Extensões biduais de operadores lineares e multilineares entre espaços de Riesz e reticulados de Banach

Luis Alberto Garcia Santisteban

Tese apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor
recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo
Março de 2023

Extensões biduais de operadores lineares e multilineares entre espaços de Riesz e reticulados de Banach

Luis Alberto Garcia Santisteban

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 3 de Março de 2023.

Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (orientador) – FAMAT-UFU
Profª. Drª. Mary Lilian Lourenço – IME-USP
Profª. Drª. Maria Pilar Rueda Segado – Universidad de Valencia
Prof. Dr. José Lucas Pereira Luiz – IFNMG
Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB

Ficha catalográfica elaborada com dados inseridos pelo(a) autor(a)
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Garcia Santisteban, Luis Alberto
Extensões biduais de operadores lineares e multilineares entre espaços de Riesz e reticulados de Banach / Luis Alberto Garcia Santisteban; orientador, Geraldo Márcio de Azevedo Botelho. - São Paulo, 2023.
123 p.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática / Instituto de Matemática e Estatística / Universidade de São Paulo.
Bibliografia
Versão corrigida

1. Espaços de Riesz e reticulados de Banach. 2. Extensões de Arens/Aron-Berner. 3. Multimorfismos de Riesz. 4. Ordem continuidade. 5. Operadores quase Dunford-Pettis. I. Azevedo Botelho, Geraldo Márcio de. II. Título.

Bibliotecárias do Serviço de Informação e Biblioteca
Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP, responsáveis pela
estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Maria Lúcia Ribeiro CRB-8/2766; Stela do Nascimento Madruga CRB 8/7534.

Dedico a Paula Santisteban Llauce
e Luciano Garcia Chapoñan.

Agradecimentos

A maior recompensa para o trabalho do homem não é o que ele ganha com isso, mas o que ele se torna com isso.
— Jhon Ruskin

Agradeço a Deus por estar com boa saúde e pela força que me dá dia a dia para seguir em frente com meus objetivos traçados.

Aos meus pais, Paula Santisteban Llauce e Luciano Garcia Chapoñan, a minhas irmãs Felicita, Carmen, Laura, Nelly e Delcy, a meus irmãos Genaro e Lorenzo e a todos meus sobrinhos e minhas sobrinhas. Todos eles são parte de minha vida e são meu motivo para seguir em frente e lograr meus objetivos.

A Kassandra, pelo companhia e apoio durante meu Doutorado.

Ao meu orientador, Geraldo Botelho, por ter aceitado ser meu orientador no meu Doutorado, pelo apoio e paciência durante o desenvolvimento desta tese.

Pelo carinho e pela ajuda na estadia em Uberlândia, agradeço a Sirlene Cardoso, minha mãe Brasileira e a Sonia, uma das melhores amigas que conheci em São Paulo. Estou muito grato a vocês.

A CAPES, pelo apoio financeiro durante os quatro anos de Doutorado.

Ao programa de Doutorado em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística. É uma honra para mim, ter a oportunidade de realizar meus estudos de doutorado com as condições necessárias durante estes quatro anos de formação e pesquisa.

Resumo

Luis Alberto Garcia Santisteban. **Extensões biduais de operadores lineares e multilineares entre espaços de Riesz e reticulados de Banach**. Tese (Doutorado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

O objetivo desta tese é investigar propriedades de reticulado das $m!$ extensões de Arens de um operador m-linear entre espaços de Riesz. No caso em que os espaços envolvidos são reticulados de Banach, tais extensões também são chamadas de extensões de Aron-Berner. Provaremos resultados originais sobre os seguintes temas: (i) Extensões de Arens de operadores multilineares positivos e regulares. (ii) Extensões de Arens de multimorfismos de Riesz. (iii) Adjuntos e biadjuntos de operadores lineares regulares quase Dunford-Pettis definidos em reticulados de Banach. (iv) Extensões de Arens de operadores multilineares regulares separadamente ordem contínuos entre espaços de Riesz. (v) Ordem continuidade das extensões de Arens de polinômios homogêneos regulares entre espaços de Riesz. (vi) Extensões de Aron-Berner de operadores multilineares separadamente quase Dunford-Pettis entre reticulados de Banach. (vii) Extensões de Aron-Berner de operadores multilineares quase Dunford-Pettis entre reticulados de Banach.

Palavras-chave: Espaços de Riesz. Reticulados de Banach. Extensões de Arens/Aron-Berner. Multimorfismos de Riesz. Ordem continuidade. Operadores quase Dunford-Pettis.

Abstract

Luis Alberto Garcia Santisteban. **Bidual extensions of linear and multilinear operators between Riesz spaces and Banach lattices**. Thesis (Doctorate). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

The main purpose of this thesis is to investigate lattice properties of the $m!$ Arens extensions of an m-linear operator between Riesz spaces. In the case the underlying spaces are Banach lattices, such extensions are also called Aron-Berner extensions. The new results we prove address the following topics: (i) Arens extensions of positive and regular multilinear operators. (ii) Arens extensions of Riesz multimorphisms. (iii) Adjoints and second adjoints of regular linear almost Dunford-Pettis operators between Banach lattices. (iv) Arens extensions of separately order continuous regular multilinear operators between Riesz spaces. (v) Order continuity of the Arens extensions of regular homogeneous polynomials between Riesz spaces. (vi) Aron-Berner extensions of separately almost Dunford-Pettis multilinear operators between Banach lattices. (vii) Aron-Berner extensions of almost Dunford-Pettis multilinear operators between Banach lattices.

Keywords: Riesz spaces. Banach lattices. Arens/Aron-Berner extensions. Riesz multimorphisms. Order continuity. Almost Dunford-Pettis operators.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturais: $1, 2, 3, \ldots$
S_m	Conjunto das permutações dos primeiros m números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$X_1, \ldots, X_m, X, Y$	Espaços de Banach.
$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$	Espaço de todos os operadores m-lineares contínuos de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y.
$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})$	Espaço de todos os operadores m-lineares contínuos de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$E_1, \ldots, E_m, E, F$	Espaços de Riesz (reticulados de Banach).
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$	Espaço de todos os operadores m-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F.
$\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_m; F)$	Espaço de todos os operadores m-lineares regulares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F.
$L(E_1, \ldots, E_m; F)$	Espaço de todos os operadores m-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F.
$E^{\sim}, E^{\sim\sim}$	Ordem dual e ordem bidual do espaço de Riesz E.
E^*, E^{**}	dual topológico e bidual topológico de um espaço de Riesz normado (reticulado de Banach) E.
E_n^*	Espaço de todos os funcionais lineares ordem contínuos.
E^+	Conjunto de todos os vetores positivos do espaço de Riesz E.
$\mathcal{P}_r(^mE; F)$	Espaço de todos os polinômios regulares m-homogêneos.
$x_\alpha \downarrow x$, $x_\alpha \uparrow x$	Rede decrescente (resp. crescente) cujo ínfimo (resp. supremo) é x.
$x_n \downarrow x$, $x_n \uparrow x$	Sequência decrescente (resp. crescente) cujo ínfimo (resp. supremo) é x.
$x_\alpha \xrightarrow{o} x$,	Rede ordem convergente para x.
$x_n \xrightarrow{o} x$, $x = o - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$	Sequência ordem convergente para x.
$x_n^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$	Sequência fraca estrela convergente para x^*.

$x_n \xrightarrow{\omega} x$	Sequência fraca convergente para x.
$x_\alpha \longrightarrow x$	Rede convergente para x.
$\mathcal{S}$	Espaço de Schreier.
$d(w,1)$	Espaço de sequências de Lorentz.
$d_*(w,1)$	Predual do espaço de sequências de Lorentz.
$\mathcal{T}^*$	Espaço original de Tsirelson.
$\mathcal{T}$	Dual do espaço original de Tsirelson.
$\prod_{n=1}^{k} t_n$	Produto de k números reais.
$\prod x$	Conjunto de todas as partições de $x \in E^+$.
B_E	Bola unitária fechada em E.
$\bigvee_{n=1}^{m} x_n$	Supremo do conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$.
$AR_m^\rho(A)$	Extensão de Arens de um operador multilinear regular A.
$AB_m^\rho(A)$	Extensão de Aron-Berner de um operador multilinear regular A.
$P(\Omega)$	Conjuntos de partes de Ω.
$x = \lvert\sigma\rvert - \lim_\alpha x_\alpha$	rede convergente na topologia fraca absoluta para x.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Propriedades básicas dos espaços de Riesz 5
1.2 Topologias fracas 9
1.3 Espaços e reticulados de Banach 11
1.4 Operadores lineares em espaços de Riesz e reticulados de Banach 13
1.5 Operadores multilineares regulares 18

2 Extensões de Arens de multimorfismos de Riesz **21**

2.1 Extensões de Arens de operadores multilineares regulares 23
2.2 Extensões de multimorfismos entre espaços de Riesz 32
2.3 Extensões de multimorfismos entre reticulados de Banach 37

3 Ordem continuidade das extensões de Arens de operadores multilineares regulares **45**

3.1 O contraexemplo 46
3.2 Operadores entre espaços de Riesz 49
3.3 Operadores entre reticulados de Banach 56

4 Adjuntos e biadjuntos de operadores lineares quase Dunford-Pettis **67**

4.1 Quando T^{**} é sempre quase Dunford-Pettis 67
4.2 Resultados conhecidos versus resultados novos 69
4.3 Demonstrações dos Teoremas 4.2.6 e 4.2.11 74
4.4 O papel da compacidade fraca 77

5 Extensões de Aron-Berner de operadores multilineares quase Dunford-Pettis **81**

5.1 Operadores multilineares separadamente quase Dunford-Pettis 82
5.2 Operadores multilineares quase Dunford-Pettis 88

Bibliografia **103**

Introdução

Esta tese, na área de Análise Funcional, subárea de espaços de Riesz e reticulados de Banach, trata de extensões biduais de operadores lineares e multilineares entre espaços de Riesz e entre reticulados de Banach.

Um operador linear contínuo $T : X \longrightarrow Y$ entre espaços de Banach admite uma extensão bidual por meio do seu biadjunto $T^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ no sentido que $J_Y \circ T = T^{**} \circ J_X$, em que $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ e $J_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$ são os respectivos mergulhos canônicos. No caso de um operador multilinear, o adjunto e, consequentemente o biadjunto, existem mas são operadores lineares, e não multilineares. Mais precisamente, o adjunto de um operador m-linear $A : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ entre espaços de Banach, definido por Aron e Schottenloher [10], é o operador *linear* $A^* : Y^* \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})$ dado por

$$A^*(y^*)(x_1, \ldots, x_m) = y^*(A(x_1, \ldots, x_m)).$$

Aqui, $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})$ é o espaço das formas m-lineares de $X_1 \times \cdots \times X_m$ a valores no corpo de escalares $\mathbb{K}$. É claro que A^* é um operador *linear*, e portanto seu biadjunto A^{**} também é um operador *linear*. Dessa forma não há como esperar que o operador linear A^{**} seja uma extensão bidual do operador m-linear A. Uma outra estratégia deve ser adotada para o estudo de extensões biduais de operadores multilineares.

Um dos pioneiros no estudo de extensões biduais de operadores multilineares foi Richard Arens [9] em 1951. Sua abordagem foi tão bem sucedida que tais extensões têm sido estudadas nos últimos 70 anos a partir da técnica introduzida por Arens [9]. Um forte impulso veio com o artigo de R. Aron e P. Berner [11], que introduziu, de forma definitiva, o assunto na área de holomorfia em dimensão infinita. A construção original de Arens para o caso bilinear, que depois foi generalizada para o caso multilinear por Aron e Berner, é a seguinte: dado um operador bilinear $A : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$ entre espaços de Banach, defina os seguintes operadores bilineares:

$$\begin{aligned}
&A^* : Y^* \times X_1 \longrightarrow X_2^* , \ A^*(y^*, x_1)(x_2) = y^*(A(x_1, x_2)),\\
&A^{**} : X_2^{**} \times Y^* \longrightarrow X_1^* , \ A^{**}(x_2^{**}, y^*)(x_1) = x_2^{**}(A^*(y^*, x_1)) \text{ e}\\
&A^{***} : X_1^* \times X_2^{**} \longrightarrow Y^{**} , \ A^{***}(x_1^{**}, x_2^{**})(y^*) = x_1^{**}(A^{**}(x_2^{**}, y^*)).
\end{aligned}$$

É imediato que A^{***} é um operador bilinear que satisfaz a igualdade $J_Y \circ A = A^{***} \circ (J_{X_1}, J_{X_2})$, isto é, A^{***} é uma extensão bidual de A. Desde então, A^{***} tem sido chamada de extensão de Arens de A e fortemente estudada na teoria (veja, por exemplo, [15, 20, 21, 22, 51, 74, 75, 80]). Seguindo a mesma técnica, define-se a extensão de Arens de um operador m-linear A,

denotada por $A^{*(m+1)}$, que também vem sendo muito estudada (veja, por exemplo [13, 14, 17, 19, 26, 29, 39, 56]). Com o advento do trabalho [10], ficou claro que um operador m-linear possui mais de uma extensão bidual, sendo a extensão de Arens apenas uma delas.

Muita pesquisa tem sido feita sobre a passagem, ou não, de uma determinada propriedade do operador multilinear para as suas extensões biduais. Por exemplo, é verdade que se um operador multilinear é contínuo (ou compacto, ou tem posto finito, etc), então suas extensões de Arens (ou de Aron-Berner) também são contínuas (ou compactas, ou de posto finito, etc)? Ofereceremos nesta tese algumas contribuições neste sentido, no âmbito que especificaremos a seguir.

Trabalharemos com extensões biduais de operadores lineares e multilineares entre espaços de Riesz e entre reticulados de Banach. Nesses casos tem-se uma estrutura a mais, a estrutura de ordem, que supõe-é compatível com as operações algébricas de espaços vetoriais (no caso dos espaços de Riesz), e também com a norma (no caso dos reticulados de Banach). Nossos resultados são sobre biadjuntos e extensões de Arens (ou de Aron-Berner) de operadores lineares e multilineares entre espaços de Riesz e reticulados de Banach. Resultados neste ambiente foram obtidos em, por exemplo, [6, 7, 22, 26, 29, 43, 44, 80].

Antes da descrição dos resultados da tese, cabe uma palavra sobre a terminologia. Em primeiro lugar, as extensões de Arens e as de Aron-Berner são exatamente as mesmas. Por um lado, os trabalhos em espaços de Banach utilizam, em sua grande maioria, o termo extensões de Aron-Berner. Por outro lado, os trabalhos em espaços de Riesz utilizam o termo extensões de Arens. Seguindo essa linha, usaremos o termo extensões de Arens quando estivermos trabalhando com operadores entre espaços de Riesz e o termo extensões de Aron-Berner quando estivermos trabalhando com operadores entre reticulados de Banach.

A seguir detalharemos como está estruturada a tese. No Capítulo 1 apresentamos resultados preliminares acerca de propriedades básicas dos espaços de Riesz e reticulados de Banach, operadores lineares e multilineares positivos e regulares. Os resultados originais são apresentados nos capítulos subsequentes. No Capítulo 2 provamos que todas as extensões de Arens de operadores multilineares positivos e regulares entre espaços de Riesz são positivos e regulares. Além disso, estabelecemos condições suficientes no operador multilinear assim como nos espaços de Riesz ou reticulados de Banach subjacentes de tal forma que todas as extensões de Arens de qualquer multimorfismo de Riesz sejam também multimorfismos de Riesz. No caso em que o operador multilinear é um multimorfismo de Riesz de posto finito, mostramos que as ditas extensões coincidem e são multimorfismos de Riesz. Em particular, todas as extensões de Arens de qualquer multimorfismo de Riesz a valores escalares são multimorfismos de Riesz.

No Capítulo 3 estudamos a ordem continuidade das extensões de Arens de operadores multilineares entre espaços de Riesz. Em primeiro lugar, por meio de um contraexemplo, mostramos que nem todas as extensões de Arens de um operador multilinear são separadamente ordem contínuas. Motivados pelo contraexemplo e pelos artigos recentes [26, 29], estabelecemos condições de tal maneira que todas as extensões de Arens de operadores multilineares regulares sejam separadamente ordem contínuas. No caso de uma forma multilinear A, isto é, quando o operador multilinear A toma valores em $\mathbb{R}$, com algumas hipóteses adicionais mostramos que a extensão de Arens $A^{*(m+1)}$ tem $\mathcal{P}$-

separadamente, onde $\mathcal{P}$ é qualquer propriedade de funcionais lineares (veja Teorema 3.3.8). Finalmente, provamos alguns resultados sobre a ordem continuidade das extensões de Arens de polinômios homogêneos entre espaços de Riesz.

No Capítulo 4 deixamos – temporariamente – os operadores multilineares regulares e voltamos para operadores lineares regulares e trabalhamos com as seguintes classes: operadores *quase Dunford-Pettis*, operadores *quase limited* e operadores *positivamente limited*. Investigamos também quando o adjunto e o biadjunto de um operador linear regular quase Dunford-Pettis é também quase Dunford-Pettis.

Finalmente, estudamos no Capítulo 5 o caso multilinear do que foi investigado no caso linear no Capítulo 4. Trataremos dos dois conceitos naturais no caso multilinear, a saber, operadores multilineares separadamente quase Dunford-Pettis e operadores multilineares quase Dunford-Pettis. Entre muitos outros exemplos e resultados, veremos que nem sempre operadores multilineares quase Dunford-Pettis têm uma extensão de Aron-Berner quase Dunford-Pettis. A partir disso, identificamos condições adicionais sob as quais os operadores multilineares quase Dunford-Pettis admitem extensões de Aron-Berner quase Dunford-Pettis.

Os resultados obtidos no Capítulo 2 foram publicados no seguinte artigo:

- *Bidual extensions of Riesz multimorphisms*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **520** (2023), 126869, 18 pp.

Os resultados obtidos nos capítulos 3, 4 e 5 foram submetidos para publicação em periódicos especializados e os preprints podem ser encontrados, respectivamente, em:

- *Order continuity of Arens extensions of regular multilinear operators*, submetido para publicação, disponível em arXiv:2201.09116 [math.FA].
- *Adjoints and second adjoints of almost Dunford-Pettis operators*, submetido para publicação, disponível em arXiv:2207.11105 [math.FA].
- *Aron-Berner extensions of almost Dunford-Pettis multilinear operators*, submetido para publicação, disponível em arXiv:2210.01876v1 [math.FA].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e enunciaremos resultados básicos sobre espaços de Riesz, reticulados de Banach, operadores lineares e multilineares, os quais serão necessários no decorrer da tese. As principais referências que compõem este capítulo são [5, 61, 62, 66]. Nesses livros o leitor encontra as demonstrações dos resultados enunciados e as justificativas dos exemplos apresentados.

1.1 Propriedades básicas dos espaços de Riesz

Seja M um conjunto não vazio. Uma *ordem parcial* em M é uma relação binária $\leq$ que é reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é:

1. $x \leq x$ para todo $x \in M$.
2. Para $x, y \in M$, se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$.
3. Para $x, y, z \in M$, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Um conjunto munido de uma ordem parcial é dito um *conjunto ordenado*.

Seja N um subconjunto do conjunto ordenado M. Um elemento $a \in M$ é chamado de *cota superior* de N se $y \leq a$ para todo $y \in N$. Do mesmo modo um elemento $b \in M$ é chamado de *cota inferior* de N se $a \leq y$ para todo $y \in N$. A menor cota superior de N, se existir, é chamada de *supremo* de N e será denotada por $\sup N$; e a maior cota inferior de N, se existir, é chamada de *infimo* de N e será denotada por $\inf N$.

Definição 1.1.1. Um conjunto ordenado E é um *espaço de Riesz* se é um espaço vetorial real e satisfaz as seguintes condições:

1. Para $x, y, z \in E$, se $x \leq y$ então $x + z \leq y + z$.
2. Para $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}^+$, se $x \leq y$ então $\lambda x \leq \lambda y$.
3. Para quaisquer $x, y \in E$ o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$ existem em E e são denotados por $x \vee y = \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Um conjunto ordenado E que satisfaz as duas primeiras condições da Definição 1.1.1 é chamado de *espaço vetorial ordenado*. Um subespaço vetorial Z de um espaço de Riesz E é dito um *subespaço de Riesz de* E ou um *subreticulado de* E se, para todos $x, y \in Z$, o elemento $x \vee y$ pertence a Z.

Vejamos alguns exemplos iniciais.

O corpo dos números reais $\mathbb{R}$ munido de sua ordem usual é um espaço de Riesz. Para cada $n \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ munido da ordem coordenada a coordenada, isto é, $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$ se e somente se $x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, é um espaço de Riesz. É claro que

$$(x_1, \dots, x_n) \vee (y_1, \dots, y_n) = (\max\{x_1, y_1\}, \dots, \max\{x_n, y_n\}) \text{ e}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \wedge (y_1, \dots, y_n) = (\min\{x_1, y_1\}, \dots, \min\{x_n, y_n\}).$$

Seja Ω um conjunto não vazio. Um *espaço de funções em* Ω é um espaço vetorial E formado por funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que para todas $f, g \in E$ as funções definidas por

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ e } (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \text{ para todo } x \in \Omega, \tag{1.1}$$

pertencem a E. Neste caso, E munido da ordem pontual, isto é,

$$f, g \in E, f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in \Omega,$$

é um espaço de Riesz. É claro que o supremo e o ínfimo de duas funções são dados por (1.1). Os seguintes exemplos são espaços de funções, e portanto são espaços de Riesz com a ordem pontual.

Exemplo 1.1.2. [5, p. 2]

1. O conjunto $\mathbb{R}^\Omega$ de todas as funções de um conjunto Ω em $\mathbb{R}$.
2. O conjunto $C(\Omega)$ de todas as funções contínuas definidas em um espaço topológico Ω tomando valores em $\mathbb{R}$.
3. O conjunto $C_b(\Omega)$ de todas as funções contínuas e limitadas definidas em um espaço topológico Ω tomando valores em $\mathbb{R}$.
4. O cojunto $\ell_\infty(\Omega)$ de todas as funções limitadas definidas em um conjunto Ω tomando valores $\mathbb{R}$.

   Nos próximos exemplos consideramos, da maneira usual, sequências como funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

5. $\ell_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \,:\, x_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty \right\}$, $0 < p < \infty$.
6. $c_0 = \{(x_n)_{n=1}^\infty \,:\, x_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } x_n \longrightarrow 0\}$.

Como os espaços L_p são, em geral, espaços de classes de equivalência de funções e não de funções, optamos por não incluí-los no exemplo acima de espaços de funções.

Exemplo 1.1.3. Seja $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Os espaços $L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mu), 0 < p \leq \infty$, são espaços de Riesz com a ordem quase pontual, isto é,

$$f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mu), f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ para } \mu\text{-quase todo } x \in \Omega,$$

é um espaço de Riesz.

O seguinte exemplo mostra um espaço vetorial ordenado formado por funções a valores reais que não é um espaço de funções.

Exemplo 1.1.4. Considere o conjunto $C^1[0,1]$ de todas as funções $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que são diferenciáveis em $[0,1]$ e tais que $f' \in C[0,1]$. Então $C^1[0,1]$ munido com a ordem pontual é um espaço vetorial ordenado mas não é um espaço de funções, e portanto não é espaço de Riesz. De fato, tomando $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(t) = t$ e $g(t) = 1 - t$, tem-se $f, g \in C^1[0,1]$ mas $f \vee g \notin C^1[0,1]$, uma vez que

$$(f \vee g)(t) = \max\{t, 1-t\} = \left|t - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Note que $C^1[0,1]$ é um subespaço vetorial de $C[0,1]$, assim esse exemplo também mostra que subespaços vetoriais de espaços de Riesz nem sempre são subreticulados.

Seja E um espaço vetorial ordenado. O conjunto $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ é chamado de *parte positiva ou cone positivo* de E, e um elemento de E^+ é dito *positivo*. Além disso, se E é um espaço de Riesz, para cada $x \in E$ define-se

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0 \text{ e } |x| = x \vee (-x).$$

Os elementos x^+, x^- e $|x|$ são chamados de *parte positiva, parte negativa* e *valor absoluto* de x, respectivamente. Mais ainda, dois elementos $x, y \in E$ são ditos *disjuntos* se $|x| \wedge |y| = 0$, e neste caso escreve-se $x \perp y$.

Teorema 1.1.5. [62, Theorem 1.1.1] *Seja E um espaço de Riesz. Para todos $x, y, z \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se:*

i) $x + y = x \vee y + x \wedge y$.

ii) $x \wedge y = -((-x) \vee (-y))$, $x \vee y = -((-x) \wedge (-y))$, $z + (x \vee y) = (z + x) \vee (z + y)$ *e* $z + (x \wedge y) = (z + x) \wedge (z + y)$.

iii) $\alpha(x \vee y) = \alpha x \vee \alpha y$ *e* $\alpha(x \wedge y) = \alpha x \wedge \alpha y$ *sempre que* $\alpha \geq 0$.

iv) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *e* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

v) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$ *e* $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$.

vi) $|x + y| \vee |x - y| = ||x| - |y||$ *e* $|x + y| \wedge |x - y| = |x| + |y|$.

vii) $x = x^+ - x^-$ *e* $x = (x - y)^+ + x \wedge y$.

viii) $|x| = x^+ + x^-$, $|\alpha x| = |\alpha||x|$ *e* $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

ix) (Desigualdades de Birkhoff) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ *e* $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$. *Em particular,* $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$ *e* $|x^- - y^-| \leq |x - y|$.

x) $x^+ \perp x^-$ *e a decomposição de* x *na forma* $x = x^+ - x^-$ *é a única como a diferença de dois elementos positivos e disjuntos.*

xi) $x \leq y$ *se, e somente se,* $x^+ \leq y^+$ *e* $y^- \leq x^-$.

xii) *Para todos* $w, x_1, \dots, x_n \in E^+$ *tem-se* $w \wedge (x_1 + \cdots + x_n) \leq w \wedge x_1 + \cdots + w \wedge x_n$.

xiii) $x \perp y$ *se, e somente se,* $|x| \vee |y| = |x| + |y|$. *Neste caso,* $|x + y| = |x| + |y|$.

xiv) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *e* $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

xv) (Propriedade de decomposição de Riesz) *Se* $|x| \leq |y + z|$, *então existem* $u, v \in E$ *tais que* $|u| \leq |y|$, $|v| \leq |z|$ *e* $x = u + v$. *Além disso, se* x, y, z *são positivos, então* u, v *também podem ser escolhidos positivos.*

xvi) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$ *e* $|x - y| = |x \vee y - x \vee y| + |x \wedge y - x \wedge y|$.

Lema 1.1.6. *Sejam* E *um espaço de Riesz e* $x, y, z \in E$ *tais que* $x \perp y$ *e* $x \perp z$. *Então* $x \perp (y + z)$. *Se* $x, y, z \in E^+$ *são dois a dois disjuntos, então* $x + y + z = x \vee y \vee z$.

Demonstração. Por hipótese $|x| \wedge |y| = 0$ e $|x| \wedge |z| = 0$, então pelo Teorema 1.1.5,

$$0 \leq |x| \wedge (|y + z|) \leq |x| \wedge (|y| + |z|) \leq (|x| \wedge |y|) + (|x| \wedge |z|) = 0 \wedge 0 = 0,$$

isso implica que $x \perp (y + z)$. Por outro lado, pelo Teorema 1.1.5,

$$x + y + z = x + (y + z) = x + (y \vee z) = x \vee y \vee z + x \wedge (y \vee z) = x \vee y \vee z + x \wedge (y + z) = x \vee y \vee z,$$

o que nos permite concluir que $x + y + z = x \vee y \vee z$. □

Definição 1.1.7. Um espaço de Riesz E é:

(i) *Dedekind completo* se cada subconjunto não vazio limitado superiormente de E tem supremo em E.

(ii) *σ-Dedekind completo* se cada subconjunto enumerável não vazio limitado superiormente de E tem supremo em E.

Note que todo espaço de Riesz Dedekind completo é σ-Dedekind completo.

Exemplo 1.1.8. [62, p. 8]
(a) ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, e c_0 são espaços de Riesz Dedekind completos.
(b) Seja $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω tal que $\mathcal{B} \neq P(\Omega)$ e $\mathcal{B}$ contenha os conjuntos unitários de Ω. Então $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, com a ordem pontual, é um espaço de Riesz σ-Dedekind completo mas não Dedekind completo.
(c) Para cada $1 \leq p < \infty$, $L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Se μ é σ-finita então $L_\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo.

Por simplicidade, às vezes escreveremos $L_p(\mu)$ no lugar de $L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Definição 1.1.9. Seja E um espaço de Riesz.

(i) Um subconjunto W de E é um *sólido* se $x \in W$ sempre que $|x| \leq |y|$ para algum $y \in W$.

(ii) Um *ideal* de E é um subespaço vetorial sólido.

(iii) Um ideal B de E é uma *faixa* se $\sup(N) \in B$ para todo subconjunto $N \subset B$ que possui supremo em E. A *faixa gerada* por um subconjunto N é a menor faixa de E que contém N, denotada por B_N.

(iv) Um vetor não nulo $e \in E$ é uma *ordem unidade fraca* se a faixa gerada por e satisfaz $B_e = E$.

(v) Um vetor não nulo $e \in E$ é uma *ordem unidade* se para cada $x \in E$ existe algum $\lambda > 0$ tal que $|x| \leq \lambda e$.

Denote por c o espaço vetorial de todas as sequências reais convergentes. Então c é um subreticulado que não é um ideal de ℓ_∞. Por outro lado, c_0 é um ideal de ℓ_∞, mas não é uma faixa de ℓ_∞. Além disso, $e = (1, 1, \ldots)$ é uma ordem unidade de ℓ_∞.

Definição 1.1.10. Uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ em um espaço de Riesz E é:

(i) *Decrescente*, em notação $x_\alpha \downarrow$, quando $\alpha \geq \beta$ implica $x_\alpha \leq x_\beta$. A notação $x_\alpha \downarrow x$ significa que $x_\alpha \downarrow$ e $\inf\limits_\alpha\{x_\alpha\} = x$. Os símbolos $x_\alpha \uparrow$ e $x_\alpha \uparrow x$ são definidos analogamente.

(ii) *Ordem convergente* para $x \in E$, em notação $x_\alpha \xrightarrow{o} x$, se existe uma rede $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ tal que $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$.

Definição 1.1.11. Um subconjunto N de um espaço de Riesz E é dito *ordem fechado* quando $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \subseteq N$ e $x_\alpha \xrightarrow{o} x \in E$ implica $x \in N$.

Uma *faixa* é um ideal ordem fechado e uma *faixa projetada* W em um espaço de Riesz E é uma faixa tal que $E = W \oplus W^d$, onde $W^d = \{x \in E : x \perp y \text{ para todo } y \in W\}$.

Um operador linear T entre espaços de Riesz é dito *positivo* se $T(x) \geq 0$ sempre que $x \geq 0$.

Um operador linear $P : X \longrightarrow X$ sobre um espaço vetorial X é uma *projeção* se $P^2 := P \circ P = P$. Se W é uma faixa projetada de um espaço de Riesz E, então o operador linear positivo $P_W : E \longrightarrow E$ dado por $P_W(x_1 + x_2) = x_1$, é uma projeção, chamada de *projeção de faixa.*

1.2 Topologias fracas

Definição 1.2.1. Uma *seminorma* sobre um espaço vetorial X é uma função $\|\cdot\|_X : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \|x\|_X$, que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|x\|_X \geq 0$ para todo $x \in X$;

(ii) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \cdot \|x\|_X$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$;

(iii) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ para todos $x, y \in E$ (desigualdade triangular).

Uma seminorma é uma *norma* se $\|x\|_X = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_X$. Um espaço vetorial munido de uma norma é um *espaço normado*, e um espaço normado é um *espaço de Banach* quando for completo na métrica induzida pela norma.

Seja E um espaço de Riesz. Um funcional $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é *positivo* se $\varphi(x) \geq 0$, para todo $x \in E^+$. Por $E^\sim$ denotamos o espaço dos funcionais lineares regulares em E, isto é, os funcionais lineares em E que podem ser escritos como a diferença de dois funcionais positivos (maiores detalhes serão dados na Seção 1.4). Em $E^\sim$ definimos a seguinte relação de ordem: $x^* \leq y^*$ em $E^\sim$ se, e somente se, $y^* - x^*$ é um funcional positivo. Assim, $E^\sim$ com essa estrutura é um espaço parcialmente ordenado. Para cada $x \in E$, defina $\rho_x : E^\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\rho_x(x') = |x'|(|x|)$ e note que ρ_x é uma seminorma em $E^\sim$. A topologia em $E^\sim$ gerada pela família de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_x : x \in E\}$ é chamada de *topologia fraca absoluta* e denotada por $|\sigma| = |\sigma|(E^\sim, E)$ (veja [4, Capítulo 6]).

Os resultados que usaremos sobre a topologia fraca absoluta são os seguintes.

Proposição 1.2.2. ([18, Teorema 8.3.3], [66, Theorem 5.7.2]) *Seja E um espaço de Riesz.*

(i) Para cada $x_0' \in E^\sim$, os conjuntos da forma

$$V(x_0'; \rho_{x_1}, \dots, \rho_{x_m}; \varepsilon) = \{x' \in E^\sim : \rho_{x_i}(x' - x_0') < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, m\},$$

onde $\varepsilon > 0$ e $\rho_{x_1}, \dots, \rho_{x_1} \in \mathcal{P}$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0' para a topologia fraca absoluta $|\sigma|$.

(ii) $(E^\sim, |\sigma|)$ é um espaço vetorial localmente convexo.

(iii) Para cada $x \in E$, a seminorma $\rho_x : E^\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ é $|\sigma|$-contínua.

(iv) Sejam $(x_\alpha')_{\alpha\in\Omega}$ uma rede em $E^\sim$ e $x' \in E^\sim$. Então $x_\alpha' \xrightarrow{|\sigma|} x'$ se, e somente se, $\rho_x(x_\alpha' - x') \longrightarrow 0$ para todo $x \in E$.

Lema 1.2.3. *Seja E um espaço de Riesz. As operações reticuladas em $E^\sim$ são $|\sigma|$-$|\sigma|$-contínuas.*

Demonstração. Seja $(x_\alpha')_{\alpha\in\Omega}$ uma rede em $E^\sim$ tal que $x_\alpha' \xrightarrow{|\sigma|} x' \in E^\sim$. Pela Proposição 1.2.2, $|x_\alpha' - x'|(|x|) \longrightarrow 0$ para todo $x \in E$. E pelo Teorema 1.1.5,

$$|(x_\alpha')^+ - (x')^+|(|x|) \leq |x_\alpha' - x'|(|x|) \longrightarrow 0.$$

Novamente pela Proposição 1.2.2 segue que $(x_\alpha')^+ \xrightarrow{|\sigma|} (x')^+$, provando que a função parte positiva é $|\sigma|$-$|\sigma|$-contínua. Como $(x')^- = (-x')^+$ e $|x'| = x^+ + x^-$, segue que as funções parte negativa e valor absoluto são $|\sigma|$-$|\sigma|$-contínuas. □

Definição 1.2.4. Por X^* denotamos o dual topológico do espaço normado X, isto é, $X^* = \{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ é linear e contínuo}\}$. Definimos:

1. A *topologia fraca*, denotada por $\sigma(X, X^*)$ ou ω, é a topologia em X gerada pela família de seminormas $\{\rho_\varphi(\cdot) = |\varphi(\cdot)| : \varphi \in X^*\}$.

2. A *topologia fraca-estrela*, denotada por $\sigma(X^*, X)$ ou ω^*, é a topologia em X^* gerada pela família de seminormas $\{\xi_x(\cdot) : x \in X\}$, onde $\xi_x(\varphi) = |\varphi(x)|$ para todo $\varphi \in X^*$.

1.3 Espaços e reticulados de Banach

Definição 1.3.1. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado X é uma *base de Schauder* de X se para todo $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Neste caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o funcional $x_n^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $x_n^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = a_n$. A sequência $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é chamada de sequência de *funcionais coordenados* da base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definição 1.3.2. Uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de um espaço normado X é dita:

(i) *Contrátil* se $\overline{\text{span}}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} = X^*$.

(ii) 1-*incondicional*, ou *incondicional monótona*, se $\left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j\right\|$ para todas sequências de escalares $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que $|a_j| \leq |b_j|$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

A seguir recordamos as definições dos espaços de sequências de Lorentz e do espaço de Schreier que serão de grande utilidade no Capítulo 2.

Definição 1.3.3. Seja $w = (w_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais positivos não crescente tal que $w_1 = 1$, $\lim_{n\longrightarrow\infty} w_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$. O conjunto de todas as sequências de escalares $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que

$$\|a\| = \sup_{\rho}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\rho(n)}| w_n < \infty\right\},$$

onde ρ percorre todas as permutações de $\mathbb{N}$, é um espaço de Banach chamado de *espaço de sequências de Lorentz* e é denotado por $d(w, 1)$.

A teoria básica dos espaços de sequência de Lorentz pode ser encontrada em, por exemplo, [57, Seção 4.e].

Um subconjunto finito $M = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$ de números naturais é *admissível* se $k \leq n_1$. Denote por L a classe de todos os subconjunto admissíveis de $\mathbb{N}$.

Definição 1.3.4. Seja c_{00} o espaço vetorial de todas as sequências reais eventualmente nulas, isto é, que tem suporte finito. Para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$, defina $\|x\|_{\mathcal{S}} = \sup_{M\in L} \sum_{k\in M} \|x_k\|$. Então $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ é uma norma em c_{00} e o completamento de c_{00} nessa norma é chamado de *espaço de Schreier*, denotado por $\mathcal{S}$.

Para maiores informações sobre o espaço de Schreier $\mathcal{S}$ veja, por exemplo, [31, 76].

Uma seminorma $\|\cdot\|$ em um espaço de Riesz E é *uma seminorma reticulada* se para todos $x, y \in E$ tais que $|x| \leq |y|$ tem-se $\|x\| \leq \|y\|$. No caso em que $\|\cdot\|$ é uma norma, ela é

chamada de *norma reticulada*.

Definição 1.3.5. Um espaço de Riesz E munido de uma norma reticulada $\|\cdot\|$ é chamado de *espaço de Riesz normado*. No caso em que a norma reticulada é completa, chamamos $(E, \|\cdot\|)$ de *reticulado de Banach*.

Teorema 1.3.6. [5, Theorem 4.1] *Para todo espaço de Riesz normado E, E^* é um reticulado de Banach.*

Definição 1.3.7. Um reticulado de Banach E é dito um *espaço de Kantorovich-Banach* ou *KB-espaço* se cada sequência decrescente limitada em E^+ é convergente.

Relembre que um espaço de Banach E *contém uma cópia* de um espaço de Banach F se existe um operador $T : F \longrightarrow E$ que é um isomorfismo sobre sua imagem, isto é, T é linear, injetor, contínuo e o operador inverso $T^{-1} : T(E) \longrightarrow E$ também é contínuo.

Adiantando um pouco o estudo de operadores lineares entre espaços de Riesz e reticulados de Banach, dizemos que um operador linear $T : E \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz é um *homomorfismo de Riesz* se $T(|x|) = |T(x)|$ para todo $x \in E$.

Diz-se que o reticulado de Banach E *contém uma cópia reticulada* do reticulado de Banach F se existe um homomorfismo de Riesz $T : F \longrightarrow E$ que é um isomorfismo sobre sua imagem.

Teorema 1.3.8. [5, Theorem 4.60] *As seguintes afirmações são equivalentes para um reticulado de Banach E.*

(i) E é um KB-espaço.

(ii) E não contém uma cópia de c_0.

(iii) E não contém uma cópia reticulada de c_0.

Definição 1.3.9. Um reticulado de Banach E é:

(i) Um *AL-espaço* se sua norma é *aditiva*, isto é, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in E$ com $x \wedge y = 0$.

(ii) *AM-espaço* se sua norma é uma *M-norma*, isto é, se $x \wedge y = 0$ em E implicar $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Definição 1.3.10. A norma $\|\cdot\|$ de um reticulado de Banach E é dita *ordem contínua* se $x_\alpha \downarrow 0$ em E implica $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ em $\mathbb{R}$.

Seja E um reticulado de Banach. De [5, p. 232], se E é um KB-espaço, então E tem norma ordem contínua. E por [62, Theorem 2.4.2], se E tem norma ordem contínua, então E é Dedekind completo e portanto σ-Dedekind completo. Os espaços $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, são reticulados de Banach com norma ordem contínua, e os espaços $C[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ e ℓ_∞ com a norma do supremo são reticulados de Banach cuja norma não é ordem contínua, [5, p. 187]. Além disso, por [62, Example i), p. 8-9] os reticulados de Banach ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ e c_0 são Dedekind completos com a ordem pontual.

Teorema 1.3.11. [5, Theorem 4.56] *As seguintes afirmações são equivalentes para um reticulado de Banach σ-Dedekind completo E.*

(i) E tem norma ordem contínua.

(ii) E não contém uma cópia de ℓ_∞.

(iii) E não contém uma cópia reticulada de ℓ_∞.

Teorema 1.3.12. [62, Theorem 2.4.2 e Corollary 2.4.3] *As seguintes afirmações são equivalentes para um reticulado de Banach E.*

(i) E tem norma ordem contínua.

(ii) Cada sequência disjunta ordem limitada de E^+ é convergente para zero.

(iii) $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ para cada sequência disjunta limitada $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ em E^*.

Teorema 1.3.13. [62, Theorem 2.4.14] *As seguintes afirmações são equivalentes para um reticulado de Banach E.*

(i) E^* tem norma ordem contínua.

(ii) $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ para cada sequência disjunta limitada $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E.

(iii) E não contem nenhum subreticulado isomorfo a ℓ_1.

Um operador $T : E \longrightarrow F$ entre reticulados de Banach que é um isomorfismo entre espaços de Banach e um homomorfismo de Riesz é chamado de *isomorfismo de Riesz*. Neste caso diz-se que E e F são *Riesz isomorfos*.

Teorema 1.3.14. [5, Theorem 4.29] *Um reticulado de Banach E é um AM-espaço com unidade se, e somente se, E é Riesz isomorfo a $C(K)$ para um (único a menos de homeomorfismos) espaço topológico Hausdorff compacto K.*

Como todo AL-espaço tem norma ordem contínua, combinando [5, Theorem 4.23 e Theorem 4.59] obtemos o seguinte:

Teorema 1.3.15. *Se um reticulado de Banach E é um AM-espaço, então E^* é um KB-espaço.*

1.4 Operadores lineares em espaços de Riesz e reticulados de Banach

Sejam X e Y espaços vetoriais. O espaço vetorial dos operadores lineares $T : X \longrightarrow Y$ é denotado por $L(X; Y)$.

Definição 1.4.1. Um operador linear $T : E \longrightarrow F$ entre dois espaços de Riesz é dito:

(i) *Positivo*, em notação $T \geq 0$ ou $0 \leq T$, se $T(x) \geq 0$ para todo $x \in E^+$.

(ii) *Regular* se T pode ser escrito como a diferença de dois operadores positivos.

O conjunto de todos os operadores lineares regulares de E em F é um espaço vetorial, denotado por $\mathcal{L}_r(E; F)$. No caso em que $F = \mathbb{R}$ o espaço $\mathcal{L}_r(E; \mathbb{R})$ é denotado por $E^\sim$ e chamado de *ordem dual* de E. Dessa forma, $E^{\sim\sim} := (E^\sim)^\sim$ é o ordem dual de $E^\sim$.

Teorema 1.4.2. [5, Theorem 4.3] *Cada operador linear positivo de um reticulado de Banach em um espaço de Riesz normado é contínuo. Em particular, todo operador regular é contínuo.*

Corolário 1.4.3. [5, Corollaray 4.5] $E^{\sim} = E^{*}$ *para todo reticulado de Banach* E.

Note que todo homomorfismo de Riesz é positivo: se $x \in E^{+}$ então $T(x) = T(|x|) = |T(x)| \geq 0$.

Kaplan, em 1973, mostrou que nem sempre $\mathcal{L}_r(E;F)$ é um espaço de Riesz, veja [5, Example 1.17]. Mas quando F é Dedekind completo, tal espaço sempre é um espaço de Riesz Dedekind completo, mas precisamente:

Teorema 1.4.4. (F. Riesz-Kantorovich [5, Theorem 1.18]) *Se* E, F *são espaços de Riesz com* F *Dedekind completo, então* $\mathcal{L}_r(E;F)$ *é um espaço de Riesz Dedekind completo. Além disso as operações reticuladas em* $\mathcal{L}_r(E;F)$ *satisfazem*

$$\begin{aligned} |T|(x) &= \sup\{|T(y)| \,:\, |y| \leq x\}, \\ |S \vee T|(x) &= \sup\{S(y) + T(z) \,:\, y, z \in E^{+} \text{ e } y + z = x\}, \text{ e} \\ |S \wedge T|(x) &= \inf\{S(y) + T(z) \,:\, y, z \in E^{+} \text{ e } y + z = x\} \end{aligned}$$

para todos $S, T \in \mathcal{L}_r(E;F)$ *e* $x \in E^{+}$. *Mais ainda, se* $(T_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ *é uma rede em* $\mathcal{L}_r(E;F)$, *então* $T_\alpha \downarrow 0$ *em* $\mathcal{L}_r(E;F)$ *se, e somente se,* $T_\alpha(x) \downarrow 0$ *em* F *para cada* $x \in E^{+}$.

Seja E um espaço de Riesz. Como $\mathbb{R}$ é um espaço de Riesz Dedekind completo, segue do Teorema 1.4.4 que $E^{\sim}$, e portanto $E^{\sim\sim}$, são espaços de Riesz Dedekind completos. Mais ainda, cada operador linear regular $T : E \longrightarrow F$ satisfaz

$$\begin{aligned} T^{+}(x) &= \sup\{T(y) \,:\, 0 \leq y \leq x\} \text{ e} \\ T^{-}(x) &= \sup\{-T(y) \,:\, 0 \leq y \leq x\} \end{aligned}$$

para cada $x \in X^{+}$. Daí $T = T^{+} - T^{-}$.

Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear entre espaços de Riesz. O operador

$$T' : F^{\sim} \longrightarrow E^{\sim}\ ,\ T'(y')(x) = y'(T(x)),$$

é chamado *adjunto* de T. Naturalmente, o *biadjunto* de T é definido por $T'' = (T')'$. Quando os espaços envolvidos forem espaços de Riesz normados ou reticulados de Banach, o adjunto e o biadjunto de T são denotados por T^{*} e T^{**}, respectivamente.

Teorema 1.4.5. [5, Theorem 2.19 e Theorem 2.20] *Sejam* E, F *espaços de Riesz. Se* $T : E \longrightarrow F$ *é homomorfismo de Riesz, então* T'' *também é homomorfismo de Riesz.*

Seja E um espaço de Riesz. O operador linear

$$J_E : E \longrightarrow E^{\sim\sim}\ ,\ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

é chamado de *mergulho canônico* de E em $E^{\sim\sim}$.

Teorema 1.4.6. [5, Theorem 1.69] *Para todo espaço de Riesz* E, *o mergulho canônico* $J_E : E \longrightarrow E^{\sim\sim}$ *é um homomorfismo de Riesz.*

É importante mencionar que, diferentemente do caso do mergulho canônico em um espaço de Banach, o mergulho canônico em um espaço de Riesz nem sempre é injetor. Isso acontece se $E^{\sim}$ separa pontos de E, ou seja, para todos $x, y \in E, x \neq y$, existe $\varphi \in E^{\sim}$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Nesse caso, E pode ser visto como subespaço de Riesz de $E^{\sim\sim}$.

Em seguida discutiremos brevemente a noção de ordem continuidade de operadores lineares. Relembre que a noção de ordem convergência foi introduzida na Definição 1.1.10. Outras duas definições de ordem convergência podem ser consideradas (veja [1]):

Definição 1.4.7. Seja E um espaço de Riesz. Uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ em E é dita:

(i) *1-convergente* para $x \in E$ se existem uma rede $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ em E e $\alpha_0 \in \Omega$ tais que $y_\alpha \downarrow 0$ e $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

(ii) *2-convergente* para $x \in E$ se existe uma rede $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ em E tal que $y_\beta \downarrow 0$ e para cada $\beta \in \Gamma$ existe um $\alpha_0 \in \Omega$ tal que $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Quando o espaço de Riesz E é Dedekind completo as duas definições acima de ordem convergência junto com a ordem convergência definida na Definição 1.1.10 coincidem, mas podem não coincidir se E não é Dedekind completo (veja [1, Example 1.4]). A ordem continuidade pode ser considerada com respeito a qualquer uma dessas três noções de ordem convergência:

Definição 1.4.8. Um operador linear regular $T : E \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz é ordem contínuo (respectivamente, 1-ordem contínuo, 2-ordem contínuo) se $(T(x_\alpha))_{\alpha\in\Omega}$ é ordem convergente (respectivamente, 1-convergente, 2-convergente) para zero em F sempre que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ é uma rede ordem convergente (respectivamente, 1-convergente, 2-convergente) para zero em E.

O espaço de todos os operadores regulares ordem contínuos de E em F é denotado por $\mathcal{L}_n(E; F)$. Quando $F = \mathbb{R}$, dito espaço é denotado por $E_n^{\sim}$. Um operador positivo $T : E \longrightarrow F$ é ordem contínuo se, e somente se, $T(x_\alpha) \downarrow 0$ em F sempre que $x_\alpha \downarrow 0$ em E, se, e somente se, $T(x_\alpha) \uparrow T(x)$ em F sempre que $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ em E (veja [5, p. 46]).

De [5, p. 12-13] temos que todo operador regular é ordem limitado. Onde por operador *ordem limitado* é um operador linear $T : E \longrightarrow F$ que leva subconjuntos ordem limitados de E em subconjuntos ordem limitados de F.

Teorema 1.4.9. [5, Theorem 1.56] *Para um operador linear ordem limitado $T : E \longrightarrow F$ entre dois espaços de Riesz com F Dedekind completo, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) T é ordem contínuo.

(b) Se $x_\alpha \downarrow 0$ em E, então $T(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ em F.

(c) Se $x_\alpha \downarrow 0$ em E, então $\inf\{|T(x_\alpha)|\} = 0$.

(d) T^+ e T^- são ordem contínuos.

(e) $|T|$ é ordem contínuo.

Teorema 1.4.10. [5, Theorem 1.73] *Se $T : E \longrightarrow F$ é um operador linear regular entre espaços de Riesz, então T' é ordem contínuo.*

Provaremos a seguir que, para operadores lineares regulares tomando valores em espaços de Riesz Dedekind completos, a ordem continuidade e a 1-ordem continuidade são equivalentes. Para isso precisamos dos seguintes lemas.

Lema 1.4.11. *Sejam E um espaço de Riesz, $x \in E$ e $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ uma rede em E. Então:*

(a) $x_\alpha \downarrow 0$ *se, e somente se,* $x_\alpha \downarrow$ *e* $\inf\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\} = 0$ *para algum* $\alpha_0 \in \Omega$.

(b) Se $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ *é* 1*-convergente para* $x \in E$*, então* $(x_\alpha + y)_{\alpha\in\Omega}$ *é* 1*-convergente para* $x + y \in E$ *para todo* $y \in E$.

(c) Se $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ *é* 1*-convergente para* $x \in E$ *e* $x_\alpha \leq y \in E$ *para todo* $\alpha \in \Omega$*, então* $x \leq y$.

Demonstração. (a) Note primeiramente que $0 \leq x_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Suponha que exista $x \in E$ tal que $0 < x \leq x_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Dado $\beta \in \Omega$, existe $\sigma \in \Omega$ tal que $\beta \leq \sigma$ e $\alpha_0 \leq \sigma$. Como $x_\alpha \downarrow$, temos $0 < x \leq x_\sigma \leq x_\beta$, e portanto $0 < x \leq x_\beta$ para todo $\beta \in \Omega$. Por hipótese segue que $x = 0$ e isso implica que $\inf\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\} = 0$ para algum $\alpha_0 \in \Omega$. A recíproca é imediata.

(b) Por hipótese, existem uma rede $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ em E e $\alpha_0 \in \Omega$ tais que $y_\alpha \downarrow 0$ e $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Dado $y \in E$, de

$$|(x_\alpha + y) - (x + y)| = |x_\alpha - x| \leq y_\alpha \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0$$

segue o que se deseja provar.

(c) Por hipótese, existem uma rede $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ em E e $\alpha_0 \in \Omega$ tais que $y_\alpha \downarrow 0$ e $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Como $x_\alpha \leq y$ para todo α, temos $x_\alpha - x \leq y - x$ para todo α. Portanto, para todo $\alpha \geq \alpha_0$ tem-se $-y_\alpha \leq x_\alpha - x \leq y - x$. Segue que $x - y \leq y_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Como $y_\alpha \downarrow 0$, por (a) concluímos que $x - y \leq 0$, isto é, $x \leq y$. □

Lema 1.4.12. *Seja* $T : E \longrightarrow F$ *um operador linear positivo entre espaços de Riesz.*

(a) T *é* 1*-ordem contínuo se, e somente se,* $T(x_\alpha) \downarrow 0$ *em* F *sempre que* $x_\alpha \downarrow 0$ *em* E.

(b) T *é ordem contínuo se, e somente se,* T *é* 1*-ordem contínuo.*

Demonstração. (a) Suponha que T seja 1-ordem contínuo. Supondo que $x_\alpha \downarrow 0$ em E, temos $0 \leq T(x_\alpha) \downarrow$ para todo α pois T é linear e positivo. É claro que $(x_\alpha)_\alpha$ é 1-convergente para zero, portanto $(T(x_\alpha))_\alpha$ é 1-convergente para zero em F por hipótese. Logo existem uma rede $(y_\alpha)_\alpha$ em F e α_0 tais que $y_\alpha \downarrow 0$ e $0 \leq T(x_\alpha) \leq y_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Pelo Lema 1.4.11 temos $\inf\{T(x_\alpha) : \alpha \geq \alpha_0\} = 0$, e novamente o Lema 1.4.11 nos garante que $T(x_\alpha) \downarrow 0$.

Reciprocamente, suponha que $T(x_\alpha) \downarrow 0$ em F sempre que $x_\alpha \downarrow 0$ em E. Seja $(x_\alpha)_\alpha$ uma rede 1-convergente para zero em E. Então existem uma rede $(y_\alpha)_\alpha$ em F e α_0 tais que $y_\alpha \downarrow 0$ e $|x_\alpha| \leq y_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Por hipótese, $T(y_\alpha) \downarrow 0$ em F e $|T(x_\alpha)| \leq T(|x_\alpha|) \leq T(y_\alpha)$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Isso implica que T é 1-ordem contínuo.
(b) Segue do item (a) e de [5, p. 46]. □

A demonstração a seguir é uma adaptação na demonstração do Teorema 1.4.9 e de [62, Proposition 1.3.9].

Proposição 1.4.13. *Sejam E, F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Um operador linear regular $T : E \longrightarrow F$ é ordem contínuo se, e somente se, T é 1-ordem contínuo.*

Demonstração. Suponha que T seja ordem contínuo. Pelo Teorema 1.4.9, T^+ e T^- são operadores positivos ordem contínuos. Pelo Lema 1.4.12, T^+ e T^- são operadores 1-ordem contínuos. De $T = T^+ - T^-$ segue que T é 1-ordem contínuo.

Reciprocamente, suponha que T seja 1-ordem contínuo. Como $T = T^+ - T^-$, basta mostrar que T^+ e T^- são 1-ordem contínuos. Para isso seja $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ uma rede em E tal que $x_\alpha \downarrow 0$ em E e vejamos que $T^+(x_\alpha) \downarrow 0$ em F. É claro que $T^+(x_\alpha) \downarrow$, portanto falta apenas verificar que

$$\inf\{T^+(x_\alpha) : \alpha \in \Omega\} = 0.$$

Para isso, fixe $\alpha_0 \in \Omega$ e $y \in E$ tais que $0 \leq y \leq x_{\alpha_0}$. Para cada $\alpha \in \Omega$ chame $y_\alpha = y \wedge x_\alpha$. Então, para todo $\alpha \geq \alpha_0$ temos $x_\alpha \leq x_{\alpha_0}$, o que implica $0 \leq x_{\alpha_0} - x_\alpha$, e portanto

$$0 \leq y - y_\alpha = y - y \wedge x_\alpha = (y - x_\alpha)^+ \leq (x_{\alpha_0} - x_\alpha)^+ = x_{\alpha_0} - x_\alpha. \tag{1.2}$$

Considere o conjunto $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha \geq \alpha_0\}$. Como Ω é um conjunto dirigido, da definição de B vemos claramente que B também é um conjunto dirigido com a relação herdada de Ω. Defina a rede $f : B \longrightarrow E$ por $f(\alpha) = y_\alpha$ para todo $\alpha \in B$. Assim, $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ é 1-convergente para zero pois $0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha$ para todo $\alpha \in \Omega$. Como T é 1-ordem convergente, a rede $(T(y_\alpha))_{\alpha\in B}$ é 1-convergente para zero, em símbolos, $1\text{-}\lim\limits_{\alpha\in B} T(y_\alpha) = 0$. E Como $0 \leq T^+(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in \Omega$ e F é Dedekind completo, existe $z \in F^+$ tal que $T^+(x_\alpha) \downarrow z$. Vejamos que $z = 0$. Por (1.2) sabemos que para todo $\alpha \geq \alpha_0, 0 \leq y - y_\alpha \leq x_{\alpha_0} - x_\alpha$, logo

$$T(y) - T(y_\alpha) = T(y - y_\alpha) \leq T^+(y - y_\alpha) \leq T^+(x_{\alpha_0} - x_\alpha) = T^+(x_{\alpha_0}) - T^+(x_\alpha).$$

Segue que

$$T^+(x_\alpha) \leq T^+(x_{\alpha_0}) - T(y) + T(y_\alpha) \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0. \tag{1.3}$$

Seja $\alpha \in B$. Então $\alpha \geq \alpha_0$, e daí $T^+(x_\alpha) \leq T^+(x_{\alpha_0}) - T(y) + T(y_\alpha)$ para todo $\alpha \in B$. Dessa forma,

$$0 \leq z \leq T^+(x_\alpha) \leq T^+(x_{\alpha_0}) - T(y) + T(y_\alpha) \text{ para todo } \alpha \in B.$$

Pelo Lema 1.4.11 temos

$$T(y) + z = 1\text{-}\lim_{\alpha\in B}[T(y) + z - T(y_\alpha)] \leq T^+(x_{\alpha_0}),$$

donde segue que $T(y) + z \leq T^+(x_{\alpha_0})$ para todo $0 \leq y \leq x_{\alpha_0}$. Portanto,

$$T^+(x_{\alpha_0}) = \sup\{T(y) : 0 \leq y \leq x_{\alpha_0})\} \leq T^+(x_{\alpha_0}) - z,$$

e daí $z \leq 0$, isto é, $z = 0$. Isso prova que T^+ é 1-ordem contínuo e implica que $T^- = (-T)^+$ também é 1-ordem contínuo pois $-T$ o é. Segue que T^- é 1-ordem contínuo, e pelo Lema 1.4.12 segue que T^+ e T^- são ordem contínuos, o que prova que T é ordem contínuo. □

Corolário 1.4.14. *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear regular T entre espaços de Riesz Dedekind completos.*

(a) *T é ordem contínuo.*
(b) *T é 1-ordem contínuo.*
(c) *T é 2-ordem contínuo.*

Esse corolário nos dá liberdade para trabalhar com qualquer um dos três conceitos de ordem continuidade quando os espaços envolvidos são Dedekind completos, em particular quando são espaços duais.

1.5 Operadores multilineares regulares

As principais referências para esta seção são [59, 63, 64].

Definição 1.5.1. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_m$ e Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dizemos que uma aplicação $A : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ é um *operador m-linear* se A é linear em cada uma de suas variáveis separadamente, isto é,

$$A(x_1, \dots, \lambda x_i + x_i^{'}, \dots, x_m) = \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + A(x_1, \dots, x_i^{'}, \dots, x_m),$$

para quaisquer $i \in \{1, \dots, m\}$, $x_i, x_i^{'} \in X_i$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

O conjunto de todos os operadores m-lineares de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y será denotado por $L(X_1, \dots, X_m; Y)$. É fácil verificar que com as operações pontuais de funções definidas a seguir tornam $L(X_1, \dots, X_m; Y)$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$:

1) Dados $A, B \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$ e $x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m$, definimos

$$(A + B)(x_1, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m) + B(x_1, \dots, x_m).$$

2) Dados $A \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m$, definimos

$$(\lambda A)(x_1, \dots, x_m) = \lambda A(x_1, \dots, x_m).$$

Quando $X_1, \dots, X_m, Y$ são espaços normados, o subespaço vetorial de $L(X_1, \dots, X_m; Y)$ formado pelos operadores m-lineares contínuos é denotado por $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Para $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$, a expressão

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|A(x_1, \dots, x_m)\| \,:\, \|x_j\| \leq 1, j = 1, \dots, m\} \\ &= \inf\{C > 0 \,:\, \|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_m\| \,:\, x_j \in E_j, j = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ que é completa quando F é espaço de Banach.

Exemplo 1.5.2. Dados os espaços vetoriais $X_1, \dots, X_m$ e Y, escolha funcionais lineares $\varphi_i : X_i \longrightarrow \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, um vetor $y \in Y$ e defina

$$A : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y, \; A(x_1, \dots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m) y.$$

É fácil verificar que $A \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Definição 1.5.3. Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Riesz. Um operador m-linear $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é dito:

i) *Positivo*, em notação $A \geq 0$ ou $A \leq 0$, se $A(x_1, \dots, x_m) \in F^+$ para todos $x_1 \in E_1^+, \dots, x_m \in E_m^+$.

ii) *Regular* se A pode ser escrito como a diferença de dois operadores m-lineares positivos.

O espaço $L(E_1, \dots, E_m; F)$ é um espaço vetorial real ordenado com a seguinte ordem:

$$A \geq B \text{ em } L(E_1, \dots, E_m; F) \iff A - B \geq 0.$$

O subespaço vetorial ordenado de $L(E_1, \dots, E_m; F)$ formado por todos os operadores m-lineares regulares será denotado por $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$.

Já no caso linear vimos que o espaço dos operadores regulares nem sempre é um espaço de Riesz. A condição para que o espaço dos operadores multilineares regulares seja um espaço de Riesz será a mesma do caso linear, mas a obtenção de fórmulas para as operações reticuladas em $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ depende do seguinte conceito.

Definição 1.5.4. Sejam E um espaço de Riesz e $x \in E^+$. Uma *partição* de x é uma sequência finita de elementos de E^+ cuja soma é igual a x.

Denota-se o conjunto de todas as partições de $x \in E^+$ por $\prod x$, isto é,

$$\prod x = \left\{ (a_1, \dots, a_k) \,:\, k \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_k \in E^+ \text{ e } \sum_{j=1}^{k} a_j = x \right\}.$$

Teorema 1.5.5. [59, Lemma 2.12 e Proposition 2.14] *Sejam $E_1, \dots, E_m$ e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então o espaço $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ dos operadores m-lineares regulares é um espaço de Riesz Dedekind completo. Além disso, para todos $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ e $x_1 \in E_1^+, \dots, x_m \in E_m^+$ valem as seguintes fórmulas:*

$$A^+(x_1, \dots, x_m) = \sup \left\{ \sum_{i_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{k_m} (T(x_1^{i_1}, \dots, x_m^{i_m}))^+ \,:\, (x_j^{i_j})_{i_j=1}^{k_j} \in \prod x_j, j = 1 \dots, m \right\}.$$

$$A^-(x_1, \dots, x_m) = \sup \left\{ \sum_{i_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{k_m} (T(x_1^{i_1}, \dots, x_m^{i_m}))^- \,:\, (x_j^{i_j})_{i_j=1}^{k_j} \in \prod x_j, j = 1 \dots, m \right\}.$$

$$|A|(x_1, \dots, x_m) = \sup \left\{ \sum_{i_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{k_m} |T(x_1^{i_1}, \dots, x_m^{i_m})| \,:\, (x_j^{i_j})_{i_j=1}^{k_j} \in \prod x_j, j = 1 \dots, m \right\}.$$

Mais ainda,

$$|A(x_1, \dots, x_m)| \leq |A|\big(|x_1|, \dots, |x_m|\big)$$

para todos $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ e $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$.

Assim como no caso linear, operadores multilineares positivos entre reticulados de Banach são contínuos (veja [63, Proposição 4.2.1]), e portanto operadores multilineares regulares também são contínuos. Mais ainda:

Teorema 1.5.6. *[63, Corolário 4.2.2 e Teorema 4.2.4] Sejam $E_1, \dots, E_m$ e F reticulados de Banach com F Dedekind completo. Então o espaço $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ dos operadores m-lineares regulares é um reticulado de Banach Dedekind completo com a norma regular dada por $\|A\|_r = \||A|\|$ para todo $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$.*

À semelhança do caso linear, um operador m-linear $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz ou reticulados de Banach é um *multimorfismo de Riesz* se

$$|A(x_1, \dots, x_m)| = A(|x_1|, \dots, |x_m|)$$

para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$. Para maiores detalhes, veja [21, 22, 75].

Capítulo 2

Extensões de Arens de multimorfismos de Riesz

O ordem dual de um espaço de Riesz E pode ser o espaço trivial, isto é, pode acontecer $E^{\sim} = \{0\}$ mesmo com $E \neq \{0\}$. Por exemplo, para $0 < p < 1$, M. M. Day [4, Theorem 5.24] mostrou que o espaço de Riesz $E = L_p[0,1]$ satisfaz $E^{\sim} = \{0\}$. Assim, no decorrer deste capítulo e dos capítulos seguintes vamos supor que todos os espaços de Riesz envolvidos têm ordem dual não trivial, isto é, $E^{\sim} \neq \{0\}$.

Sejam $m \in \mathbb{N}$, S_m o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1, \dots, m\}$, $\rho \in S_m$, $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Riesz e $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ um operador m-linear regular. Neste capítulo veremos que existem $m!$ operadores m-lineares regulares $AR_m^{\rho}(A) : E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow F^{\sim\sim}$, não necessariamente distintos, que são extensões biduais de A no sentido de que

$$J_F \circ A = AR_m^{\rho}(A) \circ (J_{E_1}, \dots, J_{E_m}),$$

isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \arrow[r, "AR_m^{\rho}(A)"] & F^{\sim\sim} \\
E_1 \times \cdots \times E_m \arrow[u, "J_{E_1}"] \arrow[u, "J_{E_m}"'] \arrow[r, "A"] & F \arrow[u, "J_F"']
\end{tikzcd}$$

Os operadores $AR_m^{\rho}(A)$ são chamados de extensões de Arens de A devido ao trabalho pioneiro de R. Arens [9]. No contexto de espaços e reticulados de Banach, ditas extensões também são chamadas, extensões de Aron-Berner devido ao trabalho de R. Aron e P. Berner [11]. Neste caso tais extensões são denotadas por $AB_m^{\rho}(A)$ e têm sido utilizadas de forma recorrente no desenvolvimento da teoria de operadores multilineares, polinômios homogêneos e funções holomorfas (veja, por exemplo, [13, 14, 17, 19, 39, 56]).

Uma linha de pesquisa muito explorada consiste em estudar se determinada propriedade passa de um operador multilinear para suas extensões de Arens. Seguindo nessa linha, neste capítulo abordaremos as seguintes questões:

(i) Dado um multimorfismo de Riesz m-linear $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz, será que todas as $m!$ extensões de Arens de A são multimorfismos de Riesz sobre $E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim}$?
(ii) Dado um multimorfismo de Riesz m-linear $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ entre reticulados de Banach, são todas as $m!$ extensões de Aron-Berner de A multimorfismos de Riesz sobre $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$?

Lembre que, um espaço de Riesz F é *Arquimediano* se $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ em F para cada $x \in F^+$. Descrevemos a seguir o que é conhecido sobre o assunto. Dado reticulados de Banach E_1, E_2, F, e um bimorfismo de Riesz $A: E_1 \times E_2 \longrightarrow F$, Scheffold [75] provou que a restrição de uma extensão de Arens de A, denotada por $A^{***}: E_1^{**} \times E_2^{**} \longrightarrow F^{**}$, é um bimorfismos de Riesz sobre $(E_1^*)_n^* \times (E_2^*)_n^*$. Mais recentemente, Boulabiar, Buskes e Page [22] provaram que, dado espaços de Riesz Arquimedianos E_1, E_2, F e um bimorfismo de Riesz $A: E_1 \times E_2 \longrightarrow F$, a restrição da extensão de Arens $A^{***}: E_1^{\sim\sim} \times E_2^{\sim\sim} \longrightarrow F^{\sim\sim}$ é um bimorfismo de Riesz sobre $(E_1^{\sim})_n^{\sim} \times (E_2^{\sim})_n^{\sim}$. A extensão de Arens $A^{*(m+1)}: E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow F^{\sim\sim}$ de um operador m-linear regular $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz foi extensamente estudada por Buskes e Roberts [29], e a correspondente extensão de Aron-Berner $A^{*(m+1)}: E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow F^{**}$ de um operador m-linear regular $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ entre reticulados de Banach foi estudada por Boyd, Ryan e Snigireva [26]. Na perspectiva desses desenvolvimentos muito recentes, é natural abordar a generalização dos resultados de Scheffold and Boulabiar et al. em três direções: (i) considerando operadores m-lineares, $m \in \mathbb{N}$; (ii) levando em conta todas as $m!$ extensões de Arens de um operador m-linear; (iii) investigando se as extensões de Arens de multimorfismos de Riesz são multimorfismos de Riesz sobre o produto de todos os biduais, e não só sobre o produto das restrições correspondentes.

Para dar contribuições nessas três direções, desenvolveremos na subseção 2.1 a teoria de extensões de Arens de operadores multilineares regulares sobre espaços de Riesz seguindo a abordagem de Cabello Sánchez, García e Villanueva [30] no caso de operadores multilineares entre espaços de Banach. Obteremos, em particular, uma descrição análoga à descrição de Davie e Gamelin [34] das extensões de Aron-Berner em espaços de Banach para o caso das extensões de Arens em espaços de Riesz. Faremos isso substituindo a topologia fraca estrela pela topologia fraca absoluta. Usando a abordagem e os resultados da Seção 2.1, provaremos os resultados sobre extensões de multimorfismos de Riesz na Seção 2.2. Primeiro estendemos o resultado mencionado acima devido a Boulabiar et al., com uma técnica diferente, para o caso multilinear e para todas as diferentes extensões de Arens de um multimorfismo de Riesz. Então mostraremos que a questão (i) tem resposta afirmativa para multimorfismos de Riesz de posto finito tomando valores em espaços de Riesz Arquimedianos. Além disso, provaremos que todas as extensões de Arens de tais multimorfismos de Riesz são coincidentes. Alguns resultados parciais para o caso geral, que serão úteis posteriormente, também serão provados. Finalmente provaremos que a questão (ii) tem resposta afirmativa para multimorfismos de Riesz tomando valores em uma classe de reticulados de Banach F que inclui, por exemplo, $F = c_0, \ell_p, 1 < p < \infty$, o espaço original de Tsirelson $\mathcal{T}^*$, seu dual $\mathcal{T}$, o espaço de Schreier $\mathcal{S}$, o predual $d_*(w,1)$ do espaço de sequências de Lorentz $d(w,1)$, $c_0(E)$ e $\ell_p(E)$, onde $1 < p < \infty$ e $E = c_0, \ell_s, 1 < s < \infty, \mathcal{T}^*, \mathcal{T}, \mathcal{S}, d_*(w,1)$.

2.1 Extensões de Arens de operadores multilineares regulares

Conforme anunciado, nesta seção aplicaremos o método desenvolvido por Cabello Sánchez, García e Villanueva [30] para descrever extensões de Arens no caso de espaço de Banach e para a construção das $m!$ extensões de Arens de um operador m-linear regular entre espaços de Riesz. Para $m \in \mathbb{N}$ considere a seguinte notação: dados espaços de Riesz $E_1, \dots, E_m$, uma permutação $\rho \in S_m$ e $k \in \{1, \dots, m\}$, denotamos

$$E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m = \begin{cases} E_1, \dots, E_m & \text{se } k = 1, \\ E_1, \dots, E_m & \text{nessa mesma ordem onde } E_{\rho(1)}, \dots, \\ & E_{\rho(k-1)} \text{ são retirados se } k = 2, \dots, m. \end{cases}$$

Por exemplo $(E_1, {}_2E, E_3) = (E_1, E_3)$. Define-se o mesmo para a $(m-k+1)$-upla $(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k-1)}x, \dots, x_m)$ e para o produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times {}_{\rho(1)}E \times \cdots \times {}_{\rho(k-1)}E \times \cdots \times E_m$. Agora, se $k = 1, \dots, m-1$, denotamos

$$E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k)}E, \dots, E_m = E_1, \dots, E_m,$$

nessa mesma ordem, onde os espaços de Riesz $E_{\rho(1)}, \dots, E_{\rho(k)}$ são retirados. Define-se o mesmo para $(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m)$ e para o respectivo produto cartesiano. Finalmente, se $k = m$, escrevemos $\mathcal{L}(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k)}E, \dots, E_m; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Fixe $k \in \{1, \dots, m\}$ e sejam $\rho \in S_m$ uma permutação, $E_1, \dots, E_m$ espaços de Riesz e $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m)$. Para $x_r \in E_r$, $r \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$ considere os funcionais lineares

$$A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m) : E_{\rho(k)} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m)(x_{\rho(k)}) = A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k-1)}x, \dots, x_m), \tag{2.1}$$

onde o ponto $\bullet$ está na $\rho(k)$-ésima coordenada. Observe que no caso $k = m$ temos $A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(m)}x, \bullet, \dots, x_m) = A \in E^{\sim}_{\rho(m)}$. Chamamos os funcionais definidos acima de funcionais associados ao operador A.

Note que, para todos $x_j, y_j \in E_j$, $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, chamando $\varphi_{\rho(k)} = A(x_1, \dots, x_j + \lambda y_j, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m) : E_{\rho(k)} \longrightarrow \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho(k)} &= A(x_1, \dots, x_j, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m) \\ &\quad + \lambda A(x_1, \dots, y_j, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Lema 2.1.1. *Sejam $k \in \{1, \dots, m\}$, $\rho \in S_m$, $E_1, \dots, E_m$ espaços de Riesz e $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m)$. Então:*
(a) *Se A é positivo, então, para $x_r \in E_r^+$, $r \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$, os funcionais definidos em (2.1) são positivos.*
(b) *Os funcionais definidos em (2.1) são regulares.*

Demonstração. (a) Suponha que $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m)$ seja positivo e seja

$x_{\rho(k)} \in E^+_{\rho(k)}$. Para todos $x_r \in E^+_r$, $r \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$,

$$A(x_1, \dots, x_{\rho(1)}, \dots, {}_{\rho(k)}\, x, \bullet, \dots, x_m)(x_{\rho(k)}) = A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m) \geq 0,$$

o que mostra que os funcionais associados ao operador A são positivos.

(b) Seja $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, E, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, E, \dots, E_m)$ um operador regular. Então existem operadores positivos $A_1, A_2 \in L(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, E, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, E, \dots, E_m)$ tais que $A = A_1 - A_2$. Considere $\xi = (\xi_1, , \dots, {}_{\rho(1)}\, \xi, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, \xi, \dots, \xi_m)$ tal que $\xi_j \in \{+1, -1\}$ para todo $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k-1)\}$, e denote $P(\xi) = \xi_1 \cdots {}_{\rho(1)}\, \xi \cdots {}_{\rho(k-1)}\, \xi \cdots \xi_m \in \{+1, -1\}$. Sejam $x_r \in E_r$, $r \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$ e $x_{\rho(k)} \in E_{\rho(k)}$. Chamando $t = A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k)}\, x, \bullet, \dots, x_m)(x_{\rho(k)}) \in \mathbb{R}$, por (2.2) temos

$$\begin{aligned}
t &= A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m) \\
&= A(x_1^+ - x_1^-, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^+ - x_m^-) \\
&= \sum_{P(\xi)=+1} A(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m}) - \sum_{P(\xi)=-1} A(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m}) \\
&= \sum_{P(\xi)=+1} (A_1 - A_2)(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m}) \\
&\quad - \sum_{P(\xi)=-1} (A_1 - A_2)(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m}) \\
&= \sum_{P(\xi)=+1} \big(A_1(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m}) - A_2(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m})\big) \\
&- \sum_{P(\xi)=-1} \big(A_1(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m}) - A_2(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m})\big).
\end{aligned}$$

Note que para $i = 1, 2$,

$$A_i(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, x, \dots, x_m^{\xi_m}) = A_i(x_1^{\xi_1}, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k)}\, x, \bullet, \dots, x_m^{\xi_m})(x_{\rho(k)}).$$

Como A_1, A_2 são positivos, pelo item (a) segue que os funcionais associados aos operadores A_1, A_2 são lineares e positivos. Além disso, como as somas acima são finitas, concluímos que os funcionais associados ao operador A são regulares. □

Proposição 2.1.2. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Riesz, $\rho \in S_m$, $k \in \{1, \dots, m\}$ e $x''_{\rho(k)} \in E^{\sim\sim}_{\rho(k)}$. O operador*

$$\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho} : \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, E, \dots, {}_{\rho(k-1)}\, E, \dots, E_m) \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, E, \dots, {}_{\rho(k)}\, E, \dots, E_m),$$

$$\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}(A)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k)}\, x, \dots, x_m) = x''_{\rho(k)}(A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \dots, {}_{\rho(k)}\, x, \bullet, \dots, x_m)),$$

é linear, regular e $\left|\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\right| \leq \overline{|x''_{\rho(k)}|}^{\rho}$. Além disso, se $x''_{\rho(k)} \in E^{\sim\sim}_{\rho(k)}$ é positivo, então o operador $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}$ é positivo.

Demonstração. É imediato que, para cada $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m)$, $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}(A)$ é $(m-k)$-linear. Sejam $A_1, A_2 \in L(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m)$ operadores positivos tais

que $A = A_1 - A_2$. Para $x_j \in E_j, j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$, chame

$$y = (x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times {}_{\rho(1)}E \times \cdots \times {}_{\rho(k)}E \times \cdots \times E_m,$$

$\varphi = A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m)$ e $\varphi_i = A_i(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m)$ com $i = 1, 2$. Então $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ pois $A = A_1 - A_2$, logo

$$\begin{aligned}
\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}(A)(y) &= x''_{\rho(k)}(\varphi) = \left((x''_{\rho(k)})^+ - (x''_{\rho(k)})^-\right)(\varphi) = (x''_{\rho(k)})^+(\varphi) - (x''_{\rho(k)})^-(\varphi) \\
&= \left((x''_{\rho(k)})^+(\varphi_1) + (x''_{\rho(k)})^-(\varphi_2)\right) - \left((x''_{\rho(k)})^+(\varphi_2) + (x''_{\rho(k)})^-(\varphi_1)\right) \\
&= \left(\overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho}(A_1)(y) + \overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}(A_2)(y)\right) - \left(\overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho}(A_2)(y) + \overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}(A_1)(y)\right) \\
&= \left(\overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho}(A_1) + \overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}(A_2)\right)(y) - \left(\overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho}(A_2) + \overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}(A_1)\right)(y),
\end{aligned}$$

provando que

$$\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}(A) = \underbrace{\left(\overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho}(A_1) + \overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}(A_2)\right)}_{:=T_1} - \underbrace{\left(\overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho}(A_2) + \overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}(A_1)\right)}_{:=T_2}.$$

É claro que T_1 e T_2 são operadores $(m-k)$-lineares. Para $x_j \in E_j^+$, $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$, pelo Lema 2.1.1 os funcionais associados a A_1 e A_2,

$$A_i(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m) : E_{\rho(k)} \longrightarrow \mathbb{R}, \ i = 1, 2,$$

são positivos. Como $(x''_{\rho(k)})^+$ e $(x''_{\rho(k)})^-$ são funcionais positivos, temos, para $i = 1, 2$, que $(x''_{\rho(k)})^{\pm}(A_i(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m))$ são positivos em $\mathbb{R}$. Disso segue que $\overline{(x''_{\rho(k)})^{\pm}}^{\rho}(A_i)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m)$ são positivos, e portanto $\overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho}(A_i) \geq 0$ e $\overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}(A_i) \geq 0$, $i = 1, 2$. Concluímos que $T_i \geq 0, i = 1, 2$, provando que $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}(A)$ é regular, isto é, $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}$ está bem definido. A linearidade é clara. Agora sejam $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m)$ positivo e $0 \leq x''_{\rho(k)} \in E^{\sim\sim}_{\rho(k)}$. Pelo Lema 2.1.1 temos que, para todos $x_j \in E_r^+, j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$, os funcionais associados a A são positivos. Daí,

$$0 \leq x''_{\rho(k)}(A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m)) = \overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}(A)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m),$$

provando que $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}$ é positivo. Como $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho} = \overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho} - \overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}$ e como $(x''_{\rho(k)})^+, (x''_{\rho(k)})^- \in E^{\sim\sim}_{\rho(k)}$ são positivos, pelo feito acima segue que $\overline{(x''_{\rho(k)})^+}^{\rho}$ e $\overline{(x''_{\rho(k)})^-}^{\rho}$ são funcionais positivos, provando que $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}$ é regular.

Para finalizar a demonstração, sejam $x_j \in E_j^+$, $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$ e seja $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m)$ um operador positivo. Já sabemos que os funcionais associados a A são positivos, portanto

$$\begin{aligned}
\overline{|x''_{\rho(k)}|}^{\rho}(A)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m) &= |x''_{\rho(k)}|(A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m)) \\
&\geq \pm x''_{\rho(k)}(A(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m)) \\
&= \pm\left(\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\right)(A)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m),
\end{aligned}$$

donde obtemos $\overline{|x''_{\rho(k)}|}^{\rho} \geq \pm\left(\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\right)$. Segue que $\overline{|x''_{\rho(k)}|}^{\rho} \geq \left|\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\right|$. □

Em [26, 29] os autores aplicam a técnica de Arens [9] para construir a extensão ao bidual de um operador multilinear regular, da maneira que descreveremos a seguir. Dado um operador m-linear regular $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz, considere os seguintes operadores m-linear regulares:

$\circ$ $A^*: F^\sim \times E_1 \times \cdots \times E_{m-1} \longrightarrow E_m^\sim$, $A^*(y', x_1, \ldots, x_{m-1})(x_m) = y'(A(x_1, \ldots, x_m))$.

$\circ$ $A^{**}: E_m^{\sim\sim} \times F^\sim \times E_1 \times \cdots \times E_{m-2} \longrightarrow E_{m-1}^\sim$,

$$A^{**}(x''_m, y', x_1, \ldots, x_{m-2})(x_{m-1}) = x''_m(A^*(y', x_1, \ldots, x_{m-1})).$$

$\circ$ $A^{***}: E_{m-1}^{\sim\sim} \times E_m^{\sim\sim} \times F^\sim \times E_1 \times \cdots \times E_{m-3} \longrightarrow E_{m-2}^\sim$,

$$A^{***}(x''_{m-1}, x''_m, y', x_1, \ldots, x_{m-3})(x_{m-2}) = x''_{m-1}(A^{**}(x''_m, y', x_1, \ldots, x_{m-2})).$$

$\vdots$

$\circ$ $A^{*(m+1)}: E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow F^{\sim\sim}$, $A^{*(m+1)}(x''_1, \ldots, x''_m)(y') = x''_1(A^{*(m)}(x''_2, \ldots, x''_m, y'))$.

Compondo os operadores $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}$ da proposição anterior, definiremos as $m!$ extensões de Arens de um operador m-linear regular, recuperaremos o operador $A^{*(m+1)}$ como caso particular e provaremos as propriedades básicas dessas extensões.

Por θ denotamos a permutação de $\{1, \ldots, m\}$ dada por $\theta(j) = m - j + 1$.

Teorema 2.1.3. *Sejam $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços de Riesz, $\rho \in S_m$ e A um operador m-linear regular de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F. Defina $AR_m^\rho(A): E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow F^{\sim\sim}$ por*

$$AR_m^\rho(A)(x''_1, \ldots, x''_m)(y') = \left(\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(y' \circ A),$$

para todo $y' \in F^\sim$. Então:
(a) *$AR_m^\rho(A)$ é um operador m-linear regular.*
(b) *$AR_m^\rho(A)$ estende A no sentido que $AR_m^\rho(A) \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_m}) = J_F \circ A$.*
(c) *Se A é positivo então $AR_m^\rho(A)$ é positivo.*
(d) *$AR_m^\theta(A) = A^{*(m+1)}$. Em particular $AR_2^\theta(A) = A^{***}$ no caso bilinear $m = 2$.*

Demonstração. Vejamos que $AR_m^\rho(A)$ está bem definido. Sejam $x''_1 \in E_1^{\sim\sim}, \ldots, x''_m \in E_m^{\sim\sim}$ e $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_m; F)$. É claro que $AR_m^\rho(A)(x''_1, \ldots, x''_m)$ é linear e, além disso, como $E_j^{\sim\sim}, j = 1, \ldots, m$, são espaços de Riesz, então para cada $j = 1, \ldots, m$, temos $x''_j = (x''_j)^+ - (x''_j)^+$. Para cada $\xi^m = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ tal que $\xi_j \in \{+1, -1\}$ para todo $j = 1, \ldots, m$, escreva $P(\xi^m) = \xi_1 \cdots \xi_m \in \{+1, -1\}$. Para cada $y' \in F^\sim$, pondo $U_k = \overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}$, $k = 2, \ldots, m$, e usando que

$$\overline{x''_{\rho(j)}}^{\rho} = \overline{(x''_{\rho(j)})^+ - (x''_{\rho(j)})^-}^{\rho} = \overline{(x''_{\rho(j)})^+}^{\rho} - \overline{(x''_{\rho(j)})^-}^{\rho},\ j = 1, \ldots, m,$$

temos

$$AR_m^\rho(A)(x''_1, \ldots, x''_m)(y') = \left(\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(y' \circ A) = U_2\left(\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}(y' \circ A)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= U_2\Big(\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{+}}^{\rho} - \overline{(x''_{\rho(1)})^{-}}^{\rho}\Big)(y'\circ A)\Big)\\
&= U_2\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{+}}^{\rho}(y'\circ A)\Big) - U_2\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{-}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\\
&= U_3\Big(\overline{x''_{\rho(2)}}^{\rho}\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{+}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\Big) - U_3\Big(\overline{x''_{\rho(2)}}^{\rho}\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{-}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\Big)\\
&= U_3\Big(\Big(\overline{(x''_{\rho(2)})^{+}}^{\rho} - \overline{(x''_{\rho(2)})^{-}}^{\rho}\Big)\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{+}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\Big)\\
&\quad - U_3\Big(\Big(\overline{(x''_{\rho(2)})^{+}}^{\rho} - \overline{(x''_{\rho(2)})^{-}}^{\rho}\Big)\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{-}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\Big)\\
&= U_3\Big(\overline{(x''_{\rho(2)})^{+}}^{\rho}\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{+}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\Big) - U_3\Big(\overline{(x''_{\rho(2)})^{-}}^{\rho}\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{+}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\Big)\\
&\quad - U_3\Big(\overline{(x''_{\rho(2)})^{+}}^{\rho}\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{-}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\Big) + U_3\Big(\overline{(x''_{\rho(2)})^{-}}^{\rho}\Big(\overline{(x''_{\rho(1)})^{-}}^{\rho}(y'\circ A)\Big)\Big)\\
&= U_3\Big(\Big(\overline{(x''_{\rho(2)})^{+}}^{\rho}\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{+}}^{\rho} + \overline{(x''_{\rho(2)})^{-}}^{\rho}\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{-}}^{\rho}\Big)(y'\circ A)\Big)\\
&\quad - U_3\Big(\Big(\overline{(x''_{\rho(2)})^{-}}^{\rho}\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{+}}^{\rho} + \overline{(x''_{\rho(2)})^{+}}^{\rho}\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{-}}^{\rho}\Big)(y'\circ A)\Big)\\
&= U_3\Bigg(\Bigg(\sum_{P(\xi^2)=+1}\overline{(x''_{\rho(2)})^{\xi_2}}^{\rho}\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{\xi_1}}^{\rho} - \sum_{P(\xi^2)=-1}\overline{(x''_{\rho(2)})^{\xi_2}}^{\rho}\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{\xi_1}}^{\rho}\Bigg)(y'\circ A)\Bigg)\\
&\ \ \vdots\\
&= U_m\Bigg(\Bigg(\sum_{P(\xi^{m-1})=+1}\overline{(x''_{\rho(m-1)})^{\xi_{m-1}}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{\xi_1}}^{\rho} - \sum_{P(\xi^{m-1})=-1}\overline{(x''_{\rho(m-1)})^{\xi_{m-1}}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{\xi_1}}^{\rho}\Bigg)(y'\circ A)\Bigg)\\
&= \Bigg[\underbrace{\sum_{P(\xi^m)=+1}\Big(\overline{(x''_{\rho(m)})^{\xi_m}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{\xi_1}}^{\rho}\Big)}_{:=T_1} - \underbrace{\sum_{P(\xi^m)=-1}\Big(\overline{(x''_{\rho(m)})^{\xi_m}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{\xi_1}}^{\rho}\Big)}_{:=T_2}\Bigg](y'\circ A)\\
&= T_1(y'\circ A) - T_2(y'\circ A).
\end{aligned}
$$

Como A é regular, existem operadores $A_1, A_2 \in L(E_1, \dots, E_m; F)$ positivos tais que $A = A_1 - A_2$ e assim

$$
\begin{aligned}
AR^{\rho}_m(A)(x''_1, \dots, x''_m)(y') &= T_1(y'\circ A) - T_2(y'\circ A)\\
&= T_1(y'\circ(A_1 - A_2)) - T_2(y'\circ(A_1 - A_2))\\
&= \big(T_1(y'\circ A_1) + T_2(y'\circ A_2)\big) - \big(T_1(y'\circ A_2) + T_2(y'\circ A_1)\big).
\end{aligned}
$$

Mais ainda, para cada $i = 1, 2$ e todo $y' \in F^{\sim}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
T_1(y'\circ A_i) &= \sum_{P(\xi^m)=+1}\Big(\overline{(x''_{\rho(m)})^{\xi_m}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{(x''_{\rho(1)})^{\xi_1}}^{\rho}\Big)(y'\circ A_i)\\
&= \sum_{P(\xi^m)=+1} AR^{\rho}_m(A_i)\Big((x''_1)^{\xi_1}, \dots, (x''_m)^{\xi_m}\Big)(y')\\
&= \Bigg[\sum_{P(\xi^m)=+1} AR^{\rho}_m(A_i)\Big((x''_1)^{\xi_1}, \dots, (x''_m)^{\xi_m}\Big)\Bigg](y').
\end{aligned}
$$

Com isso, obtemos que, para cada $i = 1, 2$ e todo $y' \in Y^{\sim}$,

$$T_1(y' \circ A_i) = \left[\sum_{P(\xi^m)=+1} AR_m^{\rho}(A_i)\Big((x_1'')^{\xi_1}, \dots, (x_m'')^{\xi_m} \Big) \right](y'). \tag{2.3}$$

Analogamente segue que, para cada $j = 1, 2$ e todo $y' \in F^{\sim}$,

$$T_2(y' \circ A_j) = \left[\sum_{P(\xi^m)=-1} AR_m^{\rho}(A_j)\Big((x_1'')^{\xi_1}, \dots, (x_m'')^{\xi_m} \Big) \right](y') \tag{2.4}$$

e dessa forma, por (2.3) e (2.4) segue que, para todos $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$,

$$AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, x_m'') = (S_1 + R_1) - (S_2 + R_2), \tag{2.5}$$

onde, para $i = 1, 2$, os funcionais $S_i = \sum_{P(\xi^m)=+1} AR_m^{\rho}(A_i)\Big((x_1'')^{\xi_1}, \dots, (x_m'')^{\xi_m} \Big) \in F^{\sim\sim}$ e $R_i = \sum_{P(\xi^m)=-1} AR_m^{\rho}(A_i)\Big((x_1'')^{\xi_1}, \dots, (x_m'')^{\xi_m} \Big)$ são lineares. Usando que $(x_j'')^{\xi_j} \in E_j^{\sim\sim}, j = 1, \dots, m$, são positivos, pela Proposição 2.1.2 concluímos que os operadores $\overline{(x_{\rho(j)}'')^{\xi_j}}^{\rho}$, $j = 1, \dots, m$ são positivos. Além disso, como a composição de operadores positivos é positiva, segue que $\Big(\overline{(x_{\rho(m)}'')^{\xi_m}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{(x_{\rho(1)}'')^{\xi_1}}^{\rho} \Big)$ é positivo. Uma vez que A_1 e A_2 são positivos, para todo $0 \leq y' \in F^{\sim}$ temos $y' \circ A_i$ positivo para $i = 1, 2$. Logo

$$0 \leq \Big(\overline{(x_{\rho(m)}'')^{\xi_m}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{(x_{\rho(1)}'')^{\xi_1}}^{\rho} \Big)(y' \circ A_i) = AR_m^{\rho}(A_i)\Big((x_1'')^{\xi_1}, \dots, (x_m'')^{\xi_m} \Big)(y')$$

e concluímos que S_i, R_i, $i = 1, 2$, são positivos, e portanto $AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, x_m'')$ é regular, ou seja, $AR_m^{\rho}(A)$ está bem definido.

(a) É fácil ver que $AR_m^{\rho}(A)$ é m-linear. Provemos que $AR_m^{\rho}(A)$ é regular. Para isso sejam $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ e $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$. Pela regularidade de A existem operadores positivos $A_1, A_2 \in L(E_1, \dots, E_m; F)$ tais que $A = A_1 - A_2$. Observe que, para todo $y' \in F^{\sim}$,

$$\begin{aligned}
AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, x_m'')(y') &= \Big(\overline{x_{\rho(m)}''}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(1)}''}^{\rho} \Big)(y' \circ A) \\
&= \Big(\overline{x_{\rho(m)}''}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(1)}''}^{\rho} \Big)(y' \circ (A_1 - A_2)) \\
&= \Big(\overline{x_{\rho(m)}''}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(1)}''}^{\rho} \Big)\big((y' \circ A_1) - (y' \circ A_2) \big) \\
&= \Big(\overline{x_{\rho(m)}''}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(1)}''}^{\rho} \Big)(y' \circ A_1) - \Big(\overline{x_{\rho(m)}''}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(1)}''}^{\rho} \Big)(y' \circ A_2) \\
&= AR_m^{\rho}(A_1)(x_1'', \dots, x_m'')(y') - AR_m^{\rho}(A_2)(x_1'', \dots, x_m'')(y') \\
&= \Big(AR_m^{\rho}(A_1)(x_1'', \dots, x_m'') - AR_m^{\rho}(A_2)(x_1'', \dots, x_m'') \Big)(y').
\end{aligned}$$

Assim, para todos $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$,

$$AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, x_m'') = AR_m^{\rho}(A_1)(x_1'', \dots, x_m'') - AR_m^{\rho}(A_2)(x_1'', \dots, x_m'').$$

Segue que $AR_m^{\rho}(A) = AR_m^{\rho}(A_1) - AR_m^{\rho}(A_2)$. Como A_1 e A_2 são operadores positivos, pelo feito

acima segue que $AR_m^\rho(A_1)$ e $AR_m^\rho(A_2)$ são operadores positivos, o que prova que $AR_m^\rho(A)$ é regular.

(b) Para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$ e $y' \in F^{\sim}$, aplicando a definição de $AR_m^\rho(A)$, a Proposição 2.1.2 e a definição dos operadores J_{E_i}, $i = 1, \dots, m$, obtemos

$$\begin{aligned}
AR_m^\rho(A)(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_m}(x_m))(y') &= \left(\overline{J_{E_{\rho(m)}}(x_{\rho(m)})}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})}^{\rho}\right)(y' \circ A) \\
&= \overline{J_{E_{\rho(m)}}(x_{\rho(m)})}^{\rho}\left(\left(\overline{J_{E_{\rho(m-1)}}(x_{\rho(m-1)})}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})}^{\rho}\right)(y' \circ A)\right) \\
&= J_{E_{\rho(m)}}(x_{\rho(m)})\left(\left(\overline{J_{E_{\rho(m-1)}}(x_{\rho(m-1)})}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})}^{\rho}\right)(y' \circ A)\right) \\
&= \left(\left(\overline{J_{E_{\rho(m-1)}}(x_{\rho(m-1)})}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})}^{\rho}\right)(y' \circ A)\right)(x_{\rho(m)}) \\
&\vdots \\
&= \overline{J_{E_{\rho(2)}}(x_{\rho(2)})}^{\rho}\left(\overline{J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})}^{\rho}(y' \circ A)\right)\left(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, {}_{\rho(2)}x, \dots, x_m\right) \\
&= J_{E_{\rho(2)}}(x_{\rho(2)})\left(\left(\overline{J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})}^{\rho}(y' \circ A)\right)\left(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, {}_{\rho(2)}x, \bullet, \dots, x_m\right)\right) \\
&= \left(\left(\overline{J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})}^{\rho}(y' \circ A)\right)\left(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, {}_{\rho(2)}x, \bullet, \dots, x_m\right)\right)(x_{\rho(2)}) \\
&= \overline{J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})}^{\rho}(y' \circ A)\left(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, x_m\right) \\
&= J_{E_{\rho(1)}}(x_{\rho(1)})\left((y' \circ A)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \bullet, \dots, x_m)\right) \\
&= (y' \circ A)\left(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \bullet, \dots, x_m\right)(x_{\rho(1)}) = (y' \circ A)(x_1, \dots, x_m) \\
&= y'(A(x_1, \dots, x_m)) = J_F(A(x_1, \dots, x_m))(y') = (J_F \circ A)(x_1, \dots, x_m)(y').
\end{aligned}$$

Isso prova que $AR_m^\rho(A) \circ (J_{E_1}, \dots, J_{E_m}) = J_F \circ A$.

(c) Sejam $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ positivo e $0 \leq x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, 0 \leq x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$. Por um lado, $\left(\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)$ é positivo pelo que foi feito acima. Por outro lado, para cada $y' \in F^{\sim}$ positivo temos $(y' \circ A)$ positivo, portanto $\left(\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(y' \circ A) \geq 0$, ou seja, $AR_m^\rho(A)(x_1'', \dots, x_m'')(y') \geq 0$ para todo $y' \in F^{\sim}$ positivo. Isso mostra que $AR_m^\rho(A)(x_1'', \dots, x_m'') \geq 0$, o que nos permite concluir que $AR_m^\rho(A)$ é positivo.

(d) Dados $x_1 \in E_1, \dots, x_{m-1} \in E_{m-1}, y' \in F^{\sim}, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$, como $A^*(y', x_1, \dots, x_{m-1}) = (y' \circ A)(x_1, \dots, x_{m-1}, \bullet)$, temos

$$\begin{aligned}
A^{**}(x_m'', y', x_1, \dots, x_{m-2})(x_{m-1}) &= x_m''(A^*(y', x_1, \dots, x_{m-1})) = x_m''((y' \circ A)(x_1, \dots, x_{m-1}, \bullet)) \\
&= \overline{x_m''}^{\theta}(y' \circ A)(x_1, \dots, x_{m-1}) = \overline{x_m''}^{\theta}(y' \circ A)(x_1, \dots, x_{m-2}, \bullet)(x_{m-1}).
\end{aligned}$$

Disso obtemos que $A^{**}(x_m'', y', x_1, \dots, x_{m-2}) = \overline{x_m''}^{\theta}(y' \circ A)(x_1, \dots, x_{m-2}, \bullet)$. Agora, para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_{m-2} \in E_{m-2}, y' \in F^{\sim}, x_{m-1}'' \in E_{m-1}^{\sim\sim}, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$,

$$\begin{aligned}
A^{***}(x_{m-1}'', x_m'', y', x_1, \dots, x_{m-3})(x_{m-2}) &= x_{m-1}''(A^{**}(x_m'', y', x_1, \dots, x_{m-2})) \\
&= x_{m-1}''(\overline{x_m''}^{\theta}(y' \circ A)(x_1, \dots, x_{m-2}, \bullet)) = \overline{x_{m-1}''}^{\theta}(\overline{x_m''}^{\theta}(y' \circ A))(x_1, \dots, x_{m-2}) \\
&= \overline{x_{m-1}''}^{\theta}(\overline{x_m''}^{\theta}(y' \circ A))(x_1, \dots, x_{m-3}, \bullet)(x_{m-2}) \\
&= \left(\overline{x_{m-1}''}^{\theta} \circ \overline{x_m''}^{\theta}\right)(y' \circ A)(x_1, \dots, x_{m-3}, \bullet)(x_{m-2}),
\end{aligned}$$

provando que $A^{***}(x''_{m-1}, x''_m, y', x_1, \dots, x_{m-3}) = \left(\overline{x''_{m-1}}^{\theta} \circ \overline{x''_m}^{\theta}\right)(y' \circ A)(x_1, \dots, x_{m-3}, \bullet)$. Repetindo o processo $m-2$ vezes obtemos que, para todos $x''_1 \in E_1^{\tilde{}\tilde{}}, \dots, x''_m \in E_m^{\tilde{}\tilde{}}$ e $y' \in F^{\tilde{}}$,

$$A^{*(m+1)}(x''_1, \dots, x''_m)(y') = \left(\overline{x''_1}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x''_m}^{\theta}\right)(y' \circ A) = AR_m^{\theta}(A)(x''_1, \dots, x''_m)(y').$$

Segue que $A^{*(m+1)} = AR_m^{\theta}(A)$. □

Observação 2.1.4. No Teorema 2.1.3, se $u \in \mathcal{L}_r(F; G)$, então $AR_m^{\rho}(u \circ A) = u'' \circ AR_m^{\rho}(A)$. De fato, para $x''_1 \in E_1^{\tilde{}\tilde{}}, \dots, x''_m \in E_m^{\tilde{}\tilde{}}$ e $z' \in G^{\tilde{}}$,

$$\begin{aligned} AR_m^{\rho}(u \circ A)(x''_1, \dots, x''_m)(z') &= \left(\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(z' \circ u \circ A) \\ &= AR_m^{\rho}(A)(x''_1, \dots, x''_m)(z' \circ u) \\ &= AR_m^{\rho}(A)(x''_1, \dots, x''_m)(u'(z')) \\ &= (u'' \circ AR_m^{\rho}(A))(x''_1, \dots, x''_m)(z'). \end{aligned}$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que uma descrição das extensões de Arens em espaços de Riesz semelhante à descrição de Davie e Gamelin [34], das extensões de Aron-Berner em espaços de Banach, é válida substituindo-se a topologia fraca estrela pela topologia fraca absoluta $|\sigma|$. Essa descrição será útil mais tarde. Começamos com um lema preparatório.

Lema 2.1.5. *Sejam $k \in \{1, \dots, m\}$, $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Riesz, $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$, $\rho \in S_m$ e $x''_{\rho(1)} \in E_{\rho(1)}^{\tilde{}\tilde{}}, \dots, x''_{\rho(k-1)} \in E_{\rho(k-1)}^{\tilde{}\tilde{}}, x_{\rho(k+1)} \in E_{\rho(k+1)}, \dots, x_{\rho(m)} \in E_{\rho(m)}$. Defina $z''_1, \dots, z''_m$ por*

$$z''_{\rho(j)} = \begin{cases} x''_{\rho(j)} & \text{se} \quad j = 1, \dots, k, \\ J_{E_{\rho(j)}}(x_{\rho(j)}) & \text{se} \quad j = k+1, \dots, m. \end{cases} \tag{2.6}$$

Então o operador linear regular

$$AR_m^{\rho}(A)(z''_1, \dots, \bullet, \dots, z''_m) : E_{\rho(k)}^{\tilde{}\tilde{}} \longrightarrow F^{\tilde{}\tilde{}},$$

$$AR_m^{\rho}(A)(z''_1, \dots, \bullet, \dots, z''_m)(x''_{\rho(k)}) = AR_m(A)(z''_1, \dots, z''_m),$$

onde o ponto $\bullet$ está colocado na $\rho(k)$-ésima coordenada, é $|\sigma|$-$|\sigma|$-contínuo.

Demonstração. Para $y' \in F^{\tilde{}}$ e $x''_{\rho(k)} \in E_{\rho(k)}^{\tilde{}\tilde{}}$, chame $B_i = y' \circ A_i$, onde $A_i \in L(E_1, \dots, E_m; F)$, $i = 1, 2$, são operadores positivos tais que $A = A_1 - A_2$ e $w_{\rho(j)} = J_{E_{\rho(j)}}(x_{\rho(j)})$, $j = k+1, \dots, m$. Pela definição das coordenadas de $z''_1, \dots, z''_m$,

$$\begin{aligned} AR_m^{\rho}(A_i)(z''_1, \dots, \bullet, \dots, z''_m)(x''_{\rho(k)})(y') &= AR_m^{\rho}(A_i)(z''_1, \dots, z''_m)(y') \\ &= \left(\overline{w_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho} \circ \overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i) \\ &= \overline{w_{\rho(m)}}^{\rho}\left(\left(\overline{w_{\rho(m-1)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho} \circ \overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right) \\ &= w_{\rho(m)}\left(\left(\overline{w_{\rho(m-1)}}^{\rho} \circ \cdots \overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho} \circ \overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right) \\ &= \left(\overline{w_{\rho(m-1)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho} \circ \overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)(x_{\rho(m)}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\overline{w_{\rho(k+2)}}^{\rho}\circ\overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho}\circ\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k+2)}x,\dots,x_m)\\
&= \overline{w_{\rho(k+2)}}^{\rho}\left(\left(\overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho}\circ\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k+2)}x,\dots,x_m)\\
&= w_{\rho(k+2)}\left(\left(\left(\overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho}\circ\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k+2)}x,\bullet,\dots,x_m)\right)\\
&= \left(\left(\overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho}\circ\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k+2)}x,\bullet,\dots,x_m)(x_{\rho(k+2)})\\
&= \left(\overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho}\circ\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k+1)}x,\dots,x_m)\\
&= \overline{w_{\rho(k+1)}}^{\rho}\left(\left(\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k+1)}x,\dots,x_m)\\
&= w_{\rho(k+1)}\left(\left(\left(\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k+1)}x,\bullet,\dots,x_m)\right)\\
&= \left(\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k+1)}x,\bullet,\dots,x_m)(x_{\rho(k+1)})\\
&= \left(\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k)}x,\dots,x_m)\\
&= \overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}\left(\left(\overline{x''_{\rho(k-1)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k)}x,\dots,x_m)\\
&= x''_{\rho(k)}\Big(\underbrace{\left(\left(\overline{x''_{\rho(k-1)}}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_i)\right)(x_1,\dots,{}_{\rho(1)}x,\dots,{}_{\rho(k)}x,\bullet,\dots,x_m)}_{:=\varphi^i_{\rho(k)}\in E^{\sim}_{\rho(k)}}\Big),
\end{aligned}
$$

isto é, $AR^{\rho}_m(A_i)(z''_1,\dots,\bullet,\dots,z''_m)(x''_{\rho(k)})(y') = x''_{\rho(k)}(\varphi^i_{\rho(k)})$ para todos $y'\in F^{\sim}$ e $x''_{\rho(k)}\in E^{\sim\sim}_{\rho(k)}$. Seja $(x''_{\alpha_{\rho(k)}})_{\alpha_{\rho(k)}\in\Omega_{\rho(k)}}$ uma rede em $E^{\sim\sim}_{\rho(k)}$ tal que $x''_{\alpha_{\rho(k)}}\xrightarrow{|\sigma|}x''_{\rho(k)}$. Então $x''_{\alpha_{\rho(k)}}-x''_{\rho(k)}\xrightarrow{|\sigma|}0$, logo $|x''_{\alpha_{\rho(k)}}-x''_{\rho(k)}|(|x'_{\rho(k)}|)\longrightarrow 0$ para todo $x'_{\rho(k)}\in E^{\sim}_{\rho(k)}$ (Proposição 1.2.2). Dado $\varphi\in F^{\sim}$, pondo

$$
\psi^i_{\rho(k)} = \left(\overline{|x''_{\rho(k-1)}|}^{\rho}\circ\cdots\circ\overline{|x''_{\rho(1)}|}^{\rho}\right)(|\varphi|\circ A_i)(|x_1|,\dots,|{}_{\rho(1)}x|,\dots,|{}_{\rho(k)}x|,\bullet,\dots,|x_m|)\in E^{\sim}_{\rho(k)},
$$

o Teorema 2.1.3 fornece

$$
\begin{aligned}
&|AR^{\rho}_m(A)(z''_1,\dots,\bullet,\dots,z''_m)(x''_{\alpha_{\rho(k)}}) - AR^{\rho}_m(A)(z''_1,\dots,\bullet,\dots,z''_m)(x''_{\rho(k)})|(|\varphi|)\\
&\qquad = |AR^{\rho}_m(A)(z''_1,\dots,\bullet,\dots,z''_m)(x''_{\alpha_{\rho(k)}}-x''_{\rho(k)})|(|\varphi|)\\
&\qquad \le |AR^{\rho}_m(A_1-A_2)|(|z''_1|,\dots,\bullet,\dots,|z''_m|)|(|x''_{\alpha_{\rho(k)}}-x''_{\rho(k)}|)(|\varphi|)\\
&\qquad \le (AR^{\rho}_m(A_1)+AR^{\rho}_m(A_2))(|z''_1|,\dots,\bullet,\dots,|z''_m|)(|x''_{\alpha_{\rho(k)}}-x''_{\rho(k)}|)(|\varphi|)\\
&\qquad = \sum_{i=1}^{2} AR^{\rho}_m(A_i)(|z''_1|,\dots,\bullet,\dots,|z''_m|)(|x''_{\alpha_{\rho(k)}}-x''_{\rho(k)}|)(|\varphi|)\\
&\qquad = |x''_{\alpha_{\rho(k)}}-x''_{\rho(k)}|(\psi^1_{\rho(k)})+|x''_{\alpha_{\rho(k)}}-x''_{\rho(k)}|(\psi^2_{\rho(k)})\longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$
|AR^{\rho}_m(A)(z''_1,\dots,\bullet,\dots,z''_m)(x''_{\alpha_{\rho(k)}}) - AR^{\rho}_m(A)(z''_1,\dots,\bullet,\dots,z''_m)(x''_{\rho(k)})|(|\varphi|)\longrightarrow 0.
$$

Pela Proposição 1.2.2 e da definição das seminormas que geram a topologia fraca absoluta obtemos que $AR^{\rho}_m(A)(z''_1,\dots,\bullet,\dots,z''_m)(x''_{\alpha_{\rho(k)}})\xrightarrow{|\sigma|}AR^{\rho}_m(A)(z''_1,\dots,\bullet,\dots,z''_m)(x''_{\rho(k)})$. □

Proposição 2.1.6. *Sejam $E_1,\dots,E_m,F$ espaços de Riesz com $E_1,\dots,E_m$ Arquimedianos, $\rho\in$*

S_m e $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ um operador m-linear regular. Para $x_k'' \in (E_k^{\sim})_n^{\sim}$, $k = 1, \dots, m$,

$$AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, x_m'') = |\sigma|\text{-}\lim_{\alpha_{\rho(1)}} \cdots |\sigma|\text{-}\lim_{\alpha_{\rho(m)}} J_F(A(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_m})),$$

onde, para cada $k = 1, \dots, m$, $(x_{\alpha_k})_{\alpha_k}$ é uma rede em E_k tal que $J_{E_k}(x_{\alpha_k}) \xrightarrow{|\sigma|} x_k''$ em $(E_k^{\sim})_n^{\sim}$.

Demonstração. Para os funcionais dados $x_1'' \in (E_1^{\sim})_n^{\sim}, \dots, x_m'' \in (E_m^{\sim})_n^{\sim}$, defina $z_1'', \dots, z_m''$ como em (2.6). Como os E_i, $i = 1, \dots, m$ são Arquimedianos, por [50, Theorem 2] existe uma rede $(x_{\alpha_j})_{\alpha_j \in \Omega_j}$ em E_j tal que $J_{E_j}(x_{\alpha_j}) \xrightarrow{|\sigma|} x_j''$, $j = 1, \dots, m$. No próximo cálculo, o símbolo $\overset{k=j}{=}$ significa que a conclusão do Lema 2.1.5 está sendo aplicada para $k = j$, e o símbolo $\overset{2.6,k=j}{=}$ significa que (2.6) está sendo usada para $k = j$:

$$\begin{aligned}
AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, x_m'') &= AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, \bullet, \dots, x_m'')(x_{\rho(m)}'') \\
&\overset{k=m}{=} |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, \bullet, \dots, x_m'')(J_{E_{\rho(m)}}(x_{\alpha_{\rho(m)}})) \\
&\overset{2.6,k=m-1}{=} |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} AR_m^{\rho}(A)(z_1'', \dots, z_m'') \\
&= |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, \bullet, \dots, x_m'')(x_{\rho(m-1)}'') \\
&\overset{k=m-1}{=} |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m-1)}} AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, \bullet, \dots, x_m'')(J_{E_{\rho(m-1)}}(x_{\alpha_{\rho(m-1)}})) \\
&\overset{2.6,k=m-2}{=} |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m-1)}} AR_m^{\rho}(A)(z_1'', \dots, z_m'') \\
&\vdots \\
&\overset{2.6,k=1}{=} |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(2)}} AR_m^{\rho}(A)(z_1'', \dots, z_m'') \\
&= |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(2)}} AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, \bullet, \dots, x_m'')(x_{\rho(1)}'') \\
&\overset{k=1}{=} |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, \bullet, \dots, x_m'')(J_{E_{\rho(1)}}(x_{\alpha_{\rho(1)}})) \\
&= |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} AR_m^{\rho}(A)(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), \dots, J_{E_m}(x_{\alpha_m})) \\
&= |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} J_F(A(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_m})).
\end{aligned}$$

Portanto $AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, x_m'') = |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} J_F(A(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_m}))$. □

2.2 Extensões de multimorfismos entre espaços de Riesz

Dado um multimorfismo de Riesz $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$, Pelo Teorema 2.1.3(b) segue imediatamente que a restrição de qualquer extensão de Arens $AR_m^{\rho}(A)$ de A sobre $J_{E_1}(E_1) \times \cdots \times J_{E_m}(E_m)$ é um multimorfismo de Riesz. Além disso, em [21] foi provado para o caso bilinear que a restrição da extensão de Arens $A^{***} = AR_2^{\theta}(A)$ a $(E_1^{\sim})_n^{\sim} \times (E_2^{\sim})_n^{\sim}$ é um bimorfismo de Riesz. A seguir mostramos que a fórmula obtida na Proposição 2.1.6 fornece uma

demonstração curta de uma extensão desse fato a qualquer extensão de Arens de A e para qualquer m.

Relembre que um operador m-linear $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz é um *multimorfismo de Riesz* se $|A(x_1, \ldots, x_m)| = A(|x_1|, \ldots, |x_m|)$ para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_m \in E_m$.

Proposição 2.2.1. *Se os espaços de Riesz $E_1, \ldots, E_m$ são Arquimedianos, F é um espaço de Riesz e $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_m; F)$ é um multimorfismo de Riesz, então, para qualquer $\rho \in S_m$, a restrição de $AR_m^\rho(A)$ para $(E_1^\sim)_n^\sim \times \cdots \times (E_m^\sim)_n^\sim$ é um multimorfismo de Riesz.*

Demonstração. Sejam $\rho \in S_m$, $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_m; F)$ um multimorfismo de Riesz e $x_1'' \in (E_1^\sim)_n^\sim, \ldots, x_m'' \in (E_m^\sim)_n^\sim$. Pela Proposição 2.1.6,

$$AR_m^\rho(A)(x_1'', \ldots, x_m'') = |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} J_F(A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_m})),$$

onde, para cada $j = 1, \ldots, m$, $(x_{\alpha_j})_{\alpha_j \in \Omega_j}$ é uma rede em E_j tal que $J_{E_j}(x_{\alpha_j}) \xrightarrow{|\sigma|} x_j''$. Como as operações reticuladas são $|\sigma|$-$|\sigma|$-contínuas, chamando o Lema 1.2.3 e usando que o mergulho canônico é um homomorfismo de Riesz, do Teorema 1.4.6 segue que $J_{E_j}(|x_{\alpha_j}|) \xrightarrow{|\sigma|} |x_j''|$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Aplicando a Proposição 2.1.6,

$$AR_m^\rho(A)(|x_1''|, \ldots, |x_m''|) = |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} J_F(A(|x_{\alpha_1}|, \ldots, |x_{\alpha_m}|)).$$

Como A é multimorfismo de Riesz e J_F é homomorfismo de Riesz, $J_F \circ A$ também é multimorfismo de Riesz, logo

$$\begin{aligned} AR_m^\rho(A)(|x_1''|, \ldots, |x_m''|) &= |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} J_F(A(|x_{\alpha_1}|, \ldots, |x_{\alpha_m}|)) \\ &= |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} |J_F(A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_m}))| \\ &= \left| |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(m)}} \cdots |\sigma| - \lim_{\alpha_{\rho(1)}} J_F(A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_m})) \right| \\ &= |AR_m^\rho(A)(x_1'', \ldots, x_m'')|. \end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue da $|\sigma|$-$|\sigma|$- continuidade das operações reticuladas (veja Lema 1.2.3). Assim,

$$AR_m^\rho(A)(|x_1''|, \ldots, |x_m''|) = |AR_m^\rho(A)(x_1'', \ldots, x_m'')|,$$

isto é, cada extensão de Arens $AR_m^\rho(A)$ é um multimorfismo de Riesz sobre $(E_1^\sim)_n^\sim \times \cdots \times (E_m^\sim)_n^\sim$. □

Nos direcionamos agora aos nossos principais resultados deste capítulo. Similarmente à noção de aplicações de posto finito entre espaços vetoriais (veja, por exemplo, [65]), dizemos que uma aplicação que toma valores em um espaço de Riesz tem *posto finito* se o subreticulado gerado por sua imagem for de dimensão finita.

Teorema 2.2.2. *Se $E_1, \ldots, E_m$ são espaços de Riesz, F é um espaço de Riesz Arquimediano e $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é um multimorfismo de Riesz de posto finito, então todas as extensões*

de Arens de A, $AR_m^\rho(A) : E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow F^{\sim\sim}$, $\rho \in S_m$, coincidem e são multimorfismos de Riesz.

Demonstração. Seja $\rho \in S_m$. Começamos com um multimorfismo de Riesz a valores escalares $B : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{R}$. Pelo Teorema 2.1.3 obtemos que $AR_m^\rho(B) : E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma m-linear regular. Por [52, Theorem 6] existem homomorfismos de Riesz $\varphi_i : E_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, tais que $B(x_1, \dots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m)$ para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$. Para $k = 1, \dots, m$, é claro que

$$B_k : E_1 \times \cdots \times {}_{\rho(1)}E \times \cdots \times {}_{\rho(k-1)}E \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$B_k(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k-1)}x, \dots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots {}_{\rho(1)}\varphi(x_{\rho(1)}) \cdots {}_{\rho(k-1)}\varphi(x_{\rho(k-1)}) \cdots \varphi_m(x_m),$$

é uma forma multilinear. É claro também que B_k é positivo, pois cada φ_i é um homomorfismo de Riesz. Em particular, $B_k \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(k-1)}E, \dots, E_m)$. Para cada $k = 1, \dots, m-1$ e cada $x_{\rho(k)} \in E_{\rho(k)}$, tem-se

$$\begin{aligned}
B_k(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m)(x_{\rho(k)}) &= B_k(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k-1)}x, \dots, x_m) \\
&= \varphi_1(x_1) \cdots {}_{\rho(1)}\varphi(x_{\rho(1)}) \cdots {}_{\rho(k-1)}\varphi(x_{\rho(k-1)}) \cdots \varphi_m(x_m) \\
&= \varphi_1(x_1) \cdots {}_{\rho(1)}\varphi(x_{\rho(1)}) \cdots {}_{\rho(k)}\varphi(x_{\rho(k)}) \cdots \varphi_m(x_m)\varphi_{\rho(k)}(x_{\rho(k)}) \\
&= B_{k+1}(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m)\varphi_{\rho(k)}(x_{\rho(k)}),
\end{aligned}$$

ou seja, $B_k(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m) = B_{k+1}(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m)\varphi_{\rho(k)}$, $k = 1, \dots, m-1$. Para $k = m$, temos $B_m = \varphi_{\rho(m)}$. Dados $x''_{\rho(k)} \in E_{\rho(k)}^{\sim\sim}$, $k = 1, \dots, m-1$, pela Proposição 2.1.2 temos

$$\begin{aligned}
\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}(B_k)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m) &= x''_{\rho(k)}(B_k(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \bullet, \dots, x_m)) \\
&= x''_{\rho(k)}(B_{k+1}(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m)\varphi_{\rho(k)}) \\
&= B_{k+1}(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, {}_{\rho(k)}x, \dots, x_m)x''_{\rho(k)}(\varphi_{\rho(k)})
\end{aligned}$$

e segue que $\overline{x''_{\rho(k)}}^{\rho}(B_k) = x''_{\rho(k)}(\varphi_{\rho(k)})B_{k+1}$ para $k = 1, \dots, m-1$. Além disso, para $k = m$ obtemos $\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}(B_m) = \overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}(\varphi_{\rho(m)}) = x''_{\rho(m)}(\varphi_{\rho(m)})$. Usando que $B = B_1$, para todos $x''_1 \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x''_m \in E_m^{\sim\sim}$, temos

$$\begin{aligned}
AR_m^\rho(B)(x''_1, \dots, x''_m) &= \left(\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B) = \left(\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(B_1) \\
&= \overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}\left(\cdots\left(\overline{x''_{\rho(2)}}^{\rho}\left(\overline{x''_{\rho(1)}}^{\rho}(B_1)\right)\right)\cdots\right) \\
&= \overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}\left(\cdots\left(\overline{x''_{\rho(2)}}^{\rho}\left(x''_{\rho(1)}(\varphi_{\rho(1)})B_2\right)\right)\cdots\right) \\
&= x''_{\rho(1)}(\varphi_{\rho(1)})\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}\left(\cdots\left(\overline{x''_{\rho(3)}}^{\rho}\left(\overline{x''_{\rho(2)}}^{\rho}(B_2)\right)\right)\cdots\right) \\
&= x''_{\rho(1)}(\varphi_{\rho(1)})\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}\left(\cdots\left(\overline{x''_{\rho(3)}}^{\rho}\left(x''_{\rho(2)}(\varphi_{\rho(2)})B_3\right)\right)\cdots\right) \\
&= x''_{\rho(1)}(\varphi_{\rho(1)})x''_{\rho(2)}(\varphi_{\rho(2)})\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}\left(\cdots\left(\overline{x''_{\rho(3)}}^{\rho}(B_3)\right)\cdots\right) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x''_{\rho(1)}(\varphi_{\rho(1)}) \cdots x''_{\rho(m-2)}(\varphi_{\rho(m-2)})\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}\left(\overline{x''_{\rho(m-1)}}^{\rho}(B_{m-1})\right)\\
&= x''_{\rho(1)}(\varphi_{\rho(1)}) \cdots x''_{\rho(m-2)}(\varphi_{\rho(m-2)})\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}\left(x''_{\rho(m-1)}(\varphi_{\rho(m-1)})B_m\right)\\
&= x''_{\rho(1)}(\varphi_{\rho(1)}) \cdots x''_{\rho(m-2)}(\varphi_{\rho(m-2)})x''_{\rho(m-1)}(\varphi_{\rho(m-1)})\overline{x''_{\rho(m)}}^{\rho}\left(\varphi_{\rho(m)}\right)\\
&= x''_{\rho(1)}(\varphi_{\rho(1)}) \cdots x''_{\rho(m-2)}(\varphi_{\rho(m-2)})x''_{\rho(m-1)}(\varphi_{\rho(m-1)})x''_{\rho(m)}(\varphi_{\rho(m)}),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$AR^{\rho}_m(B)(x''_1, \dots, x''_m) = x''_1(\varphi_1) \cdots x''_m(\varphi_m) = \varphi''_1(x''_1) \cdots \varphi''_m(x''_m),$$

onde φ''_i é o biadjunto do homomorfismo de Riesz φ_i, $i = 1, \dots, m$. Assim, a extensão não depende de ρ e, como $\varphi''_1, \dots, \varphi''_m$ são homomorfismos de Riesz (Teorema 1.4.5), segue que $AR^{\rho}_m(B)$ é um multimorfismo de Riesz.

Como passo intermediário, para $n \in \mathbb{N}$ considere $\mathbb{R}^n$ com a ordem coordenada a coordenada e seja $C : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um multimorfismo de Riesz. Pelo Teorema 2.1.3 sabemos que $AR^{\rho}_m(C) : E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^{\sim\sim} = \mathbb{R}^n$ é uma forma m-linear regular. Tomando as projeções canônicas $\pi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, que são homomorfismos de Riesz, cada $\pi_j \circ C$ é um multimorfismo de Riesz a valores escalares. Da primeira parte da demonstração obtemos que $AR^{\rho}_m(\pi_j \circ C) : E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um multimorfismo de Riesz que não depende de ρ. Pela Observação 2.1.4,

$$\pi_j \circ AR^{\rho}_m(C) = \pi''_j \circ AR^{\rho}_m(C) = AR^{\rho}_m(\pi_j \circ C)$$

é um multimorfismo de Riesz para cada $j = 1, \dots, n$. De

$$AR^{\rho}_m(C)(x''_1, \dots, x''_m) = ((\pi_j \circ AR^{\rho}_m(C)(x''_1, \dots, x''_m))_{j=1}^n$$

segue que $AR^{\rho}_m(C)$ não depende de ρ e é um multimorfismo de Riesz, pois estamos trabalhando com a ordem coordenada a coordenada em $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, sejam F um espaço de Riesz Arquimediano e $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ um multimorfismo de Riesz de posto finito. Chame de G o subreticulado de dimensão finita de F gerado pela imagem de A, denote por $i : G \longrightarrow F$ o operador inclusão e note que a restrição de A a G, denotada por $A_1 : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow G$, é um multimorfismo de Riesz. Chamemos de $n \in \mathbb{N}$ a dimensão do espaço Arquimediano G. Por [73, Corollary 1, p. 70] existe um isomorfismo de Riesz $I : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{R}^n$ tem a ordem coordenada a coordenada. Como $I \circ A_1$ é um multimorfismo de Riesz a valores em $\mathbb{R}^n$, da segunda parte da demonstração obtemos que $AR^{\rho}_m(I \circ A_1)$ é um multimorfismo de Riesz que não depende de ρ. Pela Observação 2.1.4,

$$AR^{\rho}_m(A) = AR^{\rho}_m(i \circ I^{-1} \circ I \circ A_1) = i'' \circ (I^{-1})'' \circ AR^{\rho}_m(I \circ A_1).$$

É claro que i'' é homomorfismo de Riesz. Vejamos que $(I^{-1})''$ também é homomorfismo de Riesz. Para todo $y \in \mathbb{R}^n$ existe $x \in G$ tal que $I(x) = y$, e portanto

$$I^{-1}(|y|) = I^{-1}(|I(x)|) = (I^{-1} \circ I)(|x|) = |x| = |I^{-1}(y)|.$$

Isso implica que I^{-1} é homomorfismo de Riesz, e daí $(I^{-1})''$ também é homomorfismo de Riesz pelo Teorema 1.4.5. Portanto $AR^{\rho}_m(A)$ não depende de ρ e é um multimorfismo

de Riesz, pois é a composição de homomorfismos de Riesz com um multimorfismo de Riesz. □

Definição 2.2.3. Uma *álgebra de Riesz* $(\mathcal{A}, *)$ é um espaço de Riesz $\mathcal{A}$ com um produto $*$ que o torna uma álgebra associativa e tal que $x * y \geq 0$ para todos $x, y \in \mathcal{A}^+$.

Uma álgebra de Riesz $(\mathcal{A}, *)$ é uma *f-álgebra* se $x \wedge y = 0$ em $\mathcal{A}$ implica que $(x * z) \wedge y = (z * x) \wedge y = 0$ para todo $z \in \mathcal{A}^+$. Se $(\mathcal{A}, *)$ é uma f-álgebra, então o produto de Arens $\odot$, definido a seguir, torna $\mathcal{A}^{\tilde{}\tilde{}}$ uma f-álgebra (veja [80]). Dados $x \in \mathcal{A}$, $y' \in \mathcal{A}^{\tilde{}}$ e $x'', y'' \in \mathcal{A}^{\tilde{}\tilde{}}$, define-se:

$$\begin{aligned} y' \cdot x :\ \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (y' \cdot x)(y) = y'(x * y), \\ x'' \diamond y' :\ \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x'' \diamond y')(y) = x''(y' \cdot y) \text{ e} \\ x'' \odot y'' :\ \mathcal{A}^{\tilde{}} &\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x'' \odot y'')(z') = x''(y'' \diamond z'). \end{aligned}$$

Para maiores detalhes sobre álgebras de Riesz e f-álgebras, veja [5, Capítulo 2, p. 122].

Um espaço de Riesz é chamado *lateralmente completo* se todo conjunto de vetores positivos disjuntos dois a dois tem supremo. Um espaço de Riesz que é ao mesmo tempo lateralmente completo e Dedekind completo é chamado de *espaço de Riesz universalmente completo* [5, p. 126].

Observação 2.2.4. Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Riesz e $(\mathcal{A}, *)$ uma f-álgebra. Um multimorfismo de Riesz $A :\ E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathcal{A}$ é dito *multiplicativo* se para cada $i = 1, \dots, m$, existe um homomorfismo de Riesz $T_i :\ E_i \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que

$$A(x_1, \dots, x_m) = T_1(x_1) * \cdots * T_m(x_m)$$

para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$. A primeira parte da demonstração do Teorema 2.2.2 pode ser facilmente adaptada para mostrar que todas as extensões de Arens de A são multimorfismos de Riesz, onde o contradomínio de A é uma f-álgebra. Na verdade, aquele mesmo raciocínio mostra que, para cada $\rho \in S_m$ e todos $x_i'' \in E_i^{\tilde{}\tilde{}}$, $i = 1, \dots, m$,

$$AR_m^\rho(A)(x_1'', \dots, x_m'') = (x_{\rho(m)}'' \circ T_{\rho(m)}') \odot \cdots \odot (x_{\rho(1)}'' \circ T_{\rho(1)}') = T_{\rho(m)}''(x_{\rho(m)}'') \odot \cdots \odot T_{\rho(1)}''(x_{\rho(1)}''),$$

onde $\odot$ é o produto de Arens que torna $\mathcal{A}^{\tilde{}\tilde{}}$ uma f-álgebra. Isto mostra, em particular, que todas as extensões de Arens de qualquer multimorfismo de Riesz tomando valores em um espaço de Riesz universalmente completo com ordem unidade fraca são multimorfismos de Riesz multiplicativos.

O seguinte resultado parcial para multimorfismos de Riesz arbitrários será útil mais adiante.

Proposição 2.2.5. *Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Riesz, $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ um multimorfismo de Riesz e $\rho \in S_m$. Para cada homomorfismo de Riesz $y' \in F^{\tilde{}}$, $J_{F^{\tilde{}}}(y') \circ AR_m^\rho(A)$ é um multimorfismo de Riesz e*

$$|AR_m^\rho(A)(x_1'', \dots, x_m'')|(y') = AR_m^\rho(A)(|x_1''|, \dots, |x_m''|)(y')$$

para todos $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$.

Demonstração. Seja $y' \in F^\sim$ um homomorfismo de Riesz. Então $y' \circ A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m)$ é um multimorfismo de Riesz, e portanto $AR_m^\rho(y' \circ A) : E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um multimorfismo de Riesz pelo Teorema 2.2.2. Para provar a primeira afirmação é suficiente verificar que $J_{F^\sim}(y') \circ AR_m^\rho(A) = AR_m^\rho(y' \circ A)$: de fato, para todos $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$,

$$\begin{aligned}
(J_{F^\sim}(y') \circ AR_m^\rho(A))(x_1'', \dots, x_m'') &= J_{F^\sim}(y')(AR_m^\rho(A)(x_1'', \dots, x_m'')) \\
&= AR_m^\rho(A)(x_1'', \dots, x_m'')(y') \\
&= \left(\overline{x_{\rho(m)}''}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(1)}''}^{\rho}\right)(y' \circ A) \\
&= AR_m^\rho(y' \circ A)(x_1'', \dots, x_m'').
\end{aligned}$$

Uma vez que acabamos de provar que $J_{F^\sim}(y') \circ AR_m^\rho(A)$ é um multimorfismo de Riesz e usando que $AR_m^\rho(A) \geq 0$ (Teorema 2.1.3) e $y' \geq 0$, para todos $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$ obtemos

$$\begin{aligned}
AR_m^\rho(A)(|x_1''|, \dots, |x_m''|)(y') &= (J_{F^\sim}(y') \circ AR_m^\rho(A))(|x_1''|, \dots, |x_m''|) \\
&= |(J_{F^\sim}(y') \circ AR_m^\rho(A))(x_1'', \dots, x_m'')| \\
&= |AR_m^\rho(A)(x_1'', \dots, x_m'')(y')| \\
&\leq |AR_m^\rho(A)(x_1'', \dots, x_m'')|(y') \\
&\leq AR_m^\rho(A)(|x_1''|, \dots, |x_m''|)(y'),
\end{aligned}$$

donde decorre a segunda afirmação. □

2.3 Extensões de multimorfismos entre reticulados de Banach

Nesta seção provaremos nossos resultados acerca de extensões de multimorfismos de Riesz entre reticulados de Banach. Começamos com as seguintes consequências imediatas dos resultados provados anteriormente.

Proposição 2.3.1. *Sejam* $E_1, \dots, E_m, F$ *reticulados de Banach.*
(a) *Se* $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ *é um multimorfismo de Riesz de posto finito, então as extensões de Aron-Berner de* A, $AB_m^\rho(A) : E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow F^{**}$, $\rho \in S_m$, *coincidem e são multimorfismos de Riesz.*
(b) *Se* $E_1^*, \dots, E_m^*$ *têm normas ordem contínuas e* $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ *é um multimorfismo de Riesz, então as extensões de Aron-Berner* $AB_m^\rho(A) : E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow F^{**}$ *de* A, $\rho \in S_m$, *são multimorfismos de Riesz.*

Demonstração. Para um reticulado de Banach E, $E^\sim$ é um reticulado de Banach (Teorema 1.3.6) e $E^\sim = E^*$ pelo Corolário 1.4.3. Logo $E^{\sim\sim} = E^{**}$. Assim, (a) segue do Teorema 2.2.2. E como $(E^\sim)_n^\sim = E^{**}$ uma vez que E^* tem norma ordem contínua (veja [62, Theorem 2.4.2]), (b) segue da Proposição 2.2.1. □

Os próximos resultados dizem respeito a extensões de Aron-Berner de multimorfismos de Riesz a valores vetoriais em reticulados de Banach arbitrários.

Proposição 2.3.2. *Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ reticulados de Banach, $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ um multimorfismo de Riesz e $\rho \in S_m$. Então:*
(a) *$y^{***} \circ AB^{\rho}_m(A)$ é um multimorfismo de Riesz para cada homomorfismo de Riesz w^*-contínuo $y^{***} \in F^{***}$.*
(b) *É verdade que*

$$|AB^{\rho}_m(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})|(y^*) = AB^{\rho}_m(A)(|x_1^{**}|, \dots, |x_m^{**}|)(y^*)$$

para todos $x_1^{**} \in E_1^{**}, \dots, x_m^{**} \in E_m^{**}$ e $y^* \in \overline{\text{span}}\{\varphi \in F^* \ : \ \varphi$ é um homomorfismo de Riesz$\}$.

Demonstração. (a) Seja $y^{***} \in F^{***}$ um homomorfismo de Riesz ω^*−contínuo. Podemos tomar $y^* \in F^*$ tal que $y^{***} = J_{F^*}(y^*)$. Para cada $y \in F$,

$$(y^{***} \circ J_F)(y) = y^{***}(J_F(y)) = J_{F^*}(y^*)(J_F(y)) = J_F(y)(y^*) = y^*(y),$$

ou seja, $y^* = y^{***} \circ J_F$. Logo y^* é homomorfismo de Riesz por ser a composição de homomorfismos de Riesz. Pela Proposição 2.2.5, $y^{***} \circ AB^{\rho}_m(A) = J_{F^*}(y^*) \circ AB^{\rho}_m(A)$ é um multimorfismo de Riesz, isto é, $y^{***} \circ AB^{\rho}_m(A)$ é multimorfismo de Riesz.

(b) Sejam $x_1^{**} \in E_1^{**}, \dots, x_m^{**} \in E_m^{**}$ e $y^* \in \overline{\text{span}}\{\varphi \in F^* \ : \ \varphi$ é um homomorfismo de Riesz$\}$. Seja $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ um sequência em span$\{\varphi \in F^* \ : \ \varphi$ é um homomorfismo de Riesz$\}$ tal que $y_n^* \longrightarrow y^*$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $k_n \in \mathbb{N}$, homomorfismos de Riesz $\varphi_n^1, \dots, \varphi_n^{k_n} \in F^*$ e escalares $\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^{k_n}$ tais que $y_n^* = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_n^j \varphi_n^j$. A continuidade de $|AB^{\rho}_m(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})|$ e de $AB^{\rho}_m(A)(|x_1^{**}|, \dots, |x_m^{**}|)$ e a Proposição 2.2.5 garantem que

$$\begin{aligned}
|AB^{\rho}_m(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})|(y^*) &= \lim_{n\to\infty} |AB^{\rho}_m(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})|(y_n^*) \\
&= \lim_{n\to\infty} |AB^{\rho}_m(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})|\Big(\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_n^j \varphi_n^j\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_n^j |AB^{\rho}_m(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})|(\varphi_n^j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_n^j AB^{\rho}_m(A)(|x_1^{**}|, \dots, |x_m^{**}|)(\varphi_n^j) \\
&= \lim_{n\to\infty} AB^{\rho}_m(A)(|x_1^{**}|, \dots, |x_m^{**}|)\Big(\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_n^j \varphi_n^j\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} AB^{\rho}_m(A)(|x_1^{**}|, \dots, |x_m^{**}|)(y_n^*) \\
&= AB^{\rho}_m(A)(|x_1^{**}|, \dots, |x_m^{**}|)(y^*).
\end{aligned}$$

Segue que

$$|AB^{\rho}_m(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})|(y^*) = AB^{\rho}_m(A)(|x_1^{**}|, \dots, |x_m^{**}|)(y^*)$$

para todo $y^* \in \overline{\text{span}}\{\varphi \in F^* \ : \ \varphi$ é um homomorfismo de Riesz $\}$. □

A partir de agora, para um reticulado de Banach F a expressão *todas as extensões*

de Aron-Berner de qualquer multimorfismo de Riesz a valores em F são multimorfismos de Riesz significa que, independentemente do número natural m e dos reticulados de Banach $E_1, \dots, E_m$, todas as extensões de Aron-Berner de qualquer multimorfismo de Riesz de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F são multimorfismos de Riesz sobre $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$.

Lema 2.3.3. *Seja F um reticulado de Banach tal que em F^* existe uma base de Schauder formada por homomorfismos de Riesz. Então*

$$F^* = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi \in F^* \,:\, \varphi \text{ é um homomorfismo de Riesz }\}.$$

Demonstração. Seja $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ uma base de Schauder de F^* formada por homomorfismos de Riesz. Para todo $y^* \in F^*$ existem únicos $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$y^* = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n^* = \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha_n y_n^* \in \overline{\operatorname{span}}\{\varphi \in F^* \,:\, \varphi \text{ é um homomorfismo de Riesz }\},$$

donde segue o resultado. □

Da Proposição 2.3.2(b) e do Lema 2.3.3 segue o seguinte resultado.

Corolário 2.3.4. *Seja F um reticulado de Banach tal que F^* tem uma base de Schauder formada por homomorfismos de Riesz. Então todas as extensões de Aron-Berner de qualquer multimorfismo de Riesz a valores em F são multimorfismos de Riesz.*

Antes de dar exemplos concretos, vejamos um resultado simples no contexto de espaços de Riesz.

Proposição 2.3.5. *Se G é uma faixa projetada no espaço de Riesz F e todas as extensões de Arens de qualquer multimorfismo de Riesz a valores em F são multimorfismos de Riesz, então o mesmo ocorre para multimorfismos de Riesz a valores em G.*

Demonstração. Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Riesz, $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; G)$ um multimorfismo de Riesz e $\rho \in S_m$. Denotando por $i : G \longrightarrow F$ o operador inclusão e por $\pi : F \longrightarrow G$ a correspondente projeção faixa, a qual é um homomorfismo de Riesz, da Observação 2.1.4 segue que

$$AR_m^\rho(A) = AR_m^\rho(\pi \circ i \circ A) = \pi'' \circ AR_m^\rho(i \circ A)$$

é um multimorfismo de Riesz pois $AR_m^\rho(i \circ A)$ é um multimorfismo de Riesz por hipótese e π'' é um homomorfismo de Riesz pelo Teorema 1.4.5. □

Veremos a seguir vários espaços para os quais o Corolário 2.3.4 se aplica. Denotemos por $(e_n)_{n=1}^\infty$ a sequência dos vetores unitários canônicos dos espaços de sequências, isto é: para todo $n \in \mathbb{N}$, $e_n = (\delta_{nk})_{k=1}^\infty$ onde $\delta_{nn} = 1$ e $\delta_{nk} = 0$ se $n \neq k$.

Exemplo 2.3.6. (a) Vejamos que c_0^* tem uma base de Schauder formada por homomorfismos de Riesz. Assim, o Corolário 2.3.4 se aplica para $F = c_0$. De fato, considere o seguinte isomorfismo canônico

$$\psi : \ell_1 \longrightarrow c_0^* \,,\ \psi((x_n)_{n=1}^\infty)((y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Note que $\psi(e_n)((y_k)_{k=1}^{\infty}) = y_n$ para todo $(y_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, o funcional $\psi(e_n) \in c_0^*$ é um homomorfismo de Riesz. Como a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder para ℓ_1, a sequência $(\psi(e_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de c_0^* consistindo de homomorfismos de Riesz.

(b) Vejamos que, para cada $1 < p < \infty$, existe uma base de Schauder em ℓ_p^* consistindo de homomorfismos de Riesz. Assim, o Corolário 2.3.4 se aplica para $F = \ell_p$. Para ver isso, considere $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e também o isomorfismo canônico

$$\phi : \ \ell_q \longrightarrow \ell_p^*, \ , \psi((x_n)_{n=1}^{\infty})((y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Note que $\phi(e_n)((z_k)_{k=1}^{\infty}) = z_n$, para todo $(z_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, o funcional $\phi(e_n) \in \ell_p^*$ é um homomorfismo de Riesz. Como a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de ℓ_q, então a sequência $(\phi(e_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de ℓ_p^* consistindo de homomorfismos de Riesz.

Seja F um espaço de Banach com base de Schauder 1-incondicional $(x_j)_{j=1}^{\infty}$. Então F é um reticulado de Banach com a ordem

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \geq 0 \Longleftrightarrow a_j \geq 0 \text{ para todo } j.$$

(veja [58, p. 2]). Vejamos que, neste caso,

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| x_j. \tag{2.7}$$

É imediato que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| x_j \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| x_j \geq \sum_{j=1}^{\infty} -a_j x_j = -\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$, portanto $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| x_j \geq \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right|$. Seja agora $\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j \in F$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j \geq \sum_{j=1}^{\infty} -a_j x_j$. Então $b_j \geq a_j$ e $b_j \geq -a_j$ para todo j, logo $b_j \geq |a_j|$ para todo j, assim, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j \geq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| x_j$. Segue que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| x_j$ é a menor cota superior de $\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, -\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right\}$, o que prova (2.7).

A partir de agora, sempre que dissermos que um espaço de Banach F tem uma base de Schauder 1-incondicional, F é considerado um reticulado de Banach com a ordem dada pela base, conforme descrito acima.

Exemplo 2.3.7. (a) Seja F um espaço de Banach com base de Schauder 1-incondicional $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ que não contem uma copia de ℓ_1. De [57, Theorem 1.c.9] sabemos que a base é contrátil e por [57, Proposition 1.b.1] segue que a sequência $(x_j^*)_{j=1}^{\infty}$ formada pelos funcionais

coordenados, isto é, aqueles tais que

$$x_j^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right) = a_j,$$

é uma base de Schauder em F^*. Vejamos que, nesse caso, a base de Schauder $(x_j^*)_{j=1}^{\infty}$ em F^* é formada por homomorfismos de Riesz:

$$x_j^*\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right|\right) \overset{(2.7)}{=} x_j^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| x_k\right) = |a_j| = \left|x_j^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right)\right|.$$

Assim, o Corolário 2.3.4 se aplica para F.

(b) Por (a), o Corolário 2.3.4 se aplica para cada espaço de Banach reflexivo F com uma base 1-incondicional. Apenas para dar exemplos reflexivos diferentes de ℓ_p, $1 < p < \infty$, note que o espaço original de Tsirelson $\mathcal{T}^*$ [77] e seu dual $\mathcal{T}$ são espaços reflexivos com bases 1-incondicional [31, Theorem I.8 e Notes and Remarks p. 16)]. Assim, o Corolário 2.3.4 se aplica a $F = \mathcal{T}^*$ e a $F = \mathcal{T}$.

(c) Apenas para ilustrar, vamos dar mais dois exemplos de espaços não reflexivos diferentes de c_0 para os quais o Corolário 2.3.4 se aplica. O espaço de Schreier $\mathcal{S}$ (Definição 1.3.4) e o predual $d_*(w,1)$ do espaço de sequência de Lorentz $d(w,1)$ (Definição 1.3.3) são espaços de Banach não reflexivos com bases 1-incondicionais que não contêm uma copia de ℓ_1 (para $\mathcal{S}$ veja [31, Corollary 0.8, Proposition 0.4, Theorem 0.5] e para $d_*(w,1)$ veja [47, p. 1202], [3, p. 1643] e [57, p. 19]). Por (a), o Corolário 2.3.4 se aplica a $F = \mathcal{S}$ e a $F = d_*(w,1)$.

(d) Pela Proposição 2.3.5, o Corolário 2.3.4 se aplica a todo reticulado de Banach F que é uma faixa projetada em qualquer um dos reticulados de Banach mencionados nos exemplos anteriores.

Nosso último propósito neste capítulo é ampliar substancialmente a classe de reticulados de Banach F para as quais todas as extensões de Aron-Berner de qualquer multimorfismo de Riesz a valores em F são multimorfismos de Riesz. Para fazer isso, lembramos que, dados uma sequência $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de reticulados de Banach e $1 \leq p < \infty$,

$$(\oplus_n F_n)_p = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in F_n \text{ e } \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\} \text{ e}$$

$$(\oplus_n F_n)_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in F_n \text{ e } \|x_n\| \longrightarrow 0\}, \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sup_n \|x_n\|,$$

são reticulados de Banach com a ordem coordenada a coordenada (veja [5, p. 183]). Se $F = F_n$ para todo n, é usual escrever $\ell_p(F)$ e $c_0(F)$ no lugar de $(\oplus_n F)_p$ e $(\oplus_n F)_0$.

Proposição 2.3.8. *Sejam $1 < p < \infty$ e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de reticulados de Banach tal que, para cada n, todas as extensões de Aron-Berner de qualquer multimorfismo de Riesz a valores em F_n são multimorfismos de Riesz. Então todas as extensões de Aron-Berner de qualquer multimorfismo de Riesz a valores em $(\oplus_n F_n)_0$ ou $(\oplus_n F_n)_p$ são multimorfismos de*

Riesz.

Demonstração. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\rho \in S_m$ e $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach.

Dado um multimorfismo de Riesz $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; (\oplus_n F_n)_p)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ considere a projeção na k-ésima coordenada

$$\pi_k : (\oplus_n F_n)_p \longrightarrow F_k \ , \ \pi_k((y_n)_{n=1}^{\infty}) = y_k,$$

que é um homomorfismo de Riesz. Então $\pi_k \circ A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F_k)$ é um multimorfismo de Riesz. Por hipótese,

$$AB_m^{\rho}(\pi_k \circ A) \in \mathcal{L}_r(E_1^{**}, \dots, E_m^{**}; F_k^{**}) \text{ é um multimorfismo de Riesz para cada } k. \tag{2.8}$$

Tomando q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, é conhecido que os operadores

$$\psi_1 : (\oplus_n F_n^*)_q \longrightarrow (\oplus_n F_n)_p^* \ , \ \psi_1((y_n^*)_{n=1}^{\infty})((y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(y_n),$$
$$\psi_2 : (\oplus_n F_n^{**})_p \longrightarrow (\oplus_n F_n^*)_q^* \ , \ \psi_2((y_n^{**})_{n=1}^{\infty})((y_n^*)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{**}(y_n^*),$$

são isomorfismos de Riesz, isto é, são isomorfismos entre espaços de Banach e homomorfismos de Riesz (veja [5, Theorem 4.6]). Assim, $\psi_3 := (\psi_1^{-1})^* : (\oplus_n F_n^*)_q^* \longrightarrow (\oplus_n F_n)_p^{**}$ e $\psi := \psi_2^{-1} \circ \psi_3^{-1} : (\oplus_n F_n)_p^{**} \longrightarrow (\oplus_n F_n^{**})_p$ são isomorfismos entre espaços de Banach. Note que, $\psi_3^{-1} = \psi_1^* : (\oplus_n F_n)_p^{**} \longrightarrow (\oplus_n F_n^*)_q^*$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, por $i_k : F_k^* \longrightarrow (\oplus_n F_n^*)_q$ denotamos a inclusão canônica, $i_k(y_k^*) = (0, \dots, 0, y_k^*, 0, \dots)$. Note que a inversa de ψ_2 é dada por

$$\psi_2^{-1} : (\oplus_n F_n^*)_q^* \longrightarrow (\oplus_n F_n^{**})_p \ , \ \psi_2^{-1}(y^{**}) = (y^{**} \circ i_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Para todos $y_k^* \in F_k^*$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in (\oplus_n F_n)_p$,

$$(y_k^* \circ \pi_k)((y_n)_{n=1}^{\infty}) = y_k^*(\pi_k((y_n)_{n=1}^{\infty})) = y_k^*(y_k) = \psi_1(0, \dots, 0, y_k^*, 0, \dots)((y_n)_{n=1}^{\infty}),$$

mostrando que $y_k^* \circ \pi_k = \psi_1(0, \dots, 0, y_k^*, 0, \dots)$. Assim, para $x_j^{**} \in E_j^{**}, j = 1, \dots, m$, $k \in \mathbb{N}$ e $y_k^* \in F_k^*$,

$$\begin{aligned}
(AB_m^{\rho}(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) \circ \psi_1 \circ i_k)(y_k^*) &= (AB_m^{\rho}(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) \circ \psi_1)(0, \dots, 0, y_k^*, 0, \dots) \\
&= AB_m^{\rho}(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})(\psi_1(0, \dots, 0, y_k^*, 0, \dots)) \\
&= AB_m^{\rho}(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})(y_k^* \circ \pi_k) \\
&= AB_m^{\rho}(\pi_k \circ A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})(y_k^*),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da Observação 2.1.4. Isto mostra que

$$AB_m^{\rho}(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) \circ \psi_1 \circ i_k = AB_m^{\rho}(\pi_k \circ A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$(\psi \circ AB_m^{\rho}(A))(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) = \psi(AB_m^{\rho}(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}))$$

$$
\begin{aligned}
&= (\psi_2^{-1}\circ\psi_3^{-1})(AB_m^\rho(A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**}))\\
&= \psi_2^{-1}(\psi_3^{-1}(AB_m^\rho(A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**})))\\
&= \psi_2^{-1}(\psi_1^{*}(AB_m^\rho(A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**})))\\
&= \psi_2^{-1}(AB_m^\rho(A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**})\circ\psi_1)\\
&= (AB_m^\rho(A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**})\circ\psi_1\circ i_n)_{n=1}^\infty\\
&= (AB_m^\rho(\pi_n\circ A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**}))_{n=1}^\infty.
\end{aligned}
$$

Segue que $(\psi\circ AB_m^\rho(A))(x_1^{**},\dots,x_m^{**}) = (AB_m^\rho(\pi_n\circ A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**}))_{n=1}^\infty$. Assim, por (2.8),

$$
\begin{aligned}
|(\psi\circ AB_m^\rho(A))(x_1^{**},\dots,x_m^{**})| &= |(AB_m^\rho(\pi_n\circ A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**}))_{n=1}^\infty|\\
&= (|AB_m^\rho(\pi_n\circ A)(x_1^{**},\dots,x_m^{**})|)_{n=1}^\infty\\
&= (AB_m^\rho(\pi_n\circ A)(|x_1^{**}|,\dots,|x_m^{**}|))_{n=1}^\infty\\
&= (\psi\circ AB_m^\rho(A))(|x_1^{**}|,\dots,|x_m^{**}|).
\end{aligned}
$$

Isso prova que $\psi\circ AB_m^\rho(A)$ é um multimorfismo de Riesz. Como ψ é uma bijeção positiva com inversa positiva, ψ é um homomorfismo de Riesz (veja [5, Theorem 2.15]), logo ψ^{-1} também é homomorfismo de Riesz. Portanto, $AB_m^\rho(A) = \psi^{-1}\circ(\psi\circ AB_m^\rho(A))$ é um multimorfismo de Riesz, como queríamos demonstrar.

Para o caso de multimorfismos de Riesz a valores em $(\oplus_n F_n)_0$, considere os seguintes isomorfismos de Riesz,

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 : (\oplus_n F_n^*)_1 \longrightarrow (\oplus_n F_n)_0^*\,,\ \gamma_1((y_n^*)_{n=1}^\infty)((y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty y_n^*(y_n),\\
&\gamma_2 : (\oplus_n F_n^{**})_\infty \longrightarrow (\oplus_n F_n^*)_1^*\,,\ \gamma_2((y_n^{**})_{n=1}^\infty)((y_n^*)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty y_n^{**}(y_n^*),
\end{aligned}
$$

onde $(\oplus_n F_n^{**})_\infty$ é o reticulado de Banach formado pelas sequências limitadas com a ordem coordenada a coordenada. Note que o adjunto de γ_1 e a inversa de γ_2 são dados por

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1^* : (\oplus_n F_n)_0^{**} \longrightarrow (\oplus_n F_n^*)_1^*\,,\ \gamma_1^*(y^{**})((y_n^*)_{n=1}^\infty) = y^{**}(\gamma_1((y_n^*)_{n=1}^\infty))\\
&\gamma_2^{-1} : (\oplus_n F_n^*)_1^* \longrightarrow (\oplus_n F_n^{**})_\infty\,,\ \gamma_2^{-1}(y^{**}) = (y^{**}\circ i_n)_{n=1}^\infty,
\end{aligned}
$$

onde, para cada $k \in \mathbb{N}$, i_k é a inclusão canônica. Seja $A \in \mathcal{L}_r(E_1,\dots,E_m;(\oplus_n F_n)_0)$ um multimorfismo de Riesz. Para cada $k \in \mathbb{N}$, a projeção $\pi_k : (\oplus_n F_n)_0 \longrightarrow F_k$, $\pi_k((y_n)_{n=1}^\infty) = y_k$, é um homomorfismo de Riesz, logo $\pi_k\circ A \in \mathcal{L}_r(E_1,\dots,E_m;F_k)$ é um multimorfismo de Riesz para todo $k \in \mathbb{N}$,. Por hipótese $AB_m^\rho(\pi_k\circ A) \in \mathcal{L}_r(E_1^{**},\dots,E_m^{**};F_k^{**})$ é multimorfismo de Riesz para todo k. Chame

$$\gamma = \gamma_2^{-1}\circ\gamma_1^* : (\oplus_n F_n)_0^{**} \longrightarrow (\oplus_n F_n^{**})_\infty.$$

É claro que γ é um isomorfismo de Riesz. Por outro lado, para todo $y_k^* \in F_k^*$ e todo $(y_n)_{n=1}^\infty \in (\oplus_n F_n)_0$,

$$(y_k^*\circ\pi_k)((y_n)_{n=1}^\infty) = y_k^*(\pi_k((y_n)_{n=1}^\infty)) = y_k^*(y_k) = \gamma_1(0,\dots,0,y_k^*,0,\dots)((y_n)_{n=1}^\infty),$$

ou seja, $y_k^*\circ\pi_k = \gamma_1(0,\dots,0,y_k^*,0,\dots)$. Dados $x_j^{**} \in E_j^{**}, j = 1,\dots,m$, pelo que foi feito acima

segue que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$AB_m^\rho(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) \circ \gamma_1 \circ i_k = AB_m^\rho(\pi_k \circ A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) \text{ e}$$

$$(\gamma \circ AB_m^\rho(A))(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) = (AB_m^\rho(\pi_n \circ A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}))_{n=1}^\infty,$$

e portanto $\gamma \circ AB_m^\rho(A)$ é multimorfismo de Riesz. Daí, $AB_m^\rho(A) = \gamma^{-1} \circ (\gamma \circ AB_m^\rho(A))$ também é multimorfismo de Riesz, o que completa a demonstração. □

Exemplo 2.3.9. Sejam $1 < p < \infty$, $(p_n)_{n=1}^\infty \subseteq (1, +\infty)$ e $(F_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de reticulados de Banach tais que, para cada n, $F_n = c_0$ ou ℓ_{p_n} ou qualquer um dos reticulados de Banach do Exemplo 2.3.7. Combinando o Corolário 2.3.4 com a Proposição 2.3.8 concluímos que todas as extensões de Aron-Berner de qualquer multimorfismo de Riesz tomando valores em $(\oplus_n F_n)_0$ ou em $(\oplus_n F_n)_p$ são multimorfismos de Riesz. Em particular, todas as extensões de Aron-Berner de qualquer multimorfismo de Riesz tomando valores em cada um dos seguintes reticulados de Banach são multimorfismos de Riesz: $c_0(E)$ e $\ell_p(E)$ onde $1 < p < \infty$ e $E = c_0, \ell_s, 1 < s < \infty, \mathcal{T}^*, \mathcal{T}, \mathcal{S}, d_*(w, 1)$ ou uma faixa projetada em qualquer um desses espaços.

Capítulo 3

Ordem continuidade das extensões de Arens de operadores multilineares regulares

Neste capítulo investigaremos quando extensões de Arens de operadores multilineares entre espaços de Riesz ou reticulados de Banach são separadamente ordem contínuas. Aplicações para extensões de polinômios homogêneos regulares serão obtidas.

Os resultados que motivaram a investigar quando as extensões de Arens são separadamente ordem contínuas são os seguintes:

• Buskes e Roberts (2019) [29, Theorem 3.4]: Se $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é um operador m-linear de variação ordem limitada entre espaços de Riesz, então sua extensão de Arens $A^{*(m+1)}: E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim} \longrightarrow F^{\sim\sim}$ é separadamente ordem contínua em $(E_1^{\sim})_n^{\sim} \times \cdots \times (E_m^{\sim})_n^{\sim}$.

• Boyd, Ryan e Snigireva (2021) [26, Theorem 1]: Se $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é um operador m-linear regular entre reticulados de Banach, com F Dedekind completo, então sua extensão de Arens $A^{*(m+1)}: E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow F^{**}$ é separadamente ordem contínua em $(E_1^{*})_n^{*} \times \cdots \times (E_m^{*})_n^{*}$.

A pergunta óbvia à luz desses dois resultados é se eles podem ou não ser melhorados no sentido de se obter ordem continuidade separada no produto das totalidades dos biduais $E_1^{\sim\sim} \times \cdots \times E_m^{\sim\sim}$ e $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$, respectivamente, e não apenas nas restrições $(E_1^{\sim})_n^{\sim} \times \cdots \times (E_m^{\sim})_n^{\sim}$ e $(E_1^{*})_n^{*} \times \cdots \times (E_m^{*})_n^{*}$.

Começamos a responder essa questão na Seção 3.1, onde, por meio de um contra-exemplo, mostraremos que a resposta é negativa em geral. Para uma certa forma bilinear regular A em $\ell_1 \times c_0$, que na verdade é a expressão da dualidade $c_0^* = \ell_1$, sua extensão de Arens A^{***} não é separadamente ordem contínua em $\ell_1^{**} \times c_0^{**}$. Na verdade, nosso contra-exemplo revela um fenômeno interessante: mostraremos que A^{***} é ordem contínua na primeira variável, mas não na segunda variável; enquanto a outra extensão de Arens de A é separadamente ordem contínua. Em seguida, passaremos a buscar condições no operador e/ou nos espaços subjacentes que garantam que todas as extensões de Arens

sejam separadamente ordem contínuas no produto dos biduais, e não apenas no produto das restrições. Na Seção 3.2 provaremos que isso vale para somas finitas de operadores multiplicativos em espaços de Riesz tomando valores em f-álgebras Arquimedianas; em particular para operadores de tipo finito entre espaços de Riesz arbitrários. O principal resultado da Seção 3.2, a saber, o Teorema 3.2.7, implica: (i) que todas as extensões de Arens de qualquer operador multilinear regular entre espaços de Riesz são ordem contínuas em pelo menos uma variável. (ii) que todas as extensões de Arens de um polinômio homogêneo regular de um espaço de Riesz E para um espaço de Riesz F são ordem contínuas na origem em $E^{\sim\sim}$. (iii) Na melhora dos resultados de Boyd, Ryan e Snigireva e de Buskes e Roberts para operadores regulares (veja Observação 3.2.8). No final, na Seção 3.3 identificaremos condições suficientes nos reticulados de Banach $E_1, \dots, E_m$ para que as extensões de Arens de qualquer operador m-linear regular de $E_1 \times \cdots \times E_m$ a valores em um reticulado de Banach arbitrário F sejam separadamente ordem contínuos em $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$. Como consequência, obteremos condições para que as extensões de Arens de polinômios homogêneos regulares em um reticulado de Banach E sejam ordem contínuas em E^{**}.

Na maioria dos casos neste capítulo investigaremos a ordem continuidade de operadores lineares regulares de $E^{\sim\sim}$ em $F^{\sim\sim}$, em que E e F são espaços de Riesz, ou de E^{**} em F^{**}, em que E e F são reticulados de Banach. Como todos esses espaços são Dedekind completos, devido ao Corolário 1.4.14 podemos usar qualquer uma das três noções de ordem continuidade. Lembre que, em espaços de Riesz, $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ denota a ordem convergência de uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ para x. Para a teoria de operadores multilineares regulares e polinômios homogêneos regulares nos referimos a [27, 28, 29, 59].

Definição 3.0.1. Um operador m-linear $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz é *separadamente ordem contínuo* (*separadamente 1-ordem contínuo, separadamente 2-ordem contínuo*) se para todos $j \in \{1, \dots, m\}$ e $x_k \in E_k$, $k = 1, \dots, m$, $k \neq j$, o operador linear

$$x_j \in E_j \longmapsto A(x_1, \dots, x_m) \in F$$

é ordem contínuo (1-ordem contínuo, 2-ordem contínuo).

Para a definição de operador multilinear conjuntamente ordem contínuo veja [26, p. 234]. Se A é um operador regular entre reticulados de Banach com F Dedekind completo, então A é separadamente ordem contínuo se e somente se A é conjuntamente ordem contínuo [26, Theorem 2].

3.1 O contraexemplo

Lembre que um operador linear entre espaços de Riesz é σ-ordem contínuo se leva sequências ordem convergentes em sequências ordem convergentes. E todo operador ordem contínuo é σ-ordem contínuo.

Considere o operador bilinear positivo

$$A: \ell_1 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ A((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n.$$

As duas extensões de Arens de A são denotadas por $A^{***} = AR_2^{\theta}(A)$ e $AR_2^{\mathrm{id}}(A)$, onde id é a permutação identidade. Conforme o anunciado, provaremos que a extensão $AR_2^{\mathrm{id}}(A)$ é separadamente ordem contínua em $\ell_1^{**} \times c_0^{**}$ e que a extensão A^{***} é ordem contínua na primeira variável, mas não na segunda. Embora todos os detalhes possam ser feitos diretamente para essa forma bilinear, para evitar repetições desnecessárias aplicaremos alguns resultados que serão demonstrados posteriormente.

Pelo Teorema 3.2.7 sabemos que a extensão $A^{***} : \ell_1^{**} \times c_0^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ é ordem contínua na primeira variável. Suponha que A^{***} seja ordem contínua na segunda variável, isto é, para cada $x^{**} \in \ell_1^{**}$, o funcional linear $A^{***}(x^{**}, \bullet) : c_0^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ é ordem contínuo. Denotamos por

$$\psi : \ell_1 \longrightarrow c_0^* \,,\, \psi(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0,$$

o isomorfismo isométrico canônico. Tendo em conta que ψ e $\psi^{-1} : c_0^* \longrightarrow \ell_1$ dado por $\psi^{-1}(\varphi) = (\varphi(e_n))_{n=1}^{\infty}$, são operadores positivos, concluímos que ψ é um homomorfismo de Riesz [5, Theorem 2.15]. Além disso, $\psi(x) = A(x, \bullet)$ para cada $x \in \ell_1$.

Afirmação 1. Para todo $x^{**} \in \ell_1^{**}$, $\psi^{**}(x^{**}) = A^{***}(x^{**}, \bullet)$.

De fato, para todos $y^{**} \in c_0^{**}$ e $x \in \ell_1$,

$$\psi^*(y^{**})(x) = y^{**}(\psi(x)) = y^{**}(A(x, \bullet)) = \overline{y^{**}}^{\theta}(A)(x),$$

provando que $\psi^*(y^{**}) = \overline{y^{**}}^{\theta}(A)$. Mais ainda, para todos $x^{**} \in \ell_1^{**}$ e $y^{**} \in c_0^{**}$,

$$\psi^{**}(x^{**})(y^{**}) = x^{**}(\psi^*(y^{**})) = x^{**}(\overline{y^{**}}^{\theta}(A)) = AB_2^{\theta}(A)(x^{**}, y^{**}) = A^{***}(x^{**}, y^{**}).$$

Isso prova que $\psi^{**}(x^{**})(y^{**}) = A^{***}(x^{**}, y^{**})$, donde segue a Afirmação 1.

Afirmação 2. $x^{**} \in \ell_1^{**}$ é ordem contínuo em ℓ_1^{**} se e somente se $\psi^{**}(x^{**}) \in c_0^{***}$ é ordem contínuo em c_0^{**}.

É fácil ver que se x^{**} é ordem contínuo então $\psi^{**}(x^{**})$ é ordem contínuo. Demonstremos a implicação inversa. Para isso suponha que x^{**} não seja ordem contínuo. Neste caso o funcional positivo $|x^{**}| \in \ell_1^{**}$ não é ordem contínuo por Teorema 1.4.9. Logo existe uma rede $(x_\alpha^*)_{\alpha\in\Omega}$ em ℓ_1^* tal que $x_\alpha^* \downarrow 0$ mas $\inf_{\alpha\in\Omega}\{|x^{**}|(x_\alpha^*)\} > 0$. Para todo $\alpha \in \Omega$, $x_\alpha^* \in \ell_1^*$, logo existe $y_\alpha^{**} \in c_0^{**}$ tal que $\psi^*(y_\alpha^{**}) = x_\alpha^*$. Dessa forma,

$$y_\alpha^{**} = (\psi^*)^{-1}(x_\alpha^*) = (\psi^{-1})^*(x_\alpha^*) \downarrow 0,$$

pois $(\psi^{-1})^*$ é positivo e $(\psi^{-1})^*$ é ordem contínuo pelo Teorema 1.4.10. Segue que $y_\alpha^{**} \downarrow 0$ em c_0^{**}. Por hipótese $\psi^{**}(x^{**})$ é ordem contínuo, e portanto $|\psi^{**}(x^{**})|$ é ordem contínuo novamente por [5, Theorem 1.56]. Sendo ψ homomorfismo de Riesz, ψ^{**} também é homomorfismo de Riesz pelo Teorema 1.4.5, e então $\psi^{**}(|x^{**}|)(y_\alpha^{**}) = |\psi^{**}(x^{**})|(y_\alpha^{**}) \downarrow 0$. Disso segue que

$$0 = \inf_{\alpha\in\Omega}\{\psi^{**}(|x^{**}|)(y_\alpha^{**})\} = \inf_{\alpha\in\Omega}\{|x^{**}|(\psi^*(y_\alpha^{**}))\} = \inf_{\alpha\in\Omega}\{|x^{**}|(x_\alpha^*)\} > 0.$$

Essa contradição prova que $x^{**} \in \ell_1^{**}$ é ordem contínuo em ℓ_1^* e demonstra a Afirmação

2.

Afirmação 3. ℓ_1^{**} contém um funcional que não é ordem contínuo em ℓ_1^*.

Seja c o reticulado de Banach de todas as sequências reais convergentes com a ordem coordenada a coordenada e com a norma do supremo. Considere o funcional linear positivo $\varphi : c \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $\varphi((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como c é um subespaço majorante de ℓ_∞, existe um funcional positivo $\tilde{\varphi} \in \ell_\infty^*$ que estende φ (veja [5, Theorem 1.32]). Suponha que $\tilde{\varphi}$ seja σ-ordem contínuo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome

$$x_n = (1, \dots, 1_n, 0, \dots) = e_1 + \cdots + e_n \in c \ \text{ e } \ y = (1, 1, \dots) \in c.$$

Note que $0 \leq x_n \uparrow y$ e, por $\tilde{\varphi}$ ser positivo e σ-ordem contínuo, $0 \leq \tilde{\varphi}(x_n) \uparrow \tilde{\varphi}(y)$. Por outro lado, como $\tilde{\varphi}(y) = 1$ e $\tilde{\varphi}(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$1 = \tilde{\varphi}(y) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\tilde{\varphi}(x_n)\} = 0.$$

Essa contradição garante que $\tilde{\varphi}$ não é σ-ordem contínuo e portanto $\tilde{\varphi} \in \ell_\infty^*$ não é ordem contínuo em ℓ_∞.

Considere o isomorfismo de Riesz canônico $\phi : \ell_\infty \longrightarrow \ell_1^*$, podemos tomar $x^{**} \in \ell_1^{**}$ tal que $\phi^*(x^{**}) = \tilde{\varphi}$. Como $\tilde{\varphi} \in \ell_\infty^*$ não é σ-ordem contínuo, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em ℓ_∞ tal que $x_n \downarrow 0$ e $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\tilde{\varphi}(x_n)\} > 0$. Mais ainda, existem $y_n^* \in \ell_1^*$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\phi^{-1}(y_n^*) = x_n$. Logo $y_n^* = \phi(x_n) \downarrow$ pois ϕ é positivo, e portanto $0 \leq y_n^* \downarrow$. Suponha que exista $y^* \in \ell_1^*$ tal que $0 < y^* \leq y_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, como ϕ^{-1} é positivo,

$$0 \leq \phi^{-1}(y^*) \leq \phi^{-1}(y_n^*) = x_n,$$

o que nos leva a concluir que $\phi^{-1}(y^*) = 0$. Segue que $y^* = 0$ pois ϕ^{-1} é injetor, e portanto $y_n^* \downarrow 0$ em ℓ_1^*. De

$$\begin{aligned}\inf_{n\in\mathbb{N}}\{x^{**}(y_n^*)\} &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\{(\phi^*)^{-1}(\tilde{\varphi})(y_n^*)\} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{(\phi^{-1})^*(\tilde{\varphi})(y_n^*)\} \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\tilde{\varphi}(\phi^{-1}(y_n^*))\} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\tilde{\varphi}(x_n)\} > 0,\end{aligned}$$

segue que x^{**} não é σ-ordem contínuo, e portanto não é ordem contínuo como afirmado.

Finalmente, como $A^{***}(x^{**}, \bullet)$ é ordem contínuo, pela Afirmação 1 sabemos que $\psi^{**}(x^{**})$ é ordem contínuo, logo a Afirmação 2 garante que x^{**} é ordem contínuo. Isso mostra que todo funcional em ℓ_1^{**} é ordem contínuo, mas sabemos pela Afirmação 3 isto não acontece. A conclusão é que $A^{***}(x^{**}, \bullet)$ não é ordem contínuo, isto é, A^{***} não é ordem contínuo na segunda variável.

Quanto à outra extensão de Arens de A, a saber, $AR_2^{\mathrm{id}}(A) : \ell_1^{**} \times c_0^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma vez que $c_0^* = \ell_1$ tem norma ordem contínua, o Corolário 3.3.1 garante que $AR_2^{id}(A)$ é separadamente ordem contínua, portanto conjuntamente ordem contínua por [26, Theorem 2].

Como a forma bilinear A é regular e de variação ordem limitada, este exemplo mostra

que os resultados de Buskes e Roberts e de Boyd, Ryan e Snigireva, enunciados no início deste capítulo não podem ser melhorados para obter a separabilidade ordem continuidade no produto das totalidades dos biduais.

3.2 Operadores entre espaços de Riesz

Uma vez estabelecida a impossibilidade de se obter a ordem continuidade separada nas extensões de Arens em geral, passamos a buscar condições sob as quais isso ocorre.

Nesta seção apresentaremos nossos resultados sobre ordem continuidade separada no produto das totalidades dos biduais das extensões de Arens de operadores multilineares entre espaços de Riesz. O principal resultado da seção, a saber, o Teorema 3.2.7, é um resultado multiuso, no sentido de que nos ajudará a esclarecer várias questões sobre o assunto deste capítulo. Em primeiro lugar, nesta seção ele será usado para provar que as extensões de Arens de polinômios homogêneos regulares são sempre ordem contínuos na origem na totalidade do bidual do espaço de seu domínio. Ainda nesta seção, será usado para estender o já citado resultado de Boyd, Ryan e Snigireva [26, Theorem 1] no sentido de provar que as extensões de Arens são sempre ordem contínuas em pelo menos uma variável. Finalmente, o Teorema 3.2.7 será útil várias vezes na próxima seção sobre operadores entre reticulados de Banach.

Começamos por mostrar que extensões de Arens de operadores multilineares multiplicativos a valores em f-álgebras Arquimedianas são separadamente ordem contínuas no produto das totalidades dos biduais.

Definição 3.2.1. Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Riesz e $(\mathcal{A}, *)$ uma f-álgebra. Um operador $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; \mathcal{A})$ é *multiplicativo* se existem operadores lineares regulares $T_i : E_i \longrightarrow \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, m$, tais que $A(x_1, \dots, x_m) = T_1(x_1) * \cdots * T_m(x_m)$ para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$.

Como as extensões de Arens estão definidas entre espaços de Riesz Dedekind completos, pelo Corolário 1.4.14 podemos usar qualquer uma das três noções de operadores lineares ordem contínuos para investigar a separabilidade ordem continuidade de ditas extensões.

Proposição 3.2.2. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Riesz e $(\mathcal{A}, *)$ uma f-álgebra Arquimediana. Se $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; \mathcal{A})$ é uma soma finita de operadores multiplicativos, então todas as extensões de Arens de A, $AR_m^\rho(A)$, $\rho \in S_m$, coincidem e são separadamente ordem contínuas.*

Demonstração. Seja $B \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; \mathcal{A})$ um operador multiplicativo e sejam $T_i : E_i \longrightarrow \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, m$, operadores lineares regulares tais que $B(x_1, \dots, x_m) = T_1(x_1) * \cdots * T_m(x_m)$ para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$. Pela Observação 2.2.4 e pela demonstração do Teorema 2.2.2 sabemos que para cada $\rho \in S_m$ e todos $x_1'', \in E_1'', \dots, x_m'', \in E_m''$,

$$AR_m^\rho(B)(x_1'', \dots, x_m'') = T_{\rho(m)}''(x_{\rho(m)}'') \odot \cdots \odot T_{\rho(1)}''(x_{\rho(1)}''),$$

onde $\odot$ é o produto de Arens que torna $\mathcal{A}^{\sim\sim}$ uma f-álgebra Dedekind completa, logo Arquimediana e comutativa (veja [80, Corollary 3.5 e Corollary 3.6]. Dessa forma,

$$AR_m^\rho(B)(x_1'', \dots, x_m'') = T_1''(x_1'') \odot \cdots \odot T_m''(x_m''),$$

o que implica, em particular, que todas as extensões de Arens de B coincidem.

Vejamos que a extensão $AR_m^\rho(B)$ é separadamente ordem contínua. Para cada $j \in \{1, \dots .m\}$ sejam $x_i'' \in E_i''$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq j$, e $(x_{\alpha_j}'')_{\alpha_j \in \Omega_j}$ uma rede em $E_j^{\sim\sim}$ tal que $x_{\alpha_j}'' \xrightarrow{o} 0$. Então existem uma rede $(z_{\alpha_j}'')_{\alpha_j \in \Omega_j}$ e $\alpha_{j_0} \in \Omega_j$ tais que $z_{\alpha_j}'' \downarrow 0$ e $|x_{\alpha_j}''| \leq z_{\alpha_j}''$ para todo $\alpha_j \geq \alpha_{j_0}$. É claro que o funcional

$$\varphi := |T_1''(x_1'')| \odot \cdots \odot |T_{j-1}''(x_{j-1}'')| \odot |T_{j+1}''(x_{j+1}'')| \odot \cdots \odot |T_m''(x_m'')| \in \mathcal{A}^{\sim\sim}$$

é positivo. Usando que o produto $\odot$ é comutativo e [5, Exercise 12, p. 131],

$$\begin{aligned}
|AR_m^\rho(B)(x_1'', \dots, x_{\alpha_j}'', \dots, x_m'')| &= |T_1''(x_1'') \odot \cdots \odot T_j''(x_{\alpha_j}'') \odot \cdots \odot T_m''(x_m'')| \\
&= |T_1''(x_1'')| \odot \cdots \odot |T_{j-1}'(x_{j-1}'')| \odot |T_j''(x_{\alpha_j}'')| \odot |T_{j+1}''(x_{j+1}'')| \odot \cdots \odot |T_m''(x_m'')| \\
&= |T_j''(x_{\alpha_j}'')| \odot \big(|T_1''(x_1'')| \odot \cdots \odot |T_{j-1}''(x_{j-1}'')| \odot |T_{j+1}''(x_{j+1}'')| \odot \cdots \odot |T_m''(x_m'')|\big) \\
&= |T_j''(x_{\alpha_j}'')| \odot \varphi \leq |T_j''|(|x_{\alpha_j}''|) \odot \varphi \leq |T_j''|(z_{\alpha_j}'') \odot \varphi.
\end{aligned}$$

A demonstração estará completa para B se provarmos que $|T_j''|(z_{\alpha_j}'') \odot \varphi \downarrow 0$. Para isso seja $y' \in \mathcal{A}^\sim$ positivo. Então $\varphi \diamond y'$ é positivo e, como T_j'' é ordem contínuo (Teorema 1.4.10), $|T_j''|$ é ordem contínuo e positivo, Teorema 1.4.9. Isso nos permite concluir que $|T_j''|(z_{\alpha_j}'') \downarrow 0$. Do Teorema de Riesz-Kantorovich (Teorema 1.4.4) segue que

$$\big(|T_j''|(z_{\alpha_j}'') \odot \varphi\big)(y') = |T_j''|(z_{\alpha_j}'')(\varphi \diamond y') \downarrow 0,$$

e daí $\big(|T_j''|(z_{\alpha_j}'') \odot \varphi\big)(y') \downarrow 0$ para todo $0 \leq y' \in \mathcal{A}^\sim$. Aplicando mais uma vez o Teorema 1.4.4 obtemos $\big(|T_j''|(z_{\alpha_j}'') \odot \varphi\big) \downarrow 0$, como queríamos.

Seja agora $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; \mathcal{A})$ uma soma de operadores multiplicativos, isto é, $A = \sum_{n=1}^{k} A_n$, onde cada $A_n \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; \mathcal{A})$ é multiplicativo. Pelo que foi provado acima sabemos que as extensões $AR_m^\rho(A_n)$, $n = 1, \dots, k$, não dependem de ρ e são separadamente ordem contínuas. Segue que as extensões $AR_m^\rho(A) = \sum_{n=1}^{k} AR_m^\rho(A_n)$ não dependem de ρ e são separadamente ordem contínuas. □

Como todo multimorfismo de Riesz a valores escalares é multiplicativo [52, Theorem 6], combinando a Proposição 3.2.2 com o Teorema 2.2.2 obtemos o seguinte:

Corolário 3.2.3. *Todas as extensões de Arens de uma soma finita de multimorfismos de Riesz a valores escalares coincidem e são separadamente ordem contínuas.*

Um operador $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ é de *tipo finito* se existem $n \in \mathbb{N}$, funcionais $\varphi_j^i \in E_i^\sim$ e vetores $y_j \in F$, $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$, tais que

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^1(x_1) \cdots \varphi_j^m(x_m) y_j, \text{ para todos } x_i \in E_i, i = 1, \dots, m.$$

Corolário 3.2.4. *Todas as extensões de Arens de uma aplicação multilinear de tipo finito*

coincidem, são de tipo finito e são separadamente ordem contínuas.

Demonstração. Dados $\varphi_i \in E_i^{\sim}$, $i = 1, \dots, m$, considere a forma m-linear regular

$$B: \ E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ B(x_1, \dots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m).$$

Pela demonstração da Proposição 3.2.2 todas as extensões de Arens de B coincidem e são separadamente ordem contínuas. Além disso, para toda permutação $\rho \in S_m$ e todos $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$,

$$AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_m'') = \varphi_1''(x_1'') \cdots \varphi_m''(x_m''), \tag{3.1}$$

onde φ_i'' é o biadjunto de φ_i, $i = 1, \dots, m$.

Sejam F um espaço de Riesz e $y \in F$ e considere o operador m-linear regular

$$C: \ E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F\ ,\ C(x_1, \dots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m) y.$$

Dado $y' \in F^{\sim}$, $y' \circ C \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m)$ e, para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$,

$$\begin{aligned}(y' \circ C)(x_1, \dots, x_m) &= y'(C(x_1, \dots, x_m)) = y'(\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m) y) \\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m) y'(y) = y'(y) B(x_1, \dots, x_m),\end{aligned}$$

provando que $y' \circ C = y'(y)B$. E para todos $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$, por (3.1),

$$\begin{aligned}AR_m^{\rho}(C)(x_1'', \dots, x_m'')(y') &= AR_m^{\rho}(y' \circ C)(x_1'', \dots, x_m'') = AR_m^{\rho}(y'(y)B)(x_1'', \dots, x_m'') \\ &= y'(y) AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_m'') = \varphi_1''(x_1'') \cdots \varphi_m''(x_m'') y'(y).\end{aligned}$$

Isto nos dá, em particular, que todas as extensões de Arens de C coincidem. Vejamos que $AR_m^{\rho}(C)$ é separadamente ordem contínua. Para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ sejam $x_i'' \in E_i''$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq k$, e $(x_{\alpha_k}'')_{\alpha_k \in \Omega_k}$ uma rede em E_k'' tal que $x_{\alpha_k}'' \xrightarrow{o} 0$. Como a extensão $AR_m^{\rho}(B)$ é separadamente ordem contínua, $AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_{\alpha_k}'', \dots, x_m'') \xrightarrow{o} 0$, e portanto existem uma rede $(t_{\alpha_k})_{\alpha_k \in \Omega_k}$ em $\mathbb{R}$ e α_{k_0} tais que $t_{\alpha_k} \downarrow 0$ e $|AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_{\alpha_k}'', \dots, x_m'')| \leq t_{\alpha_k}$ para todo $\alpha_k \geq \alpha_{k_0}$. Note que para todo $y' \in F^{\sim}$,

$$AR_m^{\rho}(C)(x_1'', \dots, x_m'')(y') = AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_m'') y'(y) = AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_m'') J_F(y)(y'),$$

isto é, $AR_m^{\rho}(C)(x_1'', \dots, x_m'') = AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_m'') J_F(y)$. Dessa forma, tendo em conta que o operador J_F é um homomorfismo de Riesz, para todo $\alpha_k \geq \alpha_{k_0}$,

$$\begin{aligned}|AR_m^{\rho}(C)(x_1'', \dots, x_{\alpha_k}'', \dots, x_m'')| &= |AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_{\alpha_k}'', \dots, x_m'') J_F(y)| \\ &\leq |AR_m^{\rho}(B)(x_1'', \dots, x_{\alpha_k}'', \dots, x_m'')| |J_F(y)| \leq t_{\alpha_k} J_F(|y|).\end{aligned}$$

Como $J_F(|y|) \in F^{\sim\sim}$ é positivo e $F^{\sim\sim}$ é Arquimediano, $t_{\alpha_k} J_F(|y|) \downarrow 0$ em $F^{\sim\sim}$ por [4, Theorem 1.28], e portanto $AR_m^{\rho}(C)$ é separadamente ordem contínua.

Agora seja $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ de tipo finito. Tome $n \in \mathbb{N}$, funcionais $\varphi_j^i \in E_i^{\sim}$ e vetores

$y_j \in F$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, tais que

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^1(x_1) \cdots \varphi_j^m(x_m) y_j, \text{ para todos } x_i \in E_i, i = 1, \dots, m.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ considere os seguintes operadores m-linear regular:

$$C_j : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F, \; C_j(x_1, \dots, x_m) = \varphi_j^1(x_1) \cdots \varphi_j^m(x_m) y_j.$$

Pelo que provamos acima temos que, para todo, $y' \in F^{\sim}$ e $x_1'' \in E_1^{\sim\sim}, \dots, x_m'' \in E_m^{\sim\sim}$,

$$AR_m^{\rho}(C_j)(x_1'', \dots, x_m'')(y') = [\varphi_j^1]''(x_1'') \cdots [\varphi_j^m]''(x_m'') y'(y_j), \; j = 1, \dots, n,$$

e também que $AR_m^{\rho}(C_j), j = 1, \dots, n$ não depende de ρ e é separadamente ordem contínua. De $A = \sum_{j=1}^{n} C_j$ obtemos $AR_m^{\rho}(A) = \sum_{j=1}^{n} AR_m^{\rho}(C_j)$, donde segue que $AR_m^{\rho}(A)$ não depende do ρ e é separadamente ordem contínua. Para finalizar, de

$$\begin{aligned} AR_m^{\rho}(A)(x_1'', \dots, x_m'')(y') &= \sum_{j=1}^{n} AR_m^{\rho}(C_j)(x_1'', \dots, x_m'')(y') = \sum_{j=1}^{n} [\varphi_j^1]''(x_1'') \cdots [\varphi_j^m]''(x_m'') y'(y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} [\varphi_j^1]''(x_1'') \cdots [\varphi_j^m]''(x_m'') J_F(y_j)(y') \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n} [\varphi_j^1]''(x_1'') \cdots [\varphi_j^m]''(x_m'') J_F(y_j) \right](y'), \end{aligned}$$

obtemos que $AR_m^{\rho}(A)$ é de tipo finito. □

Para prosseguir aos principais resultados de esta seção, precisamos de alguma preparação.

Lema 3.2.5. *Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Riesz com F Dedekind completo e $(B_\alpha)_\alpha$ uma rede em $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$. Então $B_\alpha \downarrow 0$ se, e somente se, $B_\alpha(x_1, \dots, x_m) \downarrow 0$ em F para todos $x_1 \in E_1^+, \dots, x_m \in E_m^+$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre m. O caso $m = 1$ segue do Teorema 1.4.4. Suponha que o resultado seja válido para n e seja $(B_\alpha)_\alpha$ uma rede em $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_{n+1}; F)$ tal que $B_\alpha \downarrow 0$. Considere o isomorfismo de Riesz

$$\psi : \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_{n+1}; F) \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_1; \mathcal{L}_r(E_2 \dots, E_{n+1}; F))$$

dado por

$$\psi(A)(x_1)(x_2, \dots, x_{n+1}) = A(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}).$$

Como ψ é positivo, $0 \leq \psi(B_\alpha) \downarrow$. Seja $T \in \mathcal{L}_r(E_1; \mathcal{L}_r(E_2 \dots, E_{n+1}; F))$ tal que $0 < T \leq \psi(B_\alpha)$ para todo α. Como ψ^{-1} é positivo, $0 \leq \psi^{-1}(T) \leq B_\alpha \downarrow 0$, donde segue que $0 \leq \psi^{-1}(T) \leq 0$. Isso prova que $\psi(B_\alpha) \downarrow 0$ em $\mathcal{L}_r(E_1; \mathcal{L}_r(E_2 \dots, E_{n+1}; F))$. Pelo caso linear, temos $\psi(B_\alpha)(x_1) \downarrow 0$

em $\mathcal{L}_r(E_2 \dots, E_{n+1}; F)$ para todo $x_1 \in E_1^+$. A hipótese de indução nos garante que

$$B_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \psi(B_\alpha)(x_1)(x_2, \dots, x_{n+1}) \downarrow 0$$

para todos $x_2 \in E_2^+, \dots, x_{n+1} \in E_{n+1}^+$. A demonstração está completa.

Reciprocamente, suponha que $B_\alpha(x_1, \dots, x_m) \downarrow 0$ em F, para todo $x_1 \in E_1^+, \dots, x_m \in E_m^+$, então $0 \leq B_\alpha \downarrow$ em $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$. Seja $B \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ tal que $0 < B \leq B_\alpha$ para todo α. Neste caso temos $0 \leq B(x_1, \dots, x_m) \leq B_\alpha(x_1, \dots, x_m)$, o que implica que $0 \leq B(x_1, \dots, x_m) \leq 0$, isto é, $0 < B \leq 0$. Isso nos permite concluir que $B_\alpha \downarrow 0$. □

Lema 3.2.6. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Riesz, $\rho \in S_m$, $k \in \{1, \dots, m\}$ e $x''_{\rho(k)} \in (E^\sim_{\rho(k)})^\sim_n$. O operador*

$$\overline{x''_{\rho(k)}}^\rho : \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)} E, \dots, {}_{\rho(k-1)} E, \dots, E_m) \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)} E, \dots, {}_{\rho(k)} E, \dots, E_m)$$

definido na Proposição 2.1.2 é ordem contínuo.

Demonstração. Pela Proposição 2.1.2 sabemos que operador $\overline{x''_{\rho(k)}}^\rho$ é linear, regular e satisfaz a desigualdade $\left|\overline{x''_{\rho(k)}}^\rho\right| \leq \overline{|x''_{\rho(k)}|}^\rho$. Seja $(A_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ uma rede no espaço dos operadores regulares $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)} E, \dots, {}_{\rho(k-1)} E, \dots, E_m)$ tal que $A_\alpha \xrightarrow{o} 0$. Então existem $(B_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ uma rede em $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)} E, \dots, {}_{\rho(k-1)} E, \dots, E_m)$ e $\alpha_0 \in \Omega$ tais que $B_\alpha \downarrow 0$ e $|A_\alpha| \leq B_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Dessa forma,

$$\left|\overline{x''_{\rho(k)}}^\rho(A_\alpha)\right| \leq \left|\overline{x''_{\rho(k)}}^\rho\right|(|A_\alpha|) \leq \overline{|x''_{\rho(k)}|}^\rho(|A_\alpha|) \leq \overline{|x''_{\rho(k)}|}^\rho(B_\alpha) \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0.$$

Para cada $x_i \in E_i^+$ com $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho(1), \dots, \rho(k)\}$, pelo Lema 3.2.5 temos

$$B_\alpha(x_1, \dots, {}_{\rho(1)} x, \dots, {}_{\rho(k)} x, \bullet, \dots, x_m) \downarrow 0.$$

Como $x''_{\rho(k)}$ é ordem contínuo, $|x''_{\rho(k)}|$ é positivo e ordem contínuo por Teorema 1.4.9, logo $|x''_{\rho(k)}|(B_\alpha(x_1, \dots, {}_{\rho(1)} x, \dots, {}_{\rho(k)} x, \bullet, \dots, x_m)) \downarrow 0$, isto é,

$$\overline{|x''_{\rho(k)}|}^\rho(B_\alpha)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)} x, \dots, {}_{\rho(k)} x, \dots, x_m) \downarrow 0.$$

Aplicando uma vez mais o Lema 3.2.5 obtemos $\overline{|x''_{\rho(k)}|}^\rho(B_\alpha) \downarrow 0$, o que prova que o operador $\overline{x''_{\rho(k)}}^\rho$ é ordem contínuo. □

Teorema 3.2.7. *Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Riesz, $\rho \in S_m$ e $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$.*
(a) *Para todos $j \in \{1, \dots, m\}$, $x''_{\rho(i)} \in E^{\sim\sim}_{\rho(i)}$, $i = 1, \dots, j-1$, e $x''_{\rho(i)} \in (E^\sim_{\rho(i)})^\sim_n$, $i = j+1, \dots, m$, o operador*

$$x''_{\rho(j)} \in E^{\sim\sim}_{\rho(j)} \mapsto AR^\rho_m(A)(x''_1, \dots, x''_{\rho(j)}, \dots, x''_m) \in F^{\sim\sim} \tag{3.2}$$

é ordem contínuo em $E^{\sim\sim}_{\rho(j)}$.
(b) *$AR^\rho_m(A)$ é separadamente ordem contínua em $(E^\sim_1)^\sim_n \times \dots \times (E^\sim_m)^\sim_n$.*
(c) *$AR^\rho_m(A)$ é ordem contínuo na $\rho(m)$-ésima coordenada em todo o espaço $E^{\sim\sim}_{\rho(m)}$.*

Demonstração. Provaremos somente o item (a), pois (b) segue imediatamente de (a) e (c) segue de (a) tomando $j = m$.

Para provar (a) tome $j \in \{1, \dots, m\}$ e sejam $x''_{\rho(i)} \in E^{\tilde{}\tilde{}}_{\rho(i)}$, $i = 1, \dots, j-1$, e $x''_{\rho(i)} \in (E^{\tilde{}}_{\rho(i)})^{\tilde{}}_n$, $i = j+1, \dots, m$. Tome uma rede $(x''_{\alpha_{\rho(j)}})_{\alpha_{\rho(j)} \in \Omega_{\rho(j)}}$ em $E^{\tilde{}\tilde{}}_{\rho(j)}$ tal que $x''_{\alpha_{\rho(j)}} \xrightarrow{o} 0$. Então existem uma rede $(z''_{\alpha_{\rho(j)}})_{\alpha_{\rho(j)} \in \Omega_{\rho(j)}}$ em $E^{\tilde{}\tilde{}}_{\rho(j)}$ e $\alpha_{\rho(j)_0}$ tais que $z''_{\alpha_{\rho(j)}} \downarrow 0$ e $|x''_{\alpha_{\rho(j)}}| \leq z''_{\alpha_{\rho(j)}}$ para todo $\alpha_{\rho(j)} \geq \alpha_{\rho(j)_0}$. Como A é regular, podemos escrever $A = A_1 - A_2$ para alguns operadores positivos A_1 e A_2 em $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$. É claro que o operador $B := A_1 + A_2$ é positivo. Denotando o operador em (3.2) por $AR^\rho_m(A)_{x''_{\rho(1)}, \dots, x''_{\rho(j-1)}, x''_{\rho(j+1)}, \dots, x''_{\rho(m)}}$, para cada $\alpha_{\rho(j)} \geq \alpha_{\rho(j)_0}$,

$$\begin{aligned}
|AR^\rho_m(A)_{x''_{\rho(1)}, \dots, x''_{\rho(j-1)}, x''_{\rho(j+1)}, \dots, x''_{\rho(m)}}(x''_{\alpha_{\rho(j)}})| &= |AR^\rho_m(A)(x''_1, \dots, x''_{\alpha_{\rho(j)}}, \dots, x''_m)| \\
&\leq |AR^\rho_m(A)|(|x''_1|, \dots, |x''_{\alpha_{\rho(j)}}|, \dots, |x''_m|) \\
&= |AR^\rho_m(A_1 - A_2)|(|x''_1|, \dots, |x''_{\alpha_{\rho(j)}}|, \dots, |x''_m|) \\
&= |AR^\rho_m(A_1) - AR^\rho_m(A_2)|(|x''_1|, \dots, |x''_{\alpha_{\rho(j)}}|, \dots, |x''_m|) \\
&\leq \big(AR^\rho_m(A_1) + AR^\rho_m(A_2)\big)(|x''_1|, \dots, |x''_{\alpha_{\rho(j)}}|, \dots, |x''_m|) \\
&= AR^\rho_m(B)(|x''_1|, \dots, |x''_{\alpha_{\rho(j)}}|, \dots, |x''_m|) \\
&= AR^\rho_m(B)_{|x''_{\rho(1)}|, \dots, |x''_{\rho(j-1)}|, |x''_{\rho(j+1)}|, \dots, |x''_{\rho(m)}|}(|x''_{\alpha_{\rho(j)}}|) \\
&\leq AR^\rho_m(B)_{|x''_{\rho(1)}|, \dots, |x''_{\rho(j-1)}|, |x''_{\rho(j+1)}|, \dots, |x''_{\rho(m)}|}(z''_{\alpha_{\rho(j)}}).
\end{aligned}$$

Como extensões de Arens de operadores positivos são positivos, Teorema 2.1.3, segue que

$$0 \leq AR^\rho_m(B)_{|x''_{\rho(1)}|, \dots, |x''_{\rho(j-1)}|, |x''_{\rho(j+1)}|, \dots, |x''_{\rho(m)}|}(z''_{\alpha_{\rho(j)}}) \downarrow .$$

Chamando $T := \overline{|x''_{\rho(m)}|}^\rho \circ \cdots \circ \overline{|x''_{\rho(j+1)}|}^\rho$, como cada $|x''_{\rho(i)}|$, $i = j+1, \dots, m$, é ordem contínuo, pelo Lema 3.2.6 segue que $\overline{|x''_{\rho(i)}|}^\rho$ é ordem contínuo, e portanto T é ordem contínuo e positivo. Por outro lado, é claro que, para todo $y' \in F^{\tilde{}}$ positivo,

$$S := \Big(\overline{|x''_{\rho(j-1)}|}^\rho \circ \cdots \circ \overline{|x''_{\rho(1)}|}^\rho\Big)(y' \circ B) \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, {}_{\rho(1)}E, \dots, {}_{\rho(j-1)}E, \dots, E_m)$$

é positivo. De $z''_{\alpha_{\rho(j)}} \downarrow 0$ concluímos que $\overline{z''_{\alpha_{\rho(j)}}}^\rho(S) \downarrow 0$, logo $T(\overline{z''_{\alpha_{\rho(j)}}}^\rho(S)) \downarrow 0$, uma vez que T é linear, positivo e ordem contínuo. Assim, para todo $y' \in F^{\tilde{}}$ positivo,

$$\begin{aligned}
AR^\rho_m(B)_{|x''_{\rho(1)}|, \dots, |x''_{\rho(j-1)}|, |x''_{\rho(j+1)}|, \dots, |x''_{\rho(m)}|}(z''_{\alpha_{\rho(j)}})(y') &= AR^\rho_m(B)(|x''_1|, \dots, z''_{\alpha_{\rho(j)}}, \dots, |x''_m|)(y') \\
&= \Big(\overline{|x''_{\rho(m)}|}^\rho \circ \cdots \circ \overline{|x''_{\rho(j+1)}|}^\rho \circ \overline{z''_{\alpha_{\rho(j)}}}^\rho \circ \overline{|x''_{\rho(j-1)}|}^\rho \circ \cdots \circ \overline{|x''_{\rho(1)}|}^\rho\Big)(y' \circ B) \\
&= \Big(T \circ \overline{z''_{\alpha_{\rho(j)}}}^\rho \circ \overline{|x''_{\rho(j-1)}|}^\rho \circ \cdots \circ \overline{|x''_{\rho(1)}|}^\rho\Big)(y' \circ B) \\
&= T\Big(\Big(\overline{z''_{\alpha_{\rho(j)}}}^\rho \circ \overline{|x''_{\rho(j-1)}|}^\rho \circ \cdots \circ \overline{|x''_{\rho(1)}|}^\rho\Big)(y' \circ B)\Big) \\
&= T\Big(\overline{z''_{\alpha_{\rho(j)}}}^\rho\Big(\Big(\overline{|x''_{\rho(j-1)}|}^\rho \circ \cdots \circ \overline{|x''_{\rho(1)}|}^\rho\Big)(y' \circ B)\Big)\Big) = T(\overline{z''_{\alpha_{\rho(j)}}}^\rho(S)) \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Segue do Lema 3.2.5 que $AR^\rho_m(B)_{|x''_{\rho(1)}|, \dots, |x''_{\rho(j-1)}|, |x''_{\rho(j+1)}|, \dots, |x''_{\rho(m)}|}(z''_{\alpha_{\rho(j)}}) \downarrow 0$, o que nos permite concluir que $AR^\rho_m(A)_{x''_{\rho(1)}, \dots, x''_{\rho(j-1)}, x''_{\rho(j+1)}, \dots, x''_{\rho(m)}}$ é ordem contínuo. □

Observação 3.2.8. O Teorema 3.2.7 melhora [26, Theorem 1] nos seguintes sentidos: ele

vale para todas as extensões de Arens, vale para operadores entre espaços de Riesz, não impõe a hipótese de F ser Dedekind completo e, finalmente, assegura a ordem continuidade em todo o bidual em uma das variáveis. Para operadores regulares, o Teorema 3.2.7 melhora [29, Theorem 3.4] pois leva em conta todas as extensões de Arens e garante a ordem continuidade em todo o bidual em uma das variáveis. Em particular, o Teorema 3.2.7(b) fornece uma demonstração alternativa de [26, Theorem 1] e de [29, Theorem 3.4] para operadores regulares entre espaços de Riesz. Mais ainda, o item (c) do teorema mostra que $A^{*(m+1)} = AR_m^{\theta}(A)$ é ordem contínua na primeira variável em $E_1^{\tilde{}\tilde{}}$.

Relembre que um polinômio m-homogêneo $P : E \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz é positivo se seu operador m-linear simétrico correspondente $\check{P}$ é positivo. Além disso, P é regular, em notação, $P \in \mathcal{P}_r(^mE;F)$, se P pode ser escrito como a diferença de dois polinômios positivos.

As extensões de Arens de um polinômio regular $P \in \mathcal{P}_r(^mE;F)$ são os polinômios associados às extensões de Arens de $\check{P}$, isto é: para cada $\rho \in S_m$ a extensão de Arens de P com respeito a ρ é o polinômio

$$AR_m^{\rho}(P) : E^{\tilde{}\tilde{}} \longrightarrow F^{\tilde{}\tilde{}}\ ,\ AR_m^{\rho}(P)(x'') = AR_m^{\rho}(\check{P})(x'', \dots, x'').$$

Em [29, Theorem 3.5] está provado que $AR_m^{\theta}(P)$ é ordem contínuo em $(E^{\tilde{}})_n^{\tilde{}}$. Aqui conseguimos avançar para a ordem continuidade na origem em todo o bidual da seguinte forma:

Proposição 3.2.9. *Todas as extensões de Arens de um polinômio $P \in \mathcal{P}_r(^mE;F)$ são ordem contínuas na origem em $E^{\tilde{}\tilde{}}$, no sentido de que $AR_m^{\rho}(P)(x''_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ em $F^{\tilde{}\tilde{}}$ para cada $\rho \in S_m$ e qualquer $(x''_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ em $E^{\tilde{}\tilde{}}$ tal que $x''_\alpha \xrightarrow{o} 0$ em $E^{\tilde{}\tilde{}}$.*

Demonstração. Escreva $P = P_1 - P_2$, onde P_1 e P_2 são polinômios m-homogêneos positivos, e seja $\check{P}_1, \check{P}_2 : E^m \longrightarrow F$ os operadores m-lineares positivos simétricos associados a P_1 e P_2, respectivamente. Seja $(x''_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ uma rede em $E^{\tilde{}\tilde{}}$ tal que $x''_\alpha \xrightarrow{o} 0$. Então existem uma rede $(z''_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ em $E^{\tilde{}\tilde{}}$ e $\alpha_0 \in \Omega$ tais que $z''_\alpha \downarrow 0$ e $|x''_\alpha| \le z''_\alpha$ para cada $\alpha \ge \alpha_0$. Para cada permutação $\rho \in S_m$, sabemos pelo Teorema 3.2.7 que o operador

$$x'' \in E^{\tilde{}\tilde{}} \mapsto AR_m^{\rho}(\check{P}_1 + \check{P}_2)(z''_{\alpha_0}, \dots, z''_{\alpha_0}, x'', z''_{\alpha_0}, \dots, z''_{\alpha_0}),$$

onde x'' está na $\rho(m)$-ésima coordenada, é positivo e ordem contínuo. Para $\alpha \ge \alpha_0$ temos $z''_\alpha \le z''_{\alpha_0}$, assim, usando que $AR_m^{\rho}(\check{P}_1 + \check{P}_2)$ é positivo, pelo Teorema 1.1.5,

$$\begin{aligned}
|AR_m^{\rho}(P)(x''_\alpha)| &= |AR_m^{\rho}(P_1 - P_2)(x''_\alpha)| = |AR_m^{\rho}((P_1 - P_2)^{\vee})(x''_\alpha, \dots, x''_\alpha)| \\
&= |AR_m^{\rho}(\check{P}_1 - \check{P}_2)(x''_\alpha, \dots, x''_\alpha)| \le |AR_m^{\rho}(\check{P}_1 - \check{P}_2)|(|x''_\alpha|, \dots, |x''_\alpha|) \\
&\le |AR_m^{\rho}(\check{P}_1 - \check{P}_2)|(z''_\alpha, \dots, z''_\alpha) \le AR_m^{\rho}(\check{P}_1 + \check{P}_2)(z''_\alpha, \dots, z''_\alpha) \\
&\le AR_m^{\rho}(\check{P}_1 + \check{P}_2)(z''_{\alpha_0}, \dots, z''_{\alpha_0}, z''_\alpha, z''_{\alpha_0}, \dots, z''_{\alpha_0}) \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Isso prova que $AR_m^{\rho}(P)(x''_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ e completa a demonstração. □

Antecipando à pergunta que o leitor certamente tem em mente, informamos que em

[24] está provado que, para um polinômio homogêneo regular, a ordem continuidade em um ponto não implica na ordem continuidade em todos os pontos em geral. De qualquer forma, o resultado acima será útil mais adiante.

3.3 Operadores entre reticulados de Banach

Nesta seção damos condições sobre os reticulados de Banach $E_1, \dots, E_m$ de modo que, para cada reticulado de Banach F, todas as extensões de Arens de qualquer operador m-linear regular de $E_1 \times \cdots \times E_m$ a F sejam separadamente ordem contínuas em $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$. Consequências sobre a ordem continuidade das extensões de polinômios homogêneos regulares também são obtidas.

Se o dual E^* de um reticulado de Banach E tem norma ordem contínua, então $E^{**} = (E^*)_n^*$ (veja [62, Theorem 2.4.2]). Sendo assim, o seguinte resultado é consequência imediata do Teorema 3.2.7.

Corolário 3.3.1. *Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ reticulados de Banach, $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ e $\rho \in S_m$. Se E_j^* tem norma ordem contínua para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq \rho(1)$, então a extensão de Arens $AB_m^\rho(A)$ de A é separadamente ordem continua em $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$.*

O próximo resultado deixa claro que tipo de condição é necessária para se obter ordem continuidade das extensões de Arens sobre o produto das totalidades dos biduais.

Proposição 3.3.2. *Sejam $m \geq 2$ e $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach tais que a extensão de Arens $A^{*(m+1)}$ de qualquer forma m-linear $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m)$ é separadamente ordem contínua em $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$. Então, para cada operador $T \in \mathcal{L}_r(E_i; E_j^*)$, $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$, o funcional $T^{**}(x_i^{**})$ é ordem contínuo em E_j^{**} para todo $x_i^{**} \in E_i^{**}$.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}_r(E_i; E_j^*)$, $j = 1, \dots, m$, $i \neq j$. Escolha funcionais $\varphi_k \in E_k^*$, $k = 1, \dots, m$, $k \neq i, j$, não nulos e defina

$$A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{R}, \; A(x_1, \dots, x_m) = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{m} \varphi_k(x_k) \right) T(x_i)(x_j).$$

É imediato que A é uma forma m-linear regular. Suponha $i < j$. Usando a descrição de Davie-Gamelin das extensões de Arens (veja [34] ou [49, Corolário 4.4.3]), para $x_l^{**} \in E_l^{**}$ e redes $(x_{\alpha_l})_{\alpha_l \in \Omega_l}$ em E_l tais que $x_l^{**} = \omega^*\text{-}\lim_{\alpha_l} J_{E_l}(x_{\alpha_l})$, $l = 1, \dots, m$, obtemos

$$\begin{aligned}
A^{*(m+1)}(x_1^{**}, \dots, x_i^{**}, \dots, x_j^{**}, \dots, x_m^{**}) &= \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_i} \cdots \lim_{\alpha_j} \cdots \lim_{\alpha_m} A(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_m}) \\
&= \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_i} \cdots \lim_{\alpha_j} \cdots \lim_{\alpha_m} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{m} \varphi_k(x_{\alpha_k}) \right) T(x_{\alpha_i})(x_{\alpha_j}) \\
&= \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_i} \cdots \lim_{\alpha_j} \cdots \lim_{\alpha_{m-1}} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{m-1} \varphi_k(x_{\alpha_k}) \right) T(x_{\alpha_i})(x_{\alpha_j}) \lim_{\alpha_m} J_{E_m}(x_{\alpha_m})(\varphi_m)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_i} \cdots \lim_{\alpha_j} \cdots \lim_{\alpha_{m-1}} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m-1} \varphi_k(x_{\alpha_k}) \right) T(x_{\alpha_i})(x_{\alpha_j}) x_m^{**}(\varphi_m) \\
&\vdots \\
&= x_m^{**}(\varphi_m) \cdots x_{j+1}^{**}(\varphi_{j+1}) \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_i} \cdots \lim_{\alpha_j} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{j-1} \varphi_k(x_{\alpha_k}) \right) T(x_{\alpha_i})(x_{\alpha_j}) \\
&= \prod_{k=j+1}^{m} x_k^{**}(\varphi_k) \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_i} \cdots \lim_{\alpha_{j-1}} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{j-1} \varphi_k(x_{\alpha_k}) \right) \lim_{\alpha_j} T(x_{\alpha_i})(x_{\alpha_j}) \\
&= \prod_{k=j+1}^{m} x_k^{**}(\varphi_k) \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_i} \cdots \lim_{\alpha_{j-1}} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{j-1} \varphi_k(x_{\alpha_k}) \right) x_j^{**}(T(x_{\alpha_i})) \\
&\vdots \\
&= \prod_{\substack{k=i+1 \\ k\neq j}}^{m} x_k^{**}(\varphi_k) \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_i} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \varphi_k(x_{\alpha_k}) \right) x_j^{**}(T(x_{\alpha_i})) \\
&= \prod_{\substack{k=i+1 \\ k\neq j}}^{m} x_k^{**}(\varphi_k) \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_{i-1}} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \varphi_k(x_{\alpha_k}) \right) \lim_{\alpha_i} T^*(x_j^{**})(x_{\alpha_i}) \\
&= \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} x_k^{**}(\varphi_k) \lim_{\alpha_i} J_{E_i}(x_{\alpha_i})(T^*(x_j^{**})) = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} x_k^{**}(\varphi_k) \right) x_i^{**}(T^*(x_j^{**})) \\
&= \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} x_k^{**}(\varphi_k) \right) T^{**}(x_i^{**})(x_j^{**}).
\end{aligned}
$$

Em resumo,

$$
A^{*(m+1)}(x_1^{**}, \dots, x_i^{**}, \dots, x_j^{**}, \dots, x_m^{**}) = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} x_k^{**}(\varphi_k) \right) T^{**}(x_i^{**})(x_j^{**})
$$

para todo $x_i^{**} \in E_i^{**}$. Como $\varphi_k \neq 0, k \neq i, j$, existe $x_k \in E_k$ tais que $\varphi_k(x_k) = 1$. Daí,

$$
\begin{aligned}
A^{*(m+1)}(J_{E_1}(x_1), \dots, x_i^{**}, \dots, x_j^{**}, \dots, J_{E_m}(x_m)) &= \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} J_{E_k}(x_k)(\varphi_k) \right) T^{**}(x_i^{**})(x_j^{**}) \\
&= \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} \varphi_k(x_k) \right) T^{**}(x_i^{**})(x_j^{**}) = T^{**}(x_i^{**})(x_j^{**}).
\end{aligned}
$$

Como $A^{*(m+1)}$ é separadamente ordem contínua por hipótese, para todo $x_i^{**} \in E_i^{**}$ o funcional $T^{**}(x_i^{**})$ é ordem contínuo. Trocando i por j e j por i, segue que, para $j < i$, o funcional $T^{**}(x_j^{**})$ é ordem contínuo, completando a demonstração. □

Embora os próximos resultados sejam válidos, com as modificações óbvias, para todas as extensões de Arens $AR_m^{\rho}(A)$ de um operador m-linear regular A, para aliviar o peso da notação das demonstrações, nos restringiremos à extensão $A^{*(m+1)} = AR_m^{\theta}(A)$.

Lema 3.3.3. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach, $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m)$ e $i \in \{1, \dots, m\}$. Se $x_j \in E_j, j = 1, \dots, i-1$, e $x_j^{**} \in E_j^{**}, j = i+1, \dots, m$, então o funcional*

$$A^{*(m+1)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{i-1}}(x_{i-1}), \bullet, x_{i+1}^{**}, \dots, x_m^{**}) : \ E_i^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é ω^*-continuo e

$$A^{*(m+1)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{i-1}}(x_{i-1}), x_i^{**}, \dots, x_m^{**}) = \left(\overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)(x_1, \dots, x_{i-1}).$$

Demonstração. Seja $(x_{\alpha_i}^{**})_{\alpha_i \in \Omega_i}$ uma rede em E_i^{**} tal que $x_{\alpha_i}^{**} \xrightarrow{\omega^*} x_i^{**} \in E_i^{**}$. Para cada $x_i^* \in E_i^*$ temos $x_i^{**}(x_i^*) = \lim\limits_{\alpha_i} x_{\alpha_i}^{**}(x_i^*)$. Dados $x_j \in E_j, j = 1, \dots, i-1$, e $x_j^{**} \in E_j^{**}, j = i+1, \dots, m$,

$$\begin{aligned}
&A^{*(m+1)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{i-1}}(x_{i-1}), x_i^{**}, \dots, x_m^{**}) \\
&\quad = \left(\overline{J_{E_1}(x_1)}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A) \\
&\quad = \overline{J_{E_1}(x_1)}^{\theta}\left(\left(\overline{J_{E_2}(x_1)}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right) \\
&\quad = J_{E_1}(x_1)\left(\left(\overline{J_{E_2}(x_2)}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right) \\
&\quad = \left(\overline{J_{E_2}(x_2)}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)(x_1) \\
&\quad = \overline{J_{E_2}(x_2)}^{\theta}\left(\left(\overline{J_{E_3}(x_3)}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1) \\
&\quad = J_{E_2}(x_2)\left(\left(\left(\overline{J_{E_3}(x_3)}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1, \bullet)\right) \\
&\quad = \left(\left(\overline{J_{E_3}(x_3)}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1, \bullet)(x_2) \\
&\quad = \left(\overline{J_{E_3}(x_3)}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)(x_1, x_2) \\
&\quad \ \ \vdots \\
&\quad = \left(\overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta} \circ \overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)(x_1, \dots, x_{i-2}) \\
&\quad = \overline{J_{E_{i-1}}(x_{i-1})}^{\theta}\left(\left(\overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1, \dots, x_{i-2}) \\
&\quad = J_{E_{i-1}}(x_{i-1})\left(\left(\left(\overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1, \dots, x_{i-2}, \bullet)\right) \\
&\quad = \left(\overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)(x_1, \dots, x_{i-2}, \bullet)(x_{i-1}) \\
&\quad = \left(\overline{x_i^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)(x_1, \dots, x_{i-2}, x_{i-1}) \\
&\quad = \overline{x_i^{**}}^{\theta}\left(\left(\overline{x_{i-1}^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1, \dots, x_{i-2}, x_{i-1}) \\
&\quad = x_i^{**}\left(\left(\left(\overline{x_{i-1}^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1, \dots, x_{i-2}, x_{i-1}, \bullet)\right) \\
&\quad \overset{(\Delta)}{=} \lim_{\alpha_i} x_{\alpha_i}^{**}\left(\left(\left(\overline{x_{i-1}^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1, \dots, x_{i-2}, x_{i-1}, \bullet)\right) \\
&\quad = \lim_{\alpha_i} A^{*(m+1)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{i-1}}(x_{i-1}), x_{\alpha_i}^{**}, \dots, x_m^{**}),
\end{aligned}$$

onde, em (Δ), usamos que $\left(\left(\overline{x_{i-1}^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_m^{**}}^{\theta}\right)(A)\right)(x_1, \dots, x_{i-2}, x_{i-1}, \bullet) \in E_i^*$. $\square$

Definição 3.3.4. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de funcionais lineares em reticulados de Banach. Dizemos que:

• Uma forma $A: E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $E_1, \ldots, E_m$ são reticulados de Banach, tem $\mathcal{P}$*-separadamente* se para todos $j \in \{1, \ldots, m\}$ e $x_i^{**} \in E_i^{**}$, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, o funcional

$$A_{x_1^{**},\ldots,x_{j-1}^{**},x_{j+1}^{**},\ldots,x_m^{**}} : E_j^{**} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x_j^{**} \mapsto A(x_1^{**}, \ldots, x_m^{**}),$$

tem a propriedade $\mathcal{P}$.

• $\mathcal{P}$ é uma *propriedade de Arens* se, independentemente do número natural $m \geq 2$, dos reticulados de Banach $E_1, \ldots, E_m$ e da forma m-linear regular $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_m)$, a extensão de Arens $A^{*(m+1)}$ de A tem $\mathcal{P}$ na primeira variável, no sentido de que o operador $A^{*(m+1)}_{x_2^{**},\ldots,x_m^{**}} : E_1^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem $\mathcal{P}$ para todos $x_2^{**} \in E_2^{**}, \ldots, x_m^{**} \in E_m^{**}$.

Exemplo 3.3.5. A ordem continuidade (Teorema 3.2.7(c)) e a ω^*-continuidade (veja [39, p. 413] ou Lema 3.3.3) são propriedades de Arens.

Definição 3.3.6. Um operador linear $T: X \longrightarrow Y$ entre espaços de Banach é *fracamente compacto* se $\overline{T(B_X)}$ é fracamente compacto em Y.

Teorema 3.3.7. [41, Theorem 2, p. 482 e Lemma 7, p. 484] *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ entre espaços de Banach.*

(i) *T é fracamente compacto.*

(ii) *$T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ é ω^*-ω-contínuo.*

(iii) *$T^{**}(X^{**}) \subseteq J_Y(Y)$.*

Teorema 3.3.8. *Sejam $\mathcal{P}$ uma propriedade de Arens, $m \geq 2$ e $E_1, \ldots, E_m$ reticulados de Banach. Suponha que:*
(i) *Para $j = 2, \ldots, m-1$, e $i = 1, \ldots, m-j$, cada operador linear regular de E_j em E_{j+i}^* é fracamente compacto.*
(ii) *Para todos $k = 2, \ldots, m$, $x_1^{**} \in E_1^{**}$ e $T \in \mathcal{L}_r(E_1; E_k^*)$, o funcional $T^{**}(x_1^{**}) \in E_k^{***}$ tem a propriedade $\mathcal{P}$.*

Então, para cada forma m-linear $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_m)$, a extensão de Arens $A^{*(m+1)} : E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem $\mathcal{P}$-separadamente.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre m. Para o caso $m = 2$, seja $A \in \mathcal{L}_r(E_1, E_2)$. Pela hipótese de $\mathcal{P}$ ser uma propriedade de Arens, A^{***} tem a propriedade $\mathcal{P}$ na primeira variável. Provemos que, para cada $x_1^{**} \in E_1^{**}$, $A^{***}(x_1^{**}, \bullet) \in E_2^*$ tem a propriedade $\mathcal{P}$. Para isso, considere o operador linear regular $T: E_1 \longrightarrow E_2^*$ dado por $T(x_1) = A(x_1, \bullet)$. Para todos $x_2^{**} \in E_2^{**}$ e $x_1 \in E_1$,

$$T^*(x_2^{**})(x_1) = x_2^{**}(T(x_1)) = x_2^{**}(A(x_1, \bullet)) = \overline{x_2^{**}}^{\theta}(A)(x_1),$$

isto é, $T^*(x_2^{**}) = \overline{x_2^{**}}^{\theta}(A)$. Assim, para todos $x_1^{**} \in E_1^{**}, x_2^{**} \in E_2^{**}$,

$$T^{**}(x_1^{**})(x_2^{**}) = x_1^{**}(T^*(x_2^{**})) = x_1^{**}\left(\overline{x_2^{**}}^{\theta}(A)\right) = \left(\overline{x_1^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_2^{**}}^{\theta}\right)(A) = A^{***}(x_1^{**}, x_2^{**}).$$

Como $T^{**}(x_1^{**})$ tem a propriedade $\mathcal{P}$ por hipótese, segue que $A^{***}(x_1^{**}, \bullet)$ tem a propriedade $\mathcal{P}$. Isso mostra que o resultado vale para $m = 2$.

Suponhamos agora que o resultado seja verdadeiro para para n e provemos que também é verdadeiro para $n+1$. Estamos então supondo que as condições (i) e (ii) valem para $n+1$. Seja $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_{n+1})$. Relembre que, conforme já vimos, para cada $x_i^{**} \in E_i^{**}$, $i = 2, \dots, n+1$, o operador

$$\overline{x_i^{**}}^{\theta} : \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_i) \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_{i-1})$$

é dado por

$$\overline{x_i^{**}}^{\theta}(B)(x_1, \dots, x_{i-1}) = x_i^{**}(B(x_1, \dots, x_{i-1}, \bullet)).$$

E também que, para cada $x_1^{**} \in E_1^{**}$, o funcional $\overline{x_1^{**}}^{\theta} : E_1^{*} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por $\overline{x_1^{**}}^{\theta} = x_1^{**}$. Além disso,

$$\begin{aligned} A^{*(n+2)}(x_1^{**}, \dots, x_{n+1}^{**}) &= \left(\overline{x_1^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_{n+1}^{**}}^{\theta}\right)(A) = \left(\overline{x_1^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_n^{**}}^{\theta}\right)\left(\overline{x_{n+1}^{**}}^{\theta}(A)\right) \\ &= \left(\overline{x_{n+1}^{**}}^{\theta}(A)\right)^{*(n+1)}(x_1^{**}, \dots, x_n^{**}). \end{aligned}$$

Como $\overline{x_{n+1}^{**}}^{\theta}(A) \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_n)$, pela hipótese indutiva obtemos que $\left(\overline{x_{n+1}^{**}}^{\theta}(A)\right)^{*(n+1)}$ tem $\mathcal{P}$-separadamente, e portanto $A^{*(n+2)}$ tem a propriedade $\mathcal{P}$ nas n primeiras variáveis. Para provar que $A^{*(n+2)}$ têm a propriedade $\mathcal{P}$ na $(n+1)$-ésima variável, seja $x_i^{**} \in E_i^{**}$, $i = 1, \dots, n$. Nosso trabalho é mostrar que $A^{*(n+2)}(x_1^{**}, \dots, x_n^{**}, \bullet) : E_{n+1}^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade $\mathcal{P}$. Dados $x_i \in E_i$, $i = 1, \dots, n-1$, considere o operador linear regular

$$A_{x_1,\dots,x_{n-1}} : E_n \longrightarrow E_{n+1}^{*},\ A_{x_1,\dots,x_{n-1}}(x_n) = A(x_1, \dots, x_n, \bullet).$$

Dado $x_{n+1}^{**} \in E_{n+1}^{**}$, tome uma rede $(x_{\alpha_n})_{\alpha_n}$ em E_n tal que $J_{E_n}(x_{\alpha_n}) \xrightarrow{\omega^*} x_n^{**}$. Da ω^*-ω^*-continuidade de $[A_{x_1,\dots,x_{n-1}}]^{**}$ e do Lema 3.3.3 temos

$$\begin{aligned} [A_{x_1,\dots,x_{n-1}}]^{**}(x_n^{**})(x_{n+1}^{**}) &= \lim_{\alpha_n} [A_{x_1,\dots,x_{n-1}}]^{**}(J_{E_n}(x_{\alpha_n}))(x_{n+1}^{**}) \\ &= \lim_{\alpha_n} J_{E_{n+1}^{*}}(A_{x_1,\dots,x_{n-1}}(x_{\alpha_n}))(x_{n+1}^{**}) \\ &= \lim_{\alpha_n} x_{n+1}^{**}(A_{x_1,\dots,x_{n-1}}(x_{\alpha_n})) = \lim_{\alpha_n} x_{n+1}^{**}(A(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{\alpha_n}, \bullet)) \\ &= \lim_{\alpha_n} \overline{x_{n+1}^{**}}^{\theta}(A)(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{\alpha_n}) \\ &= \lim_{\alpha_n} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-1}}(x_{n-1}), J_{E_n}(x_{\alpha_n}), x_{n+1}^{**}) \\ &= A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-1}}(x_{n-1}), x_n^{**}, x_{n+1}^{**}). \end{aligned}$$

A igualdade obtida é a seguinte:

$$[A_{x_1,\dots,x_{n-1}}]^{**}(x_n^{**})(x_{n+1}^{**}) = A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-1}}(x_{n-1}), x_n^{**}, x_{n+1}^{**}). \tag{3.3}$$

Para $x_n^{**} \in E_n^{**}$ e $x_i \in E_i$, $i = 1 \dots, n-2$, considere o operador linear regular $A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}} : E_{n-1} \longrightarrow E_{n+1}^{*}$ dado por

$$A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{n-1})(x_{n+1}) = A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-1}}(x_{n-1}), x_n^{**}, J_{E_{n+1}}(x_{n+1})).$$

Por outro lado, para cada $x_{n-1} \in E_{n-1}$ o funcional $[A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{n-1})]^{**}$ é uma extensão ω^*-continua de $A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{n-1})$. Mais ainda, como $A_{x_1,\dots,x_{n-1}}$ é fracamente compacto por hipótese, para cada $x_n^{**} \in E_n^{**}$ o funcional $[A_{x_1,\dots,x_{n-1}}]^{**}(x_n^{**})$ é ω^*-contínuo (Teorema 3.3.7). Tomando uma rede $(x_{\alpha_{n+1}})_{\alpha_{n+1}}$ em E_{n+1} tal que $J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}}) \xrightarrow{\omega^*} x_{n+1}^{**}$,

$$\begin{aligned}
[A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{n-1})]^{**}(x_{n+1}^{**}) &= \lim_{\alpha_{n+1}}[A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{n-1})]^{**}(J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})(A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{n-1})) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{n-1})(x_{\alpha_{n+1}}) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-1}}(x_{n-1}), x_n^{**}, J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}}[A_{x_1,\dots,x_{n-1}}]^{**}(x_n^{**})(J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) = [A_{x_1,\dots,x_{n-1}}]^{**}(x_n^{**})(x_{n+1}^{**}) \\
&\overset{(3.3)}{=} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-1}}(x_{n-1}), x_n^{**}, x_{n+1}^{**}). \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Tome uma rede $(x_{\alpha_{n-1}})_{\alpha_{n-1}}$ em E_{n-1} tal que $J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}) \xrightarrow{\omega^*} x_{n-1}^{**}$. Usando que $[A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}]^{**}$ é ω^*-ω^*-contínuo e o Lema 3.3.3, para cada $x_{n+1}^{**} \in E_{n+1}^{**}$ temos

$$\begin{aligned}
[A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}]^{**}(x_{n-1}^{**})(x_{n+1}^{**}) &= \lim_{\alpha_{n-1}}[A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}]^{**}(J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}))(x_{n+1}^{**}) \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} J_{E_{n+1}}(A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{\alpha_{n-1}}))(x_{n+1}^{**}) \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} x_{n+1}^{**}(A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{\alpha_{n-1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}}[A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}(x_{\alpha_{n-1}})]^{**}(x_{n+1}^{**}) \\
&\overset{(3.4)}{=} \lim_{\alpha_{n-1}} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}), x_n^{**}, x_{n+1}^{**}) \\
&= A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-2}}(x_{n-2}), x_{n-1}^{**}, x_n^{**}, x_{n+1}^{**}).
\end{aligned}$$

A igualdade obtida nesse passo é a seguinte:

$$[A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}]^{**}(x_{n-1}^{**})(x_{n+1}^{**}) = A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-2}}(x_{n-2}), x_{n-1}^{**}, x_n^{**}, x_{n+1}^{**}). \qquad (3.5)$$

Para $x_{n-1}^{**} \in E_{n-1}^{**}, x_n^{**} \in E_n^{**}$ e $x_i \in E_i$, $i = 1 \dots, n-3$, considere o operador linear regular $A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}} : E_{n-2} \longrightarrow E_{n+1}^*$ dado por

$$A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{n-2})(x_{n+1}) = A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{n-2}}(x_{n-2}), x_{n-1}^{**}, x_n^{**}, J_{E_{n+1}}(x_{n+1})).$$

Para cada $x_{n-2} \in E_{n-2}$ o funcional $[A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{n-2})]^{**}$ é uma extensão ω^*-contínua de $A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{n-2})$. Por outro lado, como $A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}$ é fracamente compacto por hipótese, para cada $x_{n-1}^{**} \in E_n^{**}$ o funcional $[A_{x_1}, \dots, x_{n-2}, x_n^{**}]^{**}(x_{n-1}^{**})$ é ω^*-contínuo (Teorema 3.3.7). Assim,

$$\begin{aligned}
[A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{n-2})]^{**}(x_{n+1}^{**}) &= \lim_{\alpha_{n+1}}[A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{n-2})]^{**}(J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})(A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{n-2}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha_{n+1}} A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{n-2})(x_{\alpha_{n+1}}) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1),\dots,J_{E_{n-2}}(x_{n-2}), x_{n-1}^{**}, x_n^{**}, J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} [A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}]^{**}(x_{n-1}^{**})(J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) \\
&= [A_{x_1,\dots,x_{n-2},x_n^{**}}]^{**}(x_{n-1}^{**})(x_{n+1}^{**}) \\
&\overset{(3.5)}{=} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1),\dots,J_{E_{n-2}}(x_{n-2}), x_{n-1}^{**}, x_n^{**}, x_{n+1}^{**}).
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Como o operador $[A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}]^{**}$ é ω^*-ω^*-contínuo, para cada $x_{n+1}^{**} \in E_{n+1}^{**}$, tomando uma rede $(x_{\alpha_{n-2}})_{\alpha_{n-2}}$ em E_{n-2} tal que $J_{E_{n-2}}(x_{\alpha_{n-2}}) \xrightarrow{\omega^*} x_{n-2}^{**}$, do Lema 3.3.3 segue que

$$
\begin{aligned}
[A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}]^{**}(x_{n-2}^{**})(x_{n+1}^{**}) &= \lim_{\alpha_{n-2}} [A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}]^{**}(J_{E_{n-2}}(x_{\alpha_{n-2}}))(x_{n+1}^{**}) \\
&= \lim_{\alpha_{n-2}} J_{E_{n+1}}(A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{\alpha_{n-2}}))(x_{n+1}^{**}) \\
&= \lim_{\alpha_{n-2}} x_{n+1}^{**}(A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{\alpha_{n-2}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n-2}} [A_{x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-1}^{**},x_n^{**}}(x_{\alpha_{n-2}})]^{**}(x_{n+1}^{**}) \\
&\overset{(3.6)}{=} \lim_{\alpha_{n-2}} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1),\dots,J_{E_{n-2}}(x_{\alpha_{n-2}}), x_{n-1}^{**}, x_n^{**}, x_{n+1}^{**}) \\
&= A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1),\dots,J_{E_{n-3}}(x_{n-3}), x_{n-2}^{**}, x_{n-1}^{**}, x_n^{**}, x_{n+1}^{**}).
\end{aligned}
$$

Repetindo o processo $(n-3)$ vezes chegamos a

$$
[A_{x_1,x_3^{**},\dots,x_n^{**}}]^{**}(x_2^{**})(x_{n+1}^{**}) = A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), x_2^{**},\dots,x_{n+1}^{**}), \tag{3.7}
$$

para cada $x_{n+1}^{**} \in E_{n+1}^{**}$, onde, para cada $x_1 \in E_1$ e $x_i^{**} \in E_i^{**}$, $i = 3,\dots,n$, o operador linear regular $A_{x_1,x_3^{**},\dots,x_n^{**}} : E_2 \longrightarrow E_{n+1}^*$ é dado por

$$
A_{x_1,x_3^{**},\dots,x_n^{**}}(x_2)(x_{n+1}) = A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2), x_3^{**},\dots,x_n^{**}, J_{E_{n+1}}(x_{n+1})).
$$

Finalmente, dados $x_i^{**} \in E_i^{**}$, $i = 2,\dots,n$, o operador linear regular $A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}} : E_1 \longrightarrow E_{n+1}^*$ definido por

$$
A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}(x_1)(x_{n+1}) = A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), x_2^{**},\dots,x_n^{**}, J_{E_{n+1}}(x_{n+1}))
$$

é fracamente compacto pela condição (ii) para $n+1$. Assim, para cada $x_2^{**} \in E_2^{**}$, $[A_{x_1,x_3^{**},\dots,x_n^{**}}]^{**}(x_2^{**})$ is ω^*-contínuo e, além disso,

$$
\begin{aligned}
[A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}(x_1)]^{**}(x_{n+1}^{**}) &= \lim_{\alpha_{n+1}} [A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}(x_1)]^{**}(J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})(A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}(x_1)) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}(x_1)(x_{\alpha_{n+1}}) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), x_2^{**},\dots,x_n^{**}, J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n+1}} [A_{x_1,x_3^{**},\dots,x_n^{**}}]^{**}(x_2^{**})(J_{E_{n+1}}(x_{\alpha_{n+1}})) \\
&= [A_{x_1,x_3^{**},\dots,x_n^{**}}]^{**}(x_2^{**})(x_{n+1}^{**})
\end{aligned}
$$

$$\overset{(3.7)}{=} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_1), x_2^{**}, \dots, x_{n+1}^{**}). \tag{3.8}$$

Tomando uma rede $(x_{\alpha_1})_{\alpha_1}$ em E_1 tal que $J_{E_1}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x_1^{**}$, a continuidade ω^*-ω^* de $[A_{x_2^*,\dots,x_n^{**}}]^{**}$ e o Lema 3.3.3 implicam que, para cada $x_{n+1}^{**} \in E_{n+1}^{**}$,

$$\begin{aligned}
[A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}]^{**}(x_1^{**})(x_{n+1}^{**}) &= \lim_{\alpha_1}[A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}]^{**}(J_{E_1}(x_{\alpha_1})(x_{n+1}^{**}) \\
&= \lim_{\alpha_1} J_{E_{n+1}}(A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}(x_{\alpha_1}))(x_{n+1}^{**}) \\
&= \lim_{\alpha_1} x_{n+1}^{**}(A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}(x_{\alpha_1})) \\
&= \lim_{\alpha_1}[A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}(x_{\alpha_1})]^{**}(x_{n+1}^{**}) \\
&\overset{(3.8)}{=} \lim_{\alpha_1} A^{*(n+2)}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), x_2^{**}, \dots, x_{n+1}^{**}) \\
&= A^{*(n+2)}(x_1^{**}, \dots, x_{n+1}^{**}).
\end{aligned}$$

Isso prova que $[A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}]^{**}(x_1^{**}) = A^{*(n+2)}(x_1^{**}, \dots, x_n^{**}, \bullet)$. Pela condição (ii) para $n+1$ sabemos que $[A_{x_2^{**},\dots,x_n^{**}}]^{**}(x_1^{**})$ tem a propriedade $\mathcal{P}$, e portanto $A^{*[n+2]}(x_1^{**}, \dots, x_n^{**}, \bullet)$ tem a propriedade $\mathcal{P}$. A demonstração está completa. □

O Teorema 3.3.8 dá condições suficientes para as extensões de Arens de formas multilineares regulares serem separadamente ordem contínuas sobre o produto das totalidades dos biduais. Vamos agora tratar o caso de operadores multilineares regulares a valores vetoriais.

Teorema 3.3.9. *Sejam $m \geq 2$ e $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach tais que:*
(i) *Para $j = 2, \dots, m-1$, e $i = 1, \dots, m-j$, cada operador linear regular de E_j em E_{j+i}^* é fracamente compacto.*
(ii) *Para todos $k = 2, \dots, m$, $x_1^{**} \in E_1^{**}$ e $T \in \mathcal{L}_r(E_1; E_k^*)$, o funcional $T^{**}(x_1^{**})$ é ordem contínuo em E_k^{***}.*

Então, para todo reticulado de Banach F e qualquer $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$, a extensão de Arens $A^{*(m+1)}$ é separadamente ordem contínua em $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$.

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ e $y^* \in F^*$. Usando que $y^* \circ A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m)$ e também que a ordem continuidade é uma propriedade de Arens, a extensão $(y^* \circ A)^{*(m+1)}$ é separadamente ordem contínua pelo Teorema 3.3.8. Note que, para todos $x_i^{**} \in E_i^{**}$, $i = 1, \dots, m$,

$$A^{*(m+1)}(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})(y^*) = (y^* \circ A)^{*(m+1)}(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}).$$

Dado $j \in \{1, \dots, m\}$, sejam $x_j^{**} \in E_j^{**}$ e $(x_{\alpha_j}^{**})_{\alpha_j \in \Omega_j}$ uma rede em E_j^{**} tais que $x_{\alpha_j}^{**} \xrightarrow{o} 0$. Existem então uma rede $(y_{\alpha_j}^{**})_{\alpha_j \in \Omega_j}$ em E_j^{**} e $\alpha_{j_0} \in \Omega_j$ de modo que $y_{\alpha_j}^{**} \downarrow 0$ e $|x_{\alpha_j}^{**}| \leq y_{\alpha_j}^{**}$ para todo $\alpha_j \geq \alpha_{j_0}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que A e y^* sejam positivos. Como $(y^* \circ A)^{*(m+1)}(|x_1^{**}|, \dots, \bullet, \dots, |x_m^{**}|) : E_j^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ é positivo e ordem contínuo,

$$A^{*(m+1)}(|x_1^{**}|, \dots, y_{\alpha_j}^{**}, \dots, |x_m^{**}|)(y^*) = (y^* \circ A)^{*(m+1)}(|x_1^{**}|, \dots, \bullet, \dots, |x_m^{**}|)(y_{\alpha_j}^{**}) \downarrow 0.$$

Segue pelo Teorema 1.4.4 que $A^{*(m+1)}(|x_1^{**}|, \dots, y_{\alpha_j}^{**}, \dots, |x_m^{**}|) \downarrow 0$ e, para todo $\alpha_j \geq \alpha_{j_0}$,

$$\begin{aligned} |A^{*(m+1)}(x_1^{**}, \dots, x_{\alpha_j}^{**}, \dots, x_m^{**})| &\leq A^{*(m+1)}(|x_1^{**}|, \dots, |x_{\alpha_j}^{**}|, \dots, |x_m^{**}|) \\ &\leq A^{*(m+1)}(|x_1^{**}|, \dots, y_{\alpha_j}^{**}, \dots, |x_m^{**}|) \downarrow 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que $A^{*(m+1)}(x_1^{**}, \dots, x_{\alpha_j}^{**}, \dots, x_m^{**}) \xrightarrow{o} 0$ e prova que a extensão $A^{*(m+1)}$ é separadamente ordem contínua. □

Exemplo 3.3.10. Quanto à condição (i) acima, temos os seguintes exemplos entre reticulados de Banach não reflexivos:

(a) Todo operador de c_0 em $c_0^* = \ell_1$ é compacto, donde fracamente compacto (isso é o Teorema de Pitt, veja [46, Proposition 4.49].

(b) Todo operador de $C(K)$, onde K é um espaço Hausdorff compacto, a valores em um KB-espaço é fracamente compacto. Para ver isso, relembre que KB-espaços não contêm uma copia de c_0 (Teorema 1.3.8) e aplique [68, Theorem 5].

(c) Como qualquer AM-espaço com ordem unidade é Riesz isomorfo para algum $C(K)$ (Teorema 1.3.14), por (b) segue que todo operador de um AM-espaço com ordem unidade a valores em um KB-espaço é fracamente compacto. Como o dual de um AM-espaço é um KB-espaço (Teorema 1.3.15), todo operador de um AM-espaço com ordem unidade a valores em seu dual é fracamente compacto. Em particular, todo operador de ℓ_∞ em ℓ_∞^* é fracamente compacto.

Corolário 3.3.11. *Sejam $m \geq 2$ e $E_1, \dots, E_m, F$ reticulados de Banach tais que todo operador regular de E_j em E_{j+i}^* é fracamente compacto, $j = 2, \dots, m-1$, $i = 1, \dots, m-j$. Se E_1^* tem norma ordem contínua, então a extensão de Arens $A^{*(m+1)}$ de qualquer operador $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$ é separadamente ordem contínua em $E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**}$.*

Demonstração. A condição (i) do Teorema 3.3.9 é dado pela hipótese. Para $x_1^{**} \in E_1^{**}$ e $T \in \mathcal{L}_r(E_1; E_k^*)$, x_1^{**} é ordem contínuo pois a norma de E_1^* é ordem contínua [62, Theorem 2.4.2]. T^* é ordem contínuo pelo Teorema 1.4.10, logo $T^{**}(x_1^{**}) = x_1^{**} \circ T^*$ também é ordem contínuo, portanto a condição (ii) do Teorema 3.3.9 é satisfeita. O resultado segue. □

Relembramos que um espaço de Banach X é *Arens regular* se todo operador linear contínuo de X em X^* é fracamente compacto. Para maiores detalhes, veja, por exemplo, [39]. Os reticulados de Banach c_0, ℓ_∞ e $C(K)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto, em particular AM-espaços com ordem unidade, são Arens regulares (veja Exemplo 3.3.10).

Corolário 3.3.12. *Seja E um reticulado de Banach Arens regular. Então, para todo reticulado de Banach F, a extensão de Arens $A^{*(m+1)}$ de qualquer operador m-linear regular $A : E^m \longrightarrow F$ é separadamente ordem contínua sobre $(E^{**})^m$.*

Demonstração. A regularidade de Arens de E garante a condição (i) do Teorema 3.3.9. Mais ainda para todo $T \in \mathcal{L}_r(E; E^*)$, $T^{**}(E^{**}) \subseteq J_{E^*}(E^*) \subseteq (E^{**})_n^*$, e isso implica a condição (ii). O resultado segue. □

Finalizamos este capítulo com mais um resultado sobre ordem continuidade de extensões de Arens de polinômios homogêneos. Para um polinômio $P \in \mathcal{P}_r(^mE;F)$, escrevemos $P^{*(m+1)} := AR_m^\theta(P)$. Recordamos que P é *ortogonalmente aditivo* se $P(x+y) = P(x) + P(y)$ sempre que x e y são disjuntos. A literatura sobre polinômios homogêneos ortogonalmente aditivos é vasta e desenvolvimentos recentes podem ser encontrados em, por exemplo, [2, 25, 53].

Um operador linear $u : E \longrightarrow E^*$ é *simétrico* se $u(x)(y) = u(y)(x)$ para todos $x, y \in E$. Um espaço de Banach X é *simetricamente Arens regular* se todo operador simétrico de X em X^* é fracamente compacto. Para exemplos de reticulados de Banach Arens regulares, veja Exemplo 3.3.10. É claro que espaços Arens regulares são simetricamente Arens regulares, mas existem espaços simetricamente Arens regulares que não são Arens regulares, veja por exemplo [54].

Proposição 3.3.13. *Sejam E, F reticulados de Banach e $P \in \mathcal{P}_r(^mE;F)$. Se ou P é ortogonalmente aditivo e $F = \mathbb{R}$ ou E é simetricamente Arens regular, então a extensão de Arens $P^{*(m+1)} : E^{**} \longrightarrow F^{**}$ de P é ordem contínua em E^{**}.*

Demonstração. Suponha primeiramente que P seja ortogonalmente aditivo e $F = \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.2.9 sabemos que a extensão $P^{*(m+1)}$ é ordem contínua na origem de E^{**} e de [24, Proposition 8] segue a ordem continuidade em todo ponto de E^{**}.

Suponha agora que E seja simetricamente Arens regular. É claro que podemos supor, sem perda de generalidade, que P é positivo. Sabemos que a extensão $(\check{P})^{*(m+1)}$ é ordem contínua na primeira variável em E^{**} pelo Teorema 3.2.7 e positiva uma vez que $\check{P}$ é positivo. Para verificar que essa extensão é simétrica, seja $\rho \in S_m$. Para cada $\varphi \in F^*$, como E é simetricamente Arens regular e $\varphi \circ \check{P}$ é simétrico, por [12, Theorem 8.3] (ou [30, Corollary 6]) sabemos que a extensão $AR_m^\theta(\varphi \circ \check{P})$ também é simétrica. Então, para $x_1^{**}, \dots, x_m^{**} \in E^{**}$,

$$\begin{aligned}(\check{P})^{*(m+1)}(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})(\varphi) &= AR_m^\theta(\check{P})(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})(\varphi) = AR_m^\theta(\varphi \circ \check{P})(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) \\ &= AR_m^\theta(\varphi \circ \check{P})(x_{\rho(1)}^{**}, \dots, x_{\rho(m)}^{**}) = AR_m^\theta(\check{P})(x_{\rho(1)}^{**}, \dots, x_{\rho(m)}^{**})(\varphi) \\ &= (\check{P})^{*(m+1)}(x_{\rho(1)}^{**}, \dots, x_{\rho(m)}^{**})(\varphi),\end{aligned}$$

provando que $(\check{P})^{*(m+1)}$ é simétrico. A ordem continuidade na primeira variável e a simetria implicam imediatamente que o operador m-linear positivo $(\check{P})^{*(m+1)}$ é separadamente ordem contínuo em $(E^{**})^m$. Por [29, Lemma 2.6] segue que $(\check{P})^{*(m+1)}$ é conjuntamente ordem contínua em $(E^{**})^m$. Assim, se $x_\alpha^{**} \xrightarrow{o} x^{**}$ em E^{**}, temos

$$P^{*(m+1)}(x_\alpha^{**}) = (\check{P})^{*(m+1)}(x_\alpha^{**}, \dots, x_\alpha^{**}) \xrightarrow{o} (\check{P})^{*(m+1)}(x^{**}, \dots, x^{**}) = P^{*(m+1)}(x^{**})$$

e isso nos permite concluir que a extensão $P^{*(m+1)}$ é ordem contínua em E^{**}. □

Capítulo 4

Adjuntos e biadjuntos de operadores lineares quase Dunford-Pettis

Um dos exemplo clássicos de ideais de operadores é a classe dos operadores lineares completamente contínuos, que também são chamados de operadores de Dunford-Pettis. Um operador $T: X \longrightarrow Y$ entre espaços de Banach pertence a essa classe se T transforma sequências fracamente nulas de X em sequência nulas em norma em Y. Esses operadores têm sido estudados desde o início da Análise Funcional e sua importância pode ser verificada nos principais livros sobre ideais de operadores, por exemplo, [36, 37, 38, 69]. A contrapartida dessa importante classe de operadores no contexto de reticulados de Banach são os operadores quase Dunford-Pettis, que são aqueles que transformam sequências disjuntas fracamente nulas do domínio em sequências nulas em norma no contradomínio. Os operadores lineares quase Dunford-Pettis atraíram a atenção de muitos especialistas, veja por exemplo [8, 20, 42, 48, 67, 70, 71, 72].

Neste capítulo investigaremos quando o adjunto T^* e/ou o biadjunto T^{**} de um operador linear T são quase Dunford-Pettis. Os resultados que provaremos generalizam todos os resultados conhecidos no assunto. Na Seção 4.1 provaremos que o biadjunto de qualquer operador linear contínuo tomando valores em um reticulado de Banach σ-Dedekind completo contendo uma cópia de ℓ_∞ é quase Dunford-Pettis. Na Seções 4.2 e 4.3 estabeleceremos condições, mais gerais que aquelas até então conhecidas, que garantem que T^* e/ou T^{**} são quase Dunford-Pettis sempre que T for positivo e quase Dunford-Pettis. Finalmente, na Seção 4.4 investigaremos quando o biadjunto de um operador ordem fracamente compacto é quase Dunford-Pettis.

4.1 Quando T^{**} é sempre quase Dunford-Pettis

Começamos mostrando quando o biadjunto de qualquer operador positivo, ou regular, ou contínuo, é quase Dunford-Pettis. Além do seu interesse próprio, o principal resultado que provaremos nesta seção será útil para dar exemplos de que o biadjunto de um operador

linear positivo quase Dunford-Pettis nem sempre é quase Dunford-Pettis.

Definição 4.1.1. Sejam E um reticulado de Banach e X um espaço de Banach. Um operador linear $T : E \longrightarrow X$ é *quase Dunford-Pettis* se $\|T(x_n)\| \longrightarrow 0$ para toda sequência disjunta e fracamente nula $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E; ou, equivalentemente, $\|T(x_n)\| \longrightarrow 0$ para toda sequência disjunta, positiva e fracamente nula $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E.

Para a equivalência mencionada na definição, veja [6, Theorem 2.2].

Definição 4.1.2. Um reticulado de Banach E tem a *propriedade positiva de Schur* (em notação, E tem PPS) se $\|x_n\| \longrightarrow 0$ para toda sequência positiva e fracamente nula $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E; ou, equivalentemente, $\|x_n\| \longrightarrow 0$ para toda sequência disjunta e fracamente nula $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E; ou, equivalentemente, $\|x_n\| \longrightarrow 0$ para toda sequência positiva, disjunta e fracamente nula $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E.

Para as equivalências mencionadas na definição, veja [78, p. 16].

Observe que nem sempre o biadjunto de um operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é quase Dunford-Pettis. Por exemplo, considere o operador identidade id_{c_0} em c_0. Seu biadjunto é $id_{c_0}^{**} = id_{\ell_\infty}$, que claramente não é quase Dunford-Pettis. Uma das caracterizações é a seguinte.

Teorema 4.1.3. *Sejam E, F reticulados de Banach tais que F é σ-Dedekind completo contendo uma cópia de ℓ_∞. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) *Para todo operador contínuo $T : E \longrightarrow F$, T^{**} é quase Dunford-Pettis.*
(b) *Para todo operador regular $T : E \longrightarrow F$, T^{**} é quase Dunford-Pettis.*
(c) *Para todo operador positivo $T : E \longrightarrow F$, T^{**} é quase Dunford-Pettis.*
(d) *E^{**} tem a propriedade positiva de Schur.*

Demonstração. As implicações (a)$\Longrightarrow$(b)$\Longrightarrow$(c) são obvias pois todo operador linear regular entre reticulados de Banach é contínuo (veja Teorema 1.4.2), e todo operador positivo é regular por definição.

(d)$\Longrightarrow$(a) Sejam $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(x_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta e positiva em E^{**} tal que $x_n^{**} \xrightarrow{\omega} 0$. Então $\|x_n^{**}\| \longrightarrow 0$ pois E^{**} tem PPS por hipótese. Da continuidade de T^{**} temos

$$0 \leq \|T^{**}(x_n^{**})\| \leq \|T^{**}\| \cdot \|x_n^{**}\| \longrightarrow 0,$$

donde segue que $\|T^{**}(x_n^{**})\| \longrightarrow 0$ e prova que T^{**} é quase Dunford-Pettis.

(c)$\Longrightarrow$(d) Suponha por absurdo, que E^{**} não tenha a propriedade positiva de Schur. Neste caso existe uma sequência positiva e disjunta $(z_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E^{**} tal que $z_n^{**} \xrightarrow{\omega} 0$ e $\|z_n^{**}\| \not\to 0$. Por [7, Proposition 2.1] podemos tomar tal sequência normalizada, isto é, $\|z_n^{**}\| = 1$ para todo n. Por [5, p. 182],

$$1 = \|z_n^{**}\| = \sup\{z_n^{**}(z^*) : 0 \leq z^* \in E^* \text{ e } \|z^*\| = 1\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, existem $\alpha > 0$ e uma sequência positiva $(z_n^*)_{n=1}^{\infty}$ em B_{E^*} tais que $z_n^{**}(z_n^*) \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como F contém uma cópia de ℓ_∞, a norma de F não é ordem contínua, pelo Teorema 1.3.11. Além disso, o Teorema 1.3.12 nos garante a existência de

um vetor $y \in F$ e de uma sequência disjunta $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em F tais que $0 \leq y_n \leq y$ e $\|y_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado um vetor positivo $z \in E$, para todo $m \in \mathbb{N}$, pelo Lema 1.1.6,

$$0 \leq s_m = \sum_{n=1}^{m} z_n^*(z) y_n \leq \sum_{n=1}^{m} \|z_n^*\| \cdot \|z\| y_n = \|z\| \cdot \sum_{n=1}^{m} y_n = \|z\| \cdot \bigvee_{n=1}^{m} y_n \leq \|z\| y.$$

Segue que $0 \leq s_m \uparrow \leq \|z\| y$. Como F é σ-Dedekind completo, existe $w \in F$ tal que $s_m \uparrow w$. Agora, [4, Theorem 1.14(iv)] garante que $w = o - \lim_{m \to \infty} s_m$, provando que a sequência $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ é ordem convergente. Está então bem definida a aplicação

$$T_0 : E^+ \longrightarrow F^+ \ , \ T_0(z) = o - \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} z_n^*(z) y_n.$$

Novamente por [4, Theorem 1.14(ii)] segue que a aplicação T_0 é aditiva. Pelo Teorema de Kantorovich existe um operador linear positivo $T : E \longrightarrow F$ que estende T_0. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $z \in E^+$, $T(z) = T_0(z) \geq z_n^*(z) y_n$. Para todo funcional positivo $y^* \in F^*$,

$$T^*(y^*)(z) = y^*(T(z)) \geq y^*(z_n^*(z) y_n) = y^*(y_n) z_n^*(z),$$

donde segue que $T^*(y^*) \geq y^*(y_n) z_n^*$. Além disso, para todo $x^{**} \in E^{**}$ positivo,

$$T^{**}(x^{**})(y^*) = x^{**}(T^*(y^*)) \geq x^{**}(y^*(y_n) z_n^*) = x^{**}(z_n^*) y^*(y_n) = x^{**}(z_n^*) J_F(y_n)(y^*).$$

Em particular, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$T^{**}(z_m^{**}) \geq z_m^{**}(z_m^*) J_F(y_m) \geq \alpha J_F(y_m) \geq 0.$$

Usando que a norma de F^{**} é reticulada e o mergulho canônico é uma isometria, obtemos

$$\|T^{**}(z_m^{**})\| \geq \alpha \|J_F(y_m)\| = \alpha \|y_m\| = \alpha > 0$$

para todo m. Recordando que a sequência $(z_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ é positiva disjunta e fracamente nula, concluímos que o biadjunto T^{**} de T não é quase Dunford-Pettis. □

Como reticulados de Banach duais são Dedekind completos, o Teorema 4.1.3 se aplica para todo reticulado de Banach dual F contendo uma cópia de ℓ_∞.

4.2 Resultados conhecidos versus resultados novos

Nesta seção enunciaremos dois teoremas, a saber, Teorema 4.2.6 e Teorema 4.2.11 – que serão demonstrados na seção seguinte – e mostraremos que esses teoremas generalizam os resultados conhecidos no assunto. Para comodidade do leitor, esses resultados conhecidos também serão enunciados nesta seção.

Para um operador positivo T entre reticulados de Banach, estamos interessados nas relações entre T, T^* e T^{**} serem quase Dunford-Pettis. Observe que:

- T^* ser quase Dunford-Pettis não implica em geral que T seja quase Dunford-Pettis. Para ver isso, basta tomar a identidade id_{c_0} em c_0.
- Se T^{**} é quase Dunford-Pettis, então o operador $T : E \longrightarrow F$ é quase Dunford-Pettis. De fato, seja uma sequência disjunta $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Usando que o mergulho canônico J_E é um homomorfismo de Riesz e ω-ω-contínuo, obtemos que a sequência $(J_E(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é disjunta e $J_E(x_n) \xrightarrow{\omega} 0$ em E^{**}. Uma vez que T^{**} é quase Dunford-Pettis, estende T e J_F é uma imersão isométrica, temos

$$\|T(x_n)\| = \|J_F(T(x_n))\| = \|T^{**}(J_E(x_n))\| \longrightarrow 0.$$

  Isso mostra que T é quase Dunford-Pettis.

Por enquanto vamos nos concentrar nas questões enunciadas a seguir. Dado um operador linear positivo $T : E \longrightarrow F$ entre reticulados de Banach, é verdade que:

(Q1) Se T é quase Dunford-Pettis, então seu adjunto $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ também o é?

(Q2) Se T é quase Dunford-Pettis, então seu biadjunto $T^{**} : E^{**} \longrightarrow F^{**}$ também o é?

Vejamos primeiramente que ambas as questões têm resposta negativa em geral.

Exemplo 4.2.1. Para a questão (Q1), id_{ℓ_1} é um operador positivo e quase Dunford-Pettis pois ℓ_1 tem PPS. Mas $\mathrm{id}_{\ell_1}^* = \mathrm{id}_{\ell_\infty}$ não é quase Dunford-Pettis pois ℓ_∞ não tem PPS (veja [78, p. 82]).

Quanto à questão (Q2), exibiremos dois operadores positivos quase Dunford-Pettis, cujos biadjuntos não são quase Dunford-Pettis. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam os reticulados de Banach $\ell_\infty^n = \mathbb{R}^n$ com a norma do máximo e $\ell_1^n = \mathbb{R}^n$ com a norma da soma, ambos com a ordem coordenada a coordenada. Considere os reticulados de Banach

$$\left(\oplus_n \ell_\infty^n\right)_1 := \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \,:\, x_n \in \ell_\infty^n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \|x\| := \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \right\},$$

$$\left(\oplus_n \ell_1^n\right)_\infty := \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \,:\, x_n \in \ell_1^n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \|x\| := \sup_n \|x_n\| < \infty \right\},$$

Por [16, Example 2.8] sabemos que o reticulado de Banach $\left(\oplus_n \ell_\infty^n\right)_1$ tem PPS e que seu bidual $\left(\oplus_n \ell_\infty^n\right)_1^{**}$ não tem PPS.

(a) Seja E um reticulado de Banach com PPS tal que E^{**} não tem PPS, por exemplo $E = \left(\oplus_{n\in} \ell_\infty^n\right)_1$. Considere o operador identidade $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$. Então id_E é quase Dunford-Pettis mas $\mathrm{id}_E^{**} = \mathrm{id}_{E^{**}}$ não é quase Dunford-Pettis.

(b) Por um lado, por [16, Example 2.8] sabemos que $\left(\oplus_n \ell_1^n\right)_\infty$ contém um subreticulado isomorfo a ℓ_1. Logo, por [62, Theorem 2.4.14], a norma de $\left(\oplus_n \ell_1^n\right)_\infty^*$ não é ordem contínua. Assim, o Teorema 4.1.3 nos garante a existência de um operador $T : \left(\oplus_{n\in} \ell_\infty^n\right)_1 \longrightarrow \left(\oplus_n \ell_1^n\right)_\infty^*$

linear e positivo tal que T^{**} não é quase Dunford-Pettis. Por outro lado, T é quase Dunford-Pettis pois $\left(\oplus_{n\in}\ell_\infty^n\right)_1$ tem PPS.

Em vista do Exemplo 4.2.1, procuraremos identificar hipóteses – tanto nos reticulados de Banach E, F como no operador positivo $T \in L(E;F)$, – de maneira a obter respostas afirmativas para as questões (Q1) e (Q2). Resumimos a seguir o que é conhecido sobre essas questões.

Teorema 4.2.2. (Aqzzouz, Elbour e Wickstead [7, Theorem 5.1]) *As seguintes afirmações são equivalentes para os reticulados de Banach E e F.*

(a) *Se $T: E \longrightarrow F$ é um operador linear positivo e quase Dunford-Pettis, então seu adjunto T^* também é quase Dunford-Pettis.*

(b) *Pelo menos uma das seguintes afirmações é válida:*

(b1) *E^* tem norma ordem contínua.*

(b2) *F^* tem a propriedade positiva de Schur.*

Sabe-se também que às vezes uma propriedade mais forte do que ser quase Dunford-Pettis vale para o adjunto de um operador quase Dunford-Pettis positivo. Algumas definições são necessárias para o enunciado preciso. Começamos relembrando que, de acordo com J. Diestel e J. Bourgain [23], um operador linear entre espaços de Banach é *limited* se seu adjunto transforma sequências fraco estrela nulas em sequências nulas em norma. Tendo isso em mente, o conceito definido a seguir é bem natural.

Definição 4.2.3. Sejam E um reticulados de Banach e X um espaço de Banach. Um operador linear $T: X \longrightarrow E$ é *positivamente limited*, em notação T é *PL*, se $\|T^*(x_n^*)\| \longrightarrow 0$ para toda sequência positiva e fraca estrela nula $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ em E^*.

É claro que se T é PL então T^* é quase Dunford-Pettis. Mas a recíproca nem sempre é verdade. O operador identidade $\mathrm{id}_{c_0}^*$ em c_0^*, por um lado, é quase Dunford-Pettis pois $c_0^* = \ell_1$ tem PPS. Por outro lado, id_{c_0} não é PL pois a sequência dos vetores canônicos $(e_n)_{n=1}^\infty \subseteq \ell_1$ é positiva, $e_n \xrightarrow{\omega^*} 0$ mas $\|e_n\| = 1$ para todo n.

As propriedades a seguir têm sido bastante estudadas na teoria dos reticulados de Banach.

Definição 4.2.4. Seja E um reticulado de Banach.
(a) E tem a *propriedade positiva de Schur dual*, em notação E tem *PPSD*, se $\|x_n^*\| \longrightarrow 0$ para toda sequência positiva $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ em E^* tal que $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$.
(b) E tem a *propriedade (d)* se, para cada sequência disjunta $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ em E^* tal que $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ tem-se que $|x_n^*| \xrightarrow{\omega^*} 0$.

Para maiores detalhes sobre a PPSD veja [7, 79] e sobre a propriedade (d) veja [32, 44, 60].

O seguinte resultado é uma combinação de [44, Theorem 3] e [43, Theorem 4.3].

Teorema 4.2.5. *Sejam E, F reticulados de Banach tal que F tem a propriedade (d). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Se $T \in L(E;F)$ é positivo e quase Dunford-Pettis, então T é positivamente limited, e portanto T^* é quase Dunford-Pettis.*

(b) *Pelo menos uma das seguintes afirmações é válida:*

(b1) *E^* tem norma ordem contínua.*

(b2) *F tem a propriedade positiva de Schur dual.*

O resultado [45, Theorem 2.7] também está relacionado com a questão (Q1), mas se utiliza de hipóteses com as quais não trataremos, de modo que nossos resultados não são comparáveis a esse. Nosso resultado para a questão (Q1) é o seguinte:

Teorema 4.2.6. *Sejam E, F reticulados de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Se $T \in L(E;F)$ é positivo e quase Dunford-Pettis, então T é positivamente limited, e portanto T^* é quase Dunford-Pettis.*

(b) *Pelo menos uma das seguintes afirmações é válida:*

(b1) *E^* tem norma ordem contínua.*

(b2) *F tem a propriedade positiva de Schur dual.*

Vejamos que esse teorema generaliza os dois teoremas conhecidos sobre o assunto.

Observação 4.2.7. (1) O Teorema 4.2.6 melhora o Teorema 4.2.5, pois obtemos a mesma conclusão sem a hipótese de que F tenha a propriedade (d).
(2) O Teorema 4.2.6, melhora a implicação (b1)$\Longrightarrow$(a) do Teorema 4.2.2, pois obtemos uma conclusão mais forte com a mesma hipótese.

Agora nos voltamos para o que é conhecido sobre a Questão (Q2). Até onde conhecemos, todo o que se sabe sobre isso é o que se obtém pela iteração dos resultados conhecidos sobre a Questão (Q1), isto é, os Teoremas 4.2.2 e 4.2.5. Aplicando o Teorema 4.2.2 duas vezes seguidas, primeiro para o operador e em seguida para o seu adjunto, obtemos o seguinte:

• É verdade que T^{**} é quase Dunford-Pettis sempre que $T \in L(E;F)$ é positivo e quase Dunford-Pettis, se pelo menos uma das seguintes afirmações é válida:

(i) E^* e F^{**} têm norma ordem contínua.

(ii) E^* tem norma ordem contínua e E^{**} tem PPS.

(iii) F^* tem PPS e F^{**} tem norma ordem contínua.

(iv) F^* e E^{**} têm PPS.

Note que o resultado é trivial com a afirmação (iv) pois E^{**} tem PPS. Vejamos que não existem espaços com as propriedades (ii) e (iii). Se E^* tem norma ordem contínua então E^* não tem copia de ℓ_∞ (ver Teorema 1.3.11), daí, E não tem cópia de ℓ_1 e portanto E não tem PPS, logo E^{**} não tem PPS. Agora, se F^* tem PPS então F^* tem um subreticulado isomorfo a

ℓ_1 e pelo Teorema 1.3.13, segue que F^{**} não tem norma ordem contínua. Assim, focaremos nossa atenção na afirmação (i), enunciada explicitamente a seguir.

Corolário 4.2.8. *Se E e F são reticulados de Banach tais que E^* e F^{**} têm normas ordem contínuas, então T^{**} é quase Dunford-Pettis sempre que $T \in L(E;F)$ é positivo e quase Dunford-Pettis.*

Para enunciar o nosso resultado sobre a questão (Q2) que generaliza o corolário acima precisamos da seguinte definição.

Definição 4.2.9. Sejam X um espaço de Banach e F um reticulado de Banach. Um operador $T \in L(X;F)$ é *quase limited*, em notação T é *QL*, se $\|T^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0$ para toda sequência disjunta $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ em F^* tal que $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$.

Como todo reticulado de Banach σ-Dedekind completo tem a propriedade (d) (veja [44]) e o adjunto de qualquer operador $T \in \mathcal{L}_r(E,F)$ está definido entre reticulados de Banach Dedekind-completos, por [44, Theorem 3] segue que T^* é PL se, e somente se, T^* é QL.

Aplicando o Teorema 4.2.5 duas vezes seguidas, primeiro para o operador e em seguida para o seu adjunto, obtemos o seguinte:

• Sejam E e F reticulados de Banach tais que F tem a propriedade (d). Se $T \in L(E;F)$ é positivo e quase Dunford-Pettis, então T^* é PL, isto é, T^* é QL, e portanto T^{**} é quase Dunford-Pettis, se pelo menos uma das seguintes afirmações é válida:

(i) E^* e F^{**} têm normas ordem contínuas.

(ii) E^* tem norma ordem contínua e E^* tem PPSD.

(iii) F tem PPSD e F^{**} tem norma ordem contínua.

(iv) F e E^* têm PPSD.

Note que o resultado é trivial com a afirmação (iv) pois E^* tem PPSD. A seguir vamos ver que não existem espaços com as propriedades (ii) e (iii). De fato, suponha que E^* tenha norma ordem contínua. Então pelo que vimos anteriormente, neste caso E^{**} não tem PPS, logo E^* não tem PPSD. Mais ainda, se F tem PPSD então F^* tem PPS, e pelo feito acima podemos concluir que F^{**} tem norma ordem contínua. Assim, restringimos nossa atenção à iteração do Teorema 4.2.5 relativa à afirmação (i), enunciada a seguir.

Corolário 4.2.10. *Sejam E e F reticulados de Banach tais que F tem a propriedade (d) e E^* e F^{**} têm normas ordem contínuas. Se $T \in L(E;F)$ é positivo e quase Dunford-Pettis, então T^* é positivamente limited, isto é, T^* é quase limited, e portanto T^{**} quase Dunford-Pettis.*

É importante observar que os Corolários 4.2.8 e 4.2.10 não se encontram enunciados na literatura. Estamos considerando-os como resultados conhecidos por serem meras combinações de resultados conhecidos.

Nosso resultado para a questão (Q2) é o seguinte:

Teorema 4.2.11. *Sejam E e F reticulados de Banach tais que as normas de E^* e de F são ordem contínuas. Se $T \in L(E;F)$ é positivo e quase Dunford-Pettis, então T^* é positivamente limited, isto é, T^* é quase limited, e portanto T^{**} quase Dunford-Pettis.*

Vejamos que esse teorema generaliza tudo o que é conhecido sobre a questão (Q2).

Observação 4.2.12. (1) No Teorema 4.2.11 obtemos uma conclusão mais forte que no Corolário 4.2.8 com hipótese mais fraca.
(2) No Teorema 4.2.11 obtemos a mesma conclusão que no Corolário 4.2.10 com hipótese mais fraca e sem a hipótese de que F tenha a propriedade (d).
(3) Ao aplicar primeiramente o Teorema 4.2.6 e em seguida o Teorema 4.2.2, obtemos um resultado com a hipótese de que F tenha a propriedade (d); por isso o Teorema 4.2.11 melhora esse resultado.
(4) Ao aplicar primeiramente o Teorema 4.2.2 e em seguida o Teorema 4.2.6, obtém-se uma versão do Corolário 4.2.10 sem a suposição da propriedade (d). Acabamos de ver em (3) que o Teorema 4.2.11 melhora esse resultado.

4.3 Demonstrações dos Teoremas 4.2.6 e 4.2.11

Para demonstrar os teoremas enunciados na seção anterior, a saber, Teorema 4.2.6 e Teorema 4.2.11, precisamos de dois lemas preparatórios. O primeiro lema foi inspirado por um argumento de [35, Lemma 2.4] que foi mais tarde refinado em [40].

Lema 4.3.1. *Sejam E um reticulado de Banach e $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva em E^* tal que $\|x_n^*\| \geq M$ para algum $M > 0$ e $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$. Então existem uma subsequência crescente $(n_m)_{m=1}^\infty$ de $\mathbb{N}$ e uma sequência disjunta limitada $(x_m)_{m=1}^\infty$ em E^+ tais que $x_{n_m}^*(x_m) \geq M(4^{-1} - 2^{-m})$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Por hipótese $\|x_n^*\| \geq M > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $z_n^* = \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|}$ temos $z_n^* \geq 0$ e, por [5, p. 182],

$$1 = \|z_n^*\| = \sup\{z_n^*(z) \,:\, z \in E^+ \text{ e } \|z\| = 1\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Existe então uma sequência positiva $(z_n)_{n=1}^\infty$ em E tal que $\|z_n\| = 1$ e $z_n^*(z_n) \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ segue que $z_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$. Tomando $n_1 = 1$ temos $z_n^*(z_{n_1}) \longrightarrow 0$, e portanto existe $n_2 > n_1$ tal que $z_{n_2}^*(z_{n_1}) < \frac{1}{2^{2\times 2+2}}$. Também temos $z_n^*(z_{n_1} + z_{n_2}) \longrightarrow 0$, logo existe $n_3 > n_2$ tal que $z_{n_3}^*(z_{n_1} + z_{n_2}) < \frac{1}{2^{2\times 3+2}}$. Prosseguindo por indução construímos uma subsequência crescente $(n_m)_{m=1}^\infty$ de $\mathbb{N}$ tal que

$$z_{n_m}^*\left(\sum_{k=1}^{m-1} z_{n_k}\right) \leq \frac{1}{2^{2m+2}} \text{ para todo } m \geq 2.$$

Defina

$$x_m = \left(z_{n_m} - 4^m \cdot \sum_{k=1}^{m-1} z_{n_k} - 2^{-m} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_{n_k}\right)^+ \text{ para todo } m \geq 2.$$

Tomando $x_1 = 0$, por [72, Lemma 2.6] ou pela demostração de [35, Lemma 2.4] sabemos

que a sequência $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ é disjunta em E^+. Note que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_m \leq z_{n_m}$, e portanto $\|x_m\| \leq \|z_{n_m}\| = 1$ uma vez que a norma de E é reticulada. Além disso, para todo $m \geq 2$,

$$\begin{aligned}
z_{n_m}^*(x_m) &= z_{n_m}^*\left(z_{n_m} - 4^m \cdot \sum_{k=1}^{m-1} z_{n_k} - 2^{-m} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_{n_k}\right)^+ \\
&\geq z_{n_m}^*\left(z_{n_m} - 4^m \cdot \sum_{k=1}^{m-1} z_{n_k} - 2^{-m} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_{n_k}\right) \\
&= z_{n_m}^*(z_{n_m}) - 4^m \cdot z_{n_m}^*\left(\sum_{k=1}^{m-1} z_{n_k}\right) - 2^{-m} \cdot z_{n_m}^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_{n_k}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} - \frac{4^m}{2^{2m+2}} - \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2^m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^m}.
\end{aligned}$$

Segue que $z_{n_m}^*(x_m) \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2^m}$, isto é,

$$x_{n_m}^*(x_m) \geq (4^{-1} - 2^{-m})\|x_{n_m}^*\| \geq M(4^{-1} - 2^{-m})$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Lema 4.3.2. *Sejam E e F reticulados de Banach e $T \in L(E;F)$ um operador positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) *T é positivamente limited.*
(b) *$T^*(y_n^*)(x_n) \longrightarrow 0$ para toda sequência positiva $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ em F^* tal que $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ e para toda sequência disjunta limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E^+.*

Demonstração. Suponha que T seja PL. Tomando $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ como em (b), digamos $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 \leq T^*(y_n^*)(x_n) \leq \|T^*(y_n^*)\|\|x_n\| \leq M\|T^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0.$$

Disso segue que (a) implica (b).

Para provar a implicação contrária, suponha (b) e seja $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em F^* tal que $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$. Suponha, por contradição, que $\|T^*(y_n^*)\| \not\to 0$. Neste caso existem uma subsequência $(y_{n_m}^*)_{m=1}^{\infty}$ da sequência $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ e $\alpha > 0$ tais que $\|T^*(y_{n_m}^*)\| \geq \alpha$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como T^* é positivo e $y_{n_m}^* \xrightarrow{\omega^*} 0$, a sequência $(T^*(y_{n_m}^*))_{m=1}^{\infty}$ é positiva e $T^*(y_{n_m}^*) \xrightarrow{\omega^*} 0$ em E^*. Pelo Lema 4.3.1 existem uma subsequência $(n_{m_j})_{j=1}^{\infty}$ em $\mathbb{N}$ e uma sequência disjunta limitada $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ em E^+ tais $T^*(y_{n_{m_j}}^*)(z_j) \geq \alpha(4^{-1} - 2^{-j})$ que para todo $j \in \mathbb{N}$. Por hipótese, $T^*(y_{n_{m_j}}^*)(z_j) \longrightarrow 0$, donde segue que $\alpha 4^{-1} \leq 0$, e portanto $\alpha \leq 0$. Essa contradição garante que $\|T^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0$, o que prova que T é PL. □

Demonstração do Teorema 4.2.6. (b)$\Longrightarrow$(a) Sejam $T : E \longrightarrow F$ um operador linear positivo e quase Dunford-Pettis e $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em F^* tal que $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$.

Suponha primeiramente que a norma de E^* seja ordem contínua e tome $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta limitada em E^+. Pelo Teorema 1.3.13 segue que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Como T é quase Dunford-Pettis, $\|T(x_n)\| \longrightarrow 0$. Tome $M > 0$ tal que $\|y_n^*\| \leq M$ para todo n. De

$$0 \leq T^*(y_n^*)(x_n) = y_n^*(T(x_n)) \leq \|y_n^*\| \cdot \|T(x_n)\| \leq M\|T(x_n)\| \longrightarrow 0,$$

concluímos que $T^*(y_n^*)(x_n) \longrightarrow 0$. Do Lema 4.3.2 segue que T é PL.

Suponha agora que F tenha PPSD. Neste caso temos $\|y_n^*\| \longrightarrow 0$, o que implica que $\|T^*(y_n^*)\| \leq \|T^*\|\|y_n^*\| \longrightarrow 0$. Isso prova que T é PL.

(a)$\Longrightarrow$(b) Suponha por absurdo que a norma de E^* não seja ordem contínua e F não tenha PPSD. Por E^* não ter norma ordem contínua, pelo Teorema 1.3.12 existem uma sequência disjunta positiva $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ em E^* e um funcional $x^* \in E^*$ tais que $\|x_n^*\| = 1$ e $0 \leq x_n^* \leq x^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe então uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E^+ tal que $\|x_n\| = 1$ e $x_n^*(x_n) \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos que a aplicação

$$S: \ E \longrightarrow \ell_1 \ , \ S(x) = (x_n^*(x))_{n=1}^{\infty},$$

está bem definida. De fato, para $x \in E$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n^*(x)| \leq \sum_{n=1}^{m} x_n^*(|x|) = \left(\bigvee_{n=1}^{m} x_n^*\right)(|x|) \leq x^*(|x|).$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ comprovamos que S está bem definida. É claro que S é um operador linear positivo, pois cada funcional x_n^* é positivo. Por outro lado, por F não ter PPSD existe uma sequência positiva $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ em F^* tal que $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ e $\|y_n^*\| = 1$ para todo n. Logo existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em E^+ tal que $\|y_n\| = 1$ e $y_n^*(y_n) \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A aplicação

$$R: \ \ell_1 \longrightarrow F \ , \ R((z_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n,$$

está bem definida pois a série é absolutamente convergente em F:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \cdot \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty.$$

É claro que R é um operador linear positivo. Então a composição

$$T := R \circ S: \ E \longrightarrow F \ , \ T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n,$$

também é um operador linear positivo. Como R e S são quase Dunford-Pettis, pois ℓ_1 tem PPS, segue que T é quase Dunford-Pettis. Finalizaremos a demonstração provando que T não é PL. Para isso, note que $T(x) \geq x_n^*(x) y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E^+$. Logo, para todo funcional positivo $y^* \in F^*$,

$$T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)) \geq y^*(x_n^*(x) y_n) = y^*(y_n) x_n^*(x).$$

Em particular, $T^*(y_k^*)(x_k) \geq y_k^*(y_k)x_k^*(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\|T^*(y_k^*)\| \geq T^*(y_k^*)(x_k) \geq y_k^*(y_k)x_k^*(x_k) \geq \frac{1}{4},$$

o que nos permite concluir que T não é PL. □

Demonstração do Teorema 4.2.11. Por hipótese, $T : E \longrightarrow F$ e positivo e quase Dunford-Pettis e E^* e F têm normas ordem contínuas. Seja $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência disjunta positiva limitada em F^*. Pelo Teorema 1.3.12 temos $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ por F ter norma ordem contínua. Pelo Teorema 4.2.6 segue que $\|T^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0$. Seja $(x_n^{**})_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva em E^{**} tal que $x_n^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$. Tomando $M > 0$ tal que $\|x_n^{**}\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 \leq T^{**}(x_n^{**})(y_n^*) = x_n^{**}(T^*(y_n^*)) \leq \|x_n^{**}\| \cdot \|T^*(y_n^*)\| \leq M\|T^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0.$$

Daí, $T^{**}(x_n^{**})(y_n^*) \longrightarrow 0$. O Lema 4.3.2 nos permite concluir que T^* é positivamente limited, e portanto T^* é quase limited. □

4.4 O papel da compacidade fraca

O objetivo desta seção é mostrar como as propriedades de compacidade fraca de um operador T impactam em T^* ou T^{**} serem quase Dunford-Pettis, mesmo quando T não é quase Dunford-Pettis.

Supomos que o leitor esteja familiarizado com a teoria dos operadores fracamente compactos. Relembramos que um operador linear T de um reticulado de Banach E a valores em um espaço de Banach F é *ordem fracamente compacto* se $T([0, x])$ é relativamente fracamente compacto em F para todo vetor positivo $x \in E$. É claro que operadores fracamente compactos são ordem fracamente compactos, mas o operador identidade em $L_1[0, 1]$ é um operador ordem fracamente compacto que não é fracamente compacto [5, p. 319]. Maiores detalhes sobre a teoria de operadores ordem fracamente compactos podem ser encontrados em, por exemplo, [62, Seção 3.4, p. 191] ou [5, p. 318].

Vejamos primeiramente que operadores positivos ordem fracamente compactos nem sempre são PL. Para isso observe, por um lado, que o operador identidade id_{ℓ_2} em ℓ_2 é fracamente compacto por ℓ_2 ser reflexivo, e portanto é também ordem fracamente compacto. Por outro lado, considerando o isomorfismo canônico $\psi : \ell_2 \longrightarrow \ell_2^*$, temos que $(\psi(e_n))_{n=1}^\infty$ é uma sequência positiva e $\psi(e_n) \xrightarrow{\omega^*} 0$ em ℓ_2^*, mas

$$\|\mathrm{id}_2^*(\psi(e_n))\| = \|\psi(e_n)\| = \|e_n\| = 1$$

para todo n. Isso prova que id_{ℓ_2} não é PL.

O primeiro resultado desta seção identifica condições sob as quais operadores regulares ordem fracamente compactos são PL, e portanto têm adjuntos quase Dunford-Pettis.

Teorema 4.4.1. *Seja E um reticulado de Banach no qual toda sequência disjunta, positiva e limitada é ordem limitada. Para todo reticulado de Banach F, se $T \in \mathcal{L}_r(E; F)$ é ordem*

fracamente compacto, então T é positivamente limited, e portanto T^* é quase Dunford-Pettis.

Demonstração. Como T é regular, existem operadores positivos $T_1, T_2 \in L(E,F)$ tais que $T = T_1 - T_2$. É imediato que $T^* = T_1^* - T_2^*$. Seja $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva em F^* tal que $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $T_i^*(y_n^*)$ é positivo para $i = 1, 2$. Consequentemente, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} ||T^*(y_n^*)|(x)| &= ||T_1^*(y_n^*) - T_2^*(y_n^*)|(x)| \leq |T_1^*(y_n^*) - T_2^*(y_n^*)|(|x|) \\ &\leq (T_1^*(y_n^*) + T_2^*(y_n^*))(|x|) = T_1^*(y_n^*)(|x|) + T_2^*(y_n^*)(|x|) \\ &= y_n^*(T_1(|x|)) + y_n^*(T_2(|x|)) = y_n^*((T_1 + T_2)(|x|)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Isso prova que $|T^*(y_n^*)| \xrightarrow{\omega^*} 0$ em E^*. Agora seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência disjunta e limitada em E^+. Por hipótese existe $z \in E$ tal que $0 \leq x_n \leq z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ é ordem limitada. Como T é ordem fracamente compacto, por [5, Theorem 5.57] segue que $\|T(x_n)\| \longrightarrow 0$. Tome $N > 0$ de maneira que $\|y_n^*\| \leq N$ para todo n. De

$$|T^*(y_n^*)(x_n)| = |y_n^*(T(x_n))| \leq \|y_n^*\| \cdot \|T(x_n)\| \leq N\|T(x_n)\| \longrightarrow 0,$$

segue que $T^*(y_n^*)(x_n) \longrightarrow 0$. Por [40, Corollary 2.7] obtemos $\|T^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0$, e isso é suficiente para concluir que T é PL. □

Operadores fracamente compactos, L-fracamente compactos, M-fracamente compactos (veja [5, Seções 5.2 e 5.3]) e operadores ordem L-fracamente compactos (veja [55]) são todos ordem fracamente compactos (veja [5, Theorem 5.61 e p. 319] e [55]). Então o Teorema 4.4.1 se aplica para operadores regulares fracamente compactos, L-fracamente compactos, M-fracamente compactos e ordem L-fracamente compactos.

Seja K um espaço Hausdorff compacto. É claro que toda sequência limitada em $C(K)$ é ordem limitada. Como operadores definidos em $C(K)$ são fracamente compactos se, e somente se, são ordem fracamente compactos (veja [62, p. 192]), a seguinte consequência do teorema anterior segue.

Corolário 4.4.2. *Sejam F um reticulado de Banach e K um espaço de Hausdorff compacto. Se $T \in \mathcal{L}_r(C(K); F)$ é fracamente compacto, então T é positivamente limited, portanto T^* é quase Dunford-Pettis.*

Investigaremos agora quando o adjunto de um operador ordem fracamente compacto é quase limited, e portanto o biadjunto é quase Dunford-Pettis. Por um lado, já vimos que a identidade id_{ℓ_2} em ℓ_2 é ordem fracamente compacto mas não é quase limited. Por outro lado:

Teorema 4.4.3. *Seja E um reticulado de Banach na qual toda sequência disjunta, positiva e limitada é ordem limitada. Para todo espaço de Banach X, se $T \in \mathcal{L}(E; X)$ é ordem fracamente compacto, então T^* é quase limited, e portanto T^{**} é quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}(E; X)$ um operador ordem fracamente compacto. Por [5, Theorem 5.58] existem um reticulado de Banach com norma ordem contínua F, um homomorfismo de Riesz $R : E \longrightarrow F$ e um operador linear contínuo $S : F \longrightarrow X$ tais que

$T = S \circ R$. Vejamos que R é PL. Para isso sejam $(z_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva em E^* tal que $z_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência disjunta e limitada em E^+. Por hipótese existe $x \in E$ tal que $0 \leq x_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como R é positivo, temos $0 \leq R(x_n) \leq R(x)$ para todo n, e assim,

$$0 \leq R^*(z_n^*)(x_n) = z_n^*(R(x_n)) \leq z_n^*(R(x)) \longrightarrow 0.$$

Segue que $R^*(z_n^*)(x_n) \longrightarrow 0$, e daí o Lema 4.3.2 nos garante que R é PL. Sejam $(x_n^{**})_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva em E^{**} tal que $x_n^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$ e $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência disjunta, limitada e positiva em F^*. Usando que F tem norma ordem contínua temos $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ pelo Teorema 1.3.12. Concluímos que $\|R^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0$ pois R é PL. Tome $N > 0$ tal que $\|x_n^{**}\| \leq N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De

$$0 \leq R^{**}(x_n^{**})(y_n^*) = x_n^{**}(R^*(y_n^*)) \leq \|x_n^{**}\| \cdot \|R^*(y_n^*)\| \leq N\|R^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0,$$

segue que $R^{**}(x_n^{**})(y_n^*) \longrightarrow 0$. Pelo Lema 4.3.2 temos $\|R^{**}(x_n^{**})\| \longrightarrow 0$, e portanto

$$\|T^{**}(x_n^{**})\| = \|(S \circ R)^{**}(x_n^{**})\| = \|S^{**}(R^{**}(x_n^{**}))\| \leq \|S^{**}\| \cdot \|R^{**}(x_n^{**})\| \longrightarrow 0.$$

Segue que $\|T^{**}(x_n^{**})\| \longrightarrow 0$, o que termina a demonstração de que T^* é quase limited. □

Novamente, o Teorema 4.4.3 se aplica para operadores fracamente compactos, L-fracamente compactos, M-fracamente compactos e operadores contínuos ordem L-fracamente compactos. Além disso, também como antes, temos:

Corolário 4.4.4. *Sejam X um espaço de Banach e K um espaço Hausdorff compacto. Se $T \in \mathcal{L}(C(K); X)$ é fracamente compacto, então T^* é quase limited, portanto T^{**} é quase Dunford-Pettis.*

Terminamos este capítulo com um resultado que se refere a biadjuntos de operadores fracamente compactos definidos em reticulados de Banach E que eventualmente não satisfaçam a hipótese do Teorema 4.4.3.

Proposição 4.4.5. *Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear fracamente compacto entre reticulados de Banach e suponha que pelo menos uma das seguintes afirmações seja válida:*

(a) *T regular e F tem a propriedade positiva de Schur.*

(b) *T positivo, F tem norma ordem contínua e E^* tem a propriedade positiva de Schur.*
Então T^* é quase limited, e portanto T^{**} é quase Dunford-Pettis.

Demonstração. Seja $(x_n^{**})_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva em E^{**} tal que $x_n^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$. Por hipótese, T é fracamente compacto, logo $T^{**}(E^{**}) \subseteq J_F(F)$, Teorema 3.3.7. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $y_n \in F$ tal que $T^{**}(x_n^{**}) = J_F(y_n)$.

Suponhamos primeiramente que (a) ocorra. Neste caso existem operadores positivos $T_1, T_2 \in L(E, F)$ tais que $T = T_1 - T_2$, pois T é regular. Como mencionado antes, $T^{**} = T_1^{**} - T_2^{**}$. Como J_F é um homomorfismo de Riesz, para todo $y^* \in F^*$,

$$\begin{aligned} |y^*(|y_n|)| &\leq |y^*|(|y_n|) = J_F(|y_n|)(|y^*|) = |J_F(y_n)|(y^*) \\ &= |T^{**}(x_n^{**})|(|y^*|) \leq |T^{**}|(x_n^{**})(|y^*|) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |T_1^{**} - T_2^{**}|(x_n^{**})(|y^*|) \leq (T_1^{**} + T_2^{**})(x_n^{**})(|y^*|) \\
&= T_1^{**}(x_n^{**})(|y^*|) + T_2^{**}(x_n^{**})(|y^*|) = x_n^{**}((T_1^* + T_2^*)(|y^*|)) \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

donde segue que $|y_n| \xrightarrow{\omega} 0$. Como F tem a propriedade positiva de Schur, $\|y_n\| = \||y_n|\| \longrightarrow 0$, e assim

$$\|T^{**}(x_n^{**})\| = \|J_F(y_n)\| = \|y_n\| \longrightarrow 0.$$

Isso é suficiente para concluir que T^* é quase limited.

Suponhamos agora que (b) ocorra e seja $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta, positiva e limitada em F^*. Como a norma de F é ordem contínua, temos $y_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ pelo Teorema 1.3.12. Por T ser fracamente compacto, T^* é ω^*-ω-contínuo, Teorema 3.3.7. Por isso, $T^*(y_n^*) \xrightarrow{\omega} 0$ em E^*. Como $T^*(y_n^*) \geq 0$ para todo n (pois T é positivo) e, por hipótese, E^* tem a propriedade positiva de Schur, temos $\|T^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0$. Mais ainda, de

$$
\begin{aligned}
|y_n^*(y_n)| &\leq y_n^*(|y_n|) = J_F(|y_n|)(y_n^*) = |J_F(y_n)|(y_n^*) = |T^{**}(x_n^{**})|(y_n^*) \\
&= T^{**}(x_n^{**})(y_n^*) = x_n^{**}(T^*(y_n^*)) \leq \|x_n^{**}\| \cdot \|T^*(y_n^*)\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

obtemos $y_n^*(y_n) \longrightarrow 0$. Por [40, Corollary 2.6] segue que $\|y_n\| \longrightarrow 0$, e daí

$$\|T^{**}(x_n^{**})\| = \|J_F(y_n)\| = \|y_n\| \longrightarrow 0,$$

provando que T^* é quase limited. □

Capítulo 5

Extensões de Aron-Berner de operadores multilineares quase Dunford-Pettis

Um operador multilinear entre espaços de Banach é fracamente sequencialmente contínuo se transforma sequências fracamente convergentes nos espaços do domínio em sequências convergentes em norma no contradomínio. Essa classe tem sido extensamente estudada na literatura há muitos anos (veja, por exemplo, [39] e as referências lá listadas). A questão que pergunta se as extensões de Aron-Berner de operadores fracamente sequencialmente contínuos são fracamente sequencialmente contínuas também já foi estudada, veja [33, 81].

Inspirados pelo conceito de operador linear quase Dunford-Pettis, explorado no capítulo anterior, estudaremos neste capítulo os operadores multilineares que são separadamente quase Dunford-Pettis (Seção 5.1) e que são quase Dunford-Pettis (Seção 5.2), bem como suas extensões de Aron-Berner.

Definição 5.0.1. Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach e X um espaço de Banach. Um operador m-linear $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow X$ é:

• *Separadamente quase Dunford-Pettis* se para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ e todos $x_i \in E_i, i = 1, \dots, m, i \neq j$, o operador linear

$$A(x_1, \dots, x_{j-1}, \bullet, x_{j+1}, \dots, x_m): E_j \longrightarrow X,$$

$$A(x_1, \dots, x_{j-1}, \bullet, x_{j+1}, \dots, x_m)(x_j) = A(x_1, \dots, x_m),$$

é quase Dunford-Pettis.

• *Quase Dunford-Pettis* se $\|A(x_{1,n}, \dots, x_{m,n})\| \longrightarrow 0$ em X para todas sequências disjuntas e fracamente nulas $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ em E_i, $i = 1, \dots, m$.

De forma coerente com o que fizemos até aqui nesta tese, focaremos nossa atenção no problema sobre as extensões de Aron-Berner de operadores (separadamente) quase

Dunford-Pettis serem ou não (separadamente) quase Dunford-Pettis.

Exibiremos exemplos mostrando que essas questões não têm respostas afirmativas em geral e provaremos resultados que estabelecem condições sob as quais as respostas são afirmativas. Mostraremos também que as duas propriedades acima são independentes, no sentido de que nenhuma delas implica na outra.

5.1 Operadores multilineares separadamente quase Dunford-Pettis

Esperamos que ao longo desta seção o leitor se convença de que é muito raro que as extensões de Aron-Berner de operadores separadamente quase Dunford-Pettis sejam também quase Dunford-Pettis. Tentaremos fazer isso por meio de exemplos e provando resultados que, de certa forma, mostram que hipóteses muito fortes são equivalentes a se obter pouco nessa direção (veja Exemplo 5.1.2 e Proposição 5.1.4). De toda forma, provaremos resultados positivos para o problema. Em particular, provaremos que extensões de Aron-Berner de operadores multilineares de posto finito são separadamente quase Dunford-Pettis e que extensões de Aron-Berner de operadores m-lineares positivos de c_0^m em ℓ_1 também são separadamente quase Dunford-Pettis.

Uma *extensão bidual* de um operador m-linear contínuo $A: X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow X$ entre espaços de Banach é um operador m-linear contínuo $\tilde{A}: X_1^{**} \times \cdots \times X_m^{**} \longrightarrow X^{**}$ que satisfaz

$$\tilde{A}(J_{X_1}(x_1), \dots, J_{X_m}(x_m)) = J_X(A(x_1, \dots, x_m)),$$

para todos $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, m$. É claro que extensões de Aron-Berner são extensões biduais.

Por [6, Lema 4.1] segue que, um operador linear T de um reticulado de Banach E em um espaço de Banach X é quase Dunford-Pettis se e somente se $\|T(x_n)\| \longrightarrow 0$ para cada sequência fracamente nula $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E^+.

O lema a seguir, além de nos ser útil em exemplos adiante, mostra que apenas operadores separadamente quase Dunford-Pettis podem ter alguma extensão bidual separadamente quase Dunford-Pettis.

Lema 5.1.1. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach, X um espaço de Banach e $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow X$ um operador m-linear contínuo. Se existe uma extensão bidual de A separadamente quase Dunford-Pettis, então A é separadamente quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Suponha que $\widetilde{A}: E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow X^{**}$ seja uma extensão bidual de A. Para todos $x_i \in E_i$, $i = 1, \dots, m$, $\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_m}(x_m)) = J_X(A(x_1, \dots, x_m))$. Sejam $j \in \{1, \dots, m\}$ e $(x_{j,n})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta em E_j^+ tal que $x_{j,n} \xrightarrow{\omega} 0$. Como J_{E_j} é um homomorfismo de Riesz contínuo, logo ω-ω-contínuo, $(J_{E_j}(x_{j,n}))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência disjunta positiva em E_j^{**} e $J_{E_j}(x_{j,n}) \xrightarrow{\omega} 0$. Como $\widetilde{A}$ é separadamente quase Dunford-Pettis e o mergulho canônico J_X é uma isometria,

$$\|A(x_1, \dots, x_{j,n}, \dots, x_m)\| = \|J_X(A(x_1, \dots, x_{j,n}, \dots, x_m))\|$$

$$= \|\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_j}(x_{j,n}), \dots, J_{E_m}(x_m))\| \longrightarrow 0,$$

para todos $x_i \in E_i$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq j$. Isso nos permite concluir que A é separadamente quase Dunford-Pettis. □

Como todo funcional linear contínuo definido em um reticulado de Banach é quase Dunford-Pettis, todo operador m-linear regular $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{R}$ entre reticulados de Banach, bem como suas extensões biduais, são separadamente quase Dunford-Pettis. Em particular suas extensões de Aron-Berner são separadamente quase Dunford-Pettis. Vejamos que isso não é mais verdade para operadores multilineares regulares com valores vetoriais.

Exemplo 5.1.2. Considere o operador bilinear positivo

$$A: \mathbb{R} \times \ell_2 \longrightarrow \ell_\infty, \ A(\lambda, x) = \lambda x.$$

Para ver que o operador linear $A(1, \bullet): \ell_2 \longrightarrow \ell_\infty$ não é quase Dunford-Pettis, considere a sequência disjunta positiva $(e_n)_{n=1}^\infty$ formada pelos vetores unitários canônicos em ℓ_2. Sabemos que $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ em ℓ_2 e $\|A(1, e_n)\| = \|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, A não é separadamente quase Dunford-Pettis. Além disso, como ℓ_2 é reflexivo, pelo Lema 5.1.1 nenhuma extensão bidual de A é separadamente quase Dunford-Pettis. Em particular, as extensões de Aron-Berner de A não são separadamente quase Dunford-Pettis.

No próximo exemplo veremos que mesmo um operador $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m, F)$ separadamente quase Dunford-Pettis pode não ter nenhuma extensão bidual separadamente quase Dunford-Pettis. Relembramos o leitor que a definição da propriedade positiva de Schur (PPS) está na Definição 4.1.2.

Exemplo 5.1.3. Seja E um reticulado de Banach com PPS tal que E^{**} não tem PPS. Tome por exemplo $E = \left(\oplus_n \ell_\infty^n\right)_1$, que conforme vimos no Exemplo 4.2.1 E tem PPS e E^{**} não tem PPS, onde o reticulado de Banach $\ell_\infty^n = \mathbb{R}^n$ é considerado com a norma do máximo e com a ordem coordenada a coordenada. Considere o operador bilinear positivo

$$A: \mathbb{R} \times E \longrightarrow E, \ A(\lambda, y) = \lambda y.$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o operador $A(\lambda, \bullet): E \longrightarrow E$ é quase Dunford-Pettis pois E tem PPS. É claro que, para todo $y \in E$, o operador $A(\bullet, y): \mathbb{R} \longrightarrow E$ é quase Dunford-Pettis. Isso mostra que A é separadamente quase Dunford-Pettis. Vejamos que A admite uma única extensão bidual separadamente ω^*-ω^*-contínua e ela não é separadamente quase Dunford-Pettis. Uma vez provado isso, as extensões de Aron-Berner de A também não são separadamente quase Dunford-Pettis pelo Lema 5.1.1. Como todo operador linear de $\mathbb{R}$ em E^* e de E em $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ são compactos, de [15, Theorem 1] segue que A admite uma única extensão bidual $\widetilde{A}: \mathbb{R} \times E^{**} \longrightarrow E^{**}$ que é separadamente ω^*-ω^*-contínua. É conhecido que se um operador bilinear admite uma extensão bidual separadamente ω^*-ω^*-contínua B, então todas as extensões de Aron-Berner coincidem com B (veja [51]). Seja $y^{**} \in E^{**}$, pelo Teorema de Goldstine, $y^{**} = \omega^*\text{-}\lim_\alpha J_E(y_\alpha)$ para alguma rede $(y_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ em E, logo

$$\widetilde{A}(\lambda, y^{**}) = \omega^* - \lim_\alpha \widetilde{A}(\lambda, J_E(y_\alpha)) = \omega^* - \lim_\alpha J_E(A(\lambda, y_\alpha))$$

$$= \omega^* - \lim_{\alpha} J_E(\lambda y_\alpha) = \lambda\omega^* - \lim_{\alpha} J_E(y_\alpha) = \lambda y^{**},$$

o que nos dá $\widetilde{A}(\lambda, y^{**}) = \lambda y^{**}$. É claro que o operador $\widetilde{A}(\bullet, y^{**}) : \mathbb{R} \longrightarrow E^{**}$ é quase Dunford-Pettis, mas $\widetilde{A}(1, \bullet) : E^{**} \longrightarrow E^{**}$ não é quase Dunford-Pettis pois $\widetilde{A}(1, \bullet) = id_E^{**}$ e E^{**} não tem PPS. Concluímos que $\widetilde{A}$ é a única extensão de Aron-Berner de A e não é separadamente quase Dunford-Pettis.

Proposição 5.1.4. *Seja $m \in \mathbb{N}$. As seguintes afirmações são equivalentes para os reticulados de Banach $E_1, \dots, E_m, F$.*
(a) *Dado $i \in \{1, \dots, m\}$. Se $T : E_i \longrightarrow F$ é um operador linear quase Dunford-Pettis, então seu biadjunto $T^{**} : E_i^{**} \longrightarrow F^{**}$ também é quase Dunford-Pettis.*
(b) *Se A é um operador m-linear separadamente quase Dunford-Pettis que admite uma extensão bidual separadamente ω^*-ω^*-contínua $\widetilde{A} : E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow F^{**}$, então para cada $j = 1, \dots, m$ e todos $x_i \in E_i$, $i \neq j$, o operador linear $\widetilde{A}_{x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m} : E_j^{**} \longrightarrow F^{**}$ dado por*

$$\widetilde{A}_{x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m}(x_j^{**}) = \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{j-1}}(x_{j-1}), x_j^{**}, J_{E_{j+1}}(x_{j+1}), \dots, J_{E_m}(x_m)),$$

é quase Dunford-Pettis.

Demonstração. (a)$\Longrightarrow$(b) Suponha que A seja separadamente quase Dunford-Pettis e que admita uma extensão bidual separadamente ω^*-ω^*-contínua $\widetilde{A}$. Sejam $j \in \{1, \dots, m\}$ e $x_i \in E_i$, $i = 1, \dots, m$, com $i \neq j$. O operador linear $T : E_j \longrightarrow F$ dado por $T(x_j) = A(x_1, \dots, x_m)$ é quase Dunford-Pettis pois A é separadamente quase Dunford-Pettis. Então T^{**} é quase Dunford-Pettis por hipótese. Seja $(x_{j,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta positiva em E_j^{**} tal que $x_{j,n}^{**} \xrightarrow{\omega} 0$. Temos $\|T^{**}(x_{j,n}^{**})\| \longrightarrow 0$. Para cada n, o Teorema de Goldstine nos garante que existe uma rede $(x_{\alpha_j}^n)_{\alpha_j \in \Omega_j}$ em E_j tal que $x_{j,n}^{**} = \omega^*\text{-}\lim_{\alpha_j} J_{E_j}(x_{\alpha_j^n})$. Como $\widetilde{A}$ é separadamente ω^*-ω^*-contínua,

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m}(x_{j,n}^{**}) &= \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{j-1}}(x_{j-1}), x_{j,n}^{**}, J_{E_{j+1}}(x_{j+1}), \dots, J_{E_m}(x_m)) \\
&= \omega^* - \lim_{\alpha_j} \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_j}(x_{\alpha_j}^n), \dots, J_{E_m}(x_m)) \\
&= \omega^* - \lim_{\alpha_j} J_F(A(x_1, \dots, x_{\alpha_j}^n, \dots, x_m)) \\
&= \omega^* - \lim_{\alpha_j} J_F(T(x_{\alpha_j}^n)) = \omega^* - \lim_{\alpha_j} T^{**}(J_{E_j}(x_{\alpha_j}^n)) = T^{**}(x_{j,n}^{**})
\end{aligned}$$

para todo n. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos $\|\widetilde{A}_{x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m}(x_{j,n}^{**})\| = \|T^{**}(x_{j,n}^{**})\| \longrightarrow 0$, o que prova que $\widetilde{A}_{x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m}$ é quase Dunford-Pettis.

(b)$\Longrightarrow$(a) Sejam $i \in \{1, \dots, m\}$ e $T \in \mathcal{L}(E_i, F)$ um operador quase Dunford-Pettis. Escolha funcionais lineares não nulos $\varphi_j \in E_j^*$, $j = 1, \dots, m$, $j \neq i$, e considere o operador m-linear contínuo

$$A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F\ ,\ A(x_1, \dots, x_m) = T(x_i) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \varphi_j(x_j).$$

Como o operador T e os funcionais φ_j, $j \neq i$, são quase Dunford-Pettis, A é claramente separadamente quase Dunford-Pettis. Usando que adjuntos de operadores lineares contínuos

são sempre ω^*-ω^*-contínuos, é imediato que o operador m-linear

$$\widetilde{A}: E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow F^{**}, \ \widetilde{A}(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) = T^{**}(x_i^{**}) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{m} x_j^{**}(\varphi_j).$$

é separadamente ω^*-ω^*-contínuo. Mais ainda, para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$,

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_m}(x_m)) &= T^{**}(J_{E_i}(x_i)) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{m} J_{E_j}(x_j)(\varphi_j) \\ &= J_F(T(x_i)) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \varphi_j(x_j) \\ &= J_F\Big(T(x_i) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \varphi_j(x_j)\Big) = J_F(A(x_1, \dots, x_m)),\end{aligned}$$

mostrando que $\widetilde{A}$ é uma extensão bidual de A. Então A preenche as hipóteses de (b). Como cada funcional $\varphi_j \in E_j^*$ é não nulo, podemos tomar $x_j \in E_j$ tal que $\varphi_j(x_j) = 1$, $j \neq i$. Por (b), o operador linear $\widetilde{A}_{x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m}$ é quase Dunford-Pettis. Para todo $x_i^{**} \in E_i^{**}$,

$$\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_{i-1}}(x_{i-1}), x_i^{**}, J_{E_{i+1}}(x_{i+1}), \dots, J_{E_m}(x_m)) = T^{**}(x_i^{**}),$$

donde segue que T^{**} é quase Dunford-Pettis. □

Com relação às condições (a) e (b) da Proposição 5.1.4 é importante enfatizar o seguinte:

- A condição (a) foi investigada no Capítulo 4, e como o leitor pode verificar lá, ela vale apenas sob hipóteses fortes sobre os espaços e/ou sobre o operador.
- A condição (b), que é equivalente à condição (a), é muito menos que a implicação desejada, que é a seguinte: se A é separadamente quase Dunford-Pettis, então as extensões de Aron-Berner de A são separadamente quase Dunford-Pettis.

Isso significa que, mesmo sob hipóteses fortes, muito pouco se obtém na direção que queremos. A conclusão é que a implicação desejada deve valer apenas em situações muito específicas. O restante desta seção é devotado à busca dessas situações específicas nas quais a implicação desejada é verdadeira.

A primeira situação é o caso de operadores multilineares de posto finito. Relembre que uma aplicação a valores em um espaço vetorial é de posto finito se o subespaço vetorial gerado por sua imagem tem dimensão finita.

Lema 5.1.5. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach e X um espaço de Banach. Todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; X)$ de posto finito é separadamente quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Como A é de posto finito, existem $k \in \mathbb{N}$, formas m-lineares contínuas $B_j \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m)$ e vetores $y_j \in X, j = 1, \dots, k$, tais que $A = \sum_{j=1}^{k} B_j \otimes y_j$, o que

significa que, para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$, $A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^{k} B_j(x_1, \dots, x_m)y_j$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta em E_i^+ tal que $x_{i,n} \xrightarrow{\omega} 0$. Usando que $B_j(x_1, \dots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, \dots, x_m)$ é um funcional linear contínuo, sabemos que $|B_j(x_1, \dots, x_{i,n}, \dots, x_m)| \longrightarrow 0$, logo

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \dots, x_{i,n}, \dots, x_m)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k} B_j(x_1, \dots, x_{i,n}, \dots, x_m)y_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \|B_j(x_1, \dots, x_{i,n}, \dots, x_m)y_j\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} |B_j(x_1, \dots, x_{i,n}, \dots, x_m)| \cdot \|y_j\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Isso prova que A é separadamente quase Dunford-Pettis. □

Proposição 5.1.6. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach e X um espaço de Banach. Todas as extensões de Aron-Berner de um operador m-linear de posto finito $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; X)$ são de posto finito, e portanto são separadamente quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; X)$ de posto finito e tome $k \in \mathbb{N}$, $B_j \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m)$ e $y_j \in X, j = 1, \dots, k$, tais que

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^{k} B_j(x_1, \dots, x_m)y_j, \text{ para todos } x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m.$$

Seja $\rho \in S_m$. Para todos $x_{\rho(1)}^{**} \in E_{\rho(1)}^{**}$ e $y^* \in X^*$, chamando $C_j = y^* \circ (B_j \otimes y_j), j = 1, \dots, k$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{x_{\rho(1)}^{**}}^{\rho}(C_j)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, x_m) &= x_{\rho(1)}^{**}(C_j(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \bullet, \dots, x_m)) \\
&= x_{\rho(1)}^{**}((y^* \circ (B_j \otimes y_j))(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \bullet, \dots, x_m)) \\
&= x_{\rho(1)}^{**}(y^*(y_j)B_j(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \bullet, \dots, x_m)) \\
&= y^*(y_j)x_{\rho(1)}^{**}(B_j(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \bullet, \dots, x_m)) \\
&= y^*(y_j)\overline{x_{\rho(1)}^{**}}^{\rho}(B_j)(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}x, \dots, x_m).
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\overline{x_{\rho(1)}^{**}}^{\rho}(C_j) = y^*(y_j)\overline{x_{\rho(1)}^{**}}^{\rho}(B_j)$. Note que $y^* \circ A = \sum_{j=1}^{k} y^* \circ (B_j \otimes y_j) = \sum_{j=1}^{k} C_j$. Para todos $x_{\rho(i)}^{**} \in E_{\rho(i)}^{**}$, $i = 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned}
AB_m^{\rho}(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})(y^*) &= \left(\overline{x_{\rho(m)}^{**}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(1)}^{**}}^{\rho}\right)(y^* \circ A) \\
&= \left(\overline{x_{\rho(m)}^{**}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(2)}^{**}}^{\rho}\right)\left(\overline{x_{\rho(1)}^{**}}^{\rho}(y^* \circ A)\right) \\
&= \left(\overline{x_{\rho(m)}^{**}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x_{\rho(2)}^{**}}^{\rho}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \overline{x_{\rho(1)}^{**}}^{\rho}(C_j)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k} y^*(y_j)\left(\overline{x^{**}_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x^{**}_{\rho(2)}}^{\rho}\right)\left(\overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}(B_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} y^*(y_j) AB^{\rho}_m(B_j)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} AB^{\rho}_m(B_j) \otimes J_F(y_j)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**})(y^*).
\end{aligned}
$$

Segue que $AB^{\rho}_m(A) = \sum_{j=1}^{k} AB^{\rho}_m(B_j) \otimes J_F(y_j)$ é de posto finito, e portanto separadamente quase Dunford-Pettis pelo Lema 5.1.5. □

Agora passamos à segunda situação. Fazendo a identificação $J_F(F) = F$, diz-se que uma extensão ao bidual de um operador multilinear ou linear com valores em F é *genuína* se tal extensão toma valores em $F = J_F(F)$. Por exemplo, o biadjunto T^{**} de um operador linear fracamente compacto T é uma extensão bidual genuína. Extensões de Aron-Berner genuínas de operadores multilineares têm sido estudadas na literatura, como por exemplo em [15, 51].

Proposição 5.1.7. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach tais que seus duais têm a propriedade positiva de Schur e F um reticulado de Banach com norma ordem contínua. Se um operador m-linear positivo $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ admite uma extensão bidual positiva genuína e separadamente $\omega^* - \omega^*$-contínua $\widetilde{A} : E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow F^{**}$, então $\widetilde{A}$ é separadamente quase Dunford-Pettis. Em particular, A é separadamente quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Sejam $i \in \{1, \dots, m\}$ e $z_j^{**} \in E_j^{**}, j = 1, \dots, m$, $j \neq i$, funcionais lineares positivos. Considerando a inversa $J_F^{-1} : J_F(F) \longrightarrow F$ do mergulho canônico, o operador linear positivo

$$T : E_i \longrightarrow F\ ,\ T(x_i) = J_F^{-1}(\widetilde{A}(z_1^{**}, \dots, z_{i-1}^{**}, J_{E_i}(x_i), z_{i+1}^{**}, \dots, z_m^{**})),$$

está bem definido pois a extensão $\widetilde{A}$ é genuína. Dados um funcional $x_i^{**} \in E_i^{**}$ e uma rede $(x_{\alpha_i})_{\alpha_i \in \Omega_i}$ em E_i tal que $x_i^{**} = \omega^*\text{-}\lim_{\alpha_i} J_{E_i}(x_{\alpha_i})$, o fato da extensão $\widetilde{A}$ ser separadamente ω^*-ω^*-contínua implica que

$$
\begin{aligned}
T^{**}(x_i^{**}) &= \omega^* - \lim_{\alpha_i} T^{**}(J_{E_i}(x_{\alpha_i})) = \omega^* - \lim_{\alpha_i}(T^{**} \circ J_{E_i})(x_{\alpha_i}) \\
&= \omega^* - \lim_{\alpha_i} J_F(T(x_{\alpha_i})) = \omega^* - \lim_{\alpha_i} \widetilde{A}(z_1^{**}, \dots, z_{i-1}^{**}, J_{E_i}(x_{\alpha_i}), z_{i+1}^{**}, \dots, z_m^{**}) \\
&= \widetilde{A}(z_1^{**}, \dots, z_{i-1}^{**}, x_i^{**}, z_{i+1}^{**}, \dots, z_m^{**}) \subseteq J_F(F).
\end{aligned}
$$

Isso mostra que T é fracamente compacto, e portanto T^{**} é quase Dunford-Pettis pela Proposição 4.4.5. Dessa forma, dada uma sequência disjunta positiva $(x_{i,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E_i^{**} tal que $x_{i,n}^{**} \xrightarrow{\omega} 0$, temos

$$\|\widetilde{A}(z_1^{**}, \dots, z_{i-1}^{**}, x_{i,n}^{**}, z_{i+1}^{**}, \dots, z_m^{**})\| = \|T^{**}(x_{i,n}^{**})\| \longrightarrow 0. \tag{5.1}$$

Dados funcionais $x_j^{**} \in E_j^{**}, j = 1, \dots, m$, $j \neq i$, escreva $x_j^{**} = (x_j^{**})^+ - (x_j^{**})^-$. Para cada $\xi^m = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m) \in \{+1, -1\}^{m-1}$, chame $P(\xi^m) = \xi_1 \cdots \xi_{i-1}\xi_{i+1} \cdots \xi_m \in \{+1, -1\}$. Como os funcionais $(x_j^{**})^+$ e $(x_j^{**})^-$ são positivos, de (5.1) decorre que

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{A}(x_1^{**}, \dots, x_{i-1}^{**}, x_{i,n}^{**}, x_{i+1}^{**}, \dots, x_m^{**})\| \\
&= \|\widetilde{A}((x_1^{**})^+ - (x_1^{**})^-, \dots, (x_{i-1}^{**})^+ - (x_{i-1}^{**})^-, x_{i,n}^{**}, (x_{i+1}^{**})^+ - (x_{i+1}^{**})^-, \dots, (x_m^{**})^+ - (x_m^{**})^-)\| \\
&= \Big\| \sum_{P(\xi^m)=+1} \widetilde{A}((x_1^{**})^{\xi_1}, \dots, (x_{i-1}^{**})^{\xi_{i-1}}, x_{i,n}^{**}, (x_{i+1}^{**})^{\xi_{i+1}}, \dots, (x_m^{**})^{\xi_m}) \\
&\qquad - \sum_{P(\xi^m)=-1} \widetilde{A}((x_1^{**})^{\xi_1}, \dots, (x_{i-1}^{**})^{\xi_{i-1}}, x_{i,n}^{**}, (x_{i+1}^{**})^{\xi_{i+1}}, \dots, (x_m^{**})^{\xi_m}) \Big\| \\
&\leq \sum_{P(\xi^m)=+1} \|\widetilde{A}((x_1^{**})^{\xi_1}, \dots, (x_{i-1}^{**})^{\xi_{i-1}}, x_{i,n}^{**}, (x_{i+1}^{**})^{\xi_{i+1}}, \dots, (x_m^{**})^{\xi_m})\| \\
&\qquad + \sum_{P(\xi^m)=-1} \|\widetilde{A}((x_1^{**})^{\xi_1}, \dots, (x_{i-1}^{**})^{\xi_{i-1}}, x_{i,n}^{**}, (x_{i+1}^{**})^{\xi_{i+1}}, \dots, (x_m^{**})^{\xi_m})\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que $\|\widetilde{A}(x_1^{**}, \dots, x_{i-1}^{**}, x_{i,n}^{**}, x_{i+1}^{**}, \dots, x_m^{**})\| \longrightarrow 0$, o que prova que $\widetilde{A}$ é separadamente quase Dunford-Pettis. □

Para dar aplicações concretas da Proposição 5.1.7, relembre que um espaço de Banach X é dito *Arens-regular* se todo operador linear contínuo de X em X^* é fracamente compacto (veja, por exemplo, [39]).

Corolário 5.1.8. *Sejam E, F reticulados de Banach tais que E é Arens-regular, E^* tem propriedade positiva de Schur, F tem norma ordem contínua e todo operador linear contínuo de E em F é fracamente compacto. Então, para todo $m \in \mathbb{N}$, as extensões de Aron-Berner de qualquer operador m-linear positivo de E^m em F são separadamente quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Seja $A : E^m \longrightarrow F$ um operador m-linear positivo. Como A é Arens-regular, é bem conhecido que todas as extensões de Aron-Berner de A coincidem e são separadamente ω^*-ω^*-contínuas. Também é conhecido que, como todo operador linear contínuo de E em F é fracamente compacto, tais extensões são genuínas (para todas estas informações veja [15, 51]). Aplicando a Proposição 5.1.7 concluímos que todas as extensões de Aron-Berner de A são separadamente quase Dunford-Pettis. □

Exemplo 5.1.9. Vejamos que todas as extensões de Aron-Berner de qualquer operador m-linear positivo $A : c_0^m \longrightarrow \ell_1$ são separadamente quase Dunford-Pettis. De fato, pelo Teorema de Pitt sabemos que c_0 é Arens-regular; $c_0^* = \ell_1$ tem propriedade de Schur e ℓ_1 tem norma ordem contínua. O resultado segue do Corolário 5.1.8.

5.2 Operadores multilineares quase Dunford-Pettis

Nesta seção veremos que a propriedade quase Dunford-Pettis se comporta melhor que a propriedade quase Dunford-Pettis separada, no sentido de que menos hipóteses são

necessárias para provar que extensões de Aron-Berner de operadores quase Dunford-Pettis são quase Dunford-Pettis.

Começamos a seção provando a seguinte caracterização dos operadores multilineares quase Dunford-Pettis.

Lema 5.2.1. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach, X um espaço de Banach e $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow X$ um operador m-linear. São equivalentes:*
(a) *A é quase Dunford-Pettis.*
(b) $\|A(x_{1,n}, \dots, x_{m,n})\| \longrightarrow 0$ *para todas sequências disjuntas positivas* $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ *em* E_i, $i = 1, \dots, m$, *tais que* $x_{i,n} \xrightarrow{\omega} 0$.

Demonstração. Por definição, é claro que (a)$\Rightarrow$(b). Provaremos o caso bilinear $m = 2$ da implicação inversa. O argumento deixará claro que o caso geral segue de modo similar. Sejam $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ sequências disjuntas em E_i, $i = 1, 2$, tais que $x_{i,n} \xrightarrow{\omega} 0$. Para todos $i \in \{1, 2\}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $x_{i,n} = x_{i,n}^+ - x_{i,n}^-$. Como a sequência $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ é disjunta, então, para todos $n \neq m$,

$$0 \leq x_{i,n}^+ \wedge x_{i,m}^+ \leq |x_{i,n}| \wedge |x_{i,m}| = 0 \ \text{ e } \ 0 \leq x_{i,n}^- \wedge x_{i,m}^- \leq |x_{i,n}| \wedge |x_{i,m}| = 0.$$

Assim, as sequencias $(x_{i,n}^+)_{n=1}^{\infty}$ e $(x_{i,n}^-)_{n=1}^{\infty}$ são positivas e disjuntas em E_i. Chamando $W_i = \{x_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$, segue que W_i é um subconjunto relativamente fracamente compacto de E_i. Como a envoltória sólida de W_i em E_i é

$$\mathrm{Sol}(W_i) = \{x \in E_i : |x| \leq |x_{i,n}| \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\},$$

(veja [5, p. 171]), temos $x_{i,n}^+, x_{i,n}^- \in \mathrm{Sol}(W_i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por [5, Theorem 4.34] segue que $x_{i,n}^+ \xrightarrow{\omega} 0$ e $x_{i,n}^- \xrightarrow{\omega} 0$. Por hipótese,

$$\begin{aligned}
\|A(x_{1,n}, x_{2,n})\| &= \|A(x_{1,n}^+ - x_{1,n}^-, x_{2,n}^+ - x_{2,n}^-)\| \\
&= \|A(x_{1,n}^+, x_{2,n}^+) + A(x_{1,n}^-, x_{2,n}^-) - A(x_{1,n}^+, x_{2,n}^-) - A(x_{1,n}^-, x_{2,n}^+)\| \\
&\leq \|A(x_{1,n}^+, x_{2,n}^+)\| + \|A(x_{1,n}^-, x_{2,n}^-)\| + \|A(x_{1,n}^+, x_{2,n}^-)\| + \|A(x_{1,n}^-, x_{2,n}^+)\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

o que prova que A é quase Dunford-Pettis. □

Veremos a seguir que nenhuma das seguintes implicações é verdadeira em geral:

$$A \text{ é separadamente quase Dunford-Pettis} \iff A \text{ é quase Dunford-Pettis.}$$

Exemplo 5.2.2. (a) Para $1 < p < \infty$, considere o operador bilinear positivo

$$A: \ell_p \times \ell_{p^*} \longrightarrow \mathbb{R}, \ A(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

É claro que A é separadamente quase Dunford-Pettis, mas não é quase Dunford-Pettis pois $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ em ℓ_p e em ℓ_{p^*} e $A(e_n, e_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) O operador bilinear positivo $A: \mathbb{R} \times \ell_2 \longrightarrow \ell_\infty$ dado por $A(\lambda, x) = \lambda x$ é claramente quase Dunford-Pettis mas não é separadamente quase Dunford-Pettis (veja Exemplo 5.1.2).

Como os operadores bilineares no Exemplo 5.2.2 estão definidos em espaços reflexivos, suas extensões de Aron-Berner coincidem com os próprios operadores, logo extensões de Aron-Berner separadamente quase Dunford-Pettis nem sempre são quase Dunford-Pettis e a recíproca também nem sempre é verdade.

Entre outras consequências, o lema a seguir estabelece que apenas operadores quase Dunford-Pettis podem ter extensões de Aron-Berner que são quase Dunford-Pettis. O lema também nos auxiliará a mostrar que extensões de Aron-Berner de operadores quase Dunford-Pettis nem sempre são quase Dunford-Pettis.

Lema 5.2.3. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach, X um espaço de Banach e $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow X$ um operador m-linear contínuo.*
(a) *Se A admite uma extensão bidual quase Dunford-Pettis, então A também é quase Dunford Pettis.*
(b) *Se algum dos reticulados de Banach $E_1, \dots, E_m$ tem a propriedade positiva de Schur, então A é quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. (a) Suponha que $\widetilde{A}: E_1^{**} \times \cdots \times E_m^{**} \longrightarrow X^{**}$ seja uma extensão bidual de A quase Dunford-Pettis. Para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$,

$$\tilde{A}(J_{E_1}(x_1), \dots, J_{E_m}(x_m)) = J_X(A(x_1, \dots, x_m)). \tag{5.2}$$

Sejam $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ sequências disjuntas em E_i tais que $x_{i,n} \xrightarrow{\omega} 0$, $i = 1, \dots, m$. Como o mergulho canônico em cada reticulado de Banach E_i é homomorfismo de Riesz, $(J_{E_i}(x_{i,n}))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência disjunta em E_i^{**}. E a continuidade do mergulho canônico nos dá $J_{E_i}(x_{i,n}) \xrightarrow{\omega} 0$. Por hipótese, $\|\widetilde{A}(J_{E_1}(x_{1,n}), \dots, J_{E_m}(x_{m,n}))\| \longrightarrow 0$, e como J_X é uma imersão isométrica, por (5.2) temos

$$\|A(x_{1,n}, \dots, x_{m,n})\| = \|J_X(A(x_{1,n}, \dots, x_{m,n}))\| = \|\widetilde{A}(J_{E_1}(x_{1,n}), \dots, J_{E_m}(x_{m,n}))\| \longrightarrow 0.$$

Isso prova que A é quase Dunford-Pettis.

(b) Suponha que E_j tem PPS para algum $j \in \{1, \dots, m\}$. Sejam $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ sequências disjuntas em E_i^+ tais que $x_{i,n} \xrightarrow{\omega} 0$, $i = 1, \dots, m$. Da propriedade positiva de Schur de E_j decorre que $\|x_{j,n}\| \longrightarrow 0$. Como sequências fracamente convergentes são limitadas, podemos tomar $M_i > 0$ para todo $i \neq j$ tal que $\|x_{i,n}\| \leq M_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Chamando $K = M_1 \cdots M_{j-1} M_{j+1} \cdots M_m > 0$, temos

$$\|A(x_{1,n}, \dots, x_{m,n})\| \leq \|A\| \cdot \|x_{1,n}\| \cdots \|x_{j,n}\| \cdots \|x_{m,n}\| \leq K\|A\| \cdot \|x_{j,n}\| \longrightarrow 0,$$

o que nos permite concluir que A é quase Dunford-Pettis. □

Teorema 5.2.4. *Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ reticulados de Banach tal que F é σ-Dedekind completo e contém uma copia de ℓ_∞. As seguintes afirmações são equivalentes.*
(a) *Todo operador m-linear contínuo $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ admite uma extensão de Aron-Berner quase Dunford-Pettis.*
(b) *Todo operador m-linear regular $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ admite uma extensão de Aron-Berner quase Dunford-Pettis.*

(c) *Todo operador m-linear positivo* $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ *admite uma extensão de Aron-Berner quase Dunford-Pettis.*
(d) E_j^{**} *tem propriedade positiva de Schur para algum* $j \in \{1, \dots, m\}$.

Demonstração. As implicações (a)⟹(b)⟹(c) são triviais e a implicação (d)⟹(a) segue do Lema 5.2.3.
Provemos a implicação (c)⟹(d). Suponha, por contradição, que os reticulados de Banach $E_1^{**}, \dots, E_m^{**}$, não tenham a propriedade positiva de Schur. Neste caso, para todo $j = 1, \dots, m$, por [7, Proposition 2.1] existe uma sequência disjunta positiva $(x_{j,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E_j^{**} tal que $x_{j,n}^{**} \xrightarrow{\omega} 0$ e $\|x_{j,n}^{**}\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome sequências positivas $(x_{j,n}^{*})_{j=1}^{\infty}$ em $B_{E_j^*}$, $j = 1, \dots, n$, tais que $x_{j,n}^{**}(x_{j,n}^{*}) \geq \frac{1}{2}$ para todo n. Por outro lado, como F tem uma copia de ℓ_∞, por [5, Theorem 4.56] sabemos que a norma de F não é ordem contínua, e pelo Teorema 1.3.12 existem $y \in F$ e uma sequência disjunta $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em F tal que $0 \leq y_n \leq y$ e $\|y_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $x_j \in E_j^+$ e $k \in \mathbb{N}$, chamando

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} y_n \left(\prod_{j=1}^{m} x_{j,n}^{*}(x_j) \right),$$

temos $0 \leq s_k \uparrow$, e de

$$0 \leq s_k \leq \sum_{n=1}^{k} \left(y_n \prod_{j=1}^{m} \|x_{j,n}^{*}\| \cdot \|x_j\| \right) \leq \prod_{j=1}^{m} \|x_j\| \cdot \sum_{n=1}^{k} y_n = \prod_{j=1}^{m} \|x_j\| \cdot \bigvee_{n=1}^{k} y_n \leq \prod_{j=1}^{m} \|x_j\| y,$$

segue que $s_k \uparrow z$ para algum $z \in F^+$ pois F é σ-Dedekind completo. Por [4, Theorem 1.14] obtemos que z é o ordem limite da sequência $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, isto é, $z = o - \lim_{k \to \infty} s_k$. Isso significa que a aplicação

$$A: E_1^+ \times \cdots \times E_m^+ \longrightarrow F^+, \ A(x_1, \dots, x_m) = o - \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \left(y_n \prod_{j=1}^{m} x_{j,n}^{*}(x_j) \right),$$

está bem definida. De novo por [4, Theorem 1.14] a aplicação A é aditiva em cada variável, logo pela versão multilinear do Teorema de Kantorovich [59, Theorem 2.3] existe um operador m-linear positivo $B: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ que estende A.

O próximo passo é provar que nenhuma das extensões de Aron-Berner de B é quase Dunford-Pettis. Note que, para todos $x_j \in E_j^+$, $j = 1, \dots, m$, e $n \in \mathbb{N}$,

$$B(x_1, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m) \geq y_n x_{1,n}^{*}(x_1) \cdots x_{m,n}^{*}(x_m) \geq 0.$$

Dados um funcional positivo $y^* \in F^*$ e uma permutação $\rho \in S_m$, chamando $t_{\rho(l)} = x_{\rho(l),n}^{*}(x_{\rho(l)})$, $l = 1, \dots, m-1$, temos

$$\begin{aligned}
(y^* \circ B(x_1, \dots, {}_{\rho(1)}\, x, \bullet, \dots, x_m))(x_{\rho(1)}) &= y^*(B(x_1, \dots, x_m)) \\
&\geq y^*(y_n x_{1,n}^{*}(x_1) \cdots x_{m,n}^{*}(x_m)) \\
&= x_{1,n}^{*}(x_1) \cdots x_{m,n}^{*}(x_m) y^*(y_n)
\end{aligned}$$

$$= x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) t_{\rho(1)},$$

o que nos permite concluir que

$$y^* \circ B(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x, \bullet, \dots, x_m) \geq x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^*_{\rho(1),n}.$$

Então, para qualquer funcional positivo $x^{**}_{\rho(1)} \in E^{**}_{\rho(1)}$,

$$\begin{aligned}
\overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}(y^* \circ B)(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x,_{\rho(2)} x, \bullet, \dots, x_m)(x_{\rho(2)}) &= \overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}(y^* \circ B)(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x, \dots, x_m) \\
&= x^{**}_{\rho(1)}(y^* \circ B(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x, \bullet, \dots, x_m)) \\
&\geq x^{**}_{\rho(1)}\left(x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^*_{\rho(1),n}\right) \\
&= x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) \\
&= x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t_{\rho(2)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) t_{\rho(2)} \\
&= x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t_{\rho(2)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) x^*_{\rho(2),n}(x_{\rho(2)}).
\end{aligned}$$

Isso implica que, para quaisquer funcionais positivos $x^{**}_{\rho(1)} \in E^{**}_{\rho(1)}$ e $x^{**}_{\rho(2)} \in E^{**}_{\rho(2)}$,

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{x^{**}_{\rho(2)}}^{\rho} \circ \overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(y^* \circ B)(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x,_{\rho(2)} x,_{\rho(3)} x, \bullet, \dots, x_m)(x_{\rho(3)}) \\
&\quad = \left(\overline{x^{**}_{\rho(2)}}^{\rho} \circ \overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(y^* \circ B)(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x,_{\rho(2)} x, \dots, x_m) \\
&\quad = x^{**}_{\rho(2)}\left(\overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}(y^* \circ B)(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x,_{\rho(2)} x, \bullet, \dots, x_m)\right) \\
&\quad \geq x^{**}_{\rho(2)}\left(x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t_{\rho(2)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) x^*_{\rho(2),n}\right) \\
&\quad = x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t_{\rho(2)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) x^{**}_{\rho(2)}(x^*_{\rho(2),n}) \\
&\quad = x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t_{\rho(2)} t_{\rho(3)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) x^{**}_{\rho(2)}(x^*_{\rho(2),n}) t_{\rho(3)} \\
&\quad = x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t_{\rho(2)} t_{\rho(3)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) x^{**}_{\rho(2)}(x^*_{\rho(2),n}) x^*_{\rho(3),n}(x_{\rho(3)})
\end{aligned}$$

e isso, por sua vez, implica que para quaisquer funcionais positivos $x^{**}_{\rho(i)} \in E^{**}_{\rho(i)}$, $i = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{x^{**}_{\rho(3)}}^{\rho} \circ \overline{x^{**}_{\rho(2)}}^{\rho} \circ \overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(y^* \circ B)(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x,_{\rho(2)} x,_{\rho(3)} x, \dots, x_m) \\
&\quad = x^{**}_{\rho(3)}\left(\left(\overline{x^{**}_{\rho(2)}}^{\rho} \circ \overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}(y^* \circ B)\right)(x_1, \dots ,_{\rho(1)} x,_{\rho(2)} x,_{\rho(3)} x, \bullet, \dots, x_m)\right) \\
&\quad \geq x^{**}_{\rho(3)}\left(x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t_{\rho(2)} t_{\rho(3)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) x^{**}_{\rho(2)}(x^*_{\rho(2),n}) x^*_{\rho(3),n}\right) \\
&\quad = x^*_{1,n}(x_1) \cdots_{\rho(1)} t_{\rho(2)} t_{\rho(3)} t \cdots x^*_{m,n}(x_m) y^*(y_n) x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) x^{**}_{\rho(2)}(x^*_{\rho(2),n}) x^{**}_{\rho(3)}(x^*_{\rho(3),n})
\end{aligned}$$

Repetindo o processo $m - 3$ vezes obtemos que, para quaisquer funcionais positivos $x^{**}_j \in E^{**}_j$, $j = 1, \dots, m$, e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
AB^{\rho}_m(B)(x^{**}_1, \dots, x^{**}_m)(y^*) &= \left(\overline{x^{**}_{\rho(m)}}^{\rho} \circ \cdots \circ \overline{x^{**}_{\rho(1)}}^{\rho}\right)(y^* \circ B) \\
&\geq x^{**}_{\rho(1)}(x^*_{\rho(1),n}) \cdots x^{**}_{\rho(m)}(x^*_{\rho(m),n}) y^*(y_n) \\
&= x^{**}_1(x^*_{1,n}) \cdots x^{**}_m(x^*_{m,n}) J_F(y_n)(y^*).
\end{aligned}$$

Em particular, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$AB_m^\rho(B)(x_{1,k}^{**}, \dots, x_{m,k}^{**}) \geq x_{1,k}^{**}(x_{1,k}^{*}) \cdots x_{m,k}^{**}(x_{m,k}^{*}) J_E(y_k) \geq \frac{1}{2^m} J_E(y_k) \geq 0$$

e assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\|AB_m^\rho(B)(x_{1,k}^{**}, \dots, x_{m,k}^{**})\| \geq \frac{1}{2^m}\|J_E(y_k)\| = \frac{1}{2^m}\|y_k\| = \frac{1}{2^m} > 0,$$

o que prova que, para toda permutação $\rho \in S_m$, a extensão de Aron-Berner $AB_m^\rho(B)$ não é quase Dunford-Pettis. Isso completa a demonstração por contradição. □

Agora estamos em condições de dar exemplos de operadores multilineares quase Dunford-Pettis cujas extensões de Aron-Berner não são quase Dunford-Pettis.

Exemplo 5.2.5. (a) Conforme mencionado anteriormente, o reticulado de Banach $\left(\oplus_n \ell_\infty^n\right)_1$ tem PPS e seu bidual não tem PPS. Além disso, a norma de $\left(\oplus_n \ell_1^n\right)_\infty^*$ não é ordem contínua e por [5, Theorem 4.56] este reticulado contém uma cópia de ℓ_∞. Combinando o Teorema 5.2.4 e o Lema 5.2.3, existe um operador $A \in \mathcal{L}_r({}^m\left(\oplus_n \ell_\infty^n\right)_1; \left(\oplus_n \ell_1^n\right)_\infty^*)$ quase Dunford-Pettis tal que nenhuma de suas extensões de Aron-Berner é quase Dunford-Pettis.

(b) Sejam $K_2, \dots, K_m$ espaços de Hausdorff compactos e infinitos. Por [5, p. 187], cada $C(K_i)$ não tem norma ordem contínua, e portanto $C(K_i)^{**}$ não tem PPS. Logo o Teorema 5.2.4 e o Lema 5.2.3 nos garantem a existência de um operador m-linear regular $A: \left(\oplus_n \ell_\infty^n\right)_1 \times C(K_2) \times \cdots \times C(K_m) \longrightarrow \ell_\infty$ quase Dunford-pettis tal que nenhuma extensão de Aron-Berner de A é quase Dunford-Pettis.

Em vista do Exemplo 5.2.5, procuraremos a seguir condições sob as quais as extensões de Aron-Berner de um operador multilinear quase Dunford-Pettis são quase Dunford-Pettis.

Definição 5.2.6. Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach e X um espaço de Banach. Um operador m-linear $A: E_1^* \times \cdots \times E_m^* \longrightarrow X$ é *fracamente positivamente limited* se, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, tem-se $\|A(x_{1,n}^*, \dots, x_{j,n}^*, \dots, x_{m,n}^*)\| \longrightarrow 0$ em X para toda sequência positiva $(x_{j,n}^*)_{n=1}^\infty$ em E_j^* tal que $x_{j,n}^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ e todas sequencias limitadas positivas $(x_{i,n}^*)_{n=1}^\infty$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq j$, em E_i^*.

Exemplo 5.2.7. É claro que todo operador multilinear fracamente positivamente limited é quase Dunford-Pettis. Vejamos que a recíproca não é verdade em geral. Para ver isso seja $A: c_0^* \times \ell_1^* \longrightarrow \mathbb{R}$ o operador bilinear positivo dado pela dualidade $\ell_1^* = \ell_\infty$, isto é, $A(x, y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$. Como $c_0^* = \ell_1$ tem PPS, do Lema 5.2.3 podemos concluir que A é quase Dunford-Pettis. Por outro lado, para cada n chame

$$y_n = (1, \dots, 1, 0, 0, \dots) = e_1 + \cdots + e_n.$$

É claro que a sequência $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq \ell_1^* = \ell_\infty$ é limitada e positiva. Mais ainda, a sequência $(e_n)_{n=1}^\infty \subseteq c_0^*$ é positiva e $e_n \xrightarrow{\omega^*} 0$, mas $A(e_n, y_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que A não é fracamente positivamente limited.

Exemplo 5.2.8. Vejamos que extensões de Aron-Berner de operadores multilineares positivos quase Dunford-Pettis nem sempre são fracamente positivamente limited. Para isso considere o operador bilinear positivo $A: \ell_1 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $A(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. É claro que A é quase Dunford-Pettis pois ℓ_1 tem PPS. Vejamos que nenhuma extensão de Aron-Berner de A é fracamente positivamente limited. De fato, tome a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq c_0^+$ dos vetores unitários canônicos. Sabemos que $e_n \xrightarrow{\omega} 0$, logo $J_{c_0}(e_n) \geq 0$ e $J_{c_0}(e_n) \xrightarrow{\omega^*} 0$. Além disso, $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell_1$ é limitada, mas

$$A^{***}(J_{\ell_1}(e_n), J_{c_0}(e_n)) = AB_2^{\mathrm{id}}(A)(J_{\ell_1}(e_n), J_{c_0}(e_n)) = A(e_n, e_n) = 1$$

para todo n.

Teorema 5.2.9. *Sejam E_1, E_2 reticulados de Banach tais que E_1^*, E_2^* têm normas ordem contínuas. Se $A \in L(E_1, E_2)$ é uma forma bilinear positiva e quase Dunford-Pettis, então as extensões de Aron-Berner de A são fracamente positivamente limited, e portanto são quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Considere o operador linear positivo

$$T: E_1 \longrightarrow E_2^*, \ T(x)(y) = A(x,y).$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta em E_1^+ tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. É claro que $T(x_n) \xrightarrow{\omega} 0$. Como a norma de E_2^* é ordem contínua, por [62, Theorem 2.4.14] segue que, para toda sequência disjunta limitada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em E_2^+, $y_n \xrightarrow{\omega} 0$. Por A ser quase Dunford-Pettis, $T(x_n)(y_n) = A(x_n, y_n) \longrightarrow 0$. De [40, Corollary 2.7] segue que $\|T(x_n)\| \longrightarrow 0$. Isso prova que T é quase Dunford-Pettis. Para todos $x^{**} \in E_1^{**}$, $y^{**} \in E_2^{**}$ e $x \in E_1$,

$$T^*(y^{**})(x) = y^{**}(T(x)) = y^{**}(A(x,\bullet)) = \overline{y^{**}}^{\theta}(A)(x),$$

mostrando que $T^*(y^{**}) = \overline{y^{**}}^{\theta}(A)$, e portanto

$$A^{***}(x^{**}, y^{**}) = x^{**}\left(\overline{y^{**}}^{\theta}(A)\right) = x^{**}(T^*(y^{**})).$$

Sejam $(x_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em E_1^{**} tal que $x_n^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$ e $(y_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva limitada em E_2^{**}, digamos $\|y_n^{**}\| \leq M_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como T é quase Dunford-Pettis, o Teorema 4.2.11 nos diz que $\|T^{**}(x_n^{**})\| \longrightarrow 0$. Então,

$$0 \leq A^{***}(x_n^{**}, y_n^{**}) = x_n^{**}(T^*(y_n^{**})) = T^{**}(x_n^{**})(y_n^{**}) \leq M_1 \|T^{**}(x_n^{**})\| \longrightarrow 0,$$

donde segue que $A^{***}(x_n^{**}, y_n^{**}) \longrightarrow 0$.

Sejam agora $(w_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em E_2^{**} tal que $w_n^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$ e $(z_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva limitada em E_1^{**}, digamos $\|z_n^{**}\| \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como T é quase Dunford-Pettis, $\|T^*(w_n^{**})\| \longrightarrow 0$ pelo Teorema 4.2.6, e portanto

$$0 \leq A^{***}(z_n^{**}, w_n^{**}) = z_n^{**}(T^*(w_n^{**})) \leq \|z_n^{**}\| \cdot \|T^*(w_n^{**})\| \leq M_2 \|T^*(w_n^{**})\| \longrightarrow 0.$$

Segue que $A^{***}(z_n^{**}, w_n^{**}) \longrightarrow 0$.

Tudo isso prova que A^{***} é fracamente positivamente limited.

Trabalhando com o operador

$$S: E_2 \longrightarrow E_1^*, \ S(y)(x) = A(x, y),$$

raciocínio análogo ao que foi feito acima comprova que a outra extensão de Aron-Berner de A, a saber $AB_2^{\mathrm{id}}(A)$, também é fracamente positivamente limited. □

O próximo passo é tratar o caso de operadores bilineares a valores vetoriais.

Teorema 5.2.10. *Sejam E_1, E_2, F reticulados de Banach tais que E_1^*, E_2^* têm normas ordem contínuas, e $A \in L(E_1, E_2; F)$ um operador bilinear positivo e quase Dunford-Pettis. Suponha que pelo menos uma das seguintes condições seja verdadeira.*
(a) *Toda sequência positiva disjunta e limitada em F^* é ordem limitada.*
(b) *F^* tem a propriedade positiva de Schur dual.*

Então as extensões de Aron-Berner de A são fracamente positivamente limited, e portanto quase Dunford-Pettis.

Demonstração. Seja $\rho \in S_2$. Pela Observação 2.1.4 sabemos que

$$AB_2^\rho(\varphi \circ A) = \varphi^{**} \circ AB_2^\rho(A) \text{ para todo } \varphi \in F^*.$$

Para todo funcional positivo $\varphi \in F^*$ é positivo, $\varphi \circ A$ é uma forma bilinear positiva e quase Dunford-Pettis, portanto $AB_2^\rho(\varphi \circ A)$ é fracamente positivamente limited pelo Teorema 5.2.9. Isso implica que $\varphi^{**} \circ AB_2^\rho(A)$ é fracamente positivamente limited. Sejam $(x_n^{**})_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva em E_1^{**} tal que $x_n^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$ e $(y_n^{**})_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva limitada em E_2^{**}. Para todo $\psi \in F^*$,

$$\begin{aligned} |AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**})(\psi)| &\leq AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**})(|\psi|) = |\psi|^{**}(AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**})) \\ &= (|\psi|^{**} \circ AB_2^\rho(A))(x_n^{**}, y_n^{**}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Segue que $AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**}) \xrightarrow{\omega^*} 0$ em F^{**}. De modo análogo obtemos $AB_2^\rho(A)(z_n^{**}, w_n^{**}) \xrightarrow{\omega^*} 0$ para toda sequência positiva $(w_n^{**})_{n=1}^\infty$ em E_2^{**} tal que $w_n^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$ e toda sequência $(z_n^{**})_{n=1}^\infty$ positiva limitada em E_1^{**}.

Suponha primeiramente que (b) ocorra. Neste caso, $\|AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**})\| \longrightarrow 0$, o que prova que $AB_2^\rho(A)$ é fracamente positivamente limited.

Suponha agora que (a) ocorra e seja $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva disjunta e limitada em F^*. Existe então $\varphi \in F^*$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq \varphi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como cada funcional $AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**}): F^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é positivo,

$$0 \leq AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**})(\varphi_n) \leq AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**})(\varphi) \longrightarrow 0.$$

Isso nos permite concluir que $AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**})(\varphi_n) \longrightarrow 0$. Por [40, Corollary 2.7] segue que $\|AB_2^\rho(A)(x_n^{**}, y_n^{**})\| \longrightarrow 0$.

Analogamente prova-se que $\|AB_2^{\rho}(A)(z_n^{**}, w_n^{**})\| \longrightarrow 0$, portanto obtemos que $AB_2^{\rho}(A)$ é fracamente positivamente limited. $\square$

Observe que, para a forma bilinear contínua A do Exemplo 5.2.8, não é verdade que $A^{***}(x_n^{**}, y_n^{**}) \longrightarrow 0$ para toda sequência limitada $(x_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ em ℓ_1^{**} e toda sequência positiva $(y_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ em c_0^{**} tal que $y_n^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$. O resultado a seguir mostra que o motivo disso ocorrer é que um dos duais dos espaços do domínio, a saber $\ell_1^* = \ell_\infty$, não tem a propriedade positiva de Schur.

Teorema 5.2.11. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach tais que seus duais têm a propriedade positiva de Schur e $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m)$. Então $A^{*(m+1)}(x_{1,n}^{**}, \dots, x_{m,n}^{**}) \longrightarrow 0$ para toda sequência positiva $(x_{m,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E_m^{**} tal que $x_{m,n}^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$ e toda sequência limitada $(x_{k,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E_k^{**}, $k = 1, \dots, m-1$. Em particular, A e sua extensão de Aron-Berner $A^{*(m+1)}$ são quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Faremos a demonstração no caso em que $m = 4$. O argumento aplicado deixará claro que o caso geral é análogo. Relembre que, para todos $x_i^{**} \in E_i^{**}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $A^{*(5)}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}, x_4^{**}) = \left(\overline{x_1^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_2^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_3^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_4^{**}}^{\theta}\right)(A)$, onde os operadores

$$\overline{x_i^{**}}^{\theta} : \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_i) \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_{i-1})$$

são dados por $\overline{x_i^{**}}^{\theta}(B)(x_1, \dots, x_{i-1}) = x_i^{**}(B(x_1, \dots, x_{i-1}, \bullet))$. Suponha que o operador A seja positivo.

Afirmação 1. $\|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_1, x_2, \bullet)\| \longrightarrow 0$ para todos $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ e toda sequência positiva $(x_{4,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E_4^{**} tal que $x_{4,n}^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$.

Para ver isto, note que pela Proposição 2.1.2,

$$|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_1, x_2, \bullet)|(x_3) \leq \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|, |x_2|, \bullet)|(x_3) = x_{4,n}^{**}(A(|x_1|, |x_2|, x_3, \bullet)) \longrightarrow 0,$$

e portanto $|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_1, x_2, \bullet)| \xrightarrow{\omega^*} 0$. Considere o operador linear positivo

$$T_3 : E_3 \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_1, E_2; E_4^*), \; T_3(x_3)(x_1, x_2)(x_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Uma vez que E_1^*, E_2^*, E_4^* têm a propriedade positiva de Schur, por [20, Theorem 2.8] o espaço $\mathcal{L}_r(E_1, E_2; E_4^*)$ também tem a propriedade positiva de Schur, o que garante que o operador T_3 é quase Dunford-Pettis. Seja $(x_{3,n})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta limitada em E_3^+. Por hipótese, E_3^* tem a propriedade positiva de Schur, logo sua norma é ordem contínua, e então $x_{3,n} \xrightarrow{\omega} 0$ por [62, Theorem 2.4.14]. Segue que $\|T_3(x_{3,n})\| \longrightarrow 0$ e

$$\begin{aligned}
|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_1, x_2, \bullet)(x_{3,n})| &\leq \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|, |x_2|, x_{3,n})| = x_{4,n}^{**}(A(|x_1|, |x_2|, x_{3,n}, \bullet)) \\
&= x_{4,n}^{**}(T_3(x_{3,n})(|x_1|, |x_2|) \\
&\leq \|x_{4,n}^{**}\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \|T_3(x_{3,n})\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

A Afirmação 1 decorre agora de [40, Corollary 2.7].

Afirmação 2. $\|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_1,\bullet)\| \longrightarrow 0$ para todo $x_1 \in E_1$, toda sequência limitada $(x_{3,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E_3^{**} e toda sequência positiva $(x_{4,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E_4^{**} tal que $x_{4,n}^{**}\xrightarrow{\omega^*} 0$.

De fato, aplicando a Proposição 2.1.2 e a Afirmação 1, temos

$$\begin{aligned}|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_1,\bullet)|(x_2) &\leq \big(\overline{|x_{3,n}^{**}|}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(|x_1|,x_2) = \overline{|x_{3,n}^{**}|}^{\theta}\big(\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)\big)(|x_1|,x_2)\\ &= |x_{3,n}^{**}|\big(\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_2,\bullet)\big)\\ &\leq \|x_{3,n}^{**}\|\cdot\|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_2,\bullet)\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Disso segue que $|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_1,\bullet)|\xrightarrow{\omega^*} 0$ em E_2^*. Seja $T_2:\ E_2 \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_1,E_3;E_4^*)$ o operador linear positivo dado por

$$T_2(x_2)(x_1,x_3)(x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

Assim como fizemos antes, como E_1^*, E_3^*, E_4^* têm a propriedade positiva de Schur, por [20, Theorem 2.8] o espaço $\mathcal{L}_r(E_1,E_3;E_4^*)$ também tem essa propriedade, e portanto o operador T_2 é quase Dunford-Pettis. Seja $(x_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta limitada em E_2^+. Também como fizemos antes, E_2^* tem norma ordem contínua, donde segue, por [62, Theorem 2.4.14], que $x_{2,n}\xrightarrow{\omega} 0$. Daí, $\|T_2(x_{2,n})\| \longrightarrow 0$, e de

$$\begin{aligned}|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},\bullet)(x_3)| &\leq \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},|x_3|)| = x_{4,n}^{**}(A(|x_1|,x_{2,n},|x_3|,\bullet))\\ &= x_{4,n}^{**}(T_2(x_{2,n})(|x_1|,|x_3|))\\ &\leq \|x_{4,n}^{**}\|\cdot\|x_1\|\cdot\|x_3\|\cdot\|T_2(x_{2,n}\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

obtemos $\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},\bullet)\xrightarrow{\omega^*} 0$. Para toda sequência disjunta limitada $(x_{3,n})_{n=1}^{\infty}$ em E_3^+,

$$\begin{aligned}0 \leq \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},\bullet)(x_{3,n}) &= \overline{x_{m,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},x_{3,n})| \leq x_{4,n}^{**}(A(|x_1|,x_{2,n},x_{3,n},\bullet))\\ &= x_{4,n}^{**}(T_2(x_{2,n})(x_1,x_{3,n}))\\ &\leq \|x_{4,n}^{**}\|\cdot\|x_1\|\cdot\|x_{3,n}\|\cdot\|T_2(x_{2,n})\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},\bullet)(x_{3,n}) \longrightarrow 0$. Aplicando [40, Corollary 2.7] uma vez mais obtemos $\|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},\bullet)\| \longrightarrow 0$, e pela Proposição 2.1.2,

$$\begin{aligned}|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_1,\bullet)(x_{2,n})| &= |\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_1,x_{2,n})| \leq \overline{|x_{3,n}^{**}|}^{\theta}\big(\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)\big)(|x_1|,x_{2,n})\\ &= |x_{3,n}^{**}|\big(\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},\bullet)\big)\\ &\leq \|x_{3,n}^{**}\|\cdot\|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(|x_1|,x_{2,n},\bullet)\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

A Afirmação 2 segue de [40, Corollary 2.7].

Afirmação 3. $\|\big(\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)\| \longrightarrow 0$ para toda sequência $(x_{j,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ limitada em E_j^{**}, $j = 2,3$, e toda sequência positiva $(x_{4,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ em E_4^{**} tal que $x_{4,n}^{**}\xrightarrow{\omega^*} 0$.

Pela Afirmação 2,

$$\begin{aligned}|\big(\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_1)| &= |\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta}\big(\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)\big)(x_1)|\\ &= |x_{2,n}^{**}\big(\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_1,\bullet)\big)|\\ &\leq \|x_{2,n}^{**}\|\cdot\|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_1,\bullet)\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

donde concluímos que $\big(\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)\xrightarrow{\omega^*} 0$. Vejamos que, para toda sequência disjunta limitada $(x_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ em E_1^+, $\big(\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{m,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n}) \longrightarrow 0$. Para isso, seja $T_1 : E_1 \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_2,E_3;E_4^*)$ o operador linear positivo dado por

$$T_1(x_1)(x_2,x_3)(x_4) = A(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

Por hipótese E_2^*, E_3^*, E_4^* têm a propriedade positiva de Schur, logo o espaço $\mathcal{L}_r(E_2,E_3;E_4^*)$ também tem essa propriedade por [20, Theorem 2.8], e portanto o operador T_1 é quase Duford-Pettis. Mais uma vez a propriedade positiva de Schur de E_1^* implica que sua norma é ordem contínua, e daí $x_{1,n}\xrightarrow{\omega} 0$ por [62, Theorem 2.4.14]. Segue que $\|T_1(x_{1,n})\| \longrightarrow 0$ e, pela Proposição 2.1.2,

$$\begin{aligned}|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_2,\bullet)|(x_3) &\leq \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},|x_2|,x_3) = x_{4,n}^{**}(A(x_{1,n},|x_2|,x_3,\bullet))\\ &= x_{4,n}^{**}(T_1(x_{1,n})(|x_2|,x_3))\\ &\leq \|x_{4,n}^{**}\|\cdot\|x_2\|\cdot\|x_3\|\cdot\|T_1(x_{1,n})\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Temos então $|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_2,\bullet)|\xrightarrow{\omega^*} 0$. Para toda sequência disjunta limitada $(x_{3,n})_{n=1}^{\infty}$ em E_3^+,

$$\begin{aligned}|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_2,\bullet)(x_{3,n})| &= |\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_2,x_{3,n})| = |x_{4,n}^{**}(A(x_{1,n},x_2,x_{3,n},\bullet))|\\ &= |x_{4,n}^{**}(T_1(x_{1,n})(x_2,x_{3,n}))|\\ &\leq \|x_{4,n}^{**}\|\cdot\|x_2\|\cdot\|x_{3,n}\|\cdot\|T_1(x_{1,n}\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Por [40, Corolário 2.7], $\|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_2,\bullet)\| \longrightarrow 0$ e, pela Proposição 2.1.2,

$$\begin{aligned}|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n},\bullet)|(x_2) &\leq \big(\overline{|x_{3,n}^{**}|}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n},x_2) = \overline{|x_{3,n}^{**}|}^{\theta}\big(\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)\big)(x_{1,n},x_2)\\ &= |x_{3,n}^{**}|\big(\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_2,\bullet)\big)\\ &\leq \|x_{3,n}^{**}\|\cdot\|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},|x_2|,\bullet)\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Segue que $|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta}\circ\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n},\bullet)| \xrightarrow{\omega^*} 0$ em E_2^*. Para toda sequência disjunta limitada $(x_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ em E_2^+,

$$\begin{aligned}|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_{2,n},\bullet)(x_3)| &= |\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_{2,n},x_3)| = |x_{4,n}^{**}(A(x_{1,n},x_{2,n},x_3,\bullet))|\\ &= |x_{4,n}^{**}(T_1(x_{1,n})(x_{2,n},x_3))|\\ &\leq \|x_{4,n}^{**}\|\cdot\|x_{2,n}\|\cdot\|x_3\|\cdot\|T_1(x_{1,n})\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Concluímos que $\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n},x_{2,n},\bullet)\xrightarrow{\omega^*} 0$. Para toda sequência disjunta limitada $(x_{3,n})_{n=1}^{\infty}$

em E_3^+,

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n}, x_{2,n}, \bullet)(x_{3,n}) &= \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}) = x_{4,n}^{**}(A(x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}, \bullet)) \\ &= x_{4,n}^{**}(T_1(x_{1,n})(x_{2,n}, x_{3,n})) \\ &\leq \|x_{4,n}^{**}\| \cdot \|x_{2,n}\| \cdot \|x_{3,n}\| \cdot \|T_1(x_{1,n})\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que $\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n}, x_{2,n}, \bullet)(x_{3,n}) \longrightarrow 0$. Uma vez mais obtemos $\|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n}, x_{2,n}, \bullet)\| \longrightarrow 0$ por [40, Corollary 2.7], e assim,

$$\begin{aligned} |\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n}, \bullet)(x_{2,n})| &= |\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n}, x_{2,n})| \leq \overline{|x_{3,n}^{**}|}^{\theta}\big(\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)\big)(x_{1,n}, x_{2,n}) \\ &= |x_{3,n}^{**}|\big(\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n}, x_{2,n}, \bullet)\big) \\ &\leq \|x_{3,n}^{**}\| \cdot \|\overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}(A)(x_{1,n}, x_{2,n}, \bullet)\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Aplicando [40, Corolário 2.7] pela penúltima vez obtemos $\|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n}, \bullet)\| \longrightarrow 0$, e portanto

$$\begin{aligned} |\big(\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n})| &= |\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta}\big(\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)\big)(x_{1,n})| \\ &= |x_{2,n}^{**}\big(\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n}, \bullet)\big)| \\ &= \|x_{2,n}^{**}\| \cdot \|\big(\overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n}, \bullet)\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Segue que $\big(\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)(x_{1,n}) \longrightarrow 0$. Uma última aplicação de [40, Corollray 2.7] nos fornece a Afirmação 3.

Finalmente, sejam $(x_{j,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ sequências limitadas em E_j^{**}, $j = 1, 2, 3$, e $(x_{4,n}^{**})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em E_4^{**} tal que $x_{4,n}^{**} \xrightarrow{\omega^*} 0$. Pela Afirmação 3,

$$\begin{aligned} |A^{*(5)}(x_{1,n}^{**}, \dots, x_{4,n}^{**})| &= |\big(\overline{x_{1,n}^{**}}^{\theta} \circ \cdots \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)| = |x_{1,n}^{**}\big(\big(\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)\big)| \\ &\leq \|x_{1,n}^{**}\| \cdot \|\big(\overline{x_{2,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{3,n}^{**}}^{\theta} \circ \overline{x_{4,n}^{**}}^{\theta}\big)(A)\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

o que prova que $A^{*(5)}(x_{1,n}^{**}, \dots, x_{4,n}^{**}) \longrightarrow 0$, como queríamos demonstrar.

Para o caso em que o operador A é regular, tome operadores m-lineares positivos A_1, A_2 tais que $A = A_1 - A_2$. Note que $A^{*(5)} = A_1^{*(5)} - A_2^{*(5)}$ e, pelo que foi feito acima, $A_j^{*(5)}(x_{1,n}^{**}, \dots, x_{4,n}^{**}) \longrightarrow 0$ para $j = 1, 2$. Portanto, $A^{*(5)}(x_{1,n}^{**}, \dots, x_{4,n}^{**}) \longrightarrow 0$. Em particular, $A^{*(5)}$ é quase Dunford-Pettis e, pelo Lema 5.2.3(a), A é quase Dunford-Pettis. A demonstração está completa. □

Chegamos finalmente ao caso dos operadores multilineares a valores vetoriais.

Teorema 5.2.12. *Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ reticulados de Banach tais que $E_1^*, \dots, E_m^*$ têm a propriedade positiva de Schur e $A \in \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_m; F)$. Suponha que pelo menos uma das seguintes condições ocorra.*
(a) *F^* tem a propriedade positiva de Schur dual.*
(b) *Toda sequência positiva disjunta e limitada em F^* é ordem limitada.*

Então $\|A^{*(m+1)}(x^{**}_{1,n},\dots,x^{**}_{m,n})\| \longrightarrow 0$ *para toda sequência positiva* $(x^{**}_{m,n})_{n=1}^{\infty}$ *em* E^{**}_m *tal que* $x^{**}_{m,n} \xrightarrow{\omega^*} 0$ *e todas sequências limitadas* $(x^{**}_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ *em* E^{**}_k, $k = 1,\dots,m-1$. *Em particular, A e sua extensão de Aron-Berner* $A^{*(m+1)}$ *são quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Como A é regular, podemos escrever $A = A_1 - A_2$ onde A_1 e A_2 são operadores m-lineares positivos. Dessa forma temos $A^{*(m+1)} = A_1^{*(m+1)} - A_2^{*(m+1)}$. Seja $(x^{**}_{m,n})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em E^{**}_m tal que $x^{**}_{m,n} \xrightarrow{\omega^*} 0$ e sejam $(x^{**}_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ sequências limitadas em E^{**}_k, $k = 1,\dots,m-1$. Para cada funcional $y^* \in F^*$ temos $y^*\circ A_i \in \mathcal{L}_r(E_1,\dots,E_m)$, $i = 1,2$, logo $(y^*\circ A_i)^{*(m+1)}(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n}) \longrightarrow 0$ pelo Teorema 5.2.11. De

$$\begin{aligned}
\big|\,|A^{*(m+1)}(x^{**}_{1,n},\dots,x^{**}_{m,n})|(y^*)\big| &\le |A^{*(m+1)}|(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n})(|y^*|)\\
&= |A_1^{*(m+1)} - A_2^{*(m+1)}|(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n})(|y^*|)\\
&\le \left(A_1^{*(m+1)} + A_2^{*(m+1)}\right)(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n})(|y^*|)\\
&= \sum_{i=1}^{2}(|y^*|\circ A_i)^{*(m+1)}(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n}) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

segue que a sequência positiva $(|A^{*(m+1)}(x^{**}_{1,n},\dots,x^{**}_{m,n})|)_{n=1}^{\infty}$ converge para zero na topologia ω^* de F^{**}. Supondo que ocorra (a), segue que $\|A^{*(m+1)}(x^{**}_{1,n},\dots,x^{**}_{m,n})\| \longrightarrow 0$, como queríamos. Agora suponha que ocorra (b) e seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência positiva disjunta e limitada em F^*. Existe então um funcional $\varphi \in F^*$ tal que $0 \le \varphi_n \le \varphi$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De

$$\begin{aligned}
|A^{*(m+1)}(x^{**}_{1,n},\dots,x^{**}_{m,n})(\varphi_n)| &\le |A^{*(m+1)}|(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n})(\varphi_n)\\
&\le |A^{*(m+1)}|(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n})(\varphi)\\
&= |A_1^{*(m+1)} - A_2^{*(m+1)}|(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n})(\varphi)\\
&\le A_1^{*(m+1)}(x^{**}_{1,n},\dots,x^{**}_{m,n})(\varphi) + A_2^{*(m+1)}(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n})(\varphi)\\
&= \left((\varphi\circ A_1)^{*(m+1)} + (\varphi\circ A_2)^{*(m+1)}\right)(|x^{**}_{1,n}|,\dots,|x^{**}_{m-1,n}|,x^{**}_{m,n}) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

concluímos que $A^{*(m+1)}(x^{**}_{1,n},\dots,x^{**}_{m,n})(\varphi_n) \longrightarrow 0$. A convergência desejada, a saber $\|A^{*(m+1)}(x^{**}_{1,n},\dots,x^{**}_{m,n})\| \longrightarrow 0$, segue agora de [40, Corollary 2.7].

Em particular, em ambos os casos $A^{*(m+1)}$ é quase Dunford-Pettis, e o Lema 5.2.3(a) nos garante que A também é quase Dunford-Pettis. □

Observação 5.2.13. Com as modificações óbvias, as conclusões dos Teoremas 5.2.11 e 5.2.12 se verificam para todas as extensões de Aron-Berner AB^{ρ}_m, $\rho \in S_m$ de A.

Exemplo 5.2.14. Quanto às hipóteses dos Teoremas 5.2.11 e 5.2.12, vejamos alguns exemplos:

(i) AL-espaços têm a propriedade positiva de Schur (veja [78, p. 16], e portanto duais de AM-espaços têm essa propriedade. Em particular, duais de espaços $C(K)$, com K compacto Hausdorff, e $L_1(\mu)^*$ têm a propriedade positiva de Schur. Mais em particular ainda, o dual de ℓ_∞ tem a propriedade positiva de Schur. Além disso, se os reticulados de Banach $E_1,\dots,E_m$ têm a propriedade positiva de Schur, então o dual do produto tensorial projetivo positivo $E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_m$ também tem a propriedade positiva de Schur por [20, Proposition 4.3].

(ii) Para todo compacto Hausdorff K, o espaço $C(K)$ tem a propriedade positiva de Schur dual (veja [79, Example 4]), e o quociente de um reticulado de Banach com essa propriedade por um ideal fechado também tem essa propriedade (veja [79, p. 763]). Em particular, ℓ_∞/c_0 tem a propriedade positiva de Schur dual.

(iii) É claro que, para todo compacto Hausdorff K, sequências positivas disjuntas e limitadas no espaço $C(K)$ são ordem limitadas.

Finalizaremos nosso estudo com um resultado sobre operadores multilineares quase Dunford-Pettis tomando valores em f-álgebras de Banach.

Sejam $E_1, \dots, E_m$, reticulados de Banach e $(\mathcal{A}, *)$ uma f-álgebra de Banach. Relembre que um operador m-linear $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathcal{A}$ é *multiplicativo* se existem operadores lineares $T_i: E_i \longrightarrow \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, m$, tais que $A(x_1, \dots, x_m) = T_1(x_1) * \cdots * T_m(x_m)$ para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$.

Veremos no exemplo a seguir que operadores multilineares regulares multiplicativos nem sempre são quase Dunford-Pettis e suas extensões de Aron-Berner nem sempre são fracamente positivamente limited. Para o seguinte exemplo, em c_0 defina o seguinte produto: $x \cdot y = (x_n y_n)_{n=1}^\infty$, com $x = (x_n)_{n=1}^\infty$, $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in c_0$. É claro que $(c_0, \cdot)$ é uma álgebra e satisfaz as propriedades de f-álgebra. Para mais detalhes veja [5, p. 122-126]

Exemplo 5.2.15. Considere o operador bilinear multiplicativo

$$A: c_0 \times c_0 \longrightarrow c_0\ ,\ A(x, y) = (x_n y_n)_{n=1}^\infty = \mathrm{id}_{c_0}(x) \cdot \mathrm{id}_{c_0}(y).$$

Note que as extensões de Aron-Berner de A coincidem e são dadas por

$$A^{***}(z, w) = (z_n w_n)_{n=1}^\infty = AB_2^{id}(A)(z, w),$$

para todas sequências $z = (z_n)_{n=1}^\infty$, $w = (w_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$. A sequência $(e_n)_{n=1}^\infty$ é disjunta e $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ em c_0, mas $\|A(e_n, e_n)\| = 1 = \|A^{***}(e_n, e_n)\|$ para todo n. Isso mostra que A e suas extensões de Aron-Berner não são quase Dunford-Pettis, em particular as extensões de Aron-Berner de A não são fracamente positivamente limited.

Proposição 5.2.16. *Sejam $E_1, \dots, E_m$, reticulados de Banach, $(\mathcal{A}, *)$ uma f-álgebra de Banach e $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathcal{A}$ um operador m-linear multiplicativo, digamos $A(x_1, \dots, x_m) = T_1(x_1) * \cdots * T_m(x_m)$, em que cada $T_i: E_i \longrightarrow \mathcal{A}$ é um operador linear.*
(a) *Se os operadores T_j^{**}, $j = 1, \dots, m$, são quase limited, então todas as extensões de Aron-Berner de A são fracamente positivamente limited.*
(b) *Se T_j^{**} é quase Dunford-Pettis para algum $j \in \{1, \dots, m\}$, então A e todas as suas extensões de Aron-Berner são quase Dunford-Pettis.*

Demonstração. Pela Observação 2.1.4 sabemos que para toda permutação $\rho \in S_m$ e todos vetores $x_1^{**} \in E_1^{**}, \dots, x_m^{**} \in E_m^{**}$,

$$AB_m^\rho(A)(x_1^{**}, \dots, x_m^{**}) = T_{\rho(m)}^{**}(x_{\rho(m)}^{**}) \odot \cdots \odot T_{\rho(1)}^{**}(x_{\rho(1)}^{**}),$$

onde $\odot$ é o produto de Arens que torna $\mathcal{A}^{**}$ uma f-álgebra de Banach (veja [74, Theorem 2.2]).

(a) Seja $(x^{**}_{j,n})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência disjunta em E_j^{**} tal que $x^{**}_{j,n} \xrightarrow{\omega^*} 0, j \in \{1, \dots, m\}$, e $(x^{**}_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ sequências positivas e limitadas em E_i^{**}, $i = 1, \dots, m$, $i \neq j$. Como o operador $T^{**}_{\rho(k)}$ é quase limited por hipótese, temos $\|T^{**}_{\rho(k)}(x^{**}_{\rho(k),n})\| \longrightarrow 0$, onde $j = \rho(k)$ para algum $k \in \{1, \dots, m\}$, pois ρ é uma permutação do conjunto $\{1, \dots, m\}$. Por outro lado, podemos tomar $M_l > 0$, $l \neq k$, tais que $\|x^{**}_{\rho(l),n}\| \leq M_l$. Por $(\mathcal{A}^{**}, \odot)$ ser uma f-álgebra de Banach, temos

$$\begin{aligned}
\|AB^{\rho}_m(A)(x^{**}_{1,n}, \dots, x^{**}_{m,n})\| &= \|T^{**}_{\rho(m)}(x^{**}_{\rho(m),n}) \odot \cdots \odot T^{**}_{\rho(k)}(x^{**}_{\rho(k),n}) \odot \cdots \odot T^{**}_{\rho(1)}(x^{**}_{\rho(1),n})\| \\
&\leq \|T^{**}_{\rho(m)}(x^{**}_{\rho(m),n})\| \cdots \|T^{**}_{\rho(k)}(x^{**}_{\rho(k),n})\| \cdots \|T^{**}_{\rho(1)}(x^{**}_{\rho(1),n})\| \\
&\leq \|T^{**}_{\rho(m)}\|\|x^{**}_{\rho(m),n}\| \cdots \|T^{**}_{\rho(k)}(x^{**}_{\rho(k),n})\| \cdots \|T^{**}_{\rho(1)}\|\|x^{**}_{\rho(1),n}\| \\
&\leq \|T^{**}_{\rho(m)}\|M_m \cdots \|T^{**}_{\rho(k)}(x^{**}_{\rho(k),n})\| \cdots \|T^{**}_{\rho(1)}\|M_1 \\
&= \|T^{**}_{\rho(m)}\|M_m \cdots \|T^{**}_{\rho(j+l)}\|M_{j+l}\|T^{**}_{\rho(j-l)}\|M_{j-l} \cdots \|T^{**}_{\rho(l)}\|M_l\|T^{**}_{\rho(k)}(x^{**}_{\rho(k),n})\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Segue que $\|AB^{\rho}_m(A)(x^{**}_{1,n}, \dots, x^{**}_{m,n})\| \longrightarrow 0$, e isso prova que todas as extensões de Aron-Berner de A são fracamente positivamente limited.

(b) Sejam $(x^{**}_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ sequências disjuntas em E_i^{**} tais que $x^{**}_{i,n} \xrightarrow{\omega} 0$, $i = 1, \dots, m$. Por hipótese, $\|T^{**}_{\rho(j)}(x^{**}_{\rho(j),n})\| \longrightarrow 0$, além disso, também obtemos que $T^{**}_{\rho(k)}(x^{**}_{\rho(k),n}) \xrightarrow{\omega} 0$ para $k = 1, \dots, m$, $k \neq j$. Como sequências fracamente convergentes são limitadas, existem constantes $M_k > 0$, $k \neq j$, tais que $\|T^{**}_{\rho(k)}(x^{**}_{\rho(k),n})\| \leq M_k$. Como $(\mathcal{A}^{**}, \odot)$ é uma álgebra de Banach, temos

$$\begin{aligned}
\|AB^{\rho}_m(A)(x^{**}_{1,n}, \dots, x^{**}_{m,n})\| &= \|T^{**}_{\rho(m)}(x^{**}_{\rho(m),n}) \odot \cdots \odot T^{**}_{\rho(j)}(x^{**}_{\rho(j),n}) \odot \cdots \odot T^{**}_{\rho(1)}(x^{**}_{\rho(1),n})\| \\
&\leq \|T^{**}_{\rho(m)}(x^{**}_{\rho(m),n})\| \cdots \|T^{**}_{\rho(j)}(x^{**}_{\rho(j),n})\| \cdots \|T^{**}_{\rho(1)}(x^{**}_{\rho(1),n})\| \\
&\leq M_m \cdots M_{j+1}M_{j-1} \cdots M_1\|T^{**}_{\rho(j)}(x^{**}_{\rho(j),n})\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

provando que $AB^{\rho}_m(A)$ é quase Dunford-Pettis. O Lema 5.2.3 nos garante que A é quase Dunford-Pettis. □

Pelo Exemplo 5.2.15 sabemos que, na Proposição 5.2.16, a hipótese de que os biadjuntos T_i^{**}, $i = 1, \dots, m$, sejam quase limited e a hipótese de que algum dos operadores T_j^{**} seja quase Dunford-Pettis são essenciais.

Concluímos nosso estudo com o seguinte corolário.

Corolário 5.2.17. *Sejam $m > 3$, $E_1, \dots, E_m$ reticulados de Banach, $(\mathcal{A}, *)$ uma f-álgebra de Banach, φ um funcional linear em E_1 e $T_i : E_i \longrightarrow \mathcal{A}$ operadores lineares, $i = 2, \dots, m$. Então o operador m-linear*

$$A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathcal{A}\ ,\ A(x_1, \dots, x_m) = \varphi(x_1)T_2(x_2) * \cdots * T_m(x_m),$$

e todas as suas extensões de Aron-Berner são quase Dunford-Pettis.

Bibliografia

[1] Y. Abramovich and G. Sirotkin. *On order convergence of nets*. Positivity. Springer Nature BV, vol. 9, no. 3, 2005, pp. 287–292 (ver p. 15).

[2] J. Alaminos; M. L. C. Godoy and A. R. Villena. *Orthogonally additive polynomials on non-commutative L^p-spaces*. Revista Matemática Complutense. Springer, vol. 33, no. 3, 2020, pp. 835–858 (ver p. 65).

[3] F. Albiac and C. Leránoz. *Uniqueness of unconditional basis in Lorentz sequence spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 136, no. 5, 2008, pp. 1643–1647 (ver p. 41).

[4] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw. *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics, no. 105*. American Mathematical Society, 2003 (ver pp. 10, 21, 51, 69, 91).

[5] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw. *Positive Operators*. Springer Science & Business Media, 2006 (ver pp. 5, 6, 12–16, 36, 41–43, 47, 48, 50, 68, 74, 77, 78, 89, 91, 93, 101).

[6] B. Aqzzouz and A. Elbour. *Some characterizations of almost Dunford–Pettis operators and applications*. Positivity. Springer, vol. 15, no. 3, 2011, pp. 369–380 (ver pp. 2, 68, 82).

[7] B. Aqzzouz; A. Elbour and A. W. Wickstead. *Positive almost Dunford–Pettis operators and their duality*. Positivity. Springer, vol. 15, no. 2, 2011, pp. 185–197 (ver pp. 2, 68, 71, 91).

[8] H. Ardakani and M. Salimi. *L-Dunford-Pettis and Almost L-Dunford-Pettis Sets in Dual Banach Lattices*. International Journal of Analysis and Applications, vol. 16, no. 2, 2018, pp. 149–161 (ver p. 67).

[9] R. Arens. *The adjoint of a bilinear operation*. Proceedings of the American Mathematical Society, JSTOR, vol. 2, no. 6, 1951, pp. 839–848 (ver pp. 1, 21, 26).

[10] R. M. Aron and M. Schottenloher. *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*. Journal of Functional Analysis. Elsevier, vol. 21, no. 1, 1976, pp. 7–30 (ver pp. 1, 2).

[11] R. M. Aron and P. D. Berner. *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*. Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 106, 1978, pp. 3–24 (ver pp. 1, 21).

[12] R. M. Aron; B. Cole and T. W. Gamelin. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach spaces*. Journal für die reine und angewandte Mathematik . Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1991 (ver p. 65).

[13] R. M. Aron; D. García and M. Maestre. *On norm attaining polynomials*. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Research Institute for Mathematical Sciences, vol. 39, no. 1, 2003, pp. 165–172 (ver pp. 2, 21).

[14] R. Aron; P. Galindo; D. Pinasco and I. Zalduendo. *Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space.* Bulletin of the London Mathematical Society, Oxford University Press, vol. 48, no. 5, 2016, pp. 779–796 (ver pp. 2, 21).

[15] F. Bombal and I. Villanueva. *Multilinear operators on spaces of continuous functions.* Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici, vol. 26, 1998, pp. 117–126 (ver pp. 1, 83, 87, 88).

[16] G. Botelho and J. L. P. Luiz. *On the Schur, positive Schur and weak Dunford-Pettis properties in Fréchet lattices.* Annales Fennici Mathematici, no. 48, 2021, pp. 633–642 (ver p. 70).

[17] G. Botelho and J. R. Campos. *Type and cotype of multilinear operators.* Revista Matemática Complutense. Springer, vol. 29, no. 3, 2016, pp. 659–676 (ver pp. 2, 21).

[18] G. Botelho; D. Pellegrino and E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2a. Edição, 2015 (ver p. 10).

[19] G. Botelho; P. Galindo and L. Pellegrini. *Uniform approximation on ideals of multilinear mappings.* Mathematica Scandinavica. JSTOR, 2010, pp. 301–319 (ver pp. 2, 21).

[20] G. Botelho; Q. Bu; D. Ji and K. Navoyan. *The positive Schur property on positive projective tensor products and spaces of regular multilinear operators.* Monatshefte für Mathematik. Springer, vol. 197, no. 4, 2022, pp. 565–578 (ver pp. 1, 67, 96–98, 100).

[21] K. Boulabiar. *Some aspects of Riesz multimorphisms.* Indagationes Mathematicae, vol. 13, no. 4, 2002, pp. 419–432 (ver pp. 1, 20, 32).

[22] K. Boulabiar; G. Buskes and R. Page. *On some properties of bilinear maps of order bounded variation.* Positivity. Springer Nature BV, vol. 9, no. 3, 2005, p. 401 (ver pp. 1, 2, 20, 22).

[23] J. Bourgain and J. Diestel. *Limited operators and strict cosingularity.* Mathematische Nachrichten. Wiley Online Library, vol. 119, no. 1, 1984, pp. 55–58 (ver p. 71).

[24] C. Boyd; R. Ryan and N. Snigireva. *A Nakano Carrier Theorem for Polynomials.* arXiv preprint arXiv:2107.10337, 2021 (ver pp. 56, 65).

[25] C. Boyd; R. Ryan and N. Snigireva. *Geometry of spaces of orthogonally additive polynomials on C(K).* The Journal of Geometric Analysis. Springer, vol. 30, no. 4, 2020, pp. 4211–4239 (ver p. 65).

[26] C. Boyd; R. Ryan and N. Snigireva. *Synnatzschke's theorem for polynomials.* Positivity. Springer, vol. 25, no. 1, 2021, pp. 229–242 (ver pp. 2, 22, 26, 45, 46, 48, 49, 54, 55).

[27] Q. Bu and G. Buskes. *Polynomials on Banach lattices and positive tensor products.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier, vol. 388, no. 2, 2012, pp. 845–862 (ver p. 46).

[28] Q. Bu; Z. Shi and Y. Wang. *Polynomial versions of weak Dunford–Pettis properties in Banach lattices.* Positivity. Springer, vol. 25, no. 5, 2021, pp. 1685–1698 (ver p. 46).

[29] G. Buskes and S. Roberts. *Arens extensions for polynomials and the Woodbury–Schep formula.* Positivity and Noncommutative Analysis. Springer, 2019, pp. 37–48 (ver pp. 2, 22, 26, 45, 46, 55, 65).

[30] F. Cabello Sánchez; R. García and I. Villanueva. *Extension of multilinear operators on Banach spaces.* Extracta Mathematicae. Departamento de Matemáticas, vol. 15, no. 2, 2000, pp. 291–334 (ver pp. 22, 23, 65).

[31] P. G. Casazza and T. J. Shura. *Tsirelson's Space.* Springer, 1989 (ver pp. 11, 41).

[32] J. X. Chen; Z. L. Chen and G. X. Ji. *Almost limited sets in Banach lattices.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier, vol. 412, no. 1, 2014, pp. 547–553 (ver p. 71).

[33] R. Cilia and J. M. Gutiérrez. *Some progress on the polynomial Dunford–Pettis property.* Rendiconti Lincei, vol. 29, no. 4, 2018, pp. 679–687 (ver p. 81).

[34] A. M. Davie and T. W. Gamelin. *A theorem on polynomial-star approximation.* Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 106, no. 2, 1989, pp. 351–356 (ver pp. 22, 30, 56).

[35] B. De Pagter and A. R. Schep. *Measures of non-compactness of operators in Banach lattices.* Journal of Functional Analysis. Elsevier, vol. 78, no. 1, 1988, pp. 31–55 (ver p. 74).

[36] A. Defant and K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals.* Elsevier, 1992 (ver p. 67).

[37] J. Diestel; H. Jarchow and A. Pietsch. *Operator Ideals.* Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Elsevier Amsterdam, vol. 1, 2001, pp. 437–496 (ver p. 67).

[38] J. Diestel; H. Jarchow and A. Tonge. *Absolutely Summing Operators.* 43. Cambridge University Press, 1995 (ver p. 67).

[39] S. Dineen. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.* Springer Science & Business Media, 2012 (ver pp. 2, 21, 59, 64, 81, 88).

[40] P. G. Dodds and D. H. Fremlin. *Compact operators in Banach lattices.* Israel Journal of Mathematics. Springer, vol. 34, no. 4, 1979, pp. 287–320 (ver pp. 74, 78, 80, 94–100).

[41] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators, part 1: General Theory.* John Wiley & Sons, vol. 10, 1988 (ver p. 59).

[42] K. El Fahri and F. Z. Oughajji. *On the class of almost order (L) sets and applications.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2. Springer, vol. 70, no. 1, 2021, pp. 235–245 (ver p. 67).

[43] K. El Fahri and J. H'michane. *The relationship between almost Dunford-Pettis operators and almost limited operators.* Quaestiones Mathematicae. Taylor & Francis, vol. 39, no. 4, 2016, pp. 487–496 (ver pp. 2, 71).

[44] A. Elbour. *Some characterizations of almost limited operators.* Positivity. Springer, vol. 21, no. 3, 2017, pp. 865–874 (ver pp. 2, 71, 73).

[45] A. Elbour; N. Machrafi and M. Moussa. *On the class of weak almost limited operators.* Quaestiones Mathematicae. Taylor & Francis, vol. 38, no. 6, 2015, pp. 817–827 (ver p. 72).

[46] M. Fabian; P. Habala; P. Hájek; V. Montesinos and V. Zizler. *Banach Space Theory: the Basis for Linear and Nonlinear Analysis.* Springer, 2011 (ver p. 64).

[47] E. M. Galego; M. Gonzáles and J. Pello. *On subprojectivity and superprojectivity of Banach spaces.* Results in Mathematics. Springer, vol. 71, no. 3, 2017, pp. 1191–1205 (ver p. 41).

[48] P. Galindo and V. C. C. Miranda. *Grothendieck-type subsets of Banach lattices.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier, vol. 506, no. 1, 2022, p. 125570 (ver p. 67).

[49] L. A. Garcia. *Técnicas de extensão de operadores multilineares em espaços de Banach.* Dissertação de Mestrado, FAMAT-UFU, 2019 (ver p. 56).

[50] J. J. Grobler. *Commutativity of the Arens product in lattice ordered algebras.* Positivity. Springer, vol. 3, no. 4, 1999, pp. 357–364 (ver p. 32).

[51] A. A. Khosravi; V. Ebrahimi; R. Hamid and A. M. Peralta. *Aron–Berner extensions of triple maps with application to the bidual of Jordan Banach triple systems.* Linear Algebra and its Applications. Elsevier, vol. 580, 2019, pp. 436–463 (ver pp. 1, 83, 87, 88).

[52] A. G. Kusraev and Z. A. Kusraeva. *Factorization of order bounded disjointness preserving multilinear operators.* International Scientific Conference on Modern Methods, Problems, Applications of Operator Theory e Harmonic Analysis. Springer, 2018, pp. 217–236 (ver pp. 34, 50).

[53] Z. A. Kusraeva. *Sums of powers of orthogonally additive polynomials.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier, vol. 519, no. 2, 2023, Paper No. 126766 (ver p. 65).

[54] D. H. Leung. *Some remarks on regular Banach spaces.* Glasgow Mathematical Journal. Cambridge University Press, vol. 38, no. 2, 1996, pp. 243–248 (ver p. 65).

[55] D. Lhaimer; K. Bouras and M. Moussa. *On the class of order L-weakly and order M-weakly compact operators.* Positivity. Springer, vol. 25, no. 4, 2021, pp. 1569–1578 (ver p. 78).

[56] Y. Li and Q. Bu. *Grothendieck property for the symmetric projective tensor product.* Journal of Mathematical Study, vol. 49, no. 4, 2016, pp. 429–432 (ver pp. 2, 21).

[57] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces.* Springer, Berlin, 1997 (ver pp. 11, 40, 41).

[58] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces II: Function Spaces.* Springer Science & Business Media, vol. 97, 2013 (ver p. 40).

[59] J. Loane. *Polynomials on vector lattices.* PhD dissertation, National University of Ireland, Galway, 2007 (ver pp. 18, 19, 46, 91).

[60] M. L. Lourenço and V. C. C. Miranda. *The property (d) and the almost limited completely continuous operators.* arXiv preprint arXiv:2011.02890., 2022 (ver p. 71).

[61] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer Science & Business Media, vol. 183, 2012 (ver p. 5).

[62] P. Meyer-Nieberg. *Banach Lattices.* Springer Science & Business Media, 2012 (ver pp. 5, 7, 8, 12, 13, 16, 37, 56, 64, 70, 77, 78, 94, 96–98).

[63] A. O. Monção. *Espaços de operadores lineares, multilineares e polinômios regulares em espaços de Riesz e reticulados de Banach.* Disertação de Mestrado, FAMAT-UFU, 2022 (ver pp. 18–20).

[64] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces.* Dover Publications, 2010 (ver p. 18).

[65] J. Mujica. *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 324, no. 2, 1991, pp. 867–887 (ver p. 33).

[66] L. Narici and E. Beckenstein. *Topological Vector Spaces.* Chapman and Hall/CRC, 2010 (ver pp. 5, 10).

[67] F. Z. Oughajji; K. El fahri and M. Moussa. *On the class of almost (L) limited operators.* Acta Scientiarum Mathematicarum. Springer, vol. 87, no. 1, 2021, pp. 207–218 (ver p. 67).

[68] A. Pelczynski. *Projections in certain Banach spaces.* Studia Mathematica, vol. 2, no. 19, 1960, pp. 209–228 (ver p. 64).

[69] A. Pietsch. *History of Banach Spaces and Linear Operators.* Springer Science & Business Media, 2007 (ver p. 67).

[70] A. Retbi. *A complement of positive weak almost Dunford-Pettis operators on Banach lattices.* Archivum Mathematicum. Department of Mathematics, Faculty of Science of Masaryk University, vol. 55, no. 1, 2019, pp. 1–6 (ver p. 67).

[71] A. Retbi. *A note on L-Dunford-Pettis sets in a topological dual Banach space.* Czechoslovak Mathematical Journal. Springer, vol. 70, no. 4, 2020, pp. 1047–1057 (ver p. 67).

[72] A. Retbi. *Almost L-Dunford-Pettis sets in Banach lattices and its applications.* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, vol. 49, no. 2, 2020, pp. 599–607 (ver pp. 67, 74).

[73] H. H. Schaefer. *Banach Lattices and Positive Operators.* Springer, 1974 (ver p. 35).

[74] E. Scheffold. *Der Bidual von F-Banachverbandsalgebren.* Acta Scientiarum Mathematicarum, vol. 55, 1991, pp. 167–179 (ver pp. 1, 101).

[75] E. Scheffold. *Über die Arens-Triadjungierte Abbildung von Bimorphismen.* Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 41, 1996, pp. 697–701 (ver pp. 1, 20, 22).

[76] J. Schreier. *Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz.* Studia Mathematica, vol. 1, no. 2, 1930, pp. 58–62 (ver p. 11).

[77] B. S. Tsirelson. *Not every Banach space contains an embedding of ℓ_p or c_0.* Functional Analysis and Its Applications, no. 8, 1974, pp. 138–141 (ver p. 41).

[78] W. Wnuk. *Banach Lattices with Properties of the Schur-type: A Survey.* Conferenza del Seminario di Matematica dell'Università di Bari, no. 249, 1993, p. 25 (ver pp. 68, 70, 100).

[79] W. Wnuk. *On the dual positive Schur property in Banach lattices.* Positivity. Springer, vol. 17, no. 3, 2013, pp. 759–773 (ver pp. 71, 101).

[80] R. Yilmaz. *The Arens triadjoints of some bilinear maps.* Filomat. JSTOR, vol. 28, no. 5, 2014, pp. 963–979 (ver pp. 1, 2, 36, 49).

[81] I. Zalduendo. *Extending polynomials on Banach spaces–a survey.* Revista de la Unión Matemática Argentina. SciELO Argentina, vol. 46, no. 2, 2005, pp. 45–72 (ver p. 81).