Uma introdução à $\mathcal{C}_p(X)$

Bartira Maués

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lúcia Junqueira

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES e do CNPq.

São Paulo, Março de 2015

Uma introdução à $\mathcal{C}_p(X)$

Esta é a versão original da dissertação elaborada pela aluna Bartira Maués, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Esse trabalho só se tornou possível graças ao apoio oferecido pela Prof.a Dr.a Lúcia Junqueira, assim como pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Resumo

Maués, Bartira. **Uma introdução à $C_p(X)$.** Dissertação — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Neste trabalho estudamos algumas propriedades do espaço das funções contínuas munido da topologia da convergência pontual.

Começamos estudando o espaço $\mathcal{C}_p(X)$ de forma geral, verificando que propriedades topológicas principais valem em $\mathcal{C}_p(X)$, usando teoremas de dualidade entre X e $\mathcal{C}_p(X)$. Em seguida estudamos a relação da estrutura topológica de X e a estrutura algébrica e topológica de $\mathcal{C}_p(X)$, onde o Teorema de Nagata ([Nag49]) é fundamental. Observamos algumas propriedades de X que são preservadas por l-equivalência ou t-equivalência, ou seja, que são determinadas pela estrutura linear topológica, ou pela estrutura topológica de $\mathcal{C}_p(X)$, respectivamente. Por último estudamos as condições para que $\mathcal{C}_p(X)$ seja um espaço de Lindelöf. Concluímos com a prova de Okunev ([Oku11]) de que o número de Lindelöf de $\mathcal{C}_p(X)$ é igual ao número de Lindelöf de $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X)$, para espaços fortemente zero-dimensionais X.

Palavras-chave: convergência pontual, espaço das funções contínuas, teoremas de dualidade, t-equivalência, l-equivalência, Lindelöf em C_p.

Abstract

Maués, Bartira. **An introduction to $C_p(X)$.** Dissertation — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

In this work we study some properties of the space of continuous functions endowed with the topology of pointwise convergence.

We begin by studying the space $C_p(X)$ in general terms, verifying that the main topological properties are valid in $C_p(X)$, using duality theorems between X and $C_p(X)$. Next we study the relationship between the topological structure of X and the algebraic as well as topological structure of $C_p(X)$, in which the Nagata theorem ([Nag49]) theorem is essential. We observe some properties of X, which are preserved by l- equivalence or t-equivalence, i.e., which are respectively determined either by the linear topological structure of $C_p(X)$ or by its topological one. Finally we study in which conditions $C_p(X)$ is a Lindelöf space. We conclude with the proof of Okunev ([Oku11]) that the Lindelöf number of $C_p(X)$ is equal to the Lindelöf number of $C_p(X) \times C_p(X)$, for strongly zero-dimensional spaces X.

Keywords: pointwise convergence, space of continuous functions, duality theorems, t-equivalence, l-equivalence, Lindelöf in C_p.

Sumário

Prefácio

A teoria de $\mathcal{C}_p(X)$ assenta um fundamento para a obtenção de resultados que necessitam de noções topológicas nas areas de análise funcional, teoria descritiva de conjuntos e topologia algébrica, mas também é interessante por si só. $\mathcal{C}_p(X)$ lança naturalmente uma ponte entre topologia geral, topologia algébrica e análise funcional, por ter uma estrutura topológica e algébrica.

Os primeiros resultados da teoria de $C_p(X)$ surgiram nos estudos de análise funcional nos anos 60. As investigações das propriedades topológicas de espaços de funções foram a princípio realizadas em estudos específicos a suas áreas, usando ferramentas típicas da análise funcional. Depois que se descobriu que essa teoria contém vários fatos topológicos interessantes, iniciou-se um estudo detalhado e sistemático das questões topológicas desta teoria, sendo Arhangel'skii o maior contribuidor.

As direções principais de estudos na teoria de $\mathcal{C}_p(X)$ são $\mathcal{C}_p(X)$, como espaço topológico, subespaços compactos de $\mathcal{C}_p(X)$ e a relação entre as propriedades de X e as propriedades de $\mathcal{C}_p(X)$. Uma das questões principais se refere a quais propriedades seriam duais, ou seja, para quais propriedades $\mathcal{P}$ de X existe uma propriedade $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{C}_p(X)$ tal que $\mathcal{P}$ vale em X sempre que $\mathcal{Q}$ vale em $\mathcal{C}_p(X)$. Podemos também abordar a questão considerando-se inicialmente uma propriedade topológica de $\mathcal{C}_p(X)$. Estas questões são por caráter distintas, pois $\mathcal{C}_p(X)$ tem uma estrutura algébrica, além de sua estrutura topológica ao passo que X a princípio, só possui uma estrutura topológica. Diferenciamos quais propriedades de X podem ser caracterizadas por propriedades topológicas de $\mathcal{C}_p(X)$ e quais podem ser caracterizadas por propriedades topológicas e propriedades algébricas de $\mathcal{C}_p(X)$.

Existe uma maneira um pouco diferente, e de fato mais geral, de abordar esta questão. Dois espaços X e Y são l-equivalentes, se $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ forem linearmente isomorfos e t-equivalentes se $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ forem homeomorfos. Propriedades topológicas de X são l-invariantes (t-invariantes) se elas são preservadas por l-equivalência (t-equivalência). Descobrir quais propriedades topológicas são l-invariantes ou t-invariantes é um dos problemas fundamentais da teoria de $\mathcal{C}_p(X)$.

Trataremos estas duas questões neste trabalho. A partir do segundo capítulo, todo espaço topológico é um espaço de Tychonoff.

No primeiro capítulo, apresentaremos os conceitos básicos de topologia, teoria dos conjuntos e álgebra, que utilizaremos no trabalho. Seguiremos essencialmente [Eng89].

No segundo capítulo apresentaremos algumas propriedades básicas de $\mathcal{C}_p(X)$. Observamos que X pode ser mergulhado em $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$, também veremos propriedades do espaço dos funcionais contínuos e lineares de X. Além disso, será analisado quando algumas propriedades topológicas principais valem em $\mathcal{C}_p(X)$, como por exemplo, os axiomas de enumerabilidade e funções cardinais. Para isto caracterizaremos as propriedades topológicas de $\mathcal{C}_p(X)$ em termos de propriedades de X, logo usaremos teoremas de dualidade. A referência principal para este capítulo é [Tka10].

No terceiro capítulo mostraremos o Teorema de Nagata, a partir do qual segue que toda propriedade topológica de X é determinada por propriedades do anel topológico $\mathcal{C}_p(X)$. Seguimos procurando maneiras de mostrar a l-invariância, ou t-invariância de propriedades topológicas de X. Concluímos construindo espaços l-invariantes para termos contra exemplos e mostrar algumas propriedades que não são l-invariantes e portanto também não são t-invariantes. As referências principais nesta parte são [Arh94] e [Arh92a].

No quarto capítulo levantamos a questão de quando $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf. Faz bastante tempo que se trabalha para conseguir achar uma caracterização da propriedade de Lindelöf em $\mathcal{C}_p(X)$. De fato como Lindelöf é uma propriedade l-invariante e não temos um contra-exemplo que mostre que não é t-invariante, pode existir uma caracterização de Lindelöf. Mostraremos primeiramente quais propriedades de $\mathcal{C}_p(X)$ são equivalentes à propriedade de Lindelöf em $\mathcal{C}_p(X)$, continuaremos falando que propriedades de X são necessárias e suficientes para $\mathcal{C}_p(X)$ ser de Lindelöf. Terminamos mostrando que $l(\mathcal{C}_p) = l(\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X))$ para X fortemente zero-dimensional. As referências principais para esta parte são [Arh94], [Buz04] e [Oku11].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos notações e conceitos elementares de topologia. Seguimos para isto [Eng89] e alguns conceitos de Álgebra, onde seguimos [GJ60].

Usamos a seguinte notação: Denotamos por $\mathbb{R}$ o espaço dos números reais, $\mathbb{Q}$ o espaço dos números racionais, ω o espaço dos números inteiros não negativos com a topologia discreta, $I = [0, 1]$ o intervalo fechado dos números reais entre 0 e 1 e (a, b) o intervalo aberto de números reais entre a e b.

O par (X, τ), onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X é o espaço topológico X com topologia τ e é denotado por X, quando for claro que topologia é usada.

Denotamos a topologia usual de $\mathbb{R}$ por $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$. Chamamos o conjunto dos números reais munido com a topologia gerada pela base $\mathcal{B}' = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ de *reta de Sorgenfrey* e a denotamos por R.

Denotamos o fecho de A por $\overline{A}$.

1.1 Axiomas de separação e espaços métricos

Um espaço topológico é T_0 se para cada $x, y \in X$ com $x \neq y$ existir uma vizinhaça U de x com $y \notin U$ ou uma vizinhança V de y com $x \notin V$. Se existirem as vizinhanças U, V de $x, y \in X$ respectivamente com $y \notin V$ e $x \notin U$, então X é T_1. Se existirem para cada $x, y \in X$ com $x \neq y$ duas vizinhanças disjuntas U e V de x e y respectivamente, então X é *de Hausdorff*. Se der pra separar um ponto x de um conjunto fechado F com $x \notin F$, por dois conjuntos abertos disjuntos, então X é T_3. Se para cada $x \in X$ e conjunto fechado $F \subseteq X$ com $x \notin F$ existir uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 0$ e $f(F) \subseteq \{0\}$, então X é $T_{3\frac{1}{2}}$. Se para dois conjuntos fechados, disjuntos A e B existirem conjuntos abertos, disjuntos U e V com $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$ é T_4. Um espaço que verifica T_1 e T_3 é *regular*, caso X verifique T_1 e $T_{3\frac{1}{2}}$ então X é de *Tychonoff*. Um espaço que é T_1 e T_4 é *normal*.

Vale para todo A subespaço de X, que se X verificar T_i, então A também verifica T_i, para $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

Lema 1.1 *Para cada $x \in X$ seja Y_x um espaço topológico. Para $i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ vale se $\prod_{x \in X} Y_x \neq 0$ então $\prod_{x \in X} Y_x$ verifica T_i se e somente se para todo $x \in X$ vale que*

Y_x *verifica* T_i

Lema 1.2 *Seja* X *um espaço* T_2, $k \in \omega$ *e* $x_1, \ldots, x_k \in X$ *então existem conjuntos abertos, dois a dois disjuntos* $W_1, \ldots, W_k \subseteq X$ *tal que* $x_i \in W_i$ *para* $i = 1, \ldots, k$.

Lema 1.3 *Seja* X *um espaço de Tychonoff e tome* $n \in \omega$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ *e* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *tal que* $x_j \neq x_i$ *quando* $i \neq j$. *Então existe uma função contínua* $f : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x_i) = r_i$ *para* $i = 1, \ldots, n$.

Lema 1.4 *Seja* X *um espaço topológico,* $x_1, \ldots, x_n \in X$, $F \subseteq X$ *um conjunto fechado que não contém* x_i *para todo* $i = 1, \ldots, n$. *Então existe uma função contínua* $f : X \to \mathbb{R}$ *com* $f(x_i) = 1$ *para* $i = 1, \ldots, n$ *e* $f(F) \subseteq \{0\}$.

Teorema 1.5 *Os espaços* $\mathbb{N}^{\omega_1}$ *e* $\mathbb{R}^{\omega_1}$ *não são normais.*

Denotamos um espaço topológico X junto com uma métrica d compatível a topologia por (X, d) e por $B_{(x,\epsilon)} = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ a bola aberta de raio ϵ e centro x.
Vale que cada subespaço A de um espaço metrizável é metrizável e todo espaço metrizável verifica o primeiro axioma da enumerabilidade.

Teorema 1.6 *(Teorema de Metrização de Urysohn)*
Cada espaço regular que verifica o segundo axioma da enumerabilidade é metrizável.

1.2 Produto de Tychonoff, soma direta e espaço quociente

$\prod_{x \in X} Y_x$ é o produto cartesiano com a topologia de Tychonoff, que é gerada pela base que tem os elementos $\prod_{x \in X} U_x$, onde U_x são subconjuntos abertos de Y_x para cada $x \in X$ e $\{x \in X : U_x \neq Y_x\}$ é finito. Caso $Y_x = Y$, para cada $x \in X$, escrevemos $\prod_{x \in X} Y_x = Y^X$. Seja $S \subseteq X$, definimos a função $p_S : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^S$ por $p_S(\{y_x\}_{x \in X}) = \{y_x\}_{x \in S}$.

Proposição 1.7 $p_S : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^S$ *é contínua e aberta.*

Chamamos a função $p_x : \prod_{x \in X} Y \to Y$ que é definida por $p_x(\{y_x\}_{x \in X}) = y_x$ de *projeção de* Y^X *à* Y.

Lema 1.8 *Sejam* Y *e* Z *espaços topológicos e seja* $f : Y \to \prod_{x \in X} Z$ *uma função. Se* $P_x \circ f$ *é contínua para cada* $x \in X$, *então* f *é contínua.*

Sejam X_t espaços topológicos dois a dois disjuntos, onde $t \in T$ e tome $X = \bigcup\{X_t : t \in T\}$. Definimos $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $U \in \tau$ se e somente se $U \cap X_t$ é aberto em X_t para todo $t \in T$. É fácil verificar que τ é uma topologia de X. Falamos que X é a *soma topológica ou a soma discreta de* $\{X_t : t \in T\}$ e denotamos X por $\oplus\{X_t : t \in T\}$.
Se $\{X_t : t \in T\}$ não for uma família de conjuntos dois a dois disjuntos, então consideramos para cada $t \in T$ o espaço $X_t \times \{t\}$.

Seja X um espaço topológico e $E \subseteq X \times X$ uma relação de equivalência em X. Para cada $x \in X$ denote sua classe de equivalência por $[x]$. Define $X_{/E}$ sendo o conjunto das classes de equivalências de E e seja $q : X \to X_{/E}$ a *função quociente natural* que é definida por $q(x) = [x]$. Definimos uma topologia τ em $X_{/E}$ por $U \in \tau$ se e somente se $q^{-1}(U)$ é aberto em X. Essa topologia é a topologia mais fina onde q é contínua e chamamos ela de *topologia quociente* e $X_{/E}$ de *espaço quociente.*

1.3 Compacidade e propriedades relacionadas

Um espaço topológico X é *compacto* (*de Lindelöf*) se para cada recobrimento aberto existir um subrecobrimento aberto finito (enumerável).

Vale que imagens de funções contínuas de espaços compactos (de Lindelöf) são compactos (de Lindelöf) e subespaços fechados de espaços compactos (de Lindelöf) são compactos (de Lindelöf).
X é *localmente compacto* (*localmente de Lindelöf*) se para cada $x \in X$ existir uma vizinhança compacta (de Lindelöf) U de X.

Um espaço X é *paracompacto* se para cada recobrimente aberto existir um refinamento aberto localmente finito.

Lema 1.9 *Se Z for um espaço regular e de Lindelöf então Z é paracompacto.*

Teorema 1.10 *Seja X um espaço metrizável, então X é paracompacto.*

X é *enumeravelmente compacto* se para cada recobrimento aberto enumerável existir um subrecobrimento aberto, finito.
X é *σ-compacto* (*σ-enumeravelmente compacto*), se $X = \bigcup_{i \in \omega} X_i$, onde X_i é subespaço compacto (enumeravelmente compacto) de X, para todo $i \in \omega$.

Um espaço topológico X é *pseudocompacto* se toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada.

Lema 1.11 *Cada espaço pseudocompacto de Lindelöf é compacto.*

Uma família $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de X é *discreta* se para cada $x \in X$ existir uma vizinhança aberta U de x que só intercepta um elemento de $\{A_s\}_{s \in S}$.

Lema 1.12 *Seja X um espaço topológico de Tychonoff, então X é pseudocompacto se e somente se toda família localmente finita de subconjuntos abertos não vazios de X é finita.*

Como X é de Tychonoff segue diretamente a seguinte afirmação.

Lema 1.13 *Seja X um espaço topológico de Tychonoff, então X é pseudocompacto se e somente se toda família discreta de subconjuntos abertos não vazios de X é finita.*

Lema 1.14 *Seja X um espaço regular pseudocompacto tal que todo subespaço G_δ é aberto, então X é finito.*

Demonstração. Suponha que X é um espaço pseudocompacto infinito.

Tome $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$, então existem duas vizinhanças abertas disjuntas U_1 e U_2 de x_1 e x_2 respectivamente. Como $X = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2)$, vale que um desses conjuntos é infinito. Suponha que seja $X \setminus U_1$. Pela regularidade de X, existe um conjunto aberto U com $x_1 \in U \subseteq \overline{U} \subseteq U_1$. Vale que $X \setminus \overline{U}$ é infinito. Mostramos que para cada espaço infinito Z existe um conjunto aberto, não vazio U com $X \setminus \overline{U}$ é infinito. Então podemos construir por indução uma sequência $\{V_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos abertos, disjuntos, não vazios de X, onde para cada $n \in \omega$ vale que $X \setminus (\overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_n})$ é infinito.

Para cada $n \in \omega$ tome $x_n \in V_n$ e uma sequência de conjuntos abertos $\{W_i^n\}_{i\in\omega}$ tal que $x_n \in W_i^n$, $\overline{W_{i+1}^n} \subseteq W_i^n$ e $W_0^n = V_n$. Essa sequência existe pela regularidade de X. Vale que

$$W_n = \bigcap_{i\in\omega} W_i^n = \bigcap_{i\in\omega} \overline{W_i^n},$$

logo, como X é um P-espaço, W_n é aberto e fechado em X. Além disso vale que $W_n \subseteq V_n$ para todo $n \in \omega$, logo os conjuntos W_n são dois a dois disjuntos e $\{W_n : n \in \omega\}$ é uma família discreta de conjuntos abertos. Mas como X é pseudocompacto toda família discreta se conjuntos abertos é finita, contradição. $\square$

Lema 1.15 $\mathbb{R}^\omega$ *não é σ-pseudocompacto e consequentemente também não σ-enumeravelmente compacto, nem σ-compacto.*

Um *ω-recobrimento* de um espaço topológico X é uma família γ de subconjuntos de X tal que para cada subconjunto finito $M \subseteq X$ existe $U \in \gamma$ com $M \subseteq U$. Chamamos ω-recobrimento γ de *aberto* se todos elementos de γ são abertos. Chamamos um família μ de subconjuntos abertos de X de *γ-pequena* se para todos $U_1, \ldots, U_n, \in \mu$ valer que $U_1 \times \ldots \times U_n \in \gamma$.

Teorema 1.16 *Para um espaço topológico X e cardinal infinito κ são equivalentes*

i) Para cada ω-recobrimento aberto γ de X existe um ω-recobrimento $\mu \subseteq \gamma$ com e $|\gamma| \leq \kappa$.

ii) $l(X^n) \leq \kappa$ para todos $n \in \omega$.

Uma compacificação de um espaço X é um espaço compacto αX, que contém um subespaço denso homeomorfo a X. Para cada espaço X regular que verifica o segundo axioma de enumerabilidade existe uma compactificacao αX que verifica o segundo axioma de enumerabilidade.Denotemos com βX a compactificação de Stone-Cech de um espaço (de Tychonoff) X.
Uma propriedade que caracteriza a compactificação de Stone-Cech é que para cada espaço compacto Z e função contínua $f : X \to Z$ existe uma extensão contínua $\tilde{f} : \beta X \to Z$ com $\tilde{f}_{|X} \to Z$ e analogamente é possível estender cada função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ à βX.

1.4 Funções

Sejam X, Y dois espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$, que é bijetora, contínua com inversa contínua é um *homeomorfismo*. Uma função $g : X \to Y$ que é um homeomorfismo na sua imagem é um *mergulho*.

Lema 1.17 *Seja X um espaço topológico, $f : X \to \mathbb{R}$ e $x \in X$. f é contínua em x se e somente se existir para cada sequência $\{x_n\}_{n\in\omega}$ que converge para x uma subsequência $\{x'_n\}_{n\in\omega}$ tal que $f(x'_n)$ converge para x*

Uma função $f : X \to Y$ é *perfeita*, se ela for contínua, fechada e a preimagem de subconjuntos unitários de Y é compacto em X. Vale que preimagens de espaços localmente compactos por funções perfeitas são localmente compactos.

Uma função contínua $f : X \to X$ é uma *retração de* X se valer $f \circ f = f$. A imagem de uma retração é um *retrato*. Vale que cada função contínua de um retrato pode ser extendida a uma função contínua do espaço enteiro.

1.5 Funções cardinais e números ordinais

Definimos agora as funções cardinais que serão utilizadas no texto:

- O *peso de X* é $w(X) = min\{|\mathcal{B}| \geq \omega : \mathcal{B}$ base de $X\}$.
- A *densidade de X* é $d(X) = min\{|D| \geq \omega : D \subseteq X$ é denso em $X\}$.
- O *número de Souslin de X* ou *celularidade de X* é $c(X) = sup\{|\mathcal{U}| \geq \omega : \mathcal{U}$ é família de abertos dois a dois disjuntos$\}$
- O *número de Lindelöf de X* é $l(X) = min\{|\kappa| \geq \omega :$ todo recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de X admite subrecobrimento com cardinalidade $\leq \kappa\}$.
- O *spread de X* é $s(X) = sup\{|D| \geq \omega : D \subseteq X$ discreto$\}$.
- O *extent de X* é $ext(X) = sup\{|D| \geq \omega : D \subseteq X$ fechado e discreto $\}$.
- O *network-weight* de X é $nw(X) = min\{|\mathcal{N}| \geq \omega : \mathcal{N}$ é network de $X\}$, onde um *network* de X é uma família $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tal que existe para todo $x \in X$ e toda vizinhança U de x um $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.
- O *tightness de X* é $t(X) = min\{\kappa \geq \omega : \overline{A} = [A]_\kappa$ para todo $A \subseteq X\}$, onde, para cada $A \subseteq X$ e cada cardinal κ, $[A]_\kappa = \bigcup\{\overline{B} : B \subseteq A$ e $|B| \leq \kappa\}$.
- O *i-weight de X* é $iw(X) = min\{\kappa \geq \omega :$ existem um espaço Y que tem base com cardinalidade $\leq \kappa$ e uma função bijetora contínua $f : X \to Y\}$.
- O *caracter de A em X*, onde A é um subespaço de X é $\chi(A, X) = min\{|\mathcal{B}(A)| : \mathcal{B}(A)$ é base de $A\}$, sendo $\mathcal{B}(A)$ uma família de abertos de X com $A \subseteq B$ para todo $B \in \mathcal{B}(A)$ e tal que para todo U aberto de X existe $B \in \mathcal{B}(A)$ com $B \subseteq U$.
- O *caracter de X* é $\chi(X) = sup\{\chi(\{x\}, X) : x \in X\}$.

Lema 1.18 *Sejam X e Y espaços topológicos com $Y \subseteq X$ então vale*

i) $w(Y) \leq w(X)$,

ii) $t(Y) \leq t(X)$,

iii) $nw(Y) \leq nw(X)$.

Lema 1.19 *Sejam X e Y espaços topológicos com Y subconjunto denso de X então vale $nw(Y) = nw(X)$.*

Lema 1.20 *Sejam X e Y espaços topológicos com Y subconjunto fechado de X então vale $l(Y) = l(X)$.*

Lema 1.21 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua sobrejetora, então $l(Y) \leq l(X)$.*

Lema 1.22 *Seja X um espaço topológico, então valem*

i) $ext(X) \leq l(X)$,

ii) $l(X) \leq nw(X)$,

iii) $nw(X) \leq w(X)$,

iv $d(X) \leq nw(X)$.

Teorema 1.23 *Seja X um conjunto qualquer, então $\mathbb{R}^X$ é de Souslin.*

Teorema 1.24 *Se Z é um espaço paracompacto que verifica a propriedade de Souslin, então Z é de Lindelöf.*

Lema 1.25 *Seja Y um espaço topológico separável e X um conjunto com cardinalidade menor ou igual a 2^ω, então $\prod_{x \in X} Y$ é separável.*

Teorema 1.26 *Seja X um espaço métrico, então $ext(X) = w(X)$.*

Teorema 1.27 *Vale que $ext(\mathbb{N}^{\omega_1}) = ext(\mathbb{R}^{\omega_1}) = \omega_1$.*

Segimos [HJ99] para a notações e definições de ordinal.

Um conjunto $(A, <)$ linearmente ordenado é *bem-ordenado*, se todo subespaço não vaziode X admite um mínimo. Um conjunto α é um *número ordinal*, se todo elemento de α é contido em α e α é bem-ordenado pela relação $\in$. A topologia natural de um ordinal α é a topologia da ordem, gerada pela ordem $\in$.

Vale que cada conjunto X bem-ordenado é isomorfo a um e somente um número ordinal α. Aqui o isomorfismo é uma função sobrejetora $f : X \to \alpha$, que preserva a ordem. Neste caso dizemos que o *tipo de ordem de X* é α.

O *sucessor* de α é o ordinal $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. α é um *ordinal sucessor* se existir um ordinal β com $\alpha = \beta + 1$. Caso contrário α é um *ordinal limite*. Analogamente existe para cada ordinal $\beta < \alpha$ um ordinal ϵ com $\beta < \epsilon < \alpha$.

Para um ordinal limite α definimos a *cofinalidade de α*, como sendo o menor número ordinal β, tal que existe uma sequência crescente de ordinais de comprimento β e a denotamos por $cf(\alpha)$.

Definimos para cada ordinal define λ_ω sendo o conjunto $\{\alpha \leq \lambda : cf(\alpha) \leq \omega\}$, junto com a topologia induzida pela topologia da ordem.

Teorema 1.28 *Seja A um subespaço enumeravelmente compacto de números ordinais verificando o primeiro axioma de enumerabilidade. Então existe um ordinal λ tal que λ_ω é homeomorfo a A.*

1.6 Coletivamente normal

Seja X um espaço topológico.
Um espaço X é *coletivamente normal* separa cada família $\{F_s\}_{s\in S}$ discreta de subconjuntos fechados de X existe uma família $\{V_s\}_{s\in S}$ discreta de subconjuntos abertos de X verificando $F_s \subseteq V_s$ para todo $s \in S$. Vale que X é coletivamente normal se e somente se para cada família $\{F_s\}_{s\in S}$ discreta de subconjuntos fechados de X existe uma família $\{V_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abertos dois a dois disjuntos de X verificando $F_s \subseteq V_s$ para todo $s \in S$.

Um espaço $A \subseteq I^X$ é *convexo* se $t \cdot x + (1-t) \cdot y \in A$ para todo $t \in [0,1]$, $x, y \in A$.

Teorema 1.29 *(Resznichenko's theorem) Seja X um espaço topológico e A um subespaço denso, convexo e normal de I^X Então vale que $ext(A) = \omega$ e A é coletivamente normal.*

Lema 1.30 *Seja X um espaço normal com $ext(X) = \omega$, então X é coletivamente normal.*

Lema 1.31 *Seja X coletivamente normal com a propriedade de Souslin, então $ext(X) \leq \omega$.*

1.7 Zero-dimensional e fortemente zero-dimensional

Um suconjunto $A \subseteq X$ é *funcionalmente fechado* se existir uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ com $A = f^{-1}(\{0\})$. $U \subseteq X$ é *funcionalmente aberto* se U for o complemento de um conjunto funcionalmente fechado.

Um espaço não vazio X é *zero-dimensional* se existir uma base de X que consiste de conjuntos que são abertos e fechados.
Chamamos um recobrimento de *funcionalmente aberto (fechado)*, se todos os elementos do recobrimento são conjuntos funcionalmente abertos (fechados).
Um espaço topológico não vazio X é *fortemente zero-dimensional* se todo recobrimento finito funcionalmente aberto $\{U_i\}_{i=1}^n$ admite um refinamento aberto e finito $\{V_i\}_{i=1}^m$ com $V_i \cap V_j = \emptyset$, sempre que $i \neq j$.

2^ω é zero-dimensional e todo subespaçode 2^ω é zero-dimensional.

Lema 1.32 *Todo espaço fortemente zero-dimensional X é zero-dimensional.*

Lema 1.33 *Todo espaço zero-dimensional de Lindelöf X é fortemente zero-dimensional.*

Lema 1.34 *A compactificação de Stone-Cech é zero-dimensional se e somente se X é fortemente zero-dimensional.*

Lema 1.35 *A soma direta $\oplus_{s\in S} X_s$ é (fortemente) zero-dimensional se e somente se X_s é (fortemente) zero-dimensional para todo $s \in S$.*

1.8 Estrutura algébricas

Neste trabalho usaremos o termo *espaço linear* para um espaço vetorial. Seja V um espaço linear sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chamamos B de uma *base de Hamel*, se B for linearmente independente e cada $v \in V$ pode ser obtido por uma combinação linear finita de vetores de B.

Chamamos uma função $\varphi : V \to K$, onde V é um espaço de linear sobre o corpo K, é *linear*, se para todo $u, v \in V$ e todo $a \in K$ valer $\varphi(a \cdot u + v) = a \cdot \varphi(u) + \varphi(v)$. Se V além de espaço linear também tiver uma operação multiplicativa tal que V se torna um anel, então podemos ver como as funções se comportam em relação a essa operação. Chamamos uma função $\varphi : V \to K$ de *linear multiplicativa* se valer $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ e $\varphi(u * v) = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$ para todo $u, v \in V$. Claramente cada funcional linear multiplicativo também é linear.

Um *grupo topológico* é um grupo $(G, +)$ que possui uma topologia tal que as funções $\varphi : G \times G$, e $\psi : G \to G$, definidas por $\varphi((g, h)) = g + h$ e $\psi(g) = -g$, são contínuas, onde a topologia em $G \times G$ é a topologia do produto de Tychonoff. Analogamente $(R, \cdot, +)$ é um *anel topológico* se R for um anel junto com uma topologia tal que as funções $\varphi : R \times R \to R$ e $\psi : R \times R \to R$, definidas por $\varphi((g, h)) = g + h$ e $\psi((g, h)) = g \cdot h$, são contínuas.

Um *espaço linear topológico*, ou *espaço vetorial topológico* é um espaço linear V sobre um corpo K, junto com uma topologia tais que as funções $\varphi : V \times V \to V$ e $\psi : K \times V \to V$, definidas por $\varphi((g, h)) = g + h$ e $\varphi((r, h)) = r \cdot h$, são contínuas, onde as topologias em $V \times V$ e $K \times V$ são as topologias do produto de Tychonoff. Nesses casos falamos que a topologia e a respectiva estrutura algébrica são *compatíveis*.

Para dois espaços topológicos lineares X e Y chamamos uma função $\varphi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ de *isomorfismo topológico* se φ for um homeomorfismo e valer $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ e $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$ para todos $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$.

Capítulo 2

Propriedades básicas

Neste capítulo, vamos dar uma imagem geral de como se comporta o espaço das funções contínuas com a topologia da convergência pontual. Vamos começar, conhecendo algumas topologias no espaço das funções contínuas, comparando-as com a da convergência pontual. Depois disso, vamos apresentar algumas funções em $\mathcal{C}_p(X)$, ver que $\mathcal{C}_p(X)$ mergulha em $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$, ver como se comporta o espaço dos funcionais contínuos linear em relação a $\mathcal{C}_p(X)$.

Na terceira e principal parte desse capítulo, analisaremos em que condições $\mathcal{C}_p(X)$ verifica as propriedades topológicas mais importantes, como os axiomas de enumerabilidade, axiomas de separação e a metrizibilidade, entre outras. Lembramos que é assumido que todos os espaços neste trabalho são de Tychonoff, se não for explicitamente exigido um outro axioma de separação.

2.1 Topologias no conjunto das funções contínuas

Lembramos que $\mathcal{C}(X,Y) = \{f : X \to Y : f$ função contínua$\}$ é o *conjunto das funções contínuas de X à Y*. $\mathcal{C}(X,Y)$ é um conjunto com várias topologias naturais.
Para todos os $n \in \omega$, $A_1, \ldots A_n$ subconjuntos de X e $O_1, \ldots O_n$ subconjuntos abertos de Y definimos

$$[A_1, \ldots, A_n; O_1, \ldots, O_n] = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) : f(A_i) \in O_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Caso $A_i = \{x_i\}$ seja um conjunto unitário para cada $i = 1, \ldots, n$, então escrevemos $[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ em vez de $[\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}; O_1, \ldots, O_n]$.
Seja $\mathcal{N}$ um network de X, então é possível mostrar que

$$\{[A_1, \ldots, A_n; O_1, \ldots, O_n] : n \in \omega, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{N} \text{ e } O_1, \ldots, O_n \text{ subconjuntos abertos de } Y\}$$

satisfaz as propriedades de base, portanto gera uma topologia em $\mathcal{C}(X,Y)$.
Então cada network em X define uma topologia em $\mathcal{C}(X,Y)$. Vamos agora conhecer duas delas geradas dessa forma.

Seja $\mathcal{N}$ a família de todos os subconjuntos unitários de X, então $\mathcal{N}$ é um network de X e gera uma topologia, cuja base é $\mathcal{B} = \{[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] : n \in \omega, x_1, \ldots, x_n \in X, O_1, \ldots, O_n$ subconjuntos abertos de $\mathbb{Y}\}$. Essa topologia em

$\mathcal{C}_p(X,Y)$ é a *topologia da convergência pontual* e denotamos o espaço das funções contínuas munida com esta topologia de $\mathcal{C}_p(X,Y)$.

Seja $\mathcal{N}$ a família dos subconjuntos compactos de X, então $\mathcal{N}$ é um network e gera uma topologia em $\mathcal{C}(X,Y)$, que chamamos de *topologia compacto-aberto*.

No que segue tomamos geralmente $Y=\mathbb{R}$ e escrevemos $\mathcal{C}(X)$ para $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_p(X)$ para $\mathcal{C}_p(X,\mathbb{R})$. Podemos defenir mais uma topologia natural em $\mathcal{C}(X)$, que é a topologia gerada pela base $\{U_n(f) : i \in \omega, f \in \mathcal{C}_p(X)\}$, onde

$$U_n(f) = \{g \in \mathbb{R}^X : \text{ existe } i < \frac{1}{n} \text{ com } |f(x) - g(x)| < i \text{ para todo } x \in X\}.$$

Chamamos esta topologia de *topologia da convergência uniforme* e denotamos o espaço $\mathcal{C}(X)$ munida com essa topologia de $\mathcal{C}_u(X)$. Esse nome vem do fato de que cada sequência de funções $\{f_n\}_{n\in\omega}$ converge para uma função $f \in \mathcal{C}_u(X)$ se e somente se a sequência converge uniformemente para f, ou seja para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \omega$ com $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ e $n \geq N$.
Note que $\mathcal{C}_u(X)$ é um espaço metrizável, pois $d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ é uma métrica em $\mathcal{C}_u(X)$ compatível com a topologia. É fácil de concluir que a topologia da convergência uniforme é mais fina do que a topologia da convergência pontual.

Acabamos de ver três topologias no conjunto das funções contínuas. Destas, a topologia da convergência pontual é a mais fraca, ou seja, a com menos conjuntos abertos. De fato a topologia da convergência pontual é mais fraca do que praticamente todas as topologias naturais definidas em $\mathcal{C}(X)$.

Vimos que $\mathcal{C}_u(X)$ é metrizável e vamos ver mais pra frente que $\mathcal{C}_p(X)$ é metrizável só em poucos casos. A principal razão por que se estuda topologias não metrizáveis, mais fracas em $\mathcal{C}(X)$, é que a quantidade de subespaços compactos é maior. Em uma topologia mais fraca a quantidade dos conjuntos abertos é menor e isso aumenta as chances de um subconjunto de funções contínuas ser compacto.

No conjunto das funções contínuas $C(X)$, temos naturalmente duas operações algébricas, definidas através da estrutura algébrica em $\mathbb{R}$. Definimos para todas funções $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$, as funções $f+g$ e $f \cdot g$ para todo $x \in X$ definidas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Temos também uma operação por escalar definindo para todo $r \in \mathbb{R}$ e todo $f \in \mathcal{C}(X)$ a função $r \cdot f$ por

$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x),$$

para todo $x \in X$.
Essas operações são compatíveis com a topologia da convergência uniforme só em casos específicos. De fato $\mathcal{C}_u(X)$ é um grupo topológico se e somente se X é pseudocompacto e $\mathcal{C}_u(X)$ é um espaço linear topológico, se e somente se, X é compacto (veja [MN88]). Temos que estas operações são compatíveis com a topologia da convergência pontual, e que vamos poder considerar $C_p(X)$, dependendo do que estamos precisando no momento, como espaço topológico, grupo topológico, anel topológico ou espaço topológico linear.

2.2 Topologia da convergência pontual

Definimos anteriormente a topologia da convergência pontual sendo V aberto em $\mathcal{C}_p(X)$ se e somente se para todo $f \in V$ existem $n \in \omega$, $x_1, \dots x_n \in X$ e $O_1, \dots O_n$ subconjuntos abertos de Y tal que $f \in [x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n] \subseteq V$. Observe que como n é finito existe um $\epsilon \geq 0$ para cada aberto básico
$[x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n]$, tal que

$$f \in [x_1, \dots, x_n; (f(x_1) - \epsilon, f(x_1) + \epsilon), \dots, (f(x_n) - \epsilon, f(x_n) + \epsilon)]$$

$$\subseteq [x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n].$$

Definimos então para todo $f \in \mathcal{C}_p(X)$, $n \in \omega$, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\epsilon \geq 0$, o conjunto $\mathcal{O}(f, x_1 \dots, x_n, \epsilon)$, como sendo o seguinte aberto básico

$$[x_1, \dots, x_n; (f(x_1) - \epsilon, f(x_1) + \epsilon), \dots, (f(x_n) - \epsilon, f(x_n) + \epsilon)], \text{ ou seja}$$

$$\mathcal{O}(f, x_1 \dots, x_n, \epsilon) = \{g \in \mathcal{C}_p(X) : |g(x_i) - f(x_i)| \leq \epsilon, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Logo podemos definir outra base de $\mathcal{C}_p(X)$, por

$$\{\mathcal{O}(f, x_1 \dots, x_n, \epsilon) : f \in \mathcal{C}_p(X), n \in \omega, x_1, \dots, x_n \in X \text{ e } \epsilon > 0\}.$$

Caso tivermos dois espaços X e Y e quiseremos tratar com estes aberto básicos, escrevemos $\mathcal{O}_Y(h, z_1, \dots, z_s, \delta)$ para o aberto básico $\mathcal{O}(h, z_1, \dots, z_s, \delta)$ em $\mathcal{C}_p(Y)$, para destacar que as funções em $\mathcal{O}_Y(h, z_1, \dots, z_s, \delta)$ são funções de Y a $\mathbb{R}$ e os pontos $z_1, \dots, z_s$ estão contidos em Y. Analogamente $\mathcal{O}_X(h, z_1, \dots, z_s, \delta)$ é o aberto básico $\mathcal{O}(h, z_1, \dots, z_s, \delta)$ em $\mathcal{C}_p(X)$, onde $f \in \mathcal{O}_X(h, z_1, \dots, z_s, \delta)$ é uma função contínua de X a $\mathbb{R}$ e $z_1, \dots z_n \in X$.

Vamos definir mais uma base em $\mathcal{C}_p(X)$, que vai nos posteriormente, porque a cardinalidade dela é igual a cardinalidade de X.

Lema 2.1 *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{C}_p(X)$ o espaço das funções contínuas com a topologia da convergência pontual. Defina $\mathcal{B}$ como sendo*

$$\{[x_1, \dots, x_n; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)] : n \in \omega, x_1, \dots, x_n \in X, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{C}_p(X)$.

Demonstração. Como $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$, são conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, vale que os elementos de $\mathcal{B}$ são abertos em $\mathcal{C}_p(X)$.

Seja agora U um subconjunto aberto de $\mathcal{C}_p(X)$ e tome $f \in U$. Pela definição da topologia existem $n \in \omega, x_1, \dots, x_n \in X$ e $O_1, \dots, O_n$ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ tal que $f \in [x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n] \subseteq U$. Mas, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ existem para cada $l \in \{1, \dots, n\}$ números racionais p_l, q_l tais que $f(x_l) \in (p_l, q_l) \subseteq O_l$. Logo $f \in [x_1, \dots, x_n; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)] \subseteq [x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n] \subseteq U$. $\square$

Veremos agora de onde veio o nome topologia da convergência pontual. Lembramos que uma sequência $\{f_n\}_{n \in \omega}$ converge pontualmente para $f \in \mathcal{C}_p(X)$, se para cada $x \in X$ e cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para cada $n \geq N$.

Lema 2.2 *Seja X espaço topológico. Uma sequência de funções $\{f_n\}_{n\in\omega}$ em $\mathcal{C}_p(X)$ converge para uma função $f \in \mathcal{C}_p(X)$ na topologia da convergência pontual se e somente se $\{f_n\}_{n\in\omega}$ converge pontualmente para f.*

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ uma sequência que converge para a função f em $\mathcal{C}_p(X)$ e fixe $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Seja U uma vizinhança aberta de f. Podemos supor sem perda de generalidade que U é da forma $\mathcal{O}(f, x_1, \ldots, x_m, \epsilon)$, para algum $m \in \omega$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ e $\epsilon > 0$. Como $f_n \to f$ em $\mathcal{C}_p(X)$ existe $N \in \omega$ tal que $f_n \in \mathcal{O}(f, x_1, \ldots, x_m, \epsilon)$ para cada $n \geq N$. Mas isso implica que $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ para todos $n \in N$.

Tome agora uma sequência de funções $\{f_n\}_{n\in\omega}$ que converge pontualmente para a função contínua f e seja $U \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ uma vizinhança aberta de f. Existem $m \in \omega$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que $f \in \mathcal{O}(f, x_1, \ldots, x_m, \epsilon) \subseteq U$. Para cada $i = 1, \ldots, m$ existe $N_i \in \omega$ satisfazendo $|f(x_i) - f_n(x_i)| < \epsilon$ para todo $n \geq N_i$. Logo $f_n \in \mathcal{O}(f, x_1, \ldots, x_m, \epsilon)$ para cada $n \geq \max\{N_1, \ldots, N_n\}$. □

Observe que o conjunto $\mathcal{C}(X)$ é um subconjunto do produto $\prod_{x\in X} Y = Y^X$, que é o espaço de todas funções de X para $\mathbb{R}$ com a topologia de produo de Tychonoff. Vale também que $\mathcal{C}_p(X)$ é um subsespaço topológico de $\mathbb{R}^X$.

Lema 2.3 *A topologia de $\mathcal{C}_p(X, Y)$ coincide com a topologia de subespaço induzida pela topologia de Tychonoff de Y^X.*

Demonstração. Seja τ a topologia de Tychonoff de $\prod_{x\in X} Y$, ou seja, τ é gerada pela base $\mathcal{B}$ que contem exatamente todos subconjuntos da forma $\prod_{x\in X} U_x$, onde U_x é subconjunto aberto de Y para cada $x \in X$ e o conjunto $\{U_x : U_x \neq Y\}$ é finito. Seja $\tau_{|\mathcal{C}_p(X,Y)}$ a topologia do subespaço $\mathcal{C}(X, Y)$ induzida por τ.
Tome $U \in \tau_{|\mathcal{C}_p(X,Y)}$, logo existe $U' \in \tau$ tal que $U' \cap \mathcal{C}_p(X, Y) = U$. Suponha sem perda de generalidade que U' seja aberto básico de Y^X, ou seja que U' seja da forma $\prod_{x\in X} U_x$, onde U_x é aberto em Y, $\{x \in X : U_x \neq Y\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ para algum $n \in \omega$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$. Então vale que $U = U' \cap \mathcal{C}(X, Y) = [x_1, \ldots, x_n; U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}]$.
Por outro lado, considere um aberto básico $[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ de $\mathcal{C}_p(X, Y)$, ou seja $x_1, \ldots, x_n$ elementos de X e $O_1, \ldots, O_n$ subconjuntos abertos de Y. Defina $V_{x_i} = O_i$ para $i = 1, \ldots, n$ e $V_x = Y$ para todo $x \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Então $V = \prod_{x\in X} V_x$ é aberto em Y^X e vale $V \cap \mathcal{C}_p(X, Y) = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ □

A partir daqui tomamos $Y = \mathbb{R}$, exceto em alguns casos específicos.

Teorema 2.4 *Se X é um espaço topológico, então $\mathcal{C}_p(X)$ é denso em $\mathbb{R}^X$.*

Demonstração. Seja X um espaço de Tychonoff e seja $U = \prod_{x\in X} U_x$ um aberto básico de $\mathbb{R}^X$. Vale que $Z = \{x \in X : U_x \neq \mathbb{R}\}$ é finito, então podemos escrever $Z = \{x_1, \ldots, x_n\}$, para algum $n \in \omega$. Tome para cada $i = 1, \ldots, n$ um número real $r_i \in U_{x_i}$. Então existe pelo Lema 1.3 uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $i = 1, \ldots, n$ vale $f(x_i) = r_i \in U_{x_i}$, logo $f \in U \cap \mathcal{C}_p(X)$. □

Como já foi mencionado, $\mathcal{C}_p(X)$ pode ser munido com uma estrutura algébrica. Vamos mostrar agora que as operações definidas anteriormente são compatíveis com a topologia da convergência pontual.
Para todo $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$ e vale que $\phi_+, phi. : \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(X)$ definidas por $\phi_+((f,g)) = f + g$ e $\phi_{cdot}((f,g)) = f \cdot g$ são contínuas. De fato vale para todos os $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\epsilon > 0$ que $U = \mathcal{O}(f, x_1, \ldots, x_n, \frac{\epsilon}{2}) \times \mathcal{O}(g, x_1, \ldots, x_n, \frac{\epsilon}{2})$ é vizinhança aberta de (f, g) e $\phi_+(U) \subseteq \mathcal{O}(f+g, x_1, \ldots, x_n, \epsilon)$. De maneira analoa segue que ϕ_{cdot} é contínua. Com essas operações $\mathcal{C}_p(X)$ forma um anel comutativo com elemento unitário.

Além disso podemos mostrar maneira analoga que multiplicação por escalar também é compatível com a topologia de $\mathcal{C}_p(X)$ e portanto $\mathcal{C}_p(X)$ forma um espaço linear topológico.

2.3 Funções, funcionais lineares e homeomorfismos

Vamos nesta seção conhecer algumas funções definidas em $\mathcal{C}_p(X)$, que vão nos ajudar no futuro, ver que X pode ser mergulhado em $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ e conhecer o espaço dual de $\mathcal{C}_p(X)$.

Lema 2.5 *Sejam X e Y espaços topológicos com $Y \subseteq X$ e seja $\pi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ a restrição definida por $\pi(f) = f_{|Y}$. Então π é contínua. Se valer também que Y é denso em X, então π é injetora.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{C}_p(X)$, $y \in Y$ e V uma vizinhança aberta de $f_{|Y}(x)$, então existe $V' \subseteq X$ uma vizinhança aberta de x com $f(V') \subseteq U$ e segue que $V' \cap Y$ é uma vizinhança de x aberta em Y e $f(V' \cap Y)_{|Y} \subseteq V$. Logo $\pi(f)$ é contínua para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$ e π é bem-definida.

Fixe novamente $f \in \mathcal{C}_p(X)$ e seja U uma vizinhança de $\pi(f)$ aberta em $\mathcal{C}_p(Y)$ da forma $[y_1, \ldots, y_n; O_1, \ldots, O_n]_Y = \{g \in \mathcal{C}_p(Y) : g(y_i) \in O_i, i = 1, \ldots, n\}$, onde $n \in \omega$, $y_1, \ldots, y_n \in Y$ e $O_1, \ldots, O_n$ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

Então $U' = [y_1, \ldots, y_n; O_1, \ldots, O_n]_X = \{g \in \mathcal{C}_p(X) : g(y_i) \in O_i, i = 1, \ldots, n\}$ é um conjunto aberto de $\mathcal{C}_p(X)$. Como $\pi(f) \in U$ vale para cada $i = 1, \ldots, n$ que $f_{|X}(y_i) \in O_i$, segue que $f \in U'$. Para cada $g \in U'$ vale que $g(y_i) \in O_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, logo $\pi(U') \subseteq U$ e portanto π é contínua.

Seja agora $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$ com $f \neq g$. Então existe $x \in X$ com $f(x) \neq g(x)$. Pelo fato de $\mathbb{R}$ ser um espaço de Hausdorff existem vizinhanças disjuntas abertas $U_f, U_g \subseteq \mathbb{R}$ de $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente. Vale que $x \in W = f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$, logo W é um conjunto aberto não vazio em X.

Se Y for denso em X, $Y \cap W \neq \emptyset$, então existe $y \in Y \cap W$, para qual vale que $f(y) \in U_f$ e $g(y) \in U_g$. Como U_g e U_f são disjuntos vale $f(y) \neq g(y)$ e $\pi(f) = f_{|Y} \neq g_{|Y} = \pi(g)$. $\square$

Definição 2.6 Seja X e Y dois espaços topológicos e seja $\varphi : X \to Y$ uma função contínua. Chamamos a função $\varphi^* : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ definida por $\varphi^*(f) = f \circ \phi$ de *função dual de* φ.

Lema 2.7 *Seja* $\varphi : X \to Y$ *uma função contínua entre dois espaços topológicos* X *e* Y*. Seja* $\varphi^* : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ *a função dual de* φ*. Então valem as seguintes propriedades:*

i) φ^* *é contínua,*

ii) se φ *é sobrejetora, então* φ^* *é um homeomorfismo de* $\mathcal{C}_p(X)$ *a* $\varphi^*(\mathcal{C}_p(X))$*,*

iii) se φ *é bijetora e contínua, então* $\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))$ *é denso em* $\mathcal{C}_p(X)$*,*

iv) se φ *é um homeomorfismo, então* $\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y)) = \mathcal{C}_p(X)$*. Neste caso* φ^* *é um homeomorfismo.*

Demonstração. *i)* Seja $f \in \mathcal{C}_p(Y)$ e seja $[x_1, \dots x_n; O_1, \dots O_n]$ um aberto básico de $\mathcal{C}_p(X)$, vizinhaça de $\varphi^*(f)$, então $\varphi^*(f)(x_i) \in O_i$, para todos $i \in \{1, \dots, n\}$. Defina $y_i = \varphi^{-1}(x_i)$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Portanto $f \in [y_1, \dots, y_n; O_1, \dots O_n]$ e $\varphi^*([y_1, \dots, y_n; O_1, \dots O_n]) \subseteq [x_1, \dots x_n; O_1, \dots O_n]$, logo φ^* é contínua.

ii) Seja φ sobrejetora e sejam $g, f \in \mathcal{C}_p(Y)$ tais que $g \neq f$, então existe $y \in Y$ tal que $f(y) \neq g(y)$. Como φ é homeomorfismo, existe $x \in X$ com $\varphi(x) = y$ e portanto $(f \circ \varphi)(x) = f(y) \neq g(y) = (g \circ \varphi)(x)$, logo $\varphi^*(f) \neq \varphi^*(g)$ e segue que φ^* é injetora. Sabemos de *i)* que φ^* é contínua. Analogamente podemos concluir que φ^* é aberto.

iii) Seja $U = [x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n]$ um conjunto aberto básico não vazio de $\mathcal{C}_p(X)$. Então existe uma função $f \in U$ e pelo Lema 1.3 existe uma função $g \in \mathcal{C}_p(Y)$ com $g(\varphi(x_i)) = f(x_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto vale $\phi^*(g) \in U$ e segue que $U \cap \phi^*(\mathcal{C}_p(X)) \neq \emptyset$.

iv) Seja $f \in \mathcal{C}_p(X)$ defina $g = f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}_p(Y)$. Vale que $\varphi^*(g) = g \circ \varphi = f$, logo $\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y)) = \mathcal{C}_p(X)$ e segue por *ii)* que $\varphi^* : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ é um homeomorfismo.

□

Lema 2.8 *Sejam* X, Y *e* Z *espaços topológicos e* $\phi : Z \to Y$ *uma função contínua então* $\phi_* : \mathcal{C}_p(X, Z) \to \mathcal{C}_p(X, Y)$ *definida por* $\phi_*(f) = \phi \circ f$ *é contínua.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{C}_p(X, Z)$ e $U = [x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n]$ aberto básico de $\mathcal{C}_p(X, Y)$ contendo $\phi_*(f) = \phi \circ f$. Vale que $O_i' = \phi^{-1}(O_i)$ é aberto em Z para cada $i = 1, \dots, n$. Para cada $i = 1, \dots, n$ temos que $\phi(\circ f(x_i)) \in O_i$, então $f(x_i) \in O_i'$, logo $f \in U' = [x_1, \dots, x_n; O_1', \dots, O_n']$. Vale para cada $g \in U'$ e todo $i = 1, \dots, n$ que $\phi(g(x_i)) \in \phi(O_i') \subseteq O_i$, portanto $\phi(U') \subseteq U$ e segue que ϕ é contínua. □

A seguintes duas conclusões são simples, mas serão utilizadas mais tarde.

Lema 2.9 *Sejam X um espaço topológico e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, então $\mathcal{C}_p(X, (a, b))$ é homeomorfo à $\mathcal{C}_p(X)$.*

Demonstração. Sabemos que existe um homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to (a, b)$. Tome a função $\varphi' : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(X, (a, b))$ definida por $\varphi'(f) = \varphi \circ f$. É fácil mostrar que φ é um homeomorfismo. $\square$

Lema 2.10 *Sejam X e Y espaços topológicos e Z um subespaço de Y, então vale que $\mathcal{C}_p(X, Z)$ é homeomorfo a um subespac co de $\mathcal{C}_p(X, Y)$.*
Se Z for fechado em Y então $\mathcal{C}_p(X)$ é homeomorfo a um subespaço fechadode $\mathcal{C}_p(X, Y)$.

Demonstração. Seja $\phi : \mathcal{C}_p(X, Z) \to \mathcal{C}_p(X, Y)$ a função que leva cada $f \in \mathcal{C}_p(X, Z)$ a $f' \in \mathcal{C}_p(X, Y)$, onde $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. É fácil mostrar que ϕ é um homeomorfismo. Agora seja $f \in \mathcal{C}_p(X, Y) \setminus \phi(\mathcal{C}_p(X, Z))$, então existe $x \in X$ com $f(x) \in Y \setminus Z$. Tome $U = [x; Y \setminus Z] \subseteq \mathcal{C}_p(X, Y)$, vale que $f \in U$ e $U \subseteq \mathcal{C}_p(X, Y) \setminus \phi(\mathcal{C}_p(X, Z))$, logo $\mathcal{C}_p(X, Z)$ é fechado em $\mathcal{C}_p(X, Y)$. $\square$

Vamos ver que podemos mergulhar X no espaço $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$, onde cada $x \in X$ vai ser associado a um funcional linear contínuo de $\mathcal{C}_p(X)$ para $\mathbb{R}$. Para podermos mostrar isso vamos agora ver algumas propriedades de funcionais lineares.

Teorema 2.11 *Se $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ é um homeomorfismo linear, então sua função inversa ϕ^{-1} também é linear.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_p(Y)$, então existem $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_p(X)$ tais que $\phi(g_1) = f_1$ e $\phi(g_2) = f_2$. Como ϕ é linear vale $\phi(g_1 + g_2) = \phi(g_1) + \phi(g_2) = f_1 + f_2$. Logo $\phi^{-1}(f_1 + f_2) = g_1 + g_2 = \phi^{-1}(f_1) + \phi^{-1}(f_2)$. $\square$

Lembramos que um funcional $\varphi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ é *multiplicativamente linear* se $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ e $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$ para todos os $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$. Observe que cada funcional umltiplicativamente linear também é linear.

Exemplo 2.12 Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_p(X)$. A função $e_x^{\mathcal{F}} : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ definida por $e_x(f) = f(x)$, onde $x \in X$, é multiplicativamente linear, se a adição e a multiplicação forem fechadas em $\mathcal{F}$.
De fato tome $f, g \in \mathcal{F}$, vale que $f + g, f \cdot g \in \mathcal{F}$. Segue pela definição da adição em $\mathcal{C}_p(X)$ que

$$e_x^{\mathcal{F}}(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = e_x^{\mathcal{F}}(f) + e_x^{\mathcal{F}}(g)$$

e

$$e_x^{\mathcal{F}}(f \cdot g) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = e_x^{\mathcal{F}}(f) \cdot e_x^{\mathcal{F}}(g)$$

Lema 2.13 *Seja X um espaço topológico, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ e $x \in X$. Vale que $e_x^{\mathcal{F}}$ é contínua.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $e_x^{\mathcal{F}} : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ definido como acima. Sejam também $f \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ e $O \subseteq \mathbb{R}$ uma vizinhança aberta de $e_x^{\mathcal{F}}(f) = f(x)$. Considere $[x; O] \cap \mathcal{F}$, que é um aberto básico em $\mathcal{F}$ e vizinhança de f. Além disso, para cada $g \in [x; O]$ vale que $e_x^{\mathcal{F}}(g) = g(x) \in O$, logo $e_x^{\mathcal{F}}([x; O]) \subseteq \{O\}$ e segue que $e_x^{\mathcal{F}}$ é contínua.

□

Definição 2.14 Chamamos o funcional $e_x^{\mathcal{F}}$ de *função de evaluação*. Se $\mathcal{F} = \mathcal{C}_p(X)$, então escrevmos e_x para $e_x^{\mathcal{F}}$.

Neste caso a adição e a multiplicação são fechadas e e_x é um funcional contínuo, multiplicativamente linear.

Como $\mathcal{C}_p(X)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^X$ temos que e_x é a projeção para o fator $x \in X$. Então vale para todo espaço topológico Z que uma função $f : Z \to \mathcal{C}_p(X) \subseteq \mathbb{R}^X$ é contínua se $e_x \circ f$ é contínua para todo $x \in X$.

Vamos ver que todos os funcionais lineares contínuos podem ser representados por uma soma de funcionais desse jeito.

Teorema 2.15 *Seja X um espaço de Tychonoff. Para todo funcional linear e contínuo $\varphi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ existem $n \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi = a_1 \cdot e_{x_1} + \ldots + a_n \cdot e_{x_n}$.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ um funcional linear e contínuo e seja $u \in \mathcal{C}_p(X)$ definido por $u(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Como φ é linear então $\varphi(u) = 0 \in (-1, 1)$ e como φ é contínuo existem $n \in \omega$, $x_1, \ldots x_n \in X$ e $\epsilon \geq 0$ tal que $\varphi(O(u, x_1 \ldots, x_n, \epsilon)) \subseteq (-1, 1)$.

Observe que se $f \in \mathcal{C}_p(X)$ com $f(x_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então $\varphi(f) = 0$. De fato, se $f(x_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, segue, para todo $k \in \omega$, que $k \cdot f(x_i) = 0$ e consequentemente $k \cdot f \in O(h, x_1 \ldots, x_n, \epsilon)$. Logo $k \cdot \varphi(f) = \varphi(k \cdot f) \in (-1, 1)$ para todo $k \in \omega$, então $\varphi(f) = 0$.

Como X é de Tychonoff e portanto de Hausdorff, existem, $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{R}$ vizinhanças abertas de $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente tais que para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$ vale que $U_i \cap U_j = \emptyset$. Pela propriedade de Tychonoff, existe, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, uma função contínua $g_i \in \mathcal{C}_p(X)$, tal que $g_i(x_i) = 1$ e $g_i(y) = 0$ para todo $y \in X \setminus U_i$.

Seja agora $f \in \mathcal{C}_p(X)$ qualquer e defina $f' = f - (f(x_1) \cdot g_1 + \ldots + f(x_n) \cdot g_n)$. Observamos que para cada $i = 1, \ldots, n$ vale que $g_i(x_i) = 1$ e, quando $i \neq j$, temos que $g_i(x_j) = 0$. Então para cada $i \in \{1, \ldots n\}$, segue que

$$f'(x_i) = f(x_i) - (f(x_1) \cdot g_1(x_i) + \ldots + f(x_n) \cdot g_n(x_i)) = 0,$$

logo $\varphi(f') = 0$. Portanto

$$\varphi(f) = \varphi(f') + f(x_1) \cdot \varphi(g_1) + \ldots + f(x_n) \cdot \varphi(g_n) = \varphi(g_1) \cdot e_{x_1}(f) + \ldots + \varphi(g_n) \cdot e_{x_n}(f).$$

Seja $a_i = \varphi(g_i) \in \mathbb{R}$ para cada $i = 1, \ldots, n$, então $\varphi = a_1 \cdot e_{x_1} + \ldots + a_n \cdot e_{x_n}$. □

Uma outra propriedade dos funcionais lineares contínuos, é que eles formam um conjunto fechado dentro do espaço de todos funcionais contínuos.

Lema 2.16 *Seja X um espaço topológico. O subconjunto de todos funcionais lineares contínuas de $\mathcal{C}_p(X)$ a $\mathbb{R}$ é fechado em $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ o conjunto de todos funcionais lineares e tome $\varphi \in \overline{\mathcal{L}}$, $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$ e $a \in \mathbb{R}$. Seja $\epsilon > 0$, e tome $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2+a}$. Como $\varphi \in \overline{\mathcal{L}}$ existe $\psi \in \mathcal{L} \cap \mathcal{O}(\varphi, a * f + g, f, g, \epsilon')$. Então

$$|\varphi(a * f + g) - a * \varphi(f) - \varphi(g)| =$$

$$|\varphi(a * f + g) - a * \varphi(f) - \varphi(g) - \psi(a * f + g) + a * \psi(f) + \psi(g)| \leq$$

$$\leq |\varphi(a * f + g) - \psi(a * f + g)| + |a * \psi(f) - a * \varphi(f)| + |\psi(g) - \varphi(g)| < (2 + a) * \epsilon' = \epsilon.$$

Como ϵ foi abitrário, vale que $|\varphi(a * f + g) - a * \varphi(f) - \varphi(g)| = 0$, logo $\varphi(a * f + g) = a * \varphi(f) + \varphi(g)$. Segue que $\varphi \in \mathcal{L}$, portanto $\mathcal{L}$ é fechado. □

Vamos a seguir mostrar que X mergulha como subconjunto fechado em $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$, que denotamos por $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$. Para isso definiremos outra função.

Lema 2.17 *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_p(X)$. Então $E_{\mathcal{F}} : X \to \mathcal{C}_p(\mathcal{F})$, definido por $E_{\mathcal{F}}(x) = e_x^{\mathcal{F}}$ é contínua e aberta.*

Demonstração. Para mostrar que $E_{\mathcal{F}}$ é contínua, tome $x \in X$ e $V \subseteq \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$, uma vizinhança de $E_{\mathcal{F}}(x) = e_x^{\mathcal{F}}$. Existem $n \in \omega$, $f_1, \ldots f_n \in \mathcal{C}_p(X)$ e conjuntos abertos $O_1, \ldots, O_n \in \mathbb{R}$, tais que $e_x^{\mathcal{F}} \in [f_1, \ldots, f_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq V$. Tome $U = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(O_i)$. Para todo $i = 1, \ldots, n$ vale que f_i é contínua, logo $f_i^{-1}(O_i)$ é aberto em X e de $f_i(x) = e_x^{\mathcal{F}}(f_i) \in O_i$ segue que $x \in U$. Seja $y \in U = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(O_i)$, então para cada $i = 1, \ldots, n$ vale que $e_y^{\mathcal{F}}(f_i) = f_i(y) \in O_i$, e com isso temos que $e_y^{\mathcal{F}} \in [f_1, \ldots, f_n; O_1, \ldots, O_n]$ e $E_{\mathcal{F}}(U) \subseteq [f_1, \ldots, f_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq V$. Logo $E_{\mathcal{F}}$ é contínua.

Seja agora $U \subseteq X$ aberto e tome $\varphi \in E_{\mathcal{F}}(U)$, então existe $x \in X$ tal que $e_x^{\mathcal{F}} = E_{\mathcal{F}}(x) = \varphi$. X é de Tychonoff, logo existe $h : X \to \mathbb{R}$ contínua, com $h(x) = 0$ e $h(y) = 1$, para todo $y \in X \setminus U$. Considere o conjunto aberto $V = [x; \mathbb{R} \setminus \{1\}] \cap E_{\mathcal{F}}(X)$. Para cada $z \in U$ vale que $e_z^{\mathcal{F}}(h) = h(z) \neq 1$ e portanto $E_{\mathcal{F}}(z) = e_z^{\mathcal{F}} \in V$. Logo $E_{\mathcal{F}}$ é aberta. □

Teorema 2.18 *Seja X um espaço (de Tychonoff). Então X é homeomorfo a um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$.*

Demonstração. Tome $E : X \to E(X) \subseteq \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ definida por $E(x) = e_x$. Mostraremos primeiro que E é um homeomorfismo na sua imagem, ou seja, que $E : X \to E(X)$ é injetora, contínua e aberta.

Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Como X é de Tychonoff, existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Então $e_x(f') \neq e_y(f')$ e segue que $E(x) = e_x \neq e_y = E(y)$. Logo vale que E^X é injetora. Pelo Lema 2.17, tomando $\mathcal{F} = \mathcal{C}_p(X)$, vale que E é aberta e contínua.

Para mostrar que $E(X)$ é fechado, tome $\psi \in \overline{E(X)} \setminus E(X)$ e seja $u \in \mathcal{C}_p(X)$ a função nula. Como o conjunto dos funcionais lineares é fechado em $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ e e_x é linear, para cada $x \in X$ vale que ψ é linear e segue $\psi(u) = 0$. Como ψ é contínua, existem $n \in \omega$, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\epsilon > 0$, tais que para o conjunto aberto $W = \mathcal{O}(u, x_1, \dots, x_n, \epsilon)$ vale que $\psi(W) \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Como $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ é T_2 existem conjuntos abertos disjuntos $V'_1, \dots, V'_n, V'_{n+1}$ de $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ tais que, para cada $i = 1, \dots, n$, vale que $e_{x_i} \in V'_i$ e $\psi \in V'_{n+1} \subseteq \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)) \setminus (\overline{\bigcap_{i=1}^n V'_i})$. Defina $V_i = E^{-1}(V'_i \cap E(X))$ para cada $i = 1, \dots, n$ e $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$, então $\psi \notin \overline{E(V)}$.

Como $\psi \in \overline{E(X)} = \overline{E(V)} \cup \overline{E(X \setminus V)}$, vale que $\psi \in \overline{E(X \setminus V)}$. Como X é um espaço de Tychonoff existe, para cada $i = 1, \dots, n$, uma função contínua $f_i : X \to [0,1]$ com $f_i(x_i) = 1$ e $f_i(y) = 0$ para todos $y \in X \setminus V_i$. Considere a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f = 1 - f_1 - \ldots - f_n$. Vale que $f(x_i) = 0$ para $i = 1, \dots, n$, logo $f \in W$ e segue que $\psi(f) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Mas para cada $y \in X \setminus U = \bigcap_{i=1}^n X \setminus V_i$ vale que $e_y(f) = f(y) = 1 - f_1(y) - \ldots - f_n(y) = 1$, então $[f; (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \cap E(X \setminus V) = \emptyset$. Logo $\psi \notin \overline{E(X \setminus V)}$ que é uma contradição e segue que $\overline{E(X)} = E(X)$. □

Então podemos considerar X como um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X) = \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$. Indentificando cada $x \in X$ com $E(x) = e_x$, definimos

$$\mathcal{L}_p(X) = \{a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n : n \in \omega, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ e } x_1, \dots, x_n \in X\} \subseteq \mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$$

equipado com a topologia induzida de $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$. Vale que $\mathcal{L}_p(X)$ é o menor subespaço linear de $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$ que contém $E(X)$.

Definição 2.19 Para cada espaço linear topológico $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ podemos definir o *dual de* $\mathcal{F}$ como sendo o espaço dos funcionais lineares contínuos de $\mathcal{F}$ em $\mathbb{R}$ equipado com a topologia da convergência pontual e o denotamos por $\mathcal{F}'$.

Vamos mostrar que $\mathcal{L}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(X)$ são espaços duais um do outro.

Teorema 2.20 *Seja X um espaço topológico (de Tychonoff), então $\mathcal{L}_p(X)$ é o dual de $\mathcal{C}_p(X)$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{L}_p(X) \subseteq \mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$, então existem, pela definição de $\mathcal{L}_p(X)$, $n \in \omega$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $x_1, \dots, x_n \in X$ tais que $\varphi = a_1 \cdot e_{x_1} + \ldots + a_n \cdot e_{x_n}$. De Exemplo 2.12 segue que e_x é linear para cada $x \in X$, logo φ é funcional linear de $\mathcal{C}_p(X)$ em $\mathbb{R}$.

Seja agora ψ um funcional linear contínuo de $\mathcal{C}_p(X)$ para $\mathbb{R}$. Então existem, pelo Teorema 2.15, $m \in \omega$, $y_1, \dots, y_m \in X$ e $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ tais que $\psi = b_1 \cdot e_{y_1} + \ldots + b_m \cdot e_{y_m}$. Logo $\psi \in \mathcal{L}_p(X)$. □

Lembramos que o dual de $\mathcal{L}_p(X)$ é o espaço dos funcionais contínuos lineares que denotamos por $(\mathcal{L}_p(X))'$ e que é um subespaço de $\mathcal{C}_p\mathcal{L}_p(X)$.

Teorema 2.21 *Seja X um espaço topológico, então existe um homeomorfismo linear de $\mathcal{C}_p(X)$ para o dual de $\mathcal{L}_p(X)$.*

Demonstração. Considere $E_{\mathcal{L}_p(X)} : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(\mathcal{L}_p(X))$ definido por $E_{\mathcal{L}_p(X)}(f) = e_f^{\mathcal{L}_p(X)}$, onde $e_f^{\mathcal{L}_p(X)} : \mathcal{L}_p(X) \to \mathbb{R}$ é a função de evaluação que leva cada $\varphi \in \mathcal{L}_p(X)$

para $\varphi(f)$. Vale que a adição é fechada em $\mathcal{L}_p(X)$, e segue de Lema 2.12 que $e_f^{\mathcal{L}_p(X)}$ é linear para cada $f \in \mathcal{L}_p(X)$. Logo $E_{\mathcal{L}_p(X)}(\mathcal{C}_p(X)) \subseteq (\mathcal{L}_p(X))' \subseteq \mathcal{C}_p(\mathcal{L}_p(X))$.
Considere a restrição $\pi : \mathcal{C}_p(\mathcal{L}_p(X)) \to \mathcal{C}_p(X)$ definida por $\pi(f) = f_{|X}$. Segue do Lema 2.5 que π é contínua.
Vamos mostrar que π leva $(\mathcal{L}_p(X))'$ injetoramente para $\mathcal{C}_p(X)$. Tome para isto $f, g \in (\mathcal{L}_p(X))'$ com $\pi(f) = \pi(g)$. Então $f_{|X} = g_{|X}$. Seja $y = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n \in \mathcal{L}_p(X)$, onde $A_i \in \mathbb{R}$ e $x_i \in X$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como f, g são funções lineares vale que $f(y) = a_1 \cdot f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n) = a_1 \cdot g(x_1) + \ldots + a_n g(x_n) = g(y)$.
Agora temos para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$, que

$$(\pi \circ E_{\mathcal{L}_p(X)})(f) = \pi(e_f^{\mathcal{L}_p(X)}) = (e_f^{\mathcal{L}_p(X)})_{|X} = f.$$

(Lembramos que estamos identificando cada elemento $x \in X$ com a função de evaluação $e_x : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$).
Logo $(\pi \circ E_{\mathcal{L}_p(X)})$ é a identidade em $\mathcal{C}_p(X)$. Então segue que $E_{\mathcal{L}_p(X)}$ é bijetora.
Segue do Lema 2.17 que $E_{\mathcal{L}_p(X)}$ é contínua e aberta.
Vamos mostrar que $E_{\mathcal{L}_p(X)}$ é linear. De fato se $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$ vale que $E_{\mathcal{L}_p(X)}(f+g) = e_{f+g}^{\mathcal{L}_p(X)}$ e para cada $\varphi \in \mathcal{L}_p(X)$ temos que φ é linear, então $e_{f+g}^{\mathcal{L}_p(X)}(\varphi) = \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g) = e_f(\varphi)^{\mathcal{L}_p(X)} + e_g(\varphi)^{\mathcal{L}_p(X)}$. Logo $E_{\mathcal{L}_p(X)}(f+g) = e_f^{\mathcal{L}_p(X)} + e_g^{\mathcal{L}_p(X)} = E_{\mathcal{L}_p(X)}(f) + E_{\mathcal{L}_p(X)}(g)$.
Então $E_{\mathcal{L}_p(X)}$ é um homeomorfismo linear de $\mathcal{C}_p(X)$ em $(\mathcal{L}_p(X))'$. $\square$

Podemos então identificar o dual de $\mathcal{L}_p(X)$ com o espaço $\mathcal{C}_p(X)$. Além disso podemos interpretar a última demostração da seguinte maneira: cada função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ pode ser extendida para uma e somente uma função contínua de $\mathcal{L}_p(X)$ para $\mathbb{R}$.

Um fato interessante que vamos precisar no futuro, é a seguinte proposição.

Proposição 2.22 *Sejam X e Y espaços topológicos. Vale que $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y)$ é linearmente homeomorfo à $\mathcal{C}_p(X \oplus Y)$.*

Demonstração. Suponha que X e Y sejam disjuntos, senão tome $X' = X \times \{1\}$ e $Y' = Y \times \{2\}$. Queremos achar um homeomorfismo linear de $\mathcal{C}_p(X \oplus Y)$ a $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y)$. Defina $\varphi : \mathcal{C}_p(X \oplus Y) \to \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y)$ por $\varphi(f) = (f_{|X}, f_{|Y})$.
Sejam $f, g \in X \oplus Y$ com $g \neq f$, então existe $x \in X \cup Y$ com $f(x) \neq g(x)$. Suponha sem perda de generalidade que $x \in X$, logo $f_{|X}(x) \neq g_{|X}(x)$ e segue que $\varphi(f) \neq \varphi(g)$ e φ é injetora.
Seja $g \in \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y)$, então existem $g_1 \in \mathcal{C}_p(X)$ e $g_2 \in \mathcal{C}_p(Y)$ com $g = (g_1, g_2)$. Defina $f : X \oplus Y \to \mathbb{R}$ por $f(z) = g_1(z)$ se $z \in X$ e $f(z) = g_2(z)$ se $z \in Y$. Vale que f é contínua e $\varphi(f) = g$, logo φ é sobrejetora.

Falta mostrar que ϕ e sua função inversa são contínuas.
Para isto observe que para todos os $n, m \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $y_1, \ldots, y_m \in Y$ $O_1, \ldots, O_n, U_1, \ldots, U_m$ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ vale que

$$\varphi([x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m; O_1, \ldots, O_n, U_1, \ldots, U_m]) =$$

$$= [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \times [y_1, \ldots, y_m; U_1, \ldots, U_m].$$

De fato para cada $f \in [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m; O_1, \ldots, O_n, U_1, \ldots, U_m]$, temos que $f_{|X}(x_i) \in O_i$ e $f_{|Y}(y_j) \in U_j$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, portanto $\varphi(f) \in [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \times [y_1, \ldots, y_m; U_1, \ldots, U_m]$.
Para cada $(g_1, g_2) \in [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \times [y_1, \ldots, y_m; U_1, \ldots, U_m]$, existe $f = \varphi^{-1}((g_1, g_2))$ e vale para todos os $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots m$ que $f(x_i) = f_{|X}(x_i) = g_1(x_i) \in O_i$ e $f(y_i) = f_{|Y}(y_i) = g_2(y_i) \in U_i$.

Então temos para cada aberto básico U de $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y)$ um aberto básico U' de $\mathcal{C}_p(X \oplus Y)$ com $\varphi(U') = U$, portanto ϕ é contínuo.
Seja $V = [z_1, \ldots, z_n; V_1, \ldots, V_n]$ um aberto básico de $\mathcal{C}_p(X \oplus Y)$. Podemos supor sem falta de generalidade que $z_1, \ldots, z_l \in X$ e $z_{l+1}, \ldots, z_n \in Y$. Logo $\varphi(V) = [z_1, \ldots, z_l; V_1, \ldots, V_l] \times [z_{l+1}, \ldots, z_n; V_{l+1}, \ldots, V_n]$ é um conjunto aberto de $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y)$.
Caso $l = n$, ou seja $x_1, \ldots, x_n \in X$, então $\varphi(V) = [z_1, \ldots, z_n; V_1, \ldots, V_n] \times \mathcal{C}_p(Y)$ também é aberto em $\mathcal{C}_p(Y)$. $\square$

2.4 Propriedades topológicas básicas

Vamos analisar em que casos $\mathcal{C}_p(X)$ verifica algumas das principais propriedades topológicas. Vamos ver que isto depende bastante do espaço X e sua topologia. A conjunto $\mathcal{C}_p(X)$ é diretamente influenciada pela escolha de topologia de X. É só pensar no caso em que X é discreto, então $\mathcal{C}_p(X)$ é igual o produto inteiro $\mathbb{R}^X$, o que não é o caso quando X não for discreto.
Então para descobrir quais propriedades valem em $\mathcal{C}_p(X)$, vamos sempre tentar achar uma propriedade dual em X, ou seja, uma propriedade (topológica) $\mathcal{P}$ que vale em X se e somente se a propriedade (topológica) $\mathcal{Q}$ vale em $\mathcal{C}_p(X)$.

Antes de começar sistematicamente investugar algumas propriedades topológicas, vamos observar que, para estudar as propriedades do espaço das funções contínuas, podemos nos restringir aos espaços $\mathcal{C}_p(X)$, onde X é um espaço de Tychonoff, o que dá mais uma razão para nos restringirimos, no trabalho inteiro, a espaços de Tychonoff.

Teorema 2.23 *Seja X um espaço topológico qualquer. Existe um espaço de Tychonoff Y tal que $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ sejam topologicamente isomorfos.*

Demonstração. Definimos uma relação $\cong$ em X tal que para dois elementos x, y de X vale $x \cong y$ se $f(x) = f(y)$ para cada f em $\mathcal{C}_p(X)$. Facilmente mostra-se que essa relação é reflexiva, transitiva e simétrica, logo ela é uma relação de equivalência. Seja $Y = \{[x] : x \in X\}$ o espaço das classes de equivalência.
Queremos agora definir uma topologia em Y tal que o espaço seja um espaço de Tychonoff.
Defina para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$ a função $\varphi_f : Y \to \mathbb{R}$ por $\varphi_f(y) = f(x)$, onde $y \in Y$ e x é um elemento qualquer da classe de equivalência y. Para ver que essas funções estão bem definidas tome $x, z \in y$, então $x \cong z$ e $f(x) = f(z)$, portanto $\varphi_f(y)$ não depende do seu representante.
Seja $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$, a topologia usual de reta $\mathbb{R}$.

Para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$ defina $\tau_f = \varphi_f^{-1}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}})$, que são topologias em Y.
Para dois conjuntos $\varphi_f^{-1}(U), \varphi_f^{-1}(V) \in \tau_f$, vale que $\varphi_f^{-1}(U) \cap \varphi_f^{-1}(V) = \varphi_f^{-1}(U \cap V) \in \tau_f$.
Observe que $\bigcup_{f \in \mathcal{C}_p(X)} \tau_f$ verifica as propriedades de uma subbase de Y. Denotamos a topologia gerada por ela por τ. Mostraremos que (Y, τ) é de Tychonoff. Mostraremos primeiro que (Y, τ) é Hausdorff. Sejam $x, y \in Y$ duas classes de equivalencia com $x \neq y$ e seja $x' \in x$ e $y' \in y$. Vale que $x' \not\cong y'$, logo existe $f \in \mathcal{C}_p(X)$ tal que $f(x') \neq f(y')$. Segue que $\varphi_f(x') = f(x') \neq f(y') = \varphi_f(y')$ e existem V, W subconjuntos abertos e disjuntos de $\mathbb{R}$ com $f(x') \in V$ e $f(y') \in W$. Vale que $\varphi_f^{-1}(V), \varphi_f^{-1}(W) \in \tau_f \subseteq \tau$ são disjuntos e $\varphi_f(x) = f(x') \in V$ e $\varphi_f(y) = f(y') \in W$. Segue que $x \in \varphi_f^{-1}(V)$, $y \in \varphi_f^{-1}(W)$ e que (Y, τ) é Hausdorff.
Vamos mostrar que (Y, τ_f) é $T_{3\frac{1}{2}}$, para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$. Fixe $f \in \mathcal{C}_p(X)$ e sejam $y \in Y$ e um subconjunto fechado F de (Y, τ_f) tais que $y \notin F$. Então existe U subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ com $X \setminus F = f^{-1}(U)$ e vale que $f(y) \in U$. Portanto existe uma função contínua $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ com $g(f(y)) = 1$ e $g(\mathbb{R} \setminus U) \subseteq \{0\}$. Logo a função $g \circ f : Y \to [0,1]$ é contínua e vale que $(g \circ f)(y) = 1$ e $(g \circ f)(F) \subseteq g(\mathbb{R} \setminus U) \subseteq \{0\}$.
Seja agora $z \in Y$ e $G \subseteq Y$ fechado em (Y, τ). Como $\bigcup_{f \in \mathcal{C}_p(X)} \tau_f$ é subbase de τ, existem $n \in \omega$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}_p(X)$ e $W_i \in \tau_{f_i}$ tais que $z \in W = W_1 \cap \ldots \cap W_n \subseteq Y \setminus G$. Como cada τ_{f_i} é de Tychonoff, existe para cada $i = 1, \ldots, n$ uma função $h_i : Y \to [0,1]$ contínua em τ_{f_i} tal que $h_i(z) = 1$ e $h_i(G) \subseteq h_i(Y \setminus W_i) \subseteq \{0\}$. Essa função também é contínua em τ, porque $\tau_{f_i} \subseteq \tau$. Então $h_1 \cdot \ldots \cdot h_n$ é contínua em relação à τ e vale que $(h_1 \cdot \ldots \cdot h_n)(z) = 1$ e $(h_1 \cdot \ldots \cdot h_n)(G) \subseteq \{0\}$. Logo (Y, τ) é $T_{3\frac{1}{2}}$ e Hausdorff e consequentemente de Tychonoff.
Agora veremos que $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ são topologicamente isomorfos.
Defina $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ por $\phi(f) = \varphi_f$.
Sejam $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$ com $f \neq g$, então existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Logo $\varphi_f([x]) = f(x) \neq g(x) = \varphi_g([x])$ e segue que $\phi(f) \neq \phi(g)$, o que mostra que ϕ é injetora.
Se $h \in \mathcal{C}_p(Y)$, considere $h \circ \pi$, onde $\pi : X \to Y$ é a função definida por $\pi(x) = [x]$. Para mostrar que ψ é contínua, tome $x \in X$ e uma vizinhaça aberta $U \in \tau$ de $\psi(x)$. Como $\bigcup_{f \in \mathcal{C}_p(X)} \tau_f$ é subbase de τ, existem $m \in \omega$, $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}_p(X)$ e $V_i \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos abertos tais que $\psi(x) \in \varphi_{g_1}^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap \varphi_{g_m}^{-1}(V_m) \subseteq U$. Logo $V' = g_1^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap g_m^{-1}(V_m) \subseteq X$ é aberto. Vale para cada $j = 1, \ldots, m$ que $g_j(x) = \varphi_{g_j}(\psi(x)) \in V_j$, então $x \in V'$. Para todo $w \in V'$ e todo $j = 1, \ldots, m$ temos que $g_j(w) \in V_j$, logo $\psi(w) \in \varphi_{g_1}^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap \varphi_{g_m}^{-1}(V_m) \subseteq U$ e segue que ψ é contínua. Logo $h \circ \psi \in \mathcal{C}_p(X)$ e vale que $\phi(h \circ \psi) = \varphi_{h \circ \psi}$. Para cada $y \in Y$ e todo $x \in y$ teremos $\varphi_{h \circ \psi}(y) = (h \circ \psi)(x) = h(y)$ e segue que $\phi(h \circ \psi) = h$, logo ϕ é sobrejetora. Sejam $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$, $y \in Y$ e $x \in y$, então $\varphi_{f+g}(y) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \varphi_f(y) + \varphi_g(y)$ e $\varphi_{f \cdot g}(y) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \varphi_f(y) \cdot \varphi_g(y)$. Segue que ϕ é um isomorfismo.
Para mostrar que ϕ é contínua tome $f \in \mathcal{C}_p(X)$ e um aberto básico

$$W = [y_1, \ldots, y_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq \mathcal{C}_p(Y)$$

contendo $\phi(f) = \varphi_f$. Tome para cada $i = 1, \ldots, n$ um elemento $x_i \in y_i$. Considere $W' = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$, que é um subconjunto aberto de $\mathcal{C}_p(X)$. Vale que

$\varphi_f = \phi(f) \in W$, então segue para todo $i = 1, \ldots, n$ que $f(x_i) = \varphi_f(y_i) \in O_i$ e $f \in W'$. Para cada $g \in W'$ e cada $i = 1, \ldots, n$ vale $\varphi_g(y_i) = g(x_i) \in W'$, logo $\phi(W') \subseteq W$.

Para mostrar que ϕ^{-1} é contínua, mostraremos que $\phi(O)$ é aberto em $\mathcal{C}_p(Y)$, onde O é um aberto básico de $\mathcal{C}_p(X)$, da forma $[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ com $n \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $O_1, \ldots, O_n$ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Tome $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tais que $x_i \in y_i$ para todos $i = 1, \ldots, n$. Análogo ao que foi feito anteriormentemostra-se que $\phi([x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]) \subseteq [y_1, \ldots, y_n; O_1, \ldots, O_n]$. Além disso se $h \in [y_1, \ldots, y_n; O_1, \ldots, O_n]$, então existe $h' \in \mathcal{C}_p(X)$, tal que $h = \phi(h') = \varphi_{h'}$. Segue para cada $i = 1, \ldots, n$ que $h'(x_i) = \varphi_{h'}(y_i) = h(y_i) \in O_i$. Sabemos então que $\phi([x_1, \ldots, x_n]) = [y_1, \ldots, y_n]$ é aberto e ϕ^{-1} é contínua.

Logo $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ são topológicamente isomorfos. □

2.4.1 Axiomas de separação e enumerabilidade

Teorema 2.24 *Sejam X e Y espaços topológicos. Para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ vale que se Y verificar T_i então $\mathcal{C}_p(X, Y)$ verifica T_i. Em particular vale que $\mathcal{C}_p(X)$ verifica T_0, T_1, T_2, T_3 e $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demonstração. Sabemos da Observação 2.3 que $\mathcal{C}_p(X, Y)$ é um subespaço do produto cartesiano $\prod_{x \in X} Y_x$, onde $Y_x = Y$ para cada $x \in X$. Vale que um subespaço de um espaço que verifica T_i, também verifica T_i, onde $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Além disso vale para $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ e que $\prod_{x \in X} Y_x$ verifica T_i se Y_x verifica T_i para todo $x \in X$. □

$\mathcal{C}_p(X)$ não é normal no caso geral. De fato, mesmo quando X é normal, $\mathcal{C}_p(X)$ não necessáriamente é normal também, como veremos no seguinte exemplo.

Exemplo 2.25 A reta de Sorgenfrey R é normal mas vale que $\mathcal{C}_p(R)$ não é normal.

Portanto $\mathcal{C}_p(X)$ pode não ser normal, mesmo quando X é normal. De fato, veremos no próximo capitulo que não existe uma characterização da normalidade de $\mathcal{C}_p(X)$ em termos de propriedades topológicas em X.

Mas vale que quando $\mathcal{C}_p(X)$ é normal, então $\mathcal{C}_p(X)$ já é coletivamente normal.

Teorema 2.26 *Seja X um espaço topológico, então $\mathcal{C}_p(X)$ é normal se e somente se $\mathcal{C}_p(X)$ é coletivamente normal.*

Demonstração. Um espaço coletivamente normal sempre é normal.

Suponha que $\mathcal{C}_p(X)$ seja normal. Pelo Lema 2.9, $\mathcal{C}_p(X)$ é homeomorfo a $\mathcal{C}_p(X, (0, 1))$. Note que $\mathcal{C}_p(X, (0, 1))$ é um subespaço denso de $\mathcal{C}_p(X, I)$.

De fato, para cada $f \in \mathcal{C}_p(X, (0, 1))$, $f \in \mathcal{C}_p(X, I)$ e para cada aberto básico $V = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ de $\mathcal{C}_p(X, (0, 1))$, V é aberto em $\mathcal{C}_p(X, I)$. Além disso vale para cada aberto básico $V' = [x'_1, \ldots, x'_n; O'_1, \ldots, O'_n]$ de $\mathcal{C}_p(X, I)$ que $V' \cap \mathcal{C}_p(X, (0, 1)) = [x'_1, \ldots, x'_n; O'_1 \cap (0, 1), \ldots, O'_n \cap (0, 1)]$ é aberto em $\mathcal{C}_p(X, (0, 1))$. Para cada subconjunto aberto U de I existe $r_U \in U \cap (0, 1)$. Se tomamos algum $x \in X$, então existe,uma função $f : X \to (0, 1)$ com $f(x) = r_U$. Segue que $[x, U] \cap \mathcal{C}_p(X, (0, 1))$ é diferente do vazio para todo $x \in X$ e U subconjunto aberto de I, portanto $\mathcal{C}_p(X,(0,1))$ é denso em $\mathcal{C}_p(X,I)$. Sejam $t \in [0,1]$, $f,g \in \mathcal{C}_p(X,(0,1))$ e $x \in X$. Vale que $0 \leq f(x), g(x) \leq 1$, logo $0 \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot g(x) \leq t + (1-t) = 1$. Segue que $\mathcal{C}_p(X,(0,1))$ é convexo.

Analogamente à demostração de Teorema 2.4 segue que $\mathcal{C}_p(X,I)$ é denso em I^X. Então segue que $\mathcal{C}_p(X)$ é denso em I^X. Temos que $\mathcal{C}_p(X)$ é um subespaço denso, convexo e normal de I^X, logo segue de Teorema 1.29 e que $ext(\mathcal{C}_p(X)) = \omega$, portanto X é coletivamente normal. □

Em geral $\mathcal{C}_p(X)$ não verifica os axiomas de enumerabilidade, só se restringimos X para casos bem específicos. Mostraremos na secção 2.4.4 que $\chi(\mathcal{C}_p(X)) = w(\mathcal{C}_p(X)) = |X|$ e $d(\mathcal{C}_p(X)) = iw(X)$, portanto valem os seguintes teoremas:

Teorema 2.27 *Seja X um espaço topológico. As seguintes propriedades são equivalentes:*

i) X é enumerável,

ii) $\mathcal{C}_p(X)$ verifica o segundo axioma de enumerabilidade,

iii) $\mathcal{C}_p(X)$ verifica o primeiro axioma de enumerabilidade.

A base que usaremos para mostrar $\chi(\mathcal{C}_p(X)) = w(\mathcal{C}_p(X)) = |X|$ é a base

$$\mathcal{B} = \{[x_1, \ldots, x_n; (p_1,q_1), \ldots, (p_n,q_n)] : n \in \omega, x_1, \ldots, x_n \in X,$$

$$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}\}$$

(veja 2.1). Veremos que esta base tem a mesma cardinalidade de X, logo é enumerável, caso X for enumerável.

Teorema 2.28 *Seja X um espaço topológico. As seguintes propriedades são equivalentes:*

i) $\mathcal{C}_p(X)$ é separável.

ii) Existe um espaço Y que verifica o segundo axioma de enumerabilidade e uma função contínua bijetora $f : X \to Y$.

Exemplo 2.29 Como $\mathbb{R}$ verifica o segundo axioma de enumerabilidade, $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ é separável.

2.4.2 Compacidade e generalizações

Mostraremos que $\mathcal{C}_p(X)$ nunca é compacto. Na prova do seguinte teorema mostraremos que $\mathcal{C}_p(X)$ é enumeravelmente compacto se e somente se $X = \emptyset$. Então sabemos que $\mathcal{C}_p(X)$ diferente do vazio não é enumeravemente compacto e logo também não é compacto.

Teorema 2.30 *$\mathcal{C}_p(X)$ é compacto se somente se $X = \emptyset$.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então $\mathcal{C}_p(X) = \emptyset$ que é compacto.

Suponha agora exista $x \in X$ e defina $U_n = [x; (n-\frac{2}{3}, n+\frac{2}{3})]$. Mostraremos que $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ é um recobrimento aberto de $\mathcal{C}_p(X)$ que não admite subrecobrimento finito.

Vale claramente, para cada $n \in \omega$, que U_n é aberto. Para mostrar que $\mathcal{U}$ é recobrimento de $\mathcal{C}_p(X)$ seja $f \in \mathcal{C}_p(X)$ qualquer. Como $\bigcup_{n\in\omega}(n - \frac{2}{3}, n + \frac{2}{3}) = \mathbb{R}$, existe $m \in \omega$ tal que $f(x) \in (m - \frac{2}{3}, m + \frac{2}{3})$ e segue que $f \in U_m$.

Agora suponha que exista $\mathcal{U}'$ subrecobrimento finito de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ não é finito existe $l \in \omega$ tal que $U_l \notin \mathcal{U}'$. Note que a função $h \in \mathcal{C}_p(X)$ definida por $h(x) = l$ para todo $x \in X$ não pertence a nunhum U_n, onde $n \neq l$. Mas isso contradiz o fato de que $\mathcal{U}'$ é recobrimento de $\mathcal{C}_p(X)$. □

Vamos então analisar propriedades mais fracas relacionadas a compacidade. Geralmente $\mathcal{C}_p(X)$ também não é nem localmente compacto, nem σ-compacto. Para poder provar qual propriedade é dual a estas propriedades vamos mostrar primeiramente alguns fatos sobre quando $\mathcal{C}_p(X)$ é σ-enumeravelmente compacto.

Lema 2.31 *Seja X um espaço topológico tal que $\mathcal{C}_p(X)$ é σ-enumeravelmente compacto, então X é pseudocompacto.*

Demonstração. Suponha que X não é pseudocompacto.

Vamos primeiramente mostrar que existe uma função contínua sobrejetora de $\mathcal{C}_p(X)$ em $\mathbb{R}^\omega$. Por Lema 1.13 X é pseudocompacto se e somente se toda família discreta de subconjuntos abertos não vazios de X é finita. Logo existe uma família discreta $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos abertos não vazios de X. Tome para cada $n \in \omega$ um ponto $x_n \in U_n$. Como X é de Tychonoff existe uma função contínua $f_n : X \to [0, 1]$ com $f_n(x_n) = 1$ e $f_n(X \setminus U_n) = \{0\}$. Vale que $D = \{x_n : n \in \omega\}$ é discreto, pois $\mathcal{U}$ é discreto. Além disso existe para cada $z \in X \setminus D$ um aberto V_z e um e somente um $m_z \in \omega$ tais que $V_z \cap U_{m_z} \neq \emptyset$. Logo $U_{m_z} \cap X \setminus \{x_{m_z}\}$ é vizinhança de z, contida em $X \setminus D$, portanto D é fechado em X.

Considere a restrição $\pi_D \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(D) = \mathbb{R}^D$, definida por $\pi_D(f) = f_D$, que é uma função contínua.

Fixe uma função $f : D \to \mathbb{R}$, então f é contínua. Vale que a função $g : X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot f(x_i)$ é contínua também. De fato existe para cada $z \in X$ uma vizinhança V_x, que intercepta somente um elemento de $\mathcal{U}$, vamos dizer que é U_l. Então $g_{|V_z} = (f_l)_{|V_z} \cdot f(x_l)$ é uma função contínua em z e, como z foi abitrário, g é contínua. Vale que $\pi_D(g) = g_{|D} = f_{|D}$, logo π_D é sobrejetora. Como $\mathcal{C}_p(X)$ é σ-enumeravelmente compacto e π_D é contínua segue que $\pi_D(\mathcal{C}_p(X)) = \mathbb{R}^D$ é σ-enumeravelmente compacto. D é homeomorfo a ω, então vale que $\mathbb{R}^D$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^\omega$, que não é σ-enumeravelmente compacto pelo Teorema 1.15. □

Definição 2.32 Chamamos um espaço topológico X de *p-espaço* se todo subsespaço G_δ de X é aberto.

Lema 2.33 *Seja X um espaço topológico tal que $\mathcal{C}_p(X)$ é σ-enumeravelmente compacto, então X é um p-espaço.*

Demonstração. Suponha que X não é um p-espaço, então existe uma família de fechados $F_n : n \in \omega$ tal que $F = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ não é fechado em X. Logo existe $x \in \overline{F} \setminus F$. Podemos supor sem perda de generalidade que $F_n \subseteq F_{n+1}$ para todo $n \in \omega$. Considere $A = \{f \in \mathcal{C}_p(X) : f(x) = 0\}$, que é fechado em $\mathcal{C}_p(X)$, e portanto

σ-enumeravelmente compacto. Logo existem conjuntos enumeravelmente compactos $A_n \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ tais que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

Existe para todos os $n \in \omega$ e $\epsilon > 0$, um $k_n \in \omega$ tal que para cada $f \in A_n$ existe $z \in F_{k_n}$ com $f(z) < \epsilon$. De fato, suponha que não, então existem um $m \in \omega$ e um $\epsilon' > 0$ tais que para todo $i \in \omega$, existe $g_i \in A_m$ com $g_i(z) \geq \epsilon'$ para todo $z \in F_i$. Como A_m é enumeravelmente compacto existe um ponto de acumulação $h \in A_m \subseteq A$ do conjunto $\{g_i : i \in \omega\}$. Existe, para cada $y \in F = \bigcup_{i\in\omega} F_i$, $l \in \omega$ com $y \in F_i$, para $i \geq l$, logo $g_i(y) \geq \epsilon'$ para $i \geq l$ e segue que $h(y) \geq \epsilon'$. Mas então $h(y) \geq \epsilon'$ para todo $y \in F$ e como $h \in A$ temos que $h(x) = 0$, o que contradiz a continuidade de h e o fato que $x \in \overline{F}$.

Então podemos fixar uma sequência estritamente crescente $\{k_n\}_{n\in\omega} \subseteq \omega$ tal que para todo $n \in \omega$ e todo $f \in A_n$ existe $y \in F_{k_n}$ com $f(y) < \frac{1}{2^n}$

Como $x \in \overline{F} \setminus F$, vale que $x \notin F_n = \overline{F_n}$. Logo existe para cada $n \in \omega$ uma função $g_n : X \to [0, \frac{1}{2^n}]$ com $g_n(x) = 0$ e $g_n(F_{k_n}) \subseteq \{\frac{1}{2^n}\}$. Vale que $\{g_0 + \ldots + g_n\}_{n\in\omega}$ converge uniformamente a $g = \sum_{n\in\omega} g_n$, portanto $g \in \mathcal{C}_p(X)$. Para todo $n \in \omega$ e $y \in F_{k_n}$ vale que $g(y) \leq g_n(y) \leq \frac{1}{2^n}$, logo $g \notin A_n$. Mas temos que $g(x) = 0$, logo $g \in A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, contradição. □

Teorema 2.34 *Seja X um espaço de Tychonoff. São equivalentes:*

i) X é finito,

ii) $\mathcal{C}_p(X)$ é localmente compacto,

iii) $\mathcal{C}_p(X)$ é σ-compacto,

iv) $\mathcal{C}_p(X)$ é σ-enumeravelmente compacto.

Demonstração. Seja X um espaço de Tychonoff finito. Então cada função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua. Logo $\mathcal{C}_p(X) = \prod_{x\in X} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, onde $|X| = n$. Como $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto e σ-compacto mostramos $i) \Rightarrow ii)$ e $i) \Rightarrow iii)$. Obviamente $iii)$ implica $iv)$. Mostraremos agora que $ii) \Rightarrow i)$. Suponha então que $\mathcal{C}_p(X)$ seja localmente compacto, $u \in \mathcal{C}_p(X)$ a função nula e U uma vizinhança compacta de u. Então existe $V = \mathcal{O}(u, x_1, \ldots, x_n, \epsilon)$ vizinhança aberta básica de u tal que $u \in V \subseteq U$.
Suponha que exista $y \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Considere a função contínua $e_y : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ definida por $e_y(f) = f(y)$. Como U é compacto, vale que $e_y(U)$ é compacto e, como é um subconjunto de $\mathbb{R}$, segue que $e_y(U)$ é limitado. Logo existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|e_y(f)| < k$ para todo $f \in U$. Por 1.3 existe uma função $g \in \mathcal{C}_p(X)$ tal que $g(x_i) = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $g(y) = k$. Vale que $g \in V \subseteq U$, mas $e_y(g) = k$, o que leva a uma contradição. Logo $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é finito.

Falta mostrar $iv) \Rightarrow i)$. Seja $\mathcal{C}_p(X)$ um espaço σ-enumeravelmente compacto, então segue de Lema 2.31 e Lema 2.33 que X é um espaço pseudocompacto e que todos os subespaços G_δ de X são abertos. Então X é finito pelo Lema 1.14. □

Uma das principais perguntas que resta é se $\mathcal{C}_p(X)$ pode ser de Lindelöf e em quais casos isto acontece. Vamos tratar desta questão no capítulo 4.

2.4.3 Metrizabilidade

Teorema 2.35 *Seja X um espaço topológico regular. $\mathcal{C}_p(X)$ é metrizável se e somente se X é enumerável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}_p(X)$ metrizável, logo $\mathcal{C}_p(X)$ verifica o primeiro axioma de enumerabilidade. Então segue do Teorema 2.27 que X é enumerável.

Seja agora X enumerável, então segue de teorema 2.27 que $\mathcal{C}_p(X)$ verifica o segundo axioma de enumerabilidade. Vale pelo Teorema de Metrização de Urysohn que cada espaço topológico regular que verifica o segundo axioma de enumerabilidade é um espaço metrizável (veja 1.6). Logo $\mathcal{C}_p(X)$ é metrizável. □

Sabemos que cada espaço metrizável verifica o primeiro axioma da enumerabilidade, e no espaço das funções contínuas vale a equivalença dessas duas propriedades. Segue dos Teoremas 2.27 e 2.35 que se $\mathcal{C}_p(X)$ verifica o primeiro axioma, então $\mathcal{C}_p(X)$ é metrizável.

2.4.4 Funções cardinais

Vamos ver nessa secção como as funções cardinais em $\mathcal{C}_p(X)$ se relacionam com as propriedades do espaço X.

Teorema 2.36 *Seja X um espaço topológico infinito. Vale que $\chi(\mathcal{C}_p(X)) = w(\mathcal{C}_p(X)) = |X|$*

Demonstração. Vale que $\chi(Z) \leq w(Z)$ para todo espaço topológico Z. Para mostrar que $w(\mathcal{C}_p(X)) \leq |X|$ considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}_p(X)$, onde $\mathcal{B}$ é a seguinte família de conjuntos abertos

$$\{[x_1, \dots, x_n; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)] : n \in \omega, x_1, \dots, x_n \in X, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Como X é um espaço infinito segue que $|\mathcal{B}| = |X|$, então $w(\mathcal{C}_p(X)) \leq |X|$.
Seja $u \in \mathcal{C}_p(X)$ a função nula e seja $\mathcal{V}_u$ um sistema fundamental de vizinhanças com $|\mathcal{V}_u| = \chi(\mathcal{C}_p(X))$. Podemos supor que os elementos de $\mathcal{V}_u$ são abertos básicos, ou seja, cada $V \in \mathcal{V}_u$ é da forma $[x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n]$, para algum $n \in \omega$, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $O_1, \dots, O_n \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos abertos. De fato se não for, podemos tomar um sistema fundamental deste jeito, tomando para cada $V \in \mathcal{V}_u$ um aberto básico $V' \in \mathcal{C}_p(X)$ tal que $u \in V' \subseteq V$. Para cada $V = [x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n] \in \mathcal{V}_u$ definimos $supp(V) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Seja $Y = \{supp(V) : V \in \mathcal{V}_u\}$. Suponha que existe $x \in X \setminus Y$. Observe que para o conjunto aberto $U = [x; (-1, 1)]$, vale que $u \in U$, então existe algum $W = [z_1, \dots, z_m; W_1, \dots, W_m] \in \mathcal{V}_u$ tal que $u \in W \subseteq U$. Como $x \notin supp(W)$ temos que $z_i \neq x$ para todos $i = 1, \dots, m$. Logo podemos construir por Lema 1.3 uma função contínua f tal que $f(z_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $f(x) = 1$. Então $W \nsubseteq U$, o que é uma contradição e segue que $X = Y$. Como $supp(W)$ é finito para cada $W \in \mathcal{V}_u$ concluímos que $|X| = |Y| = |\mathcal{V}_u| = \chi(\mathcal{C}_p(X))$. Portanto vale $|X| = \chi(\mathcal{C}_p(X)) \leq w(\mathcal{C}_p(X)) \leq |X|$ como queríamos mostrar. □

Lembramos que

$$iw(X) = min\{\kappa \geq \omega : \text{ existem } Y \text{ com } w(Y) \leq \kappa \text{ e bijeção contínua} f : X \to Y\}$$

e

$$nw(X) = min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ network de } X\},$$

onde um network de X é uma família de subconjuntos não vazios de X tal que para todo $U \in \tau(X)$ e todo $x \in U$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.

Teorema 2.37 *Seja X um espaço topológico, então $iw(\mathcal{C}_p(X)) = d(X)$*

Demonstração. Pela definição de iw, existe um espaço topológico Y, uma função contínua, bijetora $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to Y$ e uma base $\mathcal{B}$ de Y com $|\mathcal{B}| = iw(\mathcal{C}_p(X))$.
Seja $u \in \mathcal{C}_p(X)$ a função nula e seja $\mathcal{U} = \{\phi^{-1}(U) : U \in \mathcal{B} \text{ e } u \in \phi^{-1}(U)\}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ tome um aberto básico $O_U = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ com $u \in O_U \subseteq U$. Defina para cada $O_U = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ o conjunto $supp(O_U) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Tome $D = \bigcup\{supp(O_U) : U \in \mathcal{U}\}$, que é um conjunto com cardinalidade $|\mathcal{B}| = iw(\mathcal{C}_p(X))$.
Suponha que exista $x \in X \setminus \overline{D}$, então como X é de Tychonoff existe uma função $f \in \mathcal{C}_p(X)$ com $f(x) = 1$ e $f(\overline{Y}) \subseteq \{0\}$.

Vale que $f \in \bigcap \mathcal{U}$. Observe que $\phi(f) \neq \phi(u)$, portanto, existe uma vizinhança $U \in \mathcal{B}$ de u com $\phi(f) \notin U$. Logo $f \notin \phi^{-1}(U) \in \mathcal{U}$, o que contradiz o fato que $f \in \bigcap \mathcal{U}$.

Seja D um subconjunto denso de X com $|D| = d(X)$. Considere a função restrição $\pi_D : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(D)$ definida por $\pi_D(f) = f_{|D}$. Então vale que $w(\pi_D(\mathcal{C}_p(X))) \leq w(\mathcal{C}_p(D)) = |D| = d(X)$. Pelo Lema 2.5 segue que π_D é contínua e injetora. Como $iw(\mathcal{C}_p(X))$ é o menor cardinal tal que existe um espaço Z com $w(Z) = \kappa$ e uma função contínua e bijetora $f : \mathcal{C}_p(X) \to Z$, vale que $iw(\mathcal{C}_p(X)) \leq w(\pi_D(\mathcal{C}_p(X))) \leq d(X)$. □

Para essas duas funções cardinais também vale a propriedade "espelhada".

Teorema 2.38 *Seja X um espaço topológico. Vale que $d(\mathcal{C}_p(X)) = iw(X)$.*

Demonstração. Lembramos que X é homeomorfo a um subespaço de $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ pelo Teorema 2.18, segue do Lema 1.22 que $iw(X) \leq iw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)))$. Sabemos, do Teorema 2.37, que $iw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))) = d(\mathcal{C}_p(X))$. Logo $iw(X) \leq d(\mathcal{C}_p(X))$.
Agora seja $iw(X) \leq \kappa$, então existe um espaço Y com uma base de cardinalidade menor ou igual a κ e uma função contínua e bijetora $\varphi : X \to Y$. Observe a função dual $\varphi^* : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ definida por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Vamos usar o "network-weight"$nw(Y)$, que é por Lema 1.22 menor ou igual ao peso de Y. Vale pelo Lema 2.7 que φ^* é um homeomorfismo na sua imagem, o que implica que $nw(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) = nw(\mathcal{C}_p(Y))$. Por Lema 2.7 também vale que $\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))$ é um subconjunto denso de $\mathcal{C}_p(X)$, logo segue do Lema 1.19 que $nw(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) = nw(\mathcal{C}_p(Y))$. Outra coisa que segue do Lema 1.19 é que $d(\mathcal{C}_p(X)) \leq d((\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))))$. Lema 1.22 implica que

$$d(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) \leq nw(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) \text{ e } nw(Y) \leq w(Y).$$

Então temos

$$d(\mathcal{C}_p(X)) \leq d((\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y)))) \leq nw(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) = nw(\mathcal{C}_p(Y)) = nw(Y) \leq w(Y) \leq \kappa.$$

□

Teorema 2.39 *Seja X um espaço topológico. Então $\mathcal{C}_p(X)$ verifica a propriedade de Souslin, ou seja $c(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega$.*

Demonstração. Como $\mathcal{C}_p(X)$ é um subespaço denso de $\mathbb{R}^X$ e $\mathbb{R}^X$ verifica a propriedade de Souslin, segue que $\mathcal{C}_p(X)$ verifica a propriedade de Souslin também. □

Teorema 2.40 *Para um espaço topológico X vale que $nw(\mathcal{C}_p(X)) = nw(X)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{N}$ um network de X tal que $nw(X) = |\mathcal{N}|$. Defina para cada $N \in \mathcal{N}$ e cada $p, q \in \mathbb{Q}$ com $p < q$ o conjunto $A_{(N,p,q)} = \{f \in \mathcal{C}_p(X) : f(N) \subseteq (p, q)\}$. Tome $\mathcal{N}'$ como sendo as interseções finitas de conjuntos da forma $A_{(N,p,q)}$ onde $n \in \mathcal{N}$, $p, q \in \mathbb{Q}$ e $p < q$. $\mathcal{N}'$ forma um network em $\mathcal{C}_p(X)$. De fato, seja $U \in \mathcal{C}_p(X)$ aberto e tome $f \in U$. Existem $n \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $O_1, \ldots, O_n \subseteq \mathbb{R}$ aberto, tais que $f \in [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq U$. Como para um $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixo vale que $f^{-1}(O_i)$ é aberto em X, existe $N_i \in \mathcal{N}$ com $x \in N_i \subseteq f^{-1}(O_i)$. Existem também $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$ tais que $(p_i, q_i) \subset O_i$. Logo $f \in A_{(N_i,p_i,q_i)}$ e vale que $\bigcap_{i=1}^n A_{(N_i,p_i,q_i)} \subseteq [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq U$. Então $\mathcal{N}'$ é network de X e segue que $nw(\mathcal{C}_p(X)) \leq |\mathcal{N}'| = |\mathcal{N}| = nw(X)$.

Mostramos que vale a desigualdade $nw(\mathcal{C}_p(X)) \leq nw(X)$ para um espaço topológico X qualquer, vale então também que $nw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))) \leq nw(\mathcal{C}_p(X))$. Sabemos que X pode ser identificado com um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$. Então segue do Lema 1.18 que $nw(X) \leq \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$. Logo temos $nw(\mathcal{C}_p(X)) \leq nw(X) \leq nw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))) \leq nw(\mathcal{C}_p(X))$. □

Teorema 2.41 *Seja X um espaço topológico de Tychonoff. Temos que $s(X) \leq s(\mathcal{C}_p(X))$.*

Demonstração. Seja D um subespaço discreto de X tal que $|D| = s(X)$. Então existe para cada $d \in D$ uma vizinhança U_d de d aberta em X tal que $U_d \cap (D \setminus \{d\}) = \emptyset$. Como X é um espaço de Tychonoff, existe para cada $d \in D$ uma função $f_d : X \to [0, 1]$ tal que $f_d(d) = 1$ e $f_d(y) = 0$ para todo $y \in X \setminus U_d$. Tome $C = \{f_d : d \in D\}$. Considere agora para, cada $d \in D$, o conjunto $V_d = [d; (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$, que é aberto em $\mathcal{C}_p(X)$, é vizinhança de f_d. Note que $C \setminus \{f_d\} \cap V_d = \emptyset$. De fato, se existir $f \in C \setminus \{f_d\} \cap V_d$, então existe algum $c \in D \setminus \{d\}$ tal que $f = f_c$. Vale que $d \in X \setminus U_c$ e segue $f(d) = f_c(d) = 0$. Logo C é discreto em $\mathcal{C}_p(X)$, o que implica que $s(\mathcal{C}_p(X)) \geq |C| = |D| = s(X)$.

□

Realmente não vale a igualdade nesta última afirmação, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 2.42 A reta de Sorgenfrey R verifica a propriedade de Sorgenfrey, mas $\mathcal{C}_p(X)$ não a verifica. Então temos que $c(R) < c(\mathcal{C}_p(R))$.

No caso que X é metrizável, as propriedades de Lindelöf, normalidade e "extend"enumerável são equivalentes em $\mathcal{C}_p(X)$. Para mostrar essa equivalência usaremos o seguinte Lema:

Lema 2.43 *Para um espaço métrico (X, d), onde $ext(X) > \omega$ vale que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ é homeomorfo à um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(X)$.*

Demonstração. Como $ext(X) > \omega$ existe um subconjunto $A \subseteq X$ discreto e fechado com $|A| = \omega_1$, então existe para cada $a \in A$ um raio $r_a > 0$ com $B_d(x, r_x) \cap A = \{x\}$. Tome, para todo $n \in \omega$, $A_n = \{a \in A : r_a > \frac{1}{n}\}$, então $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, portanto existe $m \in \omega$ com $|A_n| = \omega_1$, seja $D = A_m$. Vale para $x, y \in D$ distintos que $y \notin \{x\} = B_d(x, \frac{1}{m}) \cap A$, logo $d(x, y) > \frac{1}{m}$. Tome para cada $x \in X$, $U_x = B_d(x, \frac{1}{5m})$ e $\mathcal{U} = \{U_a : a \in D\}$. Para todo $x \in X$ o conjunto aberto U_x só intersecta no máximo um elemento de $\mathcal{U}$. De fato se existirem $a', a'' \in D$ distintos e $z \in U_{a'} \cap U_{a''}$, então

$$d(a', a'') \leq d(a', z) + d(z, a'') \leq \frac{2}{5m} < \frac{1}{m},$$

contradição. Logo $\mathcal{U}$ é uma família discreta.

Como X é de Tychonoff, existe para cada $a \in D$ uma função contínua $f_a : X \to [0, 1]$ com $f_a(a) = 1$ e $f_a(X \setminus U_a) \subseteq \{0\}$. Defina função $\phi : \mathbb{R}^D \to \mathcal{C}_p(X)$ por $\phi(g)(x) = \sum_{a\in D} f_a(x) \cdot g(a)$. Para cada $x \in X$ existe um $b_x \in D$ tal que $U_x \cap U_{b_x} \neq \emptyset$ e $U_x \cap U_a = \emptyset$ para todo $a \in D \setminus \{b_x\}$. Logo $\phi(g)_{|U_x} = (f_{b_x})_{|U_x} \cdot g(b_x)$ é uma função contínua, portanto $\phi(g) \in \mathcal{C}_p(X)$ e ϕ é bemdefinida.

Mostraremos que ϕ é contínua. Como $\mathcal{C}_p(X) \subseteq \mathbb{R}^X$, basta mostrar que $e_x \circ \phi$ é contínua para cada $x \in X$, onde $e_x : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ é definida por $e_x(f) = f(x)$. Vale para todo $x \in X$ que $\phi(g)(x) = f_{b_x}(x) \cdot g(b_x)$. Seja $p_a : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ a projeção para o fator $a \in D$, logo $p_a(g) = g(a)$ para todo $g \in \mathcal{C}_p(D) = \mathbb{R}^D$. Então $e_x \circ \phi = f_{b_x}(x) \cdot p_{b_x}$ é uma multiplicação entre uma função contante e uma função contínua, portanto é contínua.

Considere a função restição $\pi_D : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(D) = \mathbb{R}^D$. Vale para todo $g \in \mathbb{R}^D$ que $\pi_D(\phi(g)) = g$, portanto ϕ é injetora. Além disso, como ϕ_D é contínua, segue que ϕ é aberta, logo ϕ é um mergulho.

Vamos mostrar agora que $F = \phi(\mathbb{R}^D)$ é fechado em $\mathcal{C}_p(X)$. Seja $h' \in \mathcal{C}_p(X) \setminus F$ e $h'' = \phi(\pi_D(f)) \subseteq F$. Como $\mathcal{C}_p(X)$ é de Hausdorff, $\phi \circ \pi_D$ é contínua e $h'' \neq h'$, existem vizinhanças abertas disjuntas U e V de h' e h'' respectivamente tal que $\phi(\pi_D(V)) \subseteq U$. Temos para cada $f \in F \cap U$ que $f = \phi(\pi_D(f)) \in V$, logo $f \in U \cap V$, portanto $F \cap U = \emptyset$. Segue que F é fechado em $\mathcal{C}_p(X)$.

Vale que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^D$, que éhomeomorfo a um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(X)$. □

Teorema 2.44 *Para um espaço metrizável X são equivalentes*

i) $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf,

ii) $\mathcal{C}_p(X)$ é normal,

iii) $ext(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega$, *iv) X verifica o segundo axioma de enumerabilidade.*

Demonstração. Sabemos do Teorema 2.40 e Teorema 1.22 que $ext(\mathcal{C}_p(X)) \leq l(\mathcal{C}_p(X)) \leq nw(\mathcal{C}_p(X)) = nw(X) \leq w(X)$. Valem então as implicações $iv) \Rightarrow i) \Rightarrow iii)$. Sabemos também que todo espaço Lindelöf de Tychonoff é normal, então vale $i) \Rightarrow ii)$.
Seja d uma métrica de X e suponha que X é normal. Para mostrar que X verifica o segundo axioma de enumerabilidade basta, pelo Teorema 1.26, mostrar que $ext(X) \leq \omega$. Suponha que $ext(X) > \omega$, então vale pelo Lema anterior que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ é homeomorfo a um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(X)$. Como $\mathcal{C}_p(X)$ é normal, vale que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ também é normal, o que contradiz Teorema 1.5, o que mostra $ii) \Rightarrow iv)$.

Suponha $ext(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega$ e mas que $ext(X) > \omega$. Então novamente $\mathbb{R}^{\omega_1}$ é homeomorfo à um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(X)$ e segue que $ext(\mathbb{R}^{\omega_1}) \leq \omega$ o que contradiz Teorema 1.5. Logo vale $iii) \Rightarrow iv)$. □

Observe que as implicações $iv \Rightarrow i) \Rightarrow ii)$ e $i) \Rightarrow iii)$ valem também se X não for metrizável.

Definição 2.45 Um ω-*recobrimento* de um espaço topológico X é uma família γ de subconjuntos de X tal que para cada subconjunto finito $M \subseteq X$ existe $U \in \gamma$ com $M \subseteq U$. Chamamos ω-recobrimento γ de *aberto* se todos elementos de γ são abertos.

Teorema 2.46 *Seja X um espaço topológico. Vale $t(\mathcal{C}_p(X)) = sup\{l(X^n) : n \in \omega\}$.*

Demonstração. Vamos começar mostrando que $t(\mathcal{C}_p(X)) \leq sup\{l(X^n) : n \in \omega\}$.
Tome $\kappa = sup\{l(X^n) : n \in \omega\}$ e seja $u \in \mathcal{C}_p(X)$ a função nula.

Fato Para qualquer $A \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ com $u \in \overline{A}$, existe $B \subseteq A$ com $u \in \overline{B}$ e $|B| \leq \kappa$.
Tome $A \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ com $u \in \overline{A}$ e tome $\gamma_n = \{f^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) : f \in A\}$ para cada $n \in \omega$. Para cada $n \in \omega$ e cada conjunto finito $x_1, \ldots, x_m \in X$ existe $g \in A \cap \mathcal{O}(u, x_1, \ldots, x_m, \frac{1}{n})$ e segue que $|g(x_i) - u(x_i)| < \frac{1}{n}$, para todo $i = 1, \ldots, m$, logo $x_1, \ldots, x_m \in g^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$. Portanto vale, para cada $n \in \omega$, que γ_n é um ω-recobrimento de X. Como $\kappa = sup\{l(X^n) : n \in \omega\}$ existe, pelo Teorema 1.16, um ω-recobrimento $\mu_n \subseteq \gamma_n$ com $|\mu_n| \leq \kappa$. Então existe para cada $n \in \omega$ um subconjunto B_n de A tal que $|B_n| \leq \kappa$ e $\{f^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : f \in B_n\}$ é um ω-recobrimento de X. Tome $B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$, que tem cardinalidade menor que κ. Falta mostrar que $u \in \overline{B}$. Seja $V = \mathcal{O}(u, x_1, \ldots, x_m, \epsilon)$, que é uma vizinhança aberta básica de u. Tome $n \in \omega$ com $\frac{1}{n} < \epsilon$. Como $\{f^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) : f \in B_n\}$ é um ω-recobrimento de X existe $h \in B_n \subseteq B$ tal que $x_1, \ldots, x_m \in h^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$. Logo $|h(x_i)| < \frac{1}{n}$ para cada $i = 1, \ldots, n$ e segue que $h \in B \cap U$ e consequentemente $u \in \overline{B}$ o que prova o Fato.

Seja agora $C \subseteq X$ qualquer e $g \in \overline{C}$. Considere $C' = \{f - g : f \in C\}$. Vale que $u \in \overline{C'}$ e pela Afirmação existe $B' \subseteq C'$ com $u \in \overline{B'}$ e $|B'| < \kappa$. Seja $B = \{f + g : f \in B'\}$. Vale que $|B| < \kappa$ e $g = u + g \in \overline{B'}$.
Vamos mostrar agora que $t(\mathcal{C}_p(X)) \geq sup\{l(X^n) : n \in \omega\}$. Seja $\lambda = t(\mathcal{C}_p(X))$. Pelo Teorema 1.16 basta mostrar que cada ω-recobrimento aberto γ de X assume um ω-recobrimento $\mu \subseteq \gamma$ com $|\gamma| \leq \lambda$. Seja então γ um ω-recobrimento aberto de X. Tome o conjunto $A = \{f \in \mathcal{C}_p(X) : f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq U$, para algum $U \in \gamma\}$. Tome $u_1 \in \mathcal{C}_p(X)$ como sendo a função que leva cada $x \in X$ para 1. Vale que u_1 está contido

em $\overline{A}$. De fato temos, para cada vizinhança aberta básica $W = \mathcal{O}(u_1, x_1, \ldots, x_n, \epsilon)$, $U \in \gamma$ com $x_1, \ldots, x_n \in U$, pois γ é um ω-recobrimento. Como X é de Tychonoff e U é aberto em X existe pelo Lema 1.4 uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ com $f(x_i) = 1$ e $f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$.
Para cada $i = 1, \ldots n$ vale que $|f(x_i) - u_1(x_i)| = 0$, logo $f \in W$ e como $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq U$ vale que $f \in A$ e segue que $u_1 \in \overline{A}$. Sabemos que $t(\mathcal{C}_p(X)) = \lambda$, então existe $B \subseteq A$ com $u_1 \in \overline{B}$ e $|B| \leq \lambda$. Tome para cada $f \in B$ um $U_f \in \gamma$ tal que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq U_f$. Considere a família $\delta = \{U_f : f \in B\} \subseteq \gamma$ e observe que vale $|\delta| = \lambda$. Tome $x_1, \ldots, x_n \in X$, como $u_1 \in \overline{B}$, existe ume função $f \in \mathcal{O}(u_1, x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{2}) \cap B$, logo $f(x_i) > \frac{1}{2}$ para cada $i = 1, \ldots n$. Segue que $x_1, \ldots, x_n \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq U_f$. $\square$

Corolário 2.47 *Seja X um espaço topológico, então $t(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega$ se e somente se X^n é de Lindelöf, para todo $n \in \omega$.*

Capítulo 3

l-equivalências, t-equivalências

A maior vantagem da topologia da convergência pontual em relações a outras topologias no espaço das funções contínuas, é o Teorema de Nagata, que vamos provar no começo deste capítulo. O Teorema de Nagata diz que dois espaços X e Y são homeomorfos se e somente se $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ são topologicamente isomorfos. Então o anel topológico $\mathcal{C}_p(X)$ carrega toda informação topológica do espaço X.

Naturalmente surge a questão sobre quais propriedades de X podem ser caracterizadas por propriedades topológicas e lineares de $\mathcal{C}_p(X)$ ou só por propriedades topológicas em $\mathcal{C}_p(X)$. As propriedades de X, que são caracterizadas por propriedades topológicas e lineares, ou só lineares, também valem em Y se $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ são só linearmente homeomorfos, ou só homeomorfos. Estas propriedades são chamadas de l-invariantes, ou respectivamente t-invariantes.

Mostraremos algumas ferramentas para indicar quando uma propriedade é l-invariante e em seguida mostraremos maneiras de construir espaços l-invariantes para podermos achar contra-exemplos.

Seguimos nesse capítulo principalmente [Arh94] e [Arh92a].

3.1 Teorema de Nagata

Chamamos um funcional φ de não trivial, se $\varphi(f) \neq 0$ para algum $f \in \mathcal{C}_p(X)$.

Lema 3.1 *Seja X um espaço topológico. Para todo funcional $\varphi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ linear multiplicativo, contínuo e não trivial existe $x \in X$ tal que $\varphi = e_x$, ou seja, $\varphi(f) = f(x)$, para todo $f \in \mathcal{C}_p(X)$.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ um funcional linear multiplicativo, contínuo e não trivial.

Pelo Teorema 2.15 existem $n \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi = a_1 \cdot e_{x_1} + \ldots + a_n \cdot e_{x_n}$.

Como φ não é trivial, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ com $a_k \neq 0$. Suponha que existem $i, j \in \{1, \ldots n\}$ com $i \neq j$ tais que a_i e a_j sejam diferentes de 0. Como X é um espaço de Hausdorff existem U_i e U_j vizinhanças abertas disjuntas de x_i e x_j respectivamente. Agora X também é de Tychonoff, então existem $g, h : X \to [0, 1]$ contínuas tais que $g(x_i) = 1$ e $g(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus U_i$ e $h(x_j) = 1$ e $h(y) = 0$, para todo

$y \in X \setminus U_j$. Logo vale que $g \cdot h = 0$ e segue que $0 \neq \varphi(g) \cdot \varphi(h) = \varphi(g \cdot h) = 0$, uma contradição.
Então $\varphi = a_k \cdot e_{x_k}$ e vale, para todo $f \in \mathcal{C}_p(X)$, que $\varphi(f) = a_k \cdot e_{x_k}(f) = a_k \cdot f(x_k)$, inclusive para $f_1 \in \mathcal{C}_p(X)$ definido por $f_1(x) = 1$ para todo $x \in X$. Logo, $a_k = a_k \cdot f_1(x_k) = a_k \cdot e_{x_k}(f_1) = \varphi(f_1) = \varphi(f_1 \cdot f_1) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_1) = (a_k \cdot f_1(x_k))^2 = (a_k)^2$. Como $a_k \neq 0$, vale que $a_k = 1$ e portanto $\varphi = e_{x_k}$. □

Agora podemos provar o Teorema de Nagata que faz uma relação entre as propriedades topológicas do espaço topológico X e as propriedades algébricas e topológicas do anel topológico $\mathcal{C}_p(X)$. Seguimos para isto [Tka10]. Lembramos que $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ é um *isomorfismo topológico*, se ϕ é um homeomorfismo com $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$ e $\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$ para todos $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$.

Teorema 3.2 *(Teorema de Nagata)*
Sejam X e Y espaços topológicos, então são equivalentes:

i) X é homeomorfo à Y.

ii) $\mathcal{C}_p(X)$ é topologicamente isomorfo à $\mathcal{C}_p(Y)$.

Demonstração. Se $\varphi : X \to Y$ é um homeomorfismo, então segue de Lema 2.7 que a função dual $\varphi^* : \mathcal{C}_p(Y)$ e $\mathcal{C}_p(X)$ é um homeomorfismo. E vale para todos os $f, g \in \mathcal{C}_p(Y)$ que

$$\varphi^*(g+f) = (g+f) \circ \varphi = g \circ \varphi + f \circ \varphi = \varphi^*(g) + \varphi^*(f)$$

e

$$\varphi^*(g * f) = (g * f) \circ \varphi = g \circ \varphi * f \circ \varphi = \varphi^*(g) * \varphi^*(f).$$

Vamos agora provar a implicação $ii) \Rightarrow i)$. Seja $\phi : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ um isomorfismo topológico. Observe que como ϕ é um homoeomorfismo, podemos definir um isomorfismo topológico $\phi^* : \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)) \to \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_(Y))$ de maneira análoga ao que fizemos anteriormente, ou seja $\phi^*(f) = f \circ \phi$.

Sejam também $e_x^X : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ e $e_y^Y : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathbb{R}$ definidos por $e_x^X(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathcal{C}_p(X)$ e $e_y^Y(g) = g(y)$ para todo $g \in \mathcal{C}_p(Y)$. Defina $E^X : X \to \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ e $E^Y : Y \to \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(Y))$ por $E_X(x) = e_x^X$ e $E_Y(y) = e_y^Y$. Sabemos de Observação 2.18 que X é homeomorfo a $E^X(X) \subseteq \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ e Y é homeomorfo a $E^Y(Y) \subseteq \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(Y))$. Logo basta mostrar que $\phi^*_{|E^X(X)} : E^X(X) \to E^Y(Y)$ é um homeomorfismo.

Note que $\phi^*_{|E^X(X)}$ é bem definido. Para verificar isso sejam $x \in X$, e $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$. Como e_x^X é um funcional linear multiplicativo e ϕ é isomorfismo segue que $e_x^X \circ \phi$ é um funcional linear multiplicativo, logo vale o seguinte:
$\phi^*(e_x^X)(f+g) = (e_x^X \circ \phi)(f+g) = (e_x^X \circ \phi)(f) + (e_x^X \circ \phi)(g) = \phi^*(e_x^X)(f) + \phi^*(e_x^X)(g)$ e analogamente $\phi^*(e_x^X)(f * g) = \phi^*(e_x^X)(f) * \phi^*(e_x^X)(g)$.

Então $\phi^*(e_x^X) : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear multiplicativo, contínuo e não trivial, logo segue do Teorema 3.1 que existe $y \in Y$ tal que $\phi^*(e_x^X) = e_y^Y = E^Y(y) \in E^Y(Y)$. Analogamente pode-se mostrar que, para cada $y \in Y$, $\phi^{*-1}(e_y^Y)$ é um funcional linear multiplicativo e contínuo. Portanto existe $x \in X$ tal que

$e_x^X = \phi^{*-1}(e_y^Y)$ e segue que $\phi^*_{|E^X(X)}$ é sobrejetora. Como ϕ^* é um isomorfismo topológico, temos que a função $\phi^*_{|E^X(X)}$ é injetora, contínua e aberta e segue que $E^X(X)$ é homeomorfo a $E^Y(Y)$. Dos fatos que X é homeomorfo a $E^X(X)$ e Y é homeomorfo a $E^Y(Y)$, concluimos que X e Y são homeomorfos.

□

Temos então que dois espaços X e Y tem as mesmas propriedades topológicas se existir um isomorfismo topológico entre os espaços $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$. Isso significa que o anel topológico$\mathcal{C}_p(X)$ carrega toda informação sobre a topologia de X.
Esse fato levanta a questão de como se comportam dois espaços topológicos X e Y quando os espaços de funções $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ não são topológicamente isomorfos mas por exemplo só são linearmente homeomorfos ou só homeomorfos. Ou seja, que propriedades topológicas de X dependem só de propriedades topológicas de $\mathcal{C}_p(X)$ e quais dependem de propriedades algébricas também?

Exemplo 3.3 Gul'ko e Khmyleva (veja [GK86]) mostraram que os espaços $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_p(I)$ são homeomorfos, onde $I = [0, 1]$.
Mas sabemos que I e $\mathbb{R}$ são espaços que não são homeomorfos e se comportam de formas diferentes em relação a sua estrutura topológica. Por exemplo I é um espaço compacto e $\mathbb{R}$ não.

3.2 Equivalências e invariantes

Nessa seção analisaremos como dois espaços se comportam quando seus respectivos espaços de funções contínuas tem a mesma estrutura topológica e/ou linear.

Definição 3.4 Chamamos dois espaços topológicos X e Y *t-equivalentes* se $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ forem homeomorfos como espaços topológicos. Os espaços X e Y são *l-equivalentes* se existir um homeomorfismo linear de $\mathcal{C}_p(X)$ para $\mathcal{C}_p(Y)$, ou seja, se existir um homeomorfismo $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ tal que, para todo $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$ e $a \in \mathbb{R}$, $\phi(a \cdot f + g) = a \cdot \phi(f) + \phi(g)$. Nesse caso os espaços $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ são *linearmente homeomorfos* e escrevemos $\mathcal{C}_p(X) \simeq \mathcal{C}_p(Y)$.

Já vimos no exemplo 3.3 que dois espaços X e Y não são necessariamente homeomorfos, quando $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ são homeomorfos. Queremos então saber que propriedades são preservadas em espaços l-equivalentes ou t-equivalentes.

Definição 3.5 Chamamos uma propriedade topológica $\mathcal{P}$ de um espaço topológico X de *l-invariante* (*t-invariante*) se todo espaço l-equivalente (t-equivalente) a X também verificar $\mathcal{P}$, ou seja $\mathcal{P}$ é mantida por l-equivalência (t-equivalência).

Quando dois espaços são l-equivalentes eles claramente também são t-equivalentes, e uma propriedade t-invariante também é l-invariante.

No capitulo 2 fizemos uma conexão entre as propriedades de X e de $\mathcal{C}_p(X)$, que pode nós ajudar agora a comparar as propriedades de X e de Y.

Definição 3.6 Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade topológica de X e $\mathcal{Q}$ uma propriedade topológica de $\mathcal{C}_p(X)$. Se para todo espaço topológico X valer que X verifica $\mathcal{P}$ se e somente se $\mathcal{C}_p(X)$ verifica $\mathcal{Q}$, chamamos $\mathcal{P}$ de *dual* a $\mathcal{C}_p(X)$.

Proposição 3.7 *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade topológica de X. Se $\mathcal{P}$ tiver uma propriedade topológica dual em $\mathcal{C}_p(X)$, então $\mathcal{P}$ é t-invariante (e consequentemente também l-invariante).*

Demonstração. Sejam X e Y espaços topológicos t-equivalentes. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade topológica de X e Q uma propriedade topológica dual de $\mathcal{P}$. Então $\mathcal{C}_p(X)$ verifica $\mathcal{Q}$ e como $\mathcal{C}_p(Y)$ é homeomorfo à $\mathcal{C}_p(X)$, então $\mathcal{Q}$ também vale em $\mathcal{C}_p(Y)$. Logo Y verifica $\mathcal{P}$. $\square$

No capitulo 2 mostramos para espaços infinitos que $|X| = w(\mathcal{C}_p(X))$, $d(X) = iw(\mathcal{C}_p(X))$, $nw(X) = nw(\mathcal{C}_p(X))$ e $iw(X) = d(\mathcal{C}_p(X))$, então concluimos usando Proposição 3.7 o seguinte:

Corolário 3.8 *Sejam X e Y dois espaços topológicos infinitos t-equivalentes, então*

- $|X| = |Y|$.
- $d(X) = d(Y)$.
- $nw(X) = nw(Y)$.
- $iw(X) = iw(Y)$.

Pelo Corolário 2.47 X^n é de Lindelöf para todo $n \in \omega$, se e somente se $t(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega$. Temos então o seguinte.

Corolário 3.9 *Se X e Y forem dois espaços t-equivalentes e X^n for de Lindelöf para todo $n \in \omega$, então Y^n é de Lindelöf, para todo $n \in \omega$.*

Esse fato sugere para a seguinte questão, que continua em aberto.

Problema 3.10 *Sejam X e Y dois espaços topológicos, t-equivalentes e seja X de Lindelöf. Segue que Y também é de Lindelöf?*

Não sabemos se a propriedade de Lindelöf é t-invariante, mas Velichko mostrou 1997 em [Vel98] o seguinte resultado.

Teorema 3.11 *A propriedade de Lindelöf é l-invariante.*

Em 2000 Bouziad generalizou o teorema (veja [Bou00]), mostrando que o número de Lindelöf é l-invariante.

Teorema 3.12 *Sejam X e Y espaços l-equivalentes, então $l(X) = l(Y)$.*

3.3 l-invariância por $\mathcal{L}_p(X)$

Sabemos que propriedades duais são t-invariantes (e portanto l-invariantes), mas temos outras maneiras de mostrar que propriedades são l-invariantes. Uma delas é usando o espaço dual de $\mathcal{C}_p(X)$.

Lembramos que

$$\mathcal{L}_p(X) = \{a_1 \cdot e_{x_1} + \ldots + a_n \cdot e_{x_n} : n \in \omega, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ e } x_1, \ldots, x_n \in X\} \subseteq \mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X).$$

A topologia de $\mathcal{L}_p(X)$ é topologia induzida de $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{L}_p(X)$ é o espaço dual de $\mathcal{C}_p(X)$. Vale também que $\mathcal{C}_p(X)$ é o espaço dual de $\mathcal{L}_p(X)$ (veja Teorema 2.20).

A demonstração de várias propriedades l-invariantes é baseada no próximo teorema.

Teorema 3.13 *Dois espaços topológicos X e Y são l-equivalentes se e somente se $\mathcal{L}_p(X)$ e $\mathcal{L}_p(Y)$ forem linearmente homeomorfos.*

Demonstração. Suponha que $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ seja um homeomorfismo linear. Sabemos, pela demonstração do Teorema 3.2, que a função $\phi^* : \mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$ definida por $\phi^*(\varphi) = \varphi \circ \phi$ é um isomorfismo topológico.

Seja $\Psi : \mathcal{L}_p(Y) \to \mathcal{L}_p(X) \subseteq \mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$ a restrição de ϕ a $\mathcal{L}_p(Y) \subseteq \mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(Y)$. $\Psi(\varphi)$ é linear e contínua, ou seja pertencente a $\mathcal{L}_p(X)$ para cada $\varphi \in \mathcal{L}_p(Y)$.

Para qualquer $\psi \in \mathcal{L}_p(X)$ a função $g^{-1} \circ \psi$ é linear pela Proposição 2.11 e vale que $\Psi(g^{-1} \circ \psi) = \psi$, logo Ψ é sobrejetora. Segue do fato de que ϕ é um isomorfismo topológico que Ψ é linear, contínua, injetora e tem inversa contínua. Assim como $\mathcal{L}_p(X)$ é o espaço dual de $\mathcal{C}_p(X)$, $\mathcal{C}_p(X)$ é o dual de $\mathcal{L}_p(X)$ (veja Teorema 2.20). Portanto segue analogamente que se $\mathcal{L}_p(X)$ e $\mathcal{L}_p(Y)$ forem linearmente homeomorfos, então $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ são linearmente homeomorfos. $\square$

Esta abordagem, que foi primeiramente considerado por D. S. Pavlovskij em [Pav80] é parecido com o problema mais estudado de como as propriedades de do grupo topológico livre $F(X)$ de um espaço X se relacionam a propriedades de X. O espaço $\mathcal{L}_p(X)$ se relaciona em vários aspectos a X como $F(X)$ se relaciona a X. $\mathcal{L}_p(X)$ e $F(X)$ são osdois finitamente gerados por X e contém X como subespaço fechado.

Teorema 3.14 *Seja $\mathcal{P}$ uma classe de espaços topológicos satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) A imagem contínua de um espaço pertencente a $\mathcal{P}$ pertence a $\mathcal{P}$,

ii) Se para todo $i \in \omega$ valer $X_i \in \mathcal{P}$, então $X = \bigcup_{i\in\omega} X_i \in \mathcal{P}$,

iii) Para $X, Y \in \mathcal{P}$ vale $X \times Y \in \mathcal{P}$,

iv) $\mathbb{R} \in \mathcal{P}$.

Então para cada $X \in \mathcal{P}$ também $\mathcal{L}_p(X) \in \mathcal{P}$.

Demonstração. Sejam $X \in \mathcal{P}$ e $n \in \omega$. Usando *iii)* e *iv)* concluímos que $\mathbb{R}^n \times X^n \in \mathcal{P}$. Considere para cada $n \in \omega$ a função $\phi_n : \mathbb{R}^n \times X^n \to \mathcal{L}_p(X) \subseteq \mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$ definida por $\phi(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot e_{x_1} + \ldots + a_n \cdot e_{x_n}$.

Como e_x é contínuo para cada $x \in X$ segue que ϕ_n é contínua. Então segue de *i)* que $L_n = \phi_n(\mathbb{R}^n \times X^n) \in \mathcal{P}$. Observe que $\bigcup_{n\in\omega} L_n = \mathcal{L}_p(X)$. De fato se $\varphi \in \mathcal{L}_p(X)$, então existem $m \in \omega$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ e $y_1, \ldots, y_m \in X$ tal que $\varphi = a_1 \cdot e_{x_1} + \ldots + a_m \cdot e_{x_m}$. Logo $\varphi \in L_m$. $\square$

Observamos que $E(X)$, que é homeomorfo a X, é um espaço fechado em $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_p(X)$ e portanto também fechado em $\mathcal{L}_p(X)$. Logo esse teorema implica que propriedades topológicas de um espaço topológico Z qualquer que verificam *i)* até *iv)* e também são válidas em subconjuntos fechados de Z, são l-equivalentes. Em particular isso também vale para as propriedades σ-compacto.

Proposição 3.15 *Se X for um espaço topológico então vale: Se X é σ-compacto, logo $\mathcal{L}_p(X)$ também é σ-compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ a classe de espaços topológicos σ-compactos. Vamos verificar que valem as condições de Teorema 3.14.

i) Suponha $X = \bigcup_{i\in\omega} X_i$, onde X_i é compacto, para cada $i \in \omega$ e seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetora contínua, então Y é σ-compacto.

ii) Se para todo $i \in \omega$ vale que X_i é σ-compacto, então $X = \bigcup_{i\in\omega} X_i$ também é σ-compacto.

iii) Seja $X = \bigcup_{i\in\omega} X_i$ e $Y = \bigcup_{i\in\omega} Y_i$ com X_i e Y_i compactos para todo $i \in \omega$. Logo $X_i \times Y_j$ é compacto para cada $i, j \in \omega$, então $X \times Y = \bigcup_{i,j\in\omega} X_i \times Y_i$ é σ-compacto.

iv) $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\omega}[-n, n]$ é σ-compacto. □

Teorema 3.16 *σ-compacidade é l-invariante.*

Demonstração. Sejam X e Y dois espaços topológicos l-equivalentes e suponha que seja X σ-compacto. Então segue do Teorema 3.13 que $\mathcal{L}_p(X)$ e $\mathcal{L}_p(Y)$ são linearmente homeomorfos e do Teorema 3.14 que $\mathcal{L}_p(X)$ é σ-compacto. Logo $\mathcal{L}_p(Y)$ também é σ-compacto e podemos escrever $\mathcal{L}_p(Y) = \bigcup_{i\in\omega} Z_i$, onde todos os Z_i são compactos. Como podemos considerar Y como subespaço fechado de $\mathcal{L}_p(Y)$, vale que $Y = Y \cap \bigcup_{i\in\omega} Z_i = \bigcup_{i\in\omega}(Z_i \cap Y)$. Como Y é fechado em $\mathcal{L}_p(Y)$, então $Z_i \cap Y$ é fechado em Z_i para todos $i \in \omega$ e segue que $Z_i \cap Y$ é compacto para todo $i \in \omega$ e Y é σ-compacto. □

Lembramoms que um espaço topológico X é *pseudocompacto* quando toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada.

É possível caracterizar a uniformidade de X em termos de propriedades uniformes em $\mathcal{C}_p(X)$, veja para isto [Arh94]. Como um homeomorfismo linear preserva propriedades uniformes segue com um pouco de trabalho o seguinte resultado.

Teorema 3.17 *Sejam X e Y dois espaços topológicos l-equivalentes e seja X pseudocompacto, então Y também é pseudocompacto.*

Segue diretamente desse teorema a próxima afirmação.

Teorema 3.18 *Sejam X e Y dois espaços topológicos de Tychonoff l-equivalentes. Se X for compacto, então Y também é compacto.*

Demonstração. Como X é compacto, X também é pseudocompacto e σ-compacto. Como σ-compacidade e pseudocompacidade são l-invariantes, Y também é σ-compacto e pseudocompacto. Logo Y é de Lindelöf e pseudocmpacto, portanto segue que Y é compacto. □

A compacidade é um exemplo de uma propriedade que é l-invariante sem ser t-invariante. Gul'ko e Khmyleva mostraram em 1986 que os espaços $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_p(I)$ são homeomorfos. $\mathbb{R}$ não é compacto e I é compacto. Então compacidade não é t-invariante, mas pelo Teorema 3.18 é l-invariante. Podemos conluir desses fatos que não existe homeomorfismo linear entre $\mathcal{C}_p(I)$ e $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$.

3.4 Construindo espaços l-equivalentes

Vimos várias propriedades que são l-invariantes ou t-invariantes, mas para poder mostrar quando uma propriedade não é l-equivalente precisamos ferramentas para achar contraexemplos. Nessa secção queremos achar maneiras de construir espaços l-equivalentes.

Seja A um subespaço fechado do espaço X, vamos identificar os pontos de A. Para isso tome E como sendo a relação definida para cada $x, y \in X$ por

$$xEy = \begin{cases} y \in A & \text{se } x \in A \\ y = x & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

E é uma relação de equivalência, que corresponde à decomposição de X no conjunto A e nos conjuntos unitários $\{x\}$, onde $x \in X \setminus A$. Tome o espaço quociente $X_{/E}$, lembramos que um subcojunto $U \subseteq X_{/E}$ é aberto em $X_{/E}$ se e somente se $q^{-1}(U)$ é aberto em X, onde $q : X \to X_{/E}$ é a função quociente. Denotamos a topologia quociente de τ_E

Afirmação 3.19 Seja X um espaço topológico (de Tychonoff). Vale que $X_{/E}$, com a relação E definida acima é de Hausdorff.

Caso X é normal, então $X_{/E}$ é de Tychonoff.

Demonstração. Sejam $x, y \in X_{/E}$ com $x \neq y$ e sejam $x' \in x$, $y' \in y$ representantes das classes x e y.

Se $x', y' \notin A$, existem, por causa que X é um espaço Hausdorff, conjuntos abertos e disjuntoe U e V com $x' \in U$ e $y' \in V$. Então $q(U)$ e $q(V)$ são vizinhanças abertas e disjuntas de x e y. Caso $x' \in A$, vale que $y' \notin A$ e como X é regular existem conjuntos abertos e disjuntos $U, V \subseteq X$ com $x' \in U$ e $A \subseteq V$. Logo $q(U)$ e $q(V)$ são subconjuntos abertos e disjuntos de $X_{/E}$ com $x \in q(U)$ e $y \in q(V)$.

De maneira analoga, usando o fato de que X é normal podemos concluir que $X_{/E}$ é de Tychonoff, quando X é normal. □

Então $X_{/E}$ é um espaço de Hausdorff e de Tychonoff, se X é normal, mas em geral $X_{/E}$ não tem que ser normal.

Como queremos trabalhar com os espaços de Tychonoff não vamos ter que modificar esta topologia um pouco nos casos que $X_{/E}$ não é de Tychonoff na topologia quociente.

Existe uma topologia de Tychonoff contida na topologia quociente. Tomamos a união de todas as topologias de Tychonoff contidas na topologia quociente, que é a topologia mais fina de $X_{/E}$ que torna q contínua. Tome $\tau_A = \bigcup\{\tau \subseteq \tau_E :$

$(X_{/E}, \tau)$ é de Tychonoff } que é uma topologia em $X_{/E}$. Esta é a topologia de Tychonoff mais fina que está contida na topologia quociente. Chamamos o espaço $X_{/E}$ com esta topologia de *topologia R-quociente* ou *quociente de Tychonoff* e denotamos ele de $X_{|A}$.

Definição 3.20 Seja X um espaço com a topologia τ e seja $A \subseteq X$ um subespaço fechado. Definimos para um $A \subseteq X$ não vazio $\mathcal{C}_p(X; A) = \{f \in \mathcal{C}_p(X) : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in A\}$ e $\mathcal{C}_p(X|_A)_0 = \{f \in \mathcal{C}_p(X|_A) : f(q(A)) = \{0\}\}$, onde $q : X \to X_{|Y}$ é a função quociente.
Defimos X^+ como sendo o espaço $X \cup \{x\}$, onde $x \notin X$, munida com a topologia gerada por $\tau \cup \{x\}$, ou seja $U \subseteq X^+$ é aberto em X^+ se e somente se $U \cap X \in \tau$.

Vamos mostrar alguns fatos simples, que vamos utilizar mais tarde.

Proposição 3.21 *Sejam X, Z, Z' espaços topológicos e seja Y um subsepaço de X. Valem as seguinte afirmações:*

i) se $Y \neq \emptyset$ e fechado, então $\mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \simeq \mathcal{C}_p(X; Y)$,

ii) se $Y \neq \emptyset$ e fechado, então $\mathcal{C}_p(X_{|Y}) \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathbb{R}$,

iii) $\mathcal{C}_p(X^+) \simeq \mathcal{C}_p(X) \times \mathbb{R}$,

iv) $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y) \simeq \mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(X)$,

v) se $\mathcal{C}_p(X) \simeq \mathcal{C}_p(Y)$ então $\mathcal{C}_p(X^+) \simeq \mathcal{C}_p(Y^+)$,

vi) $\mathcal{C}_p((X \oplus Y)^+) \simeq \mathcal{C}_p(X \oplus Y^+)$,

vii) se Z e Z' forem homeomorfos, então $\mathcal{C}_p(X \oplus Z) \simeq \mathcal{C}_p(X \oplus Z')$.

Demonstração.

i) Seja $\phi : \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \to \mathcal{C}_p(X; Y)$, definida por $\phi(f) = f \circ q$.

Seja $f, g \in \mathcal{C}_p()_0$ com $f \neq g$, então existe $x \in X_{|Y}$ com $f(x) \neq g(x)$. Existe $x' \in X$ com $q(x') = x$, logo $f(q(x')) \neq g(q(x'))$ e ϕ é injetora.

Seja $g \in \mathcal{C}_p(X; Y)$. Tome $f(x) = g(x')$, onde $x' \in x$ qualquer. Se $x', x'' \in x$ e $x', x'' \notin Y$, então $x' = x''$ e $g(x') = g(x'')$. Se $x', x'' \in Y$, então $g(x') = g(x'') = 0$, logo f é bem definida. Vale que $\phi(f) = g$ e segue que ϕ é sobrejetora.

Seja $U = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ aberto básico de $\mathcal{C}_p(X; Y)$. Observa que $\phi([q(x_1), \ldots, q(x_n); O_1, \ldots, O_n]) = U$, então ϕ é contínua.

Analogamente para um aberto básico $V = [y_1, \ldots, y_n; O_1, \ldots, O_n]$ de $\mathcal{C}_p(X_{|Y})_0$ vale que $\phi(V) = [y'_1, \ldots, y'_n; O_1, \ldots, O_n]$, onde $y'_i \in y_i$ qualquer para $i = 1, \ldots, n$. Logo ϕ é aberto.

Seja $f, g \in \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0$ e $r \in \mathbb{R}$. $\phi(r \cdot f + g) = (r \cdot f + g) \circ q = r \cdot (f \circ q) + (g \circ q) = r \cdot \phi(f) + \phi(g)$. Então ϕ é um homeomorfismo linear.

ii) Seja $\phi : \mathcal{C}_p(X_{|Y}) \to \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathbb{R}$ definida por $\phi(f) = (f - f(q(Y)), f(q(Y)))$. Seja $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_p(X_{|Y})$ com $f_1 \neq f_2$, então existe $x \in X_{vertY}$ com $f(x) \neq g(x)$. Se $f_(q(Y)) \neq g(q(Y))$, segue que $\phi(f) \neq \phi(g)$. Caso $f_(q(Y)) = g(q(Y))$ vale que $x \notin q(Y)$ e $f(x) - f(q(Y)) \neq g(x) - g(q(Y))$, logo ϕ é injetora.

Seja $(g, r) \in \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathbb{R}$, tome $f(x) = g(x) + r$, para todo $x \in X_{|Y}$. Vale que $f \in \mathcal{C}_p(X_{|Y})$ e $\phi(f) = (g + r - (g - r)(q(Y)), (g - r)(q(Y))) = (g, r)$, logo ϕ é sobrejetora.

Seja

$$U = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \cap C_p(X_{|Y})_0 \times U'$$

um aberto básico de $\mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathbb{R}$. Tome $O_i' = \{y + q(Y) : y \in O_i\}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Vale que

$$\phi([x_1, \ldots, x_n, q(Y); O_1', \ldots, O_n', U']) = U,$$

logo ϕ é contínua. Pelo outro lado, seja $V = [x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n]$ aberto básico de $\mathcal{C}_p(X_{|Y})$. Seja $V_i' = \{y - q(Y) : y \in O_i\}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Se $x_i \neq q(Y)$, para todo $i = 1, \ldots n$, então

$$\phi(V) = [x_1, \ldots, x_n; V_1', \ldots, V_n'] \cap C_p(X_{|Y})_0 \times \mathbb{R}$$

e segue que ϕ é aberta.

Sejam $f, g \in \mathcal{C}_p(X_{|Y})$ e $r \in \mathbb{R}$, então

$$\phi(r \cdot f + g) = (r \cdot f + g - (r \cdot f + g)(q(Y)), (r \cdot f + g)(q(Y))) =$$

$$= (r \cdot (f - f(q(Y)) + g - g(q(Y)), r \cdot f(q(Y)) + g(q(Y))).$$

Logo ϕ é um homeomorfismo linear. se $Y \neq \emptyset$, então $\mathcal{C}_p(X_{|Y}) \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathbb{R}$,

iii) Seja $X^+ = X \cup \{z\}$ e $\phi : \mathcal{C}_p(X^+) \to \mathcal{C}_p(X) \times \mathbb{R}$, definida por $\phi(f) = (f_{|X}, f(z))$. É fácil mostrar que ϕ é um homeomorfismo linear.

iv) Vale que $\phi : \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y) \simeq \mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(X)$ definida por $\phi((f, g)) = (g, f)$ é um homeomorfismo linear.

v) Seja $X^+ = X \cup \{z_1\}$ e $Y^+ = Y \cup \{z_2\}$ e seja $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ um homeomorismo linear. Define $\phi' : \mathcal{C}_p(X^+) \to \mathcal{C}_p(Y^+)$ levando cada $f \in C_p(X^+)$ para a função $\phi'(f) : Y^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi'(f)(y) = \begin{cases} \phi(f)(y) & \text{se } y \in Y \\ f(z_1) & \text{caso} y = z_2 \end{cases}$$

Segue junto com o fato de que ϕ é um homeomorfismo linear e z_1 e z_2 são pontos discretos de X^+ e Y^+ respectivamente que ϕ' é um homeomorfismo linear.

vi) Obtemos $(X \oplus Y)^+$ por adicionar um ponto discreto a $X \oplus Y$. Observe que o ponto que adicionamos a Y ainda é discreto em $(X \oplus Y^+)$. Vale que $(X \oplus Y)^+$ e $(X \oplus Y^+)$ são homeomorfos e segue que $\mathcal{C}_p((X \oplus Y)^+) \simeq \mathcal{C}_p(X \oplus Y^+)$ são topológicamente isomorfos e em particular linearmente homeomorfos.

vii) Como Z e Z' são homeomorfos, então $X \oplus Z$ e $X \oplus Z'$, são homeomorfos, logo $\mathcal{C}_p(X \oplus Z) \simeq \mathcal{C}_p(X \oplus Z')$ são linearmente homeomorfos. □

Definição 3.22 Seja X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. Chamamos uma função $\phi : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ de *extender*, se para cada $f \in \mathcal{C}_p(Y)$ valer que $\phi(f)_{|Y} = f$.
Um subespaço Y de um espaço topológico X é *t-mergulhado em* X, se existir um extender continuo $\phi : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$. Se existir um extender contínuo e linear $\phi : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ falamos que Y é *l-mergulhado em* X.

O próximo resultado é um resultado geral importante sobre extenders.

Proposição 3.23 *Seja X um espaço topológico e Y um subespaço l-mergulhado em X, então $\mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathcal{C}_p(Y)$ é linearmente homeomorfo a $\mathcal{C}_p(X)$ e X^+ é l-equivalente à $X_{|Y} \oplus Y$.*

Demonstração. Como Y é l-mergulhado em X, existe um extender contínuo e linear $\phi : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$. Definimos $\psi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(X;Y)$ por $\psi(f) = (f_{|Y}, f - \phi(f_{|Y}))$. Como ϕ é extender de f, vale para todo $y \in Y$ que $(f - \phi(f_{|Y}))(y) = f(y) - f(y) = 0$, logo $f - \phi(f_{|Y}) \in \mathcal{C}_p(X;Y)$.
Definimos também a função $\psi' : \mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(X;Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ por $\psi'((g,h)) = \phi(g) + h$. Para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$, vale que

$$(\psi' \circ \psi)(f) = \psi'((f_{|Y}, f - \phi(f_{|Y}))) = \phi(f_{|Y}) + f - \phi(f_{|Y}) = f.$$

Para cada $((g,h)) \in \mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(X;Y)$ temos

$$(\psi \circ \psi')((g,h)) = \psi(\phi(g) + h) = (\phi(g)_{|Y} + h_{|Y}, \phi(g) + h - \phi(\phi(g)_{|Y} + h_{|Y})).$$

Como ϕ é um extender de Y a X, vale que $\phi(g)_{|Y} = g$. Sabemos que $h \in \mathcal{C}_p(X;Y)$, então $h(x) = 0$ para todo $x \in Y$. Segue que

$$(\phi(g)_{|Y} + h_{|Y}, \phi(g) + h - \phi(\phi(g)_{|Y} - h_{|Y})) = (g, \phi(g) + h - \phi(g)).$$

Logo ψ e ψ' são funções bijetoras e inversas uma da outra.

Sejam $f \in \mathcal{C}_p(X)$, $n, m \in \omega$, $y_1, \ldots, y_n \in Y$. $x_1, \ldots, x_m \in X$ e $-epsilon > 0$.

Considere

$$U = \mathcal{O}_Y(f_{|Y}, y_1, \ldots, y_n, \epsilon) \times \mathcal{O}_X(f - \phi(f_{|Y}), x_1, \ldots, x_m, \epsilon).,$$

que é uma vizinhança aberta básica de $\psi(f)$ em $\mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(X;Y)$.

Como ϕ é contínua existem $l \in \omega$, $y'_1, \ldots, y'_l \in Y$, e $\epsilon' > 0$ com

$$\phi(\mathcal{O}_Y(f_{|Y}, y'_1, \ldots, y'_l, \epsilon')) \subseteq \mathcal{O}_X(\phi(f_{|Y}), x_1, \ldots, x_m, \frac{\epsilon}{2}).$$

Seja $\delta = \min\{\epsilon', \frac{\epsilon}{2}\}$, então vale que

$$f \in V = \mathcal{O}_X(f, y'_1, \ldots, y'_l, y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m, \delta)$$

Para qualquer $g \in V$ vale que

$$|g_{|Y}(y_i) - f_{|Y}(y_i)| = |g(y_i) - f(y_i)| < \delta < \epsilon$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Concluimos de $|g(y_i') - f(y_i')| \leq \epsilon'$ para todo $i = 1, \ldots l$ que $\phi(g_{|Y}) \in O_X(\phi(f_{|Y}), x_1, \ldots, x_m, \frac{\epsilon}{2})$. Logo

$$|g(x_i) - \phi(g_{|Y})(x_i) - f(x_i) + \phi(f_{|Y})(x_i)| \leq |g(x_i) - f(x_i)| + |\phi(g_{|Y})(x_i) - \phi(f_{|Y})(x_i)| <$$
$$< \delta + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Portanto $\psi(g) \in U$ e segue de $\psi(V) \subseteq U$ que ψ é contínua. É possível mostrar de maneira analoga que ψ' é contínua.

ψ é linear, por que ϕ o é. Então temos que $\mathcal{C}_p(X)$ é linearmente homeomorfo a $\mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(X; Y)$. Como a composição de homeomorfismos lineares são homeomorfismos lineares segue, junto com a Proposição 3.21, o seguinte:

$$\mathcal{C}_p(X^+) \simeq \mathcal{C}_p(X) \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathcal{C}_p(Y) \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(Y) \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y}) \times \mathcal{C}_p(Y).$$

Além disso, pela Proposição 2.22 vale que

$$\mathcal{C}_p(X_{|Y}) \times \mathcal{C}_p(Y) \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y} \oplus Y).$$

□

Definição 3.24 Chamamos um espaço X de *fracamente l-aditivo* se $X \oplus X$ for l-equivalente a X.

Proposição 3.25 *Seja Y um espaço fracamente l-aditivo que é l-mergulhado no espaço topológico X, então $X \oplus Y$ é l-equivalente à X.*

Demonstração. Sabemos da Proposição 3.23 que $\mathcal{C}_p(X) \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathcal{C}_p(Y)$. Como Y é fracamente l-aditivo vale que $\mathcal{C}_p(Y) \simeq \mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(Y)$. Concluimos que temos

$$\mathcal{C}_p(X) \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathcal{C}_p(Y) \simeq \mathcal{C}_p(X_{|Y})_0 \times \mathcal{C}_p(Y) \times \mathcal{C}_p(Y) \simeq \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y),$$

que é por Proposição 2.22 linearmente equivalente a $\mathcal{C}_p(X) \oplus \mathcal{C}_p(Y)$. □

Exemplo 3.26 Considere $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \omega\}$, a "sequência convergente", com a topologia induzida de $\mathbb{R}$. S é metrizável, infinito e compacto. Vamos mostrar que S é fracamente l-aditivo.

Lembrando que S^+ é construido através de S, adicionando um ponto isolado, note que S^+ é homeomorfo à S, por exemplo a função $\phi : S^+ \to S$, definida por

$$\phi(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x \\ \frac{y}{1-y} & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

é um homeomorfismo. Analogamente os espaços $(S \oplus S)^+$ e $S \oplus S$ são homeomorfos.

Tome agora A sendo o conjunto dos pontos não isolados de $S \oplus S$, então A consiste de dois pontos. Vale que $S \oplus S$ é normal, então a topologia de $(S \oplus S)_{|A}$ coincide com a topologia quociente. Segue que $(S \oplus S)_{|A} \oplus A$ é homeomorfo a S. Além disso existe pelo Lema 1.3 e por A ser finito para cada função $f : A \to \mathbb{R}$ uma função $\tilde{f} \in \mathcal{C}_p(S \oplus S)$ com $\tilde{f}_{|A} = f$. Logo A é l-mergulhado em $S \oplus S$. Então vale pela Proposição 3.23 que $(S \oplus S)^+$ é l-equivalente à $(S \oplus S)_{|A} \oplus A$. Então segue pela homeomorfia e l-equivalência desses espaços e pela Proposição 3.21 que

$$\mathcal{C}_p(S) \simeq \mathcal{C}_p((S \oplus S)_{|A} \oplus A) \simeq \mathcal{C}_p((S \oplus S)^+) \simeq \mathcal{C}_p(S \oplus S).$$

Então S é fracamente l-aditivo.

Teorema 3.27 *Seja X um espaço metrizável, então todo subespaço fechado de X é l-mergulhado em X.*

Demonstração. Seja d a métrica de X compatível com a topologia em X e seja M um subespaço fechado de X. Considere $\gamma = \{B(x, d(x, M)/4) \subseteq X \setminus M : x \in X \setminus M\}$, onde $B(x, r)$ denota a bola aberta (em X e em $X \setminus M$) em torno de x de raio r e $d(x, A) = inf_{a \in A} d(x, a)$ é a distância entre o ponto x e o conjunto A. Como X é metrizável, sabemos que $X \setminus M$ é metrizavel e portanto pelo Teorema 1.10 também paracompacto. A família γ é um recobrimento aberto de $X \setminus M$, então existe um refinamento aberto localmente finito $\gamma' = \{U_s : s \in S\}$ de γ. Tome, para cada $s \in S$, um $x_s \in X \setminus M$ com $U_s \subseteq B(x_s, d(x_s, M)/4)$.
Defina para cada $s \in S$ a função $g_s : X \setminus M \to \mathbb{R}$ por

$$g_s(x) = \frac{d(x, X \setminus U_s)}{\sum_{s \in S} d(x, X \setminus U_s)}.$$

Observe que como γ' é um recobrimento de $X \setminus M$ para cada $x \in X \setminus M$ existe um $s \in S$ com $x \in U_s$, portanto $d(x, X \setminus U_s) \neq 0$ e $\sum_{s \in S} d(x, X \setminus U_s) \neq 0$. Além disso γ' é localmente finito, então existe para cada $x \in X \setminus M$ uma vizinhança aberta $\tilde{V}$ que só intercepta um número finito $s_1 \ldots, s_n \in S$ de elementos de γ'. Logo a soma $\sum_{s \in S} d(y, X \setminus U_s)$ é finita para todos os $y \in \tilde{V}$ e g_s, que é uma função construida por divisões e somas finitas de funções contínuas em $\tilde{V}$, portanto é contínua em x.

Observe também que para cada $s \in S$ e cada $x \in X \setminus U_s$ vale que $d(x, X \setminus U_s) = 0$, portanto $g_s(x) = 0$. Para cada $x \in X$ vale também que

$$\sum_{s \in S} g_s(x) = \frac{\sum_{s \in S} d(x, X \setminus U_s)}{\sum_{s \in S} d(x, X \setminus U_s)} = 1.$$

Fixe, para cada $s \in S$ um $a_s \in M$ com $d(x_s, a_s) < \frac{5}{4} d(x_s, M)$. Definimos agora a função $\phi : \mathcal{C}_p(M) \to \mathcal{C}_p(X)$ por

$$\phi(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in M \\ \sum_{s \in S} f(a_s) \cdot g_s(x) & \text{se } x \in X \setminus M \end{cases}$$

Temos que mostar que $\phi(f)$ realmente está contido em $\mathcal{C}_p(X)$. Para isto fixe um $f \in \mathcal{C}_p(M)$.

Como $X \setminus M$ é aberto e já sabemos que $\sum_{s \in S} f(a_s) \cdot g(x)$ é contínuo em $X \setminus M$ só teremos que mostrar que $\phi(f)$ é contínuo em cada $a \in M$. Tome $a \in M$ e um $\epsilon > 0$. Vale que $f : M \to \mathbb{R}$ é contínuo, então existe $\delta > 0$ com $|f(a) - f(x)| \leq \epsilon$, sempre que $d(a, x) \leq \delta$ e $x \in M$. Seja $V = B_d(a, \frac{\delta}{3})$ e seja $x \in V$. Se $x \in M$, então não temos problemas, suponhamos então que $x \in V \setminus M$. Como $\gamma' = \{U_s : s \in S\}$ é recobrimento de $X \setminus M$ existe pelo menos um $s \in S$ com $x \in U_s \subseteq B_d(x_s, \frac{d(x_s,M)}{4})$ e vale, para cada $s \in S$ com $x \in U_s$, que $d(x, x_s) \leq \frac{d(x_s,M)}{4}$ e, pela definição de a_s, que $d(a_s, x_s) < \frac{5}{4}d(x_s, M)$. Vale também que

$$d(x_s, M) \leq d(a, x_s) \leq d(a, x) + d(x, x_s) < d(a, x) + \frac{d(x_s, M)}{4},$$

logo $\frac{3}{4}d(x_s, M) < d(a, x)$. Então temos

$$d(a, a_s) \leq d(a, x) + d(x, x_s) + d(x_s, a_s) < d(a, x) + \frac{3}{2}d(x_s, M) \leq$$

$$\leq d(a, x) + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot d(a, x) = 3 \cdot d(a, x).$$

Como $x \in V = B_d(a, \frac{\delta}{3})$, vale que $d(a, a_s) = 3 \cdot d(a, x) < \delta$, logo $|f(a) - f(a_s)| < \epsilon$.

γ' é localmente finito, então $S' = \{s \in S : x \in U_s\} = \{s \in S : g_s(x) \neq 0\}$ é finito e denotamos $S' = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Segue de $g_{s_1}(x) + \ldots + g_{s_n}(x) = 1$ que

$$|f(a) - (\phi(f))(x)| = |f(a) - \sum_{s \in S} f(a_s)g_s(x)| =$$

$$= |f(a) \cdot g_{s_1}(x) + \ldots + f(a) \cdot g_{s_n}(x) - f(a_{s_1})g_{s_1}(x) + \ldots - f(a_{s_1}) \cdot g_{s_n}(x)| \leq$$

$$\leq |f(a) - f(a_{s_1})| \cdot g_{s_1}(x) + \ldots + |f(a) - f(a_{s_1})| \cdot g_{s_n}(x) < \epsilon \cdot (g_{s_1}(x) + \ldots + g_{s_n}(x)) = \epsilon.$$

Então $\phi(f)$ é contínua. Como vale que $\phi(f)_{|M} = f$, sabemos que e é um extender.

Seja agora $f, h \in \mathcal{C}_p(M)$ e $r \in \mathbb{R}$ e seja $x \in X \setminus M$, então

$$(e\phi(r \cdot f + h))(x) = \sum_{s \in S} r(\cdot f(a_s) + h(a_s)) \cdot g_s(x) = r \cdot (\phi(f))(x) + (phi(h))(x).$$

Suponha que $x \in M$, logo

$$(\phi(r \cdot f + h))(x) = r \cdot f(x) + h(x) = r \cdot (\phi(f))(x) + (\phi(h))(x),$$

e segue que ϕ é linear.

Falta mostrar que ϕ é contínua. Sejam $f \in \mathcal{C}_p(M)$ e $U = \mathcal{O}_X(\phi(f), x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ um aberto básico de $\mathcal{C}_p(X)$. Podemos supor que $x_1, \ldots, x_l \in M$ e $x_{l+1}, \ldots, x_n \in X \setminus M$, onde $1 \leq l \leq n$. Como γ' é localmente finito existe para cada $i = l, \ldots, n$ uma vizinhança que intercepta um número finito de elementos de $\gamma' = \{U_s : s \in S\}$. vamos dizer que são $U_{s_1^i}, \ldots, U_{s_{r_i}^i}$, onde $r_i \in \omega$ e $s_1^i, \ldots, s_{r_i}^i \in S$.

Observe que para qualquer função $h \in \mathcal{C}_p(M)$, vale para todo $i = l+1, \ldots, n$ que

$$\phi(h)(x_i) = h(a_{s_1^i}) \cdot g_{s_1^i}(x_i) + \ldots + h(a_{s_{r_1}^i}) \cdot g_{s_{r_i}^i}(x_i).$$

Tome

$$U' = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}(f, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{r_i}}, \epsilon) \cap \mathcal{O}(f, x_1, \ldots, x_l, \epsilon).$$

Então se $h \in U'$ vale para cada $i = 1, \ldots, l$ que $|\phi(h)(x_i) - \phi(f)(x_i)| = |h(x_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Para $i = l+1, \ldots, n$ vale que $\sum_{s \in S} h(a_s) \cdot g_s(x_i) = h(a_l)$

$$|\phi(h)(x_i) - \phi(f)(x_i)| =$$

$$= |h(a_{s_1^i}) \cdot g_{s_1^i}(x_i) + \ldots + h(a_{s_{r_1}^i}) \cdot g_{s_{r_i}^i}(x_i) - (f(a_{s_1^i}) \cdot g_{s_1^i}(x_i) + \ldots + f(a_{s_{r_1}^i}) \cdot g_{s_{r_i}^i}(x_i))| \leq$$

$$\leq |(h(a_{s_1^i}) - f(a_{s_1^i}))| \cdot g_{s_1^i}(x_i) + \ldots + |(h(a_{s_{r_1}^i}) - f(a_{s_{r_1}^i}))| \cdot g_{s_{r_i}^i}(x_i) <$$

$$< \epsilon \cdot (g_{s_1^i}(x_i) + \ldots + g_{s_{r_i}^i}(x_i)) = \epsilon.$$

□

Teorema 3.28 *Todo espaço compacto, metrizável X é l-mergulhado em qualquer espaço métrico Z contendo X.*

Demonstração. Como X compacto, entã X é fechado em Z e segue de Teorema 3.27 o desejado. □

Proposição 3.29 *(Gul'ko e Khmyleva 1986) Seja X um espaço métrico, que contem uma sequência convergente não trivial S, então X é l-equivalente a $X \oplus S$ e X^+ é l-equivalente a X.*

Demonstração. No Exemplo 3.26 vimos que S é compacto e metrizável e contido em X, então segue pelo Teorema 3.28 que S é l-mergulhado em X. Sabemos também que S é fracamente l-aditivo, então segue do Teorema 3.25 que $\mathcal{C}_p(X) \simeq \mathcal{C}_p(X \oplus S)$ e logo X é l-equivalente a $X \oplus S$.

Da Proposição 3.21 segue que $\mathcal{C}_p(X^+) \simeq \mathcal{C}_p((X \oplus S)^+) \simeq \mathcal{C}_p(X \oplus S^+)$, que é, pela Proposição 2.22, linearmente homeomorfo a $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(S^+)$. Sobre o espaço S sabemos também que $\mathcal{C}_p(S) \simeq \mathcal{C}_p(S^+)$. Logo

$$\mathcal{C}_p(X^+) \simeq \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(S^+) \simeq \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(S) \simeq \mathcal{C}_p(X \oplus S) \simeq \mathcal{C}_p(X).$$

□

Proposição 3.30 *Seja X um espaço métrico contendo uma sequência convergente não trivial e seja Y um subespaço l-mergulhado em X, então X é l-equivalente a $X_{|Y} \oplus Y$.*

Demonstração. X contém uma sequência convergente $\{x_n\}_{n\in\omega}$ que converge à um ponto $z \in X$. Então podemos considerar que $S \subseteq X$, logo segue pela Proposição 3.29 que X^+ é l-equivalente a X. Pela Proposição3.23 segue que X^+ é l-equivalente a $X_{|Y} \oplus Y$. L-equivalencia é transitiva, por que a composta de um homeomorfismo linear também é um homeomorfismo linear. Logo X é l-equivalente a $X_{|Y} \oplus Y$. □

Teorema 3.31 *Sejam (X, d) um espaço métrico infinito e Y um subespaço fechado de X, então X é l-equivalente a $X_{|Y} \oplus Y$.*

Demonstração. Vale pelo Teorema 3.27 que Y é l-mergulhado em X. Suponhamos que X contem uma sequência convergente não trivial, então segue da Proposição 3.30 que X é l-equivalente a $X_{|Y} \oplus Y$. Suponhamos agora que todas as sequências convergentes de X sejam triviais, então X é discreto. De fato se existisse um $x \in X$ não isolado, poderíamos tomar para cada $n \in \omega$ um ponto $x_n \in B_d(x, \frac{1}{n})$, o que contradiz o fato de não ter uma sequência não trivial em X.

Mas então X é normal, a topologia de $X_{|Y}$ coincide com a topologia quociente, que é discreta, logo $X_{|Y} \oplus Y$ é discreto também. Definimos $\phi : X^+ \to X_{|Y} \oplus Y$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} q(x) & \text{se } x \in X \setminus Y \\ x & \text{se } x \in Y \\ q(y) & \text{se } x = x' \end{cases}$$

onde $X^+ = X \cup x'$ e $y \in Y$ qualquer. É fácil concluir que ϕ é um homeomorfismo. Como X é discreto e infinito X^+ é homeomorfo a X. Então $X_{|Y} \oplus Y$ e X são homeomorfos, portanto l-equivalentes. □

Este Teorema é uma ótima ferramenta para construir espaços l-equivalentes.

Exemplo 3.32 I é fracamente l-aditivo.
Seja $I = [0,1]$ e Y o intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Vale que Y é homeomorfo a I e como I é normal a topologia do R-quociente em $I_{|Y}$ coincide com a topologia quociente em $I_{|Y}$, e segue que $I_{|Y}$ é homeomorfo a I. Sabemos que de homeomorfia segue a l-equivalência, então segue de Proposição 3.21 que $I \oplus I$ é l-equivalente a $I_{|Y} \oplus Y$, que é por Theorema 3.31 l-equivalente a I.

Exemplo 3.33 A figura oito é l-equivalente ao círculo.
Seja X a o círculo no $\mathbb{R}^2$ e tome dois pontos $Y = \{x, y\}$ com $x, y \in X$ e $x \neq y$. X é um espaço metrizável, infinito e T_1, portanto Y é fechado em X e segue do Teorema 3.31 que $X_{|Y} \oplus Y$ é l-equivalente a X.

X é normal, então a topologia R-quociente em $X_{|Y}$ coincide com a topologia quociente. Como $X_{|Y}$ contém uma sequência não trivial convergente podemos utilizar a Proposição 3.29 para ver que $X_{|Y}$ é l-equivalente a $X^+_{|Y}$. Analogamente concluimos que $X^+_{|Y}$ é l-equivalente a $X_{|Y} \oplus Y$, que é exatamente o espaço que ganhamos adicionando dois pontos isolados a $X_{|Y}$. Então temos que o círculo X é l-equivalente a $X_{|Y}$, que é homeomorfo a figura oito.

Exemplo 3.34 Seja $X = S \times \omega$, onde S é uma sequência convergente e $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ com a topologia discreta. Seja $A = \{0\} \times \omega$. Vale que X é metrizável e infinito e A é fechado em X, logo vale pelo Teorema 3.31 que X é l-equivalente a $X_{|A} \oplus A$. Veremos que $X_{|A} \oplus A$ é o Frechét-Urysohn fan enumerável, que é metrizável, localmente compacto e tem uma base enumerável. Mas X é não metrizável, não é localmente compacto e não tem base enumerável, logo essas propriedades não são l-invariantes.

De vez enquando é mais conveniente usar a seguinte variação de Lema 3.31.

Corolário 3.35 *Seja X um espaço métrico e Y um subespaço fechado fracamente l-aditivo de X e seja Z um subespaço fechado de X, disjunto de Y e homeomorfo a Y. Então X e $X_{|Y}$ são l-equivalentes.*

Exemplo 3.36 Seja X o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ e $Y = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Então X é l-equivalente a $X_{|Y}$, pelo Lema 3.35. X é separável, metrizável e localmente compacto, mas $X_{|Y}$ não é nem localmente compacto, nem verifica o primeiro axioma de enumerabilidade e portanto não é compacto. Logo essas propriedades não são l-invariantes.

Vimos então propriedades que são preservadas por l-equivalência ou t-equivalências e propriedades que não são. Elas estão aqui resumidas na tabela que se segue. Propriedades t-invariantes em X só dependem da estrutura topológica em $\mathcal{C}_p(X)$. De fato, mostramos a t-invariança da maioria deles por teoremas de dualidade. Propriedades topológicas de X, que não são t-invariantes, não podem ser caracterizadas por propriedades topológicas em $\mathcal{C}_p(X)$. Valem as afirmações análogas para propriedades l-invariantes. Compacidade é um dos exemplos mais importantes de uma propriedade que é l-invariante e não t-invariante. Vale que a propriedade de Lindelöf é l-invariante, mas não se sabe se essa propriedade também é t-invariante.

Tabela 3.1: Propriedades l-invariantes e t-invariantes

	l-invariante	t-invariante
Cardinalidade	+	+
Densidade	+	+
Network weight	+	+
i-weight	+	+
σ-compacto	+	+
Compacidade	+	−
Caráter	−	−
Peso	−	−
Normalidade	−	−
Metrizabilidade	−	−
Localmente compacto	−	−
Lindelöf	+	?

Capítulo 4

Sobre espaços de Lindelöf

A propriedade de Lindelöf é uma das propriedades relacionadas à compacidade mais forte que $\mathcal{C}_p(X)$ pode ter nos casos mais gerais. Sabemos do capitulo 2 que $\mathcal{C}_p(X)$ nunca é compacto nem enumeravelmente compacto e é σ-compacto e localmente compacto só nos casos em que X é finito. A propriedade de Lindelöf abre a possibilidade de usar ferramentas que utilisam a enumerabilidade na hora de investigar $\mathcal{C}_p(X)$ e além disso um espaço de Lindelöf também é paracompacto. Por isso a questão se $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf é uma questão importante. Mesmo que isso tenha sido uma questão bastante pesquisada nas últimas décadas ainda não se tem uma caracterização boa para quando $\mathcal{C}_p(X)$ é Lindelöf.

4.1 Equivalências

Lema 4.1 *Seja X um espaço topológico enumerável, então $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf.*

Demonstração. Seja X enumerável, logo segue de teorema 2.27 que $\mathcal{C}_p(X)$ verifica o segundo axioma de enumerabilidade. Como espaços que tem bases enumeráveis são de Lindelöf segue que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf. □

Teorema 4.2 *Seja X um espaço topológico. $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf se e somente se $\mathcal{C}_p(X)$ é localmente de Lindelöf.*

Demonstração. Se $\mathcal{C}_p(X)$ for de Lindelöf então $\mathcal{C}_p(X)$ é vizinhança de Lindelöf de cada ponto $f \in \mathcal{C}_p(X)$ e segue que $\mathcal{C}_p(X)$ é localmente de Lindelöf.
Suponha então $\mathcal{C}_p(X)$ localmente de Lindelöf, $u \in \mathcal{C}_p(X)$ a função nula e U uma vizinhança de Lindelöf de u. Como $\mathcal{C}_p(X)$ é de Tychonoff existe uma vizinhança aberta V tal que $u \in V \subseteq \overline{V} \subset U$. Sem perda de generalidade seja V da forma $\mathcal{O}(u, x_1, \ldots, x_n, \epsilon)$, onde $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\epsilon > 0$. Considere para cada $k \in \omega$ a função $\varphi_k : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(X)$ definida por $\varphi_k(f) = k \cdot f$.
Mostraremos que φ_k é contínua para cada k. Fixe $k \in \omega$ e seja $h \in \mathcal{C}_p(X)$ e $W = \mathcal{O}(k \cdot h, y_1, \ldots, y_n, \delta)$, onde $y_1, \ldots, y_n \in X$ e $\delta > 0$, ou seja W é vizinhança aberta de $\varphi_k(h) = k \cdot h$. Vale que $\mathcal{O}(h, x_1, \ldots, x_n, \frac{\delta}{k})$ é vizinhança aberta de h em $\mathcal{C}_p(X)$ e $\varphi_k(\mathcal{O}(h, x_1, \ldots, x_n, \frac{\delta}{k})) = W$.
$\overline{V}$ é um subespaço fechado do espaço de Lindelöf U, e como todos φ_k são contínuas

temos que $\varphi_k(\overline{V})$ é de Lindelöf para cada $k \in \omega$. Sabemos que a união enumerável de espaços de Lindelöf é de Lindelöf, então $\bigcup_{k\in\omega} \varphi_k(\overline{V})$ é de Lindelöf.
Mostraremos agora que $\mathcal{C}_p(X) = \bigcup_{k\in\omega} \varphi_k(\overline{V})$. Seja $g \in \mathcal{C}_p(X)$ então existe para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ um número natural k_i tal que $g(x_i) < k_i \cdot \epsilon$. Para $k = max\{k_1, \dots, k_n\}$ vale que $\frac{g(x_i)}{k} < \epsilon$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo $\frac{g(x_i)}{k} \in V \subseteq \overline{V}$ e $g \in \varphi_k(\overline{V}) \subseteq \bigcup_{k\in\omega} \varphi_k(\overline{V})$. □

Teorema 4.3 *Seja X um espaço topológico. Vale que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf se e somente se $\mathcal{C}_p(X)$ é paracompacto.*

Demonstração. Sabemos do Teorema 1.9 que cada espaço regular e de Lindelöff é paracompacto e do Teorema 1.24 sabemos que cada espaço paracompacto que verifica a propriedade de Souslin é de Lindelöf. Sabemos de Teorema 2.39 que $\mathcal{C}_p(X)$ verifica a propriedade de Souslin, logo segue diretamente o que queremos mostrar. □

De fato $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf se pode ser escrito como união finita de subespaços paracompacto, cuja prova pode ser achada em [Tka14]. Isso levanta a questão se isso também é possível no caso de uma união enumerável.

Lema 4.4 *Seja $\mathcal{C}_p(X) = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$, onde cada Y_i é paracompacto, então $\mathcal{C}_p(X)$ é Lindelöf.*

Problema 4.5 *Seja $\mathcal{C}_p(X) = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$, onde cada Y_n é paracompacto. Vale que $\mathcal{C}_p(X)$ é Lindelöf?*

Um espaço X é *metacompacto* (ou *fracamente paracompacto*) se todo recobrimento aberto de X admite um refinamento $\{U_s : s \in S\}$ tal que $\{s \in S : x \in U_s\}$ é finito para cada $x \in X$. Vale que espaços metacompactos e coletivamente normais são paracompacto. Lembramos que $\mathcal{C}_p(X)$ é coletivamente normal se e somente se $\mathcal{C}_p(X)$ é normal. Então segue diretamente o seguinte:

Lema 4.6 *Seja X um espaço topológico com $\mathcal{C}_p(X)$ normal e metacompacto, então $\mathcal{C}_p(X)$ é Lindelöf.*

Surge naturalmente a pergunta se dar para omitir a propriedade normal.

Problema 4.7 *Seja X um espaço topológico com $\mathcal{C}_p(X)$ metacompacto. Vale que $\mathcal{C}_p(X)$ é Lindelöf?*

Teorema 4.8 *[Arh92b] Seja X compacto e Y um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(X)$,então $ext(Y) = l(Y)$.*

Demonstração. Sempre vale que $ext(Y) \leq l(Y)$, veja Lemma 1.22.
Suponha agora que $l(Y) > \kappa$, vamos mostrar que $ext(Y) > \kappa$. Como $l(Y) > \kappa$, existe um recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de Y com cardinalidade $l(Y) > \kappa$, que não assume subrecobrimento de cardinalidade menor ou igual a κ. Sem perda de generalidade podemos supor que todos elementos de $\mathcal{U}$ são abertos básicos, da forma $[x_1, \dots, x_n; O_1, \dots, O_n]$, onde $n \in \omega$, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $O_1, \dots, O_n$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, elementos da base $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Para facilitar a notação vamos, para todo $x_1, \dots, x_k \in X$ e $O_1, \dots O_k$ denotar

$[\mathbf{x}, \mathbf{O}]_k = [x_1, \ldots, x_k; O_1, \ldots, O_k]$, onde $\mathbf{x}$ é a k-upla ordenada $(x_1, \ldots, x_k)$ e $\mathbf{O}$ é o conjunto aberto $O_1 \times \ldots \times O_k \subseteq \mathbb{R}^k$.
Esses conjuntos $\mathbf{O}$ são elemenots da base enumerável $\mathcal{B}_k = \{U_1 \times \ldots \times U_k : U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}\}$, então $\{\mathbf{O} : \mathbf{O} \in \mathcal{B}_k \text{ para algum } k \in \omega\}$ é enumerável e podemos enumerá-los $\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \ldots\}$.
Para cada $n \in \omega$ existe k_n tal que $\mathbf{O}_n \in \mathcal{B}_{k_n}$. Seja $\mathcal{U}_n = \{[\mathbf{x}, \mathbf{O}_n]_k \in \mathcal{U} : \mathbf{x} \in X^k\}$ e tome para cada $n \in \omega$ o conjunto $A_n = \{\mathbf{x} \in X^{k_n} : [\mathbf{x}; \mathbf{O}_n]_{k_n} \in \mathcal{U}_n\}$.
Para cada função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ seja $f^k : X^k \to \mathbb{R}^k$ a função definida por $f^k((x_1, \ldots, x_k)) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Observe que f^k é contínua e fechada.

Podemos agora escrever o fato de que $\mathcal{U}$ cobre Y da seguinte maneira:
Para todo $f \in Y$ existe $n \in \omega$ e um $\mathbf{x} \in A_n$ tal que $f \in [\mathbf{x}; \mathbf{O}_n]_{k_n}$.

Também, o fato de que $\mathcal{U}$ não admite uma subcobertura de cardinalidade menor ou igual a κ pode ser escrito da seguinte maneira:
Se para todo $n \in \omega$ temos uma família $B_n \subseteq A_n$ com $|B_n| \leq \kappa$, então existe $g \in Y$ tal que $g \notin [\mathbf{x}; \mathbf{O}_n]_{k_n}$ para todo $\mathbf{x} \in B_n$ e todo $n \in \omega$.

Agora vamos construir por indução um conjunto $\{f_\alpha : \alpha \leq \kappa\} \subseteq Y$ fechado e discreto em Y. Tome $f_0 \in Y$ qualquer e suponha que já definimos para algum $\alpha \leq \kappa$ fixo e cada $\beta < \alpha$ uma função $f_\beta \in Y$. Observe que como X^{k_n} é compacto existe um espaço Z_n que é metrizável e separável e uma função perfeita, sobrejetora $\phi_{k_n} : X \to Z_n$. Para um número finito de $\beta_1, \ldots, \beta_r < \alpha$ considere a função $f_{(\beta_1, \ldots, \beta_r)} : X^{k_n} \to \mathbb{R}^{k_n \cdot r} \times Z_n$ que leva cada ponto $(x_1, \ldots, x_{k_n}) \in X^{k_n}$ para

$$(f_{\beta_1}(x_1), \ldots, f_{\beta_1}(x_{k_n}), f_{\beta_2}(x_1), \ldots, f_{\beta_2}(x_{k_n}), \ldots, f_{\beta_r}(x_1), \ldots, f_{\beta_r}(x_{k_n}), \phi_{k_n}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Como ϕ_{k_n} é perfeita, vale que $f_{(\beta_1, \ldots, \beta_r)}$ é uma função perfeita. Vale que $\mathbb{R}^{k_n} \times Z_n$ tem uma base enumerável, logo esse espaço é hereditariamente separável. Então existe, para cada $n \in \omega$ fixo, um subconjunto denso enumerável $D \subseteq f_{(\beta_1, \ldots, \beta_r)}(A_n)$. Podemos tomar para cada $y \in D$ um ponto $\mathbf{x}_y \in A_n$ com $f_{(\beta_1, \ldots, \beta_r)}(\mathbf{x}_y) = y$. Vale que $S_{(\beta_1, \ldots, \beta_r); n} = \{\mathbf{x}_y : y \in D\} \subseteq A_n$ é enumerável.
Tome $B_n^\alpha = \bigcup\{S_{(\beta_1, \ldots, \beta_r)} : n \in \omega, \beta_1, \ldots, \beta_n < \alpha\}$. Vale para todo $n \in \omega$ que $B_n \subseteq A_n$ e $|B_n^\alpha| \leq \kappa$ então existe uma função $f_\alpha \in Y$ com $f_\alpha \notin [\mathbf{x}; \mathbf{O}_n]_{k_n}$. Deste jeito construímos o conjunto $F = \{f_\alpha : \alpha \leq \kappa\}$.
Supomos que F não é discreto e fechado, então existe $g \in Y$, que é um ponto de acumulação de F. Seja então $g \in Y$ um ponto de accumulação de F. Existe um $m \in \omega$ e um $\mathbf{x}' \in A_m$ com $g \in [\mathbf{x}'; \mathbf{O}_m]_{k_m}$, o que é o mesmo que escrever $g^{k_m}(\mathbf{x}') \in \mathbf{O}_m$.
Como X é compacto, vale que $l(X^n) \leq \omega$ para todo $n \in \omega$, segue de Teorema 2.46 que $t(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega$ e pelo Lema 1.18, temos que $t(Y) \leq t(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega \leq \kappa$.

Logo existe $\alpha' \leq \kappa$ com $g \in \overline{\{f_\alpha : \alpha \leq \alpha'\}}$. Tome α_0 sendo o menor cardinal verificando isto, ou seja $\alpha_0 = min\{\alpha' \leq \kappa : g \in \overline{\{f_\alpha : \alpha \leq \alpha'\}}\}$. Tome $P = \{f_\alpha \in [\mathbf{x}'; \mathbf{O}_m]_{k_m} : \alpha < \alpha_0\}$.
Vale que $(g^{k_m})^{-1}(\mathbf{x}') \cup \bigcup\{(f^{k_m})^{-1}(f^{k_m}(\mathbf{x}')) : f \in P\}$ contém $\mathbf{x}'$ e logo não é vazio.
Tome $T = \bigcap\{(f^{k_m})^{-1}(f^{k_m}(\mathbf{x}')) : f \in P\} \setminus (g^{k_m})^{-1}(O_m)$. Podemos distinguir dois casos:

Caso 1 T é vazio, então tome $\mathbf{z} = \phi_{k_n}(\mathbf{x}')$. Como ϕ_{k_n} é uma função perfeita, então $\phi_{k_n}^{-1}(z)$ é compacto. g é contínua, portanto $(g^{k_m})^{-1}(O_m)$ é aberta e existe um número finito $\{f_{\beta_1}, \ldots, f\beta_s\}$ de elementos de P com $F = \bigcap_{i=1}^{s}(f_{\beta_i}^{k_m})^{-1}(f_{\beta_i}^{k_m}(\mathbf{x}')) \cap \phi^{-1}(\mathbf{z}) \subseteq (g^{k_m})^{-1}(O_m)$. Vale que $F = (f^m)^{-1}_{(\beta_1,\ldots,\beta_s)}(f_{\beta_1^{k_m}(\mathbf{x}')}, \ldots, f_{\beta_r}^{k_m}, \mathbf{z})$. Como $f_{(\beta_1,\ldots,\beta_s)}$ é uma função fechada e $(g^{k_m})^{-1}(O_m)$ é um conjunto aberto, contendo F. Sabemos que $\mathbf{x}' \in F \cap A_m$, logo $(g^{k_m})^{-1}(O_m)$ contem a preimagem completa de um ponto contido no conjunto $f^{k_m}_{((\beta_1,\ldots,\beta_s))}(S_{(\beta_1,\ldots,\beta_r);m})$. Portanto existe $\mathbf{x}'' \in S_{(\beta_1,\ldots,\beta_r);m} \cap (g^{k_m})^{-1}(O_m)$. Mas então a função $f_\alpha \notin [\mathbf{x}''; O_m]_{k_n}$ para todo $\alpha > max\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$, sabemos que $g \in [\mathbf{x}''; O_m]_{k_n}$. Tome $\alpha' = max\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$. Vale que $\alpha' < \alpha_0$ e como g é um ponto de acumulação de $\{f_\alpha : \alpha < \alpha_0\}$, segue que g é pontode acumulação de $\{f_\alpha : \alpha < \alpha'\}$. Mas isso contradiz o fato que α_0 é o menos cardinal verificando esta propriedade.

Caso 2 Existe $\mathbf{x}'' \in T$ Como $g^{k_m}(\mathbf{x}') \in \mathbf{O}_m$ e consequentemente $\mathbf{x}' \notin T$, vale que $g^{k_m}(\mathbf{x}') \neq g^{k_m}(\mathbf{x}'')$. Então podemos achar conjuntos abertos, disjuntos $\mathbf{U}, \mathbf{V} \subseteq \mathbb{R}^{k_m}$ vizinhanças de $g^{k_m}(\mathbf{x}')$ e $g^{k_m}(\mathbf{x}'')$ respectivamente. Logo $g \in [\mathbf{x}'; \mathbf{U}] \cap [\mathbf{x}''; \mathbf{V}]$. Mas vale que $f^{k_m}(\mathbf{x}') = f^{k_m}(\mathbf{x}'')$ para todo $f \in P$. Logo para cada $f \in P$ vale que $f \notin [\mathbf{x}'; \mathbf{U}] \cap [\mathbf{x}''; \mathbf{V}]$. Então g não é ponto de acumulação de P, o que é uma contradição. Segue que F é discreto e fechado em Y.

□

Corolário 4.9 *Seja X compacto então $\mathcal{C}_p(X)$ é normal, se e somente se $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf.*

Demonstração. Um espaço de Lindelöf que é de Tychonoff sempre é normal.

Seja agora $\mathcal{C}_p(X)$ normal. Sabemos de Teorema 2.39 que $\mathcal{C}_p(X)$ verifica a propriedade de Souslin. Como $\mathcal{C}_p(X)$ é normal segue de Teorema 2.26 que $\mathcal{C}_p(X)$ é coletivamente normal. Vale que para todo espaço Z coletivamente normal e de Souslin, que $ext(Z)$ é neumerável (veja Lema 1.31). então $ext(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega$. Então podemos usar Teorema 4.8, onde $Y = \mathcal{C}_p(X)$ e concluímos que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf. □

Definição 4.10 Seja κ um cardinal. O *Σ-produto de κ copias de $I = [0,1]$* é um subespaço do produto de Tychonoff I^κ onde cada ponto tem no máximo um número enumerável de coordenadas não zero. Denotamos esse espaço por $\Sigma(\kappa)$.

Exemplo 4.11 Seja A um conjunto com cardinalidade $\kappa > \omega$ e seja $b \notin A$. Seja $L_\kappa = A \cup \{b\}$. com a topologia, onde todos os pontos de A são isolados e $U \subseteq L_\kappa$ com $b \in U$ é aberto em L_κ se e somente se $L_\kappa \setminus U$ é enumerável. Claramente L_κ é de Lindelöf e vale que a intersecção enumerável de conjuntos abertos é aberta. Agora vale que $\{f \in \mathcal{C}_p(L_\kappa) : f(L_\kappa) \subseteq [0,1], f(b) = 0\}$ é um subconjtuno fechado de $\mathcal{C}_p(L_\kappa)$, que é homeomorfo a $\Sigma(\kappa)$. $\Sigma(\kappa)$ é enumerávelmente compacto, mas não compacto, então não é de Lindelöf e consequentemente $\mathcal{C}_p(L_\kappa)$ também não é Lindelöf. Mas $\mathcal{C}_p(L_\kappa)$ é normal. (veja [Arh94]).

4.2 Propriedades suficientes para $\mathcal{C}_p(X)$ ser de Lindelöf

A questão quando $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf surgiu na análise funcional, basicamente para o caso em que X são espaços compactos específicos. Vamos então introduzir alguns espáços compactos.

Definição 4.12 Um espaço compacto Y é um *compacto de Eberlein*, se existir um espaço compacto X, tal que Y é homeomorfo a um subespaço de $\mathcal{C}_p(X)$.

O seguinte Teorema, que foi provado por Talagrand em [Tal75], usa uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass na sua demonstração.

Teorema 4.13 *Se X for um compacto de Eberlein, então $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf.*

Uma família de espaços compactos mais amplo é a dos compactos de Corson.

Definição 4.14 Um *compacto de Corson* é um compacto que é homeomorfo a um subespaço de $\Sigma(\alpha)$, para algum α.

Alster e Pol generalisaram em [AP80] Teorema 4.13 para compactos de Corson.

Teorema 4.15 *Seja X um compacto de Corson, então $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf.*

Generalisando um resultado de S. P. Gul'ko, Sokolov mostrou em [Sok93] que os espaços iterados de compactos de Corson são de Lindelöf.

Teorema 4.16 *Seja X um compacto de Corson, então*
$\mathcal{C}_p(X)$, $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)), \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)))$, ... são espaços de Lindelöf.

Sabemos do Capitulo 2 que se X é metrizável, então $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf se e somente se X verifica o segundo axioma de enumerabilidade.

Temos que para até um espaço compacto, linearmente ordenado que verifica o primeiro axioma de enumerabilidade X vale que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf, se e somente se X é metrizável. Isto segue de um resultado de Nahmanson, cuja prova pode ser consultada em [Arh92b].

Teorema 4.17 *Seja X um espaço compacto linearmente ordenado X. Então $l(\mathcal{C}_p(X)) = w(X)$.*

Vamos mostrar que para todo X, subespaço enumeravelmente compacto do espaço dos números ordinais que verifica o primeiro axioma da enmerabilidade vale que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf. Seguimos para isto [Buz04].

Lembramos que para cada ordinal λ temos $\lambda_\omega = \{\alpha \leq \lambda : cf(\alpha) \leq \omega\}$, que é um subespaço do espaço dos números ordinais.

Definição 4.18 Seja $A \subseteq \lambda_\omega$. Falamos que B é um *ω-suporte* de A, se B for enumerável e valerem as seguintes três propriedades:

i) $0 \in B$,

ii) $A \subseteq B$,

iii) Se $\beta \in B$ for um ponto de acumulação em λ_ω, então β é ponto de acumulação de B.

Observe que um conjunto $A \subseteq \lambda_\omega$ pode ser um ω-suporte de si mesmo. Nesse caso A é obviamente enumerável e vale que $\overline{A}$ também é enumerável. Além disso, para cada família $\{A_n\}_{n\in\omega}$, onde A_n é ω-suporte de si mesmo, para cada $n \in \omega$, vale que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ é ω-suporte de si mesmo.

Proposição 4.19 *Seja $A \subseteq \lambda_\omega$ um espaço enumerável, então existe um ω-suporte B de A.*

Demonstração. Seja $\alpha \in A \subseteq \lambda_\omega$ ponto de acumulação de λ_ω, como $-alpha-in-lambda_\omega$, $cf(\alpha) \leq \omega$. É possível escolher para cada ponto de acumulação $\alpha \in A$ uma sequência $\{\gamma_{\alpha_n}\}_{n\in\omega} \subseteq \lambda_\omega$ convergindo a α, onde γ_{α_n} é isolado para todo $n \in \omega$. Tome $B = A \cup \{0\} \cup \bigcup\{\gamma_{\alpha_n} : n \in \omega\}, \alpha \in A$ ponto de acumulação de $A\}$. Vale que B é enumerável e contém 0 e A. Para cada $\beta \in B$ que é ponto de acumulação de λ_ω, então pela construção de B vale que β é ponto de acumulação de B. Vale que $\gamma_{\alpha_n} \subseteq B$ converge para α, então α é um ponto de acumulação de B. □

Seja $A \subseteq \lambda_\omega$ um ω-suporte de se mesmo e seja $f \in \mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$. Define $c_{f,A} : \lambda_\omega \to \mathbb{R}$ por $c_{f,A}(\gamma) = f(\alpha_\gamma)$, onde $\alpha_\gamma = sup(\{\alpha \in \overline{A} : \alpha \leq \gamma\})$.

Observe que $\{\alpha \in \overline{A} : \alpha \leq \gamma\}$ não é vazio, porque $0 \in A$. Como $\overline{A}$ é enumerável e os elementos de λ_ω são ordinais menores ou iguais a λ com cofinalidade menor que ω, existe o supremo desse conjunto. Por causa da unicidade do supremo $c_{f,A}$ é bem definido.

Observe também que se $\gamma \in \overline{A}$, então $\alpha_\gamma = \gamma$ e $c_{f,A}(\gamma) = f(\alpha_\gamma) = f(\gamma)$. Logo $c_{f,A} = f$, se $\lambda_\omega = \overline{A}$.

Lema 4.20 *Seja $A \subseteq \lambda_\omega$ um ω-suporte de si mesmo e seja $f \in \mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$. Então $c_{f,A} \in \mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $c_{f,A}$ é uma função contínua, para isto fixe $\gamma \in X$. Fixe uma sequência $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$, que converge para γ. Mostraremos que existe uma subsequência $\{\gamma'_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\{c_{f,A}(\gamma'_n)\}_{n\in\omega}$ converge para $c_{f,A}(\gamma)$.

Se existir uma subsequência $\{\gamma'_n\}_{n\in\omega}$ que está contido em $\overline{A}$, então vale que $c_{f,A}(\gamma'_n) = f(\gamma'_n)$ e por causa da continuidade de f segue que $\{f(\gamma'_n)\}_{n\in\omega}$ converge para $f(\gamma)$ e portanto $\{c_{f,A}(\gamma'_n)\}_{n\in\omega}$ converge para $c_{f,A}(\gamma) = f(\gamma)$.

Caso contrário só um número finito de elementos da sequência estão contidos em $\overline{A}$ e podemos supor sem perda de generalidade que $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ é uma sequência de pontos em $\lambda_\omega \setminus \overline{A}$. Podemos também supor que os elementos da sequência são distintos.

Tome para cada $\gamma \in \lambda_\omega$ os elementos

$$\beta_\gamma = \begin{cases} \lambda & \text{se } (\gamma, \lambda] \cap \overline{A} = \emptyset \\ inf(\{\beta \in A : \beta > \gamma\}) & \text{se } (\gamma, \lambda] \cap \overline{A} \neq \emptyset \end{cases}$$

e $\alpha_\gamma = sup(\{\alpha \in \overline{A} : \alpha \leq \gamma\})$. No caso de que $(\gamma, \lambda] \cap \overline{A} \neq \emptyset$ vale que $(\gamma, \lambda] \cap A \neq \emptyset$, então $\{\beta \in A : \beta > \gamma\}$ é não vazio. Além disso vale pelo princípio da boa ordem que $inf(\{\beta \in A : \beta > \gamma\}) = min(\{\beta \in A : \beta > \gamma\})$. Observe também que, se $\beta_\gamma \neq \lambda$, então β_γ é um ponto isolado em λ_ω. De fato se $\beta_\gamma = inf\{\beta \in A : \beta > \gamma\}$, vale que

$\beta_\gamma \in A$. Vale também que β_γ não é ponto de acumulação de A, o que contradiz o fato que A é ω-suporte de si mesmo. Então segue que β_γ é ponto isolado de A.

Para algum $\gamma \in \lambda_\omega$ e $\delta \in \lambda_\omega$ com $\alpha_\gamma \leq \delta < \beta_\gamma$ vale que $\overline{A} \cap (\alpha_g amma, \beta_g amma) = \emptyset$ e segue que $\alpha_\delta = \alpha_\gamma$ e $\beta_\delta = \beta_\gamma$.

Considere para cada γ_n o conjunto $[\alpha_{\gamma_n}, \beta_{\gamma_n}) \cap \lambda_\omega$. Para $n \neq m$ os intervalos $[\alpha_{\gamma_n}, \beta_{\gamma_n}) \cap \lambda_\omega$ e $[\alpha_{\gamma_m}, \beta_{\gamma_m}) \cap \lambda_\omega$ podem ou coincidir ou ser disjuntos. De fato se existir $\delta \in [\alpha_{\gamma_n}, \beta_{\gamma_n}) \cap [\alpha_{\gamma_m}, \beta_{\gamma_m}) \cap \lambda_\omega$, então $\alpha_{\gamma_n} = \alpha_\delta = \alpha_{\gamma_m}$ e $\beta_{\gamma_n} = \beta_\delta = \beta_{\gamma_m}$.

Suponha que para algum $l \in \omega$ o intervalo $[\alpha_{\gamma_n}, \beta_{\gamma_n}) \cap \lambda_\omega = [\alpha_{\gamma_m}, \beta_{\gamma_m}) \cap \lambda_\omega$, para todo $n, m \geq l$. Então vale que $\gamma_n \in [\alpha_{\gamma_l}, \beta_{\gamma_l}) \cap \lambda_\omega$ para todos $n \geq l$.

Se β_{γ_l} for um ponto isolado, então $\gamma \in [\alpha_{\gamma_l}, \beta_{\gamma_l}) \cap \lambda_\omega$. Vale que $c_{f,A}(\delta) = f(\alpha_{\gamma_l})$ para todo $\delta \in [\alpha_{\gamma_l}, \beta_{\gamma_l}) \cap \lambda_\omega$. Em específico vale que $c_{f,A}(\gamma_n) = f(\alpha_{\gamma_l}) = c_{f,A}(\gamma)$ para todo $n \geq N$ e segue que $\{c_{f,A}(\gamma_n)\}_{n\in\omega}$ converge para $c_{f,A}(\gamma)$.

Se β_{γ_l} não for isolado, então $\beta_{\gamma_n} = \lambda$ e vale que $(\alpha_{\gamma_l}, \tau] \cap \overline{A} = \emptyset$. Logo vale de novo para todo $\delta \in [\alpha_{\gamma_l}, \beta_{\gamma_l}) \cap \lambda_\omega = [\alpha_{\gamma_l}, \lambda] \cap \lambda_\omega$ que $\alpha_\delta = \alpha_{\gamma_l}$ e segue que $c_{f,A}(\delta) = f(\alpha_{\gamma_l})$e segue que $\{c_{f,A}(\gamma_n)\}_{n\in\omega}$ converge para $c_{f,A}(\gamma) = f(\alpha_{\gamma_l})$.

Caso que não exista $l \in \omega$ tal que o intervalo $[\alpha_{\gamma_l}, \beta_{\gamma_l}) \cap \lambda_\omega$ coincida com um número infinito de intervalos, existe $N \in \omega$ tal que os intervalos $\{[\alpha_{\gamma_n}, \beta_{\gamma_n}) \cap \lambda_\omega\}_{n\geq N}$ são dois a dois disjuntos.

Seja $\epsilon > 0$, considere o conjunto aberto $(\gamma - \epsilon, \gamma + \epsilon)$. Existe $N \in \omega$ com $\gamma_n \in (\gamma - \epsilon, \gamma + \epsilon) \cap \lambda_\gamma$ para todo $n \geq N$. Sabemos que $\alpha_{\gamma_n} < \gamma_n < \gamma + \epsilon$. Suponha que $\alpha_{\gamma_m} \leq \gamma - \epsilon$ para algum $m \leq N$, então como os intervalos $(\gamma - \epsilon, \gamma + \epsilon) \cap \lambda_\gamma$ são disjuntos vale que $\alpha_{\gamma_n} > \gamma - \epsilon$ para todo $n > m$.
Então vale que $\{\alpha_{\gamma_n}\}_{n\in\omega}$ converge para γ e segue que $\gamma \in \overline{A}$. Como $c_{f,A}$ coincide com f em $\overline{A}$ vale que $c_{f,A}(\gamma) = f(\gamma)$. f é contínua, então vale que $\{f(\alpha_{\gamma_n})\}_{n\in\omega}$ converge para $f(\gamma)$. Como $c_{f,A}(\gamma_n) = f(\alpha_{\gamma_n})$ vale que $\{c_{f,A}(\gamma_n)\}_{n\in\omega}$ converge para $f(\gamma) = c_{f,A}(\gamma)$. □

Lema 4.21 *Seja A um subespaço de λ_ω que é ω-suporte de si mesmo e seja $\mathcal{B}$ uma base para $\mathbb{R}$. Seja $f \in \mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$ e U um subconjunto aberto de $\mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$ com $f \in U$. Então existem sequências $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ e $\{B_1, \ldots, B_n\}$ que verificam as seguintes propriedades: $n \in \omega$, $\beta_n = \lambda$, $b_i \in A$ para $i = 1, \ldots, n$ e para todo $i = 1, \ldots, n$ vale $\alpha_i \in A$, $B_i \in \mathcal{B}$ e $c_{f,A}(\gamma) \in B_i$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos dizer que U é um conjunto aberto básico da forma $U = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n; O_1, \ldots, O_n]$. Podemos supor também que $\gamma_1 < \ldots < \gamma_n$ e $\gamma_n \leq sup(\overline{A})$. Seja $\alpha = sup(\overline{A})$ e tome $m = min\{i : \gamma_i \geq \alpha\}$. Observe que $c_{f,A}(\delta) = f(\alpha)$ para todo $\delta \geq \alpha$, então $c_{f,A}(\gamma_m) \in O_i$ para todos $i = m, \ldots, n$. Então existe $B_1 \in \mathcal{B}$ com $c_{f,A}(\gamma_m) \in B_1 \subseteq V_m \cap V_{m+1} \cap \ldots \cap V_n$. Vale que $c_{f,A}(\alpha) = f(\alpha) \in B_1$. $\alpha = sup(\overline{A}) \in \overline{A}$, então existe $\alpha' \in A \cap c_{f,A}^{-1}(B_1') \neq \emptyset$. Vale que $c_{f,A}([\alpha', \lambda)) \subseteq B_1$. Podemos tomar $\alpha_1 \in A$ com $c_{f,A}([\alpha_1, \lambda)) \subseteq B_1$ e $\alpha_1 > \gamma_i$ para todo $i = 1, \ldots m - 1$. Tome $\beta_1 = \lambda$.

Suponha que temos elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in A$ e $\beta_1, \ldots, \beta_{k-2} \in A$ e $B_1, \ldots, B_{k-1} \in \mathcal{B}$. Seja $l = max\{i : \gamma_i < a_{k-1}\}$ e tome $\alpha_k' = sup\{\alpha \in A : \alpha \leq \gamma_l\}$ e $\beta_k = inf\{\beta \in A : c_l \leq \beta\}$. Vale, pelo princípio da boa ordem que $\beta_k \in A$. Se $\beta_k = c_l = \alpha_k'$, então tome

$\alpha_k = \alpha'_k = c_l$ e $B_k = O_l$.Se $\beta_k \neq c_l \neq \alpha'_k$ e $\alpha'_k \neq \gamma_{l-1}$ então observe que $\alpha'_k = \alpha_\gamma = sup\{\alpha \in \overline{A} : \alpha \leq \gamma\}$ para todo $\gamma \in [\alpha'_k, \beta_k)$ e logo $c_{f,A}(\gamma) = f(\alpha'_k) = c_{f,A}(\gamma_l) \in V_l$. Então existe $B_k \in \mathcal{B}$ com $c_{f,A}([\alpha'_k, \beta_k)) \in B_k \subseteq V_l$.No caso que $\beta_k \neq c_l \neq \alpha'_k = \gamma_{l-1}$ tome um $B_k \in \mathcal{B}$ com $c_{f,A}([\alpha'_k, \beta_k)) \in B_k \subseteq V_l \cap V_{l-1}$. Se $\alpha'_k \in A$, então seja $\alpha_k = \alpha'_k$. Senão α'_k é um ponto de acumulação de A. Então existe por causa da continuidade de $c_{f,A}$ um elemento $a_k \in A$ tal que $\gamma_i \notin [\alpha_k, \alpha'_k)$ para todo $i = 1, \ldots, l$ e $c_{f,A}([a_k, b_k)) \subseteq B_k$.

Depois de um número finito de passos acabamos a iteração e teremos os elementos verificando as propriedades exigidas. □

Teorema 4.22 *Seja λ um ordinal qualquer, então $\mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$ é de Lindelöf.*

Demonstração. Tome $\mathcal{U}$ um recobrimento aberto de $\mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os elementos de $\mathcal{U}$ são elementeos básicos, da forma $[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$, onde $n \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in \lambda_\omega$ e $O_1, \ldots, O_n$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Nós vamos construir um subrecobrimento $\{U_n\}_{n\in\omega}$ indutivamente, escolhendo no n-ésimo passo um conjunto $U_n \in \mathcal{U}$ e definindo um conjunto enumerável A_n e uma família enumerável $\mathcal{S}_n$. Para podermos enumerar todos os elementos de todos $\mathcal{S}_n$ vamos enumerar os elementos de $\mathcal{S}_1$ com números primos e os elementos de $\mathcal{S}_n$ com p^{n+1}, onde p é um número primo.

Tome qualquer $U_1 = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \in \mathcal{U}$. Então existe pela Proposição 4.19 um ω-suporte A_1 do conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \lambda_\omega$. Seja $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\{$. Definimos $\mathcal{S}_1$ como sendo a família de todos pares $(\{a_1, \ldots, a_k\}, \{b_1, \ldots, b_k]\}, \{B_1, \ldots, B_k\})$, onde $k \in \omega$, $B_i \in \mathcal{B}$, $a_i \in A_1$, $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e $b_i \in A_1$, para $i < k$ e $b_k = \tau$. Observe que $\mathcal{S}_1$ é enumerável e vamos enumerar seus elementos com os números primos $\{p_1, p_2, \ldots\}$.

Para o passo n temos já fixado $U_1, \ldots, U_{n-1} \in \mathcal{U}$, conjuntos enumeráveis $A_1, \ldots, A_{n-1}$, e famílias enumeráveis $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{n-1}$.
Suponha que $\{U_1, \ldots, U_{n-1}\}$ não cobre $\mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$, senão já acabamos.
Seja $S = (\{[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]\}, \{B_1, \ldots, B_k\})$ o primeiro elemento de $\mathcal{S}_{n-1}$ tal que existe $V \in \mathcal{U}$ e um $f \in V$, verificando o seguinte:

(∗) $f([a_i, b_i)) \subseteq B_i$ para cada $i \leq k$ com $a_i \neq b_i$ e $f(a_i) \in B_i$ para todo $i \leq k$ com $a_i = b_i$.

Se existir S verificando (∗), tome $U_n = V$. Se não existir $S \in \mathcal{S}_{n-1}$ desse jeito, tome $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $U_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \neq \emptyset$, que sabemos que existe. Sabemos que U_n é da forma $[y_1, \ldots, y_s; W_1, \ldots, W_s]$, para algum $s \in \omega$, $y_1, \ldots, y_s \in \lambda_\omega$ e $W_1, \ldots, W_s$ conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Então existe um ω-suporte A_n de $\{y_1, \ldots, y_s\} \cup A_{n-1}$.
Seja $\mathcal{S}_n$ a família de todos pares $(\{a_1, \ldots, a_k\}, \{b_1, \ldots, b_k]\}, \{B_1, \ldots, B_k\})$, onde $k \in \omega$, $B_i \in \mathcal{B}$, $a_i \in A_n$, $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e $b_i \in A_n$, para $i < k$ e $b_k = \tau$. De novo vale que $\mathcal{S}_n$ é enumerável e enumeramos seus elementos por a potência de números primos $\{(p_1)^{n+1}, (p_2)^{n+1}, \ldots\}$.

No final teremos uma família $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathcal{U}$, conjuntos enumeráveis $A_1, A_2, \ldots$, e famílias enumeráveis $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$.

Vamos mostrar que ela é um recobrimento de $\mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$.
Seja $f \in \mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$ qualquer e seja $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Vale que A é um ω-suporte de si mesmo.

Considere a função $c_{f,A}$. Como $\mathcal{U}$ é recobrimento de λ_ω, existe $U \in \mathcal{U}$ com $c_{f,A} \in U$. Então existem pelo Lema 4.21 sequências $\{a_1, \ldots a_l\}, \{b_1 \ldots, b_l]\}$ e $\{B_1, \ldots, B_l\}$ que verificam as seguintes propriedades: $l \in \omega$, $a_i \in A$, $B_i \in \mathcal{B}$, para todo $i \leq l$, $b_i \in A$ para $i < l$, $b_l = \lambda$ e $c_{f,A}([a_i, b_i)) \subseteq B_i$ para cada $i \leq l$ com $a_i \neq b_i$ e $c_{f,A}(a_i) \in B_i$ para cada $i \leq l$ com $a_i = b_i$.

Observe que construimos $\{A_i\}_{i\in\omega}$ de uma forma que $A_i \subseteq A_j$, para todo $i \leq j$. Por causa disso e porque $l \in \omega$ existe $n \in \omega$ com $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_{l-1} \in A_n$ e segue que $S' = \{a_1, \ldots, a_l\}, \{b_1, \ldots, b_l\}, \{B_1, \ldots, B_l\} \in \mathcal{S}_n$.
Em algum passo, digamos no passo m, S' vai ser o primeiro que verifica $(*)$, então existe U_m contendo $c_{f,A}$. Podemos escrever $U_m = [z_1, \ldots, z_r; V_1, \ldots, V_r]$. Vale que A_m é ω-suporte de $\{z_1, \ldots, z_r\}$, portanto $\{z_1, \ldots, z_r\} \subseteq A_m \subseteq A$. Como $c_{f,A}(x) = f(x)$ para todo $x \in \overline{A}$ segue que $f(z_i) = c_{f,A}(z_i) \in V_i$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Logo $f \in U_m$ e $\{U_n\}_{n\in\omega}$ é recobrimento de λ_ω. □

Junto com Teorema 1.28 segue diretamente o seguinte.

Corolário 4.23 *Seja X um subespaço enumeravalemente compacto do espaço dos números ordinais, verificando o primeiro axioma de enumerabilidade, então $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf.*

Demonstração. Sabemos do Teorema 1.28 que existe um ordinal λ tal que X é homeomorfo a λ_ω. Então vale pelo Teorema 3.2 que $\mathcal{C}_p(X)$ é homeomorfo a $\mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$. Segue do Teorema 4.22 que $\mathcal{C}_p(\lambda_\omega)$ é de Lindelöf. Logo $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf. □

Observe que de Teorema 4.17 segue que até para espaços compactos X, que verificam o primeiro axioma de enumerabilidade e onde cada subconjunto enumerável $A \subseteq X$ tem fecho metrizável não necessáriamente vale que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf. Mas acabamos de mostrar que para cada subespaço enumeravalemente compacto do espaço dos números ordinais X, que verifica o primeiro axioma de enumerabilidade, vale que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf. Para cada subespaço enumerável A deste espaço, vale que $\overline{A}$ é enumerável. Então surge a seguinte pergunta.

Problema 4.24 *Seja X um espaço enumerávelmente compacto, que verifica o primeiro axioma da enumerabilidade e para todo subconjunto enumerável A de X vale que $\overline{A}$ também é enumerável. Valle que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf?*

4.3 Propriedades necessárias para $\mathcal{C}_p(X)$ ser de Lindelöf

Vimos em Teorema 2.47 que para cada espaço topológico X, vale que $t(\mathcal{C}_p(X)) = sup\{l(X^n) : n \in \omega\}$.

De fato também vale a sua "propriedade espelhada", que foi provada por Asanov.

Teorema 4.25 *Seja X um espaço topológico. Vale para todo $n \in \omega$ que $t(X^n) \leq l(\mathcal{C}_p(X))$.*

Demonstração. Seja κ um cardinal tal que $l(\mathcal{C}_p(X)) \leq \kappa$ e seja $n \in \omega$, $A \subseteq X^n$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{A} \subseteq X^n$. Como X é de Hausdorff, existem $U_1, \ldots, U_n$ abertos em X tais que $x_i \in U_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $U_i = U_j$, se $x_i = x_j$ e $U_i \cap U_j = \emptyset$, se $x_i \neq x_j$.
Vale que $U = U_1 \times \ldots \times U_n$ é vizinhança aberta de x, logo $A \cap U \neq \emptyset$. Temos que $x \in \overline{A \cap U}$. De fato tome uma vizinhança V de x, então $V \cap U$ é vizinhança de x. Como $x \in \overline{A}$, vale que $V \cap U \cap A \neq \emptyset$ e segue $x \in \overline{A \cap U}$. Tome $A' = A \cap U$.

Considere $F = \{f \in \mathcal{C}_p(X) : f(x_i) = 1, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n\}$. Tome para todo $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A'$ o conjunto aberto $V_y = \{g \in \mathcal{C}_p(X) : g(y_i) > 0\}$. Seja $f \in F$, então, como f é contínua vale que $W = f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$ é aberto e vizinhança de x_i para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto $W \times \ldots \times W$ é vizinhança de x, logo existe $y = (y_1, \ldots, y_n) \in W \cap A'$ e segue que $f \in V_y$. Então $F \subseteq \bigcap\{V_y : y \in A'\}$, logo $\{V_y : y \in A'\}$ é recobrimento aberto de F. Como F é um conjunto fechado em $\mathcal{C}_p(X)$ vale que $l(\mathcal{F}) \leq \kappa$, portanto existe $B \subseteq A' \subseteq A$ com $|B| \leq \kappa$ tal que $\{V_y : y \in B\}$ ainda cobre F.

Vamos mostrar que $x \in \overline{B}$. Suponha que $x \neq \overline{B}$, então existe $U' = U'_1 \times \ldots, U'_n$ uma vizinhança de x com $U' \cap B = \emptyset$. Podemos supor sem perda de generalidade que vale $U'_i = U'_j$, se $x_i = x_j$ e $U'_i \cap U'_j = \emptyset$, se $x_i \neq x_j$ e $U'_i \subseteq U_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como X é de Tychonoff existe uma função $g \in \mathcal{C}_p(X)$ com $g(x_i) = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $g(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U'_i) \subseteq \{0\}$. Logo $g \in F \subseteq \{V_y : y \in B\}$, portanto existe $y' = (y'_1, \ldots, y'_n) \in B$ com $g \in V_{y'}$. Mas então $g(y'_i) > 0$, logo $y'_i \in U'_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Segue que $y' \in U'$, que é uma contradição com $B \cap U' = \emptyset$. □

Em específico, se $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf, então $t(X^n)$ é enumerável para todo $n \in \omega$. Em geral não vale a reciproca.

Exemplo 4.26 Seja $X = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\} \times \{(x, 1) : 0 \leq x < 1\}$ munída pela topologia gerada por todos conjuntos da forma

$$\{(x, i) \in X : x_0 - \frac{1}{k} < x < x_0, i = 0, 1\} \cup \{(x_0, 0)\}$$

onde $0 < x_0 \leq 1$ e $k = 1, 2, \ldots$ e conjuntos da forma

$$\{(x, i) \in X : x_0 < x < x_0 + \frac{1}{k}, i = 0, 1\} \cup \{(x_0, 1)\}$$

onde $0 \leq x_0 < 1$ e $k = 1, 2, \ldots$. Este espaço é o espaço "two-arrows". X é heriditariamente Lindelöf, hereditariamente separável, perfeitamente normal, verifica o primeiro axioma de enumerabilidade e vale que $t(X) \leq \omega$. Mas é fácil construir um subespaço fechado, discreto e não enumerável. Logo $\mathcal{C}_p(X)$ não é de Lindelöf.

Problema 4.27 *Seja X um espaço topológico com $\mathcal{C}_p(X)$ Lindelöf. Vale que $t(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)) \leq \omega$?*

Lema 4.28 *Se $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf, então toda família discreta de subconjuntos abertos de X é enumerável.*

O seguinte problema está aberto no caso geral.

Problema 4.29 *Suponha que para todo $D \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ discreto vale que $\overline{D}$ de Lindelöf. Segue que $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf?*

4.4 Casos onde $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf

Um problema que foi perguntado em várias ocasiões é a seguinte:

Problema 4.30 *Seja X um espaço topológico com $\mathcal{C}_p(X)$ de Lindelöf, vale então que $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf?*

Vamos mostrar, seguindo a prova de Okunev em [Oku11] que este resultado vale quando X é fortemente zero-dimensional.

Teorema 4.31 *(Teorema de Fatorização de Mardeši'c)[[Mar60]] Sejam X e Z dois espaços compactos e $f : X \to Z$ uma função contínua. Então existem um espaço compacto Y e funções contínua $g : X \to Y$ e $h : Y \to Z$ tais que g é sobrejetora e $w(Y) \leq w(Z)$.*

Lema 4.32 *Seja X um espaço fortemente zero-dimensional e C um espaço que verifica o segundo axioma de enumerabilidade. Então existe uma função contínua $\phi : 2^\omega \to C$ tal que, para cada função $g \in \mathcal{C}_p(X, C)$, existe uma função contínua $f_g \in \mathcal{C}_p(X, 2^\omega)$ com $g = \phi \circ f_g$.*

Demonstração. Para cada $g \in \mathcal{C}_p(X, C)$ tome $X_g = X \times \{g\}$ e $Z = \oplus\{X_g : g \in \mathcal{C}_p(X, C)\}$. Vale que cada X_g é homeomorfo a um espaço fortemente zero-dimensional, portanto Z é a soma direta de espaços fortemente zero-dimensional, logo Z é fortemente zero-dimensional. Segue de Lema 1.34 que βZ, a compactificação de Stone-Cech de Z é zero-dimensional.
Considere a função $\varphi : Z \to C$ definida por $\varphi((x, g)) = g(x)$. Vale que φ é contínua. Pela propriedade da compactificação de Stone-Cech existe uma função contínua $\tilde{\varphi} : \beta Z \to C$ com $\tilde{\varphi}_{|Z} = \varphi$.

Pelo Teorema de Fatorização de Mardeši'c existem um espaço zero-dimensional, compacto K que verifica o segundo axioma de enumerabilidade e funções contínuas $h_1 : \beta Z \to K$ e $h_2 : K \to Y$ tais que $\tilde{h} = h_2 \circ h_1$. Podemos supor que K é um subespaço de 2^ω e como K é compacto, K é fechado em 2^ω. Vale que cada espaço fechado de 2^ω é uma retração e que podemos estender funções contínuas de uma retração a uma função contínua do espaço inteiro. Logo existe uma função contínua $\phi : 2^\omega \to C$ com $\phi_{|K} = h_2$ e segue que $\tilde{h} = \phi \circ h_1$.

Vamos verificar que valem as propriedades desejadas para ϕ. Tome para cada $g \in \mathcal{C}_p(X, C)$ a função $\varphi_g : X \to Z = \oplus\{X_g : g \in \mathcal{C}_p(X, Y)\}$ definida por $\varphi_g(x) = ((x, g))$. Vale que φ_g é contínua. Então $f_g : X \to K \subseteq 2^\omega$ definida por $f_g = h_1 \circ \varphi_g$ é contínua, logo pertence a $\mathcal{C}_p(X, 2^\omega)$. Temos que para todos os $x \in X$ e $g \in \mathcal{C}_p(X, C)$, $(\tilde{h} \circ \varphi)(x) = \tilde{h}((x, g)) = g(x)$, portanto

$$\phi \circ f_g = \phi \circ h_1 \circ \varphi_g = \tilde{h} \circ \varphi_g = g.$$

□

Lema 4.33 *Seja X um espaço fortemente zero-dimensional e Y um espaço que verifica o segundo axioma de enumerabilidade. Então existem um subespaço Z de 2^ω*

e uma função perfeita $\phi : Z \to Y$ tais que para cada $g \in \mathcal{C}_p(X,Y)$ existe uma função $f_g \in \mathcal{C}_p(X,Z)$ com $g = \phi \circ f_g$.

Demonstração. Existe uma compactificação C de Y que verifica o segundo axioma de enumerabilidade. Então existe pelo Lema 4.32 uma função contínua $\phi' : 2^\omega \to C$ tal que para cada função $g \in \mathcal{C}_p(X,C)$ existe uma função contínua $f_g \in \mathcal{C}_p(X,2^\omega)$ com $g = \phi' \circ f_g$. Tome $Z = \phi'^{-1}(Y)$ e $\phi = \phi'_{|Y}$, então ϕ é uma função perfeita. Para cada $g \in \mathcal{C}_p(X,Y)$ vale que $\phi' \circ f_g = g$, segue para todo $x \in X$ que $f_g(x) \in \phi'^{-1}(g(x)) \subseteq \phi'^{-1}(Y) = Z$, logo $f_g \in \mathcal{C}_p(X,Z)$.

□

Lema 4.34 *Seja X um espaço fortemente zero-dimensional e Y um espaço localmente compacto que verifica o segundo axioma da enumerabilidade. Então existem um subespaço localmente compacto Z de 2^ω e uma função sobrejetora contínua $\phi : \mathcal{C}_p(X,Z) \to \mathcal{C}_p(X,Y)$.*

Demonstração. Existem, pela Proposição 4.33, um subespaço Z de 2^ω e uma função perfeita $\phi : Z \to Y$ tais que, para cada $g \in \mathcal{C}_p(X,Y)$, existe uma função $f_g \in \mathcal{C}_p(X,Z)$ com $g = \phi \circ f_g$. Como Y é localmente compacto e ϕ é uma função perfeita, vale que $Z = \phi^{-1}(Y)$ é localmente compacto. Definimos $\phi_* : \mathcal{C}_p(X,Z) \to \mathcal{C}_p(X,Y)$ por $\phi_*(f) = \phi \circ f$. Vale que ϕ_* é contínua (veja Lema 2.8) e segue pelas propriedades de ϕ que ϕ_* é sobrejetora. □

Lema 4.35 *Seja X um espaço e Z um subespaço localmente compacto de 2^ω. Então existem um subespaço fechado $A \subseteq \mathcal{C}_p(X, 2^\omega \times \omega)$ e um homeomorfismo $\psi : A \to \mathcal{C}_p(X,Z)$.*

Demonstração. Como Z é um subespaço localmente compacto de 2^ω segue que Z é zero-dimensional e verifica o segundo axioma de enumerabilidade. Então podemos escrever $Z = \bigcup_{n\in\omega} Z_n$, onde Z_n são conjuntos abertos, compactos e $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$. Tome $\phi : \bigcup_{n\in\omega} Z_n \to \bigcup_{n\in\omega}(Z_n \times \{n\})$ definida por $\phi(x) = (x,n)$ para todo $x \in Z_n$ e $n \in \omega$. Temos que ϕ é um homeomorfismo. Como ω é discreto e Z_n é fechado em 2^ω, vale que $\bigcup_{n\in\omega}(Z_n \times \{n\})$ é fechado em $2^\omega \times \omega$. Então Z é homeomorfo a um subespaço fechado de $2^\omega \times \omega$ e segue de Lemma 2.10 que $\mathcal{C}_p(X,Z)$ é homeomorfo a um subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(X, 2^\omega \times \omega)$. □

Teorema 4.36 *Seja X um espaço fortemente zero-dimensional e $n \in \omega$, então existe um subespaço fechado $A \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ e uma função contínua sobrejetora $\Phi : A \to \mathcal{C}_p(X)^n$.*

Demonstração. Vale que $\mathcal{C}_p(X)^n$ é homeomorfo a $\mathcal{C}_p(X,\mathbb{R}^n)$. De fato $\phi : \mathcal{C}_p(X)^n \to \mathcal{C}_p(X,\mathbb{R}^n)$ definida por $\phi((f_1,\ldots,f_n))(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ é um homeomorfismo. Como $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto e verifica o segundo axioma da enumerabilidade, existe pelo Lema 4.34 um subespaço localmente compacto Z de 2^ω e uma função sobrejetora contínua $\phi' : \mathcal{C}_p(X,Z) \to \mathcal{C}_p(X,\mathbb{R}^n)$.
Segue de Lemma 4.35 que existem um subespaço fechado $A \subseteq \mathcal{C}_p(X, 2^\omega \times \omega)$ e um homeomorfismo $\psi : A \to \mathcal{C}_p(X,Z)$.

Então $\Phi : A \to \mathcal{C}_p(X)^n$ definido por $\Phi = \phi^{-1} \circ \phi' \circ \psi$ é uma função contínua sobrejetora. □

Teorema 4.37 *(Okunev) Seja X um espaço fortemente zero-dimensional, então $l(\mathcal{C}_p(X)) = l(\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X))$.*

Demonstração. Para todo espaço topológico Z vale que $l(Z) \leq l(Z \times Z)$.
Agora existe do Teorema anterior um subespaço fechado $A \subseteq \mathcal{C}_p(X)$ e uma função contínua sobrejetora $\phi : A \to \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X)$. Então segue que $l(C_p(X) \times \mathcal{C}_p(X)) = l(A) = l(\mathcal{C}_p(X))$. □

Referências Bibliográficas

[AP80] K. Alster and R. Pol. On function spaces of compact subspaces of σ-products of the real line. *Fund. Math.*, 107:135–143, 1980.

[Arh87] A. V. Arhangel'skii. A survey of Cp-theory. *Questions and Answers in General Topology*, 5(1):1–109, 1987.

[Arh92a] A. V. Arhangel'skii. *Cp-Theory.* Mathematics and its Applications. Elsevier Sience Publishers B.V., 1992.

[Arh92b] A. V. Arhangel'skii. *Topological Function Spaces*, volume 78 of *Mathematics and its Applications.* Kluwer Academic Publishers, 1992.

[Arh94] A. V. Arhangel'skii. *Spaces of Mappings and Rings of Continuous Functions*, volume 50 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer, 1994.

[Arh98] A. V. Arhangel'skii. Some observations on Cp-theory and bibliography. *Topology and its applications*, 89:103–221, 1998.

[Bou00] A. Bouziad. Le degré de lindelöf est l-invariant. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(3):913–919, 2000.

[Buz04] Raushan Z. Buzyakova. In search for Lindelöfs Cp's. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 45(1):145–151, 2004.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[GJ60] Leonard Gillman and Meyer Jerison. *Rings of Continuous functions.* D. Van Nostrand Company, Inc, 1960.

[GK86] S. P. Gul'ko and T. E. Khmyleva. Compactness is not preserved by the t-equivalence relation. *Math. Notes*, 39:5–6, 1986.

[HJ99] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to Set Theory.* Marcel Dekker, 3 edition, 1999.

[Mar60] S. Mardesic. On covering dimension and inverse limits of compact spaces. *Illinois J. Math.*, 4(2):278–291, 1960.

[MN88] Robert A. McCoy and Ibula Ntantu. *Topological Properties of Function Spaces of Continuous Functions.* Springer, 1988.

[Nag49] J. Nagata. On lattices of functions on topological spaces and os functions on uniform spaces. *Osaka Math. J.*, 1(2):166–181, 1949.

[Oku11] O. Okunev. The Lindelöf number of Cp(X)xCp(X) for strongly zero-dimensional X. *Cent. Eur. J. Math.*, pages 978–983, 2011.

[Pav80] D. S. Pavlovskij. Spaces of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 253(1):38–41, 1980.

[Sok93] G.A. Sokolov. Lindelöf property and the iterated continuous function spaces. *Fund. Math.*, 143:887–894, 1993.

[Tal75] M. Talagrand. Sur une conjeture de H.H. Corson. *Bull. Sci. Math.*, 99(2):211–212, 1975.

[Tka07] Vladimir V. Tkachuk. A selection of recent results and problems in Cp-theory. *Topology and its applications*, 154:2465–2493, 2007.

[Tka10] Vladimir V. Tkachuk. *A Cp-Theory Problem Book/ Topological and Function Spaces.* Springer, 2010.

[Tka14] Vladimir V. Tkachuk. *A Cp-Theory Problem Book/ Special Features of Function Spaces.* Springer, 2014.

[Vel98] N.V. Velichko. The lindelöf property is l-invariant. *Topology and its Applications*, 89:277–183, 1998.