfrak{so}(2\ell-1, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2(r-\ell)+1, \mathbb{C})$ $1 \leq \ell \leq [(r+1)/2]$	$2(r-\ell)^2 + r +$ $+ (2\ell-1)^2 - \ell$
	VII	$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$	r^2

Tabela 1.4: Subalgebras maximais redutíveis das álgebras de Lie clássicas.

Observações.

1. As subalgebras desta tabela se dividem naturalmente em duas categorias: ou são semisimples (tipo II quando $\ell > 1$, tipo III, tipo V quando $\ell > 1$, tipo VI) ou são soma direta de uma álgebra semisimples com uma álgebra unidimensional (tipo I, tipo II quando $\ell = 1$, tipo IV, tipo V quando $\ell = 1$, tipo VII). No segundo caso, a parte semisimples de \mathfrak{f} é maximal dentre todas as subalgebras semisimples de \mathfrak{g} quando \mathfrak{f} for do tipo I, do tipo IV ou do tipo VII, mas não quando \mathfrak{f} for do tipo II ou do tipo V com $\ell = 1$, pois nestes casos,

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(2r-1, \mathbb{C}) &\subset \mathfrak{so}(2r, \mathbb{C}) &\subset \mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C}) && \text{(tipo II, } \ell = 1) \\ \mathfrak{so}(2r-2, \mathbb{C}) &\subset \mathfrak{so}(2r-1, \mathbb{C}) &\subset \mathfrak{so}(2r, \mathbb{C}) && \text{(tipo V, } \ell = 1) \end{aligned}$$

2. A inclusão de \mathfrak{f} em \mathfrak{g} é dada pela soma direta das representações fundamentais de cada ideal simples da subálgebra \mathfrak{f} . Mais exatamente, ela pode ser descrita da seguinte forma:

(a) Se \mathfrak{g} for da forma $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$ e \mathfrak{f} for da forma $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{C})$, então a inclusão é da forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C}) \\ (\lambda, X, Y) &\longmapsto \begin{pmatrix} X + \frac{\lambda}{p}1_p & 0 \\ 0 & Y - \frac{\lambda}{q}1_q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Se \mathfrak{g} for da forma $\mathfrak{so}(p+q, \mathbb{C})$ e \mathfrak{f} for da forma $\mathfrak{so}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(q, \mathbb{C})$, então a inclusão é da forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(q, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{so}(p+q, \mathbb{C}) \\ (X, Y) &\longmapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Se \mathfrak{g} for da forma $\mathfrak{sp}(2p+2q, \mathbb{C})$ e \mathfrak{f} for da forma $\mathfrak{sp}(2p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2q, \mathbb{C})$, então a inclusão é da forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(2p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2q, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{sp}(2p+2q, \mathbb{C}) \\ (X, Y) &\longmapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Se \mathfrak{g} for da forma $\mathfrak{so}(2p, \mathbb{C})$ e \mathfrak{f} for da forma $\mathfrak{gl}(p, \mathbb{C})$, então a inclusão é da forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(p, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{so}(2p, \mathbb{C}) \\ X &\longmapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e) Se \mathfrak{g} for da forma $\mathfrak{sp}(2p, \mathbb{C})$ e \mathfrak{f} for da forma $\mathfrak{gl}(p, \mathbb{C})$, então a inclusão é da forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(p, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{sp}(2p, \mathbb{C}) \\ X &\longmapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nos dois últimos casos estamos usando a definição alternativa que demos para $\mathfrak{so}(2r, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{sp}(2r, \mathbb{C})$. Fica claro, agora que demos as inclusões explicitamente, que as subálgebras da tabela 4 são realmente redutíveis, na verdade são completamente redutíveis.

3. As subálgebras desta tabela que são semisimples são maximais dentre todas as subálgebras de \mathfrak{g} e não somente dentre as reductivas, enquanto que as que possuem centro não-trivial não o são. De fato, estão contidas em subálgebras não-reductivas chamadas *subálgebras parabólicas maximais*. Uma subálgebra \mathfrak{p} de \mathfrak{g} é chamada *parabólica* se contém alguma subálgebra de Borel de \mathfrak{g} (isto é, uma subálgebra solúvel maximal). Segundo um teorema de Karpelevich¹, qualquer subálgebra maximal não-semisimple de uma álgebra de Lie complexa semisimple é conjugada a uma subálgebra parabólica maximal. As classes de conjugação de subálgebras parabólicas maximais estão em correspondência biunívoca com as raízes simples de \mathfrak{g} . Porém, estas subálgebras não possuem forma real compacta e portanto não fornecem subálgebras maximais quando passamos para a forma real compacta de \mathfrak{g} .
4. As subálgebras desta tabela correspondem a *espaços simétricos riemannianos irreductíveis* (ver Helgason [19, pag. 518, tab. V]), cuja classificação se deve a Cartan. Este problema se reduz à classificação de certas subálgebras das álgebras de Lie simples, fixadas por automorfismos involutivos (um automorfismo σ de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é *involutivo* se $\sigma \neq 1$ e $\sigma^2 = 1$). É um fato importante que todas estas subálgebras são maximais. As subálgebras do tipo I correspondem aos espaços simétricos do tipo *A III*⁷, que são as grassmannianas complexas $SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$, as subálgebras de tipo II, V e VI correspondem a uma única família de espaços simétricos, denotada por *B D I*, que são as grassmannianas reais $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$, as subálgebras de tipo III correspondem aos espaços simétricos do tipo *C II*, que são as grassmannianas quaterniônicas $Sp(2p+2q)/Sp(2p) \times Sp(2q)$, e finalmente, as subálgebras de tipo IV correspondem aos espaços simétricos de tipo *C I* e as subálgebras de tipo VII aos espaços simétricos de tipo *D III* que são os espaços simétricos $Sp(2n)/U(n)$ e $SO(2n)/U(n)$ respectivamente: note que em todos estes exemplos a álgebra \mathfrak{g} é simple e a subálgebra \mathfrak{f} é semisimple mas não simple ou tem um centro unidimensional. Há ainda os espaços simétricos associados às álgebras excepcionais, e mais duas famílias, *A I* e *A II*, para as quais a subálgebra \mathfrak{f} é simple e irreductível.

¹Este teorema aparece pela primeira vez no artigo *On nonsemisimple maximal subalgebras of semisimple Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **76** (1951), 775-778 (russo). Este artigo nunca foi traduzido para o inglês, mas uma demonstração do teorema pode ser encontrada em Golubitsky [16].

⁷A notação usada aqui é a mesma introduzida por Cartan na sua classificação dos espaços simétricos e que se tornou padrão desde então. O trabalho de Cartan em álgebras de Lie se iniciou com sua tese de doutorado, apresentada em 1894, onde é dada a classificação das álgebras de Lie simples complexas, depois ele se dedicou à classificação das álgebras de Lie simples reais obtida finalmente em 1914, a partir daí ele voltou seus esforços à teoria dos espaços simétricos, concluindo sua classificação numa série de artigos entre os anos de 1926 e 1927. Este trabalho monumental foi simplificado e aperfeiçoado por vários matemáticos e constitui hoje uma das principais áreas da geometria. Uma apresentação moderna e completa, partindo de noções elementares e chegando à classificação dos espaços simétricos pode ser encontrada em [19].

Teorema 1.4.2 (Dynkin [11]). *As subalgebras maximais irredutíveis não simples \mathfrak{f} de uma álgebra de Lie clássica \mathfrak{g} são conjugadas a uma, e somente uma, das subalgebras listadas na tabela 1.5.*

\mathfrak{g}	Tipo	\mathfrak{f}	$\dim \mathfrak{f}$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	I	$\mathfrak{sl}(s, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(t, \mathbb{C})$ $n = st; s, t \geq 2$	$s^2 + t^2 - 2$
$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$	II	$\mathfrak{so}(s, \mathbb{C}) \times \mathfrak{so}(t, \mathbb{C})$ $n = st; s, t \geq 3; s, t \neq 4$	$\frac{1}{2}(s^2 + t^2 - s - t)$
	III	$\mathfrak{sp}(s, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sp}(t, \mathbb{C})$ $n = st; s, t \geq 2$	$\frac{1}{2}(s^2 + t^2 + s + t)$
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$	IV	$\mathfrak{sp}(s, \mathbb{C}) \times \mathfrak{so}(t, \mathbb{C})$ $n = st; s \geq 2, t \geq 3, t \neq 4$ ou $s = 2, t = 4$	$\frac{1}{2}(s^2 + t^2 + s - t)$

Tabela 1.5: Subalgebras maximais irredutíveis não simples das álgebras de Lie clássicas.

Observações.

1. A inclusão de \mathfrak{f} em \mathfrak{g} é dada pelo produto tensorial das representações fundamentais de cada ideal simples da subalgebra \mathfrak{f} .
2. Os parâmetros n , s e t podem assumir quaisquer valores naturais que satisfazem as restrições indicadas na tabela, exceto no caso em que eles aparecem em uma álgebra simplética que, pelo fato de só admitir representação fundamental em dimensão par, exige que os parâmetros sejam números naturais pares.
3. Todas as subalgebras desta tabela são maximais não só dentre as subalgebras semisimples de \mathfrak{g} , mas dentre todas as subalgebras de \mathfrak{g} .
4. As subalgebras desta tabela só aparecem quando a dimensão da representação fundamental de \mathfrak{g} for um número composto, e portanto a sua distribuição nas séries clássicas não é tão regular quanto a das subalgebras da tabela anterior.
5. Nenhuma subalgebra desta tabela fornece espaços simétricos riemannianos.

Para enunciarmos o teorema de classificação das subálgebras maximais irredutíveis simples, precisaremos de mais algumas definições, pois este teorema difere dos anteriores quanto ao caráter do seu enunciado que lista as subálgebras que *não* são maximais em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

Seja \mathfrak{f} uma álgebra de Lie simples e fixemos uma representação irredutível ρ de \mathfrak{f} em um espaço vetorial complexo V de dimensão n com peso máximo Λ . Podemos considerar esta representação como uma inclusão de \mathfrak{f} em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, pois devido ao fato de \mathfrak{f} ser simples, a representação ρ é fiel. Devido ainda ao fato de \mathfrak{f} ser simples temos que $[\rho(\mathfrak{f}), \rho(\mathfrak{f})] = \rho(\mathfrak{f})$, e portanto $\rho(\mathfrak{f}) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Logo toda representação irredutível de uma álgebra de Lie simples \mathfrak{f} é uma inclusão desta álgebra como subálgebra irredutível simples em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Após esta observação, surgem imediatamente duas perguntas: (a) como saber se \mathfrak{f} é uma subálgebra de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ e (b) como saber quando duas inclusões da mesma álgebra \mathfrak{f} são conjugadas em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. Estas perguntas foram respondidas por Malcev [34], que foi o precursor de Dynkin na classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie simples. A idéia é interpretar a inclusão de \mathfrak{f} em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ como uma representação irredutível e reinterpretar as questões (a) e (b) como questões da teoria de representações de álgebras de Lie.

Para responder a estas duas perguntas observemos primeiramente que duas representações irredutíveis ρ_1 e ρ_2 de uma álgebra de Lie simples \mathfrak{f} em um espaço vetorial V são equivalentes se e somente se as subálgebras $\rho_1(\mathfrak{f})$ e $\rho_2(\mathfrak{f})$ são conjugadas em $\mathfrak{gl}(V)$. Lembremos também que a *representação dual* ou *contragrediente* $\rho^* : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$ a uma representação $\rho : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é definida por

$$\langle \rho^*(X)v^*, v \rangle = -\langle v^*, \rho(X)v \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{f}$, $v^* \in V^*$ e $v \in V$. Dizemos que uma representação ρ é *auto-dual* ou *auto-conjugada* se ρ for equivalente a ρ^* . Isto significa que existe um isomorfismo equivariante entre V e V^* , ou equivalentemente, existe uma forma bilinear não-degenerada ρ -invariante sobre V . Dizemos que ρ é *ortogonal* se existe uma forma bilinear simétrica sobre V invariante por ρ . Similarmente ρ é chamada *simplética* se existe uma forma bilinear anti-simétrica sobre V invariante por ρ . Uma outra forma de expressar isto é dizer que $\rho(X)$ pertence à subálgebra ortogonal/simplética definida por esta forma simétrica/anti-simétrica, para todo $X \in \mathfrak{f}$. Por outro lado, é possível garantir que uma forma bilinear ρ -invariante sobre V é não-degenerada ou nula, é única a menos de uma constante não-nula e é automaticamente simétrica ou anti-simétrica. Portanto, dizer que \mathfrak{f} é uma subálgebra de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})/\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ é o mesmo que dizer que a inclusão de \mathfrak{f} em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, quando vista como uma representação linear em \mathbb{C}^n , é ortogonal/simplética. Podemos introduzir a seguinte notação: se ρ for ortogonal diremos que \mathfrak{f} é do tipo 1 ($\mathfrak{f} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$), se ρ for simplética diremos que \mathfrak{f} é do tipo -1 ($\mathfrak{f} \subset \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$) e se ρ não for auto-dual diremos que \mathfrak{f} é do tipo 0 ($\mathfrak{f} \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$).

Nestes termos, a resposta à pergunta (a) é dada pelo seguinte teorema, originalmente devido a Malcev [34] e subsequentemente aperfeiçoado por Dynkin [11]; uma demonstração pode ser encontrada em Samelson [45, pag. 140]¹.

Teorema 1.4.3. *Seja \mathfrak{f} uma álgebra de Lie simples e ρ_Λ uma representação irredutível de \mathfrak{f} com peso máximo*

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r p_i \lambda_i.$$

Supondo que os números p_i estejam indexados de acordo com a tabela 1.1, temos as seguintes possibilidades para \mathfrak{f} :

- (i) $\mathfrak{f} = \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$: ρ_Λ é auto-dual se e somente se $p_i = p_{r-i+1}$ ($i = 1, \dots, r$); em particular, é sempre auto-dual quando $r = 1$. Nestes casos ρ_Λ é simplética quando $r = 1 \pmod{4}$ e $p_{(r+1)/2}$ é ímpar e é ortogonal caso contrário;
- (ii) $\mathfrak{f} = \mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$: ρ_Λ é sempre auto-dual. Então ρ_Λ é simplética quando $r = 1 \pmod{4}$ ou $r = 2 \pmod{4}$ e p_r é ímpar e é ortogonal caso contrário;
- (iii) $\mathfrak{f} = \mathfrak{sp}(2r, \mathbb{C})$: ρ_Λ é sempre auto-dual. Então ρ_Λ é simplética quando $p_1 + p_3 + p_5 + \dots$ é ímpar e é ortogonal caso contrário;
- (iv) $\mathfrak{f} = \mathfrak{so}(2r, \mathbb{C})$: ρ_Λ é auto-dual se e somente se r é par, ou r é ímpar e $p_{r-1} = p_r$. Nestes casos ρ_Λ é simplética quando $r = 1 \pmod{4}$ e $p_{r-1} + p_r$ é ímpar e é ortogonal caso contrário;
- (v) $\mathfrak{f} = G_2$: ρ_Λ é sempre auto-dual e ortogonal para todo Λ ;
- (vi) $\mathfrak{f} = F_4$: ρ_Λ é sempre auto-dual e ortogonal para todo Λ ;
- (vii) $\mathfrak{f} = E_6$: ρ_Λ é auto-dual se e somente se $p_1 = p_5$ e $p_2 = p_4$. Nestes casos ρ_Λ é sempre ortogonal;
- (viii) $\mathfrak{f} = E_7$: ρ_Λ é sempre auto-dual. Então ρ_Λ é simplética quando $p_1 + p_3 + p_7$ é ímpar e é ortogonal caso contrário;
- (ix) $\mathfrak{f} = E_8$: ρ_Λ é sempre auto-dual e ortogonal para todo Λ .

¹Quando Λ é o peso máximo de uma representação auto-dual ρ_Λ a altura (ver Dynkin [11]) de Λ , denotada por $\text{ht}(\Lambda)$, permite decidir se a representação ρ_Λ é ortogonal ou simplética: ela é ortogonal se e somente se $\text{ht}(\Lambda)$ for par e é simplética se e somente se $\text{ht}(\Lambda)$ for ímpar. O teorema 1.4.3 mostra então como calcular a altura do peso máximo associado a uma representação auto-dual ρ_Λ para cada álgebra de Lie simples. Com esta noção podemos definir o “tipo” de uma representação auto-dual ρ_Λ como sendo igual a $(-1)^{\text{ht}(\Lambda)}$.

No mesmo trabalho de Malcev [34] encontra-se a resposta à pergunta (b), resolvendo assim o problema de conjugação entre duas subálgebras irredutíveis simples. Uma demonstração se encontra em Onishchik & Vinberg [42, pag. 204, teo. 3.2].

Teorema 1.4.4. *Seja \mathfrak{f} uma subálgebra qualquer de uma álgebra de Lie clássica \mathfrak{g} e sejam $\varphi, \psi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ duas inclusões. Então temos as seguintes possibilidades:*

- (i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$. *Se φ e ψ são conjugadas em $\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$ então φ e ψ são equivalentes como representações lineares. Reciprocamente, se φ e ψ são equivalentes como representações lineares então φ e ψ são conjugadas. Ademais se φ e ψ^* são equivalentes como representações lineares, então existe um automorfismo externo σ de $\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$ tal que $\varphi = \sigma \circ \psi$.*
- (ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$. *Então φ e ψ são conjugadas se e somente se são equivalentes como representações lineares.*
- (iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2r, \mathbb{C})$. *Então φ e ψ são conjugadas se e somente se são equivalentes como representações lineares.*
- (iv) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2r, \mathbb{C})$. *Se φ e ψ são conjugadas então φ e ψ são equivalentes como representações lineares. Reciprocamente, se φ e ψ são equivalentes como representações lineares, então existe um automorfismo σ de $\mathfrak{so}(2r, \mathbb{C})$ tal que $\varphi = \sigma \circ \psi$, que pode ser interno ou externo. Se ele for interno então as inclusões são conjugadas.*

Finalmente podemos enunciar o principal teorema do trabalho de Dynkin sobre a classificação das subálgebras maximais das álgebras clássicas. Como já foi dito este teorema pode ser interpretado da seguinte forma: Quase todas as subálgebras irredutíveis simples são maximais em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, sendo que as exceções a esta afirmação estão listadas em uma tabela. Nesta tabela, os casos excepcionais são indicados listando a álgebra simples \mathfrak{f} , o peso máximo Λ da representação irredutível de \mathfrak{f} , a dimensão $n = \dim V_\Lambda$ desta representação e, finalmente, o tipo desta representação, conforme a notação introduzida acima:

$$\begin{aligned} \text{tipo } 0 &\Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \\ \text{tipo } 1 &\Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \\ \text{tipo } -1 &\Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \quad (n \text{ par}) \end{aligned}$$

A dimensão $n = \dim V_\Lambda$ é calculada pela fórmula de Weyl

$$\dim V_\Lambda = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{(\Lambda + \varrho, \alpha)}{(\varrho, \alpha)}$$

onde Δ^+ é o conjunto das raízes positivas e

$$\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha.$$

Teorema 1.4.5 (Dynkin [11]). *As subalgebras irredutíveis simples \mathfrak{f} de uma álgebra de Lie clássica \mathfrak{g} , dadas por uma representação irredutível de \mathfrak{f} com peso máximo Λ , são maximais, exceto quando \mathfrak{f} e Λ correspondem a um dos casos excepcionais listados na tabela 1.6.*

\mathfrak{f}	Λ	$n = \dim V_\Lambda$	Tipo
$\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}) \quad (r \geq 3)$	$\lambda_1 + \lambda_3$	$3 \binom{r+2}{4}$	0
$\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}) \quad (r \geq 2)$	$2\lambda_1 + \lambda_2$	$3 \binom{r+3}{4}$	0
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	$6\lambda_1$	7	1
$\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$	$\lambda_2 + \lambda_4$	189	1
$\mathfrak{so}(4\ell+3, \mathbb{C}) \quad (\ell \geq 1)$	$k\lambda_{2\ell+1} \quad (k \geq 2)$	$\prod_{i=1}^{2\ell+1} \frac{\binom{k+2i-1}{k}}{\binom{k+i-1}{k}}$	$(-1)^{(\ell+1)k}$
$\mathfrak{so}(9, \mathbb{C})$	$\lambda_1 + \lambda_4$	128	1
$\mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$	$2\lambda_2$	90	1
	$2\lambda_2 + \lambda_3$	350	-1
$\mathfrak{so}(10, \mathbb{C})$	$\lambda_2 + \lambda_4$	560	0
$\mathfrak{so}(12, \mathbb{C})$	λ_4	495	1
	$\lambda_3 + \lambda_5$	4928	-1
E_6	λ_2	351	0
	$\lambda_4 + \lambda_6$	17550	0
E_7	λ_2	1539	1
	λ_3	27664	-1
	λ_4	365750	1
	$\lambda_5 + \lambda_7$	3792096	-1
G_2	$k\lambda_1 \quad (k \geq 2)$	$\frac{2k+5}{5} \binom{k+4}{4}$	1

Tabela 1.6: Subalgebras irredutíveis simples não maximais em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ (tipo 0), $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ (tipo 1) ou $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, n par (tipo -1).

Observações.

1. Há duas séries de subálgebras maximais irredutíveis simples, com $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, dadas pelas inclusões naturais $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Estas são as únicas sequências de subálgebras maximais irredutíveis simples que seguem um padrão em uma série de álgebras clássicas, enquanto que as outras possuem uma distribuição muito irregular. Além disto estas duas inclusões correspondem exatamente aos espaços riemannianos simétricos irredutíveis dados pelas famílias *AI* e *AIII* que correspondem aos espaços $SU(2n)/SO(n)$ e $SU(2n)/Sp(n)$.
2. O caso de subálgebras irredutíveis simples é o único em que as álgebras excepcionais aparecem como subálgebras maximais dentro de alguma álgebra clássica. Outro fato curioso é que nenhuma inclusão maximal de uma álgebra excepcional fornece espaços simétricos riemannianos irredutíveis; porém, como veremos adiante, certas inclusões maximais de álgebras clássicas em álgebras excepcionais definem os espaços riemannianos simétricos irredutíveis que ainda não apareceram.

Com o conjunto de teoremas acima, temos um método completo para classificar as subálgebras maximais simples irredutíveis de uma álgebra de Lie clássica \mathfrak{g} . A estratégia é a seguinte:

1. Determinar quais álgebras de Lie simples possuem representações irredutíveis com a mesma dimensão que a representação fundamental de \mathfrak{g} ;
2. Usar o teorema 1.4.3 para decidir se as subálgebras encontradas são realmente subálgebras de \mathfrak{g} ;
3. Consultar a tabela 1.6 para eliminar as subálgebras que não são maximais;
4. Aplicar o teorema 1.4.4 para eliminar as redundâncias, obtendo assim o conjunto das classes de conjugação das subálgebras irredutíveis simples maximais.

O último teorema a ser enunciado também é devido a Dynkin: ele classifica completamente as subálgebras reductivas maximais das álgebras excepcionais. Neste caso daremos uma tabela com todas as possíveis classes de conjugação (ou *L*-conjugação) de subálgebras, indicando subálgebras que são isomorfas como álgebras abstratas mas não são subálgebras conjugadas com um índice superior entre parênteses. Por exemplo, a álgebra E_7 possui duas subálgebras maximais $A_1^{(1)}$ e $A_1^{(2)}$ que não são conjugadas em E_7 , apesar de serem isomorfas. No caso das álgebras excepcionais este fenômeno só ocorre com as subálgebras de tipo A_1 .

Teorema 1.4.6 (Dynkin [10]). *Seja \mathfrak{f} uma subálgebra reductiva maximal de uma álgebra de Lie excepcional \mathfrak{g} . Então \mathfrak{f} é conjugada a uma das subálgebras da segunda coluna ou linearmente conjugada a uma das subálgebras da terceira coluna da tabela 1.7.*

Álgebra Excepcional	Subálgebras de Posto Máximo	Subálgebras Singulares
E_6	$A_1 \oplus A_5$ $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ $\mathbb{C} \oplus D_5$	A_1 C_4 F_4 G_2 $A_2 \oplus G_2$
E_7	A_7 $A_1 \oplus D_6$ $A_2 \oplus A_5$ $\mathbb{C} \oplus E_6$	$A_1^{(1)}$ $A_1^{(2)}$ A_2 $A_1 \oplus A_1$ $A_1 \oplus F_4$ $A_1 \oplus G_2$ $C_3 \oplus G_2$
E_8	A_8 D_8 $A_1 \oplus E_7$ $A_2 \oplus E_6$ $A_4 \oplus A_4$	$A_1^{(1)}$ $A_1^{(2)}$ $A_1^{(3)}$ B_2 $A_1 \oplus A_1$ $F_4 \oplus G_2$
F_4	B_4 $A_1 \oplus C_3$ $A_2 \oplus A_2$	A_1 $A_1 \oplus G_2$
G_2	A_2 $A_1 \oplus A_1$	A_1

Tabela 1.7: Subálgebras maximais das álgebras de Lie excepcionais.

Observações. A segunda coluna da tabela 1.7 lista as subálgebras maximais de posto máximo (uma subálgebra \mathfrak{f} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita de *posto máximo* se existe uma subálgebra de Cartan¹ \mathfrak{h} de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{f}$). Vale observar que todas as subálgebras desta tabela que possuem centro não-trivial são de posto máximo. A terceira coluna se refere as subálgebras *singulares* ou *S-subálgebras*, isto é, subálgebras que não estão contidas em nenhuma subálgebra regular própria de \mathfrak{g} (uma subálgebra \mathfrak{f} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita *regular* se o seu normalizador $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$ contém alguma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}). Pode-se provar que todas as subálgebras singulares são semisimples; na verdade, as propriedades das subálgebras singulares são similares às das subálgebras irredutíveis das álgebras clássicas. Note que, somente na coluna de subálgebras singulares, aparecem subálgebras que são isomorfas como álgebras de Lie abstratas, mas não são conjugadas; de fato, as subálgebras singulares são classificadas apenas a menos de conjugação linear, isto é, existem mais classes de conjugação do que a tabela indica. Porém isto não é grave, pois as regras de ramificação só dependem das classes de conjugação linear. Por fim, podemos associar a algumas subálgebras da tabela 1.7 certos espaços simétricos riemannianos irredutíveis, da mesma forma como para as álgebras clássicas, mas nem todas as subálgebras desta lista estão associadas a espaços simétricos. Na tabela 1.8 apresentamos uma lista completa (extraída de Helgason [19, pag. 518, tab. V]) dos espaços simétricos associados às álgebras excepcionais.

Álgebra Excepcional	Subálgebras Maximais	Notação de Cartan
E_6	C_4	$E I$
	$A_1 \oplus A_5$	$E II$
	$\mathbb{C} \oplus D_5$	$E III$
	F_4	$E IV$
E_7	A_7	$E V$
	$A_1 \oplus D_6$	$E VI$
	$\mathbb{C} \oplus E_6$	$E VII$
E_8	D_8	$E VIII$
	$A_1 \oplus E_7$	$E IX$
F_4	$A_1 \oplus C_3$	$F I$
	B_4	$F II$
G_2	$A_1 \oplus A_1$	G

Tabela 1.8: Espaços simétricos riemannianos associados às álgebras de Lie excepcionais.

¹Lembremos que uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie reductiva é, por definição, a soma direta de seu centro e de uma subálgebra de Cartan de sua parte semisimples.

Agora que temos uma visão completa da estrutura das subálgebras maximais das álgebras simples complexas, podemos fazer algumas observações de caráter global:

1. Examinando todas as tabelas que contêm subálgebras percebe-se que as álgebras com centro não-trivial aparecem somente na tabela 1.4 ou na tabela 1.7 e que todas possuem centro unidimensional e correspondem a espaços simétricos, que na verdade são exatamente os espaços simétricos hermitianos. Então temos uma correspondência biunívoca entre os espaços simétricos hermitianos e as subálgebras maximais reductivas com centro não-trivial.
2. Podemos também listar as subálgebras de posto máximo, que aparecem classificadas pela primeira vez num trabalho de Borel e Siebenthal [4]: todas as subálgebras da tabela 1.4, com exceção das do tipo VI, e todas as subálgebras da primeira coluna da tabela 1.7, e somente estas, são subálgebras de posto máximo.
3. Um outro fato interessante é que todas as subálgebras semisimples que listamos são maximais dentre todas as subálgebras e não somente dentre as subálgebras reductivas. Como observamos no caso das álgebras clássicas, as subálgebras maximais que possuem centro não-trivial estão contidas em subálgebras parabólicas maximais: isto também vale para as subálgebras reductivas das álgebras excepcionais.
4. Por fim, gostaríamos de mencionar que no trabalho original de Dynkin há uma tabela que lista as subálgebras maximais de posto máximo das álgebras excepcionais, e que contém erros, pois aparecem subálgebras que na verdade não são maximais (para mais detalhes ver [25]). Estes erros foram observados e corrigidos por Tits [53] e Golubitsky & Rothschild [17].

Mostramos na seção 2.3 como usar a classificação das subálgebras reductivas maximais das álgebras de Lie complexas simples para obter a classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie compactas, e gostaríamos agora de indicar como se classificam as subálgebras maximais das outras formas reais das álgebras de Lie complexas simples. Consideremos primeiro o caso mais simples: uma álgebra complexa \mathfrak{g} pode ser vista como uma álgebra real $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ se simplesmente “esquecermos” sua estrutura complexa: neste caso, Dynkin [11, pag. 256, teo. 1.6] demonstra que as subálgebras maximais de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ são as subálgebras do tipo $\mathfrak{f}^{\mathbb{R}}$, onde \mathfrak{f} é uma subálgebra complexa maximal de \mathfrak{g} , juntamente com todas as formas reais de \mathfrak{g} . Um outro caso relativamente simples é o da forma real normal que, como a forma real compacta, é única para cada álgebra complexa simples: as subálgebras semisimples maximais da forma normal de \mathfrak{g} são simplesmente as formas normais das subálgebras maximais complexas semisimples de \mathfrak{g} . A diferença em relação ao caso compacto é que aqui existem certas subálgebras não-semisimples cujas complexificações são subálgebras parabólicas de \mathfrak{g} :

subálgebras com esta propriedade são chamadas *subálgebras parabólicas reais*, e o fato importante é que há uma correspondência biunívoca entre subálgebras parabólicas complexas e reais quando a forma real é normal. Portanto a classificação das subálgebras maximais das formas reais normais também segue do caso complexo. Outra diferença entre a forma normal e a forma compacta é que na forma real normal, assim como na sua complexificação, as subálgebras reductivas com centro não-trivial não são maximais dentre todas as subálgebras, pois estão contidas em subálgebras parabólicas reais maximais. Finalmente as subálgebras maximais das outras formas reais das álgebras de Lie complexas simples também foram classificadas, mas não é possível explicar o resultado de forma simples, e devemos nos restringir aqui a indicar as referências pertinentes: a classificação das subálgebras semisimples se encontra em Taufik [52] e Komrakov [30, 31] enquanto que a classificação das subálgebras não-semisimples pode ser encontrada em Mostow [38] e Tao Huei-min [51].

No próximo capítulo faremos uso dos teoremas de classificação de Dynkin para determinar todas as subálgebras maximais das álgebras de Lie que possuem representações irredutíveis de dimensão 64 (uma lista completa das álgebras de Lie simples com esta propriedade é dada em [23]) e portanto podem reproduzir as degenerescências observadas no código genético. Deste modo mostraremos que as tabelas de McKay & Patera [35], que contém todas as subálgebras semisimples maximais das álgebras de Lie simples de posto menor ou igual a 8^1 , fornecem essencialmente a lista completa dos subgrupos maximais conexos fechados dos grupos de Lie compactos simples. De fato, o teorema 1.3.4 permite transferir os teoremas de classificação de Dynkin para as álgebras de Lie compactas e, além disto, as regras de ramificação são preservadas tanto pela complexificação quanto pela restrição à forma compacta. Assim podemos interpretar as tabelas de McKay & Patera [35] como se referindo às álgebras compactas ou complexas, conforme nos seja mais conveniente. Finalmente, o teorema clássico de correspondência entre subálgebras e subgrupos conexos [56, pags. 94, 95] diz que existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupos de Lie conexos de um grupo de Lie G e as subálgebras de sua álgebra de Lie \mathfrak{g} e portanto pode-se passar das álgebras compactas para os grupos compactos de modo que as cadeias descendentes de subálgebras correspondam a cadeias descendentes de subgrupos conexos fechados⁷.

¹Na verdade, contém todas as subálgebras reductivas maximais, sendo que no caso das subálgebras que possuem centro não-trivial aparece apenas a parte semisimples desde que esta continue sendo maximal (ver observações após o teorema 1.4.1). Isto ocorre porque o centro não contribui no cálculo das regras de ramificação.

⁷O fato de que qualquer subgrupo semisimples de um grupo de Lie compacto é fechado é um resultado não-trivial devido a Mostow [37, pag. 615, cor. 2].

Quebra de Simetrias no Código Genético

Neste capítulo formularemos um quadro geral para se construir modelos algébricos baseados no princípio de simetrias quebradas e o aplicaremos para obter modelos algébricos para o código genético, segundo a estratégia originalmente proposta por Hornos & Hornos [22] e ligeiramente generalizada por Forger, Hornos & Hornos [14].

2.1 Modelo Geral de Quebra de Simetrias

Seja G um grupo de Lie compacto conexo e ρ uma representação irredutível de G em um espaço vetorial V . Quando restringirmos esta representação de G a um subgrupo fechado H de G , o espaço vetorial V se decompõe numa soma direta de subespaços invariantes sob H tal que ρ se decompõe num conjunto de representações irredutíveis de H nestes subespaços, segundo o que é denominado a *regra de ramificação* pertinente¹. As vezes chamaremos estes subespaços invariantes de *multipletos* e o número de vezes que um subespaço invariante de uma dimensão fixada aparece é chamado de *multiplicidade*⁷ do multipletto. Quando nos referimos a um subespaço invariante em particular podemos especializar a nomenclatura de modo a especificar sua dimensão: um *singleto* representa um subespaço invariante de dimensão 1, um *dubleto* um de dimensão 2, um *tripleto* um de dimensão 3, e assim em diante.

¹Se H for um subgrupo de Lie não fechado, H será substituído por seu fecho \bar{H} , pois a restrição de uma representação irredutível de \bar{H} a H será sempre uma representação irredutível de H e portanto as regras de ramificação de G a \bar{H} e de G a H são as mesmas.

⁷Há uma certa confusão na literatura, onde a palavra “multiplicidade” é muitas vezes usada ao invés de “dimensão”. Como precisaremos dos dois conceitos, devemos fazer uma clara distinção entre ambos.

A idéia fundamental por trás dos modelos baseados em simetrias quebradas é de que as degenerescências encontradas em situações experimentais refletem uma simetria que é residual no sentido de que, originalmente, houve uma simetria maior que foi perdida, ou quebrada, ao longo de um processo de evolução: o grupo G descreve a simetria original e o subgrupo H a simetria residual que permanece após a quebra. Em termos de representações, houve originalmente um único multipletos sob G que foi quebrado em vários multipletos sob H . Ademais, este processo pode ocorrer em várias fases distintas, o que leva à idéia de considerar *cadeias* de subgrupos fechados do tipo $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_k = H$, junto com as sucessivas regras de ramificação de uma dada representação irreduzível de G . Reciprocamente, podemos imaginar o problema inverso, isto é, algum fenômeno produz uma certa distribuição de multipletos (onde usamos a palavra multipletos num sentido livre, significando apenas um conjunto finito de dados agrupados em certas classes) e queremos reconstruir um processo que gerou esta distribuição de multipletos, supondo que ela foi obtida através de um processo de evolução que partiu de uma situação totalmente simétrica e que ao decorrer do tempo esta simetria foi parcialmente perdida. Segundo esta filosofia para construir um modelo concreto usando a teoria dos grupos de Lie compactos conexos precisamos escolher:

- um grupo de Lie compacto conexo simples G ;
- uma representação irreduzível de G em um espaço vetorial V cuja dimensão seja igual à soma das dimensões dos multipletos observados;
- uma cadeia $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_k = H$ de subgrupos fechados conexos maximais, tal que a distribuição de multipletos obtida da representação de G em V por restrição ao último subgrupo H da cadeia e subsequente decomposição em representações irreduzíveis de H seja igual à distribuição de multipletos observada.

A imposição de que G seja simples é motivada pelo fato de que um grupo de Lie compacto conexo G qualquer é um objeto composto: G se decompõe unicamente no produto localmente direto¹ de subgrupos normais G_0, G_1, \dots, G_k , onde G_0 é isomorfo a um toro e G_1, \dots, G_k são simples. Do mesmo modo exigimos que a representação de G em V seja irreduzível: uma representação redutível significaria que já houve uma quebra de simetria anterior. Por outro lado, a restrição a grupos conexos é imposta por motivos técnicos: a extensão do programa a grupos compactos mas não necessariamente conexos constitui um problema ainda em aberto. Finalmente, a utilização de subgrupos maximais é apenas por conveniência: se por acaso tivéssemos uma cadeia descendente de subgrupos não necessariamente maximais basta acrescentar a esta cadeia todos os subgrupos intermediários, obtendo assim uma nova cadeia que satisfaz a condição de maximalidade e produz o mesmo resultado que a cadeia original.

¹Dizemos que um grupo de Lie G se decompõe num *produto localmente direto* de subgrupos normais G_1, \dots, G_k se $G = G_1 \dots G_k$ e todas as intersecções $G_i \cap (G_1 \dots G_{i-1} G_{i+1} \dots G_k)$ ($i = 1, \dots, k$) são discretas.

Há vários motivos para considerar o problema de construir um modelo algébrico para a evolução do código genético dentro da categoria dos grupos de Lie compactos. Em primeiro lugar, grupos de Lie compactos formam uma classe natural de objetos, sendo uma “versão contínua” dos grupos finitos, que aliás são uma outra classe natural de objetos na qual o mesmo problema merece ser investigado [22]. Em segundo lugar, a implementação do programa delineado acima requer uma teoria matemática suficientemente bem desenvolvida e completa, o que inclui:

- uma classificação da classe de grupos pertinente,
- uma classificação de suas representações irredutíveis,
- uma classificação de seus subgrupos (maximais),
- algoritmos e tabelas para regras de ramificação.

Ocorre que não existe uma teoria tão completa para a classe de todos os grupos de Lie, mas ela existe para a classe dos grupos de Lie compactos. Ademais, como consideramos apenas subgrupos fechados, nunca saímos da classe dos grupos de Lie compactos. Um outro fator importante é que qualquer representação de um grupo de Lie compacto é completamente redutível, fato este que justifica usar o conceito de regras de ramificação.

Graças ao teorema de correspondência entre grupos de Lie conexos e álgebras de Lie, que inclusive relaciona suas representações, podemos transferir o problema inteiramente para o contexto das álgebras de Lie. Notemos que aos grupos de Lie compactos conexos correspondem as álgebras de Lie compactas e que o problema de como tratar os subgrupos de Lie não fechados desaparece quando passamos às álgebras de Lie. Portanto, fixando uma determinada distribuição de multipletos com soma total de dimensões igual a n , a construção de um modelo algébrico baseado no princípio de simetrias quebradas pode, no contexto dos grupos de Lie compactos conexos, ser implementada pela seguinte estratégia:

- a) Determinar todas as álgebras de Lie compactas simples que possuem representações irredutíveis de dimensão n ;
- b) Para cada representação irredutível encontrada analisar as regras de ramificação da representação em relação a todas as cadeias descendentes de subálgebras maximais.

Observemos também que, como vimos no capítulo anterior, toda álgebra de Lie compacta é redutiva, isto é, decompõe-se na soma direta de seu centro e uma subálgebra semisimples. Suponha que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie semisimples compacta e \mathfrak{h} uma subálgebra maximal de \mathfrak{g} , então \mathfrak{h} é necessariamente redutiva e podemos escrever

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_k, \quad (2.1)$$

onde $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é o centro (e portanto um ideal abeliano) de \mathfrak{h} e $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_k$ são os ideais simples de \mathfrak{h} . Considere agora uma representação irredutível de \mathfrak{g} em um espaço vetorial V . Quando restringirmos esta representação à subálgebra \mathfrak{h} obtemos uma representação completamente redutível de \mathfrak{h} , pois esta é a álgebra de Lie de um grupo compacto. Denotemos por V_i ($i = 1, \dots, \ell$) os subespaços invariantes sob \mathfrak{h} . Então cada subespaço V_i carrega uma representação irredutível de \mathfrak{h} que se decompõe em um produto tensorial de representações irredutíveis de cada um dos ideais $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_k$ de \mathfrak{h} . Mas, como toda representação irredutível de $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é unidimensional, a dimensão de V_i só depende das representações dos ideais não-abelianos de \mathfrak{h} . Assim concluímos que não há perda de generalidade ao nos restringirmos a cadeias de subálgebras semisimples maximais, pois estamos interessados apenas nas dimensões e nas multiplicidades dos multipletos. e podemos substituir o item b) acima por

- c) Para cada representação irredutível encontrada analisar as regras de ramificação da representação em relação a todas as cadeias descendentes de subálgebras *semisimples* maximais.

Uma resposta parcial ao item a) pode ser encontrada em [35], onde estão tabeladas as representações irredutíveis de dimensão $\leq 60.000.000$ das álgebras de Lie simples de posto ≤ 8 . Para responder ao item c), precisamos recorrer ao teorema de estrutura das subálgebras maximais das álgebras de Lie semisimples que demonstramos no capítulo anterior.

2.2 Produto Tensorial e Restrição de Representações

Dada uma representação ρ de uma álgebra de Lie semisimples \mathfrak{g} em um espaço vetorial V queremos determinar a regra de ramificação da restrição de ρ a uma subálgebra maximal $\tilde{\mathfrak{g}}$ de \mathfrak{g} . Como \mathfrak{g} é semisimples podemos decompô-la em soma direta de ideais simples

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k. \quad (2.2)$$

Pelo teorema 1.2.1 da seção 1.2 há duas possibilidades (a menos de isomorfismos) para a subálgebra $\tilde{\mathfrak{g}}$:

- *tipo simples*: escrevendo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}_i$, onde \mathfrak{g}_i ($1 \leq i \leq k$) é um ideal simples de \mathfrak{g} e \mathfrak{g}' é o ideal complementar a \mathfrak{g}_i (isto é, a soma direta de todos os outros ideais simples de \mathfrak{g}), temos que $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}' \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_i$ onde $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ é uma subálgebra maximal de \mathfrak{g}_i .
- *tipo diagonal*: escrevendo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$, onde \mathfrak{g}_0 é um ideal de \mathfrak{g} que aparece (pelo menos) duas vezes na decomposição (2.2) e \mathfrak{g}' é o ideal complementar a $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ (isto é, a soma direta de todos os outros ideais simples de \mathfrak{g}), temos que $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}' \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0$ onde $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ é a inclusão diagonal de \mathfrak{g}_0 em $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ ($X \in \mathfrak{g}_0$ é levado em $(X, X) \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$).

Então estudar a restrição de ρ a uma destas subálgebras é equivalente a estudar os seguintes problemas:

1. Dada uma álgebra de Lie simples \mathfrak{g} e uma representação irredutível ρ de \mathfrak{g} determinar a regra de ramificação de $\text{Res}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{g}}(\rho)$ para toda subálgebra maximal \mathfrak{f} de \mathfrak{g} .
2. Dada uma álgebra de Lie simples \mathfrak{f} e uma representação irredutível ρ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{f}$ determinar a regra de ramificação de $\text{Res}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{g}}(\rho)$ onde \mathfrak{f} é a inclusão diagonal de \mathfrak{f} em $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{f}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} &\longrightarrow \mathfrak{f} \times \mathfrak{f} \\ X &\longmapsto (X, X) \end{aligned}$$

O problema 1 é muito importante em física e por este motivo há muita pesquisa nesta direção, resultando numa variedade enorme de fórmulas que o resolvem em casos particulares (para certas subálgebras de certas álgebras de Lie simples). Algumas destas fórmulas podem ser encontradas em [15, pag. 424] e [61]. Há um tratamento mais uniforme dado por McKay & Patera [35] que determinaram todas as regras de ramificação para as álgebras simples com posto menor ou igual a 8 e construíram tabelas que permitem uma consulta rápida e direta. Estas tabelas foram construídas a partir da classificação de Dynkin que apresentamos no capítulo 1, e portanto contêm as regras de ramificação para todas as subálgebras reductivas maximais das álgebras simples. O método utilizado para o cálculo destas regras de ramificação está exposto em [40] e [36], sendo que nesta última referência é apresentada uma listagem do programa que gerou as tabelas de [35].

Consideremos agora o problema 2. Neste caso ρ é o produto tensorial de duas representações irredutíveis ρ_1 e ρ_2 de \mathfrak{f} em V_1 e V_2 , respectivamente. Então a restrição de ρ à inclusão diagonal de \mathfrak{f} em $\mathfrak{f} \times \mathfrak{f}$ é simplesmente a representação $\rho_1 \otimes \rho_2$ de \mathfrak{f} em $V_1 \otimes V_2$. De fato, como

$$\rho(X, Y)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(Y)v_2$$

para todo $(X, Y) \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, a restrição de ρ a \mathfrak{f} é dada por

$$\text{Res}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{g}}(\rho)(X, X)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(X)v_2 = ((\rho_1 \otimes \rho_2)(X))(v_1 \otimes v_2)$$

para todo $(X, X) \in \mathfrak{f}$, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Sendo esta representação completamente reductível podemos escrever

$$\rho_1 \otimes \rho_2 = \bigoplus_{i=1}^k \rho_i \quad , \quad V_1 \otimes V_2 = \bigoplus_{i=1}^k W_i$$

onde ρ_i são representações irredutíveis de \mathfrak{f} em espaços W_i ($i = 1, \dots, k$). Ou seja, enfrentamos o problema clássico de decompor um produto tensorial de duas representações irredutíveis de uma álgebra de Lie simples em soma direta de representações irredutíveis, também

conhecido como problema de “Clebsch-Gordan”. Este problema já é estudado há muito tempo por matemáticos e físicos, e existem várias fórmulas para vários tipos de álgebras de Lie simples. A mais conhecida delas é a clássica *fórmula de Clebsch-Gordan*, muito importante na teoria do momento angular em mecânica quântica [49], que fornece a decomposição do produto tensorial de duas representações irredutíveis da álgebra de Lie simples A_1 . Seja ρ_s a representação de spin s de A_1 , então

$$\rho_{s_1} \otimes \rho_{s_2} = \rho_{|s_1-s_2|} \oplus \rho_{|s_1-s_2|+1} \oplus \dots \oplus \rho_{|s_1+s_2|-1} \oplus \rho_{|s_1+s_2|}. \quad (2.3)$$

Usando a notação que introduzimos no capítulo 1 e lembrando que o peso máximo da representação V_s é igual a $2s$, podemos escrever a fórmula (2.3) em termos de pesos máximos

$$(n) \otimes (m) = (|m-n|) \oplus (|m-n+2|) \oplus \dots \oplus (m+n). \quad (2.4)$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} (1) \otimes (1) &= (0) \oplus (1), \\ (1) \otimes (2) &= (1) \oplus (3), \\ (2) \otimes (2) &= (0) \oplus (2) \oplus (4). \end{aligned}$$

Em geral, podemos formular o problema nos seguintes termos: Dadas duas representações irredutíveis Γ_λ e Γ_μ de uma álgebra de Lie semisimples com pesos máximos λ e μ , introduzimos inteiros não-negativos $N_{\lambda\mu}^\nu$ tais que

$$\Gamma_\lambda \otimes \Gamma_\mu = \bigoplus_{\nu} N_{\lambda\mu}^\nu \Gamma_\nu. \quad (2.5)$$

Os números $N_{\lambda\mu}^\nu$ são chamados *multiplicidades externas* ou *coeficientes de fusão* da decomposição (2.5). Existem fórmulas combinatórias que descrevem os coeficientes $N_{\lambda\mu}^\nu$. A mais conhecida é a chamada regra de Littlewood-Richardson para as álgebras do tipo A_n (ver [15]), e em [58] há algumas fórmulas combinatórias para as outras álgebras clássicas. Existe também uma fórmula geral devida a Steinberg [20, pag. 141] que fornece os coeficientes $N_{\lambda\mu}^\nu$ para uma álgebra de Lie \mathfrak{g} semisimples qualquer:

$$N_{\lambda\mu}^\nu = \sum_{w_1, w_2 \in \mathcal{W}} \text{sgn}(w_1 w_2) \mathcal{P}(\nu + 2\rho - w_1(\lambda + \rho) - w_2(\mu + \rho)), \quad (2.6)$$

onde \mathcal{W} é o grupo de Weyl de \mathfrak{g} , \mathcal{P} é a *função de Kostant* definida como sendo o número de subconjuntos de inteiros não-negativos $\{n_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+\}$ para os quais

$$\lambda = - \sum_{\alpha \in \Delta^+} n_\alpha \alpha,$$

e

$$\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha.$$

onde Δ^+ é o conjunto de raízes positivas de \mathfrak{g} . Esta fórmula é bem explícita, porém não é fácil de aplicar quando o grupo de Weyl é muito grande.

2.3 Subalgebras Maximais das Álgebras Simples para o Código Genético

Agora que já temos uma teoria para implementar o modelo geral de quebra de simetrias podemos analisar o caso particular do código genético. Uma apresentação detalhada da estrutura do código genético se encontra em [23]. Este trabalho contém também alguns argumentos físicos e biológicos para a utilização de modelos baseados no princípio de quebra de simetrias.

No caso do código genético a distribuição de multipletos é a seguinte:

- 2 singletos,
- 9 dubletos,
- 2 tripletos,
- 5 quartetos,
- 3 sextetos.

Temos portanto 21 multipletos cujas dimensões somam 64.

Precisamos então determinar todas as álgebras de Lie compactas simples que possuem representações irredutíveis de dimensão 64¹. Este problema foi resolvido em [23] e as álgebras compactas simples com os pesos máximos das representações irredutíveis de dimensão 64, chamadas *representações de códons*, estão apresentadas na tabela 2.1. Também calculamos o tipo de cada uma, de acordo com o teorema 1.4.3 do capítulo 1. Observe que nesta tabela as 8 primeiras álgebras possuem posto menor que 8 e portanto constam das tabelas de McKay & Patera [35]. As três últimas são álgebras de matrizes naturalmente definidas em espaços vetoriais de qualquer dimensão e portanto suas representações de códons são suas representações fundamentais. O fato de que não há outras representações de códons é não-trivial e decorre de uma análise baseada na fórmula de dimensão de Weyl. Um fato

¹A partir de agora só consideraremos álgebras de Lie compactas.

interessante é que esta tabela apresenta todas as subálgebras simples irredutíveis de $\mathfrak{su}(64)$, e de acordo com o teorema de Dynkin (ver tabela 1.6) todas são maximais em $\mathfrak{su}(64)$, $\mathfrak{so}(64)$ ou $\mathfrak{sp}(64)$, de acordo com o tipo que aparece na última coluna. Esta observação deixa claro, através de um exemplo não-trivial, que a parte mais difícil em relação à utilização do referido teorema de Dynkin é a determinação das álgebras que possuem representações irredutíveis de uma determinada dimensão.

Notação de Cartan	Álgebra de Lie Compacta Simples	Peso Máximo	Tipo
A_1	$\mathfrak{su}(2)$	63	-1
A_2	$\mathfrak{su}(3)$	(33)	1
B_2	$\mathfrak{so}(5)$	(13)	-1
G_2		(11)	1
A_3	$\mathfrak{su}(4)$	(111)	1
C_3	$\mathfrak{sp}(6)$	(110)	-1
B_6	$\mathfrak{so}(13)$	(000001)	-1
D_7	$\mathfrak{so}(14)$	(0000010) (0000001)	0
C_{32}	$\mathfrak{sp}(64)$	(10...0)	0
D_{32}	$\mathfrak{so}(64)$	(10...0)	0
A_{63}	$\mathfrak{su}(64)$	(10...0) (0...01)	0

Tabela 2.1: Representações de Códons.

Agora podemos usar as tabelas do capítulo anterior para determinar todas as subálgebras maximais das álgebras de Lie simples que aparecem em alguma cadeia proveniente de uma das álgebras da parte superior da tabela 2.1. Na verdade precisaremos das subálgebras maximais de quase todas as álgebras clássicas de posto ≤ 7 , mais as subálgebras maximais da álgebra excepcional G_2 . Estas já se encontram na tabela 1.7. Para as demais precisaremos

consultar as tabelas 1.4, 1.5 e 1.6.

Os resultados serão apresentados em forma de tabelas, que possuem três colunas: a primeira apresenta as subálgebras do modo em que são fornecidas pelas tabelas do capítulo anterior e a segunda na notação de Cartan, já levando em conta os isomorfismos

$$C_1 = B_1 = A_1, \quad C_2 = B_2, \quad D_2 = A_1 \oplus A_1, \quad D_3 = A_3,$$

(adotaremos a convenção usual em que A_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 2$), C_n ($n \geq 3$), D_n ($n \geq 4$) e portanto na segunda coluna não aparecem $B_1, C_1, C_2, D_1, D_2, D_3$ (D_1 seria $\mathfrak{so}(2)$ que não é simples)), e finalmente a última coluna indica o tipo da subálgebra de acordo com a caracterização explicada no capítulo anterior:

- tipo redutível, indicado pela letra \mathcal{R} , seguida pelo número que representa o tipo na tabela 1.4;
- tipo irredutível não-simples, indicado pela letra \mathcal{N} , seguida pelo número que representa o tipo na tabela 1.5;
- tipo irredutível simples, indicado pela letra \mathcal{S} , seguida pelo peso máximo da representação da subálgebra que define a inclusão, quando não se tratar de um espaço simétrico.

Além disto indicaremos nesta última coluna o espaço simétrico associado à subálgebra, quando for o caso, colocando o tipo de acordo com a notação padrão utilizada em [19].

Como só estamos interessados nas subálgebras semisimples máximas, nossas tabelas não contêm subálgebras que possuem centro não-trivial e são máximas, de acordo com as tabelas do capítulo anterior, quando sua parte semisimple não é maximal. A tabela 1.4 é a única que possui subálgebras com centro não-trivial e logo abaixo desta tabela já havíamos indicado quais destas deixam de ser máximas após remoção do centro: este fenômeno ocorre apenas com as álgebras ortogonais (B_n e D_n) e em alguns casos isolados que serão comentados no item 3 abaixo.

Como já foi mencionado, a parte mais difícil da tarefa é classificar as subálgebras irredutíveis simples, o que requer determinar todas as álgebras simples que possuem representações irredutíveis de uma dimensão fixada. As seguintes observações facilitam o procedimento.

1. Como a álgebra $\mathfrak{su}(2)$ admite uma representação irredutível em cada dimensão e esta representação é sempre auto-dual existe uma subálgebra maximal irredutível $\mathfrak{su}(2)$ em $\mathfrak{so}(n)$ quando n for ímpar (o peso máximo de uma representação irredutível de $\mathfrak{su}(2)$ de dimensão ímpar é um número par e portanto a representação é ortogonal) e uma

subálgebra maximal irredutível $\mathfrak{su}(2)$ em $\mathfrak{sp}(n)$ quando n for par (o peso máximo de uma representação irredutível de $\mathfrak{su}(2)$ de dimensão par é um número ímpar e portanto a representação é simplética). A única exceção é a álgebra $\mathfrak{so}(7)$, na qual a subálgebra irredutível $\mathfrak{su}(2)$ não é maximal, segundo a tabela 1.6.

2. Toda álgebra $\mathfrak{su}(n)$ possui subálgebras maximais irredutíveis naturais: $\mathfrak{so}(n)$ quando n for ímpar e $\mathfrak{so}(n)$ e $\mathfrak{sp}(n)$ quando n for par. Estas inclusões são determinadas pela representação fundamental e definem os espaços simétricos de tipo AI no caso de $\mathfrak{so}(n)$ e $AIII$ no caso de $\mathfrak{sp}(n)$. Nestes dois casos não indicaremos o peso máximo das representações.
3. Há três casos excepcionais de subálgebras que, contrariando as expectativas, não aparecem nas tabelas que seguem:

- (a) $\mathfrak{su}(4) \supset \mathfrak{so}(4)$, do tipo $(\mathcal{S}; AI)$: devido ao fato de $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ não ser simples, ela é de fato uma subálgebra maximal irredutível não-simples (tipo \mathcal{N} , não tipo \mathcal{S});
- (b) $\mathfrak{su}(4) \supset \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, do tipo $(\mathcal{R}; AIII)$: devido ao fato de que $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(4)$, a parte semisimples desta subálgebra não é maximal, pois

$$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(4) \subset \mathfrak{so}(5) \subset \mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{su}(4).$$

- (c) $\mathfrak{so}(8) \supset \mathfrak{u}(4)$, do tipo $(\mathcal{R}; DIII)$: devido ao fato de que $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$, a parte semisimples desta subálgebra não é maximal, pois

$$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6) \subset \mathfrak{so}(7) \supset \mathfrak{so}(8).$$

Devemos mencionar também que as álgebras $\mathfrak{su}(6)$ e $\mathfrak{so}(8)$ contêm subálgebras maximais irredutíveis simples que não são conjugadas mas são levadas umas nas outras por automorfismos externos. No caso de $\mathfrak{su}(6)$, existem duas classes de conjugação de subálgebras $\mathfrak{su}(3)$ dadas pelos pesos máximos (20) e (02) e relacionadas por conjugação complexa, que é um automorfismo externo de $\mathfrak{su}(6)$. No caso de $\mathfrak{so}(8)$, cujo grupo de automorfismos externos é o grupo simétrico S_3 , existem duas classes de conjugação de subálgebras $\mathfrak{so}(7)$ e duas classes de conjugação de subálgebras do tipo $A_1 \oplus B_2$ relacionadas pelo automorfismo externo de $\mathfrak{so}(8)$ que transforma a representação vetorial em uma das duas spinoriais. Nas tabelas de McKay & Patera [35], apenas uma de cada uma dessas duas classes é listada, o que deve ser devidamente levado em consideração quando se calculam regras de ramificação.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{u}(2)$	A_1	$(\mathcal{RI}; AIII)$
$\mathfrak{so}(3)$	\tilde{A}_1	$(\mathcal{S}; AI)$

Tabela 2.2: Subálgebras maximais de $A_2 = \mathfrak{su}(3)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{u}(3)$	A_2	$(\mathcal{RI}; AIII)$
$\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$	$A_1 \oplus A_1$	(\mathcal{NI})
$\mathfrak{sp}(4)$	B_2	$(\mathcal{S}; AII)$

Tabela 2.3: Subálgebras maximais de $A_3 = \mathfrak{su}(4)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{u}(4)$	A_3	$(\mathcal{RI}; AIII)$
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(3)$	$A_1 \oplus A_2$	$(\mathcal{RI}; AIII)$
$\mathfrak{so}(5)$	B_2	$(\mathcal{S}; AI)$

Tabela 2.4: Subálgebras maximais de $A_4 = \mathfrak{su}(5)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{u}(5)$	A_4	$(\mathcal{RI}; A III)$
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(4)$	$A_1 \oplus A_3$	$(\mathcal{RI}; A III)$
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3)$	$A_2 \oplus A_2$	$(\mathcal{RI}; A III)$
$\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(3)$	$A_1 \oplus A_2$	(\mathcal{NI})
$\mathfrak{su}(3)$	A_2	$(\mathcal{S}; (20))$
$\mathfrak{su}(3)$	A_2	$(\mathcal{S}; (02))$
$\mathfrak{so}(6)$	A_3	$(\mathcal{S}; AI)$
$\mathfrak{sp}(6)$	C_3	$(\mathcal{S}; A II)$

Tabela 2.5: Subálgebras maximais de $A_5 = \mathfrak{su}(6)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{u}(6)$	A_5	$(\mathcal{RI}; A III)$
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(5)$	$A_1 \oplus A_4$	$(\mathcal{RI}; A III)$
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(4)$	$A_2 \oplus A_3$	$(\mathcal{RI}; A III)$
$\mathfrak{so}(7)$	B_3	$(\mathcal{S}; AI)$

Tabela 2.6: Subálgebras maximais de $A_6 = \mathfrak{su}(7)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(4)$	$A_1 \oplus A_1$	($\mathcal{R}II$; BDI)
$\mathfrak{su}(2)$	A_1	(\mathcal{S} ; 4)

Tabela 2.7: Subálgebras maximais de $B_2 = \mathfrak{so}(5)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(6)$	A_3	($\mathcal{R}II$; BDI)
$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(4)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$	($\mathcal{R}II$; BDI)
G_2	G_2	(\mathcal{S} ; (01))

Tabela 2.8: Subálgebras maximais de $B_3 = \mathfrak{so}(7)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(8)$	D_4	($\mathcal{R}II$; BDI)
$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(6)$	$A_1 \oplus A_3$	($\mathcal{R}II$; BDI)
$\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(5)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus B_2$	($\mathcal{R}II$; BDI)
$\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$	$A_1 \oplus A_1$	($\mathcal{N}II$)
$\mathfrak{su}(2)$	A_1	(\mathcal{S} ; 8)

Tabela 2.9: Subálgebras maximais de $B_4 = \mathfrak{so}(9)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(10)$	D_5	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(8)$	$A_1 \oplus D_4$	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(7)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus B_3$	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(6)$	$B_2 \oplus A_3$	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{su}(2)$	A_1	(\mathcal{S} ; 10)

Tabela 2.10: Subálgebras maximais de $B_5 = \mathfrak{so}(11)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(12)$	D_6	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(10)$	$A_1 \oplus D_5$	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(9)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus B_4$	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(8)$	$B_2 \oplus D_4$	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(7)$	$A_3 \oplus B_3$	($\mathcal{R}II$; $BD I$)
$\mathfrak{su}(2)$	A_1	(\mathcal{S} ; 12)

Tabela 2.11: Subálgebras maximais de $B_6 = \mathfrak{so}(13)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(4)$	$A_1 \oplus B_2$	($\mathcal{R}III$; CII)
$\mathfrak{u}(3)$	A_2	($\mathcal{R}IV$; CI)
$\mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{so}(3)$	$A_1 \oplus A_1$	($\mathcal{N}IV$)
$\mathfrak{su}(2)$	A_1	(\mathcal{S} ; 5)

Tabela 2.12: Subálgebras maximais de $C_3 = \mathfrak{sp}(6)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(7)$	B_3	(\mathcal{RVI} ; $BD I$)
$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(5)$	$A_1 \oplus B_2$	(\mathcal{RVI} ; $BD I$)
$\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(4)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$	(\mathcal{RV} ; $BD I$)
$\mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(4)$	$A_1 \oplus B_2$	(\mathcal{NIII})
$\mathfrak{so}(7)$	B_3	(\mathcal{S} ; (001))
$\mathfrak{su}(3)$	A_2	(\mathcal{S} ; (11))

Tabela 2.13: Subálgebras maximais de $D_4 = \mathfrak{so}(8)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(9)$	B_4	(\mathcal{RVI} ; $BD I$)
$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(7)$	$A_1 \oplus B_3$	(\mathcal{RVI} ; $BD I$)
$\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(6)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus A_3$	(\mathcal{RV} ; $BD I$)
$\mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(5)$	$B_2 \oplus B_2$	(\mathcal{RVI} ; $BD I$)
$\mathfrak{u}(5)$	A_4	(\mathcal{RVII} ; $D III$)
$\mathfrak{so}(5)$	B_2	(\mathcal{S} ; (02))

Tabela 2.14: Subálgebras maximais de $D_5 = \mathfrak{so}(10)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(11)$	B_5	$(\mathcal{RVI}; BDI)$
$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(9)$	$A_1 \oplus B_4$	$(\mathcal{RVI}; BDI)$
$\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(8)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus D_4$	$(\mathcal{RV}; BDI)$
$\mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(7)$	$B_2 \oplus B_3$	$(\mathcal{RVI}; BDI)$
$\mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(6)$	$A_3 \oplus A_3$	$(\mathcal{RV}; BDI)$
$\mathfrak{u}(6)$	A_5	$(\mathcal{RVII}; DIII)$
$\mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(6)$	$A_1 \oplus C_3$	$(NIII)$

Tabela 2.15: Subálgebras maximais de $D_6 = \mathfrak{so}(12)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(13)$	B_6	$(\mathcal{RVI}; BDI)$
$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(11)$	$A_1 \oplus B_5$	$(\mathcal{RVI}; BDI)$
$\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(10)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus D_5$	$(\mathcal{RV}; BDI)$
$\mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(9)$	$B_2 \oplus B_4$	$(\mathcal{RVI}; BDI)$
$\mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(8)$	$A_3 \oplus D_4$	$(\mathcal{RV}; BDI)$
$\mathfrak{so}(7) \oplus \mathfrak{so}(7)$	$B_3 \oplus B_3$	$(\mathcal{RVI}; BDI)$
$\mathfrak{u}(7)$	A_6	$(\mathcal{RVII}; DIII)$
$\mathfrak{so}(5)$	B_2	$(\mathcal{S}; (20))$
$\mathfrak{sp}(6)$	C_3	$(\mathcal{S}; (010))$
G_2	G_2	$(\mathcal{S}; (10))$

Tabela 2.16: Subálgebras maximais de $D_7 = \mathfrak{so}(14)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{su}(2)$	A_1	Singular (Irredutível)
$\mathfrak{su}(3)$	A_2	Posto Máximo
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$A_1 \oplus A_1$	Posto Máximo (G)

Tabela 2.17: Subálgebras maximais de G_2 .

Observe que a tabela 2.17 simplesmente reproduz a tabela 1.7. O fato da subálgebra $\mathfrak{su}(2)$ desta tabela ser irredutível segue de um teorema de Dynkin [10, pag. 239, teo. 16.1] que apresenta todas as álgebras excepcionais que possuem subálgebras singulares que são irredutíveis com respeito à restrição de alguma representação irredutível da álgebra excepcional que a contém. No caso acima é a representação de G_2 de peso máximo (01) e dimensão 7, portanto esta subálgebra $\mathfrak{su}(2)$ corresponde à representação irredutível de peso máximo 6. A subálgebra da última linha fornece o espaço simétrico excepcional G que está indicado na última coluna da mesma linha.

Para completar a análise, apresentamos, nas próximas três tabelas, as subálgebras semisimples maximais das álgebras simples de posto alto que aparecem na parte inferior da tabela 2.1. Examinando estas tabelas percebe-se que, para determinar todas as cadeias de subálgebras semisimples destas álgebras, seria necessário determinar todas as subálgebras semisimples maximais das álgebras simples de posto ≤ 64 . No entanto, observamos que a álgebra $\mathfrak{su}(n)$ pode gerar *qualquer* distribuição de multipletos cujas dimensões somam n : basta considerar uma subálgebra do tipo

$$\mathfrak{su}(n_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{su}(n_k)$$

onde $n = n_1 + \dots + n_k$, k é o número de multipletos desejado e n_i ($i = 1, \dots, k$) é a dimensão do i -ésimo multipletto. A mesma construção se aplica a $\mathfrak{so}(n)$ e a $\mathfrak{sp}(n)$ caso todos os n_i forem pares. Neste sentido podemos dizer que as subálgebras de posto alto não fornecem modelos interessantes, ou seja, passíveis de uma interpretação biológica, pois admitem uma flexibilidade tão grande que se torna possível gerar praticamente qualquer distribuição de multipletos.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{sp}(2\ell) \oplus \mathfrak{sp}(64 - 2\ell)$ $(1 \leq \ell \leq 16)$	$C_\ell \oplus C_{32-\ell}$ $(1 \leq \ell \leq 16)$	($\mathcal{R}III$; CII)
$\mathfrak{u}(32)$	A_{31}	($\mathcal{R}IV$; CI)
$\mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{so}(32)$	$A_1 \oplus D_{16}$	($\mathcal{N}IV$)
$\mathfrak{sp}(4) \times \mathfrak{so}(16)$	$B_2 \oplus D_8$	($\mathcal{N}IV$)
$\mathfrak{sp}(8) \times \mathfrak{so}(8)$	$C_4 \oplus D_4$	($\mathcal{N}IV$)
$\mathfrak{su}(2)$	A_1	(\mathcal{S} ; 63)
$\mathfrak{so}(5)$	B_2	(\mathcal{S} ; (13))
$\mathfrak{sp}(6)$	C_3	(\mathcal{S} ; (110))
$\mathfrak{so}(13)$	B_6	(\mathcal{S} ; (000001))

Tabela 2.18: Subálgebras maximais de $C_{32} = \mathfrak{sp}(64)$.

Subálgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{so}(63)$	B_{31}	(\mathcal{RVI} ; BDI)
$\mathfrak{so}(\ell + 2) \oplus \mathfrak{so}(62 - \ell)$ ($1 \leq \ell \leq 30$)	$B_\ell \oplus B_{31-\ell}$ $D_{\ell+1} \oplus D_{31-\ell}$ ($1 \leq \ell \leq 15$)	($\mathcal{RV}/\mathcal{VI}$; BDI)
$\mathfrak{u}(32)$	A_{31}	(\mathcal{RVII} ; $DIII$)
$\mathfrak{so}(8) \times \mathfrak{so}(8)$	$D_4 \oplus D_4$	(\mathcal{NII})
$\mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(32)$	$A_1 \oplus C_{16}$	(\mathcal{NIII})
$\mathfrak{sp}(4) \times \mathfrak{sp}(16)$	$B_2 \oplus C_8$	(\mathcal{NIII})
$\mathfrak{sp}(8) \times \mathfrak{sp}(8)$	$C_4 \oplus C_4$	(\mathcal{NIII})
$\mathfrak{su}(3)$	A_2	(\mathcal{S} ; (33))
$\mathfrak{su}(4)$	A_3	(\mathcal{S} ; (111))
G_2	G_2	(\mathcal{S} ; (11))

Tabela 2.19: Subálgebras maximais de $D_{32} = \mathfrak{so}(64)$.

Subalgebra Maximal	Notação de Cartan	Classe
$\mathfrak{u}(63)$	A_{62}	(\mathcal{RI} ; $A III$)
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(\ell + 1) \oplus \mathfrak{su}(63 - \ell)$ ($1 \leq \ell \leq 31$)	$A_\ell \oplus A_{62-\ell}$ ($1 \leq \ell \leq 31$)	(\mathcal{RI} ; $A III$)
$\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(32)$	$A_1 \oplus A_{31}$	(\mathcal{NI})
$\mathfrak{su}(4) \times \mathfrak{su}(16)$	$A_3 \oplus A_{15}$	(\mathcal{NI})
$\mathfrak{su}(8) \times \mathfrak{su}(8)$	$A_7 \oplus A_7$	(\mathcal{NI})
$\mathfrak{so}(14)$	D_7	(\mathcal{S} ; (0000010))
$\mathfrak{so}(14)$	D_7	(\mathcal{S} ; (0000001))
$\mathfrak{so}(64)$	D_{32}	(\mathcal{S} ; $A I$)
$\mathfrak{sp}(64)$	C_{32}	(\mathcal{S} ; $A II$)

Tabela 2.20: Subalgebras maximais de $A_{63} = \mathfrak{su}(64)$.

2.4 Cadeias de Subalgebras Semisimples para o Código Genético

Com as ferramentas colocadas a disposição nas seções anteriores, passamos a analisar as cadeias descendentes de subalgebras maximais das álgebras B_6 e D_7 . Para tanto, precisamos de critérios de eliminação das cadeias que são incapazes de fornecer as degenerescências do código genético. Tais critérios já estão implícitos na análise de Hornos & Hornos [22] e foram explicitados em [3] e [23]. São critérios simples baseados na estrutura dos multipletos do código genético.

O processo de quebra através de uma dada cadeia deve ser interrompido se ela apresentar

1. mais do que 21 multipletos;
2. mais do que 2 singletos;
3. mais do que 4 multipletos com dimensão ímpar;
4. um número insuficiente de multipletos de dimensões ≥ 6 ou ≥ 4 .

Isto decorre do fato que, quando se percorre uma cadeia, o número total de multipletos e o número de singletos nunca decresce. Além disto, um multipletos de dimensão ímpar sempre quebra em pelo menos um multipletos de dimensão ímpar, mais alguns outros. O último critério reflete a necessidade de haver um número suficiente de multipletos de dimensão suficientemente grande para gerar, através de quebras posteriores, os 3 sextetos e 5 quartetos do código genético.

Por outro lado, o processo de quebra através de uma dada cadeia deve prosseguir pelo menos um passo adiante se ela apresentar

1. menos do que 21 multipletos;
2. multipletos com dimensão ≥ 7 ;
3. mais do que 3 multipletos de dimensão 6;
4. multipletos de dimensão 5.

Uma cadeia será considerada *não-sobrevivente* se satisfizer, ao mesmo tempo, pelo menos um item da primeira lista e pelo menos um item da segunda lista.

Um outro critério importante para considerar uma cadeia como *não-sobrevivente* é:

- *Pareamento Total.*

Isto significa que o processo de redução levou a uma situação na qual todas as representações irredutíveis da subálgebra considerada vêm em pares de representações duais (conjugadas complexas) ou, no caso de representações auto-duais (auto-conjugadas), com multiplicidade par: tal pareamento de representações não pode ser eliminado por quebras de simetria subsequentes, levando a distribuições de multipletos cujas multiplicidades são todas pares e impedindo que se gere os 3 sextetos, 5 quartetos e 9 dubletos do código genético.

A estratégia geral para a busca de modelos algébricos para a evolução do código genético baseados em princípios de quebra de simetria é a seguinte:

1. Escolher uma das representações de códons da tabela 2.1.
2. Submeter esta representação à quebra de simetria através de todas as cadeias de subálgebras maximais, de acordo com as tabelas da seção anterior.
3. Após cada estágio, analisar o resultado e descartar todas as cadeias que são *não-sobreviventes*, de acordo com os critérios estabelecidos acima, antes de passar ao próximo estágio.

Dividiremos este procedimento em três fases consecutivas, agrupando após cada passo as cadeias sobreviventes que levaram à mesma distribuição de multipletos em famílias.

Fase 1: Quebra da simetria total até as $\mathfrak{su}(2)$ -simetrias simples. Durante a primeira fase, a quebra de simetria procede através de cadeias de subálgebras semisimples maximais, realizando quebras simples e quebras diagonais caso a álgebra a ser submetida a uma quebra diagonal for diferente de $\mathfrak{su}(2)$. Toda cadeia termina necessariamente em uma soma direta de p cópias de $\mathfrak{su}(2)$, a mais elementar das álgebras de Lie simples, onde p varia de 1 até o posto da álgebra de Lie simples original.

Fase 2: Quebra das $\mathfrak{su}(2)$ -simetrias simples para $\mathfrak{su}(2)$ -simetrias diagonais. Considerando as cadeias *sobreviventes* resultando da fase anterior que terminam em uma soma direta de p cópias de $\mathfrak{su}(2)$, quebramos estas de forma diagonal. Observe que, a priori, há $\binom{p}{2}$ possibilidades de subálgebras de tipo diagonal. Porém este número pode ser reduzido quando percebermos que a distribuição de multipletos fornecida pelas quebras anteriores é invariante sob certas permutações dos ideais $\mathfrak{su}(2)$.

Fase 3: Quebra das $\mathfrak{su}(2)$ -simetrias. Considerando as cadeias *sobreviventes* resultando das fases anteriores, passamos a quebrar os ideais $\mathfrak{su}(2)$.

A possibilidade de agrupamento em famílias é baseada na observação de que o processo de quebra de simetria é *comutativo*, no seguinte sentido. Considere duas cadeias descendentes

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_r \supset \mathfrak{h}$$

e

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}'_1 \supset \mathfrak{g}'_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}'_r \supset \mathfrak{h}$$

de subálgebras com a mesma álgebra inicial \mathfrak{g} e a mesma álgebra final \mathfrak{h} : então as distribuições de multipletos sob \mathfrak{h} obtidos de uma dada representação de \mathfrak{g} através das duas cadeias são idênticas.

Passaremos agora a discutir a fase 3 com mais detalhes, seguindo de perto a apresentação em [23], tendo em vista que este manuscrito ainda não foi publicado. Dada uma álgebra de Lie simples \mathfrak{g} , junto com uma cadeia descendente

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots$$

de subálgebras $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots$, a distribuição de multipletos obtida pela sucessiva decomposição de uma dada representação irredutível de \mathfrak{g} pode ser codificada no espectro de um único operador H : ele pode ser definido como uma combinação linear genérica de operadores de Casimir C_j das subálgebras simples de \mathfrak{g} que constituem as subálgebras semisimples $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots$ que aparecem na cadeia:

$$H = \sum_j \lambda_j C_j.$$

De fato, devido às relações de inclusão entre as \mathfrak{g}_j , os operadores de Casimir C_j comutam entre si, e para uma escolha genérica dos coeficientes λ_j , os autoespaços do operador H coincidem com os autoespaços comuns do conjunto dos operadores de Casimir C_j , que por sua vez são apenas os subespaços irredutíveis relativos à menor (última) subálgebra na cadeia. Chamaremos este operador H de *Hamiltoniano*, em analogia ao operador encontrado na física.

Para sermos mais específicos, lembremos que depois que as primeiras duas fases do processo de quebra de simetria foram completadas, a última subálgebra na cadeia é uma soma direta de $\mathfrak{su}(2)$ -subálgebras e portanto o Hamiltoniano H associado a este estágio pode ser escrito da forma

$$H = \sum_j \lambda_j C_j + \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{L}_k^2$$

onde p , o número total de $\mathfrak{su}(2)$ -subálgebras que aparecem no final da cadeia, varia de 1 até o posto de \mathfrak{g} , dependendo da cadeia. Os C_j são agora operadores de Casimir associados às álgebras simples $\neq \mathfrak{su}(2)$ que constituem as subálgebras semisimples $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots$ que aparecem

na cadeia, enquanto que $\mathbf{L}_k^2 = L_{k,x}^2 + L_{k,y}^2 + L_{k,z}^2$ é o operador de Casimir padrão da k -ésima $\mathfrak{su}(2)$ -subálgebra ($1 \leq k \leq p$).

A terceira fase do processo de quebra de simetria, que envolve a quebra de uma ou várias $\mathfrak{su}(2)$ -subálgebras, será implementada por um Hamiltoniano da forma:

$$H = \sum_j \lambda_j C_j + \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{L}_k^2 + \sum_{k=1}^p \beta_k L_{k,z}^2 + \sum_{k=1}^p \gamma_k L_{k,z}.$$

Para explicar o efeito destes novos termos, consideraremos o caso mais simples com apenas uma cópia de $\mathfrak{su}(2)$. Levando em conta o fato de que qualquer representação irredutível de $\mathfrak{su}(2)$, caracterizada por seu spin s (correspondendo ao peso máximo $2s$, que pode ser qualquer valor inteiro não-negativo), forma um espaço de dimensão $2s + 1$, sobre o qual o operador de Casimir padrão \mathbf{L}^2 de $\mathfrak{su}(2)$ tem o valor próprio $s(s + 1)$, enquanto que o operador L_z tem $2s + 1$ valores próprios distintos $m = -s, \dots, s$, vemos que

- a) o operador L_z providencia uma cisão completa do multipletto de dimensão $2s + 1$ em $2s + 1$ singletos, enquanto que
- b) o operador L_z^2 providencia uma cisão mais suave do multipletto de dimensão $2s + 1$ em s dubletos e um singletto se s for inteiro, ou em s dubletos se s for semi-inteiro.

Somente a primeira possibilidade corresponde a uma genuína quebra de simetria no nível de álgebras de Lie: da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ para sua subálgebra maximal $\mathfrak{u}(1)$, que é nada mais que uma álgebra de Lie abeliana unidimensional. Foi observado no entanto que as duas possibilidades possuem uma interpretação natural em termos de uma quebra genuína de simetria no nível de grupos de Lie: do grupo (conexo) $SU(2)$ para

- a) seu subgrupo maximal conexo $U(1) \cong SO(2)$
- b) seu subgrupo maximal não-conexo $\mathbb{Z}_2 \times U(1) \cong O(2)$, um subgrupo de $SU(2)$ formado por dois círculos:

$$\mathbb{Z}_2 \times U(1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e^{i\beta} \\ e^{-i\beta} & 0 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que $\mathbb{Z}_2 \times U(1)$ é gerado por $U(1)$ juntamente com a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que é exatamente o gerador do grupo de Weyl de $SU(2)$. Por abuso de linguagem, nos referiremos a estas duas reduções da $\mathfrak{su}(2)$ -simetria, em forma abreviada, por $\mathfrak{so}(2)$ -simetria

e $\mathfrak{o}(2)$ -simetria, respectivamente (apesar de que $SO(2)$ -simetria e $O(2)$ -simetria seria mais apropriado).

O último ingrediente importante no processo de quebra de simetria é que permitiremos que os coeficientes γ_k do Hamiltoniano H dado acima sejam polinômios nos operadores de Casimir padrão \mathbf{L}_k^2 das subálgebras $\mathfrak{su}(2)$, e não apenas constantes. Isto possibilita uma forma de interrupção muito específica no processo de quebra de simetria no último passo, pois os multipletos do penúltimo estágio que normalmente se dividiriam no último passo permanecerão intactos se (e somente se) seus $\mathfrak{su}(2)$ -índices são tais que os coeficientes γ_k correspondentes se anulam. Com este formalismo podemos implementar o conceito de *congelamento* de alguns multipletos no último passo da quebra. Por outro lado, perdemos a acima mencionada comutatividade no processo de quebra, pois se a quebra através de duas cadeias

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_r \supset \mathfrak{h}$$

e

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}'_1 \supset \mathfrak{g}'_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}'_r \supset \mathfrak{h}$$

envolve congelamento no último passo (de \mathfrak{g}_r para \mathfrak{h} e de \mathfrak{g}'_r para \mathfrak{h}), o resultado não será necessariamente o mesmo. Este fato aumenta consideravelmente o número de casos a serem analisados. Portanto, precisamos novamente de critérios que possam minimizar o número de possibilidades a serem investigadas na terceira fase. Observou-se que tais critérios podem ser baseados em algumas regras gerais que se referem à questão de como surgem os 3 sextetos e os 2 tripletos do código genético. Estas regras são geralmente chamadas de *regras de geração de tripletos/sextetos*.

Mais especificamente, suponhamos que ao final da fase 2 do processo de quebra de simetria, foi gerada uma cadeia terminando numa soma direta de p cópias de $\mathfrak{su}(2)$, com uma distribuição de multipletos cada um dos quais pode ser escrito da forma (k_1, \dots, k_p) com inteiros não-negativos k_1, \dots, k_p . No caso das cadeias para B_6 e D_7 , observamos que p varia entre 2 e 5 (os valores teóricamente possíveis 1 e 6 correspondem a cadeias que podem ser imediatamente descartadas). Consideremos então uma redução da simetria do multipletto (k_1, \dots, k_p) de dimensão $(k_1 + 1) \dots (k_p + 1)$, de $\mathfrak{su}_1(2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{su}_j(2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{su}_p(2)$ para $\mathfrak{su}_1(2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{o}_j(2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{su}_p(2)$ ou para $\mathfrak{su}_1(2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}_j(2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{su}_p(2)$. No segundo caso, ele se divide em soma direta de $k_j + 1$ sub-multipletos de dimensão $(k_1 + 1) \dots (k_{j-1})(k_{j+1}) \dots (k_p + 1)$, enquanto que no primeiro caso, ele se divide em uma soma direta de $(k_j + 1)/2$ sub-multipletos de dimensão $2(k_1 + 1) \dots (k_{j-1} + 1)(k_{j+1} + 1) \dots (k_p + 1)$ se k_j é ímpar e $k_j/2$ sub-multipletos de dimensão $2(k_1 + 1) \dots (k_{j-1})(k_{j+1}) \dots (k_p + 1)$ mais 1 sub-multipletto de dimensão $(k_1 + 1) \dots (k_{j-1})(k_{j+1}) \dots (k_p + 1)$ se k_j é par. Repetindo o processo, concluímos que qualquer quebra do multipletto (k_1, \dots, k_p) leva a uma distribuição de sub-multipletos cujas dimensões são produtos de certos números $k_j + 1$ que correspondem aos $\mathfrak{su}(2)$ que permaneceram intactos e, quando ocorre uma quebra

envolvendo $\mathfrak{o}(2)$, alguma potência de 2. Em particular, sub-multipletos cuja dimensão é um múltiplo de 3 podem aparecer apenas se pelo menos um dos números $k_j + 1$ for um múltiplo de 3 (e o correspondente $\mathfrak{su}_j(2)$ permanecer intacto); ademais, tripletos (sextetos) podem aparecer apenas se pelo menos um deles é igual a 3 (3 ou 6). Portanto temos

Regra 1: Sub-multipletos cuja dimensão é um múltiplo de 3 podem aparecer apenas como resultado da quebra de um multipletos (k_1, \dots, k_p) cuja dimensão é um múltiplo de 3, isto é, pelo menos um dos inteiros k_1, \dots, k_p deve ser igual a 2 mod 3. Mais especificamente, os tripletos provêm de multipletos (k_1, \dots, k_p) onde pelo menos um dos inteiros k_1, \dots, k_p é igual a 2, enquanto que os sextetos provêm de multipletos (k_1, \dots, k_p) onde pelo menos um dos inteiros k_1, \dots, k_p é igual a 2 ou 5.

Regra 2: A quebra de um multipletos cuja dimensão é um múltiplo de 3 resulta numa coleção de sub-multipletos cuja dimensão é um múltiplo de 3 *ou para todos ou para nenhum* dos sub-multipletos da coleção.

Na tabela 2.21 abaixo, listamos os multipletos (k_1, \dots, k_p) que realmente aparecem nas tabelas para B_6 e D_7 , juntamente com suas possíveis quebras – exceto para aqueles que não produzem nenhum sub-multipletos cuja dimensão é um múltiplo de 3 ou que não conseguem eliminar todos os sub-multipletos de dimensão > 6 . Sem perda de generalidade, assumimos que k_1 é igual a 2 ou 5, e quando escrevemos $(k_1, 0, \dots)$, $(k_1, k_2, 0, \dots)$, $(k_1, k_2, k_3, 0, \dots)$, etc., os pontos indicam que os k_j restantes são iguais a 0.

Um método global de se levar em consideração os sextetos e os tripletos contidos numa dada distribuição de multipletos é através do *número de trialidade*, definido por

$$d_3 = \begin{array}{l} \text{soma das dimensões de todos os multipletos} \\ \text{cuja dimensão é um múltiplo de 3.} \end{array} \quad (2.7)$$

Com esta notação, podemos formular um último critério, baseado na observação de que quando se percorre uma dada cadeia, dentro da fase 3, o número de trialidade d_3 não pode crescer: isto é uma consequência direta das regras 1 e 2 formuladas acima. Observando que o valor de d_3 na distribuição final de multipletos do código genético é 24, concluímos que todas as cadeias sobreviventes que, após a conclusão das fases 1 e 2 do processo de quebra de simetria ou em algum outro ponto durante a fase 3, exceto talvez o último passo, violam a estimativa

$$d_3 \geq 24$$

não serão capazes de gerar os sextetos e tripletos do código genético e podem portanto ser descartadas. A ressalva quanto ao último passo se deve ao fato de que uma perda excessiva de sextetos e tripletos durante esse passo pode ser evitada através do congelamento.

Multipletos	Possível Distribuição de sub-multipletos
$(5, 0, \dots)_6$	1 sexteto
$(2, 0, \dots)_3$	1 triplo
$(8, 1, 0, \dots)_{18}$	-
$(5, 1, 0, \dots)_{12}$	2 sextetos
$(2, 6, 0, \dots)_{21}$	3 sextetos e 1 triplo
	7 tripletos
$(2, 5, 0, \dots)_{18}$	3 sextetos
	6 tripletos
$(2, 4, 0, \dots)_{15}$	2 sextetos e 1 triplo
	5 tripletos
$(2, 3, 0, \dots)_{12}$	2 sextetos
	4 tripletos
$(2, 2, 0, \dots)_9$	1 sexteto e 1 triplo
	3 tripletos
$(2, 1, 0, \dots)_6$	1 sexteto
	2 tripletos
$(2, 1, 3, 0, \dots)_{24}$	4 sextetos
	8 tripletos
$(2, 1, 2, 0, \dots)_{18}$	3 sextetos
	2 sextetos e 2 tripletos
	6 tripletos
$(2, 1, 1, 0, \dots)_{12}$	2 sextetos
	4 tripletos

Tabela 2.21: Multipletos que aparecem em B_6 e D_7 .

Finalmente, tendo explicado toda a metodologia, podemos apresentar os resultados finais da análise das cadeias provindo de $B_6 = \mathfrak{so}(13)$ e $D_7 = \mathfrak{so}(14)$. Podemos distinguir dois tipos de cadeias: as *cadeias simples* onde todas as reduções a subálgebras são do tipo simples, que já foram analisadas em [3], e as *cadeias diagonais* onde as reduções a subálgebras podem ser do tipo simples ou do tipo diagonal, cuja análise constitui a contribuição nova do presente trabalho. Após a conclusão das duas primeiras fases obtemos 15 cadeias sobreviventes no caso de B_6 , sendo 2 simples e 13 diagonais, e 39 cadeias sobreviventes no caso de D_7 , sendo 9 simples e 30 diagonais. Destas, não sobrevive nenhuma cadeia de B_6 , enquanto que restam 5 cadeias de D_7 , uma simples e quatro diagonais, que após a conclusão da terceira fase fornecem um total de 8 cadeias com a distribuição de multipletos do código genético e que serão apresentadas a seguir. Cada uma está dividida em duas partes onde a primeira parte corresponde à quebra durante as duas primeiras fases e a segunda parte corresponde à terceira fase. Nas tabelas que representam a terceira fase as células que estão rachuradas indicam os multipletos que foram congelados no último passo do processo de quebra. A última linha de cada tabela indica o número de subespaços invariantes (com a abreviação s.i.) que aparece a cada estágio da quebra.

1) $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus (A_1)^2$		$(A_1)^4$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001, 001)	64	(001, 01)	56	(01, 01)	49	(01, 1, 1)	28	(1, 1, 1, 1)	16
										(0, 2, 1, 1)	12
								(01, 0, 2)	21	(1, 1, 0, 2)	12
								(0, 2, 0, 2)	9		
						(00, 01)	7	(00, 1, 1)	4	(0, 0, 1, 1)	4
								(00, 0, 2)	3	(0, 0, 0, 2)	3
				(001, 00)	8	(01, 00)	7	(01, 0, 0)	7	(1, 1, 0, 0)	4
										(0, 2, 0, 0)	3
				(00, 00)	1	(00, 0, 0)	1	(0, 0, 0, 0)	1		
				1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.	

Tabela 2.22: Neste caso obtemos a distribuição de multipletos do código genético quebrando primeiro o primeiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{so}(2)$, depois o quarto $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{o}(2)$ e finalmente este $\mathfrak{o}(2)$ para $\mathfrak{so}(2)$. Esta distribuição está apresentada na tabela seguinte.

$(A_1)^4$		$(L_{1,z}, L_{4,z}^2)$		$(L_{1,z}, L_{4,z}^2, L_{4,z})$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d
(1, 1, 1, 1)	16	(+1, 1, 1, ± 1)	8	(+1, 1, 1, +1)	4
				(+1, 1, 1, -1)	4
		(-1, 1, 1, ± 1)	8	(-1, 1, 1, +1)	4
				(-1, 1, 1, -1)	4
(0, 2, 1, 1)	8	(0, 2, 1, ± 1)	8	(0, 2, 1, +1)	4
				(0, 2, 1, -1)	4
(1, 1, 0, 2)	12	(+1, 1, 0, ± 2)	4	(+1, 1, 0, +2)	2
				(+1, 1, 0, -2)	2
		(+1, 1, 0, 0)	2	(+1, 1, 0, 0)	2
				(-1, 1, 0, ± 2)	4
		(-1, 1, 0, 0)	2	(-1, 1, 0, +2)	2
(-1, 1, 0, -2)	2				
(0, 2, 0, 2)	9	(0, 2, 0, ± 2)	6	(0, 2, 0, +2)	3
				(0, 2, 0, -2)	3
		(0, 2, 0, 0)	3		
(0, 1, 1, 1)	4	(0, 1, 1, ± 1)	4	(0, 1, 1, +1)	2
				(0, 1, 1, -1)	2
(0, 0, 0, 2)	3	(0, 0, 0, ± 2)	2	(0, 0, 0, +2)	1
				(0, 0, 0, -2)	1
		(0, 0, 0, 0)	1		
(1, 1, 0, 0)	4	(+1, 1, 0, 0)	2	(+1, 1, 0, 0)	2
				(-1, 1, 0, 0)	2
(0, 2, 0, 0)	3	(0, 2, 0, 0)	3	(0, 2, 0, 0)	3
(0, 0, 0, 0)	1	(0, 0, 0, 0)	1	(0, 0, 0, 0)	1
9 s.i.		16 s.i.		24 s.i.	

2) $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus (A_1)^2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001, 001)	64	(001, 01)	56	(01, 01)	49	(01, 1, 1)	28	(1, 1, 1, 1)	16	(2, 1, 1)	12		
												(0, 1, 1)	4		
												(0, 2, 1, 1)	12	(1, 2, 1)	12
								(01, 0, 2)	21	(1, 1, 0, 2)	12	(1, 1, 2)	12		
										(0, 2, 0, 2)	9	(0, 2, 2)	9		
										(00, 01)	7	(00, 1, 1)	4	(0, 0, 1, 1)	4
						(00, 0, 2)	3	(0, 0, 0, 2)	3			(0, 0, 2)	3		
						(001, 00)	8	(01, 00)	7	(01, 0, 0)	7	(1, 1, 0, 0)	4	(1, 1, 0)	4
												(0, 2, 0, 0)	3	(0, 2, 0)	3
						(00, 00)	1	(00, 0, 0)	1	(0, 0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1		
1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		9 s.i.		10 s.i.			

Tabela 2.23: Neste caso há duas possibilidades de se obter a distribuição de multipletos do código genético:

a) quebrando primeiro o primeiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{so}(2)$, depois o segundo $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{o}(2)$ e finalmente este $\mathfrak{o}(2)$ para $\mathfrak{so}(2)$.

b) quebrando primeiro o primeiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{so}(2)$, depois o segundo $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{o}(2)$ e finalmente o terceiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{so}(2)$.

Ambas as possibilidades estão apresentadas nas duas tabelas seguintes.

$(A_1)^3$		$L_{1,z}$		$(L_{1,z}, L_{2,z}^2)$		$(L_{1,z}, L_{2,z}^2, L_{2,z})$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(2, 1, 1)	12	(+2, 1, 1)	4	(+2, ± 1 , 1)	4	(+2, +1, 1)	2
						(+2, -1, 1)	2
		(-2, 1, 1)	4	(-2, ± 1 , 1)	4	(-2, +1, 1)	2
						(-2, -1, 1)	2
		(0, 1, 1)	4	(0, ± 1 , 1)	4	(0, +1, 1)	2
						(0, -1, 1)	2
(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4	(0, ± 1 , 1)	4	(0, +1, 1)	2
						(0, -1, 1)	2
(1, 2, 1)	12	(1, 2, 1)	6	(1, ± 2 , 1)	4	(+1, +2, 1)	2
						(+1, -2, 1)	2
				(+1, 0, 1)	2	(+1, 0, 1)	2
		(-1, 2, 1)	6	(-1, ± 2 , 1)	4	(-1, +2, 1)	2
				(-1, -2, 1)	2		
				(-1, 0, 1)	2	(-1, 0, 1)	2
(1, 1, 2)	12	(1, 1, 2)	6	(1, ± 1 , 2)	6	(+1, +1, 2)	3
						(+1, -1, 2)	3
				(-1, 1, 2)	6	(-1, 1, 2)	3
				(-1, -1, 2)	3	(-1, -1, 2)	3
(0, 2, 2)	9	(0, 2, 2)	9	(0, ± 2 , 2)	6	(0, +2, 2)	3
						(0, -2, 2)	3
				(0, 0, 2)	3	(0, 0, 2)	3
(1, 0, 1)	4	(+1, 0, 1)	2	(+1, 0, 1)	2	(+1, 0, 1)	2
		(-1, 0, 1)	2	(-1, 0, 1)	2	(-1, 0, 1)	2
(0, 0, 2)	3	(0, 0, 2)	3	(0, 0, 2)	3	(0, 0, 2)	3
(1, 1, 0)	4	(1, 1, 0)	2	(1, ± 1 , 0)	2	(+1, +1, 0)	1
						(+1, -1, 0)	1
				(-1, 1, 0)	2	(-1, 1, 0)	1
				(-1, -1, 0)	1	(-1, -1, 0)	1
(0, 2, 0)	3	(0, 2, 0)	3	(0, ± 2 , 0)	2	(0, +2, 0)	1
						(0, -2, 0)	1
				(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1
(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1
10 s.i.		16 s.i.		20 s.i.		32 s.i.	

$(A_1)^3$		$L_{1,z}$		$(L_{1,z}, L_{2,z}^2)$		$(L_{1,z}, L_{2,z}^2, L_{3,z})$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(2, 1, 1)	12	(+2, 1, 1)	4	(+2, ±1, 1)	4	(+2, ±1, +1)	2
						(+2, ±1, -1)	2
		(-2, 1, 1)	4	(-2, ±1, 1)	4	(-2, ±1, +1)	2
						(-2, ±1, -1)	2
		(0, 1, 1)	4	(0, ±1, 1)	4	(0, ±1, +1)	2
						(0, ±1, -1)	2
(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4	(0, ±1, 1)	4	(0, ±1, +1)	2
						(0, ±1, -1)	2
(1, 2, 1)	12	(1, 2, 1)	6	(+1, ±2, 1)	4	(+1, ±2, +1)	2
						(+1, ±2, -1)	2
				(+1, 0, 1)	2	(+1, 0, +1)	1
						(+1, 0, -1)	1
		(-1, 2, 1)	6	(-1, ±2, 1)	4	(-1, ±2, +1)	2
				(-1, ±2, -1)	2		
		(-1, 0, 1)	2	(-1, 0, +1)	1		
				(-1, 0, -1)	1		
(1, 1, 2)	12	(1, 1, 2)	6	(+1, ±1, 2)	6	(+1, ±1, +2)	2
						(+1, ±1, -2)	2
				(+1, ±1, 0)	2	(+1, ±1, 0)	2
		(-1, 1, 2)	6	(-1, ±1, 2)	6	(-1, ±1, +2)	2
				(-1, ±1, -2)	2		
				(-1, ±1, 0)	2		
(0, 2, 2)	9	(0, 2, 2)	9	(0, ±2, 2)	6	(0, ±2, +2)	2
						(0, ±2, -2)	2
						(0, ±2, 0)	2
				(0, 0, 2)	3	(0, 0, +2)	1
						(0, 0, -2)	1
				(0, 0, 0)	1		
(1, 0, 1)	4	(+1, 0, 1)	2	(+1, 0, 1)	2	(+1, 0, +1)	1
						(+1, 0, -1)	1
		(-1, 0, 1)	2	(-1, 0, 1)	2	(-1, 0, +1)	1
						(-1, 0, -1)	1
(0, 0, 2)	3	(0, 0, 2)	3	(0, 0, 2)	3	(0, 0, +2)	1
						(0, 0, -2)	1
						(0, 0, 0)	1
(1, 1, 0)	4	(+1, 1, 0)	2	(+1, ±1, 0)	2	(+1, ±1, 0)	2
		(-1, 1, 0)	2	(-1, ±1, 0)	2	(-1, ±1, 0)	2
(0, 2, 0)	3	(0, 2, 0)	3	(0, ±2, 0)	2	(0, +2, 0)	1
						(0, -2, 0)	1
						(0, 0, 0)	1
(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1
10 s.i.		16 s.i.		20 s.i.		39 s.i.	

3) $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus (A_1)^2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$					
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d				
(0000010)	64	(001,001)	64	(001,01)	56	(01,01)	49	(01,1,1)	28	(1,1,1,1)	16	(2,1,1)	12				
										(0,1,1)	4	(1,2,1)	12				
										(0,2,1,1)	12	(1,1,0,2)	12	(3,1,0)	8		
										(0,2,0,2)	9	(1,1,0)	4	(2,2,0)	9		
								(00,01)	7	(00,1,1)	4	(0,0,1,1)	4	(1,0,1)	4		
								(00,0,2)	3	(0,0,0,2)	3	(2,0,0)	3				
								(001,00)	8	(01,00)	7	(01,0,0)	7	(1,1,0,0)	4	(1,1,0)	4
														(0,2,0,0)	3	(0,2,0)	3
								(00,00)	1	(00,0,0)	1	(0,0,0,0)	1	(0,0,0)	1		
								1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.	

Tabela 2.24: Neste caso obtemos a distribuição de multipletos do código genético quebrando o primeiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{o}(2)$ e depois para $\mathfrak{so}(2)$. Esta distribuição está apresentada na tabela seguinte.

$(A_1)^3$		$(L_{1,z}^2)$		$(L_{1,z})$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d
(2, 1, 1)	12	(±2, 1, 1)	8	(+2, 1, 1)	4
				(-2, 1, 1)	4
		(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4
(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4
(1, 2, 1)	12	(±1, 2, 1)	12	(+1, 2, 1)	6
				(-1, 2, 1)	6
(3, 1, 0)	8	(±3, 1, 0)	4	(+3, 1, 0)	2
				(-3, 1, 0)	2
		(±1, 1, 0)	4	(+1, 1, 0)	2
				(-1, 1, 0)	2
(1, 1, 0)	4	(±1, 1, 0)	4	(+1, 1, 0)	2
				(-1, 1, 0)	2
(2, 2, 0)	9	(±2, 2, 0)	6	(+2, 2, 0)	3
				(-2, 2, 0)	3
		(0, 2, 0)	3	(0, 2, 0)	3
(1, 0, 1)	4	(±1, 0, 1)	4	(+1, 0, 1)	2
				(-1, 0, 1)	2
(2, 0, 0)	3	(±2, 0, 0)	3	(+2, 0, 0)	1
				(0, 0, 0)	1
(1, 1, 0)	4	(±1, 1, 0)	4	(+1, 1, 0)	2
				(-1, 1, 0)	2
(0, 2, 0)	3	(0, 2, 0)	3	(0, 2, 0)	3
(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1
11 s.i.		15 s.i.		24 s.i.	

4) $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus A_1$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001, 001)	64	(001, 01)	56	(01, 01)	49	(01, 6)	49	(1, 1, 6)	28	(7, 1)	16
										(5, 1)	12		
										(0, 2, 6)	21	(6, 2)	21
						(00, 01)	7	(00, 6)	7	(0, 0, 6)	7	(6, 0)	7
				(001, 00)	8	(01, 00)	7	(01, 0)	7	(1, 1, 0)	4	(1, 1)	4
										(0, 2, 0)	3	(0, 2)	3
						(00, 00)	1	(00, 0)	1	(0, 0, 0)	1	(0, 0)	1
1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		7 s.i.	

Tabela 2.25: Neste caso há duas possibilidades de se obter a distribuição de multipletos do código genético:

- quebrando o primeiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{o}(2)$ e depois para $\mathfrak{so}(2)$.
 - quebrando o primeiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{o}(2)$ e depois o segundo $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{so}(2)$.
- Ambas as possibilidades estão apresentadas nas duas tabelas seguintes.

$(A_1)^2$		$(L_{1,z}^2)$		$(L_{1,z})$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d
(7, 1)	16	(±7, 1)	4	(+7, 1)	2
				(-7, 1)	2
		(±5, 1)	4	(+5, 1)	2
				(-5, 1)	2
		(±3, 1)	4	(+3, 1)	2
		(-3, 1)	2		
		(±1, 1)	4	(+1, 1)	2
				(-1, 1)	2
(5, 1)	12	(±5, 1)	4	(+5, 1)	2
				(-5, 1)	2
		(±3, 1)	4	(+3, 1)	2
				(-3, 1)	2
		(±1, 1)	4	(+1, 1)	2
		(-1, 1)	2		
(6, 2)	21	(±6, 2)	6	(+6, 2)	3
				(-6, 2)	3
		(±4, 2)	6	(+4, 2)	3
				(-4, 2)	3
		(±2, 2)	6	(+2, 2)	3
		(-2, 2)	3		
(0, 2)	3	(0, 2)	3		
(6, 0)	7	(±6, 0)	2	(+6, 0)	1
				(-6, 0)	1
		(±4, 0)	2	(+4, 0)	1
				(-4, 0)	1
		(±2, 0)	2	(+2, 0)	1
		(-2, 0)	1		
(0, 0)	1	(0, 0)	1		
(1, 1)	4	(±1, 1)	4	(+1, 1)	2
				(-1, 1)	2
(0, 2)	3	(0, 2)	3	(0, 2)	3
(0, 0)	1	(0, 0)	1	(0, 0)	1
7 s.i.		18 s.i.		32 s.i.	

$(A_1)^2$		$(L_{1,z}^2)$		$(L_{1,z}^2, L_{2,z})$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d
(7, 1)	16	(±7, 1)	4	(±7, +1)	2
				(±7, -1)	2
		(±5, 1)	4	(±5, +1)	2
				(±5, -1)	2
		(±3, 1)	4	(±3, +1)	2
		(±3, -1)	2		
		(±1, 1)	4	(±1, +1)	2
				(±1, -1)	2
(5, 1)	12	(±5, 1)	4	(±5, +1)	2
				(±5, -1)	2
		(±3, 1)	4	(±3, +1)	2
				(±3, -1)	2
		(±1, 1)	4	(±1, +1)	2
		(±1, -1)	2		
(6, 2)	21	(±6, 2)	6	(±6, +2)	2
				(±6, -2)	2
				(±6, 0)	2
		(±4, 2)	6	(±4, +2)	2
				(±4, -2)	2
				(±4, 0)	2
		(±2, 2)	6	(±2, +2)	2
(±2, -2)	2				
(0, 2)	3	(±2, 0)	2		
		(0, +2)	1		
		(0, -2)	1		
		(0, 0)	1		
(6, 0)	7	(±6, 0)	2	(±6, 0)	2
		(±4, 0)	2	(±4, 0)	2
		(±2, 0)	2	(±2, 0)	2
		(0, 0)	1	(0, 0)	1
(1, 1)	4	(±1, 1)	4	(±1, +1)	2
				(±1, -1)	2
(0, 2)	3	(0, 2)	3	(0, +2)	1
				(0, -2)	1
				(0, 0)	1
(0, 0)	1	(0, 0)	1	(0, 0)	1
7 S.I.		18 S.I.		36 S.I.	

5) $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$							
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d						
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(1, 1, 0, 01)	20	(1, 1, 0, 4)	20	(1, 1, 4)	20	(5, 1)	12						
				(3, 1)	8														
				(001, 2, 00)	12	(1, 1, 2, 00)	12	(1, 1, 2, 0)	12	(3, 1, 0)	8	(1, 3)	8						
				(1, 1, 0)	4	(1, 1, 0)	4	(1, 1)	4										
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(1, 1, 1, 10)	32	(1, 1, 1, 3)	32	(2, 1, 3)	24	(4, 2)	15	(2, 2)	9				
												(0, 1, 3)	8	(4, 0)	5	(2, 0)	3		
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		5 s.i.		8 s.i.							

Tabela 2.26: Neste caso há duas possibilidades de se obter a distribuição de multipletos do código genético:

- a) quebrando o primeiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{o}(2)$ e depois para $\mathfrak{so}(2)$.
 - b) quebrando o primeiro $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{o}(2)$ e depois o segundo $\mathfrak{su}(2)$ para $\mathfrak{so}(2)$.
- Ambas as possibilidades estão apresentadas nas duas tabelas seguintes.

$(A_1)^2$		$(L_{1,z}^2)$		$(L_{1,z})$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d
(5, 1)	12	(±5, 1)	4	(+5, 1)	2
				(-5, 1)	2
		(±3, 1)	4	(+3, 1)	2
				(-3, 1)	2
		(±1, 1)	4	(+1, 1)	2
				(-1, 1)	2
(3, 1)	8	(±3, 1)	4	(+3, 1)	2
				(-3, 1)	2
		(±1, 1)	4	(+1, 1)	2
				(-1, 1)	2
(1, 3)	8	(±1, 3)	8	(+1, 3)	4
				(-1, 3)	4
(1, 1)	4	(±1, 1)	4	(+1, 1)	2
				(-1, 1)	2
(4, 2)	15	(±4, 2)	6	(+4, 2)	3
				(-4, 2)	3
		(±2, 2)	6	(+2, 2)	3
				(-2, 2)	3
(0, 2)	3	(0, 2)	3		
(2, 2)	9	(±2, 2)	6	(+2, 2)	3
				(-2, 2)	3
		(0, 2)	3	(0, 2)	3
(4, 0)	5	(±4, 0)	2	(+4, 0)	1
				(-4, 0)	1
		(±2, 0)	2	(+2, 0)	1
				(-2, 0)	1
		(0, 0)	1	(0, 0)	1
(2, 0)	3	(±2, 0)	2	(+2, 0)	1
				(-2, 0)	1
		(0, 0)	1	(0, 0)	1
8 s.i.		18 s.i.		32 s.i.	

$(A_1)^2$		$(L_{1,z}^2)$		$(L_{1,z}^2, L_{2,z})$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d
(5, 1)	12	(±5, 1)	4	(±5, +1)	2
				(±5, -1)	2
		(±3, 1)	4	(±3, +1)	2
				(±3, -1)	2
		(±1, 1)	4	(±1, +1)	2
				(±1, -1)	2
(3, 1)	8	(±3, 1)	4	(±3, +1)	2
				(±3, -1)	2
		(±1, 1)	4	(±1, +1)	2
				(±1, -1)	2
(1, 3)	8	(±1, 3)	8	(±1, +3)	2
				(±1, -3)	2
				(±1, +1)	2
				(±1, -1)	2
(1, 1)	4	(±1, 1)	4	(±1, +1)	2
				(±1, -1)	2
(4, 2)	15	(±4, 2)	6	(±4, +2)	2
				(±4, -2)	2
				(±4, 0)	2
		(±2, 2)	6	(±2, +2)	2
				(±2, -2)	2
				(±2, 0)	2
(0, 2)	3	(0, +2)	1		
		(0, -2)	1		
		(0, 0)	1		
(2, 2)	9	(±2, 2)	6	(±2, +2)	2
				(±2, -2)	2
				(±2, 0)	2
		(0, 2)	3	(0, +2)	1
				(0, -2)	1
		(0, 0)	1		
(4, 0)	5	(±4, 0)	2	(±4, 0)	2
		(±2, 0)	2	(±2, 0)	2
		(0, 0)	1	(0, 0)	1
(2, 0)	3	(±2, 0)	2	(±2, 0)	2
		(0, 0)	1	(0, 0)	1
8 S.I.		17 S.I.		36 S.I.	

Cadeias Sobreviventes de B_6

Este apêndice contém as cadeias sobreviventes de $B_6 = \mathfrak{so}(13)$. A primeira tabela lista as cadeias e indica a página em que se encontram.

Número	Página	Cadeia
1	85	$B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1$
2	85	$B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
3	86	$B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
4	86	$B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1 \oplus A_1$
5	87	$B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$
6	87	$B_6 \supset C_2 \oplus D_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$
7	88	$B_6 \supset C_2 \oplus D_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{34} \oplus A_1 \oplus A_1$
8	88	$B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{24} \oplus A_1 \oplus A_1$
9	89	$B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
10	89	$B_6 \supset C_2 \oplus D_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{13} \oplus A_1$
11	90	$B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
12	91	$B_6 \supset C_2 \oplus D_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{12} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
13	91	$B_6 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus B_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$

1. $B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1$.

B_6		D_6		$A_1 \oplus C_3$		$(A_1)^2$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(000001)	64	(000010)	32	(0, 001)	14	(0, 9)	10
						(0, 3)	4
				(2, 100)	18	(2, 5)	18
		(000001)	32	(0, 010)	28	(1, 8)	18
						(1, 4)	10
				(3, 000)	4	(3, 0)	4
1 S.I.		2 S.I.		4 S.I.		6 S.I.	

2. $B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

B_6		D_6		$A_1 \oplus C_3$		$(A_1)^3$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(000001)	64	(000010)	32	(0, 001)	14	(0, 1, 4)	10
						(0, 3, 0)	4
				(2, 100)	18	(2, 1, 2)	18
		(000001)	32	(0, 010)	28	(1, 0, 4)	18
						(1, 2, 2)	10
				(3, 000)	4	(3, 0, 0)	4
1 S.I.		2 S.I.		4 S.I.		6 S.I.	

3. $B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

B_6		D_6		$(A_1)^2 \oplus D_4$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$					
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d				
(000001)	64	(000010)	32	(0, 1, 0010)	16	(0, 1, 0, 01)	10	(0, 1, 0, 1, 1)	8	(1, 1, 0, 1)	8				
								(0, 1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0, 0)	2				
								(0, 1, 2, 00)	6	(0, 1, 2, 0, 0)	6	(0, 1, 2, 0)	6		
				(1, 0, 0001)	16	(1, 0, 1, 10)	16	(1, 0, 1, 1, 0)	8	(1, 0, 1, 1, 0)	8	(2, 0, 1, 0)	6	(0, 0, 1, 0)	2
												(1, 0, 1, 0, 1)	8	(1, 0, 1, 1, 1)	8
												(0, 1, 1, 1, 0)	8	(1, 1, 1, 0)	8
		(000001)	32	(0, 1, 0001)	16	(0, 1, 1, 10)	16	(0, 1, 1, 1, 0)	16	(0, 1, 1, 1, 0)	8	(1, 1, 1, 0)	8		
										(0, 1, 1, 0, 1)	8	(0, 1, 1, 1)	8		
										(1, 0, 0010)	16	(1, 0, 0, 01)	10	(1, 0, 0, 1, 1)	8
				(1, 0, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0, 0)	2								
				(1, 0, 2, 00)	6	(1, 0, 2, 0, 0)	6	(1, 0, 2, 0)	6						
				1 S.I.		2 S.I.		4 S.I.		6 S.I.		10 S.I.		12 S.I.	

4. $B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1 \oplus A_1$.

B_6		D_6		$A_1 \oplus C_3$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$											
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d										
(000001)	64	(000010)	32	(0, 001)	14	(0, 1, 01)	10	(0, 1, 1, 1)	8	(2, 0, 1)	6										
								(0, 0, 1)	2	(0, 0, 1)	2										
								(0, 1, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2										
						(0, 0, 10)	4	(0, 0, 1, 0)	2	(0, 0, 1, 0)	2	(0, 0, 1)	2	(1, 0, 0)	2	(0, 0, 1)	2				
														(2, 100)	18	(2, 0, 10)	12	(2, 0, 1, 0)	6	(1, 2, 0)	6
														(2, 0, 00)	6	(2, 0, 0, 1)	6	(0, 2, 1)	6		
				(000001)	32	(0, 010)	28	(1, 0, 01)	10	(1, 0, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8						
												(1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2						
												(1, 1, 10)	16	(1, 1, 1, 0)	8	(1, 1, 1, 0)	8	(2, 1, 0)	6	(0, 1, 0)	2
		(1, 1, 0, 1)	8			(1, 1, 1)	8														
		(1, 0, 00)	2			(1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2												
		(3, 000)	4			(3, 0, 00)	4	(3, 0, 0, 0)	4	(0, 3, 0)	4										
		1 S.I.		2 S.I.		4 S.I.		8 S.I.		13 S.I.		15 S.I.									

5. $B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$.

B_6		D_6		$(A_1)^2 \oplus D_4$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(000001)	64	(000010)	32	(0, 1, 0010)	16	(0, 1, 0, 01)	10	(0, 1, 0, 4)	10	(4, 0, 1)	10		
						(0, 1, 2, 00)	6	(0, 1, 2, 0)	6	(0, 1, 2)	6		
				(1, 0, 0001)	16	(1, 0, 1, 10)	16	(1, 0, 1, 3)	16	(4, 0, 1)	10		
						(2, 0, 1)	6						
				(000001)	32	(0, 1, 0001)	16	(0, 1, 1, 10)	16	(0, 1, 1, 3)	16	(3, 1, 1)	16
								(1, 0, 0010)	16	(1, 0, 0, 01)	10	(1, 0, 0, 4)	10
		(1, 0, 2, 00)	6			(1, 0, 2, 0)	6	(1, 0, 2, 0)	6	(1, 0, 2)	6		
		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		6 s.i.		8 s.i.	

6. $B_6 \supset C_2 \oplus D_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

B_6		$C_2 \oplus D_4$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(000001)	64	(10, 0010)	32	(10, 0, 01)	20	(3, 0, 1, 1)	16	(4, 0, 1)	10		
						(2, 0, 1)	6				
						(3, 0, 0, 0)	4	(3, 0, 0)	4		
				(10, 2, 00)	12	(3, 2, 0, 0)	12	(3, 2, 0)	12		
				(10, 0001)	32	(10, 1, 10)	32	(3, 1, 1, 0)	16	(4, 1, 0)	10
								(2, 1, 0)	6		
		(3, 1, 0, 1)	16	(3, 1, 1)	16						
		1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		5 s.i.		7 s.i.	

7. $B_6 \supset C_2 \oplus D_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{34} \oplus A_1 \oplus A_1$.

B_6		$C_2 \oplus D_4$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(000001)	64	(10, 0010)	32	(10, 0, 01)	20	(3, 0, 1, 1)	16	(2, 3, 0)	12
						(0, 3, 0)	4	(0, 3, 0)	4
				(3, 0, 0, 0)	4	(0, 3, 0)	4		
		(10, 2, 00)	12	(3, 2, 0, 0)	12	(0, 2, 3)	12		
		(10, 0001)	32	(10, 1, 10)	32	(3, 1, 1, 0)	16	(1, 3, 1)	16
						(3, 1, 0, 1)	16	(1, 3, 1)	16
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		5 s.i.		6 s.i.	

8. $B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{24} \oplus A_1 \oplus A_1$.

B_6		D_6		$(A_1)^2 \oplus D_4$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(000001)	64	(000010)	32	(0, 1, 0010)	16	(0, 1, 0, 01)	10	(0, 1, 0, 1, 1)	8	(1, 1, 0, 1)	8	(2, 1, 0)	6		
								(0, 1, 0)	2	(0, 1, 0)	2				
						(0, 1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2				
				(0, 1, 2, 00)	6	(0, 1, 2, 0, 0)	6	(0, 1, 2, 0)	6	(1, 0, 2)	6				
				(1, 0, 0001)	16	(1, 0, 1, 10)	16	(1, 0, 1, 1, 0)	8	(2, 0, 1, 0)	6	(2, 0, 1)	6		
								(0, 0, 1, 0)	2	(0, 0, 1)	2				
		(1, 0, 1, 0, 1)	8			(1, 0, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8						
		(000001)	32	(0, 1, 0001)	16	(0, 1, 1, 10)	16	(0, 1, 1, 1, 0)	8	(1, 1, 1, 0)	8	(1, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8
								(0, 1, 1, 0, 1)	8	(0, 1, 1, 1)	8	(2, 0, 1)	6		
						(1, 0, 0010)	16	(1, 0, 0, 01)	10	(1, 0, 0, 1, 1)	8	(2, 0, 0, 1)	6	(1, 2, 0)	6
				(0, 0, 0, 1)	2	(1, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2						
				(1, 0, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2						
(1, 0, 2, 00)	6			(1, 0, 2, 0, 0)	6	(1, 0, 2, 0)	6	(0, 1, 2)	6						
1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		10 s.i.		12 s.i.		14 s.i.			

9. $B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

B_6		D_6		$A_1 \oplus C_3$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(000001)	64	(000010)	32	(0,001)	14	(0,1,01)	10	(0,1,4)	10	(5,0)	6
						(3,0)	4				
						(0,0,10)	4			(0,0,3)	4
				(2,100)	18	(2,0,10)	12	(2,0,3)	12	(3,2)	12
						(2,1,00)	6	(2,1,0)	6	(1,2)	6
						(000001)	32	(1,010)	28	(1,0,01)	10
		(1,1,10)	16	(1,1,3)	16					(4,1)	10
		(2,1)	6								
		(1,0,00)	2	(1,0,0)	2					(0,1)	2
		(3,000)	4	(3,0,00)	4	(3,0,0)	4	(0,3)	4		
1 S.I.		2 S.I.		4 S.I.		8 S.I.		8 S.I.		10 S.I.	

10. $B_6 \supset C_2 \oplus D_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1$.

B_6		$C_2 \oplus D_4$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$							
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d						
(000001)	64	(10,0010)	32	(10,0,01)	20	(3,0,4)	20	(7,0)	8						
								(5,0)	6						
								(3,0)	4						
				(10,0001)	32	(10,1,10)	32	(3,1,3)	32	(1,0)	2				
										(10,2,00)	12	(3,2,0)	12	(3,2)	12
										(6,1)	14				
		(4,1)	10												
		(2,1)	6												
		(0,1)	2												
		1 S.I.		2 S.I.		3 S.I.		3 S.I.		9 S.I.					

11. $B_6 \supset D_6 \supset A_1 \oplus C_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

B_6		D_6		$A_1 \oplus C_3$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$							
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d						
(000001)	64	(000010)	32	(0, 001)	14	(0, 1, 01)	10	(0, 1, 1, 1)	8	(2, 1, 1)	6	(3, 0)	4						
												(1, 0)	2						
												(0, 0, 1)	2	(1, 0)	2				
								(0, 1, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2	(1, 0)	2						
				(0, 0, 10)	4	(0, 0, 1, 0)	2	(1, 0, 0)	2	(1, 0)	2								
				(0, 0, 0, 1)	2	(0, 0, 1)	2	(1, 0)	2	(1, 0)	2								
				(2, 100)	18	(2, 0, 10)	12	(2, 0, 1, 0)	6	(1, 2, 0)	6	(1, 2)	6	(1, 2)	6	(1, 2)	6		
																		(2, 0, 0, 1)	6
		(2, 0, 00)	6	(2, 1, 0, 0)	6	(1, 2, 0)	6	(1, 2)	6	(1, 2)	6								
		(000001)	32	(0, 010)	28	(1, 0, 01)	10	(1, 0, 1, 1)	8	(1, 1, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8	(2, 1)	6				
															(0, 1)	2			
															(1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2	(0, 1)
										(1, 1, 10)	16	(1, 1, 1, 0)	8	(2, 1, 0)	6	(2, 1)	6	(2, 1)	6
						(1, 1, 0, 1)	8	(1, 1, 1)	8										
						(1, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2	(0, 1)	2	(0, 1)	2				
						(3, 000)	4	(3, 0, 00)	4	(3, 0, 0, 0)	4	(0, 3, 0)	4	(0, 3)	4				
1 S.I.						2 S.I.		4 S.I.		8 S.I.		13 S.I.		15 S.I.		18 S.I.			

12. $B_6 \supset C_2 \oplus D_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{12} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

B_6		$C_2 \oplus D_4$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(000001)	64	(10,0010)	32	(10,0,01)	20	(3,0,1,1)	16	(3,1,1)	16	(2,3)	12
						(0,3)	4	(0,3)	4		
						(3,0,0,0)	4	(3,0,0)	4	(0,3)	4
				(10,2,00)	12	(3,2,0,0)	12	(5,0,0)	6	(0,5)	6
						(3,0,0)	4	(0,3)	4		
						(1,0,0)	2	(0,1)	2		
		(10,0001)	32	(10,1,10)	32	(3,1,1,0)	16	(4,1,0)	10	(1,4)	10
						(2,1,0)	6	(1,2)	6		
						(3,1,0,1)	16	(4,0,1)	10	(1,4)	10
						(2,0,1)	6	(1,2)	6		
1 S.I.		2 S.I.		3 S.I.		5 S.I.		6 S.I.		7 S.I.	

13. $B_6 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus B_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{12} \oplus A_1$.

B_6		$(A_1)^2 \oplus B_4$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(000001)	64	(1,0,0001)	32	(1,0,3,1)	16	(4,0,1)	10	(1,4)	10
						(2,0,1)	6	(1,2)	6
				(1,0,1,3)	16	(2,0,3)	12	(3,2)	12
						(0,0,3)	4	(3,0)	4
		(0,1,0001)	32	(0,1,3,1)	16	(3,1,1)	16	(2,3)	12
						(3,0)	4		
				(0,1,1,3)	16	(1,1,3)	16	(4,1)	10
						(2,1)	6		
1 S.I.		2 S.I.		4 S.I.		6 S.I.		8 S.I.	

Cadeias Sobreviventes de D_7

Este apêndice contém as cadeias sobreviventes de $D_7 = \mathfrak{so}(14)$. A primeira tabela lista as cadeias e indica a página em que se encontram.

Número	Página	Cadeia
1	98	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset A_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
2	98	$D_7 \supset A_1 \oplus B_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus B_3 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus G_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
3	99	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
4	99	$D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset$ $\supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
5	100	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_3 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
6	100	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1$
7	101	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
8	101	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
9	102	$D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset$ $\supset G_2 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$

Número	Página	Cadeia
10	102	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset (C_2)_{\text{diag}} \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
11	103	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
12	103	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
13	104	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
14	104	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{45} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
15	105	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset A_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{12} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
16	106	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$
17	107	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$
18	107	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$
19	108	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$

Número	Página	Cadeia
20	108	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{34} \oplus A_1 \oplus A_1$
21	109	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$
22	109	$D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset$ $\supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$
23	110	$D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset$ $\supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$
24	111	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_3 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$
25	112	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$
26	113	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$
27	114	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1 \supset (A_1)_{34} \oplus A_1 \oplus A_1$
28	115	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{24} \oplus A_1 \oplus A_1$
29	116	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{24} \oplus A_1 \oplus A_1$

Número	Página	Cadeia
30	116	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{12} \oplus A_1$
31	117	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1$
32	117	$D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset$ $\supset G_2 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1$
33	118	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
34	118	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{12} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
35	119	$D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
36	119	$D_7 \supset C_2 \oplus B_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
37	120	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_3 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
38	120	$D_7 \supset C_2 \oplus B_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$ $\supset (A_1)_{12} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$
39	121	$D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_3 \supset$ $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$

1. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus (A_1)^4$		$A_2 \oplus (A_1)^4$		$(A_1)^5$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001,0010)	32	(001,0,1,1,0)	16	(01,0,1,1,0)	12	(2,0,1,1,0)	12
				(00,0,1,1,0)	4	(0,0,1,1,0)	4		
				(001,1,0,0,1)	16	(01,1,0,0,1)	12	(2,1,0,0,1)	12
				(00,1,0,0,1)	4	(0,1,0,0,1)	4		
		(100,0001)	32	(100,0,1,1,0)	16	(10,0,1,0,1)	12	(2,0,1,0,1)	12
				(00,0,1,0,1)	4	(0,0,1,0,1)	4		
				(100,1,0,1,0)	16	(10,1,0,1,0)	12	(2,1,0,1,0)	12
				(00,1,0,1,0)	4	(0,1,0,1,0)	4		
1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		8 s.i.		8 s.i.	

2. $D_7 \supset A_1 \oplus B_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus B_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus G_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_1 \oplus B_5$		$(A_1)^3 \oplus B_3$		$(A_1)^3 \oplus G_2$		$(A_1)^5$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(1,00001)	64	(1,1,0,001)	32	(1,1,0,01)	28	(1,1,0,1,1)	16
						(1,1,0,0,2)	12		
						(1,1,0,00)	4	(1,1,0,0,0)	4
				(1,0,1,001)	32	(1,0,1,01)	28	(1,0,1,1,1)	16
						(1,0,1,0,2)	12		
						(1,0,1,00)	4	(1,0,1,0,0)	4
1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.	

3. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$A_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^4$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(01, 0, 01)	15	(2, 0, 01)	15	(2, 0, 1, 1)	12		
						(00, 0, 01)	5	(0, 0, 01)	5	(2, 0, 0, 0)	3		
						(001, 2, 00)	12	(01, 2, 00)	9	(2, 2, 00)	9	(0, 0, 1, 1)	4
				(00, 2, 00)	3	(0, 2, 00)	3	(0, 0, 0, 0)	1	(2, 2, 0, 0)	9		
				(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	24	(2, 1, 10)	24	(2, 1, 1, 0)	12
								(00, 1, 10)	8	(0, 1, 10)	8	(2, 1, 0, 1)	12
		(0, 1, 1, 0)	4					(0, 1, 0, 1)	4				
		(0, 1, 0, 1)	4										
		1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		6 s.i.		6 s.i.		10 s.i.	

4. $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus (A_1)^2$		$(A_1)^4$				
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d			
(0000010)	64	(001, 001)	64	(001, 01)	56	(01, 01)	49	(01, 1, 1)	28	(1, 1, 1, 1)	16			
								(01, 0, 2)	21	(0, 2, 1, 1)	12			
								(00, 01)	7	(1, 1, 0, 2)	12			
						(00, 1, 1)	4	(0, 2, 0, 2)	9					
						(00, 0, 2)	3	(0, 0, 1, 1)	4					
						(001, 00)	8	(01, 00)	7	(01, 0, 0)	7	(1, 1, 0, 0)	4	
				(00, 00)	1	(00, 0, 0)	1	(0, 2, 0, 0)	3					
				(0, 0, 0, 0)	1			(0, 0, 0, 0)	1					
				1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		9 s.i.

5. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$(A_1)^2 \oplus D_5$		$(A_1)^2 \oplus A_4$		$(A_1)^2 \oplus A_3$		$(A_1)^4$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 1000)	10	(0, 1, 100)	8	(0, 1, 1, 1)	8
						(0, 1, 000)	2	(0, 1, 0, 0)	2
						(0, 1, 010)	12	(0, 1, 2, 0)	6
				(0, 1, 001)	8	(0, 1, 0, 2)	6		
				(0, 1, 000)	2	(0, 1, 0, 0)	2		
				(0, 1, 0000)	2	(0, 1, 0, 0)	2		
		(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 0001)	10	(1, 0, 001)	8	(1, 0, 1, 1)	8
						(1, 0, 000)	2	(1, 0, 0, 0)	2
						(1, 0, 0100)	20	(1, 0, 010)	12
				(1, 0, 010)	12	(1, 0, 2, 0)	6		
				(1, 0, 100)	8	(1, 0, 0, 2)	6		
				(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 1, 1)	8		
(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 0, 0)	2						
1 s.i.		2 s.i.		6 s.i.		10 s.i.		12 s.i.	

6. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1$.

D_7		$(A_1)^2 \oplus D_5$		$(A_1)^2 \oplus A_4$		$(A_1)^3 \oplus A_2$		$(A_1)^4$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 1000)	10	(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6
						(0, 1, 1, 00)	4	(0, 1, 1, 0)	4
						(0, 1, 010)	20	(0, 1, 1, 01)	12
				(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6		
				(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2		
				(0, 1, 0000)	2	(0, 1, 0, 0)	2		
		(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 0001)	10	(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6
						(1, 0, 1, 00)	4	(1, 0, 1, 0)	4
						(1, 0, 0100)	20	(1, 0, 1, 10)	12
				(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6		
				(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2		
				(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 0, 0)	2		
1 s.i.		2 s.i.		6 s.i.		12 s.i.		12 s.i.	

7. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$(A_1)^2 \oplus D_5$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^4$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 11)	32	(0, 1, 2, 1)	12
						(0, 1, 1, 2)	12
						(0, 1, 1, 0)	4
						(0, 1, 0, 1)	4
		(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 11)	32	(1, 0, 2, 1)	12
						(1, 0, 1, 2)	12
						(1, 0, 1, 0)	4
						(1, 0, 0, 1)	4
1 s.i.		2 s.i.		2 s.i.		8 s.i.	

8. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$A_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(01, 0, 01)	15	(2, 0, 01)	15	(2, 0, 4)	15		
						(00, 0, 01)	5	(0, 0, 01)	5	(0, 0, 4)	5		
						(001, 2, 00)	12	(01, 2, 00)	9	(2, 2, 00)	9	(2, 2, 0)	9
				(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(00, 2, 00)	3	(0, 2, 00)	3	(0, 2, 0)	3
								(10, 1, 10)	24	(2, 1, 10)	24	(2, 1, 3)	24
								(00, 1, 10)	8	(0, 1, 10)	8	(0, 1, 3)	8
		1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		6 s.i.		6 s.i.		6 s.i.	

9. $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus A_1$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001,001)	64	(001,01)	49	(01,01)	6	(01,6)	49	(1,1,6)	28		
										(0,2,6)	21		
						(00,01)	7	(00,6)	7	(0,0,6)	7		
						(001,00)	8	(01,00)	7	(01,0)	7	(1,1,0)	4
										(0,2,0)	3		
				(00,00)	1	(00,0)	1	(0,0,0)	1				
1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		4 s.i.		6 s.i.			

10. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset (C_2)_{\text{diag}} \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(C_2) \oplus A_1$		$(A_1)^3$					
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d				
(0000010)	64	(001,0010)	32	(001,0,01)	20	(10,0,01)	20	(11,0)	16	(2,1,0)	6				
										(1,2,0)	6				
										(1,0,0)	2				
										(0,1,0)	2				
								(10,0)	4	(1,0,0)	2				
										(0,1,0)	2				
						(001,2,00)	12	(10,2,00)	12	(10,2)	12	(1,0,2)	6		
												(0,1,2)	6		
						(100,0001)	32	(100,1,10)	32	(10,1,10)	32	(20,1)	20	(1,1,1)	8
														(2,0,1)	6
				(0,2,1)	6										
				(01,1)	10							(1,1,1)	8		
										(0,0,1)	2				
								(00,1)	2	(0,0,1)	2				
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		6 s.i.		14 s.i.					

11. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$											
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Pesp	d										
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(10, 0, 01)	20	(1, 0, 0, 01)	10	(1, 0, 0, 1, 1)	8	(2, 0, 0, 1)	6										
										(0, 0, 0, 1)	2	(1, 0, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0, 0)	2								
										(0, 1, 0, 01)	10	(0, 1, 0, 1, 1)	8	(1, 1, 0, 1)	8								
												(0, 1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0, 0)	2								
								(001, 2, 00)	12	(10, 2, 00)	12	(1, 0, 2, 00)	6	(1, 0, 2, 0, 0)	6	(1, 0, 2, 0)	6						
												(0, 1, 2, 00)	6	(0, 1, 2, 0, 0)	6	(0, 1, 2, 0)	6						
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	32	(1, 0, 1, 10)	16	(1, 0, 1, 1, 0)	8	(2, 0, 1, 0)	6	(0, 0, 1, 0)	2								
												(1, 0, 1, 0, 1)	8	(1, 0, 1, 1)	8								
												(0, 1, 1, 10)	16	(0, 1, 1, 1, 0)	8	(1, 1, 1, 0)	8						
														(0, 1, 1, 0, 1)	8	(0, 1, 1, 1)	8						
										1 S.I.		2 S.I.		3 S.I.		3 S.I.		6 S.I.		10 S.I.		12 S.I.	

12. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(1, 1, 0, 01)	20	(1, 1, 0, 1, 1)	16	(1, 1, 1, 1)	16		
								(1, 1, 0, 0, 0)	4	(1, 1, 0, 0)	4		
				(001, 2, 00)	12	(1, 1, 2, 00)	12	(1, 1, 2, 0, 0)	12	(1, 1, 0, 0)	4		
								(3, 1, 0, 0)	8				
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(1, 1, 1, 10)	32	(1, 1, 1, 1, 0)	16	(0, 1, 1, 0)	4	(2, 1, 1, 0)	12
										(1, 1, 1, 0, 1)	16	(0, 1, 0, 1)	4
												(2, 1, 0, 1)	12
										1 S.I.		2 S.I.	

13. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001,0010)	32	(001,0,01)	20	(1,1,0,01)	20	(1,1,0,1,1)	16	(0,1,0,1)	4		
								(2,1,0,1)	12	(1,1,0,0)	4	(1,1,0,0)	4
				(100,0001)	32	(001,2,00)	12	(1,1,2,00)	12	(1,1,2,0,0)	12	(1,1,2,0)	12
						(100,1,10)	32	(1,1,1,10)	32	(1,1,1,1,0)	16	(0,1,1,0)	4
								(1,1,1,0,1)	16	(2,1,1,0)	12	(1,1,1,1)	16
1 S.I.		2 S.I.		3 S.I.		3 S.I.		5 S.I.		7 S.I.			

14. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{45} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001,0010)	32	(001,0,01)	20	(1,1,0,01)	20	(1,1,0,1,1)	16	(0,1,1,0)	4		
								(2,1,1,0)	12	(1,1,0,0)	4	(0,1,1,0)	4
				(100,0001)	32	(001,2,00)	12	(1,1,2,00)	12	(1,1,2,0,0)	12	(0,1,1,2)	12
						(100,1,10)	32	(1,1,1,10)	32	(1,1,1,1,0)	16	(1,1,1,1)	16
								(1,1,1,0,1)	16	(1,1,1,1)	16		
1 S.I.		2 S.I.		3 S.I.		3 S.I.		5 S.I.		6 S.I.			

15. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset$
 $\supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{12} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1.$

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus (A_1)^4$		$A_2 \oplus (A_1)^4$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 1, 1, 0)	16	(01, 0, 1, 1, 0)	12	(2, 0, 1, 1, 0)	12	(2, 1, 1, 0)	12
						(00, 0, 1, 1, 0)	4	(0, 0, 1, 1, 0)	4	(0, 1, 1, 0)	4
				(001, 1, 0, 0, 1)	16	(01, 1, 0, 0, 1)	12	(2, 1, 0, 0, 1)	12	(1, 0, 0, 1)	4
						(00, 1, 0, 0, 1)	4	(0, 1, 0, 0, 1)	4	(3, 0, 0, 1)	8
						(10, 0, 1, 0, 1)	12	(2, 0, 1, 0, 1)	12	(1, 0, 0, 1)	4
						(00, 0, 1, 0, 1)	4	(0, 0, 1, 0, 1)	4	(0, 1, 0, 1)	4
		(100, 0001)	32	(100, 0, 1, 1, 0)	16	(10, 1, 0, 1, 0)	12	(2, 1, 0, 1, 0)	12	(1, 0, 1, 0)	4
						(00, 1, 0, 1, 0)	4	(0, 1, 0, 1, 0)	4	(3, 0, 1, 0)	8
				(100, 1, 0, 1, 0)	16	(10, 1, 0, 1, 0)	12	(2, 1, 0, 1, 0)	12	(1, 0, 1, 0)	4
						(00, 1, 0, 1, 0)	4	(0, 1, 0, 1, 0)	4	(3, 0, 1, 0)	8
1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		8 s.i.		8 s.i.		10 s.i.	

16. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$A_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$									
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d								
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(01, 0, 01)	15	(1, 0, 01)	10	(1, 0, 1, 1)	8	(0, 0, 1)	2								
												(2, 0, 1)	6								
										(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2								
										(0, 0, 01)	5	(0, 0, 1, 1)	4	(1, 0, 1)	4						
										(0, 0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1								
										(00, 0, 01)	5	(0, 0, 01)	5	(0, 0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4				
												(0, 0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1						
										(001, 2, 00)	12	(01, 2, 00)	9	(1, 2, 00)	6	(1, 2, 0, 0)	6	(1, 2, 0)	6		
								(0, 2, 00)	3					(0, 2, 0, 0)	3	(0, 2, 0)	3				
								(00, 2, 00)	3					(0, 2, 00)	3	(0, 2, 0, 0)	3	(0, 2, 0)	3		
										(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	24	(1, 1, 10)	16	(1, 1, 1, 0)	8	(0, 1, 0)	2
								(2, 1, 0)	6												
								(1, 1, 0, 1)	8									(1, 1, 1)	8		
								(0, 1, 10)	8									(0, 1, 1, 0)	4	(1, 1, 0)	4
		(0, 1, 0, 1)	4	(0, 1, 1)	4																
		(00, 1, 10)	8	(0, 1, 10)	8	(0, 1, 1, 0)	4	(1, 1, 0)	4												
						(0, 1, 0, 1)	4	(0, 1, 1)	4												
1 S.I.		2 S.I.		3 S.I.		6 S.I.		9 S.I.		15 S.I.		17 S.I.									

17. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset \tilde{A}_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$A_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$							
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d						
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(01, 0, 01)	15	(2, 0, 01)	12	(2, 0, 1, 1)	12	(1, 0, 1)	4						
								(3, 0, 1)	8	(2, 0, 0)	3	(2, 0, 0, 0)	3	(2, 0, 0)	3				
								(00, 0, 01)	5	(0, 0, 01)	5	(0, 0, 1, 1)	4	(1, 0, 1)	4				
						(001, 2, 00)	12	(01, 2, 00)	9	(2, 2, 00)	9	(2, 2, 0, 0)	9	(2, 2, 0)	9				
								(00, 2, 00)	3	(0, 2, 00)	3	(0, 2, 0, 0)	3	(0, 2, 0)	3				
								(0, 0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1	(0, 0, 0)	1				
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	24	(2, 1, 10)	24	(2, 1, 1, 0)	12	(2, 1, 1, 0)	12	(1, 1, 0)	4				
										(3, 1, 0)	8	(2, 1, 0, 1)	12	(2, 1, 1)	12				
										(00, 1, 10)	8	(0, 1, 10)	8	(0, 1, 1, 0)	4	(1, 1, 0)	4		
						(0, 1, 0, 1)	4	(0, 1, 0, 1)	4	(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4	(0, 1, 1)	4

18. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$					
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d				
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(10, 0, 01)	20	(1, 0, 0, 01)	10	(1, 0, 0, 4)	10	(3, 0, 0)	4				
								(5, 0, 0)	6	(0, 1, 0, 01)	10	(0, 1, 0, 4)	10	(4, 1, 0)	10		
								(001, 2, 00)	12	(10, 2, 00)	12	(1, 0, 2, 00)	6	(1, 0, 2, 0)	6	(1, 0, 2)	6
												(0, 1, 2, 00)	6	(0, 1, 2, 0)	6	(0, 1, 2)	6
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	32	(1, 0, 1, 10)	16	(1, 0, 1, 3)	16	(1, 0, 1, 3)	16	(2, 0, 1)	6		
										(4, 0, 1)	10	(0, 1, 1, 10)	16	(0, 1, 1, 3)	16	(3, 1, 1)	16

19. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(10, 0, 01)	20	(3, 0, 01)	20	(3, 0, 1, 1)	16	(2, 0, 1)	6
										(4, 0, 1)	10		
				(3, 0, 0, 0)	4	(3, 0, 0)	4						
				(001, 2, 00)	12	(10, 2, 00)	12	(3, 2, 00)	12	(3, 2, 0, 0)	12	(3, 2, 0)	12
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	32	(3, 1, 10)	16	(3, 1, 1, 0)	16	(2, 1, 0)	6
										(4, 1, 0)	10		
(3, 1, 0, 1)	16	(3, 1, 1)	16										
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		5 s.i.		7 s.i.	

20. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{34} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(10, 0, 01)	20	(3, 0, 01)	20	(3, 0, 1, 1)	16	(0, 3, 0)	4
										(2, 3, 0)	12		
				(3, 0, 0, 0)	4	(0, 3, 0)	4						
				(001, 2, 00)	12	(10, 2, 00)	12	(3, 2, 00)	12	(3, 2, 0, 0)	12	(0, 3, 2)	12
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	32	(3, 1, 10)	16	(3, 1, 1, 0)	16	(1, 3, 1)	16
										(3, 1, 0, 1)	16	(1, 3, 1)	16
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		5 s.i.		6 s.i.	

21. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001,0010)	32	(001,0,01)	20	(1,1,0,01)	20	(1,1,0,4)	20	(1,1,4)	20
				(001,2,00)	12	(1,1,2,00)	12	(1,1,2,0)	12	(1,1,0)	4
		(100,0001)	32	(100,1,10)	32	(1,1,1,10)	32	(1,1,1,3)	32	(3,1,0)	8
										(0,1,3)	8
								(2,1,3)	24		
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		5 s.i.	

22. $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus (A_1)^2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$					
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d				
(0000010)	64	(001,001)	64	(001,01)	56	(01,01)	49	(01,1,1)	28	(1,1,1,1)	16	(0,1,1)	4				
										(2,1,1)	12	(1,2,1)	12				
										(0,2,1,1)	12	(1,1,2)	12				
								(01,0,2)	21	(0,2,0,2)	9	(0,2,2)	9				
								(00,01)	7	(00,1,1)	4	(0,0,1,1)	4	(1,0,1)	4		
								(00,0,2)	3	(0,0,0,2)	3	(0,0,0,2)	3	(0,0,2)	3		
						(001,00)	8	(01,00)	7	(01,0,0)	7	(1,1,0,0)	4	(1,1,0,0)	4	(1,1,0)	4
												(0,2,0,0)	3	(0,2,0,0)	3	(0,2,0)	3
						(00,00)	1	(00,0,0)	1	(0,0,0,0)	1	(0,0,0,0)	1	(0,0,0)	1		
						1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		9 s.i.	

23. $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus (A_1)^2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$									
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d								
(0000010)	64	(001,001)	64	(001,01)	56	(01,01)	49	(01,1,1)	28	(1,1,1,1)	16	(0,1,1)	4								
										(2,1,1)	12	(1,2,1)	12								
										(0,2,1,1)	12	(1,1,0,2)	12	(3,1,0)	8						
										(0,2,0,2)	9	(2,2,0)	9								
										(00,1,1)	4	(0,0,1,1)	4	(1,0,1)	4						
										(00,0,2)	3	(0,0,0,2)	3	(2,0,0)	3						
								(001,00)	8	(01,00)	7	(01,0,0)	7	(1,1,0,0)	4	(1,1,0,0)	4	(1,1,0)	4		
														(0,2,0,0)	3	(0,2,0,0)	3	(0,2,0)	3		
														(00,0,0)	1	(00,0,0,0)	1	(0,0,0,0)	1	(0,0,0)	1
1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		9 s.i.		11 s.i.									

24. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_1 \oplus A_1 \oplus D_5$		$A_1 \oplus A_1 \oplus A_4$		$A_1 \oplus A_1 \oplus A_3$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 1000)	10	(0, 1, 100)	8	(0, 1, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8		
						(0, 1, 000)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2		
				(0, 1, 0010)	20	(0, 1, 010)	12	(0, 1, 2, 0)	6	(2, 1, 0)	6		
								(0, 1, 0, 2)	6	(0, 1, 2)	6		
						(0, 1, 001)	8	(0, 1, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8		
				(0, 1, 0000)	2	(0, 1, 000)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2		
				(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 0001)	10	(1, 0, 001)	8	(1, 0, 1, 1)	8	(0, 0, 1)	2
								(1, 0, 000)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(2, 0, 1)	6
		(1, 0, 0100)	20					(1, 0, 010)	12	(1, 0, 2, 0)	6	(1, 0, 0)	2
		(1, 0, 0, 2)	6			(3, 0, 0)	4						
		(1, 0, 0, 2)	6			(1, 0, 2)	6						
		(1, 0, 100)	8			(1, 0, 1, 1)	8	(0, 0, 1)	2				
		(2, 0, 1)	6	(2, 0, 1)	6								
		(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 000)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2				
1 s.i.		2 s.i.		6 s.i.		10 s.i.		12 s.i.		15 s.i.			

25. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$(A_1)^2 \oplus D_5$		$(A_1)^2 \oplus A_4$		$(A_1)^3 \oplus A_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 1000)	10	(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6	(0, 1, 2)	6		
				(0, 1, 1, 00)	4	(0, 1, 1, 0)	4	(1, 1, 0)	4				
				(0, 1, 0010)	20	(0, 1, 1, 01)	12	(0, 1, 1, 2)	12	(1, 1, 2)	12		
						(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6	(0, 1, 2)	6		
						(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2		
				(0, 1, 0000)	2	(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2		
				(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 0001)	10	(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6	(1, 0, 2)	6
								(1, 0, 1, 00)	4	(1, 0, 1, 0)	4	(0, 0, 0)	1
		(1, 0, 0100)	20			(1, 0, 1, 10)	12	(1, 0, 1, 2)	12	(2, 0, 0)	3	(0, 0, 2)	3
												(2, 0, 0)	3
						(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6	(1, 0, 2)	6		
						(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2		
		(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2				
		1 s.i.		2 s.i.		6 s.i.		12 s.i.		12 s.i.		14 s.i.	

26. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$(A_1)^2 \oplus D_5$		$(A_1)^2 \oplus A_4$		$(A_1)^3 \oplus A_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 1000)	10	(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6	(2, 1, 0)	6
				(0, 1, 1, 00)	4	(0, 1, 1, 0)	4	(0, 1, 1)	4		
				(0, 1, 0010)	20	(0, 1, 1, 01)	12	(0, 1, 1, 2)	12	(2, 1, 1)	12
						(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6	(2, 1, 0)	6
						(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2
				(0, 1, 0000)	2	(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2
		(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 0001)	10	(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6	(1, 0, 0)	2
						(1, 0, 1, 00)	4	(1, 0, 1, 0)	4	(3, 0, 0)	4
						(1, 0, 1, 10)	12	(1, 0, 1, 2)	12	(1, 0, 1)	1
				(1, 0, 0100)	20	(1, 0, 1, 10)	12	(1, 0, 1, 2)	12	(3, 0, 1)	8
						(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6	(1, 0, 0)	2
						(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(3, 0, 0)	4
				(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2
				(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2

27. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1 \supset (A_1)_{34} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$(A_1)^2 \oplus D_5$		$(A_1)^2 \oplus A_4$		$(A_1)^3 \oplus A_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 1000)	10	(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6	(2, 0, 1)	6		
				(0, 1, 1, 00)	4	(0, 1, 1, 0)	4	(1, 0, 1)	4				
				(0, 1, 0010)	20	(0, 1, 1, 01)	12	(0, 1, 1, 2)	12	(1, 0, 1)	4		
						(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6	(3, 0, 1)	8		
						(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(2, 0, 1)	6		
				(0, 1, 0000)	2	(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 0, 1)	2		
				(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 0001)	10	(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6	(2, 1, 0)	6
								(1, 0, 1, 00)	4	(1, 0, 1, 0)	4	(1, 1, 0)	4
						(1, 0, 0100)	20	(1, 0, 1, 10)	12	(1, 0, 1, 2)	12	(1, 1, 0)	4
								(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6	(3, 1, 0)	8
		(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2						
		(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2				
		1 s.i.		2 s.i.		6 s.i.		12 s.i.		12 s.i.		14 s.i.	

28. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset$
 $\supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{14} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{24} \oplus A_1 \oplus A_1.$

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$									
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d								
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(10, 0, 01)	20	(1, 0, 0, 01)	10	(1, 0, 0, 1, 1)	8	(0, 0, 0, 1)	2	(1, 0, 0)	2								
										(2, 0, 0, 1)	6	(1, 2, 0)	6										
										(1, 0, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2								
										(0, 1, 0, 01)	10	(0, 1, 0, 1, 1)	8	(1, 1, 0, 1)	8	(0, 1, 0)	2						
												(2, 1, 0)	6										
								(0, 1, 0, 0, 0)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2										
								(001, 2, 00)	12	(10, 2, 00)	12	(1, 0, 2, 00)	6	(1, 0, 2, 0, 0)	6	(1, 0, 2, 0)	6	(0, 1, 2)	6				
												(0, 1, 2, 00)	6	(0, 1, 2, 0, 0)	6	(0, 1, 2, 0)	6	(1, 0, 2)	6				
								(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	32	(1, 0, 1, 10)	16	(1, 0, 1, 1, 0)	8	(1, 0, 1, 1, 0)	8	(0, 0, 1, 0)	2	(0, 0, 1)	2
																		(2, 0, 1, 0)	6	(0, 2, 1)	6		
		(1, 0, 1, 0, 1)	8	(1, 0, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8																
		(0, 1, 1, 10)	16	(0, 1, 1, 1, 0)	8	(1, 1, 1, 0)	8									(1, 1, 1)	8						
				(0, 1, 1, 0, 1)	8	(0, 1, 1, 1)	8	(0, 0, 1)	2														
												(2, 0, 1)	6										
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		6 s.i.		10 s.i.		12 s.i.		14 s.i.									

29. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{24} \oplus A_1 \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^5$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001,0010)	32	(001,0,01)	20	(1,1,0,01)	20	(1,1,0,1,1)	16	(1,1,1,1)	16	(0,1,1)	4
								(2,1,1)	12	(0,1,1)	12		
								(1,1,0,0,0)	4	(1,1,0,0)	4	(0,1,1)	4
				(001,2,00)	12	(1,1,2,00)	12	(1,1,2,0,0)	12	(1,1,0,0)	4	(0,1,1)	4
								(3,1,0,0)	8	(0,3,1)	8		
								(100,0001)	32	(100,1,10)	32	(1,1,1,1,0)	16
		(2,1,1,0)	12	(1,2,1)	12								
		(1,1,1,0,1)	16	(0,1,0,1)	4	(1,0,1)	4						
		(2,1,0,1)		12	(1,2,1)	12							
		1 S.I.		2 S.I.		3 S.I.		3 S.I.		5 S.I.		8 S.I.	

30. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{12} \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$A_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001,0010)	32	(001,0,01)	20	(01,0,01)	15	(1,0,01)	10	(1,0,4)	10	(3,0)	4		
								(5,0)	6	(4,0)	5				
								(0,0,01)	5	(0,0,4)	5	(4,0)	5		
						(001,2,00)	12	(01,2,00)	9	(1,2,00)	6	(1,2,0)	6	(1,2)	6
										(0,2,00)	3	(0,2,0)	3	(0,2)	3
										(00,2,00)	3	(0,2,0)	3	(0,2)	3
				(100,0001)	32	(100,1,10)	32	(10,1,10)	24	(1,1,10)	16	(1,1,3)	16	(2,1)	6
										(4,1)	10	(3,1)	8		
										(0,1,10)	8	(0,1,3)	8	(3,1)	8
				(00,1,10)	8	(0,1,10)	8	(0,1,3)	8	(3,1)	8				
1 S.I.		2 S.I.		3 S.I.		6 S.I.		9 S.I.		9 S.I.		11 S.I.			

31. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001,0010)	32	(001,0,01)	20	(01,0,01)	20	(3,0,01)	20	(3,0,4)	20	(1,0)	2		
												(3,0)	4		
												(5,0)	6		
												(7,0)	8		
				(001,2,00)	12	(01,2,00)	12	(3,2,00)	12	(3,2,0)	12	(3,2)	12		
				(100,0001)	32	(100,1,10)	32	(10,1,10)	32	(3,1,10)	32	(3,1,3)	32	(0,1)	2
		(2,1)	6												
		(4,1)	10												
(6,1)	14														
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		9 s.i.			

32. $D_7 \supset B_3 \oplus B_3 \supset B_3 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus G_2 \supset G_2 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1$.

D_7		$B_3 \oplus B_3$		$B_3 \oplus G_2$		$G_2 \oplus G_2$		$G_2 \oplus A_1$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$									
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d								
(0000010)	64	(001,001)	64	(001,01)	49	(01,01)	6	(01,6)	49	(1,1,6)	28	(5,1)	12								
												(7,1)	16								
												(0,2,6)	21	(6,2)	21						
										(00,01)	7	(00,6)	7	(0,0,6)	7	(6,0)	7				
								(001,00)	8	(01,00)	7	(01,0)	7	(1,1,0)	4	(1,1)	4	(0,2,0)	3	(0,2)	3
						(00,00)	1											(00,0)	1	(0,0,0)	1
1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		7 s.i.									

33. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(10, 0, 01)	20	(1, 0, 0, 01)	10	(1, 0, 0, 4)	10	(3, 0, 0)	4	(0, 3)	4
								(5, 0, 0)	6	(0, 5)	6				
								(0, 1, 0, 01)	10	(0, 1, 0, 4)	10	(4, 1, 0)	10	(1, 4)	10
				(001, 2, 00)	12	(10, 2, 00)	12	(1, 0, 2, 00)	6	(1, 0, 2, 0)	6	(1, 0, 2)	6	(2, 1)	6
								(0, 1, 2, 00)	6	(0, 1, 2, 0)	6	(0, 1, 2)	6	(1, 0)	2
								(3, 0)	4						
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	32	(1, 0, 1, 10)	16	(1, 0, 1, 3)	16	(2, 0, 1)	6	(1, 2)	6
								(4, 0, 1)	10	(1, 4)	10				
								(0, 1, 1, 10)	16	(0, 1, 1, 3)	16	(3, 1, 1)	16	(0, 3)	4
												(2, 3)	12		
1 s.i.	2 s.i.	3 s.i.	3 s.i.	6 s.i.	6 s.i.	8 s.i.	10 s.i.								

34. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{12} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$C_2 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^2 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(10, 0, 01)	20	(3, 0, 01)	20	(3, 0, 1, 1)	16	(0, 3, 0)	4	(3, 0)	4		
										(2, 3, 0)	12	(3, 2)	12				
										(3, 0, 0, 0)	4	(0, 3, 0)	4	(3, 0)	4		
				(001, 2, 00)	12	(10, 2, 00)	12	(3, 2, 00)	12	(3, 2, 0, 0)	12	(0, 3, 2)	12	(1, 0)	2		
														(3, 0)	4		
														(5, 0)	6		
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(10, 1, 10)	32	(3, 1, 10)	16	(3, 1, 1, 0)	16	(1, 3, 1)	16	(2, 1)	6		
												(4, 1)	10				
												(3, 1, 0, 1)	16	(1, 3, 1)	16	(2, 1)	6
																(4, 1)	10
1 s.i.	2 s.i.	3 s.i.	3 s.i.	3 s.i.	5 s.i.	6 s.i.	10 s.i.										

35. $D_7 \supset A_3 \oplus D_4 \supset A_3 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

D_7		$A_3 \oplus D_4$		$A_3 \oplus A_1 \oplus C_2$		$(A_1)^3 \oplus C_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(001, 0010)	32	(001, 0, 01)	20	(1, 1, 0, 01)	20	(1, 1, 0, 4)	20	(1, 1, 4)	20	(3, 1)	8		
				(5, 1)	12										
				(001, 2, 00)	12	(1, 1, 2, 00)	12	(1, 1, 2, 0)	12	(1, 1, 0)	4	(1, 1)	4		
								(3, 1, 0)	8	(1, 3)	8				
		(100, 0001)	32	(100, 1, 10)	32	(1, 1, 1, 10)	32	(1, 1, 1, 3)	32	(0, 1, 3)	8	(2, 0)	3	(4, 0)	5
												(2, 1, 3)	24	(2, 2)	9
														(4, 2)	15
1 s.i.		2 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		3 s.i.		5 s.i.		8 s.i.			

36. $D_7 \supset C_2 \oplus B_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

D_7		$C_2 \oplus B_4$		$C_2 \oplus A_1 \oplus A_1$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(10, 0001)	64	(10, 3, 1)	32	(1, 0, 3, 1)	16	(2, 0, 1)	6	(1, 2)	6		
								(4, 0, 1)	10	(1, 4)	10		
						(0, 1, 3, 1)	16	(3, 1, 1)	16	(0, 3)	4	(2, 3)	12
				(10, 1, 3)	32	(1, 0, 1, 3)	16	(0, 0, 3)	4	(3, 0)	4		
								(2, 0, 3)	12	(3, 2)	12		
				(0, 1, 1, 3)	16	(1, 1, 3)	16	(2, 1)	6	(4, 1)	10		
1 s.i.		1 s.i.		2 s.i.		4 s.i.		6 s.i.		8 s.i.			

37. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_3 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

D_7		$(A_1)^2 \oplus D_5$		$(A_1)^2 \oplus A_4$		$(A_1)^2 \oplus A_3$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$			
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d		
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 1000)	10	(0, 1, 100)	8	(0, 1, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8	(0, 1)	2		
						(2, 1)	6	(1, 0)	2						
						(0, 1, 000)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2	(1, 0)	2		
						(0, 1, 0010)	20	(0, 1, 010)	12	(0, 1, 2, 0)	6	(2, 1, 0)	6	(1, 2)	6
								(0, 1, 0, 2)	6	(0, 1, 2)	6	(1, 0)	2		
								(3, 0)	4	(0, 1)	2				
				(0, 1, 001)	8	(0, 1, 1, 1)	8	(1, 1, 1)	8	(2, 1)	6				
				(0, 1, 0000)	2	(0, 1, 000)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2	(1, 0)	2		
				(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 0001)	10	(1, 0, 001)	8	(1, 0, 1, 1)	8	(0, 0, 1)	2	(1, 0)	2
								(2, 0, 1)	6	(1, 2)	6				
								(1, 0, 000)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2	(0, 1)	2
								(1, 0, 0100)	20	(1, 0, 010)	12	(1, 0, 2, 0)	6	(1, 0, 0)	2
		(3, 0, 0)	4			(0, 3)	4								
		(1, 0, 0, 2)	6			(1, 0, 2)	6			(2, 1)	6				
		(1, 0, 100)	8			(1, 0, 1, 1)	8			(0, 0, 1)	2	(1, 0)	2		
		(2, 0, 1)	6			(1, 2)	6								
(1, 0, 0000)	2	(1, 0, 000)	2	(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2	(0, 1)	2						
1 S.I.	2 S.I.	6 S.I.	10 S.I.	12 S.I.	15 S.I.	18 S.I.									

38. $D_7 \supset C_2 \oplus B_4 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus C_2 \supset C_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{12} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

D_7		$C_2 \oplus B_4$		$C_2 \oplus (A_1)^2 \oplus C_2$		$C_2 \oplus (A_1)^3$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$	
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d
(0000010)	64	(10, 0001)	64	(10, 1, 0, 10)	32	(10, 1, 0, 3)	32	(3, 1, 0, 3)	32	(2, 0, 3)	12	(3, 2)	12
										(4, 0, 3)	20	(3, 4)	20
				(10, 0, 1, 10)	32	(10, 0, 1, 3)	32	(3, 0, 1, 3)	32	(3, 1, 3)	32	(2, 3)	12
										(4, 3)	20		
1 S.I.	1 S.I.	2 S.I.	2 S.I.	2 S.I.	3 S.I.	4 S.I.							

39. $D_7 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus D_5 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \tilde{A}_1 \supset (A_1)_{13} \oplus A_1 \oplus A_1 \supset (A_1)_{23} \oplus A_1$.

D_7		$(A_1)^2 \oplus D_5$		$(A_1)^2 \oplus A_4$		$(A_1)^3 \oplus A_2$		$(A_1)^4$		$(A_1)^3$		$(A_1)^2$					
Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d	Peso	d				
(0000010)	64	(0, 1, 00010)	32	(0, 1, 1000)	10	(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6	(0, 1, 2)	6	(1, 0)	2				
						(3, 0)	4	(1, 1)	4								
						(0, 1, 1, 00)	4	(0, 1, 1, 0)	4	(1, 1, 0)	4	(1, 1)	4				
						(0, 1, 0010)	20	(0, 1, 1, 01)	12	(0, 1, 1, 2)	12	(1, 1, 2)	12	(1, 1)	4		
				(3, 1)	8	(0, 1, 0, 10)	6	(0, 1, 0, 2)	6	(0, 1, 2)	6	(1, 0)	2				
				(3, 0)	4	(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2	(1, 0)	2				
				(1, 0, 0000)	2	(0, 1, 0, 00)	2	(0, 1, 0, 0)	2	(0, 1, 0)	2	(1, 0)	2				
				(1, 0, 00001)	32	(1, 0, 0001)	10	(1, 0, 0, 01)	6	(1, 0, 0, 2)	6	(1, 0, 2)	6	(2, 1)	6	(0, 0)	1
								(1, 0, 1, 00)	4	(1, 0, 1, 0)	4	(0, 0, 0)	1	(0, 0)	1		
						(2, 0, 0)	3	(0, 2)	3	(1, 0, 0100)	20	(1, 0, 1, 10)	12	(1, 0, 1, 2)	12	(0, 0, 2)	3
		(2, 0, 2)	9			(2, 2)	9	(1, 0, 0, 01)	6			(1, 0, 0, 2)	6	(1, 0, 2)	6	(2, 1)	6
		(1, 0, 0, 00)	2			(1, 0, 0, 0)	2	(1, 0, 0)	2			(0, 1)	2				
		(1, 0, 0000)	2			(1, 0, 0, 00)	2	(1, 0, 0, 0)	2			(1, 0, 0)	2	(0, 1)	2		
		1 s.i.		2 s.i.		6 s.i.		12 s.i.		12 s.i.		14 s.i.		17 s.i.			

Bibliografia

- [1] J.F. Adams: *Lectures on Lie Groups*, W.A. Benjamin, Amsterdam (1969).
- [2] A. Barut & R. Rączka: *Theory of Group Representations and Applications*, 2nd edition, World Scientific Publishing, Singapore (1986).
- [3] L. Braggion: *Procura por Simetrias de Lie na evolução do Código Genético*, Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP-São Carlos (1998).
- [4] A. Borel & J. de Siebenthal: *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv. **23**(1949), 200-221.
- [5] M. Bordemann, M. Forger & H. Römer: *Homogeneous Kähler manifolds: Paving the way towards new supersymmetric Sigma models*, Commun. Math. Phys. **102**(1986), 605-647.
- [6] N. Bourbaki: *Lie Groups and Lie Algebras*, Chapters 1-8, Hermann, Paris (1975).
- [7] T. Bröcker & T. tomDieck: *Representations of Compact Lie Groups*, 2nd printing, Springer-Verlag, New York (1995).
- [8] C. Chevalley: *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, Princeton (1946).
- [9] J. Dixmier: *Enveloping Algebras*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 11, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1996).
- [10] E.B. Dynkin: *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Mat. Sb. **30**(1952) 349-462; English transl.: AMS Translations(2) **6**(1957), 111-244.
- [11] E.B. Dynkin: *Maximal subgroups of classical groups*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **1**(1952) 39-166; English transl.: AMS Translations(2) **6**(1957), 245-378.

-
- [12] M. Forger: *Symmetry breaking in the genetic code*, 41° Seminário Brasileiro de Análise, Campinas (1995).
- [13] M. Forger: *Invariant polynomials and Molien functions*, J. Math. Phys. **39**(1998), n° 2, 1107-1141.
- [14] M. Forger, J.E.M. Hornos & Y.M.M. Hornos: *Global aspects in the algebraic approach to the genetic code*, Phys. Rev. E, **56**(1997), 7078-7082.
- [15] W. Fulton & J. Harris: *Representation Theory: A First Course*, Springer-Verlag, New York (1991).
- [16] M. Golubitsky: *Primitive actions and maximal subgroups of Lie groups*, J. Differential Geometry **7**(1972), 175-191.
- [17] M. Golubitsky & B. Rothschild: *Primitive subalgebras of exceptional Lie algebras*, Pacific Journal of Mathematics **39**(1971), n° 2, 371-393.
- [18] M. Goto & F.D. Grosshans: *Semisimple Lie Algebras*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Volume 38, Marcel Dekker, New York (1978).
- [19] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York (1978).
- [20] J.E. Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, 3rd printing, Springer-Verlag, New York (1994).
- [21] G. Hochschild: *The Structure of Lie Groups*, Holden-Day, San Francisco (1965).
- [22] J.E.M. Hornos & Y.M.M. Hornos: *Algebraic Model for the Evolution of the Genetic Code*, Phys. Rev. Lett. **71**(1993), 4401-4404.
- [23] J.E.M. Hornos, Y.M.M. Hornos & M. Forger: *Symmetry and Symmetry Breaking: An Algebraic Approach to the Genetic Code*, Int. J. Mod. Phys. **B 13**(1999) 2795-2885.
- [24] N. Jacobson: *Lie Algebras*, Dover Publications, New York (1997).
- [25] F.I. Karpelevich, A.L. Onishchik & E.B. Vinberg : *On the Work of E.B. Dynkin in the Theory of Lie Groups*, AMS Translations(2) **169**(1995), 1-13.
- [26] A.W. Knap: *Representation Theory of Semisimple Lie Groups*, Princeton University Press, New Jersey (1986).
- [27] A.W. Knap: *Lie Groups, Lie Algebras and Cohomology*, Princeton University Press, New Jersey (1988).

-
- [28] A.W. Knap: *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser, Boston (1996).
- [29] A.A. Kirilov: *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, New York (1976).
- [30] B.P. Komrakov: *Reductive subalgebras of real semisimple Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **308**(1989), 521-525. English transl.: Sov. Math. Dokl. **40**(1990), 329-333.
- [31] B.P. Komrakov: *Maximal subalgebras of real Lie algebras and a problem of Sophus Lie*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **311**(1990), 528-532. English transl.: Sov. Math. Dokl. **41**(1990), 269-273.
- [32] H. Kopka & P.W. Daly: *A Guide to L^AT_EX 2_ε*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1996).
- [33] J. Maddox: *The genetic code by numbers*, Nature **367**(1994), 111.
- [34] A.I. Malcev: *On semisimple subgroups of Lie groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR **8**(1944), 143-174; English transl.: AMS Translations(1) **9**(1962), 172-213.
- [35] W.G. McKay & J. Patera: *Tables of Dimensions, Indices and Branching Rules of Simple Lie Algebras*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Volume 69, Marcel Dekker, New York (1981).
- [36] W.G. McKay, J. Patera & D. Sankoff: *The Computation of Branching Rules for Representations of Semisimple Lie Algebras*, Computers in Nonassociative Rings and Algebras, R.E. Beck & B. Kolman (Eds.), Academic Press, New York (1977).
- [37] G.D. Mostow: *The Extensibility of Local Lie groups of Transformations and Groups on Surfaces*, Annals of Mathematics **52**(1950), n° 3, 606-636.
- [38] G.D. Mostow: *On maximal subgroups of real Lie groups*, Annals of Mathematics **74**(1961), n° 3, 503-517.
- [39] M.A. Naimark & A.I. Stern: *Theory of Group Representation*, Springer-Verlag, New York (1982).
- [40] A. Navon & J. Patera: *Embedding of a simple Lie group into a simple Lie group and branching rules*, J. Math. Phys. **8**(1967), n° 3, 489-493.
- [41] A.L. Onishchik (Ed.): *Lie Groups and Lie Algebras I: Foundations of Lie Theory. Lie Groups of Transformations.*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 20, Springer-Verlag, New York (1993).

-
- [42] A.L. Onishchik & E.B. Vinberg (Eds.): *Lie Groups and Lie Algebras III: Structure of Lie Groups and Lie Algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 41, Springer-Verlag, New York (1994).
- [43] A.L. Onishchik & E.B. Vinberg: *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer-Verlag, New York (1990).
- [44] A.A. Sagle & R.E. Walde: *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Academic Press, New York (1973).
- [45] H. Samelson: *Notes on Lie Algebras*, Springer-Verlag, New York (1990).
- [46] D.H. Sattinger & O.L. Weaver: *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1986).
- [47] J.-P. Serre: *Complex Semisimple Lie Algebras*, Springer-Verlag, New York (1987).
- [48] J.-P. Serre: *Lie Algebra and Lie Groups*, 2nd edition, Lecture Notes in Mathematics 1500, Springer-Verlag, New York (1992).
- [49] S. Sternberg: *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, London (1994).
- [50] I. Stewart: *Broken symmetry in the genetic code ?*, New Scientist (5 MArch 1994), 16.
- [51] Tao Hui-Min: *The maximal nonsemisimple subalgebras of a noncompact real semisimple Lie algebra*, Acta Math. Sin. **16**(1966), $n^{\circ}2$, 253-268. English transl.: Chin. Math. **8**(1966), 265-282.
- [52] M.S. Taufik: *On maximal subalgebras in classical real Lie algebras*, Vopr. Teor. Grupp Gromol. Algebr, **2**(1979), 148-168. English transl.: Sel. Math. Sov. **6**(1987), 163-176.
- [53] J. Tits: *Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples*, Séminaire Bourbaki, Mai 1995.
- [54] V.S. Varadarajan: *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, Springer-Verlag, New York (1984).
- [55] N.R. Wallach: *Real Reductive Groups I*, Academic Press, New York (1988).
- [56] F.W. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [57] G. Warner: *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I & II*, Springer-Verlag, New York (1972).

-
- [58] H. Weyl: *Classical Groups, Their Invariants and Representations*, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton (1946).
- [59] H. Weyl: *Simetria*, EdUSP, São Paulo (1997).
- [60] E.P. Wigner: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences*, Comm. on Pure and Applied Math., **13**(1960), 01-14.
- [61] D.P. Želobenko: *Compact Lie Groups and Their Representations*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 40, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1973).