

Álgebra c -conglomerada e c -frisos

Fernando Araujo Borges

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES/CNPq

São Paulo, 3 de janeiro de 2015

Álgebra c -conglomerada e c -frisos

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 27/11/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Kostiantyn Iusenko - IME-USP
- Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares - UFPR
- Prof.^a. Dr.^a. Sonia Elisabet Trepode - Universidade Nacional de Mar Del Plata - Argentina
- Prof. Dr. Hernan Alonso Giraldo Salazar - Universidade de Antioquia - Colômbia

Resumo

BORGES, F. A. **Álgebra c -conglomerada e c -frisos**. 2014. 80 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Neste trabalho introduzimos uma nova classe de álgebra de conglomerado com coeficientes do tipo Dynkin A_n , a qual denominaremos álgebra c -conglomerada. Desenvolvemos a teoria dos c -frisos, a qual foi introduzida por Matte, Desloges e Sanchez, para o estudo das propriedades combinatórias da álgebra c -conglomerada. Usando c -frisos, obtemos uma fórmula explícita para as variáveis de conglomerado de uma álgebra c -conglomerada que explica simultaneamente o fenômeno de Laurent e a positividade. Interpretamos geometricamente a álgebra c -conglomerada em termos de triangulações de polígonos, em que triangulações correspondem aos conglomerados e diagonais correspondem às variáveis de conglomerado de uma álgebra c -conglomerada. Além disso, generalizamos a aplicação de Caldero-Chapoton e utilizamos esta versão mais geral para obter as variáveis de conglomerado de uma álgebra c -conglomerada em função dos objetos indecomponíveis da categoria de conglomerado do tipo A_n .

Palavras-chave: álgebra de conglomerado, c -friso, aplicação de Caldero-Chapoton.

Abstract

BORGES, F. A. ***c*-Cluster algebra and *c*-friezes**. 2014. 80 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

In this work we introduce a new class of cluster algebra with coefficients of Dynkin type \mathbb{A}_n , which we call *c*-cluster algebra. In order to study the combinatorics of the *c*-cluster algebra, we develop the theory of *c*-friezes introduced by Matte, Desloges and Sanchez. Using *c*-friezes, we give an explicit formula for all cluster variables of a *c*-cluster algebra, which explains simultaneously the Laurent phenomenon and the positivity. A *c*-cluster algebra also has a geometric interpretation in terms of triangulations of a polygon, where clusters are in one-to-one correspondence with triangulations and the cluster variables are in one-to-one correspondence with diagonals. Finally, we give a generalization of the Caldero-Chapoton map which we use to obtain the cluster variables of a *c*-cluster algebra in terms of the indecomposable objects of the cluster category of type \mathbb{A}_n .

Keywords: cluster algebra, *c*-frieze, Caldero-Chapoton map.

Sumário

Lista de Símbolos	vii
Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Representações	1
1.1.1 Aljava	1
1.1.2 Diagramas Dynkin	2
1.1.3 Mutação de aljava e aljava com congelamento	3
1.1.4 Álgebra de caminhos	5
1.1.5 Módulos e representações de aljava	6
1.1.6 A aljava de Auslander-Reiten	7
1.1.7 Vetor dimensão, forma de Euler e o grupo de Grothendieck	8
1.1.8 Categoria triangulada	8
1.1.9 Categoria de homotopia	10
1.1.10 Categoria derivada	11
1.2 Geometria	13
1.2.1 Q-Grasmaniano	13
1.2.2 Triangulações	13
1.2.3 Triangulações e aljava com congelamento	16
2 Álgebra de Conglomerado de Fomin e Zelevinsky	21
2.1 Definição: álgebra de conglomerado sem coeficientes	21
2.2 Álgebra de conglomerado com coeficientes	22
2.3 Categoria Conglomerada	25
2.4 A aplicação de Caldero-Chapoton	27
3 c-Frisos	29
3.1 Introdução e exemplos	29
3.2 Definição formal de c -friso e propriedades	30
3.2.1 c -Friso de ordem infinita e regra $-c$ -modular	31
3.2.2 c -Friso de ordem n	33

3.2.3	Lema de transvecção e periodicidade de um c -friso	35
3.2.4	Secção de c -frisos	39
3.3	Caracterização de um c -friso	40
3.3.1	Regra $-c$ -modular generalizada	40
3.3.2	Caracterização de um c -friso	43
3.4	c -Friso de ordem n e triangulações de \mathcal{P}_{n+3}	45
3.5	Fenômeno de Laurent para c -frisos	52
4	Álgebra c-conglomerada	57
4.1	Definição (caso \mathbb{A}_n)	57
4.1.1	Os expoentes λ_+ e λ_-	57
4.1.2	Mutação de semente para álgebra c -conglomerada	59
4.1.3	Definição de álgebra c -conglomerada (caso \mathbb{A}_n)	61
4.2	Álgebra c -conglomerada e c -friso de ordem n	61
4.2.1	Interpretação geométrica	65
4.3	Fenômeno de Laurent para álgebra c -conglomerada	67
4.4	Categoria conglomerada e álgebra c -conglomerada	68
4.5	Aplicação de Caldero-Chapoton generalizada	72
	Referências Bibliográficas	81
	Índice Remissivo	85

Lista de Símbolos

γ	, 17	\mathfrak{t}	, 1	A_r^-	, 37
$\Gamma(\text{mod } A)$, 7	$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N})$, 10	$C(\mathcal{A})$, 10
γ_s	, 18	$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$, 25	$C^b(\mathcal{A})$, 11
λ_+	, 58	$K_0(\text{mod } kQ)$, 8	$D(\mathcal{A})$, 11
λ_-	, 58	$\mu_i(T)$, 27	$d_{i,j}$, 14
$\langle \cdot, \cdot \rangle$, 8	$\mu_r(\Delta)$, 14	$Gr_r(V)$, 13
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{kQ}$, 8	$\mu_v(Q)$, 3	$Gr_{\underline{e}}(M)$, 13
\mathbb{A}_n	, 2	$\bar{\gamma}$, 17	$H^n(X)$, 11
$\mathbb{B}_{[\alpha, \beta]}$, 31	$\vec{\mathbb{A}}_{\infty}$, 3	$Irr(M, N)$, 7
\mathbb{D}_n	, 3	$\vec{\mathbb{A}}_n$, 3	$K(\mathcal{A})$, 10
\mathbb{E}_6	, 3	$\vec{\mathbb{A}}_{[n+1]}$, 4	$K_0(c)$, 46
\mathbb{E}_7	, 3	ψ	, 46	kQ	, 5
\mathbb{E}_8	, 3	$\tau^r(\Delta)$, 15	p_r^c	, 31
$\mathbb{P}(V)$, 13	$\tau_{\mathcal{C}}$, 26	Q_{Δ}	, 16
\mathcal{A}_c	, 61	$\tau_{\mathcal{D}}$, 12	$q_{\Delta}(d^r)$, 14
$\mathcal{A}_c(\hat{Y}, Q)$, 61	$flip_{\Delta}(d^r)$, 14	Q_{Δ}^s	, 18
\mathcal{C}_Q	, 25	Θ	, 69	$Q_v(r)$, 57
\mathcal{D}_Q	, 25	\dim	, 8	$rad_A(M, N)$, 7
$\mathcal{M}(Q)$, 4	φ	, 68	$rad A$, 6
\mathcal{M}_n	, 16	$\tilde{\varphi}$, 69	$Rep_k(Q)$, 6
$\mathcal{M}_{[n+1]}$, 4	\widetilde{M}	, 25	$rep_k(Q)$, 6
\mathcal{P}_{n+3}	, 14	a^+	, 2	$X?$, 27
\mathcal{T}_n	, 14	a^-	, 2		
\mathfrak{s}	, 1	A_r^+	, 37		

Introdução

As álgebras de conglomerado foram introduzidas por S. Fomin e A. Zelevinsky na série de artigos [FZ02a],[FZ03], [FZ07] e [BFZ⁺05] em coautoria com A. Berenstein. A princípio, as álgebras de conglomerado foram introduzidas para o estudo de bases canônicas em grupos quânticos e positividade total em grupos algébricos, veja [Lus90] e [Lus94], mas a teoria está conectada a várias áreas da matemática, incluindo, mas não se limitando a, por exemplo:

- geometria de Poisson [GSV03],
- teoria de Teichmüller [GSV⁺05],
- álgebras Calabi-Yau [Gin06],
- teoria de representações [BM06][BMR⁺06][CCS06][CC06][GLS08][Kel08]...

Uma álgebra de conglomerado é definida descrevendo os seus geradores, chamados de variáveis de conglomerado. Mas, ao invés de fornecer um conjunto com todas as variáveis de conglomerado, são dados um subconjunto dos geradores, chamado de conglomerado inicial, e um método recursivo para obter as outras variáveis de conglomerado. Este método é conhecido como mutação.

Em sua forma mais elementar, a álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(u, Q)$ é uma subálgebra do corpo de funções racionais $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$, em que o par (u, Q) , chamado de semente inicial, consiste de uma aljava finita Q sem ciclos de comprimento um ou dois e um conglomerado inicial $u = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathcal{F}$, que é um conjunto com n elementos algebricamente independentes sobre \mathbb{Q} . Para cada $i = 1, \dots, n$, uma nova semente $\mu_i(u, Q)$ é definida utilizando o processo de mutação, em que o elemento u_i de u é substituído por um novo elemento u'_i seguindo uma relação de permuta específica que depende de u e Q . Além disso, a aljava Q é substituída por uma nova aljava $\mu_i(Q)$. As variáveis de conglomerado são obtidas de (u, Q) por meio de sucessivas mutações. Assim, a álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(u, Q)$ é a \mathbb{Q} -subálgebra do corpo \mathcal{F} gerada por todas as variáveis de conglomerado.

Uma propriedade importante das variáveis de conglomerado é que elas são polinômios de Laurent. Mais precisamente, Fomin e Zelevinsky provam em [FZ02a] que qualquer variável de conglomerado de uma álgebra de conglomerado \mathcal{A} pode ser expressa em termos das variáveis de um conglomerado qualquer como um polinômio de Laurent. Este fato é conhecido como fenômeno de Laurent [FZ02b]. Além disso, em [LS13], Lee e Schiffler demonstram que as variáveis de conglomerado são polinômios de Laurent com coeficientes todos positivos.

A categoria de conglomerado \mathcal{C} , introduzida em [BMR⁺06], é obtida como um quociente da categoria derivada $D^b(H)$ da categoria de módulos de uma álgebra hereditária H de dimensão finita sobre um corpo k . No caso em que a categoria de conglomerado \mathcal{C} é associada à categoria de módulos da álgebra de caminhos kQ para uma aljava Q do tipo Dynkin, é demonstrado em [BMR⁺06] que a categoria de conglomerado \mathcal{C} apresenta uma modelagem natural para as propriedades combinatórias da álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(u, Q)$ em que conglomerados correspondem aos objetos inclinantes.

Sejam Q uma aljava do tipo Dynkin e \mathcal{C}_Q a categoria de conglomerado associada a Q . Em [CC06], P. Caldero e F. Chapoton definiram uma aplicação

$$X_\gamma : \text{obj}\mathcal{C}_Q \rightarrow \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$$

que permite obter as variáveis da álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(u, Q)$ sem utilizar o processo recursivo da mutação. Um dos objetivos deste trabalho é generalizar esta aplicação para o estudo de uma nova classe de álgebras de conglomerado que apresentaremos no capítulo 4, as álgebras c -conglomeradas.

Em [ARS10], Assem, Reutenauer e Smith utilizam os frisos de Conway e Coxeter [Cox71][CC73a] para obter as variáveis de conglomerado de uma álgebra de conglomerado do tipo \mathbb{A}_n . Em [BMRDS14], Matte, Desloges e Sanchez apresentam uma nova classe de frisos, chamados c -frisos, que generaliza o conceito de frisos de Conway e Coxeter. Mostraremos que os c -frisos estão relacionados com as álgebras c -conglomeradas.

Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

- introdução de uma nova classe de álgebras de conglomerado com coeficientes do tipo \mathbb{A}_n , as álgebras c -conglomeradas;
- apresentação de uma descrição geométrica e uma demonstração elementar do fenômeno de Laurent para álgebra c -conglomerada;
- apresentação de uma generalização da aplicação de Caldero-Chapoton [CC06], e assim, estabelecendo uma conexão entre a teoria de representações e as álgebras c -conglomeradas;
- desenvolvimento da teoria de c -frisos introduzida por Bazier-Matte, Racicot-Desloges e Sanchez [BMRDS14];
- apresentação de uma fórmula explícita para as variáveis de conglomerado de uma álgebra c -conglomerada, sem a necessidade de utilizar o processo iterativo, provando simultaneamente o Fenômeno de Laurent e a positividade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentadas as definições e resultados básicos necessários para a compreensão dos capítulos posteriores. Para mais detalhes sobre representações de álgebras sugerimos [ASS06][ARS95].

O único resultado novo neste capítulo é a bijeção entre as triangulações de um polígono e a classe de mutação de uma aljava congelada que apresentaremos na proposição 1.22.

1.1 Representações

1.1.1 Aljava

Uma **aljava** é uma quádrupla $Q := (Q_0, Q_1, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ em que Q_0 e Q_1 são conjuntos e \mathfrak{s} e \mathfrak{t} são funções de Q_1 em Q_0 . Os elementos de Q_0 são chamados de **vértices** de Q e os elementos de Q_1 são chamados de **flechas** de Q . Para uma flecha α de Q , chamaremos o elemento $\mathfrak{s}(\alpha)$ de **vértice inicial** de α e o elemento $\mathfrak{t}(\alpha)$ de **vértice final** de α .

Denotaremos uma flecha $\alpha \in Q_1$, com $\mathfrak{s}(\alpha) = a$ e $\mathfrak{t}(\alpha) = b$, por $a \xrightarrow{\alpha} b$. Por exemplo, se Q é uma aljava em que $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathfrak{s}(\alpha) = \mathfrak{t}(\gamma) = 1$, $\mathfrak{t}(\alpha) = \mathfrak{s}(\beta) = 2$ e $\mathfrak{t}(\beta) = \mathfrak{s}(\gamma) = 3$. Então, a aljava Q pode ser representada da seguinte forma:

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\gamma} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2 \xrightarrow{\beta} 3.$$

Se $Q = (Q_0, Q_1, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ é uma aljava, diremos que $Q' = (Q'_0, Q'_1, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}')$ é uma **subaljava** de Q se $Q'_0 \subset Q_0$, $Q'_1 \subset Q_1$ e as restrições de \mathfrak{s} e \mathfrak{t} a Q'_1 são iguais a \mathfrak{s}' e \mathfrak{t}' , respectivamente (ou seja, valem as igualdades $\mathfrak{s}|_{Q'_1} = \mathfrak{s}'$ e $\mathfrak{t}|_{Q'_1} = \mathfrak{t}'$). Uma subaljava Q' de uma aljava Q é **plena** se o conjunto Q'_1 é igual ao conjunto de todas as flechas de Q com vértice inicial e final em Q'_0 .

Um **caminho** c em uma aljava Q é uma sequência de flechas $c := \alpha_1 \cdots \alpha_l$, tal que $\mathfrak{t}(\alpha_i) = \mathfrak{s}(\alpha_{i+1})$ para $1 \leq i \leq l$. Diremos que o caminho c **começa** em $\mathfrak{s}(\alpha_1)$ e **termina** em $\mathfrak{t}(\alpha_l)$. O **comprimento** de um caminho é o número de flechas do caminho. Assim,

o comprimento de c é l . Por convenção, um vértice pode ser visto como um caminho de comprimento zero e chamado de **caminho trivial**. Um caminho de comprimento $l \geq 1$ é chamado de **ciclo** se $\mathfrak{s}(\alpha_1) = \mathfrak{t}(\alpha_l)$, ou seja, se começa e termina no mesmo vértice. Uma aljava é **acíclica** se não contém ciclos.

Um morfismo de aljavas é definido como segue. Se $Q = (Q_0, Q_1, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ e $Q' = (Q'_0, Q'_1, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}')$ são duas aljavas, então um **morfismo de aljavas** $m = (m_0, m_1)$ consiste de duas funções $m_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0$ e $m_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$ tais que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{m_1} & Q'_1 \\ \downarrow \mathfrak{s} & & \downarrow \mathfrak{s}' \\ Q_0 & \xrightarrow{m_0} & Q'_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{m_1} & Q'_1 \\ \downarrow \mathfrak{t} & & \downarrow \mathfrak{t}' \\ Q_0 & \xrightarrow{m_0} & Q'_0 \end{array}$$

Sejam a e b dois vértices de uma aljava Q . Diremos que a é um **predecessor** de b e que b é um **sucessor** de a se existir um caminho que começa em a e termina em b . Se existir um caminho de comprimento um que começa em a e termina em b , então a é um **predecessor imediato** de b , e b é um **sucessor imediato** de a . Denotaremos por a^+ o conjunto de todos os sucessores imediatos de a e por a^- o conjunto de todos os predecessores imediatos de a . Os elementos da união $a^+ \cup a^-$ serão chamados de **vizinhos** de a .

Uma aljava Q é **localmente finita** se para todo vértice v de Q o conjunto $v^+ \cup v^-$ dos vizinhos de v for finito. Diremos que uma aljava Q é **finita** se os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos.

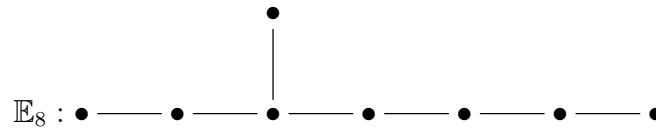
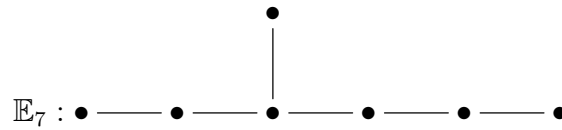
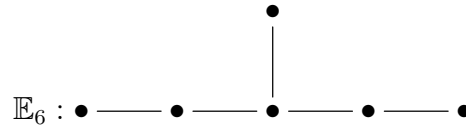
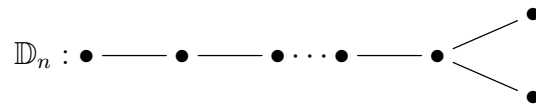
Para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ de uma aljava Q , associamos um inverso formal $\alpha^{-1} : b \rightarrow a$ em que, por definição, $\mathfrak{s}(\alpha^{-1}) = \mathfrak{t}(\alpha)$ e $\mathfrak{t}(\alpha^{-1}) = \mathfrak{s}(\alpha)$. Dados $a, b \in Q_0$, um **passeio** de comprimento $l \geq 1$ de a para b é uma sequência $\alpha = \alpha_1^{\delta_1} \alpha_2^{\delta_2} \cdots \alpha_l^{\delta_l}$ com $\delta_i \in \{-1, 1\}$, $\mathfrak{s}(\alpha_1^{\delta_1}) = a$, $\mathfrak{t}(\alpha_i^{\delta_i}) = \mathfrak{s}(\alpha_{i+1}^{\delta_{i+1}})$ para $1 \leq i \leq l-1$ e $\mathfrak{t}(\alpha_n^{\delta_n}) = b$.

Dizemos que uma aljava Q é **conexa** se dados dois vértices a e b de Q , existe um passeio de a para b . Dado um vértice v de Q , a subaljava plena Q_v de Q formada pelos vértices v' de Q tais que existe um passeio de v para v' é chamada de **componente conexa** de Q contendo v .

1.1.2 Diagramas Dynkin

Nesta subsecção listaremos os diagramas Dynkin e introduziremos algumas notações que serão utilizadas neste trabalho. Segue abaixo a lista dos **diagramas Dynkin**:

$$\mathbb{A}_n : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet$$



O **grafo subjacente** \overline{Q} à uma aljava Q é o grafo obtido esquecendo a orientação de Q . Por exemplo, o grafo subjacente à aljava $Q : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ é o grafo $\overline{Q} : 1 \text{---} 2 \text{---} 3$. Diremos que uma aljava é do **tipo Dynkin** se o seu grafo subjacente é um diagrama Dynkin. Utilizaremos frequentemente a aljava do tipo Dynkin \mathbb{A}_n com orientação linear, então denotaremos por $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$ a aljava

$$\overrightarrow{\mathbb{A}}_n : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \cdots n-1 \longrightarrow n$$

e por $\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty$ a aljava infinita

$$\overrightarrow{\mathbb{A}}_\infty : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \cdots$$

1.1.3 Mutações de aljava e aljava com congelamento

Fomin e Zelevinsky [FZ02a] introduziram a definição de mutação de matriz anti-simetrizável. A definição de mutação de aljava que apresentaremos aqui é um caso particular, em que a aljava corresponde ao caso em que a matriz é antissimétrica.

Seja Q uma aljava finita, ou localmente finita, sem ciclos de comprimento um ou dois. Para um vértice v da aljava Q , definimos a **mutação** $\mu_v(Q)$ da seguinte forma:

1. adicionando uma nova flecha $r' \rightarrow r''$ para cada subaljava $r' \rightarrow v \rightarrow r''$ de Q ;

2. invertendo todas as flechas em v ;
3. apagando cada ocorrência de ciclo de comprimento 2.

Exemplo 1.1. Considere a aljava $\vec{\mathbb{A}}_3 : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. Então temos

$$\begin{aligned} \mu_1(\vec{\mathbb{A}}_3) : 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 & \quad \mu_2(\vec{\mathbb{A}}_3) : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \\ \mu_2\mu_1(\vec{\mathbb{A}}_3) : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 & \quad \mu_1\mu_2(\vec{\mathbb{A}}_3) : 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3. \end{aligned}$$

Precisaremos também do conceito de aljava com um conjunto de vértices congelados. Sejam n e m dois inteiros positivos. Uma **aljava com congelamento do tipo (n, m)** é uma aljava Q com $n + m$ vértices, sem ciclos de comprimento um ou dois, com um conjunto distinguido com m vértices $\tilde{Q}_0 \subset Q_0$, chamados de **vértices congelados**. Por definição, não é permitido a mutação dos vértices congelados e não existe flecha entre dois vértices congelados. Ao aplicarmos a mutação em uma aljava com congelamento, a etapa 1 na definição de mutação de aljava é ignorada se r' e r'' forem vértices congelados. Nos diagramas, indicaremos os vértices congelados sempre entre colchetes.

Exemplo 1.2. Considere a aljava com congelamento do tipo $(3, 1)$ obtida da aljava do tipo Dynkin $\vec{\mathbb{A}}_4$ congelando o vértice 4:

$$\vec{\mathbb{A}}_{[4]} : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow [4].$$

Então, temos que

$$\mu_2(\vec{\mathbb{A}}_{[4]}) : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow [4] \quad \text{e} \quad \mu_3\mu_2(\vec{\mathbb{A}}_{[4]}) : 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow [4].$$

Se congelarmos o vértice 1 da aljava $\vec{\mathbb{A}}_{[4]}$ acima, obtemos a aljava com congelamento do tipo $(2, 2)$ representada por $Q : [1] \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow [4]$, assim, temos que

$$\mu_2(Q) : [1] \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow [4] \quad \text{e} \quad \mu_3\mu_2(Q) : [1] \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow [4].$$

Um **morfismo de aljava com congelamento** é um morfismo de aljava que fixa os vértices congelados. Dada uma aljava com congelamento Q , a **classe de mutação** de Q é o conjunto de todas as aljavas obtidas a partir de Q por meio de finitas mutações. Denotaremos por $\mathcal{M}(Q)$ a classe de mutação de uma aljava Q .

De agora em diante, denotaremos por $\vec{\mathbb{A}}_{[n+1]}$ a aljava com congelamento do tipo $(n, 1)$ dada por $1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n \rightarrow [n+1]$, em que $n+1$ é o vértice congelado. Denotaremos por $\mathcal{M}_{[n+1]}$ a classe de mutação de $\vec{\mathbb{A}}_{[n+1]}$.

Exemplo 1.3. A menos de isomorfismo de aljava com congelamento, a classe de mutação $\mathcal{M}(\vec{\mathbb{A}}_{[3]})$ da aljava $\vec{\mathbb{A}}_3$ com o vértice 3 congelado é

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{\mathbb{A}}_{[3]} : & 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow [3] & \mu_1(\vec{\mathbb{A}}_{[3]}) : & 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow [3] \\
 \mu_2\mu_1(\vec{\mathbb{A}}_{[3]}) : & 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow [3] & \mu_1\mu_2\mu_1(\vec{\mathbb{A}}_{[3]}) : & 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow [3] \\
 \mu_2(\vec{\mathbb{A}}_{[3]}) : & & & 1 \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} 2 \overset{\curvearrowleft}{\longrightarrow} [3]
 \end{array}$$

Observe que a aljava $\mu_2\mu_1\mu_2\mu_1(\vec{\mathbb{A}}_{[3]})$ é isomorfa à aljava $\mu_2(\vec{\mathbb{A}}_{[3]})$ e a aljava $\mu_1\mu_2(\vec{\mathbb{A}}_{[3]})$ é isomorfa à aljava $\mu_1\mu_2\mu_1(\vec{\mathbb{A}}_{[3]})$.

1.1.4 Álgebra de caminhos

Nesta seção k denotará um corpo algebricamente fechado e Q uma aljava finita.

Seja kQ o k -espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos de Q . Dados $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ e $\beta = \beta_1 \cdots \beta_m$ dois caminhos de Q , definimos em kQ o seguinte produto: sejam $i = \mathbf{t}(\alpha_n)$, $j = \mathbf{s}(\beta_1)$ e $\delta_{i,j}$ o delta de Kronecker, então

$$\alpha \cdot \beta = \delta_{i,j} \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m,$$

ou seja, $\alpha \cdot \beta$ é igual ao caminho $\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m$ caso o caminho α termine no mesmo vértice em que o caminho β começa. Caso contrário temos $\alpha \cdot \beta = 0$. Estendendo esse produto aos elementos de kQ obtemos uma k -álgebra, que chamaremos de **álgebra de caminhos**.

Proposição 1.4. *Sejam kQ uma álgebra de caminhos em que Q é uma aljava finita com conjunto de vértices $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ e e_i o caminho trivial associado ao vértice $i \in Q_0$. Então,*

1. kQ é uma álgebra associativa,
2. kQ tem dimensão finita se, e somente se, Q é acíclico,
3. o elemento $1 = e_1 + \cdots + e_n$ é a identidade de kQ e o conjunto $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de kQ ,
4. kQ é conexa se, e somente se, Q é uma aljava conexa,

Sejam Q uma aljava finita e R_Q o ideal de kQ gerado pelas flechas de Q . Um ideal \mathcal{I} de kQ é dito **admissível** se existir $r \geq 2$ tal que $R_Q^r \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2$.

Seja A uma k -álgebra com um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos e_1, \dots, e_n . A álgebra A é chamada **básica** se $e_i A \not\cong e_j A$, para todo $i \neq j$.

Definição 1.5. Sejam A uma k -álgebra básica, conexa e de dimensão finita e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A . A **aljava** de A , que denotaremos por Q_A , é definida como segue:

- (a) Os vértices de Q_A são os números $1, 2, \dots, n$, que estão em bijeção com os idempotentes e_1, \dots, e_n ,
- (a) dados dois vértices $u, v \in (Q_A)_0$, as flechas $u \rightarrow v$ estão em bijeção com os vetores em uma base do k -espaço vetorial $e_u(\text{rad}A/\text{rad}^2A)e_v$, em que $\text{rad}A$ denota o radical de Jacobson de A .

Teorema 1.6 (Gabriel). *Seja A uma k -álgebra básica, conexa e de dimensão finita.*

1. A aljava Q_A de A não depende da escolha do conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos em A ,
2. Q_A é uma aljava conexa,
3. existe um ideal admissível \mathcal{I} de kQ_A tal que $A \cong kQ_A/\mathcal{I}$.

1.1.5 Módulos e representações de aljava

Neste trabalho, caso não se faça menção contrária, os módulos são módulos à direita.

Sejam k um corpo algebricamente fechado e Q uma aljava finita. Uma **representação** M de Q é definida pelas seguintes informações:

- (a) cada vértice $v \in Q_0$ é associado a um k -espaço vetorial M_v ,
- (b) cada flecha $\alpha \in Q_1$ é associada a uma transformação linear $T_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{t(\alpha)}$.

Diremos que uma representação M de Q é **de dimensão finita** se cada k -espaço vetorial M_v possui dimensão finita. Sejam M e M' duas representações de Q . Um **morfismo** (de representações) $f : M \rightarrow M'$ é uma família $(f_v)_{v \in Q_0}$ de transformações lineares $f_v : M_v \rightarrow M'_v$ tais que, para cada flecha $\alpha \in Q_1$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_{s(\alpha)} & \xrightarrow{T_\alpha} & M_{t(\alpha)} \\ \downarrow f_{s(\alpha)} & & \downarrow f_{t(\alpha)} \\ M'_{s(\alpha)} & \xrightarrow{T'_\alpha} & M'_{t(\alpha)} \end{array}$$

Sejam $f : M \rightarrow M'$ e $g : M' \rightarrow M''$ dois morfismos de representações de Q , em que $f = (f_v)_{v \in Q_0}$ e $g = (g_v)_{v \in Q_0}$. A composta de f e g é definida como sendo a família $gf = (g_v f_v)_{v \in Q_0}$. É claro que gf é um morfismo de M para M'' .

Assim, temos definida uma categoria $\text{Rep}_k(Q)$ das representações de Q . Denotaremos por $\text{rep}_k(Q)$ a subcategoria plena de $\text{Rep}_k(Q)$ consistindo das representações de dimensão finita.

Teorema 1.7. *Seja Q uma aljava finita, acíclica e conexa. Então existe uma equivalência de categorias $\text{Mod}kQ \cong \text{Rep}_kQ$ cuja restrição à categoria $\text{mod}kQ$ é uma equivalência $\text{mod}kQ \cong \text{rep}_kQ$.*

1.1.6 A aljava de Auslander-Reiten

Definição 1.8. Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Um homomorfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\text{mod}A$ é dito **irreduzível** se:

- f não é seção nem retração e
- se $f = f_1 f_2$, ou f_1 é uma retração ou f_2 é uma seção.

Sejam M e N módulos indecomponíveis de $\text{mod}A$. Denote por $\text{rad}_A(M, N)$ o k -espaço vetorial de todos os homomorfismos de M para N não-invertíveis. Um morfismo $f : M \rightarrow N$ é irreduzível se, e somente se,

$$f \in \text{rad}_A(M, N) / \text{rad}_A^2(M, N).$$

Então, definimos o **espaço dos morfismos irreduzíveis** $\text{Irr}(M, N)$ pelo quociente

$$\text{Irr}(M, N) := \text{rad}_A(M, N) / \text{rad}_A^2(M, N).$$

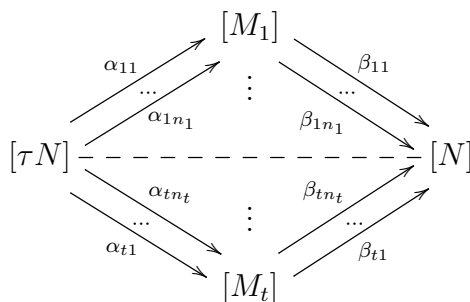
Seja A uma k -álgebra básica, conexa e de dimensão finita. A **aljava de Auslander-Reiten** $\Gamma(\text{mod}A)$ é definida como segue:

- (a) os vértices de $\Gamma(\text{mod}A)$ estão em bijeção com as classes de isomorfismos $[X]$ de A -módulos indecomponíveis,
- (b) para dois vértices $[M]$ e $[N]$ em $\Gamma(\text{mod}A)$, as flechas $[M] \rightarrow [N]$ estão em bijeção com os vetores em uma base do k -espaço vetorial $\text{Irr}(M, N)$.

Denote por τ_A o **translado de Auslander-Reiten** de $\text{mod}A$. Seja N um A -módulo indecomponível não-projetivo e considere a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \rightarrow \tau N \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \rightarrow N \rightarrow 0,$$

em que os M_i 's são indecomponíveis dois a dois não isomorfos e $n_i = \dim_k \text{Irr}(M_i, N)$. Então, esta sequência de Auslander-Reiten corresponde à seguinte "mecha" em $\Gamma(\text{mod}A)$:



1.1.7 Vetor dimensão, forma de Euler e o grupo de Grothendieck

Sejam $Q = (Q_0, Q_1)$ uma aljava finita sem ciclos e M um kQ -módulo indecomponível. Identificando M com uma representação $((M_i)_{i \in Q_0}, (T_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ de Q , o **vetor dimensão** de M é definido por $\underline{\dim}(M) := (\dim_k M_1, \dots, \dim_k M_n)$.

Dados $x, y \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, a **forma de Euler** é definida por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{(i \rightarrow j) \in Q_1} x_i y_j.$$

Dadas duas representações M e N de Q , definimos a forma \mathbb{Z} -bilinear

$$\langle M, N \rangle_{kQ} = \dim_k \text{Hom}_{kQ}(M, N) - \dim_k \text{Ext}_{kQ}^1(M, N)$$

Observe que $\langle M, N \rangle_{kQ} = \langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} N \rangle$ (ver [ASS06], seção VII.4.1).

O **grupo de Grothendieck** é o grupo abeliano $K_0(\text{mod } kQ) := \mathcal{F} / \mathcal{F}'$, em que \mathcal{F} é o grupo abeliano cuja base é o conjunto das classes de isomorfismos \widetilde{M} de módulos em $\text{mod } kQ$ e \mathcal{F}' é o subgrupo de \mathcal{F} gerado pelos elementos $\widetilde{M} - \widetilde{L} - \widetilde{N}$ que correspondem às sequências exatas

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

em $\text{mod } kQ$.

Teorema 1.9. *Sejam A uma k -álgebra básica de dimensão finita e S_1, \dots, S_n um conjunto completo de A -módulos simples. Então o grupo de Grothendieck $K_0(A)$ é um grupo abeliano livre cuja base é o conjunto $\{\widetilde{S}_1, \dots, \widetilde{S}_n\}$ e existe um único isomorfismo de grupo $\underline{\dim} : K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ tal que $\underline{\dim}(\widetilde{M}) = \underline{\dim}(M)$ para todo A -módulo M .*

Demonstração. Veja [ASS06], teorema 3.5. □

1.1.8 Categoria triangulada

Sejam \mathcal{C} uma categoria aditiva e $\Sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ uma equivalência. A equivalência Σ é chamada de *translation functor* em [Hap88] e em outras referências é chamado de *suspension functor* ou de *shift functor*. Neste trabalho, chamaremos o funtor Σ de **funtor suspensão**.

Um **triângulo em \mathcal{C}** é uma sequência (u, v, w) de morfismos de \mathcal{C} da forma

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X.$$

Dados dois triângulos (u, v, w) e (u', v', w') , um **morfismo de triângulos** é uma tripla (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) de morfismos de \mathcal{C} que fazem o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \Sigma \phi_1 \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X'. \end{array}$$

A categoria \mathcal{C} é **triangulada** se possui uma classe ∇ de triângulos distinguidos satisfazendo as seguintes propriedades:

(TR1) Todo triângulo isomorfo a um triângulo distinguido é um triângulo de ∇ , ou seja, é um triângulo distinguido. Todo morfismo $X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} se estende para um triângulo em ∇ . O triângulo

$$X \xrightarrow{Id} X \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma X$$

é um triângulo distinguido.

(TR2) Um triângulo (u, v, w) está em ∇ se e somente se o triângulo $(v, w, -\Sigma u)$ está em ∇ .

(TR3) Dados dois triângulos distinguidos (u, v, w) e (u', v', w') e dois morfismos ϕ_1 e ϕ_2 tais que $\phi_2 \circ u = u' \circ \phi_1$, existe um morfismo ϕ_3 tal que a tripla (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) é um morfismo de triângulos, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \Sigma(\phi_1) \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X'. \end{array}$$

(TR4)(O axioma do octaedro) Dados três triângulos distinguidos (u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2, w_3) tais que $w_1 = v_1 \circ u_1$, existe um triângulo distinguido $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u_1} & Y & \xrightarrow{u_2} & U & \xrightarrow{u_3} & \Sigma X \\ \parallel & & \downarrow v_1 & & \downarrow \delta_1 & & \parallel \\ X & \xrightarrow{w_1} & Z & \xrightarrow{w_2} & V & \xrightarrow{w_3} & \Sigma X \\ & & \downarrow v_2 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \Sigma u_1 \\ & & W & \xlongequal{\quad} & W & \xrightarrow{v_3} & \Sigma Y \\ & & \downarrow v_3 & & \downarrow \delta_3 & & \\ & & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma u_2} & \Sigma U & & \end{array}$$

Sejam \mathcal{S} e \mathcal{S}' duas categorias trianguladas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é chamado de

functor triangulado se existe uma transformação natural invertível $\alpha : F\Sigma \rightarrow \Sigma'F$ tal que, para todo triângulo (u, v, w) em \mathcal{S} , $(Fu, Fv, \alpha_X Fw)$ é um triângulo em \mathcal{S}' . Se um functor triangulado F é uma equivalência, chamaremos F de **equivalência triangulada**.

Sejam M e N dois objetos de uma categoria triangulada \mathcal{S} . Então, definimos

$$\text{Ext}_{\mathcal{S}}^1(M, N) = \text{Hom}_{\mathcal{S}}(M, \Sigma N).$$

1.1.9 Categoria de homotopia

Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva. Um **complexo** sobre \mathcal{A} é uma sequência de morfismos

$$\dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

tais que $d^n \circ d^{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Diremos que um complexo X é um **complexo limitado** se existe algum $n \in \mathbb{Z}$ tal que $X^i = 0$ para todo $i > |n|$. Se $X^i \neq 0$ e $X^r = 0$ para todo $r \neq i$, diremos que X é um **complexo concentrado em i** .

Um **morfismo de complexos** $\phi : X \rightarrow Y$ consiste de uma família de morfismos $\phi^n : X^n \rightarrow Y^n$ satisfazendo

$$d_Y^n \circ \phi^n = \phi^{n+1} \circ d_X^n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Diremos que um morfismo de complexos $\phi : X \rightarrow Y$ é **homotópico a zero** se existem aplicações $\rho^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$ tais que

$$\phi^n = d_Y^{n-1} \circ \rho^n + \rho^{n+1} \circ d_X^n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Denote por $C(\mathcal{A})$ a categoria de complexos sobre \mathcal{A} . A **categoria de homotopia** $K(\mathcal{A})$ é definida como segue. Os objetos de $K(\mathcal{A})$ são os mesmos objetos da categoria de complexos $C(\mathcal{A})$ e os morfismos de $K(\mathcal{A})$ são morfismos de complexos módulo homotopia, ou seja,

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y) = \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y) / \sim,$$

em que, para dois morfismos de complexos ϕ e ψ , temos que $\phi \sim \psi$ se o morfismo de complexos $\phi - \psi$ é homotópico a zero.

Seja $\phi : X \rightarrow Y$ um morfismo de complexos em $C(\mathcal{A})$. Definimos o **cone** de ϕ como sendo o complexo C_ϕ em que

$$C_\phi^m = X^{m+1} \oplus Y^m$$

e

$$d_{C_\phi}^m = \begin{bmatrix} -d_X^{m+1} & 0 \\ \phi^{m+1} & d_Y^m \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.10. *A categoria de homotopia $K(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada. O funtor suspensão $\Sigma : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$ é definido nos objetos por*

$$\begin{aligned}\Sigma X^n &= X^{n+1} \\ d_{\Sigma X}^n &= d_X^{n+1},\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo de complexos, então $\Sigma f^n := f^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A classe de triângulos distinguidos são os triângulos de $K(\mathcal{A})$ que são isomorfos à algum triângulo da forma

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{i_\phi} C_\phi \xrightarrow{p_\phi} \Sigma X,$$

em que i_ϕ é o morfismo de complexos definido por $i_\phi^n = (0 \text{ id}_{Y^n})^t$ e p_ϕ é o morfismo de complexos definido por $p_\phi^n = (\text{id}_{X^{n+1}} \ 0)$.

1.1.10 Categoria derivada

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana e X um complexo sobre \mathcal{A} . Então, definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$ a **cohomologia**

$$H^n(X) = \ker(d^n) / \text{Im}(d^{n-1}).$$

Diremos que um morfismo de complexos $\phi : X \rightarrow Y$ é um **quasi-isomorfismo** se $H^n \phi : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$ é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A **categoria derivada** $D(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} é obtida de $K(\mathcal{A})$ invertendo formalmente todos os quasi-isomorfismos. Mais precisamente, a categoria derivada

$$D(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A})[S^{-1}]$$

é a localização de $K(\mathcal{A})$ na classe S de todos os quasi-isomorfismos. Então, existe um funtor triangulado $Q_{\mathcal{A}} : K(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ tal que, para todo quasi-isomorfismo f em $C(\mathcal{A})$, $Q_{\mathcal{A}}(f)$ é um isomorfismo em $D(\mathcal{A})$. Para mais detalhes sobre localização de categoria triangulada consulte [Ver96],[Nee01], [Kra08] ou [Alv14].

Lema 1.11. *Denote por $C^b(\mathcal{A})$ a subcategoria plena de $C(\mathcal{A})$ determinada pelos complexos limitados. A inclusão $C^b(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{A})$ induz um funtor fiel e pleno $D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$*

Demonstração. Ver [Ver96] III.1.2.3. □

Proposição 1.12 ([Hap88]). *Seja Q uma aljava finita sem ciclos. Denote por $[1]$ o funtor suspensão da categoria $\mathcal{D} = D^b(\text{mod } kQ)$. Então,*

- (a) *os objetos indecomponíveis de \mathcal{D} são da forma $M[i]$, em que M é um módulo indecomponível de $\text{mod } kQ$.*

(b) os morfismos são dados por

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M[i], N[j]) = \mathrm{Ext}_{kQ}^{j-i}(M, N) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{kQ}(M, N) & \text{se } j = i \\ \mathrm{Ext}_{kQ}^1(M, N) & \text{se } j = i + 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(c) existe uma equivalência triangulada $\tau_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ chamada **translado de Auslander-Reiten** tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, N[1]) \cong D\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N, \tau_{\mathcal{D}}M),$$

em que $D = \mathrm{Hom}_k(_, k)$ é a dualidade usual.

(d) Seja $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ uma seqüência exata em $\mathrm{mod}kQ$ e

$$w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, X[1]) = \mathrm{Ext}_{kQ}^1(Z, X)$$

o elemento correspondente. Então $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{w} X[1]$ é um triângulo em \mathcal{D} .

Exemplo 1.13. Sejam $Q = \overrightarrow{\mathbb{A}}_n$ e $\mathcal{D} = D^b(\mathrm{mod}kQ)$. Para $n = 3$, a aljava de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathcal{D})$ é a aljava infinita

$$\begin{array}{cccccccccccc} P_3 & & \tau^{-1}P_3 & & \tau^{-2}P_3 & & P_1[1] & & P_3[2] & & & & \\ \swarrow & & \nearrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \\ \dots & P_2 & & \tau^{-1}P_2 & & P_2[1] & & \tau^{-1}P_2[1] & & P_2[2] & \dots & & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\ & & P_1 & & P_3[1] & & \tau^{-1}P_3[1] & & \tau^{-2}P_3[1] & & & & P_1[2] \end{array}$$

onde P_3, P_2 e P_1 são os projetivos associados aos vértices 3, 2 e 1, respectivamente.

No que segue, vamos utilizar as propriedades apresentadas na proposição 1.12 para descrever como uma classe de triângulos de \mathcal{D} aparece na aljava $\Gamma(\mathcal{D})$.

Considere os objetos projetivos P_{r_1}, P_{r_2} e P_{r_3} de $\mathrm{mod}kQ$, em que $1 \leq r_1 < r_2 < r_3 \leq n$. Então, temos uma seqüência exata de kQ -módulos

$$0 \longrightarrow P_{r_2} \xrightarrow{u} P_{r_1} \oplus \tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_3} \xrightarrow{v} \tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_1+r_3-r_2} \longrightarrow 0.$$

Tomando

$$w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_1+r_3-r_2}, P_{r_2}[1]) = \mathrm{Ext}_{kQ}^1(\tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_1+r_3-r_2}, P_{r_2})$$

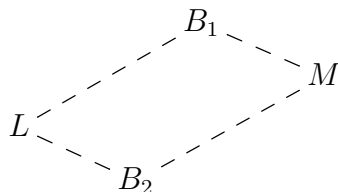
correspondente à seqüência exata acima obtemos um triângulo (u, v, w) :

$$P_{r_2} \xrightarrow{u} P_{r_1} \oplus \tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_3} \xrightarrow{v} \tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_1+r_3-r_2} \xrightarrow{w} P_{r_2}[1].$$

Então, como o transladado de Auslander-Reiten é uma equivalência triangulada, obtemos que para todo objeto indecomponível L existe um triângulo

$$L \xrightarrow{u} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} L[1]$$

em que os objetos L, B_1, M e B_2 são os vértices de um "quadrilátero" em $\Gamma(\mathcal{D})$:



1.2 Geometria

1.2.1 Q-Grasmaniano

Dado um espaço vetorial V de dimensão finita sobre um corpo k , o **espaço projetivo** $\mathbb{P}(V)$ é o conjunto dos subespaços vetoriais de V de dimensão 1. Uma **variedade projetiva** é o conjunto dos zeros em $\mathbb{P}(V)$ de uma família de polinômios homogêneos. O **grasmaniano** $Gr_r(V)$ é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de V com dimensão r . O grasmaniano $Gr_r(V)$ é uma variedade projetiva [Har92].

Sejam Q uma aljava com n vértices, M um módulo em $\text{mod } kQ$ e $\underline{e} \in K_0(\text{mod } kQ) \cong \mathbb{Z}^n$. O **Q-grasmaniano** $Gr_{\underline{e}}(M)$ de M de dimensão \underline{e} é definido como o conjunto de todos os submódulos de M com vetor dimensão \underline{e} , ou seja,

$$Gr_{\underline{e}}(M) := \{N \subset M \mid N \in \text{mod } kQ; \underline{\dim}(N) = \underline{e}\}.$$

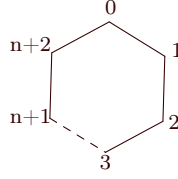
O Q -grasmaniano $Gr_{\underline{e}}(M)$ pode ser visto como uma subvariedade fechada do grasmaniano clássico $Gr_e(M)$, em que $e = \sum_i e_i$. Então, $Gr_{\underline{e}}(M)$ é uma variedade projetiva [Kel08], [CC06]. M. Reineke [Rei13] demonstra que toda variedade projetiva é um Q -grasmaniano.

Exemplo 1.14. Seja $Q = \overrightarrow{\mathbb{A}}_n$. Os módulos indecomponíveis em $\text{mod } kQ$ correspondem às subaljvas conexas plenas de Q . Seja M um kQ -módulo indecomponível e Q_M a aljava correspondente. Então, os submódulos N de M correspondem às subaljvas conexas plenas de Q_M tais que se $i \in (Q_N)_0$ e $i \rightarrow j \in (Q_M)_1$ então $j \in (Q_N)_0$. Portanto, $Gr_{\underline{e}}(M)$ possui no máximo um submódulo de M .

1.2.2 Triangulações

Nesta secção apresentaremos as definições e propriedades básicas sobre triangulações de um polígono regular que utilizaremos durante este trabalho.

Denote por \mathcal{P}_{n+3} um polígono regular com $n + 3$ vértices. Vamos indexar os vértices de \mathcal{P}_{n+3} ciclicamente, no sentido horário, por $0, 1, \dots, n + 2$. Uma **diagonal** de um polígono é



um segmento de reta entre dois vértices não consecutivos do polígono. Denotaremos por $d_{i,j}$ a diagonal definida pelos vértices i, j , com $j - i > 1$.

Uma **triangulação** de \mathcal{P}_{n+3} é um conjunto maximal de diagonais não concorrentes de \mathcal{P}_{n+3} . Denotaremos por \mathcal{T}_n o conjunto de todas as triangulações de \mathcal{P}_{n+3} . Note que cada triangulação é dada por exatamente n diagonais.

Definição 1.15. Seja $\Delta = \{d^1, \dots, d^n\}$ uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} . Para cada diagonal d^r , com $r = 1, \dots, n$, existe um único quadrilátero $q_\Delta(d^r)$ em $\Delta \setminus \{d^r\}$ tal que d^r é uma das diagonais de $q_\Delta(d^r)$. Seja $flip_\Delta(d^r)$ a outra diagonal de $q_\Delta(d^r)$. Chamaremos de $\mu_r(\Delta)$ a **mutação da triangulação** Δ em d^r definida por

$$\mu_r(\Delta) := \Delta \setminus \{d^r\} \cup \{flip_\Delta(d^r)\}.$$

Então, $\mu_r(\Delta)$ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} obtida de Δ retirando a diagonal d^r e substituindo pela diagonal $flip_\Delta(d^r)$. Observe que μ_r é involutiva, ou seja,

$$\mu_r(\mu_r(\Delta)) = \Delta.$$

Exemplo 1.16. Dado um octógono P_8 , considere $\Delta = \{d_{0,2}, d_{0,3}, d_{0,4}, d_{0,5}, d_{0,6}\}$ e $\Delta' = \{d_{1,7}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{4,7}, d_{4,6}\}$. Definindo $d^1 = d_{1,3}, d^2 = d_{1,4}, d^3 = d_{1,7}, d^4 = d_{4,6}, d^5 = d_{4,7}$ e aplicando a sequência de mutação de triangulação $\mu_4 \circ \mu_1 \circ \mu_2 \circ \mu_5 \circ \mu_3$ na triangulação Δ' obtemos a triangulação Δ . A figura 1.1 ilustra este processo.

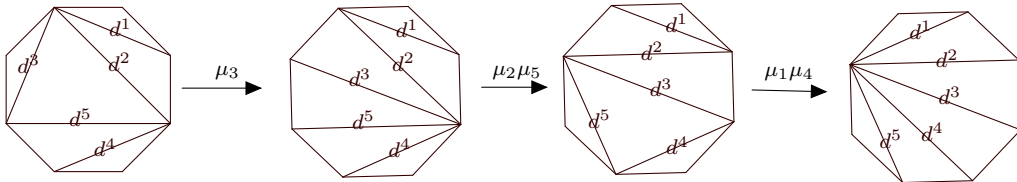


Figura 1.1: Sequência de mutações de uma triangulação do octógono

Dada uma triangulação Δ de \mathcal{P}_{n+3} , definimos a **rotação** de Δ , r passos no sentido anti-horário, por

$$\tau^r(\Delta) = \{d_{i,j} \in \mathcal{P}_{n+3} \mid d_{i+r,j+r} \in \Delta\}.$$

em que a soma é tomada modulo $n + 3$. É claro que uma rotação de uma triangulação continua sendo uma triangulação.

Diremos que duas triangulações Δ e Δ' de \mathcal{P}_{n+3} estão conectadas por uma sequência de mutações se existem $r_1, r_2, \dots, r_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ tais que

$$\mu_{r_m} \circ \mu_{r_{m-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\Delta') = \Delta.$$

Embora seja bem conhecido que duas triangulações de \mathcal{P}_{n+3} estão conectadas por uma sequência de mutações, veja por exemplo [Law72], apresentaremos no próximo lema uma demonstração deste fato que será útil para esclarecer o fenômeno de Laurent (Proposição 4.13).

Proposição 1.17. *Seja $\Delta' = \{d^1, d^2, \dots, d^n\} \in \mathcal{T}_n$ uma triangulação arbitrária e Δ uma rotação da triangulação $\{d_{0,2}, d_{0,3}, \dots, d_{0,n+1}\} \in \mathcal{T}_n$.*

(a) *Se $\Delta' \neq \Delta$, então existem elementos $r_1, r_2, \dots, r_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, dois a dois distintos, tais que*

$$\mu_{r_m} \circ \mu_{r_{m-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\Delta') = \Delta,$$

em que m é o número de diagonais em $\Delta' \setminus \Delta$.

(b) *Dois triangulações de \mathcal{P}_{n+3} estão conectadas por uma sequência de mutações.*

Demonstração. Considere os triângulos obtidos a partir da triangulação Δ' que contém o vértice 0, isto é, triângulos de Δ' determinados por vértices $0, i, j$ com $0 < i < j < n + 2$.

Vamos supor que todos estes triângulos tem vértices $0, i, j$ com $j = i + 1$. Então temos um triângulo com vértices $0, i, i + 1$ em Δ' , logo as diagonais $d_{0,i}$ e $d_{0,i+1}$ pertencem a Δ' . Assim, se $i > 1$, então temos um triângulo de Δ' determinado pelas diagonais $d_{0,i}$ e $d_{0,i-1}$ pois por hipótese todos os triângulos que contém o vértice 0 são da forma $0, i, i + 1$. Analogamente, se $i < n + 1$, então as diagonais $d_{0,i+1}$ e $d_{0,i+2}$ determinam um triângulo com vértices $0, i + 1, i + 2$. Com este procedimento, podemos concluir que $\Delta' = \Delta$.

Caso contrário, existe um triângulo dado por vértices $0, i, j$ com $0 < i < j - 1 < n + 1$. Seja $d_{i,j} = d^{r_1}$. Aplicando μ_{r_1} em Δ' obtemos a triangulação

$$\mu_{r_1}(\Delta') = \Delta' \setminus \{d_{i,j}\} \cup \{\text{flip}_{\Delta'}(d_{i,j})\} = \Delta' \setminus \{d_{i,j}\} \cup \{d_{0,j'}\}$$

para $i < j' < j$. Assim teremos uma nova triangulação $\mu_{r_1}(\Delta')$ em que a nova diagonal pertence à Δ . Se $\mu_{r_1}(\Delta') \neq \Delta$ repetimos o processo. Para obter a triangulação Δ , devemos repetir m vezes, em que m é o número de diagonais de Δ' que não está em Δ . Assim, como em cada etapa escolhemos uma diagonal $d^r \in \Delta'$ diferente, obtemos $r_1, \dots, r_m \in \{1, \dots, n\}$ dois a dois distintos tais que

$$\mu_{r_m} \circ \mu_{r_{m-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\Delta') = \Delta,$$

em que m é o número de diagonais em $\Delta' \setminus \Delta$, o que termina a demonstração do item (a). Observe a figura 1.1 para uma ilustração deste processo.

Como a mutação é involutiva, o item (b) é uma consequência trivial do item (a). \square

1.2.3 Triangulações e aljava com congelamento

A **aljava com congelamento de uma triangulação** $\Delta = \{d^1, \dots, d^n\} \in \mathcal{T}_n$, denotada por Q_Δ , é definida da seguinte forma: o conjunto dos vértices congelados de Q_Δ é um subconjunto do conjunto das arestas de \mathcal{P}_{n+3} e os outros vértices de Q_Δ são as diagonais de Δ . Existe uma flecha $d^r \rightarrow d^{r'}$ em Q_Δ (ou simplesmente $r \rightarrow r'$) precisamente se as diagonais d^r e $d^{r'}$ determinam um triângulo em que $d^{r'}$ segue no sentido anti-horário de d^r , ou seja, se d^r e $d^{r'}$ determinam um triângulo com vértices $i < j < k$, existe uma flecha $r \rightarrow r'$ nos seguintes casos: caso $d^r = d_{i,j}$ e $d^{r'} = d_{i,k}$, caso $d^r = d_{i,k}$ e $d^{r'} = d_{j,k}$ e caso $d^r = d_{j,k}$ e $d^{r'} = d_{i,j}$. Por exemplo, se $d^r = d_{0,j}$ e $d^{r'} = d_{0,j'}$, existe uma flecha $r \rightarrow r'$ se e somente se d^r e $d^{r'}$ determinam um triângulo em que $j < j'$. As flechas entre os vértices correspondentes com as diagonais e os vértices congelados correspondentes com as arestas são definidas da mesma forma. Não existe flecha entre vértices congelados.

De forma análoga podemos definir uma aljava sem os vértices congelados considerando apenas as diagonais para construir a aljava. Por exemplo, do lado esquerdo da figura 1.2 temos uma aljava com congelamento associada a uma triangulação do octógono \mathcal{P}_8 em que o conjunto dos vértices congelados é o conjunto de todas as arestas de \mathcal{P}_8 e do lado direito uma aljava sem vértices congelados associada a uma triangulação do octógono \mathcal{P}_8 .

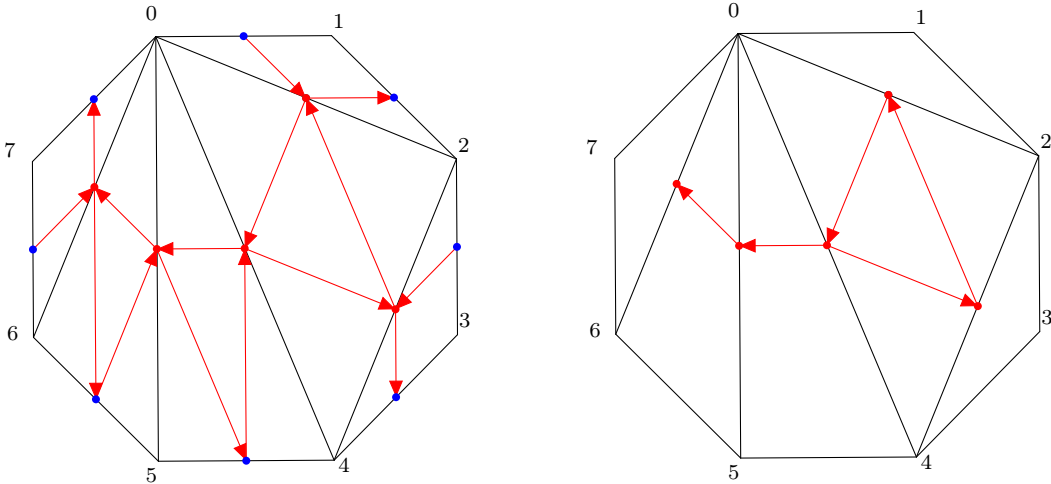


Figura 1.2:

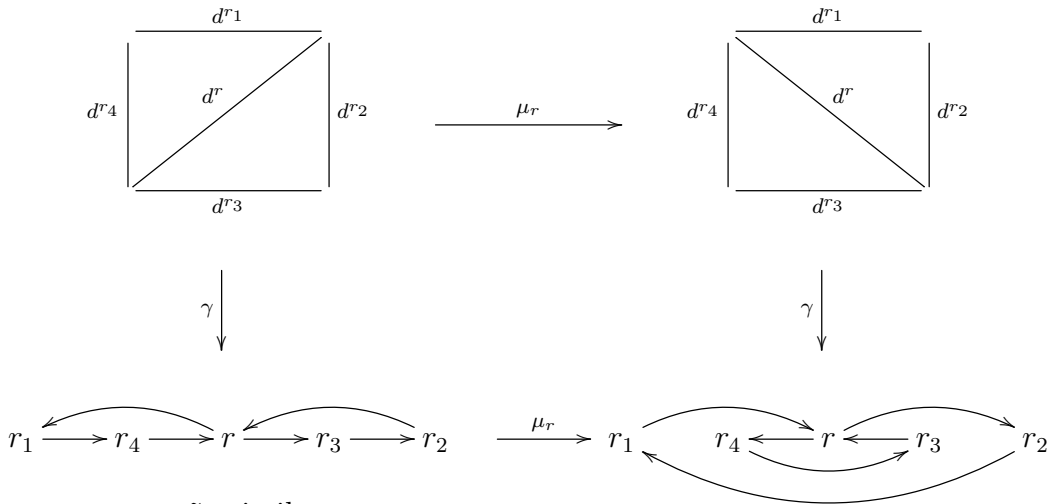
Seja $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(\vec{\mathbb{A}}_n)$ a classe de mutação da aljava Dynkin $\vec{\mathbb{A}}_n$, linearmente orientada. Podemos ver facilmente que a aljava Q_Δ do lado direito da figura 1.2 pertence a \mathcal{M}_n . De fato, $\mu_2(\vec{\mathbb{A}}_5) = Q_\Delta$. É observado em [CCS06] que a mutação de triangulação é compatível com a mutação de aljava, ou seja, $\mu_r(Q_\Delta) = Q_{\mu_r(\Delta)}$. Segue desta observação que todas as aljavas

de \mathcal{M}_n podem ser obtidas da maneira descrita acima. De fato, se $\Delta = \{d_{0,2}, d_{0,3}, \dots, d_{0,n+1}\}$ então $Q_\Delta = \vec{\mathbb{A}}_n$, donde, a igualdade $\mu_r(Q_\Delta) = Q_{\mu_r(\Delta)}$ implica que a aplicação $\gamma : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ definida por $\gamma(\Delta) = Q_\Delta$ é sobrejetora. Demonstraremos no lema 1.18 que $\mu_r(Q_\Delta) = Q_{\mu_r(\Delta)}$.

Lema 1.18. *Seja $\Delta = \{d^1, \dots, d^n\}$ uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} e Q_Δ a aljava associada a Δ , com ou sem vértices congelados. Então*

$$\mu_r(Q_\Delta) = Q_{\mu_r(\Delta)}$$

Demonstração. Observe que a mutação de triangulação μ_r muda somente a diagonal d^r e a mutação de aljava μ_r pode mudar as flechas entre os vizinhos de r e inverte as flechas com ponto inicial ou final em r . Então, precisamos nos preocupar apenas localmente com o que acontece em Δ e em Q_Δ quando aplicamos a mutação. Caso os quatro lados do quadrilátero $q_\Delta(d^r)$ sejam diagonais em Δ , o resultado segue pois o seguinte diagrama é comutativo:



Os outros casos são similares. □

A aplicação $\gamma : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ é sobrejetora, mas não é injetora, pois uma rotação de uma triangulação Δ não altera a aljava sem vértices congelados associada a ela, ou seja, $\gamma(\Delta) = Q_\Delta = Q_{\tau^r \Delta}$, em que τ^r denota a rotação da triangulação Δ em r passos no sentido anti-horário. Por outro lado, definindo uma relação de equivalência \sim em \mathcal{T}_n , em que $\Delta \sim \Delta'$ quando $\Delta' = \tau^r(\Delta)$ para algum inteiro r . Então, Torkildsen prova em [Tor08] que a aplicação induzida $\bar{\gamma} : (\mathcal{T}_n / \sim) \rightarrow \mathcal{M}_n$ é uma bijeção.

Teorema 1.19 (Torkildsen [Tor08]). *A função $\bar{\gamma} : (\mathcal{T}_n / \sim) \rightarrow \mathcal{M}_n$ é bijetora para todo $n \geq 2$.*

Podemos também definir uma aljava com congelamento a partir de uma triangulação utilizando apenas algumas arestas de \mathcal{P}_{n+3} . Por exemplo, na figura 1.3 listamos todas as triangulações de \mathcal{P}_5 e as respectivas aljavas congeladas, em que estamos considerando apenas uma aresta para definir o vértice congelado.

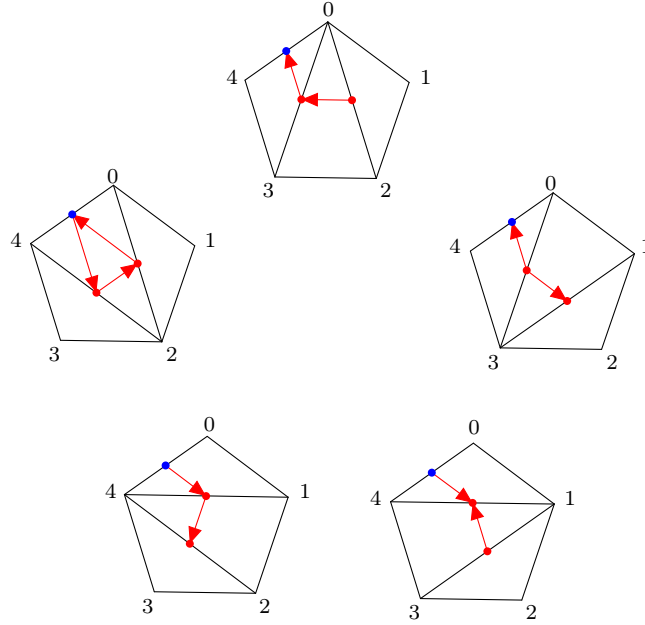


Figura 1.3: Triangulações e aljavas congeladas de \mathcal{P}_5

Observe que se retirarmos o vértice congelado das aljavas que aparecem na figura 1.3, obtemos cinco aljavas isomorfas do tipo \mathbb{A}_2 , o que não acontece considerando o vértice congelado. Além disso, pelo exemplo 1.3, é fácil ver que as aljavas congeladas da figura 1.3 são todas as aljavas da classe de mutação de $\vec{\mathbb{A}}_{[3]} : 1 \rightarrow 2 \rightarrow [3]$, em que 3 é um vértice congelado. Assim, temos uma bijeção entre o conjunto das triangulações do pentágono e a classe de mutação $\mathcal{M}(\vec{\mathbb{A}}_{[3]})$, em que o vértice 3 é congelado. Antes de provar que este resultado vale em geral, vamos fixar algumas notações.

Definição 1.20. A função $\gamma_s : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{M}_{[n+1]}$ é definida por $\gamma_s(\Delta) := Q_\Delta^s$, em que Q_Δ^s é uma aljava com congelamento do tipo $(n, 1)$ associada a Δ com apenas um vértice congelado $n + 1$ que é associado à aresta $[0, n + 2]$.

Lema 1.21. *Seja $\Delta = \{d^1, \dots, d^n\}$ uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} . Então*

$$\gamma_s \circ \mu_r(\Delta) = \mu_r \circ \gamma_s(\Delta)$$

Demonstração. É um caso particular do lema 1.18. □

Proposição 1.22. *A função $\gamma_s : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{M}_{[n+1]}$ é bijetora para todo $n \geq 1$*

Demonstração. Para provar que γ_s é injetora, vamos provar primeiro que a função γ_s leva as rotações da triangulação $\Delta'_0 = \{d_{0,2}, d_{0,3}, \dots, d_{0,n+1}\}$ em aljavas não isomorfas. É fácil ver que a aljava $\gamma_s(\Delta'_0)$ é isomorfa à aljava

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n - 1 \rightarrow n \rightarrow s.$$

Lembrando que $\tau^{-r}\Delta'_0$ denota a rotação da triangulação Δ'_0 de r passos no sentido horário. Então, supondo $r \neq 0$, temos os seguintes casos:

- para $r = 1$,

$$\gamma_s(\tau^{-1}\Delta'_0) : 1 \longrightarrow 2 \cdots n-1 \longrightarrow n \longleftarrow s$$

- para $r \in \{2, \dots, n\}$,

$$\gamma_s(\tau^{-r}\Delta'_0) : 1 \longrightarrow 2 \cdots \quad \begin{array}{c} s \\ \downarrow \\ n - (r-1) \end{array} \longrightarrow n - (r-2) \longrightarrow \cdots n-1 \longrightarrow n$$

- para $r = n+1$,

$$\gamma_s(\tau^{-(n+1)}\Delta'_0) : s \longleftarrow 1 \longrightarrow 2 \cdots n-1 \longrightarrow n$$

- para $r = n+2$,

$$\gamma_s(\tau^{-(n+2)}\Delta'_0) : s \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \cdots n-1 \longrightarrow n.$$

Assim, podemos verificar que não existe um isomorfismo de aljavas entre as aljavas acima que fixe o vértice congelado.

Sejam Δ e Δ' duas triangulações de \mathcal{P}_{n+3} e suponha que $\gamma_s(\Delta) = \gamma_s(\Delta')$. Como essas aljavas estão em $\mathcal{M}_{[n+1]}$, segue da definição de $\mathcal{M}_{[n+1]}$ que existe uma sequência de mutações de aljava, que denotaremos por μ , tal que

$$\mu\gamma_s(\Delta) = \gamma_s(\Delta'_0).$$

Então, aplicando o lema 1.21 na igualdade acima temos:

$$\gamma_s\mu(\Delta) = \mu\gamma_s(\Delta) = \gamma_s(\Delta'_0).$$

Como $\gamma_s(\Delta) = \gamma_s(\Delta')$ segue que $\mu\gamma_s(\Delta') = \gamma_s(\Delta'_0)$ logo

$$\gamma_s\mu(\Delta) = \gamma_s(\Delta'_0) = \mu\gamma_s(\Delta') = \gamma_s\mu(\Delta').$$

Segue desta igualdade e das definições das aplicações γ_s e γ que se retirarmos o vértice congelado da aljava $\gamma_s(\Delta'_0)$ obtemos as igualdades $\gamma(\mu\Delta) = \gamma(\Delta'_0) = \gamma(\mu\Delta')$. Aplicando o teorema 1.19, temos que

$$\mu\Delta = \tau^r\Delta'_0,$$

$$\mu\Delta' = \tau^{r'}\Delta'_0.$$

Mas, vimos anteriormente que a função γ_s leva as rotações de Δ'_0 em aljavas não isomorfas, donde, como temos que $\gamma_s(\mu\Delta) = \gamma_s(\Delta'_0) = \gamma_s(\mu\Delta')$, segue que $\mu\Delta = \Delta'_0 = \mu\Delta'$. Como a mutação é involutiva, segue que $\Delta = \Delta'$. Portanto, γ_s é injetora.

Seja $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$. Então, existe uma sequência de mutações de aljava μ tal que $\mu(Q) = \gamma_s(\Delta'_0)$. Então, $Q = \mu^{-1} \circ \mu(Q) = \mu^{-1} \circ \gamma_s(\Delta'_0) = \gamma_s(F(\Delta'_0))$ em que F é uma sequência de mutações de triangulação associada com μ^{-1} via 1.21. Portanto, γ_s é sobrejetora. □

Pela definição de $\mathcal{M}_{[n+1]}$, sabemos que cada aljava $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ é obtida da aljava $\vec{\mathbb{A}}_{[n+1]}$ por uma sequência de mutações. Para terminar esta seção, mostraremos que cada aljava $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ pode ser obtida com no máximo n mutações.

Corolário 1.23. *Seja $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$. Existem elementos $r_1, r_2, \dots, r_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, dois a dois distintos, tais que*

$$\mu_{r_m} \circ \mu_{r_{m-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\vec{\mathbb{A}}_{[n+1]}) = Q$$

Demonstração. Segue direto dos resultados 1.17(a), 1.21 e 1.22. □

Capítulo 2

Álgebra de Conglomerado de Fomin e Zelevinsky

Neste capítulo, apresentaremos uma breve introdução à álgebra de conglomerado de Fomin e Zelevinsky e suas relações com representações de aljava. Para uma introdução abrangente ao assunto, consulte [Kel08].

2.1 Definição: álgebra de conglomerado sem coeficientes

Mutação de semente

Fixado um inteiro $n > 0$, uma **semente** é um par (u, Q) em que Q é uma aljava com n vértices sem ciclos de comprimento um ou dois e u é um conjunto com n variáveis algebricamente independentes sobre \mathbb{Q} .

Definição 2.1. Seja (u, Q) uma semente e r um vértice de Q . A **mutação** $\mu_r(u, Q)$ de (u, Q) em r é a semente $(u', Q') = (\mu_r(u), \mu_r(Q))$ em que Q' é dada pela mutação da aljava Q em r e u' é obtido substituindo o elemento u_r de u por

$$u'_r = \frac{1}{u_r} \left(\prod_{r \rightarrow v} u_v + \prod_{v \rightarrow r} u_v \right). \quad (2.1)$$

Chamaremos a relação 2.1 de **relação de permuta**. Caso o produtório seja tomado sobre o conjunto vazio, definimos como sendo igual a um. Repare que $\mu_r(u, Q)$ é de fato uma semente e que a mutação é involutiva, ou seja, $\mu_r(\mu_r(u, Q)) = (u, Q)$.

Fixada uma semente (x, Q) , um **conglomerado** é um conjunto da forma $\mu(x)$ para alguma sequência de mutações μ ; suas variáveis são chamadas de **variáveis de conglomerado**. Chamaremos (x, Q) de **semente inicial** e x de **conglomerado inicial**. Então, a **álgebra de conglomerado** $\mathcal{A}(x, Q)$ é a \mathbb{Q} -subálgebra do corpo $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ gerada por todas as variáveis de conglomerado.

Exemplo 2.2. Considere a semente $(x, Q) = (\{x_1, x_2\}, 1 \rightarrow 2)$. Então,

$$\begin{aligned}\mu_1(x, Q) &= \left(\left\{ \frac{x_2+1}{x_1}, x_2 \right\}, 1 \leftarrow 2 \right) \\ \mu_2(\mu_1(x, Q)) &= \left(\left\{ \frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \right\}, 1 \rightarrow 2 \right) \\ \mu_2(x, Q) &= \left(\left\{ x_1, \frac{x_1+1}{x_2} \right\}, 1 \leftarrow 2 \right) \\ \mu_1(\mu_2(x, Q)) &= \left(\left\{ \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}, \frac{x_1+1}{x_2} \right\}, 1 \rightarrow 2 \right)\end{aligned}$$

Poderíamos continuar a mutação iteradamente, mas não encontraríamos variáveis de conglomerado novas. Então, a álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(x, Q)$ é gerada pelas cinco variáveis

$$x_1, x_2, \frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}, \frac{x_1+1}{x_2}$$

2.2 Álgebra de conglomerado com coeficientes

Seja \tilde{Q} uma aljava com congelamento do tipo (n, m) . A **parte principal** de \tilde{Q} é a subaljava Q de \tilde{Q} determinada pelos vértices não congelados. Assim, tomando o conjunto de vértices de \tilde{Q} como sendo o conjunto

$$\{1, \dots, n; n+1, \dots, n+m\},$$

em que os vértices $r > n$ são os vértices congelados, temos que a parte principal de \tilde{Q} é a subaljava plena de \tilde{Q} determinada pelos vértices $1, \dots, n$.

Definição 2.3. Seja \tilde{Q} uma aljava com congelamento do tipo (n, m) e (u, \tilde{Q}) uma semente. A **álgebra de conglomerado com coeficientes** $\mathcal{A}(u, \tilde{Q})$ é a \mathbb{Q} -subálgebra do corpo $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_{n+m})$ gerada por todas as variáveis de conglomerado, em que a mutação só é permitida nos vértices da parte principal de \tilde{Q} . Em um conglomerado, somente as variáveis correspondentes aos vértices da parte principal de \tilde{Q} são chamadas de variáveis de conglomerado; as variáveis correspondentes aos vértices congelados são chamadas de **coeficientes**.

Exemplo 2.4. Considere a aljava com congelamento do tipo $(2, 1)$

$$\vec{\mathbb{A}}_{[3]} : 1 \rightarrow 2 \rightarrow [3].$$

No exemplo 1.3 apresentamos a classe de mutação de $\vec{\mathbb{A}}_{[3]}$. Vamos calcular os conglomerados da álgebra de conglomerado $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, \vec{\mathbb{A}}_{[3]})$, em que $x = \{x_1, x_2; x_3\}$.

$$\begin{array}{ll}
 \left\{ \frac{x_2+1}{x_1}, x_2, x_3 \right\} & \mu_1(\vec{\mathbb{A}}_{[3]}) : 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow [3] \\
 \\
 \left\{ \frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_3(x_2+1)+x_1}{x_1x_2}, x_3 \right\} & \mu_2\mu_1(\vec{\mathbb{A}}_{[3]}) : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow [3] \\
 \\
 \left\{ \frac{x_3+x_1}{x_2}, \frac{x_3(x_2+1)+x_1}{x_1x_2}, x_3 \right\} & \mu_1\mu_2\mu_1(\vec{\mathbb{A}}_{[3]}) : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow [3] \\
 \\
 \left\{ x_1, \frac{x_3+x_1}{x_2}, x_3 \right\} & \mu_2(\vec{\mathbb{A}}_{[3]}) : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow [3]
 \end{array}$$

Considere a semente $(u, Q) = \mu_1\mu_2\mu_1(x, \vec{\mathbb{A}}_{[3]})$. Vamos calcular a semente $\mu_2(u, Q)$. Vimos acima que

$$(u, Q) = \left(\left\{ \frac{x_3+x_1}{x_2}, \frac{x_3(x_2+1)+x_1}{x_1x_2}, x_3 \right\}, \quad 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow [3] \right).$$

Então, segue da definição da relação de permuta 2.1 que

$$u'_2 = \frac{x_1x_2}{x_3(x_2+1)+x_1} \left(\frac{x_3+x_1}{x_2} + x_3 \right) = x_1.$$

Logo, segue que

$$\mu_2(u, Q) = \left(\left\{ \frac{x_3+x_1}{x_2}, x_1, x_3 \right\}, \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow [3] \right).$$

Repare que na semente $\mu_2(u, Q)$ as variáveis do conglomerado $\mu_2(u)$ são exatamente as variáveis que aparecem no conglomerado da semente $\mu_2(x, \vec{\mathbb{A}}_{[3]})$, mas a variável de conglomerado x_1 está associada ao vértice 2 de $\mu_2(Q)$, enquanto que em $\mu_2(x, \vec{\mathbb{A}}_{[3]})$ a variável x_1 corresponde ao vértice 1 de $\mu_2(\vec{\mathbb{A}}_{[3]})$. Mas, vimos no exemplo 1.3 que a aljava $\mu_2(Q)$ é isomorfa à aljava $\mu_2(\vec{\mathbb{A}}_{[3]})$. Então, a menos de um isomorfismo de aljavas congeladas, temos que $\mu_2(x, \vec{\mathbb{A}}_{[3]}) = \mu_2(u, Q)$. Analogamente, podemos mostrar que $\mu_1(\mu_2(x, \vec{\mathbb{A}}_{[3]})) = (u, Q)$, o que prova que as 4 sementes acima e a semente inicial são todas as sementes de \mathcal{A} . Assim, temos que as variáveis de conglomerado de \mathcal{A} são

$$x_1, x_2, \frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_3(x_2+1)+x_1}{x_1x_2}, \frac{x_1+x_3}{x_2}$$

Teorema 2.5 (Fomin-Zelevinsky [FZ03]). *Seja (u, Q) uma semente em que Q é uma aljava finita, conexa e sem ciclos de comprimento um ou dois. Seja \mathcal{A} a álgebra de conglomerado correspondente.*

- (a) *qualquer variável de conglomerado de \mathcal{A} pode ser expressa em termos das variáveis de um conglomerado qualquer como um polinômio de Laurent.*

(b) o número de variáveis de conglomerado é finita se e somente se Q é equivalente por mutações a uma orientação de um diagrama Dynkin.

Exemplo 2.6. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo k e $T(V)$ a álgebra tensorial

$$T(V) = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots .$$

Seja I o ideal gerado por todos os elementos da forma $v \otimes v$. Então, a álgebra exterior $\bigwedge(V)$ de V sobre k é definida pelo quociente

$$\bigwedge(V) := T(V)/I.$$

Denotaremos por $v_1 \wedge v_2 \cdots \wedge v_r$ a classe de equivalência do elemento $v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes v_r$. A álgebra exterior é graduada e a componente de grau r , que denotaremos por $\bigwedge^r(V)$, é o subespaço vetorial de $\bigwedge(V)$ gerado pelos elementos da forma

$$v_1 \wedge v_2 \cdots \wedge v_r, \quad v_i \in V, i = 1, \dots, r.$$

Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n + 1$ e $\mathbb{P}(V)$ o espaço projetivo de V sobre k . Para uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}(V)$, definimos o ideal $I(X)$ como sendo o ideal de polinômios $P \in k[x_0, \dots, x_n]$ que se anulam em X . O anel de coordenadas homogêneas é o anel quociente

$$k[x_0, \dots, x_n]/I(X).$$

Denote por \mathcal{A}_n o anel de coordenadas homogêneas do Grasmaniano $Gr_2(\mathbb{C}^{n+3})$ em relação à inclusão de Plucker:

$$\begin{aligned} Gr_2(\mathbb{C}^{n+3}) &\hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+3}) \\ \langle u, v \rangle &\mapsto u \wedge v, \end{aligned}$$

em que $u, v \in \mathbb{C}^{n+3}$ são linearmente independentes. A inclusão de Plucker está bem definida pois se escolhermos uma base diferente para $\langle u, v \rangle$ o 2-vetor $u \wedge v$ seria apenas multiplicado pelo determinante da matriz de mudança de base.

As coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+3})$ são chamadas coordenadas de Plucker em $Gr_2(\mathbb{C}^{n+3})$. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \sum u_i e_i \wedge \sum v_j e_j \\ &= \sum u_i v_j e_i \wedge e_j \\ &= \sum_{i < j} (u_i v_j - u_j v_i) e_i \wedge e_j \end{aligned}$$

então as coordenadas de Plucker $P_{i,j}$, para $1 \leq i < j \leq n + 3$, são dadas por

$$P_{i,j} = \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}.$$

Podemos verificar que para $i < j < k < l$ as coordenadas de Plucker satisfazem as relações de Grassmann-Plucker

$$P_{i,k}P_{j,l} = P_{i,j}P_{k,l} + P_{i,l}P_{j,k}.$$

Em geral, as relações de Grassmann-Plucker geram o ideal $I(\text{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+3}))$. Então, sejam $X_{a,b}$, $1 \leq a \leq b \leq n+3$, indeterminadas sobre \mathbb{C} e $1 \leq i < j < k < l \leq n+3$, assim

$$\mathcal{A}_n = \mathbb{C}[X_{a,b}] / \langle X_{i,j}X_{k,l} + X_{i,l}X_{j,k} - X_{i,k}X_{j,l} \rangle.$$

Repare que temos uma correspondência natural entre as indeterminadas $X_{a,b}$ e os lados e diagonais de \mathcal{P}_{n+3} . Fomin e Zelevinsky demonstram em [FZ03], exemplo 12.6, (veja também [Kel08] seção 4.3) que \mathcal{A}_n possui uma estrutura de álgebra de conglomerado com coeficientes, em que

- (i) os coeficientes são as variáveis $X_{i,j}$ associadas com os lados de \mathcal{P}_{n+3} ;
- (ii) as variáveis de conglomerado são as variáveis X_{ij} associadas com as diagonais de \mathcal{P}_{n+3} ;
- (iii) os conglomerados são as n -uplas de variáveis cujas diagonais associadas formam uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} .

Além disso, as relações de permuta são dadas pelas relações de Grassmann-Plucker.

2.3 Categoria Conglomerada

Seja Q uma aljava com n vértices e sem ciclos. Seja k um corpo algebricamente fechado e kQ a álgebra de caminhos da aljava Q . Denote por $\mathcal{D}_Q = D^b(kQ)$ a categoria derivada de complexos limitados de kQ -módulos à direita finitamente gerados. Denote por $[1]$ o funtor suspensão de \mathcal{D}_Q . Seja $F : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_Q$ o funtor dado por $M \mapsto \tau_{\mathcal{D}}^{-1}M[1]$, em que $\tau_{\mathcal{D}}$ é o transladado de Auslander-Reiten na categoria derivada \mathcal{D}_Q .

A **categoria conglomerada** \mathcal{C}_Q [BMR+06] é a categoria de órbita do funtor F em \mathcal{D}_Q . Os objetos de \mathcal{C}_Q são as F -órbitas $\widetilde{M} = (F^i M)_{i \in \mathbb{Z}}$ e os morfismos são por definição

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(F^i M, N).$$

A composição de morfismos é obtida da composição em \mathcal{D}_Q : se $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(F^i M, N)$ e $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(F^j N, L)$ então $\beta \circ_{\mathcal{C}_Q} \alpha = \beta \circ F^j(\alpha)$ (ver [CM06] em que, em um contexto mais geral, esta categoria é chamada de *skew category*).

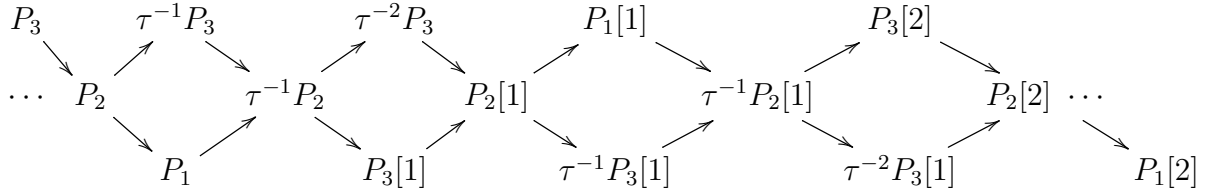
A categoria \mathcal{C}_Q é triangulada e o funtor natural $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ é um funtor triangulado [Kel05]. O funtor suspensão e o transladado de Auslander-Reiten de \mathcal{C}_Q são induzidos pelo

functor suspensão e pelo transladado de Auslander-Reite de \mathcal{D}_Q , isto é,

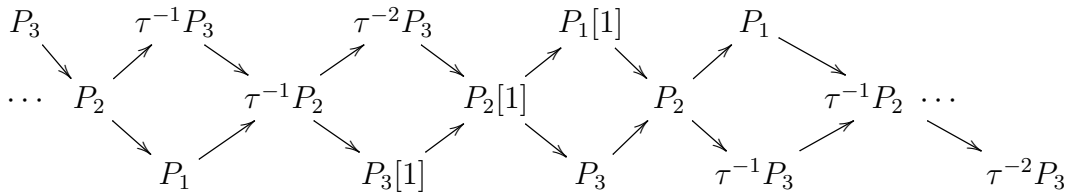
$$\tau_{\mathcal{C}} \widetilde{M} = \widetilde{\tau_{\mathcal{D}_Q} M} \quad \text{e} \quad \widetilde{M}[1]_{\mathcal{C}_Q} = \widetilde{M[1]_{\mathcal{D}_Q}}.$$

Portanto, segue que $\tau_{\mathcal{C}} = [1]_{\mathcal{C}}$. De fato, $\tau_{\mathcal{C}} \widetilde{M} = \tau_{\mathcal{C}} \widetilde{FM} = \widetilde{M[1]_{\mathcal{C}}}$.

Exemplo 2.7. Seja $Q = \overrightarrow{\mathbb{A}}_3 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. Então a aljava $\Gamma(D^b(\text{mod}kQ))$ é



Para obter os objetos indecomponíveis da categoria conglomerada \mathcal{C}_Q , temos que identificar os elementos que estão na mesma F -órbita. Por exemplo, o objeto P_3 está na mesma F -órbita que $\tau^{-1}P_3[1] = FP_3 =$ e o objeto P_1 está na mesma F -órbita que $P_3[2] = \tau^{-1}P_1[1] = FP_1$. Assim, temos que a aljava de Auslander-Reiten de \mathcal{C}_Q é a aljava



Observação 2.8. Por abuso de linguagem, dizendo que um objeto é a sua classe de equivalência em \mathcal{C}_Q , os objetos indecomponíveis de \mathcal{C}_Q são os objetos indecomponíveis de $\text{mod}kQ$ junto com mais n objetos: $P_1[1], \dots, P_n[1]$.

Definição 2.9. Sejam Q uma aljava finita com n vértices e sem ciclos e \mathcal{C}_Q a categoria conglomerada correspondente. Um **objeto conglomerado-inclinante básico** de \mathcal{C}_Q é um objeto T tal que

(i) $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T, T) = 0$

(ii) T é a soma direta de n objetos dois a dois não isomorfos.

Diremos que um objeto T que satisfaz apenas (i) é **rígido**. Um **conjunto conglomerado-inclinante básico** é o conjunto dos somandos indecomponíveis de um objeto conglomerado-inclinante básico.

Neste trabalho utilizaremos apenas objetos conglomerado-inclinante básicos, então omitiremos a palavra "básico" de agora em diante. Assim, um objeto conglomerado-inclinante de \mathcal{C}_Q é um objeto rígido com n componentes indecomponíveis duas a duas não isomorfas, em que n é o número de vértices de Q .

Teorema 2.10 ([BMR⁺06]). *Sejam T um objeto conglomerado-inclinante de \mathcal{C} , M um somando indecomponível de T e $T = \overline{T} \oplus M$. Então existe um único indecomponível $M' \not\cong M$ tal que $\overline{T} \oplus M'$ é um objeto conglomerado-inclinante. Além disso, existem únicos triângulos em \mathcal{C}*

$$M' \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i \longrightarrow M \longrightarrow M'[1]$$

$$M \longrightarrow \bigoplus_{i \in I'} B'_i \longrightarrow M' \longrightarrow M[1],$$

em que B_i e B'_i são somandos indecomponíveis de T .

Seja $T = \{T_1, \dots, T_n\}$ um conjunto conglomerado-inclinante. O teorema acima nos permite definir a **mutação de conglomerado-inclinante** $\mu_i(T)$ de T como sendo o conjunto conglomerado-inclinante obtido de T retirando T_i e substituindo pelo único objeto $T'_i \not\cong T_i$ tal que

$$\mu_i(T) = T \setminus T_i \cup T'_i,$$

seja um conjunto conglomerado-inclinante.

Teorema 2.11 ([BMR08]). *Sejam \mathcal{Q} uma aljava finita sem ciclos, $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ a categoria conglomerada, $T = \{T_1, \dots, T_n\}$ um conjunto conglomerado-inclinante e Q_T a aljava da álgebra de endomorfismos $\text{End}_{\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}} \bigoplus_{i=1}^n T_i$. Então,*

$$\mu_i(Q_T) = Q_{\mu_i(T)}.$$

Exemplo 2.12. Vamos ilustrar o teorema 2.11 para o caso em que $T = \{P_1, P_2, P_3\}$. Temos que $Q_T = 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Como $\mu_2(T) = T \setminus \{P_2\} \cup \{\tau_{\mathcal{D}}^{-2} P_1\}$, segue que

$$\mu_2(Q_T) = 1 \xrightarrow{\quad} 2 \xrightarrow{\quad} 3 = Q_{\mu_2(T)}$$

2.4 A aplicação de Caldero-Chapoton

Sejam Q uma aljava finita sem ciclos com vértices $1, \dots, n$ e \mathcal{C}_Q a categoria conglomerada correspondente. A **aplicação de Caldero-Chapoton** [CC06]

$$X_{\cdot} : \text{obj} \mathcal{C}_Q \rightarrow \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$$

é definida por:

- Para todos $M, N \in \text{obj} \mathcal{C}_Q$, temos $X_{M \oplus N} = X_M X_N$.
- Se P_i é isomorfo ao kQ -módulo projetivo indecomponível associado ao vértice i , então $X_{P_i[1]} = x_i$.

- Se V é um kQ -módulo indecomponível e $d = \sum_i d_i \alpha_i$ o vetor dimensão de V , então

$$X_V = \sum_{0 \leq e \leq d} \chi(Gr_e(V)) \prod_{r=1}^n x_r^{-\langle e, \alpha_r \rangle - \langle \alpha_r, d-e \rangle}$$

em que χ denota a característica de Euler do Q -grasmaniano $Gr_e(V)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a forma de Euler. A característica de Euler é definida via homologia singular e a forma de Euler foi definida na seção 1.1.7.

Teorema 2.13 ([CK06],[BMR+06]). *A aplicação de Caldero-Chapoton induz uma bijeção entre os objetos rígidos indecomponíveis da categoria conglomerada \mathcal{C}_Q e as variáveis de conglomerado da álgebra de conglomerado \mathcal{A}_Q . Além disso, um conglomerado-inclinante de \mathcal{C}_Q corresponde à um conglomerado de \mathcal{A}_Q .*

Teorema 2.14 ([CK08] caso Dynkin,[CK06],[BMR+06]). *Sejam L e M dois objetos de \mathcal{C}_Q rígidos e indecomponíveis tais que $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, L) = 1$, em que Q é uma aljava finita sem ciclos. Fixado dois triângulos*

$$M \longrightarrow B \longrightarrow L \longrightarrow M[1] \quad e \quad L \longrightarrow B' \longrightarrow M \longrightarrow L[1].$$

Então $X_M X_L = X_B + X_{B'}$.

Capítulo 3

c -Frisos

A primeira e a segunda seção deste capítulo são baseadas no artigo [BMRDS14]. Nas seções seguintes, caso não se faça menção contrária, os resultados são todos novos. Na primeira seção discutiremos informalmente a definição de friso (*frieze pattern* de Conway e Coxeter [Cox71][CC73a][CC73b]) e a definição de c -friso [BMRDS14]. A segunda seção é dedicada para a definição formal e propriedades de c -friso apresentadas por Bazier-Matte, Racicot-Desloges e Sanchez [BMRDS14] que utilizaremos neste trabalho. Nas seções seguintes desenvolvemos a teoria de c -frisos para o estudo de uma nova classe de álgebra de conglomerado.

3.1 Introdução e exemplos

Para compreender o conceito de c -friso, primeiramente apresentaremos a ideia intuitiva de friso que foi introduzida por Coxeter [Cox71]. Considere a tabela de números inteiros positivos abaixo:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \backslash & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & / & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 2 & \backslash & 3 & 1 & 2 & 3 & / & 1 & 2 & \backslash & 3 & 1 & 2 \\
 \dots & 5 & \backslash & 2 & 1 & 5 & / & 2 & 1 & 5 & \backslash & 2 & 1 & 5 & \dots \\
 & 2 & 3 & \backslash & 1 & 2 & / & 3 & 1 & 2 & 3 & \backslash & 1 & 2 & / \\
 & 1 & 1 & \backslash & 1 & 1 & / & 1 & 1 & 1 & 1 & \backslash & 1 & 1 & / \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Podemos observar que a tabela acima ocupa um número finito de linhas, cujas bordas são compostas de zeros e uns. Tirando a borda composta por zeros e uns, a regra fundamental que caracteriza esta tabela é que todo losango da forma

$$\begin{array}{ccc}
 & a_2 & \\
 a_1 & & a_4 \\
 & a_3 &
 \end{array}$$

3.2.1 c -Friso de ordem infinita e regra $-c$ -modular

Sejam K um corpo e $c \in K$ um escalar não nulo. O **polinômio c -recorrente** de ordem $r \geq -1$ é definido pela relação

$$p_r^c(x_1, \dots, x_r) = x_r p_{r-1}^c(x_1, \dots, x_{r-1}) + c p_{r-2}^c(x_1, \dots, x_{r-2}) \quad (3.1)$$

com as condições iniciais $p_{-1}^c = 0$ e $p_0^c = 1$. A seguir apresentamos os polinômios p_r^c para $1 \leq r \leq 4$.

$$\begin{aligned} p_1^c(x_1) &= x_1 \\ p_2^c(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + c \\ p_3^c(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 + c(x_3 + x_1) \\ p_4^c(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 x_4 + c x_3 x_4 + c x_1 x_4 + c x_1 x_2 + c^2. \end{aligned}$$

Proposição 3.1 ([BMRDS14]). *Sejam $c \in K$ não nulo e $r \geq 1$. Então,*

$$p_r^c(x_1, \dots, x_r) = \begin{vmatrix} x_1 & -c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & -c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{r-1} & -c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_r \end{vmatrix}$$

Demonstração. Segue por indução em r . □

Definição 3.2. Sejam $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset K$ e $\mathbb{B}_{[\alpha, \beta]} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha \leq j - i < \beta\}$. Um **c -friso** é uma função $f : \mathbb{B}_{[-2, \infty)} \rightarrow K$ definida por

$$f(i, j) := p_{j-i+1}^c(a_i, \dots, a_j).$$

Por definição, a **linha k de um c -friso** é composta pelos elementos da forma $f(i, i+k-1)$. Assim, o intervalo $[\alpha, \beta)$ em $\mathbb{B}_{[\alpha, \beta]}$ indica que temos uma tabela que se inicia na linha $\alpha + 1$ e termina na linha β . Muitas vezes vamos considerar esta tabela com infinitas linhas e por isso denotaremos $[\alpha, \infty)$. Dado um c -friso f , vamos dispor os elementos da imagem de f da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccccc} & & f(i-2, i-4) & & f(i-1, i-3) & & f(i, i-2) & \\ & f(i-3, i-4) & & f(i-2, i-3) & & f(i-1, i-2) & & \\ \cdots & & f(i-3, i-3) & & f(i-2, i-2) & & f(i-1, i-1) & \cdots \\ & f(i-4, i-3) & & f(i-3, i-2) & & f(i-2, i-1) & & \\ \cdots & & f(i-4, i-2) & & f(i-3, i-1) & & f(i-2, i) & \cdots \\ & f(i-5, i-2) & & f(i-4, i-1) & & f(i-3, i) & & \\ & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Observação 3.3. Seja f um c -friso. Então,

- (a) $f(i, i-2) = p_{-1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, a linha -1 é composta apenas por zeros;
- (b) $f(i, i-1) = p_0 = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, a linha 0 é composta apenas por uns;
- (c) $f(i, i) = p^c(a_i) = a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, a linha 1 é composta pelos elementos $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset K$ utilizados na definição do c -friso f .

Provaremos no item (c) da proposição 3.4 que um c -friso f definido da forma apresentada aqui satisfaz a regra $-c$ -modular que discutimos na primeira seção deste capítulo, ou seja, provaremos que cada losango da forma

$$\begin{array}{ccc} & f(i, j-1) & \\ f(i-1, j-1) & & f(i, j) \\ & f(i-1, j) & \end{array}$$

satisfaz a regra $-c$ -modular $f(i-1, j-1)f(i, j) - f(i, j-1)f(i-1, j) = (-c)^{j-i+1}$.

Proposição 3.4. *Seja f um c -friso e $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, \infty)}$. Então,*

- (a) $f(i, j) = f(i, j-1)a_j + cf(i, j-2)$
- (b) $f(i, j) = a_i f(i+1, j) + cf(i+2, j)$
- (c) (**regra $-c$ -modular**) $\left| \begin{array}{cc} f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{array} \right| = (-c)^{j-i+1}$

Demonstração. O item (a) segue pela definição de c -friso. De fato,

$$\begin{aligned} f(i, j) &= p^c(a_i, \dots, a_j) \\ &= p^c(a_i, \dots, a_{j-1})a_j + cp^c(a_i, \dots, a_{j-2}) \\ &= f(i, j-1)a_j + cf(i, j-2) \end{aligned}$$

Provaremos o item (b) por indução em j . Como os elementos da linha -1 são todos nulos e os elementos da linha 0 são todos iguais a um, temos que $f(i+2, i) = 0$ e $f(i+1, i) = 1$, donde $f(i, i) = f(i, i)f(i+1, i) + cf(i+2, i)$. Se $j = i+1$ então o item (a) implica que

$$\begin{aligned} f(i, i+1) &= a_i a_{i+1} + cf(i, i-1) \\ &= a_i a_{i+1} + c \\ &= a_i f(i+1, i+1) + cf(i+2, i+1). \end{aligned}$$

Assim, temos que o resultado em (b) vale para $j = i$ e para $j = i+1$. Seja $j > i+1$ e suponha por indução que o resultado vale para $j' < j$. O item (a) implica que

$$cf(i+2, j) = ca_j f(i+2, j-1) + c^2 f(i+2, j-2).$$

Usando a hipótese de indução no lado direito da igualdade acima, reorganizando e aplicando novamente o item (a), temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} cf(i+2, j) &= a_j \left(f(i, j-1) - a_i f(i+1, j-1) \right) + c \left(f(i, j-2) - a_i f(i+1, j-2) \right) \\ &= a_j f(i, j-1) + cf(i, j-2) - a_i \left(a_j f(i+1, j-1) + cf(i+1, j-2) \right) \\ &= f(i, j) - a_i f(i+1, j). \end{aligned}$$

Logo, $f(i, j) = a_i f(i+1, j) + cf(i+2, j)$.

Provaremos o item (c) por indução em j . Para $j = i$, segue do item (a) que

$$\begin{vmatrix} f(i-1, i-1) & f(i, i-1) \\ f(i-1, i) & f(i, i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i-1} & 1 \\ f(i-1, i) & a_i \end{vmatrix} = a_{i-1} a_i - f(i-1, i) = -c.$$

Então, suponha por indução que

$$\begin{vmatrix} f(i-1, j-2) & f(i, j-2) \\ f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \end{vmatrix} = (-c)^{j-i}$$

Assim, usando a linearidade do determinante e aplicando a propriedade do item (a) para os elementos $f(i-1, j)$ e $f(i, j)$, temos que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{vmatrix} &= a_j \begin{vmatrix} f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \\ f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \\ f(i-1, j-2) & f(i, j-2) \end{vmatrix} \\ &= -c \begin{vmatrix} f(i-1, j-2) & f(i, j-2) \\ f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \end{vmatrix} = -c(-c)^{j-i} = (-c)^{j-i+1} \end{aligned}$$

□

3.2.2 c -Friso de ordem n

Na definição de c -friso estamos permitindo que um c -friso tenha infinitas linhas. Apresentaremos agora a definição de c -friso de ordem n , que possui $n+4$ linhas enumeradas de -1 até $n+2$.

Definição 3.5. Sejam K um corpo e $c \in K$ não nulo.

(a) Um conjunto $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset K$ é dito n -**admissível** se para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos que

$$p_{n+2}^c(a_i, \dots, a_{i+n+1}) = 0$$

- (b) Seja $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset K$ um conjunto n -admissível. Um **c -friso de ordem n** é uma função $f : \mathbb{B}_{[-2, n+2]} \rightarrow K$ definida por

$$f(i, j) := p_{j-i+1}^c(a_i, \dots, a_j).$$

Observação 3.6. Assim como em um c -friso com infinitas linhas, um c -friso f de ordem n possui as seguintes propriedades:

- $f(i, i-2) = p_{-1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, a linha -1 é composta apenas por zeros;
- $f(i, i-1) = p_0 = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, a linha 0 é composta apenas por uns;
- $f(i, i) = p^c(a_i) = a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, a linha 1 é composta pelos elementos $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.
- um c -friso f de ordem n possui as propriedades da proposição 3.4. Em particular, f satisfaz a regra $-c$ -modular.

Além disso, como o conjunto $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ na definição de c -friso de ordem n é um conjunto n -admissível, f possui a linha $n+2$ constituída apenas por zeros, pois satisfaz a igualdade

$$f(i, i+n+1) = p_{n+2}^c(a_i, \dots, a_{i+n+1}) = 0.$$

Proposição 3.7. *Dado um c -friso de ordem n , existem $s, t \in K$ tais que a linha $n+1$ é da forma:*

$$\dots \quad s \quad t \quad s \quad t \quad s \quad t \quad s \quad t \quad s \quad t \quad \dots$$

com s, t , tais que $st = (-c)^{n+1}$.

Demonstração. Vimos na observação anterior que os elementos da linha $n+2$ de um c -friso de ordem n são todos iguais a zero, donde $f(i, i+n+1) = f(i+1, i+n+2) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Então, a regra $-c$ -modular implica que

$$f(i, i+n)f(i+1, i+n+1) = (-c)^{n+1} = f(i+1, i+n+1)f(i+2, i+n+2).$$

Como $c \neq 0$, temos que $f(i+1, i+n+1) \neq 0$. Portanto, dividindo a equação acima por $f(i+1, i+n+1)$, segue que $f(i, i+n) = f(i+2, i+n+2)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, a linha $n+1$ de um c -friso de ordem n possui a forma indicada no enunciado desta proposição. \square

No que segue, usaremos a notação s e t utilizada na proposição 3.7 para os elementos da linha $n+1$. Podemos assumir que $f(0, n) = s$ e $f(1, n+1) = t$. Então, temos que $f(2i, n+2i) = s$ e $f(2i+1, n+2i+1) = t$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

3.2.3 Lema de transvecção e periodicidade de um c -friso

Nesta subsecção enunciaremos o lema de transvecção, o teorema de pseudo-periodicidade e um corolário sobre a periodicidade de um c -friso. Por fim, apresentaremos a demonstração de um lema técnico que utilizaremos adiante neste trabalho.

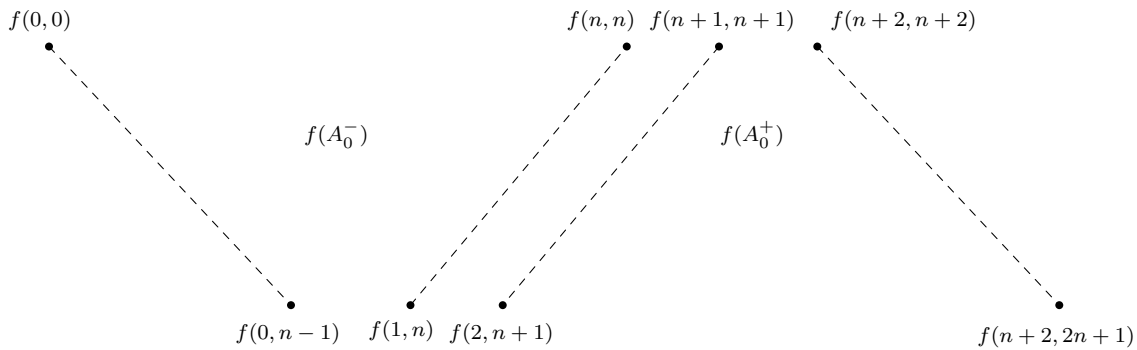
Lema 3.8 (*Lema de transvecção*). *Os elementos da linha λ de um c -friso de ordem n podem ser expressos em termos dos elementos da linha $n - \lambda + 1$, e vice versa, da seguinte forma:*

$$f(2i_0, 2i_0 + \lambda - 1) = \frac{(-c)^\lambda}{t} f(2i_0 + \lambda + 1, 2i_0 + n + 1)$$

$$f(2i_0 + 1, 2i_0 + \lambda) = \frac{(-c)^\lambda}{s} f(2i_0 + \lambda + 2, 2i_0 + n + 2).$$

Em [BMRDS14] o lema de transvecção 3.8 foi demonstrado por indução em λ . Vamos omitir esta demonstração aqui, pois conseguiremos uma demonstração mais simples utilizando uma generalização da regra $-c$ -modular que apresentaremos na proposição 3.21, na próxima seção.

Para compreender melhor o lema de transvecção, considere o seguinte diagrama:



Podemos verificar facilmente que os elementos representados nas regiões $f(A_0^-)$ e $f(A_0^+)$ do diagrama acima estão relacionados pelo lema de transvecção. Por exemplo, para $i_0 = 0$ e $1 \leq \lambda \leq n$, a primeira equação do lema de transvecção nos mostra que

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \frac{-c}{t} f(2, n + 1) \\ f(0,1) &= \frac{(-c)^2}{t} f(3, n + 1) \\ &\vdots \\ f(0, n - 1) &= \frac{(-c)^n}{t} f(n + 1, n + 1). \end{aligned}$$

Observação 3.9. No caso $s = t = -c = 1$, o lema de transvecção demonstra que a linha λ da região $f(A_0^-)$ é idêntica à linha $n - \lambda + 1$ da região $f(A_0^+)$, ou seja, um -1 -friso de ordem n é simétrico por uma composta de uma translação com uma reflexão horizontal (por isto recebe o nome de lema de transvecção).

Diremos que um c -friso é **periódico com período** k se $f(i+k, j+k) = f(i, j)$ para todo $(i, j) \in \mathbb{B}_{[-2, \infty)}$, e k é o menor inteiro positivo com esta propriedade. Vimos na primeira seção deste capítulo dois exemplos de c -frisos periódicos com período $n+3$. No próximo exemplo apresentaremos um 2-friso de ordem 3 que não é periódico.

Exemplo 3.10. O seguinte exemplo é um 2-friso de ordem 3.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 3 & -\frac{1}{3} & -4 & 0 & -2 & \frac{1}{6} & 12 & -\frac{1}{12} & -16 & 0 & \\
 \dots & & 1 & \frac{10}{3} & 2 & 2 & \frac{5}{3} & 4 & 1 & \frac{10}{3} & 2 & \dots & \\
 & & & 2 & -\frac{2}{3} & -12 & \frac{1}{3} & 16 & 0 & 8 & -\frac{1}{6} & & \\
 & & & & 2 & 8 & 2 & 8 & 2 & 8 & 2 & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & &
 \end{array}$$

Em [BMRDS14], o lema de transvecção 3.8 é utilizado para estudar a periodicidade de um c -friso. Enunciaremos abaixo os dois principais resultados obtidos em [BMRDS14] que utilizaremos neste trabalho.

Teorema 3.11 (Pseudo-periodicidade). *Seja f um c -friso de ordem n . Então,*

a) *Se a linha λ é par, então*

$$f(i, i + \lambda - 1) = f(i + n + 3, i + \lambda + n + 2), \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

b) *Se a linha λ é ímpar, então*

$$f(2i, 2i + \lambda - 1) = \frac{(-c)^{n+1}}{t^2} f(2i + n + 3, 2i + \lambda + n + 2), \text{ para todo } i \in \mathbb{Z};$$

$$f(2i + 1, 2i + \lambda) = \frac{(-c)^{n+1}}{s^2} f(2i + n + 4, 2i + \lambda + n + 3), \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Corolário 3.12. *Um c -friso de ordem n com $s = t$ é periódico com período um divisor de $n+3$.*

Exemplo 3.13. O seguinte exemplo é um -2 -friso de ordem 3, periódico com período 3.

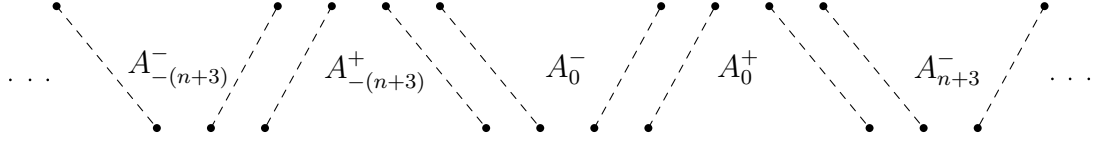
$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 3 & 1 & 8 & 3 & & \\
 \dots & & 1 & 6 & 22 & 1 & \dots & \\
 & & & 2 & 16 & 6 & 2 & \\
 & & & & 4 & 4 & 4 & 4 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Dado um c -friso f de ordem n , os elementos das linhas -1 , 0 e $n+2$ de f são conhecidos e dado um elemento da linha $n+1$, podemos determinar os outros utilizando a proposição 3.7. Então, considerando apenas as linhas $1, 2, \dots, n$, vamos discutir como utilizar o lema de transvecção 3.8 e o teorema de pseudo-periodicidade 3.11 para obter todos os elementos de um c -friso f de ordem n a partir de um subconjunto finito de $f(\mathbb{B}_{[0,n]})$. Para isto, considere os conjuntos $A_r^+, A_r^- \subset \mathbb{B}_{[0,n]}$ definidos por

$$A_r^- = \{(i, j) \in \mathbb{B}_{[0,n]} \mid r \leq i \leq j \leq r+n\}$$

$$A_r^+ = \{(i, j) \in \mathbb{B}_{[0,n]} \mid r+1 \leq j-n < i \leq r+n+2\}.$$

Então, os conjuntos $A_{k(n+3)}^-$ e $A_{k(n+3)}^+$, $k \in \mathbb{Z}$, formam uma partição de $\mathbb{B}_{[0,n]}$. Podemos representar graficamente esta partição da seguinte forma:



Vamos verificar no próximo lema que podemos obter todos os elementos de $f(\mathbb{B}_{[0,n]})$ a partir dos elementos do conjunto $f(A_0^-)$. Vimos anteriormente que podemos obter os elementos de $f(A_0^+)$ a partir dos elementos de $f(A_0^-)$ utilizando o lema de transvecção. Então, podemos separar em dois casos: primeiro provaremos que os elementos de $f(A_{k(n+3)}^-)$ podem ser obtidos a partir dos elementos de $f(A_0^-)$; em seguida provaremos que os elementos de $f(A_{k(n+3)}^+)$ podem ser obtidos a partir dos elementos de $f(A_0^+)$.

Lema 3.14. *Sejam A_r^- e A_r^+ os subconjuntos de $\mathbb{B}_{[0,n]}$ definidos acima. Então,*

(i) *se $(i, j) \in A_{k(n+3)}^-$, $k \in \mathbb{Z}$ então existem $k', k'' \in \mathbb{Z}$ e $(i_0, j_0) \in A_0^-$ tais que*

$$f(i, j) = \left(\frac{(-c)^{n+1}}{t^2} \right)^{k'} \left(\frac{(-c)^{n+1}}{s^2} \right)^{k''} f(i_0, j_0)$$

(ii) *se $(i, j) \in A_{k(n+3)}^+$, $k \in \mathbb{Z}$, então existem $k', k'' \in \mathbb{Z}$ e $(i_0, j_0) \in A_0^+$ tais que*

$$f(i, j) = \left(\frac{(-c)^{n+1}}{t^2} \right)^{k'} \left(\frac{(-c)^{n+1}}{s^2} \right)^{k''} f(i_0, j_0)$$

Demonstração. Seja $(i, j) \in A_{k(n+3)}^-$ e considere $(i_0, j_0) \in A_0^-$ da forma

$$(i_0, j_0) = (i - k(n+3), j - k(n+3))$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. É claro que os elementos $f(i_0, j_0)$ pertencem à mesma linha $\lambda = j_0 - i_0 + 1$ de f . Dessa forma, vamos aplicar o teorema de pseudo-periodicidade 3.11 para relacionar estes dois elementos da forma descrita no item (i).

Caso λ par: Pelo item a) do teorema de pseudo-periodicidade segue que

$$f(i', j') = f(i' + n + 3, j' + n + 3)$$

para todo (i', j') com $\lambda' = j' - i' + 1$ par. Como estamos nestas condições podemos aplicar $|k|$ -vezes esta fórmula e teremos $f(i', j') = f(i' + k(n + 3), j' + k(n + 3))$. Em particular, para $(i', j') = (i_0, j_0)$ temos que

$$f(i_0, j_0) = f(i_0 + k(n + 3), j_0 + k(n + 3)) = f(i, j).$$

Assim, está provado o item (i) no caso $\lambda = j_0 - i_0 + 1$ par.

Faremos algumas considerações antes de provarmos o caso λ ímpar. Para provar este caso usaremos as duas fórmulas do item (b) do teorema de pseudo-periodicidade. Para utilizarmos estas fórmulas para um elemento $f(i', j')$, com $\lambda' = j' - i' + 1$ ímpar, necessitamos analisar se i' é par ou ímpar.

Caso 1 (i' par):

$$f(i', j') = \frac{(-c)^{n+1}}{t^2} f(i' + n + 3, j' + n + 3).$$

Caso 2 (i' ímpar):

$$f(i', j') = \frac{(-c)^{n+1}}{s^2} f(i' + n + 3, j' + n + 3).$$

Assim, vemos que ambas as fórmulas do item b) do teorema de pseudo-periodicidade somam $n + 3$ nas coordenadas do lado esquerdo da equação e multiplicam ora pela constante $\frac{(-c)^{n+1}}{t^2}$, ora $\frac{(-c)^{n+1}}{s^2}$, fazendo que ao aplicarmos diversas vezes consecutivas esta fórmula, necessitamos saber em cada passo se o número $i' + l(n + 3)$ é par ou ímpar. Feitas estas considerações, provaremos o caso λ ímpar por indução em k . Para $k = 0$ é trivial pois $(i, j) \in A_0^-$. Para facilitar a compreensão vamos fazer ainda o caso $k = 1$ e $k = -1$.

Caso $k = 1$: neste caso, para i_0 par basta considerar a fórmula do caso 1 acima com $(i', j') = (i_0, j_0)$ e para i_0 ímpar basta considerar a fórmula do caso 2 acima com $(i', j') = (i_0, j_0)$.

Caso $k = -1$: este caso segue também das duas fórmulas acima, mas tomando $(i', j') = (i, j)$:

$$f(i, j) = \frac{(-c)^{n+1}}{t^2} f(i + n + 3, j + n + 3) = \frac{(-c)^{n+1}}{t^2} f(i_0, j_0).$$

ou

$$f(i, j) = \frac{(-c)^{n+1}}{s^2} f(i + n + 3, j + n + 3) = \frac{(-c)^{n+1}}{s^2} f(i_0, j_0).$$

Notemos que o caso k negativo é similar ao caso k positivo. Por este motivo faremos apenas o caso $k > 0$.

Vamos supor que $(i, j) \in A_{(k+1)(n+3)}^-$ e que a fórmula do item (i) vale para $k > 0$. Como $(i - (n + 3), j - (n + 3)) \in A_{k(n+3)}^-$, pela hipótese de indução temos que existem $k', k'' \in \mathbb{Z}$ e $(i_0, j_0) \in A_0^-$ tais que

$$f(i_0, j_0) = \left(\frac{(-c)^{n+1}}{t^2} \right)^{k'} \left(\frac{(-c)^{n+1}}{s^2} \right)^{k''} f(i - (n + 3), j - (n + 3)).$$

Tomando $(i', j') = (i - (n + 3), j - (n + 3))$ podemos utilizar uma das equações do caso 1 ou 2 acima, dependendo se $i - n + 3$ é par ou ímpar:

$$f(i - (n + 3), j - (n + 3)) = \frac{(-c)^{n+1}}{t^2} f(i, j)$$

ou

$$f(i - (n + 3), j - (n + 3)) = \frac{(-c)^{n+1}}{s^2} f(i, j),$$

provando assim a fórmula em (i). A prova em (ii) é análoga. □

3.2.4 Secção de c -frisos

Para terminar esta secção, vamos discutir como determinar todos os elementos de um c -friso conhecendo apenas alguns elementos específicos. Antes precisamos de uma definição.

Definição 3.15. Uma **secção** Σ de um c -friso f de ordem n é um subconjunto de elementos da imagem de f tais que, se $f(i, j) \in \Sigma$ então

- (a) ou $f(i, j - 1) \in \Sigma$ ou $f(i + 1, j) \in \Sigma$;
- (b) ou $f(i - 1, j) \in \Sigma$ ou $f(i, j + 1) \in \Sigma$;
- (c) Σ possui apenas um elemento da linha 1.

Observação 3.16. Como os elementos das linhas $-1, 0$ e $n + 2$ de um c -friso são conhecidos, vamos considerar que uma secção Σ possui apenas elementos nas linhas de 1 até $n + 1$.

Exemplo 3.17. O diagrama abaixo representa a imagem de uma secção Σ do 2-friso de ordem 3 apresentado no exemplo 3.10

$$\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ -12 \\ 2 \end{array}$$

Diremos que secção Σ de um c -friso f é uma **secção diagonal** se todos os seus elementos são da forma $f(i_0, j)$ com i_0 fixado ou $f(i, j_0)$ com j_0 fixado. Denotaremos por $f(i_0, *)$ se Σ é uma secção diagonal da forma $f(i_0, j)$ com i_0 fixado. Analogamente, denotaremos por $f(*, j_0)$ se Σ é uma secção diagonal da forma $f(i, j_0)$ com j_0 fixado.

Exemplo 3.18. O diagrama abaixo representa a imagem de duas secções diagonais do -2 -friso de ordem 3 do exemplo 3.13.

$$\begin{array}{ccc} & 3 & \\ & 1 & e & 22 & \\ & 2 & & 16 & \\ & 4 & 4 & & \end{array}$$

Em [CC73a] é demonstrado que um -1 -friso é inteiramente determinado por seus elementos em uma secção diagonal. Em [BMRDS14] este resultado é generalizado para c -frisos. Mais precisamente, é demonstrado em [BMRDS14] a seguinte proposição.

Proposição 3.19. *Um c -friso de ordem n é inteiramente determinado por uma secção de elementos não nulos.*

Em [BMRDS14], eles provam esta proposição utilizando as regras demonstradas na proposição 3.4 para escrever os outros elementos do c -friso em função dos elementos de uma secção de elementos não nulos. Omitiremos a demonstração da proposição acima dada em [BMRDS14], mas apresentaremos outra demonstração utilizando uma generalização deste resultado na proposição 3.28.

3.3 Caracterização de um c -friso

A partir desta seção apresentaremos os principais resultados deste trabalho. O objetivo desta seção é apresentar uma caracterização de um c -friso em termos das propriedades apresentadas na proposição 3.4 e da regra $-c$ -modular generalizada que vamos definir adiante.

3.3.1 Regra $-c$ -modular generalizada

Consideremos os 6 elementos de um c -friso representados na figura 3.1, em que a linha horizontal representa a linha -1 de um c -friso f .

Na proposição seguinte demonstraremos que estes seis elementos de f estão relacionados pela **regra $-c$ -modular generalizada**:

$$\begin{vmatrix} f(i-k, i-2+\lambda) & f(i, i-2+\lambda) \\ f(i-k, j) & f(i, j) \end{vmatrix} = (-c)^\lambda f(i-k, i-2) f(i+\lambda, j). \quad (3.2)$$

em que $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, \infty)}$, $k \geq 0$ e $0 \leq \lambda \leq j - i + 1$.

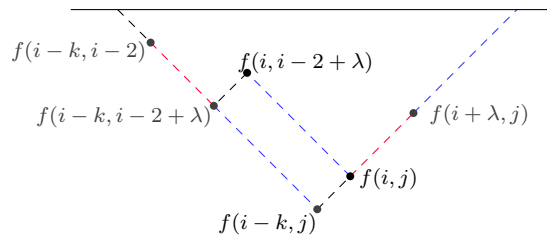


Figura 3.1:

Veja que para obtermos a regra $-c$ -modular a partir da regra $-c$ -modular generalizada basta tomarmos $k = 1$ e $\lambda = j - i + 1$, pois assim os elementos $f(i - k, i - 2)$ e $f(i + \lambda, j)$ pertencem à linha 0. Logo, segue da definição de c -friso que estes são iguais a um. Assim, temos a igualdade:

$$\begin{vmatrix} f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{vmatrix} = (-c)^{j-i+1} f(i-1, i-2) f(j+1, j) = (-c)^{j-i+1}.$$

Essa nova fórmula permite então a obtenção dos mesmos resultados obtidos com a regra $-c$ -modular. Porém, ela vai além disso. Este resultado generaliza o lema de transvecção. Para ver esta propriedade para a primeira fórmula do lema de transvecção 3.8, tome $i = 2i_0 + 1$, $k = 1$ e $j = 2i_0 + n + 1$ na regra $-c$ -modular generalizada. Temos então

$$\begin{vmatrix} f(2i_0, 2i_0 + \lambda - 1) & f(2i_0 + 1, 2i_0 + \lambda) \\ f(2i_0, 2i_0 + n + 1) & f(2i_0 + 1, 2i_0 + n + 1) \end{vmatrix} = (-c)^\lambda f(2i_0, 2i_0 - 1) f(2i_0 + \lambda + 1, 2i_0 + n + 1).$$

Como $f(2i_0 + 1, 2i_0 + n + 1)$ está na linha $n + 1$, então vale t pois $2i_0 + 1$ é ímpar (veja observação sobre a linha $n + 1$ após a proposição 3.7). Já o elemento $f(2i_0, 2i_0 + n + 1)$ vale zero pois está na linha $n + 2$. O elemento $f(2i_0, 2i_0 - 1)$ vale 1 pois está na linha zero.

Observação 3.20. A segunda igualdade do lema de transvecção segue da regra $-c$ -modular generalizada com $i = 2i_0 + 2$, $k = 1$ e $j = 2i_0 + n + 2$.

Esta nova propriedade que observamos nos c -frisos, além de generalizar estas duas propriedades que descrevemos acima, será de grande valia no estudo e compreensão da nova classe de álgebras que introduziremos no capítulo 3, as álgebras c -conglomeradas.

Denote por $D_\lambda(i, j, k)$ o determinante da regra $-c$ -modular generalizada, ou seja,

$$D_\lambda(i, j, k) := \begin{vmatrix} f(i-k, i-2+\lambda) & f(i, i-2+\lambda) \\ f(i-k, j) & f(i, j) \end{vmatrix},$$

em que $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, \infty)}$, $k \geq 0$ e $0 \leq \lambda \leq j - i + 1$. Antes de provarmos a regra $-c$ -modular generalizada, cabe algumas observações sobre este determinante.

Aplicando a proposição 3.4(a) para os elementos $f(i - k, j)$ e $f(i, j)$ da segunda linha do determinante $D_\lambda(i, j, k)$ obtemos as equações

$$f(i-k, j) = a_j f(i-k, j-1) + cf(i-k, j-2)$$

e

$$f(i, j) = a_j f(i, j-1) + cf(i, j-2).$$

Substituindo em $D_\lambda(i, j, k)$, e usando a linearidade do determinante, segue que

$$\begin{aligned} D_\lambda(i, j, k) &= a_j \begin{vmatrix} f(i-k, i-2+\lambda) & f(i, i-2+\lambda) \\ f(i-k, j-1) & f(i, j-1) \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} f(i-k, i-2+\lambda) & f(i, i-2+\lambda) \\ f(i-k, j-2) & f(i, j-2) \end{vmatrix} \\ &= a_j D_\lambda(i, j-1, k) + c D_\lambda(i, j-2, k). \end{aligned}$$

Analogamente, aplicando a proposição 3.4(b) para os dois elementos da primeira coluna de $D_\lambda(i, j, k)$, podemos provar que

$$D_\lambda(i, j, k) = a_{i-k} D_\lambda(i, j, k-1) + c D_\lambda(i, j, k-2).$$

Proposição 3.21 (regra $-c$ -modular generalizada). *Sejam f um c -friso e $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, \infty)}$. Se $k \geq 0$ e $0 \leq \lambda \leq j - i + 1$, então*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \begin{vmatrix} f(i-1, i-2+\lambda) & f(i, i-2+\lambda) \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{vmatrix} = (-c)^\lambda f(i+\lambda, j) \\ (b) \quad & \begin{vmatrix} f(i-k, i-2+\lambda) & f(i, i-2+\lambda) \\ f(i-k, j) & f(i, j) \end{vmatrix} = (-c)^\lambda f(i-k, i-2) f(i+\lambda, j) \end{aligned}$$

Demonstração. Provaremos o item (a) por indução em j . Usando a notação $D_\lambda(i, j, k)$ para o determinante da regra $-c$ -modular generalizada, temos que provar que $D_\lambda(i, j, 1) = (-c)^\lambda f(i+\lambda, j)$. Caso $j = i$, temos que $0 \leq \lambda \leq 1$ e caso $j = i+1$, temos que $0 \leq \lambda \leq 2$. Independente do valor de j , se $\lambda = 0$ o resultado é trivial e se $\lambda = 1$ o resultado segue pela propriedade 3.4(b). De fato, para $\lambda = 0$ temos que

$$D_0(i, j, 1) = \begin{vmatrix} f(i-1, i-2) & f(i, i-2) \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{vmatrix} = f(i, j).$$

Para $\lambda = 1$ temos que

$$\begin{aligned} D_1(i, j, 1) &= \begin{vmatrix} f(i-1, i-1) & f(i, i-1) \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i-1} & 1 \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{vmatrix} \\ &= a_{i-1} f(i, j) - f(i-1, j). \end{aligned}$$

Mas, pela propriedade 3.4(b), temos que $f(i-1, j) = a_{i-1} f(i, j) + cf(i+1, j)$. Logo, substituindo acima, segue que $D_1(i, j, 1) = -cf(i+1, j)$. Então, para terminar de verificar

o primeiro passo de indução, falta verificar para $j = i + 1$ e $\lambda = 2$. Mas, observe que caso $\lambda = j - i + 1$ a equação do item (a) é a regra $-c$ -modular, em particular, vale para $j = i + 1$ e $\lambda = 2$. Assim, provamos que o item (a) vale para $j = i$ e para $j = i + 1$. Para terminar a demonstração do item (a), considere $j > i + 1$ e suponha por indução que o resultado vale para $j' < j$ e $0 \leq \lambda \leq j - i$. Então, para $0 \leq \lambda \leq j - i$, temos que

$$\begin{aligned} D_\lambda(i, j, 1) &= a_j D_\lambda(i, j - 1, 1) + c D_\lambda(i, j - 2, 1) \\ &= a_j (-c)^\lambda f(i + \lambda, j - 1) + c (-c)^\lambda f(i + \lambda, j - 2) \\ &= (-c)^\lambda \left(f(i + \lambda, j - 1) a_j + c f(i + \lambda, j - 2) \right) \\ &= (-c)^\lambda f(i + \lambda, j). \end{aligned}$$

Como já observamos anteriormente, caso $\lambda = j - i + 1$ segue pela regra $-c$ -modular.

O item (b) segue por indução em k . De fato, if $k = 0$ o resultado é trivial e se $k = 1$ o resultado segue pelo item anterior. Seja $k > 1$ e suponha que o resultado vale para $k' < k$, então

$$\begin{aligned} D_\lambda(i, j, k) &= a_{i-k} D_\lambda(i, j, k - 1) + c D_\lambda(i, j, k - 2) \\ &= a_{k-1} (-c)^\lambda f(i - k + 1, i - 2) f(i + \lambda, j) + c (-c)^\lambda f(i - k + 2, i - 2) f(i + \lambda, j) \\ &= (-c)^\lambda \left(a_{i-k} f(i - k + 1, i - 2) + c f(i - k + 2, i - 2) \right) f(i + \lambda, j) \\ &= (-c)^\lambda f(i - k, i - 2) f(i + \lambda, j). \end{aligned}$$

□

3.3.2 Caracterização de um c -friso

No teorema seguinte apresentamos uma caracterização para um c -friso que não possui elementos nulos fora da linha -1 .

Teorema 3.22. *Sejam K um corpo, $c \in K$ um escalar não nulo e $f : \mathbb{B}_{[-2, \infty)} \rightarrow K$ uma função, em que $f(i, i - 2) = 0$ e $f(i, i - 1) = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Se $f(i, j) \neq 0$ fora da linha -1 (ou seja, para $j - i + 1 \geq 0$), são equivalentes:*

- (i) f é um c -friso;
- (ii) $f(i, j) = f(i, j - 1) f(j, j) + c f(i, j - 2)$, para todo $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, \infty)}$;
- (iii) f satisfaz a regra $-c$ -modular;
- (iv) f satisfaz a regra $-c$ -modular generalizada.

Demonstração. Supondo que vale (i), segue diretamente da proposição 3.21(b) que vale (iv). Vimos no começo desta seção que (iv) \Rightarrow (iii).

Para provar que (iii) \Rightarrow (ii), seja $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, \infty)}$. Vamos provar por indução sobre $k = j - i$. Se $k = 0$ temos $j = i$, mas como $f(i, i - 1) = 1$ e $f(i, i - 2) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos que $f(i, i) = f(i, i - 1)f(i, i) + cf(i, i - 2)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Suponhamos por indução que vale a igualdade em (ii), para $j - i = k$, isto é,

$$f(i + 1, j + 1) = f(i + 1, j)a_{j+1} + cf(i + 1, j - 1),$$

em que $a_{j+1} = f(j + 1, j + 1)$. Como, por hipótese, f satisfaz a regra $-c$ -modular, temos que

$$\begin{aligned} f(i, j + 1)f(i + 1, j) &= f(i, j)f(i + 1, j + 1) - (-c)^{j-i+1} \\ &= f(i, j)f(i + 1, j)a_{j+1} + cf(i, j)f(i + 1, j - 1) - (-c)^{j-i+1} \end{aligned}$$

Usando a regra $-c$ -modular, temos que $f(i, j)f(i + 1, j - 1) = f(i, j - 1)f(i + 1, j) - (-c)^{j-i}$. Substituindo na equação acima e dividindo por $f(i + 1, j)$ obtemos

$$f(i, j + 1) = f(i, j)a_{j+1} + cf(i, j - 1).$$

Provaremos agora que (ii) \Rightarrow (i). Para provar que f é um c -friso, vamos mostrar que $f(i, j) = p_{j-i+1}(a_i, \dots, a_j)$, em que $a_k = f(k, k)$ e p_{j-i+1} é o polinômio c -recorrente definido pela equação (3.1). Provaremos por indução em j . Caso $j = i$, temos que $f(i, i) = a_i = p_1(a_i)$, e então

$$f(i, i + 1) = f(i, i)f(i + 1, i + 1) + cf(i, i - 1) = a_i a_{i+1} + c$$

logo $f(i, i + 1) = p(a_i, a_{i+1})$. Pela propriedade (ii), segue que $f(i, j + 1) = f(i, j)a_{j+1} + cf(i, j - 1)$, logo, pela hipótese de indução segue que

$$\begin{aligned} f(i, j + 1) &= p_{j-i+1}(a_i, \dots, a_j)a_{j+1} + cp_{j-i}(a_i, \dots, a_{j-1}) \\ &= p_{j-i+2}(a_i, \dots, a_{j+1}) \end{aligned}$$

□

Segue abaixo uma caracterização de c -friso de ordem n que não possui elementos nulos fora das linhas -1 e $n + 2$.

Corolário 3.23. *Seja K um corpo, $0 \neq c \in K$ e $f : \mathbb{B}_{[-2, n+2]} \rightarrow K$ uma função, em que $f(i, i - 2) = f(i, i + n + 1) = 0$ e $f(i, i - 1) = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Se $f(i, j) \neq 0$ para $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, n+1]}$, então são equivalentes:*

- (i) f é um c -friso de ordem n ;
- (ii) $f(i, j) = f(i, j - 1)f(j, j) + cf(i, j - 2)$, para todo $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, n+2]}$;
- (iii) f satisfaz a regra c -modular;

(iv) f satisfaz a regra c -modular generalizada.

Demonstração. As implicações $(i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$ já foram provadas no Teorema 3.22.

Provemos agora que $(ii) \Rightarrow (i)$. Definindo $a_k = f(k, k)$, temos que provar que $f(i, j) = p_{j-i+1}(a_i, \dots, a_j)$, e que o conjunto $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é n -admissível, em que p_{j-i+1} é o polinômio c -recorrente definido pela equação (3.1). Provaremos por indução em j . Caso $j = i$, temos que $f(i, i) = a_i = p_1(a_i)$, e então

$$f(i, i+1) = f(i, i)f(i+1, i+1) + cf(i, i-1) = a_i a_{i+1} + c$$

logo $f(i, i+1) = p(a_i, a_{i+1})$. Pela propriedade (ii), segue que $f(i, j+1) = f(i, j)a_{j+1} + cf(i, j-1)$, logo, pela hipótese de indução segue que

$$\begin{aligned} f(i, j+1) &= p_{j-i+1}(a_i, \dots, a_j)a_{j+1} + cp_{j-i}(a_i, \dots, a_{j-1}) \\ &= p_{j-i+2}(a_i, \dots, a_{j+1}) \end{aligned}$$

Além disso, $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é n -admissível pois

$$p_{n+2}(a_i, \dots, a_{i+n+1}) = f(i, i+n+1) = 0$$

□

No exemplo 3.10 temos um 2-friso de ordem 3 que possui zeros fora da linha -1 e da linha 5. Assim, terminamos esta seção com uma conjectura.

Conjectura 3.24. *No teorema 3.22 e no corolário 3.23 podemos excluir a hipótese $f(i, j) \neq 0$ para todo $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, \infty)}$ (ver exemplo 3.10).*

3.4 c -Friso de ordem n e triangulações de \mathcal{P}_{n+3}

Nesta seção mostraremos como construir um c -friso de ordem n associado a uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} . Para isto, considere o conjunto

$$A_0^- = \{(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, n]} \mid 0 \leq i \leq j \leq n\}.$$

Observe que como $(0, n) \notin \mathbb{B}_{[0, n]}$ temos que $(0, n) \notin A_0^-$, logo, podemos definir a bijeção

$$\begin{aligned} \psi : A_0^- &\rightarrow \{\text{diagonais de } \mathcal{P}_{n+3}\} \\ (i, j) &\mapsto d_{i, j+2}. \end{aligned}$$

Antes de demonstrar o principal resultado desta seção (Teorema 3.27), vamos discutir em detalhes um exemplo de como construir um c -friso a partir de uma função $f' : X \rightarrow K$,

em que $X \subset A_0^-$ é um conjunto com n elementos tal que $\psi(X)$ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} e $f'(X)$ é livre sobre $K_0(c)$, em que K_0 denota o subcorpo primo de K .

Exemplo 3.25. Sejam $c \in \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ e $X = \{(1, 1), (1, 3), (3, 3)\}$. Defina uma função $f' : X \rightarrow K$ por $f'(1, 1) = y_1$, $f'(1, 3) = y_2$ e $f'(3, 3) = y_3$. Queremos estender a função f' para um c -friso $f : \mathbb{B}_{[-2,5)} \rightarrow K$ de ordem 3.

Pelo corolário 3.23, sabemos que para estender f' para um c -friso, basta estender f' para uma função que satisfaz a regra $-c$ -modular. Para isso, procedemos como segue.

Como a linha -1 e a linha $n + 2$ de um c -friso de ordem n são compostas apenas por zeros, temos que definir $f(i, i-2) = f(i, i+4) = 0$ e como a linha 0 é composta de uns, temos que definir $f(i, i-1) = 1$. Como queremos que f seja um c -friso, definindo $f(0, 3) = y_4$, a proposição 3.7 indica como deve ser definida a linha 4 de f . Mais precisamente, a linha 4 de f é da forma

$$\dots \quad \frac{c^4}{y_4} \quad y_4 \quad \frac{c^4}{y_4} \quad y_4 \quad \frac{c^4}{y_4} \quad y_4 \quad \frac{c^4}{y_4} \quad y_4 \quad \dots$$

Observe que poderíamos ter escolhido qualquer $f(0, 3) = s \neq 0$, mas escolhemos $s = y_4$ pois será conveniente para nossos objetivos adiante neste trabalho.

Se definirmos $f(1, 1) = f'(1, 1)$, $f(1, 3) = f'(1, 3)$ e $f(1, 2) = \frac{y_2 - cy_1}{y_3}$ podemos utilizar a regra $-c$ -modular para determinar os elementos restantes. Por exemplo, definimos

$$f(2, 2) = \frac{f(1, 2)f(2, 1) - c}{f(1, 1)} = \frac{1}{y_1} \left(\frac{y_2 - cy_1}{y_3} - c \right) = \frac{y_2 - cy_1 - cy_3}{y_1 y_3}.$$

A figura abaixo mostra uma parte dos elementos de $f(\mathbb{B}_{[-2,5)})$ obtidos usando a regra $-c$ -modular. Observe que $f(3, 3) = f'(3, 3)$, logo $f|_X = f'$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \frac{y_4 y_1 + c^2 y_3 - c y_2}{y_1 y_2} & & y_1 & & \frac{y_2 - c y_1 - c y_3}{y_1 y_3} & & y_3 & & & \\ \dots & & \frac{y_4 y_1 + c^2 y_3}{y_2} & & \frac{y_2 - c y_1}{y_3} & & \frac{y_2 - c y_3}{y_1} & & \dots & & \\ & & & \frac{y_4 y_2 - c(y_4 y_1 + c^2 y_3)}{y_2 y_3} & & y_2 & & & & & \\ & & & & & y_4 & & & & & \end{array}$$

Observe que, no exemplo acima, $\psi(X)$ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} . No próximo teorema demonstraremos que podemos determinar um c -friso a partir de um conjunto $X \subset A$ com n elementos, tal que $\psi(X)$ seja uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} .

Lema 3.26. Sejam $y_1, \dots, y_n \in K$ algebricamente independentes sobre $K_0(c)$. Se g é um polinômio em $n-1$ variáveis sobre $K_0(c)$ tal que $g(y_1, \dots, y_{n-1}) \neq 0$ então $y_1, \dots, y_{n-1}, y'_n = \frac{g(y_1, \dots, y_{n-1})}{y_n}$ são algebricamente independentes sobre $K_0(c)$.

Demonstração. Vamos supor que a extensão de

$$K_0(c)(y_1, \dots, y_{n-1}) \subset K_0(c)(y_1, \dots, y_{n-1}, y'_n)$$

seja algébrica. Neste caso existiria um polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i$ com $a_i \in K_0(c)(y_1, \dots, y_{n-1})$ tal que $p(y'_n) = 0$. Como $g(y_1, \dots, y_{n-1}) \neq 0$, temos que $b_i = a_i(g(y_1, \dots, y_{n-1}))^i \neq 0$. Defina $p'(x) = \sum_{i=0}^r b_i x^{r-i}$, então

$$\begin{aligned} p'(y_n) &= \sum_{i=0}^r b_i (y_n)^{r-i} \\ &= y_n^r \sum_{i=0}^r a_i \left(\frac{g(y_1, \dots, y_{n-1})}{y_n} \right)^i \\ &= y_n^r \sum_{i=0}^r a_i (y'_n)^i \\ &= y_n^r p(y'_n) = 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois y_n é transcendente sobre $K_0(c)(y_1, \dots, y_{n-1})$. Então, y'_n é transcendente sobre $K_0(c)(y_1, \dots, y_{n-1})$. Portanto, temos que $y_1, \dots, y_{n-1}, y'_n$ são algebricamente independentes sobre $K_0(c)$. □

Teorema 3.27. *Sejam $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset A_0^-$ tal que $\psi(X)$ seja uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} e $f' : X \cup \{(0, n)\} \rightarrow K$ uma função tal que os elementos da imagem de f' sejam algebricamente independentes sobre $K_0(c)$, em que K_0 denota o subcorpo primo de K . Então existe um c -friso f de ordem n tal que $f|_X = f'$.*

Demonstração. Defina $f(i, i-1) = 1$, $f(i, i-2) = f(i, i+n+1) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim, temos definidas as linhas $-1, 0$ e $n+2$. Como queremos definir f para que seja um c -friso, definindo $f(0, n) = f'(0, n)$, a proposição 3.7 nos diz como definir a linha $n+1$: usando o fato de que $f'(0, n) \neq 0$, podemos definir os outros elementos da linha $n+1$ pela expressão $st = (-c)^{n+1}$, em que $s = f'(0, n)$.

Caso $\psi(X) = \{d_{0,2}, \dots, d_{0,n+1}\}$, então pela definição de ψ , temos que $X = \{(0, 0), \dots, (0, n-1)\}$. Podemos supor que $x_r = (0, r-1)$, para $1 \leq r \leq n$. Defina $f(x_r) = f'(x_r)$, isto é, os elementos a seguir estão determinados:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & & 1 \\ & f(x_1) & & * & \\ & & f(x_2) & & \\ & & \vdots & & \\ & & & f(x_{n-1}) & \\ & & * & & f(x_n) \\ s & & & t & s \end{array}$$

Para definirmos os elementos $f(1, 1)$ e $f(-1, n-2)$, ambos denotados por $(*)$ na figura acima, utilizamos a regra $-c$ -modular. Uma vez determinados estes elementos, podemos utilizar a regra $-c$ -modular novamente para determinar os elementos $f(1, 2)$ e $f(-1, n-3)$,

então, procedendo desta forma, obtemos uma função $f : \mathbb{B}_{[-2, n+2]} \rightarrow K$ que satisfaz a regra $-c$ -modular e $f|_X = f'$. Pelo corolário (3.23) f é um c -friso de ordem n tal que $f|_X = f'$.

Caso $\psi(X) \neq \Delta := \{d_{0,2}, \dots, d_{0,n+1}\}$, vamos utilizar os elementos de $f'(X)$ para definir uma função

$$f'' : \psi^{-1}(\Delta) \cup \{(0, n)\} \rightarrow K$$

tal que os elementos da imagem de f'' sejam algebricamente independentes sobre $K_0(c)$ e utilizar o caso anterior com f'' no lugar de f' para estender f'' para um c -friso f de ordem n .

Pela proposição 1.17(a), existem elementos $r_1, r_2, \dots, r_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, dois a dois distintos, tais que

$$\mu_{r_m} \circ \mu_{r_{m-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\psi(X)) = \Delta,$$

em que m é o número de diagonais de $\psi(X) \setminus \Delta$, ou seja, cada mutação troca uma diagonal $d^r \in \psi(X)$ que não está em Δ por uma nova diagonal que pertence à Δ . Vamos introduzir algumas notações:

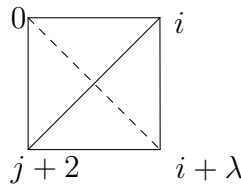
- $\Delta'_0 = \psi(X)$;
- $\Delta'_l = \mu_{r_l} \cdots \mu_{r_1}(\psi(X))$, para $1 \leq l \leq m$;
- $d'_{r_l} = \text{flip}_{\Delta_{l-1}}(d^{r_l})$
- $F_0 = \text{im} f'$
- $F_l = \text{im} f' \setminus (f' \circ \psi^{-1}(\{d^{r_1}, \dots, d^{r_l}\})) \cup f'' \circ \psi^{-1}(\{d'_{r_1}, \dots, d'_{r_l}\})$ para $1 \leq l \leq m$.

Vamos provar por indução em l que podemos definir f'' em $\psi^{-1}(\Delta'_l \cap \Delta)$ tal que o conjunto F_l seja algebricamente independente sobre $K_0(c)$.

Para $(0, r) \in \psi^{-1}(\Delta'_0 \cap \Delta) \cup \{(0, n)\}$, defina $f''(0, r) = f'(0, r)$. Como $F_0 = \text{im} f'$, o primeiro passo de indução está provado.

Suponha por indução que f'' esteja definida em $\psi^{-1}(\Delta'_{l-1} \cap \Delta)$ e que os elementos do conjunto F_{l-1} sejam algebricamente independentes sobre $K_0(c)$. Sabemos que a mutação μ_{r_l} troca a diagonal d^{r_l} de Δ'_{l-1} pela diagonal $d'_{r_l} \in \Delta$. Então, vamos descrever como definir $f'' \circ \psi^{-1}(d'_{r_l})$.

Supondo que $d^{r_l} = d_{i, j+2}$, temos a seguinte situação em Δ_{l-1} :



ou seja,

$$\psi^{-1}(d'_{r_l}) = \psi^{-1}(\text{flip}_{\Delta_{l-1}}(d^{r_l})) = \psi^{-1}(d_{0, i+\lambda}) = (0, i - 2 + \lambda).$$

Observe que as arestas do quadrilátero $q_{\Delta'_{l-1}}(d^{r_l})$ acima podem ser diagonais de Δ'_{l-1} ou arestas de \mathcal{P}_{n+3} .

Caso as arestas de $q_{\Delta'_{l-1}}(d^{r_l})$ sejam todas diagonais de Δ'_{l-1} , lembrando que o domínio de f' é o conjunto $X \cup \{(0, n)\}$ e que $d^{r_l} \in \psi(X)$ para $1 \leq l \leq m$, temos que f' está definida em $\psi^{-1}(d_{i,j+2}, d_{i,i+\lambda}, d_{i+\lambda,j+2})$. Então, como estamos supondo que f'' está definida em $\psi^{-1}(\Delta'_{l-1} \cap \Delta)$, podemos definir $f''(0, i - 2 + \lambda)$ pela relação

$$f''(0, i - 2 + \lambda)f'(i, j) = f''(0, j)f'(i, i - 2 + \lambda) + (-c)^\lambda f''(0, i - 2)f'(i + \lambda, j).$$

Esta fórmula só está definida nos pontos que correspondem pela ψ a diagonais, já que f'' e f' só estão definidas para pontos que correspondem a diagonais ou em $(0, n)$. Então, caso exista no quadrilátero $q_{\Delta'_0}(d^{r_l})$ alguma aresta $[a, a + 1]$, $0 \leq a \leq n + 1$, então substituímos o elemento correspondente na relação acima por 1; caso a aresta $[0, n + 2]$ seja uma aresta de $q_{\Delta'_0}(d^{r_l})$, então substitua o elemento correspondente na relação acima por $f(0, n)$. Por exemplo, se $\lambda = 1$, então $[i, i + \lambda] = [i, i + 1]$ é uma aresta de \mathcal{P}_{n+3} , logo, devemos substituir $f'(i, i - 2 + \lambda)$ por 1; caso $j = n$ então $[0, n + 2]$ é uma aresta de \mathcal{P}_{n+3} , logo, devemos substituir $f''(0, j)$ por $f(0, n) = f'(0, n)$.

Em ambos os casos, como os elementos de F_{l-1} são algebricamente independentes, $f''(0, i - 2 + \lambda)$ está bem definido. Além disso, pelo lema 3.26, temos que os elementos do conjunto F_l são algebricamente independentes sobre $K_0(c)$. Portanto, como $\Delta'_m = \Delta$ e $F_m = f'' \circ \psi^{-1}(\Delta)$, temos definida uma função

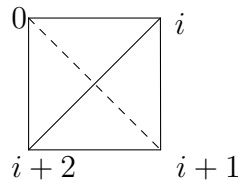
$$f'' : \psi^{-1}(\Delta) \cup \{(0, n)\} \rightarrow K$$

tal que os elementos da imagem de f'' são algebricamente independentes sobre $K_0(c)$. Então, podemos estender f'' para um c -friso f tal que $f|_{\psi^{-1}(\Delta)} = f''$.

Vamos verificar que $f|_X = f'$. Como a mutação é involutiva, temos que

$$\mu_{r_1} \circ \mu_{r_2} \circ \cdots \circ \mu_{r_m}(\Delta) = \psi(X).$$

Podemos supor que $d_{0,i+1} = d'_{r_m} \in \Delta$. Então, temos a seguinte situação em $\mu_{r_m}(\Delta)$:



logo, pela definição de f'' temos que

$$f''(0, i - 1)f'(i, i) = f''(0, i) - cf''(0, i - 2).$$

Por outro lado, f é um c -friso tal que $f|_{\psi^{-1}(\Delta)} = f''$. Assim, temos que a igualdade acima implica que

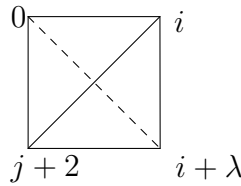
$$f'(i, i) = \frac{f(0, i) - cf(0, i - 2)}{f(0, i - 1)} = f(i, i),$$

em que a segunda igualdade segue da propriedade 3.4(a), pois f é um c -friso. Logo, $f(i, j) = f'(i, j)$ para todo (i, j) em $\psi^{-1}(\mu_{r_m}(\Delta)) \cap X$.

Suponha por indução que $f(i, j) = f'(i, j)$ para todo $(i, j) \in \psi^{-1}(\Delta'') \cap X$ em que

$$\Delta'' = \mu_{r_{i+1}} \cdots \mu_{r_m}(\Delta).$$

Então, supondo que $d^{r_i} = d_{i, j+2}$, temos a seguinte situação em $\mu_{r_i}(\Delta'')$:



Logo, usando a hipótese de indução e o fato de que $f|_{\psi^{-1}(\Delta)} = f''$, segue da definição de f'' que

$$f(0, i - 2 + \lambda)f'(i, j) = f(0, j)f(i, i - 2 + \lambda) + (-c)^\lambda f(0, i - 2)f(i + \lambda, j).$$

Como f é um c -friso, podemos aplicar a regra $-c$ -modular generalizada para a expressão ao lado direito da igualdade acima para obter a igualdade

$$f(0, i - 2 + \lambda)f'(i, j) = f(0, i - 2 + \lambda)f(i, j).$$

Mas os elementos da imagem de f'' são algebricamente independentes, em particular

$$f(0, i - 2 + \lambda) = f''(0, i - 2 + \lambda) \neq 0,$$

logo $f(i, j) = f'(i, j)$ para todo $(i, j) \in \psi^{-1}(\mu_{r_i}(\Delta'')) \cap X$. Portanto, o resultado segue por indução, uma vez que

$$\psi^{-1}(\mu_{r_1} \circ \mu_{r_2} \circ \cdots \circ \mu_{r_m}(\Delta)) = X.$$

.

□

Os próximos resultados desta seção não serão usados neste trabalho, mas apresentaremos aqui pois são interessantes para a teoria de c -frisos.

Proposição 3.28. *Sejam $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset A_0^-$ e f um c -friso de ordem n . Se $\psi(X)$ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} e os elementos de $f(X)$ são todos não nulos, então f é completamente determinado por $f(X)$.*

Demonstração. Seja $(i, j) \in A_0^-$. Vamos provar que $f(i, j)$ pode ser expresso em termos dos elementos de $f(X)$. Feito isto, o resultado segue do lema 3.14.

Se $(i, j) \in X$ não temos nada para demonstrar. Então, suponha que $(i, j) \notin X$. Seja Δ a rotação da triangulação $\{d_{0,2}, \dots, d_{0,n+1}\}$ que contém a diagonal $d = \psi(i, j)$. Então, pela proposição 1.17 existem elementos $r_1, r_2, \dots, r_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ dois a dois distintos tais que

$$\mu_{r_m} \circ \mu_{r_{m-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\psi(X)) = \Delta.$$

Assim, para algum $r_{m'} \in \{r_1, \dots, r_m\}$, temos que

$$\mu_{r_{m'}} \circ \mu_{r_{m'-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\psi(X)) = \mu_{r_{m'-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\psi(X)) \setminus \{d^{m'}\} \cup \{d\}.$$

Como as diagonais $d^{m'}$ e $d = \psi(i, j)$ se cruzam, podemos supor que $d^{m'} = \psi(i - k, i - 2 + \lambda)$. Então, como $d^{m'} \in \psi(X)$, temos que $f(i - k, i - 2 + \lambda) \neq 0$, logo $f(i, j)$ está determinado pela regra $-c$ -modular generalizada

$$f(i - k, i - 2 + \lambda)f(i, j) = f(i, i - 2 + \lambda)f(i - k, j) + (-c)^\lambda f(i - k, i - 2)f(i + \lambda, j).$$

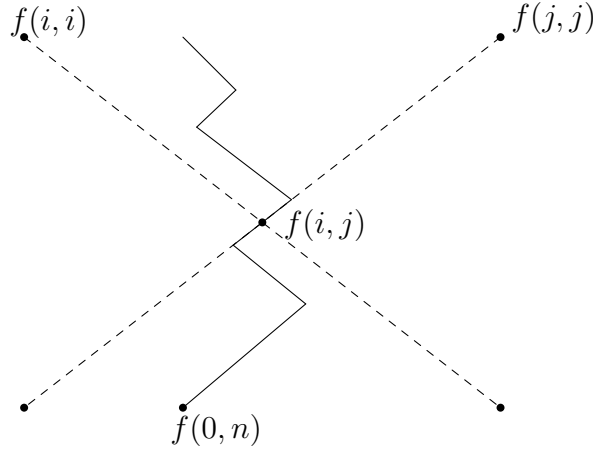
Além disso, segue por indução em m' que $f(i, j)$ pode ser expresso em termos dos elementos de $f(X)$. \square

Provaremos no corolário a seguir que a proposição 3.19 é um caso particular da proposição anterior.

Corolário 3.29. *Um c -friso de ordem n é inteiramente determinado por uma secção de elementos não nulos.*

Demonstração. Sejam Σ uma secção de elementos não nulos de um c -friso f de ordem n e $f(i_0, i_0 + n) \in \Sigma$. Então $\Sigma \subset \{f(i, j) | i_0 \leq i \leq j \leq i_0 + n\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $i_0 = 0$, ou seja, $\Sigma \setminus \{f(0, n)\} \subset A_0^-$. Para terminar a demonstração, basta provar que $\psi(f^{-1}(\Sigma \setminus \{f(0, n)\}))$ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} e utilizar a proposição 3.28.

Seja $f(i, j) \in \Sigma \setminus \{f(0, n)\}$. Então, a definição de secção implica que os elementos de Σ estão delimitados pelas secções diagonais $f(i, *)$ e $f(*, j)$, conforme ilustrado na figura abaixo



ou seja, se $f(i', j') \in \Sigma$, então $i \leq i' \leq j' \leq j$ ou $i' \leq i \leq j \leq j'$. Portanto, se $f(i, j)$ e $f(i', j') \in \Sigma \setminus \{f(0, n)\}$, com $(i, j) \neq (i', j')$, segue que $\psi(i, j)$ e $\psi(i', j')$ não se cruzam, ou seja, $\psi(f^{-1}(\Sigma \setminus \{f(0, n)\}))$ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} . □

3.5 Fenômeno de Laurent para c -frisos

Um **polinômio de Laurent** em n variáveis é uma função racional em n variáveis em que o denominador é um monômio. Repare que os elementos do c -friso que construímos no exemplo 3.25 são polinômios de Laurent. Nesta seção apresentaremos algumas fórmulas explícitas para os elementos do c -friso f em termos dos elementos da imagem de f que estão relacionados com algumas triangulações específicas (no sentido do teorema 3.27). Discutiremos o fenômeno de Laurent em um contexto mais geral no próximo capítulo.

Proposição 3.30. *Sejam f um c friso e $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$. Denote por $y_r := f(i_0, i_0 + r - 1)$ e $x_r := f(j_0 - r + 1, j_0)$, para $r \geq 0$.*

(i) *Seja $y_r \neq 0$ para $r \geq 0$. Tomando $i, k \geq 0$, temos que*

$$f(i_0 + i, i_0 + i + k) = \frac{1}{y_i \cdots y_{i+k}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-c)^j y_{i-1} y_i \cdots \widehat{y_{i+j-1} y_{i+j}} \cdots y_{i+k+1} \right),$$

em que os dois elementos sob o circunflexo são omitidos no produto.

(ii) *Seja $x_r \neq 0$ para $r \geq 0$. Tomando $i, k \geq 0$, temos que*

$$f(j_0 - i - k, j_0 - i) = \frac{1}{x_i \cdots x_{i+k}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-c)^j x_{i-1} x_i \cdots \widehat{x_{i+j-1} x_{i+j}} \cdots x_{i+k+1} \right),$$

em que os dois elementos sob o circunflexo são omitidos no produto.

Demonstração. Vamos provar o item (i) por indução em k . Por simplicidade, vamos supor que $i_0 = 0$. Assim, pela proposição 3.4(a), segue que $f(0, i) = f(0, i - 1)a_i + cf(0, i - 2)$, então, lembrando que $f(i, i) = a_i$, temos que

$$f(i, i) = \frac{y_{i+1} - cy_{i-1}}{y_i} = \frac{\widehat{y_{i-1}y_iy_{i+1}} - cy_{i-1}\widehat{y_iy_{i+1}}}{y_i},$$

ou seja, a equação do item (i) vale para $k = 0$. Logo, temos também que

$$\begin{aligned} f(i, i + 1) &= a_{i+1}a_i + cf(i, i - 1) \\ &= \left(\frac{y_{i+2} - cy_i}{y_{i+1}} \right) \left(\frac{y_{i+1} - cy_{i-1}}{y_i} \right) + c \\ &= \frac{y_{i+1}y_{i+2} - cy_{i-1}y_{i+2} + c^2y_{i-1}y_i}{y_iy_{i+1}}. \end{aligned}$$

Suponha por indução que o resultado vale para $l \leq k$, então

$$\begin{aligned} f(i, i + k + 1) &= f(i + k + 1, i + k + 1)f(i, i + k) + cf(i, i + k - 1) \\ &= \left(\frac{y_{i+k+2} - cy_{i+k}}{y_{i+k+1}} \right) \left(\frac{\sum_{j=0}^{k+1} (-c)^j y_{i-1}y_i \cdots \widehat{y_{i+j-1}y_{i+j}} \cdots y_{i+k+1}}{y_i \cdots y_{i+k}} \right) + cf(i, i + k - 1) \end{aligned}$$

mas, utilizando a hipótese de indução para $k - 1$, temos que

$$\begin{aligned} f(i, i + k - 1) &= \frac{\sum_{j=0}^k (-c)^j y_{i-1}y_i \cdots \widehat{y_{i+j-1}y_{i+j}} \cdots y_{i+k}}{y_i \cdots y_{i+k-1}} \\ &= \frac{y_{i+k}}{y_{i+k+1}} \left(\frac{\sum_{j=0}^k (-c)^j y_{i-1}y_i \cdots \widehat{y_{i+j-1}y_{i+j}} \cdots y_{i+k+1}}{y_i \cdots y_{i+k}} \right). \end{aligned}$$

Então, uma parcela da fórmula na equação anterior se cancela com $cf(i, i + k - 1)$. Observe que na fórmula que obtemos para $f(i, i + k - 1)$ o somatório vai até k e na equação anterior o somatório vai até $k + 1$, logo, segue que

$$\begin{aligned} f(i, i + k + 1) &= \frac{\sum_{j=0}^{k+1} (-c)^j y_{i-1}y_i \cdots \widehat{y_{i+j-1}y_{i+j}} \cdots y_{i+k+2} - cy_{i+k} \left((-c)^{k+1} y_{i-1}y_i \cdots y_{i+k-1} \right)}{y_i \cdots y_{i+k+1}} \\ &= \frac{1}{y_i \cdots y_{i+k+1}} \left(\sum_{j=0}^{k+2} (-c)^j y_{i-1}y_i \cdots \widehat{y_{i+j-1}y_{i+j}} \cdots y_{i+k+2} \right). \end{aligned}$$

Omitiremos a demonstração do item (ii), pois ela segue os mesmos passos da demonstração do item (i), mas utilizando o item (b) da proposição 3.4 para provar o primeiro passo da indução em k . \square

Corolário 3.31. *Os elementos de um c -friso f de ordem n podem ser expressos como um*

polinômio de Laurent em termos dos elementos de uma secção diagonal sem elementos nulos.

Demonstração. Consequência imediata da proposição 3.30. \square

Proposição 3.32. *Seja f um c -friso sobre K . Então, $\{f(i_0, i_0 + k)\}_{0 \leq k \leq n}$ é algebricamente independente sobre $K_0(c)$ se, e somente se, $\{f(i_0 + k, i_0 + k)\}_{0 \leq k \leq n}$ é algebricamente independente sobre $K_0(c)$.*

Demonstração. Utilizando a notação da proposição 3.30, temos que provar que $\{y_r\}_{1 \leq r \leq n+1}$ é algebricamente independente se e somente se

$$\left\{y_1, \frac{y_2 - c}{y_1}, \dots, \frac{y_{n+1} - cy_{n-1}}{y_n}\right\}$$

é algebricamente independente. Para isto, basta provar que

$$K'_n := K_0(c)(y_1, \dots, y_{n+1}) = K_0(c)\left(y_1, \frac{y_2 - c}{y_1}, \dots, \frac{y_{n+1} - cy_{n-1}}{y_n}\right) =: K''_n.$$

É claro que $K''_n \subseteq K'_n$. Para provar que $K'_n \subseteq K''_n$, basta provar que $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in K''_n$. Vamos provar que $K'_n \subseteq K''_n$ por indução em n . Como $y_2 = y_1 \frac{y_2 - c}{y_1} + c \in K''_1$, segue que $K'_1 = K''_1$. Suponhamos que $K'_r = K''_r$, para algum $r \geq 1$, então temos que provar que

$$K'_r(y_{r+2}) \subseteq K''_r\left(\frac{y_{r+2} - cy_r}{y_{r+1}}\right)$$

Mas, pela hipótese de indução, temos que $y_r, y_{r+1} \in K''_{r+1}$, logo

$$y_{r+2} = y_{r+1} \frac{y_{r+2} - cy_r}{y_{r+1}} + cy_r \in K''_{r+1}.$$

O que termina a demonstração. \square

Corolário 3.33. *Sejam f um c -friso sobre K , $A = A_{i_0}^- \cup \{(i_0, i_0 + n)\}$ e K_0 o subcorpo primo de K . Se $\{f(i_0, i_0 + k)\}_{0 \leq k \leq n}$ é um conjunto algebricamente independente sobre $K_0(c)$ então $f|_A$ é injetora.*

Demonstração. Suponhamos que os elementos $f(i_0, i_0 + k)$, para $0 \leq k \leq n$, sejam algebricamente independentes. Então, pela proposição 3.32, $\{f(i_0 + k, i_0 + k)\}_{0 \leq k \leq n}$ é algebricamente independente sobre $K_0(c)$, ou seja, temos que os elementos da primeira linha de f que estão contidos em $f(A)$ são algebricamente independentes sobre $K_0(c)$. Usaremos este fato para provar que $f|_A$ é injetora.

Sejam $(i, j) \neq (i', j')$ elementos de A . Então, segue da definição de c -friso que

$$f(i, j) = p_{j-i+1}(a_i, \dots, a_j)$$

e

$$f(i', j') = p_{j'-i'+1}(a_{i'}, \dots, a_{j'}),$$

em que cada $a_r = f(r, r)$ é um elemento da primeira linha de $f(A)$ para $i \leq r \leq j$ e $i' \leq r \leq j'$. Então, como estamos supondo $(i, j) \neq (i', j')$ e considerando a fórmula da proposição 3.1 para o polinômio c -recorrente, podemos supor que aparecem elementos da primeira linha de $f(A)$ na expressão de $f(i, j)$ que não aparecem na expressão de $f(i', j')$. Como os elementos da primeira linha de $f(A)$ são algebricamente independentes, segue que $f(i, j) \neq f(i', j')$. Portanto, $f|_A$ é injetora.

□

Capítulo 4

Álgebra c -conglomerada

Neste capítulo apresentaremos uma nova classe de álgebra de conglomerado do tipo \mathbb{A}_n , que chamaremos de álgebra c -conglomerada, em que c é um racional fixado. Caso $c = -1$ obtemos a álgebra de conglomerado \mathcal{A} de Fomin e Zelevinsky. Assim como a álgebra de conglomerado \mathcal{A} , a álgebra c -conglomerada \mathcal{A}_c possui uma interpretação geométrica em termos de triangulações de um polígono. Provaremos também o fenômeno de Laurent para a álgebra c -conglomerada \mathcal{A}_c , ou seja, provaremos que qualquer variável de conglomerado de \mathcal{A}_c pode ser expressa em termos das variáveis de um conglomerado qualquer como um polinômio de Laurent.

4.1 Definição (caso \mathbb{A}_n)

Nesta seção apresentaremos a definição de álgebra c -conglomerada para aljavas do tipo \mathbb{A}_n . Para isto, vamos modificar a relação de permuta (equação 2.1) de Fomin e Zelevinsky introduzindo os coeficientes $(-c)^{\lambda_+}$ e $(-c)^{\lambda_-}$, em que os expoentes λ_+ e λ_- são inteiros não negativos específicos que definiremos em seguida. Desta forma, obtemos uma nova relação de permuta que apresentaremos adiante na equação 4.1. Então, antes de apresentar a mutação de semente para definir álgebra c -conglomerada, precisamos definir precisamente os expoentes λ_+ e λ_- .

4.1.1 Os expoentes λ_+ e λ_-

Sejam Q uma aljava e r um vértice de Q . Estamos denotando por r^- o conjunto dos predecessores imediatos de r e por r^+ o conjunto dos sucessores imediatos de r . Para $v \in r^+ \cup r^-$, denote por $Q_v(r)$ a componente conexa de $Q \setminus \{(r^+ \cup r^-) \setminus \{v\}\}$ contendo v .

Lema 4.1. *Sejam Q uma aljava de $\mathcal{M}_{[n+1]}$ e r um vértice de Q . Então,*

(i) r^+ e r^- possuem no máximo 2 elementos cada e vale a igualdade

$$Q_0 = \bigcup_{v \in r^+ \cup r^-} Q_v(r)_0,$$

(ii) se r possui dois vizinhos $v \neq v'$, temos que

$$Q_v(r) \cap Q_{v'}(r) = \{r\}$$

Demonstração. Sejam $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ e r um vértice de Q , pela definição 1.20 da bijeção $\gamma_s : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{M}_{[n+1]}$, temos que o vértice r é associado com uma diagonal d da triangulação $\Delta := \gamma_s^{-1}(Q)$ e os vizinhos de r são associados com as arestas de um quadrilátero $q_\Delta(d)$, em que d é uma diagonal de $q_\Delta(d)$ e as arestas de $q_\Delta(d)$ podem ser arestas ou diagonais de \mathcal{P}_{n+3} . Então, segue direto da definição de γ_s que o vértice r pode ter no máximo 2 sucessores imediatos e 2 predecessores imediatos, o que prova a primeira parte do item (i). Para provar a segunda parte de (i), considere um vértice qualquer $v \in Q_0$. Se v é um vizinho de r , então $v \in Q_v(r)$, caso contrário, como Q é conexo, existe um passeio α de v para r que contém um vizinho v' de r . Podemos supor que α não contém outro vizinho de r , então $v \in Q_{v'}(r)$, o que implica que

$$Q_0 \subset \bigcup_{v \in r^+ \cup r^-} Q_v(r)_0.$$

Como a outra inclusão é trivial, termina a demonstração do item (i). Observe que se r possui dois vizinhos distintos, digamos v e v' , então a única diagonal comum associada aos vértices de $Q_v(r)$ e $Q_{v'}(r)$ é a diagonal associada ao vértice r . Portanto, vale a igualdade em (ii). □

Sejam $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ e $r \neq n+1$ um vértice de Q . O lema 4.1 garante que existe um único vizinho v de r tal que $n+1 \in Q_v(r)$, em que $n+1$ denota o vértice congelado de Q . Denotaremos por r_s o vizinho de r com esta propriedade. Assim, podemos definir os expoentes λ_+ e λ_- como segue.

Definição 4.2. Sejam $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ e $r \neq n+1$ um vértice de Q . Defina

$$\lambda_+(r) = \lambda_+^Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_s \in r^+ \\ 1 & \text{se } r^- = \{r_s\} \\ |Q_v(r)| & \text{se } r^- = \{v, r_s\} \end{cases}$$

$$\lambda_-(r) = \lambda_-^Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_s \in r^- \\ 1 & \text{se } r^+ = \{r_s\} \\ |Q_v(r)| & \text{se } r^+ = \{v, r_s\} \end{cases}$$

Exemplo 4.3. Seja Q a aljava

$$1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} 2 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow [5]$$

Para $r = 3$ temos que $r^+ = \{2, 4\}$, $r^- = \{1\}$ e $Q_4(3)$ é a aljava $3 \rightarrow 4 \rightarrow [5]$, logo $r_s = 4$ e $\lambda_+ = 0$. Como $Q_2(3)$ é a aljava $2 \leftarrow 3$, temos que $\lambda_- = 2$.

Lema 4.4. *Sejam $v_1 < v_2 < v_3 < v_4$ os vértices do quadrilátero $q_\Delta(d^r)$, em que $\Delta = \gamma_s^{-1}(Q)$ para alguma aljava $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ e $d^r \in \Delta$ é a diagonal correspondente ao vértice $r \neq n+1$ de Q . Então,*

$$\lambda_+(r) = \begin{cases} v_3 - v_2 & \text{se } d^r = d_{v_2, v_4} \\ 0 & \text{se } d^r = d_{v_1, v_3} \end{cases}$$

$$\lambda_-(r) = \begin{cases} v_3 - v_2 & \text{se } d^r = d_{v_1, v_3} \\ 0 & \text{se } d^r = d_{v_2, v_4}. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $d^{r'} = d_{v_2, v_3}$. Como o vértice congelado de Q corresponde à aresta $[0, n+2]$ de \mathcal{P}_{n+3} , segue que $d^{r_s} = d_{v_1, v_4}$. Se $d^r = d_{v_1, v_3}$ então segue da definição de γ_s que $r^+ = \{r', r_s\}$, logo, $\lambda_+ = 0$ e $\lambda_- = |Q_{r'}(r)|$. Por outro lado, temos que as diagonais de Δ que correspondem aos vértices de $Q_{r'}(r)$ são as diagonais

$$\Delta_{r'}^r := \{d_{i,j} \in \Delta \mid v_2 \leq i < j \leq v_3\} \cup \{d^r\}.$$

Mas, o conjunto $\Delta_{r'}^r \setminus \{d^{r'}, d^r\}$ é uma triangulação do polígono determinado pelos vértices $\{v_2, v_2+1, \dots, v_3\}$, o que implica que temos exatamente $v_3 - v_2 - 2$ diagonais em $\Delta_{r'}^r \setminus \{d^{r'}, d^r\}$. Portanto, o conjunto $\Delta_{r'}^r$ tem $v_3 - v_2$ diagonais. Caso $d^r = d_{v_2, v_4}$ é similar. \square

4.1.2 Mutações de semente para álgebra c -conglomerada

Sejam $c \in \mathbb{Q}$, $Q \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ e $u = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ um conjunto com $n+1$ variáveis, em que cada vértice r de Q corresponde à variável u_r . Chamaremos o par (u, Q) de **semente**. No contexto de álgebra de conglomerado, as variáveis correspondentes aos vértices congelados de uma aljava com congelamento são frequentemente chamadas de coeficientes, mas como utilizaremos na definição de álgebra c -conglomerada os coeficientes $(-c)^{\lambda^+}$ e $(-c)^{\lambda^-}$ que não correspondem com vértices congelados da aljava Q , chamaremos a variável correspondente ao vértice congelado de Q de **variável congelada**.

A **mutação μ_r de (u, Q)** é definida para $1 \leq r \leq n$ da seguinte forma:

- (i) a aljava Q torna-se uma nova aljava Q' obtida pela mutação de Q no vértice r ;
- (ii) o conjunto de variáveis u torna-se um novo conjunto $u' = u \setminus \{u_r\} \cup \{u'_r\}$ em que u'_r é definido pela relação

$$u'_r u_r = (-c)^{\lambda^+} \prod_{r \rightarrow v} u_v + (-c)^{\lambda^-} \prod_{v \rightarrow r} u_v. \quad (4.1)$$

Uma propriedade importante da mutação de Fomin e Zelevinsky [FZ02a] é que ela é involutiva. Antes de provar que a mutação de semente que definimos aqui é involutiva, vamos calcular a mutação de uma semente particular no próximo exemplo.

Exemplo 4.5. Seja (u, Q) uma semente em que $Q \in \mathcal{M}_{[5]}$ é a aljava

$$1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} 2 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow [5]$$

e $u = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ algebricamente independente sobre \mathbb{Q} . Vamos calcular $\mu_3(u, Q)$ para $u = \{y_1, \frac{y_3 - cy_1}{y_2}, y_3, y_4, y_5\}$.

Vimos no exemplo 4.3 que $\lambda_+(3) = 0$ e $\lambda_-(3) = 2$. Então, temos que

$$y_3 u'_3 = y_4 \frac{(y_3 - cy_1)}{y_2} + c^2 y_1 \quad \text{e} \quad \mu_3(Q) : 1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 2 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} 3 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 4 \longrightarrow [5] .$$

Agora, queremos calcular $\mu_3 \circ \mu_3(u, Q)$, mas para a aljava $\mu_3(Q)$ temos que $\lambda_+(3) = 2$ e $\lambda_-(3) = 0$. Então, utilizando a equação 4.1, podemos verificar facilmente que $\mu_3 \circ \mu_3(u, Q) = (u, Q)$.

Proposição 4.6. A mutação μ_r é involutiva, ou seja, dada uma semente (u, Q) , temos que

$$\mu_r \circ \mu_r(u, Q) = (u, Q).$$

Demonstração. Sabemos que a mutação de aljava é involutiva. Então, precisamos apenas mostrar que $\mu_r \circ \mu_r(u) = u$.

Por definição, a mutação inverte as flechas em r , assim, os predecessores imediatos de r em Q tornam-se sucessores imediatos de r em $\mu_r(Q)$ e os sucessores imediatos de r em Q tornam-se predecessores imediatos de r em $\mu_r(Q)$. Assim, temos que os elementos que aparecem no primeiro e no segundo produtório da equação 4.1 que define o elemento u'_r de $\mu_r u$ são exatamente os elementos que aparecem no segundo e no primeiro produtório que definem o elemento u''_r de $\mu_r \mu_r u$, respectivamente. Portanto, para provar que $u''_r = u_r$ basta provar que

$$\lambda_+^Q(r) = \lambda_-^{\mu_r Q}(r)$$

e que

$$\lambda_-^Q(r) = \lambda_+^{\mu_r Q}(r).$$

Sejam $d^r \in \Delta = \gamma_s^{-1}(Q)$ e v_1, v_2, v_3 e v_4 como no lema 4.4. Se $d^r = d_{v_2, v_4}$ então temos que

$$\lambda_+^Q(r) = v_3 - v_2, \text{ e } \lambda_-^Q(r) = 0$$

mas como $flip_\Delta(d^r) = d_{v_1, v_3}$ e as mutações de aljava e triangulações são compatíveis, segue que

$$\lambda_-^{\mu_r Q}(r) = v_3 - v_2 = \lambda_+^Q(r)$$

e

$$\lambda_+^{\mu_r Q}(r) = 0 = \lambda_-^Q(r).$$

Caso $d^r = d_{v_1, v_3}$ é análogo. □

4.1.3 Definição de álgebra c -conglomerada (caso \mathbb{A}_n)

Sejam $c \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ e $\hat{Y} = \{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n; \hat{y}_{n+1}\}$ um conjunto algebricamente independente sobre \mathbb{Q} . Seja \mathcal{X} a união de todos os possíveis conjuntos de variáveis não congeladas obtidos de \hat{Y} por um número finito de mutações. Então a **álgebra c -conglomerada** é definida por

$$\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c(\hat{Y}, \mathcal{Q}) := \mathbb{Z}[c, \hat{y}_{n+1}][\mathcal{X}],$$

ou seja, \mathcal{A}_c é a $\mathbb{Z}[c, \hat{y}_{n+1}]$ -subálgebra de $\mathbb{Q}(y_1, \dots, y_{n+1})$ gerada por \mathcal{X} .

O par (\hat{Y}, \mathcal{Q}) é chamado de **semente inicial**, cada par (Y, \mathcal{Q}) obtido da semente inicial (\hat{Y}, \mathcal{Q}) por um número finito de sucessivas mutações é chamado de **semente**, e Y é chamado de **conglomerado**. Os elementos de um **conglomerado** Y são chamados de **variáveis de conglomerado**.

Proposição 4.7. *Seja $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c(\hat{Y}, \mathcal{Q})$ uma álgebra c -conglomerada. Então, cada conglomerado de \mathcal{A}_c é um conjunto algebricamente independente sobre \mathbb{Q} .*

Demonstração. Se um conglomerado Y é um conjunto algebricamente independente sobre \mathbb{Q} , segue da definição de mutação e do lema 3.26 que o novo conglomerado $\mu_r(Y)$ é um conjunto algebricamente independente sobre \mathbb{Q} . Como o resultado vale para o conglomerado inicial, o resultado segue por indução no número de mutações. \square

4.2 Álgebra c -conglomerada e c -friso de ordem n

Vimos no teorema 3.27 como construir um c -friso de ordem n associado à uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} e na proposição 1.22 apresentamos a bijeção $\gamma_s : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{M}_{[n+1]}$. Veremos como utilizar estes dois resultados para construir um c -friso f de ordem n associado com uma semente de uma álgebra c -conglomerada \mathcal{A}_c . O principal resultado desta seção é que o conjunto de todas as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c é um subconjunto finito da imagem de f .

Antes de enunciar os principais resultados desta seção, vamos estudar um exemplo de como construir um c -friso de ordem 3 a partir de uma semente inicial de uma álgebra c -conglomerada de ordem 3 e ilustrar as ideias fundamentais dos resultados que demonstraremos nesta seção.

Exemplo 4.8. Sejam $K = \mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ e $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c(\mathcal{Q}, \hat{Y})$ uma álgebra c -conglomerada, em que \mathcal{Q} denota a aljava com congelamento do tipo $(3, 1)$

$$1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} 2 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} 3 \quad [4]$$

e suponhamos que $\hat{Y} = \{y_1, y_2, y_3; y_4\}$ seja o conglomerado inicial. Conforme ilustrado no hexágono do lado esquerdo da figura 4.1, podemos identificar \mathcal{Q} com a triangulação

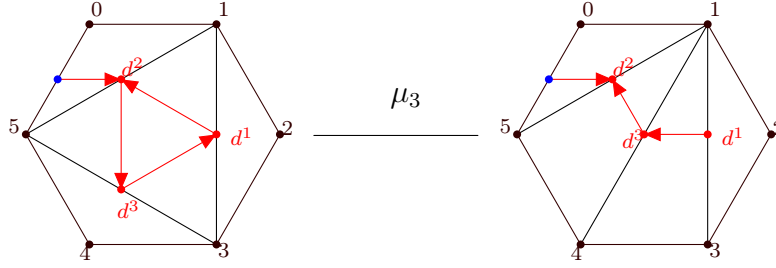


Figura 4.1: Mutação em $d_{3,5}$ da triangulação $\{d_{1,3}, d_{1,5}, d_{3,5}\}$ de \mathcal{P}_6

$\Delta = \{d_{1,3}, d_{1,5}, d_{3,5}\}$ de \mathcal{P}_6 usando a bijeção γ_s , ou seja, temos que

$$\mathcal{Q} = \gamma_s(\Delta),$$

em que as diagonais $d_{1,3}$, $d_{1,5}$ e $d_{3,5}$ correspondem aos vértices 1, 2 e 3 de \mathcal{Q} , respectivamente. Assim, para construirmos um c -friso de ordem n a partir da semente (\mathcal{Q}, \hat{Y}) , basta seguir os seguintes passos:

1. definimos o conjunto $X = \psi^{-1}(\Delta) = \{(1, 1), (1, 3), (3, 3)\}$,
2. definimos a função $f' : X \rightarrow K$ por $(1, 1) \mapsto y_1$, $(1, 3) \mapsto y_2$ e $(3, 3) \mapsto y_3$,
3. utilizamos o teorema 3.27 para estender f' para um c -friso f com $f|_X = f'$ e $f(0, 3) = y_4$.

Por meio de um cálculo direto usando a regra $-c$ -modular generalizada obtemos os elementos $f(i, j)$ para $0 \leq i \leq j \leq 3$ (ver exemplo 3.25):

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & \frac{y_4 y_1 + c^2 y_3 - c y_2}{y_1 y_2} & & & & & \frac{y_2 - c y_1 - c y_3}{y_1 y_3} & & & & y_3 \\
 \dots & & \frac{y_4 y_1 + c^2 y_3}{y_2} & & \frac{y_2 - c y_1}{y_3} & & & & \frac{y_2 - c y_3}{y_1} & & \dots \\
 & & & & \frac{y_4 y_2 - c(y_4 y_1 + c^2 y_3)}{y_2 y_3} & & & & y_2 & & \\
 & & & & & & & & & & y_4
 \end{array}$$

Para finalizar este exemplo, vamos mostrar como podemos obter o conglomerado da semente $\mu_3(\hat{Y}, \mathcal{Q})$ utilizando o c -friso f .

Como $X = \psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1}(\mathcal{Q})$ e $f|_X = f'$, é claro que

$$f(\psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1}(\mathcal{Q})) = \hat{Y} \setminus \{\hat{y}_4\}.$$

Calculando a mutação $\mu_3(\hat{Y}, \mathcal{Q})$ pela definição obtemos

$$\mu_3(\hat{Y}) = \hat{Y} \setminus \{y_3\} \cup \left\{ \frac{y_2 - cy_1}{y_3} \right\}$$

e

$$\mu_3(\mathcal{Q}) = 1 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} [4]$$

Pelo lema 1.21, temos que $\gamma_s \circ \mu_r = \mu_r \circ \gamma_s$. Então, conforme ilustrado na figura 4.1, segue da equação $\mathcal{Q} = \gamma_s(\Delta)$ que

$$\mu_3(\mathcal{Q}) = \gamma_s \circ \mu_3(\{d_{1,3}, d_{1,5}, d_{3,5}\}) = \gamma_s(\{d_{1,3}, d_{1,5}, d_{1,4}\}).$$

Portanto, como $f \circ \psi^{-1}(d_{1,4}) = f(1, 2) = \frac{y_2 - cy_1}{y_3}$, temos que

$$f(\psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1} \circ \mu_3(\mathcal{Q})) = \mu_3(\hat{Y}) \setminus \{\hat{y}_4\}.$$

Vimos no exemplo 4.8 acima como construir um c -friso de ordem 3 a partir de uma semente inicial de uma álgebra c -conglomerada de ordem 3. Dada uma álgebra c -conglomerada $\mathcal{A}_c(\mathcal{Q}, \hat{Y})$ de ordem n , é possível construir um c -friso de ordem n da seguinte forma:

- (i) definimos o conjunto $X = \psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1}(\mathcal{Q})$, em que \mathcal{Q} é a aljava da semente inicial de $\mathcal{A}_c(\mathcal{Q}, \hat{Y})$;
- (ii) definimos a função $f' : X \cup \{(0, n)\} \rightarrow K$ por $(0, n) \mapsto \hat{y}_{n+1}$ e $x_r \mapsto \hat{y}_r$, em que x_r é o elemento de X associado com o vértice r de \mathcal{Q} ;
- (iii) aplicamos o teorema 3.27 para estender f' para um c -friso de ordem n .

Diremos que o c -friso f construído da forma acima é um **c -friso associado à álgebra c -conglomerada $\mathcal{A}_c(\mathcal{Q}, \hat{Y})$** . Nosso objetivo no restante desta seção é demonstrar que o c -friso f tem as seguintes propriedades:

- Seja (Y, Q) uma semente arbitraria de \mathcal{A}_c . Então

$$f(\psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1}(Q)) = Y \setminus \{\hat{y}_{n+1}\}$$

- Seja $A = A_0^- \cup \{(0, n)\}$. Então,

$$\mathcal{A}_c = \mathbb{Z}[c][f(A)]$$

-

$$\mathcal{A}_c[c^{-1}, \hat{y}_{n+1}^{-1}] = \mathbb{Z}[c^{\pm 1}][im f]$$

em que \hat{y}_{n+1} é a variável congelada de \mathcal{A}_c .

Lema 4.9. *Seja (Q, Y) uma semente arbitraria de \mathcal{A}_c e f um c -friso tal que*

$$f(\psi^{-1}(d^r)) = y_r \in Y$$

para $r = 1, \dots, n$, em que d^r é a diagonal da triangulação $\Delta = \gamma_s^{-1}(Q)$ associada com o vértice r de Q . Então o conglomerado Y' obtido aplicando a mutação na semente (Q, Y) no vértice r é

$$Y' = Y \setminus \{y_r\} \cup \{f(\psi^{-1} \circ \text{flip}_\Delta(d^r))\}$$

Demonstração. Precisamos provar que $y'_r = f(\psi^{-1} \circ \text{flip}_\Delta(d^r))$, em que y'_r é definido pela relação de permuta para álgebra c -conglomerada 4.1. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 vértices de $q_\Delta(d^r)$, como no lema 4.4, e suponhamos que $d^r = d_{v_1, v_3}$. Então, o lema 4.4 implica que $\lambda_+ = 0$ e $\lambda_- = v_3 - v_2$. Pela definição de ψ , temos as seguintes igualdades:

$$\psi^{-1}(d_{v_1, v_4}) = (v_1, v_4 - 2), \psi^{-1}(d_{v_2, v_3}) = (v_2, v_3 - 2)$$

$$\psi^{-1}(d_{v_1, v_2}) = (v_1, v_2 - 2), \psi^{-1}(d_{v_3, v_4}) = (v_3, v_4 - 2).$$

Assim, pela definição da relação de permuta 4.1 e usando a hipótese $f(\psi^{-1}(d^r)) = y_r$, temos que

$$y_r y'_r = f(v_2, v_3 - 2) f(v_1, v_4 - 2) + (-c)^{\lambda_-} f(v_1, v_2 - 2) f(v_3, v_4 - 2)$$

Segue da regra $-c$ -modular generalizada que $y_r y'_r = f(v_1, v_3 - 2) f(v_2, v_4 - 2)$, mas como $y_r = f(v_1, v_3 - 2)$, temos que

$$y'_r = f(v_2, v_4 - 2) = f(\psi^{-1}(d_{v_2, v_4})) = f(\psi^{-1} \circ \text{flip}_\Delta(d^r))$$

□

Toda semente de uma álgebra de conglomerado é unicamente determinada pelo seu conglomerado [GSV07], mas em geral uma semente não é determinada pela aljava. Por outro lado, a próxima proposição garante que uma semente de uma álgebra c -conglomerada é unicamente determinada pela sua aljava. Dada uma semente (Q, Y) de uma álgebra c -conglomerada \mathcal{A}_c , mostraremos na próxima proposição como obter o conglomerado Y a partir da aljava Q (e vice versa).

Proposição 4.10. *Sejam (Y, Q) uma semente arbitraria de \mathcal{A}_c e f o c -friso associado à \mathcal{A}_c . Então,*

- (a) $f(\psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1}(Q)) = Y \setminus \{\hat{y}_{n+1}\}$ e o vértice r de Q corresponde à variável y_r do conglomerado Y .

(b) $f(A_0^-) \cup \{\hat{y}_{n+1}\}$ é igual a união de todos os possíveis conjuntos de variáveis obtidos de \hat{Y} por sucessivas mutações.

Demonstração. Temos que a semente inicial (Q, \hat{Y}) satisfaz as condições do lema anterior. Então, caso (Q, Y) seja obtido da semente inicial por uma mutação, o resultado segue pelo lema anterior. Mas, neste caso, (Q, Y) também satisfaz as condições do lema anterior. Portanto, o resultado segue por indução.

O item (b) é uma consequência imediata do item (a). □

Teorema 4.11. *Sejam $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}(\hat{Y}, Q)$ uma álgebra c -conglomerada, f o c -friso associado à \mathcal{A}_c e considere o conjunto $A = A_0^- \cup \{(0, n)\}$. Então,*

$$(i) \quad \mathcal{A}_c(\hat{Y}, Q) = \mathbb{Z}[c][f(A)],$$

$$(ii) \quad \mathcal{A}_c[\hat{y}_{n+1}^{-1}, c^{-1}] = \mathbb{Z}[c^{\pm 1}][\text{Im}f].$$

Demonstração. Seja \mathcal{X} a união de todos os possíveis conjuntos de variáveis obtidos de \hat{Y} por sucessivas mutações. A proposição 4.10(b) implica que $\mathcal{X} = f(A)$, o que termina a demonstração do item (i).

O item (i) implica que $\mathcal{A}_c \subset \mathbb{Z}[c^{\pm 1}][\text{Im}f]$. Mas, como a linha $n+1$ de f é da forma

$$\cdots \quad \frac{(-c)^{n+1}}{\hat{y}_{n+1}} \quad \hat{y}_{n+1} \quad \frac{(-c)^{n+1}}{\hat{y}_{n+1}} \quad \hat{y}_{n+1} \quad \frac{(-c)^{n+1}}{\hat{y}_{n+1}} \quad \hat{y}_{n+1} \quad \cdots,$$

temos que $\hat{y}_{n+1}^{-1} \in \mathbb{Z}[c^{\pm 1}][\text{Im}f]$, donde, $\mathcal{A}_c[\hat{y}_{n+1}^{-1}, c^{-1}] \subset \mathbb{Z}[c^{\pm 1}][\text{Im}f]$. É claro que os elementos das linhas $-1, 0, n+1$ e $n+2$ estão contidos em $\mathcal{A}_c[\hat{y}_{n+1}^{-1}, c^{-1}]$. Então, para provar a outra inclusão, precisamos considerar apenas o caso em que $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, n]}$. Mas, neste caso, o lema 3.14 implica que existem $(i_0, j_0) \in A$ e $k', k'' \geq 0$ tais que

$$f(i_0, j_0) = \left(\frac{(-c)^{n+1}}{t^2} \right)^{k'} \left(\frac{(-c)^{n+1}}{s^2} \right)^{k''} f(i, j),$$

em que $s = \hat{y}_{n+1}$ e $t = \frac{(-c)^{n+1}}{\hat{y}_{n+1}}$. Portanto, o coeficiente multiplicando $f(i, j)$ no lado direito da igualdade acima pertence à $\mathbb{Z}[\hat{y}_{n+1}^{\pm 1}, c^{\pm 1}]$, logo, temos que $f(i, j) \in \mathcal{A}_c[\hat{y}_{n+1}^{-1}, c^{-1}]$, o que termina a demonstração do item (ii). □

4.2.1 Interpretação geométrica

Vimos na proposição 1.22 que podemos identificar uma aljava de $\mathcal{M}_{[n+1]}$ com uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} utilizando a bijeção γ_s . Vimos também que a mutação de aljava corresponde à uma mutação de triangulação, no sentido do lema 1.21. Vamos utilizar estes dois fatos para apresentar uma interpretação geométrica para uma álgebra c -conglomerada.

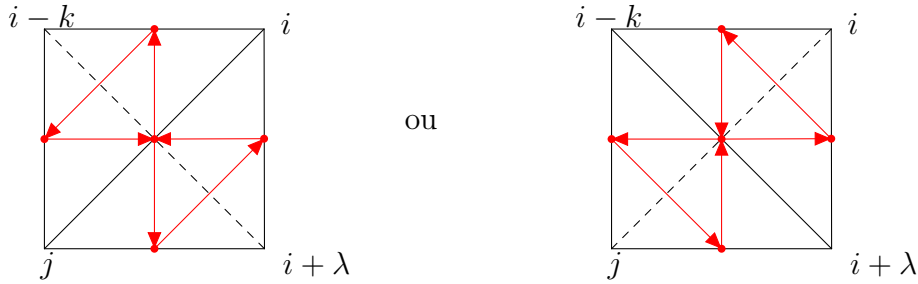
Proposição 4.12. *Sejam $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{[n+1]}$ e $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c(\hat{Y}, \mathcal{Q})$ uma álgebra c -conglomerada. Existe uma bijeção entre o conjunto de todas as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c e o conjunto de todas as diagonais de \mathcal{P}_{n+3} , tal que conglomerados correspondem às triangulações. Além disso, denote por $x_{i,j}$ a variável correspondente à diagonal $d_{i,j}$; defina $x_{0,n+2} = \hat{y}_{n+1}$ e $x_{i,i+1} = 1$ para $0 \leq i \leq n+1$, então a mutação é dada pela "relação de Ptolomeu":*

$$x_{i-k,i+\lambda}x_{i,j} = x_{i-k,j}x_{i,i+\lambda} + (-c)^\lambda x_{i-k,i}x_{i+\lambda,j}, \quad (4.2)$$

em que $0 \leq i-k < i < i+\lambda < j \leq n+2$.

Demonstração. Sejam \mathcal{X} o conjunto de todas as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c e f o c -friso associado à \mathcal{A}_c . A proposição 4.10(b) implica que $\mathcal{X} = f(A_0^-)$. Então temos que a correstricção de $f \circ \psi^{-1}$ a $\mathcal{X} = f(A_0^-)$ é sobrejetora. Pela proposição 4.10(a), temos que o conjunto $Y' = \{f(0,r)\}_{0 \leq r \leq n}$ é o conglomerado associado à aljava $\vec{\mathbb{A}}_{[n+1]}$, logo, segue da proposição 4.7 que Y' é um conjunto algebricamente independente sobre \mathbb{Q} . Então, o corolário 3.33 implica que $f|_{A_0^-}$ é injetora. Logo, $f \circ \psi^{-1}$ induz uma bijeção entre o conjunto de todas as diagonais de \mathcal{P}_{n+3} e o conjunto de todas as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c . Além disso, se Δ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} então $\gamma_s(\Delta)$ é a aljava de alguma semente $(Y, \gamma_s(\Delta))$ de \mathcal{A}_c . Logo, utilizando novamente a proposição 4.10(a), segue que $f \circ \psi^{-1}(\Delta) = Y$ é um conglomerado.

Sejam (Y, Q) uma semente e $x_r \in Y$ uma variável de conglomerado. Queremos provar que a nova variável x'_r do conglomerado $\mu_r(Y)$ é dada pela relação de Ptolomeu (4.2). Identificando a aljava Q com a triangulação $\Delta = \gamma_s^{-1}(Q)$, localmente, temos uma das duas situações:



em que $0 \leq i-k < i < i+\lambda < j \leq n+2$.

A definição de mutação de conglomerado na variável x_r é dada pela relação de permuta:

$$x'_r x_r = (-c)^{\lambda^+} \prod_{r \rightarrow v} x_v + (-c)^{\lambda^-} \prod_{v \rightarrow r} x_v.$$

Então, supondo que $d^r = d_{i,j}$ temos que $x_r = x_{i,j}$, logo

$$x'_r x_{i,j} = (-c)^{\lambda^-} x_{i-k,j} x_{i,i+\lambda} + (-c)^{\lambda^+} x_{i-k,i} x_{i+\lambda,j}.$$

Mas, neste caso, o lema 4.4 implica que $\lambda_- = 0$ e $\lambda_+ = \lambda$. Para terminar a demonstração de que a mutação é dada pela regra de Ptolomeu basta observar que, por definição, temos que $x_{i,j} = f \circ \psi^{-1}(d_{i,j})$ para todo $(i, j) \in A_0^-$. Então, utilizando a regra $-c$ -modular generalizada para o lado direito da igualdade acima obtemos que

$$x'_r x_{i,j} = f(i-k, i+\lambda-2) f(i, j-2) = x_{i-k, i+\lambda} x_{i,j},$$

logo, $x'_r = x_{i-k, i+\lambda}$. Caso $d^r = d_{i-k, i+\lambda}$ é análogo. □

4.3 Fenômeno de Laurent para álgebra c -conglomerada

Vimos na proposição 4.10(b) que podemos obter todas as variáveis de uma álgebra c -conglomerada \mathcal{A}_c utilizando o c -friso f associado à \mathcal{A}_c . Na proposição 3.30(i) obtemos uma fórmula explícita para os elementos de f . Então, em particular, temos uma fórmula para as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c em termos de um conglomerado Y específico, à saber

$$Y = f(\psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1}(\vec{\mathbb{A}}_{[n+1]})) \cup \{\hat{y}_{n+1}\}.$$

A fórmula apresentada na proposição 3.30 explica simultaneamente o fenômeno de Laurent e a positividade (tomando $c < 0$ obtemos os coeficientes positivos). Provaremos uma generalização deste fato na próxima proposição.

Proposição 4.13. *Qualquer variável de uma álgebra c -conglomerada pode ser expressa em termos das variáveis de um conglomerado qualquer como um polinômio de Laurent com coeficientes em $\mathbb{Z}[c]$. Além disso, se $c < 0$ então os coeficientes são todos positivos.*

Demonstração. Seja (Q, Y) uma semente arbitrária de \mathcal{A}_c . Pela proposição 1.17 temos que existem elementos $r_1, r_2, \dots, r_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, dois a dois distintos, tais que

$$\mu_{r_m} \circ \mu_{r_{m-1}} \circ \dots \circ \mu_{r_1}(\gamma_s^{-1}(Q)) = \Delta$$

em que Δ é uma rotação da triangulação $\gamma_s^{-1}(\mathbb{A}_n^s)$. Então, podemos obter a variável associada com uma diagonal qualquer de \mathcal{P}_{n+3} com menos de n mutações e sem repetir uma variável que tenha sido mudada anteriormente. Assim, em cada mutação μ_{r_j} , a variável x_{r_j} é uma das variáveis iniciais. Portanto, o resultado segue da relação de Ptolomeu (4.2) por indução no número de mutações. □

Para um estudo mais abrangente e unificado sobre o fenômeno de Laurent consulte o artigo [FZ02b].

4.4 Categoria conglomerada e álgebra c -conglomerada

Nesta seção, denotaremos por \mathcal{D} a categoria derivada $\mathcal{D} = D^b(\text{mod}kQ)$ e por $\mathcal{C} = \mathcal{C}_Q$ a categoria conglomerada em que Q é a aljava do tipo Dynkin $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$. Os objetos indecomponíveis de \mathcal{D} podem ser indexados por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{B}_{[0,n]} &\rightarrow \text{ind}\mathcal{D} \\ (i, j) &\mapsto \tau_{\mathcal{D}}^{-i}P_{n-j+i} \end{aligned}$$

em que $\tau_{\mathcal{D}}$ é o transladado de Auslander-Reiten em \mathcal{D} . Assim, cada losango da forma

$$\begin{array}{ccc} & \varphi(i, j-1) & \\ \varphi(i-1, j-1) & & \varphi(i, j) \\ & \varphi(i-1, j) & \end{array}$$

corresponde à uma mecha da aljava $\Gamma(\mathcal{D})$. Por exemplo, se $n = 3$, a aljava $\Gamma(D^b(\text{mod}k\overrightarrow{\mathbb{A}}_3))$ é dada por

$$\begin{array}{ccccccccc} & \varphi(-1, -1) & & \varphi(0, 0) & & \varphi(1, 1) & & \varphi(2, 2) & & \varphi(3, 3) & \\ & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ \dots & \varphi(-1, 0) & & \varphi(0, 1) & & \varphi(1, 2) & & \varphi(2, 3) & & \dots & \\ & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & & \\ & \varphi(-1, 1) & & \varphi(0, 2) & & \varphi(1, 3) & & & & & \end{array}$$

Lema 4.14. *Sejam $(i, j) \in \mathbb{B}_{[0,n]}$ e $[1]$ o funtor suspensão de \mathcal{D} . Então,*

- (a) $\tau_{\mathcal{D}}\varphi(i, j) = \varphi(i-1, j-1)$;
- (b) $P_r[1] = \varphi(n-r+1, n)$;
- (c) $\varphi(i, j)[1] = \varphi(j+1, i+n)$.

Demonstração. Segue direto da definição de φ que

$$\tau_{\mathcal{D}}\varphi(i, j) = \tau_{\mathcal{D}}^{-i}P_{n-j+i} = \tau_{\mathcal{D}}^{-(i-1)}P_{n-(j-1)+i-1} = \varphi(i-1, j-1),$$

o que termina a demonstração do item (a).

Para provar o item (b), lembremos que na aljava de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathcal{D})$ temos a mecha

$$\begin{array}{ccc} & I_{r-1} & \\ I_r \nearrow & & \searrow P_r[1], \\ & P_{r+1}[1] & \end{array}$$

mas

$$\begin{aligned} I_n = P_1 &= \varphi(0, n-1) \\ I_{n-1} &= \varphi(1, n-1) \\ &\vdots \\ I_r &= \varphi(n-r, n-1) \\ &\vdots \\ I_1 &= \varphi(n-1, n-1) \end{aligned}$$

Então, como $\tau_{\mathcal{D}}P_r[1] = I_r$, o item (b) segue do item (a), ou seja,

$$P_r[1] = \tau_{\mathcal{D}}^{-1}I_r = \tau_{\mathcal{D}}^{-1}\varphi(n-r, n-1) = \varphi(n-r+1, n).$$

Logo,

$$\varphi(i, j)[1] = \tau_{\mathcal{D}}^{-i}P_{n-j+i}[1] = \tau_{\mathcal{D}}^{-i}\varphi(j-i+1, n) = \varphi(j+1, n+i).$$

Portanto, o item (c) está provado. □

Considere o conjunto $A_0^- = \{(i, j) \in \mathbb{B}_{[0, n]} \mid 0 \leq i \leq j \leq n\}$. Assim, temos que

$$\varphi(A_0^-) = \text{ind}\mathcal{C}.$$

Então, podemos indexar os objetos indecomponíveis de \mathcal{C} pela função $\tilde{\varphi} = \varphi|_{A_0^-}$, ou seja, por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: A_0^- &\rightarrow \text{ind}\mathcal{C} \\ (i, j) &\mapsto \tau_{\mathcal{C}}^{-i}\tilde{P}_{n-j+i} \end{aligned}$$

em que $\tau_{\mathcal{C}}$ é o transladado de Auslander-Reiten em \mathcal{C} . Então, podemos definir uma bijeção entre $\text{ind}\mathcal{C}$ e o conjunto de diagonais de \mathcal{P}_{n+3} por $\Theta = \psi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \Theta: \text{ind}\mathcal{C} &\rightarrow \{\text{diagonais de } \mathcal{P}_{n+3}\} \\ \tilde{\varphi}(i, j) &\mapsto \psi(i, j). \end{aligned}$$

Caldero-Chapoton-Schiffler definiram em [CCS06] uma categoria que eles chamaram de categoria total gerada por todas as diagonais de \mathcal{P}_{n+3} . Esta categoria é equivalente a categoria conglomerada no caso \mathbb{A}_n . O próximo lema é uma consequência do teorema 5.2 em [CCS06] que estabelece a equivalência entre a categoria total gerada por todas as diagonais de \mathcal{P}_{n+3} e a categoria \mathcal{C} , mas apresentaremos aqui uma demonstração independente.

Lema 4.15. *Sejam \tilde{M}, \tilde{N} objetos indecomponíveis de \mathcal{C} e T um conjunto conglomerado-inclinante de \mathcal{C} . Então,*

(a) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\tilde{M}, \tilde{N}) \neq 0$ se e somente se $\Theta(\tilde{M})$ e $\Theta(\tilde{N})$ se cruzam.

(b) $\Theta(T)$ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} .

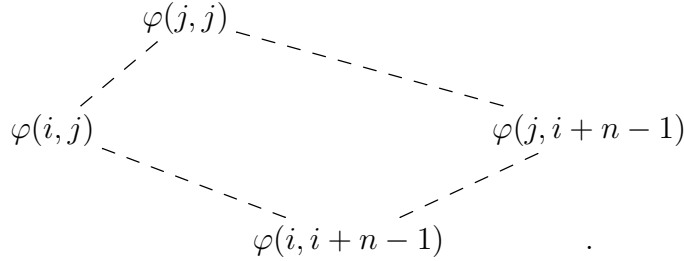
Demonstração. Sejam $\widetilde{M} = \widetilde{\varphi}(i, j)$ e $\widetilde{N} = \widetilde{\varphi}(i', j')$ dois objetos indecomponíveis de \mathcal{C} . Então,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\widetilde{M}, \widetilde{N}[1]) \\ &= \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F^r N[1]). \end{aligned}$$

Podemos supor que $M = \varphi(i, j)$ e $N = \varphi(i', j')$, para $(i, j), (i', j') \in A_0^-$. Então,

$$\begin{aligned} F^r N[1] &= \tau_{\mathcal{D}}^{-r} N[r+1] \\ &= \tau_{\mathcal{D}}^{-r} \varphi(i', j')[r+1] \\ &= \varphi(i' + r, j' + r)[r+1], \end{aligned}$$

em que a ultima equação segue do lema 4.14(a). Então, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F^r N[1]) \neq 0$ se e somente se $\varphi(i' + r, j' + r)[r+1]$ está dentro do quadrilátero $q_{i,j}$ representado abaixo pelos seus vértices



mas como $j \leq n$, temos que $q_{i,j} \subset \text{ind}kQ \cup \text{ind}kQ[1]$. Além disso, $\varphi(i', j') \in \text{ind}kQ \cup kQ[1]$, logo, para que $\varphi(i' + r, j' + r)[r+1]$ esteja dentro do quadrilátero $q_{i,j}$ é necessário que $r = 0$ ou $r = -1$. Então,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, N[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F^{-1}N[1]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, N[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \tau_{\mathcal{D}}N) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\varphi(i, j), \varphi(i', j')[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\varphi(i, j), \tau_{\mathcal{D}}\varphi(i', j')). \end{aligned}$$

Caso $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\varphi(i, j), \varphi(i', j')[1]) \neq 0$, temos que $\varphi(i', j')[1] = \varphi(j' + 1, i' + n)$ está dentro de $q_{i,j}$, ou seja, $i \leq j' + 1 \leq j$ e $j \leq i' + n \leq i + n - 1$, o que implica que

$$i' < i \leq j' + 1 < j + 1.$$

Caso $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\varphi(i, j), \tau_{\mathcal{D}}\varphi(i', j')) \neq 0$, temos que $\tau_{\mathcal{D}}\varphi(i', j') = \varphi(i' - 1, j' - 1)$ está dentro de $q_{i,j}$, logo, $i \leq i' - 1 \leq j$ e $j \leq j' - 1$, o que implica que

$$i < i' \leq j + 1 < j' + 1.$$

Então, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \neq 0$ se e somente se $i < i' \leq j + 1 < j' + 1$ ou $i' < i \leq j' + 1 < j + 1$.

Por outro lado, $\Theta(\widetilde{M}) = d_{i,j+2}$ e $\Theta(\widetilde{N}) = d_{i',j'+2}$, assim $\Theta(\widetilde{M})$ e $\Theta(\widetilde{N})$ se cruzam se e somente se ou $i < i' \leq j + 1 < j' + 1$ ou $i' < i \leq j' + 1 < j + 1$. Portanto, segue que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \neq 0$ se e somente se $\Theta(\widetilde{M})$ e $\Theta(\widetilde{N})$ se cruzam.

Por (a) temos que $\Theta(T)$ é um conjunto com n diagonais que não se cruzam, logo é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} . □

Corolário 4.16. *Seja $T = \{T_1, \dots, T_n\}$ um conjunto conglomerado-inclinante de \mathcal{C} . Então,*

$$\mu_r \circ \Theta(T) = \Theta \circ \mu_r(T)$$

Demonstração. Suponha que a mutação μ_r do conglomerado-inclinante T substitua o objeto T_r por um objeto T'_r . Como a mutação μ_r modifica somente o elemento T_r de T , temos que $\Theta(T) \setminus \{\Theta(T_r)\} = \Theta(\mu_r(T)) \setminus \{\Theta(T'_r)\}$, mas como $\Theta(T)$ e $\Theta(\mu_r(T))$ são triangulações e $\Theta(T_r) \neq \Theta(T'_r)$, segue que $\Theta(T'_r) = \text{flip}_{\Theta(T)}(\Theta(T_r))$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mu_r \circ \Theta(T) &= \Theta(T) \setminus \{\Theta(T_r)\} \cup \{\text{flip}_{\Theta(T)}(\Theta(T_r))\} \\ &= \Theta(\mu_r(T)) \setminus \{\Theta(T'_r)\} \cup \{\Theta(T'_r)\} \\ &= \Theta \circ \mu_r(T). \end{aligned}$$

□

Seja T um objeto conglomerado-inclinante de \mathcal{C} . Vamos provar que se retirarmos o vértice congelado da aljava $\gamma_s \circ \Theta(T)$, obtemos a aljava oposta Q_T^{op} da álgebra de endomorfismos de T , ou seja, vamos provar que $\gamma \circ \Theta(T) = Q_T^{op}$.

Proposição 4.17. *Seja T um objeto conglomerado-inclinante de \mathcal{C} . Então, a aljava oposta Q_T^{op} da álgebra de endomorfismos de T é igual a aljava da triangulação $\Theta(T)$, ou seja,*

$$\gamma \circ \Theta(T) = Q_T^{op}.$$

Demonstração. Considere o conglomerado-inclinante $T' = \{P_1, \dots, P_n\}$ e denote por μ uma sequência de mutações tal que $\mu(T') = T$. Então, o teorema 2.11 implica que

$$Q_T^{op} = Q_{\mu(T')}^{op} = \mu(Q_{T'}^{op}).$$

Como T' é formado apenas por objetos projetivos temos que

$$Q_{T'}^{op} = \overrightarrow{\mathbb{A}}_n,$$

e

$$\Theta(T') = \{d_{0,2}, \dots, d_{0,n+1}\}.$$

Então,

$$Q_{T'}^{op} = \overrightarrow{\mathbb{A}}_n = \gamma \circ \Theta(T').$$

Assim, substituindo na primeira equação obtemos

$$Q_T^{op} = \mu \circ \gamma \circ \Theta(T').$$

Mas, pelo lema 1.18 temos que $\mu \circ \gamma = \gamma \circ \mu$ e pelo corolário 4.16 temos que $\mu \circ \Theta = \Theta \circ \mu$, logo, segue que

$$Q_T^{op} = \gamma \circ \Theta \circ \mu(T').$$

Portanto, como $\mu(T') = T$, concluímos que $Q_T^{op} = \gamma \circ \Theta(T)$. □

Teorema 4.18. *Sejam $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c(\hat{Y}, \mathcal{Q})$ uma álgebra c -conglomerada, \mathcal{X} o conjunto de todas as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c e f o c -friso associado a \mathcal{A}_c . Então,*

- (a) *A aplicação $f \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \text{ind}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$ é bijetora.*
- (b) *Se T é um conglomerado-inclinante de \mathcal{C}_Q , então $f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(T)$ é o conglomerado de $\mathcal{A}_c(\hat{Y}, \mathcal{Q})$ associado à aljava $\gamma_s \circ \Theta(T)$.*

Demonstração. Seja T um conglomerado-inclinante de \mathcal{C} . Pelo lema anterior, segue que $\Theta(T)$ é uma triangulação de \mathcal{P}_{n+3} , então, pela definição da aplicação γ_s , a aljava

$$Q := \gamma_s \circ \Theta(T)$$

é uma aljava de $\mathcal{M}_{[n+1]}$. Logo, Q é a aljava de alguma semente de \mathcal{A}_c . Como $\Theta = \psi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$, temos que

$$f(\psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1}(Q)) = f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(T).$$

Então, a proposição 4.10(a) implica que $(f \circ \varphi^{-1}(T), \gamma_s \circ \Theta(T))$ é uma semente de \mathcal{A}_c , o que termina a demonstração do item (b).

A proposição 4.10(b) implica que $\mathcal{X} = f(A_0^-)$. Como $\tilde{\varphi} : A_0^- \rightarrow \text{ind}\mathcal{C}$ é uma bijeção, precisamos verificar apenas que a aplicação $f|_{A_0^-}$ é injetora. Mas, as variáveis de conglomerado $f(0, r)$, para $0 \leq r \leq n - 1$, são algebricamente independentes, pois são as variáveis do conglomerado correspondente à aljava $1 \rightarrow 2 \cdots \rightarrow n \rightarrow [n + 1]$. Portanto, o corolário 3.33 implica que $f|_{A_0^-}$ é injetora. □

4.5 Aplicação de Caldero-Chapoton generalizada

O objetivo desta seção é mostrar que podemos obter as variáveis da álgebra c -conglomerada do tipo \mathbb{A}_n modificando a aplicação de Caldero-Chapoton. Para isto, considere um conjunto com $3n$ variáveis $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n\}$. Seja Q uma aljava finita.

Apresentamos uma generalização da aplicação de Caldero-Chapoton dada pela aplicação

$$X_{\mathcal{Q}}^Q : \text{obj}\mathcal{C}_Q \rightarrow \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$$

definida por:

- Para todos $M, N \in \text{obj}\mathcal{C}_Q$, temos $X_{M \oplus N} = X_M X_N$.
- Se P_i é isomorfo ao kQ -módulo projetivo indecomponível associado ao vértice i , então $X_{P_i[1]} = x_i$.
- Se V é um kQ -módulo indecomponível e $d = \sum_i d_i \alpha_i$ o vetor dimensão de V , então

$$X_V^Q = \sum_{0 \leq e \leq d} \chi(\text{Gr}_e(V)) \prod_{r=1}^n x_r^{-\langle e, \alpha_r \rangle - \langle \alpha_r, d-e \rangle} y_r^{e_r} z_r^{d_r - e_r} \quad (4.3)$$

em que χ denota a característica de Euler do Q -grasmaniano $\text{Gr}_e(V)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a forma de Euler (ver seção 1.1.7).

Observação 4.19. Em [Dup10], Dupont introduziu uma generalização da aplicação de Caldero-Chapoton para estudar uma classe de álgebras de conglomerado com coeficientes. Se tomarmos $z_r = 1$, para $r = 1, \dots, n$, na fórmula de X_V^Q acima obtemos a aplicação apresentada por Dupont na definição 2.1 do artigo [Dup10].

Seja \mathcal{A}_c uma álgebra c -conglomerada e $X_{\mathcal{Q}} := X_{\mathcal{Q}}^Q$, em que:

- $Q = \overrightarrow{\mathbb{A}}_n$
- $y_r = 1$ para $r = 1, \dots, n-1$
- y_n tomamos igual à variável congelada de \mathcal{A}_c
- $z_r = -c$ para $r = 1, \dots, n$.

Lema 4.20. *Sejam $Q = \overrightarrow{\mathbb{A}}_n$, V um kQ -módulo indecomponível e $d = \sum_i d_i \alpha_i$ o vetor dimensão de V . Então,*

$$X_V = \frac{1}{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}} \left(\sum_{0 \leq e \leq d} (-c)^{\sum_{r=1}^n d_r - e_r} \prod_{r=1}^n x_r^{e_{r-1} + d_{r+1} - e_{r+1}} y_r^{e_r} \right),$$

em que o somatório é tomado sobre os vetores $e = \sum_i e_i \alpha_i$ com e variando sobre os vetores dimensão dos submódulos de V .

Demonstração. Vimos no exemplo 1.14 que $\text{Gr}_e(V)$ possui no máximo um submódulo de V . Caso e seja o vetor dimensão de algum submódulo de V temos que $\chi(\text{Gr}_e(V)) = 1$ e zero

caso contrário. Então, como estamos tomando $z_r = -c$ para $r = 1, \dots, n$ na definição de X_V , segue da fórmula 4.3 que

$$X_V = \sum_{0 \leq e \leq d} (-c)^{\sum_{r=1}^n d_r - e_r} \prod_{r=1}^n x_r^{-\langle e, \alpha_r \rangle - \langle \alpha_r, d - e \rangle} y_r^{e_r}. \quad (4.4)$$

Então, para terminar a demonstração, basta provar que

$$-\langle e, \alpha_r \rangle - \langle \alpha_r, d - e \rangle = -d_r + e_{r-1} + d_{r+1} - e_{r+1}.$$

Mas, lembrando que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{(i \rightarrow j) \in Q_1} x_i y_j,$$

temos que

$$\langle e, \alpha_r \rangle = e_r - \sum_{v \rightarrow r} e_v$$

e

$$\langle \alpha_r, d - e \rangle = d_r - e_r - \sum_{r \rightarrow v} (d_v - e_v),$$

logo,

$$\begin{aligned} -\langle e, \alpha_r \rangle - \langle \alpha_r, d - e \rangle &= (-e_r + \sum_{v \rightarrow r} e_v) - (d_r - e_r) + \sum_{r \rightarrow v} (d_v - e_v) \\ &= -d_r + \sum_{v \rightarrow r} e_v + \sum_{r \rightarrow v} (d_v - e_v). \end{aligned}$$

Logo, como estamos considerando a aljava $\vec{\mathbb{A}}_n$ com orientação linear, segue que

$$-\langle e, \alpha_r \rangle - \langle \alpha_r, d - e \rangle = -d_r + e_{r-1} + d_{r+1} - e_{r+1}.$$

Portanto, substituindo na equação 4.4, obtemos o resultado desejado. \square

Exemplo 4.21. Sejam \mathcal{A}_c uma álgebra c -conglomerada e (\mathbf{x}, Q) a semente de \mathcal{A}_c em que $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3; x_4\}$ e Q é a aljava

$$[4] \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

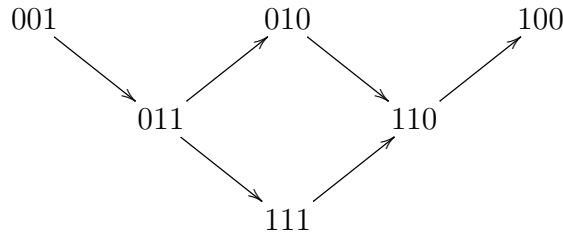
Vamos obter explicitamente as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c em termos das variáveis do conglomerado \mathbf{x} a partir das representações indecomponíveis de $\vec{\mathbb{A}}_3 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ utilizando a aplicação

$$X_{\vec{\mathbb{A}}_3} : \text{obj} \mathcal{C}_{\vec{\mathbb{A}}_3} \rightarrow \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

em que \mathcal{C} é a categoria conglomerada associada com a aljava do tipo Dynkin $\vec{\mathbb{A}}_3$.

Por definição, $X_{P_r[1]} = x_r$, então precisamos calcular apenas X_V para $V \in \text{ind} k \vec{\mathbb{A}}_3$. Representando os objetos de $\text{ind} k \vec{\mathbb{A}}_3$ pelos seus vetores dimensão, temos que a aljava de

Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } k\overrightarrow{\mathbb{A}}_3)$ tem a seguinte forma:



Vamos calcular X_V para $V \in \text{ind } k\overrightarrow{\mathbb{A}}_3$: seja $V = P_1$, então os submódulos de V possuem os seguintes vetores dimensão

$$e^0 = d = (111) \quad e^1 = (011) \quad e^2 = (001) \quad e^3 = (000).$$

Precisamos calcular $\sum_{r=1}^n d_r - e_r^j$ para $n = 3$ e $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Mas, temos que

$$\sum_{r=1}^3 d_r - e_r^j = d_1 - e_1^j + d_2 - e_2^j + d_3 - e_3^j = 3 - (e_1^j + e_2^j + e_3^j) = j.$$

Para obter X_V utilizando a fórmula do lema 4.20, falta calcular

$$x_r^{e_{r-1}^j + d_{r+1} - e_{r+1}^j} y_r^{e_r^j},$$

para $r \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Mas, lembrando que estamos tomando $y_1 = y_2 = 1$ e $y_3 = x_4$, podemos verificar que

$$\prod_{r=1}^3 x_r^{e_{r-1}^0 + d_{r+1} - e_{r+1}^0} y_r^{e_r^0} = x_1^0 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_4$$

$$\prod_{r=1}^3 x_r^{e_{r-1}^1 + d_{r+1} - e_{r+1}^1} y_r^{e_r^1} = x_1^0 x_2^0 x_3 x_4 = x_3 x_4$$

$$\prod_{r=1}^3 x_r^{e_{r-1}^2 + d_{r+1} - e_{r+1}^2} y_r^{e_r^2} = x_1 x_2^0 x_3^0 x_4 = x_1 x_4$$

$$\prod_{r=1}^3 x_r^{e_{r-1}^3 + d_{r+1} - e_{r+1}^3} y_r^{e_r^3} = x_1 x_2 x_3^0 x_4^0 = x_1 x_2$$

Então, obtemos que

$$X_{P_1} = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} (x_2 x_3 x_4 - c x_3 x_4 + c^2 x_1 x_4 - c^3 x_1 x_2)$$

Analogamente, podemos calcular X_V para os outros módulos $V \in \text{ind } k\overrightarrow{\mathbb{A}}_3$. Vamos dispor abaixo os elementos X_V , $V \in \text{ind } k\overrightarrow{\mathbb{A}}_3$, obedecendo a posição em que V aparece na aljava $\Gamma(\text{mod } k\overrightarrow{\mathbb{A}}_3)$:

$$\frac{x_4 - cx_2}{x_3}$$

$$\frac{x_3 - cx_1}{x_2}$$

$$\frac{x_2 - c}{x_1}$$

$$\frac{x_3x_4 - cx_1x_4 + c^2x_1x_2}{x_2x_3}$$

$$\frac{x_2x_3 - cx_3 + c^2x_1}{x_1x_2}$$

$$\frac{x_2x_3x_4 - cx_3x_4 + c^2x_1x_4 - c^3x_1x_2}{x_1x_2x_3}$$

Seja f um c -friso tal que $f(0, 3) = x_4$, $f(1, 3) = x_3$, $f(2, 3) = x_2$ e $f(3, 3) = x_1$. Então, a proposição 3.30(ii) implica que

$$f(A_0^-) \cup \{x_4\} = \mathbf{x} \cup \{X_V | V \in \text{ind}k\overrightarrow{\mathbb{A}}_3\}.$$

Por outro lado, temos que $f \circ \psi^{-1} \circ \gamma_s^{-1}(Q) = \mathbf{x} \setminus \{x_4\}$. Logo, f é o c -friso associado à álgebra c -conglomerada \mathcal{A}_c . Portanto, pela proposição 4.10(b), $f(A_0^-) \cup \{x_4\}$ é o conjunto de todas as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c .

Mostraremos no próximo teorema que podemos obter todas as variáveis de conglomerado de \mathcal{A}_c utilizando a aplicação $X_?$.

Teorema 4.22. *Sejam \mathcal{A}_c uma álgebra c -conglomerada e f o c -friso associado à \mathcal{A}_c . Então,*

$$(a) \quad X_? \circ \tilde{\varphi} = f|_{A_0^-}$$

(b) *O conjunto de todas as variáveis de conglomerado \mathcal{X} da álgebra c -conglomerada \mathcal{A}_c é dado por*

$$\mathcal{X} = \{X_V | V \in \text{ind}\mathcal{C}_{\overrightarrow{\mathbb{A}}_n}\}$$

Demonstração. Sejam $Q = \overrightarrow{\mathbb{A}}_n$ e $V \in \text{ind}\mathcal{C}_Q$. Tendo em vista a fórmula da proposição 3.30(ii) com $j_0 = n$, vamos calcular X_V para $V = \tilde{\varphi}(n - i - k, n - i) \in \tilde{\varphi}(A_0^-)$. Caso $i = 0$, segue do lema 4.14(b) que

$$V = \tilde{\varphi}(n - k, n) = P_{k+1}[1].$$

Logo, $X_V = x_{k+1} = f(n - k, n)$.

Caso $i > 0$, segue da definição de $\tilde{\varphi}$ que

$$V = \tilde{\varphi}(n - i - k, n - i) = \tau_c^{i+k-n} P_{n-k}.$$

Logo, V é um kQ -módulo indecomponível com vetor dimensão $d = (d_1, \dots, d_n)$ tal que $d_r = 1$ para $i \leq r \leq i + k$ e zero caso contrário.

Para $0 \leq j \leq k$, seja e^j o vetor dimensão do submódulo de V tal que $e_r^j = 1$ para $i + j \leq r \leq i + k$ e $e_r^j = 0$ nos outros casos. Então, temos que

$$\sum_{r=1}^n d_r - e_r^j = k + 1 - (k - j + 1) = j.$$

Defina $s(r, e^j) = e_{r-1}^j + d_{r+1} - e_{r+1}^j$. Assim, denotando por e^{k+1} o vetor nulo, segue do lema 4.20 que

$$\begin{aligned} X_V &= \frac{1}{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}} \left(\sum e^j (-c)^j \prod_{r=1}^n x_r^{e_{r-1}^j + d_{r+1} - e_{r+1}^j} y_r^{e_r^j} \right) \\ &= \frac{1}{x_i \dots x_{i+k}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-c)^j \prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)} y_r^{e_r^j} \right) \end{aligned}$$

Então, tendo em vista a fórmula da proposição 3.30(ii), para terminar a demonstração basta provar que

$$\prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)} y_r^{e_r^j} = x_{i-1} x_i \dots x_{i+j-1} \widehat{x_{i+j}} \dots x_{i+k+1}.$$

Caso $i + k < n$: Lembrando que estamos supondo $y_n = x_{n+1}$ e $y_r = 1$ para $r \neq n$, se $i + k < n$ então $e_n^j = 0$, ou seja,

$$\prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)} y_r^{e_r^j} = \prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)}.$$

Vamos calcular $s(r, e^j)$:

- (a) se $1 \leq r \leq i - 2$ ou $i + k + 2 \leq r \leq n$ temos que $e_{r-1}^j = d_{r+1} = e_{r+1}^j = 0$, logo $s(r, e^j) = 0$.
- (b) se $r = i + j - 1$ ou $r = i + j$ temos que $e_{r-1}^j = 0$ e $e_{r+1}^j = d_{r+1} = 1$, logo $s(r, e^j) = 0$.
- (c) se $i - 1 \leq r \leq i + j - 2$ temos que $e_{r-1}^j = e_{r+1}^j = 0$ e $d_{r+1} = 1$, então $s(r, e^j) = 1$.
- (d) se $i + j + 1 \leq r \leq i + k + 1$ temos que $d_{r+1} = e_{r+1}^j$ e $e_{r-1}^j = 1$, então $s(r, e^j) = 1$.

Logo, temos que

$$\begin{aligned} X_V &= \frac{1}{x_i \dots x_{i+k}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-c)^j \prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)} \right) \\ &= \frac{1}{x_i \dots x_{i+k}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-c)^j x_{i-1} x_i \dots x_{i+j-1} \widehat{x_{i+j}} \dots x_{i+k+1} \right) \end{aligned}$$

Caso $i + k = n$: temos que $e_r^j = 1$ para $i + j \leq r \leq n$, como $y_n = x_{n+1}$ e $y_r = 1$ para $r \neq n$, então

$$\prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)} y_r^{e_r^j} = x_{n+1} \prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)}.$$

Analogamente ao caso anterior, podemos verificar que

- (a) se $1 \leq r \leq i - 2$ então $s(r, e^j) = 0$;
- (b) se $r = i + j - 1$ ou $r = i + j$ então $s(r, e^j) = 0$;
- (c) $s(r, e^j) = 1$ nos outros casos.

Logo,

$$\prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)} y_r^{e^j} = x_{n+1} \prod_{r=1}^n x_r^{s(r, e^j)} = x_{i-1} x_i \cdots \widehat{x_{i+j-1} x_{i+j}} \cdots x_{n+1}.$$

Portanto, em ambos os casos, temos que

$$X_V = \frac{1}{x_i \cdots x_{i+k}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-c)^j x_{i-1} x_i \cdots \widehat{x_{i+j-1} x_{i+j}} \cdots x_{i+k+1} \right) = f(n - i - k, n - i),$$

em que a ultima equação segue da proposição 3.30(ii).

O item (b) é consequência imediata do item (a) e da proposição 4.10(b). \square

Teorema 4.23. *Sejam L e M dois objetos de \mathcal{C}_Q , com $Q = \vec{\mathbb{A}}_n$, rígidos e indecomponíveis tais que $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, L) \neq 0$. Existem dois objetos $B, B' \in \mathcal{C}_Q$ e um inteiro positivo λ tais que*

$$X_M X_L = X_B + (-c)^\lambda X_{B'}.$$

Além disso, existem dois triângulos

$$M \longrightarrow B \longrightarrow L \longrightarrow M[1] \quad e \quad L \longrightarrow B' \longrightarrow M \longrightarrow L[1].$$

Demonstração. Sejam L e M dois objetos de $\mathcal{C} := \mathcal{C}_Q$ rígidos e indecomponíveis tais que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, L) \neq 0$. Então, o lema 4.15 implica que $\Theta(L)$ e $\Theta(M)$ se cruzam. Assim, podemos supor que $\Theta(L) = d_{i, j+2}$ e $\Theta(M) = d_{i-k, i+\lambda}$, em que $0 \leq i - k < i < i + \lambda < j + 2 \leq n + 2$. Como $\Theta = \psi \circ \varphi^{-1}$, segue que $L = \varphi(i, j)$ e $M = \varphi(i - k, i - 2 + \lambda)$. Então, pelo teorema 4.22(a) segue que

$$X_M X_L = f(i - k, i - 2 + \lambda) f(i, j).$$

Aplicando a regra $-c$ -modular generalizada obtemos a equação

$$X_M X_L = f(i - k, j) f(i, i - 2 + \lambda) + (-c)^\lambda f(i - k, i - 2) f(i + \lambda, j).$$

Utilizando novamente o teorema 4.22(a), concluímos que

$$X_M X_L = X_{\tilde{\varphi}(i-k, j)} X_{\tilde{\varphi}(i, i-2+\lambda)} + (-c)^\lambda X_{\tilde{\varphi}(i-k, i-2)} X_{\tilde{\varphi}(i+\lambda, j)}$$

Então, tomando

$$B = \tilde{\varphi}(i - k, j) \oplus \tilde{\varphi}(i, i - 2 + \lambda)$$

e

$$B' = \tilde{\varphi}(i - k, i - 2) \oplus \tilde{\varphi}(i + \lambda, j)$$

segue que

$$X_M X_L = X_B + (-c)^\lambda X'_B,$$

o que termina a demonstração da primeira parte do teorema.

Para demonstrar a segunda parte, considere $1 \leq r_1 < r_2 < r_3 \leq n$ e os objetos projetivos P_{r_1}, P_{r_2} e P_{r_3} . Então, temos uma sequência exata de kQ -módulos dada por

$$0 \longrightarrow P_{r_2} \longrightarrow P_{r_1} \oplus \tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_3} \longrightarrow \tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_1+r_3-r_2} \longrightarrow 0$$

Assim, utilizando a proposição 1.12(d) obtemos um triângulo

$$P_{r_2} \xrightarrow{u} P_{r_1} \oplus \tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_3} \xrightarrow{v} \tau_{\mathcal{D}}^{r_2-r_3} P_{r_1+r_3-r_2} \xrightarrow{w} P_{r_2}[1].$$

Representando os elementos do triângulo (u, v, w) acima utilizando a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{B}_{[0,n]} &\rightarrow \text{ind } \mathcal{D} \\ (i, j) &\mapsto \tau_{\mathcal{D}}^{-i} P_{n-j+i} \end{aligned}$$

e tomando

$$r_1 = n - j - k + i \qquad r_2 = n - \lambda - k + 2 \qquad r_3 = n - \lambda + 2$$

obtemos o triângulo

$$\varphi(0, k + \lambda - 2) \longrightarrow \varphi(k, \lambda + k - 2) \oplus \varphi(0, j - i + k) \longrightarrow \varphi(k, j - i + k) \longrightarrow \varphi(0, k + \lambda - 2)[1].$$

Como o transladado de Auslander-Reiten $\tau_{\mathcal{D}}$ é uma equivalência triangulada, aplicando $\tau_{\mathcal{D}}^{-(i-k)}$ no triângulo acima, obtemos o triângulo

$$\varphi(i - k, i - 2 + \lambda) \longrightarrow \varphi(i, i - 2 + \lambda) \oplus \varphi(i - k, j) \longrightarrow \varphi(i, j) \longrightarrow \varphi(i - k, i - 2 + \lambda)[1],$$

ou seja, $M \rightarrow B \rightarrow L \rightarrow M[1]$ é um triângulo de \mathcal{C} . Analogamente, podemos obter um triângulo de \mathcal{D} dado por

$$\varphi(i, j) \longrightarrow \varphi(i, i - k + n + 1) \oplus \varphi(i + \lambda, j) \longrightarrow \varphi(i + \lambda, i - k + n + 1) \longrightarrow \varphi(i, j)[1],$$

mas

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(i, i - k + n + 1)} &= \overline{\tau_{\mathcal{D}}^{-1} \varphi(i - 1, i - k + n)} \\ &= \overline{\tau_{\mathcal{D}}^{-1} \varphi(i - k, i - 2)[1]} \\ &= \tilde{\varphi}(i - k, i - 2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi(i + \lambda, i - k + n + 1)} &= \overline{\varphi(i - k + 1, i - 1 + \lambda)[1]} \\
&= \overline{\tau_{\mathcal{D}}^{-1}\varphi(i - k, i - 2 + \lambda)[1]} . \\
&= \tilde{\varphi}(i - k, i - 2 + \lambda)
\end{aligned}$$

Logo, temos um triângulo de \mathcal{C} dado por

$$\tilde{\varphi}(i, j) \longrightarrow \tilde{\varphi}(i - k, i - 2) \oplus \tilde{\varphi}(i + \lambda, j) \longrightarrow \tilde{\varphi}(i - k, i - 2 + \lambda) \longrightarrow \tilde{\varphi}(i, j)[1] ,$$

ou seja, $L \rightarrow B' \rightarrow M \rightarrow L[1]$ é um triângulo de \mathcal{C} .

□

Referências Bibliográficas

- [Alv14] E. R. Alvares. A course on derived categories. Em *Escola de Álgebra*, Maringá-PR, Brazil, july 2014.
- [ARS95] M. Auslander, I. Reiten e S. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1995.
- [ARS10] I. Assem, C. Reutenauer e D. Smith. Friezes. *Advances in Mathematics*, 225(6):3134–3165, 2010.
- [ASS06] I. Assem, D. Simson e A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Techniques of representation theory*. Cambridge University Press, 2006.
- [BFZ⁺05] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky et al. Cluster algebras III: Upper bounds and double bruhat cells. *Duke Mathematical Journal*, 126(1):1–52, 2005.
- [BM06] A. B. Buan e R. Marsh. Cluster-tilting theory. *Contemporary Mathematics*, 406:1, 2006.
- [BMR⁺06] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten e G. Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Advances in mathematics*, 204(2):572–618, 2006.
- [BMR08] A. B. Buan, R. Marsh e I. Reiten. Cluster mutation via quiver representations. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 83(1):143–178, 2008.
- [BMRDS14] V. Bazier-Matte, D. Racicot-Desloges e T. Sanchez. Friezes and continuant polynomials with parameters. *arXiv preprint arXiv:1404.0045*, Abril 2014.
- [CC73a] J.H. Conway e H.S.M. Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns. *The Mathematical Gazette*, 57(400):87–94, 1973.
- [CC73b] J.H. Conway e H.S.M. Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns (continued). *The Mathematical Gazette*, 57(401):175–183, 1973.
- [CC06] P. Caldero e F. Chapoton. Cluster algebras as hall algebras of quiver representations. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 81(3):595–616, 2006.
- [CCS06] P. Caldero, F. Chapoton e R. Schiffler. Quivers with relations arising from clusters (\mathbb{A}_n case). *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(3):1347–1364, 2006.
- [CK06] P. Caldero e B. Keller. From triangulated categories to cluster algebras II. Em *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, volume 39, páginas 983–1009. Elsevier, 2006.

- [CK08] P. Caldero e B. Keller. From triangulated categories to cluster algebras. *Inventiones Mathematicae*, 172(1):169–211, 2008.
- [CM06] C. Cibils e E. Marcos. Skew category, galois covering and smash product of a k -category. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(1):39–50, 2006.
- [Cox71] H. Coxeter. Frieze patterns. *Acta Arithmetica*, 18(1):297–310, 1971.
- [Dup10] G. Dupont. Quantized chebyshev polynomials and cluster characters with coefficients. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 31(4):501–532, 2010.
- [FZ02a] S. Fomin e A. Zelevinsky. Cluster algebras I: foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2):497–529, 2002.
- [FZ02b] S. Fomin e A. Zelevinsky. The laurent phenomenon. *Advances in Applied Mathematics*, 28(2):119–144, 2002.
- [FZ03] S. Fomin e A. Zelevinsky. Cluster algebras II: Finite type classification. *Inventiones Mathematicae*, 154(1):63–122, 2003.
- [FZ07] S. Fomin e A. Zelevinsky. Cluster algebras IV: coefficients. *Compositio Mathematica*, 143(01):112–164, 2007.
- [Gin06] V. Ginzburg. Calabi-yau algebras. *arXiv preprint math/0612139*, 2006.
- [GLS08] C. Geiss, B. Leclerc e J. Schröer. Preprojective algebras and cluster algebras. *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich*, páginas 253–283, 2008.
- [GSV03] M. Gekhtman, M. Shapiro e A. Vainshtein. Cluster algebras and poisson geometry. *Mosc. Math. J*, 3(3):899–934, 2003.
- [GSV+05] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein et al. Cluster algebras and weil-petersson forms. *Duke Mathematical Journal*, 127(2):291–311, 2005.
- [GSV07] M. Gekhtman, M. Shapiro e A. Vainshtein. On the properties of the exchange graph of a cluster algebra. *arXiv preprint math/0703151*, 2007.
- [Hap88] D. Happel. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*, volume 119. Cambridge University Press, 1988.
- [Har92] J. Harris. *Algebraic geometry: a first course*, volume 133. Springer, 1992.
- [Kel05] B. Keller. On triangulated orbit categories. *Documenta Mathematica*, 10:551–581, 2005.
- [Kel08] B. Keller. Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories. *arXiv preprint arXiv:0807.1960*, 2008.
- [Kra08] H. Krause. Localization theory for triangulated categories. *arXiv:0806.1324v2*, 2008.
- [Law72] C. L. Lawson. Transforming triangulations. *Discrete mathematics*, 3(4):365–372, 1972.

- [LS13] K. Lee e R. Schiffler. Positivity for cluster algebras. *arXiv:1306.2415v2*, Junho 2013.
- [Lus90] G. Lusztig. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. *Journal of the American Mathematical Society*, páginas 447–498, 1990.
- [Lus94] G. Lusztig. *Total positivity in reductive groups*. Springer, 1994.
- [Nee01] A. Neeman. *Triangulated categories*. Number 148 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2001.
- [Rei13] M. Reineke. Every projective variety is a quiver grassmannian. *Algebras and Representation Theory*, páginas 1–2, 2013.
- [Tor08] H. A. Torkildsen. Counting cluster-tilted algebras of type \mathbb{A}_n . *arXiv preprint arXiv:0801.3762*, 2008.
- [Ver96] J.-L. Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, 1996.

Índice Remissivo

- F -órbitas, 25
- Q -grasmaniano, 13
- c -friso, 31
 - associado à \mathcal{A}_c , 63
 - de ordem n , 34
 - periódico com período k , 36
- álgebra
 - c -conglomerada, 61
 - de caminhos, 5
 - básica, 5
 - de conglomerado, 21
 - com coeficientes, 22
- aljava, 1
 - com congelamento
 - do tipo (n, m) , 4
 - de uma k -álgebra de dimensão finita, 6
 - acíclica, 2
 - com congelamento
 - de uma triangulação, 16
 - conexa, 2
 - de Auslander-Reiten
 - de $\text{mod}A$, 7
 - finita, 2
 - localmente finita, 2
 - tipo Dynkin, 3
- aplicação
 - de Caldero-Chapoton, 27
- caminho, 1
 - trivial, 2
- categoria
 - conglomerada, 25
 - de homotopia, 10
 - derivada, 11
 - triangulada, 9
- ciclo, 2
- classe de mutação, 4
- cohomologia, 11
- complexo, 10
 - concentrado em i , 10
 - homotópico a zero, 10
 - limitado, 10
- componente conexa, 2
- comprimento
 - de um caminho, 1
- cone, 10
- conglomerado, 21
 - inicial, 21
- conjunto
 - n -admissível, 33
 - conglomerado-inclinante, 26
- diagonal, 14
- diagrama Dynkin, 2
- equivalência
 - triangulada, 10
- espaço
 - projetivo, 13
- forma de Euler, 8
- funtor
 - suspensão, 8
 - triangulado, 10
- grafo subjacente, 3
- grasmaniano, 13
- grupo
 - de Grothendieck, 8
- ideal
 - admissível, 5
- lema
 - de transvecção, 35
- linha
 - de um c -friso, 31
- morfismo
 - de aljavas, 2
 - de representações, 6
 - de aljava com congelamento, 4
 - de complexos, 10
 - de triângulos, 9
- mutação, 3

- de aljava, 3
- de conglomerado-inclinante, 27
- de semente, 21
 - para álgebra c -conglomerada, 59
- de triangulação, 14
- objeto
 - conglomerado-inclinante, 26
 - rígido, 26
- parte principal de Q , 22
- passeio, 2
- polinômio
 - c -recorrente, 31
 - de Laurent, 52
- predecessor, 2
 - imediatos, 2
- quasi-isomorfismo, 11
- regra
 - $-c$ -modular, 32
 - $-c$ -modular generalizada, 41
- relação de permuta, 21
- representação
 - de uma aljava, 6
 - de dimensão finita, 6
- rotação, 14
- secção
 - de um c -friso, 39
 - diagonal, 40
- semente, 21
 - inicial, 21
- subaljava, 1
 - plena, 1
- sucessor, 2
 - imediatos, 2
- triangulação, 14
- triângulo distinguido, 9
- triângulo em \mathcal{C} , 8
- variedade
 - projetiva, 13
- variáveis de conglomerado, 21
- variável
 - congelada, 59
- vetor dimensão, 8
- vizinho, 2
- vértice
 - congelado, 4
- final, 1
- inicial, 1