

Esfera Homológica de Poincaré

Amanda Lopes Barreto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRA EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. André Salles de Carvalho

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

São Paulo
Março de 2023

Esfera Homológica de Poincaré

Amanda Lopes Barreto

Esta é a versão original da
dissertação elaborada pela candidata
Amanda Lopes Barreto, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

"A Geometria é a arte de raciocinar sobre as figuras mal desenhadas."

Henri Poincaré

Agradecimentos

A maioria dos acontecimentos e conquistas na nossa vida são resultados de muita determinação, foco, esforço e dedicação. Mas alguns acontecimentos não dependem unicamente de nós e são, de certo modo, presentes do universo. Nesse sentido digo que sempre tive o que podemos chamar de sorte. Durante toda a minha vida muitas pessoas cruzaram o meu caminho e de uma forma ou de outra contribuíram com a minha vivência, meu crescimento pessoal e profissional, mas algumas dessas pessoas se tornaram realmente significativas na minha vida e é por elas que eu quero expressar a minha gratidão nas seguintes linhas.

No mestrado eu tive a imensa honra de ser designada ao Prof. Dr. André Salles de Carvalho, um profissional excepcional, com quem eu tive uma relação muito produtiva e de muito aprendizado. Agradeço pela orientação, pela parceria, o apoio e por fazer parte desse momento tão importante pra mim.

Gostaria de agradecer também ao Prof. Dr. Wellington Carlos de Jesus que foi meu orientador de iniciação científica na graduação. Agradeço por termos desenvolvido tantos trabalhos juntos. Eles me possibilitaram muitas oportunidades e com isso garantimos o meu ingresso no mestrado.

Durante o mestrado tive a oportunidade de conhecer outros pós-graduandos, com os quais compartilhei o espaço de estudos, algumas disciplinas, discussões sobre exercícios, teorias, mas também compartilhei a vida cotidiana, alegrias, risadas, ansiedades, surtos. Agradeço grandemente por essas parcerias, companhias e amizades que foram deveras importante para tornar o dia a dia como pesquisadora mais dinâmico, mais divertido e muitas vezes mais produtivo.

Agradeço também aos professores com os quais eu tive a oportunidade de ser aluna em alguma disciplina, contribuindo diretamente para o meu desenvolvimento como matemática e pesquisadora.

Gostaria de expressar a minha profunda gratidão ao Alembert Lino pela nossa vida

juntos, por ser um homem e pesquisador admirável, que sempre está ao meu lado, sempre me apoiando e me dando forças para alcançarmos os nossos objetivos.

Por fim, gostaria de agradecer a minha família, a minha mãe Adriana Alves de Sales Barreto, meu pai Cesar Lopes Barreto e meu irmão Arthur Lopes Barreto. Se eu pudesse escolher não teria escolhido melhor. Agradeço por serem a minha base, por sempre me apoiarem e me motivarem a seguir a minha carreira profissional e construir minha vida pessoal.

Resumo

Amanda Lopes Barreto. **Esfera Homológica de Poincaré**. Dissertação (Mestrado).
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

A Esfera Homológica de Poincaré, também conhecida como Espaço dodecaédrico de Poincaré, foi apresentada por Poincaré com o intuito de responder a questão levantada por ele próprio sobre a homologia ser uma ferramenta topológica que caracteriza a esfera tridimensional. Pensando nisso, essa dissertação teve como objetivo apresentar uma construção detalhada dessa variedade tridimensional, que possibilitasse a conclusão de que ela não é uma esfera tridimensional, apesar de ter os mesmos grupos de homologia da esfera tridimensional. Essa construção se deu através da topologia quociente entre a esfera tridimensional e seu subgrupo denominado Grupo Icosaédrico Binário, uma duplicação do grupo de simetrias que preservam a orientação do sólido platônico conhecido como Dodecaedro. Essa relação é possível devido à identificação que esses dois espaços têm com grupos relacionados aos quatérnios. A partir dessa construção concluímos que o Grupo Fundamental, um importante invariante da topologia algébrica, da Esfera de homologia de Poincaré é o Grupo Icosaédrico Binário. Como o Grupo Fundamental da esfera tridimensional é trivial, esses espaços não podem ser homeomorfos. Com isso, garantimos que o Espaço dodecaédrico de Poincaré é um contra-exemplo para o questionamento mencionado.

Palavras-chave: Esfera Homológica de Poincaré. Esfera tridimensional. Grupo Icosaédrico Binário. Grupo Fundamental.

Abstract

Amanda Lopes Barreto. **Poincaré Homology Sphere**. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

The Poincaré Homology Sphere, also known as the Poincaré Dodecahedral Space, was presented by Poincaré in order to answer the question raised himself about homology being a topological tool that characterizes the three-dimensional sphere. With that in mind, the purpose of this dissertation was to carefully construct this three-dimensional manifold, which would allow the conclusion that it is not a three-dimensional sphere, despite having the same homology groups as the three-dimensional sphere. This construction arises from the quotient topology between the three-dimensional sphere and its subgroup called the Binary Icosahedral Group, a duplication of the group of symmetries that preserve the orientation of the Platonic solid known as the Dodecahedron. This relationship is possible due to the identification that these two spaces have with groups related to quaternions. From this construction, we conclude that the Fundamental Group, an important invariant of the algebraic topology, of the Poincaré homology sphere is the Binary Icosahedral Group. As the Fundamental Group of the three-dimensional sphere is trivial, these spaces cannot be homeomorphic. With this, we guarantee that the Poincaré Dodecahedral Space is a counterexample to the mentioned question.

Keywords: Poincaré Homology Sphere. Tridimensional sphere. Binary Icosahedral Group. Fundamental Group.

Lista de figuras

1.1	Diagrama de S_4 .	24
1.2	Simetrias de rotação do quadrado.	25
1.3	Simetria do quadrado que reverte sua orientação.	25
1.4	Simetria que não preserva a orientação de um pentágono regular.	26
2.1	Um quatérnio unitário escrito com uma parte real e uma parte imaginária.	35
2.2	O toro \mathbb{T}^2 .	36
2.3	Cone duplo.	37
2.4	Interpretações do 2-espaco projetivo.	37
2.5	Construção do bi-toro.	38
2.6	A Garrafa de Klein como a soma conexa de espaços projetivos.	39
2.7	Homotopia que garante a associatividade em π_1 .	44
2.8	Homotopia que garante que a função constante em x_0 é o elemento neutro de π_1 .	44
2.9	Homotopia que garante que todo elemento de π_1 tem inverso em π_1 .	45
2.10	Ilustração da demonstração do Lema 3.	47
2.11	O 2-toro como um poliedro.	49
2.12	Complexo simplicial formado por um 3-simplexo.	50
3.1	Rotação de v ao redor de u .	65
3.2	Um prisma não regular e um poliedro não convexo e não regular.	68
3.3	Primeira etapa da construção do dodecaedro.	68
3.4	Segunda etapa da construção do dodecaedro formando dois recipientes pontiagudos cujas linhas pontilhadas simbolizam a parte de trás da figura.	69
3.5	As duas figuras espelhadas.	69
3.6	O dodecaedro.	69
3.7	Três eixos de faces do dodecaedro.	70
3.8	Simetrias de um eixo de simetrias de face.	70
3.9	Três eixos de aresta do dodecaedro.	71

3.10	Simetrias em um eixo de simetrias de aresta.	71
3.11	Três eixos de vértice do dodecaedro.	72
3.12	Simetrias em um eixo de simetrias de vértice.	72
3.13	Posição do dodecaedro no espaço euclidiano \mathbb{R}^3	73
3.14	Cubo azul inscrito no dodecaedro.	73
3.15	Segundo cubo inscrito no dodecaedro.	74
3.16	O dodecaedro com cinco cubos inscritos.	74
3.17	Dodecaedro com um eixo de simetria de vértice e os cinco cubos inscritos.	75
3.18	Simetrias de vértices no eixo fixado: 120° , 240° , 360°	75
3.19	Dodecaedro com um eixo de simetria de arestas e os cinco cubos inscritos.	76
3.20	Simetrias de arestas no eixo fixado: 180° , 360°	77
3.21	Dodecaedro com um eixo de simetria de faces e os cinco cubos inscritos.	77
3.22	Simetrias de faces em um eixo fixado do dodecaedro: 72° , 144° , 216° , 288° e 360°	78
3.23	Tamanho da aresta do dodecaedro parametrizado.	79
3.24	Posição do dodecaedro no espaço euclidiano com os cinco cubos inscritos.	80
3.25	Interseção do dodecaedro circunscrito em \mathbb{S}^2 com o plano zy	80
3.26	Vértices do dodecaedro e pontos dos eixos no plano zy	82
3.27	Apótema do pentágono face do dodecaedro em função do raio R	87
3.28	Cálculo do raio R do círculo em que os pentágonos estão inscritos.	87
3.29	Cálculo dos centros das faces do dodecaedro.	88
3.30	Centros das faces do dodecaedro no plano zy	89
3.31	Vértices extremos das arestas restantes.	91
3.32	Cálculo de $\cos(36^\circ)$ e $\cos(72^\circ)$	99
3.33	\mathbb{R} como um espaço de recobrimento de \mathbb{S}^1	105
3.34	Levantamento de caminhos	106
3.35	Levantamento de homotopias.	106
3.36	Divisão de $I \times I$ para mostrar que h está bem definida.	111

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Preliminares da Teoria de Grupos	3
1.1 Classes laterais e subgrupos normais	4
1.2 Homomorfismo de grupos	9
1.3 O subgrupo comutador	11
1.4 Grupos simétricos de permutações	14
1.5 Ações de grupos	28
2 Espaços topológicos e a esfera tridimensional \mathbb{S}^3	31
2.1 A esfera tridimensional \mathbb{S}^3	32
2.2 Topologia quociente	35
2.3 Invariantes topológicos	39
2.4 Grupo Fundamental	41
2.5 O Grupo Fundamental da esfera \mathbb{S}^3	45
2.6 Os grupos de homologia da esfera \mathbb{S}^3	47
3 Construção da Esfera Homológica de Poincaré	55
3.1 Grupos de simetrias da esfera \mathbb{S}^2	56
3.2 A esfera \mathbb{S}^3 e o grupo de simetrias $SO(3)$	63
3.3 Sólidos platônicos: o dodecaedro.	67
3.4 Simetrias de rotação do dodecaedro e o grupo alternado A_5	72
3.5 O Grupo Icosaédrico Simétrico I	78
3.6 Um subgrupo de \mathbb{S}^3 relacionado a $I \subset SO(3)$	95
3.7 O Grupo Icosaédrico Binário $2I$	103
3.8 Enfim o quociente $\mathbb{S}^3/(2I)$	104

Introdução

No final do século XIX e início do século XX, o matemático Henri Poincaré trabalhava nos fundamentos da topologia - o que mais tarde seria denominada topologia algébrica. Poincaré estava particularmente interessado em quais propriedades topológicas caracterizavam uma esfera. Nesse sentido, diversas perguntas foram levantadas por ele, na busca de uma caracterização para a esfera tridimensional S^3 , a hipersfera que limita a bola unitária no espaço quadridimensional.

Seu questionamento mais conhecido, em forma de afirmação, é a *Conjectura de Poincaré*, uma caracterização da esfera S^3 , que foi provada em 2003 por Grigori Perelman para variedades suaves. Essa conjectura afirma que a 3-esfera é a única (a menos de homeomorfismo) variedade tridimensional, isto é, um espaço topológico, localmente compacto e Hausdorff que é localmente homeomorfo ao \mathbb{R}^3 , que também é compacta e simplesmente conexa.

Mas antes de formular essa conjectura, Poincaré levantou questões sobre características mais específicas da esfera tridimensional. Em 1900, Henri Poincaré fez o questionamento se os grupos de homologia de um espaço topológico, um invariante algébrico que ele mesmo desenvolveu, eram suficientes para dizer se uma 3-variedade era uma 3-esfera. No entanto, em um artigo de 1904, ele descreveu um contra-exemplo para sua afirmação, um espaço agora conhecido como *Esfera Homológica de Poincaré*.

A Esfera Homológica de Poincaré, também conhecida como Espaço dodecaédrico de Poincaré, foi o primeiro exemplo de uma esfera homológica, uma variedade tridimensional que tem a mesma homologia de uma 3-esfera, mas que não é homeomorfa a uma 3-esfera. Pensando nisso, acreditamos ser interessante desenvolver uma construção detalhada dessa variedade que possibilitasse a conclusão de que essa não é uma esfera tridimensional. Assim, para desenvolver essa construção, foi necessária a utilização de alguns conceitos da teoria de grupos, apresentados e desenvolvidos no Capítulo 1.

Tendo como motivação para a construção da Esfera Homológica de Poincaré, o questionamento de Poincaré já mencionado, no Capítulo 2 buscamos entender e fundamentar esse questionamento, bem como os objetos de estudo que deram forma à variedade criada para respondê-lo. Partimos então de uma análise sobre o principal objeto de estudo de Poincaré, a esfera tridimensional S^3 , e em seguida dissertamos sobre conceitos da topologia e topologia algébrica, tais como a topologia quociente, homologia da esfera S^3 e homotopia, conceitos fundamentais para o bom entendimento e desenvolvimento dos objetivos desse trabalho.

Posteriormente a fundamentação da motivação central dessa dissertação, apresentamos enfim a construção da Esfera Homológica de Poincaré, desenvolvida no Capítulo 3. Essa

se cumpre através da topologia quociente entre a esfera tridimensional S^3 e o Grupo Icosaédrico Binário.

O Grupo Icosaédrico Binário, denominado $2I$, é uma duplicação do Grupo Icosaédrico cujos elementos são as simetrias que preservam orientação do dodecaedro regular, um subgrupo de $SO(3)$ composto pelas rotações de \mathbb{R}^3 . Além disso, devido a essa identificação, $2I$ é apresentado explicitamente por meio de quatérnios, o que também permite descrever explicitamente o quociente da 3-esfera para obter a Esfera Homológica de Poincaré.

Observamos então que a Esfera Homológica de Poincaré tem Grupo Fundamental igual ao Grupo Icosaédrico Binário, e, como o Grupo Fundamental da 3-esfera é trivial, esses dois espaços não podem ser homeomorfos. Devido a isso, podemos concluir que a Esfera Homológica de Poincaré é de fato um contra-exemplo para o questionamento feito por Poincaré.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares da Teoria de Grupos

No decorrer do desenvolvimento de todo esse trabalho utilizamos diversos conceitos, não triviais, da álgebra abstrata. Devido a isso, consideramos deveras importante realizar uma discussão prévia acerca de alguns tópicos da *Teoria de Grupos*, estudados através de [IEZZI e DOMINGUES, 2003](#) e [FRALEIGH, 2003](#), essenciais para o bom entendimento das discussões que iremos realizar ao longo dessa dissertação.

Na Seção 1.1 introduzimos alguns conceitos iniciais da Teoria de Grupos. Esses nos permitem visualizar uma primeira forma de construir conjuntos quocientes. Faremos isso através do conceito de classes laterais seguido do conceito de normalidade, necessário para que o quociente gerado pelas classes laterais mantenha a propriedade de grupo.

Após o desenvolvimento dos conceitos iniciais sobre grupos, subgrupos e quocientes, poder comparar grupos distintos é extremamente importante, a medida em que os conceitos de homomorfismo e isomorfismo de grupos, apresentados na Seção 1.2, nos permitem aferir e até transportar propriedades de um grupo para outro, caso estejam relacionados por essas aplicações.

Mostramos no Capítulo 2 que a esfera S^3 pode ser vista como um grupo, e ao longo desse trabalho temos como objetivo encontrar o subgrupo da 3-esfera mencionado, o Grupo Icosaédrico Binário. Uma das propriedades importantes que esse subgrupo de S^3 deve satisfazer para que o quociente tenha as propriedades desejadas, desenvolvida na Seção 1.3, é a de ser um *Grupo Perfeito*, isto é, um grupo que é igual ao seu comutador.

Ademais, devido à existência de um homomorfismo entre o grupo alternado A_5 e o grupo de simetrias de rotação do dodecaedro, que mostramos no decorrer do Capítulo 3, na Seção 1.4 desse capítulo desenvolvemos alguns conceitos da teoria de permutações e em especial propriedades dos grupos alternados, necessárias para garantir simplicidade e perfeição ao importante Grupo Icosaédrico.

Por fim, desenvolvemos, na Seção 1.5 um pouco sobre a teoria de ações de grupos, pois através desses conceitos será possível construir o espaço quociente entre a esfera S^3 e o Grupo Icosaédrico Binário, principal objeto de estudo desse trabalho, a Esfera Homológica

de Poincaré.

1.1 Classes laterais e subgrupos normais

Como o nome sugere, o objeto de estudo inicial e essencial da Teoria de Grupos é a noção de *grupo*. Vamos então defini-la e, a partir dela, desenvolver os conceitos necessários para discutirmos sobre classes laterais e subgrupos normais.

Definição 1. Um grupo é um sistema matemático composto por um conjunto não vazio G e uma operação

$$\begin{aligned} *: G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g * h, \end{aligned}$$

em que $*$ satisfaz os seguintes axiomas:

- (i) *Associatividade*: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in G$;
- (ii) *Existência de elemento neutro (identidade)*: $\exists Id_G \in G$, tal que $a * Id_G = Id_G * a = a$, $\forall a \in G$;
- (iii) *Existência de inversos*: $\forall a \in G$, $\exists a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = Id_G$.

Se a operação de um grupo G satisfizer o *axioma da comutatividade*, $a * b = b * a$, $\forall a, b \in G$, dizemos que G é um *grupo comutativo* ou *abeliano*. Ademais, para simplificar a notação, quando estiverem claros o grupo e a operação utilizados, poderemos escrever apenas G para $(G, *)$ e ab para $a * b$.

A quantidade de elementos que um grupo possui nos auxiliará a fornecer muitas informações sobre ele próprio ao longo desse trabalho; assim, por simplicidade, denotaremos a cardinalidade de um grupo G por *ordem de G* , cuja notação posta é $o(G)$. Além disso, em muitos casos, é muito útil saber a ordem dos elementos de um grupo. Por isto, definimos a seguir esse conceito.

Definição 2. Seja a um elemento qualquer de G . A ordem de a é o menor número inteiro positivo n tal que $a^n = Id_G$. Nesse caso, utilizamos a notação $o(a) = n$. Se esse número não existe dizemos que a tem ordem infinita.

O conceito de subgrupo também é muito utilizado nesse trabalho, pois como veremos ao longo dessa seção, com algumas propriedades adicionais poderemos construir conjuntos quocientes interessantes a partir dele.

Definição 3 (Subgrupo). Seja $(G, *)$ um grupo. Dizemos que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se

- (i) H é fechado para a operação, isto é, $\forall a, b \in H$ tem-se $a * b \in H$;
- (ii) $(H, *)$ também é um grupo com a operação $*$ restrita aos elementos de H .

Usaremos a notação $H < G$ para dizer que H é um subgrupo de G . Note que, com essa definição, todo grupo é subgrupo dele próprio $G < G$.

O subgrupo mais comum que um grupo pode ter, além dos subgrupos triviais (ele próprio e a identidade $\{Id_G\}$), são os *subgrupos cíclicos*, pois para que contenha um subgrupo cíclico basta que o grupo tenha um único elemento diferente da identidade. Vejamos então a definição desse conceito.

Definição 4 (Subgrupo cíclico). Dado um elemento $a \neq Id_G$ no grupo G , definimos o subgrupo cíclico gerado por a como $\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Note que, por definição, a ordem do grupo cíclico $\langle a \rangle$ é igual a ordem do elemento a .

Vejamos alguns exemplos.

Um dos grupos mais utilizados, antes mesmo de sabermos o conceito de grupos, é o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} com a operação de adição, que podemos facilmente ver que é um grupo abeliano. Também os conjuntos dos números racionais \mathbb{Q} e reais \mathbb{R} , com a operação de adição sobre esses conjuntos, são grupos abelianos. Porém, temos que o conjunto dos números inteiros, sem a origem \mathbb{Z}^* , com a operação de multiplicação, não é um grupo, pois nenhum outro elemento além dos elementos 1 e -1 tem elemento inverso.

Um exemplo interessante de grupo é o *Grupo de permutações* $S(E)$, um conjunto composto por permutações de um conjunto não vazio E , isto é, bijeções de E nele mesmo, com a operação de composição de aplicações.

Para visualizar que o Grupo de permutações é de fato um grupo, veja que se $f : E \rightarrow E$ e $g : E \rightarrow E$ são bijeções, ou seja, $f, g \in S(E)$, então a composição $f \circ g \in S(E)$, pois também é uma bijeção. Além disso, é fácil ver que a composição de bijeções satisfaz a associatividade, satisfaz a existência da permutação identidade, que leva cada elemento de E nele mesmo, e, por serem bijeções, todo elemento tem um elemento inverso pela composição, satisfazendo a existência de inversos.

Observe ainda que o grupo de permutações $S(E)$ é comutativo quando $o(S(E)) = 1, 2$, pois se $o(S(E)) = 1$, então $S(E) = \{Id_{S(E)}\}$ e, se $o(S(E)) = 2$, então $S(E) = \{Id_{S(E)}, f\}$, elementos que comutam por definição. Porém, temos que se $o(S(E)) > 2$ então $S(E)$ não é comutativo. De fato, sejam a, b e c elementos distintos de E e as permutações f e $g \in S(E)$ definidas como $f(a) = b, f(b) = a$ e $f(x) = x, \forall x \in E, x \neq a, b$ e $g(a) = c, g(c) = a$ e $g(x) = x, \forall x \in E, x \neq a, c$. Então $(f \circ g)(a) = c \neq (g \circ f)(a) = b$.

Um caso particular de grupo de permutações é aquele em que $E = \{1, 2, \dots, n\}$ com $n \geq 1$. Nesse caso, a notação utilizada é $S_n := S(E)$ e o chamamos de *Grupo Simétrico de grau n* . Veja que, se E tem n elementos, é claro que $S(E)$ é isomorfo a S_n . Como esse grupo é de extrema importância para esse trabalho, o discutiremos em detalhes na Seção 1.4.

Um outro exemplo, também muito interessante, é dado pelos *Grupos de simetrias de um objeto geométrico T* , compostos pelas bijeções de T em T , que mantêm o objeto geométrico T globalmente invariante, com a operação de composição de aplicações. Exemplos desses grupos serão abordados ao longo de todo esse trabalho, principalmente no Capítulo 3.

Após visualizar alguns exemplos de grupos, fixemos G como sendo um grupo e H um subgrupo de G .

Definição 5. Definimos a *classe lateral a direita* determinada por $a \in G$ como o conjunto $aH = \{ah : h \in H\}$.

Essa definição tem como motivação a seguinte relação de equivalência.

Proposição 1. A relação \approx em G definida para $a, b \in G$ como $a \approx b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. De fato,

(i) $a \approx a$, pois $a^{-1}a = Id_G = Id_H \in H$;

(ii) Se $a \approx b$ então $a^{-1}b \in H$, como H é um grupo $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$ logo $b \approx a$;

(iii) Se $a \approx b$ e $b \approx c$ então $a^{-1}b \in H$ e $b^{-1}c \in H$, como H é um grupo então $a^{-1}bb^{-1}c = a^{-1}c \in H$, portanto $a \approx c$. \square

Proposição 2. A classe lateral aH é a classe de equivalência de $a \in G$ pela relação de equivalência $a \approx b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$.

Demonstração. Vamos mostrar que para quaisquer $a \in G$ e sua classe de equivalência \bar{a} , temos que $\bar{a} = aH$. Primeiro, vejamos que $\bar{a} \subset aH$. Dado $x \in \bar{a}$, então $x^{-1}a \in H$, assim $x^{-1}a = h$, para algum $h \in H$. Daí $x = ah^{-1}$ e portanto $x \in aH$, pois $h^{-1} \in H$. Por outro lado, $aH \subset \bar{a}$. De fato, seja $x \in aH$, então $x = ah$, para algum $h \in H$. Daí, $x^{-1}a = h^{-1} \in H$. Assim, $x \in \bar{a}$. Portanto, $\bar{a} = aH$. \square

A partir disso definimos $G/H = \{aH : a \in G\}$ como o conjunto das classes laterais à direita aH e observamos que G/H é uma partição de G , isto é:

(i) Se $a \in G$, então $aH \neq \emptyset$;

(ii) Se $a, b \in G$, então $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$;

(iii) A união de todas as classes laterais a direita é igual a G .

Vejamos dois exemplos:

(i) Seja (G, \cdot) o grupo multiplicativo das raízes quárticas da unidade $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ e o subgrupo $H = \{1, -1\}$. Daí, as classes laterais de G em H são

$$\begin{aligned} 1H &= \{1 \cdot 1, 1 \cdot (-1)\} = \{1, -1\} \\ (-1)H &= \{(-1) \cdot 1, (-1) \cdot (-1)\} = \{-1, 1\} \\ iH &= \{i \cdot 1, i \cdot (-1)\} = \{i, -i\} \\ (-i)H &= \{(-i) \cdot 1, (-i) \cdot (-1)\} = \{-i, i\} \end{aligned}$$

Assim, $G/H = \{1H, iH\}$.

(ii) Seja $(Z_6, +)$ o grupo aditivo dos inteiros módulo 6, isto é, $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e considere o subgrupo $H = \{0, 3\}$. Assim, as classes laterais de G em H são

$$\begin{aligned} 0 + H &= \{0, 3\} = H \\ 1 + H &= \{1, 4\} \\ 2 + H &= \{2, 5\} \end{aligned}$$

Como a união dessas 3 classes é igual a G , não existirão outras classes laterais distintas dessas. Assim, $G/H = \{H, 1 + H, 2 + H\}$.

Veja que, nos dois casos apresentados, a quantidade de elementos das classes laterais de um mesmo subgrupo é a mesma. Curiosamente, essa é uma propriedade geral das classes laterais.

Proposição 3. *Duas classes laterais quaisquer de H em G tem a mesma cardinalidade. Em particular, toda classe lateral de H em G tem a cardinalidade de $H = IdH$.*

Demonstração. Dadas duas classes laterais quaisquer aH e bH , $a, b \in G$, definimos $f : aH \rightarrow bH$, $f(ah) = bh$, $\forall h \in H$. Vamos mostrar que f é uma aplicação bijetora. De fato, se $h, h' \in H$ e $f(ah) = f(ah')$ então $bh = bh'$, daí temos que $h = h'$, logo f é injetora. Agora, dado $y \in bH$, então $y = bh$ para algum $h \in H$. Tomando $x = ah \in aH$, temos que $f(x) = f(ah) = bh$, assim f é sobrejetora, e portanto f é bijetora. \square

O seguinte Teorema garante que, para todo subgrupo H de um grupo finito G , sua ordem deve ser divisora da ordem de G .

Teorema 1 (Lagrange). *Seja H um subgrupo de um grupo finito G . Então $o(G) = (G : H)o(H)$, em que $(G : H)$ é a cardinalidade de G/H e assim a ordem de H divide a ordem de G .*

Demonstração. Suponhamos que $(G : H) = r$ e seja $G/H = \{a_1H, \dots, a_rH\}$. Então, $G = a_1H \cup \dots \cup a_rH$ e $a_iH \cap a_jH = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Além disso, pelo resultado mostrado anteriormente, o número de elementos de cada classe lateral é igual ao número de elementos de H , isto é, $o(a_iH) = o(H)$, $\forall i = 1, \dots, r$. Portanto,

$$o(G) = o(H) + \dots + o(H) = r \cdot o(H) = (G : H)o(H).$$

\square

A cardinalidade do conjunto G/H , denotada por $(G : H)$, é também denominada de *índice* de H em G .

Corolário 1. *Se G é um grupo finito, então a ordem de um elemento $a \in G$ divide a ordem de G e o quociente é $(G : H)$ em que $H = \langle a \rangle$.*

Demonstração. Neste caso, a ordem de a , suponha r , é igual à ordem de $\langle a \rangle = \{Id_G, a, a^2, \dots, a^{r-1}\}$, um subgrupo cíclico finito, e devido ao Teorema de Lagrange temos $o(G) = (G : H)o(\langle a \rangle) = (G : H)o(a)$. \square

Corolário 2. Se a é um elemento de um grupo finito G , então $a^{o(G)} = Id_G$ (elemento neutro de G). Em particular, se $a^b = Id_G$ então $o(a) \mid b$.

Demonstração. Se h é a ordem de a , então h é o menor inteiro estritamente positivo tal que $a^h = Id_G$. Mas, pelo Corolário 1, temos que $o(G) = (G : H)h$ em que $H = \langle a \rangle$, portanto,

$$a^{o(G)} = a^{(G:H)h} = (a^h)^{(G:H)} = Id_G^{(G:H)} = Id_G.$$

□

É natural perguntarmos quando G/H é um grupo. A seguinte definição é motivada por essa pergunta.

Definição 6. O subgrupo H é um **subgrupo normal** de G se, para todo $x \in G$, tem-se que $xH = Hx$, isto é, se a classe lateral a direita é igual à classe lateral à esquerda determinada por x . No caso afirmativo, utilizamos a notação $H \triangleleft G$.

Note que, se G é abeliano, todo subgrupo de G é normal, mas G admitir subgrupos normais não implica que G é abeliano.

Teorema 2 (Caracterização de subgrupo normal). *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . H é um subgrupo normal de G se, e somente se, para todo $x \in G$ e $h \in H$, $xhx^{-1} \in H$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que H é um subgrupo normal de G . Então $xH = Hx, \forall x \in G$. Fixados $x \in G$ e $h \in H$, temos que $xh \in xH = Hx$, logo $\exists h' \in H$ tal que $xh = h'x$, ou seja, $xhx^{-1} = h' \in H$. (\Leftarrow) Suponha que $xhx^{-1} \in H, \forall x \in X$ e $h \in H$. Queremos mostrar que, fixado $x \in G, xH = Hx$. Primeiro, devemos mostrar que $(xH \subset Hx)$. Tome $xh_1 \in xH$. Então temos que $xh_1x^{-1} \in H$, logo existe $h_2 \in H$ tal que $xh_1x^{-1} = h_2 \in H$, e portanto $xh_1 = h_2x \in Hx$. Por fim, $(xH \supset Hx)$, pois, tomando $h_1x \in Hx$, temos que $x^{-1}h_1x = x^{-1}h_1(x^{-1})^{-1} \in H$, assim existe $h_2 \in H$ tal que $x^{-1}h_1x = h_2 \in H$, daí $h_1x = xh_2 \in xH$. □

O próximo resultado mostra a importância de termos subgrupos normais.

Teorema 3. *H é um subgrupo normal de G se, e somente se, a operação $(aH, bH) \mapsto (ab)H, a, b \in G$, defini uma estrutura de grupo em G/H .*

Demonstração. Definimos a seguinte operação em G/H .

$$\begin{aligned} \cdot : G/H \times G/H &\rightarrow G/H \\ (aH, bH) &\mapsto (aH) \cdot (bH) := (ab)H. \end{aligned}$$

Precisamos que essa operação esteja bem definida no conjunto das classes de equivalência G/H dado pela relação \approx . Isto é, devemos ter que dados dois representantes diferentes para as mesmas classes obtemos o mesmo resultado na imagem de \cdot . Vejamos então quando isso acontece. Tome $aH = a'H$ e $bH = b'H$, ou seja, $(aH, bH) = (a'H, b'H) \in G/H \times G/H$, queremos que $(ab)H = (a'b')H$, que acontece se, e somente se, $(ab)(a'b')^{-1} \in H$. Mas $aH = a'H, bH = b'H$ ocorre se, e somente se, $a(a')^{-1} = h_1 \in H$ e $b(b')^{-1} = h_2 \in H$, daí $(ab)(a'b')^{-1} = ab(b')^{-1}(a')^{-1} = ah_2(a')^{-1} = (h_1a')h_2(a')^{-1} = h_1(a'h_2(a')^{-1})$, como

$h_1 \in H$ por definição, teremos que $h_1(a'h_2(a')^{-1}) \in H$ se, e somente se, $a'h_2(a')^{-1} = ((a')^{-1})^{-1}h_2(a')^{-1} \in H$, isso é garantido se, e somente se, H é um subgrupo normal de G . Portanto, a operação \cdot em G/H está bem definida se, e somente se, H é um subgrupo normal de G .

Tendo que a operação em G/H bem definida, as propriedades que \cdot deve satisfazer para tornar G/H um grupo são satisfeitas.

(i) Existe $Id_G H = H \in G/H$ tal que $Id_G H \cdot aH = (Id_G a)H = aH = (a Id_G)H = aH \cdot Id_G H$ para todo $aH \in G/H$, isto é, H é o elemento neutro de G/H ;

(ii) Para todo $aH \in G/H$, existe um elemento $a^{-1}H \in G/H$ tal que $aH \cdot a^{-1}H = (aa^{-1})H = H = (a^{-1}a)H = a^{-1}H \cdot aH$, ou seja, todo elemento de G/H tem um elemento inverso;

(iii) Tomemos aH, bH e $cH \in G/H$, daí temos que $(aH \cdot bH) \cdot cH = (ab)H \cdot cH = (abc)H = aH \cdot (bc)H = aH \cdot (bH \cdot cH)$, isto é, a operação \cdot é associativa.

□

Nesse caso, denominamos G/H como grupo quociente.

1.2 Homomorfismo de grupos

Muitas vezes queremos relacionar grupos e as operações definidas neles. Uma ferramenta para isso é a aplicação denominada homomorfismo de grupos.

Definição 7. Um homomorfismo entre um grupo (G, \cdot) e um grupo (J, \circ) é uma aplicação $f : G \rightarrow J$ satisfazendo

$$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G.$$

Se, além disso, f for uma aplicação bijetiva, dizemos que f é um isomorfismo de grupos.

Um exemplo de homomorfismo de grupos é a aplicação $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ entre o grupo aditivo dos inteiros e o grupo multiplicativo dos complexos não nulos dada por $f(x) = i^x$ é um homomorfismo de grupos. O que garante que f é um homomorfismo é a seguinte equação.

$$f(x + y) = i^{x+y} = i^x \cdot i^y, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 4. Para qualquer homomorfismo de grupos $f : (G, \cdot) \rightarrow (J, \circ)$ valem as seguintes propriedades:

- (i) $f(Id_G) = Id_J$, em que Id_G e Id_J são os elementos neutros de G e J respectivamente;
- (ii) $\forall x \in G, f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

Demonstração. (i) $f(Id_G) \circ f(Id_G) = f(Id_G \cdot Id_G) = f(Id_G) = Id_J \circ f(Id_G) \Rightarrow f(Id_G) = Id_J$;

(ii) $f(a) \circ f(a^{-1}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(Id_G) = Id_J = f(a) \circ [f(a)]^{-1} \Rightarrow f(a^{-1}) = f(a)^{-1}, \forall a \in G.$ □

Definição 8. O núcleo de um homomorfismo $f : (G, \cdot) \rightarrow (J, \circ)$ é o conjunto

$$\text{Ker}(f) := \{x \in G : f(x) = Id_J\}, Id_J \text{ elemento neutro de } J.$$

Note que, $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$, pois $Id_G \in \text{Ker}(f)$.

Proposição 5. Seja $f : (G, \cdot) \rightarrow (J, \circ)$ um homomorfismo de grupos. Então,

(i) $\text{Ker}(f)$ é subgrupo normal de G e assim $G/\text{Ker}(f)$ é um grupo;

(ii) f é injetor $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = Id_G$.

Demonstração. (i) Se $a, b \in \text{Ker}(f)$ então $f(a) = f(b) = Id_J$, daí, $f(a \cdot b^{-1}) = f(a) \circ f(b^{-1}) = f(a) \circ [f(b)]^{-1} = Id_J Id_J^{-1} = Id_J$. Logo, $a \cdot b^{-1} \in \text{Ker}(f)$, logo, $\text{Ker}(f)$ é subgrupo de G . Além disso, tome qualquer $g \in G$. Daí, $f(g \cdot a \cdot g^{-1}) = f(g) \circ f(a) \circ [f(g)]^{-1} = f(g) \circ Id_J \circ [f(g)]^{-1} = f(g) \circ [f(g)]^{-1} = e_F$, logo $g \cdot a \cdot g^{-1} \in \text{Ker}(f)$ e portanto $\text{Ker}(f)$ é subgrupo normal de G ;

(ii) (\Rightarrow) Suponha f injetora. Tome $a \in \text{Ker}(f)$, assim $f(a) = Id_J$, mas sabemos que $f(Id_G) = Id_J$, daí $f(a) = f(Id_G) \Rightarrow a = Id_G$. (\Leftarrow) Suponha que $\text{Ker}(f) = Id_G$. Tome $x, y \in G$ tal que $f(x) = f(y)$, daí $f(x) \circ [f(y)]^{-1} = f(y) \circ [f(y)]^{-1}$, assim $f(x) \circ [f(y)]^{-1} = Id_J \Rightarrow f(x \cdot y^{-1}) = Id_J \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in \text{Ker}(f)$, logo $x \cdot y^{-1} = Id_G$ e portanto, $x = y$.

□

Teorema 4 (Teorema Fundamental dos Homomorfismos). Seja $f : (G, \cdot) \rightarrow (J, \circ)$ um homomorfismo sobrejetor de grupos, então o grupo quociente $G/\text{Ker}(f)$ é isomorfo a J .

Demonstração. Por simplificação chamemos $\text{Ker}(f) = N$. Definimos a seguinte aplicação.

$$\begin{aligned} \sigma : G/\text{Ker}(f) &\rightarrow J \\ aN &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que σ é um isomorfismo de grupos.

(i) Suponha que $aN = bN$. Então, $b^{-1} \cdot a \in N$ e daí $f(b^{-1} \cdot a) = Id_J$, mas $[f(b)]^{-1} \circ f(a) = f(b^{-1} \cdot a) = Id_J$. Logo, $f(a) = f(b) \circ Id_J \Rightarrow f(a) = f(b)$. Portanto, σ está bem definida.

(ii) Note que, $\sigma((aN) \cdot (bN)) = \sigma((ab)N) = f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$, logo σ é um homomorfismo de grupos.

(iii) Suponhamos que $\sigma(aN) = \sigma(bN)$, daí $f(a) = f(b)$, $a, b \in G$. Assim, $[f(b)]^{-1} \circ f(a) = [f(b)]^{-1} \circ f(b) = Id_J \Rightarrow [f(b)]^{-1} \circ f(a) = f(b^{-1}) \circ f(a) = f(b^{-1} \cdot a) = Id_J$. Logo, $b^{-1} \cdot a \in N$ e assim $aN = bN$. Portanto, σ é injetiva.

(iv) Tome $y \in J$, então $y = f(a)$, $a \in G$. Tomando $x = aN \in G/N$, temos que $\sigma(x) = \sigma(aN) = f(a) = y$ e assim σ é sobrejetiva.

Portanto, σ é um isomorfismo de grupos entre $G/\text{Ker}(f)$ e J .

□

1.3 O subgrupo comutador

O subgrupo comutador de um grupo G é um subgrupo gerado por um subconjunto específico de G , em que G não precisa ser um grupo finito. Devido a isso, antes de definir o que é o subgrupo comutador de um grupo, vejamos o que é um subgrupo gerado por um conjunto.

Definição 9 (Subgrupo gerado por um subconjunto). Seja G um grupo e S um subconjunto de G . Vamos construir um subgrupo de G que definiremos como subgrupo gerado por S . Considere a família C de todos os subgrupos de G que contém S , $C = \{A \leq G : S \subset A\}$. Note que $C \neq \emptyset$, pois $G \in C$. Chamaremos de subgrupo gerado por S o seguinte subconjunto.

$$\langle S \rangle = \bigcap_{A \in C} A.$$

Em que S é denominado conjunto gerador.

Vamos mostrar que $\langle S \rangle$ é de fato um subgrupo de G . Como cada $A \in C$ é subgrupo de G , então $Id_G \in \langle S \rangle$. Além disso, se $a, b \in \langle S \rangle$, então $a, b \in A, \forall A \in C$, mas daí $ab^{-1} \in A, \forall A \in C$, logo $ab^{-1} \in \langle S \rangle$.

Note que $\langle S \rangle$ é o menor subgrupo de G que contém S . De fato, seja H um subgrupo de G que contém S e $H \subset \langle S \rangle$. Então, $H \in C$, ou seja H é um dos elementos da interseção que defini $\langle S \rangle$ e assim $\langle S \rangle \subset H$, portanto $H = \langle S \rangle$.

Os exemplos triviais são $\langle \emptyset \rangle = \{Id_G\}$ e $\langle G \rangle = G$.

Teorema 5. *Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de um grupo G . Então,*

$$\langle S \rangle = \{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} : n \geq 1; x_i \in S \text{ e } \alpha_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}.$$

Ou seja, os elementos de $\langle S \rangle$ são produtos finitos de potências de elementos de S .

Demonstração. Defina $M = \{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} : n \geq 1; x_i \in S \text{ e } \alpha_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$ e vamos mostrar que M é o menor subgrupo de G que contém S , ou seja, que $M = \langle S \rangle$. Note que $S \subset M$, pois $\forall x \in S, x = x^1 \in M$. De fato, M é um subgrupo de G , pois dados $a = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ e $b = y_1^{\beta_1} \dots y_m^{\beta_m} \in M$, temos que $ab^{-1} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_m^{-\beta_m} \dots y_1^{-\beta_1} \in M$. Tome agora M' qualquer subgrupo de G que contém S . Então, $\forall x \in S, x \in M'$. Mas como M' é subgrupo de G , M' contém todas as potências de $x, \forall x \in S$ e então contém todos os produtos finitos $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \forall x_i \in S, \forall \alpha_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n$. Logo, $M \subset M'$. Portanto, M é o subgrupo gerado por S .

□

Com o subgrupo gerado $\langle S \rangle$ visto da forma apresentada anteriormente, teremos que seu elemento neutro será escrito como $Id_{\langle S \rangle} := x^0 \in \langle S \rangle$, para qualquer $x \in S$.

Em particular, se $S = \{a\}, a \in G, \langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ é chamado subgrupo cíclico gerado por a .

É conveniente nesse momento definir a seguinte notação, que será usada ao longo de todo o trabalho, seja $n \in \mathbb{N}$, usaremos $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$, o conjunto de todos os números naturais de 1 a n .

Uma observação interessante é a seguinte. Como os elementos de $\langle S \rangle$ são da forma $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ em que $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ e cada $x_i \in S$, por simplificação, podemos assumir que os elementos de $\langle S \rangle$ são da forma $x_{11} \cdots x_{nm}$ em que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n\}$, $x_{ij} \in S$ ou $x_{ij}^{-1} \in S$, para melhor visualizar, veja que,

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = x_{11} \cdots x_{1\alpha_1} \cdots x_{n1} \cdots x_{n\alpha_n}$$

que ainda é um produto finito e $x_{ij} \in S$, se $\alpha_j > 0$ e $x_{ij}^{-1} \in S$, se $\alpha_j < 0$.

Tendo entendido o conceito de subgrupo gerado por um conjunto, podemos definir o subgrupo comutador de um grupo.

Definição 10. Seja G um grupo. O comutador de dois elementos $x, y \in G$, é dado por

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Veja que o conjunto dos comutadores $\{[x, y] : \forall x, y \in G\}$ com a operação usual dada por $[x, y][z, w] := x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}w^{-1}zw$ não é um grupo, pois não temos que $[x, y][z, w]$ é um comutador, isto é, essa operação não está bem definida nesse conjunto. Vamos então considerar o subgrupo gerado por ele.

Denotamos por $[G, G]$ o subgrupo gerado pelo conjunto dos comutadores de G , isto é, os elementos de $[G, G]$ são da forma $[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n]$, $x_i, y_i \in G, i, j = 1, \dots, n$. Chamaremos $[G, G]$ de subgrupo comutador de G .

Como nem todo grupo é abeliano, o comutador indica o "quanto" uma operação binária falha em ser comutativa, isto é, se G é um grupo comutativo então $[G, G] = \{Id_G\}$ pois $xy = yx, \forall x, y \in G$, daí $y^{-1}x^{-1}yx = (xy)^{-1}yx = Id_G, \forall x, y \in G$.

Para demonstrar que o subgrupo comutador de um grupo é um subgrupo normal, precisaremos do seguinte Lema sobre subgrupos gerados.

Lema 1. *Seja G um grupo e S um subconjunto de G . Se para todo $s \in S$ e $g \in G$, $gs g^{-1} \in \langle S \rangle$ e $gs^{-1}g^{-1} \in \langle S \rangle$ então $\langle S \rangle$ é um subgrupo normal de G .*

Demonstração. Sejam $g \in G$ e $h \in \langle S \rangle$. Devemos mostrar que $ghg^{-1} \in \langle S \rangle$. Por definição, $h = a_1 \cdots a_r$ onde $a_i \in S$ ou $a_i^{-1} \in S, \forall i = 1, \dots, r$. Assim,

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= ga_1 \cdots a_r g^{-1} \\ &= ga_1 g^{-1} ga_2 g^{-1} \cdots ga_r g^{-1} \\ &= (ga_1 g^{-1})(ga_2 g^{-1}) \cdots (ga_r g^{-1}). \end{aligned}$$

Logo, basta mostrar que $ga_i g^{-1} \in \langle S \rangle, \forall i = 1, \dots, r$. Temos dois casos,

(i) Se $a_i \in S$, então por hipótese, $ga_i g^{-1} \in \langle S \rangle$;

(ii) Se $a_i^{-1} \in S$, então por hipótese, $g(a_i^{-1})^{-1}g^{-1} = ga_i g^{-1} \in \langle S \rangle$.

Como nos dois casos $ga_i g^{-1} \in \langle S \rangle$, então $ghg^{-1} \in \langle S \rangle$. Portanto, $\langle S \rangle$ é subgrupo normal de G . \square

Esse resultado nos permite mostrar que um subgrupo gerado é normal verificando apenas os elementos do conjunto gerador e seus inversos.

Note que o conjunto gerador do subgrupo comutador é fechado para inversos, ou seja, $[x, y]^{-1} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx = [y, x] \in [G, G]$.

Teorema 6. *O subgrupo comutador $[G, G]$ é um subgrupo normal do grupo G .*

Demonstração. Sabemos que $[G, G] = \langle S \rangle$ em que $S = \{[x, y] : x, y \in G\}$. Basta mostrar que $gsg^{-1} \in G$ e $gs^{-1}g^{-1} \in G$, $\forall g \in G$ e $\forall s \in S$. Primeiro vamos mostrar que $gsg^{-1} \in [G, G]$, $\forall g \in G$ e $\forall s \in S$. Fixados $g \in G$ e $s \in S$ temos que $s = [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ para alguns $x, y \in G$ e assim

$$\begin{aligned} gsg^{-1} &= gx^{-1}y^{-1}xyg^{-1} \\ &= gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1}gxxg^{-1}gyg^{-1} \\ &= ((g^{-1})^{-1}xg^{-1})^{-1}((g^{-1})^{-1}yg^{-1})^{-1}(gxxg^{-1})(gyg^{-1}) \\ &= (gxxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1}(gxxg^{-1})(gyg^{-1}) \\ &= [gxxg^{-1}, gyg^{-1}] \in S \subset [G, G]. \end{aligned}$$

Em que, $gxxg^{-1}, gyg^{-1} \in G$. Logo, $gsg^{-1} \in [G, G]$, $\forall g \in G$, $\forall s \in S$.

Veja que, não é necessário mostrar que $gs^{-1}g^{-1} \in [G, G]$, $\forall g \in G$, $\forall s \in S$, pois pra todo $s \in S$, temos que $s^{-1} \in S$, que recai no caso anterior.

Usando o Lema 1 concluímos que $[G, G]$ é um subgrupo normal de G . \square

Proposição 6. *Para todo homomorfismo de grupos $f : G \rightarrow H$, tem-se que $f([g_1, g_2]) = [f(g_1), f(g_2)]$, para todo $[g_1, g_2] \in [G, G]$.*

Demonstração. Tome $[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \in [G, G]$, então

$$\begin{aligned} f([g_1, g_2]) &= f(g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2) = f(g_1^{-1})f(g_2^{-1})f(g_1)f(g_2) \\ &= f(g_1)^{-1}f(g_2)^{-1}f(g_1)f(g_2) \\ &= [f(g_1), f(g_2)]. \end{aligned}$$

\square

Corolário 3. *Para todo homomorfismo de grupos $f : G \rightarrow H$ tem-se que $f([G, G]) \subset [H, H]$.*

Demonstração. Tomemos $f([g_1, g_2]) \in f([G, G])$, pela proposição anterior, $f([g_1, g_2]) = [f(g_1), f(g_2)] \in [H, H]$ como queríamos. \square

Observação: Se tivermos que f é um homomorfismo sobrejetor de grupos, teremos válida a igualdade $f([G, G]) = [H, H]$. De fato, todo elemento $h \in H$ é escrito como $h = f(g)$, para algum $g \in G$, então tome $[h_1, h_2] = [f(g_1), f(g_2)] \in [H, H]$, pela proposição anterior, $[f(g_1), f(g_2)] = f([g_1, g_2]) \in f([G, G])$, logo, $[H, H] \subset f([G, G])$.

Teorema 7. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G . Então, G/N é abeliano se, e somente se, $[G, G] \subset N$.*

Demonstração. Seja N um subgrupo normal do grupo G . Veja que as classes laterais xN e yN comutam se, e somente se, $(xy)N = xNyN = yNxN = (yx)N$, se, e somente se, $(yx)^{-1}(xy) \in N$, pois xy e yx estão na mesma classe de equivalência, módulo N , isso é equivalente a $x^{-1}y^{-1}xy = [x, y] \in N$, como $x, y \in G$ são arbitrários, G/N é abeliano se, e somente se, todos os comutadores $[x, y]$ estão em N . Ou seja, se, e somente se, $[G, G]$ é subgrupo de N . \square

Corolário 4. *O grupo quociente $G/[G, G]$ é abeliano.*

Demonstração. Como $[G, G]$ é subgrupo normal de G e, claro, $[G, G]$ é subgrupo dele mesmo, pelo resultado anterior temos que $G/[G, G]$ é abeliano. \square

Em resumo, nós mostramos que o grupo comutador de G é o menor subgrupo normal tal que o grupo quociente do grupo por ele é abeliano, ou seja, $G/[G, G]$ é o maior grupo quociente abeliano de G . Para facilitar a notação, definimos $G^{ab} := G/[G, G]$ como a abelianização de G .

Na próxima seção veremos exemplos interessantes de subgrupos comutadores e abelianizações.

1.4 Grupos simétricos de permutações

O grupo simétrico (S_n, \circ) , como introduzimos na Seção 1.1, é o grupo de todas as permutações σ do conjunto $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$, com a operação de composição de permutações dada da direita para a esquerda (como em composição de funções).

Seja $\sigma \in S_5$ com $\sigma(1) = 4, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 2, \sigma(2) = 3$ e $\sigma(3) = 1$ pode ser denotado de duas formas: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $\sigma = (14523)$. Além disso, σ é um 5-ciclo, ou seja, um ciclo com 5 elementos. Tomemos outra permutação $\rho \in S_5, \rho(1) = 2, \rho(2) = 1, \rho(3) = 3, \rho(4) = 5$ e $\rho(5) = 4$, que se simplifica a $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, ou ainda, $\rho = (12)(34)$, observamos que ρ é um produto de dois 2-ciclos, chamados também como *transposições*. A composição dessas duas permutações é dada por

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ou ainda, podemos escrever da forma $(14523) \circ (12)(34) = (13)(24)$.

Fazendo a operação $\rho\sigma$ verifica-se que $\sigma\rho \neq \rho\sigma$, isto é, os grupos simétricos são exemplos de grupos não abelianos.

Veja que a ordem de todo grupo simétrico S_n é $o(S_n) = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$. Além disso, é fácil ver que toda permutação em S_n pode ser escrita como um produto de ciclos disjuntos.

Proposição 7. *Toda permutação de S_n , $n > 1$, pode ser expressa por uma composição de transposições (2-ciclos).*

Demonstração. Tome $\tau = (a_1 a_2 \dots a_n)$ um n -ciclo. Observe que τ pode ser escrito como $\tau = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \cdots (a_1 a_2)$ uma composição de $n - 1$ transposições. Além disso, toda permutação em S_n , com exceção a identidade, é um ciclo ou o produto de ciclos disjuntos, obtendo o que queríamos. \square

Definição 11. A assinatura de uma permutação $\sigma \in S_n$ dada por $\sigma(a_1) = b_1, \dots, \sigma(a_n) = b_n$ é

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j}.$$

Produto estendido a todos os pares (i, j) de índices tais que $i > j$.

Proposição 8. *A assinatura de uma permutação em S_n é sempre 1 ou -1 .*

Demonstração. Seja

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & a_s & \cdots & a_t & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_s & \cdots & b_t & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Para calcular a assinatura da permutação σ observamos que teremos $n!/2!(n-2)! = n(n-1)/2$ pares (a_i, a_j) , $i > j$, $a_i, a_j \in \bar{n} = \{1, \dots, n\}$ no numerador do produto e da mesma forma teremos $n(n-1)/2$ pares (b_i, b_j) , $i > j$, $b_i, b_j \in \bar{n} = \{1, \dots, n\}$ no denominador, que é equivalente a tomar todas as possibilidades de pares de elementos distintos de \bar{n} não importando a ordem dos elementos, isto é, $(s, t) = (t, s)$. Ou seja, pra cada par (s, t) no numerador do produto em $\text{sgn}(\sigma)$ teremos um par correspondente (s, t) no denominador.

Mas note que os pares (a_i, a_j) , $i > j$ no numerador são fixos e ordenados, ou seja, sempre temos que $a_i > a_j$ e a cada um desses pares associamos o valor dado por $a_i - a_j$. Como σ é uma permutação, os pares correspondentes no denominador podem aparecer ou como $(a_i a_j)$ ou como $(a_j a_i)$, no primeiro caso nós associamos a esse par o valor $a_i - a_j$ e assim o quociente será 1, no segundo caso associamos esse par a $a_j - a_i = -(a_i - a_j)$ e daí o quociente será -1 . Assim, $\text{sgn}(\sigma)$ é o produto de fatores 1 e/ou -1 , como queríamos. \square

Proposição 9. *A assinatura de uma transposição em S_n é sempre -1 .*

Demonstração. Seja

$$\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s & \cdots & a_t & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_t & \cdots & a_s & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Permutação que troca a_t por a_s , a_s por a_t , $t, s \in \{1, \dots, n\}$, $t > s$ e mantêm os demais elementos fixos, uma transposição.

Note que, para cada par (a_i, a_j) , $i > j$, $i \neq s, t$ e $j \neq s, t$, temos

$$\frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1.$$

Para cada par (a_s, a_j) , $j < s$, temos o par (a_t, a_j) tal que

$$\left(\frac{a_s - a_j}{a_t - a_j} \right) \left(\frac{a_t - a_j}{a_s - a_j} \right) = 1.$$

Para cada par (a_j, a_s) , $s < j < t$, temos o par (a_t, a_j) tal que

$$\left(\frac{a_j - a_s}{a_j - a_t} \right) \left(\frac{a_t - a_j}{a_s - a_j} \right) = \left(\frac{-(a_s - a_j)}{-(a_t - a_j)} \right) \left(\frac{a_t - a_j}{a_s - a_j} \right) = 1.$$

Para cada par (a_j, a_s) , $j > t$, temos o par (a_j, a_t) tal que

$$\left(\frac{a_j - a_s}{a_j - a_t} \right) \left(\frac{a_j - a_t}{a_j - a_s} \right) = 1.$$

Por fim temos o par (a_t, a_s) que satisfaz

$$\frac{a_t - a_s}{a_s - a_t} = \frac{-(a_s - a_t)}{a_s - a_t} = -1.$$

Como essas são todas as parcelas do produto de $\text{sgn}(\tau)$, temos que a assinatura de τ é -1 . \square

Proposição 10. *A assinatura do produto de duas permutações é o produto da assinatura dessas permutações.*

Demonstração. Sejam σ e $\gamma \in S_n$, dadas por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Note que, $\sigma(n) = a_n \in \bar{n}$ e $\sigma(1) = a_1 \in \bar{n}$, isto é, o par $(n, 1)$ é levado no par (a_n, a_1) pela σ , e veja que o par (a_n, a_1) é levado em um par (b_s, b_t) pela γ , em que $b_s, b_t \in \bar{n}$ com $\gamma(a_n) = b_s$ e $\gamma(a_1) = b_t$. É claro que $\gamma \circ \sigma$ leva o par $(n, 1)$ no par (b_s, b_t) , com $(\gamma \circ \sigma)(n) = b_s$ e $(\gamma \circ \sigma)(1) = b_t$.

Assim,

$$\frac{(n, 1)}{(a_n, a_1)} \frac{(a_n, a_1)}{(b_s, b_t)} = \frac{(n, 1)}{(b_s, b_t)}.$$

Para associar a subtração desejada a esses pares, devemos considerar dois casos.

(i) Se $a_n > a_1$, teremos que

$$\binom{n-1}{a_n - a_1} \binom{a_n - a_1}{b_s - b_t} = \frac{n-1}{b_s - b_t}.$$

(ii) Já se $a_n < a_1$, teremos que

$$\binom{n-1}{a_n - a_1} \binom{a_1 - a_n}{b_t - b_s} = \binom{n-1}{a_n - a_1} \binom{-(a_n - a_1)}{-(b_s - b_t)} = \binom{n-1}{a_n - a_1} \binom{a_n - a_1}{b_s - b_t} = \frac{n-1}{b_s - b_t}.$$

Esse raciocínio se estende a todos os quocientes gerados pelos pares (i, j) , $i > j$ e $i, j \in \bar{n}$. Assim, supondo que $\gamma(a_i) = b_q$ e $\gamma(a_j) = b_r$ temos que

$$\text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\gamma) = \prod \frac{i-j}{a_i - a_j} \prod \frac{a_i - a_j}{b_q - b_r} = \prod \frac{i-j}{b_q - b_r} = \text{sgn}(\gamma \circ \sigma).$$

□

Note que, esses resultados garantem que a assinatura de permutações é um homomorfismo sobrejetivo de grupos.

$$\begin{aligned} \text{sgn} : S_n &\rightarrow \{-1, 1\} \\ \sigma &\mapsto \text{sgn}(\sigma). \end{aligned}$$

A partir desse homomorfismo definiremos um subgrupo de S_n denominado *subgrupo alternado* A_n de S_n .

Definição 12. Definimos o subgrupo alternado A_n de S_n como sendo o núcleo do homomorfismo sgn , isto é, $A_n := \text{Ker}(\text{sgn}) = \{\sigma \in S_n : \text{sgn}(\sigma) = 1\}$.

O grupo alternado A_n é também conhecido como o grupo das permutações pares de S_n . Vejamos então o que são permutações pares e ímpares e porque faz sentido visualizar A_n dessa maneira.

Definição 13. Uma permutação é par se for descrita por um número par de transposições e é ímpar se for descrita por um número ímpar de transposições.

Note que, como a assinatura de cada transposição é igual a -1 , uma permutação é par se, e somente se, sua assinatura é igual a 1 e é ímpar se, e somente se, sua assinatura é -1 .

Porém, não é claro que esse conceito de permutações pares e ímpares está bem definido, pois devemos ter que qualquer decomposição de uma permutação em transposições tem a mesma paridade de transposições. Para resolver esse problema mostramos a seguir que é válida essa afirmação.

Proposição 11. *Se uma permutação $\sigma \in S_n$ é escrita com um número r e também um número s de transposições, então r e s têm a mesma paridade.*

Demonstração. Suponha que $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ e $\sigma = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_s \in S_n$, ou seja, que σ é escrita como composição de r e também de s transposições $r \neq s$.

Como cada transposição tem assinatura -1 , então $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^r = (-1)^s$ e como $\text{sgn}(\sigma)$ é igual a 1 ou -1 temos que r e s são números pares ou r e s são ambos ímpares. \square

Vejamos agora alguns resultados sobre os grupos alternados A_n .

Teorema 8. *A_n é um subgrupo normal de S_n , o grupo quociente S_n/A_n tem 2 elementos, ou seja, $(S_n : A_n) = 2$ e em particular $o(A_n) = n!/2$.*

Demonstração. Por definição $\text{Ker}(\text{sgn}) = A_n$, como sgn é um homomorfismo sobrejetor temos que o subgrupo alternado A_n é um subgrupo normal de S_n . Pelo Teorema Fundamental dos Homomorfismos (4) temos que $S_n/A_n \cong \{-1, 1\}$ então $(S_n : A_n) = 2$ e pelo Teorema de Lagrange $o(S_n) = (S_n : A_n)o(A_n)$, portanto $o(A_n) = n!/2$. \square

Teorema 9. *O grupo alternado A_n é gerado pelo conjunto de todos os 3-ciclos de S_n .*

Demonstração. Vamos mostrar que toda permutação em A_n é o produto de 3-ciclos. De fato, se $\sigma \in A_n$, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_r$ em que τ_i é uma transposição $i = 1, \dots, r$ e r é par, daí todos os pares $\tau_i \tau_j$ têm a forma $(ab)(ab) = e_{A_n}$ ou $(ab)(ac) = (acb)$ ou $(ab)(cd) = (acb)(acd)$ com $a \neq b \neq c \neq d$, isto é, todos são escritos como produtos de 3-ciclos. \square

Proposição 12. *A_n é o único subgrupo de S_n de índice 2.*

Demonstração. Seja H um subgrupo de S_n de índice 2. Tome $g \in S_n$, se $g \notin H$, então $gH \cap H = \emptyset$ e $S_n/H = \{gH, H\}$, note que, nesse caso $gg \notin gH$ assim $gg \in H$, é claro que se $g \in H$, temos que $gg \in H$, logo o quadrado de qualquer elemento de S_n está em H . Além disso, todo elemento de A_n é produto de quadrados de elementos de S_n . De fato, vimos que todo elemento de A_n é produto de um número par de transposições, então vamos analisar os possíveis casos de pares de transposições, que são $(ab)(ab) = (ab)^2$, $(ac)(bd) = (abcd)^2$ e $(ab)(ac) = (cba) = (cab)^2$. Com isso temos que $A_n \subset H$, portanto $H = A_n$. \square

Definição 14. Um grupo G é dito simples se ele não admite subgrupos normais não triviais.

Para mostrar que A_n , $n \geq 5$, é um grupo simples precisaremos do desenvolvimento teórico apresentado a seguir.

Definição 15 (Ação de conjugação em S_n). Dizemos que dois elementos $x, y \in S_n$ são *conjugados* se existe $\sigma \in S_n$ tal que $x = \sigma y \sigma^{-1}$. Além disso, para $z \in S_n$, a classe de conjugação (órbita) de z é definida como $[z] = \{hzh^{-1} : h \in S_n\}$.

Proposição 13. *Seja $\sigma \in S_n$.*

(i) *Se $\rho = (a_1 \dots a_r)$ é um r -ciclo em S_n , então $\sigma \rho \sigma^{-1}$ é o r -ciclo $(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_r))$.*

(ii) *Se $\rho \in S_n$ é uma permutação qualquer, então ρ e $\sigma \rho \sigma^{-1}$ tem a mesma estrutura de ciclos.*

(iii) Mais que isso, duas permutações em S_n são conjugadas se, e somente se, têm a mesma estrutura de ciclos.

Demonstração. (i) Devemos provar que $\sigma\rho\sigma^{-1}$ e $\gamma = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_r))$ são iguais. Aplicando o r -ciclo γ em $\sigma(a_1)$ obtemos $\sigma(a_2)$. Por outro lado,

$$\sigma\rho\sigma^{-1}(\sigma(a_1)) = \sigma\rho(a_1) = \sigma(a_2).$$

De modo análogo, mostramos que as permutações correspondem em $\sigma(a_i)$ para todo i .

(ii) Se temos $\rho = \rho_1\rho_2 \in S_n$ então $\sigma\rho_1\rho_2\sigma^{-1} = \sigma\rho_1\sigma^{-1}\sigma\rho_2\sigma^{-1}$.

(iii) Basta mostrar que se duas permutações σ e $\tau \in S_n$ tem a mesma estrutura de ciclos então elas são conjugadas. Se $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_r) \dots (j_1 j_2 \dots j_s) \dots (l_1 l_2 \dots l_t)$ e $\tau = (i'_1 i'_2 \dots i'_r) \dots (j'_1 j'_2 \dots j'_s) \dots (l'_1 l'_2 \dots l'_t)$ são duas permutações em S_n com a mesma estrutura de ciclos, então tome $g \in S_n$ dada por

$$\begin{cases} g(i'_k) = g(i_k), & 1 \leq k \leq r. \\ \dots \\ g(j'_m) = g(j_m), & 1 \leq m \leq s. \\ \dots \\ g(l'_q) = g(l_q), & 1 \leq q \leq t. \\ \dots \end{cases}$$

E g definido arbitrariamente nos restantes símbolos não envolvidos. Assim, pelo item (i) temos que

$$\begin{aligned} g\tau g^{-1} &= g[(i'_1 i'_2 \dots i'_r) \dots (j'_1 j'_2 \dots j'_s) \dots (l'_1 l'_2 \dots l'_t)]g^{-1} \\ &= g(i'_1 i'_2 \dots i'_r)g^{-1}g \dots g^{-1}g(j'_1 j'_2 \dots j'_s)g^{-1}g \dots g^{-1}g(l'_1 l'_2 \dots l'_t)g^{-1} \\ &= (g(i'_1) \dots g(i'_r)) \dots (g(j'_1) \dots g(j'_s)) \dots (g(l'_1) \dots g(l'_t)) \\ &= (i_1 i_2 \dots i_r) \dots (j_1 j_2 \dots j_s) \dots (l_1 l_2 \dots l_t) \\ &= \sigma. \end{aligned}$$

Isto é, encontramos $g \in S_n$ que faz a conjugação entre σ e τ . Portanto, σ e τ são conjugadas em S_n . \square

Lema 2. Todos os 3-ciclos de A_n são conjugados entre si, para $n \geq 5$, isto é, dados α e β dois 3-ciclos de A_n então existe $\sigma \in A_n$ tal que $\alpha = \sigma\beta\sigma^{-1}$.

Demonstração. Basta mostrar que qualquer 3-ciclo α em A_n é conjugado a $(a_1 a_2 a_3) \in A_n$. Pelo item (iii) da proposição anterior como α e $(a_1 a_2 a_3)$ tem a mesma estrutura de ciclos, então α e $(a_1 a_2 a_3)$ são conjugados em S_n , isto é, existe $\tau \in S_n$ tal que, $\tau\alpha\tau^{-1} = (a_1 a_2 a_3)$. Se $\tau \in A_n$, temos o resultado escolhendo $\sigma = \tau$. Se $\tau \notin A_n$ tomando $\sigma = (a_4 a_5)\tau \in A_n$, que é par pois composição de duas permutações ímpares é par, temos que

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = (a_4 a_5)\tau\alpha\tau^{-1}(a_4 a_5)^{-1} = (a_1 a_2 a_3).$$

Com isso chegamos ao que queríamos. \square

Com isso, chegamos ao resultado que queríamos.

Teorema 10. Para $n \geq 5$, A_n é um grupo simples, isto é, A_n não tem subgrupos normais não triviais.

Demonstração. Seja $N \triangleleft A_n$, $N \neq \{e_{A_n}\}$. Vamos mostrar que N contém um 3-ciclo. Tome $\sigma \in N$, $\sigma \neq e_{A_n}$ e $a_i \in \bar{n}$, $1 \leq i \leq n$, $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$. Escreva σ como um produto de ciclos disjuntos

$$\sigma = \pi_1 \cdots \pi_k.$$

Note que, como os ciclos são disjuntos eles comutam. Temos alguns casos para analisar.

(i) Se algum π_i tem tamanho pelo menos 4, sem perda de generalidade suponhamos que π_1 tem comprimento ≥ 4 , isto é,

$$\pi_1 = (a_1 a_2 \dots a_r).$$

Sendo $r \geq 4$ tomamos $\rho = (a_1 a_2 a_3) \in A_n$. Então $\rho \sigma \rho^{-1} \in N$ e

$$\begin{aligned} \rho \sigma \rho^{-1} &= \rho \pi_1 \cdots \pi_k \rho^{-1} \\ &\stackrel{*}{=} \rho \pi_1 \rho^{-1} \pi_2 \cdots \pi_k \\ &= \rho \pi_1 \rho^{-1} \pi_1^{-1} \sigma \\ &= (a_1 a_2 a_3)(a_1 a_2 a_3 \dots a_r)(a_1 a_3 a_2)(a_r \dots a_3 a_2 a_1) \sigma \\ &= (a_1 a_2 a_3) \sigma. \end{aligned}$$

*Como σ é um produto de ciclos disjuntos e ρ tem todos os seus elementos em π_1 , temos que ρ e também ρ^{-1} são disjuntos de π_2, \dots, π_k e por isso comutam com eles.

Então $(a_1 a_2 a_3) = \rho \sigma \rho^{-1} \sigma^{-1} \in N$.

(ii) Se cada π_i tem comprimento ≤ 3 e pelo menos dois tem comprimento 3 (então $n \geq 6$). Sem perda de generalidade suponhamos que $\pi_1 = (a_1 a_2 a_3)$ e $\pi_2 = (a_4 a_5 a_6)$. Seja $\rho = (a_1 a_2 a_4) \in A_n$. Então,

$$\begin{aligned} \rho \sigma \rho^{-1} &= \rho \pi_1 \pi_2 \rho^{-1} \pi_3 \cdots \pi_k \\ &= \rho \pi_1 \pi_2 \rho^{-1} \pi_2^{-1} \pi_1^{-1} \sigma \\ &= (a_1 a_2 a_4)(a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)(a_1 a_4 a_2)(a_4 a_6 a_5)(a_1 a_3 a_2) \sigma \\ &= (a_1 a_2 a_5 a_3 a_4) \sigma. \end{aligned}$$

Então $\rho \sigma \rho^{-1} \sigma^{-1} \in N$. Agora basta aplicar o caso (i) que nos dá um 3-ciclo em N a partir desse 5-ciclo.

(iii) Se exatamente um π_i tem comprimento 3 e os restantes têm comprimentos ≤ 2 . Sem perda de generalidade, suponhamos $\pi_1 = (a_1 a_2 a_3)$ e os outros π_i 's são 2-ciclos. Então, $\sigma^2 = \pi_1^2 = (a_1 a_3 a_2) \in N$, pois $\pi_i^2 = e_{A_n}, \forall i \in \{2, \dots, r\}$.

(iv) Se todos os π_i 's são transposições temos que $k > 1$, pois σ é par. Sem perda de generalidade, escreva $\pi_1 = (a_1a_2)$ e $\pi_2 = (a_3a_4)$. Seja $\rho = (a_1a_2a_3) \in A_n$, então

$$\begin{aligned} \rho\sigma\rho^{-1} &= \rho\pi_1\pi_2\rho^{-1}\pi_3 \cdots \pi_k \\ &= \rho\pi_1\pi_2\rho^{-1}\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}\sigma \\ &= (a_1a_2a_3)(a_1a_2)(a_3a_4)(a_1a_3a_2)(a_3a_4)(a_1a_2)\sigma \\ &= (13)(14)\sigma. \end{aligned}$$

Então $\rho\sigma\rho^{-1}\sigma^{-1} = (13)(24) \in N$. Seja $\psi = (a_1a_3a_5) \in A_n$. Então,

$$\begin{aligned} (a_1a_3)(a_2a_4)\psi(a_1a_3)(a_2a_4)\psi^{-1} &= (a_1a_3)(a_2a_4)(a_1a_3a_5)(a_1a_3)(a_2a_4)(a_1a_5a_3) \\ &= (a_1a_3)(a_1a_3a_5)(a_1a_3)(a_1a_5a_3) \\ &= (135) \in N. \end{aligned}$$

Assim, em todos os casos temos que N contém um 3-ciclo. Mas N ter um 3-ciclo, digamos γ , implica que $\rho\gamma\rho^{-1} \in N, \forall \rho \in A_n$, pois N é subgrupo normal de A_n , ou seja, todos os conjugados de γ em A_n pertencem a N . Mas pelo Lema 2 todos os 3-ciclos de A_n são conjugados a γ e assim N contém todos os 3-ciclos. Como A_n é gerado pelos 3-ciclos, temos que $A_n \subset N$, portanto $N = A_n$. □

Corolário 5. Para $n \geq 5$, A_n é um grupo perfeito, isto é, A_n é igual ao seu comutador.

Demonstração. Como A_n é um grupo simples, qualquer subgrupo normal de A_n é a identidade ou ele mesmo. Como o subgrupo comutador de A_n não é a identidade pois A_n não é abeliano ($((123)(234) = (21)(34) \neq (13)(24) = (234)(123)$), então $[A_n, A_n] = A_n$. □

Isto quer dizer que todo elemento de A_n é escrito como um produto de comutadores $[x, y], x, y \in A_n$. Além disso pelo mesmo argumento temos o seguinte resultado.

Teorema 11. Se G é um grupo simples não abeliano, então G é perfeito.

Definição 16. Um grupo G é dito solúvel se existe uma sequência finita de subgrupos $\{Id_G\} := G_0 < G_1 < \dots < G_k := G$ em que G_{i-1} é normal em G_i e todo quociente $G_i/G_{i-1}, i = 1, \dots, k$ é abeliano.

A definição de um grupo G ser solúvel é equivalente a existir uma sequência de subgrupos $\{Id_G\} := G_0 := [G_1, G_1] < G_1 := [G_2, G_2] < \dots < G_{l-2} := [G_{l-1}, G_{l-1}] < G_{l-1} := [G_l, G_l] < G_l := G$, já que cada subgrupo comutador é normal no seu grupo e que cada quociente $G_i/G_{i-1}, \forall 1 \leq i \leq k$ é abeliano se, e somente se, $[G_i, G_i] \subset G_{i-1}, \forall 1 \leq i \leq k$.

Corolário 6. Para $n \geq 5$, A_n não é um grupo solúvel.

Demonstração. Esse corolário é trivialmente satisfeito por A_n ser simples (Teorema 10). □

Teorema 12. A_n é o subgrupo comutador de S_n , para todo $n \geq 2$.

Demonstração. Vamos mostrar que todos os 3-ciclos pertencem a $[S_n, S_n]$. Seja $\gamma = (a_1 a_2 a_3)$ um 3-ciclo qualquer de S_n e $\sigma = (a_1 a_2) \in S_n$ então

$$\gamma^{-1} \sigma^{-1} \gamma \sigma = (a_3 a_2 a_1)(a_2 a_1)(a_1 a_2 a_3)(a_1 a_2) = (a_1 a_2 a_3) \in [S_n, S_n].$$

Logo, $[S_n, S_n]$ contém todos os 3-ciclos e assim $A_n \subset [S_n, S_n]$. Por outro lado, todo comutador $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y \in [S_n, S_n]$ é uma permutação par, pois se x e y são ambos pares ou ambos ímpares, não há o que dizer, já se x é par e y é ímpar, ou vice-versa, $x^{-1} y^{-1}$ e $x y$ são ímpares, logo o produto deles é par, em todo caso todo comutador de S_n é uma permutação par. Assim, $[S_n, S_n] \subset A_n$. Portanto, $[S_n, S_n] = A_n$. \square

Corolário 7. Para $n \geq 5$, S_n não é solúvel.

Demonstração. S_n não é solúvel pois $[S_n, S_n] = A_n$ e $[A_n, A_n] = A_n$. \square

Concluimos que A_n é o menor subgrupo normal de S_n tal que S_n/A_n é abeliano e assim $S_n^{ab} := S_n/[S_n, S_n] = S_n/A_n$ é a abelianização de S_n .

Abaixo, apresentamos alguns exemplos de grupos de permutações.

Veja que S_2 é composto pela identidade e pela transposição (12) , ou seja, uma permutação par e uma ímpar, assim o subgrupo A_2 é composto apenas pela identidade e assim é trivialmente normal pois $aea^{-1} = e \in A_2, \forall a \in S_2$, portanto o grupo quociente é $S_2/A_2 = S_2$.

Já o grupo simétrico S_3 pode ser descrito como a seguir.

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_e, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_a, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_b, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_c, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_d, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{d^2} \right\}.$$

Note que, a, b e c são transposições, então são permutações ímpares e $a^2 = b^2 = c^2 = e$, isto é, têm ordem 2 e $a^{-1} = a, b^{-1} = b$ e $c^{-1} = c$.

Assim, o subgrupo alternado de S_3 é o seguinte.

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e, d, d^2\} = \langle d \rangle.$$

Em que $d^{-1} = d^2$, isto é, $dd^2 = d^2d = e$, esses elementos comutam e é claro que $ed = de$ e $ed^2 = d^2e$, assim A_3 é abeliano e portanto o subgrupo comutador de A_3 é a identidade. Em particular, S_3 é um grupo solúvel.

Vimos que $A_3 \triangleleft S_3$, ou seja, $\forall x \in S_3$ e $\forall h \in A_3$, $xhx^{-1} \in A_3$. De fato, como a, b e c são transposições vale o seguinte:

$$aA_3a^{-1} = \left\{ \underbrace{e}_{aea}, \underbrace{d^2}_{ada}, \underbrace{d}_{ad^2a} \right\} = A_3.$$

Isto é, $ad \neq da$ e $ad^2 \neq d^2a$. Daí, $ada^{-1}d^{-1} = d^2d^{-1} = d$ e $ad^2a^{-1}(d^2)^{-1} = d^2$.

$$bA_3b^{-1} = \left\{ \underbrace{e}_{beb}, \underbrace{d^2}_{bdb}, \underbrace{d}_{bd^2b} \right\} = A_3.$$

Daí, $bd \neq db$ e $bd^2 \neq d^2b$, que nos dá $bdb^{-1}d^{-1} = d^2d^{-1} = d$ e $bd^2b^{-1}(d^2)^{-1} = d(d^2)^{-1} = d^2$.

$$cA_3c^{-1} = \left\{ \underbrace{e}_{cec}, \underbrace{d^2}_{cdc}, \underbrace{d}_{cd^2c} \right\} = A_3.$$

Assim, $cd \neq dc$ e $cd^2 \neq d^2c$, logo $cdc^{-1}d^{-1} = d^2d^{-1} = d$ e $cd^2c^{-1}(d^2)^{-1} = d(d^2)^{-1} = d^2$.

Que $eA_3e^{-1} = A_3$, $dA_3d^{-1} = A_3$ e $d^2A_3(d^2)^{-1} = A_3$ é trivial. Além disso, $ab = d^2 \neq ba = d$, assim $aba^{-1}b^{-1} = ab(ba)^{-1} = d^2d^{-1} = d$, $bc = d^2 \neq cb = d$, assim $bc(cb)^{-1} = d^2d^{-1} = d$ e $ac = d \neq ca = d^2$ e assim, $ac(ca)^{-1} = d(d^2)^{-1} = d^2$. Ou seja, os únicos elementos de S_3 que comutam são os elementos de A_3 e pelo que calculamos o subgrupo comutador $[S_3, S_3]$ é de fato o A_3 .

Vamos calcular o grupo quociente S_3/A_3 . Veja que, $eA_3 = A_3$, $aA_3 = \{ae, ad, ad^2\} = \{a, c, b\}$. Logo, $S_3/A_3 = \{A_3, aA_3\}$ que é a abelianização de S_3 ou seja é o "maior" quociente abeliano de S_3 por subgrupos normais. Nesse caso, A_3 é o único subgrupo normal de S_3 .

Observe que S_3 tem os seguintes 4 subgrupos $\{e, a\} = \langle a \rangle$, $\{e, b\} = \langle b \rangle$, $\{e, c\} = \langle c \rangle$ e A_3 que também é um subgrupo cíclico. Resultado sintetizado abaixo.

$$A_3 = \langle d \rangle \text{ e } S_3 = \langle a \rangle \cup \langle b \rangle \cup \langle c \rangle \cup \langle d \rangle.$$

O grupo simétrico S_4 é um pouco mais interessante. Veja que $o(S_4) = 24$ e seus elementos, mais a identidade, são divididos como mostrado abaixo.

- 6 transposições, que são os elementos **ímpares**: (12), (13), (14), (23), (24) e (34). Geram os 6 subgrupos cíclicos de ordem 2 de S_4 ;

- 8 ciclos de comprimento 3, que são as permutações **pares**: $\{(123), (132)\}$, $\{(124), (142)\}$, $\{(134), (431)\}$, $\{(234), (432)\}$. Os 4 subgrupos cíclicos de ordem 3 de S_4 ;

- 3 produtos de duas transposições, que são elementos **pares** de ordem 2: (12)(34), (13)(24), (14)(23);

- 6 ciclos de comprimento 4, que são as permutações **ímpares**: (1234), (1432), (1324), (4231), (1243) e (1342).

Esses dois últimos juntos mais o elemento neutro formam 3 subgrupos cíclicos de S_4 : $\{e, (1234), (13)(24), (1432)\}$, $\{e, (1324), (12)(34), (4231)\}$ e $\{e, (1243), (14)(23), (3421)\}$.

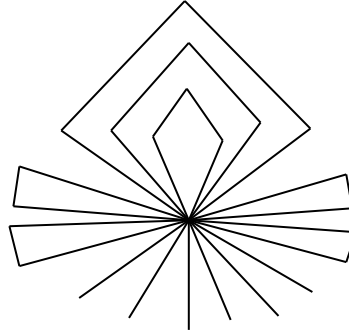


Figura 1.1: Diagrama de S_4 .

De fato, $o(A_4) = 12$ e A_4 é composto pela identidade, pelos 3 produtos de duas transposições (ordem 2) e os 8 ciclos de comprimento 3 (ordem 3) apresentados anteriormente.

$$\begin{aligned} A_4 &= \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (431), (234), (432)\} \\ &= \langle (12)(34) \rangle \cup \langle (13)(24) \rangle \cup \langle (14)(23) \rangle \cup \langle (123) \rangle \cup \langle (124) \rangle \cup \langle (134) \rangle \cup \langle (234) \rangle. \end{aligned}$$

Veja que A_4 é um contra-exemplo para a recíproca do Teorema de Lagrange, pois $o(A_4) = 12$, mas A_4 não tem nenhum subgrupo de ordem 6. De fato, Se H é um subgrupo de A_4 de ordem 6, então $A_4 : H = 2$, tome $a \in A_4$, $a \notin H$, então $A_4/H = \{H, aH\}$ e daí $a^2 \notin aH$ o que implica que $a^2 \in H$ e como $\forall h \in H$, $h^2 \in H$ temos que o quadrado de todo elemento de A_4 pertence a H . Mas vimos que A_4 tem oito 3-ciclos distintos cujos quadrados são os mesmos oito 3-ciclos distintos, logo H tem os oito 3-ciclos de A_4 , um absurdo pois H tem ordem 6. Portanto, H não pode ter ordem 6.

Podemos também relacionar o grupo simétrico S_4 com o grupo de simetrias S_{P_4} do quadrado P_4 , isto é, o grupo de aplicações bijetivas que mantêm o quadrado invariante. Essa relação é feita através do homomorfismo $\psi_{P_4} : S_{P_4} \rightarrow S_4$ que permuta os vértices de P_4 de acordo com suas simetrias.

$$\begin{aligned} \psi_{P_4}(S_{P_4}) &= \{e, (1234), (4321), (13)(24), (14)(23), (12)(43), (13), (24)\} \\ &= \langle (1234) \rangle \cup \langle (14)(23) \rangle \cup \langle (12)(43) \rangle \cup \langle (13) \rangle \cup \langle (24) \rangle. \end{aligned}$$

Composto por 4 permutações pares e 4 permutações ímpares de S_4 . A Figura 1.2 mostra a permutação $(1234) \in S_4$ aplicada 3 vezes no quadrado e como podemos ver ela é um elemento de ordem 4 de S_4 .

Podemos também considerar $S_{P_4}^+$ como o grupo de simetrias de P_4 que preservam a orientação. Aqui consideramos orientação como uma escolha da ordem dos vértices do polígono. Veja pela Figura 1.2 que a permutação (1234) preserva a orientação pois considerando a orientação do quadrado no sentido horário, a ordem inicial dos vértices do quadrado é o arranjo $\{1, 2, 3, 4\}$ e após a simetria a ordem dos vértices permanece $\{1, 2, 3, 4\}$, mas observe que a Figura 1.3 mostra a permutação $(13) \in S_4$ que reverte a orientação

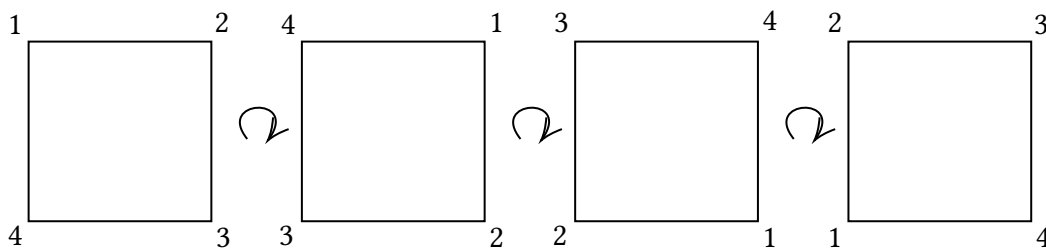


Figura 1.2: Simetrias de rotação do quadrado.

do quadrado pois inicialmente o arranjo dos vértices do quadrado era $\{1, 2, 3, 4\}$ e após a simetria o arranjo passou a ser $\{1, 4, 3, 2\}$.

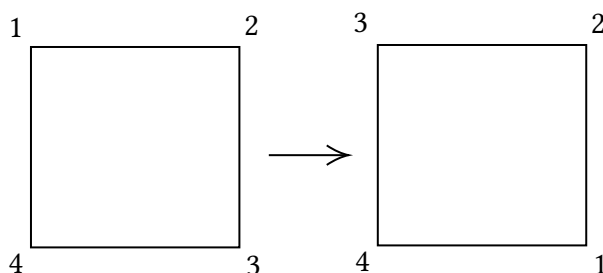


Figura 1.3: Simetria do quadrado que reverte sua orientação.

Além disso, é fácil ver que as simetrias que preservam a orientação do quadrado e de polígonos em geral formam grupos. Nesse caso temos o seguinte.

$$\psi_{P_4}(S_{P_4}^+) = \{e, (1234), (4321), (13)(24)\} = \langle (1234) \rangle.$$

Composto por permutações que são identificadas com as simetrias que preservam a orientação de P_4 em que duas são permutações pares e duas são permutações ímpares de S_4 .

No caso geral, podemos considerar $\psi_{P_n} : S_{P_n} \rightarrow S_n$ a ação de S_{P_n} nos vértices nomeados do polígono regular de n lados P_n . Considerando $S_{P_n}^+$ o grupo de simetrias de P_n que preservam orientação, temos o seguinte grupo cíclico para $\psi_{P_n}(S_{P_n}^+)$.

$$\psi_{P_n}(S_{P_n}^+) = \langle (1 \dots n) \rangle.$$

Agora, para calcular $\psi_{P_n}(S_{P_n})$, além das imagens das rotações simétricas já calculadas, precisamos acrescentar as imagens das reflexões simétricas (que são as simetrias que não preservam orientação).

Para isso é necessário considerar dois casos: quando n é par e quando n é ímpar.

(i) Se n é ímpar os eixos de simetria de P_n passam por um vértice e o ponto médio da aresta oposta a esse vértice. Assim, para cada vértice de P_n teremos 1 reflexão, que é identificada por $\psi_{P_n}(S_{P_n})$ com uma permutação que fixa esse vértice e permuta dois a dois os demais vértices que são opostos, ou seja, teremos n permutações, cada uma composta

por um produto de $(n - 1)/2$ transposições. Para uma melhor visualização, fixe v_1 , assim a permutação $\sigma \in S_n$ identificada pela ψ_{P_n} com a reflexão no eixo de simetria que passa por v_1 é a seguinte.

$$\sigma = (v_2 v_n)(v_3 v_{n-1}) \dots \left(\left[\frac{v_n - 1}{2} + v_1 \right] \left[\frac{v_n + 1}{2} + v_1 \right] \right).$$

De modo geral, fixando o vértice v_j , isto é, considerando o eixo de simetria que passa por v_j , $j = 1, \dots, n$ e identificando v_0 com v_n teremos a seguinte permutação.

$$\gamma = (v_{j+1} v_{j-1})(v_{j+2} v_{j-2}) \dots \left(\left[\frac{v_n - 1}{2} + v_j \right] \left[\frac{v_n + 1}{2} + v_j \right] \right).$$

A Figura 1.4 ilustra a simetria σ , que fixa o vértice $v_1 := 1$, em um pentágono regular. Note que, o conjunto das simetrias que não preservam orientação é identificado com n permutações que unidas com as n permutações pares identificadas com as simetrias que preservam orientação de $\langle(1 \dots n)\rangle$ compõem $\psi_{P_n}(S_{P_n})$, assim $\psi_{P_n}(S_{P_n})$ tem $2n$ permutações de S_n .

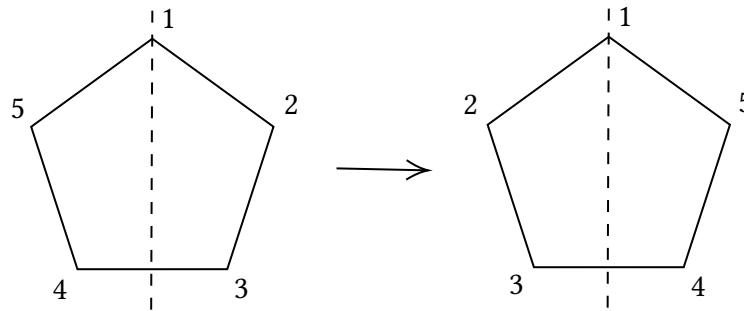


Figura 1.4: Simetria que não preserva a orientação de um pentágono regular.

(ii) Se n é par, temos dois tipos de eixos de simetria em P_n :

- Pensemos primeiro nos eixos de simetria que passam por dois vértices opostos de P_n . Nesse caso, cada par de vértices opostos definirão 1 reflexão, que é identificada por ψ_{P_n} com uma permutação que fixa esse par de vértices e permuta dois a dois os demais vértices que são opostos, isto é, no total são $(n/2)$ permutações, cada uma formada por um produto de $(n - 2)/2$ transposições.

- O outro caso é quando o eixo de simetria passa pelos pontos médios de duas restas opostas de P_n . Nesse caso a permutação identificada por ψ_{P_n} com a reflexão em um eixo de simetria, como descrito, permutam dois a dois todos os vértices opostos, assim no total teremos $(n/2)$ permutações, cada uma composta por um produto de $(n/2)$ transposições.

Note que, as n permutações apresentadas anteriormente unidas a $\langle(1 \dots n)\rangle$ compõem as $2n$ permutações de $\psi_{P_n}(S_{P_n})$.

O grupo de simetrias de maior interesse nesse trabalho é o subgrupo alternado A_5 das permutações pares do grupo simétrico S_5 .

Pelo que vimos $o(S_5) = 5! = 120$, ou seja, S_5 tem 120 elementos. Seja $\sigma \in S_5$, então σ tem a seguinte forma.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Em que $a_i \in \bar{5} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ com $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4 \neq a_5$. Então, se $\sigma \neq e \in S_5$, σ tem uma das seguintes estruturas de ciclos:

- $I_2 := \{(a_i a_j) : i \neq j; i, j \in \bar{5}\}$. Esse conjunto contém 10 *elementos ímpares de ordem 2*. Encontramos esse valor fazendo uma combinação simples de 5 elementos tomados 2 a 2;

- $P_3 := \{(a_i a_j a_k) = (a_i a_k)(a_i a_j) : i \neq j \neq k; i, j, k \in \bar{5}\}$. São 20 *elementos pares de ordem 3*. Aqui fizemos um arranjo simples de 5 elementos tomados 3 a 3, pois a ordem dos elementos é importante, mas dividimos por 3, pois cada permutação tem 3 maneiras diferentes de serem escritas $(a_i a_j a_k) = (a_j a_k a_i) = (a_k a_i a_j)$;

- $P_{2,2} := \{(a_i a_j)(a_k a_l) : i \neq j \neq k \neq l; i, j, k, l \in \bar{5}\}$. Aqui são 15 *elementos pares de ordem 2*. Fizemos uma combinação de 5 elementos tomados 2 a 2 para o primeiro 2-ciclo, como em I_2 , e multiplicamos por uma combinação de 3 elementos tomados 2 a 2 para o segundo 2-ciclo. Isso resulta em 30 possibilidades, porém dividimos por 2 já que os dois ciclos comutam e assim $(a_i a_j)(a_k a_l) = (a_k a_l)(a_i a_j)$;

- $I_4 := \{(a_i a_j a_k a_l) = (a_i a_l)(a_i a_k)(a_i a_j) : i \neq j \neq k \neq l; i, j, k, l \in \bar{5}\}$. São 30 *elementos ímpares de ordem 4*. Fizemos um arranjo simples de 5 elementos tomados 4 a 4 que é 120 e dividimos por 4 já que $(a_i a_j a_k a_l) = (a_j a_k a_l a_i) = (a_k a_l a_i a_j) = (a_l a_i a_j a_k)$;

- $I_{3,2} := \{(a_i a_j a_k)(a_l a_m) = (a_i a_k)(a_i a_j)(a_l a_m) : i \neq j \neq k \neq l \neq m; i, j, k, l, m \in \bar{5}\}$. São 20 *elementos ímpares de ordem 6*. Foi feito um arranjo de 5 elementos tomados 3 a 3 e dividido por 3 igual ao caso P_3 , pois para cada escolha de um 3-ciclo, o 2-ciclo está automaticamente escolhido e não importa a ordem que seus elementos são colocados;

- $P_5 := \{(a_i a_j a_k a_l a_m) = (a_i a_m)(a_i a_l)(a_i a_k)(a_i a_j) : i \neq j \neq k \neq l \neq m; i, j, k, l, m \in \bar{5}\}$. São 24 *elementos pares de ordem 5*. Fizemos um arranjo de 5 elementos tomados 5 a 5 e dividimos por 5, pois $(a_i a_j a_k a_l a_m) = (a_j a_k a_l a_m a_i) = (a_k a_l a_m a_i a_j) = (a_l a_m a_i a_j a_k) = (a_m a_i a_j a_k a_l)$.

De fato, $o(A_5) = 60$ e A_5 pode ser representado da seguinte forma.

$$A_5 = \{e, P_3, P_{2,2}, P_5\}.$$

Em que a quantidade de elementos em P_3 é 20, em $P_{2,2}$ é 15 e em P_5 é 24.

Veja que acrescentando a identidade de G , temos que $P_{2,2}$ é a união de 15 subgrupos cíclicos de A_5 , P_3 é a união de 10 subgrupos cíclicos de A_5 e P_5 é a união de 6 subgrupos cíclicos de A_5 , mais do que isso, A_5 é a união desses 31 subgrupos cíclicos.

Essa descrição será importante para fazer a identificação do A_5 com o grupo de simetrias que preservam orientação do dodecaedro regular, desenvolvida no Capítulo 3.

1.5 Ações de grupos

Definição 17 (Ação de grupo). Uma ação de um grupo G em um conjunto X é uma aplicação $\alpha : G \times X \rightarrow X$ satisfazendo:

- (i) Tem-se que $\alpha(Id_G, x) = x$ para cada $x \in X$;
- (ii) Para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$, tem-se que $\alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$.

Para simplificação, vamos utilizar a notação $g \cdot x$ para $\alpha(g, x)$. Com essa notação as propriedades se tornam:

- (i) $Id_G \cdot x = x, \forall x \in X$;
- (ii) Para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$, $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Vejamos alguns exemplos.

(1) Se V é um espaço vetorial sobre um corpo K . Então, considerando o grupo multiplicativo (K^*, \cdot) , temos que K^* age em V pelo produto do espaço vetorial V sobre o corpo K .

$$\begin{aligned} \cdot : K^* \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v. \end{aligned}$$

pois satisfaz as propriedades (i) e (ii),

- (i) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$;
- (ii) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$.

(2) A operação de qualquer grupo G é uma ação desse grupo nele mesmo.

(3) O grupo das matrizes invertíveis $GL(n, \mathbb{R})$ age em \mathbb{R}^n pela ação

$$\begin{aligned} \cdot : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, x) &\mapsto Ax. \end{aligned}$$

De fato,

- (i) $I_{n \times n} \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) $AB \cdot x = A \cdot (B \cdot x), \forall A, B \in GL(n, \mathbb{R}^n)$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(4) Seja H um subgrupo de um grupo G . Então, G age no conjunto G/H pela ação

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G/H &\rightarrow G/H \\ (g, tH) &\mapsto (gt)H. \end{aligned}$$

Primeiro temos que essa aplicação está bem definida pois se $t_1H = t_2H$, temos que existe $h \in H$ tal que $t_1 = t_2h$ daí $gt_1 = gt_2h$, ou seja, $(gt_2)^{-1}(gt_1) = h \in H$ logo $(gt_1)H = (gt_2)H$. Além disso \cdot satisfaz:

- (i) $Id_G \cdot tH = (Id_G t)H = tH, \forall tH \in G/H$;

$$(ii) (gs) \cdot tH = ((gs)t)H = (g(st))H = g \cdot (st)H, \forall g, s \in G \text{ e } \forall tH \in G/H.$$

Essa ação recebe o nome de translação de classe lateral.

(5) *Ação por conjugação*: considere um grupo G e a aplicação

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto gxg^{-1}. \end{aligned}$$

Essa aplicação satisfaz:

$$(i) Id_G \cdot x = Id_G x Id_G^{-1} = x, \forall x \in G;$$

$$(ii) g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (g_2 x g_2^{-1}) = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) x (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) \cdot x, \forall g_1, g_2, x \in G.$$

Que por isso é uma ação de G nele mesmo.

(6) Seja X um conjunto qualquer, veja que o grupo $Per(X) := E_X$ das bijeções de X em X com a operação de composição age em X pela seguinte ação:

$$\begin{aligned} \cdot : E_X \times X &\rightarrow X \\ (\sigma, x) &\mapsto \sigma(x). \end{aligned}$$

De fato, essa aplicação satisfaz as propriedades necessárias.

$$(i) e_{E_X} \cdot x = e_{E_X}(x) = x, \forall x \in X;$$

$$(ii) \sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot x) = \sigma_1 \cdot (\sigma_2(x)) = \sigma_1(\sigma_2(x)) = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(x) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \cdot x, \forall \sigma_1, \sigma_2 \in E_X \text{ e } \forall x \in X.$$

Essa ação é muitas vezes chamada de *ação de representação*.

Definição 18 (Órbita de um elemento por uma ação). Seja G um grupo agindo em um conjunto X . Para cada $x \in X$, a *órbita de x* é o conjunto

$$\vartheta(x) := \{g \cdot x : \forall g \in G\} \subset X.$$

Vejamos como são as órbitas nos exemplos apresentados anteriormente.

(1) Se $v \neq 0 \in V$, $\vartheta(v) = \{\alpha v : \forall \alpha \in K^*\}$ é uma reta contendo o vetor v .

(2) Nesse caso como a ação é a operação do grupo temos que $\forall x \in G$, $\vartheta(x) = G$.

(3) Seja $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, temos que $\vartheta(x) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$. Por outro lado, tome $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ vamos mostrar que y está na órbita de x , para isso construa duas bases $B = \{x, x_2, \dots, x_n\}$ e $B' = \{y, y_2, \dots, y_n\}$ de \mathbb{R}^n . Assim, defina $A := [B][B']^{-1}$, em que $[B]$ é a matriz cujas colunas são os elementos da base B e $[B']^{-1}$ é a matriz inversa da matriz cujas colunas são os elementos da base B' . Logo, $A[B'] = [B]$ e daí temos que $Ay = x$, como queríamos. Daí, $\vartheta(x) = \mathbb{R}^n - \{0\}$.

(4) Seja $tH \in G/H$, então $\vartheta(tH) = G/H$.

(5) Para cada $x \in G$, teremos $\vartheta(x) = \{gxg^{-1} : \forall g \in G\}$ todos os conjugados de x .

(6) Note que $x \in X$, $\vartheta(x) = X$. De fato, seja $y \in X$, existe $\phi \in E_X$, com

$$\phi(z) = \begin{cases} y & \text{se } z = x \\ x & \text{se } z = y \\ z & \text{se } z \neq x, y \end{cases}$$

Ou seja, $\phi(x) = y$ garantindo que y está na órbita de x .

O próximo resultado garante que podemos olhar para as órbitas dos elementos de um conjunto por uma ação de um grupo como classes de equivalência.

Proposição 14. *Seja G um grupo agindo em um conjunto X . Em X defina a seguinte relação $x \sim_G y \Leftrightarrow y = g \cdot x$, para algum $g \in G$, ou seja, x é equivalente a y se, e só se, x está na órbita de y . Temos que*

(i) \sim_G é uma relação de equivalência;

(ii) $\vartheta(x) = \{y \in X : y \sim_G x\}$ é a classe de equivalência de x , $\forall x \in X$;

(iii) $\forall x, y \in G$, temos que $x \sim_G y \Leftrightarrow \vartheta(x) = \vartheta(y)$. Denotamos o conjunto de todas as classes de equivalência de X por $X/G := X / \sim_G = \{\vartheta(x) : x \in X\}$.

Demonstração. Basta mostrar o item (i) pois os outros seguem imediatamente.

(i) Note que, como $Id_G \in G$, para todo $x \in X$, $Id_G \cdot x = x$, daí $x \sim_G x$. Tome $x, y \in X$, tal que $x \sim_G y$, então $y = g \cdot x$ para algum $g \in G$, mas daí $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = Id_G \cdot x = x$, para $g^{-1} \in G$, logo $y \sim_G x$. Por fim, suponha que $x \sim_G y$ e $y \sim_G z$, $x, y, z \in X$, daí $y = g_1 \cdot x$ e $z = g_2 \cdot y$, $g_1, g_2 \in G$, assim $z = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2g_1) \cdot x$ com $g_2g_1 \in G$, logo $x \sim_G z$. \square

Corolário 8. *Seja G um grupo agindo em um conjunto X . Então,*

(i) $X = \bigcup_{x \in X} \vartheta(x)$;

(ii) $\forall x, y \in X$ então ou $\vartheta(x) = \vartheta(y)$ ou $\vartheta(x) \cap \vartheta(y) = \emptyset$. Essas duas afirmações são reduzidas a uma única:

(iii) $X = \amalg_{x \in X} \vartheta(x)$, em que \amalg simboliza a união disjunta.

Os demais conceitos da teoria de ações de grupos importantes para o desenvolvimento do trabalho serão apresentados quando necessários ao longo do texto.

Capítulo 2

Espaços topológicos e a esfera tridimensional S^3

Para fundamentar o questionamento de Poincaré, motivação para esse trabalho, precisamos primeiro entender o que é a esfera tridimensional S^3 , uma variedade tridimensional que pode ser construída e observada de diversas formas, como mostra o ebook [CARVALHO e SIEJAKOWSKI, 2021](#). Por isso, na Seção 2.1, baseados nessa referência, apresentamos a esfera S^3 e também uma forma conveniente e útil de enxergar seus elementos.

Por conseguinte, observamos que a motivação central para essa pergunta é uma questão fundamental no estudo da topologia - decidir se espaços topológicos são ou não topologicamente equivalentes. A equivalência topológica entre os espaços é definida pela existência de um homeomorfismo entre eles.

Definição 19. Um homeomorfismo entre espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) é uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ contínua, biunívoca cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua. Se um tal homeomorfismo existe, dizemos que os espaços X e Y são homeomorfos e denotamos por $X \cong Y$.

Dessa forma, para garantir que espaços topológicos são homeomorfos basta exibir um homeomorfismo entre eles, porém há casos em que construir um homeomorfismo pode ser difícil e por isso nem sempre é o caminho ideal. Nesse sentido, observamos que a teoria de topologia busca construir resultados que garantam o homeomorfismo sem que seja necessário exibi-lo explicitamente. Especificamente, na Seção 2.2 mostramos algumas formas de construir e identificar espaços topológicos homeomorfos, com apoio dos livros [MASSEY, 1967](#) e [LEE, 2010](#).

Por outro lado, garantir que espaços topológicos não são homeomorfos pode ser ainda mais difícil, pois é preciso mostrar que não existe um homeomorfismo entre eles. Pensando nisso, a topologia algébrica, aqui estudada através dos livros [MASSEY, 1967](#) e [HATCHER, 2001](#), constrói invariantes topológicos, que são propriedades preservadas por homeomorfismo, isto é, se dois espaços topológicos são homeomorfos e um deles satisfaz uma dessas propriedades o outro também deve satisfazer. Assim, devido a importância dos invariantes topológicos para encontrar espaços topologicamente diferentes discorreremos na Seção 2.3 um pouco mais sobre essas importantes ferramentas. De forma especial, apresentamos

dois invariantes, que são provavelmente os mais antigos invariantes algébricos conhecidos, o Grupo Fundamental, desenvolvido na Seção 2.4, acompanhado da descrição, na Seção 2.5, desse invariante para as esferas e em especial para a 3-esfera, e os grupos de homologia, discutidos na Seção 2.6, com apoio do livro LIMA, 2009 no cálculo desses invariantes para as esferas.

A partir do desenvolvimento desse capítulo tivemos uma boa ideia a cerca do que queria Henri Poincaré ao fazer a pergunta que motivou a construção desse trabalho.

2.1 A esfera tridimensional S^3

A 3-esfera S^3 , como dito anteriormente, é um espaço tridimensional que pode ser visualizado de diversas formas. A definição mais simples e mais usual é a generalização da definição da esfera bi-dimensional S^2 apresentada a seguir.

Definição 20. Definimos a esfera tridimensional como

$$S^3 := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Assim, vemos que a 3-esfera está contida no espaço \mathbb{R}^4 e por isso consideramos em S^3 a topologia de subespaço induzida pela topologia usual de \mathbb{R}^4 , tornando a um espaço topológico.

Porém como sua visualização não é muito intuitiva costuma-se estudar e identificar a 3-esfera a partir de outras teorias e objetos matemáticos a fim de melhor entendê-la.

Nesse trabalho identificaremos a 3-esfera S^3 com o grupo dos quatérnios unitários. Essa identificação é importante para a construção que faremos no Capítulo 3 facilitando outras identificações.

Para mostrar essa relação vamos desenvolver um pouco da teoria dos quatérnios.

Definição 21. O conjunto dos quatérnios é uma álgebra associativa definida como $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}; i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j\}$.

Isto é, o conjunto dos quatérnios é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , com as seguintes operações:

$$(i) \quad h + h' = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \forall h, h' \in \mathbb{H};$$

$$(ii) \quad \lambda q = \lambda(a + bi + cj + dk) = \lambda a + (\lambda b)i + (\lambda c)j + (\lambda d)k, \forall q \in \mathbb{H} \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

E também \mathbb{H} é um grupo com a operação de multiplicação não comutativa de vetores definida como

$$(iii) \quad hh' = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - d_1c_2)i + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1d_2 - d_1b_2)k, \forall h, h' \in \mathbb{H}.$$

Tal que todas as operações definidas em \mathbb{H} são compatíveis, isto é, cada operação é distributiva sobre as outras.

Definimos, a seguir, algumas outras operações importantes relacionadas aos quatérnios.

Definição 22. Sejam $h = a + bi + cj + dk$, $h' = a' + b'i + c'j + d'k \in \mathbb{H}$. Definimos,

- (i) A conjugação de h é dada por $h^* = a - bi - cj - dk$;
- (ii) O produto interno entre h e h' é $\langle h, h' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$;
- (iii) A norma de h é $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{h^*h} = \sqrt{hh^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Algumas propriedades sobre os quatérnios, necessárias para o desenvolvimento do trabalho e simples de serem verificadas, foram listadas a seguir.

Proposição 15. (i) O elemento $1 \in \mathbb{H}$ é o neutro multiplicativo dos quatérnios;

(ii) Todo quatérnio real $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ comuta com todos os quatérnios pela operação de multiplicação, isto é, $ah = ha, \forall a \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{H}$. Assim o conjunto dos quatérnios reais é o centro de \mathbb{H} ;

(iii) O inverso multiplicativo de $h = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ tem a seguinte forma,

$$h^{-1} = (a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk) = \frac{h^*}{\|h\|^2}.$$

(iv) $\|\alpha h\| = |\alpha| \|h\|$ e $\|hh'\| = \|h\| \|h'\|, \forall h, h' \in \mathbb{H}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Quatérnios unitários são os quatérnios que tem norma 1, ou seja, elementos que satisfazem $h \in \mathbb{H}, \|h\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1$, denotaremos o espaço dos quatérnios unitários por \mathbb{H}_1 .

Veja que o subconjunto dos quatérnios unitários é um subgrupo de \mathbb{H} pelas propriedades (iii) e (iv).

Além disso, como os quatérnios podem ser identificados com o \mathbb{R}^4 , isto é, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \leftrightarrow a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, então os quatérnios podem ser vistos como um espaço topológico com a topologia usual de \mathbb{R}^4 e a 3-esfera S^3 pode ser interpretada como o grupo dos quatérnios unitários \mathbb{H}_1 com a operação de multiplicação de quatérnios.

Quatérnios que tem $a = 0$, isto é, são da forma $bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, são denominamos *quatérnios puros*. O espaço dos quatérnios puros é denotado por $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$. Embora cada quatérnio possa ser visto como um vetor em um espaço vetorial quadridimensional, é comum referir-se a parte pura dos quatérnios ($bi + cj + dk \in \mathbb{H}$) como vetores em um espaço tridimensional ($(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$). Com essa convenção, um elemento em $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ é o mesmo que um vetor do espaço vetorial \mathbb{R}^3 .

Veja que a soma de quatérnios puros é um quatérnio puro, mas a multiplicação de $u = b_1i + c_1j + d_1k$ e $v = b_2i + c_2j + d_2k$, quatérnios puros quaisquer, não é um quatérnio

puro e é dada pela seguinte fórmula mágica.

$$\begin{aligned} uv &= -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)i - (b_1d_2 - d_1b_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k \\ &= -\langle u, v \rangle + u \times v. \end{aligned}$$

Em que $\langle u, v \rangle$ é o produto escalar canônico de \mathbb{R}^3 e $u \times v$ é o produto vetorial entre u e v considerando i, j e k as 3 coordenadas do espaço tridimensional ao qual o conjunto dos quatérnios puros é identificado.

Daí temos que uv é um quatérnio puro se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$, isto é se u e v forem ortogonais. Por outro lado uv é real se, e somente se, $u \times v = 0$, ou seja, se u e v tem a mesma direção e portanto são linearmente dependentes. Em particular, um quatérnio puro unitário satisfaz o seguinte,

$$u^2 = -\langle u, u \rangle = -\|u\|^2 = -1.$$

Assim, qualquer quatérnio puro unitário u satisfaz $u^2 = -1$. Mais que isso, u um quatérnio puro é unitário se, e somente se, $u^2 = -1$.

Teorema 13. $h \in \mathbb{H}$ é um quatérnio unitário se, e somente se, $h = \cos(\theta) + u \sin(\theta)$, para um ângulo θ e u um quatérnio unitário puro.

Demonstração. (\Rightarrow) Se $h = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_1$, podemos escrever $\cos(\theta) = a$, $u = \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$ e $\sin(\theta) = \sqrt{b^2+c^2+d^2}$. Veja que, quando $h = \pm 1 \in \mathbb{H}_1$, o resultado ainda é válido, pois, nesse caso, $\cos(\theta) = \pm 1$ que implica $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ e, então, $\sin(\theta) = 0$, porém nesse caso u não está definido.

(\Leftarrow) De fato, para todo $h = \cos(\theta) + u \sin(\theta)$, temos que

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \|\cos(\theta) + u \sin(\theta)\|^2 \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)(b^2 + c^2 + d^2) \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \end{aligned}$$

Então, $\|h\| = 1$. □

Uma observação interessante, advinda desse resultado, é que podemos considerar o espaço $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ como o espaço imaginário ortogonal ao espaço real, como mostra a Figura 2.1.

Em síntese, todo elemento $x \in S^3$ pode ser escrito da forma $x = \cos(\theta) + u \sin(\theta) \in \mathbb{H}_1$, em que u é um quatérnio unitário puro, que não está definido somente quando $x = \pm 1$. Além disso, S^3 é um grupo, desde que visto como o grupo dos quatérnios unitários com a operação de multiplicação de quatérnios.

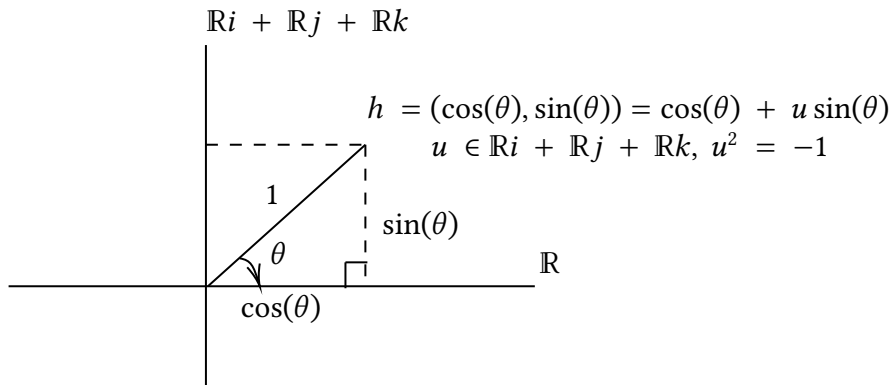


Figura 2.1: Um quaternião unitário escrito com uma parte real e uma parte imaginária.

2.2 Topologia quociente

Seja X um espaço topológico, Y um conjunto e $\pi : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetiva. Com o objetivo de induzir em Y a "melhor" topologia possível, fazemos a seguinte definição.

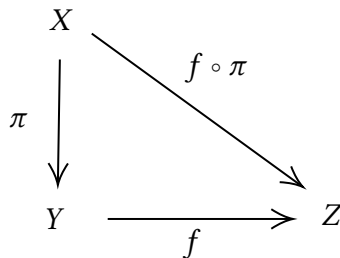
Definição 23. A topologia quociente em Y induzida por $\pi : X \rightarrow Y$ é a maior topologia tal que π é contínua. Ou seja, $U \subset Y$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U) \subset X$ é aberto. Nesse caso, π é denominada aplicação quociente.

Na prática temos que dada uma relação de equivalência \sim em X [$R \subset X \times X; (x, y) \in R \Leftrightarrow x \sim y$], $Y = X/\sim$ e daí

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X/\sim \\ x &\mapsto \pi(x) = [x]. \end{aligned}$$

É sobrejetiva e satisfaz $x \sim x' \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(x')$.

Teorema 14 (Propriedade universal). Seja $Y = X/\sim$ e $f : Y \rightarrow Z$ então f é contínua se, e somente se, $f \circ \pi : X \rightarrow Z$ é contínua.



Em particular, o conjunto das funções contínuas $C(X/\sim, Z)$ está em bijeção com o conjunto das funções $\{\psi \in C(X, Z) : x \sim x' \Rightarrow \psi(x) = \psi(x')\}$, isto é, existe uma aplicação bijetiva γ_π tal que:

$$\begin{aligned} \gamma_\pi : C(X/\sim, Z) &\rightarrow C(X, Z) \\ f([x]) &\mapsto \psi(x) := (f \circ \pi)(x). \end{aligned}$$

Muitos exemplos de espaços topológicos com a topologia quociente vêm de ações de grupos. Se G é um grupo agindo em X um espaço topológico, induzimos em $X/G = X/\sim$ a topologia quociente dada pela relação $x \sim x' \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $x = gx'$, ou seja, a classe de equivalência de x é a órbita de x pela ação de G em X .

A topologia quociente preserva propriedades como conexidade e compacidade, mas uma propriedade de espaços topológicos importante para esse trabalho que ela não preserva é a seguinte.

Definição 24. Um espaço topológico (X, τ) é Hausdorff se quaisquer dois pontos distintos pertencentes a ele têm vizinhanças disjuntas, isto é, dados $x, y \in X$, $x \neq y$, existem $x \in V_x$ e $y \in V_y$, $V_x, V_y \subset X$ abertos tais que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Por exemplo, se $X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ com a relação $(x, 1) \sim (x, -1)$ se $x \neq 0$ temos que X é Hausdorff mas X/\sim não é Hausdorff. No Capítulo 3 veremos um caso em que a propriedade Hausdorff é preservada pelo quociente.

A partir da propriedade universal para espaços quocientes o seguinte teorema nos garante a identificação de espaços topológicos isomorfos.

Teorema 15 (Teorema do isomorfismo para espaços topológicos). *Se X é compacto, Z é Hausdorff e $\psi : X \rightarrow Z$ é contínua então a imagem de ψ é homeomorfa (\cong) a X/\sim , em que $x \sim x' \Leftrightarrow \psi(x) = \psi(x')$. Em particular, se ψ é sobrejetiva temos que $Z \cong X/\sim$.*

Esse Teorema é extremamente útil uma vez que partimos de espaços topológicos Hausdorff que podem ser um tanto difíceis de visualizar e o identificamos com quocientes de espaços topológicos compactos, muitas vezes facilitando seu entendimento e visualização.

Vamos mostrar alguns exemplos e apresentar alguns conceitos interessantes relacionados a eles, porém nem todos os conceitos serão estritamente necessários para o desenvolvimento teórico das próximas seções e do próximo capítulo.

(1) Seja $I = [0, 1]$, temos que $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cong I/\sim$ sendo $0 \sim 1$. Em que $\psi : I \rightarrow S^1$, $\psi(t) := e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ nos garante o isomorfismo pois é uma aplicação contínua sobrejetiva entre I compacto e S^1 Hausdorff.

(2) No caso do 2-toro temos que $\mathbb{T}^2 \cong (I \times I)/\sim$ em que \sim é a relação $(0, t) \sim (1, t)$ e $(s, 0) \sim (s, 1)$, como mostrado na Figura 2.2.

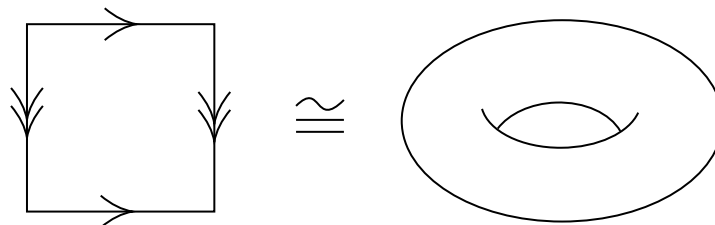


Figura 2.2: O toro \mathbb{T}^2 .

O toro pode ser interpretado também por $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$, em que $f : I \times I \rightarrow S^1 \times S^1$, $f(s, t) = (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$ é a aplicação contínua sobrejetiva que garante o isomorfismo.

Uma terceira descrição do toro é dada pela ação de (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) em (\mathbb{R}, \mathbb{R}) definida como $(m, n) \cdot (x, y) = (x+m, y+n)$ daí $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2 / \sim$ relação que satisfaz $(x, y) \sim (x+m, y+n)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

(3) A Figura 2.3 mostra um espaço topológico $X = I \times I / \sim$ com a relação definida por $(0, t) \sim (1 - t, 1)$ e $(1, 0) \sim (1, 1 - s)$ que é isomorfo ao cone duplo. O cone duplo é também conhecido como *suspensão de S^1* . De maneira similar, podemos fazer a *suspensão* de qualquer espaço topológico $X : \Sigma(X) = X \times [-1, 1] / \sim$ relação dada por $(x, 1) \sim (y, 1)$ e $(x, -1) \sim (y, -1)$, $\forall x, y \in X$.

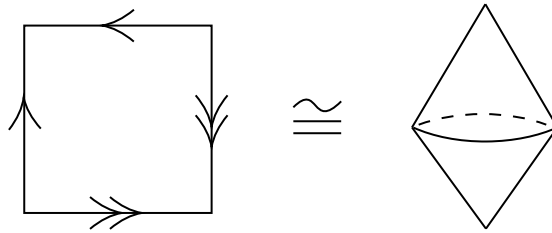


Figura 2.3: Cone duplo.

(4) O espaço projetivo $\mathbb{RP}^n = \{l \subset \mathbb{R}^{n+1} : l \text{ é reta passando pela origem}\} = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$ relação definida como $(x_0, \dots, x_n) \sim \lambda(x_0, \dots, x_n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Em particular, $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 - \{0\}) / \sim$.

Similarmente ao 2-toro, temos algumas formas diferentes de interpretar o 2-espaço projetivo. As que apresentaremos aqui estão mostradas na Figura 2.4.

A primeira forma que apresentamos é a 2-esfera identificando pontos antipodais, isto é, $\mathbb{RP}^2 \cong S^2 / \sim$ cuja relação é $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$, $\forall (x, y, z) \in S^2$. A segunda forma é $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{D}^2 / \sim$, $\mathbb{D}^2 = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| \leq 1\}$ e por fim, $\mathbb{RP}^2 \cong I \times I / \sim$ cuja relação é $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ e $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$. De modo geral o n -espaço projetivo pode ser descrito por identificações análogas, a mais utilizada nesse trabalho é a seguinte $\mathbb{RP}^n \cong S^n / \sim$ cuja relação é $(x_1, \dots, x_n) \sim (-x_1, \dots, -x_n)$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in S^n$.

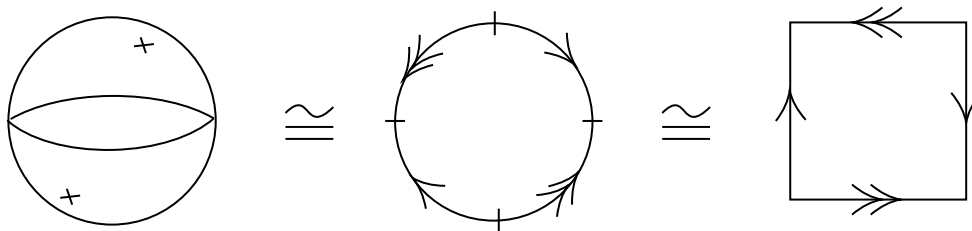


Figura 2.4: Interpretações do 2-espaço projetivo.

Alguns exemplos de espaços topológicos com a topologia quociente podem ser obtidos se tivermos um subconjunto $A \subset X$ espaço topológico e tomarmos o quociente $X/A := X / \sim$ pela relação $x \sim x' \Leftrightarrow x, x' \in A$.

(1) Se $\mathbb{D}^n = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| \leq 1\}$ e $\delta\mathbb{D}^n = S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$ então $\mathbb{D}^n / \delta\mathbb{D}^n = S^n$, ou seja, tomando o disco n dimensional e identificando seu bordo em um único ponto construímos a esfera $n + 1$ dimensional.

(2) Cone sobre um espaço topológico X : tome $I = [0, 1]$ e daí $C(X) = X \times I / X \times \{1\} = X \times I / \sim$. Em particular, $C(S^{n-1}) \cong \mathbb{D}^n$, pela construção é fácil ver que esses objetos são isomorfismos, mas vamos escrever o homeomorfismo explícito que garante isso.

Sejam

$$\pi : S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1} \times I / S^{n-1} \times \{1\} = C(S^{n-1});$$

$$\begin{aligned} f : S^{n-1} \times I &\rightarrow \mathbb{D}^n \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) = (1 - t)x. \end{aligned}$$

São contínuas e induzem uma função contínua $\bar{f} := f \circ \pi^{-1} : C(S^{n-1}) \rightarrow \mathbb{D}^n$, que é sobrejetiva pois f é sobrejetiva e é injetiva pois $f(x, t) = f(x', t')$ implica que $(x, t) \sim (x', t')$ isto é, $\bar{f}([x, t]) = \bar{f}([x', t']) \rightarrow [x, t] = [x', t']$. Veja que a suspensão sobre X também pode ser vista como $\Sigma(X) = C(X) / X \times \{0\} = C(X) / \sim$. Uma observação porém é que $C(\mathbb{T}^2)$ e $\Sigma(\mathbb{T}^2)$ não são variedades topológicas apesar de \mathbb{T}^2 ser.

Outra construção é dada da seguinte forma: sejam X e Y espaços topológicos, $A \subset X$ um subespaço e $f : A \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Definimos $X \cup_f Y = (X \amalg Y) / \sim$, relação que satisfaz $a \sim f(a)$, isto é, estamos unindo X com Y através de A por uma função contínua f .

O *bi-toro* é um exemplo de espaço topológico construído através de dois toros \mathbb{T}^2 da seguinte forma: tome $f : \partial \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{T}^2 \rightarrow \partial \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{T}^2$ contínua que pode inclusive ser a identidade, daí o bi-toro é $(\mathbb{T}^2 - \mathring{\mathbb{D}}^2) \cup_f (\mathbb{T}^2 - \mathring{\mathbb{D}}^2) = (\mathbb{T}^2 - \mathring{\mathbb{D}}^2) \amalg (\mathbb{T}^2 - \mathring{\mathbb{D}}^2) / \sim$, em que $\mathring{\mathbb{D}}^2$ é o disco aberto de dimensão 2, como mostrado na Figura 2.5.

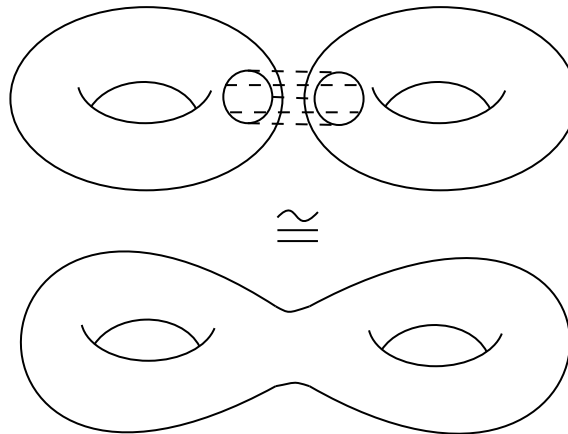


Figura 2.5: Construção do bi-toro.

Todos os exemplos aqui apresentados são exemplos de variedades topológicas, vamos então definir o que são variedades topológicas para generalizar esse último conceito.

Definição 25. Uma n -variedade topológica é um espaço topológico X localmente compacto e Hausdorff que é localmente homeomorfo ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n , isto é, para cada ponto de X existe um homeomorfismo entre uma vizinhança desse ponto e um aberto do \mathbb{R}^n .

Em geral, se temos M e N duas variedades de dimensão n . A soma conexa de M e N é dada por $M \# N = (M - \mathring{D}^n) \cup_f (N - \mathring{D}^n) = (M - \mathring{D}^n) \amalg (N - \mathring{D}^n) / \sim$, em que \mathring{D}^n é o disco aberto n -dimensional.

Note que, $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{S}^2 = \mathbb{T}^2$ e, em geral, $M^n \# \mathbb{S}^2 = M^n$. Além disso, a Figura 2.6, mostra que a garrafa de Klein é homeomorfa a soma conexa de dois espaços projetivos \mathbb{RP}^2 .

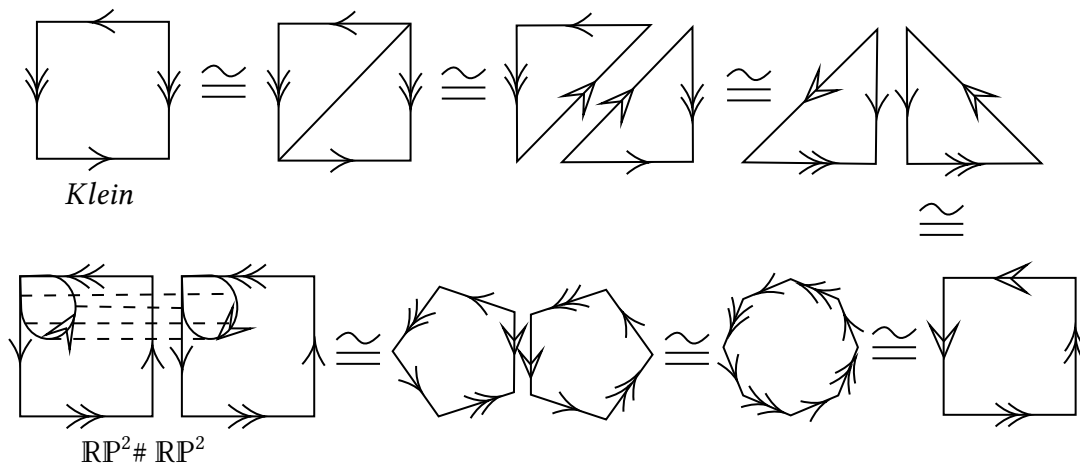


Figura 2.6: A Garrafa de Klein como a soma conexa de espaços projetivos.

Nessa seção, apresentamos algumas formas de construir espaços topológicos quocientes e identificar espaços homeomorfos. Nas seguintes seções, estudaremos sobre alguns objetos algébricos que nos permitem identificar espaços que não são homeomorfos.

2.3 Invariantes topológicos

Talvez seja exagerado tentar classificar todos os espaços topológicos a menos de homeomorfismo, mas podemos então questionar se dois espaços dados são ou não homeomorfos.

Se dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos, $X \cong Y$, é possível encontrar explicitamente aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ contínuas tais que $(f \circ g)(y) = y$ e $(g \circ f)(x) = x$. Além disso, apresentamos dois métodos usuais para garantir que dois espaços são homeomorfos:

(i) Temos o homeomorfismo entre X e Y se os comparamos com um terceiro espaço topológico Z satisfazendo $X \cong Z$ e $Y \cong Z$;

(ii) Também podemos considerar o homeomorfismo garantido pelo teorema que diz que, se (X, \mathbb{T}_X) é compacto, (Y, \mathbb{T}_Y) é Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção contínua então f é um homeomorfismo.

Porém se não encontramos um homeomorfismo explícito entre X e Y como garantimos que esses espaços não são homeomorfos?

Essa é a pergunta central que motiva os estudos da topologia algébrica e observa-se através dela que os invariantes topológicos são ferramentas essenciais para garantir que espaços topológicos não são homeomorfos.

Definição 26. Os invariantes topológicos são propriedades de espaços topológicos que são preservadas por homeomorfismo.

Conexidade (a quantidade de componentes conexas), compacidade e propriedade Hausdorff são alguns exemplos de invariantes. Veja que, devido ao fato de compacidade ser um invariante, S^1 não é homeomorfo a $(0, 1]$, pois S^1 é compacto e $(0, 1]$ não é compacto. Por outro lado, completude em espaços métricos é uma propriedade que não é um invariante topológico, pois não é preservada por homeomorfismos.

Uma forma de verificar se espaços topológicos não são homeomorfos é retirar um ponto de cada um dos dois espaços e analisar os novos espaços. Esse truque é garantido pela seguinte proposição.

Proposição 16. Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo e $x \in X$ então $f|_{X-\{x\}} : X - \{x\} \rightarrow Y - \{f(x)\}$ é homeomorfismo.

Demonstração. Como f é bijetiva, é tirado um único elemento de X e seu correspondente em Y , então $f|_{X-\{x\}}$ é bijetiva. Como $Y - \{f(x)\} \subset Y$, então um aberto de $Y - \{f(x)\}$ é da forma $(Y - f(x)) \cap A$, em que $A \overset{\circ}{\subset} Y$ (por $\overset{\circ}{\subset}$ queremos dizer subconjunto aberto), daí

$$\begin{aligned} f|_{X-\{x\}}^{-1}((Y - f(x)) \cap A) &= f|_{X-\{x\}}^{-1}(Y - \{f(x)\}) \cap f|_{X-\{x\}}^{-1}(A) \\ &= [X - \{x\}] \cap [f^{-1}(A) - \{x\}] \\ &= [X - \{x\}] \cap f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Isto é, a pré imagem de um aberto de $Y - \{f(x)\}$ é um aberto de $X - \{x\}$ pois $f^{-1}(A)$ é um aberto de X , logo $f|_{X-\{x\}}$ é contínua.

Por um argumento análogo mostra-se que f^{-1} é contínua.

Portanto, $f|_{X-\{x\}}$ é um homeomorfismo. □

Com respeito ao último resultado, veja que $[0, 1]$ não é homeomorfo a S^1 , pois $[0, 1] - \{1/2\}$ tem duas componentes conexas e $S^1 - \{p\}$, $p \in S$ é conexo. Pelo mesmo motivo \mathbb{R}^2 não é homeomorfo a \mathbb{R} .

Vamos então apresentar os invariantes topológicos de maior interesse para esse trabalho.

2.4 Grupo Fundamental

Como dito anteriormente, o Grupo Fundamental é um importante invariante topológico para o desenvolvimento desse trabalho. Para defini-lo vamos primeiro entender o que é uma homotopia e observar algumas construções interessantes dessa teoria.

Definição 27. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma homotopia entre duas funções contínuas $f_0, f_1 : Y \rightarrow X$ é uma aplicação contínua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$, tal que $H_0 := H(\cdot, 0) = f_0$ e $H_1 := H(\cdot, 1) = f_1$.

Veja que, H satisfaz $H_t := H|_{Y \times \{t\}}$, isto é, para $t \in [0, 1]$, $H(y, t) = f_t(y), \forall y \in Y$. Observe ainda que, na definição de homotopia, variando $t \in [0, 1]$ obtemos aplicações que deformam continuamente f_0 em f_1 . Por outro lado, podemos fixar $y \in Y$ e daí teremos $\gamma_y : [0, 1] \rightarrow X$, $\gamma_y(0) = f_0(y) = H(y, 0)$, $\gamma_y(1) = f_1(y) = H(y, 1)$ e $\gamma_y(t) = f_t(y) = H(y, t)$ uma curva em X ligando $f_0(y)$ em $f_1(y)$.

Se existir uma homotopia entre f_0 e f_1 dizemos que essas aplicações são homotópicas e essa relação é denotada por $f_0 \sim f_1$, $f_0 \underset{H}{\sim} f_1$ ou $f_0 \overset{H}{\Rightarrow} f_1$.

Proposição 17. Homotopia é uma relação de equivalência em $C(Y, X)$.

Demonstração. De fato, toda função contínua é homotópica a ela mesma $f \underset{H}{\sim} f$ com $H(y, t) = f(y), \forall t \in [0, 1], \forall y \in Y$.

Se $f, g \in C(Y, X)$ satisfazem $f \underset{H}{\sim} g$ com homotopia $H(y, t)$, sabemos que $H(y, 0) = f(y), \forall y \in Y$ e $H(y, 1) = g(y), \forall y \in Y$ então $g \underset{H}{\sim} f$ e a homotopia é dada por $\bar{H} = H(y, 1 - t)$ que ainda é contínua e vai satisfazer $H(y, 0) = g(y), \forall y \in Y$ e $H(y, 1) = f(y), \forall y \in Y$.

Se por fim temos $f, g, h \in C(Y, X)$ com $f \underset{H}{\sim} g$ e $g \underset{G}{\sim} h$ então $f \underset{H * G}{\sim} h$ cuja homotopia é dada por

$$H * G(y, t) = \begin{cases} H(y, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(y, 2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Essa aplicação percorre cada imagem das funções contínuas com o dobro da velocidade. Veja que $H * G$ está bem definida pois $H(y, 2 \cdot 1/2) = H(y, 1) = g(y) = G(y, 0) = G(y, 2 \cdot 1/2 - 1), \forall y \in Y$, é contínua pelo "Gluing Lemma" e é uma homotopia entre f e h pois $H * G(y, 0) = H(y, 0) = f(y), \forall y \in Y$ e $H * G(y, 1) = G(y, 1) = h(y), \forall y \in Y$. \square

Assim, diremos que duas aplicações contínuas $f, g : Y \rightarrow X$ estão na mesma *classe de homotopia* se elas forem homotópicas. Utilizaremos as notações $[Y, X] = C(Y, X) / \underset{H}{\sim}$ que é o conjunto das classes de equivalência das funções contínuas de Y em X pela relação de equivalência por homotopia e $[f] \in [Y, X]$ é a classe de homotopia da função f .

Vejam os dois exemplos:

(1) Se V é um espaço vetorial (basta ser convexo) então $f, g : Y \rightarrow V$ são sempre homotópicas através da homotopia linear $H(y, t) = (1 - t)f(y) + tg(y)$.

(2) Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e tome $x \in S^n$, definimos o espaço tangente a S^n em x como

$$T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, x \rangle = 0\}.$$

Em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclidiano. Um campo de vetores contínuo em S^n é uma aplicação contínua $V : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $V(x) \in T_x S^n, \forall x \in S^n$.

Proposição 18. *Se existir um campo de vetores em S^n tal que $V(x) \neq 0, \forall x \in S^n$, então $I_{d_{S^n}} \sim A$.*

Demonstração. A homotopia neste caso é dada por

$$H(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x) / \|v(x)\|.$$

□

Se $n = 2k - 1$ (ímpar), temos um campo de vetores dado por $V : S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$, $V(x_1, \dots, x_{2k}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k-1}, x_{2k})$ tal que $V(x) \neq 0, \forall x \in S^{2k-1}$, logo $I_{d_{S^{2k-1}}} \sim A$. Isto é, para toda esfera de dimensão ímpar vale que a aplicação antipodal é homotópica a identidade.

Já no caso da esfera S^{2k} , de dimensão par, teremos que não existe um campo de vetores V de S^{2k} tal que $V(x) \neq 0, \forall x \in S^{2k}$, isto é, para todo campo de vetores V de S^{2k} existe $x \in S^{2k}$ tal que $V(x) = 0$ (esse resultado é popularmente conhecido como teorema da bola cabeluda).

Nosso objetivo é analisar se espaços topológicos têm buracos, quantas componentes conexas possui, entre outras características que facilitam a identificação ou separação entre espaços topológicos. Porém, veja que, a homotopia como apresentamos satisfaz que para qualquer espaço X conexo por caminhos (0-conexo), dois laços quaisquer $\gamma, \eta : I \rightarrow X$ satisfazem $\gamma \sim \eta$. Com isso, não conseguimos separar laços em torno de um buraco de X de laços que não estão ao redor de um buraco de X . Para corrigir esse problema, definimos a homotopia relativa, a qual utilizaremos na definição do Grupo Fundamental.

Definição 28. Sejam $f_0, f_1 : Y \rightarrow X$, $A \subset Y$ um subespaço de Y . Dizemos que existe uma homotopia H entre f_0 e f_1 relativa a A ($f_0 \underset{H}{\sim} f_1$ rel A), se $H : Y \times I \rightarrow X$ satisfaz $H(y, 0) = f_0(y)$, $H(y, 1) = f_1(y)$ e $H(a, t) = f_0(a) = f_1(a), \forall t \in I, \forall a \in A$. Em particular, $f_0(A) = f_1(A)$.

Finalmente, podemos definir o Grupo Fundamental de um espaço topológico pontuado, isto é, um espaço topológico com um ponto fixado.

Definição 29. Seja X um espaço topológico com ponto base x_0 , $I := [0, 1]$ e $\Omega(X, x_0) = \{\alpha : I \rightarrow X : \alpha(0) = x_0 = \alpha(1)\}$. O Grupo Fundamental de (X, x_0) , denotado por $\pi_1(X, x_0)$, é dado por $\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \sim$ em que $[\alpha] = [\alpha'] \leftrightarrow \alpha \sim \alpha'$ rel ∂I , ou seja, $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo composto pelas classes de homotopia das aplicações contínuas $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tais que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, munido com a operação de justaposição.

A operação de justaposição entre classes de homotopia no Grupo Fundamental é dada da seguinte forma: sejam $f : [0, 1] \rightarrow X$ e $g : [0, 1] \rightarrow X \in \Omega(X, x_0)$, ou seja, caminhos contínuos com $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = x_0$ e sejam $[f]$ e $[g]$ as classes de homotopia desses caminhos. Definimos

$$\begin{aligned} * : \pi_1(X) \times \pi_1(X) &\rightarrow \pi_1(X) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f][g] := [f * g]. \end{aligned}$$

Em que, $f * g : [0, 1] \rightarrow X$ é dada por

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t - 1) & , 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A operação justaposição está bem definida nas classes de homotopia de $\pi_1(X, x_0)$, isto é, dados $f \sim_F f'$ rel ∂I e $g \sim_G g'$ rel ∂I , em que $F : I \times I \rightarrow X$, $F(s, 0) = f(s)$, $F(s, 1) = f'(s)$, $\forall s \in I$ e $F(0, t) = F(1, t)$, $\forall t \in I$ e $G : I \times I \rightarrow X$ com $G(s, 0) = g(s)$ e $G(s, 1) = g'(s)$, $\forall s \in I$, além disso, $f'(0) = f'(1) = f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1)$, $F(0, t) = f(0) = f'(0)$, $F(1, t) = f(1) = f'(1)$, $G(0, t) = g(0) = g'(0)$ e $G(1, t) = g(1) = g'(1)$, daí temos que $f * g \sim_{F * G} f' * g'$ rel ∂I em que $F * G : I \times I \rightarrow X$ é dada por

$$F * G(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & , 0 \leq s \leq 1/2; \\ G(2s - 1, t) & , 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

De fato, temos que,

$$F * G(s, 0) = \begin{cases} F(2s, 0) = f(2s) & , 0 \leq s \leq 1/2; \\ G(2s - 1, 0) = g(2s - 1) & , 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} = f * g(s).$$

E também,

$$F * G(s, 1) = \begin{cases} F(2s, 1) = f'(2s) & , 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s - 1, 1) = g'(2s - 1) & , 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = f' * g'(s).$$

Por fim, $F * G$ é contínua pois F e G são contínuas e $F(2 \cdot 1/2, t) = F(1, t) = f(1) = g(0) = G(0, t) = G(2 \cdot 1/2 - 1, t)$.

Teorema 16. *Seja X um espaço topológico. Temos que $\pi_1(X, x_0)$ com a operação de justaposição é um grupo.*

Demonstração. Vamos mostrar que a operação justaposição em π_1 é associativa, tem elemento neutro e que todo elemento tem um elemento inverso.

(i) $\pi_1(X, x_0)$ é associativo, vale que $([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha](\beta[\gamma])$, isto é, se percorrermos α e β com o quádruplo da velocidade e depois percorrermos γ com o dobro da velocidade é homotópico a percorrer α com o dobro da velocidade e β e γ com o quádruplo da velocidade. Isso é intuitivamente claro, mas a homotopia que faz $(\alpha * \beta) * \gamma \underset{H}{\sim} \alpha * (\beta * \gamma)$ é a seguinte

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(4s/(t+1)) & , 0 \leq s \leq (t+1)/4; \\ \beta(4s-t-1) & , (t+1)/4 \leq s \leq (t+2)/4; \\ \gamma((4s-t-2)/(2-t)) & (t+2)/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Homotopia que diminui a velocidade que α é percorrido, mantém β com o quádruplo da velocidade e faz γ aumentar a velocidade gradativamente, como na Figura 2.7.

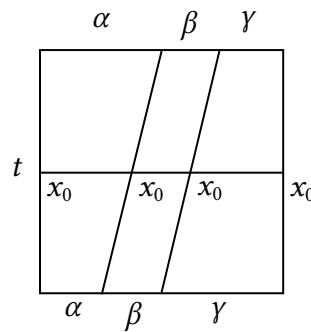


Figura 2.7: Homotopia que garante a associatividade em π_1 .

(ii) A classe de equivalência da aplicação constante em x_0 , c_{x_0} é o elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$, isto é, $(c_{x_0} * \alpha) \sim \alpha$ rel ∂I e $(\alpha * c_{x_0}) \sim \alpha$ rel ∂I . A homotopia do primeiro caso percorre α em $t = 0$, vai aumentando gradativamente a velocidade que percorre α e aumentando proporcionalmente o tempo parado em x_0 até que em $t = 1$, α é percorrido com o dobro da velocidade e a outra metade do tempo é feito c_{x_0} , homotopia representada na Figura 2.8;

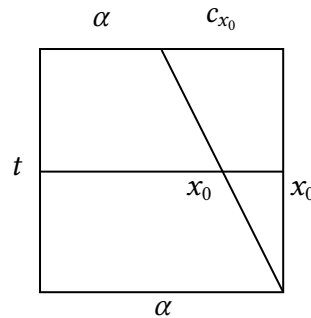


Figura 2.8: Homotopia que garante que a função constante em x_0 é o elemento neutro de π_1 .

(iii) A inversa de qualquer $[\alpha] \in \pi_1$ é $[\bar{\alpha}]$ em que $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$, isto é, $(\alpha * \bar{\alpha}) \sim c_{x_0}$ rel ∂I e $(\bar{\alpha} * \alpha) \sim c_{x_0}$ rel ∂I , onde a homotopia faz inicialmente metade de α e metade de $\bar{\alpha}$, na velocidade inicial delas, retornando ao c_{x_0} e vai diminuindo gradativamente o espaço percorrido em α e $\bar{\alpha}$ até que em $t = 1$ a homotopia fica parada em x_0 , nesse caso a homotopia está representada na Figura 2.9.

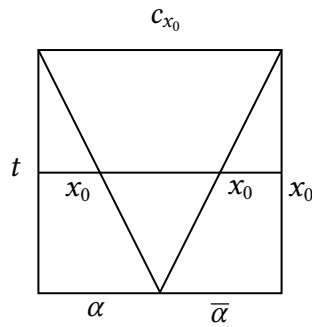


Figura 2.9: Homotopia que garante que todo elemento de π_1 tem inverso em π_1 .

Portanto, $\pi_1(X, x_0)$ é de fato um grupo como queríamos. \square

É natural questionarmos sobre a dependência de $\pi_1(X, x_0)$ na escolha do ponto base $x_0 \in X$. Vejamos então quando esse grupo não depende da escolha do ponto base, a menos de isomorfismo.

Teorema 17. *Existe um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ quaisquer que sejam x_0 e $x_1 \in X$ contidos na mesma componente conexa de X .*

Demonstração. Sejam x_0 e x_1 contidos na mesma componente conexa de X e $h : I \rightarrow X$ o caminho que começa em x_0 e termina em x_1 , com o caminho inverso $h^{-1}(s) = h(1 - s)$ de x_1 para x_0 . Assim, podemos associar a cada laço f baseado em x_1 o laço $h * f * h^{-1}$ baseado em x_0 . Nesse caso, a ordem dos produtos não importa em $\pi_1(X, x_0)$, isto é, fazer $h * (f * h^{-1})$ ou $(h * f) * h^{-1}$, pois os dois casos são homotópicos e por isso pertencem a mesma classe de homotopia.

Então, definimos o mapa *mudança de ponto base* $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ por $\beta_h([f]) = [h * f * h^{-1}]$, em que f é uma homotopia baseada em x_1 e então $h * f * h^{-1}$ é uma homotopia baseada em x_0 .

Vemos que β_h é um homomorfismo pois $\beta_h([f * g]) = [h * f * g * h^{-1}] = [h * f * h^{-1} * h * g * h^{-1}] = [h * f * h^{-1}][h * g * h^{-1}] = \beta_h([f])\beta_h([g])$. Além disso, β_h é um isomorfismo com inversa $\beta_{h^{-1}}$, pois $\beta_h\beta_{h^{-1}}([f]) = \beta_h([h^{-1} * f * h]) = [h * h^{-1} * f * h * h^{-1}] = [f]$. \square

Com isso, concluímos que se X é um espaço conexo, então o grupo $\pi_1(X, x_0)$ não depende da escolha do ponto base x_0 e assim podemos denotar $\pi_1(X, x_0)$ apenas por $\pi_1(X)$.

Nesse momento, já temos bagagem suficiente para calcular o Grupo Fundamental das esferas S^n e em específico, como queríamos, o da esfera S^3 . O faremos na Subseção 2.5.

2.5 O Grupo Fundamental da esfera S^3

Nessa seção vamos descrever os grupos de homotopia das n -esferas, resultados que podem também ser encontrados em [HATCHER, 2001](#).

O caso mais simples e intuitivo é o da esfera S^1 , mais conhecida como círculo. Nesse caso $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, isto é, existe um isomorfismo $f : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1)$ que envia um inteiro n na classe de homotopia do laço $\omega_n(s) = (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns))$, $s \in [0, 1]$, com ponto base $\omega_n(0) = (1, 0) = \omega_n(1)$. Isso significa que pra cada inteiro n temos um elemento de $\pi_1(S^1)$ definido pela quantidade n de voltas que o laço faz em S^1 . Assim, os laços em S^1 relativos a um ponto base são apenas os círculos que se iniciam no ponto base, percorrem todo o S^1 uma quantidade $n \in \mathbb{Z}$ de vezes e ao final retornam ao ponto base, ou seja, $(n + 1)$ é a quantidade de vezes que o laço passa pelo ponto base, percorrendo S^1 sempre com o mesmo sentido. Por outro lado, se temos dois laços com quantidades de voltas diferentes em S^1 , esses dois laços não são homotópicos relativo a um ponto base, isto é, não é possível deformar um laço que faz n voltas em S^1 continuamente em um outro que faz m voltas em S^1 , com $n \neq m$, com ponto base fixado.

O Grupo Fundamental das demais esferas é trivial, ou seja, todo laço em $\Omega(S^n, x_0)$ é homotópico ao laço constante igual a x_0 relativo ao próprio x_0 , isto é, $\pi_1(S^n, x_0)$, $n \geq 2$, tem uma única classe de equivalência, um único elemento que podemos representar por I e que contém todos os laços de $\Omega(S^n, x_0)$. Apresentamos esse resultado no seguinte teorema.

Teorema 18. $\pi_1(S^n) = \{I\}$, $\forall n \geq 2$. Em particular, $\pi_1(S^3) = \{I\}$.

Para fazer a demonstração desse resultado precisamos do seguinte lema.

Lema 3. Se um espaço X é a união de uma coleção de conjuntos abertos conexos por caminhos A_α cada um contendo o ponto base $x_0 \in X$ e se cada interseção $A_\alpha \cap A_\beta$ é conexa por caminhos, então todo laço em X com ponto base x_0 é homotópico a um produto de laços em que cada fator está inteiramente contido em um A_α .

Demonstração. Seja X como na hipótese do lema. Dado um laço $f : I \rightarrow X$ com ponto base x_0 , afirmamos que existe uma partição $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ de I tal que cada subintervalo $[s_{i-1}, s_i]$ tem imagem por f inteiramente contida em um A_α . De fato, como f é contínua, cada $s \in I$ tem uma vizinhança aberta $V_s \subset I$ mapeada por f para algum A_α . Podemos tomar V_s como o intervalo cuja imagem do fecho por f está contida em A_α . Como I é compacto temos que um número finito desses intervalos cobrem I . Os pontos finais deste conjunto finito de intervalos definem a partição desejada de I .

Denote A_α contendo $f([s_{i-1}, s_i])$ por A_i , e seja f_i o caminho obtido por restringir f a $[s_{i-1}, s_i]$. Então f é a composição $f_1 \circ \dots \circ f_m$ com f_i um caminho em A_i . Como nós assumimos que $A_i \cap A_{i+1}$ é conexo por caminhos, podemos escolher um caminho $g_i \in A_i \cap A_{i+1}$ de x_0 até o ponto $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$, a Figura 2.10 ilustra esse procedimento. Consideramos o laço $(f_1 \circ g_1^{-1}) \circ (g_1 \circ f_2 \circ g_2^{-1}) \circ (g_2 \circ f_3 \circ g_3^{-1}) \circ \dots \circ (g_{m-1} \circ f_m)$ que é homotópico a f . Esse laço é uma composição de laços cada um (em parênteses) contido inteiramente em um A_i , como queríamos.

□

Demonstração do Teorema 18. Note que podemos expressar S^n como uma união de dois conjuntos abertos A_1 e A_2 cada um homeomorfo a \mathbb{R}^n tal que $A_1 \cap A_2$ é homeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, por exemplo tomando A_1 e A_2 como os conjuntos abertos complementares de

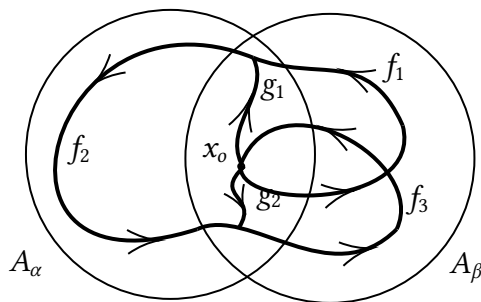


Figura 2.10: Ilustração da demonstração do Lema 3.

dois pontos antipodais de S^n . Escolha um ponto base $x_0 \in A_1 \cap A_2$. Se $n \geq 2$ então $A_1 \cap A_2$ é conexo por caminhos. Assim, pelo Lema 3 temos que todo laço em S^n , com ponto base x_0 , é homotópico a um produto de laços inteiramente contidos em A_1 ou A_2 . Ambos $\pi_1(A_1)$ e $\pi_1(A_2)$ são triviais já que A_1 e A_2 são homeomorfos a \mathbb{R}^n e $\pi_1(\mathbb{R}^n)$ é trivial para todo $n \geq 2$. Então, todo laço em S^n , com ponto base x_0 , é homotópico a x_0 e portanto $\pi_1(S^n) = \{I\}$ para todo $n \geq 2$. \square

Definição 30. Um espaço topológico X é simplesmente conexo se $\pi_1(X) = \{I\}$.

Visto o resultado mostrado anteriormente, juntamente com essa definição, concluímos que a esfera S^3 é uma 3-variedade simplesmente conexa.

2.6 Os grupos de homologia da esfera S^3

Os grupos de homologia são grupos associados a um espaço topológico com o objetivo de realizar um estudo algébrico das propriedades topológicas desse espaço. Esses grupos foram originalmente baseados em ideias de Henri Poincaré (1895) para poliedros e suas triangulações. Posteriormente, generalizou-se o conceito de homologia e ampliou-se seu domínio de aplicação, produzindo uma série de teorias de homologia para espaços arbitrários em uma situação mais complicada que a de triangulação.

Nosso interesse nessa seção é desenvolver a teoria necessária para apresentar os grupos de homologia da esfera S^3 e para nos auxiliar a mostrar que a 3-variedade, que construiremos no Capítulo 3, tem esse mesmo invariante algébrico.

Começaremos então desenvolvendo alguns conceitos da teoria de *Homologia Simplicial*.

Definição 31. Dizemos que um conjunto $\{a_0, \dots, a_r\}$ de pontos em \mathbb{R}^n , com $r \leq (n + 1)$, é *geometricamente independente* se os vetores $(a_1 - a_0), \dots, (a_n - a_0)$ são linearmente independentes.

Equivalentemente, um conjunto $\{a_0, \dots, a_r\}$, como na definição, é geometricamente independente se $\sum_{i=0}^r t_i a_i = 0$ e $\sum_{i=0}^r t_i = 0$ implicar que $t_0 = \dots = t_r = 0$.

Um exemplo de conjunto geometricamente independente em \mathbb{R}^n é o seguinte $\{0, e_1, \dots, e_n\}$ em que e_1, \dots, e_n são os elementos da base canônica de \mathbb{R}^n .

Definição 32. Uma *combinação afim* do conjunto $\{a_0, \dots, a_r\}$, de pontos do \mathbb{R}^n , é um vetor $v = \sum_{i=0}^r t_i a_i \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=0}^r t_i = 1$.

O plano P passando por a_0 e paralelo aos vetores $(a_1 - a_0), \dots, (a_r - a_0)$ é o conjunto de todas as combinações afins de $\{a_0, \dots, a_r\}$, isto é, $P = \{v = \sum_{i=0}^r t_i a_i : t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^r t_i = 1\}$.

Com essa definição, podemos observar que o conjunto $\{a_0, \dots, a_r\}$ é geometricamente independente se, e somente se, cada combinação afim tem seus coeficientes unicamente determinados, ou seja, se $\sum_{i=0}^r t_i a_i = \sum_{i=0}^r s_i a_i$ então $t_i = s_i, i = 0, \dots, r$.

Definição 33. Uma *combinação convexa*, de um conjunto $\{a_0, \dots, a_r\}$ de pontos de \mathbb{R}^n , é uma combinação afim tal que $t_i \geq 0$, isto é, um vetor $v = \sum_{i=0}^r t_i a_i \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=0}^r t_i = 1$ e $t_i \geq 0, i = 0, \dots, r$. A envoltória convexa de $\{a_0, \dots, a_r\}$ é o conjunto de todas as suas combinações convexas.

Com isso, podemos definir o conceito de conjunto n -simplexo.

Definição 34. Seja $\{a_0, \dots, a_r\} \subset \mathbb{R}^n$ geometricamente invariante. O n -simplexo σ gerado por esse conjunto de pontos é a envoltória convexa desse conjunto, ou seja, é o conjunto de todos os pontos da forma $x = \sum_{i=0}^r t_i a_i$, em que $\sum_{i=0}^r t_i = 1$ e $t_i \geq 0, i = 0, \dots, r$.

Nesse caso, chamamos t_i de coordenadas baricêntricas de x .

Definimos a *dimensão de um n -simplexo* como o número n . Além disso, uma *face* de σ é um simplexo gerado por um subconjunto do conjunto gerador de σ . Para cada vértice a_i , a *face oposta* à ele $\sigma_{(i)}$ é o simplexo $(n - 1)$ -dimensional gerado por $\{a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_r\}$.

Veja que, se tomamos o conjunto de um único ponto $\{a_0\}$ em \mathbb{R}^n é claro que ele é geometricamente independente e o 0-simplexo gerado por ele é o próprio ponto $a_0 = 1a_0$.

Tome o conjunto $\{a_0, a_1\}$ de dois pontos de \mathbb{R}^n que também é geometricamente independente quaisquer que sejam a_0 e a_1 . Nesse caso, temos que o 1-simplexo de $\{a_0, a_1\}$ é o conjunto $\{(1 - t)a_0 + ta_1 : t \in [0, 1]\}$, ou seja, todos os pontos do segmento de reta que conecta a_0 e a_1 .

No caso em que tomamos três pontos de \mathbb{R}^n não colineares, isto é, de tal forma que o conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$ seja geometricamente invariante, o 2-simplexo gerado por eles conecta, dois à dois, os três pontos quando o coeficiente do terceiro é zero e preenche todo o triângulo quando os três coeficientes variam entre 0 e 1.

Quando tomamos o conjunto $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ de pontos não coplanares de \mathbb{R}^n , como uma generalização dos casos anteriores, o 3-simplexo gerado é um tetraedro cujos vértices são os elementos desse conjunto. Até quatro pontos de \mathbb{R}^n é o máximo que conseguimos facilmente visualizar geometricamente os n -simplexos.

Veja que, para todo n -simplexo existem $(n + 1)!$ formas de ordenar os vértices desse simplexo. Vamos, através da seguinte definição, utilizar essas ordenações para definir uma orientação em um simplexo.

Definição 35. Duas ordenações de vértices de um simplexo são equivalentes se diferem por uma permutação par. Um simplexo σ é orientado quando especificamos uma ordenação de vértices $\sigma = [a_0, \dots, a_r]$. O simplexo $-\sigma$ é o simplexo σ com a orientação oposta.

A orientação de σ induz a seguinte orientação nas faces opostas dos vértices a_0 e a_i de sigma $\sigma_{(0)} = [a_1, \dots, a_r]$ e $\sigma_{(i)} = (-1)^r [a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_r]$.

A partir da compreensão dos n -simplexos, vamos então definir o que é um poliedro de \mathbb{R}^n nesse contexto.

Definição 36. Um *poliedro* ou *complexo simplicial* é um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ com uma coleção finita de simplexos de K que satisfaz

- (i) Todo $x \in K$ pertence a algum simplexo;
- (ii) Toda face de um simplexo de K é um simplexo de K
- (iii) Dois simplexos de K ou são disjuntos, ou se intersectam em uma face de ambos.

Definimos a dimensão de K como a dimensão do simplexo de maior dimensão.

Em um poliedro $K \subset \mathbb{R}^n$ podemos considerar a topologia definida por $A \subset K$ é fechado se, e somente se, $A \cap \sigma$ é fechado para todo $\sigma \in K$. Nesse caso essa topologia coincide com a topologia de subespaço pois a quantidade de σ 's em K é finita.

Comparar espaços é sempre interessante, nesse caso, a aplicação que faz essa comparação é definida a seguir.

Definição 37. Sejam K e L dois complexos simpliciais. Dizemos que o mapa $f : K \rightarrow L$ é um mapa simplicial se para todo simplexo σ de K gerado por $\{a_0, \dots, a_r\}$ temos que $f(a_0), \dots, f(a_r)$ são vértices de um simplexo em L , e para $p = \sum_{i=0}^r t_i a_i$, $f(p) = \sum_{i=0}^r t_i f(a_i)$.

Definição 38. Um espaço topológico X é triangulável se é homeomorfo a um complexo simplicial.

Veja que, a esfera S^2 é triangulável pois é homeomorfa a um tetraedro que, como vimos, é um 3-simplexo e portanto um complexo simplicial.

Um outro espaço topológico triangulável é o 2-toro, pois ele é homeomorfo ao retângulo identificado os lados opostos no mesmo sentido, que pode ser descrito como um complexo simplicial, como mostra a Figura 2.11.

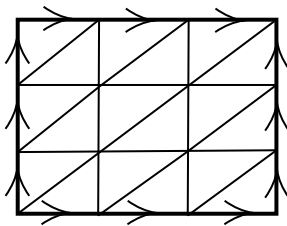


Figura 2.11: O 2-toro como um poliedro.

Definição 39. Para $p \geq 0$, o grupo de p -cadeias de K , um complexo simplicial, é o grupo $C_p(K)$ formado por todas as somas formais de p -simplexos de K com coeficientes em \mathbb{Z} .

Os elementos de $C_p(K)$ são chamados de p -cadeias.

Isto é, as somas de p -simplexos em $C_p(K)$ combinam os p -simplexos σ_i apenas se forem iguais, somando seus coeficientes, $\sum_{i=0}^k \eta_i \sigma_i$ e assim as parcelas da soma se cancelam

apenas se tiverem mesmos coeficientes e orientações opostas ($t\sigma_i + (-t\sigma_i) = 0$). Em outras palavras $C_p(K)$ é o grupo abeliano livre gerado pelos p -simplexos σ_i de K .

Na Figura 2.12 temos um complexo simplicial K composto por quatro 0-simplexos $[a_0]$, $[a_1]$, $[a_2]$ e $[a_3]$, assim $C_0(K) = \{\sum_{i=0}^3 t_i a_i : t_i \in \mathbb{Z}\}$, seis 1-simplexos $\sigma_0 = [a_0, a_1]$, $\sigma_1 = [a_0, a_2]$, $\sigma_2 = [a_0, a_3]$, $\sigma_3 = [a_1, a_2]$, $\sigma_4 = [a_2, a_3]$ e $\sigma_5 = [a_1, a_3]$, daí $C_1(K) = \{\sum_{i=0}^5 t_i \sigma_i : t_i \in \mathbb{Z}\}$, quatro 2-simplexos $\sigma_{(0)} = [a_1, a_2, a_3]$, $\sigma_{(1)} = -[a_0, a_2, a_3]$, $\sigma_{(2)} = [a_0, a_1, a_3]$ e $\sigma_{(3)} = -[a_0, a_1, a_2]$ assim $C_2(K) = \{\sum_{i=0}^3 t_i \sigma_{(i)} : t_i \in \mathbb{Z}\}$, por fim, K contém apenas um 3-simplexo $\sigma = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ e portanto $C_3(K) = \{t\sigma : t \in \mathbb{Z}\}$.

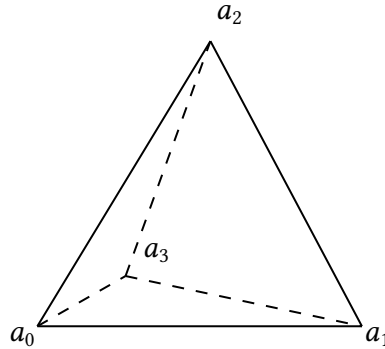


Figura 2.12: Complexo simplicial formado por um 3-simplexo.

Definição 40. Seja $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ um p -simplexo, então o bordo de σ é uma $(p-1)$ -cadeia dada da seguinte forma

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p([a_0, \dots, a_p]) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p],$$

e $\partial_0(\cdot) = 0$.

Olhando novamente a Figura 2.12, podemos descrever o bordo dos p -simplexos já apresentados. Por exemplo, $\partial_0([a_0]) = 0$, $\partial_1(\sigma_0) = \partial_1([a_0, a_1]) = [a_0] - [a_1]$, $\partial_2(\sigma_{(0)}) = \partial_2([a_1, a_2, a_3]) = [a_2, a_3] - [a_1, a_3] + [a_2, a_3]$ e $\partial_3(\sigma) = \partial_3([a_0, a_1, a_2, a_3]) = [a_1, a_2, a_3] - [a_0, a_2, a_3] + [a_0, a_1, a_3] - [a_0, a_1, a_2]$.

Estendendo linearmente obtemos o *operador bordo*, um homomorfismo que leva p -cadeias de K em $(p-1)$ -cadeias de K ,

$$\begin{aligned} \partial_p : C_p(K) &\rightarrow C_{p-1}(K) \\ \sum t_i \sigma_i &\mapsto \partial_p\left(\sum t_i \sigma_i\right) = \sum \partial_p(\sigma_i), \end{aligned}$$

em que $\sigma_i = [a_{i0}, \dots, a_{ip}]$ são todos os p -simplexos de K .

Com isso temos uma sequência

$$\dots \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(K) \xrightarrow{\partial_{p-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \dots$$

Definição 41. Uma p -cadeia $c \in C_p(K)$ é chamada p -ciclo quando $\partial_p(c) = 0$ e é chamada *bordo* se existe uma $(p+1)$ -cadeia $\alpha \in C_{p+1}(K)$ tal que $c = \partial_{p+1}(\alpha)$.

O conjunto de todos os p -ciclos é $Z_p(K) = \text{Ker}(\partial_p) = \{c \in C_p(K) : \partial_p(c) = 0\}$ e o conjunto dos p -bordos é $B_p(K) = \text{Im}(\partial_{p+1}) = \{c \in C_p(K) : \exists \alpha \in C_{p+1}(K), \partial_{p+1}(\alpha) = c\}$.

Lema 4. $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Demonstração. Seja σ um p -simplexo, então por definição temos que

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j [a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p] \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_p] = 0. \end{aligned}$$

Como ∂ é extensão linear temos o resultado. \square

Por esse lema temos que $\text{Im}(\partial_{p+1}) \subset \text{Ker}(\partial_p)$ ou equivalentemente $B_p(K) \subset Z_p(K)$.

Definição 42. Seja K um poliedro. Definimos $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ como o grupo de homologia de K de dimensão p .

Essa definição nos permite calcular os grupos de homologia de um espaço topológico X se existir um homeomorfismo entre X e um poliedro K , ou seja, se X for triangulável. Caso contrário, precisamos de uma teoria mais abrangente que nos permita calcular os grupos de homologia de espaços topológicos em geral.

Para isso, vamos expandir a teoria de homologia simplicial apresentando alguns resultados sobre a teoria de *homologia singular*, que ainda serão válidos para a homologia simplicial, já que esta será vista como um caso particular da segunda.

Vamos definir então os principais conceitos da teoria de homologia singular.

Definição 43. Seja $\Delta_p = [e_0 := 0, e_1, \dots, e_p]$ o p -simplexo tal que $\{e_1, \dots, e_p\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^p e X um espaço topológico. Um *p -simplexo singular* é um mapa contínuo

$$\sigma : \Delta_p \rightarrow X.$$

Da mesma forma que anteriormente, o grupo das p -cadeias de X , $C_p(X)$, é o grupo abeliano livre gerado por todos os p -simplexos (singulares).

$$C_p(X) = \left\{ \sum_{\text{FINITA}} \eta_i \sigma_i : \eta_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i \text{ } p\text{-simplexos} \right\}$$

Aqui, o bordo de σ é dado pela restrição do p -simplexo σ à $\Delta_{(p-1)}$, da seguinte

forma,

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma |_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p]}$$

e $\partial_0(\cdot) = 0$. Por extensão linear, temos o operador bordo ∂_p e a seguinte cadeia.

$$\dots \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(X) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(X) \xrightarrow{\partial_{p-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \dots$$

Que facilmente visualizamos, também satisfaz $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$. Isto é, o conjunto dos bordos $B_p(X) = \text{Im}(\partial_{p+1}) = \{c \in C_p(X) : \exists \alpha \in C_{p+1}(X), \partial_{p+1}(\alpha) = c\}$ de X está contido no conjunto dos ciclos $Z_p(X) = \text{Ker}(\partial_p) = \{c \in C_p(X) : \partial_p(c) = 0\}$ de X .

Definição 44. Seja X um espaço topológico. O grupo de homologia de X de dimensão p é $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$.

A partir dessa definição, vamos mostrar alguns resultados.

Proposição 19. Seja $X = \coprod X_\alpha$ um espaço topológico, em que X_α é conexo por caminhos. Então, $H_p(X) = \oplus_\alpha H_p(X_\alpha)$.

Demonstração. Como um simplexo singular sempre tem imagem conexa por caminhos, então $C_p(X) \cong \oplus_\alpha C_p(X_\alpha)$. O operador ∂_p respeita essa decomposição e com isso temos o resultado. \square

Proposição 20. Seja X um espaço topológico não vazio e conexo por caminhos. Então, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demonstração. Observando a parte da cadeia exposta abaixo, vemos que $H_0(X) = \text{Ker}(\partial_0)/\text{Im}(\partial_1) = C_0(X)/\text{Im}(\partial_1)$.

$$\dots C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Defina o homomorfismo sobrejetivo

$$\begin{aligned} \epsilon : C_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum \eta_i \sigma_i &\mapsto \sum \eta_i. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental dos Homomorfismos temos que $C_0(X)/\text{Ker}(\epsilon) \cong \mathbb{Z}$. Assim, para ter o resultado, basta mostrar que $\text{Ker}(\epsilon) = \text{Im}(\partial_1)$.

Seja $\tau : \Delta_1 \rightarrow X$ um 1-simplexo, daí $\partial_1(\tau) = \tau |_{([e_1])} - \tau |_{([e_0])}$ e então $\epsilon(\partial_1(\tau)) = 1 - 1 = 0$, como ∂_i é extensão linear, temos que $\epsilon(\partial_1(c)) = 0, \forall c \in C_1(X)$. Assim, $\text{Im}(\partial_1) \subset \text{Ker}(\epsilon)$.

Por outro lado, seja $\sum \eta_i \sigma_i$ uma 0-cadeia em $\text{Ker}(\epsilon)$, isto é, $\epsilon(\sum \eta_i \sigma_i) = \sum \eta_i = 0$, em que a imagem de cada 0-simplexo $\sigma_i : [e_0] \rightarrow X$ é um ponto de X . Seja $x_0 \in X$ a imagem do 0-simplexo σ_0 e $\theta_i : [e_0, e_1] \rightarrow X$ o 1-simplexo cuja imagem liga x_0 à $\sigma_i([e_0]) \in X$. Veja que isso é possível pois X é conexo por caminhos. Temos então que $\partial_1(\theta_i) = \theta_i | [e_1] - \theta_i | [e_0] = \sigma_i - \sigma_0$ e assim,

$$\partial_1 \left(\sum \eta_i \theta_i \right) = \sum \eta_i (\sigma_i - \sigma_0) = \sum \eta_i \sigma_i - \left(\sum \eta_i \right) x_0 = \sum \eta_i \sigma_i.$$

Com isso, mostramos que existe uma 1-cadeia $\sum \eta_i \theta_i$ em $C_1(X)$ tal que o bordo dessa 1-cadeia é a 0-cadeia inicial que tomamos em $\text{Ker}(\epsilon)$. Logo, $\text{Ker}(\epsilon) \subset \text{Im}(\partial_1)$. Portanto, $\mathbb{Z} \cong C_0(X)/\text{Ker}(\epsilon) = C_0(X)/\text{Im}(\partial_1) = H_0(X)$. \square

A partir desse desenvolvimento teórico, podemos agora discutir sobre as esferas. Observe então que a n -esfera é o esqueleto n -dimensional de um $(n + 1)$ -simplexo s , isto é, S^n é a união de todos os n -simplexos de s .

Para visualizar, a esfera S^1 é homeomorfa à fronteira de um triângulo, que é a união dos 1-simplexos de um 2-simplexo. A esfera S^2 é homeomorfa à fronteira de um tetraedro, que é a união dos 2-simplexos de um 3-simplexo. Assim, dado um 4-simplexo $s = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]$, a esfera S^3 é a união de todos os 3-simplexos de s .

Com isso em mente, vamos apresentar os grupos de homologia das n -esferas. Para isso, vamos primeiro calcular os grupos de homologia de um cone.

Definição 45. Se $t = [a_0, a_1, \dots, a_{i+1}]$ é um $(i + 1)$ -simplexo e $t_{(0)} = [a_1, \dots, a_{i+1}]$ é a face de t oposta ao vértice a_0 , escrevemos como notação $t = a_0 * t_{(0)}$. Se a_0 é um vértice de um poliedro K , diz-se que K é um *cone de vértice* a_0 quando, para todo simplexo $s \in K$ que não contém a_0 como vértice, tem-se que $t = a_0 * s$ é um simplexo de K .

A união L dos simplexos de um cone K com vértice a_0 dos quais a_0 não é um vértice é denominado subpoliedro. Tem-se assim que $K = \bigcup_{s \in L} (a_0 * s)$, ou ainda, $K = a_0 * L$. Chamaremos L de *base* do cone K com vértice a_0 .

Teorema 19. Os grupos de homologia de um cone K são $H_0(K) = \mathbb{Z}$, $H_r(K) = \{0\}$, $\forall r \geq 1$.

Demonstração. Seja K um cone de vértice a . Como todo ponto pode ser ligado a a por um segmento de reta, K é conexo por caminhos, logo $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

Para calcular $H_r(K)$ para $r \geq 1$, defina a aplicação $a * : C_r(K) \rightarrow C_{r+1}(K)$ que leva $s = [a_0, \dots, a_r]$ em $a * s = [a, a_0, \dots, a_r]$ se a não é um vértice de s e $a * s = 0$, se a é um vértice de s e estende-se linearmente, fazendo uma cadeia $x = \sum_{i=0}^r x_i s_i$ ser levada em $a * x = \sum_{i=0}^r x_i (a * s_i)$.

Quando um simplexo $s' = [s_0, \dots, s_r] \in K$ tem dimensão $r \geq 1$, temos que $\partial_{r+1}(a * s') = \sum_{i=-1}^r (-1)^{i+1} [s_{-1} := a, s_0, \dots, s_r] = [s_0, \dots, s_r] + \sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} [a, s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_r] = s' - \sum_{i=0}^r (-1)^i a * [s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_r] = s' - a * (\partial_r(s'))$ e daí $\partial_{r+1}(a * x) = x - a * (\partial_r(x))$ para toda r -cadeia $x \in C_r(X)$.

Então, se $z \in Z_r(K)$ é um ciclo de dimensão maior ou igual que um, temos que $\partial(a * z) = z - a * 0 = z$, ou seja, todo r -ciclo de K , $r \geq 1$, é um bordo, logo $H_r(K) = \{0\}$, $\forall r \geq 1$. \square

Em particular, como todo simplexo s é um cone com vértice em qualquer um de seus pontos, temos que $H_0(s) = \mathbb{Z}$ e $H_r(s) = \{0\}$, para todo $r \geq 1$.

Teorema 20. *Os grupos de homologia das n -esferas são $H_0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, $H_r(\mathbb{S}^n) = \{0\}$, para todo $0 < r < n$ e $H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Como \mathbb{S}^n é um espaço topológico não vazio e conexo por caminhos temos que $H_0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$.

Seja K o complexo simplicial formado pelo simplexo $s = [a_0, \dots, a_{n+1}]$. Como K é um cone (com vértice em quaisquer dos a_i 's) temos que $H_0(K) = \mathbb{Z}$ e para $r \geq 1$ tem-se $H_r(K) = \{0\}$.

Como foi dito anteriormente, a esfera \mathbb{S}^n é a união dos n -simplexos de K . Veja que, para todo $0 < r < n$, $C_r(\mathbb{S}^n) = C_r(K)$ e um r -ciclo $z \in Z_r(\mathbb{S}^n) = Z_r(K)$ é da forma $z = \partial_{r+1}(x)$ para algum $x \in C_{r+1}(K) = C_{r+1}(\mathbb{S}^n)$, logo $H_r(\mathbb{S}^n) = \{0\}$, para todo $0 < r < n$. Basta apresentar $H_n(\mathbb{S}^n)$, já que $C_r(\mathbb{S}^n) = \emptyset$ para todo $r > n$.

Para isso, observe que a cadeia $z = \partial_{n+1}(s)$, a soma de todas as n -faces de \mathbb{S}^n com as orientações induzidas por s , é um n -ciclo em $Z_n(\mathbb{S}^n)$, pois $\partial_n(z) = \partial_n \circ \partial_{n+1}(s) = 0$, que não é um bordo, pois não há simplexos de dimensão $n + 1$ em \mathbb{S}^n . Logo, $H_n(\mathbb{S}^n) \neq \{0\}$. Além disso, teremos que $[z]$ é um gerador de $H_n(\mathbb{S}^n)$, pois se tomarmos arbitrariamente um $w \in Z_n(\mathbb{S}^n) = Z_n(K)$, como $H_n(K) = \{0\}$ existe $x \in C_{n+1}(K)$ tal que $\partial_{n+1}(x) = w$. Como K tem apenas o simplexo s em dimensão $n + 1$, temos que $x = \alpha s$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, logo $w = \partial_{n+1}(x) = \alpha \partial_{n+1}(s) = \alpha z$. Portanto, todo n -ciclo em \mathbb{S}^n é múltiplo de z e daí $H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$.

□

Com isso, mostramos que os grupos de homologia da 3-esfera são $H_0(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{S}^3) = \{0\}$, $H_2(\mathbb{S}^3) = \{0\}$ e $H_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}$.

A partir dos conceitos desenvolvidos nos Capítulos 1 e 2 podemos enfim construir a 3-variedade que responde a pergunta de Poincaré. Construção essa que é apresentada no Capítulo 3.

Capítulo 3

Construção da Esfera Homológica de Poincaré

A partir do desenvolvimento das teorias apresentadas nos Capítulos 1 e 2, fizemos nesse capítulo uma construção detalhada da Esfera Homológica de Poincaré, que facilita a visualização das características que queremos que ela satisfaça. Para isso, utilizamos como livro base de estudos o [CARVALHO e SIEJAKOWSKI, 2021](#). Assim, começamos desenvolvendo na Seção 3.1 a teoria necessária para compreender dois grupos de simetrias da esfera S^2 , isto é, grupos de simetrias do espaço tridimensional euclidiano \mathbb{R}^3 , são eles, o *Grupo Ortogonal* $O(3)$, cujos elementos são operadores lineares em \mathbb{R}^3 (matrizes 3×3) que preservam a estrutura geométrica do espaço euclidiano e, em especial, seu subgrupo denominado *Grupo Ortogonal Especial* $SO(3)$ composto pelos operadores lineares de $O(3)$ que preservam a orientação do espaço, isto é, as simetrias de rotação da esfera S^2 , esse estudo foi feito com o apoio do livro [RATCLIFFE et al., 1994](#) e do artigo [TRIOLA, 2009](#).

Feita a explanação necessária sobre o Grupo Ortogonal Especial $SO(3)$, na Seção 3.2, o relacionamos a esfera tridimensional S^3 identificada com o grupo dos quatérnios unitários, através de um homomorfismo sobrejetivo, estudado em [STILLWELL, 2008](#), que leva os elementos de S^3 na conjugação de quatérnios puros por esse elemento. Essa aplicação de conjugação é uma simetria de rotação de S^2 e, portanto, um elemento de $SO(3)$. Temos então uma relação que identifica a cada dois elementos de S^3 um elemento de $SO(3)$.

Ainda pensando nas simetrias de rotação da esfera S^2 , na Seção 3.3 apresentamos a definição de um conjunto de sólidos geométricos contidos em \mathbb{R}^3 , conhecidos como *sólidos platônicos*. Em especial, descrevemos as características do sólido platônico denominado Dodecaedro e estudamos os elementos do seu grupo de simetrias que preservam orientação. Para isso inscrevemos o dodecaedro na esfera S^2 e observamos que seu grupo de simetrias de rotação é um subgrupo de $SO(3)$, de ordem sessenta, o qual é denominado *Grupo Icosaédrico Simétrico*, simbolicamente representado por I .

É deveras importante para esse trabalho entender o Grupo Icosaédrico Simétrico minuciosamente. Pensando nisso, na Seção 3.4 acrescentamos no dodecaedro os cinco possíveis cubos inscritos afim de identificar suas simetrias de rotação com os elementos do grupo alternado A_5 das permutações pares de cinco elementos. Essa identificação nos

permite enxergar propriedades do Grupo Icosaédrico Simétrico a partir das propriedades de A_5 já demonstradas na Seção 1.4.

Além disso, na Seção 3.5, com o mesmo objetivo, parametrizamos o dodecaedro inscrito na esfera S^2 , apresentando as coordenadas de todos os seus eixos de simetria de rotação, devido ao fato de que cada elemento do Grupo Icosaédrico I é unicamente determinado por um eixo de simetria e um ângulo de rotação no sentido anti-horário. Dessa forma descrevemos todos os elementos de I , apresentando-os também como grupos cíclicos de matrizes de $SO(3)$ e os associando aos grupos cíclicos de A_5 .

Tendo então apresentado o Grupo Icosaédrico de forma minuciosa, utilizamos na Seção 3.6 o homomorfismo sobrejetivo entre S^3 e $SO(3)$, construído na Seção 3.2, para encontrar e descrever um subgrupo da 3-esfera que é a pré-imagem de I por esse homomorfismo sobrejetivo $(2 : 1)$. A construção feita até esse momento nos permite listar todos os cento e vinte elementos desse subgrupo da 3-esfera, denotado por $2I$, de forma que, cada par de pontos antipodais de $2I \subset S^3$ está identificado a um único elemento de $I \subset SO(3)$ fazendo jus a sua nomenclatura *Grupo Icosaédrico Binário*.

A partir da construção e listagem dos elementos do Grupo Icosaédrico Binário, mostramos, na Seção 3.7, que este é de fato um subgrupo da 3-esfera. Além disso, utilizando a identificação entre os grupos I e A_5 , construída na Seção 3.4, garantimos que $2I$ é um grupo perfeito. Ademais, temos que $2I$ age em S^3 pela multiplicação (de quatérnios unitários) à esquerda e portanto podemos considerar o espaço topológico $S^3/(2I)$, gerado por essa ação, com a topologia quociente.

O espaço quociente $S^3/(2I)$, discutido em detalhes na Seção 3.8, é historicamente conhecido como a *Esfera Homológica de Poincaré*. Este é um espaço topológico que tem os mesmos Grupos de Homologia da esfera S^3 , mas, mais do que isso, é uma variedade tridimensional, cujo espaço de recobrimento universal é a esfera S^3 . A prova desse resultado, utiliza a teoria de recobrimentos de espaços topológicos e foi estudada a partir de CARVALHO e SIEJAKOWSKI, 2021. Utilizaremos então, a teoria de espaços de recobrimentos e ações de grupos nos resultados desejados, desenvolvidos também em HATCHER, 2001, juntamente com o fato mostrado na Seção 2.4, de que a esfera S^3 é simplesmente conexa, para concluir que o Grupo Fundamental de $S^3/(2I)$ é o Grupo Icosaédrico Binário $2I$. Como o grupo fundamental da 3-esfera é trivial, isso mostra que tais espaços não são homeomorfos.

3.1 Grupos de simetrias da esfera S^2

Vimos no Capítulo 1 a definição de grupos de simetrias de objetos geométricos. Agora, para falar mais detalhadamente sobre alguns desses grupos precisamos definir e desenvolver alguns conceitos sobre a geometria do espaço em que esses objetos estão inseridos.

Assim, vamos considerar a *geometria n -dimensional euclidiana*, definida como o espaço vetorial euclidiano \mathbb{R}^n . Nesse espaço, cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é escrito como uma n -upla $x = (x_1, \dots, x_n)$ de números reais, ou ainda, como uma matriz coluna $n \times 1$.

Tomando $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos o produto interno euclidiano de x e y como o número real dado por $\langle x, y \rangle = x^T y = x_1 y_1 \cdots x_n y_n$, em que x^T e y^T são as matrizes linha $1 \times n$ de x e

y , respectivamente. Quando não houver confusão, por simplificação, poderemos utilizar a seguinte notação $x \cdot y := \langle x, y \rangle$.

É fácil verificar que o produto interno euclidiano é bilinear, isto é, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tem-se que $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ e $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, é simétrico, ou seja, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ e é positivo definido, isto é, se $x \in \mathbb{R}^n$ então $\langle x, x \rangle \geq 0$, sendo $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Por essa última propriedade, dizemos que \langle, \rangle é um produto interno positivo definido.

Definimos em \mathbb{R}^n a seguinte forma de calcular o tamanho dos vetores, chamada norma euclidiana, dado $x \in \mathbb{R}^n$, a norma de x é $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

A partir disso, consideramos uma forma canônica de calcular distâncias em \mathbb{R}^n , a métrica euclidiana em \mathbb{R}^n , definida como $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$. Com essa distância \mathbb{R}^n é um espaço métrico.

Podemos questionar então quando distâncias são preservadas nesse espaço. A seguinte definição geral sobre espaços métricos nos auxilia a responder essa questão e a definir o que são isometrias em um espaço métrico.

Definição 46. Uma aplicação $\psi : X \rightarrow X$, em um espaço métrico X preserva distâncias se, e somente se, $d(\psi(x), \psi(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y \in X$. Uma *isometria* em um espaço métrico X é uma bijeção de X que preserva distâncias.

Veja que a aplicação inversa de uma isometria é uma isometria e a composição de duas isometrias também é uma isometria. Assim, o conjunto das isometrias em um espaço métrico X com a operação de composição de aplicações é um grupo. Em específico, as isometrias em \mathbb{R}^n , chamadas *isometrias euclidianas*, formam um grupo em \mathbb{R}^n com a composição de aplicações.

Antes de avançar no estudo das isometrias euclidianas, vamos apresentar um outro grupo denominado *Grupo Ortogonal* $O(n)$, cujos elementos são *matrizes ortogonais* de ordem $n \times n$.

Definição 47. Definimos as matrizes ortogonais $n \times n$ como elementos do seguinte conjunto

$$O(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^T A = I\}.$$

Observe que, toda matriz ortogonal é inversível e sua inversa é igual a sua matriz transposta, isto é, $A^T = A^{-1}$.

Como dissemos, $O(n)$ é denominado Grupo Ortogonal, vamos então mostrar que esse conjunto de matrizes é um grupo.

Teorema 21. $O(n)$ é um grupo com a operação de produto de matrizes.

Demonstração. Veja que $I \in O(n)$ e além disso, para quaisquer matrizes $A, B \in O(n)$ temos que $AB^{-1} \in O(n)$, pois $(AB^{-1})^T(AB^{-1}) = (B^{-1})^T A^T AB^{-1} = BA^{-1}AB^{-1} = BB^{-1} = I$. Portanto, $O(n)$ é um grupo como queríamos. \square

Agora que já definimos as matrizes ortogonais e o grupo que as contém, vejamos alguns resultados sobre as isometrias euclidianas que fixam a origem, elementos que formam um subgrupo do grupo das isometrias euclidianas, e qual a relação entre esses dois objetos apresentados.

Teorema 22. *Uma aplicação $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria euclidiana que fixa a origem se, e somente se, H preserva o produto interno euclidiano, isto é, $\langle H(v), H(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Suponhamos que H é uma isometria euclidiana que satisfaz $H(0) = 0$, então para todos os vetores v e $w \in \mathbb{R}^n$ temos que $\|H(v) - H(w)\| = \|v - w\|$.

Como um caso especial, quando $w = 0$ temos que $\|H(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^n$ e daí $\langle H(v), H(v) \rangle = \langle v, v \rangle, \forall v \in \mathbb{R}^n$.

No caso geral, podemos relacionar essa igualdade com o produto interno e assim teremos a seguinte igualdade

$$\langle H(v) - H(w), H(v) - H(w) \rangle = \langle v - w, v - w \rangle.$$

Utilizando as propriedades do produto interno euclidiano temos o seguinte.

$$\langle H(v), H(v) \rangle - 2\langle H(v), H(w) \rangle + \langle H(w), H(w) \rangle = \langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Cancelando os termos na igualdade teremos o resultado.

$$\langle H(v), H(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Suponhamos agora que a aplicação H preserva o produto interno euclidiano, vamos mostrar que H é uma isometria que fixa a origem. Veja que,

$$\begin{aligned} \|H(v) - H(w)\|^2 &= \langle H(v) - H(w), H(v) - H(w) \rangle \\ &= \langle H(v), H(v) \rangle - 2\langle H(v), H(w) \rangle + \langle H(w), H(w) \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v - w, v - w \rangle \\ &= \|v - w\|^2 \end{aligned}$$

Assim, $\|H(v) - H(w)\| = \|v - w\|, \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ e portanto H é uma isometria euclidiana. Além disso, como $\langle H(v), H(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ podemos tomar $v = w = 0$ e daí teremos que $\langle H(0), H(0) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0$ logo $H(0) = 0$ como queríamos.

□

Teorema 23. *Uma aplicação $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria euclidiana que fixa a origem $H(0) = 0$ se, e somente se, H é uma transformação linear e a matriz da transformação A de H que satisfaz $H(v) = Av, \forall x \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal.*

Demonstração. Suponha que H é uma isometria e que $H(0) = 0$. Devemos mostrar que

H é linear, isto é, que H satisfaz $H(v + w) = H(v) + H(w)$ e $H(cv) = cH(v)$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\forall c \in \mathbb{R}$.

Sabemos pelo resultado anterior que H preserva o produto interno. Tomemos a base canônica $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ do espaço vetorial \mathbb{R}^n . Com isso, temos que

$$\langle H(e_i), H(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j. \end{cases}$$

Isto é, $B' = \{H(e_1), \dots, H(e_n)\}$ forma uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . Então dois vetores em \mathbb{R}^n são iguais se eles têm o mesmo produto interno com cada um dos elementos da base B' .

Para todo $u \in \mathbb{R}^n$ temos que $\langle H(v + w), H(u) \rangle = \langle v + w, u \rangle$ e

$$\langle H(v) + H(w), H(u) \rangle = \langle H(v), H(u) \rangle + \langle H(w), H(u) \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle v + w, u \rangle.$$

Então, temos que $\langle H(v + w), H(u) \rangle = \langle H(v) + H(w), H(u) \rangle$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$. Tomando $u = e_1, \dots, e_n$ mostramos que $H(v + w) = H(v) + H(w)$. Similarmente, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ temos que,

$$\langle H(cv), H(u) \rangle = \langle cv, u \rangle = c\langle v, u \rangle = c\langle H(v), H(u) \rangle = \langle cH(v), H(u) \rangle.$$

Novamente, fazendo $u = e_1, \dots, e_n$ temos que $H(cv) = cH(v)$. Portanto H é linear.

Assim, seja A a matriz da transformação de H , isto é, $H(v) = Av$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, em que a j -ésima coluna de A é $H(e_j)$. Queremos mostrar que $A^T A = I$. Por simplificação, utilizaremos $u \cdot v := \langle u, v \rangle$. Como A preserva o produto interno então

$$v \cdot w = Av \cdot Aw = A^T(Av) \cdot w = (A^T A)v \cdot w, \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Isto é, $v \cdot w = (A^T A)v \cdot w$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$. Como a entrada (i, j) de A é $Ae_j \cdot e_i$, deixando v e w percorrerem todos os elementos da base canônica B , temos que $A^T A = I$. Portanto, A é uma matriz ortogonal.

Por outro lado, assumamos que $H(v) = Av$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, em que $A^T A = I$. Veja que H fixa a origem, logo para mostrar que H é uma isometria euclidiana basta mostrar que H preserva o produto interno euclidiano. De fato, $Av \cdot Aw = (A^T A)v \cdot w = v \cdot w$.

Portanto H é uma isometria euclidiana que fixa a origem como queríamos. \square

Esses dois teoremas podem ser melhor visualizados no seguinte resultado (que já foi mostrado).

Teorema 24. Para uma aplicação $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) H é uma isometria euclidiana e $H(0) = 0$;
- (ii) H preserva o produto interno euclidiano;
- (iii) H é linear e a matriz de H é ortogonal.

Chamaremos de *transformação ortogonal* uma transformação linear cuja matriz da transformação é ortogonal.

Vimos que uma simetria de um objeto geométrico é uma bijeção desse objeto que o mantém globalmente invariante. Assim, a partir das propriedades que demonstramos ter uma isometria euclidiana que fixa a origem podemos apresentar uma definição mais precisa de simetria no espaço \mathbb{R}^n .

Definição 48. Uma simetria em $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ é uma isometria que fixa a origem.

Em suma, essa definição nos garante que uma simetria em \mathbb{R}^n é uma aplicação $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bijetiva, que preserva o produto interno euclidiano, preserva distâncias, é linear e sua matriz da transformação é uma matriz ortogonal, que como vimos, pertence ao grupo $O(n)$. O seguinte resultado, mostra que não temos apenas que as simetrias de \mathbb{R}^n são matrizes ortogonais mas temos também que toda matriz ortogonal é uma simetria de \mathbb{R}^n .

Teorema 25. Toda matriz de $O(n)$ preserva o produto interno euclidiano.

Demonstração. Tome $A \in O(n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que $\langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T(Ay) = x^T A^T Ay = x^T y = \langle x, y \rangle$. \square

A recíproca dessa afirmação, isto é, toda aplicação que preserva o produto interno euclidiano é uma matriz de $O(n)$, já foi mostrada, o Teorema 24 sintetiza este resultado. Com isso, concluímos que uma aplicação H é uma simetria em \mathbb{R}^n se, e somente se, a aplicação H é uma matriz ortogonal. Assim, o grupo de simetrias de \mathbb{R}^n pode ser visto como o próprio grupo de matrizes ortogonais $O(n)$.

Teorema 26. As simetrias em \mathbb{R}^n fixam as esferas $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Demonstração. Devemos mostrar que se $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma simetria então para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ temos que $H(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Como H preserva o produto interno temos que $\|H(x)\| = (H(x) \cdot H(x))^{1/2} = (x \cdot x)^{1/2} = \|x\| = 1, \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Portanto, $H(x) \in \mathbb{S}^{n-1}, \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$. \square

Por esse teorema, temos que as simetrias de \mathbb{S}^{n-1} são as simetrias de \mathbb{R}^n restritas a \mathbb{S}^{n-1} , ou seja, são as isometrias euclidianas que fixam a origem restritas aos vetores da esfera, ou ainda, os elementos do grupo $O(n)$.

Consideremos agora A uma simetria de \mathbb{R}^n , vamos mostrar que essa matriz ortogonal de $O(n)$ tem determinante 1 ou determinante -1 . De fato, temos que $1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = (\det(A))^2$, logo $\det(A) = \pm 1$ como esperado.

É natural então separar esses elementos e estudar suas particularidades. As simetrias de \mathbb{R}^n em $O(n)$ que tem determinante 1 chamaremos de *simetrias que preservam orientação* e focaremos o nosso estudo no subconjunto de $O(n)$ formado por essas matrizes devido a estrutura de grupo que esse subconjunto possui.

Definição 49. Definimos o *Grupo Ortogonal Especial* $SO(n)$ como

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}.$$

No próximo resultado vamos mostrar que esse conjunto não é apenas um grupo, mas também um subgrupo normal de $O(n)$ cujo índice é 2.

Proposição 21. $SO(n)$ é um subgrupo normal de $O(n)$ de índice 2.

Demonstração. $SO(n)$ é de fato um subgrupo de $O(n)$, pois $Id_{O(n)} \in SO(n)$ e $\forall A, B \in SO(n)$, $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\det(B^T) = \det(A)\det(B) = 1$, logo $AB^{-1} \in SO(n)$.

Consideremos o grupo multiplicativo $(\{\pm 1\}, \cdot)$ e defina a aplicação

$$\begin{aligned} \det : O(n) &\rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot) \\ A &\mapsto \det(A). \end{aligned}$$

Veja que a aplicação \det é um homomorfismo cujo núcleo é $SO(n)$, garantindo que $SO(n)$ é um subgrupo normal de $O(n)$. Além disso, \det é sobrejetivo pois como sabemos $\det(I) = 1$ e existe $A \in O(n)$, tal que A tem o elemento da primeira linha e primeira coluna igual a menos um, os demais elementos da diagonal principal iguais a um e todas as outras entradas de A iguais a zero, essa matriz de $O(n)$ satisfaz $\det(A) = -1$. Daí pelo Teorema fundamental do homomorfismo temos que $O(n)/SO(n) \cong \{-1, 1\}$, portanto o índice de $SO(n)$ em $O(n)$ é $(O(n) : SO(n)) = 2$. \square

Em síntese, os elementos de $SO(n) \triangleleft O(n)$ formam um subgrupo do grupo das simetrias de \mathbb{R}^n , o grupo das simetrias que preservam orientação de \mathbb{R}^n .

Definição 50. Definimos as rotações de \mathbb{R}^n como sendo as simetrias que preservam orientação em $O(n)$, ou seja, os elementos de $SO(n)$.

A partir dessa definição, por simplificação, vamos nomear as simetrias que preservam orientação de \mathbb{R}^n por simetrias de rotação.

Estamos interessados especificamente no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 e as simetrias de rotação da esfera $\mathbb{S}^2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = 1\}$. Sabemos agora que as simetrias de rotação de \mathbb{S}^2 são os elementos de $SO(3)$, mas queremos saber como de fato essas matrizes atuam em \mathbb{S}^2 . O seguinte resultado nos esclarece esse questionamento.

Teorema 27. Todas as matrizes de $SO(3)$ fixam um eixo de \mathbb{R}^3 e preservam os planos perpendiculares ao eixo fixado.

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que toda matriz de $SO(3)$ fixa um eixo de \mathbb{R}^3 , isto é, têm obrigatoriamente um autovalor real igual a 1.

Tome $A \in SO(3)$, isto é, $A^T A = I$ e $\det(A) = 1$. O polinômio característico de A é o seguinte $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$, que tem grau três e por isso A deve ter um autovalor real.

Seja v_1 o autovetor de A associado ao autovalor real λ_1 , que claro, satisfaz $Av_1 = \lambda_1 v_1$. Como A preserva o produto interno, temos que $\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = \langle Av_1, Av_1 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_1 v_1 \rangle = \|\lambda_1 v_1\|^2 = |\lambda_1|^2 \|v_1\|^2 \Rightarrow \lambda_1^2 = 1$. Ou seja, a raiz real que A possui deve ser igual a 1 ou -1 .

Se a raiz real de A é $\lambda_1 = 1$ temos o que queríamos. Suponhamos então que a raiz real de A seja $\lambda_1 = -1$, nesse caso não podemos ter autovalores imaginários pois se tivéssemos teríamos $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$ e daí $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = 1 \Rightarrow |\lambda_2|^2 = -1$ um absurdo. Logo, todos os autovalores são reais. Então, $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 \lambda_3 = -1$, assim devemos ter que um desses autovalores é -1 e o outro 1 como queríamos.

Assim, mostramos que A sempre tem um autovalor igual a 1 , ou seja, A fixa o eixo de \mathbb{R}^3 associado a esse autovalor. Fixamos então o autovalor $\lambda_1 = 1$ de A .

Vamos agora analisar os planos perpendiculares ao eixo gerado pelo autovetor v_1 associado a λ_1 . Restrito a esses planos, as simetrias de rotação são os elementos de $SO(2)$. Vamos mostrar que as matrizes de $SO(2)$ são matrizes de rotação de \mathbb{R}^2 .

Primeiro, tomemos a base canônica $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 . Consideremos em \mathbb{R}^2 a rotação R_θ por um ângulo arbitrário θ . Veja, por trigonometria, que R_θ transforma os elementos da base β da seguinte forma $R_\theta((1, 0)) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $R_\theta((0, 1)) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Assim, a matriz de R_θ é a seguinte

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} R_\theta^T R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ou seja, R_θ é uma matriz ortogonal e além disso $\det(R_\theta) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Logo, $R_\theta \in SO(2)$.

Por outro lado, $A \in SO(2)$ é um operador linear bijetivo. Seja $A = [a_1 a_2]$ ortogonal em que a_i , $i = 1, 2$, são os vetores coluna de A . Esses vetores coluna são ortonormais, isto é, como $A^T A = I$ então

$$a_i a_j = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j. \end{cases}$$

Assim, nós podemos pensar nas colunas de um elemento de $SO(2)$ como dois vetores ortogonais no círculo unitário centrado na origem. Sabemos que os vetores $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ parametrizam o círculo unitário centrado na origem. Existem apenas dois vetores no círculo unitário que são ortogonais a este vetor, são eles $v_1 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ e $v_2 = (\sin(\theta), -\cos(\theta))$.

Construímos então as matrizes formadas por esses vetores. Utilizando u e v_1 temos a matriz R_θ e utilizando os vetores u e v_2 temos a seguinte matriz.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Porém o determinante dessa matriz é $-\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = -1$ e assim essa matriz não pertence a $SO(2)$. Mostramos então que a única matriz possível para $SO(2)$ é da forma

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ou seja, todos os elementos de $SO(2)$ são rotações R_θ do plano.

Portanto, as simetrias em \mathbb{R}^3 rotacionam os planos perpendiculares ao eixo fixado.

□

Por fim, como o espaço das matrizes reais $M_3(\mathbb{R})$ é isomorfo ao espaço euclidiano \mathbb{R}^9 , temos que o primeiro é um espaço topológico com a topologia usual do segundo. Dessa forma, os grupos $SO(3) \triangleleft O(3) < M_3(\mathbb{R})$ são espaços topológicos com a topologia induzida de subespaço.

Em síntese, mostramos que o grupo de simetrias que preservam orientação da 2-esfera é o Grupo Ortogonal Especial $SO(3)$, composto por rotações e como elas atuam na esfera \mathbb{S}^2 . Vamos utilizar esse resultado nas próximas seções para estudar o grupo de simetrias que preservam orientação do dodecaedro.

Porém, vamos primeiro, na seguinte seção, relacionar o Grupo Ortogonal Especial $SO(3)$ com o nosso principal objeto de estudo, a 3-esfera.

3.2 A esfera \mathbb{S}^3 e o grupo de simetrias $SO(3)$

É impressionante e de certa forma curioso poder comparar espaços topológicos tão distintos quanto o grupo de matrizes $SO(3)$ rotações da esfera \mathbb{S}^2 com a própria esfera \mathbb{S}^3 . A princípio um homomorfismo que relaciona esses dois espaços não é intuitivo e/ou trivial, mas essa relação existe e para construí-la utilizamos a teoria dos quatérnios como mostramos a seguir.

Teorema 28. *O grupo de simetrias $SO(3)$ é isomorfo à esfera \mathbb{S}^3 com a relação de equivalência que identifica seus polos antipodais.*

Demonstração. Tomemos $t \in \mathbb{S}^3$ daí $t = \pm 1$ ou $t = \cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2)$ para algum ângulo θ e algum quatérnio unitário $u \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \cong \mathbb{R}^3$ que, vimos, satisfaz $u^2 = -1$. Considere agora a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q &\mapsto tqt^{-1}, \end{aligned}$$

em que $t^{-1} = \pm 1$ ou $t^{-1} = \cos(\theta/2) - u \sin(\theta/2)$.

No caso em que $t = \pm 1 \in \mathbb{S}^3$, temos que f_t é a aplicação identidade. Analisemos então o caso geral e o que acontece quando essa aplicação não é a identidade.

Primeiro vemos que f_t é um homomorfismo. De fato,

$$f_t(qh) = tqht^{-1} = tqt^{-1}ht^{-1} = f_t(q)f_t(h), \forall q, h \in \mathbb{H}.$$

Mais do que isso, temos que f_t é um isomorfismo, pois $\ker(f_t) = \{q \in \mathbb{H} : f_t(q) = tqt^{-1} = I\}$, como $tqt^{-1} = I \Rightarrow q = t^{-1}t = I$ então $\ker(f_t) = \{I\}$, logo f_t é injetiva, e f_t é sobrejetiva pois $\forall q \in \mathbb{H}$ existe $t^{-1}qt \in \mathbb{H}$ tal que $f_t(t^{-1}qt) = t^{-1}tqt^{-1}t = q$. Portanto, f_t é bijetiva, como queríamos. Temos também que a aplicação inversa de f_t é $f_{t^{-1}}$, isto é, $f_t^{-1} = t^{-1}qt = t^{-1}q(t^{-1})^{-1} = f_{t^{-1}}$.

Usando a identificação dos quatérnios \mathbb{H} com o espaço euclidiano \mathbb{R}^4 , que é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , temos que f_t é uma transformação linear, pois $\forall q, h \in \mathbb{H}$ e $\forall r \in \mathbb{R}$, temos que

$$f_t(rq + h) = t(rq + h)t^{-1} = trqt^{-1} + tht^{-1} = rtqt^{-1} + f_t(h) = rf_t(q) + f_t(h).$$

Também é interessante observar que $\forall q \in \mathbb{H}$, temos que

$$\|f_t(q)\| = \|tqt^{-1}\| = \|t\| \|q\| \|t^{-1}\| = \frac{\|t\|}{\|t\|} \|q\| = \|q\|.$$

Ou seja, f_t preserva a norma dos quatérnios. Com isso, temos que f_t preserva a distância euclidiana, isto é, f_t satisfaz o seguinte.

$$\|f_t(q) - f_t(h)\| = \|f_t(q - h)\| = \|q - h\|, \forall q, h \in \mathbb{H}.$$

Portanto, f_t é uma isometria euclidiana. Além disso, para o elemento $0 := 0 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}$ temos que $f_t(0) = t0t^{-1} = 0$, logo f_t é uma isometria euclidiana que fixa a origem de \mathbb{R}^4 . Assim, pelo Teorema 24, temos que f_t preserva o produto interno euclidiano e que f_t é ortogonal. Ou seja, $f_t \in O(4)$.

Uma outra propriedade que f_t satisfaz é que $\forall r \in \mathbb{R}$ temos que $f_t(r) = trt^{-1} = rtt^{-1} = r$, isto é, f_t fixa os números reais e por isso $f_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Como nós mostramos que f_t preserva a geometria de \mathbb{H} e f_t preserva o eixo real, então f_t também deve preservar o espaço perpendicular ao eixo real. Com isso, temos que $f_t(\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k) = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, ou seja, f_t preserva os quatérnios puros.

Além disso, como f_t fixa o eixo real então f_t restrita ao espaço perpendicular ao eixo real, $f_t^* := f_t|_{\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k}$, é ortogonal, ou seja, $f_t^* \in O(3)$.

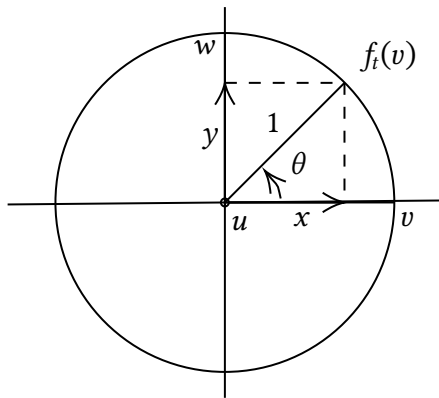
Assim, também pelo Teorema 26 temos que $f_t^* : \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \rightarrow \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ é uma simetria euclidiana de \mathbb{R}^3 que fixa a origem. Vamos mostrar que essa simetria é um elemento de $SO(3) < O(3)$. Para isso, primeiro mostremos que f_t^* fixa u .

$$\begin{aligned}
f_t^*(u) &= tut^{-1} = (\cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2))u(\cos(\theta/2) - u \sin(\theta/2)) \\
&= (\cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2))(u \cos(\theta/2) - u^2 \sin(\theta/2)) \\
&= (\cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2))(u \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)) \\
&= u \cos^2(\theta/2) + u^2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + u \sin^2(\theta/2) \\
&= u(\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)) = u.
\end{aligned}$$

Agora, tome um vetor $v \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ unitário e ortogonal a u , ou seja, satisfazendo $\langle u, v \rangle = 0$ e seja $w = uv = u \times v$. Daí $B = \{u, v, w\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$. Disso temos que

$$\begin{aligned}
f_t^*(v) &= tv^{-1} = (\cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2))v(\cos(\theta/2) - u \sin(\theta/2)) \\
&= (\cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2))(v \cos(\theta/2) - uv \sin(\theta/2)) \\
&= v \cos^2(\theta/2) - uv \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + uv \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) - uvu \sin^2(\theta/2) \\
&= v \cos^2(\theta/2) + 2w \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) - v \sin^2(\theta/2) \\
&= v(\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)) - 2w \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \\
&= v \cos(\theta) - w \sin(\theta).
\end{aligned}$$

Ou seja, f_t^* rotaciona o vetor v por um ângulo θ no sentido anti-horário ao redor do vetor u , como mostra a Figura 3.1.



$$f_t(v) = x + y = av + bw$$

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \|x\| = \|av\| = |a| \\
\sin(\theta) &= \|y\| = \|bw\| = |a|
\end{aligned}$$

$$a = \cos(\theta), \quad b = \sin(\theta)$$

$$f_t(v) = v \cos(\theta) + w \sin(\theta)$$

Figura 3.1: Rotação de v ao redor de u .

Por outro lado, também temos que,

$$\begin{aligned}
f_t^*(w) &= twt^{-1} = (\cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2))w(\cos(\theta/2) - u \sin(\theta/2)) \\
&= (\cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2))(w \cos(\theta/2) - uw \sin(\theta/2)) \\
&= w \cos^2(\theta/2) - uw \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + uw \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) - uwu \sin^2(\theta/2) \\
&= w \cos^2(\theta/2) + 2v \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) - w \sin^2(\theta/2) \\
&= w(\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)) - 2v \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \\
&= w \cos(\theta) - v \sin(\theta),
\end{aligned}$$

uma rotação do vetor w por um ângulo θ no sentido anti-horário ao redor do vetor u . Concluimos então que f_t^* rotaciona o plano perpendicular a u gerado por v e w .

Então, como f_t^* é uma simetria, preservando ângulos e distâncias, temos que f_t^* rotaciona todos os planos perpendiculares ao eixo u por um ângulo θ no sentido anti-horário.

Nós definimos, na seção anterior, as rotações de \mathbb{R}^3 como sendo as matrizes de $SO(3)$ e mostramos no Teorema 27 que toda rotação de \mathbb{R}^3 fixa um eixo de \mathbb{R}^3 e rotaciona os planos perpendiculares ao eixo fixado. Por outro lado, dado um eixo u de \mathbb{R}^3 , normalizado e um ângulo θ temos que existe uma matriz em $SO(3)$ que fixa esse eixo e rotaciona os planos perpendiculares a ele. Para visualizar esse fato, basta tomar a base orientada $\beta = \{u, a, b\}$ de \mathbb{R}^3 em que u, a e b são vetores ortonormais, assim a matriz de $SO(3)$ correspondente à rotação de ângulo θ ao redor do eixo u , na base C , é a seguinte

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Se quisermos essa matriz na base canônica C de \mathbb{R}^3 basta construir a matriz de mudança de base M da base canônica para a base β e calcular $[A]_C = M[A]_{\beta}M^{-1}$ que corresponde à mesma matriz em $SO(3)$.

Portanto, como a transformação linear f_t^* fixa o eixo u e rotaciona os planos perpendiculares a u por um ângulo θ , temos que sua matriz da transformação $[f_t^*] \in SO(3)$ e portanto é uma rotação do espaço $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

Temos então que toda aplicação f_t^* onde $t = \cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2)$ é uma rotação em $SO(3)$ que fixa o eixo u e rotaciona os planos perpendiculares ao eixo u por um ângulo θ no sentido anti-horário. Por outro lado, vimos que toda rotação A de $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, elemento de $SO(3)$ fixa um eixo $u \in \mathbb{R}^3$ e faz uma rotação de ângulo θ ao redor de u , assim, A é uma conjugação de quatérnios puros pelo quatérnio unitário

$$t_{u,\theta/2} := t = \cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2).$$

Isto é, todo elemento de $SO(3)$ é uma aplicação f_t^* e toda aplicação f_t^* é uma rotação de $SO(3)$, uma relação 1 : 1 que faz sentido devido a definição do quatérnio unitário t . Denominamos o conjunto das aplicações f_t^* por $Conj_t(\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k)$ então temos que $SO(3) \cong Conj_t(\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k)$, o grupo ortogonal especial das rotações de \mathbb{R}^3 .

Com isso podemos definir a seguinte aplicação.

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{S}^3 &\rightarrow SO(3) \cong Conj_t(\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k) \\ t &\mapsto f_t^* : q \rightarrow f_t^*(q) = tq t^{-1}, \end{aligned}$$

que é um homomorfismo, pois $\forall t, s \in \mathbb{S}^3$ temos que

$$\psi(ts) = f_{ts}(q) = tsq(ts)^{-1} = tsqs^{-1}t^{-1} = tf_s(q)t^{-1} = t\psi(s)t^{-1} = f_t(\psi(s)) = \psi(t) \circ \psi(s).$$

É sobrejetivo, pois como vimos, dada uma rotação $A \in SO(3)$ de \mathbb{R}^3 , pelo Teorema 26 essa rotação fixa um eixo u e rotaciona os planos perpendiculares por ângulo θ , assim existe $t \in \mathbb{S}^3$, $t = \cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2)$ tal que $A = f_t^*$.

Além disso, t e $-t$ induzem a mesma rotação em \mathbb{R}^3 , isto é,

$$f_{-t}^*(q) = (-t)q(-t)^{-1} = (-1)/(-1)tqt^{-1} = f_t^*(q).$$

Mas $\pm t$ são os únicos quatérnios unitários que induzem essa rotação. De fato, como vimos no Capítulo 2 cada quatérnio unitário é unicamente expresso da forma $t = \cos(\theta/2) + u \sin(\theta/2)$, e como vimos anteriormente cada rotação é unicamente determinada por um eixo e um ângulo de rotação anti-horária. Mas veja que cada eixo de rotação contém dois vetores u e $-u$ e rotacionar o vetor u por um ângulo θ no sentido anti-horário é o mesmo que rotacionar o vetor $-u$ por um ângulo θ no sentido horário ou ainda rotacionar o vetor $-u$ por um ângulo $-\theta$ no sentido anti-horário, pois são vetores de mesma direção e sentidos opostos. Assim, uma rotação é unicamente determinada por dois pares (vetor, ângulo) (u, θ) e $(-u, -\theta)$.

Os quatérnios t e $-t$ são denominados polos antipodais porque eles representam pontos diametralmente opostos na 3-esfera.

Logo, ψ é um homomorfismo sobrejetivo $2 : 1$. Assim, quocientando a esfera \mathbb{S}^3 pela relação de equivalência que identifica os seus pontos antipodais construímos o isomorfismo desejado.

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^3 / \{-1, 1\} &\rightarrow SO(3) \\ [t_{u, \theta/2}] &\mapsto (q \mapsto tqt^{-1}). \end{aligned}$$

□

O homomorfismo ψ (2:1) entre a esfera \mathbb{S}^3 e o grupo $SO(3)$, construído nessa seção, será muito importante para relacionar o subgrupo de $SO(3)$ das simetrias que preservam orientação do dodecaedro com um subgrupo deveras importante da 3-esfera. Vamos então apresentar e entender esse objeto geométrico conhecido como dodecaedro.

3.3 Sólidos platônicos: o dodecaedro.

Veremos nessa seção o que é um dodecaedro regular e como se comportam suas simetrias. Como o dodecaedro é um sólido platônico começaremos apresentando algumas definições necessárias para o entendimento de sólidos platônicos.

Definição 51. Um *poliedro* é um objeto geométrico contido no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 formado pela reunião de um número finito de polígonos, chamados de faces. É exigido que

cada lado de um desses polígonos seja também lado de um, e apenas um, outro polígono e ainda que a intersecção de duas faces distintas do sólido seja uma aresta comum, um vértice ou vazia. As arestas desses polígonos são chamadas de arestas do poliedro e os seus vértices, de vértices do poliedro.

Definição 52. Um *poliedro convexo* é um poliedro que está inteiramente contido em um único semiespaço formado por um plano que contém qualquer uma de suas faces.

Definição 53. Um *poliedro convexo regular* é um poliedro convexo cujas faces são compostas por polígonos regulares (polígonos convexos cujos lados e ângulos são todos de mesma medida) e congruentes entre si.

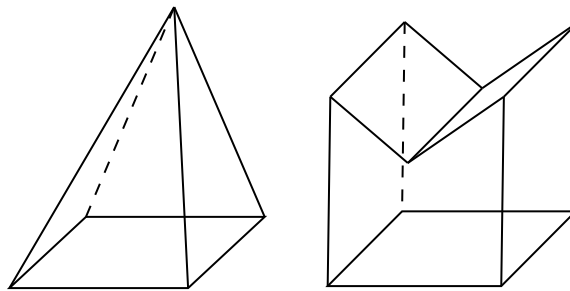


Figura 3.2: Um prisma não regular e um poliedro não convexo e não regular.

Para ilustrar essas definições a Figura 3.2 apresenta dois exemplos de poliedros, um prisma que é convexo mas não regular e um poliedro não convexo e não regular. A partir dessas definições podemos agora apresentar a definição de Sólido Platônico.

Definição 54. Um *Sólido Platônico* é um poliedro convexo regular.

Vamos então construir o sólido platônico de maior interesse nesse trabalho: o dodecaedro. Para isso, primeiro pegamos um pentágono regular e em cada aresta desse pentágono conectamos um pentágono exatamente igual ao primeiro. Repetimos esse procedimento com pentágonos todos iguais, obtendo duas cópias da mesma figura, como mostra a Figura 3.3.

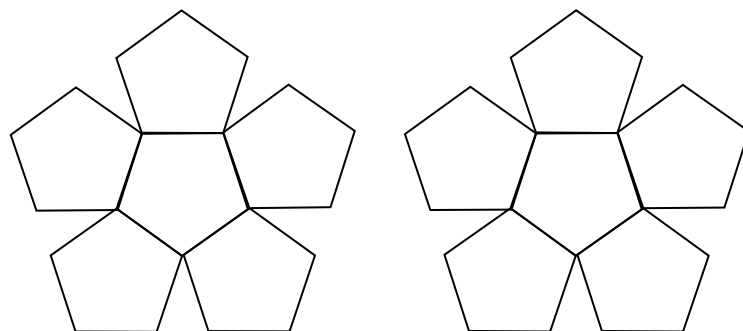


Figura 3.3: Primeira etapa da construção do dodecaedro.

Na segunda etapa, nas duas cópias feitas, levantamos do plano os cinco pentágonos que foram acrescentados ao primeiro até que dois de seus lados encontrem o lado dos pentágonos adjacentes. Veja a Figura 3.4.

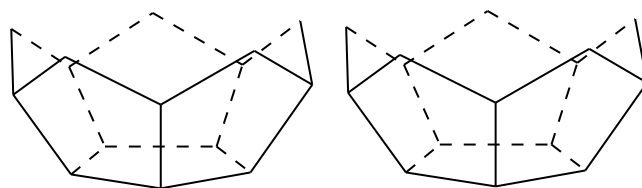


Figura 3.4: Segunda etapa da construção do dodecaedro formando dois recipientes pontiagudos cujas linhas pontilhadas simbolizam a parte de trás da figura.

Essas figuras formam dois recipientes pontiagudos exatamente iguais, cada um formado por 6 pentágonos, tal que se viramos um em cima do outro eles não se encaixam de imediato, como podemos ver na Figura 3.5.

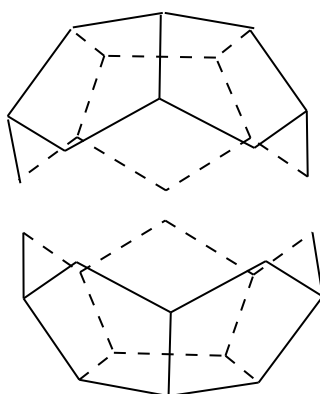


Figura 3.5: As duas figuras espelhadas.

O dodecaedro é formado então rotacionando a figura superior em 36° , um décimo de rotação, e conectando as arestas das duas figuras que agora se encaixam perfeitamente. O resultado desse procedimento está apresentado na Figura 3.6.

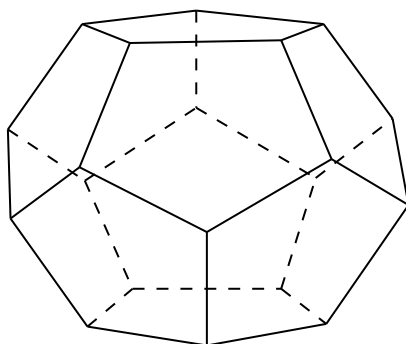


Figura 3.6: O dodecaedro.

Esse objeto é denominado *dodecaedro*. Observamos por sua construção que ele é perfeitamente simétrico, suas faces são configuradas como 12 pentágonos, além disso, possui 30 arestas e 20 vértices.

Devido a sua regularidade, podemos inscrever o dodecaedro em uma esfera bi-dimensional que podemos assumir de raio 1, ou seja, na esfera S^2 . Assim, o grupo de simetrias do dodecaedro é um subgrupo do grupo $O(3)$ de simetrias da esfera S^2 . Estamos

interessados no grupo das simetrias de rotação do dodecaedro que é um subgrupo do grupo $SO(3)$ de simetrias de rotação da esfera S^2 . Isto é, as simetrias de rotação do dodecaedro fixam um eixo e rotacionam os planos perpendiculares ao eixo fixado. Devemos pensar então quais são os possíveis eixos de simetria de rotação do dodecaedro.

Observamos na Figura 3.6 e pela construção do dodecaedro que cada face desse poliedro possui uma face diametralmente oposta, tal que os pares de pentágonos opostos não estão espelhados mas sim invertidos. Assim, passando uma reta pelo centro das faces opostas do dodecaedro, temos que essa reta passa exatamente pelo centro da esfera S^2 , se configurando como um eixo de simetria da esfera S^2 . Veja na Figura 3.7 três desses eixos de simetria expostos pelas linhas tracejadas.

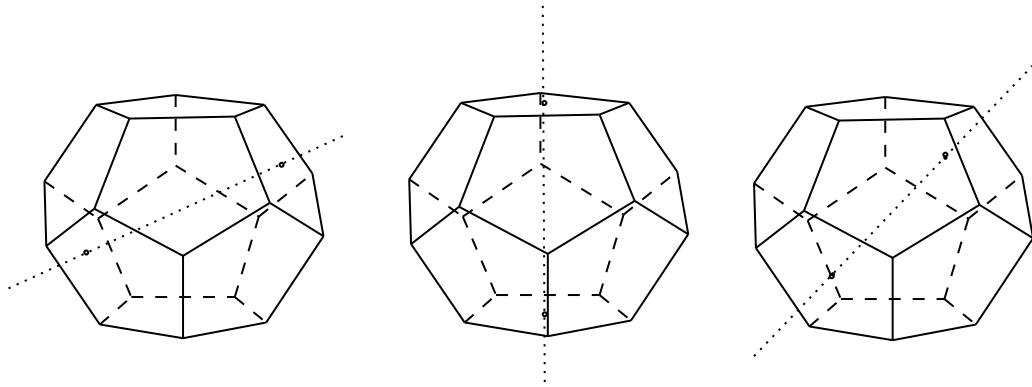


Figura 3.7: Três eixos de faces do dodecaedro.

Esses eixos de simetria de S^2 formados pelas faces opostas do dodecaedro são também eixos de simetria do dodecaedro, que chamaremos de *eixos de simetria de faces*. Para melhor visualizar esse fato, a Figura 3.8 apresenta um eixo de simetria de face do dodecaedro no ponto de fuga do leitor. Visualizamos por essa figura que ao aplicar rotações de $SO(3)$ de 72° , 144° , 216° , 288° e 360° (em radianos $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$ e 2π) o dodecaedro se mantém globalmente invariante. Isso mostra que, para cada eixo de simetria de faces do dodecaedro, temos 4 simetrias de rotação e a identidade.

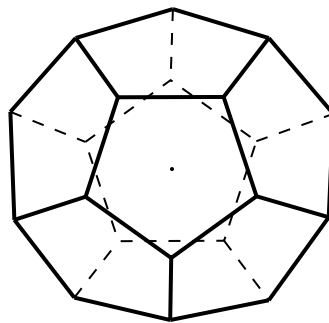


Figura 3.8: Simetrias de um eixo de simetrias de face.

Assim, como o dodecaedro possui 12 faces, opostas duas a duas, teremos 6 eixos de simetria de faces no dodecaedro e por isso o dodecaedro possui $6 \cdot 4 = 24$ simetrias não triviais nos pares de faces do dodecaedro. Denominaremos essas simetrias por *simetrias de faces*.

Observamos também pela Figura 3.6 que cada aresta do dodecaedro tem uma aresta diametralmente oposta e paralela a ela, isto é, da mesma forma que para os pares de faces, ao passar uma reta pelo ponto médio de duas arestas opostas, essa reta passa pelo centro da esfera S^2 e por isso é um eixo de simetria de S^2 que também é um eixo de simetria do dodecaedro, chamaremos esses eixos de simetria como *eixos de simetria de arestas*. Veja na Figura 3.9 três exemplos desses eixos.

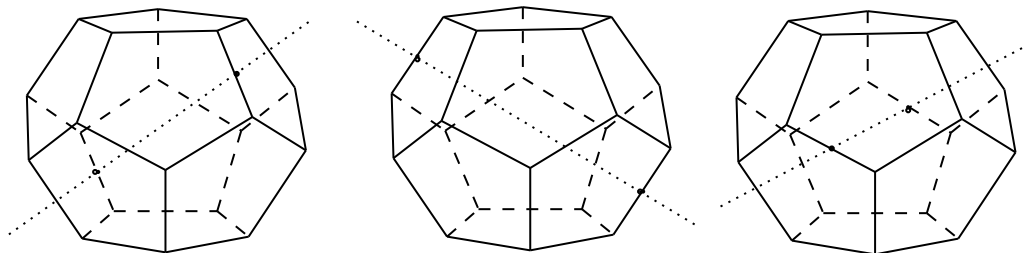


Figura 3.9: Três eixos de aresta do dodecaedro.

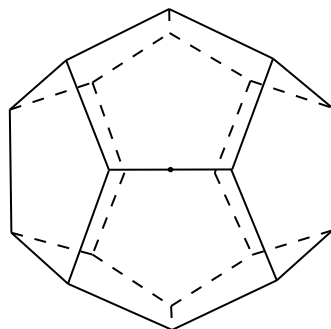


Figura 3.10: Simetrias em um eixo de simetrias de aresta.

A Figura 3.10 mostra um eixo de simetria de aresta do dodecaedro sob o ponto de fuga do leitor. Por essa perspectiva podemos ver que o lado superior da figura é simétrico ao lado inferior da figura, portanto as rotações de $SO(3)$ de ângulos 180° e 360° (em radianos π e 2π) são as simetrias do dodecaedro relacionadas a esse eixo. Como o dodecaedro possui 30 arestas, opostas duas a duas, temos 15 eixos de simetrias de arestas e portanto $15 \cdot 1 = 15$ simetrias não triviais nos eixos de arestas. Chamaremos essas simetrias de *simetrias de arestas*.

Além disso, como as arestas do dodecaedro aparecem em pares diametralmente opostos, temos que os vértices extremos dessas arestas opostas também estão diametralmente opostos. Assim, os vértices do dodecaedro também aparecem em pares de vértices opostos cujas arestas que os conectam passam pelo centro da esfera S^2 e por isso estão contidas em eixos de simetrias de S^2 . Veja na Figura 3.11 três exemplos desses eixos, que chamaremos de *eixos de simetria de vértices*.

Veja pela Figura 3.12 que os eixos de simetria mencionados também são eixos de simetria do dodecaedro. Essa figura mostra o ponto de fuga do leitor em um eixo de simetria de vértices do dodecaedro. Nesse caso, vemos que as rotações de $SO(3)$ de ângulos 120° , 240° e 360° (em radianos $2\pi/3$, $4\pi/3$ e 2π) são as simetrias do dodecaedro relacionadas a esse eixo. Como o dodecaedro possui 20 vértices, opostos dois a dois, temos 10 eixos

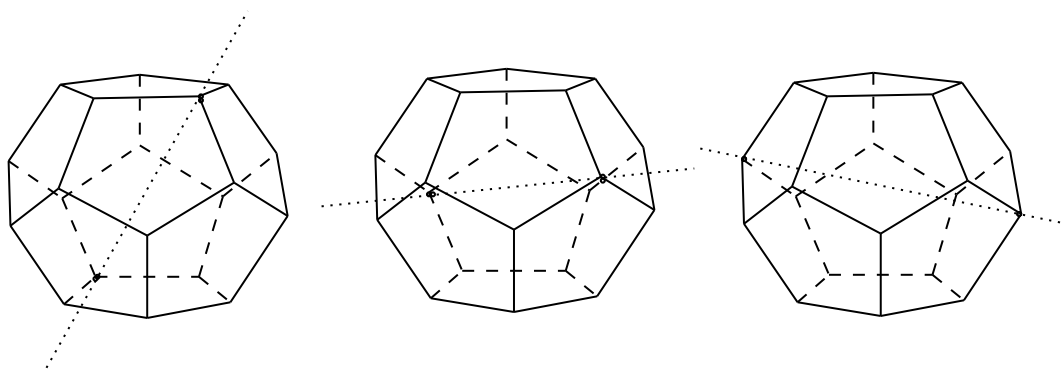


Figura 3.11: Três eixos de vértice do dodecaedro.

de simetrias de vértices e portanto $10 \cdot 2 = 20$ simetrias não triviais nos eixos de vértices. Chamaremos essas simetrias de *simetrias de vértices*.

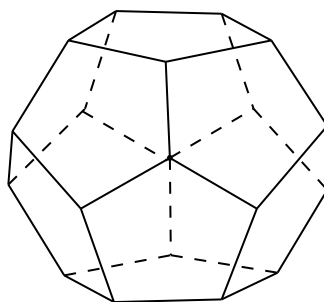


Figura 3.12: Simetrias em um eixo de simetrias de vértice.

Sintetizando, nós encontramos 24 simetrias de faces, 15 simetrias de arestas, 20 simetrias de vértices e a simetria trivial, totalizando 60 simetrias do dodecaedro.

Pela regularidade do dodecaedro, temos que esses são os únicos possíveis eixos de simetria do dodecaedro, já que nenhum outro eixo de simetria da esfera S^2 é um eixo de simetria do dodecaedro.

Assim, o grupo de simetrias de rotação do dodecaedro é composto por essas 60 simetrias e é denominado *Grupo Icosaédrico Simétrico* ou apenas *Grupo Icosaédrico*, simbolicamente representado por I . O Grupo Icosaédrico carrega essa nomenclatura devido ao sólido platônico denominado *icosaedro*, este é conhecido como o sólido dual do dodecaedro e por isso eles têm as mesmas simetrias e mesmos grupos de simetrias. Devido à importância desse grupo para esse trabalho, na seguinte seção vamos identificá-lo ao grupo alternado A_5 , já que características importantes de I são reconhecidas a partir dessa identificação.

3.4 Simetrias de rotação do dodecaedro e o grupo alternado A_5 .

Essa seção tem como objetivo identificar o Grupo Icosaédrico I das simetrias de rotação do dodecaedro com o grupo alternado A_5 .

Para isso vamos primeiro inscrever no dodecaedro cinco cubos distintos. Na seção anterior mostramos que o dodecaedro possui 12 faces, 20 vértices e 30 arestas. Além disso, as arestas do dodecaedro aparecem em pares de arestas opostas paralelas, são então 15 pares de arestas opostas paralelas.

Observe que existem algumas formas de posicionar o dodecaedro no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , a que escolhemos está representada na Figura 3.13.

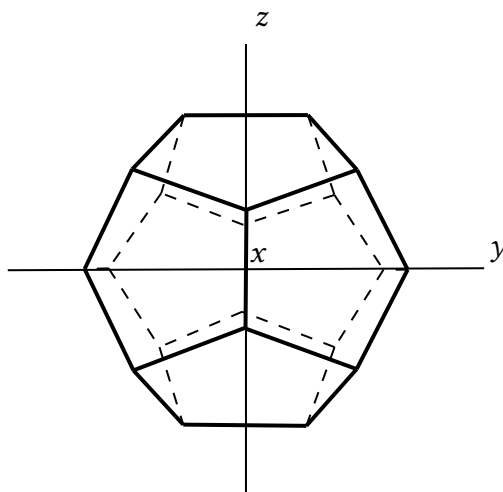


Figura 3.13: Posição do dodecaedro no espaço euclidiano \mathbb{R}^3

Ao escolher essa posição do dodecaedro no espaço \mathbb{R}^3 fixamos um par de arestas que cruzam o eixo z e são paralelas ao eixo y , um par de arestas que cruzam o eixo y e são paralelas ao eixo x e um par de arestas que cruzam o eixo x e são paralelas ao eixo z . Nessa posição inscrevemos no dodecaedro um cubo azul cujas faces são duas a duas paralelas a esses 3 pares de arestas e cada aresta do cubo é uma diagonal dos pentágonos, como mostra a Figura 3.14.

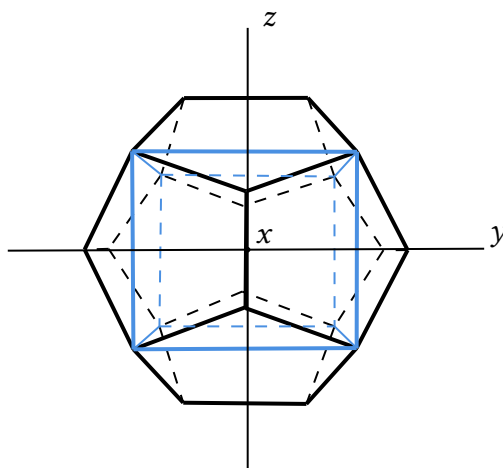


Figura 3.14: Cubo azul inscrito no dodecaedro.

Escolhendo outros três pares de arestas dispostos da mesma maneira, teremos uma nova configuração do dodecaedro e assim acrescentamos outro cubo com as mesmas propri-

idades do primeiro. Na Figura 3.15 o novo cubo inscrito no dodecaedro está representado pelo cubo roxo.

Pela regularidade do dodecaedro, vemos que ele possui 15 pares de arestas dispostos três a três nessa configuração, assim temos 5 possibilidades de colocar o dodecaedro inscrito em S^2 no espaço \mathbb{R}^3 nessa mesma posição. Essas cinco possibilidades nos permitem, em cada uma delas, acrescentar um cubo inscrito no dodecaedro, como feito anteriormente. Portanto, é possível inscrever 5 cubos distintos no dodecaedro.

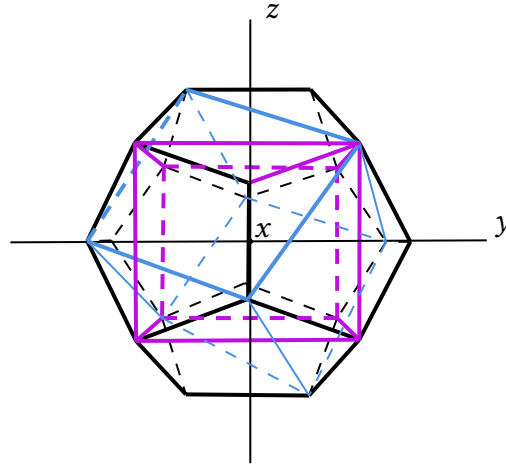


Figura 3.15: Segundo cubo inscrito no dodecaedro.

Assim, para identificarmos o grupo I com o grupo A_5 inscrevemos os cinco possíveis cubos distintos no dodecaedro nas cores vermelha, azul, amarela, verde e roxa, como mostra a Figura 3.16.

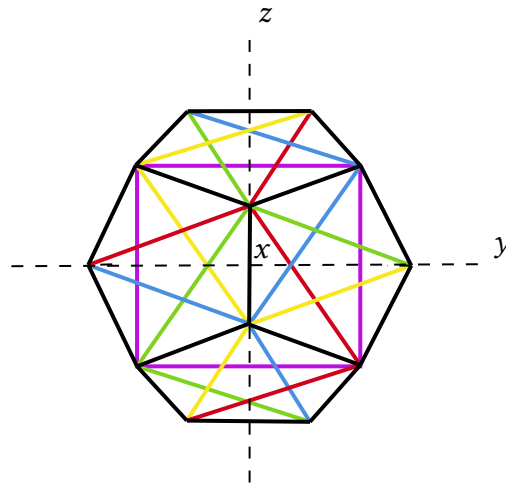


Figura 3.16: O dodecaedro com cinco cubos inscritos.

Vimos também na seção anterior que o dodecaedro tem 3 possíveis tipos de eixos de simetrias de rotação, os eixos de vértices, os eixos de arestas e os eixos de faces. Vamos analisar as simetrias de cada um desses 3 tipos de eixos relacionando as com o que acontece com os cubos inscritos.

(V) Eixos de simetria de vértices:

Como vimos, o dodecaedro tem 10 pares de vértices opostos e por isso 10 eixos de simetria nesse caso. Além disso, para cada um desses eixos há um grupo cíclico de simetrias gerado pela rotação de 120° . Esse grupo tem 2 elementos não triviais e cada uma de suas simetrias tem ordem 3, assim o grupo de simetrias formado por todas as simetrias do tipo (V) é composto por $10 \cdot 2 = 20$ elementos não triviais de ordem 3.

Pela Figura 3.16, observamos que em cada vértice do dodecaedro se encontram 3 arestas de 2 cubos inscritos distintos, ou seja, duas cores de arestas, e conectando os 3 vértices adjacentes a esse temos mais 3 arestas dos 3 demais cubos inscritos, ou seja, 3 arestas de outras 3 cores distintas.

Escolhendo um dos eixos de simetria de vértices, a Figura 3.17 mostra o dodecaedro com ponto de fuga do leitor nesse eixo. A partir dela vemos que as arestas de cores azul e amarela se conectam ao vértice do eixo e as arestas de cores roxa, verde e vermelha formam o triângulo ao redor do vértice.

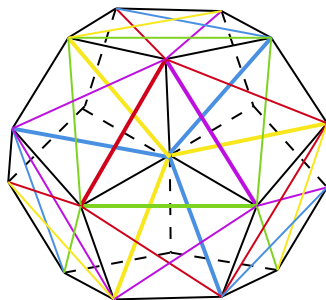


Figura 3.17: Dodecaedro com um eixo de simetria de vértice e os cinco cubos inscritos.

Agora, vamos analisar o que acontece com as arestas dos cubos inscritos em cada uma das simetrias nesse eixo de vértices. Para isso, aproximamos a figura anterior no eixo que queremos analisar tal que ainda podemos ver pelo menos uma aresta de cada cubo inscrito e desenhemos as arestas do dodecaedro pontilhadas para uma melhor visualização. Daí rotacionamos em 120° o dodecaedro ao redor desse eixo de simetria e vemos que as cores das arestas que se encontram nos vértices fixados permanecem nos mesmos lugares e as demais 3 cores são permutadas entre si, como mostra a Figura 3.18.

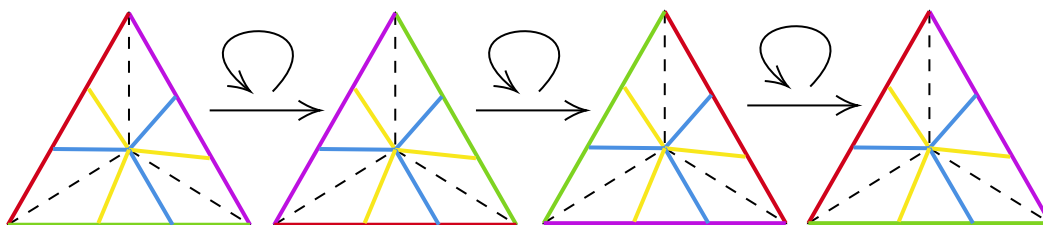


Figura 3.18: Simetrias de vértices no eixo fixado: 120° , 240° , 360° .

Associando a cada uma dessas cinco cores um número de 1 a 5, é fácil ver que, para cada simetria de tipo (V) teremos associada a ela, uma permutação $(a_1 a_2 a_3) \in A_5$, com $a_i \in \bar{5} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i = 1, 2, 3$, que gera um grupo cíclico com 2 elementos não triviais de ordem 3.

Além disso, note que para cada par de cores de arestas dos cubos inscritos que se encontram em um vértice do dodecaedro, há apenas um outro vértice cujas arestas que se encontram nele são de mesmas duas cores, que é o vértice oposto, assim o arranjo das três outras cores também só aparece em um único par de vértices opostos. Como há um único eixo de simetria para dois vértices opostos, é garantido que para cada eixo de simetria, temos um grupo cíclico distinto de permutações, cada uma com 2 elementos não triviais. Logo, cada uma das 20 simetrias de rotação não triviais é associada a uma única das $10 \cdot 2 = 20$ permutações não triviais.

Dessa forma temos uma relação biunívoca entre o conjunto de simetrias do tipo (V) e o subconjunto P_3 de A_5 .

(A) Eixos de simetria de arestas:

Vimos que o dodecaedro é composto por 30 arestas, nesse caso, 15 eixos de simetria e para cada um desses eixos há um grupo cíclico de simetrias gerado pela rotação de 180° com uma única simetria não trivial de ordem 2. Assim, o grupo de simetrias de rotação formado pelas simetrias do tipo (A) tem 15 elementos não triviais de ordem 2.

Mas note que a cada par de arestas opostas podemos associar um conjunto de cinco cores relacionadas as arestas dos cubos inscritos. Nesse caso, escolhido um par de arestas opostas do dodecaedro, mostrada na Figura 3.19, temos que em cada um dos dois vértices, extremidades dessas arestas, se encontram quatro arestas de cubos inscritos com duas cores distintas em cada um desses vértices, ou seja, 4 cores distintas de arestas se encontrando nos vértices e a quinta cor é a das arestas do cubo cuja face é paralela a aresta analisada.

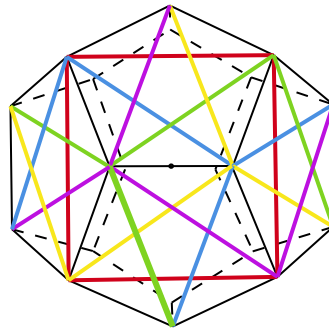


Figura 3.19: Dodecaedro com um eixo de simetria de arestas e os cinco cubos inscritos.

A partir disso, fixamos esse par de arestas, aproximamos a figura e desenhamos as arestas do dodecaedro pontilhadas como no caso anterior. Assim, observamos que ao rotacionar o dodecaedro em 180° nesse eixo de arestas a cor da aresta do cubo paralelo se mantém e as que se encontram nos vértices são permutadas duas a duas, como mostra a Figura 3.20.

De modo análogo ao anterior a permutação dessas cinco cores pode ser descrita como uma permutação do tipo $(a_1 a_2)(a_3 a_4) \in A_5$, $a_i \in \bar{5}$, $i = 1, \dots, 4$.

Note que, em cada um dos vértices extremidades dos pares de arestas opostas, teremos dois pares de cores de arestas que se encontram neles distintos (pelo que vimos no caso (V)) como as duas cores de um vértice são permutadas com as duas outras cores do outro vértice

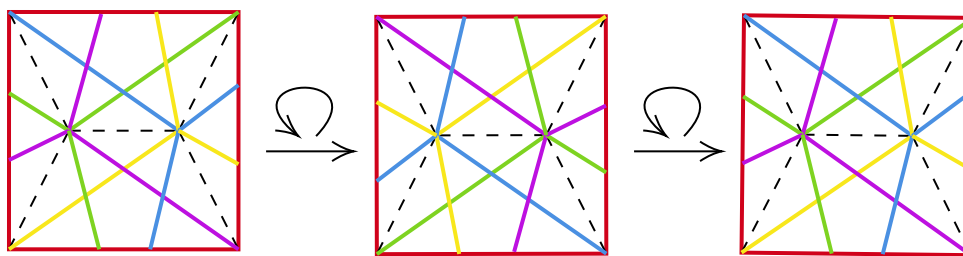


Figura 3.20: Simetrias de arestas no eixo fixado: 180° , 360° .

pela simetria de aresta é garantido que em cada aresta teremos transposições distintas, totalizando 15 permutações não triviais.

Assim, fica claro que há uma aplicação bijetiva entre o conjunto de simetrias do tipo (A) e o subconjunto $P_{2,2}$ de A_5 .

(F) Eixos de simetria de faces:

Vimos que o dodecaedro tem 12 faces, por isso teremos nesse caso 6 eixos de simetria. Para cada um desses eixos há um grupo cíclico de simetrias gerado pela rotação de 72° . Esse grupo tem 4 elementos mais a identidade e cada simetria dele tem ordem 5, assim o grupo de simetrias formado por todas as simetrias do tipo (F) tem $6 \cdot 4 = 24$ elementos não triviais de ordem 5.

Observe ainda que contida em cada face pentagonal do dodecaedro, há uma aresta de cada cubo inscrito, ou seja, 5 arestas de cores diferentes, como mostra a Figura 3.21 que fixa um par de faces do dodecaedro com eixo de faces no centro.

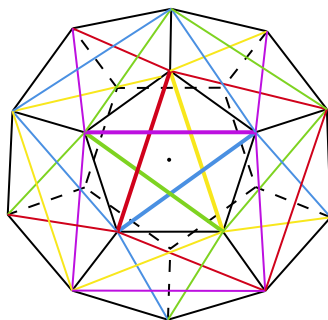


Figura 3.21: Dodecaedro com um eixo de simetria de faces e os cinco cubos inscritos.

Fazendo o mesmo procedimento dos casos anteriores, observamos que a cada rotação de 72° , essas arestas são todas permutadas de tal forma que associando a cada cor um número de 1 a 5 equivale a uma permutação do tipo $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) \in A_5$, com $a_i \in \bar{5}$, $i = 1, \dots, 5$, que gera um grupo cíclico de 4 permutações não triviais de ordem 5 (veja a Figura 3.22).

Da mesma forma que nos demais casos, como as duas cores de arestas que se encontram nos vértices só se repetem em vértices opostos, cada arranjo das 5 cores só se repete em faces opostas, assim cada eixo de simetria de faces determina um grupo cíclico de permutações distinto. Como são 6 eixos de simetria, teremos $6 \cdot 4 = 24$ permutações não triviais de ordem 5.

Logo, é fácil ver que temos uma aplicação bijetiva entre esse conjunto de simetrias e o subconjunto P_5 de A_5 .

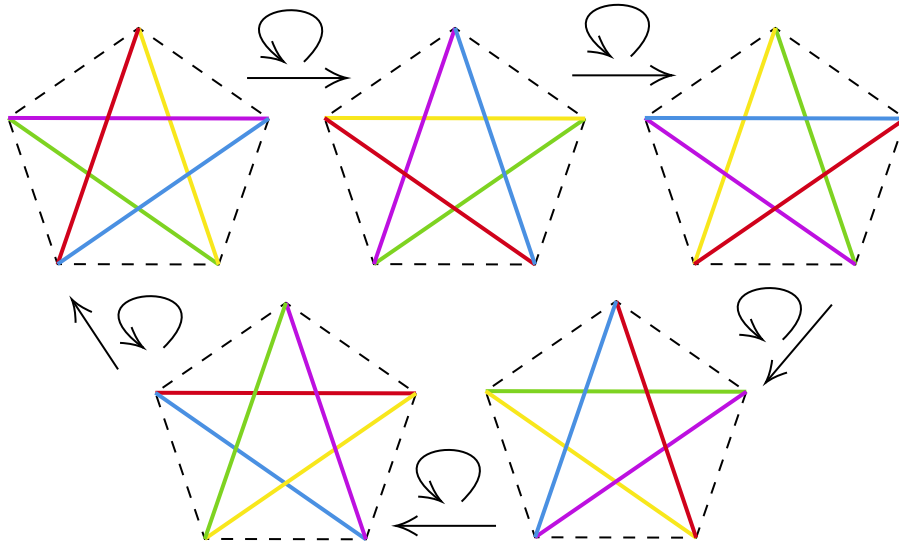


Figura 3.22: Simetrias de faces em um eixo fixado do dodecaedro: 72° , 144° , 216° , 288° e 360° .

Com isso, concluímos que o grupo I tem 60 elementos todos identificados biunivocamente com os elementos de A_5 . A partir dessa construção vamos mostrar no seguinte resultado que o grupo I é isomorfo ao grupo A_5 .

Teorema 29. O Grupo Icosaédrico Simétrico I é isomorfo ao grupo alternado A_5 .

Demonstração. Vimos que toda simetria de rotação do dodecaedro é uma permutação de 5 elementos (as 5 cores dos cubos inscritos no dodecaedro) assim existe um homomorfismo entre o grupo I e o grupo de permutações S_5 . Esse homomorfismo deve ser injetivo pois cada simetria de rotação de I é uma permutação par, totalizando 60 permutações pares que são os 60 elementos de A_5 (os elementos identificados tem a mesma ordem e formam os mesmos grupos cíclicos), então o grupo I é isomorfo a um subgrupo de S_5 , mas I tem 60 elementos e como A_5 é o único subgrupo de S_5 de ordem 60, temos que I é isomorfo ao A_5 . \square

Feita essa identificação entre o grupo alternado A_5 e o subgrupo I de $SO(3)$, na seguinte seção vamos aprofundar o nosso conhecimento sobre os elementos que compõem o Grupo Icosaédrico Simétrico I .

3.5 O Grupo Icosaédrico Simétrico I

O Grupo Icosaédrico Simétrico como já vimos é composto por quatro rotações múltiplas de 72° ao redor dos seis eixos de faces do dodecaedro ($4 \times 6 = 24$ elementos de ordem 5), duas rotações múltiplas de 120° ao redor dos de vértices do dodecaedro ($2 \times 10 = 20$ elementos de ordem 3) e uma rotação de 180° ao redor dos eixos de arestas do dodecaedro (15 elementos de ordem 2), mais a identidade temos $24 + 20 + 15 + 1 = 60$ elementos em $I \cong A_5$.

Vamos então parametrizar o dodecaedro no espaço euclidiano, considerando-o inscrito na esfera S^2 , como feito na seção anterior, com o objetivo de determinar as coordenadas de todos os eixos de simetria de rotação do dodecaedro. A cada um desses eixos associamos alguns elementos de I , já que cada elemento de I é unicamente determinado por um eixo e um ângulo de simetria de rotação anti-horária.

Para fazer essa construção observamos que cada cubo inscrito no dodecaedro tem diagonais de tamanho dois (duas vezes o raio da esfera S^2) e portanto as arestas de todos os cubos medem $2/\sqrt{3}$.

Por semelhança de triângulos podemos encontrar o tamanho das arestas desse dodecaedro. Escolha uma face do dodecaedro e nomeie seus vértices por A, B, C, D e E e seus lados por a como mostrado na Figura 3.23. Observe que todos os ângulos internos do pentágono

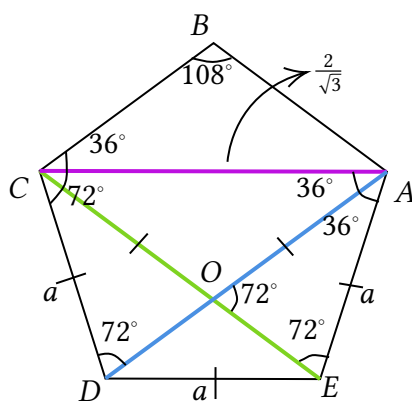


Figura 3.23: Tamanho da aresta do dodecaedro parametrizado.

medem 108° , assim, por sua regularidade podemos encontrar todos os ângulos mostrados na figura. Veja que os triângulos ACD e AOE são semelhantes pois tem os mesmos ângulos, dois de 72° e um de 36° . Com isso temos a seguinte relação

$$\frac{2/\sqrt{3}}{a} = \frac{a}{(2/\sqrt{3}) - a} \Rightarrow a^2 + (2/\sqrt{3})a - 4/3 = 0.$$

Logo, a raiz positiva dessa equação é o tamanho das arestas do nosso dodecaedro.

$$\begin{aligned} a &= \frac{-(2/\sqrt{3}) + \sqrt{20/3}}{2} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{-2(1-\sqrt{5})}{4} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2(1-\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}(1-\sqrt{5})} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{\phi\sqrt{3}} = \frac{l}{\phi}. \end{aligned}$$

Portanto, nosso dodecaedro tem arestas medindo l/ϕ em que $l = 2/\sqrt{3}$ é o tamanho

das arestas dos cubos inscritos e $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão áurea.

Como a razão áurea aparece ao trabalhar com o pentágono é importante visualizarmos a seguinte identidade relacionada a ela.

$$(\phi - 1) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-2(1 - \sqrt{5})}{4} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 + \sqrt{5}(1 - \sqrt{5})} = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\phi}$$

Isso implica também que $\phi^2 - \phi = 1$ e $\phi^2 = \phi + 1$. Essas são identificações importantes que devemos considerar em nossos cálculos ao longo dessa e das próximas seções.

Vamos manter a posição que colocamos o dodecaedro no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 na seção anterior. Em que os eixos x , y e z são eixos de simetria de arestas do dodecaedro. Fazendo com que um dos cubos inscritos tenha faces paralelas aos planos xy , xz e yz , como mostrado na Figura 3.24.

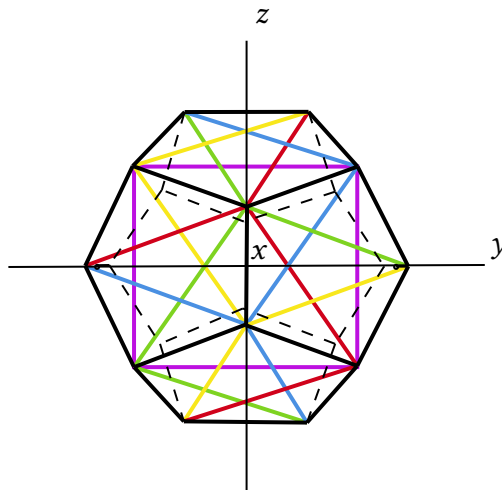


Figura 3.24: Posição do dodecaedro no espaço euclidiano com os cinco cubos inscritos.

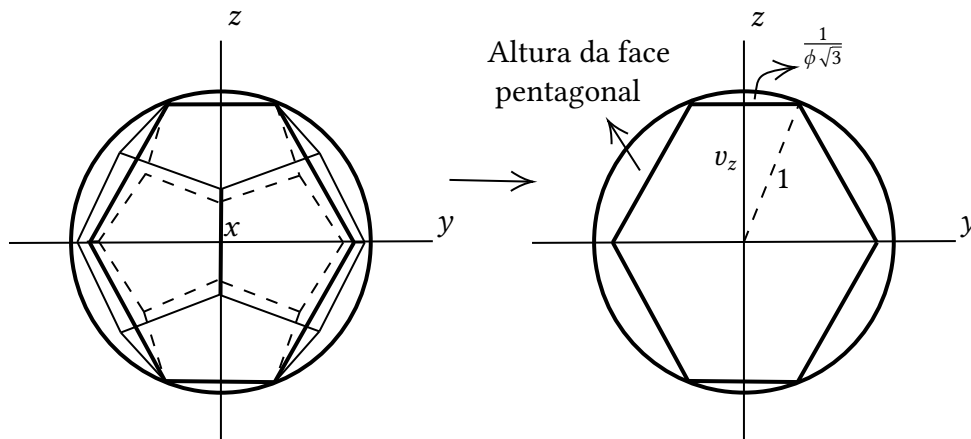


Figura 3.25: Interseção do dodecaedro circunscrito em S^2 com o plano zy .

Para encontrar os pontos do dodecaedro que intersectam os eixos x , y e z , observamos que a interseção do dodecaedro inscrito na esfera S^2 com cada um dos planos (xy , yz e xz) é um círculo de raio um com um hexágono não regular inscrito nele, como mostra a Figura 3.25 para o plano zy (onde ignoramos a existência dos cubos inscritos para uma melhor visualização e entendimento), daí usando o Teorema de Pitágoras encontramos as coordenadas desses pontos relativas ao eixo que eles pertencem.

$$\begin{aligned} v_z^2 &= 1^2 - \left(\frac{1}{\phi\sqrt{3}} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\phi-1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{3}{3} - \frac{\phi^2 - 2\phi + 1}{3} \\ &= \frac{3 - ((\phi^2 - \phi) - \phi + 1)}{3} = \frac{3 - 2 + \phi}{3} = \frac{1 + \phi}{3} = \frac{\phi^2}{3} \\ \Rightarrow v_z &= \frac{\phi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Assim, os pontos do dodecaedro nos eixos de simetria x , y e z são $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi, 0, 0)$, $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(0, \phi, 0)$ e $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 0, \phi)$ respectivamente.

Além disso, na posição que colocamos o dodecaedro as matrizes de I correspondentes aos eixos $a_1 := x$, $a_2 := y$ e $a_3 := z$ respectivamente são as seguintes três das quinze rotações de arestas de 180° , identificadas com os elementos de A_5 a partir da associação 1 ~ verde, 2 ~ azul, 3 ~ roxo, 4 ~ vermelho e 5 ~ amarelo.

$$\begin{aligned} R_{a_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong (12)(45), \\ R_{a_2} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong (25)(41) \text{ e} \\ R_{a_3} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong (15)(24). \end{aligned}$$

Observe ainda que nos extremos das arestas que intersectam os eixos x , y e z perpendicularmente, temos dois vértices do dodecaedro que determinam eixos de simetria de vértice, dois para cada uma dessas arestas, totalizando seis eixos de vértices, contidos nos planos xy , yz e xz . Vamos então analisar o que acontece a partir desses vértices do dodecaedro em cada um desses planos.

No plano zy , temos quatro vértices do dodecaedro e quatro pontos do dodecaedro nos eixos z e y , como apresentado na Figura 3.26. Os pontos nos eixos estão associados aos eixos de simetrias de aresta cujas simetrias identificadas são R_{a_2} e R_{a_3} .

Os pares de vértices do dodecaedro mostrados na Figura 3.26, determinam eixos de simetria de vértices do dodecaedro passando por eles e pela origem de \mathbb{R}^3 e a cada um desses eixos está associado um grupo cíclico de matrizes de rotações múltiplas de 120° e

de ordem três identificadas com elementos de A_5 .

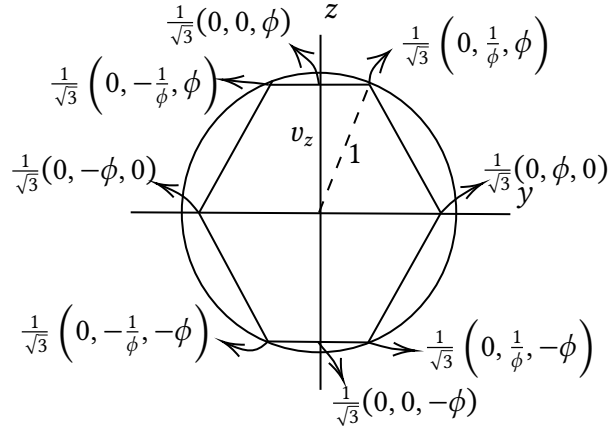


Figura 3.26: Vértices do dodecaedro e pontos dos eixos no plano zy .

O vértice $\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1/\phi, \phi)$ determina o eixo $v_1 = \{\alpha(0, 1/\phi, \phi) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ vamos encontrar a matriz de rotação de 120° no sentido anti-horário ao redor desse eixo. Para isso, seja $v = (0, 1/\phi, \phi)$ o vetor diretor do eixo de simetria estudado, $v' = (1, 0, 0)$ um vetor ortogonal a esse eixo e vamos fazer o produto vetorial entre eles para determinar uma base de \mathbb{R}^3 com esses vetores.

$$v'' = v \times v' = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 1/\phi & \phi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \phi j - (1/\phi)k.$$

Daí $v'' = (0, \phi, -1/\phi)$ e $B = \{v, v', v''\}$ é base positiva de \mathbb{R}^3 pois

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\phi & \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & -1/\phi \end{pmatrix} = \phi^2 + \frac{1}{\phi^2} > 0.$$

Para facilitar os cálculos, vamos normalizar os vetores da base B sem fazer as identificações que ϕ satisfaz.

$$\|v\| = \|v''\| = \sqrt{\frac{1}{\phi^2} + \phi^2} = \frac{\sqrt{\phi^4 + 1}}{\phi}.$$

Assim, normalizados, esses vetores passam a ser os seguintes.

$$v = \left(0, \frac{1}{\sqrt{\phi^4 + 1}}, \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^4 + 1}} \right) \text{ e } v'' = \left(0, \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^4 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{\phi^4 + 1}} \right).$$

Como esses vetores têm a mesma direção dos anteriores, apenas estão normalizados, decidimos utilizar a mesma notação para não carregar o texto.

Dessa forma, temos agora $B = \{v, v', v''\}$ uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 . Veja que a matriz de rotação de 120° ao redor do eixo v_1 na base B é a seguinte.

$$\begin{aligned} [R]_B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ 0 & \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ 0 & \sin(60^\circ) & -\cos(60^\circ) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para saber qual é a matriz de rotação correspondente a essa no sistema de coordenadas em que fixamos o dodecaedro, precisamos escrever essa matriz na base canônica de \mathbb{R}^3 . Para isso, construímos a matriz M de mudança de base da base canônica C para a base B e sua matriz inversa, que são respectivamente,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\phi^4 + 1}} & 0 & \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^4 + 1}} \\ \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^4 + 1}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\phi^4 + 1}} \end{pmatrix} \text{ e } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\phi^4 + 1}} & \frac{\phi^2 \sqrt{\phi^4 + 1}}{\phi^4 + 1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi^2 \sqrt{\phi^4 + 1}}{\phi^4 + 1} & -\frac{1}{\sqrt{\phi^4 + 1}} \end{pmatrix}.$$

Sabendo que $[R]_C = M[R]_B M^{-1}$ e resolvendo essa equação temos que,

$$[R]_C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\phi^2 \sqrt{\phi^4 + 1} \sqrt{3}}{2(\phi^4 + 1)} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\phi^4 + 1}} \\ \frac{\phi^2 \sqrt{3}}{2\sqrt{\phi^4 + 1}} & \frac{-\phi^4 + 2}{2(\phi^4 + 1)} & \frac{3\phi^2}{2(\phi^4 + 1)} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\phi^4 + 1}} & \frac{3\phi^2}{2(\phi^4 + 1)} & \frac{2\phi^4 - 1}{2(\phi^4 + 1)} \end{pmatrix}.$$

Agora, fazendo as identificações que ϕ satisfaz e simplificando quando possível, essa matriz é da seguinte forma.

$$[R]_C = \begin{pmatrix} -1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \\ \phi/2 & -1/(2\phi) & 1/2 \\ -1/(2\phi) & 1/2 & \phi/2 \end{pmatrix}.$$

Em que, $[R]_C$ é a matriz de rotação de 120° no sentido anti-horário ao redor do eixo v_1 . Observe que $[R]_C$ gera um grupo cíclico, de ordem três, de simetrias de rotação do dodecaedro, ao redor do eixo v_1 .

Além disso, através da Figura 3.24 observamos que nos vértices do dodecaedro pertencentes ao eixo v_1 há duas arestas de cubos inscritos conectadas a eles de cores vermelha e amarela e formando um triângulo ao redor deles temos arestas de cores azul, roxa e verde, então fazendo uma rotação anti-horária de 120° ao redor desse eixo, identificamos essa simetria com a permutação $(312) \in A_5$. Com isso, temos que o grupo de simetrias de rotação ao redor do eixo v_1 identificada ao A_5 é o seguinte grupo cíclico.

$$R_{v_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \\ \phi/2 & -1/(2\phi) & 1/2 \\ -1/(2\phi) & 1/2 & \phi/2 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (312) \rangle.$$

Em todos os demais casos, para encontrar a matriz de rotação anti-horária, associada ao eixo e ao ângulo desejados, deve ser feito um procedimento inteiramente análogo.

Assim, teremos que, associado ao eixo $v_2 = (0, -1/\phi, \phi)$ está o seguinte grupo cíclico de rotações múltiplas de 120° de I .

$$R_{v_2} = \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 & \phi/2 & 1/(2\phi) \\ -\phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \\ -1/(2\phi) & -1/2 & \phi/2 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (543) \rangle.$$

Veja que, v_1 e v_2 estão contidos no plano yz , mas para os eixos de vértices do dodecaedro, contidos nos dois outros planos, teremos casos análogos. Com efeito, no plano zx associado ao eixo $v_3 = (\phi, 0, 1/\phi)$ temos o seguinte grupo cíclico de rotações, múltiplas de 120° .

$$R_{v_3} = \left\langle \begin{pmatrix} -1/(2\phi) & -1/2 & \phi/2 \\ -1/2 & \phi/2 & 1/(2\phi) \\ -\phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (235) \rangle.$$

E associado ao eixo $v_4 = (\phi, 0, -1/\phi)$ temos os elementos de I que formam o seguinte grupo cíclico.

$$R_{v_4} = \left\langle \begin{pmatrix} -1/(2\phi) & 1/2 & -\phi/2 \\ 1/2 & \phi/2 & 1/(2\phi) \\ \phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (413) \rangle.$$

Finalmente, no plano xy , temos o eixo $v_5 = (1/\phi, \phi, 0)$ cujo grupo cíclico de simetrias associado é o seguinte.

$$R_{v_5} = \left\langle \begin{pmatrix} \phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \\ 1/(2\phi) & -1/2 & \phi/2 \\ -1/2 & -\phi/2 & -1/(2\phi) \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (423) \rangle.$$

E o eixo $v_6 = (-1/\phi, \phi, 0)$ que é associado ao seguinte grupo de rotações múltiplas de 120° , ao redor desse eixo.

$$R_{v_6} = \left\langle \begin{pmatrix} \phi/2 & -1/(2\phi) & 1/2 \\ 1/(2\phi) & -1/2 & -\phi/2 \\ 1/2 & \phi/2 & -1/(2\phi) \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (315) \rangle.$$

Os demais vértices do dodecaedro estão nas 4 diagonais do cubo central, de faces paralelas aos planos xy , yz e xz (na Figura 3.24 são os vértices do cubo inscrito cuja cor é roxa). Essas diagonais são os eixos $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ e $(1, 1, -1)$ de simetria associados aos 8 vértices $\pm (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$, $\pm (1/\sqrt{3})(-1, 1, 1)$, $\pm (1/\sqrt{3})(1, -1, 1)$ e $\pm (1/\sqrt{3})(1, 1, -1)$ do dodecaedro, respectivamente.

A cada um desses eixos está associado um grupo cíclico, de ordem 3, de simetrias de I , rotações múltiplas de 120° ao redor desse eixo.

Como anteriormente, descrevemos os grupos cíclicos de I identificados a cada um desses eixos e o associamos a grupos cíclicos de A_5 .

Para o eixo $v_7 = (1, 1, 1)$ o grupo cíclico de simetrias associado é seguinte.

$$R_{v_7} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (145) \rangle.$$

Já associado ao eixo $v_8 = (-1, 1, 1)$ temos o subseqüente grupo cíclico.

$$R_{v_8} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (245) \rangle.$$

Analogamente, rotacionando ao redor do eixo $v_9 = (1, 1, -1)$ temos o próximo grupo de simetrias.

$$R_{v_9} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (125) \rangle.$$

Por fim, ao eixo $v_{10} = (1, -1, 1)$ é associado o grupo $R_{v_{10}}$.

$$R_{v_{10}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (124) \rangle.$$

Dessa forma, apresentamos todos os grupos cíclicos associados aos dez eixos de simetrias de vértices, cada um com duas matrizes de I , não triviais, de ordem três. Juntos compõem o conjunto de todas as simetrias de eixos nos vértices do dodecaedro, conjunto esse que pelo isomorfismo com o A_5 gera todas as simetrias de rotação do dodecaedro.

Além disso, como os elementos de I são unicamente determinados por um eixo e um ângulo de simetria de rotação anti-horária, descrevemos explicitamente todos os elementos de I associados aos eixos de vértices do dodecaedro, no seguinte esquema.

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = (0, 1/\phi, \phi) \\ v_2 = (0, -1/\phi, \phi) \\ v_3 = (\phi, 0, 1/\phi) \\ v_4 = (\phi, 0, -1/\phi) \\ v_5 = (1/\phi, \phi, 0) \\ v_6 = (-1/\phi, \phi, 0) \\ v_7 = (1, 1, 1) \\ v_8 = (-1, 1, 1) \\ v_9 = (1, 1, -1) \\ v_{10} = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{São determinadas duas} \\ \text{simetrias de rotação de } I \\ \text{de ângulos } 120^\circ \text{ e } 240^\circ \\ \text{no sentido anti-horário} \\ \text{para cada um desses eixos.} \end{array}$$

Vamos agora analisar os elementos de I relacionados aos eixos de faces do dodecaedro, para isso, observe primeiro que todos os seis eixos desse caso, estão dois a dois contidos nos planos zy , xz e xy . Além disso, cada face intersecta um único dos três eixos x , y , z e essa interseção se dá no ponto médio da aresta do dodecaedro perpendicular a esse eixo.

Veremos então, para cada um dos planos mencionados, a interseção entre eles e o dodecaedro circunscrito, como feito anteriormente no caso dos eixos de vértices.

Assim, observe pela Figura 3.25 que a distância entre o centro de qualquer face do dodecaedro ao ponto de interseção dessa face com o eixo euclidiano correspondente é o tamanho da apótema do pentágono face do dodecaedro.

Daí, com algumas manipulações algébricas, utilizando semelhança de triângulos, temos que a apótema do pentágono é $a_p = R\phi/2$, em que R é o comprimento dos seguimentos de reta que saem dos vértices do pentágono e vão até o centro do círculo circunscrito no pentágono (veja a Figura 3.27).

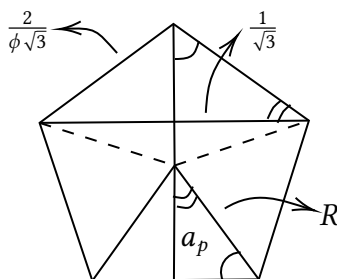


Figura 3.27: Apótema do pentágono face do dodecaedro em função do raio R .

$$\frac{a_p}{R} = \frac{1/\sqrt{3}}{2/(\phi\sqrt{3})} \Rightarrow a_p = R \left(\frac{\phi}{2} \right).$$

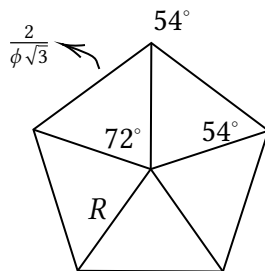


Figura 3.28: Cálculo do raio R do círculo em que os pentágonos estão inscritos.

Assim, vamos calcular o valor de R , usando a lei dos cossenos nos triângulos mostrados na Figura 3.28 e usando que $\cos(72^\circ) = 1/(2\phi)$ (fato que será mostrado futuramente).

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\phi\sqrt{3}} \right)^2 &= 2R^2 - 2R^2 \cos(54^\circ). \\ \Rightarrow \frac{4}{3\phi^2} &= \frac{4\phi R^2 - 2R^2}{2\phi} = \frac{R^2(4\phi - 2)}{2\phi}. \\ \Rightarrow R^2 &= \frac{8}{3\phi(4\phi - 2)} = \frac{8}{12\phi^2 - 6\phi} \\ &= \frac{8}{6\phi + 12} = \frac{4}{3\phi + 6} \\ &= \frac{4}{3(\phi + 1 + 1)} = \frac{4}{3(\phi^2 + 1)}. \\ \Rightarrow R &= \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\phi^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos encontrar o valor da apótema do pentágono, como queríamos.

$$a_p = R \left(\frac{\phi}{2} \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\phi^2 + 1}} \right) \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{\phi}{\sqrt{3}\sqrt{\phi^2 + 1}}.$$

Com o valor dessa distância em mãos, podemos encontrar as coordenadas do centro das faces do dodecaedro. Na Figura 3.29 escolhemos analisar um dos eixos de face no plano zy , pois os demais casos são análogos. Veja então que pelo Teorema de Pitágoras podemos encontrar o tamanho do segmento de reta nomeado por c .

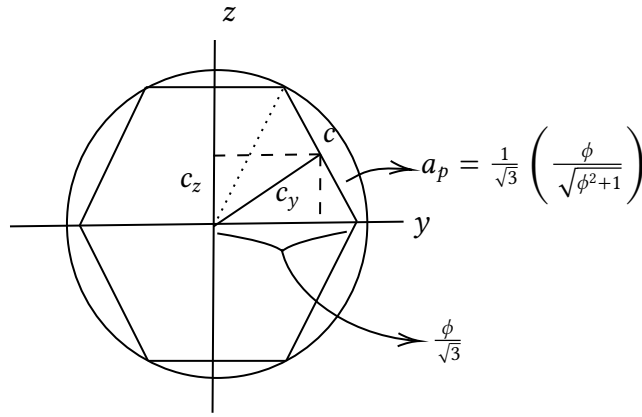


Figura 3.29: Cálculo dos centros das faces do dodecaedro.

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{\phi^2}{3} - \frac{\phi^2}{3(\phi^2 + 1)} = \frac{\phi^2(\phi^2 + 1) - \phi^2 - \phi^2}{3(\phi^2 + 1)} = \frac{\phi^4}{3(\phi^2 + 1)} \\ \Rightarrow c &= \frac{\phi^2}{\sqrt{3}\sqrt{\phi^2 + 1}}. \end{aligned}$$

A partir do tamanho do segmento c , utilizando o cálculo da área de triângulos e as relações métricas no triângulo retângulo, podemos encontrar, respectivamente, as coordenadas c_z e c_y do centro da face analisada. Assim, com o cálculo mostrado a seguir, encontramos a coordenada c_z desejada.

$$\begin{aligned} \frac{c_z}{2} \left(\frac{\phi}{\sqrt{3}} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{\sqrt{3(\phi^2 + 1)}} \right) \left(\frac{\phi^2}{\sqrt{3(\phi^2 + 1)}} \right) \\ \Rightarrow \frac{c_z}{\sqrt{3}} &= \frac{\phi^2}{3(\phi^2 + 1)} \\ \Rightarrow c_z &= \frac{\phi^2 \sqrt{3}}{3(\phi^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Encontramos, como queríamos, a coordenada c_y forma subsequente.

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{\phi}{\sqrt{3}} c_y \\ \Rightarrow \frac{\phi^3}{3(\phi^2 + 1)} &= \frac{c_y}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow c_y &= \frac{\phi^3 \sqrt{3}}{3(\phi^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Com isso, encontramos o centro da face do dodecaedro, analisada na Figura 3.29, que a dado pelo seguinte.

$$\left(0, \frac{\phi^3 \sqrt{3}}{3(\phi^2 + 1)}, \frac{\phi^2 \sqrt{3}}{3(\phi^2 + 1)} \right).$$

Assim, encontramos as coordenadas, relativas aos eixos correspondentes, de todos os centros das faces do dodecaedro, pontos esses que determinam todos os eixos de simetrias de faces.

Observe na Figura 3.30, as coordenadas dos centros das faces pertencentes ao plano zy . Assim, no plano zy , os dois eixos de simetria de face do dodecaedro são determinados pelos vetores diretores $f_1 = (0, \phi, 1)$ e $f_2 = (0, -\phi, 1)$.

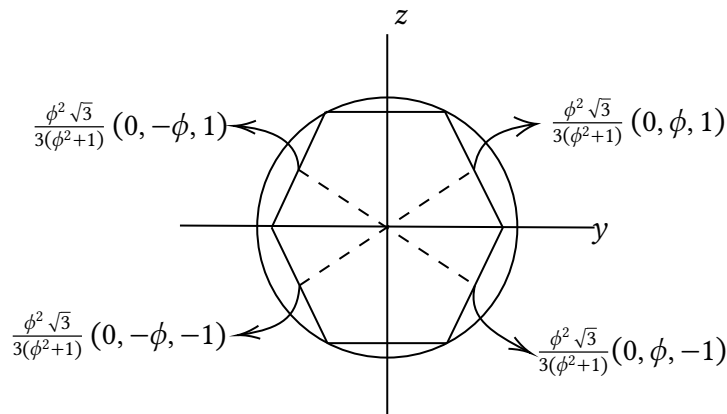


Figura 3.30: Centros das faces do dodecaedro no plano zy .

Vamos, a partir dessa construção, descrever todos os eixos de simetria de faces do dodecaedro em cada plano, e associá-los às matrizes de I , simetrias de rotação, nesse caso múltiplas de 72° , bem como suas identificações com o A_5 . Para cada eixo de simetria de face teremos um grupo cíclico de matrizes de ordem cinco.

Através da mesma construção feita para apresentar as matrizes associadas aos eixos de vértices, encontramos as matrizes associadas aos eixos de face.

Assim, no plano zy , para o eixo $f_1 = (0, \phi, 1)$ temos associado a ele, o seguinte grupo cíclico de I .

$$R_{f_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -\phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \\ 1/(2\phi) & 1/2 & -\phi/2 \\ 1/2 & -\phi/2 & -1/(2\phi) \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (14352) \rangle.$$

Para o eixo $f_2 = (0, -\phi, 1)$ temos associado o seguinte grupo de simetrias.

$$R_{f_2} = \left\langle \begin{pmatrix} -\phi/2 & 1/(2\phi) & -1/2 \\ -1/(2\phi) & 1/2 & \phi/2 \\ 1/2 & \phi/2 & -1/(2\phi) \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (23145) \rangle.$$

No plano zx temos o eixo de simetria de face determinado por $f_3 = (1, 0, \phi)$ com o consequente grupo cíclico associado.

$$R_{f_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 & \phi/2 & 1/(2\phi) \\ \phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \\ -1/(2\phi) & 1/2 & -\phi/2 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (34251) \rangle.$$

O outro eixo desse plano é determinado por $f_4 = (1, 0, -\phi)$ e associado a ele temos o grupo R_{f_4} .

$$R_{f_4} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 & -\phi/2 & -1/(2\phi) \\ -\phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \\ 1/(2\phi) & 1/2 & -\phi/2 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (23514) \rangle.$$

Por fim, no plano xy temos o eixo $f_5 = (\phi, 1, 0)$ com grupo de simetrias de rotação apresentado a seguir.

$$R_{f_5} = \left\langle \begin{pmatrix} -1/(2\phi) & 1/2 & \phi/2 \\ -1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \\ \phi/2 & -1/(2\phi) & 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (31245) \rangle.$$

E associado ao eixo $f_6 = (-\phi, 1, 0)$ temos o grupo de simetrias expresso R_{f_6} .

$$R_{f_6} = \left\langle \begin{pmatrix} -1/(2\phi) & -1/2 & -\phi/2 \\ 1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \\ -\phi/2 & -1/(2\phi) & 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \langle (54321) \rangle.$$

Assim, descrevemos todos os eixos e todas as simetrias de face do dodecaedro correspondentes aos seus respectivos eixos, análise sintetizada e descrita explicitamente no

esquema seguinte.

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = (0, \phi, 1) \\ f_2 = (0, -\phi, 1) \\ f_3 = (1, 0, \phi) \\ f_4 = (1, 0, -\phi) \\ f_5 = (\phi, 1, 0) \\ f_6 = (-\phi, 1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{São determinadas quatro} \\ \text{simetrias de rota\c{c}o} \\ \text{de } I \text{ de \c{a}ngulos } 72^\circ, \\ \text{144}^\circ, 216^\circ \text{ e } 288^\circ \\ \text{no sentido anti-hor\c{a}rio} \\ \text{para cada um desses eixos.} \end{array}$$

Para finalizar essa análise precisamos encontrar os doze eixos de simetrias de arestas restantes. Observe então que para cada par de arestas opostas perpendiculares aos eixos x , y e z estão associados quatro pares de arestas determinadas pelos extremos dessa aresta e os vértices do cubo central. Olhemos então para cada par de arestas perpendiculares a cada eixo, a partir dela devemos encontrar as arestas do dodecaedro adjacentes e seus pontos médios que determinam, cada um, um eixo de simetria dessas arestas.

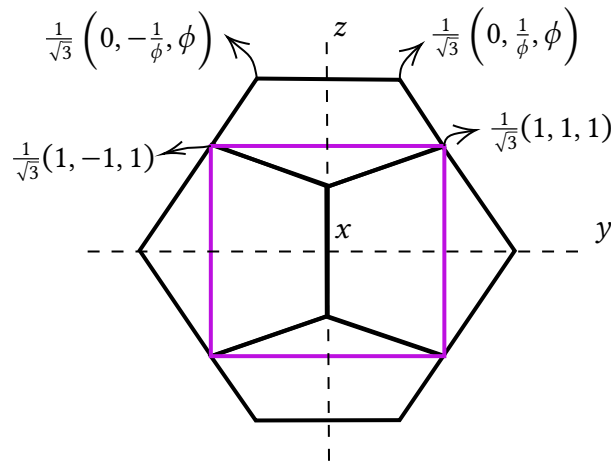


Figura 3.31: Vértices extremos das arestas restantes.

No caso do plano zy (veja a Figura 3.31), temos um par de arestas perpendiculares a z , mas basta olharmos para a aresta de coordenada $z > 0$ pois, pontos antipodais determinam o mesmo eixo de simetria, assim, os extremos da aresta analisada são os vértices $(1/\sqrt{3})(0, -1/\phi, \phi)$ e $(1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi)$ do dodecaedro. Em cada um desses vértices se encontram duas arestas conectadas a eles e aos vértices do cubo central $(1/\sqrt{3})(-1, -1, 1)$, $(1/\sqrt{3})(1, -1, 1)$, $(1/\sqrt{3})(-1, 1, 1)$ e $(1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$ respectivamente. Sabendo então os extremos das arestas (associadas aos eixos de arestas), podemos encontrar as coordenadas de seus pontos médios, pontos esses que determinam os eixos de simetria de arestas.

$$\begin{aligned} \frac{(1/\sqrt{3})(0, -1/\phi, \phi) + (1/\sqrt{3})(-1, -1, 1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1, -\phi, \phi^2). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(0, -1/\phi, \phi) + (1/\sqrt{3})(1, -1, 1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -\phi, \phi^2). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi) + (1/\sqrt{3})(-1, 1, 1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1, \phi, \phi^2). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi) + (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, \phi, \phi^2). \end{aligned}$$

Daí, esses quatro pontos médios, das respectivas arestas, determinam os eixos $a_4 = (-1, -\phi, \phi^2)$, $a_5 = (1, -\phi, \phi^2)$, $a_6 = (-1, \phi, \phi^2)$, $a_7 = (1, \phi, \phi^2)$ de simetrias de arestas do dodecaedro. Veja que a cada um desses eixos está associada uma matriz de simetria de rotação de I de 180° ao redor do mesmo que, similar aos demais casos, é identificada a um elemento de A_5 .

As matrizes correspondentes a esses eixos são, respectivamente, as seguintes.

$$R_{a_4} = \begin{pmatrix} 1/(2\phi) & 1/2 & \phi/2 \\ 1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \\ \phi/2 & 1/(2\phi) & -1/2 \end{pmatrix} \cong (14)(23),$$

$$R_{a_5} = \begin{pmatrix} 1/(2\phi) & -1/2 & -\phi/2 \\ -1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \\ -\phi/2 & 1/(2\phi) & -1/2 \end{pmatrix} \cong (13)(25),$$

$$R_{a_6} = \begin{pmatrix} 1/(2\phi) & 1/2 & -\phi/2 \\ 1/2 & -\phi/2 & -1/(2\phi) \\ -\phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \end{pmatrix} \cong (14)(35) \text{ e}$$

$$R_{a_7} = \begin{pmatrix} 1/(2\phi) & -1/2 & \phi/2 \\ -1/2 & -\phi/2 & -1/(2\phi) \\ \phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \end{pmatrix} \cong (25)(34).$$

Analogamente, no plano zx os extremos da aresta perpendicular ao eixo $x > 0$ são $(1/\sqrt{3})(\phi, 0, -1/\phi)$ e $(1/\sqrt{3})(\phi, 0, 1/\phi)$. Em cada um deles se encontram duas arestas conectadas aos vértices do cubo central $(1/\sqrt{3})(1, -1, -1)$, $(1/\sqrt{3})(1, 1, -1)$, $(1/\sqrt{3})(1, -1, 1)$ e $(1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$, respectivamente. Assim, os pontos médios dessas arestas são dadas pelas coordenadas calculadas abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{(1/\sqrt{3})(\phi, 0, -1/\phi) + (1/\sqrt{3})(1, -1, -1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\phi^2, -1, -\phi). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(\phi, 0, -1/\phi) + (1/\sqrt{3})(1, 1, -1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\phi^2, 1, -\phi). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(\phi, 0, 1/\phi) + (1/\sqrt{3})(1, -1, 1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\phi^2, -1, \phi). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(\phi, 0, 1/\phi) + (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\phi^2, 1, \phi). \end{aligned}$$

Nesse caso, associado aos eixos $a_8 = (\phi^2, -1, -\phi)$, $a_9 = (\phi^2, 1, -\phi)$, $a_{10} = (\phi^2, -1, \phi)$ e $a_{11} = (\phi^2, 1, \phi)$ temos as respectivas matrizes de rotação de I .

$$R_{a_8} = \begin{pmatrix} -\phi/2 & -1/(2\phi) & 1/2 \\ -1/(2\phi) & -1/2 & -\phi/2 \\ 1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \end{pmatrix} \cong (15)(23),$$

$$R_{a_9} = \begin{pmatrix} -\phi/2 & -1/(2\phi) & -1/2 \\ -1/(2\phi) & -1/2 & \phi/2 \\ -1/2 & \phi/2 & 1/(2\phi) \end{pmatrix} \cong (24)(35),$$

$$R_{a_{10}} = \begin{pmatrix} -\phi/2 & 1/(2\phi) & 1/2 \\ 1/(2\phi) & -1/2 & \phi/2 \\ 1/2 & \phi/2 & 1/(2\phi) \end{pmatrix} \cong (15)(34) \text{ e}$$

$$R_{a_{11}} = \begin{pmatrix} -\phi/2 & 1/(2\phi) & -1/2 \\ 1/(2\phi) & -1/2 & -\phi/2 \\ -1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \end{pmatrix} \cong (13)(24).$$

Por fim, no plano xy os extremos da aresta perpendicular ao eixo $y > 0$ são $(1/\sqrt{3})(-1/\phi, \phi, 0)$ e $(1/\sqrt{3})(1/\phi, \phi, 0)$. Em cada um deles se encontram duas arestas conectadas aos vértices do cubo central, são eles $(1/\sqrt{3})(-1, 1, -1)$, $(1/\sqrt{3})(-1, 1, 1)$, $(1/\sqrt{3})(1, 1, -1)$ e $(1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$, respectivamente. Assim, os pontos médios dessas arestas são os seguintes.

$$\begin{aligned}\frac{(1/\sqrt{3})(-1/\phi, \phi, 0) + (1/\sqrt{3})(-1, 1, -1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(-\phi, \phi^2, -1). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(-1/\phi, \phi, 0) + (1/\sqrt{3})(-1, 1, 1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(-\phi, \phi^2, 1). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(1/\phi, \phi, 0) + (1/\sqrt{3})(1, 1, -1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\phi, \phi^2, -1). \\ \frac{(1/\sqrt{3})(1/\phi, \phi, 0) + (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\phi, \phi^2, 1).\end{aligned}$$

Nesse caso, associado aos eixos de arestas $a_{12} = (-\phi, \phi^2, -1)$, $a_{13} = (-\phi, \phi^2, 1)$, $a_{14} = (\phi, \phi^2, -1)$ e $a_{15} = (\phi, \phi^2, 1)$ temos as respectivas matrizes de rotação de I

$$R_{a_{12}} = \begin{pmatrix} -1/2 & \phi/2 & -1/(2\phi) \\ \phi/2 & 1/(2\phi) & -1/2 \\ -1/(2\phi) & -1/2 & -\phi/2 \end{pmatrix} \cong (23)(45),$$

$$R_{a_{13}} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\phi/2 & -1/(2\phi) \\ -\phi/2 & 1/(2\phi) & 1/2 \\ -1/(2\phi) & 1/2 & -\phi/2 \end{pmatrix} \cong (12)(34),$$

$$R_{a_{14}} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\phi/2 & 1/(2\phi) \\ -\phi/2 & 1/(2\phi) & -1/2 \\ 1/(2\phi) & -1/2 & -\phi/2 \end{pmatrix} \cong (13)(45) \text{ e}$$

$$R_{a_{15}} = \begin{pmatrix} -1/2 & \phi/2 & 1/(2\phi) \\ \phi/2 & 1/(2\phi) & 1/2 \\ 1/(2\phi) & 1/2 & -\phi/2 \end{pmatrix} \cong (12)(35).$$

Essas doze matrizes complementam o conjunto de todas as matrizes de I simetrias de rotação de arestas do dodecaedro. Sintetizando essa discussão, descrevemos explicitamente todos os elementos de I associados aos eixos de arestas do dodecaedro, no seguinte

esquema.

$$\left. \begin{array}{l}
 a_1 = (1, 0, 0) \\
 a_2 = (0, 1, 0) \\
 a_3 = (0, 0, 1) \\
 a_4 = (-1, -\phi, \phi^2) \\
 a_5 = (1, -\phi, \phi^2) \\
 a_6 = (-1, \phi, \phi^2) \\
 a_7 = (1, \phi, \phi^2) \\
 a_8 = (\phi^2, -1, -\phi) \\
 a_9 = (\phi^2, 1, -\phi) \\
 a_{10} = (\phi^2, -1, \phi) \\
 a_{11} = (\phi^2, 1, \phi) \\
 a_{12} = (-\phi, \phi^2, -1) \\
 a_{13} = (-\phi, \phi^2, 1) \\
 a_{14} = (\phi, \phi^2, -1) \\
 a_{15} = (\phi, \phi^2, 1)
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{É determinada uma} \\
 \text{simetria de rotação} \\
 \text{de } I \text{ de ângulo } 180^\circ \\
 \text{no sentido anti-horário} \\
 \text{para cada um desses eixos.}
 \end{array}$$

Associando, por fim, a simetria identidade do dodecaedro ($\cong e_{A_5}$) com a matriz identidade de $SO(3)$ identificamos explicitamente todos os elementos de $I \cong A_5$ com as simetrias de rotação nos eixos de simetria do dodecaedro.

Além disso, descrevemos explicitamente, através dos eixos de simetrias e os ângulos de simetria de rotação anti-horária, todos os elementos do Grupo Icosaédrico Binário I .

3.6 Um subgrupo de \mathbb{S}^3 relacionado a $I \subset SO(3)$

Tendo estudado os 60 elementos do Grupo Icosaédrico Binário I , subgrupo do grupo $SO(3)$, de forma minuciosa, vamos relembrar o homomorfismo $(2 : 1)$, entre a 3-esfera e o grupo $SO(3)$, construído na Seção 3.2. A construção desse homomorfismo desenvolvida no Teorema 28 nos mostra como relacionar cada elemento de $SO(3)$ com dois elementos da esfera \mathbb{S}^3 .

Assim, através desse homomorfismo podemos identificar aos 60 elementos de I , um subconjunto de 120 elementos da esfera \mathbb{S}^3 . Isso significa que, para cada simetria de rotação do dodecaedro, definida por um eixo e um ângulo anti-horário, determinamos dois elementos da esfera \mathbb{S}^3 associados a ela.

É extremamente importante para esse trabalho descrever essa identificação, ocasionando a apresentação explícita de todos os elementos da esfera \mathbb{S}^3 que estão associados aos elementos de I por esse homomorfismo.

Desse modo, vamos primeiro descrever os elementos da esfera \mathbb{S}^3 que são identificados às simetrias de rotação nos eixos de vértices do dodecaedro.

Para isso, tome o eixo $v_1 = (0, 1/\phi, \phi)$, que é o eixo determinado pelo vértice $(1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi)$ do dodecaedro. Temos associados a ele, dois elementos de I , uma rotação de 120° e sua inversa de 240° , nesse caso, os 4 elementos de \mathbb{S}^3 identificados a

esses elementos de I , tem quaternio unitário puro $v_1 = (1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi)$, que é o eixo v_1 normalizado, e ângulos $\theta_1 = 120^\circ/2$ e $\theta_2 = 240^\circ/2$, assim, usando a identificação $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, os elementos da 3-esfera estão mostrados abaixo, em que \approx simboliza a relação ψ , construída na Seção 3.2.

$$R_{v_1}^{120^\circ} \approx \begin{cases} t_{v_1, \theta_1} = \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, 0, 1/\phi, \phi); \\ -t_{v_1, \theta_1} = \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, 0, 1/\phi, \phi). \end{cases}$$

$$R_{v_1}^{240^\circ} \approx \begin{cases} t_{v_1, \theta_2} = \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, 0, 1/\phi, \phi); \\ -t_{v_1, \theta_2} = \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(0, 1/\phi, \phi) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, 0, 1/\phi, \phi). \end{cases}$$

Veja que, são sempre quatro quaternios unitários associados a cada eixo de simetria de vértices do dodecaedro, pois para cada eixo de vértice associamos duas rotações de I e dois quaternios unitários t e $-t$ para cada matriz de I . Sabendo isso, podemos facilmente listar todos os elementos da esfera \mathbb{S}^3 associados aos eixos de vértices do dodecaedro.

$$R_{v_2}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(0, -1/\phi, \phi) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, 0, -1/\phi, \phi); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(0, -1/\phi, \phi) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, 0, -1/\phi, \phi). \end{cases}$$

$$R_{v_2}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(0, -1/\phi, \phi) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, 0, -1/\phi, \phi); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(0, -1/\phi, \phi) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, 0, -1/\phi, \phi). \end{cases}$$

$$R_{v_3}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(\phi, 0, 1/\phi) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, \phi, 0, 1/\phi); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(\phi, 0, 1/\phi) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, \phi, 0, 1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{v_3}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(\phi, 0, 1/\phi) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, \phi, 0, 1/\phi); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(\phi, 0, 1/\phi) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, \phi, 0, 1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{v_4}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(\phi, 0, -1/\phi) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, \phi, 0, -1/\phi); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(\phi, 0, -1/\phi) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, \phi, 0, -1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{v_4}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(\phi, 0, -1/\phi) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, \phi, 0, -1/\phi); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(\phi, 0, -1/\phi) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, \phi, 0, -1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{v_5}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(1/\phi, \phi, 0) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, 1/\phi, \phi, 0); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(1/\phi, \phi, 0) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, 1/\phi, \phi, 0). \end{cases}$$

$$R_{v_5}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(1/\phi, \phi, 0) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, 1/\phi, \phi, 0); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(1/\phi, \phi, 0) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, 1/\phi, \phi, 0). \end{cases}$$

$$R_{v_6}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(-1/\phi, \phi, 0) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, -1/\phi, \phi, 0); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(-1/\phi, \phi, 0) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, -1/\phi, \phi, 0). \end{cases}$$

$$R_{v_6}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(-1/\phi, \phi, 0) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, -1/\phi, \phi, 0); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(-1/\phi, \phi, 0) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, -1/\phi, \phi, 0). \end{cases}$$

$$R_{v_7}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, 1, 1) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, 1, 1, 1); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, 1, 1) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, 1, 1, 1). \end{cases}$$

$$R_{v_7}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, 1, 1) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, 1, 1, 1); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, 1, 1) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, 1, 1, 1). \end{cases}$$

$$R_{v_8}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(-1, 1, 1) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, -1, 1, 1); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(-1, 1, 1) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, -1, 1, 1). \end{cases}$$

$$R_{v_8}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(-1, 1, 1) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, -1, 1, 1); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(-1, 1, 1) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, -1, 1, 1). \end{cases}$$

$$R_{v_9}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, 1, -1) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, 1, 1, -1); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, 1, -1) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, 1, 1, -1). \end{cases}$$

$$R_{v_9}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, 1, -1) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, 1, 1, -1); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, 1, -1) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, 1, 1, -1). \end{cases}$$

$$R_{v_{10}}^{120^\circ} \approx \begin{cases} \cos(60^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, -1, 1) \sin(60^\circ) = (1/2)(1, 1, -1, 1); \\ \cos(240^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, -1, 1) \sin(240^\circ) = (-1/2)(1, 1, -1, 1). \end{cases}$$

$$R_{v_{10}}^{240^\circ} \approx \begin{cases} \cos(120^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, -1, 1) \sin(120^\circ) = (1/2)(-1, 1, -1, 1); \\ \cos(300^\circ) + (1/\sqrt{3})(1, -1, 1) \sin(300^\circ) = (-1/2)(-1, 1, -1, 1). \end{cases}$$

Agora, veja que para cada eixo de simetrias de arestas do dodecaedro temos um único elemento de I , não trivial, rotação de 180° , associada a ele e daí teremos apenas dois elementos, t e $-t$, da esfera S^3 para cada eixo.

Listamos primeiro os seis elementos de S^3 que são associados as simetrias de I cujos eixos de rotação são os próprios eixos euclidianos x , y e z .

$$R_{a_1}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1, 0, 0) \sin(90^\circ) = (0, 1, 0, 0); \\ \cos(270^\circ) + (1, 0, 0) \sin(270^\circ) = (0, -1, 0, 0). \end{cases}$$

$$R_{a_2}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (0, 1, 0) \sin(90^\circ) = (0, 0, 1, 0); \\ \cos(270^\circ) + (0, 1, 0) \sin(270^\circ) = (0, 0, -1, 0). \end{cases}$$

$$R_{a_3}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (0, 0, 1) \sin(90^\circ) = (0, 0, 1, 0); \\ \cos(270^\circ) + (0, 0, 1) \sin(270^\circ) = (0, 0, -1, 0). \end{cases}$$

Nos demais casos precisamos encontrar um vetor de norma 1 em cada eixo, para isso vamos tomar o vetor diretor dos eixos, expressos na seção anterior, e normalizá-los. Veja

primeiro que a norma dos vetores diretores desses eixos são iguais, assim, basta fazer o cálculo para um dos casos. Tome então o eixo a_4 determinado por $(-1, -\phi, \phi^2)$ e vamos calcular sua norma.

$$\begin{aligned} \|(-1, -\phi, \phi^2)\| &= \sqrt{1 + \phi^2 + \phi^4} = \sqrt{1 + \phi + 1 + (\phi + 1)^2} \\ &= \sqrt{2 + \phi + \phi + 1 + 2\phi + 1} = \sqrt{4 + 4\phi} \\ &= \sqrt{4(\phi + 1)} = 2\phi. \end{aligned}$$

Assim, o vetor que queremos desse eixo é $(1/2)(-1/\phi, -1, \phi)$. Em todos os casos, basta dividir o vetor diretor de cada eixo pela sua norma 2ϕ , encontrando assim, os quatérnios unitários puros que precisamos. A partir disso, podemos listar todos os elementos de S^3 associados aos eixos de arestas, restantes, do dodecaedro.

$$R_{a_4}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(-1/\phi, -1, \phi) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, -1/\phi, -1, \phi); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(-1/\phi, -1, \phi) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, -1/\phi, -1, \phi). \end{cases}$$

$$R_{a_5}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(1/\phi, -1, \phi) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, 1/\phi, -1, \phi); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(1/\phi, -1, \phi) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, 1/\phi, -1, \phi). \end{cases}$$

$$R_{a_6}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(-1/\phi, 1, \phi) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, -1/\phi, 1, \phi); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(-1/\phi, 1, \phi) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, -1/\phi, 1, \phi). \end{cases}$$

$$R_{a_7}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(1/\phi, 1, \phi) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, 1/\phi, 1, \phi); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(1/\phi, 1, \phi) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, 1/\phi, 1, \phi). \end{cases}$$

$$R_{a_8}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(\phi, -1/\phi, -1) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, \phi, -1/\phi, -1); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(\phi, -1/\phi, -1) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, \phi, -1/\phi, -1). \end{cases}$$

$$R_{a_9}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(\phi, 1/\phi, -1) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, \phi, 1/\phi, -1); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(\phi, 1/\phi, -1) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, \phi, 1/\phi, -1). \end{cases}$$

$$R_{a_{10}}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(\phi, -1/\phi, 1) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, \phi, -1/\phi, 1); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(\phi, -1/\phi, 1) \sin(270^\circ) = -(1/2)(0, \phi, -1/\phi, 1). \end{cases}$$

$$R_{a_{11}}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(\phi, 1/\phi, 1) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, \phi, 1/\phi, 1); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(\phi, 1/\phi, 1) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, \phi, 1/\phi, 1). \end{cases}$$

$$R_{a_{12}}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(-1, \phi, -1/\phi) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, -1, \phi, -1/\phi); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(-1, \phi, -1/\phi) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, -1, \phi, -1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{a_{13}}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(-1, \phi, 1/\phi) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, -1, \phi, 1/\phi); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(-1, \phi, 1/\phi) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, -1, \phi, 1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{a_{14}}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(1, \phi, -1/\phi) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, 1, \phi, -1/\phi); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(1, \phi, -1/\phi) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, 1, \phi, -1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{a_{15}}^{180^\circ} \approx \begin{cases} \cos(90^\circ) + (1/2)(1, \phi, 1/\phi) \sin(90^\circ) = (1/2)(0, 1, \phi, 1/\phi); \\ \cos(270^\circ) + (1/2)(1, \phi, 1/\phi) \sin(270^\circ) = (-1/2)(0, 1, \phi, 1/\phi). \end{cases}$$

Vamos agora, relacionar a cada eixo de simetrias de faces do dodecaedro, 8 elementos da esfera S^3 , pois a cada eixo de simetria, desse tipo, temos 4 simetrias de I , não triviais, rotações de ângulos 72° , 144° , 216° e 288° , associadas a ele.

Vamos primeiro normalizar os vetores diretores desses eixos, analogamente ao caso anterior. Tome $f_1 = (0, \phi^3, \phi^2)$ e calculemos a sua norma.

$$\begin{aligned} \|f_1\| &= \sqrt{\phi^6 + \phi^4} = \sqrt{\phi^4(\phi^2 + 1)} \\ &= \phi^2 \sqrt{\phi^2 + 1}. \end{aligned}$$

Com isso, f_1 normalizado se torna $f_1 = (0, \phi/\sqrt{\phi^2 + 1}, 1/\sqrt{\phi^2 + 1})$ e observamos que a norma de todos os vetores diretores dos eixos de simetrias de face do dodecaedro é a mesma de f_1 , bastando dividi-los por essa norma para torná-los os quatérnios unitários puros que precisamos.

Além disso, para descrever os elementos da esfera S^3 associados a esses eixos, necessitamos calcular o valor de $\cos(36^\circ)$, $\sin(36^\circ)$, $\cos(72^\circ)$ e $\sin(72^\circ)$, pois todos os outros ângulos que precisamos são escritos em função desses.

$$\begin{aligned} \cos(36^\circ) &= -\cos(144^\circ) = -\cos(216^\circ) = \cos(324^\circ) \\ \sin(36^\circ) &= \sin(144^\circ) = -\sin(216^\circ) = -\sin(324^\circ) \\ \cos(72^\circ) &= -\cos(108^\circ) = -\cos(252^\circ) = \cos(288^\circ) \\ \sin(72^\circ) &= \sin(108^\circ) = -\sin(252^\circ) = -\sin(288^\circ) \end{aligned}$$

Assim, através de semelhança de triângulos, nos triângulos apresentados na Figura 3.32, calculamos o tamanho da aresta denominada b e em seguida, usando a lei dos cossenos, calculamos o $\cos(36^\circ)$ e o $\cos(72^\circ)$.

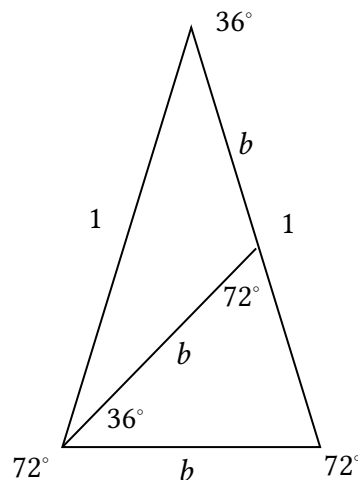


Figura 3.32: Cálculo de $\cos(36^\circ)$ e $\cos(72^\circ)$.

$$\begin{aligned}\frac{b}{1} &= \frac{b-1}{b} \Rightarrow b^2 + b - 1 = 0 \\ \Rightarrow b &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}.\end{aligned}$$

Encontrado o valor de b como queríamos, vamos calcular o valor de $\cos(36^\circ)$ em função do número de ouro.

$$\begin{aligned}b^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cos(36^\circ) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 2 - 2 \cos(36^\circ) \\ \Rightarrow 2 \cos(36^\circ) &= 2 - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow \cos(36^\circ) &= \frac{\phi}{2}.\end{aligned}$$

Vamos também encontrar o valor de $\cos(72^\circ)$ em função do número de ouro.

$$\begin{aligned}1^2 &= 1^2 + b^2 - 2b \cos(72^\circ) \Rightarrow b^2 = 2b \cos(72^\circ) \\ \Rightarrow \frac{b^2}{2b} &= \cos(72^\circ) \\ \Rightarrow \cos(72^\circ) &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2\phi}.\end{aligned}$$

Feito o que queríamos, basta utilizar a relação fundamental da trigonometria, para calcular o $\sin(36^\circ)$ e o $\sin(72^\circ)$.

$$\begin{aligned}\sin^2(36^\circ) &= 1 - \cos^2(36^\circ) \\ \sin^2(36^\circ) &= \frac{4 - \phi^2}{4} \\ \sin(36^\circ) &= \frac{\sqrt{4 - \phi^2}}{2}.\end{aligned}$$

Assim, encontramos o $\sin(36^\circ)$ em função do número de ouro, agora, vamos encontrar o $\sin(72^\circ)$ também em função do número de ouro.

$$\begin{aligned}\sin^2(72^\circ) &= 1 - \cos^2(72^\circ) \\ \sin^2(72^\circ) &= \frac{4\phi^2 - 1}{4\phi^2} = \frac{4\phi^2 + 3}{4\phi^2} \\ \sin(72^\circ) &= \frac{\sqrt{4\phi^2 - 1}}{2\phi} = \frac{\sqrt{4\phi + 3}}{2\phi}.\end{aligned}$$

Com isso, descrevemos todos os elementos da esfera S^3 associados aos eixos de simetrias de faces do dodecaedro.

$$R_{f_1}^{72^\circ} \approx \begin{cases} \cos(36^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, \phi, 1) \sin(36^\circ) = (1/2)(\phi, 0, 1, 1/\phi); \\ \cos(216^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, \phi, 1) \sin(216^\circ) = (-1/2)(\phi, 0, 1, 1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{f_1}^{144^\circ} \approx \begin{cases} \cos(72^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, \phi, 1) \sin(72^\circ) = (1/2)(1/\phi, 0, \phi, 1); \\ \cos(252^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, \phi, 1) \sin(252^\circ) = -1/2(1/\phi, 0, \phi, 1). \end{cases}$$

$$R_{f_1}^{216^\circ} \approx \begin{cases} \cos(108^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, \phi, 1) \sin(108^\circ) = (1/2)(-1/\phi, 0, \phi, 1); \\ \cos(288^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, \phi, 1) \sin(288^\circ) = (-1/2)(-1/\phi, 0, \phi, 1). \end{cases}$$

$$R_{f_1}^{288^\circ} \approx \begin{cases} \cos(144^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, \phi, 1) \sin(144^\circ) = (1/2)(-\phi, 0, 1, 1/\phi); \\ \cos(324^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, \phi, 1) \sin(324^\circ) = (-1/2)(-\phi, 0, 1, 1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{f_2}^{72^\circ} \approx \begin{cases} \cos(36^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, -\phi, 1) \sin(36^\circ) = (1/2)(\phi, 0, -1, 1/\phi); \\ \cos(216^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, -\phi, 1) \sin(216^\circ) = (-1/2)(\phi, 0, -1, 1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{f_2}^{144^\circ} \approx \begin{cases} \cos(72^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, -\phi, 1) \sin(72^\circ) = (1/2)(1/\phi, 0, -\phi, 1); \\ \cos(252^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, -\phi, 1) \sin(252^\circ) = (-1/2)(1/\phi, 0, -\phi, 1). \end{cases}$$

$$R_{f_2}^{216^\circ} \approx \begin{cases} \cos(108^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, -\phi, 1) \sin(108^\circ) = (1/2)(-1/\phi, 0, -\phi, 1); \\ \cos(288^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, -\phi, 1) \sin(288^\circ) = (-1/2)(-1/\phi, 0, -\phi, 1). \end{cases}$$

$$R_{f_2}^{288^\circ} \approx \begin{cases} \cos(144^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, -\phi, 1) \sin(144^\circ) = (1/2)(-\phi, 0, -1, 1/\phi); \\ \cos(324^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (0, -\phi, 1) \sin(324^\circ) = (1/2)(-\phi, 0, -1, 1/\phi). \end{cases}$$

$$R_{f_3}^{72^\circ} \approx \begin{cases} \cos(36^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, \phi) \sin(36^\circ) = (1/2)(\phi, 1/\phi, 0, 1); \\ \cos(216^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, \phi) \sin(216^\circ) = (-1/2)(\phi, 1/\phi, 0, 1). \end{cases}$$

$$R_{f_3}^{144^\circ} \approx \begin{cases} \cos(72^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, \phi) \sin(72^\circ) = (1/2)(1/\phi, 1, 0, \phi); \\ \cos(252^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, \phi) \sin(252^\circ) = (-1/2)(1/\phi, 1, 0, \phi). \end{cases}$$

$$R_{f_3}^{216^\circ} \approx \begin{cases} \cos(108^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, \phi) \sin(108^\circ) = (1/2)(-1/\phi, 1, 0, \phi); \\ \cos(288^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, \phi) \sin(288^\circ) = (-1/2)(-1/\phi, 1, 0, \phi). \end{cases}$$

$$R_{f_3}^{288^\circ} \approx \begin{cases} \cos(144^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, \phi) \sin(144^\circ) = (1/2)(-\phi, 1/\phi, 0, 1); \\ \cos(324^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, \phi) \sin(324^\circ) = (-1/2)(-\phi, 1/\phi, 0, 1). \end{cases}$$

$$R_{f_4}^{72^\circ} \approx \begin{cases} \cos(36^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, -\phi) \sin(36^\circ) = (1/2)(\phi, 1/\phi, 0, -1); \\ \cos(216^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, -\phi) \sin(216^\circ) = (-1/2)(\phi, 1/\phi, 0, -1). \end{cases}$$

$$R_{f_4}^{144^\circ} \approx \begin{cases} \cos(72^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, -\phi) \sin(72^\circ) = (1/2)(1/\phi, 1, 0, -\phi); \\ \cos(252^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, -\phi) \sin(252^\circ) = (-1/2)(1/\phi, 1, 0, -\phi). \end{cases}$$

$$R_{f_4}^{216^\circ} \approx \begin{cases} \cos(108^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, -\phi) \sin(108^\circ) = (1/2)(-1/\phi, 1, 0, -\phi); \\ \cos(288^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, -\phi) \sin(288^\circ) = (-1/2)(-1/\phi, 1, 0, -\phi). \end{cases}$$

$$R_{f_4}^{288^\circ} \approx \begin{cases} \cos(144^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, -\phi) \sin(144^\circ) = (1/2)(-\phi, 1/\phi, 0, -1); \\ \cos(324^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (1, 0, -\phi) \sin(324^\circ) = (-1/2)(-\phi, 1/\phi, 0, -1). \end{cases}$$

$$R_{f_5}^{72^\circ} \approx \begin{cases} \cos(36^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (\phi, 1, 0) \sin(36^\circ) = (1/2)(\phi, 1, 1/\phi, 0); \\ \cos(216^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (\phi, 1, 0) \sin(216^\circ) = (-1/2)(\phi, 1, 1/\phi, 0). \end{cases}$$

$$R_{f_5}^{144^\circ} \approx \begin{cases} \cos(72^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (\phi, 1, 0) \sin(72^\circ) = (1/2)(1/\phi, \phi, 1, 0); \\ \cos(252^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (\phi, 1, 0) \sin(252^\circ) = (-1/2)(1/\phi, \phi, 1, 0). \end{cases}$$

$$R_{f_5}^{216^\circ} \approx \begin{cases} \cos(108^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (\phi, 1, 0) \sin(108^\circ) = (1/2)(-1/\phi, \phi, 1, 0); \\ \cos(288^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (\phi, 1, 0) \sin(288^\circ) = (-1/2)(-1/\phi, \phi, 1, 0). \end{cases}$$

$$R_{f_5}^{288^\circ} \approx \begin{cases} \cos(144^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (\phi, 1, 0) \sin(144^\circ) = (1/2)(-\phi, 1, 1/\phi, 0); \\ \cos(324^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (\phi, 1, 0) \sin(324^\circ) = -1/2(-\phi, 1, 1/\phi, 0). \end{cases}$$

$$R_{f_6}^{72^\circ} \approx \begin{cases} \cos(36^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (-\phi, 1, 0) \sin(36^\circ) = (1/2)(\phi, -1, 1/\phi, 0); \\ \cos(216^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (-\phi, 1, 0) \sin(216^\circ) = (-1/2)(\phi, -1, 1/\phi, 0). \end{cases}$$

$$R_{f_6}^{144^\circ} \approx \begin{cases} \cos(72^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (-\phi, 1, 0) \sin(72^\circ) = (1/2)(1/\phi, -\phi, 1, 0); \\ \cos(252^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (-\phi, 1, 0) \sin(252^\circ) = (-1/2)(1/\phi, -\phi, 1, 0). \end{cases}$$

$$R_{f_6}^{216^\circ} \approx \begin{cases} \cos(108^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (-\phi, 1, 0) \sin(108^\circ) = (1/2)(-1/\phi, -\phi, 1, 0); \\ \cos(288^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (-\phi, 1, 0) \sin(288^\circ) = (-1/2)(-1/\phi, -\phi, 1, 0). \end{cases}$$

$$R_{f_6}^{288^\circ} \approx \begin{cases} \cos(144^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (-\phi, 1, 0) \sin(144^\circ) = (1/2)(-\phi, -1, 1/\phi, 0); \\ \cos(324^\circ) + (1/\sqrt{\phi^2 + 1}) (-\phi, 1, 0) \sin(324^\circ) = (-1/2)(-\phi, -1, 1/\phi, 0). \end{cases}$$

Por fim, temos a identidade $I \in I$, que pode ser vista como uma simetria de rotação de 0° ao redor de qualquer eixo ($a_1 = x$, por exemplo) e associado a ela temos dois elementos da esfera \mathbb{S}^3 .

$$I \approx \begin{cases} \cos(0^\circ) + (1, 0, 0) \sin(0^\circ) = (1, 0, 0, 0); \\ \cos(180^\circ) + (1, 0, 0) \sin(180^\circ) = (-1, 0, 0, 0). \end{cases}$$

Esses são todos os 120 elementos da 3-esfera, associados 2 a 2 a todos os 60 elementos de I . Mostraremos na próxima seção que o conjunto composto por esses elementos é um subgrupo da esfera \mathbb{S}^3 , denominado *Grupo Icosaédrico Binário*, simbolicamente representado por $2I$.

O Grupo Icosaédrico Binário recebe esse nome, justamente por existir um homomorfismo entre ele e o Grupo Icosaédrico, porém com elementos "duplicados", como pudemos ver ao longo dessa construção.

Devido à importância de $2I$ para esse trabalho, na seguinte seção, mostraremos que $2I$ é de fato um grupo e falaremos sobre algumas de suas propriedades, advindas diretamente de sua construção.

3.7 O Grupo Icosaédrico Binário $2I$

Na seção anterior descrevemos o Grupo Icosaédrico Binário mostrando quais são todos os seus elementos. O curioso nesse momento é que na nomenclatura de $2I$ há a palavra *grupo* mas, não é trivial que esse subconjunto da esfera S^3 é de fato um grupo algébrico. Vamos então mostrar que faz sentido chamá-lo de grupo.

Teorema 30. *O Grupo Icosaédrico Binário $2I$ é um grupo.*

Demonstração. Veremos que $2I$ é um subgrupo do grupo dos quatérnios unitários, apresentando que nele há um elemento neutro, que todo elemento tem um elemento inverso e que é fechado para a operação de multiplicação de quatérnios.

(i) Existe $(1, 0, 0, 0) \in 2I$ tal que para todo $q = (a, b, c, d) \in 2I$, tem-se que $(1, 0, 0, 0)(a, b, c, d) = (a, b, c, d)(1, 0, 0, 0) = (a, b, c, d)$, ou seja, $(1, 0, 0, 0)$ é o elemento neutro de $2I$.

(ii) Seja $q = (a, b, c, d) \in 2I$. Veja que $\|q\| = 1$ pois q é unitário, assim o inverso multiplicativo do quatérnio q é $q^{-1} = (a, -b, -c, -d)$.

Vamos mostrar que para cada eixo de simetria de rotação do dodecaedro os elementos de $2I$ identificados as simetrias nesse eixo, aparecem em pares (a, b, c, d) , $(a, -b, -c, -d)$, ou seja, que para todo elemento $q \in 2I$ tem-se $q^{-1} \in 2I$.

Observemos primeiro as simetrias de vértices do dodecaedro. Para cada eixo de simetria de vértice v_i , temos duas simetrias de rotação associadas a ele, uma de $\alpha = 120^\circ$ e uma de $\beta = 240^\circ$, em todos os casos ($i = 1, \dots, 10$) teremos que os elementos de $2I$ aparecem da seguinte forma $t_{v_i, \alpha}^{-1} = -t_{v_i, \beta}$ e $t_{v_i, \beta}^{-1} = -t_{v_i, \alpha}$.

Para os eixos de simetria de aresta a_i temos uma única simetria de rotação associada a ele de ângulo $\theta = 90^\circ$, nesse caso, para cada $i = 1, \dots, 15$, temos que $t_{a_i, \theta}^{-1} = -t_{a_i, \theta}$.

Já para cada eixo de simetria de face f_i , temos quatro simetrias de rotação associadas a ele, de ângulos $a = 72^\circ$, $b = 144^\circ$, $c = 216^\circ$ e $d = 288^\circ$. Daí, em todos os casos, $i = 1, \dots, 6$, temos que $t_{f_i, a}^{-1} = -t_{f_i, d}$, $t_{f_i, d}^{-1} = -t_{f_i, a}$, $t_{f_i, b}^{-1} = -t_{f_i, c}$ e $t_{f_i, c}^{-1} = -t_{f_i, b}$.

Por fim, os elementos $(1, 0, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0, 0)$ são inversos de si mesmos, mostrando que todos os elementos de $2I$ tem inversos em $2I$ como queríamos.

(iii) Vamos utilizar o homomorfismo sobrejetivo $\psi : S^3 \rightarrow SO(3)$ para mostrar que $2I$ é fechado para a operação. Para isso, tome $x, y \in 2I$, daí $xy \in S^3$. Veja que $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y) \in I$ pois como x e y pertencem a $2I$, $\psi(x)$ e $\psi(y)$ pertencem a I por construção, já que os elementos de $2I$ são as pré imagens de I por ψ , e I é um grupo. Logo, xy está na pré imagem de I e portanto $xy \in 2I$. \square

Na demonstração desse resultado poderíamos também ter argumentado que a pré-imagem de um grupo por um homomorfismo é um grupo.

Ademais, o grupo $2I$ é uma "duplicação" do Grupo Icosaédrico I que por sua vez é isomorfo ao A_5 , o grupo das permutações pares de 5 elementos. Essa identificação nos permite questionar se propriedades de A_5 se mantêm em $2I$.

Na Seção 1.4 mostramos que o grupo A_5 é um grupo simples - não tem subgrupos normais não triviais, e que também é perfeito - é igual ao seu grupo comutador $[A_5, A_5] = \{a^{-1}b^{-1}ab : a, b \in A_5\}$, por isso temos que o grupo I também é simples e perfeito.

Vamos então mostrar que uma das propriedades de I que se mantêm em $2I$ é que $2I$ é um grupo perfeito, isso é, $2I = [2I, 2I]$.

Teorema 31. *O Grupo Icosaédrico Binário é um grupo perfeito.*

Demonstração. O homomorfismo sobrejetivo entre \mathbb{S}^3 e $SO(3)$, construído na Seção 3.2, nos garante, através da observação do Corolário 3, a seguinte igualdade $\psi([2I, 2I]) = [\psi(2I), \psi(2I)] = [I, I] = I$, pois I é perfeito.

Veja que todo elemento de I é um comutador e a imagem inversa de qualquer comutador de I por ψ são dois comutadores de $2I$, isto é, a restrição de ψ no subgrupo comutador $[2I, 2I]$ satisfaz o seguinte $\psi|_{[2I, 2I]}([-x, y]) = \psi|_{[2I, 2I]}([x, -y]) \in I, \forall x, y \in 2I$. Ou seja, pra cada comutador de I existem dois elementos de $[2I, 2I]$ que são levados nele por ψ . Logo, a restrição de ψ em $[2I, 2I]$ é sobrejetiva e $2 : 1$. Portanto, $o([2I, 2I]) = 120$ e assim $[2I, 2I] = 2I$.

□

Assim, mostramos que $2I$ é perfeito. Além disso, como $2I$ é um subgrupo da esfera \mathbb{S}^3 , temos que $2I$ age na 3-esfera pela multiplicação (de quatérnios) à esquerda.

Portanto, podemos considerar o espaço topológico quociente $\mathbb{S}^3/(2I)$ gerado pela ação α , isto é, cada classe de equivalência (elemento do quociente) é a órbita dos elementos da esfera \mathbb{S}^3 por essa ação, com a topologia quociente.

3.8 Enfim o quociente $\mathbb{S}^3/(2I)$

Estudamos minuciosamente a esfera \mathbb{S}^3 e seu subespaço o Grupo Icosaédrico Binário. Para estudar o quociente entre eles, que como veremos é a 3-variedade chamada Esfera Homológica de Poincaré, vamos precisar da teoria de recobrimentos de espaços topológicos.

O conceito de recobrimento de espaços topológicos, e resultados associados a ele, além de nos ajudar a entender $\mathbb{S}^3/(2I)$, serão muito úteis para calcular seu Grupo Fundamental. Vamos então desenvolver os conceitos gerais dessa teoria necessários para o bom andamento desse trabalho.

Definição 55. Sejam E e B espaços topológicos conexos por caminhos. Uma aplicação $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ contínua é um *recobrimento* se existe $\Lambda \neq \emptyset$ conjunto tal que para todo $b \in B$, existe uma vizinhança aberta $U \subset B$ de b tal que

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.$$

Em que, \coprod simboliza a união disjunta, $V_\lambda \subset E$ é aberto e $p|_{V_\lambda} : V_\lambda \rightarrow U$ é homeomorfismo. Nesse caso, dizemos que E é o espaço de recobrimento de B .

O exemplo mais simples de recobrimento é a identidade de B em B . Outro exemplo de recobrimento é $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$, em que $\Lambda = \mathbb{Z}$, aplicação que faz \mathbb{R} percorrer infinitas voltas em S^1 tal que para cada elemento de S^1 existe uma vizinhança aberta tal que a pré imagem dessa vizinhança por p é a união disjunta de infinitos abertos em \mathbb{R} indexados por \mathbb{Z} , a Figura 3.33 ilustra esse exemplo.

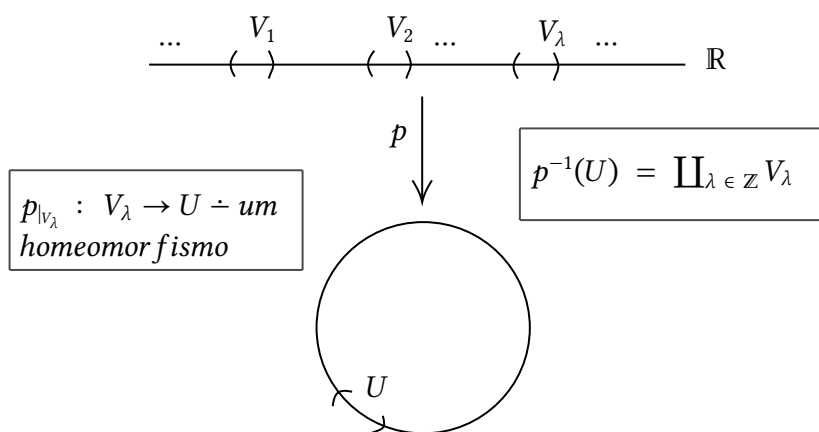


Figura 3.33: \mathbb{R} como um espaço de recobrimento de S^1 .

Um terceiro exemplo interessante é o recobrimento $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n = S^n/(x \sim -x)$, com $p(x) = [x]$. Nesse caso a pré imagem de uma vizinhança de um elemento $[x] \in \mathbb{R}P^n$ é duas vizinhanças abertas disjuntas em S^n , uma de x e outra de $-x$ tal que a restrição de p a cada uma dessas vizinhanças é um homeomorfismo.

Definição 56. Para um recobrimento $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$, o grupo das transformações de Deck $G(E)$ é o grupo composto pelos homeomorfismos $\psi_E : E \rightarrow E$ tal que $p \circ \psi_E = p$ com a operação de composição de aplicações.

Definição 57 (Recobrimento regular). Um recobrimento $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ é dito regular se dados dois pontos quaisquer $x, y \in E$, tais que $p(x) = p(y)$, existe uma transformação de Deck ψ que satisfaz $p \circ \psi = p$ tal que $\psi(x) = y$.

Um conceito importante da teoria de recobrimentos de espaços topológicos, que será usado nos resultados posteriores é o de levantamento de caminhos.

Proposição 22 (Levantamento de caminhos). Seja $q : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ um recobrimento. Dado um caminho $\gamma : I \rightarrow B$ e $e_0 \in q^{-1}(\gamma(0)) \subset E$ temos que existe um único $\tilde{\gamma}_{e_0} : I \rightarrow E$ tal que $\tilde{\gamma}_{e_0}(0) = e_0$ e $q \circ \tilde{\gamma}_{e_0} = \gamma$.

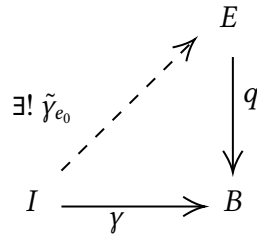


Figura 3.34: Levantamento de caminhos

Demonstração. Seja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ uma partição de I tal que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, em que U_i é um aberto uniformemente recoberto de B , ou seja, $q^{-1}(U_i) = \coprod_{\lambda_i \in \Lambda} V_{\lambda_i}$, em que cada V_{λ_i} são abertos disjuntos de E . Queremos uma $\tilde{\gamma}_{e_0}$ com $\tilde{\gamma}_{e_0}(0) = e_0$ que faz o diagrama da Figura 3.34 comutar.

Seja $V_{\lambda_0} \subset E$ a placa sobre U_0 tal que $e_0 \in V_{\lambda_0}$, como $q|_{V_{\lambda_0}}$ é homeomorfismo então $\tilde{\gamma}|_{[0,t_1]} = q^{-1}|_{V_{\lambda_0}}(\gamma|_{[0,t_1]})$ é a única curva em V_{λ_0} com projeção em $\gamma|_{[0,t_1]}$. Se $e_1 = \tilde{\gamma}(t_1)$, tome V_{λ_1} a placa sobre U_1 tal que $e_1 \in V_{\lambda_1}$ e $\tilde{\gamma}|_{[t_1,t_2]} = q^{-1}|_{V_{\lambda_1}}(\gamma|_{[t_1,t_2]})$. Continuando esse processo, obtemos $\tilde{\gamma}$ única (pois existe um número finito de U_i que cobre $\gamma(I)$). Como continuidade é uma propriedade local $\tilde{\gamma}$ é contínua pelo Lema da colagem para abertos. \square

Teorema 32. (*Levantamento de homotopias*) Dados uma homotopia $H : I \times I \rightarrow B$ e $\gamma_0(s) = H(s, 0) : I \rightarrow B$, seja $\tilde{\gamma}_0 : I \rightarrow E$ levantamento de γ_0 . Então, existe um único $\tilde{H} : I \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\gamma}_0(s)$ e $p \circ \tilde{H} = H$.

Demonstração. Dado $s \in I$, defina $\tilde{\eta}_{\gamma_0(s)}$ como o levantamento de $\eta_s = H(s, \cdot)$ para E . Defina $\tilde{H}(s, t) = \tilde{\eta}_{\gamma_0(s)}(t)$ que é localmente contínua de onde segue que é globalmente contínua (veja a Figura 3.35).

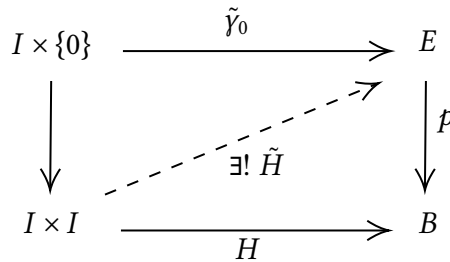


Figura 3.35: Levantamento de homotopias.

\square

Observação: quando observamos um grupo G agindo em um espaço topológico X , consideramos que essa ação age por homeomorfismos, isto é, se $\psi : G \times X \rightarrow X$ é a ação de G em X então cada $g := \psi_g : X \rightarrow X$, $g \in G$, é um homeomorfismo.

Seja X um espaço topológico conexo por caminhos, G um grupo agindo à esquerda em X e $p : X \rightarrow X/G$ a projeção $p(x) = [x]$, queremos saber quando essa aplicação é um recobrimento e que propriedades pode satisfazer o quociente X/G .

Uma propriedade preliminar que devemos considerar sobre essa projeção é que ela é aberta, isto é, p leva abertos do domínio em abertos do contra-domínio. Propriedade expressa na seguinte proposição.

Proposição 23. *Se G é um grupo agindo por homeomorfismos no espaço topológico X e $p : X \rightarrow X/G$ é a projeção definida acima, então p é uma transformação aberta.*

Demonstração. Lembremos que a topologia quociente definida em X/G é tal que $V \subset X/G$ é aberto $\Leftrightarrow p^{-1}(V)$ é aberto. Seja $A \subset X$ um aberto de X e $p(A) = \{\vartheta(x) : x \in A\} \subset X/G$, então $p(A) \subset X/G$ é aberto $\Leftrightarrow p^{-1}(p(A))$ é aberto. Mas

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(A)) &= p^{-1}(\{\vartheta(x) : x \in A\}) \\ &= \bigcup_{g \in G} \{gx : x \in A\} \\ &= \bigcup_{g \in G} g(A). \end{aligned}$$

Como g é um homeomorfismo, para todo $g \in G$, então $g(A)$ é aberto, para todo $g \in G$, e como a união de abertos é aberta, temos que $p^{-1}(p(A))$ é aberto. Logo, $p(A)$ é aberta, e portanto, p é uma aplicação aberta. \square

Vamos definir alguns tipos de ações de grupos que serão suficientes para concluir que a projeção p é um recobrimento e que o quociente X/G é localmente homeomorfo ao \mathbb{R}^n .

Definição 58. Uma ação de um grupo G em um conjunto X é *livre*, se o único elemento de G que fixa um $x \in X$ é a identidade, isto é, se $gx = x$, então $g = Id_G$.

Um ação livre é *errante* se todo ponto de X tem uma vizinhança cujas imagens por elementos de G são disjuntas, isto é, se para todo $x \in X$ podemos encontrar V vizinhança de x tal que $gV \cap V = \emptyset$ para todo $g \in G$, com $g \neq id_X$, como G é um grupo, isso implica que $gV \cap g'V = \emptyset$ se $g \neq g' \in G$. Tais vizinhanças são ditas errantes.

É fácil ver que se X é Hausdorff e a ação de G em X é livre e errante, as órbitas de G são conjuntos fechados. Além disso, essas propriedades nos permitem dar uma primeira resposta para o nosso questionamento.

Proposição 24. *Seja X uma n -variedade conexa (e, portanto, conexa por caminhos) e suponhamos que G é um grupo agindo em X por uma ação livre e errante. Então, a projeção $p : X \rightarrow X/G$ é um recobrimento e X/G é localmente homeomorfo ao \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Seja $x \in X$, tomemos uma vizinhança V de x tal que $gV \cap V = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq Id_G$. Como X é uma n -variedade, podemos assumir que V é homeomorfa a uma bola aberta em \mathbb{R}^n . Se definimos $U = p(V)$ então, pela escolha de V e porque p é aberta, a restrição $p|_V : V \rightarrow U$ é aberta, contínua, injetiva e sobrejetiva, isto é, ela é um homeomorfismo. Como x é um ponto arbitrário, isso mostra que todo ponto de X/G tem uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta em \mathbb{R}^n . Além disso, se V' é qualquer outra componente conexa de $p^{-1}(U)$, então existe $g' \in G$ tal que $V' = g'V$ e, como g' é um homeomorfismo de X e $p|_{V'} = p|_V \circ g'|_V$, podemos concluir que $p|_{V'}$ também é um

homeomorfismo de V' sobre U . Assim, vemos que U é uma vizinhança uniformemente recoberta. Como x é arbitrário temos que todo ponto de X/G tem uma tal vizinhança e, portanto, p é um recobrimento. \square

Para garantir que o quociente não é apenas localmente homeomorfo ao \mathbb{R}^n , mas também Hausdorff, precisamos definir a seguinte ação de grupos.

Definição 59. Seja G um grupo e X um espaço topológico localmente compacto, isto é, todo ponto de X está contido em um compacto. A ação de G em X é *propriamente descontínua* se, para todo compacto $K \subset X$, $gK \cap K \neq \emptyset$ para, no máximo, um número finito de homeomorfismos $g \in G$.

A seguinte proposição, que não será demonstrada nesse trabalho, nos ajuda a garantir que $\mathbb{S}^3/(2I)$ é uma 3-variedade.

Proposição 25. *Sejam X um espaço topológico Hausdorff e localmente compacto e G um grupo agindo em X . Se a ação de G em X é livre e propriamente descontínua então a ação é errante.*

Enfim, podemos apresentar o resultado de maior interesse dessa seção, anteriormente desenvolvido em [CARVALHO e SIEJAKOWSKI, 2021](#).

Teorema 33. *Seja X uma n -variedade conexa e G um grupo agindo em X , se a ação de G em X é livre e propriamente descontínua, então a projeção $p : X \rightarrow X/G$ é um recobrimento e o quociente X/G é Hausdorff.*

Demonstração. Suponha que a ação de G em X é livre e propriamente descontínua e veja que uma ação livre e propriamente descontínua é também errante e daí, pela Proposição 24, tudo o que precisamos provar é que a topologia quociente em X/G é Hausdorff. Para isso, sejam $x, x' \in X$ dois pontos em órbitas diferentes, isto é, cujas projeções em X/G são pontos distintos. Como X é Hausdorff e localmente compacto e a ação de G é livre e errante, podemos tomar vizinhanças compactas K de y e K' de y' errantes e disjuntas. Como as órbitas geradas por essa ação são fechadas, podemos assumir que a órbita de y não intersecta K' e a órbita de y' não intersecta K . Então, pela hipótese da ação ser propriamente descontínua, $K/(\bigcup_{g \in G} gK')$ e $K'/(\bigcup_{g \in G} gK)$ contêm vizinhanças de y e y' , respectivamente, cujas projeções são disjuntas. Portanto, o quociente Y/G é Hausdorff. \square

Além disso, subgrupos agindo em um grupo por multiplicação à esquerda ou à direita são sempre livres e toda ação por um grupo finito G em um espaço localmente conexo X é propriamente descontínua. Assim, como a esfera \mathbb{S}^3 é uma 3-variedade, localmente conexa, todo quociente dela pela ação de um subgrupo finito satisfaz as hipóteses do Teorema 33, portanto, seu quociente é uma 3-variedade.

Com isso, podemos concluir que o espaço $\mathbb{S}^3/(2I)$ é uma 3-variedade, a qual é nomeada de Esfera Homológica de Poincaré.

Nosso objetivo, nesse momento, é calcular o Grupo Fundamental dessa variedade. Para isso, definiremos uma propriedade de espaços topológicos que é necessária para

esse resultado e, em seguida, mostraremos dois resultados fundamentais sobre espaços de recobrimentos e transformações de Deck. Esses conceitos e resultados estão detalhados na Seção 1.3 do livro [HATCHER, 2001](#).

Definição 60. Um espaço topológico X é localmente conexo por caminhos em $x \in X$ se para cada vizinhança U de x , existe uma vizinhança conexa por caminhos V de x contida em U . Se X é localmente conexo por caminhos em cada ponto seu, então X é localmente conexo por caminhos.

No próximo resultado utilizaremos a consequência advinda do levantamento de homotopias de que o mapa $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ induzido pelo recobrimento $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$, cuja imagem $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ é um subgrupo que consiste de classes de homotopia de laços em B correspondentes aos laços em E , é sempre injetivo. De fato, se $[\gamma] \in \ker p_*$, então $(p \circ \gamma) \sim C_b$, $b = p(e)$. Logo, $(\widetilde{p \circ \gamma})_e \sim (\widetilde{C_b})$. Por unicidade, temos que $(\widetilde{p \circ \gamma})_e = \gamma \Rightarrow \gamma \sim C_e \Rightarrow [\gamma] = I$.

Disso decorre a correspondência de Galois, que é uma função que atribui a cada recobrimento $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$, com E 0-conexo, o subgrupo $p_*(\pi_1(E, e_0))$ de $\pi_1(B, b_0)$. Além disso, temos que p é um recobrimento universal, isto é, um recobrimento que cobre todos os recobrimentos 0-conexos, se E é um espaço simplesmente conexo, nesse caso, a correspondência de Galois associa p ao subgrupo trivial de $\pi_1(B, b_0)$.

Proposição 26. *Seja E um espaço topológico conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos, $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ um recobrimento e H o subgrupo $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$. Então,*

(i) *Se H é um subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ então p é um recobrimento regular;*

(ii) *$G(E)$, o grupo das transformações de Deck $\psi_E : E \rightarrow E$, é isomorfo ao quociente $N(H)/H$ em que $N(H)$ é o normalizador de H em $\pi_1(B, b_0)$, isto é, $N(H) = \{[\gamma] \in \pi_1(B, b_0) : [\gamma]^{-1}H[\gamma] = H\}$.*

Em particular, se p é um recobrimento regular, então $G(E)$ é isomorfo a $\pi_1(B, b_0)/H$. Além disso, se p é o recobrimento universal, então $G(E)$ é isomorfo a $\pi_1(B, b_0)$.

Demonstração. (i) O Teorema de classificação de espaços de recobrimento diz que ao associar o subgrupo $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ ao recobrimento $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ nós obtemos uma correspondência bijetiva entre todos os diferentes espaços de recobrimento de (B, b_0) e as classes de conjugação de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$. A partir disso observamos que mudar o ponto base $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ para $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ corresponde precisamente a conjugar H por um elemento $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$ em que γ é levantada para o caminho $\tilde{\gamma}$ que vai de e_0 até e_1 . Então $[\gamma]$ está no normalizador $N(H)$ se, e somente, se $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$ que pelo critério de levantamento é equivalente a existir uma transformação de Deck levando e_0 em e_1 . Então, o recobrimento é regular se, e somente, se $N(H) = \pi_1(B, b_0)$, que é, se, e somente se, H é um subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$.

(ii) Agora defina $\psi : N(H) \rightarrow G(E)$, que leva $[\gamma] \in N(H)$ na transformação de Deck $\tau \in G(E)$, que leva e_0 para e_1 . Então, ψ é um homomorfismo de grupos, pois se γ' é outro laço correspondente a transformação de Deck τ' levando e_0 em e'_1 então $\gamma \circ \gamma'$ é levantada para $\tilde{\gamma} \circ (\tau(\tilde{\gamma}'))$ um caminho de e_0 até $\tau(e'_1) = \tau\tau'(e_0)$, então, $\tau\tau'$ é uma transformação

de Deck correspondente a $[\gamma][\gamma']$. Pelo parágrafo anterior, ψ é sobrejetiva e seu núcleo consiste de classes $[\gamma]$ levantadas para laços em E . Esses são exatamente os elementos de $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$. Daí, pelo Teorema dos homomorfismos $G(E)$ é isomorfo a $N(H)/H$. \square

O seguinte resultado trata do caso específico que estamos interessados nesse trabalho.

Teorema 34. *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos e G um grupo agindo em X por uma ação livre e propriamente descontínua. Então,*

- (i) *O mapa quociente $p : X \rightarrow X/G$ é um recobrimento regular;*
- (ii) *G é o grupo $G(X)$ das transformações de Deck do recobrimento p ;*
- (iii) *Se p é o recobrimento universal, G é isomorfo a $\pi_1(X/G)$.*

Demonstração. (i) Mostramos em resultados passados que p é recobrimento, vamos então discutir sobre este ser um recobrimento regular. Pelas propriedades de ação de grupos que a ação de G em X satisfaz temos que, para todo ponto $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que todas as imagens gU , $g \in G$ são disjuntas, isto é, $g_1U \cap g_2U \neq \emptyset$ então $g_1 = g_2$. Tomemos então $U \subset X$ com essa condição. Cada elemento de $g \in G$ age como uma transformação de Deck $g : X \rightarrow X$ e assim o recobrimento p é regular, pois para todos $g_1, g_2 \in G$, $g_2g_1^{-1}$ leva g_1U em g_2U .

(ii) Veja que, como dito no item anterior, o grupo G é um subgrupo do grupo das transformações de Deck $G(X)$. Vamos mostrar que $G(X)$ é igual a G se X for conexo por caminho. Tome uma transformação de Deck f qualquer, então para um ponto escolhido arbitrariamente $x \in X$, temos que x e $f(x)$ estão na mesma órbita e assim existe um $g \in G$, com $gx = f(x)$, portanto $f = g$, pois transformações de Deck de espaços de recobrimento conexos por caminhos são exclusivamente determinadas pela imagem de um ponto. Logo, $G(X) \subset G$ e, portanto, temos a igualdade.

- (iii) Pelos itens anteriores e a Proposição 26, temos o resultado. \square

Assim, como a esfera tridimensional é uma variedade simplesmente conexa, conexa por caminhos e localmente conexa por caminhos e a ação de $2I$ em \mathbb{S}^3 é livre e propriamente descontínua, podemos, através desses resultados, concluir que o Grupo Fundamental da Esfera Homológica de Poincaré é o Grupo Icosaédrico Binário, isto é, $\pi_1(\mathbb{S}^3/(2I)) = 2I$. E como o Grupo Fundamental da 3-esfera é trivial, esses dois espaços não são homeomorfos.

Além disso, o quociente $\mathbb{S}^3/(2I)$ tem os mesmos grupos de homologia da esfera \mathbb{S}^3 .

Vamos apresentar o primeiro grupo de homologia de $\mathbb{S}^3/(2I)$ através do Teorema de Hurewicz, estudado através de *The Hurewicz Theorem 2011* e mostrado abaixo.

Teorema 35. *O grupo H_1 de homologia de um espaço topológico X conexo por caminhos é a abelianização do Grupo Fundamental de X , isto é, $H_1(X) = \pi_1(X)^{ab} = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$.*

Demonstração. Para demonstrar o Teorema de Hurewicz, nesse caso, primeiro observe que qualquer homomorfismo $h : \pi_1(X) \rightarrow G$, onde G é qualquer grupo abeliano, induz um homomorfismo $h' : \pi_1(X)^{ab} \rightarrow G$.

Vamos construir um homomorfismo $h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$. Seja X um espaço topológico com ponto base $x_0 \in X$. Tome $[\gamma] \in \pi_1(X)$ em que $\gamma : I \rightarrow X$ é um laço dessa classe em X . Veja que I é um 1-simplexo, que pode ser considerado o 1-simplexo canônico, então γ pode ser vista como um 1-simplexo singular em X . Mas $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, onde 0 e 1 são as duas faces do 1-simplexo I . Assim, o bordo de γ é zero e então γ é um ciclo. Nós definimos então $h([\gamma])$ como a classe de homologia de γ em $H_1(X)$.

Vamos mostrar que a aplicação h está bem definida, que h é um homomorfismo e que o homomorfismo induzido $h' : \pi_1(X)^{ab} \rightarrow H_1(X)$ é um isomorfismo.

(i) h está bem definida. De fato, tome γ' algum outro laço na classe de homotopia $[\gamma]$ e seja $H(t, s) : I \times I \rightarrow X$ a homotopia de γ' para γ , isto é, $H(\cdot, 0) = \gamma'$ e $H(\cdot, 1) = \gamma$.

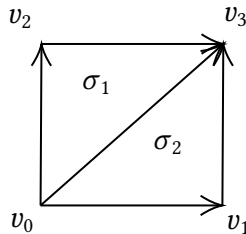


Figura 3.36: Divisão de $I \times I$ para mostrar que h está bem definida.

Denotemos os vértices de $I \times I$ por v_i para $i = 0, 1, 2, 3$, ordenados como na Figura 3.36, e dividimos $I \times I$ na diagonal orientada de v_0 para v_3 . Então H pode ser considerada como a soma de dois 2-simplexos σ_1 e σ_2 . Tomemos as bordas desses 2-simplexos, com f_{x_0} sendo o 1-simplexo constante cuja imagem é o ponto $x_0 \in X$.

$$\begin{aligned}\partial\sigma_1 &= f_{x_0} - D + \gamma' \\ \partial\sigma_2 &= \gamma - D + f_{x_0},\end{aligned}$$

em que D é a restrição de H na diagonal. Subtraindo temos $\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = \gamma' - \gamma - 2f_{x_0}$. Como o mapa constante de Δ_1 pra x_0 é o bordo do mapa constante de Δ_2 pra x_0 nós concluímos que $\gamma' - \gamma$ é um bordo. Então, γ' é igual a γ mais um bordo. Logo, a classe de homologia de γ' é a classe de homologia de γ .

(ii) h é um homomorfismo. De fato, sejam $[\gamma]$ e $[\gamma']$ dois elementos do Grupo Fundamental de X e seja $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$ o mapa que primeiro toma a projeção ortogonal de Δ_2 na aresta $[v_0, v_2]$ e então aplica $\gamma\gamma' : I = \Delta_1 \rightarrow X$. Note que o bordo de σ é $\sigma|_{[v_1, v_2]} - \sigma|_{[v_0, v_2]} + \sigma|_{[v_0, v_1]} = \gamma' - \gamma\gamma' + \gamma$, uma reparametrização de $\gamma\gamma'$ (que não afeta homotopia). Então, $h([\gamma]) + h(\gamma') - \partial\sigma = \gamma\gamma' = h([\gamma][\gamma'])$, que mostra que h é um homomorfismo.

(iii) h' é um isomorfismo. Para mostrar essa afirmação basta mostrar que h é sobrejetivo e que $\ker(h) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$.

Sobrejetividade: Seja $\sigma = \sum \eta_i \sigma_i$ um 1-ciclo. Podemos dividir σ_i em vários tal que η_i seja sempre ± 1 , com isso poderemos ter $\sigma_i = \sigma_j$ pra $i \neq j$. Além disso, tendo que possivelmente reverter a orientação de algum σ_i , podemos considerar que todos os η_i 's são 1. Então, sem perda de generalidade, podemos tomar $\sigma = \sum \sigma_i$.

Se existe algum σ_i que não é um laço, deve existir algum σ_j na soma tal que a composição $\sigma_i \sigma_j$ é um laço, se não, o bordo de σ seria não trivial. Mas $\sigma_i \sigma_j$ é homólogo a $\sigma_i + \sigma_j$, isto é, estão na mesma classe de homologia, pois h é um homomorfismo. Portanto, nós podemos substituir $\sigma_i + \sigma_j$ pelo elemento $\sigma_i \sigma_j$ sem mudar a classe de homologia de σ . Assim, sem perda de generalidade podemos assumir que todos os σ_i 's são laços.

Agora, seja γ_i um caminho qualquer do ponto base x_0 de X e o ponto base de σ_i (um laço), que existe pois X é conexo por caminhos. Então, $\gamma_i \sigma_i \bar{\gamma}_i$ é homólogo a $\gamma_i + \sigma_i + \bar{\gamma}_i$, que é homólogo a $\gamma_i + \sigma_i - \gamma_i = \sigma_i$, pois $\bar{\gamma}_i$ é homólogo a γ_i . Então substituindo σ por um ciclo homólogo, podemos assumir que todos os σ_i 's são laços com ponto base x_0 . Por fim, como a soma é homóloga a composição, podemos tomar $\sum \sigma_i$ como um único 1-simplexo singular sem alterar sua classe de homologia. Em particular, esse 1-simplexo singular é um laço com ponto base em x_0 , o que significa que sua classe de homotopia é mapeada para a classe de homologia de σ , como queríamos.

Núcleo: Seja $\gamma \gamma' \bar{\gamma}'$ um elemento do subgrupo comutador de $\pi_1(X)$. Então, sua imagem por h é $\gamma + \gamma' + \bar{\gamma} + \bar{\gamma}'$. Mas $H_1(X)$ é abeliano, então essa soma é zero ($\bar{\gamma} = -\gamma$). Assim, o subgrupo comutador de $\pi_1(X)$ está contido no núcleo de h .

Agora suponha que $[\gamma]$ está no núcleo de h . É suficiente mostrar que $[\gamma]$ é trivial em $\pi_1(X)^{ab}$. Como um laço, γ é um 1-ciclo, e é homólogo a zero, que significa que γ é o bordo de algum 2-ciclo $\sigma = \sum \eta_i \sigma_i$. Podemos, como antes, tomar $\eta_i = \pm 1$.

Agora, para cada σ_i podemos escrever $\partial \sigma_i = \tau_{i0} + \tau_{i1} - \tau_{i2}$ para três 1-ciclos τ_{ij} . Note que,

$$\gamma = \partial \sum_i \eta_i \sigma_i = \sum_i \eta_i \partial \sigma_i = \sum_i \eta_i (\tau_{i0} + \tau_{i1} - \tau_{i2}) = \sum_{i,j} (-1)^j \eta_i \tau_{ij}.$$

Mas γ é um 1-ciclo singular, que significa que τ_{ij} deve formar pares que se cancelam restando apenas um, que é igual a γ . Se então colarmos os 2-simplexos, identificando pares de arestas que se cancelam (preservando a orientação), obtemos um complexo K .

Agora, como os pares identificados são o mesmo mapa, os σ_i 's juntos formam um mapa $\sigma : K \rightarrow X$. Seja A o 0-esqueleto de K , união do segmento correspondente a γ . Podemos deslizar a imagem de cada vértice ao longo de um caminho de sua imagem original para x_0 . Isso define uma homotopia de A com um novo 0-esqueleto que mapeia cada ponto para x_0 e deixa γ inalterado. Pela propriedade de extensão de homotopia, já que o 0-esqueleto mais o segmento é um complexo de X , podemos estender esta homotopia para uma homotopia definida em todo K . Se agora decomposmos K em seus simplexos, obtemos uma nova cadeia $\sum_i m_i \sigma'_i$, mas todo 1-simplexo singular τ'_{ij} no bordo é agora um laço em x_0 (porque movemos a imagem de cada vértice para x_0).

Agora, como $\pi_1(X)^{ab}$ é abeliano, podemos escrever $[\gamma] = \sum_{i,j} (-1)^j m_i [\tau'_{i,j}]$ na abelianização. Escrevemos $\partial \sigma_i = \tau_{i0} + \tau_{i1} - \tau_{i2}$, mas porque h' é um homomorfismo as somas em

j podem ser condensadas, nos dando $[\gamma] = \sum_i m_i [\partial\sigma_i]$. Para cada σ_i , podemos deformar a imagem de σ_i à imagem de um vértice, deslizando a imagem de uma aresta através da imagem do interior (com isso puxando também os outros dois vértices). Esta deformação é uma homotopia entre $\partial\sigma_i$ e o mapa constante. Então, $[\partial\sigma_i] = 0$, e assim, $[\gamma] = 0$ na abelianização de π_1 . \square

Assim, como $\pi_1(\mathbb{S}^3/(2I)) = 2I$, $2I$ é perfeito e $\mathbb{S}^3/(2I)$ é conexo por caminhos, temos que $H_1(\mathbb{S}^3/(2I)) = 2I/2I = \{0\}$. Além disso, pela Proposição 20, temos que $H_0(\mathbb{S}^3/(2I)) = \mathbb{Z}$.

Para apresentar, por fim, $H_2(\mathbb{S}^3/(2I))$ e $H_3(\mathbb{S}^3/(2I))$ utilizamos a Dualidade de Poincaré juntamente com o Teorema dos Coeficientes Universais, resultados de homologia e cohomologia que podem ser encontrados em [HATCHER, 2001](#).

A partir desses resultados concluímos que, como $\mathbb{S}^3/(2I)$ é uma 3-variedade compacta, orientada (pois \mathbb{S}^3 é orientada e $2I$ é a pré-imagem por homomorfismo de um grupo que preserva orientação) e sem bordo, então, $H_2(\mathbb{S}^3/(2I)) = H_1(\mathbb{S}^3/(2I)) = \{0\}$ e $H_3(\mathbb{S}^3/(2I)) = H_0(\mathbb{S}^3/(2I)) = \mathbb{Z}$. Assim, observamos que a Esfera Homológica de Poincaré tem os mesmos grupos de homologia que a esfera \mathbb{S}^3 , como seu próprio nome sugere, apesar de serem espaços topológicos distintos.

Portanto, a 3-variedade quociente $\mathbb{S}^3/(2I)$ é um contra-exemplo para o questionamento de Poincaré que motivou esse estudo.

Referências

- [CARVALHO e SIEJAKOWSKI 2021] André Salles de CARVALHO e Rafal Marian SIEJAKOWSKI. *Topologia e Geometria de 3-variedades, uma agradável introdução*. 2021. URL: impa.br/wp-content/uploads/2022/01/33CBM04-eBook.pdf (acesso em 05/07/2022) (citado nas pgs. 31, 55, 56, 108).
- [FRALEIGH 2003] John B FRALEIGH. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003 (citado na pg. 3).
- [HATCHER 2001] Allen HATCHER. *Algebraic topology*. 2001. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf> (acesso em 13/10/2022) (citado nas pgs. 31, 45, 56, 109, 113).
- [IEZZI e DOMINGUES 2003] Gelson IEZZI e Hygino DOMINGUES. *Álgebra moderna*. Atual, 2003 (citado na pg. 3).
- [LEE 2010] John LEE. *Introduction to topological manifolds*. Vol. 202. Springer Science & Business Media, 2010 (citado na pg. 31).
- [LIMA 2009] Elon Lages LIMA. *Homologia básica*. IMPA, 2009 (citado na pg. 32).
- [MASSEY 1967] William S MASSEY. *Algebraic topology: an introduction*. Vol. 56. Springer, 1967 (citado na pg. 31).
- [RATCLIFFE *et al.* 1994] John G RATCLIFFE, S AXLER e KA RIBET. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Vol. 149. Springer, 1994 (citado na pg. 55).
- [STILLWELL 2008] John STILLWELL. *Naive lie theory*. Springer Science & Business Media, 2008 (citado na pg. 55).
- [*The Hurewicz Theorem* 2011] *The Hurewicz Theorem*. 2011. URL: https://ocw.mit.edu/courses/18-904-seminar-in-topology-spring-2011/d647c89d91c09829722beda80a87705a_MIT18_904S11_finalHurewicz.pdf (acesso em 10/02/2023) (citado na pg. 110).
- [TRIOLA 2009] Christopher TRIOLA. “Special orthogonal groups and rotations”. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/9ca7/20f5bf2bd6bbe37cc0d6b01064f19116dcef.pdf> (2009) (citado na pg. 55).