

**Simplicidade e poder expressivo da geometria  
tarskiana**

Lázaro Divino Assunção

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Bianconi

São Paulo, junho de 2019

# **Simplicidade e poder expressivo da geometria tarskiana**

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 25/09/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

# Agradecimentos

Ao professor Ricardo Bianconi, pela orientação. Inicialmente, na graduação, quando tive o primeiro contato com um artigo de matemática ao examinar o texto *What Is Elementary Geometry?*, de Tarski. E agora, ao aceitar que eu permanecesse no ambiente da geometria elementar. Além de fornecer referências atuais sobre o tema, propôs questões que certamente me ajudaram a chegar até aqui.

Ao professor Pablo Mariconda, pela iniciação científica na época da minha graduação em filosofia. Foi por meio dos seus seminários sobre *Os Elementos*, de Euclides, que comecei a me interessar pelos fundamentos da geometria.

Ao professor Sérgio Alves, pelas primeiras lições de geometria via modelos.

Ao professor Francisco Miraglia, que em 2009 me apresentou um artigo de Tarski sobre o conceito de verdade nas linguagens formalizadas.

Aos professores Marcelo Coniglio e Vinícius Lopes que participaram da banca e fizeram várias sugestões para melhorar o texto.

Aos funcionários da CPG. Em especial à Ana que, com muita paciência, sempre esclareceu as regras e prazos da pós.

Ao professor Odilon, que sugeriu que eu trabalhasse com o livro *Metamathematische Methoden in der Geometrie*.

Ao Andreas Christ, que, além de me presentear com o livrinho sugerido pelo Odilon, me auxiliou na tradução do alemão.

Ao meu amigo Mateus Yano, que, além do vinho, me ajudou muito com o Latex.

Ao meu amigo Caio Mendes, que em vários momentos discutiu pontos relacionados ao meu trabalho.

À minha amiga Andrea Caitano, que fez a revisão deste texto.

Ao Murilo Marcondes, pela paciência com as minhas aporias existenciais. É sempre um aprendizado ouvir suas reflexões sobre música e literatura.

Aos camaradas das antigas: NB, Joãozinho e Alexandre.

Ao amigo Chico Nery, que, além dos excelentes conselhos, me alegra com seu entusiasmo contagiante pela geometria.

Ao meu amigo Lessa, pelo companheirismo.

À minha família: Maria Luiza de Assunção, José Paula de Assunção, Padrinho, Zezé, Edmur, Lu, Sandrinha, Rozani, Ricardo, Ludovic, Andreas, Rafael, Aline, Artur, Noah, Júlia e Paulina. Mesmo longe de casa, posso vê-los através de uma janela cheia de passarinhos.

À Cris, pelo amor e alegria.

# Sumário

<i>Introdução</i> . . . . .	11
<i>1. Tarski expressa Hilbert</i> . . . . .	15
1.1 Hilbert e os fundamentos da geometria . . . . .	16
1.2 Tarski e a geometria elementar . . . . .	22
1.3 Interpretação . . . . .	27
1.4 Prolegômenos . . . . .	36
1.5 As provas . . . . .	57
<i>2. Simplicidade da geometria hiperbólica</i> . . . . .	69
2.1 Um sistema axiomático para a geometria hiperbólica . . . . .	71
2.2 Um sistema axiomático simples . . . . .	102
<i>3. Revisitando o conceito de simplicidade</i> . . . . .	107
3.1 Simplificando via cisões . . . . .	108
3.2 Simplificando o sistema tarskiano: a terceira via . . . . .	113
<i>Referências</i> . . . . .	121



## Resumo

Esta dissertação examinará dois temas no âmbito da geometria elementar. O primeiro tratará da expressividade da geometria de Alfred Tarski. Serão fornecidas as condições para que as fórmulas da geometria proposta por David Hilbert possam ser interpretadas na linguagem da geometria tarskiana. Por meio dessa interpretação, será apresentada uma prova de que os axiomas do sistema de Hilbert são teoremas no sistema da geometria elementar de Tarski. O segundo tema abordará o conceito de simplicidade em geometrias à la Tarski. Lançaremos mão de um sistema de axiomas devido a Victor Pambuccian, relativo à geometria hiperbólica; e, utilizando o critério sintático de simplicidade, mostraremos que esse sistema é o mais simples. Para finalizar, uma exposição dos pontos de vista de Jesse Alama e T. J. M. Makarios sobre simplificações na geometria elementar absoluta.





# Abstract

This dissertation will examine two themes in the realm of elementary geometry. The first theme will deal with the expressiveness of Alfred Tarski's geometry. The conditions for which formulae in the language of geometry proposed by David Hilbert can be interpreted in the one proposed by Alfred Tarski will be provided. By means of this interpretation, it will be presented a proof that the axioms of Hilbert's system are theorems in the Tarski's elementary geometry system. The second theme will approach the concept of simplicity in Tarski like geometries. A system of axioms due to Victor Pambuccian which expresses the hyperbolic geometry is presented and, by using syntactical criterium of simplicity, it is shown that this system is the simplest possible. The dissertation ends with an exposition of points of view of Jesse Alama and T.J.M. Makarios about simplifications in elementary absolute geometry.



# Introdução

*Aprende então o que quero dizer com o outro segmento do inteligível, daquele que o raciocínio atinge pelo poder da dialética, fazendo das hipóteses não princípios, mas hipóteses de fato, uma espécie de degraus e de pontos de apoio, para ir até àquilo que não admite hipóteses, que é o princípio de tudo, atingindo o qual desce, fixando-se em todas as conseqüências que daí decorrem, até chegar à conclusão, sem se servir em nada de qualquer dado sensível, mas passando das ideias umas às outras, e terminando em ideias.*

Platão, *A República*, Livro VI

Os dois temas tratados nesta dissertação estão inseridos no ambiente da geometria elementar; e, tanto no caso euclidiano quanto no hiperbólico, essa geometria é entendida como aquele fragmento que pode ser formalizado no interior da lógica de primeira ordem. Trataremos desses temas em dois momentos distintos. No primeiro, que corresponde ao capítulo 1, analisaremos o poder expressivo dessa geometria. No segundo, que corresponde aos capítulos 2 e 3, veremos três versões de simplicidade.

Em 1978, Tarski escreve uma carta para Wolfram Schwabhäuser com a intenção de explicar as várias faces de sua geometria. Em 1999, Steven Givant publica um artigo composto desta carta e de alguns comentários. Em determinada altura, Givant observa que duas características afastam o sistema da geometria tarskiana dos demais sistemas: “a clara distinção entre toda geometria e sua parte elementar” e também “a simplicidade formal dos axiomas sobre os quais o desenvolvimento de sua geometria se baseia” (consulte [(GT99)], pág.191 e 192). Essa observação diz muito do ambiente em que nos movimentaremos e no qual este texto será construído.

No capítulo 1, mostraremos que, em certa medida, Tarski prova Hilbert; ou seja, veremos que os axiomas da geometria absoluta de Hilbert são teoremas na geometria elementar

de Tarski. Para esse momento, as referências básicas serão os livros *Fundamentos da Geometria*, de David Hilbert, e *Metamathematische Methoden in Der Geometrie*, iniciado por Tarski e Wanda Szmielew e concluído por Wolfram Schwabhäuser. Não poderíamos deixar de mencionar o pequeno texto *Proving Hilbert's axioms in Tarski geometry*, de Michael Beeson, que na fase inicial deste trabalho fez o papel de guia.

Inicialmente, explicitaremos os dois sistemas de axiomas (primeiro o de Hilbert, depois o de Tarski) e desenvolveremos um ambiente em que seja possível traduzir as fórmulas da geometria de Hilbert em fórmulas na geometria de Tarski. Em seguida, interpretaremos as fórmulas da geometria de Hilbert (que foram construídas numa linguagem trissortida) na geometria tarskiana (na qual a linguagem é unissortida). Aqui também devemos destacar o empréstimo que fizemos de uma definição que está no livro *La théorie des modèles en peu de mots*, de Daniel Lascar. Mais precisamente, no capítulo sobre jogos de linguagem, ao falar sobre estruturas interpretáveis, Lascar nos forneceu uma definição que permitiu precisar como interpretar fórmulas de linguagens diferentes. Fizemos uma adaptação dessa definição para o nosso ambiente Hilbert-Tarski. Solucionado o problema da interpretação, começaremos a fazer geometria em primeira ordem. Nos prolegômenos, provamos uma grande quantidade de lemas. Destaco os lemas 1.4.41 e 1.4.44, que permitiram melhorar a prova do axioma de Pasch. Encerramos o capítulo 1 com as provas dos axiomas de Hilbert na geometria tarskiana. Nesse momento, fizemos com detalhes a parte da geometria absoluta. Dessas provas destaco a do axioma 1.1.10 (axioma de Pasch).

No capítulo 2, examinaremos o conceito de simplicidade em geometrias à la Tarski. Veremos como opera a definição de simplicidade sintática no âmbito da geometria hiperbólica. Aqui a nossa referência primeira será o artigo *The simplest axiom system for plane hyperbolic geometry*, de Victor Pambuccian. Inicialmente, veremos que um dos sistemas de axiomas fornecidos por Pambuccian consegue expressar a geometria hiperbólica plana. Existe, nessa parte, uma semelhança com o que fizemos nos prolegômenos do capítulo 1. Também há uma grande quantidade de lemas. Destaco o lema 2.1.10 (toda linha tem, pelo menos, cinco pontos) e o lema 2.1.28 (sobre a transitividade da relação de congruência entre segmentos). Por fim, através do retorno que Pambuccian faz ao próprio artigo, examinaremos um sistema axiomático que pode ser dito o mais simples. Aqui, enunciamos a definição de simplicidade devida a Pambuccian e provamos o teorema 2.2.2, que nos dará um sistema axiomático simples para a geometria hiperbólica.

No capítulo 3, daremos continuidade ao tema da simplicidade e examinaremos mais dois pontos de vista. Em primeiro lugar, por meio da decomposição de alguns axiomas, veremos que é possível tornar um sistema ainda mais simples. Revisitaremos o capítulo 2, agora acompanhados do artigo *The simplest axiom system for hyperbolic geometry revisited, again*, de Jesse Alama. Explicitaremos algumas dependências no sistema axiomático que Pambuccian já mostrara, no final do capítulo 2, ser o mais simples (no sentido sintático). Assim, de um outro ponto de vista, exibiremos um sistema mais simples ainda. Por fim, através da remoção de um axioma e de uma permutação em outro, veremos que se pode obter uma simplificação num sistema axiomático. Aqui revisitaremos o sistema axiomático que aparece no capítulo 1 e usaremos resultados que já havíamos provado lá. Nesse momento, estaremos acompanhados do artigo *A Further Simplification of Tarski's Axioms of Geometry*, de T. J. M. Makarios.

Na conclusão, faremos um breve comentário sobre o que conseguimos examinar e apontaremos alguns aspectos da geometria elementar que podem ser investigados numa outra oportunidade.



## Tarski expressa Hilbert

Neste capítulo, mostraremos que é possível expressar os axiomas da geometria absoluta de Hilbert a partir do sistema axiomático de Tarski. Muito do que fizemos deve-se principalmente ao texto [(Bee)] e ao livro [(SST83)]. Os argumentos em quase todas as proposições foram melhorados. Movimentamos os lemas e as definições de modo a obter, em certa medida, demonstrações mais claras e completas. Inicialmente, apresentaremos o sistema axiomático de Hilbert. Todos os axiomas desse sistema estão em linguagem natural. Na segunda seção daremos destaque para o sistema de axiomas de Tarski. Nesse caso, todos os axiomas serão expressos em linguagem de primeira ordem. Depois esclareceremos como interpretar termos e fórmulas nas linguagens dessas duas teorias. Em seguida, ao preparar o terreno para as provas futuras, faremos um pouco de geometria no interior do sistema tarskiano. Por fim, mostraremos que Tarski prova Hilbert.

## 1.1 Hilbert e os fundamentos da geometria

*One must be able to say at all times—instead of points, straight lines, and planes—tables, chairs, and beer mugs.*

atribuído a Hilbert, conforme [(Rei70)]

Em *Grundlagen Der Geometrie*, um clássico da literatura matemática, Hilbert apresenta um sistema de axiomas para a geometria euclidiana livre das falhas que existiam em *Os Elementos*, de Euclides. Na base dessa obra estão os termos primitivos, as relações não definidas e os cinco grupos de axiomas. Do ponto de vista da lógica, trata-se de uma teoria trissortida; isto é, a linguagem dessa geometria tem três classes de termos primitivos: a classe dos **pontos**, a das **retas** e a dos **planos**. Existem entre essas classes as seguintes relações: **incidência**, **ordem** e **congruência**. E, por fim, há regras de como essas classes se relacionam, formuladas por Hilbert nos seguintes grupos de axiomas:

Os axiomas de 1.1.1 até 1.1.6 são de incidência. Neles, Hilbert dá as regras de como os termos primitivos estão envolvidos pela relação *estar em*.

**Axioma 1.1.1.** *Para cada dois pontos  $A, B$  há sempre uma reta  $a$  que está associada com cada um dos dois pontos  $A, B$ .*

**Axioma 1.1.2.** *Para dois pontos  $A, B$  não há mais do que uma reta que está associada com cada um dos dois pontos  $A, B$ .*

**Axioma 1.1.3.** *Sobre uma reta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta.*

**Axioma 1.1.4.** *Para quaisquer três pontos  $A, B, C$  que não estão sobre uma mesma reta, há sempre um plano  $\alpha$ , que está associado com qualquer dos três pontos  $A, B, C$ . Para cada plano há sempre um ponto que está associado com ele.*

**Axioma 1.1.5.** *Para cada três pontos que não estão sobre uma mesma reta, não há mais do que um plano que está associado com qualquer dos três pontos  $A, B, C$ .*

**Axioma 1.1.6.** *Se dois pontos  $A, B$  de uma reta  $a$  estão num plano  $\alpha$ , então cada ponto de  $a$  está no plano  $\alpha$ .*



Os axiomas de 1.1.7 até 1.1.10 são de ordem. Neles, Hilbert dá as regras de como devemos tratar a relação *estar entre* que envolve pontos.

**Axioma 1.1.7.** *Se um ponto  $B$  está entre um ponto  $A$  e um ponto  $C$ , então  $A, B, C$  são três pontos distintos de uma reta, e  $B$  está também entre  $C$  e  $A$ .*

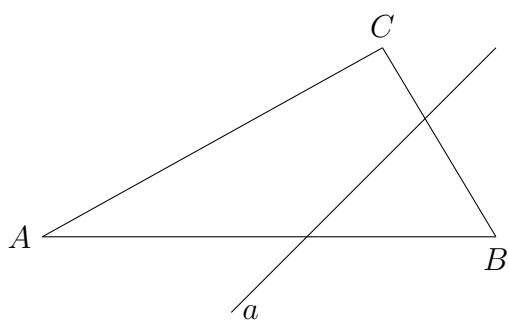


**Axioma 1.1.8.** *Para cada dois pontos  $A$  e  $C$  há sempre, pelo menos, um ponto  $B$  sobre a reta  $AC$  tal que  $C$  está entre  $A$  e  $B$ .*



**Axioma 1.1.9.** *Dados três pontos quaisquer de uma reta, não há mais do que um que está entre os outros dois.*

**Axioma 1.1.10.** *Sejam  $A, B, C$  três pontos que não estão em linha reta e a uma reta do plano  $ABC$ , que não encontra nenhum dos pontos  $A, B, C$ ; se a reta  $a$  passa por um ponto do segmento  $AB$ , então, seguramente, passa também ou por um ponto do segmento  $AC$  ou por um ponto do segmento  $BC$ .*



**Teorema 1.1.11.** *Cada reta  $a$  que está num plano  $\alpha$  separa os pontos deste plano  $\alpha$  que não existem nela, em dois domínios nas seguintes condições: cada ponto  $A$  dum domínio determina com cada ponto  $B$  do outro domínio um segmento  $AB$  no interior do qual está um ponto da reta  $a$ ; pelo contrário, dois pontos quaisquer  $A$  e  $A'$  dum mesmo domínio determinam um segmento  $AA'$ , o qual não contém nenhum ponto de  $a$ .*

**Definição 1.1.12.** Dizemos que os pontos  $A, A'$  estão no plano  $\alpha$  dum mesmo lado da reta  $a$  e os pontos  $A, B$  estão no plano  $\alpha$  em lados opostos da reta  $a$ .

Os axiomas de 1.1.14 até 1.1.19 são de congruência. Neles, aprendemos quais são as regras que caracterizam termos definidos a partir dos primitivos. Por exemplo, veremos como se dá a relação de congruência entre segmentos (que serão definidos como um sistema de dois pontos).

**Definição 1.1.13.** Consideremos sobre uma reta  $a$  dois pontos  $A$  e  $B$ ; chamemos ao sistema dos dois pontos  $A$  e  $B$ , um **segmento** e representamo-lo por  $AB$  ou  $BA$ . Os pontos entre  $A$  e  $B$  chamam-se pontos do segmento  $AB$ , ou também **interiores** ao segmento  $AB$ ; os pontos  $A$  e  $B$  chamam-se pontos **extremos** do segmento  $AB$ . Todos os restantes pontos da reta  $a$  dizem-se exteriores ao segmento  $AB$ .

**Axioma 1.1.14.** Se  $A, B$  são dois pontos sobre uma reta  $a$  e se, além disso,  $A'$  é um ponto sobre a mesma ou outra reta  $a'$ , então pode encontrar-se sempre um ponto  $B'$  sobre um dado lado da reta  $a'$ , e a partir de  $A'$ , tal que o segmento  $AB$  é congruente com, ou igual, ao segmento  $A'B'$ , simbolicamente:

$$AB \equiv A'B'$$

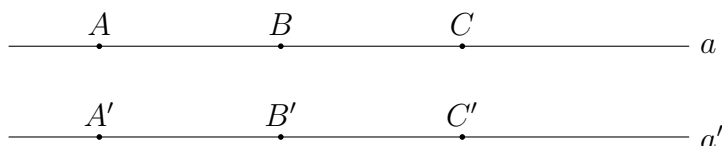
**Axioma 1.1.15.** Se um segmento  $A'B'$  e um segmento  $A''B''$  são congruentes com o mesmo segmento  $AB$ , então, também o segmento  $A'B'$  é congruente com o segmento  $A''B''$ ; ou, abreviadamente: se dois segmentos são congruentes com um terceiro, então são congruentes entre si.

**Axioma 1.1.16.** Sejam  $AB$  e  $BC$  dois segmentos, sem pontos comuns, sobre a reta  $a$  e sejam, além disso,  $A'B'$  e  $B'C'$  dois segmentos sobre a mesma ou sobre uma outra reta  $a'$ , e do mesmo modo sem pontos comuns; então se for:

$$AB \equiv A'B' \text{ e } BC \equiv B'C'$$

será também

$$AC \equiv A'C'$$



**Definição 1.1.17.** *Seja  $\alpha$  um plano qualquer, e sejam  $h, k$  duas semirretas quaisquer, diferentes, no plano  $\alpha$ , que partem do ponto  $O$  e que pertencem a retas distintas. Ao sistema dessas semirretas  $h, k$  chamamos **ângulo** e representamo-lo por  $\angle(h, k)$  ou por  $\angle(k, h)$ .*

*As semirretas  $h, k$  chamam-se **lados** do ângulo e o ponto  $O$  chama-se o **vértice** do ângulo.*

*Por essa definição são excluídos os ângulos raso e nulo.*

*Sejam  $\bar{h}$  a reta a que pertence a semirreta  $h$  e  $\bar{k}$  a reta a que pertence a semirreta  $k$ . As semirretas  $h$  e  $k$  tomadas juntamente com o ponto  $O$  repartem os restantes pontos do plano em dois domínios: de todos os pontos que estão com  $h$  do mesmo lado de  $\bar{k}$  e com  $k$  do mesmo lado de  $\bar{h}$ , diz-se que estão no **interior** do ângulo  $\angle(h, k)$ ; de todos os outros pontos diz-se que estão fora ou no **exterior** deste ângulo.*

**Axioma 1.1.18.** *Sejam dados um ângulo  $\angle(h, k)$  num plano  $\alpha$  e uma reta  $a'$  num plano  $\alpha'$  assim como um determinado lado de  $a'$  em  $\alpha'$ . Seja  $h'$  uma semirreta da reta  $a'$ , que parta do ponto  $O'$ . Então há no plano  $\alpha'$  uma, e uma só, semirreta  $k'$ , tal que o ângulo  $\angle(h, k)$  é congruente com, ou igual ao ângulo  $\angle(h', k')$  e, ao mesmo tempo, tal que todos os pontos interiores do ângulo  $\angle(h', k')$  estão no lado dado de  $a'$ ; simbolicamente:*

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

*Cada ângulo é congruente a si próprio, isto é, tem-se sempre*

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$$

**Axioma 1.1.19.** *Se para dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são válidas as congruências*

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

*então é sempre verificada também a congruência*

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

O ambiente que possui apenas os três grupos apresentados é conhecido como geometria absoluta. Se acrescentarmos o axioma 1.1.20 (também conhecido como axioma das paralelas), estaremos diante daquilo que se convencionou chamar geometria euclidiana. Aqui, para expressá-lo, Hilbert utiliza a versão de John Playfair.

**Axioma 1.1.20.** *(axioma de Euclides) Seja  $a$  uma reta qualquer e  $A$  um ponto exterior a  $a$ ; então, no plano determinado por  $a$  e  $A$ , há, no máximo, uma reta que passa por  $A$  e não corta  $a$ .*

Os axiomas 1.1.21 e 1.1.22 são os de continuidade.

**Axioma 1.1.21.** *(axioma da medida ou axioma de Arquimedes) Se  $AB$  e  $CD$  são dois segmentos quaisquer, então há na reta  $AB$  um número finito de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tais que os segmentos  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  são congruentes com o segmento  $CD$  e  $B$  está entre  $A$  e  $A_n$ .*

**Axioma 1.1.22.** *(axioma linear da completabilidade) Os pontos de uma reta constituem um sistema, com as suas relações de ordem e congruência, que já não pode ser ampliado, se se quer manter as relações entre os elementos originais bem como as propriedades fundamentais de ordem linear e congruência que resultam dos axiomas de 1.1.1 a 1.1.19 e 1.1.21.*

Se considerarmos apenas os axiomas de 1.1.1 até 1.1.21, teremos, de acordo com Giorgio Venturi, a condição necessária para uma formalização da geometria. E, nesse caso, podemos mostrar que um sistema de coordenadas definido no interior dessa geometria formará um corpo arquimediano. Então, estamos diante de uma aporia: de um lado, temos um corpo enumerável e, de outro, sabemos que a geometria analítica tem um domínio não enumerável. A superação dessa dificuldade e a consequente possibilidade de identificar a geometria expressa por esses axiomas com a geometria analítica se deram adicionando o axioma da completabilidade. Ele funcionará como a condição suficiente para uma boa formalização da geometria e, portanto, permitirá a Hilbert “definir axiomáticamente uma bijeção entre os pontos de uma linha reta e os números reais” [(Ven11)].

A diferença entre esse axioma e todos os demais pode ser visto no modo como ele é formulado. Enquanto todos os outros axiomas falam dos objetos do sistema (ponto, reta, segmento...) e das relações entre eles (incidência, estar entre e congruência), o axioma

---

da completabilidade tem um status metalógico; ou seja, o seu objeto é o próprio sistema axiomático e os seus possíveis modelos.

Para encerrar esse breve comentário sobre a função do axioma 1.1.22 na geometria de Hilbert, cito o excelente artigo de Eduardo Giovannini: “Na primeira edição dos Fundamentos da Geometria, Hilbert apresenta apenas o axioma de Arquimedes como axioma de continuidade. A partir da segunda edição ocorre a incorporação do axioma da completabilidade. Essa inclusão tem como consequência o fato de que a geometria analítica construída sobre os reais - ou seja, a geometria ‘cartesiana’ - torna-se o único ‘modelo’ numérico (a menos de isomorfismo) de seus axiomas para a geometria elementar.”[(Gio13)]

## 1.2 Tarski e a geometria elementar

*Thus, in our formalization of elementary geometry, only points are treated as individuals and are represented by (first-order) variables.*

[(Tar59)]

O primeiro desenvolvimento axiomático da geometria euclidiana foi dado em [(Hil03)]. A partir daí, surgiram vários esforços para *simplificar* o seu sistema; e, segundo [(Pam93)], o mais notável pela simplicidade da linguagem e dos axiomas foi o sistema proposto por Tarski.

A geometria elementar esteve presente em vários cursos e projetos de pesquisa desenvolvidos e coordenados por Tarski. Como podemos ver em [(GT99)], em 1926 e 1927, quando ainda era professor na Universidade de Varsóvia, Tarski deu um curso sobre um desenvolvimento axiomático da geometria euclidiana elementar. Entre 1955 e 1965, já em Berkeley, juntamente com alguns alunos, fez uma considerável simplificação no sistema de axiomas concebido inicialmente. Uma versão do sistema de axiomas que utilizaremos aqui é dessa época. Foi precisamente em 1959 que ele escreveu o artigo intitulado *What Is Elementary Geometry?*. Nele fica evidente que o modo de Tarski ver a geometria afasta-se radicalmente da tradição ligada à Os Elementos de Euclides. Para ele, a geometria elementar é “a parte da geometria euclidiana que pode ser formulada e estabelecida sem a ajuda de qualquer aparato da teoria dos conjuntos. Ela pode ser formalizada no interior do cálculo de predicados de primeira ordem” [(Tar59)]. Nesse artigo, como o próprio Tarski enfatiza, sua intenção não era fazer geometria. O que ele desejava era estabelecer uma formalização (e mostrou que há várias) para um certo fragmento da geometria euclidiana, de modo a obter alguns resultados metamatemáticos. Em um dos exemplos apresentados, ele consegue provar que a teoria construída é consistente, completa e decidível.

Depois de mais de cinco décadas de amadurecimento, o sistema de axiomas de Tarski chega, em 1983, à sua versão definitiva. Como podemos verificar na carta de [(GT99)], o livro *Metamathematische Methoden in Der Geometrie* foi o coroamento das pesquisas iniciadas por Tarski e Wanda Szmielew e concluídas por Wolfram Schwabhäuser. Os axiomas da geometria elementar a que vamos nos referir foram extraídos dessa obra e estão destacados após a descrição da linguagem.

Os símbolos lógicos da linguagem da geometria tarskiana são aqueles comuns a todas as linguagens de primeira ordem com igualdade:

Conectivos sentenciais:  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

Quantificadores:  $\forall, \exists$

Variáveis individuais:  $a, b, c, d, , x, y, z \dots$

Igualdade:  $=$

Os símbolos não lógicos (específicos dessa linguagem da geometria elementar) são apenas dois símbolos relacionais:

Predicado ternário:  $B$

Predicado quaternário:  $\equiv$

Esses dois símbolos serão usados para denotar as relações geométricas primitivas da geometria elementar. O primeiro denota a relação de *um ponto estar entre outros dois*. Isto é,  $B(xyz)$  pode ser lida como *y está entre x e z*. Já o segundo denota a relação geométrica de *congruência*. Isto é,  $xy \equiv zw$  pode ser lida como *x e y determinam um segmento congruente àquele determinado por z e w*.

Para facilitar as referências que faremos mais adiante, chamaremos de  $\mathcal{A}$  o conjunto dos axiomas abaixo:

$$A1: ab \equiv ba$$

$$A2: ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \longrightarrow pq \equiv rs$$

$$A3: ab \equiv cc \longrightarrow a = b$$

$$A4: \exists x(Bqax \wedge ax \equiv bc)$$

$$A5: a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \longrightarrow cd \equiv c'd'$$

$$A6: Baba \longrightarrow a = b$$

$$A7: Bapc \wedge Bbqc \longrightarrow \exists x(Bpxb \wedge Bqxa)$$

$$A8: \exists a \exists b \exists c (\neg Babc \wedge \neg Bbca \wedge \neg Bcab)$$

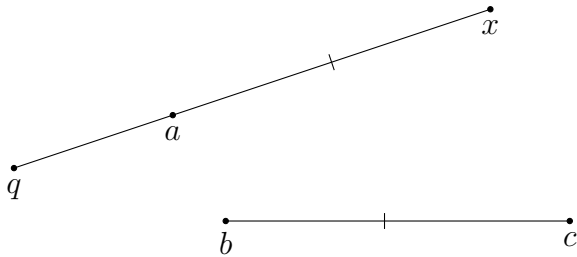
$$A9: p \neq q \wedge ap \equiv aq \wedge bp \equiv bq \wedge cp \equiv cq \longrightarrow Babc \vee Bbca \vee Bcab$$

$$A10: Badt \wedge Bbdc \wedge a \neq d \longrightarrow \exists x \exists y (Babx \wedge Bacy \wedge Bxty)$$

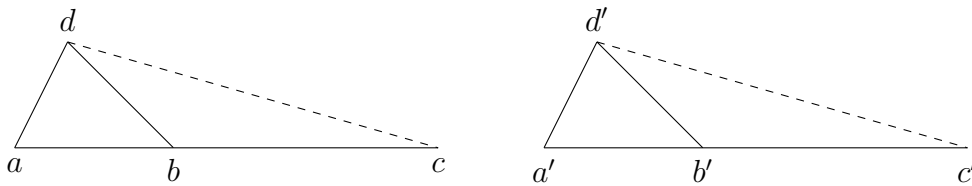
$$CA: Bcqp \wedge Bcpr \wedge ca \equiv cq \wedge cb \equiv cr \longrightarrow \exists x [cx \equiv cp \wedge Baxb]$$

Como podemos ver em [(GT99)] e também em [(Mak12)], os onze axiomas anteriores têm um nome e um certo significado intuitivo. Nos três primeiros, a única noção geométrica primitiva (não lógica) presente é a relação quaternária de *equidistância* (congruência de segmentos). O primeiro é chamado de axioma da reflexividade para equidistância, o segundo é o da transitividade e o terceiro é o da identidade.

O quarto axioma é chamado de axioma da construção de segmentos. Nele, além da já citada relação de congruência, temos a relação ternária de *estar entre*, que é a outra noção geométrica primitiva do sistema de Tarski. O conteúdo intuitivo desse axioma pode ser resumido do seguinte modo: “Dado um segmento  $bc$ , um ponto  $a$  e uma direção (de  $qa$ ), podemos construir um segmento  $ax$  congruente ao segmento dado” [(Mak12)]. Numa figura, teríamos:



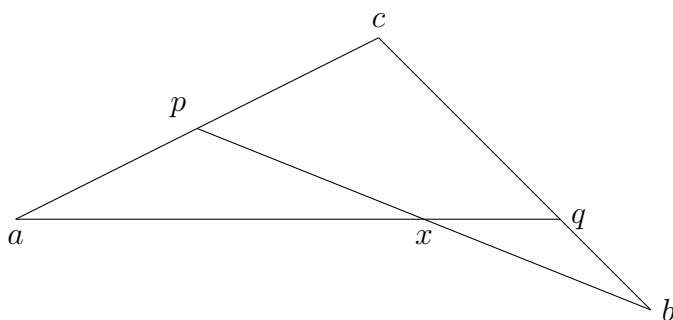
O quinto axioma é conhecido como axioma dos cinco segmentos. Aqui, há uma semelhança muito grande com os casos de congruência da geometria neutra. Lá, nos manuais de geometria, dadas algumas congruências entre lados e entre ângulos, era possível inferir outras congruências.



O sexto axioma garante que entre os pontos  $a$  e  $a$  só existe um ponto, a saber: o próprio  $a$ . Ele é chamado de axioma da identidade para o estar entre.

O sétimo axioma é o popular axioma de Pasch. Aqui, Tarski utiliza a versão interna desse axioma.



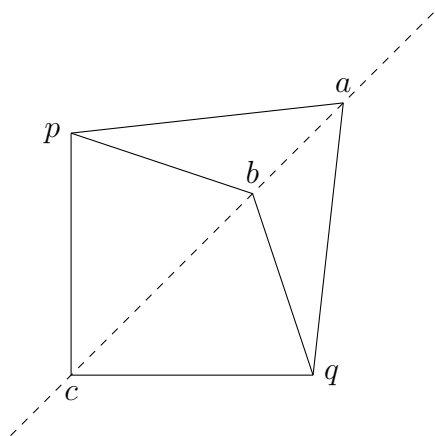


O conteúdo intuitivo desse axioma pode ser resumido, pelo menos nos casos não degenerados, afirmando-se que: uma linha cruzando um triângulo em um dos seus lados, e não passando por nenhum dos vértices, deve intersectar um dos outros dois lados. Sobre outras formulações e equivalências do axioma de Pasch, consultar [(Gup65)] e [(GT99)].

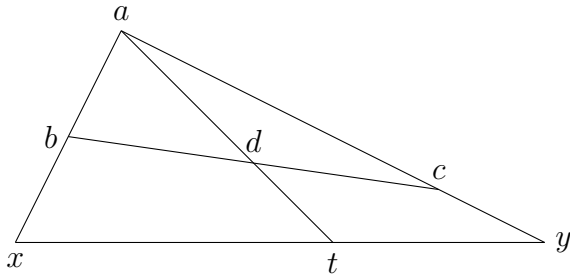
Esses sete primeiros axiomas formam o sistema axiomático da geometria absoluta livre de dimensões e sem o axioma da continuidade.

O oitavo axioma afirma que existem três pontos não colineares. Esse é o axioma da dimensão inferior e, como podemos ler em [(Mak12)], ele “garante que a geometria descrita por este sistema axiomático tem, pelo menos, duas dimensões”.

Informalmente, o nono axioma assegura que quaisquer três pontos  $a, b$  e  $c$  que são equidistantes de cada um dos pontos distintos  $p$  e  $q$  devem ser colineares. Esse é o axioma da dimensão superior e “garante que a geometria tenha, no máximo, duas dimensões” [(Mak12)].



O décimo axioma é o popular axioma euclidiano, mas sua formulação aqui não é a clássica de Playfair. Esse axioma “diz que através de qualquer ponto  $t$  no interior do ângulo  $\angle bac$  existe uma linha (aqui é a linha  $xy$ ) que intersecta ambos os lados do ângulo (aqui nos pontos  $x$  e  $y$ )” [(GT99)]. Numa figura, temos:



O último axioma do sistema é o conhecido axioma da continuidade. Como podemos ver em [(SST83)], a sua formulação inicial, que lá é  $A11$ , está expressa em segunda ordem por:

$$\forall X \forall Y \{ \exists a \forall x \forall y [x \in X \wedge y \in Y \rightarrow Baxy] \rightarrow \exists b \forall x \forall y [x \in X \wedge y \in Y \rightarrow Bxby] \}$$

Tarski substituiu  $A11$  por um esquema infinito de axiomas em primeira ordem dados por:

$$\exists a \forall x \forall y [\alpha(x) \wedge \beta(y) \rightarrow Baxy] \rightarrow \exists b \forall x \forall y [\alpha(x) \wedge \beta(y) \rightarrow Bxby]$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são fórmulas em primeira ordem tais que  $\alpha$  não tem ocorrências livres de  $a, b$  ou  $y$ , e  $\beta$  não tem ocorrências livres de  $a, b$  ou  $x$ .

Uma instância desse esquema é o nosso axioma  $CA$ . Para maiores esclarecimentos consultar [(GT99)] e [(Mak12)].

### 1.3 Interpretação

*Une structure définissable dans  $M$  est en quelque sorte présente dans  $M$ . Il y a des structures plus subtilement cachées dans  $M$ . Par exemple, on peut reconstruire le corps  $K$  à partir de  $GL_2(K)$  uniquement à l'aide d'opérations "du premier ordre": on dit que  $K$  est interprétable dans  $GL_2(K)$ . Il est intéressant de savoir quelles sont les structures interprétables dans une structure donnée.*

[(Las09)]

Nossa primeira tarefa nesta dissertação será mostrar que os axiomas da geometria de Hilbert são teoremas na geometria elementar de Tarski. Para tanto, será necessário interpretar a linguagem de Hilbert na linguagem de Tarski. Mas o que é interpretar uma linguagem numa outra? Essencialmente, consiste em escrever para cada fórmula  $\phi_{\mathbb{H}}$  do sistema  $\mathbb{H}$  de Hilbert uma fórmula  $\phi_{\mathbb{T}}$  do sistema  $\mathbb{T}$  de Tarski, de modo que as operações booleanas em  $\mathbb{H}$  (com as  $\phi_{\mathbb{H}}$ ) e em  $\mathbb{T}$  (com as  $\phi_{\mathbb{T}}$ ) sejam invariantes sob essa interpretação; ou seja, o mapa que envia as noções primitivas e fórmulas de uma teoria na outra deve preservar provabilidade.

Veremos, no plano teórico, através da definição 1.3.3, como interpretar uma linguagem trissortida numa unissortida. Por enquanto, seguindo os passos de [(Bee)], faremos uma partição no conjunto das variáveis de  $\mathbb{T}$ . A ideia consiste em particionar o conjunto das variáveis da linguagem tarskiana em vários subconjuntos disjuntos. Reservaremos um conjunto de variáveis para interpretar os pontos de Hilbert, outro para interpretar as retas de Hilbert, e assim por diante. Procedendo dessa forma, evitaremos a colisão entre variáveis durante a interpretação. Para obter uma partição disjunta, basta lançar mão do conceito aritmético da *congruência módulo  $n$* . Suponhamos que  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sejam as variáveis em  $\mathbb{T}$ . A seguir, daremos alguns exemplos que ajudarão a ilustrar melhor essa ideia.

**Exemplo 1.3.1.** As variáveis em  $\mathbb{T}$  cujos índices são congruentes a 0 mod 13 serão reservadas para interpretar as variáveis pontos de  $\mathbb{H}$ . Ou seja, usaremos as variáveis  $t_0, t_{13}, t_{26}, t_{39}, t_{52}, t_{65}, \dots$

**Exemplo 1.3.2.** As duplas de variáveis em  $\mathbb{T}$  cujos índices são congruentes a 1 mod 13 e a 2 mod 13 serão reservadas para interpretar as variáveis retas de  $\mathbb{H}$ . Usaremos, então, as variáveis  $t_1, t_2, t_{14}, t_{15}, t_{27}, t_{28}, \dots$

**Exemplo 1.3.3.** As triplas de variáveis em  $\mathbb{T}$  cujos índices são congruentes a 3 mod 13, a 4 mod 13 e a 5 mod 13 serão reservadas para interpretar as variáveis planos de  $\mathbb{H}$ . Assim, utilizaremos as variáveis  $t_3, t_4, t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18}, \dots$

**Exemplo 1.3.4.** As duplas de variáveis em  $\mathbb{T}$  cujos índices são congruentes a 6 mod 13 e a 7 mod 13 serão reservadas para interpretar as variáveis segmentos de  $\mathbb{H}$ . Ou seja, usaremos as variáveis  $t_6, t_7, t_{19}, t_{20}, t_{32}, t_{33}, \dots$

**Exemplo 1.3.5.** As duplas de variáveis em  $\mathbb{T}$  cujos índices são congruentes a 8 mod 13 e a 9 mod 13 serão reservadas para interpretar as variáveis semilinhas de  $\mathbb{H}$ . Serão empregadas as variáveis  $t_8, t_9, t_{21}, t_{22}, t_{34}, t_{35}, \dots$

**Exemplo 1.3.6.** As triplas de variáveis em  $\mathbb{T}$  cujos índices são congruentes a 10 mod 13, a 11 mod 13 e a 12 mod 13 serão reservadas para interpretar as variáveis ângulos de  $\mathbb{H}$ . Assim, serão utilizadas as variáveis  $t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{23}, t_{24}, t_{25}, \dots$

**Exemplo 1.3.7.** (ponto, reta, plano) Sejam  $h_0, L_0, P_0$  variáveis em  $\mathbb{H}$  para pontos, retas e planos, respectivamente. Então, teremos os seguintes mapas:

$$h_0 \mapsto t_0$$

$$L_0 \mapsto (t_1, t_2)$$

$$P_0 \mapsto (t_3, t_4, t_5)$$

**Exemplo 1.3.8.** (estar entre) Sejam  $B_{\mathbb{H}}$  e  $B_{\mathbb{T}}$  as relações de estar entre em Hilbert e Tarski, respectivamente. Sabemos que, em Hilbert, essa relação é estrita. Já em Tarski ela comporta os casos degenerados. Então, cada relação  $B_{\mathbb{H}}(h_0, h_1, h_2)$ , pertencente à linguagem de Hilbert, será mapeada na relação  $B_{\mathbb{T}}(t_0, t_{13}, t_{26}) \wedge t_0 \neq t_{13} \wedge t_0 \neq t_{26} \wedge t_{13} \neq t_{26}$ , que pertence à linguagem de Tarski.

**Exemplo 1.3.9.** (colinearidade) A relação de colinearidade é definida por:

$$Col(a, b, c) := B(a, b, c) \vee B(b, c, a) \vee B(c, a, b).$$

Sejam  $Col_{\mathbb{H}}$  e  $Col_{\mathbb{T}}$  as relações de colinearidade em Hilbert e Tarski, respectivamente.

Então, temos o seguinte mapa:

$$Col_{\mathbb{H}}(h_0, h_1, h_2) \mapsto Col_{\mathbb{T}}(t_0, t_{13}, t_{26}) \wedge t_0 \neq t_{13} \wedge t_0 \neq t_{26} \wedge t_{13} \neq t_{26}$$

Para formalizar e dar um pouco mais de rigor a essa noção de interpretação entre linguagens nos apoiaremos agora em ([Las09], pág. 178 e 179). É de lá que extraímos a seguinte

**Definição 1.3.1.** *Sejam  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}'$  duas linguagens e  $\mathbb{T}$  uma teoria em  $\mathcal{L}$ . Uma interpretação  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{L}'$  em  $\mathbb{T}$  é dada por :*

- *um inteiro  $n$*
- *uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $U[v_1, v_2, \dots, v_n]$  com  $n$  variáveis livres.*
- *uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $E[\overline{w}_1, \overline{w}_2]$  com  $2n$  variáveis livres ( tanto  $\overline{w}_1$  quanto  $\overline{w}_2$  representam seqüências com  $n$  variáveis);*
- *uma fórmula  $F_c[v_1, v_2, \dots, v_n]$  de  $\mathcal{L}$  para cada símbolo de constante  $c$  de  $\mathcal{L}'$ ;*
- *uma fórmula  $F_R[\overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_k]$  com  $k.n$  variáveis livres para cada símbolo de relação  $R$  de aridade  $k$  de  $\mathcal{L}'$ ;*
- *uma fórmula  $F_f[\overline{w}_0, \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_k]$  com  $(k + 1).n$  variáveis livres para cada símbolo de função  $f$  de aridade  $k$  de  $\mathcal{L}'$ .*

*Todas satisfazendo as seguintes propriedades (as expressões entre aspas que aparecem logo após o símbolo  $\vdash$  representam fórmulas de primeira ordem que o leitor explicitará se sentir necessidade):*

- (1°).  $\mathbb{T} \vdash$  “ $E$  é uma relação de equivalência”;
- (2°).  $\mathbb{T} \vdash$  “ $U$  é uma união de  $E$ -classes”;
- (3°). Para todo símbolo de constante  $c$  de  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathbb{T} \vdash$  “o conjunto que interpreta  $F_c$  é uma classe módulo  $E$ ”;
- (4°). Para todo inteiro  $k$  e para todo símbolo de relação  $R$  de aridade  $k$  de  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathbb{T} \vdash$  “ $F_R$  é interpretada por um conjunto fechado para a relação  $E$ ”;
- (5°). Para todo inteiro  $k$  e para todo símbolo de função  $f$  de aridade  $k$  de  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathbb{T} \vdash$  “ $F_f$  é interpretada pelo gráfico de uma aplicação de aridade  $k$  sobre o conjunto das classes módulo  $E$ ”

Em nosso ambiente (de linguagens com sortes diferentes) será necessário reformular essa definição para que possamos interpretar a linguagem  $\mathcal{L}'$  de Hilbert na teoria  $\mathbb{T}$  de Tarski, cuja linguagem é  $\mathcal{L}$ . Para cumprir essa tarefa, vamos, heurísticamente, examinar alguns dos ingredientes da linguagem  $\mathcal{L}'$  de Hilbert. A assinatura dessa linguagem é composta apenas de símbolos de relações, já que tanto o conjunto dos símbolos de constantes quanto o conjunto dos símbolos de funções são vazios. Outro ponto que deve ser observado é que a aridade aqui não é exatamente um inteiro, mas uma tripla de inteiros, onde na primeira entrada aparecerá a quantidade de pontos, na segunda a de retas e na terceira a de planos. Assim, os símbolos de relação, que tratam de incidência, estar entre e congruência, serão equipados da seguinte maneira:

A relação de incidência  $\in_i$ , com  $i = 1$  para *ponto incide na reta*,  $i = 2$  para *ponto incide no plano* e  $i = 3$  para *reta incide no plano*. Desse modo, teremos as seguintes aridades:

$$ar(\in_1) = (1, 1, 0) = 1 \text{ ponto e } 1 \text{ reta}$$

$$ar(\in_2) = (1, 0, 1) = 1 \text{ ponto e } 1 \text{ plano}$$

$$ar(\in_3) = (0, 1, 1) = 1 \text{ reta e } 1 \text{ plano}$$

Para as relações de estar entre  $B_{\mathbb{H}}$  e congruência  $\equiv_{\mathbb{H}}$ , teremos:

$$ar(B_{\mathbb{H}}) = (3, 0, 0) = 3 \text{ pontos}$$

$$ar(\equiv_{\mathbb{H}}) = (4, 0, 0) = 4 \text{ pontos}$$

Prosseguindo, como será uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $U[v_1, v_2, \dots, v_n]$ ? Novamente, por causa das várias sortes, teremos o seguinte:

uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $U_1[v_1, v_2, \dots, v_{s_1}]$  com  $n_1$  variáveis livres;

uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $U_2[v_1, v_2, \dots, v_{s_2}]$  com  $n_2$  variáveis livres;

uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $U_3[v_1, v_2, \dots, v_{s_3}]$  com  $n_3$  variáveis livres.

E a  $\mathcal{L}$ -fórmula  $E[\overline{w_1}, \overline{w_2}]$ , como ficará? Aqui, também, teremos:

uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $E_1[\overline{w_1}, \overline{w_2}]$  com  $2n_1$  variáveis livres;

uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $E_2[\overline{w_1}, \overline{w_2}]$  com  $2n_2$  variáveis livres;

uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $E_3[\overline{w_1}, \overline{w_2}]$  com  $2n_3$  variáveis livres.

Nessas três fórmulas, tanto  $\overline{w_1}$  quanto  $\overline{w_2}$  representam sequências com  $n_i$  variáveis, para  $i = 1, 2, 3$ , respectivamente.

Por fim, como será uma fórmula  $F_R[\overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_k]$ ? Para compreender melhor, vejamos alguns casos.

Considere  $R$  como o símbolo de relação para o estar entre  $(B_{\mathbb{H}} \mapsto B_{\mathbb{T}})$ , a congruência  $(\equiv_{\mathbb{H}} \mapsto \equiv_{\mathbb{T}})$  e a incidência  $(\in_i)$ . Nesses casos, teremos o seguinte:

$$B_{\mathbb{H}}(h_0, h_1, h_2) \mapsto F_{B_{\mathbb{H}}}(t_0, t_{13}, t_{26}) := B_{\mathbb{T}}(t_0, t_{13}, t_{26}) \wedge (t_0 \neq t_{13}) \wedge (t_0 \neq t_{26}) \wedge (t_{13} \neq t_{26})$$

$$h_0 \mapsto \overline{w}_1 = t_0, \quad h_1 \mapsto \overline{w}_2 = t_{13}, \quad h_2 \mapsto \overline{w}_3 = t_{26}$$

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 3, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 k_i n_i = 3.1 + 0.2 + 0.3 = 3$$

$$\equiv_{\mathbb{H}}(h_0, h_1, h_2, h_3) \mapsto F_{\equiv_{\mathbb{H}}}(t_0, t_{13}, t_{26}, t_{39}) := \equiv_{\mathbb{T}}(t_0, t_{13}, t_{26}, t_{39}) \wedge (t_0 \neq t_{13}) \wedge (t_{26} \neq t_{39})$$

$$h_0 \mapsto \overline{w}_1 = t_0, \quad h_1 \mapsto \overline{w}_2 = t_{13}, \quad h_2 \mapsto \overline{w}_3 = t_{26}, \quad h_3 \mapsto \overline{w}_4 = t_{39}$$

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 3, \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 k_i n_i = 4.1 + 0.2 + 0.3 = 4$$

$$\in_1(h_0, L_0) \mapsto F_{\in_1}(\overbrace{t_0}^{\overline{w}_1}, \overbrace{t_1, t_2}^{\overline{w}_2}) := Col_{\mathbb{T}}(t_0, t_1, t_2) \wedge (t_1 \neq t_2)$$

$$h_0 \mapsto \overline{w}_1 = t_0, \quad L_0 \mapsto \overline{w}_2 = (t_1, t_2)$$

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 3, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 k_i n_i = 1.1 + 1.2 + 0.3 = 3$$

$$\in_2(h_0, P_0) \mapsto F_{\in_2}(\overbrace{t_0}^{\overline{w}_1}, \overbrace{t_3, t_4, t_5}^{\overline{w}_2}) := Cp_{\mathbb{T}}(t_0, t_3, t_4, t_5) \wedge \neg Col_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5)$$

$$h_0 \mapsto \overline{w}_1 = t_0, \quad P_0 \mapsto \overline{w}_2 = (t_3, t_4, t_5)$$

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 3, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 k_i n_i = 1.1 + 2.0 + 3.1 = 4$$

**Observação 1.3.2.** *Estamos utilizando a notação  $Cp_{\mathbb{T}}(t_1, t_3, t_4, t_5)$  para expressar os casos em que os quatro pontos  $t_1, t_3, t_4, t_5$  são coplanares. (veja definição 1.4.47)*

$$\in_3 (L_0, P_0) \mapsto F_{\in_3}(\overbrace{t_1, t_2}^{\overline{w_1}}, \overbrace{t_3, t_4, t_5}^{\overline{w_2}}) := Cp_{\mathbb{T}}(t_1, t_3, t_4, t_5) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_2, t_3, t_4, t_5) \wedge (t_1 \neq t_2) \wedge \neg Col_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5)$$

$$L_0 \mapsto \overline{w_1} = (t_1, t_2), \quad P_0 \mapsto \overline{w_2} = (t_3, t_4, t_5)$$

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 3, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 k_i n_i = 0.1 + 1.2 + 1.3 = 5$$

Vale observar que, nesses exemplos, a somatória  $\sum_{i=1}^3 k_i n_i$  representa o número de variáveis livres para cada símbolo de relação  $R$  ( $\in_i$  ou  $\equiv_{\mathbb{H}}$  ou  $B_{\mathbb{H}}$ ) de aridade  $(k_1, k_2, k_3)$  de  $\mathcal{L}'$ .

Agora, de acordo com a definição 1.3.1, as fórmulas anteriores devem satisfazer algumas condições. A primeira diz que  $\mathbb{T} \vdash “E$  é uma relação de equivalência”;

que, em no nosso ambiente, deverá ser substituída por  $\mathbb{T} \vdash “E_i$  é uma relação de equivalência”, com  $i = 1, 2, 3$ . Cheguemos um pouco mais perto:

$$E_1(\overbrace{t_0}^{\overline{w_1}}, \overbrace{t_{13}}^{\overline{w_2}}) := (t_0 \simeq t_{13}) \text{ (O ponto } t_0 \text{ é igual ao ponto } t_{13})$$

$$E_2(\overbrace{t_1, t_2}^{\overline{w_1}}, \overbrace{t_{14}, t_{15}}^{\overline{w_2}}) := Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_{14}, t_{15}) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_2, t_{14}, t_{15}) \text{ (A reta } (t_1, t_2) \text{ é igual à reta } (t_{14}, t_{15})).$$

No ambiente tarskiano, ao contrário do que ocorre em Hilbert, as retas serão definidas (Veja a definição 1.4.22).

$$E_3(\overbrace{t_3, t_4, t_5}^{\overline{w_1}}, \overbrace{t_{16}, t_{17}, t_{18}}^{\overline{w_2}}) := Cp_{\mathbb{T}}(t_3, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_4, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18}). \text{ (O plano } (t_3, t_4, t_5) \text{ é igual ao plano } (t_{16}, t_{17}, t_{18})).$$

Tarki também definirá o plano (veja a definição 1.4.46).

Assim, o que devemos fazer é mostrar que:

(1°)  $\mathbb{T} \vdash “E_1$  é uma relação de equivalência”

De fato, já que valem as três condições:

$$(1) \mathbb{T} \vdash E_1(t_0, t_0), \text{ pois } t_0 \simeq t_0$$

$$(2) \mathbb{T} \vdash E_1(t_0, t_{13}) \rightarrow E_1(t_{13}, t_0), \text{ pois } t_0 \simeq t_{13} \rightarrow t_{13} \simeq t_0$$

$$(3) \mathbb{T} \vdash E_1(t_0, t_{13}) \wedge E_1(t_{13}, t_{26}) \rightarrow E_1(t_0, t_{26}), \text{ pois } (t_0 \simeq t_{13}) \wedge (t_{13} \simeq t_{26}) \rightarrow t_0 \simeq t_{26}$$

(2°)  $\mathbb{T} \vdash “E_2$  é uma relação de equivalência”

De fato, já que valem as três condições:

$$(1) \mathbb{T} \vdash E_2(t_1, t_2, t_1, t_2), \text{ pois, } Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_1, t_2) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_2, t_1, t_2) \text{ (o resultado que sustenta}$$

essa afirmação será demonstrado no lema 1.4.7(i)).



(2)  $\mathbb{T} \vdash E_2(t_1, t_2, t_{14}, t_{15}) \rightarrow E_2(t_{14}, t_{15}, t_1, t_2)$ , pois  $Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_2, t_{14}) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_2, t_{15}) \rightarrow Col_{\mathbb{T}}(t_{14}, t_{15}, t_1) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_{14}, t_{15}, t_2)$  (o resultado que sustenta essa afirmação será demonstrado no lema 1.4.8).

(3)  $\mathbb{T} \vdash E_2(t_1, t_2, t_{14}, t_{15}) \wedge E_2(t_{14}, t_{15}, t_{27}, t_{28}) \rightarrow E_2(t_1, t_2, t_{27}, t_{28})$ , pois  $Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_2, t_{14}) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_2, t_{15}) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_{14}, t_{15}, t_{27}) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_{14}, t_{15}, t_{28}) \rightarrow Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_2, t_{27}) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_2, t_{28})$  (veja o lema 1.4.8).

(3º)  $\mathbb{T} \vdash$  “ $E_3$  é uma relação de equivalência”

De fato, já que valem as três condições:

(1)  $\mathbb{T} \vdash E_3(t_3, t_4, t_5, t_3, t_4, t_5)$ , pois  $Cp_{\mathbb{T}}(t_3, t_3, t_4, t_5) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_4, t_3, t_4, t_5) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_5, t_3, t_4, t_5)$  (veja lema 1.4.50)

(2)  $\mathbb{T} \vdash E_3(t_3, t_4, t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \rightarrow E_3(t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_3, t_4, t_5)$ , pois  $Cp_{\mathbb{T}}(t_3, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_4, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \rightarrow Cp_{\mathbb{T}}(t_{16}, t_3, t_4, t_5) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_{17}, t_3, t_4, t_5) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_{18}, t_3, t_4, t_5)$  (veja o lema 1.4.50).

(3)  $\mathbb{T} \vdash E_3(t_3, t_4, t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge E_3(t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{29}, t_{30}, t_{31}) \rightarrow E_3(t_3, t_4, t_5, t_{29}, t_{30}, t_{31})$ , pois  $Cp_{\mathbb{T}}(t_3, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_4, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_{16}, t_{29}, t_{30}, t_{31}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_{17}, t_{29}, t_{30}, t_{31}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_{18}, t_{29}, t_{30}, t_{31}) \rightarrow Cp_{\mathbb{T}}(t_3, t_{29}, t_{30}, t_{31}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_4, t_{29}, t_{30}, t_{31}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_5, t_{29}, t_{30}, t_{31})$  (veja o lema 1.4.50).

A segunda condição que as fórmulas devem satisfazer é  $\mathbb{T} \vdash$  “ $U$  é uma união de  $E$ -classes”, que será reformulada para  $\mathbb{T} \vdash$  “ $U_i$  é uma união de  $E_i$ -classes”, com  $i = 1, 2, 3$ . Mas o que seriam essas  $U_i$  nesse ambiente? A  $U_1(t_0)$  define o ponto (ou seja,  $U_1(t_0) := t_0 \simeq t_0$ ), a  $U_2(t_1, t_2)$  define a reta (ou seja,  $U_2(t_1, t_2) := t_1 \not\approx t_2$ ) e a  $U_3(t_3, t_4, t_5)$  define o plano (ou seja,  $U_3(t_3, t_4, t_5) = \neg Col_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5)$ ).

Agora, devemos mostrar que:

(1º)  $\mathbb{T} \vdash$  “ $U_1$  é uma união de  $E_1$ -classes”

De fato, já que vale  $\mathbb{T} \vdash U_1(t_0) \wedge E_1(t_0, t_{13}) \rightarrow U_1(t_{13})$ , pois  $t_0 \simeq t_0 \wedge t_0 \simeq t_{13} \rightarrow t_{13} \simeq t_{13}$

(2º)  $\mathbb{T} \vdash$  “ $U_2$  é uma união de  $E_2$ -classes”

De fato, já que vale  $\mathbb{T} \vdash U_2(t_1, t_2) \wedge E_2(t_1, t_2, t_{14}, t_{15}) \rightarrow U_2(t_{14}, t_{15})$ , pois  $t_1 \not\approx t_2 \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_1, t_{14}, t_{15}) \wedge Col_{\mathbb{T}}(t_2, t_{14}, t_{15}) \rightarrow t_{14} \not\approx t_{15}$

(3º)  $\mathbb{T} \vdash$  “ $U_3$  é uma união de  $E_3$ -classes”

De fato, já que vale  $\mathbb{T} \vdash U_3(t_3, t_4, t_5) \wedge E_3(t_3, t_4, t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \rightarrow U_3(t_{16}, t_{17}, t_{18})$ , pois  $\neg Col_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_3, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_4, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18}) \rightarrow \neg Col_{\mathbb{T}}(t_{16}, t_{17}, t_{18})$

A terceira condição que as fórmulas devem satisfazer é que, para todo inteiro  $k$  e para todo símbolo de relação  $R$  de aridade  $k$  de  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathbb{T} \vdash$  “ $F_R$  é interpretada por um conjunto fechado para a relação  $E$ ”. Aqui essa última condição será reformulada. Basicamente, será preciso trocar  $k$  por  $(k_1, k_2, k_3)$  e  $E$  por  $E_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Assim, por exemplo, para os símbolos de relações  $\in_1, \in_2$  e  $\in_3$ , o que a condição exige é:

$$T \vdash (F_{\in_1}(t_0, t_1, t_2) \wedge E_1(t_0, t_{13}) \wedge E_2(t_1, t_2, t_{14}, t_{15})) \rightarrow F_{\in_1}(t_{13}, t_{14}, t_{15})$$

$$T \vdash (F_{\in_2}(t_0, t_3, t_4, t_5) \wedge E_1(t_0, t_{13}) \wedge E_3(t_3, t_4, t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18})) \rightarrow F_{\in_2}(t_{13}, t_{16}, t_{17}, t_{18})$$

$$T \vdash (F_{\in_3}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) \wedge E_2(t_1, t_2, t_{14}, t_{15}) \wedge E_3(t_3, t_4, t_5, t_{16}, t_{17}, t_{18})) \rightarrow F_{\in_3}(t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18})$$

E, para as relações  $B_{\mathbb{T}}$  e  $\equiv_{\mathbb{T}}$ , a condição exige:  $T \vdash (F_{B_{\mathbb{T}}}(t_0, t_{13}, t_{26}) \wedge E_1(t_0, t_{39}) \wedge E_1(t_{13}, t_{52}) \wedge E_1(t_{26}, t_{65})) \rightarrow F_{B_{\mathbb{T}}}(t_{39}, t_{52}, t_{65})$   $T \vdash (F_{\equiv_{\mathbb{T}}}(t_0, t_{13}, t_{26}, t_{39}) \wedge E_1(t_0, t_{52}) \wedge E_1(t_{13}, t_{65}) \wedge E_1(t_{26}, t_{78}) \wedge E_1(t_{39}, t_{91})) \rightarrow F_{\equiv_{\mathbb{T}}}(t_{52}, t_{65}, t_{78}, t_{91})$

Dessa procura por uma definição que fosse adequada ao nosso ambiente, chegamos à

**Definição 1.3.3.** *Sejam  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}'$  as linguagens de Tarski e Hilbert, respectivamente. Seja  $\mathbb{T}$  uma teoria em  $\mathcal{L}$ . Uma interpretação  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{L}'$  em  $\mathbb{T}$  é dada por:*

- uma tripla de inteiros dada por  $(n_1 k_1, n_2 k_2, n_3 k_3)$ , onde  $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3$ . Além disso,  $k_1, k_2$  e  $k_3$  representam a quantidade de elementos cuja sorte é, respectivamente, ponto, reta e plano;
- uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $U_i[v_1, \dots, v_{n_i}]$  com  $n_i$  variáveis livres para  $i = 1, 2, 3$ ;
- uma  $\mathcal{L}$ -fórmula  $E_i[\bar{w}_1, \bar{w}_2]$  com  $2n_i$  variáveis livres para  $i = 1, 2, 3$  (tanto  $\bar{w}_1$  quanto  $\bar{w}_2$  representam sequências com  $n_i$  variáveis);
- uma fórmula  $F_R[\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{(k_1+k_2+k_3)}]$  com  $\sum_{i=1}^3 k_i n_i$  variáveis livres para cada símbolo de relação  $R$  de aridade  $(k_1, k_2, k_3)$  de  $\mathcal{L}'$ .

Todas satisfazendo as seguintes propriedades:

(1°).  $\mathbb{T} \vdash$  “ $E_i$  é uma relação de equivalência” para  $i = 1, 2, 3$ ;

(2°).  $\mathbb{T} \vdash$  “ $U_i$  é uma união de  $E_i$ -classes” para  $i = 1, 2, 3$ ;

---

(3<sup>o</sup>). Para toda tripla de inteiros  $(k_1, k_2, k_3)$  e para todo símbolo de relação  $R$  de aridade  $(k_1, k_2, k_3)$  de  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathbb{T} \vdash$  “ $F_R$  é interpretada por um conjunto fechado para a relação  $E_i$ ” para  $i = 1, 2, 3$ .

## 1.4 Prolegômenos

Reuniremos aqui todos os resultados da geometria tarskiana que serão essenciais para as provas futuras. Procedendo dessa maneira, conseguiremos obter provas mais claras. As definições e lemas a seguir foram extraídos de [(SST83)]. Quanto às provas apresentadas em alguns lemas, conseguimos preencher satisfatoriamente as lacunas que existiam.

**Lema 1.4.1.** *Para  $a, b, c, d, e, f$  variáveis quaisquer para pontos, valem as seguintes afirmações:*

$$(i) \quad ab \equiv ab$$

$$(ii) \quad ab \equiv cd \rightarrow cd \equiv ab$$

$$(iii) \quad ab \equiv cd \wedge cd \equiv ef \rightarrow ab \equiv ef$$

$$(iv) \quad ab \equiv cd \rightarrow ba \equiv cd$$

$$(v) \quad ab \equiv cd \rightarrow ab \equiv dc$$

*Demonstração.* (i) Pelo axioma  $A2$ , temos que  $ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs$ ; e, tomando  $p = r = b$  e  $q = s = a$  segue-se que  $ab \equiv ba \wedge ab \equiv ba \rightarrow ba \equiv ba$ . Daí, na presença do axioma  $A1$  e por destacamento, obtemos  $ba \equiv ba$ ; e, por substituição,  $ab \equiv ab$ .

(ii) Assuma que  $ab \equiv cd$ . Sabemos por (i) que  $ab \equiv ab$ . Então, temos  $ab \equiv cd \wedge ab \equiv ab$ . Logo, na presença do  $A2$  e destacamento, teremos  $cd \equiv ab$ .

(iii) Assuma que  $ab \equiv cd \wedge cd \equiv ef$ . Daí, por (ii), temos que  $cd \equiv ab \wedge cd \equiv ef$ . Pelo  $A2$ , podemos escrever  $cd \equiv ab \wedge cd \equiv ef \rightarrow ab \equiv ef$ . Portanto, por destacamento segue que  $ab \equiv ef$ .

(iv) Assuma que  $ab \equiv cd$ . Daí, na presença de  $A1$ , segue que  $ba \equiv ab \wedge ab \equiv cd$ . Portanto, por (iii) e destacamento, teremos  $ba \equiv cd$ .

(v) Assuma que  $ab \equiv cd$ . Por  $A1$ , temos  $cd \equiv dc$ . Desse modo, temos a conjunção  $ab \equiv cd \wedge cd \equiv dc$ . Agora, por (iii),  $ab \equiv cd \wedge cd \equiv dc \rightarrow ab \equiv dc$ . Logo, por destacamento,  $ab \equiv dc$ .

□

**Definição 1.4.2.** *Chama-se segmento de extremos  $a$  e  $b$  (e escreve-se  $ab$  ou  $ba$ ) ao conjunto  $\{a, b\}$ . Além disso, os segmentos da forma  $aa$  são chamados de segmentos nulos (ou degenerados).*

**Corolário 1.4.3.** *Na presença do lema e da definição anteriores, podemos afirmar que congruência de segmentos é uma relação de equivalência entre os segmentos.*

**Observação 1.4.4.** *Vale notar que a definição de segmento dada anteriormente é, no mínimo, contraintuitiva, já que não há pontos interiores.*

Além disso, na definição de segmento em Hilbert, exige-se que  $a \neq b$ . Logo, se  $E_{\mathbb{H}}$  (ou  $\equiv_{\mathbb{H}}$ ) e  $E_{\mathbb{T}}$  (ou  $\equiv_{\mathbb{T}}$ ) são as relações de congruência em Hilbert e Tarski, respectivamente, teremos o seguinte mapa:

$$E_{\mathbb{H}}(h_0, h_1, h_2, h_3) \mapsto E_{\mathbb{T}}(t_0, t_{13}, t_{26}, t_{39}) \wedge t_0 \neq t_{13} \wedge t_{26} \neq t_{39}$$

**Lema 1.4.5.**  *$aa \equiv bb$  (segmentos nulos são congruentes entre si)*

*Demonstração.* Pelo axioma A4, sabemos que existe um ponto  $x$  tal que  $B(bax) \wedge ax \equiv bb$ . Em particular, existe  $x$  com  $ax \equiv bb$ . Daí, na presença do axioma A3, segue-se que  $x = a$ . Portanto,  $aa \equiv bb$ .  $\square$

**Lema 1.4.6.**  *$q \neq a \rightarrow \exists^{\leq 1} x (Bqax \wedge ax \equiv bc)$*

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 29.

**Lema 1.4.7.** *Para  $a, b, c$ , variáveis quaisquer para pontos, valem as seguintes afirmações:*

- (i)  $B(abb)$
- (ii)  $B(abc) \rightarrow B(cba)$
- (iii)  $B(aab)$
- (iv)  $B(abc) \wedge B(bac) \rightarrow a = b$

*Demonstração.* (i) Pelo axioma A4, temos que  $B(abx) \wedge bx \equiv bb$ . Em particular,  $bx \equiv bb$ .

Daí, na presença do axioma A3 e destacamento,  $x = b$ . Logo,  $B(abb)$ .

(ii) Com efeito, por hipótese, temos que  $B(abc)$ . Além disso, por (i),  $B(bcc)$ . Assim, temos a conjunção  $B(abc) \wedge B(bcc)$ . Daí, na presença do axioma A7 (Pasch) e destacamento, podemos afirmar que existe um ponto  $x$  tal que  $B(bxb) \wedge B(cxa)$ . Em particular, temos  $B(bxb)$ . Logo, pelo axioma A6 e destamento,  $x = b$ . Consequentemente,  $B(cba)$ .

(iii) Por (i), temos que  $B(baa)$ . Daí, usando (ii) e destacamento, decorre que  $B(aab)$ .

(iv) Assuma  $B(abc) \wedge B(bac)$ . Daí, na presença de A7 e destacamento, existe um ponto  $x$  tal que  $B(bxb) \wedge B(axa)$ . Para  $B(bxb)$  e  $B(axa)$ , na presença de A6 e destacamento, teremos, respectivamente,  $x = b$  e  $x = a$ . Portanto,  $a = b$

□

**Lema 1.4.8.** *Para  $a, b, c, d$ , variáveis quaisquer para pontos, valem as seguintes afirmações:*

$$(i) \quad B(abd) \wedge B(bcd) \rightarrow B(abc) \wedge B(acd)$$

$$(ii) \quad B(abc) \wedge B(acd) \rightarrow B(bcd) \wedge B(abd)$$

$$(iii) \quad B(abc) \wedge B(bcd) \wedge b \neq c \rightarrow B(acd) \wedge B(abd)$$

*Demonstração.* Pelo axioma A7 (Pasch), temos que  $Babd \wedge Bbcd \rightarrow \exists x(Bbxb \wedge Bcxa)$ . Logo, na presença da hipótese de (i) e destacamento, segue que existe um ponto  $x$  com  $Bbxb \wedge Bcxa$ . Em particular, existe um ponto  $x$  com  $Bbxb$ . Daí, pelo axioma A6 e destacamento, segue que  $x = b$ . Então, temos  $Bcba$ ; e, conseqüentemente, pelo lema 1.4.7 (ii),  $Babc$ . Até aqui, mostramos que vale a implicação:

$$B(abd) \wedge B(bcd) \rightarrow B(abc) \tag{1.1}$$

Novamente, pelo A7, temos  $Bcba \wedge Bdca \rightarrow \exists x(Bbxd \wedge Bcxc)$ . Reescrevendo, na presença do lema 1.4.7(ii), ficaremos com  $Babc \wedge Bacd \rightarrow \exists x(Bbxd \wedge Bcxc)$ . Logo, pela hipótese de (ii) e destacamento, segue que existe um ponto  $x$  tal que  $Bbxd \wedge Bcxc$ . Assim, pelo axioma A6 e destacamento, de  $Bcxc$  segue que  $x = c$ ; e, conseqüentemente,  $Bbcd$ .

Até aqui, mostramos que vale a implicação:

$$B(abc) \wedge B(acd) \rightarrow B(bcd) \tag{1.2}$$

Pelo axioma A4, temos que existe um ponto  $x$  tal que:

$$Bacx \wedge cx \equiv cd \tag{1.3}$$

E, por 1.2, temos que:

$$Babc \wedge Bacx \rightarrow Bbcx \tag{1.4}$$

Além disso, pela hipótese de (iii), temos:

$$Babc \tag{1.5}$$

De 1.3, 1.4, 1.5 e destacamento, segue que:

$$Bbcx \tag{1.6}$$

Ainda, por hipótese de (iii), temos que:

$$b \neq c \tag{1.7}$$

De 1.6, 1.7, A4, lema 1.4.6 e do lema 1.4.1(i), decorre  $x = d$ ; e, conseqüentemente, de 1.3,  $Bacd$ . Até aqui, estabelecemos a implicação:

$$B(abc) \wedge B(bcd) \wedge b \neq c \rightarrow B(acd) \tag{1.8}$$

Para concluir a prova de (i), examinaremos as duas possibilidades seguintes:

**Caso 1:**  $b = c$ . Nesse caso, pela hipótes de (i), temos que vale  $Bacd \wedge Bccd$ . Em particular,  $Bacd$ .

**Caso 2:**  $b \neq c$ . Pela hipótese de (i), por 1.1 e destacamento, temos  $Babc$ . Ainda pela hipótese de (i), vale  $Bbcd$ . Logo, nesse caso, temos a conjunção:

$$Babc \wedge Bbcd \wedge b \neq c \tag{1.9}$$

De 1.8, 1.9 e destacamento, segue  $Bacd$ .

Portanto, para as duas possibilidades, temos:

$$B(abd) \wedge B(bcd) \rightarrow B(abc) \wedge B(acd)$$

Para os itens (ii) e (iii), estabelecemos um resultado parcial que precisa ser completado.

□

**Lema 1.4.9.** Em  $\mathbb{T}$ , vale o seguinte:

(i)  $\exists a \exists b (a \neq b)$  (existem, pelo menos, dois pontos distintos)

(ii)  $\exists c [Babc \wedge b \neq c]$

*Demonstração.* (i) De fato, pelo axioma A8, temos que  $\exists a \exists b \exists c (\neg Babc \wedge \neg Bbca \wedge \neg Bcab)$ .

Daí, na presença do lema 1.4.7, segue que  $a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c$ . Em particular, existem, pelo menos, dois pontos distintos.

- (ii) Sejam  $u, v$  dois pontos distintos (que existem por (i)). Agora, pelo axioma  $A4$ , existe um ponto  $c$  tal que  $Babc \wedge bc \equiv uv$ . Nesse caso, devemos ter  $b \neq c$ , pois, do contrário, pelo  $A3$  e destacamento, teríamos  $u = v$ , o que seria um absurdo.

□

**Lema 1.4.10.**  $Bacb \wedge ac \equiv ac' \wedge bc \equiv bc' \rightarrow c = c'$

Para a prova desse lema, consultar [(?)], pág. 38.

**Lema 1.4.11.**  $a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(abd) \rightarrow B(bcd) \vee B(bdc)$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 41.

**Definição 1.4.12.** *Sejam  $ab$  e  $cd$  dois segmentos. Dizemos que  $ab$  é menor ou igual a  $cd$ , e escrevemos  $ab \leq cd$ , quando existe um ponto  $y$  entre  $c$  e  $d$  com  $ab$  congruente a  $cy$ . Formalizando, teremos:*

$$ab \leq cd :\leftrightarrow \exists y(Bcyd \wedge ab \equiv cy)$$

Nesse caso, dizemos que  $cd$  é maior ou igual a  $ab$ , e escrevemos  $cd \geq ab$ . Assim,

$$cd \geq ab :\leftrightarrow ab \leq cd$$

**Lema 1.4.13.**  $ab \leq cd \wedge ab \equiv a'b' \wedge cd \equiv c'd' \rightarrow a'b' \leq c'd'$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 42.

**Lema 1.4.14.**  $ab \leq cd \vee cd \leq ab$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 42.

**Definição 1.4.15.** (i) *Sejam  $r, a, b$  pontos dois a dois distintos. Dizemos que os pontos  $a$  e  $b$  estão em lados opostos de  $r$  quando vale  $Barb$ .*

- (ii) *Dizemos que os pontos  $a$  e  $b$  estão do mesmo lado do ponto  $r$  ou são equivalentes a  $r$ , e escrevemos  $a \simeq_r b$ , quando tanto  $a$  quanto  $b$  são diferentes de  $r$  e, além disso,  $a$  está entre  $r$  e  $b$  ou  $b$  está entre  $r$  e  $a$ . Formalizando, teremos:*

$$a \simeq_r b :\leftrightarrow a \neq r \wedge b \neq r \wedge (Brab \vee Brba) \tag{1.10}$$

**Lema 1.4.16.**  $a \neq r \wedge b \neq r \wedge c \neq r \wedge Barc \rightarrow [Bbrc \leftrightarrow a \simeq_r b]$



*Demonstração.* Assuma  $a \neq r \wedge b \neq r \wedge c \neq r \wedge \text{Barc}$ .

( $\rightarrow$ ) Suponha  $Bbrc$ . Em particular, temos que  $c \neq r \wedge \text{Barc} \wedge Bbrc$ . Daí, na presença do lema 1.4.7, temos

$$c \neq r \wedge Bcra \wedge Bcrb \quad (1.11)$$

Agora, pelo lema 1.4.11, temos que:

$$c \neq r \wedge B(cra) \wedge B(crb) \rightarrow B(rab) \vee B(rba) \quad (1.12)$$

De 1.11, 1.12 e destacamento, decorre  $B(rab) \vee B(rba)$ . Daí e do que assumimos no início, segue, pela definição 1.4.15(ii), que  $a \simeq_r b$

( $\leftarrow$ ) Suponha  $a \simeq_r b$ . Então, pela definição 1.4.15(ii), temos  $Babr \vee Bbar$ .

Se  $Babr$ , então juntamente com  $\text{Barc}$ , teremos:

$$Babr \wedge \text{Barc} \quad (1.13)$$

Pelo lema 1.4.8(ii), temos  $Babr \wedge \text{Barc} \rightarrow Bbrc \wedge Babc$ . Daí, na presença de 1.13 e destacamento, teremos  $Bbrc \wedge Babc$ . Em particular,  $Bbrc$ .

Se  $Bbar$ , então juntamente com  $\text{Barc}$ , teremos:

$$Bbar \wedge \text{Barc} \quad (1.14)$$

Pelo lema 1.4.8(iii), temos  $Bbar \wedge \text{Barc} \wedge a \neq r \rightarrow Bbrc \wedge Bbac$ . Daí, de 1.14 e destacamento, teremos  $Bbrc \wedge Bbac$ . Em particular,  $Bbrc$ .  $\square$

**Lema 1.4.17.**  $a \simeq_r b \leftrightarrow \text{Col}(arb) \wedge \neg \text{Barb}$

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ) Suponha que  $a \simeq_r b$ . Então, pela definição formalizada em (1.10), temos que  $a \neq r \wedge b \neq r \wedge (\text{Brab} \vee \text{Brba})$ .

Se  $\text{Brab}$ , então temos  $\text{Col}(arb)$ . Agora vejamos que também vale  $\neg \text{Barb}$ . Suponha, por redução ao absurdo, que  $\text{Barb}$ . Então, temos a conjunção  $\text{Brab} \wedge \text{Barb}$ . Daí, na presença do lema 1.4.7(iv), segue que  $a = r$ , o que é um absurdo.

Se  $\text{Brba}$ , o argumento é análogo.

( $\leftarrow$ ) Suponha que  $\text{Col}(arb) \wedge \neg \text{Barb}$ . De  $\text{Col}(arb)$ , segue que  $\text{Brab} \vee \text{Brba} \vee \text{Barb}$ . Em particular, temos  $\text{Brab} \vee \text{Brba}$ . Agora, de  $\neg \text{Barb}$  segue, na presença do lema 1.4.7,  $a \neq r \wedge b \neq r$   $\square$

**Lema 1.4.18.** Para  $a, b, c$  nas condições da definição 1.4.15(ii), temos:

$$(i) a \simeq_r a$$

$$(ii) a \simeq_r b \rightarrow b \simeq_r a$$

$$(iii) a \simeq_r b \wedge b \simeq_r c \rightarrow a \simeq_r c$$

*Demonstração.* (i) Pelo lema 1.4.7(i), temos que  $Braa$ . Nas condições da definição 1.4.15(ii)  $a \neq r$ . Logo,  $a \neq r \wedge (Braa \vee Braa)$ , que, por 1.10, é equivalente a  $a \simeq_r a$ .

(ii) Suponha que  $a \simeq_r b$ . Daí, na presença de 1.10, temos que:

$$(a \neq r) \wedge (b \neq r) \wedge (Brab \vee Brba)$$

E, por substituição, segue que:

$$(b \neq r) \wedge (a \neq r) \wedge (Brba \vee Brab)$$

que, por 1.10, é equivalente a  $b \simeq_r a$

(iii) Suponha  $a \simeq_r b \wedge b \simeq_r c$ . Por causa de 1.10, temos  $(a \neq r) \wedge (b \neq r) \wedge (Brab \vee Brba)$  e  $(b \neq r) \wedge (c \neq r) \wedge (Brbc \vee Brcb)$ . Vamos examinar uma das quatro possibilidades:

$$(a \neq r) \wedge (b \neq r) \wedge (c \neq r) \wedge (Brab \wedge Brbc) \quad (1.15)$$

Agora, pelo lema 1.4.8(ii), temos que:

$$Brab \wedge Brbc \rightarrow Babc \wedge Brac \quad (1.16)$$

De 1.15, 1.16 e destacamento, decorre  $Babc \wedge Brac$ . Em particular,  $Brac$ . Portanto,  $a \simeq_r c$

□

**Definição 1.4.19.** Chamamos de *semilinha determinada por  $r$  e  $a$*  (saindo de  $r$  e passando por  $a$ ), e escrevemos  $H(ra)$  à classe de equivalência (em relação a  $\simeq_r$ ) de qualquer ponto  $a \neq r$ ; isto é, ao conjunto de pontos:

$$H(ra) = \{x \mid x \simeq_r a\} \quad (\text{definido para } a \neq r) \quad (1.17)$$

Quando um conjunto de pontos  $K$  é uma semilinha (escreve-se  $H\ell K$ ), tem-se

$$H\ell K :\leftrightarrow \exists p \exists a [a \neq p \wedge K = H(pa)] \quad (1.18)$$

**Lema 1.4.20.**  $r \neq a \wedge b \neq c \rightarrow \exists^=1 x[x \simeq_a r \wedge ax \equiv bc]$

*Demonstração.* Pelo lema 1.4.6, segue que:

$$r \neq a \rightarrow \exists^{\leq 1} x(Brax \wedge ax \equiv bc) \quad (1.19)$$

Além disso, pelo axioma A4, vale que:

$$\exists x(Brax \wedge ax \equiv bc) \quad (1.20)$$

De 1.19 e 1.20, segue que  $r \neq a \rightarrow \exists^=1 x[Brax \wedge ax \equiv bc]$ . Em particular, temos:

$$r \neq a \wedge b \neq c \rightarrow \exists^=1 x[Brax \wedge ax \equiv bc] \quad (1.21)$$

De 1.10 e 1.21, temos o resultado desejado.  $\square$

**Lema 1.4.21.**  $a \simeq_r b \rightarrow [ra \leq rb \leftrightarrow Brab]$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 45.

**Definição 1.4.22.** *Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos distintos. A linha determinada por  $p$  e  $q$  (ou a linha que passa por  $p$  e  $q$ ), e que escreveremos  $L(pq)$ , será definida por:*

$$L(pq) := \{x \mid Col(pqx)\} \quad (1.22)$$

*Quando um conjunto de pontos  $A$  é uma linha reta, e escreve-se  $LnA$ , tem-se*

$$LnA :\leftrightarrow \exists p \exists q (p \neq q \wedge A = L(pq)) \quad (1.23)$$

*Para  $a \in A$ , também dizemos que o ponto  $a$  está na linha reta  $A$  ou  $a$  incide na linha  $A$  ou a linha reta  $A$  passa pelo ponto  $a$ ; para  $a \notin A$ , dizemos que  $a$  está fora de  $A$ .*

**Lema 1.4.23.**  $a \neq b \rightarrow \exists^=1 A[LnA \wedge a \in A \wedge b \in A]$

*(Para dois pontos distintos  $a, b$ , há uma única linha reta passando por eles)*

Esse resultado corresponde aos axiomas 1.1.1 e 1.1.2 de Hilbert. Para a prova, consultar [(SST83)] pág. 46.

**Lema 1.4.24.**  $LnA \wedge LnB \wedge A \neq B \rightarrow \exists^{\leq 1} x[x \in A \wedge x \in B]$

*(Duas linhas  $A, B$  têm, no máximo, um ponto comum)*

*Demonstração.* Assuma  $LnA \wedge LnB \wedge A \neq B$ .

Agora, suponha que existam dois pontos distintos pertencentes tanto à linha  $A$  quanto à  $B$ ; ou seja:

$$x \neq y \tag{1.24}$$

$$x, y \in A, x, y \in B \tag{1.25}$$

Ademais, pelo lema 1.4.23, temos que:

$$x \neq y \rightarrow \exists^1 A' [LnA' \wedge x \in A' \wedge y \in A'] \tag{1.26}$$

De 1.24, 1.26 e destacamento, segue que:

$$\exists^1 A' [LnA' \wedge x \in A' \wedge y \in A'] \tag{1.27}$$

De 1.25 e 1.27, decorre  $A = B = A'$ , o que é um absurdo contra a nossa hipótese.  $\square$

**Lema 1.4.25.** *Em  $\mathbb{T}$ , valem as seguintes afirmações:*

$$(i) \text{ Col}(abc) \leftrightarrow \exists A [LnA \wedge a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A]$$

*(Os pontos  $a, b, c$  são colineares se, e somente se, eles estiverem em linha reta)*

$$(ii) \exists a \exists b \exists c \neg \text{Col}(abc)$$

*(Existem pontos  $a, b, c$  não colineares)*

$$(iii) \forall a \forall b [a \neq b \rightarrow \exists c \neg \text{Col}(abc)]$$

*(Fora de cada linha (aqui é  $L(ab)$ ) há, pelo menos, um ponto)*

*Demonstração.* (i) : Consultar [(SST83)], pág. 46.

(ii) : Consequência imediata do axioma A8.

(iii) : Assuma  $a \neq b$ .

Suponha que cada ponto  $c$  está em  $A = L(ab)$ . Então, na presença de (i), quaisquer triplas  $x, y, z$  são colineares, o que é um absurdo praticado contra (ii).

$\square$

**Definição 1.4.26.** Dizemos que  $m$  é ponto médio do segmento  $ab$  (ou que  $a$  é a reflexão de  $b$  em  $m$ ), e escrevemos  $M(amb)$ , quando  $m$  está entre  $a$  e  $b$  e os segmentos  $ma$  e  $mb$  são congruentes. Formalizando, teremos:

$$M(amb) :\leftrightarrow B(amb) \wedge ma \equiv mb \quad (1.28)$$

**Lema 1.4.27.**  $\forall p \exists =^1 p' Mpap'$

*Demonstração.* Há apenas duas possibilidades para considerar, a saber:  $p = a$  e  $p \neq a$ .

Se  $p = a$ , então, por (1.28), temos  $B(aap') \wedge aa \equiv ap'$ . Em particular,  $aa \equiv ap'$ . Daí, pelo axioma A3, segue  $p' = a$ , que é único.

Se  $p \neq a$ , então, do lema 1.4.6 e destacamento, segue:

$$\exists \leq^1 p' (Bpap' \wedge ap' \equiv ap) \quad (1.29)$$

Além disso, pelo axioma A4, temos:

$$\exists p' (Bpap' \wedge ap' \equiv ap) \quad (1.30)$$

De 1.29 e 1.30, na presença de 1.28, decorre que  $\exists =^1 p' Mpap'$ .

□

**Definição 1.4.28.** O ponto  $p'$  do lema 1.4.27 será chamado de imagem (ou reflexão) do ponto  $p$  no ponto  $a$ , e será denotado por:

$$p' = S_a p = S_a(p) \quad (1.31)$$

**Lema 1.4.29.**  $S_a p = p' \leftrightarrow Mpap'$

*Demonstração.* Consequência imediata da definição 1.4.28 e do lema 1.4.27. □

**Lema 1.4.30.**  $S_a p = p \leftrightarrow p = a$

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ) Suponha  $S_a p = p$ . Então, pelo lema 1.4.29, temos  $M(pap)$ . Em particular, na presença de 1.28,  $B(pap)$ . Daí, pelo axioma A6, segue que  $p = a$ .

( $\leftarrow$ ) Suponha que  $p = a$ . Então,  $S_a p = S_p p$ .

Se  $S_p p = p'$ , então, pelas definições 1.4.28 e 1.4.26 e pelos lemas 1.4.29 e 1.4.27, temos  $Bppp' \wedge pp \equiv pp'$ . Em particular,  $pp' \equiv pp$ ; e, pelo axioma A3,  $p' = p$ .

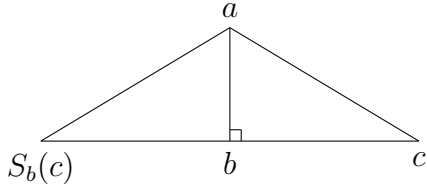
□

**Lema 1.4.31.**  $S_a$  é um automorfismo.

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 51.

**Definição 1.4.32.** Dizemos que os pontos  $a, b, c$  formam um ângulo reto com vértice  $b$ , e escrevemos  $Rabc$ , quando os segmentos  $ac$  e  $aS_b(c)$  são congruentes. Formalizando:

$$Rabc :\leftrightarrow ac \equiv aS_b(c) \quad (1.32)$$



Nessa definição, pode ocorrer que  $a$  ou  $c$  coincida com  $b$ .

**Lema 1.4.33.**  $Rabc \wedge Ra'bc \wedge Baca' \rightarrow b = c$

*Demonstração.* Por hipótese, temos:

$$Rabc \wedge Ra'bc \quad (1.33)$$

$$Baca' \quad (1.34)$$

De 1.33 e 1.32, segue que  $ac \equiv aS_b(c)$  e  $a'c \equiv a'S_b(c)$ . E fazendo

$$S_b(c) = c' \quad (1.35)$$

temos:

$$ac \equiv ac' \quad e \quad a'c \equiv a'c' \quad (1.36)$$

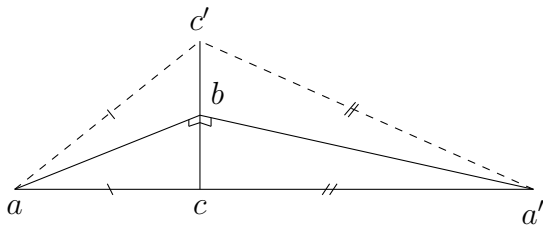
Agora, pelo lema 1.4.10, podemos escrever:

$$Baca' \wedge ac \equiv ac' \wedge a'c \equiv a'c' \rightarrow c = c' \quad (1.37)$$

De 1.34, 1.36 e 1.37 e destacamento, segue que:

$$c = c' \quad (1.38)$$

De 1.35, 1.38 e lema 1.4.30, decorre  $b = c$ .



□

**Definição 1.4.34.** *Sejam  $A$  e  $A'$  duas linhas.*

(i) *Dizemos que  $A$  e  $A'$  são perpendiculares (ou ortogonais) entre si no ponto  $x$ , e escrevemos  $A \perp_x A'$ , quando:*

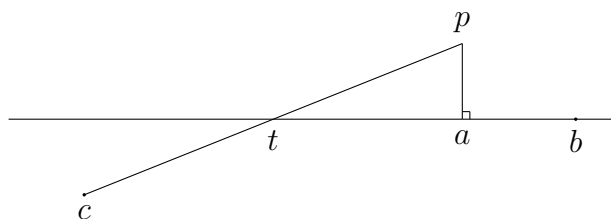
$$A \perp_x A' :\leftrightarrow LnA \wedge LnA' \wedge x \in A \wedge x \in A' \wedge \forall u \forall v [u \in A \wedge v \in A' \rightarrow Ru xv] \quad (1.39)$$

(ii) *Dizemos que as linhas retas  $A$  e  $A'$  são perpendiculares (ou ortogonais) entre si (sem especificar o ponto  $x$ ), e escrevemos  $A \perp A'$ , quando:*

$$A \perp A' :\leftrightarrow \exists x A \perp_x A' \quad (1.40)$$

**Lema 1.4.35.**  $a \neq b \rightarrow \exists p \exists t [ab \perp pa \wedge Col(abt) \wedge B(ctp)]$

(Em uma dada linha [aqui  $L(ab)$ ] existe uma perpendicular em um ponto [aqui  $a$ ] num dado semiplano)

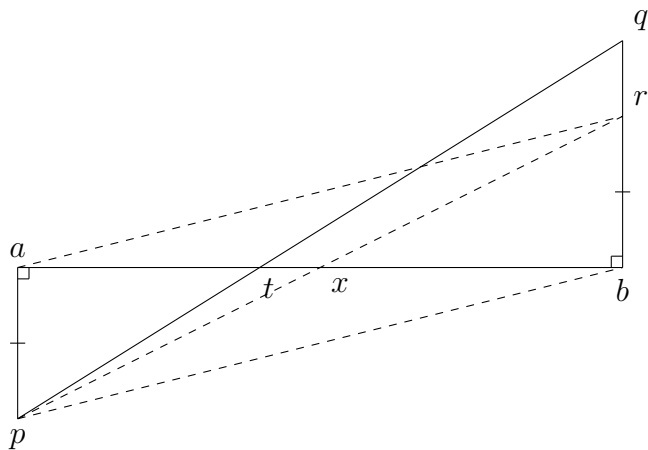


Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 63.

**Lema 1.4.36.**  $\forall a \forall b \exists =^1 x Maxb$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 64.

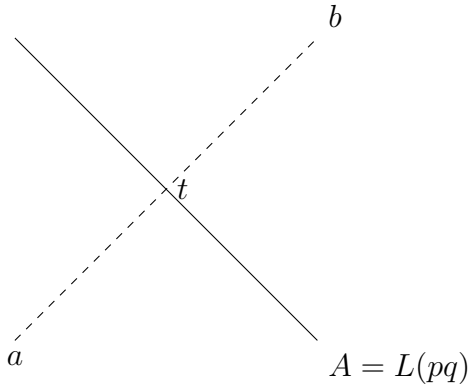
**Lema 1.4.37.**  $pa \perp ab \wedge qb \perp ab \wedge Col(abt) \wedge Bptq \wedge Bbrq \wedge ap \equiv br \rightarrow \exists x (Maxb \wedge Mpxr)$



Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 66.

**Definição 1.4.38.** Dizemos que os pontos  $a$  e  $b$  estão em lados opostos da linha  $A$ , e escrevemos  $BaAb$ , quando  $LnA \wedge a \notin A \wedge b \notin A \wedge \exists t(t \in A \wedge Batb)$ . Aqui há uma coincidência entre as definições de Hilbert e de Tarski. Nos dois sistemas, dizemos que os pontos  $a$  e  $b$  que não estão na linha  $L$  estão em lados opostos de  $L$  se  $a \neq b$  e se existe um ponto de  $L$  entre  $a$  e  $b$ ; isto é, o segmento  $ab$  encontra  $L$ . Formalizando, teremos:

$$BaAb :\leftrightarrow LnA \wedge a \notin A \wedge b \notin A \wedge \exists t(t \in A \wedge Batb) \quad (1.41)$$



**Lema 1.4.39.**  $BaAc \wedge m \in A \wedge Mamc \wedge r \in A \rightarrow \forall b(a \simeq_r b \rightarrow BbAc)$

(Se  $a$  e  $c$  estão em lados opostos da linha  $A$ , são simétricos de um ponto de  $A$ , e se  $r$  está em  $A$ , então cada ponto  $b$  da semilinha  $H(ra)$  é oposto a  $c$  com relação à linha  $A$ )

*Demonstração.* Assuma que  $BaAc \wedge m \in A \wedge Mamc \wedge r \in A$ . Além disso, suponha que  $a \simeq_r b$ . Daí, na presença de 1.4.15, temos que  $Brba \vee Brab$ . Vamos examinar essas duas possibilidades.

Se  $Brba$ , então, por causa de  $Mamc$ , temos a conjunção:

$$Brba \wedge Bcma \quad (1.42)$$

Ademais, pelo axioma  $A7$ , temos que:

$$Brba \wedge Bcma \rightarrow \exists t(Bbtc \wedge Bmtr) \quad (1.43)$$

De 1.42, 1.43 e destacamento, decorre que existe um ponto  $t$  tal que  $Bbtc \wedge Bmtr$ .

Se  $Brab$ , então é preciso preparar o terreno para aplicar o axioma de Pasch. Para tanto, considere  $b' = S_m b$  e  $r' = S_m r$ .

De  $Brab$ , na presença do lema 1.4.31, temos que  $Br'cb'$ .



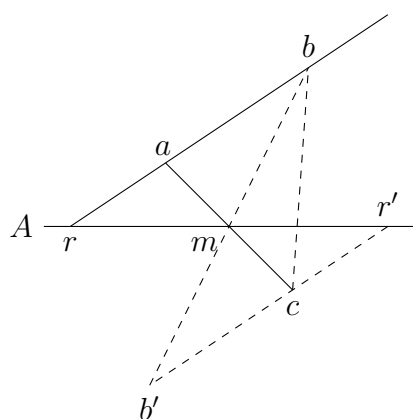
Além disso, já que  $b$  e  $b'$  são simétricos em relação a  $m$ , então, em particular, são opostos em relação a  $A$ . Daí, temos a conjunção:

$$Bb'mb \wedge Brab \tag{1.44}$$

Pelo axioma  $A7$ , podemos escrever:

$$Bb'mb \wedge Brab \rightarrow \exists t(Bmtr \wedge Batb') \tag{1.45}$$

De 1.44, 1.45 e destacamento, decorre que existe um ponto  $t$  tal que  $Bmtr \wedge Batb'$ . Daí, por causa de  $S_m$  ser automorfismo, segue que  $BcAb$ .



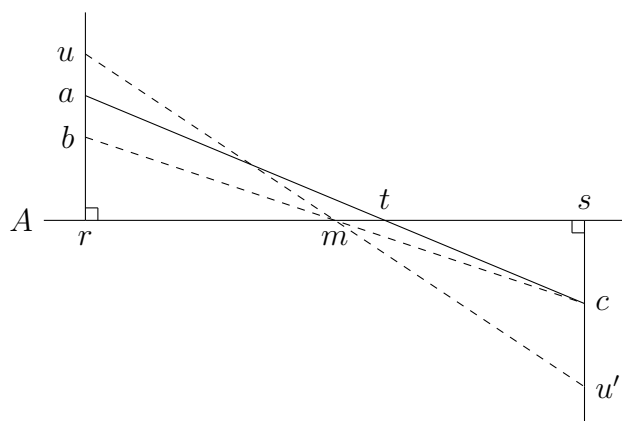
□

**Lema 1.4.40.**  $BaAc \wedge r \in A \wedge A \perp ar \wedge s \in A \wedge A \perp cs \rightarrow$

$$(Mrms \rightarrow \forall u(u \simeq_r a \leftrightarrow S_m(u) \simeq_s c)) \wedge \forall u \forall v (u \simeq_r a \wedge v \simeq_s c \rightarrow BuAv)$$

Em linguagem natural, estamos afirmando o seguinte: se  $a$  e  $c$  estão em lados opostos da linha  $A$ , se  $r$  e  $s$  são as projeções, respectivamente, de  $a$  e  $c$  sobre  $A$ , então as duas semilinhas  $H(ra)$  e  $H(sc)$  encontram-se espelhadas em relação ao ponto médio de  $rs$ . Além disso, cada ponto de uma semilinha possui um oposto na outra semilinha em relação a  $A$ .

A figura abaixo ilustra o que dissemos:



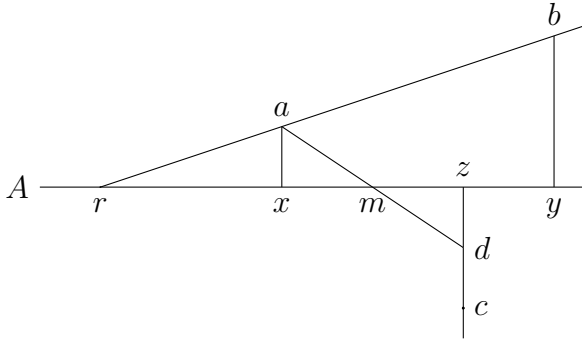
Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 68 e 69.

**Lema 1.4.41.**  $BaAc \wedge r \in A \rightarrow \forall b(a \simeq_r b \rightarrow BbAc)$

(Se  $a$  e  $c$  estão em lados opostos da linha  $A$  e  $r$  está em  $A$ , então cada ponto  $b$  da semilinha  $H(ra)$  é oposto ao ponto  $c$  em relação à linha  $A$ )

*Demonstração.* Assuma  $BaAc \wedge r \in A$ . Além disso, suponha que  $\forall b(a \simeq_r b)$ .

Sejam  $x, y, z$  as projeções de  $a, b, c$  em  $A$ . Seja  $m$  o ponto médio de  $xz$  e  $d = S_m(a)$ .



Pelo lema 1.4.40, temos que :

$$BaAc \wedge x \in A \wedge A \perp ax \wedge z \in A \wedge A \perp cz \rightarrow \quad (1.46)$$

$$(Mxmz \rightarrow \forall a(a \simeq_x a \leftrightarrow S_m(a) \simeq_z c)) \wedge \forall a \forall d(a \simeq_x a \wedge d \simeq_z c \rightarrow BaAd)$$

Por hipótese e construção, temos também:

$$BaAc \wedge x \in A \wedge A \perp ax \wedge z \in A \wedge A \perp cz \wedge Mxmz \wedge (d = S_m(a)) \quad (1.47)$$

De 1.46, 1.47 e destacamento, segue:

$$d \simeq_z c \quad (1.48)$$

$$BaAd \quad (1.49)$$

Ainda por hipótese, construção e por 1.49, temos que:

$$BaAd \wedge m \in A \wedge Mamd \wedge r \in A \quad (1.50)$$

$$\forall b(a \simeq_r b) \quad (1.51)$$

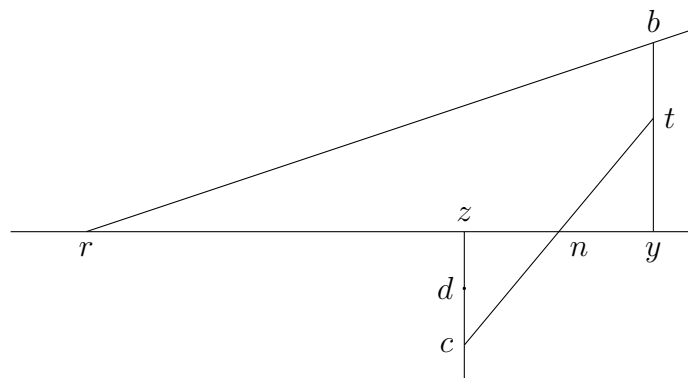
Pelo lema 1.4.39, podemos escrever:

$$BaAd \wedge m \in A \wedge Mamd \wedge r \in A \rightarrow \forall b(a \simeq_r b \rightarrow BbAd) \quad (1.52)$$

De 1.50, 1.51, 1.52 e destacamento, decorre:

$$BbAd \tag{1.53}$$

Finalmente, considere  $n$  o ponto médio de  $zy$  e  $t = S_n(c)$ .



Pelo lema 1.4.40, temos:

$$BdAb \wedge z \in A \wedge A \perp dz \wedge y \in A \wedge A \perp by \rightarrow$$

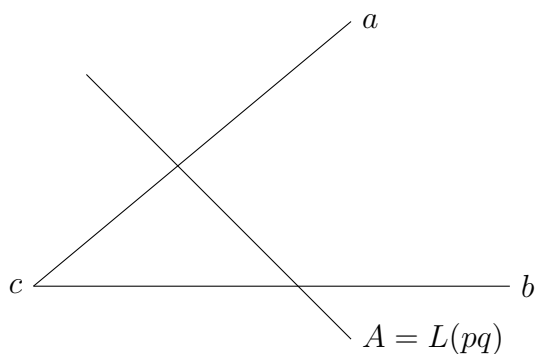
$$(Mzny \rightarrow \forall c(c \simeq_z d \leftrightarrow S_n(c) \simeq_y b)) \wedge \forall c \forall b(c \simeq_z d \wedge b \simeq_y b \rightarrow BcAb) \tag{1.54}$$

De 1.48, 1.53, 1.54, da hipótese e construção, segue, por destacamento, que  $BcAb$ .  $\square$

**Definição 1.4.42.** Dizemos que os pontos  $a$  e  $b$  estão no mesmo lado da linha  $A = L(pq)$ , e escrevemos  $a \simeq_A b$ , quando  $\exists c(BaAc \wedge BbAc)$ . Formalizando, teremos:

$$a \simeq_A b :\leftrightarrow \exists c(BaAc \wedge BbAc) \tag{1.55}$$

$$a \simeq_{pq} b :\leftrightarrow p \neq q \wedge a \simeq_{L(pq)} b \tag{1.56}$$



**Observação 1.4.43.** Ao contrário do que aconteceu no caso 1.4.38, aqui as definições são diferentes. Para Hilbert, diz-se que os pontos  $a$  e  $b$  que não estão na linha  $A$  estão do

mesmo lado de  $A$  se  $a \neq b$  e o segmento  $ab$  não encontra  $A$ . Para Tarski, diz-se que os pontos  $a$  e  $b$  que não estão na linha  $A$  estão no mesmo lado de  $A$  se existir um ponto  $c$  tal que ocorram as duas condições:

- (1)  $a$  e  $c$  estão em lados opostos de  $A$ ;
- (2)  $b$  e  $c$  estão em lados opostos de  $A$ .

**Lema 1.4.44.**  $BaAc \rightarrow (BbAc \leftrightarrow a \simeq_A b)$

*Demonstração.* Assuma:

$$BaAc \tag{1.57}$$

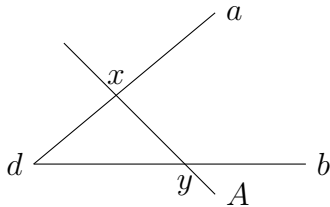
( $\rightarrow$ ) Agora, suponha que  $BbAc$ . Então, temos que  $BaAc \wedge BbAc$ . Daí, na presença de 1.55, temos  $a \simeq_A b$ .

( $\leftarrow$ ) Suponha  $a \simeq_A b$ . Sejam  $d, x, y$  escolhidos conforme as definições 1.4.38 e 1.4.42 com:

$$BaAd \wedge BbAd \tag{1.58}$$

$$x \in A, y \in A \tag{1.59}$$

$$Baxd \wedge Bbyd \tag{1.60}$$



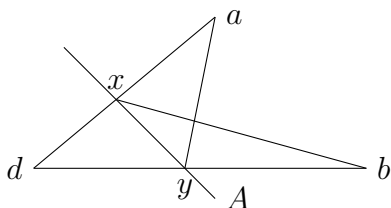
Pelo axioma A7, podemos escrever:

$$Baxd \wedge Bbyd \rightarrow \exists z(Bxzb \wedge Byza) \tag{1.61}$$

De 1.60, 1.61 e destacamento, segue que existe um ponto  $z$  tal que:

$$Bxzb \wedge Byza \tag{1.62}$$

Daí, segue também que  $z \notin A$ . Pois, do contrário, teríamos  $b \in A$  ou  $a \in A$ , o que não é possível, já que, por hipótese,  $a \simeq_A b$ .



Para finalizar o argumento, basta considerar as duas possibilidades para os pontos  $a, b, d$ , a saber:  $Col(abd)$  ou  $\neg Col(abd)$ .

**Caso 1:**  $\neg Col(abd)$ . De 1.61, decorre  $Col(ayz) \wedge \neg B(ayz)$  e  $Col(zxb) \wedge \neg B(zxb)$ . Logo, na presença do lema 1.4.17, temos  $a \simeq_y z$  e  $z \simeq_x b$ .

**Caso 2:**  $Col(abd)$ .

Nesse caso,  $x = y$ . Aqui, basta tomar  $z = a$  ou  $z = b$  para que tenhamos  $a \simeq_y z$  e  $z \simeq_x b$

Desse modo, nos dois casos, temos:

$$a \simeq_y z \tag{1.63}$$

$$z \simeq_x b \tag{1.64}$$

Pelo lema 1.4.41, podemos escrever:

$$BaAc \wedge y \in A \rightarrow \forall z(a \simeq_y z \rightarrow BzAc) \tag{1.65}$$

$$BzAc \wedge x \in A \rightarrow \forall b(z \simeq_x b \rightarrow BbAc) \tag{1.66}$$

De 1.57, 1.59, 1.63, 1.65 e destacamento, segue que:

$$BzAc \tag{1.67}$$

De 1.67, 1.59, 1.64, 1.66 e destacamento, decorre  $BbAc$ , como queríamos.

□

**Lema 1.4.45.**  $BaAb \rightarrow \neg a \simeq_A b$ .

*Demonstração.* Assuma:

$$BaAb \tag{1.68}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que:

$$a \simeq_A b \tag{1.69}$$

De 1.68, 1.69 e lema 1.4.44, temos que:

$$BbAb \tag{1.70}$$

De 1.70 e por causa da definição 1.4.38, segue que existe um ponto  $t$  tal que  $Bbtb$ , com  $t \in A$ . Daí, na presença do axioma  $A6$ , temos  $t = b$ , o que é um absurdo, pois  $b \notin A$ . □

**Definição 1.4.46.** *Sejam  $A$  uma linha e  $r$  um ponto tal que  $r \notin A$ . Chamamos de plano definido por  $A$  e  $r$ , e escrevemos  $Pl(A, r)$ , ao conjunto de pontos:*

$$Pl(A, r) := \{x \mid x \simeq_A r \vee x \in A \vee BrAx\} \quad (1.71)$$

*Se  $A = L(pq)$ , então para  $\neg Col(pqr)$  também escrevemos:*

$$Pl(pqr) := Pl(L(pq), r) \quad (1.72)$$

*Um conjunto de pontos  $E$  é um plano quando:*

$$PlE :\leftrightarrow \exists p \exists q \exists r [\neg Col(pqr) \wedge E = Pl(pqr)] \quad (1.73)$$

*Para  $a \in E$ , dizemos que  $a$  está em  $E$  ou  $a$  incide em  $E$  ou  $E$  passa por  $a$ . Para  $a \notin E$  dizemos que  $a$  está fora de  $E$ . Se  $A$  é uma linha, então para  $A \subseteq E$  dizemos que  $A$  está em  $E$  ou  $E$  passa por  $A$ .*

**Definição 1.4.47.** *Dizemos que os pontos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são coplanares, e escrevemos  $Cp(a_1 \dots a_n)$ , quando:*

$$Cp(a_1 \dots a_n) :\leftrightarrow \exists E [PlE \wedge \bigwedge_{i=1}^n a_i \in E] \quad (1.74)$$

*(ou seja,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  estão em um plano)*

**Observação 1.4.48.** *Aqui, como observou [(Bee)], tanto as linhas quanto os planos são definidos, em [(SST83)], como conjunto de pontos. Assim, o tratamento desses conceitos não é feito estritamente em primeira ordem. Apesar desse “deslize”, as provas foram feitas em primeira ordem. E, pela definição 1.4.46 em 1.73, vemos que planos são dados por três pontos não colineares; ou seja, os planos de Tarski são exatamente a interpretação que apresentamos para os planos de Hilbert na seção anterior.*

**Observação 1.4.49.** *Ainda de acordo com [(Bee)], dizemos, em Tarski, que quatro pontos  $a, b, c, d$  são coplanares, e escreveremos  $Cp_{\mathbb{T}}(a, b, c, d)$ , se ocorrer uma das possibilidades a seguir:*

- (1°)  $c$  e  $d$  estão em lados opostos da linha  $ab$ ;
- (2°)  $c$  está na linha  $ab$ ;
- (3°)  $d$  está na linha  $ab$ ;
- (4°)  $c$  e  $d$  estão do mesmo lado da linha  $ab$ .

*Esse fato é assegurado pelo lema a seguir.*

**Lema 1.4.50.** Para  $a, b, c, d$  variáveis para pontos, temos:

$$Cp(abcd) \leftrightarrow \exists x[Col(abx) \wedge Col(cdx)] \vee [Col(acx) \wedge Col(bdx)] \vee [Col(adx) \wedge Col(bcx)]$$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)] pág. 77.

**Lema 1.4.51.**  $PlE \wedge a \in E \wedge b \in E \wedge a \neq b \rightarrow L(ab) \subseteq E \wedge \exists cE = Pl(abc)$

(uma linha que passa por dois pontos de um plano está contida nesse plano; e o plano pode ser determinado por essa linha e outro ponto)

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)] pág. 75.

**Lema 1.4.52.**  $\neg Col(abc) \wedge PlE \wedge a \in E \wedge b \in E \wedge c \in E \rightarrow E = Pl(abc)$

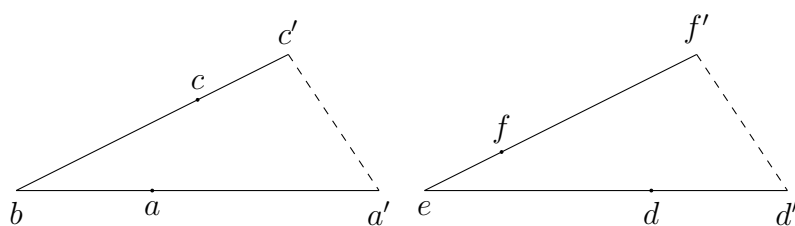
Para a prova desse lema, consultar [(SST83)] pág. 76.

**Definição 1.4.53.** Sejam  $K = H(ba)$  e  $L = H(bc)$  duas semilinhas. Chamamos de ângulo ao par não ordenado  $\{K, L\}$ , e escreve-se  $\sphericalangle(K, L)$  ou  $\sphericalangle abc$ .

A congruência de ângulos, que Hilbert toma como conceito primitivo, aqui será definida.

**Definição 1.4.54.** Dizemos que o ângulo  $abc$  é congruente ao ângulo  $def$ , e escrevemos  $abc \equiv def$ , quando:

$$abc \equiv def : \leftrightarrow a \neq b \wedge c \neq b \wedge d \neq e \wedge f \neq e \wedge \exists a' \exists c' \exists d' \exists f' [Bbaa' \wedge aa' \equiv ed \wedge Bbcc' \wedge cc' \equiv ef \wedge Bedd' \wedge dd' \equiv ba \wedge Bef f' \wedge f f' \equiv bc \wedge a'c' \equiv d'f']$$



**Lema 1.4.55.**  $abc \equiv def \leftrightarrow \exists a' \exists c' \exists d' \exists f' [a' \simeq_b a \wedge c' \simeq_b c \wedge d' \simeq_e d \wedge f' \simeq_e f \wedge (a'bc') \equiv (d'ef')]$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 95 e 96.

**Lema 1.4.56.**  $abc \equiv def \leftrightarrow a \neq b \wedge c \neq b \wedge d \neq e \wedge f \neq e \wedge$

$$\forall a' \forall c' \forall d' \forall f' [a' \simeq_b a \wedge c' \simeq_b c \wedge d' \simeq_e d \wedge f' \simeq_e f \wedge ba' \equiv ed' \wedge bc' \equiv ef' \rightarrow a'c' \equiv d'f']$$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 95 e 96.

**Lema 1.4.57.** *A congruência angular é uma relação de equivalência entre os ângulos.*

*Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 96 e 97.*

**Lema 1.4.58.**  $\neg Col(abc) \wedge \neg Col(dep) \rightarrow \exists f[abc \equiv def \wedge f \simeq_{ed} p]$

$\wedge \forall f_1 \forall f_2 \{ [abc \equiv def_1 \wedge f_1 \simeq_{ed} p] \wedge [abc \equiv def_2 \wedge f_2 \simeq_{ed} p] \rightarrow f_1 \simeq_e f_2 \}$

Para a prova desse lema, consultar [(SST83)], pág. 98.

**Lema 1.4.59.**  $abc \equiv a'b'c' \wedge ba \equiv b'a' \wedge bc \equiv b'c' \rightarrow ac \equiv a'c' \wedge [a \neq c \rightarrow bac \equiv b'a'c' \wedge bca \equiv b'c'a']$

*Demonstração.* Para estabelecer esse resultado, basta utilizar primeiro o lema 1.4.56. Daí, resulta  $ac \equiv a'c'$ . Assim,  $(abc) \equiv (a'b'c')$ . Dessa congruência, e na presença do lema 1.4.55, teremos o que desejávamos. □



## 1.5 As provas

Finalmente, estamos em condições de exibir o poder expressivo da geometria de Tarski. Para tanto, verificaremos, a partir de agora, que Tarski prova Hilbert. Precisamente, veremos as provas dos resultados relativos ao ambiente da geometria absoluta.

**Proposição 1.5.1.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.1*

*Demonstração.* Inicialmente, no ambiente da geometria de Hilbert, vamos passar esse enunciado da linguagem natural (no caso, a língua portuguesa) para a linguagem lógica. Sejam  $h_0$  e  $h_1$  as variáveis que representam, respectivamente, os pontos  $A$  e  $B$ ; e seja  $L_0$  a variável que representa a reta  $a$ . Denotemos por  $\phi_{\mathbb{H}}$  a fórmula resultante dessa tradução. Assim, em  $\mathbb{H}$ , teremos:

$$\phi_{\mathbb{H}} = \forall h_0 \forall h_1 \exists L_0 ((h_0 = h_1) \wedge (h_0 \in L_0 \wedge h_1 \in L_0))$$

Agora precisamos interpretar essa fórmula na linguagem de Tarski. Lembremos que, para evitar o colapso entre variáveis, utilizaremos a estratégia aritmética da congruência módulo 13. Assim, as variáveis  $h_0$  e  $h_1$  serão interpretadas, respectivamente, pelas variáveis  $t_0$  e  $t_{13}$ . Além disso, a variável  $L_0$  será interpretada pelo par de variáveis  $(t_1, t_2)$ . Denotemos por  $\phi_{\mathbb{T}}$  a interpretação resultante. Assim, em  $\mathbb{T}$ , teremos:

$$\phi_{\mathbb{T}} = \forall t_0 \forall t_{13} \exists t_1 \exists t_2 (t_1 \neq t_2) \wedge ((t_0 = t_{13}) \vee (Col(t_1, t_2, t_0) \wedge Col(t_1, t_2, t_{13})))$$

Para melhorar a leitura, reescreveremos essa fórmula sem os índices:

$$\phi_{\mathbb{T}} = \forall x \forall y \exists p \exists q (p \neq q) \wedge ((x = y) \vee (Col(p, q, x) \wedge Col(p, q, y)))$$

Finalmente, só resta exibir uma prova de  $\phi_{\mathbb{T}}$  no sistema axiomático de Tarski. Para tanto, basta considerar as duas possibilidades a seguir:

- caso 1:  $x \neq y$ . Nesse caso, basta tomar  $p = x$  e  $q = y$ ;
- caso 2:  $x = y$ . Nesse caso, basta tomar  $p = x$  e, na presença do lema 1.4.9(i),  $q$  pode ser qualquer outro ponto.

□

**Proposição 1.5.2.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.2*

*Demonstração.* Como fizemos para o axioma 1.1.1, aqui teremos três movimentos.

O primeiro consiste em fazer a passagem da linguagem natural para a linguagem lógica. Nesse caso, o resultado será a seguinte fórmula:

$$\phi_{\mathbb{H}} = \forall h_0 \forall h_1 \forall L_0 \forall L_1 (h_0 \neq h_1 \wedge h_0 \in L_0 \cap L_1 \wedge h_1 \in L_0 \cap L_1 \rightarrow L_0 = L_1)$$

O segundo movimento consiste interpretar essa fórmula na linguagem de Tarski. A fórmula resultante dessa interpretação será:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{T}} = \forall t_0 \forall t_{13} \forall t_1 \forall t_2 \forall t_{14} \forall t_{15} \forall t_{26} (t_0 \neq t_{13} \wedge \text{Col}(t_0, t_1, t_2) \wedge \text{Col}(t_0, t_{14}, t_{15}) \wedge \\ \text{Col}(t_{13}, t_1, t_2) \wedge \text{Col}(t_{13}, t_{14}, t_{15})) \rightarrow (\text{Col}(t_{26}, t_1, t_2) \leftrightarrow \text{Col}(t_{26}, t_{14}, t_{15})) \end{aligned}$$

Para melhorar a leitura, reescreveremos essa fórmula sem os índices:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{T}} = \forall x \forall y \forall p \forall q \forall r \forall s \forall z (x \neq y \wedge \text{Col}(x, p, q) \wedge \text{Col}(x, r, s) \wedge \\ \text{Col}(y, p, q) \wedge \text{Col}(y, r, s)) \rightarrow (\text{Col}(z, p, q) \leftrightarrow \text{Col}(z, r, s)) \end{aligned}$$

O terceiro movimento consiste em exibir uma prova de  $\phi_{\mathbb{T}}$  no sistema axiomático de Tarski. Para tanto, basta usar o lema 1.4.23. □

### Proposição 1.5.3. $\mathbb{T} \vdash$ Axioma 1.1.3

*Demonstração.* Sejam  $h_0, h_1$  e  $h_2$  as variáveis que representam pontos; e seja  $L_0$  a variável que representa reta. Denotemos por  $\phi_{\mathbb{H}}$  a fórmula resultante da tradução de **Sobre uma reta há sempre, pelo menos, dois pontos**. Assim, em  $\mathbb{H}$ , teremos:

$$\phi_{\mathbb{H}} = \forall L_0 \exists h_0 \exists h_1 (h_0 \neq h_1 \wedge h_0 \in L_0 \wedge h_1 \in L_0)$$

Além disso, se denotarmos por  $\psi_{\mathbb{H}}$  a fórmula resultante da tradução de **Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta**, teremos :

$$\psi_{\mathbb{H}} = \exists h_0 \exists h_1 \exists h_2 \forall L_0 (h_0 \neq h_1 \wedge h_0 \neq h_2 \wedge h_1 \neq h_2 \wedge h_0 \notin L_0 \vee h_1 \notin L_0 \vee h_2 \notin L_0)$$

Agora precisamos interpretar essas fórmulas na linguagem de Tarski. Lembremos que, para evitar o colapso entre variáveis, utilizaremos a estratégia aritmética da congruência módulo 13. Assim, as variáveis  $h_0, h_1$  e  $h_2$  serão interpretadas, respectivamente, pelas

variáveis  $t_0$ ,  $t_{13}$  e  $t_{26}$ . Além disso, a variável  $L_0$  será interpretada pelo par de variáveis  $(t_1, t_2)$ . Denotemos por  $\phi_{\mathbb{T}}$  e por  $\psi_{\mathbb{T}}$  as interpretações resultantes. Assim, em  $\mathbb{T}$ , teremos:

$$\phi_{\mathbb{T}} = \forall t_1 \forall t_2 \exists t_0 \exists t_{13} (t_1 \neq t_2 \wedge Col(t_0, t_1, t_2) \wedge Col(t_{13}, t_1, t_2))$$

$$\psi_{\mathbb{T}} = \exists t_0 \exists t_{13} \exists t_{26} \forall t_1 \forall t_2 (\neg Col(t_0, t_1, t_2) \vee \neg Col(t_{13}, t_1, t_2) \vee \neg Col(t_{26}, t_1, t_2))$$

Para melhorar a leitura, reescreveremos essas fórmulas sem os índices:

$$\phi_{\mathbb{T}} = \forall p \forall q \exists x \exists y (p \neq q \wedge Col(x, p, q) \wedge Col(y, p, q))$$

$$\psi_{\mathbb{T}} = \exists x \exists y \exists z \forall p \forall q (\neg Col(x, p, q) \vee \neg Col(y, p, q) \vee \neg Col(z, p, q))$$

Finalmente, só resta exibir uma prova de  $\phi_{\mathbb{T}}$  e  $\psi_{\mathbb{T}}$  no sistema axiomático de Tarski.

No caso da primeira, basta tomar  $x = p$  e  $y = q$ . Daí, na presença do lema 1.4.7, segue o resultado.

Já a segunda fórmula poderia ser reescrita nos seguintes termos:  $\exists p \exists q \exists r (\neg Bpqr \wedge \neg Bqrp \wedge \neg Brpq)$ . Trata-se, portanto, do axioma A8.

□

#### Proposição 1.5.4. $\mathbb{T} \vdash$ Axioma 1.1.4

*Demonstração.* A fórmula  $\phi_{\mathbb{H}}$ , que expressa o fato de  $h_0, h_1, h_2$  serem colineares, deve ser interpretada por  $\phi_{\mathbb{T}} = Col_{\mathbb{T}}(t_0, t_{13}, t_{26})$ . Para uma prova desse fato, consulte o texto ([Bee], página 4). Agora, para garantir a existência de um plano, precisamos de três pontos distintos. Mas isso sempre ocorre na presença de três pontos não colineares.

Resta interpretar a fórmula  $\psi_{\mathbb{H}}$ : **Cada plano contém, pelo menos, um ponto.**

Sabemos que um plano  $P$  é interpretado por três pontos  $t_3, t_4, t_5$ . Desse modo, basta verificar a interpretação de  $\Omega_{\mathbb{H}}$ :  $P$  contém  $c$ , que é, precisamente, dada por  $\Omega_{\mathbb{T}} = Cop_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5, t_5)$ .

Para melhorar a leitura, reescreveremos sem os índices:  $\Omega_{\mathbb{T}}(a, b, c, c) = Cop_{\mathbb{T}}(a, b, c, c)$ .

Vamos exibir uma prova de  $\Omega_{\mathbb{T}}$  na geometria tarskiana.

Pelo que vimos nos prolegômenos, pela observação 1.4.48 e pelo lema 1.4.50, basta mostrar que ocorre uma das três possibilidades:

(1<sup>a</sup>)  $c$  e  $c$  estão em lados opostos da linha  $ab$

Neste caso, por causa da definição 1.4.38, existiria um ponto  $x$  tal que  $Col_{\mathbb{T}}(a, b, x) \wedge B_{\mathbb{T}}(c, x, c)$ . Em particular, teríamos  $B_{\mathbb{T}}(c, x, c)$ . Daí, pelo axioma A6, teríamos  $x = c$ .

Uma contradição com o fato de que o ponto  $c$  não pode estar na linha  $ab$ .

Logo,  $c$  não pode estar do lado oposto de  $c$  com relação à linha  $ab$ .

Restam duas possibilidades:

(2ª)  $c$  está na linha  $ab$ .

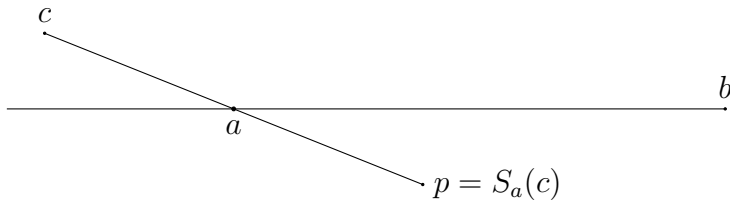
Se isso de fato ocorrer, teremos concluído a prova de que vale  $\Omega_{\mathbb{T}}$ .

Se esse não for o caso, então devemos mostrar que:

(3ª)  $c$  e  $c$  estão do mesmo lado da linha  $ab$ .

Estamos assumindo que não ocorre a (2ª) possibilidade; ou seja:  $\neg Col_{\mathbb{T}}(a, b, c)$ .

Seja  $p$  a reflexão de  $c$  em  $a$ , denotada por  $S_a(c)$  conforme a definição 1.4.28; ou seja, o prolongamento do segmento  $ca$  por uma medida  $ca$ , garantida pelo axioma A4.



Então,  $p$  e  $c$  estão em lados opostos da linha  $ab$ . Daí, pela definição 1.4.42 ou pela observação 1.4.43,  $c$  e  $c$  estão do mesmo lado da linha  $ab$ . Esse fato é testemunhado pelo ponto  $p$ .

□

### Proposição 1.5.5. $\mathbb{T} \vdash$ Axioma 1.1.5

*Demonstração.* Na definição 1.4.46 e na observação 1.4.48, após dar uma interpretação para os planos de Hilbert, vimos que a definição de plano em Tarski coincidia com essa interpretação. Assim, afirmar que  $x \in Pl(pqr)$  é equivalente a afirmar que  $Cp_{\mathbb{T}}(p, q, r, x)$ .

Em Hilbert, o axioma 1.1.5 pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\forall A, B, C \exists \alpha \exists \beta (A \in \alpha \wedge B \in \alpha \wedge C \notin \alpha \wedge A \in \beta \wedge B \in \beta \wedge C \in \beta \wedge \alpha \neq \beta \rightarrow \alpha = \beta)$$

Para interpretar essa fórmula em Tarski, consideremos os seguintes mapas:

$$\alpha \longmapsto (t_3, t_4, t_5)$$

$$\beta \longmapsto (t_{16}, t_{17}, t_{18})$$

Desse modo, a fórmula

$$\phi_{\mathbb{H}}: \text{os planos } \alpha \text{ e } \beta \text{ contêm os pontos } A, B, C$$

deve ser interpretada do seguinte modo:

Para o plano  $\alpha$ :

$$\phi_{\mathbb{H}}(t_3, t_4, t_5, t_0, t_{13}, t_{26}) = Cop_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5, t_0) \wedge Cop_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5, t_{13}) \wedge Cop_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5, t_{26})$$

Para o plano  $\beta$ :

$$\phi_{\mathbb{H}}(t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_0, t_{13}, t_{26}) = Cp_{\mathbb{T}}(t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_0) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{13}) \wedge Cp_{\mathbb{T}}(t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{26})$$

Devemos mostrar que vale:

$$Cp_{\mathbb{T}}(t_3, t_4, t_5, t_{13k}) = Cp_{\mathbb{T}}(t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{13k})$$

Equivalentemente, devemos mostrar :

$$Pl(t_3, t_4, t_5) = Pl(t_{16}, t_{17}, t_{18})$$

Pelo lema 1.4.52, temos  $Pl(t_3, t_4, t_5) = Pl(t_0, t_{13}, t_{26})$  e  $Pl(t_{16}, t_{17}, t_{18}) = Pl(t_0, t_{13}, t_{26})$ .

E, conseqüentemente,  $Pl(t_3, t_4, t_5) = Pl(t_{16}, t_{17}, t_{18})$ .

□

**Proposição 1.5.6.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.6*

*Demonstração.* A prova deste axioma segue do lema 1.4.51.

□

**Proposição 1.5.7.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.7*

*Demonstração.* Sejam  $h_0, h_1$  e  $h_2$  as variáveis que representam, respectivamente, os pontos  $A, B$  e  $C$ . Denotemos por  $\phi_{\mathbb{H}}$  a fórmula resultante dessa tradução. Assim, em  $\mathbb{H}$ , temos:

$$\phi_{\mathbb{H}} = B_{\mathbb{H}}(h_0, h_1, h_2) \longrightarrow B_{\mathbb{H}}(h_2, h_1, h_0) \wedge h_0 \neq h_1 \wedge h_0 \neq h_2 \wedge h_1 \neq h_2$$

Vamos interpretar essa fórmula na linguagem de Tarski. Desse modo, as variáveis  $h_0, h_1$  e  $h_2$  serão interpretadas, respectivamente, pelas variáveis  $t_0, t_{13}$  e  $t_{26}$ . Denotemos por  $\phi_{\mathbb{T}}$  a interpretação resultante. Assim, em  $\mathbb{T}$ , temos:

$$\phi_{\mathbb{T}} = B_{\mathbb{T}}(t_0, t_{13}, t_{26}) \wedge t_0 \neq t_{13} \wedge t_0 \neq t_{26} \wedge t_{13} \neq t_{26} \longrightarrow B_{\mathbb{T}}(t_{26}, t_{13}, t_0) \wedge t_0 \neq t_{13} \wedge t_0 \neq t_{26} \wedge t_{13} \neq t_{26}$$

Para melhorar a leitura, reescreveremos essa fórmula sem os índices:

$\phi_{\mathbb{T}} = B_{\mathbb{T}}(a, b, c) \longrightarrow B_{\mathbb{T}}(c, b, a)$  com  $a \neq b, a \neq c$  e  $b \neq c$ . Finalmente, só resta exibir uma prova de  $\phi_{\mathbb{T}}$  no sistema axiomático de Tarski. Com efeito, por hipótese, temos que  $B_{\mathbb{T}}(a, b, c)$ . Daí, na presença do lema 1.4.7(ii), segue o resultado.

□

**Proposição 1.5.8.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.8*

*Demonstração.* Sejam  $h_0, h_1$  e  $h_2$  as variáveis que representam, respectivamente, os pontos  $A, B$  e  $C$ . Denotemos por  $\phi_{\mathbb{H}}$  a fórmula resultante dessa tradução. Assim, em  $\mathbb{H}$ , temos:

$$\phi_{\mathbb{H}} = \forall h_0 \forall h_1 (h_0 \neq h_1) \longrightarrow \exists h_2 B_{\mathbb{H}}(h_0, h_1, h_2)$$

Agora precisamos interpretar essa fórmula na linguagem de Tarski. Assim, as variáveis  $h_0$ ,  $h_1$  e  $h_2$  serão interpretadas, respectivamente, pelas variáveis  $t_0$ ,  $t_{13}$  e  $t_{26}$ . Denotemos por  $\phi_{\mathbb{T}}$  a interpretação resultante. Assim, em  $\mathbb{T}$ , teremos:

$$\phi_{\mathbb{T}} = \forall t_0 \forall t_{13} (t_0 \neq t_{13}) \longrightarrow \exists t_{26} B_{\mathbb{T}}(t_0, t_{13}, t_{26})$$

Para melhorar a leitura, reescreveremos essa fórmula sem os índices:

$$\phi_{\mathbb{T}} = \forall a \forall b (a \neq b) \longrightarrow \exists c B_{\mathbb{T}}(a, b, c)$$

Finalmente, só resta exibir uma prova de  $\phi_{\mathbb{T}}$  no sistema axiomático de Tarski. Do axioma A4, temos que  $\exists x (Bpqx \wedge qx \equiv rs)$ . Daí, para  $a \neq b : \exists c (Babc \wedge bc \equiv ab)$ . Em particular, teremos  $\exists c B_{\mathbb{T}}(a, b, c)$ .  $\square$

**Proposição 1.5.9.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.9*

*Demonstração.* Sejam  $h_0$ ,  $h_1$  e  $h_2$  as variáveis que representam os três pontos. Denotemos por  $\phi_{\mathbb{H}}$  a fórmula resultante dessa tradução. Assim, em  $\mathbb{H}$ , temos:

$$\phi_{\mathbb{H}} = B(h_0, h_1, h_2) \longrightarrow \neg(B(h_0, h_2, h_1) \wedge B(h_1, h_0, h_2))$$

Agora precisamos interpretar essa fórmula na linguagem de Tarski. Assim, as variáveis  $h_0$ ,  $h_1$  e  $h_2$  serão interpretadas, respectivamente, pelas variáveis  $t_0$ ,  $t_{13}$  e  $t_{26}$ . Denotemos por  $\phi_{\mathbb{T}}$  a interpretação resultante. Assim, em  $\mathbb{T}$ , temos:

$$\phi_{\mathbb{T}} = (t_0 \neq t_{13} \wedge t_0 \neq t_{26} \wedge t_{13} \neq t_{26}) \wedge B(t_0, t_{13}, t_{26}) \longrightarrow \neg(B(t_0, t_{26}, t_{13}) \wedge B(t_{13}, t_0, t_{26}))$$

Para melhorar a leitura, reescreveremos essa fórmula sem os índices:

$$\phi_{\mathbb{T}} = (a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c) \wedge B(a, b, c) \longrightarrow \neg(B(a, c, b) \wedge B(b, a, c))$$

Finalmente, só resta exibir uma prova de  $\phi_{\mathbb{T}}$  no sistema axiomático de Tarski. Do lema 1.4.8(iii), temos que  $B(abc) \wedge B(bcd) \wedge b \neq c \longrightarrow B(acd) \wedge B(abd)$ . Daí, fazendo  $a = b, b = a, c = c, d = b$ , temos:

$$B(acb) \wedge B(bac) \longrightarrow B(bcb) \wedge B(bab) \quad (1.75)$$

Agora, suponha por redução ao absurdo que:

$$B(acb) \wedge B(bac) \quad (1.76)$$

De 1.75, 1.76 e destacamento, decorre que:

$$B(bcb) \wedge B(bab) \quad (1.77)$$

Daí, na presença do A6, segue que  $a = b = c$ , o que é um absurdo praticado contra a hipótese (que assegura que  $a, b, c$  são distintos).  $\square$

**Proposição 1.5.10.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.10*

Em Hilbert, o enunciado do axioma de Pasch pode ser reformulado nos seguintes termos:

Sejam  $a, b, c$  três pontos não colineares e seja  $A$  uma linha no plano  $abc$  tal que nenhum dos pontos  $a, b, c$  estejam em  $A$ . Seja  $p$  em  $A$  e  $Bapb$ . Então, existe  $q$  em  $A$  com  $Baqc \vee Bbqc$ .

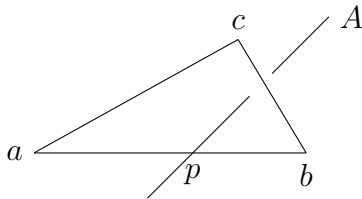
*Demonstração.* Por hipótese, existe  $p$  em  $A$  com  $Bapb$ . Então, na presença da definição 1.4.38, podemos assumir:

$$BaAb \tag{1.78}$$

Consideremos os pontos  $b, c$  e outros dois que estejam em  $A$ . Da observação 1.4.49 e do lema 1.4.50, só há quatro possibilidades para esses pontos. Mas, por hipótese,  $b$  e  $c$  não estão em  $A$ . Logo, só temos duas possibilidades, a saber:

**Primeira possibilidade:**  $b$  e  $c$  estão em lados opostos com relação a  $A$ ; ou seja, vale:

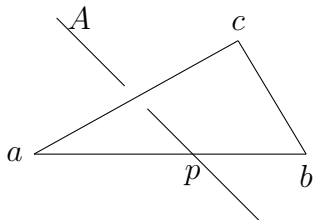
$$BbAc \tag{1.79}$$



De 1.79 e definição 1.4.38, segue que  $\exists q(q \in A \wedge Bbqc)$ .

**Segunda possibilidade:**  $b$  e  $c$  estão no mesmo lado com relação a  $A$ ; ou seja, vale:

$$b \simeq_A c \tag{1.80}$$



De 1.80 e 1.78, na presença do lema 1.4.44, segue-se  $BcAa$ . Daí, por causa da definição 1.4.38, temos que  $\exists q(q \in A \wedge Bcqa)$ .

Portanto, dessas duas possibilidades, resulta que  $\exists q(Baqc \vee Bbqc)$ , como queríamos.

□

**Proposição 1.5.11.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.14*

*Demonstração.* Neste axioma, Hilbert usou a expressão: **sobre um dado lado da reta**. Então, de partida, nos vemos diante de uma dificuldade, a saber: como mapeá-la?

Inicialmente, como observou [(Bee)], será preciso reescrever essa expressão no interior da geometria de Hilbert usando apenas os conceitos primitivos. Para tanto, basta substituir a expressão **sobre um dado lado da reta** pelas expressões **do mesmo lado da reta e em lados opostos da reta**. O novo enunciado será:

*Dado um ponto  $p$  numa linha  $A$ , e dois pontos  $a$  e  $b$ , e um ponto  $c$  que não está em  $A$ , Então existe um ponto  $x$  tal que  $px \equiv ab$  e  $xc$  encontra  $A$ ; e existe outro ponto  $y$  tal que  $py \equiv ab$  e  $yc$  não encontra  $A$ .*

Agora estamos em condições de verificar que o axioma 1.1.14 de Hilbert é um teorema na geometria de Tarski.

Por hipótese, temos:

$$p \neq a \tag{1.81}$$

Agora, pelo lema 1.4.35, podemos escrever:

$$p \neq a \rightarrow \exists q \exists t [pa \perp qp \wedge Col(pat) \wedge B(ctq)] \tag{1.82}$$

Em particular, temos  $Bctq$  com  $t \in A$ . Daí, já que  $c \notin A$ , temos:

$$BcAq \tag{1.83}$$

Seja  $q'$  o ponto simétrico de  $q$  em relação a  $p$ ; ou seja:

$$q' = S_p(q) \tag{1.84}$$

Pelo lema 1.4.29, podemos escrever:

$$S_p(q) = q' \leftrightarrow Mqpq' \tag{1.85}$$

De 1.84, 1.85 e destacamento, segue que  $Mqpq'$ . Em particular, por causa de 1.28, temos que  $Bqpq'$ . E, na presença de 1.41, tem-se:

$$BqAq' \tag{1.86}$$

Pelo axioma A4, podemos afirmar que  $\exists x(Bq'px \wedge px \equiv ab)$ . Além disso, pelo lema 1.4.6, temos  $q' \neq p \rightarrow \exists^{\leq 1} x[B(q'px) \wedge px \equiv ab]$ . Daí, e com a ajuda de 1.41, decorrem:

$$Bq'Ax \tag{1.87}$$



$$px \equiv ab \quad (1.88)$$

De 1.86, 1.87 e 1.4.42, resulta:

$$q \simeq_A x \quad (1.89)$$

De 1.83, 1.89 e lema 1.4.44, temos:

$$BxAc \quad (1.90)$$

Finalmente, de 1.90 e da definição 1.4.38, temos que  $xc$  intercepta  $A$ . Portanto, acabamos de exibir um ponto  $x$  nas condições do enunciado.

Para exibir o ponto  $y$  nas condições desejadas, basta tomar  $y = S_p(x)$ . Nesse caso, temos:

$$ByAx \quad (1.91)$$

De 1.90, 1.91 e 1.4.42, temos que o ponto  $x$  é testemunha de que  $c$  e  $y$  estão do mesmo lado; ou seja, vale:

$$c \simeq_A y \quad (1.92)$$

Para finalizar, basta mostrar que os pontos  $c$  e  $y$ , que estão do mesmo lado de  $A$ , não podem estar em lados opostos com relação a  $A$  e, assim, o segmento  $yc$  não encontrará  $A$ . Pela contrapositiva do lema 1.4.45, temos:

$$c \simeq_A y \rightarrow \neg BcAy \quad (1.93)$$

De 1.92, 1.93 e destacamento, decorre que  $\neg BcAy$ .

□

**Proposição 1.5.12.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.15*

*Demonstração.* Consequência imediata do lema 1.4.1

□

**Proposição 1.5.13.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.16*

*Demonstração.* Seguindo a sugestão de [(Bee)], vamos interpretar a expressão “ $ab$  e  $bc$  são dois segmentos sem pontos comuns” por  $\neg \exists x(Baxb \wedge Bbxc)$ . Ou, equivalentemente, por  $\forall x(\neg Baxb \vee \neg Bbxc)$ . Em particular, para  $x = a$  e depois para  $x = c$ , vale:

$$\neg Baab \vee \neg Bbac \quad (1.94)$$

$$\neg Babc \vee \neg Bbcc \quad (1.95)$$

E, dessa interpretação, teremos, para os pontos  $a, b, c, a', b', c'$ , o seguinte enunciado para o axioma 1.1.16:

$$(a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge Col(abc) \wedge Col(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge \neg \exists x (Baxb \wedge Bbxc) \rightarrow ac \equiv a'c'$$

Assim, por hipótese, temos:

$$(a \neq b) \wedge (b \neq c) \quad (1.96)$$

$$Col(abc) \quad (1.97)$$

$$Col(a'b'c') \quad (1.98)$$

$$ab \equiv a'b' \quad (1.99)$$

$$bc \equiv b'c' \quad (1.100)$$

A chave para estabelecer esse resultado será o axioma dos cinco segmentos A5 na sua forma degenerada. Lembremos do A5:

$$a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \rightarrow cd \equiv c'd'$$

Nossa tese (mostrar que  $ac \equiv a'c'$ ) sugere que façamos  $d = a$  e  $d' = a'$ . Procedendo dessa maneira, teremos:

$$a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge aa \equiv a'a' \wedge ba \equiv b'a' \rightarrow ca \equiv c'a'$$

Daí, na presença do lema 1.4.1, podemos escrever:

$$a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge aa \equiv a'a' \wedge ab \equiv a'b' \rightarrow ac \equiv a'c' \quad (1.101)$$

De 1.94, 1.95, 1.97, na presença do lema 1.4.7, teremos:

$$Babc \quad (1.102)$$

Com um argumento análogo, teremos também:

$$Ba'b'c' \quad (1.103)$$

Pelo lema 1.4.5, segue-se que:

$$aa \equiv a'a' \quad (1.104)$$

Portanto, de 1.96, 1.102, 1.103, 1.99, 1.100, 1.104, 1.101 e destacamento, decorre que  $ac \equiv a'c'$ , como queríamos.

□

---

**Proposição 1.5.14.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.18*

*Demonstração.* Em [(SST83)], na pág. 98, aparece uma referência a esse axioma. Segundo os autores, para prová-lo, basta lançar mão do lema 1.4.58.

□

**Proposição 1.5.15.**  $\mathbb{T} \vdash$  *Axioma 1.1.19*

$\text{pmapmapmmbucam}$

*Demonstração.* É imediata, pois se trata do lema 1.4.59.

□



## Simplicidade da geometria hiperbólica

*Forjar: domar o ferro à força  
não até uma flor já sabida.  
mas ao que pode até ser flor  
se flor parece a quem o diga.*

João Cabral de Melo Neto

O que motiva a escolha de um determinado sistema de axiomas  $\mathbb{S}$  para expressar uma teoria  $\mathbb{T}$ ? Suponhamos que, fixada uma linguagem  $\mathcal{L}$ , tanto o sistema axiomático  $\mathbb{S}_1$  quanto o  $\mathbb{S}_2$  sejam capazes de capturar  $\mathbb{T}$ . Então, além das questões estéticas e operacionais, quais os motivos que poderiam nos levar a escolher, por exemplo, o sistema de axiomas  $\mathbb{S}_1$ ? Do ponto de vista lógico, há um critério preciso que fornece uma possível resposta a essa questão: a **simplicidade** do sistema.

Existem várias definições para o conceito de simplicidade (consultar [(Pam93)] e [(Pam88)]). Neste capítulo, utilizaremos apenas um critério sintático, que essencialmente trata da minimalidade de quantificadores presentes nos axiomas. Além disso, nos limitaremos a examinar teorias com linguagens à la Tarski, que, no caso do artigo [(Pam04)], trata-se dos sistemas axiomáticos  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  que denotaremos, respectivamente, por  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  e  $\Sigma_{\mathcal{E}}$ .

Em 1989, no artigo [(Pam89)], Pambuccian nos apresenta o mais simples sistema de axiomas para a geometria euclidiana plana, no qual os axiomas tinham, no máximo, cinco variáveis. Assim, no artigo [(Pam04)], de 2004, já se sabia que  $\Sigma_{\mathcal{E}}$  não era o mais simples sistema de axiomas para a geometria euclidiana plana, uma vez que ele possuía um axioma com seis variáveis. Entretanto, nesse mesmo artigo, a questão da simplicidade para a geometria hiperbólica permanecia em aberto. Sabia-se apenas que não era possível expressar, com apenas quatro variáveis, um sistema de axiomas que fosse capaz de capturar

o fragmento hiperbólico da geometria plana. Assim, a única possibilidade de melhora no grau de simplicidade da geometria hiperbólica plana passaria pela constatação de que o axioma  $A_{20}$  (o único axioma com seis variáveis) não seria necessário para esse sistema.

Finalmente, em 2008, Carsten Augat apresenta, na sua tese de doutorado (consultar [(Pam11)]), um sistema de axiomas que permitirá a Pambuccian (através de um retorno ao seu próprio artigo [(Pam04)]) concluir que o axioma  $A_{20}$  era desnecessário e que, portanto, poderia ser eliminado do sistema. Estávamos, assim, pelo critério sintático, diante do mais simples sistema de axiomas para a geometria hiperbólica plana.

A seguir, num primeiro momento, exibiremos um sistema axiomático à la Tarski capaz de expressar a geometria hiperbólica. E, em seguida, examinaremos a simplicidade desse sistema.

## 2.1 Um sistema axiomático para a geometria hiperbólica

Muito do que fizemos nesta parte está no artigo [(Pam04)]. Seguindo os passos de Pambuccian, nosso primeiro movimento foi provar que  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  (definido abaixo) é um sistema de axiomas para a geometria hiperbólica plana. Como no capítulo 1, aqui também desenvolvemos vários argumentos e jogamos luz sobre eles. Entretanto, em determinados momentos escolhemos apenas dar referências de resultados que, ainda que necessários para fechar a argumentação, extrapolavam o escopo do nosso projeto.

Pambuccian, para provar que as estruturas axiomatizadas pelos axiomas de  $A1$  até  $A21$  são planos métricos, fará uso do sistema de axiomas de Kay Sörensen. Os axiomas de Sörensen formam um sistema para os planos métricos não elípticos (veja em [(Pam01a)]); lá, o axioma MP 9 corresponde ao  $A20$  do sistema apresentado a seguir. Assim como no capítulo 1 (no qual Tarski prova Hilbert), aqui também temos um análogo: Pambuccian prova Sörensen.

A partir de agora, teremos algumas definições e uma sequência grande de lemas que nos permitirão concluir que  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  é capaz de capturar a parte hiperbólica da geometria plana. Depois de realizada essa tarefa, teremos um sistema axiomático de grau 6 para a geometria hiperbólica plana (mais adiante definiremos o grau de simplicidade de um sistema de axiomas).

**Definição 2.1.1.**  $L(abc) :\leftrightarrow B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab)$

Agora, considere os seguintes conjuntos de axiomas:

$$\Sigma_{\mathcal{H}} := \{A1 - A22\} \quad e \quad \Sigma_{\mathcal{E}} := \{A1 - A20, \neg A22\}$$

Onde:

$$A1: ab \equiv cd \rightarrow cd \equiv ab$$

$$A2: ab \equiv cd \rightarrow ab \equiv dc$$

$$A3: ab \equiv aa \rightarrow a = b$$

$$A4: (i) \quad ab \equiv cd \wedge cd \equiv ce \rightarrow ab \equiv ce$$

$$(ii) \quad ab \equiv cd \wedge cd \equiv ae \rightarrow ab \equiv ae$$

$$A5: Babc \rightarrow Bcba$$

$$A6: Babd \wedge Bbcd \rightarrow Babc$$

$$A7: a \neq b \wedge ((Babc \wedge Babd) \vee (Babc \wedge Bdab) \vee (Bbca \wedge Bbda)) \rightarrow Lacd$$

$$A8: p \neq q \wedge ap \equiv aq \wedge bp \equiv bq \wedge cp \equiv cq \rightarrow Labc$$

$$A9: a \neq b \wedge ac \equiv ad \wedge bc \equiv bd \wedge Babe \rightarrow ec \equiv ed$$

$$A10: Babc \wedge (Bade \vee Baed) \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow Bade \wedge bc \equiv de$$

$$A11: Babc \wedge Bdbe \wedge ba \equiv bd \wedge bc \equiv be \rightarrow ac \equiv de$$

$$A12: ab \equiv ad \wedge ((Babc \wedge Bade) \vee (Bcab \wedge Bead)) \wedge ac \equiv ae \rightarrow dc \equiv be$$

$$A13: c \neq a \wedge Bcad \wedge ab \equiv ad \wedge (Bced \vee Bcde) \wedge cb \equiv ce \rightarrow Bced$$

$$A14: (\forall ab)(\exists c)[Bacb \wedge ca \equiv cb]$$

$$A15: (\forall abc)(\exists d)[Bcad \wedge ab \equiv ad]$$

$$A16: (\forall abc)(\exists d)[\neg Labc \rightarrow (Badc \vee Bbdc) \wedge da \equiv db]$$

$$A17: (i) (\forall abcd)(\exists e)[Bbad \wedge ab \equiv ad \wedge Bbcd \rightarrow ae \equiv ad \wedge be \equiv bc]$$

$$(ii) (\forall abc)(\exists d)[Babc \rightarrow ac \equiv ad \wedge ad \equiv bd]$$

$$A18: (\forall abc)(\exists d)(\forall x)[Babc \wedge b \neq a \wedge b \neq c \rightarrow ((Babx \wedge ba \equiv bx) \rightarrow da \equiv dx) \wedge ((Badx \wedge da \equiv dx) \rightarrow ca \equiv cx)]$$

$$A19: (\forall abc)(\exists de)[\neg Labc \rightarrow (Bacd \vee Badc) \wedge de \equiv ab \wedge ad \equiv ae \wedge bd \equiv be]$$

$$A20: \neg Lxyz \wedge Bxay \wedge ax \equiv ay \wedge Bybz \wedge by \equiv bz \wedge Bzcx \wedge cz \equiv cx \rightarrow \neg Labc$$

$$A21: (\exists ab)[a \neq b]$$

$$A22: (\forall abcd)(\exists e)[a = b \vee b = c \vee c = d \vee d = a \vee (Babe \wedge ba \equiv be \wedge \neg ca \equiv ce) \vee (Bbce \wedge cb \equiv ce \wedge \neg db \equiv de) \vee (Bcde \wedge dc \equiv de \wedge \neg ac \equiv ae) \vee (Bdae \wedge ad \equiv ae \wedge \neg bd \equiv be)]$$

O que podemos dizer sobre o poder expressivo desses dois sistemas  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  e  $\Sigma_{\mathcal{E}}$ ? Será que são capazes de expressar algum fragmento da geometria elementar?

**Lema 2.1.2.** *Babb*



*Demonstração.* Pelo axioma A15, temos que:

$$\forall abc \exists d [Bcad \wedge ab \equiv ad]$$

Agora, fazendo:

$$a = b, \quad c = a, \quad d = b'$$

obtemos:

$$\exists b' [Babb' \wedge bb \equiv bb']$$

Ou seja, existe  $b'$  tal que :

$$Babb' \tag{2.1}$$

$$bb \equiv bb' \tag{2.2}$$

Pelo axioma A1, podemos escrever:

$$bb \equiv bb' \rightarrow bb' \equiv bb \tag{2.3}$$

De (2.2) , (2.3) e destacamento, segue:

$$bb' \equiv bb \tag{2.4}$$

Pelo axioma A3, temos:

$$bb' \equiv bb \rightarrow b = b' \tag{2.5}$$

De (2.4), (2.5) e destacamento, segue:

$$b = b' \tag{2.6}$$

De (2.1) e (2.6), decorre:

$$Babb$$

□

**Lema 2.1.3.**  $aa \equiv bb$

*Demonstração.* Fazendo  $c = m$  no axioma A14, temos que, para todo  $a$  e  $b$ ,

$$\exists m [Bamb \wedge ma \equiv mb]$$

Em particular, temos:

$$ma \equiv mb \tag{2.7}$$

Agora, no axioma A10, fazendo  $a = m$ ,  $b = c = a$  e  $d = e = b$ , segue:

$$Bmaa \wedge (Bmbb \vee Bmbb) \wedge ma \equiv mb \wedge ma \equiv mb \rightarrow Bmbb \wedge aa \equiv bb \quad (2.8)$$

Do lema 2.1.2, (2.7), (2.8) e destacamento, decorre:

$$Bmbb \wedge aa \equiv bb$$

Em particular, temos o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.4.**  $ab \equiv cc \rightarrow a = b$

*Demonstração.* Pelo axioma A4(ii), fazendo  $d = c$  e  $e = a$ , temos:

$$ab \equiv cc \wedge cc \equiv aa \rightarrow ab \equiv aa \quad (2.9)$$

Da hipótese, do lema 2.1.3, de (2.9) e destacamento, segue:

$$ab \equiv aa \quad (2.10)$$

Pelo axioma A3, (2.10) e destacamento, decorre  $a = b$  como queríamos.  $\square$

**Lema 2.1.5.**  $ab \equiv ab$

*Demonstração.* Pelo axioma A15, podemos afirmar que existe  $d$  tal que:

$$ab \equiv ad \quad (2.11)$$

E fazendo  $c = a$  no axioma A1, temos:

$$ab \equiv ad \rightarrow ad \equiv ab \quad (2.12)$$

De (2.11), (2.12) e destacamento, segue:

$$ad \equiv ab \quad (2.13)$$

Pelo axioma A4(i), com  $c = a$  e  $e = b$ , temos:

$$ab \equiv ad \wedge ad \equiv ab \rightarrow ab \equiv ab \quad (2.14)$$

De (2.11), (2.13), (2.14) e destacamento, decorre o que queríamos.  $\square$

**Lema 2.1.6.**  $ab \equiv ba$

*Demonstração.* Pelo axioma A2, fazendo  $c = a$  e  $d = b$ , podemos escrever:

$$ab \equiv ab \rightarrow ab \equiv ba$$

Daí, na presença do lema 2.1.5 e destacamento, segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.7.**  $Babc \wedge ab \equiv ac \rightarrow b = c$

*Demonstração.* Assuma que:

$$Babc \wedge ab \equiv ac \tag{2.15}$$

Pelo axioma A10, fazendo  $d = e = c$ , temos:

$$Babc \wedge (Bacc \vee Bacc) \wedge ab \equiv ac \wedge ac \equiv ac \rightarrow Bacc \wedge bc \equiv cc \tag{2.16}$$

De (2.15), do lema 2.1.2, do lema 2.1.5, (2.16) e destacamento, temos;

$$Bacc \wedge bc \equiv cc$$

Em particular, temos:

$$bc \equiv cc$$

Daí, na presença do lema 2.1.4, segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.8.**  $Baba \rightarrow a = b$

*Demonstração.* Assuma que:

$$Baba \tag{2.17}$$

Pelo axioma A14 podemos afirmar que existe  $m$ , tal que:

$$Bbma \wedge mb \equiv ma$$

Em particular, temos:

$$Bbma \tag{2.18}$$

$$mb \equiv ma \tag{2.19}$$

Pelo axioma A6, fazendo  $c = m$  e  $d = a$ , podemos escrever:

$$Baba \wedge Bbma \rightarrow Babm \tag{2.20}$$

De (2.17), (2.18), (2.20) e destacamento, temos:

$$Babm$$

Daí, na presença do axioma A5, segue:

$$Bmba \tag{2.21}$$

Pelo lema 2.1.7, podemos escrever:

$$Bmba \wedge mb \equiv ma \rightarrow b = a \tag{2.22}$$

De (2.19), (2.21), (2.22) e destacamento, segue o resultado desejado.  $\square$

**Definição 2.1.9.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois pontos distintos quaisquer. Dizemos que, para todo  $x$ , os pontos  $x$  estão na linha  $ab$ , quando sempre se verifica a relação  $Labx$ .*

O primeiro resultado importante e também trabalhoso, como Pambuccian observa, é a propriedade transitiva. Vamos a partir de agora destacar e provar alguns dos resultados centrais para essa finalidade.

O próximo resultado é curioso e de modo resumido diz que toda linha tem, pelo menos, cinco pontos.

**Lema 2.1.10.** *Se  $a$  e  $b$  são dois pontos distintos quaisquer, então a linha  $ab$  contém, pelo menos, 5 pontos.*

*Demonstração.* Seguindo os passos do Pambuccian, vamos organizar a prova desse lema em três passos.

**Primeiro passo:**  $x \neq a$  e  $x \neq b$

Notemos que, pelo axioma A14, podemos escrever

$$\forall ab \exists x (Baxb \wedge xa \equiv xb) \tag{2.23}$$

Em particular, existe um ponto  $x$  tal que:

$$xa \equiv xb$$

Se  $x = a$ , então  $aa \equiv ab$ . Daí, pelo axioma A1,  $ab \equiv aa$ . Logo, na presença do axioma A3,  $a = b$ , o que é uma contradição. De modo análogo, se  $x = b$  também chegaremos a uma contradição.

**Segundo passo:**  $y \neq a, y \neq b, z \neq a, z \neq b$

Pelo axioma A15, podemos escrever:

$$\exists y(Baby \wedge ba \equiv by) \quad (2.24)$$

$$\exists z(Bbaz \wedge ab \equiv az) \quad (2.25)$$

Se  $y = a$ , então por conta de (2.24), temos que  $Baba$ . Daí, na presença do lema 2.1.8, segue que  $a = b$ , o que é uma contradição.

Se  $y = b$ , então de (2.24), temos que  $ba \equiv bb$ . Daí, pelo axioma A3, temos  $a = b$ , uma contradição.

Analogamente, de (2.25), conclui-se que  $z = a$  ou  $z = b$ , nos conduzem a uma contradição.

**Terceiro passo:**  $x \neq y, x \neq z, y \neq z$

De (2.23), (2.24), (2.25), na presença do axioma A5, podemos escrever:

$$Byba \wedge Bbxa \quad (2.26)$$

$$Bzab \wedge Baxb \quad (2.27)$$

$$Baby \wedge Bbaz \quad (2.28)$$

Pelo axioma A6, temos:

$$Byba \wedge Bbxa \rightarrow Bybx \quad (2.29)$$

$$Bzab \wedge Baxb \rightarrow Bzax \quad (2.30)$$

$$Baby \wedge Bbay \rightarrow Baba \quad (2.31)$$

De (2.26), (2.29) e destacamento, segue que:

$$Bybx$$

Nesse caso, se  $x = y$ , teremos  $Byby$ . Daí, pelo lema 2.1.8,  $y = b$ , o que acarretará numa contradição. Portanto,  $x \neq y$ .

De (2.27), (2.30) e destacamento, segue que:

$$Bzax$$

Nesse caso, se  $x = z$ , teremos  $Bxax$ . Daí, pelo lema 2.1.8,  $x = a$ , o que acarretará numa contradição. Portanto,  $x \neq z$ .

Finalmente, se  $y = z$ , então de (2.28), (2.31) e destacamento:

$$Baba$$

Daí, na presença do lema 2.1.8, temos  $a = b$ , o que é um absurdo. Portanto,  $y \neq z$ .

Desses três passos, decorre que  $a, b, x, y, z$  são cinco pontos distintos na linha  $ab$ .  $\square$

Pambuccian destaca que por conta de um resultado de W. Szmielew vale a seguinte

**Observação 2.1.11.** *Se em toda linha existem, pelo menos, cinco pontos, então uma relação  $B$  que satisfaz os axiomas  $A5, A6, A7$  e o lema 2.1.8 satisfaz todas as propriedades universais de relação de ordem nessa linha (isto é, as propriedades universais de uma ordem linear).*

**Lema 2.1.12.**  $a \neq b \wedge Labm \wedge ma \equiv mb \wedge Labn \wedge na \equiv nb \rightarrow m = n$

*Demonstração.* Para a prova desse teorema consultar [(Rig75)], pág. 163  $\square$

**Definição 2.1.13.** *O ponto  $c$  do segmento  $ab$  dado pelo axioma  $A14$  será chamado de ponto médio e denotado por  $M(ab)$*

**Lema 2.1.14.**  $\forall abc \exists =1 b'(a \neq c \rightarrow (Bab'c \vee Bacb') \wedge ab \equiv ab')$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.391.  $\square$

**Observação 2.1.15.** *No lema 2.1.14, designaremos o ponto  $b'$  por  $T(abc)$ . Além disso, o ponto  $d$  no axioma  $A15$  :  $(\forall abc)(\exists d)[Bcad \wedge ab \equiv ad]$  será denotado por  $T'(abc)$ .*

**Lema 2.1.16.**  $Babc \rightarrow (\exists b')Bab'c \wedge cb \equiv ab'$

*Demonstração.* Pelo axioma  $A14$ , podemos escrever que:

$$\forall ac \exists m (Bamc \wedge ma \equiv mc)$$

Em particular, existe um ponto  $m$  tal que:

$$ma \equiv mc \tag{2.32}$$

E pelo axioma A15, temos que:

$$\forall mbc \exists b' (Bcmb' \wedge mb \equiv mb') \quad (2.33)$$

Pela observação 2.1.11, temos  $Babm$  ou  $Bamb$ . Então, assumamos:

$$Bamb \quad (2.34)$$

Agora, pelo axioma A12, também podemos escrever:

$$mb' \equiv mb \wedge ((Bmb'c \wedge Bmba) \vee (Bcmb' \wedge Bamb)) \wedge mc \equiv ma \rightarrow bc \equiv b'a \quad (2.35)$$

De (2.32), (2.33), (2.34), (2.35), A1, A2 e destacamento, decorre:

$$cb \equiv ab' \quad (2.36)$$

Daí, fazendo  $c = a$ , temos também:

$$ab \equiv ab' \quad (2.37)$$

Pelo axioma A10:

$$Babc \wedge (Bab'c \vee Bacb') \wedge ab \equiv ab' \wedge ac \equiv ac \rightarrow Bab'c \wedge bc \equiv b'c \quad (2.38)$$

Pela observação 2.1.11:

$$Bab'c \vee Bacb' \quad (2.39)$$

De (2.37), (2.38), (2.39), da hipótese e destacamento, decorre:

$$Bab'c \quad (2.40)$$

Finalmente, de (2.36) e (2.40), segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.17.**  $Babc \wedge (Bcb'a \vee Bcab') \wedge ab \equiv cb' \rightarrow Bcb'a$

*Demonstração.* Por hipótese, temos  $Bcb'a \vee Bcab'$ .

**Caso 1:** Se  $Bcb'a$ , então não há nada a ser feito.

**Caso 2:** Assuma, então, que:

$$Bcab' \quad (2.41)$$

Por hipótese, temos que:

$$Babc \quad (2.42)$$

De (2.42), do lema 2.1.16 e destacamento, decorre:

$$\exists b' Bab'c \wedge cb \equiv ab'$$

Em particular, temos:

$$Bab'c$$

Daí, na presença do axioma A5, segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.18.**  $(\forall abc'c')(\exists b')ac \equiv ac' \wedge Bab'c \rightarrow Bab'c' \wedge ab \equiv ab' \wedge bc \equiv b'c'$

*Demonstração.* Por hipótese temos que:

$$ac \equiv ac' \wedge Bab'c \tag{2.43}$$

**Caso 1:**  $c' = a$

Nesse caso, temos  $ac \equiv aa$ . Então, na presença do axioma A3,  $a = c$ . Assim,  $Bcbc$ .

Daí, pelo lema 2.1.8,  $b = c$ .

Já que  $c' = a = c = b$ , então para concluir o argumento basta tomar  $b' = a$

**Caso 2:**  $a \neq c'$

Nesse caso, pelo lema 2.1.14 e destacamento, segue que:

$$(Bab'c') \vee (Bac'b') \wedge ab \equiv ab' \tag{2.44}$$

Pelo axioma A10 podemos escrever:

$$Babc \wedge (Bab'c' \vee Bac'b') \wedge ab \equiv ab' \wedge ac \equiv ac' \rightarrow Bab'c' \wedge bc \equiv b'c' \tag{2.45}$$

De (2.43), (2.44), (2.45) e destacamento segue o resultado.  $\square$

**Definição 2.1.19.**  $ab \geq ac :\leftrightarrow \exists c' Bac'b \wedge ac \equiv ac'$

Depois de definir a noção de desigualdade para segmentos que possuem uma extremidade em comum, agora vamos mostrar que dois segmentos desse tipo são comparáveis.

**Lema 2.1.20.**  $ab \geq ac \vee ac \geq ab$

*Demonstração.* Vamos, novamente, dividir o argumento em dois casos.

**Caso 1:**  $a = c$



Aqui, pela definição 2.1.19, podemos escrever:

$$cb \geq cc \Leftrightarrow \exists c' Bcc'b \wedge cc \equiv cc'$$

Assim, para concluir a prova nesse caso particular basta tomar  $c' = c$

**Caso 2:**  $a \neq c$

Nesse caso, considere o ponto  $b' := T(abc)$ , isto é,  $b'$  é um ponto que satisfaz o lema 2.1.14. Então, temos que:

$$(Bab'c \vee Bacb') \wedge ab \equiv ab' \quad (2.46)$$

**Subcaso 2.1:** Suponha que vale a seguinte relação

$$Bab'c \quad (2.47)$$

Pela definição 2.1.19, podemos escrever:

$$ac \geq ab \Leftrightarrow \exists b' Bab'c \wedge ab \equiv ab' \quad (2.48)$$

De (2.46), (2.47) e (2.48), temos que  $ac \geq ab$

**Subcaso 2.2:** Suponha que vale a seguinte relação

$$Bacb' \quad (2.49)$$

□

Inicialmente, mostraremos que  $a \neq b$ .

Suponha, por redução ao absurdo, que  $a = b$ . Daí, na presença de (2.46) e dos axiomas  $A1$  e  $A3$ , segue que  $b' = b = a$ . Assim, por (2.49), temos  $Baca$ . Consequentemente, na presença do lema 2.1.8,  $a = c$ , o que é um absurdo.

Como  $a \neq b$ , então pelo lema 2.1.14 e destacamento, temos:

$$(Bac'b \vee Babc') \wedge ac \equiv ac' \quad (2.50)$$

Pelo axioma  $A10$ , podemos escrever:

$$Bacb' \wedge (Bac'b \vee Babc') \wedge ac \equiv ac' \wedge ab' \equiv ab \rightarrow Bac'b \wedge cb' \equiv c'b \quad (2.51)$$

De (2.49), (2.50), (2.46), (2.51) e destacamento, decorre:

$$Bac'b \wedge cb' \equiv c'b \quad (2.52)$$

Novamente, pela definição 2.1.19, podemos escrever:

$$ab \geq ac \Leftrightarrow \exists c' Bac'b \wedge ac \equiv ac' \quad (2.53)$$

De (2.50), (2.52) e (2.53), segue que  $ab \equiv ac$

**Lema 2.1.21.**  $ab \geq ac \rightarrow \exists b' Bac'b' \wedge ab \equiv ab'$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.392. □

**Lema 2.1.22.**  $bc \geq ba \wedge ab \geq ac \rightarrow cb \geq ca$

*Demonstração.* Pela definição 2.1.19 e pela nossa hipótese, temos:

$$\exists p Bbpc \wedge ba \equiv bp \quad (2.54)$$

e

$$\exists q Baqb \wedge ac \equiv aq \quad (2.55)$$

Pelo lema 2.1.18, podemos escrever:

$$(\forall bqap)(\exists q')ba \equiv bp \wedge Bbqa \rightarrow Bbq'p \wedge bq \equiv bq' \wedge qa \equiv q'p \quad (2.56)$$

De (2.54), (2.55), (2.56), do axioma A5 e destacamento, segue:

$$Bbq'p \wedge bq \equiv bq' \wedge qa \equiv q'p \quad (2.57)$$

Pelo axioma A4(i), temos:

$$pq' \equiv aq \wedge aq \equiv ac \rightarrow pq' \equiv ac \quad (2.58)$$

De (2.55), (2.57), (2.58), A1, A2 e destacamento, decorre:

$$ac \equiv pq' \quad (2.59)$$

Pela observação 2.1.11, temos que:

$$Bcpq' \quad (2.60)$$

Pelo lema 2.1.16, temos:

$$Bcpq' \rightarrow \exists r Bcrq' \wedge q'p \equiv cr \quad (2.61)$$

De (2.60), (2.61) e destacamento, segue:

$$\exists r Bcrq' \wedge q'p \equiv cr \quad (2.62)$$

Pelo axioma A4(ii), temos:

$$cr \equiv q'p \wedge q'p \equiv ca \rightarrow cr \equiv ca \quad (2.63)$$

De (2.59), (2.62), (2.63), A1, A2 e destacamento, decorre:

$$ca \equiv cr \quad (2.64)$$

Pela observação 2.1.11, temos:

$$Bcrb \quad (2.65)$$

Pela definição 2.1.19, temos:

$$cb \geq ca :\leftrightarrow \exists r Bcrb \wedge ca \equiv cr \quad (2.66)$$

De (2.64), (2.65) e (2.66) segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.23.**  $ab \geq ac \wedge ac \geq ad \rightarrow ab \geq ad$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.392.  $\square$

**Lema 2.1.24.**  $(ab \geq ac \wedge ba \geq bc) \vee (bc \geq ba \wedge cb \geq ca) \vee (ca \geq cb \wedge ac \geq ab)$

*Demonstração.* Pelo lema 2.1.20, temos:

$$ab \geq ac \quad \text{ou} \quad ac \geq ab$$

Assuma que:

$$ab \geq ac \quad (2.67)$$

Ainda pelo lema 2.1.20, temos também:

$$ba \geq bc \quad \text{ou} \quad bc \geq ba$$

Se  $ba \geq bc$ , então por (2.67) já teremos a primeira parte da disjunção desejada. Agora assumamos que:

$$bc \geq ba \tag{2.68}$$

Pelo lema 2.1.23, podemos escrever que:

$$bc \geq ba \wedge ab \wedge ac \rightarrow cb \geq ca \tag{2.69}$$

De (2.67), (2.68), (2.69) e destacamento, segue que:

$$cb \geq ca \tag{2.70}$$

De (2.68) e (2.70), temos a segunda parte da disjunção desejada. De modo análogo, assumindo  $ac \geq ab$ , teremos o resultado desejado  $\square$

O próximo lema expressa a ideia que está presente numa das noções comuns dos elementos de Euclides: “se iguais são adicionados a iguais, os todos são iguais”

**Lema 2.1.25.**  $Babc \wedge Bab'c' \wedge ab \equiv ab' \wedge bc \equiv b'c' \rightarrow ac \equiv ac'$

*Demonstração.* Vamos supor que:

$$a \neq b' \tag{2.71}$$

Pelo lema 2.1.14, temos:

$$(\forall acb')(\exists =^1 c'')a \neq b' \rightarrow (Bac''b' \vee Bab'c'') \wedge ac \equiv ac'' \tag{2.72}$$

$$(\forall ac'b')(\exists =^1 c'')a \neq b' \rightarrow (Bac''b' \vee Bab'c'') \wedge ac' \equiv ac'' \tag{2.73}$$

De (2.71),(2.72),(2.73) e destacamento, existe um ponto  $c''$ , tal que:

$$(Bac''b' \vee Bab'c'') \wedge ac \equiv ac'' \tag{2.74}$$

$$(Bac''b' \vee Bab'c'') \wedge ac' \equiv ac'' \tag{2.75}$$

Pelo axioma A10, podemos escrever:

$$Babc \wedge (Bab'c'' \vee Bac''b') \wedge ab \equiv ab' \wedge ac \equiv ac'' \rightarrow Bab'c'' \wedge bc \equiv b'c'' \tag{2.76}$$

De (2.72), (2.76), pela hipótese e destacamento, temos:

$$Bab'c'' \wedge bc \equiv b'c'' \tag{2.77}$$

Pela observação 2.1.11, temos  $Bac'c''$  ou  $Bac''c'$ . Assuma que vale:

$$Bac''c' \tag{2.78}$$

Pelo lema 2.1.7, temos:

$$Bac''c' \wedge ac'' \equiv ac' \rightarrow c'' = c' \tag{2.79}$$

De (2.75), (2.78), (2.79) e destacamento, decorre:

$$c'' = c' \tag{2.80}$$

De (2.74) e (2.80), segue que  $ac \equiv ac'$  como queríamos.

Para encerrar a prova é preciso ainda verificar o que ocorre quando  $a = b'$ . Nesse caso, por conta da hipótese, segue que  $ab \equiv aa$ . Daí, na presença do axioma A3,  $a = b$ . Então, basta tomar  $c' = c$ .  $\square$

Uma variação desse resultado é o seguinte

**Lema 2.1.26.**  $Ba'ab \wedge Babb' \wedge aa' \equiv bb' \rightarrow ba' \equiv ab'$

*Demonstração.* De acordo com a definição 2.1.13 seja  $m = M(ba)$ . Então, pelo axioma A14 podemos escrever:

$$(\forall ab)(\exists m)[Bbma \wedge mb \equiv ma] \tag{2.81}$$

Pela hipótese, na presença do axioma A5, temos:

$$Bbaa' \wedge Babb' \tag{2.82}$$

De (2.81), (2.82) e da observação 2.1.11, segue:

$$Bmaa' \quad e \quad Bmbb' \tag{2.83}$$

Pelo lema 2.1.25, temos que:

$$Bmaa' \wedge Bmbb' \wedge ma \equiv mb \wedge aa' \equiv bb' \rightarrow ma' \equiv mb' \tag{2.84}$$

De (2.81), (2.83), por hipótese, (2.84) e destacamento, decorre:

$$ma' \equiv mb' \tag{2.85}$$

Pelo axioma A11, temos:

$$Bbma' \wedge Bamb' \wedge mb \equiv ma \equiv ma' \equiv mb' \rightarrow ba' \equiv ab' \tag{2.86}$$

Como  $m = M(ab)$ , então, pela hipótese, temos:

$$Bbma' \wedge Bamb' \quad (2.87)$$

De (2.87), (2.81), (2.85), (2.86) e destacamento, temos que  $ba' \equiv ab'$  como queríamos.  $\square$

O próximo lema expressa uma idéia parecida com a dos dois anteriores e pode ser resumida da seguinte forma: “Se de iguais retirarmos iguais, então os restos serão iguais”.

**Lema 2.1.27.**  $Babc \wedge Bab'c' \wedge ac \equiv ac' \wedge bc \equiv b'c' \rightarrow ab \equiv ab'$

*Demonstração.* Vamos supor que:

$$a \neq c' \quad (2.88)$$

Pelo lema 2.1.14, temos:

$$(\forall abc')(\exists =^1 b'')a \neq c' \rightarrow (Bab''c' \vee Bac'b'') \wedge ab \wedge ab'' \quad (2.89)$$

De (2.88), (2.89) e destacamento, temos:

$$(\exists =^1 b'')(Bab''c' \vee Bac'b'') \wedge ab \wedge ab'' \quad (2.90)$$

Pelo axioma A10, podemos escrever:

$$Babc \wedge (Bab''c' \vee Bac'b'') \wedge ab \equiv ab'' \wedge ac \equiv ac' \rightarrow Bab''c' \wedge bc \equiv b''c' \quad (2.91)$$

Pela hipótese, (2.90), (2.91) e destacamento, segue:

$$Bab''c' \wedge bc \equiv b''c' \quad (2.92)$$

Pelo axioma A4(ii), temos que:

$$c'b' \equiv bc \wedge bc \equiv c'b'' \rightarrow c'b' \equiv c'b'' \quad (2.93)$$

Por hipótese, (2.92), (2.93), A1, A2 e destacamento:

$$c'b' \equiv c'b'' \quad (2.94)$$

Pela observação 2.1.11, temos  $Bc'b'b''$  ou  $Bc'b''b'$ . Vamos assumir que vale:

$$Bc'b'b'' \quad (2.95)$$

Pelo lema 2.1.7, temos:

$$Bc'b'b'' \wedge c'b' \equiv c'b'' \rightarrow b' = b'' \quad (2.96)$$

De (2.94), (2.95), (2.96) e destacamento, segue  $b' = b''$ . Daí e por (2.90), segue o resultado desejado.

Para concluir o argumento, resta verificar o que ocorre quando  $a = c'$ . Nesse caso, de  $ac \equiv ac'$  e por A3, segue que  $a = c$ . Daí, por  $Babc$  e  $Bab'c'$ , segue, na presença do lema 2.1.8, que  $b = a$  e  $b' = c$ . Logo,  $a = b = c = b' = c'$  e temos a implicação desejada.  $\square$

No próximo resultado veremos que a relação de congruência entre segmentos é transitiva. É uma prova longa e que, por esse motivo, escolhemos melhorar algumas passagens e apenas dar referências pra outras. Esse será o resultado mais trabalhoso desse nosso capítulo.

**Lema 2.1.28.**  $ab \equiv cd \wedge cd \equiv ef \rightarrow ab \equiv ef$

*Demonstração.* Por conta do lema 2.1.20, a prova da transitividade da congruência dos segmentos será composta por dois movimentos.

### Primeiro movimento:

Suponha que vale a seguinte desigualdade:

$$ab \geqslant ae \quad (2.97)$$

Pelo lema 2.1.21, temos:

$$ab \geqslant ae \rightarrow \exists x Baex \wedge ab \equiv ax \quad (2.98)$$

De (2.97), (2.98) e destacamento, existe um ponto  $x$ , tal que:

$$Baex \wedge ab \equiv ax \quad (2.99)$$

Pelo axioma A17(ii), podemos afirmar que existe um ponto  $p$ , tal que:

$$Baex \rightarrow ax \equiv ap \wedge ap \equiv ep \quad (2.100)$$

De (2.99), (2.100) e destacamento, existe um ponto  $p$ , tal que:

$$ax \equiv ap \wedge ap \equiv ep \quad (2.101)$$

Pelo axioma  $A4(i)$ , temos:

$$ab \equiv ax \wedge ax \wedge ap \rightarrow ab \equiv ap \quad (2.102)$$

De (2.99), (2.101), (2.102) e destacamento, teremos:

$$ab \equiv ap \quad (2.103)$$

Por  $A4(i)$ , temos:

$$cd \equiv ab \wedge ab \equiv ap \rightarrow cd \equiv ap \quad (2.104)$$

$$cd \equiv pa \wedge pa \equiv pe \rightarrow cd \equiv pe \quad (2.105)$$

Por hipótese,  $A1$ , (2.103), (2.104) e destacamento:

$$cd \equiv ap \quad (2.106)$$

Por (2.101), (2.106), (2.105),  $A1$ ,  $A2$  e destacamento:

$$cd \equiv pe \quad (2.107)$$

Pelo axioma  $A4(ii)$ , temos:

$$ep \equiv cd \wedge cd \equiv ef \rightarrow ep \equiv ef \quad (2.108)$$

Por hipótese, (2.107), (2.108),  $A1$  e destacamento, temos:

$$ep \equiv ef \quad (2.109)$$

Pelo axioma  $A4(i)$ , temos:

$$ab \equiv pa \wedge pa \equiv pe \rightarrow ab \equiv pe \quad (2.110)$$

$$ab \equiv ep \wedge ep \equiv ef \rightarrow ab \equiv ef \quad (2.111)$$

De (2.101), (2.103), (2.110),  $A1$ ,  $A2$  e destacamento, temos:

$$ab \equiv pe \quad (2.112)$$

De (2.109), (2.112), (2.111),  $A1$ ,  $A2$  e destacamento segue  $ab \equiv ef$ .

Portanto, a transitividade da congruência entre segmentos está estabelecida na condição (2.97).

Agora, antes de iniciar o segundo movimento, vamos estabelecer mais um lema que pode ser visto como uma variante da noção comum 2 dos elementos de Euclides.



**Lema 2.1.29.**  $Bfae \wedge Bacb \wedge af \equiv ac \wedge ea \equiv bc \rightarrow ab \equiv ef$

*Demonstração.* Seja  $d = T'(aec)$  como no axioma A15. Daí,

$$Bcad \wedge ae \equiv ad \quad (2.113)$$

Pelo axioma A4(i), temos:

$$cb \equiv ae \wedge ae \equiv ad \rightarrow cb \equiv ad \quad (2.114)$$

Pela hipótese, por 2.113), A1, A2, 2.114 e destacamento, segue:

$$cd \equiv ad \quad (2.115)$$

Pelo lema 2.1.26, temos:

$$Bbca \wedge Bcad \wedge cb \equiv ad \rightarrow ab \equiv cd \quad (2.116)$$

De (2.113), (2.115), hipótese, A5, (2.116) e destacamento, decorre:

$$ab \equiv cd \quad (2.117)$$

Pelo axioma A11, temos:

$$Bcad \wedge Bfae \wedge ac \equiv af \wedge ad \equiv ae \rightarrow cd \equiv fe \quad (2.118)$$

De (2.113), hipótese, (2.118) e destacamento, segue:

$$cd \equiv fe \quad (2.119)$$

Pelo lema 2.1.16, temos:

$$Bfae \rightarrow \exists e Bfee \wedge ea \equiv fe \quad (2.120)$$

De (2.120), A2, pela hipótese e destacamento, decorre:

$$ea \equiv ef \quad (2.121)$$

Pela definição 2.1.19, temos:

$$ab \geq ae :\leftrightarrow \exists b Babb \wedge ae \equiv ab \quad (2.122)$$

De (2.97), (2.122), A1 e A2 segue que:

$$ab \equiv ea \quad (2.123)$$

Pelo axioma  $A4(i)$ , podemos escrever:

$$ab \equiv ea \wedge ea \equiv ef \rightarrow ab \equiv ef \quad (2.124)$$

De (2.123), (2.121), (2.124) e destacamento segue  $ab \equiv ef$  como queríamos.  $\square$

### Segundo movimento:

Suponha que vale a seguinte desigualdade:

$$ae \geq ab \quad (2.125)$$

Pelo lema 2.1.24, temos que vale um dos casos:

$$(i) \quad ae \geq ac \wedge ea \geq ec$$

$$(ii) \quad ac \geq ae \wedge ca \geq ce$$

$$(iii) \quad ce \geq ca \wedge ec \geq ea$$

Nesse segundo movimento, a primeira observação feita por Pambuccian é que basta considerar os dois primeiros casos, já que por conta dos axiomas  $A1$  e  $A2$ , podemos afirmar que o lema 2.1.28 pode ser reescrito como  $ef \equiv cd \wedge cd \equiv ab \rightarrow ef \equiv ab$ . Assim,  $(iii)$  pode ser reduzido a  $(ii)$ .

Considerando o caso  $(i)$ , prova-se que:

**Lema 2.1.30.**  $d'p \geq d'e$

Para a prova desse resultado consultar [(Pam04)], páginas 394 e 395.

A partir daí, ainda no escopo de  $(i)$ , se estabelece o lema 2.1.28. Em seguida, agora assumindo  $(ii)$ , depois de uma longa argumentação finaliza-se o segundo movimento e fica estabelecida a transitividade da congruência entre segmentos (Veja [(Pam04)], páginas 395, 396 e 397).

$\square$

O próximo lema mostra que o axioma  $A21$  pode ser um pouco mais geral.

**Lema 2.1.31.**  $(\exists abc) \neg L(abc)$

*Demonstração.* Pelo axioma A21, temos que:

$$(\exists ab)[a \neq b] \quad (2.126)$$

Pelo axioma A17(ii), podemos escrever:

$$(\forall abb)(\exists c)[Babb \rightarrow ab \equiv ac \wedge ac \equiv bc] \quad (2.127)$$

Do lema 2.1.2, (2.127) e destacamento, existe um ponto  $c$ , tal que:

$$ab \equiv ac \wedge ac \equiv bc \quad (2.128)$$

Suponha, por redução ao absurdo que:

$$Labc \quad (2.129)$$

De (2.128) e (2.129), segue que o ponto  $c$  é ponto médio de  $ab$ . Logo,

$$Bacb \quad (2.130)$$

Pelo lema 2.1.7, temos:

$$Bacb \wedge ab \equiv ac \rightarrow b = c \quad (2.131)$$

Da definição 2.1.1, (2.128), (2.131) e destacamento, segue:

$$c = b \quad (2.132)$$

De (2.128) e (2.132), segue que:

$$ab \equiv cc$$

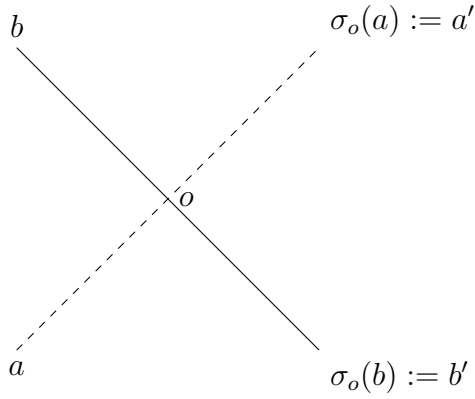
Daí, na presença do lema 2.1.4, segue que  $a = b$ ; o que é um absurdo praticado contra o axioma A21.  $\square$

No próximo lema mostraremos que as reflexões em torno de um ponto são isometrias. Para facilitar a escrita:

**Definição 2.1.32.** *Dados dois pontos  $o$  e  $a$  denotaremos o único ponto  $a'$  para o qual  $Baoa'$  e  $oa \equiv oa'$  por  $\sigma_o(a)$*

**Lema 2.1.33.**  $ab \equiv \sigma_o(a)\sigma_o(b)$

*Demonstração.* Considere a figura:



Se  $o = a$ , então  $\sigma_o(a) = o$  (pois, pelo axioma A3, se  $oo \equiv oa'$ , então  $a' = o$ ). Nesse caso, temos:  $ab \equiv ob$  e  $\sigma_o(a)\sigma_o(b) \equiv o\sigma_o(b) \equiv ob' \equiv ob$

Se  $o = b$ , o argumento é análogo. Logo, se  $o = a$  ou  $o = b$ , o lema pode ser verificado através da definição 2.1.32.

Suponha que  $a \neq o$  e  $b \neq o$ .

Sejam  $a' := \sigma_o(a)$  e  $b' := \sigma_o(b)$ . Então:

$$oa \equiv oa' \quad e \quad ob \equiv ob' \quad (2.133)$$

Agora, nas condições do axioma A15, considere  $a'' := T'(oab)$  e  $b'' := T'(oba)$ ; ou seja:

$$\forall oab \exists a'' [Bboa'' \wedge oa \equiv oa''] \quad (2.134)$$

$$\forall oba \exists b'' [Baob'' \wedge ob \equiv ob''] \quad (2.135)$$

$$\forall oab' \exists a'' [Bb'oa'' \wedge oa \equiv oa''] \quad (2.136)$$

$$\forall oba' \exists b'' [Ba'ob'' \wedge ob \equiv ob''] \quad (2.137)$$

Pela observação 2.1.11, temos;

$$Boa''b' \vee Bob'a'' \quad (2.138)$$

$$Boa'b'' \vee Bob''a' \quad (2.139)$$

Pelo axioma A4(i), temos:

$$oa' \equiv oa \wedge oa \wedge oa'' \rightarrow oa' \equiv oa'' \quad (2.140)$$

De (2.133), (2.134), (2.138) e destacamento, segue:

$$oa' \equiv oa'' \quad (2.141)$$

Analogamente, teremos:

$$ob' \equiv ob'' \quad (2.142)$$

Pelo axioma A10, temos:

$$Boa'b'' \wedge (Boa''b' \vee Bob'a'') \wedge oa' \equiv oa'' \wedge ob'' \equiv ob' \rightarrow Boa''b' \wedge a'b'' \equiv a''b' \quad (2.143)$$

$$Boa''b' \wedge (Boa'b'' \vee Bob''a') \wedge oa'' \equiv oa' \wedge ob' \equiv ob'' \rightarrow Boa'b'' \wedge a''b' \equiv a'b' \quad (2.144)$$

$$Bob'a'' \wedge (Bob''a' \vee Boa'b'') \wedge ob' \equiv ob'' \wedge oa'' \equiv oa' \rightarrow Bob''a' \wedge b'a'' \equiv b''a' \quad (2.145)$$

$$Bob''a' \wedge (Bob'a'' \vee Boa''b') \wedge ob'' \equiv ob' \wedge oa' \equiv oa'' \rightarrow Bob'a'' \wedge b''a' \equiv b'a'' \quad (2.146)$$

De (2.136), (2.137), (2.141), (2.142), (2.143), (2.144) e destacamento, decorre:

$$(Boa''b' \wedge Boa'b'') \vee (Bob'a'' \wedge Bob''a') \quad (2.147)$$

Pelo axioma A12, temos:

$$oa'' \equiv oa' \wedge ((Boa''b' \wedge Boa'b'') \vee (Bb'oa'' \wedge Bb''oa')) \wedge ob' \equiv ob'' \rightarrow a'b' \equiv a''b'' \quad (2.148)$$

$$oa'' \equiv oa' \wedge ((Boa''b' \wedge Boab'') \vee (Bboa'' \wedge Bb''oa)) \wedge ob' \equiv ob'' \rightarrow ab \equiv a''b'' \quad (2.149)$$

De (2.134), (2.135), (2.136), (2.137), (2.141), (2.142), (2.147), (2.148), (2.149), A1, A2, A5 e destacamento, segue:

$$ab \equiv a''b'' \quad (2.150)$$

$$a''b'' \equiv a'b' \quad (2.151)$$

Pelo lema 2.1.28, temos:

$$ab \equiv a''b'' \wedge a''b'' \equiv a'b' \rightarrow ab \equiv a'b' \quad (2.152)$$

De (2.150), (2.151), (2.152) e destacamento, segue o resultado desejado.  $\square$

O próximo resultado garante a realização de uma construção conhecida como transporte de segmento.

**Lema 2.1.34.**  $(\forall abcd)(\exists e)Bcde \wedge ab \equiv de$

*Demonstração.* Seja  $o := M(ad)$ . Daí, segue que:

$$d = \sigma_o(a) \quad (2.153)$$

Considere também:

$$b' := \sigma_o(b) \quad (2.154)$$

De (2.153) e (2.154), na presença do lema 2.1.33, segue que:

$$ab \equiv db' \quad (2.155)$$

Pelo axioma A15, podemos escrever  $(\forall db'c)(\exists e)[Bcde \wedge db' \equiv de]$ . Em particular, existe um ponto  $e$ , tal que:

$$db' \equiv de \quad (2.156)$$

Pelo axioma A4(i), temos:

$$ab \equiv db' \wedge db' \equiv de \rightarrow ab \equiv de \quad (2.157)$$

De (2.155), (2.156), (2.157) e destacamento segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.35.**  $(\forall abcd)(\exists^1 e)(c \neq d \rightarrow (Bced \vee Bcde) \wedge ab \equiv ce)$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.398.  $\square$

**Lema 2.1.36.**  $Babc \wedge ab \equiv ab' \wedge ac \equiv ac' \wedge bc \equiv bc' \rightarrow Bab'c'$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.398.  $\square$

Pelo próximo lema veremos que as isometrias preservam a relação de estar entre.

**Lema 2.1.37.**  $Babc \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ac \equiv a'c' \rightarrow Ba'b'c'$

*Demonstração.* Seja  $o := M(aa')$ . Daí, segue que:

$$a' := \sigma_o(a) \quad (2.158)$$

Pelo axioma A15, temos:

$$(\forall abo)(\exists b'')[Boab'' \wedge ab \equiv ab''] \quad (2.159)$$

$$(\forall aco)(\exists c'')[Boac'' \wedge ac \equiv ac''] \quad (2.160)$$

Pela observação 2.1.11, temos:

$$Bab''c'' \vee Bac''b'' \quad (2.161)$$

Pelo axioma A10, temos:

$$Babc \wedge (Bab''c'' \vee Bac''b'') \wedge ab \equiv ab'' \wedge ac \equiv ac'' \rightarrow Bab''c'' \wedge bc \equiv b''c'' \quad (2.162)$$

Pela hipótese, (2.159), (2.160), (2.161), (2.162) e destacamento:

$$Bab''c'' \wedge bc \equiv b''c'' \quad (2.163)$$

Por conta do lema 2.1.33, (2.158) e (2.159), podemos escrever:

$$ab'' \equiv a'\sigma_o(b'') \quad (2.164)$$

$$ac'' \equiv a'\sigma_o(c'') \quad (2.165)$$

$$b''c'' \equiv \sigma_o(b'')\sigma_o(c'') \quad (2.166)$$

$$a'\sigma_o(b'') \equiv \sigma_o(a)\sigma_o(b'') \equiv ab'' \equiv ab \quad (2.167)$$

Pela hipótese e por (2.167), A1 e destacamento, decorre:

$$a'b' \equiv a'\sigma_o(b'') \quad (2.168)$$

De (2.165), lema 2.1.36, (2.160), e da hipótese, segue:

$$a'\sigma_o(c'') \equiv a'c' \quad (2.169)$$

De (2.166), (2.163) e hipótese, segue:

$$\sigma_o(b'')\sigma_o(c'') \equiv b'c' \quad (2.170)$$

De (2.168), (2.169), (2.170) e do lema 2.1.36 aplicado duas vezes, segue o resultado.  $\square$

**Lema 2.1.38.**  $a \neq b \wedge ac \equiv ad \wedge bc \equiv bd \wedge Labe \rightarrow ec \equiv ed$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.398.  $\square$

**Lema 2.1.39.**  $a \neq b \wedge Labc \wedge ac \equiv ac' \wedge bc \equiv bc' \rightarrow c = c'$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.398.  $\square$

O próximo resultado pode ser visto como uma extensão do axioma A10.

**Lema 2.1.40.**  $Babc \wedge (Ba'b'c' \vee Ba'c'b') \wedge ab \equiv a'b' \wedge ac \equiv a'c' \rightarrow Ba'b'c' \wedge bc \equiv b'c'$

*Demonstração.* Seja  $o := M(aa')$ . Daí, temos:

$$a' := \sigma_o(a) \quad (2.171)$$

Considere também:

$$b'' := \sigma_o(b) \quad (2.172)$$

$$c'' := \sigma_o(c) \quad (2.173)$$

De (2.169), (2.170) e (2.171), na presença do lema 2.1.33, temos:

$$ab \equiv \sigma_o(a)\sigma_o(b) \equiv a'b'' \quad (2.174)$$

$$bc \equiv \sigma_o(b)\sigma_o(c) \equiv b''c'' \quad (2.175)$$

$$ac \equiv \sigma_o(a)\sigma_o(c) \equiv a'c'' \quad (2.176)$$

Pelo lema 2.1.37, podemos escrever:

$$Babc \wedge ab \equiv a'b'' \wedge bc \equiv b''c'' \wedge ac \equiv a'c'' \rightarrow Ba'b''c'' \quad (2.177)$$

De (2.172), (2.173), (2.174), (2.175), pela hipótese e destacamento, temos:

$$Ba'b''c'' \quad (2.178)$$

Pelo lema 2.1.28, temos:

$$a'b'' \equiv ab \wedge ab \equiv a'b' \rightarrow a'b'' \equiv a'b' \quad (2.179)$$

$$a'c'' \equiv ac \wedge ac \equiv a'c' \rightarrow a'c'' \equiv a'c' \quad (2.180)$$

De (2.172), (2.174), por hipótese, (2.177), (2.178) e destacamento, decorre:

$$a'b'' \equiv a'b' \quad (2.181)$$

$$a'c'' \equiv a'c' \quad (2.182)$$

Pelo axioma A10, podemos escrever:

$$Ba'b''c'' \wedge (Ba'b'c' \vee Ba'c'b') \wedge a'b'' \equiv a'b' \wedge a'c'' \equiv a'c' \rightarrow Ba'b'c' \wedge b''c'' \equiv b'c' \quad (2.183)$$



De (2.176), pela hipótese, por (2.179), (2.180), (2.181) e destacamento, segue:

$$Ba'b'c' \wedge b''c'' \equiv b'c' \quad (2.184)$$

Novamente, pelo lema 2.1.28, temos:

$$bc \equiv b''c'' \wedge b''c'' \equiv b'c' \rightarrow bc \equiv b'c' \quad (2.185)$$

De (2.173), (2.182), (2.183) e destacamento, temos:

$$bc \equiv b'c' \quad (2.186)$$

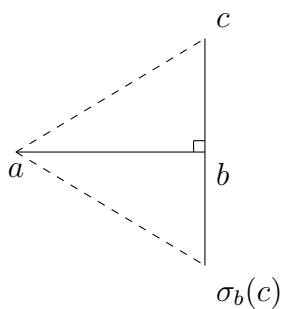
De (2.182) e (2.184) segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.41.**  $(\forall abca'b')(\exists =^1 c')a \neq b \wedge Labc \wedge ab \equiv a'b' \rightarrow La'b'c' \wedge ac \equiv a'c' \wedge bc \equiv b'c'$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.399.  $\square$

Os próximos resultados envolvem o conceito de perpendicularidade. Antes de examiná-los vamos à seguinte

**Definição 2.1.42.**  $ab \perp bc :\leftrightarrow a \neq b \wedge b \neq c \wedge ac \equiv a\sigma_b(c)$



**Lema 2.1.43.**  $ab \perp bc \wedge Labx \wedge x \neq b \rightarrow xb \perp bc$

*Demonstração.* Por hipótese, temos

$$ab \perp bc \quad (2.187)$$

$$Labx \quad (2.188)$$

$$x \neq b \quad (2.189)$$

De (2.185) e da definição 2.1.42, segue:

$$a \neq b \wedge b \neq c \wedge ac \equiv a\sigma_b(c) \quad (2.190)$$

Pelo axioma  $A7$ , temos:

$$b \neq a \wedge ((Bbaa \wedge Bbax) \vee (Bbaa \wedge Bxba) \vee (Baab \wedge Baxb)) \rightarrow Lbax \quad (2.191)$$

De (2.188), (2.186), (2.189) e destacamento, temos:

$$Lbax \quad (2.192)$$

Pelo lema 2.1.38, temos:

$$b \neq a \wedge bc \equiv b\sigma_b(c) \wedge ac \equiv a\sigma_b(c) \wedge Lbax \rightarrow xc \equiv x\sigma_b(c) \quad (2.193)$$

De (2.188), da definição 2.1.32, (2.188), (2.190) e destacamento, decorre:

$$xc \equiv x\sigma_b(c) \quad (2.194)$$

Pela definição 2.1.42, temos:

$$xb \perp bc :\leftrightarrow x \neq b \wedge b \neq c \wedge xc \equiv x\sigma_b(c) \quad (2.195)$$

De (2.187), (2.188), (2.192) e (2.193), segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.44.**  $ab \perp bc \wedge Lbcd \wedge d \neq b \rightarrow ab \perp bd$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.399.  $\square$

O próximo resultado garante que a relação  $\perp$  é simétrica.

**Lema 2.1.45.**  $ab \perp bc \leftrightarrow cb \perp ba$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.399.  $\square$

**Lema 2.1.46.**  $\neg Labx \wedge Labc \wedge La'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ac \equiv a'c' \wedge ax \equiv a'x' \wedge bx \equiv b'x' \rightarrow xc \equiv x'c'$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.400.  $\square$

A partir desse momento o artigo [(Pam04)] fará inúmeras referências a resultados que foram estabelecidos em outros textos. Recorrendo ao que fizemos até aqui e aos artigos [(Pam01a)] e [(Sor84)], Pambuccian conclui que os axiomas de Sörensen para os planos métricos não elípticos valem em  $(\Sigma_{\mathcal{H}} \setminus \{A18, A19, A22\}) \cup \{(2.1.1)\}$  (sobre a definição e

as propriedades desses planos consultar [(Pam01a)] e [(Pam00)]. Consequentemente, na presença do axioma  $A22$ , todos os modelos  $\mathcal{M}$  de  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  são planos métricos não euclidianos.

Os axiomas de Sörensen foram adaptados para a linguagem  $\mathcal{L}_{L\equiv}$  e estão reunidos em [(Pam00)]. Como podemos ver tanto em [(Pam01a)] quanto em [(Pam00)], poderíamos expressar o sistema de Sörensen em  $\mathcal{L}_{\equiv}$ , pois podemos primeiro definir o predicado de colinearidade  $L$  em termos de  $\equiv$  da seguinte forma:

$$L(abc) :\leftrightarrow (\exists uv)u \neq v \wedge au \equiv av \wedge bu \equiv bv \wedge cu \equiv cv$$

### Sistema axiomático para planos métricos não elípticos

$$K1: Laba$$

$$K2: Labc \rightarrow Lcba \wedge Lbac$$

$$K3: a \neq b \wedge Labc \wedge Labd \rightarrow Lacd$$

$$K4: ab \equiv ab$$

$$K5: ab \equiv cd \wedge ab \equiv ef \rightarrow cd \equiv ef$$

$$K6: ab \equiv ba$$

$$K7: aa \equiv bb$$

$$K8: ab \equiv cc \rightarrow a = b$$

$$K9: (\forall abca'b')(\exists^{-1}c')a \neq b \wedge Labc \wedge ab \equiv a'b' \rightarrow La'b'c' \wedge ac \equiv a'c' \wedge bc \equiv b'c'$$

$$K10: \neg Labx \wedge Labc \wedge La'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ac \equiv a'c' \wedge ax \equiv a'x' \wedge bx \equiv b'x' \rightarrow xc \equiv x'c'$$

$$K11: (\forall abx)(\exists^{-1}x')\neg Labx \rightarrow x' \neq x \wedge ax \equiv ax' \wedge bx \equiv bx'$$

$$K12: \neg Labx \wedge \neg Laby \wedge ax \equiv ax' \wedge bx \equiv bx' \wedge x \neq x' \wedge ay \equiv ay' \wedge by \equiv by' \wedge y \neq y' \rightarrow xy \equiv x'y'$$

$$K13: (\forall abxx')(\exists y)(\neg Labx \wedge x' \neq x \wedge ax \wedge ax' \wedge bx \equiv bx' \rightarrow Laby \wedge Lxx'y)$$

$$K14: (\forall ab)(\exists^{-1}b')(a \neq b \rightarrow Labb' \wedge ab \wedge ab' \wedge b' \neq b)$$

$$K15: (\forall xyzab)(\exists c)(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge L(xyz) \wedge L(xya) \wedge ax \equiv ay \wedge L(yzb) \wedge by \equiv bz \rightarrow cz \equiv cx)$$

$K16: \neg Lxyz \wedge Laxy \wedge ax \equiv ay \wedge Lbzy \wedge bz \equiv by \wedge Lcxz \wedge cx \equiv cz \rightarrow \neg Labc$

$K17: (\exists abc)\neg Labc$

**Teorema 2.1.47.**  $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash \{K1 - K17\}$

*Demonstração.* Indicaremos onde estão as provas.

- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K1$ : segue da definição 2.1.1 e do lema 2.1.2;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K2$ : segue da definição 2.1.1 e do axioma  $A5$ ;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K3$ : segue da definição 2.1.1 e dos axiomas  $A7$  e  $A6$ ;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K4$ : é o lema 2.1.5;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K5$ : é o lema 2.1.28;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K6$ : é o lema 2.1.6;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K7$ : é o lema 2.1.3;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K8$ : é o lema 2.1.4;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K9$ : é o lema 2.1.41;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K10$ : é o lema 2.1.46;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash \{K11, K12, K13, K14, K15\}$ : consultar [(Pam04)], pág. 399 e [(Rig75)];
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K16$ : segue do axioma  $A20$ ;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash K17$ : é o lema 2.1.31.

□

Em seguida, assumindo um resultado estabelecido em [(Gup65)], Pambuccian prepara o terreno para a prova da forma interna do axioma de Pasch:

**Lema 2.1.48.**  $(\forall abcde)(\exists f)\neg Lacd \wedge Babc \wedge Bade \rightarrow Bbfe \wedge Bcfd$

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág. 402.

□

Estabelecido o lema 2.1.48, pode-se afirmar que  $\mathcal{M}$  tem de ser o plano da geometria absoluta. Nessas condições, recorrendo a um resultado de Pejas (veja em [(? )]), Pambuccian conclui que  $\mathcal{M}$  deve ser isomorfo ao espaço de Klein sobre um corpo ordenado euclidiano.

**Teorema 2.1.49.**  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  é um sistema de axiomas para a geometria hiperbólica plana sobre corpos ordenados euclidianos, isto é, todo modelo de  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  é isomorfo ao modelo bidimensional de Klein sobre um corpo ordenado euclidiano.

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.402. □

Já sabemos que os axiomas de Sörensen para os planos métricos não elípticos valem em  $(\Sigma_{\mathcal{H}} \setminus \{A18, A19, A22\}) \cup \{(1)\}$ . Então, eles valem também em  $\Sigma_{\mathcal{E}} := \{A1 - A20, \neg A22\}$ .

**Teorema 2.1.50.**  $\Sigma_{\mathcal{E}}$  é um sistema de axiomas para a geometria euclidiana plana sobre os corpos ordenados euclidianos.

*Demonstração.* Consultar [(Pam04)], pág.406. □

Finalmente, em razão do teorema 2.1.49, estamos diante de um sistema de axiomas capaz de expressar a geometria hiperbólica. E, pelo teorema 2.1.50, temos um sistema de axiomas para a geometria euclidiana. Como dissemos no início deste capítulo, já se sabia que o sistema  $\Sigma_{\mathcal{E}}$  não era o mais simples. Mas, no caso hiperbólico, essa questão permanecia em aberto. Como veremos a seguir, justamente o único axioma que possui seis variáveis é supérfluo — portanto, pode ser eliminado do sistema. E, nesse caso, teremos o mais simples sistema de axiomas para a geometria hiperbólica.

## 2.2 Um sistema axiomático simples

No início de sua tese (ver em [(Pam93)]), Pambuccian aponta os motivos pelos quais é necessário ir além do senso comum no que diz respeito à questão da simplicidade dos sistemas axiomáticos. Há um certo acordo informal de que as “simplificações feitas por Tarski para o sistema de axiomas de Hilbert diferem das outras simplificações em razão da simplicidade da linguagem e dos axiomas” [(Pam93), pág.7]. Mas esse acordo, além de ser relativo, carece de objetividade. Qual seria o critério absoluto para decidir se o sistema de Tarski pode ou não ser simplificado um pouco mais?

Em [(Pam93)], há várias maneiras de tornar esse conceito preciso. Utilizaremos a seguinte

**Definição 2.2.1.** *Um sistema de axiomas  $\Sigma$ , para uma teoria finitamente axiomatizável  $\mathbb{T}$ , em uma linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , é simples e tem grau de simplicidade  $gs(\mathbb{T}) = n$ , se todo axioma em  $\Sigma$ , quando escrito na forma prenexa, tem no máximo  $n$  variáveis e não existe sistema de axiomas para  $\mathbb{T}$  em que todos os axiomas, quando escritos na forma prenexa, têm, no máximo,  $n - 1$  variáveis.*

Depois de estabelecido, na seção anterior, um sistema axiomático capaz de expressar a geometria hiperbólica, nosso segundo movimento será em direção a um sistema de axiomas que, além desse poder, seja mais simples que  $\Sigma_{\mathcal{H}}$ . Na época da publicação de [(Pam04)], já era possível afirmar que  $\Sigma_{\mathcal{E}}$  não era o mais simples sistema de axiomas para a geometria euclidiana plana. O motivo dessa certeza havia sido publicado em [(Pam89)], onde ficou estabelecido que o grau de simplicidade de um sistema axiomático que expressa a geometria euclidiana plana é igual a 5. No entanto, ainda não era possível dizer a mesma coisa com relação a  $\Sigma_{\mathcal{H}}$ . Para a parte hiperbólica, só era possível afirmar que o grau tinha de ser, no mínimo, igual a 5.

Agora, acompanhados do breve artigo [(Pam11)], veremos um sistema axiomático que consegue expressar a geometria hiperbólica plana e onde o axioma  $A_{20}$  não é necessário. Assim, na presença da definição 2.2.1, estaremos diante do sistema de axiomas mais simples possível e cujo grau de simplicidade é 5; e isso é o melhor que podemos ter.

O sistema axiomático a seguir é devido a Carsten Augat e foi reformulado na linguagem tarskiana por Pambuccian. Nesse sistema, todo par de pontos tem um ponto médio. Assim como Sörensen, Augat apresenta um sistema axiomático para os planos métricos

não elípticos. Só que, ao contrário de Sörensen, Augat não faz uso do axioma  $A20$ . E o melhor: aqui também Pambuccian prova Augat.

### Sistema axiomático para planos métricos com pontos médios

M1:  $Laba$

M2:  $Labc \rightarrow Lcba \wedge Lbac$

M3:  $a \neq b \wedge Labc \wedge Labd \rightarrow Lacd$

M4:  $ab \equiv cd \wedge ab \equiv ef \rightarrow cd \equiv ef$

M5:  $ab \equiv ba$

M6:  $ab \equiv cc \rightarrow a = b$

M7:  $(\forall ab)(\exists c)Labc \wedge ca \equiv cb$

M8:  $(\forall ab)(\exists c)a \neq b \rightarrow Labc \wedge ab \equiv ac \wedge b \neq c$

M9:  $p \neq q \wedge ap \equiv aq \wedge bp \equiv bq \rightarrow (cp \equiv cq \leftrightarrow Labc)$

M10:  $a \neq c \wedge b \neq d \wedge Lamc \wedge ma \equiv mc \wedge L(bmd) \wedge mb \equiv md \rightarrow ad \equiv bc$

M11:  $(\forall abp)(\exists p')\neg Labp \rightarrow p \neq p' \wedge ap \wedge ap' \wedge bp \equiv bp'$

M12:  $(\exists abc)\neg Labc$

**Teorema 2.2.2.**  $\Delta_{\mathcal{H}} \vdash \{M1 - M12\}$

*Demonstração.* Vamos examinar algumas implicações:

- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash M1$ : basta recorrer à definição 2.1.1 e ao lema 2.1.2;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash M2$ : basta recorrer à definição 2.1.1 e ao axioma  $A5$ ;
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash M3$ : por hipótese e na presença da definição 2.1.1, temos:

$$a \neq b \tag{2.196}$$

e uma das conjunções a seguir:

$$Babc \wedge Babd \tag{2.197}$$

$$Babc \wedge Bbda \quad (2.198)$$

$$Babc \wedge Bdab \quad (2.199)$$

$$Bbca \wedge Babd \quad (2.200)$$

$$Bbca \wedge Bbda \quad (2.201)$$

$$Bbca \wedge Bdab \quad (2.202)$$

$$Bcab \wedge Babd \quad (2.203)$$

$$Bcab \wedge Bbda \quad (2.204)$$

$$Bcab \wedge Bdab \quad (2.205)$$

Vamos analisar algumas possibilidades.

Pelo axioma  $A6$ , podemos escrever:

$$Bcab \wedge Badb \rightarrow Bcad \quad (2.206)$$

$$Bdab \wedge Bacb \rightarrow Bdac \quad (2.207)$$

Pelo axioma  $A7$ , temos:

$$a \neq b \wedge ((Babc \wedge Babd) \vee (Babc \wedge Bdab) \vee (Bbca \wedge Bbda)) \rightarrow Lacd \quad (2.208)$$

$$a \neq b \wedge ((Babd \wedge Babc) \vee (Babd \wedge Bcab) \vee (Bbda \wedge Bbca)) \rightarrow Ladc \quad (2.209)$$

De (2.196), (2.202),  $A5$ , definição 2.1.1 e destacamento, temos  $Lacd$ .

De (2.200), (2.205),  $A5$ , definição 2.1.1 e destacamento, segue  $Lacd$ .

De [(2.195) ou (2.197) ou (2.199)], (2.206) e destacamento, segue  $Lacd$

De (2.201), (2.207) e destacamento, decorre  $Ladc$  e, conseqüentemente,  $Lacd$ .

- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash M4$ : conseqüência imediata do lema 2.1.28 e do axioma  $A1$ .
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash M5$ : esse resultado é o nosso lema 2.1.6.
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash M6$ : esse resultado é o nosso lema 2.1.4.
- $\Sigma_{\mathcal{H}} \vdash M7$ : conseqüência imediata do axioma  $A14$  e da definição 2.1.1.

Para o restante da prova, consultar [(? )], pág. 349.

□



**Observação 2.2.3.** *A partir de agora, utilizaremos a notação  $\Delta_{\mathcal{H}}$  para nos referir ao novo sistema de axiomas sem a presença do axioma  $A20$ ; ou seja:*

$$\Delta_{\mathcal{H}} := \Sigma_{\mathcal{H}} \setminus \{A20\} \tag{2.210}$$

Por causa do teorema 2.2.2, podemos afirmar que  $\Delta_{\mathcal{H}}$  é, na linguagem unissortida de Tarski, um sistema de axiomas para a geometria hiperbólica plana, cujos axiomas, na forma prenexa, são proposições com, no máximo, cinco variáveis. O axioma  $A20$  é supérfluo. Portanto, até aqui temos dois sistemas de axiomas (o  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  e o  $\Delta_{\mathcal{H}}$ ) que conseguem expressar a geometria hiperbólica plana; e, no sentido da definição 2.2.1, o sistema  $\Delta_{\mathcal{H}}$  é o mais simples.



## Revisitando o conceito de simplicidade

Vimos, pelo critério sintático, dado pela definição 2.2.1, que, numa linguagem  $\mathcal{L}_{\mathcal{B}\equiv}$  à la Tarski, o  $\Delta_{\mathcal{H}}$  é o mais simples sistema de axiomas para a geometria hiperbólica. Mas será que de outro ponto de vista esse mesmo sistema  $\Delta_{\mathcal{H}}$  comportaria outras simplificações? A resposta é positiva, e é isso que veremos neste capítulo. Revisitaremos dois sistemas de axiomas que já foram examinados nesta dissertação: o sistema  $\Delta_{\mathcal{H}}$  e o sistema  $\mathcal{A}$  de Tarski (que, como vimos no capítulo 1, tem poder para expressar a geometria absoluta axiomatizada por Hilbert).

Primeiramente, veremos, por meio do artigo [(Ala14)], que é possível simplificar ainda mais o sistema axiomático  $\Delta_{\mathcal{H}}$  de Pambuccian. Nesse caso, a ideia básica consiste em efetuar uma decomposição em alguns axiomas sem alterar o poder do sistema. Essa cisão será efetuada em alguns axiomas que tenham uma das seguintes formas:

$$(\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2)) \rightarrow \chi$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi)$$

Essas cisões, como observa Alama, não alteram o conjunto dos teoremas. Daí, comparando as classes dos modelos do sistema original com as do que foi submetido a cisões, não há nada de novo. Mas esse tipo de operação tem a grande vantagem de permitir ver o que antes estava invisível: “No entanto, isso pode ser matematicamente significativo, permitindo que você veja dependências lógicas anteriormente despercebidas” [(Ala14)].

Em seguida, voltaremos a atenção para o sistema axiomático  $\mathcal{A}$  de Tarski e, na companhia do Makarios, veremos que uma sutil alteração nesse sistema pode torná-lo mais simples. É um outro modo de entender a simplificação de um sistema axiomático e que tem resultados surpreendentes.

### 3.1 Simplificando via cisões

Nesta seção, seguindo os passos de Jesse Alama, veremos que há um outro modo de olhar para a simplicidade de um sistema de axiomas. Revisitaremos o sistema  $\Delta_{\mathcal{H}}$  e mostraremos que, via cisões, é possível simplificá-lo ainda mais. Aqui, a ideia central consiste em buscar dependências. Consideraremos um sistema de axiomas equivalente a  $\Delta_{\mathcal{H}}$ , mas com alguns axiomas numa forma decomposta.

Essa proposta, que aparece em [(Ala14)], um artigo de 2014, faz um uso intenso de recursos computacionais para encontrar provas de teoremas (os provadores automáticos). Lá, Alama tensiona um pouco mais a proposta de Pambuccian e mostra que, num certo sentido, podemos obter um sistema axiomático ainda mais simples para a geometria hiperbólica. Na verdade, como podemos ver em [(Ala14)], pág. 610), os resultados que apresentaremos fornecerão um sistema de axiomas mais simples para a geometria absoluta.

As cisões serão feitas nos seguintes axiomas do sistema  $\Delta_{\mathcal{H}}$  :

$$A7: a \neq b \wedge ((Babc \wedge Babd) \vee (Babc \wedge Bdab) \vee (Bbca \vee Bbda)) \rightarrow Lacd$$

$$A10: Babc \wedge (Bade \vee Baed) \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow Bade \wedge bc \equiv de$$

$$A13: c \neq a \wedge Bcad \wedge ab \equiv ad \wedge (Bced \vee Bcde) \wedge cb \equiv ce \rightarrow Bced$$

O axioma A7 será substituído por:

$$A7_1: a \neq b \wedge Babc \wedge Babd \rightarrow Lacd$$

$$A7_2: a \neq b \wedge Babc \wedge Bdab \rightarrow Lacd$$

$$A7_3: a \neq b \wedge Bbca \vee Bbda \rightarrow Lacd$$

O axioma A10 será substituído por:

$$A10_{1,B}: Babc \wedge Bade \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow Bade$$

$$A10_{1,\equiv}: Babc \wedge Bade \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow bc \equiv de$$

$$A10_{2,B}: Babc \wedge Baed \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow Bade$$

$$A10_{2,\equiv}: Babc \wedge Baed \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow bc \equiv de$$

O axioma A13 será substituído por:

$$A13_1: c \neq a \wedge Bcad \wedge ab \equiv ad \wedge Bced \wedge cb \equiv ce \rightarrow Bced$$

$$A13_2: c \neq a \wedge Bcad \wedge ab \equiv ad \wedge Bcde \wedge cb \equiv ce \rightarrow Bced$$

Agora, seja  $\Theta$  o sistema de axiomas obtido a partir de  $\Delta_{\mathcal{H}}$  da seguinte maneira:

$$\Theta := (\Delta_{\mathcal{H}} \setminus \{A7, A10, A13\}) \cup \{A7_1, A7_2, A7_3\} \cup \{A10_{1,B}, A10_{1,\equiv}, A10_{2,B}, A10_{2,\equiv}\} \\ \cup \{A13_1, A13_2\}$$

E seja  $\Psi$  o sistema de axiomas obtido a partir de  $\Theta$  da seguinte maneira:

$$\Psi := \Theta \setminus \{A7_2, A7_3, A10_{1,B}, A10_{2,\equiv}, A13_1\}$$

Denotaremos o conjunto de todas as conseqüências lógicas de um determinado sistema axiomático  $\Omega$  por  $C_n(\Omega)$ .

**Lema 3.1.1.**  $C_n(\Theta) = C_n(\Delta_{\mathcal{H}})$

*Demonstração.* Não há o que fazer, já que  $\Theta$  é apenas uma reformulação de  $\Delta_{\mathcal{H}}$ ; e, conseqüentemente, os dois sistemas axiomáticos têm o mesmo poder expressivo.  $\square$

**Lema 3.1.2.**  $\Theta \setminus \{A7_2\} \vdash A7_2$

*Demonstração.* Assuma que:

$$a \neq b \wedge Babc \wedge Bdab \tag{3.1}$$

Devemos mostrar que:

$$Lacd$$

Pelo axioma A15, podemos escrever:

$$(\forall axc)(\exists y)[Byac \wedge ax \equiv ay] \tag{3.2}$$

Vamos denotar o ponto  $y$  por  $r(x)$ ; ou seja:

$$y := r(x) \tag{3.3}$$

**Afirmção 1:**  $\forall xBr(x)ab$

De fato, pelo axioma A6, temos:

$$Br(x)ac \wedge Babc \rightarrow Br(x)ab \tag{3.4}$$

De (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) e destacamento, segue o resultado afirmado.

**Afirmção 2:**  $\forall x[Bxab \rightarrow r(x) = x]$

Assuma que:

$$Bxab \tag{3.5}$$

Pelo axioma A11, temos:

$$Br(x)ab \wedge Bxab \wedge ar(x) \equiv ax \wedge ab \equiv ab \rightarrow r(x)b \equiv xb \tag{3.6}$$

Da afirmação 1, de (3.5), (3.2), (3.3), (3.6), A1, A2 e destacamento, decorre:

$$bx \equiv br(x) \tag{3.7}$$

Pelo axioma A9, temos:

$$b \neq a \wedge bx \equiv br(x) \wedge ax \equiv ar(x) \wedge Bbar(x) \rightarrow r(x)x \equiv r(x)r(x) \tag{3.8}$$

De (3.1), (3.7), (3.2), (3.3), da afirmação 1, do A5 e destacamento, segue:

$$r(x)x \equiv r(x)r(x) \tag{3.9}$$

Pelo axioma A3, temos:

$$r(x)x \equiv r(x)r(x) \rightarrow r(x) = x \tag{3.10}$$

De (3.9), (3.10) e destacamento, segue o resultado afirmado.

**Afirmção 3:**  $r(d) = d$

Na afirmação 2, fazendo  $x = d$ , temos:

$$Bdab \rightarrow r(d) = d \tag{3.11}$$

De (3.1), (3.11) e destacamento, segue o resultado afirmado.

**Afirmção 4:**  $\forall x[Bxab \rightarrow Bxac]$

Assuma que

$$Bxab \tag{3.12}$$

Da afirmação 2, de (3.12) e destacamento, segue:

$$r(x) = x \tag{3.13}$$

De (3.2), (3.3) e (3.13) segue a afirmação 4. Em particular, para  $x = d$ , temos:

$$Bdab \rightarrow Bdac \tag{3.14}$$

De (3.1), (3.14) e destacamento segue o que queríamos.  $\square$

**Lema 3.1.3.**  $\Theta \setminus \{A7_3\} \vdash A7_3$

*Demonstração.* Consultar [(Ala14)], pág. 612.  $\square$

**Lema 3.1.4.**  $\Theta \setminus \{A10_{1,B}\} \vdash A10_{1,B}$

*Demonstração.* É imediata, pois a tese está de modo explícito contida na hipótese.  $\square$

**Lema 3.1.5.**  $\Theta \setminus \{A10_{2,\equiv}\} \vdash A10_{2,\equiv}$

*Demonstração.* Assuma que:

$$Babc \wedge Baed \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \quad (3.15)$$

Devemos provar que:

$$bc \equiv de$$

Pelo axioma  $A10_{2,B}$ , temos:

$$Babc \wedge Baed \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow Bade \quad (3.16)$$

De (3.12), (3.13) e destacamento, segue:

$$Bade \quad (3.17)$$

Pelo axioma  $A10_{1,\equiv}$ , temos:

$$Babc \wedge Bade \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow bc \equiv de \quad (3.18)$$

De (3.12), (3.14), (3.15) e destacamento, segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 3.1.6.**  $\Theta \setminus \{A13_1\} \vdash A13_1$

*Demonstração.* É imediata, pois a tese está de modo explícito contida na hipótese.  $\square$

**Lema 3.1.7.**  $\Psi \vdash A7$

*Demonstração.* Como  $\Psi := \Theta \setminus \{A7_2, A7_3, A10_{1,B}, A10_{2,\equiv}, A13_1\}$ , então, por causa dos axiomas necessários para estabelecer  $A7_2$  e  $A7_3$  (ver a prova dos lemas 3.1.2 e 3.1.3), segue o resultado.  $\square$

**Lema 3.1.8.**  $\Psi \vdash A10$

*Demonstração.* Segue de  $\Psi := \Theta \setminus \{A7_2, A7_3, A10_{1,B}, A10_{2,\equiv}, A13_1\}$  e dos lemas 3.1.4 e 3.1.5.  $\square$

**Lema 3.1.9.**  $\Psi \vdash A13$

*Demonstração.* Segue de  $\Psi := \Theta \setminus \{A7_2, A7_3, A10_{1,B}, A10_{2,\equiv}, A13_1\}$  e dos lema 3.1.6 .  $\square$

**Teorema 3.1.10.**  $C_n(\Psi) = C_n(\Theta) = C_n(\Delta_{\mathcal{H}})$

*Demonstração.* Dos lemas 3.1.6, 3.1.7 e 3.1.8 segue que:

$$C_n(\Theta) \subseteq C_n(\Psi) \quad (3.19)$$

Pelo modo como  $\Psi$  foi definido, temos que  $\Psi \subset \Theta$ . Daí, segue que:

$$C_n(\Psi) \subseteq C_n(\Theta) \quad (3.20)$$

De (3.16), (3.17) e do lema 3.1.1, segue o resultado desejado.  $\square$

As cisões feitas por Alama, além de não alterar o poder expressivo do sistema axiomático  $\Theta$ , têm a virtude de apontar aquilo que realmente é essencial. A operação que ele realiza é uma busca pelo mínimo que os axiomas precisam afirmar. Pelo que ficou estabelecido no teorema 3.1.10, podemos afirmar que o sistema axiomático  $\Psi$  é, no sentido empregado por Alama, mais simples que o sistema  $\Delta_{\mathcal{H}}$ .



### 3.2 Simplificando o sistema tarskiano: a terceira via

*Lutar com palavras  
é a luta mais vã.  
Entanto lutamos  
mal rompe a manhã.*

Carlos Drummond de Andrade

Agora, que estamos a caminho do fim, voltemos ao começo. Consideremos o sistema axiomático  $\mathcal{A}$  de Tarski, aquele sistema maduro iniciado por Tarski e Wanda Szmielew e, em 1983, finalizado e publicado por Wolfram Schwabhäuser. Será que esse sistema de axiomas pode ser simplificado um pouco mais? Aqui, novamente, a resposta é positiva e foi dada por Makarios no artigo *A Further Simplification of Tarski's Axioms of Geometry*.

No capítulo 1, trabalhamos com o sistema de axiomas  $\mathcal{A}$  extraído de [(SST83)], composto por onze axiomas:

$$\mathcal{A} = \{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, CA\}$$

Nesse sistema, os axiomas  $A1$  e  $A5$  afirmavam o seguinte:

$$A1: ab \equiv ba$$

$$A5: a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \longrightarrow cd \equiv c'd'$$

Agora, considere o axioma  $A5'$  dado por:

$$A5': a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \longrightarrow dc \equiv c'd'$$

Seja  $\mathcal{A}'$  o seguinte sistema de axiomas:

$$\mathcal{A}' = \{A2, A3, A4, A5', A6, A7, A8, A9, A10, A11\}$$

Veremos que esses dois sistemas são equivalentes e, portanto, estaremos diante de uma nova simplificação. Seguindo os passos de Makarios, consideraremos dois subconjuntos desses axiomas, a saber:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = \{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7\}$$

$$\mathcal{A}'_{\mathcal{R}} = \{A2, A3, A4, A5', A6, A7\}$$

Makarios observa que o sistema axiomático  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  contém os axiomas de Tarski para a geometria absoluta livre de dimensões e sem o axioma da continuidade. Há uma justificativa para a escolha desses subconjuntos em ([Mak13]), pág. 126).

Nos limitaremos a refazer o principal resultado desse artigo, que afirma a equivalência entre os sistemas axiomáticos  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  e  $\mathcal{A}'_{\mathcal{R}}$ .

Sugerimos que se compare o resultado seguinte com o dos lemas 1.4.1(i) e 2.1.5.

**Lema 3.2.1.**  $ab \equiv ab$

*Demonstração.* Pelo axioma A4, temos que existe um ponto  $x$  tal que:

$$ax \equiv ab \tag{3.21}$$

Pelo axioma A2, temos:

$$ax \equiv ab \wedge ax \equiv ab \rightarrow ab \equiv ab \tag{3.22}$$

De (3.21), (3.22) e destacamento segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 3.2.2.**  $ab \equiv cd \rightarrow cd \equiv ab$

*Demonstração.* Segue do axioma A2 e do lema 3.2.1. Além disso, já fizemos essa prova no capítulo 1, no lema 1.4.1(ii).  $\square$

**Lema 3.2.3.**  $Babb$

*Demonstração.* Segue dos axiomas A4 e A3. Além disso, já fizemos essa prova no capítulo 1, no lema 1.4.7(i).  $\square$

**Lema 3.2.4.**  $Babc \rightarrow Bcba$

*Demonstração.* Segue dos axiomas A7, A6 e lema 3.2.3 (ou axiomas A4 e A3). Além disso, já fizemos essa prova no capítulo 1, no lema 1.4.7(ii).  $\square$

**Lema 3.2.5.**  $\mathcal{A}'_{\mathcal{R}} \vdash A1$

*Demonstração.* Pelo axioma A4, temos que existe um ponto  $x$  tal que:

$$Bbax \tag{3.23}$$

$$ax \equiv ba \quad (3.24)$$

Como já fizemos em várias provas, basta examinar os casos  $x = a$  e  $x \neq a$ . Vamos considerar o caso em que:

$$x = a \quad (3.25)$$

Pelo lema 3.2.2, temos:

$$aa \equiv ba \rightarrow ba \equiv aa \quad (3.26)$$

De (3.24), (3.25), (3.26) e destacamento, segue:

$$ba \equiv aa \quad (3.27)$$

Pelo axioma  $A3$ , podemos escrever:

$$ba \equiv aa \rightarrow b = a \quad (3.28)$$

De (3.27), (3.28) e destacamento, segue  $b = a$ . Daí, na presença de (3.27), segue o resultado desejado nesse caso.

Agora, vamos assumir que:

$$x \neq a \quad (3.29)$$

Pelos lemas 3.2.1, 3.2.4 e pelo axioma  $A5'$ , temos respectivamente:

$$xa \equiv xa \wedge ab \equiv ab \wedge xa \equiv xa \wedge aa \equiv aa \quad (3.30)$$

$$Bbax \rightarrow Bxab \quad (3.31)$$

$$x \neq a \wedge Bxab \wedge Bxab \wedge xa \equiv xa \wedge ab \equiv ab \wedge xa \equiv xa \wedge aa \equiv aa \longrightarrow ab \equiv ba \quad (3.32)$$

De (3.23), (3.31) e destacamento, segue:

$$Bxab \quad (3.33)$$

De (3.29), (3.33), (3.30), (3.32) e destacamento, decorre o resultado desejado.  $\square$

Vale observar que o resultado anterior também apareceu no sistema  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  de Pambuccian. Veja o lema 2.1.6.

**Lema 3.2.6.** *Os axiomas  $A5$  e  $A5'$  são equivalentes.*

*Demonstração.* Lembremos que esses dois axiomas são implicações cujos antecedentes são iguais. Então, para mostrar que eles são equivalentes, basta provar que seus consequentes são equivalentes. Assim, nosso problema consiste em mostrar que vale:

$$cd \equiv c'd' \leftrightarrow dc \equiv c'd'$$

Assuma que:

$$cd \equiv c'd' \tag{3.34}$$

Pelo axioma  $A1$ , temos:

$$cd \equiv dc \tag{3.35}$$

Pelo axioma  $A2$ , temos:

$$cd \equiv dc \wedge cd \equiv c'd' \rightarrow dc \equiv c'd' \tag{3.36}$$

De (3.35), (3.34), (3.36) e destacamento, segue que  $dc \equiv c'd'$ .

Reciprocamente, assuma que:

$$dc \equiv c'd' \tag{3.37}$$

Pelos axiomas  $A1$  e  $A2$ , podemos escrever, respectivamente:

$$dc \equiv cd \tag{3.38}$$

$$dc \equiv cd \wedge dc \equiv c'd' \rightarrow cd \equiv c'd' \tag{3.39}$$

De (3.38), (3.37), (3.39) e destacamento, segue que  $cd \equiv c'd'$ .  $\square$

**Teorema 3.2.7.**  $\mathcal{A}'_{\mathcal{R}}$  é equivalente a  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$

*Demonstração.* Pelo que ficou definido, sabemos que:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = \{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7\} \tag{3.40}$$

$$\mathcal{A}'_{\mathcal{R}} = \{A2, A3, A4, A5', A6, A7\} \tag{3.41}$$

$\mathcal{A}'_{\mathcal{R}} \vdash \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$  :

Pelo lema 3.2.5, temos que:

$$\mathcal{A}'_{\mathcal{R}} \vdash A1 \tag{3.42}$$

Pelo lema 3.2.6 e (3.41), temos que:

$$\mathcal{A}'_{\mathcal{R}} \vdash A5 \tag{3.43}$$

Além disso, é claro que:

$$\mathcal{A}'_{\mathcal{R}} \vdash \{A2, A3, A4, A6, A7\} \tag{3.44}$$

De (3.40), (3.42), (3.43), (3.44), segue que  $\mathcal{A}'_{\mathcal{R}} \vdash \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ .

$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \vdash \mathcal{A}'_{\mathcal{R}}$  :

Pelo lema 3.2.6 e (3.40), temos que:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \vdash A5' \tag{3.45}$$

Além disso, é claro que:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \vdash \{A2, A3, A4, A6, A7\} \tag{3.46}$$

De (3.41), (3.45), (3.46), segue que  $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \vdash \mathcal{A}'_{\mathcal{R}}$ . □

**Corolário 3.2.8.**  *$\mathcal{A}'$  e  $\mathcal{A}$  são equivalentes.*

A pequena e, diria até, surpreendente permutação no consequente do axioma dos cinco segmentos permitiu a Makarios exibir um sistema axiomático com apenas dez axiomas e, pelo corolário 3.2.8, com o mesmo poder expressivo que os onze de [(SST83)]. Portanto, do ponto de vista abordado nesta terceira via, estamos diante de um sistema de axiomas mais simples que aquele fornecido em *Metamathematische Methoden in Der Geometrie*.



## Conclusão

*Geometrically, Tarski-elementary plane geometry certainly seems mysterious, but the representation theorem illuminates the analytic geometry underlying it: its models are all Cartesian planes coordinatized by real-closed fields.*

[[Gre11]]

*Nos primeiros momentos deste trabalho, quando tudo era apenas intenção, existiam várias questões que me interessava examinar. Pretendia fazer geometria elementar e, ao mesmo tempo, ter um crivo para a simplicidade desses sistemas; e, ao fazer matemática no interior dessa geometria, ter condições de falar com exatidão sobre o seu poder expressivo.*

*Acredito que, ao articular alguns artigos, conseguimos respostas para essas questões. Os argumentos sempre podem ser melhorados. Numa outra oportunidade, penso que, no capítulo 1, seja interessante examinar, detalhadamente, a prova do postulado das paralelas e do axioma da continuidade. No capítulo 2, há espaço para trabalhar um pouco mais nos argumentos finais que mostram que o sistema  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  é capaz de capturar a geometria hiperbólica plana. Além disso, é possível examinar o grau de simplicidade via o jogo de Ehenfeucht-Fraïssé. Por fim, será preciso explorar os provadores automáticos.*

*As questões destacadas acima - e que merecem um estudo mais detalhado - foram, em certa medida, contempladas nesta dissertação. No entanto, há outras que ficaram apenas no plano do inconsciente. Dessas, destaco alguns resultados metamatemáticos que valem para a geometria tarskiana: o teorema da representação, que permite caracterizar todos os modelos dessa teoria; a decidibilidade; e a completude dessa geometria. Penso em seguir por aí futuramente.*





## Referências Bibliográficas

- [Ala14] Alama, J. *The simplest Axiom System for Hyperbolic geometry Revisited, Again*, *Studia Logica* 102 (2014), 609-615.
- [Bee] Beeson, M., *Proving Hilbert's axioms in Tarski Geometry*. Disponível em <http://www.michaelbeeson.com/research/papers/TarskiProvesHilbert.pdf>
- [BS60] Borsuk, K. e Szmielew, W., *Foundations of Geometry*, North-Holland, 1960.
- [BN12] Braun, G. e Narboux, J., *From Tarski to Hilbert*. In Tetsuo Ida and Jacques Fleuriot, editors, *Post-proceedings of Automated Deduction in Geometry 2012*, volume 7993 of LNCS, pages 89–109, Edinburgh, United Kingdom, September 2012. Springer.
- [Gio13] Giovannini, E.N. Completitud y continuidad en Fundamentos de la geometría de Hilbert: acerca del Vollständigkeitsaxiom, *THEORIA* vol 28 n1, 2013. Disponível em <http://www.ehu.es/ojs/index.php/THEORIA/article/view/4544>
- [Gre11] Greenberg, M.J. *Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, The mathematical association of america [he *American Mathematical Monthly*, vol. 117, no. 3, March 2010, pp. 198-219]
- [Gup65] Gupta, H. N., *Contributions to the axiomatic foundations of Euclidean geometry*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1965.
- [Hil77] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, 12. Auflage, B.G.Teubner, Stuttgart, 1977.
- [Hil03] Hilbert, D., *Fundamentos da Geometria*, Gradiva, 2003.

- [Har00] *Hartshorne, R.*, Geometry: Euclid and Beyond , *Springer, 2000.*
- [Las09] *Lascar, D.*, La théorie des modèles en peu de maux, *Cassini,2009.*
- [Mak12] *Makarios, T. J. M.*, A Mechanical Verification of the Independence of Tarski's Euclidean Axiom, *Master's Thesis, Victoria University of Wellington, New Zealand, 2012, Disponível em [http:// researcharchive.vuw.ac.nz/handle/10063/2315](http://researcharchive.vuw.ac.nz/handle/10063/2315).*
- [Mak13] *Makarios, T.J.M.*, A further simplification of Tarski's axioms of geometry, *Note di Matematica 33 (2013) n°2 123-132.*
- [Pam93] *Pambuccian, V.* The axiomatics of Euclidean geometry, *Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1993.*
- [Pam88] *Pambuccian, V.*, *Simplicity*, *Notre Dame Journal Formal Logic 29 (1988), 396-411.*
- [Pam89] *Pambuccian, V.*, *Simple axiom systems for Euclidean geometry*, *Mathematical Chronicle 18 (1989), 63-74.*
- [Pam04] *Pambuccian, V.*, *The simplest axiom system for plane hyperbolic geometry*, *Studia Logica 77 (2004), 385-411.*
- [Pam11] *Pambuccian, V.*, *The simplest axiom system for plane hyperbolic geometry revisited*, *Studia Logica 97(3): 347-349,2011.*
- [Pam01a] *Pambuccian, V.*, *Fragments of Euclidean and hyperbolic geometry*, *Scientiae Mathematicae Japonicae 53 (2001), 361-400.*
- [Pam01b] *Pambuccian, V.*, *Constructive axiomatization of plane absolute, Euclidean and hyperbolic geometry*, *Mathematical Logic Quarterly 47 (2001), 129-135.*
- [Pam00] *Pambuccian, V.*, *Fragmente der ebenen hyperbolischen Geometrie. Disponível em [http://www.public.asu.edu/~ pusunac/papers/bachmann4.pdf](http://www.public.asu.edu/~pusunac/papers/bachmann4.pdf)*
- [Pam03] *Pambuccian, V.*, *Constructive Axiomatization of Non-elliptic Metric Planes*, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, Vol. 51, No. 1, 2003*
- [Rei70] *Reid, C.*, Hilbert. *Springer, 1970.*

- 
- [Rig75] Rigby, J. F., *Axioms for Absolute geometry*, Mathematical Chronicle 4 (1975), 158-181.
- [SST83] Schwabhäuser, W., Szmielew, W., Tarski, A., *Metamatematische Methoden in Der Geometrie*, Spring-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.
- [Sor84] Sörensen, K., *Ebenen mit Kongruenz*, Journal of Geometry, vol.22 (1984).
- [Tar59] Tarski, A., *What is Elementary Geometry?* pp. 16-29 in: The Axiomatic Method, North-Holland, Amsterdam, 1959.
- [GT99] Tarski, A., Givant, S., *Tarski's system of geometry*. Bulletin of Symbolic Logic, 5, n.2, 1999.
- [Ven11] Venturi, G., *Hilbert, Completeness and Geometry*, Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior, 2011.