Módulos de Wakimoto Imaginários generalizados

André Silva de Oliveira

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Doutorado em Matemática
Orientador: Prof. Dr. Vyacheslav Futorny
Co-orientador: Prof. Dr. Alexandre Grichkov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES - PROEX - Edital 0487 - Processo 1634752
CAPES - MATH AMSUD - Processo 88887.137868/2017-00
CNPq - Processo 141388/2019-6

São Paulo, 12 de novembro de 2023

Módulos de Wakimoto Imaginários generalizados

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 14/08/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Kostiantyn Iusenko - IME - USP
- Prof. Dr. Luis Enrique Ramirez - UFABC
- Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva - UFRN
- Prof. Dr. Viktor Bekkert - UFMG

Agradecimentos

Dedico esta tese de doutorado com todo meu amor e gratidão aos meus pais, Gonçalo (Piauí) e Maria das Dores (Dora), meus maiores e melhores orientadores na vida. Espero poder retribuir todo amor, apoio e esforço oferecido por vocês em vários aspectos da minha vida.

Também agradeço o meu orientador Professor Doutor Vyacheslav Futorny pela disponibilidade, pela paciência, pelo conhecimento compartilhado sobre a matemática e a vida, e sobretudo pela amizade.

O presente trabalho foi realizado com apoio: da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por meio do Programa de Excelência Acadêmica (PROEX), Edital 0487, Processo 1634752; da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por meio do Programa MATH AMSUD (Cooperação em Pesquisa-Desenvolvimento em Matemática França-América do Sul), Processo 88887.137868/2017-00; e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Processo 141388/2019-6.

Resumo

OLIVEIRA, A. S. **Módulos de Wakimoto Imaginários generalizados**. 2023. 245 p. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2023.

O objetivo principal deste trabalho é dar continuidade aos estudos e investigação sobre os módulos de Wakimoto Intermediários introduzidos por B. Cox e V. Futorny em [CF04] e os módulos de Verma Imaginários generalizados. Os módulos de Wakimoto Intermediários $W_{n,r}(\lambda, \gamma)$ são representações da álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$, com um inteiro positivo fixo n (que dependem de alguns parâmetros: $0 \leq r \leq n$, γ e λ) e genericamente são isomorfos a módulos tipo Verma. Tais módulos foram definidos a partir de uma classe de subálgebras de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_r$. No Capítulo 3 concluímos que é necessário um ajuste em tais subálgebras de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_r$ consideradas em [CF04]. No Capítulo 4 construímos novos módulos de Wakimoto Intermediários que não foram considerados em [CF04] utilizando uma realização geométrica descrita em [FKS19]. No Teorema 4.7.1 provamos a existência de um $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-módulo sobre uma subálgebra parabólica natural específica e no Teorema 4.7.2 descrevemos explicitamente a $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-realização geométrica para tal subálgebra parabólica natural. No Teorema 4.7.3 provamos que de fato esse novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-módulo tem as propriedades equivalentes às propriedades de um módulo de Wakimoto Intermediário. Chamamos esse novo módulo de Wakimoto Imaginário generalizado. Na Conjectura 4.8.1 conjecturamos uma generalização de tal construção. Também descrevemos um critério de irredutibilidade desses novos módulos segundo [GKM+23]. No Capítulo 5 apresentamos uma categoria $\mathcal{O}_{red,im}$ cujos objetos incluem os módulos de Verma Imaginários Reduzidos e mostramos que essa categoria é uma categoria semissimples onde os módulos de Verma Imaginários Reduzidos são os seus objetos simples.

Palavras-chave: Álgebras de Kac-Moody afim, Módulos de Wakimoto Intermediários, Módulos de Verma Imaginários Generalizados.

Abstract

OLIVEIRA, A. S. **Generalized Imaginary Wakimoto modules**. 2023. 245 p. Doctoral Dissertation - Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, Brazil, 2023.

The main objective of this work is to continue studies and research on Intermediate Wakimoto modules introduced by B. Cox and V. Futorny in [CF04] and the generalized Imaginary Verma modules. The Intermediate Wakimoto modules $W_{n,r}(\lambda, \gamma)$ are representations of the affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$, with a fixed positive integer n (which depend on some parameters: $0 \leq r \leq n$, γ and λ) and are generically isomorphic to Verma type modules. Such modules were defined from a class of Borel subalgebras $\widehat{\mathfrak{b}}_r$. In Chapter 3 we concluded that an adjustment is necessary in such subalgebras of Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_r$ considered in [CF04]. In Chapter 4 we built new Intermediate Wakimoto modules that were not considered in [CF04] using a geometric realization described in [FKS19]. In Theorem 4.7.1 we prove the existence of a $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-module over a specific natural parabolic subalgebra and in Theorem 4.7.2 we explicitly describe the geometric $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-realization for such a natural parabolic subalgebra. In Theorem 4.7.3 we prove that indeed this new $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-module has properties equivalent to the properties of an Intermediate Wakimoto module. We call this new module the generalized Imaginary Wakimoto. In Conjecture 4.8.1 we conjecture a generalization of such a construction. We also describe an irreducibility criterion for these new modules according to [GKM+23]. In Chapter 5 we present a category $\mathcal{O}_{red,im}$ whose objects include the Reduced Imaginary Verma modules and we show that this category is a semisimple category where the Reduced Imaginary Verma modules are its simple objects.

Keywords: Affine Kac-Moody algebras, Intermediate Wakimoto modules, Generalized Imaginary Verma modules.

Sumário

Introdução

A classificação das **álgebras de Lie semissimples** complexas $\mathfrak{g}$ com dimensão finita é atribuída a Wilhelm Killing ($1847 - 1923$) (em uma série de artigos publicados entre 1888 e 1890) e Élie Cartan ($1869 - 1951$) (que também classificou as álgebras de Lie semissimples reais [Car94]), cujos cálculos foram significamente simplificados em 1947 por Eugene Dynkin ($1924 - 2014$) [Dyn47]. Essas álgebras são completamente classificadas pelos seus **sistemas de raízes**, que por sua vez são classificados pelos **diagramas de Dynkin**. As álgebras de Lie **simples** são classificadas por diagramas de Dynkin **conexos** (ou sistemas de raízes **irredutíveis**), enquanto as álgebras de Lie semissimples correspondem à diagramas de Dynkin não necessariamente conexos, onde cada componente do diagrama corresponde a um somando da decomposição da álgebra de Lie semissimples em álgebras de Lie simples. De acordo com E. Dynkin uma álgebra de Lie simples complexa de dimensão finita é uma das **álgebras de Lie clássicas** (A_l ($l \geq 1$), B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 3$) e D_l ($l \geq 4$)) ou é uma das **álgebras de Lie excepcionais** (E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2). A partir de um sistema de raízes irredutível podemos construir uma matriz quadrada chamada **matriz de Cartan** $A = (a_{ij})$ que satisfaz quatro condições: (1) $a_{ii} = 2$ para todo i; (2) a matriz A possui entradas que são inteiros negativos ou nulos, para $i \neq j$; (3) $a_{ij} = 0$ se, e somente se, $a_{ji} = 0$, para todos i, j, com $i \neq j$; (4) a matriz A é positiva definida ($\det(A) > 0$). Dessa forma, as matrizes de Cartan parametrizam as álgebras de Lie simples complexas de dimensão finita.

Em 1967, Victor Kac ($1943-$) [Kac67, Kac68a, Kac68b] e Robert Moody ($1941-$) [Moo67, Moo68, Moo69], independente e simultaneamente, generalizaram as álgebras de Lie semissimples complexas $\mathfrak{g}$ de dimensão finita a uma nova classe de álgebras de Lie, conhecidas hoje como **álgebras de Kac-Moody**. Eles definiram uma **matriz de Cartan generalizada** relaxando a condição (4) de uma matriz de Cartan. Um caso particular, quando a matriz A é positiva semi-definida (isto é, $\det(A) = 0$, com menores principais próprios positivos), correspondem às **álgebras de Kac-Moody afim** $\widehat{\mathfrak{g}}$, que possuem dimensão infinita. As álgebras de Kac-Moody tem muitas aplicações em teoria de campos quânticos, em análise combinatória, em teoria dos grupos, dentre outras. As álgebras de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}$ são as mais estudadas dentre as álgebras de Kac-Moody com dimensão infinita e uma das razões pela sua popularidade é a existência de realizações concretas destas álgebras. Informalmente, álgebras de Kac-Moody se comportam como álgebras de Lie semissimples de dimensão finita. Em particular, elas possuem uma subálgebra de Cartan, um sistema de raízes, um grupo de Weyl e uma decomposição triangular.

No Capítulo 1, apresentamos as álgebras de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}$ e as álgebras de Weyl com infinitos geradores $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$. O estudo dessas álgebras de Lie é imprescindível para o entendimento dos capítulos seguintes. Na Seção 1.2 a partir de $\mathfrak{g}$ e uma forma bilinear simétrica $\mathfrak{g}$-invariante κ em $\mathfrak{g}$ definimos a **álgebra de Kac-Moody afim não-torcida** $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa = \mathfrak{g}((t)) \oplus \mathbb{C}c$ e a **álgebra de Kac-Moody afim não-torcida estendida** $\widetilde{\mathfrak{g}}_\kappa = \mathfrak{g}((t)) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, onde $\mathfrak{g}((t)) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$. Definimos o **conjunto de raízes** $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}} \cup \widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ e alguns subconjuntos de $\widehat{\Delta}$ (uma **partição fechada**, um **subconjunto parabólico** e uma **quase partição**) importantes para a definição de subálgebras de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$ e subálgebras parabólicas $\widehat{\mathfrak{p}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$. Em particular, se $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ é uma subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ contendo uma subálgebra de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ fixa, defina

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = \Big(\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus (\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{u}) \oplus \mathbb{C}c\ .$$

Para qualquer subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$, definida por meio de uma partição fechada de $\widehat{\Delta}$, existe uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\widehat{\mathfrak{b}}$ é conjugada à $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ (para mais detalhes veja [Fut97]). Também apresentamos a **subálgebra de Borel canônica** $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}$ e a **subálgebra de Borel natural** $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$. Na Seção 1.3 denotamos a categoria dos $\mathfrak{g}$-módulos por $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ e a categoria dos $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos por $\mathcal{M}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$. A categoria dos $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos suaves nos quais o elemento central c age como identidade é denotada por $\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ e o $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo induzido $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{st}})} E$, chamado de **módulo de Verma generalizado** induzido de E, onde E é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{st}}$-módulo, é um objeto dessa categoria. Na Seção 1.4 são definidas as álgebras de Weyl com infinitos geradores $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$, onde V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com dimensão finita. Também definimos um completamento topológico $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}$ de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$ adequado para realizações de campos livres de módulos de Verma Imaginários generalizados de acordo com [FKS19], que serão utilizadas no Capítulo 4. Finalizando o Capítulo 1, na Seção 1.5 definimos a categoria dos $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos suaves denotada por $\mathcal{E}(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)})$.

No Capítulo 2 apresentamos as **álgebras de vertex** $\mathcal{V}$, visto que o conhecimento dessa teoria é muito importante para qualquer pesquisa na teoria de representações das álgebras de Lie de dimensão infinita (por exemplo, as álgebras de Kac-Moody afim), principalmente no estudo das realizações de campos livres e dos módulos de Wakimoto. Os **operadores de vertex** apareceram na **teoria das cordas** como operadores locais que descrevem a propagação dos estados das cordas. Análogos matemáticos destes operadores foram descobertos na teoria de representação das álgebras de Kac-Moody afim nos trabalhos de James Lepowsky (1944−) - Robert Lee Wilson [LW78] e Igor Frenkel (1952−) - Victor Kac [FK80]. Em 1984, Alexander Belavin (1942−), Alexander Polyakov (1945−) e Alexander Zamolodchikov (1952−) [BPZ84] iniciaram o estudo da **teoria de campos conformais 2-dimensional** (*two-dimensional conformal field theory* - CFT). Em 1986, Richard Borcherds (1959−) definiu uma **álgebra de vertex** [Bor86] motivado, em particular, pela construção de uma álgebra de Lie de dimensão infinita devida a Igor Frenkel. R. Borcherds formulou a noção de uma álgebra de vertex axiomatizando as relações entre a estrutura dos operadores de vertex, produzindo uma estrutura algébrica que permitiu construir novas álgebras de Lie seguindo o método de I. Frenkel. Em 1988, Igor Frenkel, James Lepowsky e Arne Meurman (1956−) [FLM88] construíram a **álgebra de vertex monstro** (*monster vertex algebra* ou *moonshine module*), a qual é uma álgebra de vertex que fornece uma representação para o **grupo monstro** (*monster group*). Dessa forma, Frenkel-Lepowsky-Meurman introduziram a noção de uma **álgebra de operadores de vertex** (*vertex operator algebra* - VOA), como uma modificação da noção de álgebra de vertex introduzida por R. Borcherds, observando que muitas das álgebras de vertex que aparecem na "natureza" carregam uma ação da **álgebra de Virasoro** e satisfazem a propriedade de serem limitadas inferiormente por um operador energia. Motivados por essa observação, adicionaram a ação da álgebra de Virasoro e a propriedade de ser limitada inferiormente, como axiomas.

Nas Seções 2.1 e 2.2 apresentamos algumas definições importantes sobre as álgebras de vertex, como, por exemplo, a **função delta formal** $\delta(z-w)$, que desempenha um papel importante nessa teoria, e a definição de um módulo sobre uma álgebra de vertex. Na Seção 2.3 introduzimos uma construção funtorial, apresentada por Yongchang Zhu em [Zhu96], que associa uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada $\mathcal{V}$ com uma **álgebra associativa** $A(\mathcal{V})$ conhecida como **álgebra de Zhu**. Na Seção 2.4 dada uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada $\mathcal{V}$ definimos a categoria dos $\mathcal{V}$-módulos de energia positiva $\mathcal{E}_+(\mathcal{V})$. No restante do capítulo construímos álgebras de vertex associadas com algumas álgebras de Lie de dimensão infinita: na Seção 2.5 definimos uma álgebra de vertex associada a uma álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ chamada de **álgebra de vertex afim universal** e denotada por $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$; na Seção 2.6 a partir de uma álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$ com infinitos geradores definimos a **álgebra de vertex de Weyl**, denotada por $\mathcal{M}_V$; na Seção 2.7 a partir de uma álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}$ de dimensão infinita definimos a **álgebra de vertex de Heisenberg** que também é conhecida como **Espaço de Fock**.

No Capítulo 3 na Seção 3.1 introduzimos os módulos do tipo Verma. Em sua tese de doutorado, Daya-Nand Verma (1933 – 2012) construiu os **módulos de Verma** [Ver68]. Eles são objetos bastante explorados na teoria de representação das álgebras de Lie. A teoria dos módulos de Verma sobre álgebras de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}$ foi desenvolvida, por exemplo, por Victor Kac em [Kac90], quando estes são realizados como módulos induzidos a partir da subálgebra de Borel canônica $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}$ sendo chamados de **módulos de Verma clássicos**. Os módulos induzidos por subálgebras de Borel não-canônicas de $\widehat{\mathfrak{g}}$ são chamados de **módulos do tipo Verma**. Os módulos do tipo Verma são bem diferentes dos módulos de Verma clássicos. Em particular, eles possuem espaços de peso com dimensões finitas e infinitas. Os módulos induzidos a partir da subálgebra de Borel natural $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$ foram primeiramente introduzidos por Hans Plesner Jakobsen e Victor Kac em [JK85]. Eles também foram estudados por Vyacheslav Futorny (1961−) em [Fut94] sob o nome de **módulos de Verma Imaginários**. Outras importantes referências que abordam os módulos do tipo Verma são [FS93] e [Cox94].

Módulos de Wakimoto são representações de álgebras de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}$ em **Espaços de Fock** - que são módulos sobre álgebras de Heisenberg de dimensão infinita. Eles foram introduzidos em 1986 por Minoru Wakimoto (1942−) no caso $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ [Wak86] (realização do tipo bóson em um Espaço de Fock) e em 1988 por Boris Feigin (1953−) e Edward Frenkel (1968−) no caso geral [FF88] (por uma caracterização homológica). Os módulos de Wakimoto tem uma interpretação geométrica como certos feixes em uma variedade bandeira semi-infinita descritos por Boris Feigin e Edward Frenkel em [FF90a]. Eles também podem ser interpretados como torções infinitas de módulos de Verma clássicos e genericamente são isomorfos aos módulos de Verma clássicos. Existem muitos fatos interessantes sobre esses módulos e ainda não entendemos esses objetos completamente.

Na Seção 3.2 apresentamos os **módulos de Wakimoto Intermediários** que foram construídos por Ben Cox (1962 − 2019) e Vyacheslav Futorny em [CF04] e [CF06]. Podemos considerar dois casos extremos de subálgebras de Borel nas álgebras de Kac-Moody afim: canônica $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}$ e natural $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$. É possível associar à cada subálgebra de Borel intermediária uma realização do tipo bóson por rearranjo dos operadores aniquilação e criação, conforme feito nas realizações de campos livres. Em [CF04] foram consideradas as álgebras de Kac-Moody afim não-torcidas $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$, com $n \in \mathbb{N}$, e foram construídas séries de realizações do tipo bóson que dependem de um parâmetro $0 \leq r \leq n$. Esse parâmetro r é utilizado para definir uma subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_r$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$. Se $r = n$, temos $\widehat{\mathfrak{b}}_n = \widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}$, e a realização coincide com a construção dos **módulos de Wakimoto**. Por outro lado, quando $r = 0$, temos $\widehat{\mathfrak{b}}_0 = \widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$, e a representação obtida fornece uma realização no Espaço de Fock dos **módulos de Verma Imaginários** descrita em [Cox05]. Tais realizações são chamadas de **módulos de Wakimoto Intermediários**. Assim, em [CF04] o problema de encontrar a realização do tipo bóson adequada para uma classe de módulos do tipo Verma sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$ foi resolvido. Usando as realizações dos módulos de Wakimoto Intermediários, mostra-se que genericamente, eles são isomorfos a módulos do tipo Verma - sendo uma analogia com a relação entre módulos de Verma clássicos e módulos de Wakimoto.

Da Seção 3.3 à Seção 3.6, apresentamos casos particulares de módulos de Wakimoto Intermediários, considerando as álgebras de Kac-Moody afim não-torcidas $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ e $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$. Em [CF04] as fórmulas aparecem condensadas utilizando a linguagem das distribuições formais. Para fazer comparações e analisá-las com mais detalhes, o autor desta tese apresenta ao longo do Capítulo 3 fórmulas mais explícitas, obtidas após cuidadoso trabalho do mesmo. Essas fórmulas explícitas não aparecem em [CF04], porém são necessárias para um aprofundamento no estudo dos módulos de Wakimoto Intermediários e são essenciais para o desenvolvimento desta tese. Nas primeiras investigações e estudos sobre esses módulos, o autor desta tese observou que de fato a subálgebra que aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$ não é a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_r$, com $0 \leq r < n$, mas a subálgebra torcida $\overline{\mathfrak{b}}_r^w$ por um elemento w do grupo de Weyl $\mathfrak{S}_{n+1}$ da álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$. Analisando alguns casos dos parâmetros n e r foi possível encontrar o elemento correspondente w. Dados os parâmetros n e r, com $0 \leq r < n$, o elemento correspondente w do grupo de Weyl $\mathfrak{S}_{n+1}$ para definir $\overline{\mathfrak{b}}_r^w$ é do tipo $w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)(3\ \ r-1)(4\ \ r-2)\cdots(u\ \ r-u+2)$, onde cada transposição que aparece em w é do tipo $(i\ j)$, com $i \leq j$, somente transposições disjuntas aparecem no produto e u é o maior inteiro tal que $1 \leq u \leq \frac{r}{2}+1$. Destacamos também que na Seção 3.5 consideramos o módulo de Wakimoto Intermediário $W_{2,1}^w(\lambda,\gamma)$ torcido pelo elemento $w = s_1 \in \mathfrak{S}_3$ e apresentamos torções desse módulo pelos outros elementos de $\mathfrak{S}_3$. Enfatizamos que em [CF04] essa abordagem não foi explorada e o que apresentamos na seção é um passo inicial nessa direção.

Para finalizar o Capítulo 3, na Seção 3.7 retomamos a subálgebra de Borel (definida a partir de uma partição fechada)

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2') = \Big((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$, que não foi utilizada na construção dos módulos de Wakimoto Intermediários em [CF04]. Nessa seção apontamos alguns comentários e observações iniciais sobre esse caso particular.

No Capítulo 4 o principal objetivo é construir um novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário relacionado a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2')$ que será chamado de **módulo de Wakimoto Imaginário generalizado**. Na Seção 4.1 apresentamos uma realização geométrica construída em [FKS19], que será utilizada para a construção do novo módulo de Wakimoto Intermediário, visto que essa realização geométrica está intimamente relacionada com os módulos de Verma Imaginários generalizados. Na Seção 4.2 definimos os módulos de Verma generalizados para $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C})$ e apresentamos a realização geométrica para esse caso, para uma subálgebra parabólica específica, que está presente em [FKS19]. Da Seção 4.4 à Seção 4.6 analisamos alguns casos particulares para melhor entender a conexão entre os módulos de Wakimoto Intermediários de [CF04] e a realização geométrica de [FKS19].

Na Seção 4.7 construímos um novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário $W_{3,*}(\lambda,\gamma)$. No

Teorema 4.7.1 consideramos

$$V = W_{1,1}(\lambda,\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} W_{1,1}(\lambda',\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] = \mathbb{C}[x_{11,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] \ ,$$

e a subálgebra parabólica natural $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\text{nat}}$, onde $\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} \cong (\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}) \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})) + \widehat{\mathfrak{h}}$, e mostramos que (V,σ) é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo, descrevendo $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$ explicitamente. No Teorema 4.7.2 considerando a parabólica natural $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\text{nat}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ contendo a subálgebra de Borel natural $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}$, tal que $\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}$ é gerada por $\{E_{12,m}; E_{21,m}; h_{1,m}; E_{34,m}; E_{43,m}; h_{3,m}, h_{2,m}, c \mid m \in \mathbb{Z}\}$ e $\widehat{\mathfrak{u}}_{\text{nat}}$ é gerado por $\{E_{23,m}; E_{13,m}; E_{24,m}; E_{14,m} \ |m \in \mathbb{Z}\}$, descrevemos explicitamente a realização geométrica π de $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ em $\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}$. No Teorema 4.7.3 mostramos que o $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$-módulo $W^w_{3,*}(\sigma,\pi)$ construído a partir do Teorema 4.7.1 e do Teorema 4.7.2 é um módulo de Wakimoto Intermediário associado com a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})^w$. Para finalizar o Capítulo 4, na Seção 4.8 apresentamos a Conjectura 4.8.1 com uma generalização da construção abordada na seção anterior, e na Seção 4.9 utilizando [GKM+23] descrevemos um critério de irredutibilidade para os módulos de Wakimoto Imaginários generalizados.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos resultados de um trabalho que está em andamento [AFdO23] entre o autor desta tese, com seu orientador Vyacheslav Futorny e o colaborador Juan Camilo Arias. Investigamos propriedades relacionadas aos módulos de Verma Imaginários Reduzidos e uma categoria $\mathcal{O}_{red,im}$. Na Seção 5.1 definimos os **$\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos de Verma Imaginários Reduzidos** seguindo [Fut94] e na Seção 5.2 definimos a categoria $\mathcal{O}_{red,im}$, mostrando que os $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos de Verma Imaginários Reduzidos irredutíveis $\tilde{M}(\lambda)$, com $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$, são objetos dessa categoria. Por fim, na Seção 5.3 verificamos no Teorema 5.3.1 que não existem extensões não triviais entre os módulos de Verma Imaginários Reduzidos irredutíveis e no Teorema 5.3.2 provamos que para um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo simples M que é um objeto na categoria $\mathcal{O}_{red,im}$ temos que $M \cong \tilde{M}(\lambda)$ para algum $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$. Além disso, na Proposição 5.3.1 verificamos que se M é um objeto arbitrário em $\mathcal{O}_{red,im}$ então $M \cong \bigoplus_{\lambda_i \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}} \tilde{M}(\lambda_i)$, para alguns $\lambda_i's$, e a categoria $\mathcal{O}_{red,im}$ é fechada sob subquocientes e somas diretas.

No Apêndice A abordamos mais detalhes sobre as álgebras de Kac-Moody e indicamos [Kac90] e [MP95] para maiores detalhes. Destacamos que na Seção A.3 apresentamos uma classificação de subálgebras parabólicas $\mathfrak{p}$ em álgebras de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ de acordo com [Bou68], incluindo uma descrição mais detalhada dos casos $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, utilizadas no Capítulo 3.

No Apêndice B apresentamos ideias introdutórias sobre **realizações de campos livres**. Baseamos as ideias contidas no apêndice principalmente em [FBZ04] e [Fre07]. Uma realização de campos livres pode ser construída de um mergulho de uma álgebra de Lie em uma álgebra de Weyl. A ideia de representar ou realizar algo em matemática é basicamente descrever elementos abstratos de uma forma mais concreta. Observando alguns exemplos de realizações de campos livres podemos perceber que a ideia envolvida nessa construção é basicamente construir um homomorfismo de uma álgebra de Lie (abstrato) em um produto tensorial de álgebras de vertex, que como sabemos é uma álgebra de vertex (concreto). Sendo assim, esse homomorfismo envia os elementos de uma álgebra de Lie em campos de uma álgebra de vertex. Abordamos na Seção B.2 as realizações de campos livres no caso finito e na Seção B.3 as realizações de campos livres no caso afim.

Capítulo 1

Representações de álgebras de Kac-Moody afim

1.1 Alguns polinômios e séries

Vamos denotar por $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{N}$, o corpo dos números complexos, o corpo dos números reais, o anel dos inteiros, o conjunto dos inteiros não-negativos (ou conjunto dos naturais incluindo 0) e o conjunto dos inteiros positivos (ou conjunto dos naturais), respectivamente.

O anel dos **polinômios** na variável z com coeficientes em $\mathbb{C}$ é denotado por $\mathbb{C}[z]$ e seus elementos têm a forma $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, com $a_i \in \mathbb{C}$. O anel das **séries formais** na variável z com coeficientes em $\mathbb{C}$ é denotado por $\mathbb{C}[\![z]\!]$ e seus elementos têm a forma $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, com $a_i \in \mathbb{C}$. Logo, $\mathbb{C}[z] \hookrightarrow \mathbb{C}[\![z]\!]$, ou seja, $\mathbb{C}[z] \subset \mathbb{C}[\![z]\!]$.

O anel dos **polinômios de Laurent** na variável z com coeficientes em $\mathbb{C}$ é denotado por $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ ou $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$, e seus elementos são da forma $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i z^i$, onde $a_i \in \mathbb{C}$ e $a_i = 0$, exceto para uma quantidade finita de índices i. O espaço vetorial das **séries de Laurent** (também chamadas de **séries de potências formais** ou **distribuições formais**) na variável z com coeficientes em $\mathbb{C}$ é denotado por $\mathbb{C}[\![z, z^{-1}]\!]$ e seus elementos são da forma $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i z^i$, com $a_i \in \mathbb{C}$. Logo, $\mathbb{C}[z^{\pm 1}] \hookrightarrow \mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$. Temos também que o anel dos polinômios de Laurent $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ é uma extensão do anel dos polinômios $\mathbb{C}[z]$ obtida pela "inversão de z". Mais rigorosamente, é a localização do anel dos polinômios em relação ao conjunto multiplicativo que consiste das potências não-negativas de z.

Todas essas definições podem ser adaptadas para o caso de múltiplas variáveis indutivamente. Por exemplo, o anel das séries formais nas variáveis $z_1, \ldots, z_n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ é definido indutivamente por $\mathbb{C}[\![z_1, \ldots, z_n]\!] = \mathbb{C}[\![z_1, \ldots, z_{n-1}]\!][\![z_n]\!]$. De maneira mais geral, também podemos utilizar na definição uma $\mathbb{C}$-álgebra R, ao invés do corpo $\mathbb{C}$.

Se $P(z_1, \ldots, z_n) \in R[\![z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]\!]$ e $Q(w_1, \ldots, w_m) \in R[\![w_1^{\pm 1}, \ldots, w_m^{\pm 1}]\!]$, então o produto $P \cdot Q$ é um elemento bem definido de $R[\![z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}, w_1^{\pm 1}, \ldots, w_m^{\pm 1}]\!]$. Em geral, um produto de dois elementos de $R[\![z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]\!]$ não faz sentido, pois os coeficientes individuais do produto entre eles são somas infinitas de coeficientes. Justamente por isso que $R[\![z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]\!]$ é um espaço vetorial, mas não é um anel.

O anel das **séries formais de Laurent** na variável z com coeficientes em R é denotado por $R(\!(z)\!)$ e seus elementos são da forma $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i$, onde $a_i \in R$ e existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a_i = 0$, $\forall i \leq N$. Em outras palavras, a série é finita na "direção negativa". Notemos que $R(\!(z)\!)$ é uma álgebra, e se R é um corpo, então $R(\!(z)\!)$ também é um corpo.

1.2 Álgebras de Kac-Moody afim

Nessa seção introduziremos as definições e notações utilizadas nesta tese sobre as álgebras de Kac-Moody afim. Reunimos mais detalhes sobre a vasta teoria das álgebras de Kac-Moody no Apêndice A. Baseamos as definições aqui apresentadas principalmente em [Kac90].

Ao longo desse capítulo denotamos por $\mathfrak{g}$ uma **álgebra de Lie semissimples** complexa com dimensão finita e $\mathfrak{h}$ uma **subálgebra de Cartan** de $\mathfrak{g}$. Denotamos por $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ o **sistema de raízes** de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$, por Δ_+ o sistema de raízes positivas em Δ e por $\Pi \subset \Delta_+$ o conjunto de raízes simples.

Para $\alpha \in \Delta_+$, seja $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ a corraiz correspondente e sejam e_α e f_α bases dos subespaços de raízes $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, respectivamente, que satisfazem a seguinte relação $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$. Observamos que $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \ , \forall h \in \mathfrak{h}\}$.

Definimos

$$Q = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{Z}\alpha \quad \text{e} \quad Q_+ = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{N}_0 \alpha \quad ,$$

$$P = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{Z}\omega_\alpha \quad \text{e} \quad P_+ = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{N}_0 \omega_\alpha \quad ,$$

onde $\omega_\alpha \in \mathfrak{h}^*$, com $\alpha \in \Pi$, é o peso fundamental determinado por $\omega_\alpha(h_\gamma) = \delta_{\alpha,\gamma}$, para todos $\gamma \in \Pi$, ou seja, os pesos fundamentais são elementos que pertencem a $\mathfrak{h}^*$ que formam a base dual com relação ao conjunto de corraízes $\{h_\gamma \mid \gamma \in \Pi\}$. Chamamos Q de reticulado de raízes e P de reticulado de pesos.

Além disso, definimos o vetor de Weyl $\rho \in \mathfrak{h}^*$ por $\rho = \dfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$.

Associamos ao sistema de raízes positivas Δ_+ as subálgebras de Lie nilpotentes

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad ,$$

e as subálgebras de Lie solúveis

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}}$$

de $\mathfrak{g}$. As subálgebras de Lie $\mathfrak{b}$ e $\overline{\mathfrak{b}}$ são a **subálgebra de Borel canônica** e a subálgebra de Borel canônica oposta de $\mathfrak{g}$, respectivamente.

Consideremos um subconjunto Σ de Π e denotemos por Δ_Σ o subsistema em $\mathfrak{h}^*$ gerado por Σ.

Uma **subálgebra parabólica** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra que contém uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$. Então a subálgebra parabólica canônica $\mathfrak{p}$ e a subálgebra parabólica canônica oposta $\overline{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{g}$ associadas à Σ são definidas por

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{l} \oplus \overline{\mathfrak{u}}$$

onde a subálgebra de Levi redutiva (ou fator de Levi redutivo) $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$ e $\overline{\mathfrak{p}}$ é definida por

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

e o nilradical $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{p}$ e o nilradical oposto $\overline{\mathfrak{u}}$ de $\overline{\mathfrak{p}}$ são dados por

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{u}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Denotaremos por $\Delta_+^{\mathfrak{u}} = \Delta_+ \setminus \Delta_\Sigma = \{\alpha \in \Delta_+ \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{u}\}$.

Notemos que a subálgebra de Borel canônica $\mathfrak{b}$ (subálgebra de Borel canônica oposta $\overline{\mathfrak{b}}$) está contida na subálgebra parabólica canônica $\mathfrak{p}$ (subálgebra parabólica canônica oposta $\overline{\mathfrak{p}}$).

Existe a seguinte decomposição de $\mathfrak{g}$ conhecida como **decomposição de Cartan** ([Kac90], [MP95]):

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Existe outra decomposição “triangular” de $\mathfrak{g}$ com respeito à subálgebra de Levi e os nilradicais:

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{u}} \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}.$$

Seja $\kappa_{\mathfrak{g}}$ a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{g}$ e $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$ a forma bilinear correspondente induzida em $\mathfrak{g}^*$.

Para $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ satisfazendo $(\alpha, \alpha)_{\mathfrak{g}} \neq 0$, definimos $s_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ por $s_\alpha(\gamma) = \gamma - 2\dfrac{(\alpha, \gamma)_{\mathfrak{g}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathfrak{g}}}\alpha$ para $\gamma \in \mathfrak{h}^*$, onde $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ é o grupo linear geral de $\mathfrak{h}^*$. Cada s_α, com $\alpha \in \Pi$, é uma reflexão, ou seja, $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ e $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. O subgrupo W de $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ gerado por essas reflexões, ou seja, $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$ é um grupo de Coxeter finito sendo chamado de **grupo de Weyl** de $\mathfrak{g}$.

Uma **representação** de $\mathfrak{g}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{gl}(V)$, onde V é um espaço vetorial complexo e $\mathfrak{gl}(V)$ é o grupo das transformações lineares de V em V munido com a estrutura de álgebra de Lie através do comutador.

A seguir enunciaremos um resultado bastante importante para os estudos da teoria de representações de álgebras de Lie: o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (também conhecido como **Teorema PBW**). Enunciaremos o teorema considerando álgebras de Lie de dimensão finita para simplificar, mas ele também é válido para álgebras de Lie de dimensão infinita.

Teorema 1.2.1 (Teorema PBW)**.** *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita com base ordenada $x_1, x_2, \ldots, x_k$, então os elementos da forma $i(x_1)^{n_1} i(x_2)^{n_2} \cdots i(x_k)^{n_k}$, onde cada n_s é um inteiro não-negativo, geram $U(\mathfrak{g})$ e são linearmente independentes. Em particular, os elementos $i(x_1)$, $i(x_2)$, $\ldots, i(x_k)$ são linearmente independentes, implicando que a aplicação $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ é injetiva.*

Demonstração. Veja [Hal15] (Seção 9.4). □

Em outras palavras, o Teorema PBW mostra a existência de uma base para $U(\mathfrak{g})$ a partir de uma base ordenada de $\mathfrak{g}$. Dessa forma, temos que

$$U(\mathfrak{g}) = U(\overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}) \cong U(\overline{\mathfrak{n}}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{n}). \tag{1.1}$$

Corolário 1.2.1. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, então existe uma injeção natural de $U(\mathfrak{h})$ em $U(\mathfrak{g})$ dada pelo mergulho de qualquer produto $x_1 x_2 \cdots x_k$ formado por elementos de $\mathfrak{h}$ no mesmo produto em $U(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. A inclusão de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ induz um homomorfismo de álgebras $\phi : U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$. Escolhemos uma base ordenada $x_1, \ldots, x_k$ de $\mathfrak{h}$ e a estendemos a uma base $x_1, \ldots, x_N$ de $\mathfrak{g}$. Pelo Teorema PBW para $\mathfrak{h}$ os elementos da forma $x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ formam uma base de $U(\mathfrak{h})$. Por outro lado, pelo Teorema PBW para $\mathfrak{g}$ os elementos correspondentes (por meio de ϕ) de $U(\mathfrak{g})$ são linearmente independentes. Portanto, ϕ é injetiva. □

Agora, vamos introduzir alguns conceitos sobre as álgebras de Kac-Moody afim que serão primordiais no desenvolvimento deste trabalho. É sabido que a classificação das álgebras de Lie semissimples complexas de dimensão finita $\mathfrak{g}$ foi dada por Wilhelm Killing de 1888 a 1890, e ele inclusive inventou as noções de subálgebra de Cartan e matriz de Cartan. Em 1894, Élie Cartan em sua tese de doutorado [Car94] reescreveu de maneira mais rigorosa o artigo de W. Killing. Estas álgebras foram parametrizadas por **matrizes de Cartan** $A = (a_{ij})$, que são matrizes quadradas que satisfazem quatro condições: (1) $a_{ii} = 2$ para todo i; (2) a matriz A possui entradas que são inteiros negativos ou nulos, para $i \neq j$; (3) $a_{ij} = 0$ se, e somente se, $a_{ji} = 0$, para todos i, j, com $i \neq j$; (4) a matriz A é positiva definida (dentre outras implicações, temos que $\det(A) > 0$).

Simultaneamente, em 1967, Victor Kac [Kac67, Kac68a, Kac68b] e Robert Moody [Moo67, Moo68, Moo69] generalizaram estas à uma nova classe de álgebras de Lie, conhecidas hoje como **álgebras de Kac-Moody**, através do relaxamento da condição da matriz de Cartan ser positiva definida. Um caso particular onde $\det(A) = 0$ e os menores principais próprios de A são positivos, correspondem às **álgebras de Kac-Moody afim**.

As álgebras de Kac-Moody afim são divididas em duas classes: não-torcidas e torcidas. Nesta tese vamos considerar as álgebras de Kac-Moody afim não-torcidas, que possuem uma realização natural.

Se temos uma álgebra de Lie complexa com dimensão finita $\mathfrak{g}$ e uma $\mathbb{C}$-álgebra associativa comutativa A, então $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} A$ é uma álgebra de Lie se usarmos o colchete $[g \otimes a, h \otimes b] = [g, h] \otimes ab$, para $g, h \in \mathfrak{g}$, $a, b \in A$.

O que é exatamente A? Geralmente pode-se pensar em $\mathbb{C}$-álgebras associativas comutativas como o conjunto de funções ou aplicações em alguma variedade M que denotamos por $\mathrm{Fun}(M)$. Notemos que $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Fun}(M) = \mathrm{Map}(M, \mathfrak{g})$ é simplesmente a álgebra de Lie das aplicações de M em $\mathfrak{g}$. Esta é naturalmente uma álgebra de Lie com respeito ao colchete de Lie ponto a ponto (ele coincide com o colchete de Lie dado pela fórmula acima).

Se escolhermos o círculo unitário como variedade M, então podemos analisar as aplicações do círculo unitário na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Temos basicamente dois tipos de aplicações: se desejamos utilizar algumas propriedades relacionadas à análise utilizamos aplicações suaves, porém se desejamos permanecer no domínio da álgebra utilizamos aplicações (polinomiais) algébricas. Consideramos o círculo unitário no plano complexo parametrizado pela coordenada t, de modo que no círculo $t = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo. As funções polinomiais neste círculo são os polinômios de Laurent $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Assim, obtemos a **álgebra de loop polinomial** $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \mathfrak{g}[t, t^{-1}]$, com colchete definido acima.

Existe muito mais estrutura e teoria sobre álgebras de loop estendidas centralmente. Essas extensões centrais são classificadas pelo segundo grupo de cohomologia $H^2(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}], \mathbb{C})$, e para uma álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, ele é 1-dimensional. Os cociclos correspondentes são dados pela fórmula $c(a \otimes f(t), b \otimes g(t)) = -\kappa(a,b)\mathrm{Res}_{t=0} f(t)dg(t)$, ou seja, eles dependem de uma forma bilinear simétrica $\mathfrak{g}$-invariante κ. Em (2.2) definimos o **resíduo** $\mathrm{Res}_{z=0}(\cdot)$ de uma distribuição formal que é o coeficiente que acompanha z^{-1}. Denotamos essa extensão central por $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa^{\mathrm{pol}}$. Para mais detalhes e informações sobre essas construções indicamos [FBZ04] e [Fre07].

Existe uma versão formal da construção exibida acima onde trocamos a álgebra $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ dos polinômios de Laurent pela álgebra $\mathbb{C}((t))$ das séries formais de Laurent. Consideremos a **álgebra de loop formal** $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t)) = \mathfrak{g}((t))$. Suas extensões centrais são parametrizadas pelo seu segundo grupo de cohomologia, o qual, com a condição de continuidade apropriada, é também um espaço vetorial 1-dimensional se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita. As extensões centrais são dadas por uma específica forma bilinear simétrica $\mathfrak{g}$-invariante κ.

Sejam $\mathfrak{g}$ e uma forma bilinear simétrica $\mathfrak{g}$-invariante κ em $\mathfrak{g}$. A **álgebra de Kac-Moody afim não-torcida** $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ associada à $\mathfrak{g}$ de nível κ é a extensão central 1-dimensional $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa = \mathfrak{g}((t)) \oplus \mathbb{C}c$, com relações de comutação dadas por

$$\begin{aligned} [a \otimes f(t), b \otimes g(t)] = [a,b] \otimes f(t)g(t) - \kappa(a,b)\mathrm{Res}_{t=0}(f(t)dg(t))c \ , \\ [a \otimes f(t), c] = 0 \ , \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde c é o elemento central de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$, $a, b \in \mathfrak{g}$ e $f(t), g(t) \in \mathbb{C}((t))$. Podemos simplificar a notação, trocando $f(t)$ e $g(t)$ por t^m e t^n, com $m, n \in \mathbb{Z}$. Observamos que $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa_1}$ e $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa_2}$ são isomorfas se $\kappa_2 = \lambda\kappa_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Por simplicidade também vamos denotar a álgebra de Kac-Moody afim não-torcida por $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Introduzindo a notação $a_n = a \otimes t^n$ para $a \in \mathfrak{g}$ e $n \in \mathbb{Z}$, as relações de comutação (1.2) podem ser reescritas na forma

$$[a_m, b_n] = [a,b]_{m+n} + m\kappa(a,b)\delta_{m,-n}c \ , \tag{1.3}$$

para $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathfrak{g}$.

Dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, introduzimos uma **subálgebra de Cartan afim** $\widehat{\mathfrak{h}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ por

$$\widehat{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c.$$

Para descrever a estrutura de raízes da álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ vamos definir a **álgebra de**

Kac-Moody afim não-torcida estendida $\widetilde{\mathfrak{g}}_\kappa$. Seja

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_\kappa = \mathfrak{g}(\!(t)\!) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \tag{1.4}$$

com estrutura de álgebra de Lie estendida de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ para $\widetilde{\mathfrak{g}}_\kappa$ pelas relações:

$$d(a \otimes f(t)) = [d, a \otimes f(t)] = a \otimes t\frac{d}{dt}f(t) \quad , \quad d(c) = [d, c] = 0 \tag{1.5}$$

para $a \in \mathfrak{g}$ e $f(t) \in \mathbb{C}(\!(t)\!)$. Podemos dizer que $d : \widehat{\mathfrak{g}}_\kappa \to \widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ é uma **derivação grau** tal que $d(a \otimes t^m) = m(a \otimes t^m)$ e $d(c) = 0$, para todos $a \in \mathfrak{g}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Notemos que esse elemento graduado $d \in \widetilde{\mathfrak{g}}_\kappa$ fornece para $\widetilde{\mathfrak{g}}_\kappa$ e para $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ uma estrutura de álgebra de Lie topológica $\mathbb{Z}$-graduada com graduação definida por $-d$, isto é, $\deg(c) = 0$, $\deg(d) = 0$ e $\deg(a_n) = -n$ para $a \in \mathfrak{g}$ e $n \in \mathbb{Z}$ (para mais detalhes veja [Kac90], Capítulo 7).

A correspondente **subálgebra de Cartan afim estendida** $\widetilde{\mathfrak{h}}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}_\kappa$ é definida por

$$\widetilde{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

Observamos que tanto $\widehat{\mathfrak{h}}$ quanto $\widetilde{\mathfrak{h}}$ possuem dimensão finita.

Identificamos o espaço dual de $\widetilde{\mathfrak{h}}$ com $(\ \widetilde{\mathfrak{h}}\ )^* \cong \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\delta$, onde

$$\Lambda_0|_{(\mathfrak{h}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}1)} = 0 \quad , \quad \Lambda_0(c) = 1 \quad , \quad \Lambda_0(d) = 0 \ ,$$
$$\delta|_{(\mathfrak{h}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}1)} = 0 \quad , \quad \delta(c) = 0 \quad , \quad \delta(d) = 1 \ .$$

O **conjunto de raízes** da álgebra de Kac-Moody afim não-torcida $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ é então naturalmente um subconjunto de $\mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\delta$ dado por

$$\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}} \,\dot{\cup}\, \widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}, \tag{1.6}$$

onde

$$\widehat{\Delta}^{\mathrm{re}} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad \widehat{\Delta}^{\mathrm{im}} = \{n\delta \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}. \tag{1.7}$$

Temos que o conjunto $\widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}$ é o conjunto das **raízes reais** e $\widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}$ é o conjunto das **raízes imaginárias**. Considerando o grupo de Weyl afim $\widehat{W}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$, uma raiz $\alpha \in \widehat{\Delta}$ é chamada de raiz real se existe $w \in \widehat{W}$ tal que $w(\alpha)$ é uma raiz simples. Uma raiz que não é real é imaginária. O conjunto das **raízes simples** em $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ é o conjunto $\widehat{\Pi} = \{\alpha_0\} \cup \Pi$, onde $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ são as raízes simples de $\mathfrak{g}$. A raiz δ é chamada de **raiz imaginária positiva indivisível** para $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ e podemos defini-la como $\delta = \sum_{i=0}^{n} a_i\alpha_i$, onde $n = \operatorname{rank}(A)$, A é a matriz de Cartan generalizada de ordem $n+1$ que define a álgebra de Kac-Moody afim não-torcida, a_i $(i = 0, \ldots, n)$ são os índices dos vértices correspondentes no diagrama de Dynkin $\Gamma(A)$ (também chamado de diagrama de Coxeter-Dynkin) e α_i $(i = 0, \ldots, n)$ são as raízes simples de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ (para mais detalhes veja [Kac90], Capítulos 4, 5 e 6).

Temos a seguinte decomposição $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}_+ \cup \widehat{\Delta}_-$ em raízes **positivas** e **negativas**, onde

$$\widehat{\Delta}_+ = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{-\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N}\} \cup \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{1.8}$$

e $\widehat{\Delta}_- = -\widehat{\Delta}_+$, ou seja,

$$\widehat{\Delta}_- = \{\alpha - n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\alpha - n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{-n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.9}$$

Também definimos

$$\widehat{\Delta}_+^{\mathrm{re}} = \widehat{\Delta}_+ \cap \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{-\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N}\}, \tag{1.10}$$

$$\widehat{\Delta}_-^{\mathrm{re}} = \widehat{\Delta}_- \cap \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}} = \{\alpha - n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\alpha - n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{N}_0\}, \tag{1.11}$$

$$\widehat{\Delta}_+^{\mathrm{im}} = \widehat{\Delta}_+ \cap \widehat{\Delta}^{\mathrm{im}} = \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}, \tag{1.12}$$

$$\widehat{\Delta}_-^{\mathrm{im}} = \widehat{\Delta}_- \cap \widehat{\Delta}^{\mathrm{im}} = \{-n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.13}$$

De acordo com [JK85], chamamos um subconjunto $\widehat{\Delta}_+ \subseteq \widehat{\Delta}$ de **conjunto de raízes positivas** (ou **partição fechada**) se ele satisfaz as seguintes condições:

(P1) Se $\alpha, \beta \in \widehat{\Delta}_+$ e $\alpha + \beta \in \widehat{\Delta}$, então $\alpha + \beta \in \widehat{\Delta}_+$ (aditivamente fechado).

(P2) Se $\alpha \in \widehat{\Delta}$, então $\alpha \in \widehat{\Delta}_+$ ou $-\alpha \in \widehat{\Delta}_+$, isto é, $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}_+ \cup -\widehat{\Delta}_+$.

(P3) Se $\alpha \in \widehat{\Delta}_+$, então $-\alpha \notin \widehat{\Delta}_+$, isto é, $\widehat{\Delta}_+ \cap -\widehat{\Delta}_+ = \emptyset$.

Um subconjunto satisfazendo as condições (P1) e (P2) é chamado de **subconjunto parabólico**.

De acordo com [FK18] dizemos que um subconjunto $P \subset \widehat{\Delta}$ é uma **quase partição** de $\widehat{\Delta}$ se as seguintes condições são satisfeitas:

(QP1) $P \cap (-P) = \emptyset$ e $P \cup (-P) = \widehat{\Delta}$.

(QP2) Seja $\widehat{\mathfrak{b}}_P$ uma álgebra de Lie de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ gerada por $\widehat{\mathfrak{h}}$ e pelos espaços de raízes $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\alpha}$ com $\alpha \in P$. Então para qualquer $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\alpha} \subset \widehat{\mathfrak{b}}_P$ segue $\alpha \in P$.

Note que uma partição fechada é uma quase partição. Em particular, para qualquer quase partição P, o subconjunto de raízes reais de P é fechado com respeito a soma de raízes e então $P \cap \widehat{\Delta}^{\rm re}$ é uma partição fechada de raízes reais. De fato, $(P \cap \widehat{\Delta}^{\rm re}) \cap (-P \cap \widehat{\Delta}^{\rm re}) = \emptyset$ e $(P \cap \widehat{\Delta}^{\rm re}) \cup (-P \cap \widehat{\Delta}^{\rm re}) = \widehat{\Delta}^{\rm re}$. Além disso, observamos que a condição (QP2) de uma quase partição, implica que $P \cap \widehat{\Delta}^{\rm re}$ é fechado com respeito a adição de raízes. Por outro lado, o subconjunto de raízes imaginárias de P não é necessariamente uma partição de $\widehat{\Delta}^{\rm im}$.

Dizemos que a subálgebra $\widehat{\mathfrak{b}} \subset \widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ é uma **subálgebra de Borel** se

$$\widehat{\mathfrak{b}} \;\; = \;\; \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \Big(\oplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+} \widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\alpha} \Big) \tag{1.14}$$

para alguma partição fechada $\widehat{\Delta}_+$ de $\widehat{\Delta}$, onde $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\alpha} = \{x \in \widehat{\mathfrak{g}}_\kappa \mid [h,x] = \alpha(h)x \ , \forall h \in \widehat{\mathfrak{h}}\}$.

Cada partição fechada de $\mathfrak{g}$ corresponde à escolha de raízes positivas em Δ e todas as partições são conjugadas pelo grupo de Weyl. Temos assim que quaisquer duas subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$ são conjugadas por um automorfismo de $\mathfrak{g}$. A situação é diferente no caso das álgebras de Lie com dimensão infinita.

Se $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ é uma álgebra de Kac-Moody afim, as partições são divididas em uma quantidade finita de órbitas do grupo de Weyl. Logo, quaisquer duas subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ podem não ser conjugadas por um automorfismo de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$. A classificação de todas as subálgebras de Borel no caso afim foi obtida em [Fut97], considerando partições fechadas de $\widehat{\Delta}$. Neste caso nem todas elas são conjugadas, mas existe uma quantidade finita de classes de conjugação. As classes de conjugação das subálgebras de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ são parametrizadas pelas subálgebras parabólicas de $\mathfrak{g}$. Sabemos que se $\mathfrak{p}$ é uma subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ contendo uma subálgebra de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ fixa, então $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$. Defina:

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = \Big(\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus (\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{u}) \oplus \mathbb{C}c \ . \tag{1.15}$$

Para qualquer subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$, definida por uma partição fechada de $\widehat{\Delta}$, existe uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\widehat{\mathfrak{b}}$ é conjugada à $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ (para mais detalhes veja [Fut97]).

Também podemos definir $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ por

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = \Big(\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\Big) \oplus \Big(\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]\Big) \oplus (\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{u}) \oplus \mathbb{C}c \ . \tag{1.16}$$

No caso de uma quase partição P, na condição (QP2) temos que $\widehat{\mathfrak{b}}_P$ é uma álgebra de Lie de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ gerada por $\widehat{\mathfrak{h}}$ e pelos espaços de raízes $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\alpha}$ com $\alpha \in P$. Chamamos essa subálgebra $\widehat{\mathfrak{b}}_P$ de **subálgebra de Borel** de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ correspondente à quase partição P (de acordo com [DFG09] e [FK18]). Pelos resultados de [JK85] e [Fut94] existe uma quantidade finita de classes de conjugação de $P \cap \widehat{\Delta}^{\text{re}}$ pelo grupo de Weyl, visto que $P \cap \widehat{\Delta}^{\text{re}}$ é uma partição fechada. Por outro lado, a quantidade de classes de conjugação de quase partições é infinita ([BBFK13]).

É conhecido que quaisquer duas subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$ são conjugadas por um automorfismo de $\mathfrak{g}$. Entretanto, no caso afim isso nem sempre é verdade. Duas subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ podem não ser conjugadas por um automorfismo de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$. No mínimo, temos duas subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ que não são conjugadas por automorfismos de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$: a **subálgebra de Borel canônica** e a **subálgebra de Borel natural** de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$. Elas serão definidas abaixo e para maiores detalhes indicamos [Fut94] e [Fut97].

Definiremos duas partições fechadas em $\widehat{\Delta}$ que dão origem a essas duas subálgebras de Borel que são muito importantes na teoria de representações de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$.

Considere a seguinte partição fechada definida anteriormente:

$$\widehat{\Delta}_+ = \widehat{\Delta}_{+,\text{st}} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{N}\} \cup \Delta_+ \cup \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.17}$$

Então, $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \left(\oplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}_{+,\text{st}}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\alpha}\right)$ é a **subálgebra de Borel canônica** de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$.
Podemos escrever $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}} &= \widehat{\mathfrak{h}}_{\text{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_{\text{st}} , && (1.18)\\
\widehat{\mathfrak{n}}_{\text{st}} &= \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]\Big) \oplus (\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) , && (1.19)\\
\widehat{\mathfrak{h}}_{\text{st}} &= (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c = \widehat{\mathfrak{h}} , && (1.20)\\
\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\text{st}} &= \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\Big) \oplus (\overline{\mathfrak{n}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1). && (1.21)
\end{aligned}$$

Considere agora a seguinte partição fechada

$$\widehat{\Delta}_{+,\text{nat}} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.22}$$

Este conjunto é chamado de **partição natural**.
Então, $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \left(\oplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}_{+,\text{nat}}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\alpha}\right)$ é a **subálgebra de Borel natural** de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$.

Portanto, a subálgebra de Borel natural $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}$ é definida por

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}} &= \widehat{\mathfrak{h}}_{\text{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_{\text{nat}} \ , && (1.23)\\
\widehat{\mathfrak{n}}_{\text{nat}} &= \Big(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]\Big) \ , && (1.24)\\
\widehat{\mathfrak{h}}_{\text{nat}} &= (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c = \widehat{\mathfrak{h}} \ , && (1.25)\\
\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\text{nat}} &= \Big(\overline{\mathfrak{n}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\Big). && (1.26)
\end{aligned}
$$

Considerando a subálgebra de Borel natural e a partição natural, podemos definir subálgebras de Borel definidas por quase partições.

Cada função $\phi : \mathbb{N} \to \{\pm\}$ define uma subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}^{\phi}_{\text{nat}}$ correspondente à quase partição

$$\widehat{\Delta}^{\phi}_{+,\text{nat}} = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta_+, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}, \phi(n) = +\} \cup \{-m\delta \mid m \in \mathbb{N}, \phi(m) = -\}. \quad (1.27)$$

Uma subálgebra de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$ é chamada de **subálgebra parabólica** se ela contém uma subálgebra de Borel e como vimos, existem subálgebras de Borel que não são conjugadas em $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$. Logo, podemos definir tipos diferentes de subálgebras parabólicas em $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$. Existem dois tipos de subálgebras parabólicas: aquelas que contém uma subálgebra de Borel canônica e aquelas que contém a parte real da subálgebra de Borel natural. Estas subálgebras parabólicas são chamadas de **tipo I** e **tipo II**, respectivamente, conforme a classificação obtida em [Fut97]. Exemplos de subálgebras parabólicas de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$ podem ser construídos a partir de subconjuntos parabólicos $P \subset \widehat{\Delta}$, definidos anteriormente. Dado um subconjunto parabólico P, a correspondente subálgebra parabólica de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$ é gerada por $\widehat{\mathfrak{h}}$ e por todos os espaços de raízes $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa,\alpha}$ com $\alpha \in P$. Uma classificação de subconjuntos parabólicos de $\widehat{\Delta}$ foi obtida em [Fut92] e [Fut97].

A **subálgebra parabólica canônica** $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{st}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$ associada à $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ é do **tipo I** e é definida através de

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{st}} &= \widehat{\mathfrak{l}}_{\text{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\text{st}} \quad , \quad \text{onde} && (1.28)\\
\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{st}} &= \Big(\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1\Big) \oplus \mathbb{C}c \quad (\text{subálgebra de Levi}) \ , && (1.29)\\
\widehat{\mathfrak{u}}_{\text{st}} &= \Big(\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1\Big) \oplus \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]\Big) \quad (\text{nilradical}) \ , && (1.30)\\
\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{st}} &= \Big(\overline{\mathfrak{u}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1\Big) \oplus \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\Big) \quad (\text{nilradical oposto}). && (1.31)
\end{aligned}
$$

Temos a correspondente decomposição triangular $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa} = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{l}}_{\text{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\text{st}}$. Observamos que se $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$, ou seja, $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{u} = \mathfrak{n}$, temos que $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{st}} = \widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}}$.

Por outro lado, se $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, ou seja, $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{u} = \{0\}$, temos que $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{st}}$ é a **subálgebra parabólica canônica**

maximal, onde

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{st}} &= \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}} \ , && (1.32)\\
\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}} &= \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1\Big) \oplus \mathbb{C}c \ , && (1.33)\\
\widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}} &= \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]\Big) \ , && (1.34)\\
\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}} &= \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\Big). && (1.35)
\end{aligned}$$

A **subálgebra parabólica natural** $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$ associada à $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ é do **tipo II** e é definida por

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} &= \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}} \quad , \quad \text{onde} && (1.36)\\
\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} &= \Big(\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\Big) \oplus \mathbb{C}c \quad \text{(subálgebra de Levi)} \ , && (1.37)\\
\widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}} &= \Big(\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\Big) \quad \text{(nilradical)} \ , && (1.38)\\
\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}} &= \Big(\overline{\mathfrak{u}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\Big) \quad \text{(nilradical oposto)}. && (1.39)
\end{aligned}$$

Temos a correspondente decomposição triangular $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa} = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}}$. Observamos que se $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$, ou seja, $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{u} = \mathfrak{n}$, temos que $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}} \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\Big)$. Por outro lado, se $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ então temos que $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$.

Toda subálgebra parabólica $\widehat{\mathfrak{p}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$ contendo uma subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem uma decomposição de Levi $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$, com subálgebra de Levi $\widehat{\mathfrak{l}}$ e $\widehat{\mathfrak{u}} \subset \widehat{\mathfrak{b}}$. Se $\widehat{\mathfrak{p}}$ é do **tipo II** então $\widehat{\mathfrak{l}}$ tem dimensão infinita. Neste caso a subálgebra $\widehat{\mathfrak{l}}$ contém a soma de certas subálgebras de Lie afim e uma subálgebra da álgebra de Heisenberg $G = G_- \oplus \mathbb{C}c \oplus G_+$, onde $G_{\pm} = \sum_{\pm n \in \mathbb{Z}_{>0}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa, n\delta}$ corresponde a uma partição das raízes imaginárias.

1.3 Módulos suaves sobre álgebras de Kac-Moody afim

Basearemos essa seção em [FK21] que traz definições e resultados que serão importantes ao longo da tese. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Um **módulo** sobre uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial V juntamente com uma operação de multiplicação $\mathfrak{g} \times V \to V$, denotada por $(x, v) \mapsto xv$, que satisfaz, para $x, y \in \mathfrak{g}$, $u, v \in V$ e um escalar λ, as seguintes propriedades:

(M1) $(x + y)v = xv + yv$

(M2) $x(u + v) = xu + xv$

(M3) $\lambda xv = x(\lambda v)$

(M4) $[x,y]v = xyv - yxv$

Em um módulo V cada $x \in \mathfrak{g}$ define uma aplicação linear de V por multiplicação à esquerda $v \in V \mapsto xv \in V$. Como consequência das propriedades (M1)-(M4), essas aplicações lineares definem uma representação de $\mathfrak{g}$ em V (isto é, um homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$). Por outro lado, dada uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V, a operação $\mathfrak{g} \times V \to V$ definida por $(x,v) \mapsto xv := \rho(x)v$ define a estrutura de um módulo sobre $\mathfrak{g}$. Em outras palavras, os conceitos de **módulo** e de **representação** são equivalentes.

Uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V é dita **irredutível** se os únicos subespaços invariantes por ρ são os triviais $\{0\}$ e V. Um módulo M é chamado **simples** ou **irredutível** se $M \neq \{0\}$ e se os seus únicos submódulos são $\{0\}$ e M.

Denotaremos a categoria dos $\mathfrak{g}$-módulos por $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$.

Dizemos que um $\mathfrak{g}$-módulo M é um **$\mathfrak{g}$-módulo de peso generalizado** (com respeito à $\mathfrak{h}$), se a ação de $\mathfrak{h}$ em M é localmente finita, ou seja, se $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M^\lambda$ se decompõe como soma direta de espaços de peso generalizados, onde

$$M^\lambda = \{v \in M \mid \forall h \in \mathfrak{h}, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ com } (h - \lambda(h))^n v = 0\}$$

é um **espaço de peso generalizado** de peso λ.

Se a ação de $\mathfrak{h}$ é semissimples em M, então M é chamado de **$\mathfrak{g}$-módulo de peso** (com respeito à $\mathfrak{h}$), ou seja, se $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$ se decompõe como soma direta de espaços de peso, onde

$$M_\lambda = \{v \in M \mid hv = \lambda(h)v, \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

é um **espaço de peso** de peso λ.

Consequentemente, temos que $M_\lambda \subset M^\lambda$, para todos $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, de modo que $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M^\lambda$ como $\mathfrak{g}$-módulos. Portanto, qualquer $\mathfrak{g}$-módulo de peso generalizado simples é um $\mathfrak{g}$-módulo de peso.

Para uma subálgebra de Lie $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ denotamos por $\mathcal{I}(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ e $\mathcal{I}_f(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ as subcategorias plenas de $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ consistindo em $\mathfrak{g}$-módulos de peso localmente $\mathfrak{a}$-finitos e $\mathfrak{g}$-módulos de peso finitamente gerados localmente $\mathfrak{a}$-finitos, respectivamente. Dizemos que um $\mathfrak{g}$-módulo M é localmente $\mathfrak{a}$-finito quando a ação de $\mathfrak{a}$ é localmente finita em M, isto é, $\dim(\mathfrak{a} \cdot v) < \infty$, para todos $v \in M$.

Fixando uma subálgebra $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ podemos definir o **funtor indução**

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{g}} : \mathcal{M}(\mathfrak{a}) \to \mathcal{M}(\mathfrak{g})$$

que aplica um $\mathfrak{a}$-módulo M em $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{a})} M$, onde a ação de $\mathfrak{g}$ é a $U(\mathfrak{g})$-multiplicação natural à esquerda.

Um funtor com direção oposta é o **funtor restrição**

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{g}} : \mathcal{M}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{M}(\mathfrak{a})$$

que aplica $\mathfrak{g}$-módulos M em si próprios restringindo a ação de $\mathfrak{g}$ para $\mathfrak{a}$.

Os funtores indução e restrição formam um par adjunto, isto é, para cada $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{a})$ e $N \in \mathcal{M}(\mathfrak{g})$ existe um isomorfismo natural de espaços vetoriais (Reciprocidade de Frobenius):

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{g}} M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}}(M, \mathrm{Res}_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{g}} N).$$

Para cada automorfismo de álgebras de Lie (homomorfismo inversível) $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ podemos definir o **funtor torção**

$$F_{\varphi} : \mathcal{M}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{M}(\mathfrak{g}) \quad , \quad M \mapsto M^{\varphi}$$

onde M^{φ} é identificado com M, como $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, mas com uma nova $\mathfrak{g}$-ação torcida dada por $x \cdot v = \varphi(x)v$, para todos $x \in \mathfrak{g}$, $v \in M$.

Agora vamos considerar a álgebra de Kac-Moody afim não-torcida $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$ associada à $\mathfrak{g}$ de nível κ.

Vamos denotar a categoria dos $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$-módulos por $\mathcal{M}(\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa})$. Como os objetos desta categoria podem ser muito complicados, é importante focar a atenção em algumas subcategorias plenas de $\mathcal{M}(\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa})$ que sejam mais manejáveis.

Definição 1.3.1. Seja M um $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$-módulo. Dizemos que M é um $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$**-módulo suave** se para cada $v \in M$ existe um inteiro positivo $N_v \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{N_v}\mathbb{C}[\![t]\!]) \cdot v = 0 \ , \tag{1.40}$$

ou equivalentemente, a subálgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{N_v}\mathbb{C}[\![t]\!]$ aniquila v.

A categoria dos $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$-módulos suaves nos quais o elemento central c age como identidade será denotada por $\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$.

Um $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$**-módulo graduado** M é um espaço vetorial $\mathbb{C}$-graduado que possui a estrutura de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo compatível com a graduação de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$. Observamos que na seção anterior apresentamos uma $\mathbb{Z}$-graduação da álgebra de Kac-Moody afim não-torcida. Notemos que ao deslocar uma dada graduação em M por um número complexo obtemos uma nova graduação em M.

Definição 1.3.2. Seja M um $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo graduado. Dizemos que M é um $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$**-módulo de energia positiva** se $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{\lambda+n}$ e $M_\lambda \neq 0$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$.

A categoria dos $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos de energia positiva nos quais o elemento central c age como identidade será denotada por $\mathcal{E}_+(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$.

Notemos que se M é um $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo de energia positiva, então segue imediatamente que M é também um $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo suave. Portanto, a categoria $\mathcal{E}_+(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$.

Sabemos que a categoria $\mathcal{M}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ coincide com a categoria dos módulos sobre a álgebra envolvente universal $U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ (e esta é uma álgebra associativa unital). Existe uma álgebra associativa análoga para a categoria $\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ construída a seguir (veja [Fre07], Capítulo 2).

Como o elemento central c age como a identidade em todos os $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos da categoria $\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$, a ação de $U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ se fatora através da álgebra quociente

$$U_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) = \frac{U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)}{(c-1)} \ .$$

Agora, introduzimos uma topologia linear em $U_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ na qual a base de vizinhanças abertas de 0 são os ideais à esquerda I_N definidos por $I_N = U_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^N \mathbb{C}[\![t]\!])$ para $N \in \mathbb{N}_0$. Para introduzir uma topologia em um conjunto X, não é preciso descrever todos os abertos de X mas apenas os abertos básicos. Uma **base de abertos** em um espaço topológico X é uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos abertos de X, chamados **abertos básicos**, com a seguinte propriedade: todo subconjunto aberto $A \subset X$ se exprime como uma reunião $A = \cup_\lambda B_\lambda$ de abertos B_λ pertencentes a $\mathfrak{B}$. Em um espaço topológico X, diz-se que um conjunto V é uma **vizinhança** de um ponto $x \in X$ quando x é um ponto interior de V. Isto quer dizer que V contém um conjunto aberto que contém x.

Seja $\widetilde{U}_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ o completamento de $U_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ com respeito a esta topologia linear, isto é,

$$\widetilde{U}_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) = \varprojlim \frac{U_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)}{I_N} \ .$$

Então a estrutura de uma álgebra associativa em $U_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ se estende a uma estrutura de uma álgebra associativa em $\widetilde{U}_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ pela continuidade. Logo, obtemos que $\widetilde{U}_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ é uma álgebra associativa topológica completa, a qual será chamada de **álgebra envolvente universal completada de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$**. Além disso, a categoria $\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ coincide com a categoria dos módulos discretos sobre a álgebra associativa $\widetilde{U}_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ na qual a ação de $\widetilde{U}_c(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ é contínua ponto a ponto (isto é precisamente equivalente à condição 1.40).

Já definimos anteriormente o funtor indução para $\mathfrak{g}$-módulos. Podemos definir de maneira análoga para os $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos. Para isso vamos construir uma classe de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos induzidos, que pertencem à categoria $\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$.

Seja $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{st}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\text{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\text{st}}$ a subálgebra parabólica canônica de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ associada à subálgebra parabólica canônica $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ (1.28) e seja E um $\mathfrak{l}$-módulo. Definimos o $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo induzido

$$\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{st}})} E \ , \tag{1.41}$$

onde E é considerado como $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{st}}$-módulo no qual $\widehat{\mathfrak{u}}_{\text{st}}$ age trivialmente e c age como identidade. Observamos que a ação de $\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{st}} = (\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c$ em E está bem definida, visto que E é $\mathfrak{l}$-módulo. O $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$ é chamado de **módulo de Verma generalizado** induzido de E para a subálgebra parabólica canônica $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{st}}$.

O $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$ tem um único $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-submódulo maximal $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$ que possui intersecção nula com o $\mathfrak{l}$-submódulo E de $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$. Portanto, podemos definir

$$\mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) = \frac{\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)}{\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)}$$

para um $\mathfrak{l}$-módulo E. Além disso, se E é um $\mathfrak{l}$-módulo simples, então $\mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$ é um $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo simples.

Pelo Teorema PBW (1.2.1) sabemos que

$$\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{st}})} E \cong U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{st}}) \otimes_{\mathbb{C}} E \quad , \quad \text{como } \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{st}}\text{-módulos.}$$

Como $\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{st}} = (\overline{\mathfrak{u}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}])$, novamente pelo Teorema PBW (1.2.1) temos que $U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{st}}) = U(\overline{\mathfrak{u}}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}])$. Assim, $U(\overline{\mathfrak{u}}) \hookrightarrow U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{st}})$.

Definimos $F = U(\overline{\mathfrak{u}})E$. Então,

$$F \cong U(\overline{\mathfrak{u}}) \otimes_{\mathbb{C}} E \subset U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{st}}) \otimes_{\mathbb{C}} E \cong \mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) \ ,$$

ou seja, $F = U(\overline{\mathfrak{u}})E \subset \mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$.

Se $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, temos que $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{u} = \{0\}$, $\widehat{\mathfrak{p}}_{\rm st} = \widehat{\mathfrak{g}}_{\rm st} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\rm st} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\rm st}$ (1.32), tal que

$$\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\rm st} = \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1\Big) \oplus \mathbb{C}c \quad , \quad \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\rm st} = \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]\Big) \quad \text{e} \quad \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\rm st} = \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\Big).$$

Tomamos E como $\mathfrak{l}$-módulo onde $(\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!])$ age trivialmente e c age como identidade. Em particular $\mathfrak{u}$ age trivialmente em E. Dessa forma $F = U(\overline{\mathfrak{u}})E$ é $\mathfrak{g}$-módulo, visto que $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{u}} \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$. Então podemos estender a estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo de F para uma estrutura de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\rm st}$, onde a ação de $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\rm st}$ é dada pela ação de $\mathfrak{g}$ e pelo fato de c agir como identidade em E; $\widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\rm st}$ age trivialmente em F, visto que $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!])$ age trivialmente em E.

Como $F = U(\overline{\mathfrak{u}})E$ é $\widehat{\mathfrak{g}}_{\rm st}$-módulo, podemos construir o seguinte $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo induzido

$$\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{g}}_{\rm st})} F \quad \text{e} \quad \mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F) \cong U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\rm st}) \otimes_{\mathbb{C}} F \quad , \quad \text{como } \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\rm st}\text{-módulos.}$$

O $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo induzido $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)$ é isomorfo à $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F) \cong U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\rm st}) \otimes_{\mathbb{C}} F &\cong U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\rm st}) \otimes_{\mathbb{C}} (U(\overline{\mathfrak{u}}) \otimes_{\mathbb{C}} E) \\ &\cong U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\rm st} \oplus \overline{\mathfrak{u}}) \otimes_{\mathbb{C}} E \\ &\cong U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\rm st}) \otimes_{\mathbb{C}} E \\ &\cong \mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) , \end{aligned}$$

como $\mathbb{C}$-espaços vetoriais e considerando as duas decomposições $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\rm st} \oplus \widehat{\mathfrak{l}}_{\rm st} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\rm st} = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\rm st} \oplus \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\rm st} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\rm st}$ podemos verificar que possuem a mesma estrutura de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo.

Além disso, se F é um $\mathfrak{g}$-módulo simples temos que $\mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F) \cong \mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$.

De fato, seja $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)$ o $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-submódulo de $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)$ que possui interseção nula com o $\mathfrak{g}$-módulo F. Em particular, $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)$ tem interseção nula com o $\mathfrak{l}$-módulo E. Como $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$ é o único $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-submódulo maximal com esta propriedade, temos que $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F) \subset \mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$. Suponhamos agora que $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$ tenha intersecção não-nula com F. Como F é $\mathfrak{g}$-módulo simples, por hipótese, e $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) \cap F$ é $\mathfrak{g}$-submódulo de F temos que $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) \cap F = F$. Assim, $F \subset \mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$, ou seja, $U(\overline{\mathfrak{u}})E \subset \mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)$, o que implica que $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) \cap E \neq \{0\}$, e isso é um absurdo. Logo, $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) \cap F = \{0\}$, e dessa maneira, $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) \subset \mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)$, pela maximalidade de $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)$. Então, $\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E) = \mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)$ e, portanto

$$\mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F) = \frac{\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)}{\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{g}}(F)} \cong \frac{\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)}{\mathbb{K}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E)} = \mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{p}}(E).$$

Por conta disso, vamos sempre considerar $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos induzidos como módulos de Verma generalizados para a subálgebra parabólica canônica maximal $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{st}}$ (1.32).

Portanto, temos o funtor indução

$$\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}} : \mathcal{M}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{E}_+(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \tag{1.42}$$

e o funtor

$$\mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{g}} : \mathcal{M}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{E}_+(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa). \tag{1.43}$$

1.4 Álgebras de Weyl com infinitos geradores

Introduziremos formalmente as álgebras de Weyl com infinitos geradores e definiremos alguns dos seus completamentos. Estas álgebras desempenham um papel fundamental na teoria de representações de campos livres das álgebras de Kac-Moody afim. Mais detalhes sobre essas construções podem ser encontradas principalmente em [FBZ04] (Capítulo 12) e [Fre07] (Capítulo 5).

Vamos considerar a $\mathbb{C}$-álgebra comutativa $\mathcal{K} = \mathbb{C}(\!(t)\!)$ com a $\mathbb{C}$-subálgebra $\mathcal{O} = \mathbb{C}[\![t]\!]$.

Sejam $\Omega_{\mathcal{K}} = \mathbb{C}(\!(t)\!)dt$ e $\Omega_{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[\![t]\!]dt$ os módulos dos diferenciais de Kähler.

Para um espaço vetorial complexo de dimensão finita V definimos os espaços vetoriais complexos de dimensão infinita $\mathcal{K}(V) = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}$ e $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) = V^* \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_{\mathcal{K}}$.

O pareamento $(\cdot,\cdot) : \Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}(V) \to \mathbb{C}$ definido por

$$(\alpha \otimes f(t)dt \ , \ v \otimes g(t)) = \alpha(v)\mathrm{Res}_{t=0}(g(t)f(t)dt) \ , \tag{1.44}$$

onde $\alpha \in V^*$, $v \in V$ e $f(t), g(t) \in \mathcal{K}$, nos permite identificar o espaço dual restrito à $\mathcal{K}(V)$ com o espaço vetorial $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)$, e vice-versa. Observamos que o **resíduo** $\mathrm{Res}_{z=0}(\cdot)$ (2.2) de uma distribuição formal é o coeficiente que acompanha z^{-1}. Assim,

$$(\mathcal{K}(V))^* = (V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K})^* \approx V^* \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_{\mathcal{K}} = \Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \ ,$$
$$(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*))^* = (V^* \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_{\mathcal{K}})^* \approx V^{**} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K} = \mathcal{K}(V).$$

Além disso, o pareamento (1.44) fornece uma forma bilinear não-degenerada anti-simétrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V)$, ou seja, $\langle\cdot,\cdot\rangle : (\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V)) \times (\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V)) \to \mathbb{C}$, definida por

$$\langle\alpha \otimes f(t)dt \ , \ v \otimes g(t)\rangle = -\langle v \otimes g(t) \ , \ \alpha \otimes f(t)dt\rangle = \alpha(v)\mathrm{Res}_{t=0}(g(t)f(t)dt) \ , \tag{1.45}$$

onde $\alpha \in V^*$, $v \in V$ e $f(t), g(t) \in \mathcal{K}$, e

$$\langle \alpha \otimes f(t)dt \ , \ \beta \otimes g(t)dt \rangle = \langle v \otimes f(t) \ , \ w \otimes g(t) \rangle = 0 \ , \tag{1.46}$$

onde $\alpha, \beta \in V^*$, $v, w \in V$ e $f(t), g(t) \in \mathcal{K}$.

Então as **álgebras de Weyl** $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$ e $\mathcal{A}_{\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)}$ são definidas por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)} = \frac{T(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V))}{I_{\mathcal{K}(V)}} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)} = \frac{T(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V))}{I_{\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)}} \ , \tag{1.47}$$

onde $I_{\mathcal{K}(V)}$ e $I_{\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)}$ são os ideais bilaterais da álgebra tensorial $T(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V))$ gerados por $a \otimes b - b \otimes a + \langle a, b \rangle \cdot 1$ para $a, b \in \Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V)$ e por $a \otimes b - b \otimes a - \langle a, b \rangle \cdot 1$ para $a, b \in \Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V)$, respectivamente.

As álgebras de polinômios em $\mathcal{K}(V)$ e $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)$ são definidas por

$$\mathrm{Pol}\mathcal{K}(V) = S((\mathcal{K}(V))^*) = S(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)) \ , \tag{1.48}$$

$$\mathrm{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) = S((\Omega_{\mathcal{K}}(V^*))^*) = S(\mathcal{K}(V)) \ , \tag{1.49}$$

onde $S(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*))$ e $S(\mathcal{K}(V))$ são subálgebras simétricas com relação à álgebra tensorial $T(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V))$.

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^c$ subespaços Lagrangianos (isto é, isotrópicos maximais) complementares de $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V)$, isto é, $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^c$. Observamos que um subespaço isotrópico é aquele em que seus vetores são ortogonais entre si com relação a uma forma bilinear não-degenerada anti-simétrica.

Como $\langle a, b \rangle = 0$, para todos $a, b \in \mathcal{L}$, temos que $a \otimes b - b \otimes a + \langle a, b \rangle \cdot 1 = a \otimes b - b \otimes a$. Logo, os elementos de $\mathcal{L}$ comutam em $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$. Então a álgebra simétrica $S(\mathcal{L})$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$. Além disso, ela é uma subálgebra comutativa maximal de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$. Assim, existe uma representação 1-dimensional de $S(\mathcal{L})$. Pelo Teorema PBW (1.2.1) temos que $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)} \cong S(\mathcal{L}^c) \otimes_{\mathbb{C}} S(\mathcal{L})$.

Consideremos o $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo induzido

$$\mathrm{Ind}_{S(\mathcal{L})}^{\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}} \mathbb{C} = \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)} \otimes_{S(\mathcal{L})} \mathbb{C} \cong S(\mathcal{L}^c) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong S(\mathcal{L}^c).$$

Segue imediatamente que o $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo induzido tem uma estrutura natural de uma álgebra comutativa. Denotemos por $M_{\mathcal{L}}$ a álgebra comutativa que é o completamento de $S(\mathcal{L}^c)$ com respeito à topologia linear em $S(\mathcal{L}^c)$ na qual a base de vizinhanças abertas de 0 são os subespaços $\mathcal{I}_{n,m}$ para

$n, m \in \mathbb{Z}$, onde $\mathcal{I}_{n,m}$ é o ideal de $S(\mathcal{L}^c)$ gerado por $\mathcal{L}^c \cap \Big((V^* \otimes_{\mathbb{C}} t^n \Omega_{\mathcal{O}}) \oplus (V \otimes_{\mathbb{C}} t^m \mathcal{O}) \Big)$. Além disso, podemos estender a ação da álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$ para $M_{\mathcal{L}}$, ou seja, $M_{\mathcal{L}}$ é um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo.

Agora, definiremos o completamento da álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$, porque $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$ não é suficientemente grande para nossas considerações.

Denotemos por Fun$\mathcal{K}(V)$ o completamento da álgebra comutativa Pol$\mathcal{K}(V) \cong S(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*))$ com respeito à topologia linear em Pol$\mathcal{K}(V)$ na qual a base de vizinhanças abertas de 0 são os subespaços $\mathcal{J}_n$ para $n \in \mathbb{Z}$, onde $\mathcal{J}_n$ é o ideal de Pol$\mathcal{K}(V)$ gerado por $V^* \otimes_{\mathbb{C}} t^n \Omega_{\mathcal{O}}$.

Consequentemente, temos que Fun$\mathcal{K}(V) = M_{\mathcal{K}(V)}$. De fato, se $\mathcal{L} = \mathcal{K}(V)$, temos que $\mathcal{L}^c = \Omega_{\mathcal{K}}(V^*)$. Então, para $n, m \in \mathbb{Z}$ segue que $\mathcal{L}^c \cap \Big((V^* \otimes_{\mathbb{C}} t^n \Omega_{\mathcal{O}}) \oplus (V \otimes_{\mathbb{C}} t^m \mathcal{O}) \Big) = V^* \otimes_{\mathbb{C}} t^n \mathbb{C}[\![t]\!] dt$. Dessa forma, para $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{I}_n$ é o ideal de $S(\mathcal{L}^c) = S(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)) \cong$ Pol$\mathcal{K}(V)$ gerado por $V^* \otimes_{\mathbb{C}} t^n \Omega_{\mathcal{O}}$. Por outro lado, para $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{J}_n$ é o ideal de Pol$\mathcal{K}(V)$ gerado por $V^* \otimes_{\mathbb{C}} t^n \Omega_{\mathcal{O}}$. Assim, $\mathcal{I}_n = \mathcal{J}_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Como $M_{\mathcal{L}}$ é o completamento de $S(\mathcal{L}^c)$ através de $\mathcal{I}_n$, Fun$\mathcal{K}(V)$ é o completamento de Pol$\mathcal{K}(V)$ através de $\mathcal{J}_n$, $\mathcal{I}_n = \mathcal{J}_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e Pol$\mathcal{K}(V) \cong S(\mathcal{L}^c)$, temos que Fun$\mathcal{K}(V) = M_{\mathcal{K}(V)}$. Logo, Fun$\mathcal{K}(V)$ é um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo.

Pela definição de completamento temos que

$$M_{\mathcal{K}(V)} = \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V) = \varprojlim \frac{\mathrm{Pol}\mathcal{K}(V)}{\mathcal{J}_n}.$$

Então um campo vetorial em $\mathcal{K}(V)$ é por definição um endomorfismo linear contínuo $\xi : \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V) \to \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V)$ que satisfaz a regra de Leibniz $\xi(fg) = \xi(f)g + f\xi(g)$ para todos $f, g \in \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V)$.

Em outras palavras, um campo vetorial em $\mathcal{K}(V)$ é um endomorfismo linear ξ de Fun$\mathcal{K}(V)$ tal que para qualquer $m \in \mathbb{Z}$ existe $n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ e uma derivação

$$\xi_{n,m} : \mathrm{Pol}\mathcal{K}(V)/\mathcal{J}_n \to \mathrm{Pol}\mathcal{K}(V)/\mathcal{J}_m$$

satisfazendo

$$s_m(\xi(f)) = \xi_{n,m}(s_n(f))$$

para todo $f \in \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V)$, onde

$$s_n : \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V) \to \mathrm{Pol}\mathcal{K}(V)/\mathcal{J}_n$$

é o homomorfismo canônico de álgebras.

O espaço vetorial de todos os campos vetoriais é naturalmente uma álgebra de Lie topológica, que será denotada por $\mathrm{Vect}\mathcal{K}(V)$.

Definimos a **álgebra de Weyl completada** $\mathcal{A}^{\sharp}_{\mathcal{K}(V)}$ como a $\mathbb{C}$-álgebra associativa gerada por uma subálgebra $i : \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V) \to \mathcal{A}^{\sharp}_{\mathcal{K}(V)}$ (como álgebras associativas) e por uma subálgebra de Lie $j : \mathrm{Vect}\mathcal{K}(V) \oplus \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V) \to \mathcal{A}^{\sharp}_{\mathcal{K}(V)}$ (como álgebras de Lie), com a relação

$$[j(\xi + f), i(g)] = i(\xi(g)) \ ,$$

para todos $f, g \in \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V)$ e $\xi \in \mathrm{Vect}\mathcal{K}(V)$. Obtemos que $\mathrm{Fun}\mathcal{K}(V)$ é um $\mathcal{A}^{\sharp}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo.

Existe uma sequência exata curta de álgebras de Lie topológicas que não cinde

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V),\leq 1} \longrightarrow \mathrm{Vect}\mathcal{K}(V) \longrightarrow 0.$$

A **álgebra de Weyl completada** $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V)}$ é definida como a $\mathbb{C}$-álgebra associativa sob $\mathrm{Fun}\mathcal{K}(V)$ gerada pelas imagens dos homomorfismos $i : \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V) \to \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V)}$ (como álgebras associativas) e $j : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V),\leq 1} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V)}$ (como álgebras de Lie), com a relação

$$[j(P), i(f)] = i(a(P)(f))$$

para $f \in \mathrm{Fun}\mathcal{K}(V)$ e $P \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V),\leq 1}$, onde $a : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V),\leq 1} \to \mathrm{Vect}\mathcal{K}(V)$ é o homomorfismo de álgebras de Lie originado da correspondente sequência exata curta.

Todas essas construções e mais detalhes podem ser encontradas principalmente em [FBZ04] (Capítulo 12), [Fre07] (Capítulo 5) e [FKS19].

Agora descreveremos a álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$, considerando uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \overline{\mathfrak{u}}$.

Sejam $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+\}$ uma base de $\overline{\mathfrak{u}}$ e $\{x_\alpha \mid \alpha \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+\}$ as funções de coordenadas lineares em $\overline{\mathfrak{u}}$ com respeito à base de $\overline{\mathfrak{u}}$, isto é, $x_\alpha(f_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$, para todos $\alpha, \beta \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$. Então, o conjunto $\{f_\alpha \otimes t^n \mid \alpha \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+, n \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base topológica de $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}}) = \overline{\mathfrak{u}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!) = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}}$, e o conjunto $\{x_\alpha \otimes t^{-n-1}dt \mid \alpha \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+, n \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base topológica de $\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \cong (\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}}))^* = (\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}})^*$ com respeito ao pareamento (1.44), ou seja, temos que

$$(x_\alpha \otimes t^{-n-1}dt, f_\beta \otimes t^m) = x_\alpha(f_\beta)\mathrm{Res}_{t=0} t^{m-n-1}dt = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{n,m} \ , \tag{1.50}$$

para todos $\alpha, \beta \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Se denotamos $x_{\alpha,n} = x_\alpha \otimes t^{-n-1}dt$ e $\partial_{x_{\alpha,n}} = f_\alpha \otimes t^n$ para $\alpha \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$ e

$n \in \mathbb{Z}$, então o ideal bilateral $I_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$ é gerado por elementos

$$\Big(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \alpha\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} a_n x_{\alpha,n}\Big)\otimes\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ \beta\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} b_m\partial_{x_{\beta,m}}\Big)-\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ \beta\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} b_m\partial_{x_{\beta,m}}\Big)\otimes\Big(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \alpha\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} a_n x_{\alpha,n}\Big)+\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ \alpha,\beta\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} a_n b_m\langle x_{\alpha,n},\partial_{x_{\beta,m}}\rangle\cdot 1\ ,$$

ou seja,

$$\Big(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \alpha\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} a_n x_{\alpha,n}\Big)\otimes\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ \beta\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} b_m\partial_{x_{\beta,m}}\Big)-\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ \beta\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} b_m\partial_{x_{\beta,m}}\Big)\otimes\Big(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \alpha\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} a_n x_{\alpha,n}\Big)+\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ \alpha,\beta\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}}} \delta_{\alpha,\beta}\delta_{n,m}a_n b_m\cdot 1 \tag{1.51}$$

e coincide com as relações de comutação canônicas

$$[x_{\alpha,n},\partial_{x_{\beta,m}}]=-\delta_{\alpha,\beta}\delta_{n,m}\ , \tag{1.52}$$

para todos $\alpha,\beta\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}$ e $m,n\in\mathbb{Z}$. Portanto, obtemos que a **álgebra de Weyl** $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$ é topologicamente gerada por $\{x_{\alpha,n},\partial_{x_{\alpha,n}}\mid \alpha\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}, n\in\mathbb{Z}\}$ com as relações de comutação canônicas. Temos que $M_{\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)}=\mathrm{Pol}\,\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)$ com a topologia discreta e $M_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}=\mathrm{Fun}\,\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})$ com a topologia linear, na qual a base de vizinhanças abertas do 0 são os subespaços $\mathcal{J}_n$, com $n\in\mathbb{Z}$, onde $\mathcal{J}_n$ é o ideal de $\mathrm{Fun}\,\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})$ gerado por $\overline{\mathfrak{u}}^*\otimes_{\mathbb{C}} t^n\mathbb{C}[\![t]\!]dt$. Nesse caso, indicamos a álgebra de Weyl completada $\mathcal{A}^{\sharp}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$ por $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$.

Observamos que se considerarmos $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}$ a subálgebra de Borel canônica de $\mathfrak{g}$, esse é o caso quando $\Sigma=\{\emptyset\}$ em Π. Logo $\Delta_\Sigma=\{0\}$ e $\Delta_+^{\mathfrak{u}}=\Delta_+^{\mathfrak{n}}=\Delta_+\setminus\Delta_\Sigma=\Delta_+$.

1.4.1 Álgebra de Weyl completada local

Podemos substituir a álgebra de Weyl completada $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$, a qual é uma álgebra topológica muito grande, por uma parte local relativamente pequena. Basearemos essa subseção em [FBZ04] (Capítulo 12) e em [FKS19]. Utilizaremos algumas definições da teoria das álgebras de vertex que estão presentes com mais detalhes no Capítulo 2 desta tese, por exemplo, as distribuições formais (2.1), o resíduo de uma distribuição formal (2.2) e os coeficientes de Fourier (2.3).

Definimos as distribuições formais $a_\alpha(z),a_\alpha^*(z)\in\mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}[\![z^{\pm1}]\!]$ por

$$a_\alpha(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{\alpha,n}z^{-n-1}\quad\text{e}\quad a_\alpha^*(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a^*_{\alpha,n}z^{-n}\ ,$$

onde $a_{\alpha,n}=\partial_{x_{\alpha,n}}$ e $a^*_{\alpha,n}=x_{\alpha,-n}$ para $\alpha\in\Delta_+^{\mathfrak{u}}$.

Vimos que $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})=\overline{\mathfrak{u}}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(\!(z)\!)=\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}}$.

Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ das **funções locais** em $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})$ gerado pelos coeficientes de Fourier da forma

$$\mathrm{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) f(z) dz \ , \tag{1.53}$$

onde $P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots)$ é um polinômio diferencial em $a^*_\alpha(z)$ para $\alpha \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$ e $f(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$.

Seja $\mathcal{T}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ o espaço vetorial dos **campos vetoriais locais** em $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})$ gerado pelos coeficientes de Fourier da forma

$$\mathrm{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) a_\beta(z) f(z) dz \ , \tag{1.54}$$

onde usamos o fato que os coeficientes de Fourier da forma

$$\mathrm{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) \partial_z^m a_\beta(z) f(z) dz \ , \tag{1.55}$$

para $m > 0$, podem ser expressos como combinações lineares de (1.54).

Finalmente, consideremos o espaço vetorial $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\leq m,\mathrm{loc}}$ dos **operadores diferenciais locais de ordem no máximo** $m \in \mathbb{N}_0$ em $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})$ gerado pelos coeficientes de Fourier da forma

$$\mathrm{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) Q(a_\beta(z), \partial_z a_\beta(z), \dots) f(z) dz \ , \tag{1.56}$$

onde $Q(a_\beta(z), \partial_z a_\beta(z), \dots)$ é um polinômio diferencial em $a_\beta(z)$ para $\beta \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$ de grau no máximo m. Então $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\leq m,\mathrm{loc}}$ para $m \in \mathbb{N}_0$ são álgebras de Lie topológicas e temos uma sequência exata curta

$$0 \to \mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\leq 1,\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}} \to 0 \tag{1.57}$$

de álgebras de Lie topológicas, que cinde canonicamente.

Definimos uma álgebra de Lie topológica $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ por

$$\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\leq m,\mathrm{loc}}. \tag{1.58}$$

Notemos que $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ é somente uma álgebra de Lie e não uma álgebra associativa. Entretanto, existe uma construção que associa $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ com a álgebra de Weyl completada $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$.

Agora, por construção, temos que $M_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$ é um $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$-módulo, entretanto $M_{\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)}$ não é um $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$-módulo. Portanto, precisamos considerar um completamento diferente para a álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$.

Notemos que existem completamentos, os quais são relacionados à diferentes ordens normais de operadores diferenciais. Restrinjamos nossa atenção para um completamento adequado para uma realização de campos livres de módulos de Verma Imaginários generalizados, porque no Capítulo 4 mostraremos a construção da realização geométrica de campos livres para esses módulos, de acordo com [FKS19].

Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\leq m,\mathrm{loc}}$ dos operadores diferenciais locais de ordem no máximo $m \in \mathbb{N}_0$ em $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})$ gerado pelos coeficientes de Fourier da forma

$$\mathrm{Res}_{z=0} Q(a_\beta(z), \partial_z a_\beta(z), \dots) P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) f(z) dz \ , \tag{1.59}$$

onde $Q(a_\beta(z), \partial_z a_\beta(z), \dots)$ é um polinômio diferencial em $a_\beta(z)$ para $\beta \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$ de grau no máximo m. Então $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\leq m,\mathrm{loc}}$ para $m \in \mathbb{N}_0$ são álgebras de Lie topológicas. Para construir uma sequência exata curta de álgebras de Lie topológicas semelhante à (1.57), definimos uma aplicação $\varphi : \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\leq 1,\mathrm{loc}} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\leq 1,\mathrm{loc}}$ por

$$\varphi\Big(\mathrm{Res}_{z=0} Q(a_\beta(z), \partial_z a_\beta(z), \dots) P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) f(z) dz\Big) = \tag{1.60}$$

$$= \mathrm{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) Q(a_\beta(z), \partial_z a_\beta(z), \dots) f(z) dz. \tag{1.61}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
& \varphi\Big(\Big[\mathrm{Res}_{z=0} Q_1(z) P_1(z) f_1(z) dz, \mathrm{Res}_{w=0} Q_2(w) P_2(w) f_2(w) dw\Big]\Big) = \\
= \ & \varphi\bigg(\mathrm{Res}_{z=0,w=0}\Big(Q_1(z)\Big[P_1(z), Q_2(w)\Big]P_2(w) + Q_2(w)\Big[Q_1(z), P_2(w)\Big]P_1(z)\Big) f_1(z) f_2(w) dz dw\bigg) \\
= \ & \varphi\bigg(\mathrm{Res}_{z=0,w=0}\Big(Q_1(z)P_1(z)Q_2(w)P_2(w) - Q_1(z)Q_2(w)P_1(z)P_2(w) + \\
& \qquad + Q_2(w)Q_1(z)P_2(w)P_1(z) - Q_2(w)P_2(w)Q_1(z)P_1(z)\Big) f_1(z) f_2(w) dz dw\bigg) \\
= \ & \mathrm{Res}_{z=0,w=0}\Big(P_1(z)Q_1(z)P_2(w)Q_2(w) - P_1(z)P_2(w)Q_1(z)Q_2(w) + \\
& \qquad + P_2(w)P_1(z)Q_2(w)Q_1(z) - P_2(w)Q_2(w)P_1(z)Q_1(z)\Big) f_1(z) f_2(w) dz dw \\
= \ & \mathrm{Res}_{z=0,w=0}\Big(P_2(w)[P_1(z), Q_2(w)]Q_1(z) + P_1(z)[Q_1(z), P_2(w)]Q_2(w)\Big) f_1(z) f_2(w) dz dw \\
= \ & \Big[\mathrm{Res}_{z=0} P_1(z) Q_1(z) f_1(z) dz, \mathrm{Res}_{w=0} P_2(w) Q_2(w) f_2(w) dw\Big] \\
= \ & \Big[\varphi\Big(\mathrm{Res}_{z=0} Q_1(z) P_1(z) f_1(z) dz\Big), \varphi\Big(\mathrm{Res}_{w=0} Q_2(w) P_2(w) f_2(w) dw\Big)\Big] \ ,
\end{aligned}$$

onde $Q_1(z), Q_2(z)$ são polinômios diferenciais em $a_\beta(z)$ para $\beta \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$ de grau no máximo 1 e $P_1(z), P_2(z)$ são polinômios diferenciais em $a^*_\alpha(z)$ para $\alpha \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$, o que implica que a aplicação $\varphi : \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\leq 1,\mathrm{loc}} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\leq 1,\mathrm{loc}}$

é um isomorfismo de álgebras de Lie topológicas. Assim, temos uma sequência exata curta

$$0 \to \mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\leq 1,\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}} \to 0 \tag{1.62}$$

de álgebras de Lie topológicas, que cinde canonicamente. Além disso, definimos uma álgebra de Lie topológica $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\mathrm{loc}}$ por

$$\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\mathrm{loc}} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\leq m,\mathrm{loc}}. \tag{1.63}$$

Notemos que $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\mathrm{loc}}$ é somente uma álgebra de Lie e não uma álgebra associativa. Entretanto, existe uma construção que associa $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\mathrm{loc}}$ com a álgebra de Weyl completada $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}$.

Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$ gerado pelos coeficientes de Fourier da forma

$$\mathrm{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \ldots) h(z) f(z) dz \tag{1.64}$$

e

$$\mathrm{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \ldots) c f(z) dz\ , \tag{1.65}$$

onde $P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \ldots)$ é um polinômio diferencial em $a^*_\alpha(z)$ para $\alpha \in \Delta^{\mathfrak{u}}_+$, $h \in \mathfrak{p}$ e $f(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$. Observamos que $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} = (\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(z)\!)) \oplus \mathbb{C}c$.

Temos que $\mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ é uma álgebra de Lie topológica e induz uma estrutura natural de uma álgebra de Lie topológica em uma soma semi-direta

$$\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}} = \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathrm{op}}_{\leq 1,\mathrm{loc}} \oplus \mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}. \tag{1.66}$$

Esta álgebra de Lie topológica desempenha um papel fundamental nas realizações de campos livres dos módulos de Verma Imaginários generalizados como podemos acompanhar no Capítulo 4.

1.5 Módulos suaves sobre uma álgebra de Weyl com infinitos geradores

Definimos na seção anterior a álgebra de Weyl com infinitos geradores $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$, onde V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita. Relembremos que $\mathcal{K} = \mathbb{C}(\!(t)\!)$, $\Omega_{\mathcal{K}} = \mathbb{C}(\!(t)\!)dt$, $\mathcal{K}(V) = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}$ e $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) = V^* \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_{\mathcal{K}}$.

Agora, vamos definir uma classe de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos, que de certa forma são módulos induzidos, uma vez que consideramos uma decomposição triangular de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$.

Consideremos os seguintes subespaços vetoriais $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_-$ e $\mathcal{L}_0$ de $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V)$ dados por

$$\mathcal{L}_- = (V^* \otimes_{\mathbb{C}} t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]dt) \oplus (V \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]) \ ,$$
$$\mathcal{L}_0 = (V^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}t^{-1}dt) \oplus (V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \ ,$$
$$\mathcal{L}_+ = (V^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![t]\!]dt) \oplus (V \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]).$$

De maneira mais clara, podemos dizer que $\mathcal{L}_-$ possui as potências t^m, com $m \leq -2$, em $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)$ e as potências t^n, com $n \leq -1$, em $\mathcal{K}(V)$. Por outro lado, $\mathcal{L}_+$ possui as potências t^m, com $m \geq 0$, em $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)$ e as potências t^n, com $n \geq 1$, em $\mathcal{K}(V)$. Por fim, $\mathcal{L}_0$ possui a potência t^{-1} em $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*)$ e a potência t^0 em $\mathcal{K}(V)$.

Então, temos a decomposição em soma direta

$$\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V) = \mathcal{L}_- \oplus \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_+. \tag{1.67}$$

Esta decomposição de $\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V)$ induz uma decomposição triangular em $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$, visto que essa é definida como o quociente $T(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V))/I_{\mathcal{K}(V)}$. De fato,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)} \cong \left(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),-}\right) \otimes_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0}\right) \otimes_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),+}\right) \tag{1.68}$$

é uma decomposição triangular da álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$, tal que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),-} \cong S(\mathcal{L}_-) \quad , \quad \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0} \cong \mathcal{A}_V \quad , \quad \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),+} \cong S(\mathcal{L}_+) \quad , \tag{1.69}$$

onde $\mathcal{A}_V$ é a álgebra de Weyl de V e, $S(\mathcal{L}_-)$ e $S(\mathcal{L}_+)$ são álgebras simétricas com relação à álgebra tensorial $T(\Omega_{\mathcal{K}}(V^*) \oplus \mathcal{K}(V))$.

Observamos que os elementos de $\mathcal{L}_-$ comutam em $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$, pois

$$\langle \alpha \otimes t^{-k}dt, v \otimes t^{-m}\rangle = \alpha(v)\mathrm{Res}_{t=0}t^{-(k+m)}dt = 0 \quad , \quad \text{para } \alpha \in V^*,\ v \in V,\ k \geq 2,\ m \geq 1 \ ,$$
$$\langle \alpha \otimes t^{-k}dt, \beta \otimes t^{-p}dt\rangle = \langle v \otimes t^{-m}, w \otimes t^{-n}\rangle = 0 \quad , \quad \text{para } \alpha, \beta \in V^*,\ v, w \in V,\ k, p \geq 2 \text{ e } m, n \geq 1.$$

Da mesma forma, os elementos de $\mathcal{L}_+$ também comutam em $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$, pois

$$\langle \alpha \otimes t^{k}dt, v \otimes t^{m}\rangle = \alpha(v)\mathrm{Res}_{t=0}t^{k+m}dt = 0 \quad , \quad \text{para } \alpha \in V^*,\ v \in V,\ k \geq 0,\ m \geq 1 \ ,$$
$$\langle \alpha \otimes t^{k}dt, \beta \otimes t^{p}dt\rangle = \langle v \otimes t^{m}, w \otimes t^{n}\rangle = 0 \quad , \quad \text{para } \alpha, \beta \in V^*,\ v, w \in V,\ k, p \geq 0 \text{ e } m, n \geq 1.$$

Dessa forma, $S(\mathcal{L}_-)$ e $S(\mathcal{L}_+)$ são subálgebras de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$.

Vejamos que, de fato, $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0} \cong \mathcal{A}_V$ é a álgebra de Weyl de V.

Consideremos $\mathcal{L}_0 = (V^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}t^{-1}dt) \oplus (V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1)$. Como V tem dimensão finita temos que $V \cong V^*$.

Sabemos que

$$\langle \alpha \otimes t^{-1}dt, v \otimes \lambda \rangle = \alpha(v)\mathrm{Res}_{t=0}\lambda t^{-1}dt = \lambda\alpha(v) \quad , \quad \text{para } \alpha \in V^*,\ v \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Identifiquemos $V^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}t^{-1}dt \sim V^*$ e $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1 \sim V$. Sejam $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ a base dual correspondente em V^*, ou seja, $\alpha_i(v_j) = \delta_{i,j}$, para todos i, j. Assim $\langle \alpha_i, v_j \rangle = \alpha_i(v_j) = \delta_{i,j} \cdot 1$. Dessa forma, $\alpha_i \otimes v_j - v_j \otimes \alpha_j + \delta_{i,j} \cdot 1 = 0$ no quociente. Se denotarmos v_i por ∂_{y_i} e α_i por y_i concluímos que $[y_i, \partial_{y_j}] = -\delta_{i,j}$ em $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$. Portanto, $(\mathcal{L}_0, [\cdot, \cdot])$ em $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$ é uma álgebra de Weyl de V com uma quantidade finita de geradores.

Além disso, temos que a álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$ é uma álgebra $\mathbb{Z}$-graduada com a graduação determinada por

$$\deg(v \otimes t^n) = -n \quad , \quad \deg(1) = 0 \quad , \quad \deg(\alpha \otimes t^{-n-1}dt) = n \ ,$$

para $v \in V$, $\alpha \in V^*$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.5.1. Seja M um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo. Dizemos que M é um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$**-módulo suave** se para cada vetor $v \in M$ existe um inteiro positivo $N_v \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big((V^* \otimes_{\mathbb{C}} t^{N_v}\mathbb{C}[\![t]\!]dt) \oplus (V \otimes_{\mathbb{C}} t^{N_v}\mathbb{C}[\![t]\!])\Big)v = 0.$$

A categoria dos $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos suaves será denotada por $\mathcal{E}(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)})$.

Análogo ao caso dos $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos, podemos introduzir $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos graduados e $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos de energia positiva.

Dizemos que um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo M é **graduado** se ele for um espaço vetorial $\mathbb{C}$-graduado tendo a estrutura de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo compatível com a graduação de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$.

Definição 1.5.2. Seja M um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo graduado. Dizemos que M é um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$**-módulo de energia positiva** se $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{\lambda+n}$ e $M_\lambda \neq 0$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$. A categoria dos $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos de energia positiva será denotada por $\mathcal{E}_+(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)})$.

Seja E um $\mathcal{A}_V$-módulo. Definimos o $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo induzido

$$\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(E) = \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)} \otimes_{\Big((\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),+})\Big)} E \ , \tag{1.70}$$

onde E é o $(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),+})$-módulo no qual a álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0}$ age via isomorfismo canônico $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0} \cong \mathcal{A}_V$ e $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),+}$ age trivialmente. Ele possui um único $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-submódulo maximal $\mathbb{K}_{\mathcal{K}(V)}(E)$ que tem intersecção nula com o $\mathcal{A}_V$-submódulo E de $\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(E)$.

Portanto, podemos definir

$$\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E) = \frac{\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(E)}{\mathbb{K}_{\mathcal{K}(V)}(E)} \tag{1.71}$$

para um $\mathcal{A}_V$-módulo E. Além disso, se E é um $\mathcal{A}_V$-módulo simples, então $\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E)$ é também um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo simples.

De fato, suponhamos que E é $\mathcal{A}_V$-módulo simples. Seja $\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E)'$ um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-submódulo não-nulo de $\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E)$. Logo $\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E)' = \dfrac{\mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E)}{\mathbb{K}_{\mathcal{K}(V)}(E)}$, para um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo $\mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E)$. Pelo Teorema da Correspondência entre módulos temos que $\mathbb{K}_{\mathcal{K}(V)}(E) \subsetneq \mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E) \subset \mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(E)$ como $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos. Se $\mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E) \cap E = \{0\}$ teríamos um absurdo, por $\mathbb{K}_{\mathcal{K}(V)}(E)$ ser $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-submódulo maximal com essa propriedade. Então $\mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E) \cap E \neq \{0\}$. Como por hipótese E é $\mathcal{A}_V$-módulo simples temos que $\mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E) \cap E = E$, visto que $\mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E) \cap E$ é um $\mathcal{A}_V$-submódulo de E. Dessa forma $E \subset \mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E)$ como $\mathcal{A}_V$-módulos. Então,

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(E) &= \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)} \otimes_{\left((\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),+})\right)} E \cong \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),-} \otimes_{\mathbb{C}} E \subset \\
&\subset \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)} \otimes_{\left((\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),+})\right)} \mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E) \cong \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V),-} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E) \cong \mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E) \ ,
\end{aligned}$$

e, portanto $\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(E) = \mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E)$, como $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos. Assim,

$$\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E)' = \frac{\mathbb{N}_{\mathcal{K}(V)}(E)}{\mathbb{K}_{\mathcal{K}(V)}(E)} \cong \frac{\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(E)}{\mathbb{K}_{\mathcal{K}(V)}(E)} = \mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E) \ ,$$

ou seja, $\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E)$ é um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo simples.

Vamos denotar a categoria dos $\mathcal{A}_V$-módulos por $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$.

Portanto, temos o funtor indução

$$\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)} : \mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}) \tag{1.72}$$

e o funtor

$$\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)} : \mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}) \tag{1.73}$$

Também podemos imediatamente considerar $\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(E)$ e $\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)}(E)$ como $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V)}$-módulos, onde $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{K}(V)}$ é a álgebra de Weyl completada definida na seção anterior.

Capítulo 2

Representações de álgebras de vertex

Os operadores de vertex foram introduzidos inicialmente na teoria das cordas. Os análogos matemáticos foram descobertos em teoria de representações de álgebras de Kac-Moody afim por James Lepowsky - Robert Lee Wilson em [LW78] e por Igor Frenkel - Victor Kac em [FK80]. A teoria das álgebras de vertex se tornou um campo importante de pesquisa em álgebra e física-matemática. Em particular, álgebras de vertex têm aplicações importantes em teoria de representações de álgebras de Lie de dimensão infinita, teoria de grupos finitos, geometria algébrica, topologia, teoria de funções modulares e teoria do campo quântico. O conhecimento da teoria de álgebras de vertex é muito importante para qualquer pesquisa na área de álgebras de Lie de dimensão infinita e teoria de representações dessas álgebras.

Com alguns exemplos, neste capítulo vamos explorar a construção de álgebras de vertex associadas com álgebras de Lie de dimensão infinita, tais como a álgebra de Kac-Moody afim, a álgebra de Weyl com infinitos geradores e a álgebra de Heisenberg de dimensão infinita. A construção dessas álgebras de vertex tem algo em comum. Primeiro consideramos um módulo sobre a álgebra de Lie em questão e em seguida construímos a estrutura de álgebra de vertex sobre esse módulo. Definimos assim a álgebra de vertex afim universal, a álgebra de vertex de Weyl e a álgebra de vertex de Heisenberg (também conhecida como Espaço de Fock), respectivamente.

2.1 Álgebras de vertex

Nesta seção introduziremos algumas noções e fatos básicos em álgebras de vertex. Para mais detalhes veja [Bor86], [Kac98], [FBZ04] e [Fre07].

Seja R uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Então uma série de potências formal com R-valores (ou **distribuição**

formal) nas variáveis $z_1, \ldots, z_n$ é uma série

$$a(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}} a_{m_1,\ldots,m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n} \ , \tag{2.1}$$

onde $a_{m_1,\ldots,m_n} \in R$. O espaço vetorial complexo de todas as séries de potências formais com R-valores é denotado por $R[\![z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]\!]$. Para uma distribuição formal $a(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^m$, o **resíduo** (em 0) é definido por

$$\mathrm{Res}_{z=0}\ a(z)dz = \mathrm{Res}_{z=0}\ a(z) = a_{-1} \ . \tag{2.2}$$

Para uma distribuição formal $a(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^m$ definindo

$$a_{(n)} = \mathrm{Res}_{z=0}\ z^n a(z)dz = a_{-n-1} \tag{2.3}$$

temos que $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$. Os R-valores $a_{(n)}$ são chamados de **coeficientes de Fourier** da distribuição formal $a(z)$. Em alguns casos, por simplicidade, usaremos a notação a_n ao invés de $a_{(n)}$ para denotar os coeficientes de Fourier. Ficará claro quando estamos utilizando eles, visto que o coeficiente a_n estará acompanhando a potência z^{-n-1} ou z^{-n}.

Um exemplo particularmente importante de uma distribuição formal com $\mathbb{C}$-valores em duas variáveis z, w é a **função delta formal** $\delta(z-w)$ dada por

$$\delta(z-w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m w^{-m-1}.$$

Algumas propriedades úteis da função delta formal estão reunidas na seguinte proposição [FBZ04]:

Proposição 2.1.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $a(z) \in R[\![z^{\pm 1}]\!]$ valem as seguintes propriedades:*

1. $\delta(z-w) = \delta(w-z)$
2. $\partial_z \delta(z-w) = -\partial_w \delta(z-w)$
3. $a(z)\delta(z-w) = a(w)\delta(z-w)$
4. $a(z)\partial_w \delta(z-w) = a(w)\partial_w \delta(z-w) + \big(\partial_w a(w)\big)\delta(z-w)$
5. $(z-w)^{n+1}\partial_w^n \delta(z-w) = 0$
6. $\mathrm{Res}_{z=0}\big(a(z)\delta(z-w)\big) = a(w)$

Demonstração. 1.

$$\delta(z-w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m w^{-m-1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-1} w^{m+1-1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} w^m z^{-m-1} = \delta(w-z).$$

2.

$$\partial_z \delta(z-w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} m z^{m-1} w^{-m-1} = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} m z^{-m-1} w^{m-1} = -\partial_w \delta(z-w).$$

3.

$$\begin{aligned} a(z)\delta(z-w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m w^{-m-1} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_n z^{m+n} w^{-m-1} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_n z^m w^{-m+n-1} \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_n w^n z^m w^{-m-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^n \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m w^{-m-1} = a(w)\delta(z-w). \end{aligned}$$

4. Como ∂_w é uma derivação temos

$$\begin{aligned} a(z)\partial_w\delta(z-w) = \partial_w\Big(a(z)\delta(z-w)\Big) = \partial_w\Big(a(w)\delta(z-w)\Big) = \\ = a(w)\partial_w\delta(z-w) + \big(\partial_w a(w)\big)\delta(z-w). \end{aligned}$$

5. Para $n \in \mathbb{N}_0$ temos

$$\begin{aligned} \partial_w^n \delta(z-w) &= \partial_w^n \sum_{m\in\mathbb{Z}} w^m z^{-m-1} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} m(m-1)\cdots(m-n+1) w^{m-n} z^{-m-1} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{m!}{(m-n)!} w^{m-n} z^{-m-1} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} n! \binom{m}{n} w^{m-n} z^{-m-1}. \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que $(z-w)^{n+1}\partial_w^n\delta(z-w) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Para isso usaremos indução em n. Se $n = 0$ temos que

$$(z-w)\delta(z-w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{m+1} w^{-m-1} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m w^{-m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m w^{-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m w^{-m} = 0.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para $k \in \mathbb{N}_0$. Então:

$$\begin{aligned}
& (z-w)^{(k+1)+1}\partial_w^{k+1}\delta(z-w) = \\
= \;& (z-w)^{k+1}(z-w)\partial_w^{k+1}\delta(z-w) \\
= \;& (z-w)^{k+1}(z-w)\sum_{m\in\mathbb{Z}}(k+1)!\binom{m}{k+1}w^{m-k-1}z^{-m-1} \\
= \;& (k+1)(z-w)^{k+1}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}k!\binom{m}{k+1}w^{m-k-1}z^{-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}}k!\binom{m}{k+1}w^{m-k}z^{-m-1}\Big) \\
= \;& (k+1)(z-w)^{k+1}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}k!\binom{m+1}{k+1}w^{m-k}z^{-m-1} - \sum_{m\in\mathbb{Z}}k!\binom{m}{k+1}w^{m-k}z^{-m-1}\Big) \\
= \;& (k+1)(z-w)^{k+1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}k!\Big(\binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}\Big)w^{m-k}z^{-m-1} \\
= \;& (k+1)(z-w)^{k+1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}k!\binom{m}{k}w^{m-k}z^{-m-1} \\
= \;& (k+1)(z-w)^{k+1}\partial_w^{k}\delta(z-w) = 0.
\end{aligned}$$

6. Sabemos que

$$\mathrm{Res}_{z=0}\ \delta(z-w) = \mathrm{Res}_{z=0}\big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}w^m z^{-m-1}\big) = 1.$$

Então,

$$\mathrm{Res}_{z=0}\big(a(z)\delta(z-w)\big) = \mathrm{Res}_{z=0}\big(a(w)\delta(z-w)\big) = a(w)\mathrm{Res}_{z=0}\ \delta(z-w) = a(w).$$

□

Dentre outras aplicações da função delta formal na teoria das álgebras de vertex podemos citar o seguinte lema:

Lema 2.1.1 ([Kac98])**.** *Seja $f(z,w)$ uma série de potências formal em $R[\![z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]\!]$ satisfazendo $(z-w)^N f(z,w) = 0$ para um inteiro positivo N. Então $f(z,w)$ pode ser unicamente escrita como*

$$f(z,w) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i(w)\partial_w^i\delta(z-w) \quad , \quad g_i(w) \in R[\![w^{\pm 1}]\!].$$

Demonstração. Veja [FBZ04], Capítulo 1. □

Podemos interpretar a função delta formal analiticamente, observando que:

$$\delta(z-w) = \underbrace{\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{w}{z}\Big)^n}_{\delta(z-w)^-} + \underbrace{\frac{1}{z}\sum_{n>0}\Big(\frac{z}{w}\Big)^n}_{\delta(z-w)^+}. \tag{2.4}$$

Quando z e w assumem valores complexos, tais que $|z| > |w|$, a série $\delta(z-w)^-$ converge para a função meromórfica $\dfrac{1}{(z-w)}$. Por outro lado, quando $|z| < |w|$, a série $\delta(z-w)^+$ converge para $-\dfrac{1}{(z-w)}$. Assim, o fato $(z-w)\delta(z-w) = 0$ (verificado na Proposição 2.1.1) significa que a soma de $\delta(z-w)^-$ com $\delta(z-w)^+$ tem suporte em $z = w$.

Podemos interpretá-la de maneira algébrica. Denotamos por $\mathbb{C}(\!(z)\!)(\!(w)\!)$ o espaço $R(\!(w)\!)$, onde $R = \mathbb{C}(\!(z)\!)$. Em outras palavras, este é o anel das séries formais de Laurent na variável w cujos coeficientes são séries formais de Laurent na variável z. Então a série $\delta(z-w)^- = \sum_{n\geq 0} z^{-n-1}w^n$ pertence à $\mathbb{C}(\!(z)\!)(\!(w)\!)$ (na verdade, está em $\mathbb{C}[z^{-1}][\![w]\!]$). Esta é a maneira algebrista de dizer que $\delta(z-w)^-$ é a expansão de $\dfrac{1}{(z-w)}$ no domínio $|z| > |w|$ (isto é, nas potências positivas de w/z):

$$\delta(z-w)^- = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z}\left(\frac{w}{z}\right)^n = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{w}{z}} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{z-w}{z}} = \frac{1}{z}\frac{z}{(z-w)} = \frac{1}{(z-w)}.$$

De maneira análoga, $\delta(z-w)^+ = \sum_{n>0} w^{-n}z^{n-1}$ pertence à $\mathbb{C}(\!(w)\!)(\!(z)\!)$ (na verdade, está em $\mathbb{C}[w^{-1}][\![z]\!]$), e é a expansão de $-\dfrac{1}{(z-w)}$ no domínio $|z| < |w|$ (isto é, nas potências positivas de z/w):

$$\delta(z-w)^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{z}{w}} - \frac{1}{z} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{w-z}{w}} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{w}{(w-z)} - \frac{1}{z} = \frac{w-(w-z)}{z(w-z)} = -\frac{1}{(z-w)}\ .$$

Seja $\mathbb{C}(\!(z,w)\!) = \mathbb{C}[\![z,w]\!][z^{-1},w^{-1},(z-w)^{-1}]$ o corpo de frações de $\mathbb{C}[\![z,w]\!]$. Existem dois mergulhos canônicos de espaços vetoriais $\iota_{z,w} : \mathbb{C}(\!(z,w)\!) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(z)\!)(\!(w)\!)$ e $\iota_{w,z} : \mathbb{C}(\!(z,w)\!) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(w)\!)(\!(z)\!)$, onde $\iota_{z,w}(a(z,w))$ é expansão da série formal de Laurent no domínio $|z| > |w|$ e $\iota_{w,z}(a(z,w))$ é expansão da série formal de Laurent no domínio $|z| < |w|$. Em particular, temos que

$$\delta(z-w)^- = \iota_{z,w}\left(\frac{1}{z-w}\right) \quad \text{e} \quad -\delta(z-w)^+ = \iota_{w,z}\left(\frac{1}{z-w}\right)\ ,$$

ou seja, $\delta(z-w)^-$ e $-\delta(z-w)^+$ são expansões do mesmo elemento de $\mathbb{C}(\!(z,w)\!)$ mergulhado em $\mathbb{C}(\!(z)\!)(\!(w)\!)$ e $\mathbb{C}(\!(w)\!)(\!(z)\!)$, respectivamente.

Note que

$$-\partial_z\delta(z-w) = \partial_w\delta(z-w) = \iota_{z,w}\left(\frac{1}{(z-w)^2}\right) - \iota_{w,z}\left(\frac{1}{(z-w)^2}\right).$$

Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, então $\mathrm{End}(V)$, $\mathbb{C}$-espaço vetorial dos operadores lineares em V, é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ com a operação composição. Dizemos que uma série de potências formal $a(z) \in$

$\mathrm{End}(V)[\![z^{\pm 1}]\!]$ é um **campo** se $a(z)v \in V(\!(z)\!)$ para todo $v \in V$. Escreveremos o campo $a(z)$ como

$$a(z) \quad = \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}. \tag{2.5}$$

Observamos que como $a_{(n)} \in \mathrm{End}(V)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos que $a_{(n)}v \in V$ para todo $v \in V$. Assim, a condição $a(z)v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)}v\ z^{-n-1} \in V(\!(z)\!)$ para todo $v \in V$, acima descrita, significa que fixando $v \in V$, a série de potências formal $a(z)v$ é "finita na direção negativa", isto é, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $a_{(m)}v = 0$, $\forall m \geq N$.

O espaço vetorial complexo de todos os campos em V na variável z será denotado por $\mathcal{F}(V)(z)$.

Agora definamos uma propriedade importante sobre campos, sendo uma espécie de condição de comutatividade entre dois campos, chamada de **localidade**, para em seguida exibir um critério sobre ela.

Definição 2.1.1. Dois campos $a(z)$ e $b(w)$ agindo em um espaço vetorial V são ditos **locais** um com relação ao outro se para cada $v \in V$ e $\varphi \in V^*$, os elementos matriciais

$$\langle \varphi, a(z)b(w)v \rangle \quad \text{e} \quad \langle \varphi, b(w)a(z)v \rangle$$

são expansões de um mesmo elemento $f_{v,\varphi} \in \mathbb{C}[\![z,w]\!][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ em $\mathbb{C}(\!(z)\!)(\!(w)\!)$ e $\mathbb{C}(\!(w)\!)(\!(z)\!)$, respectivamente, e a ordem do pólo de $f_{v,\varphi}$ em $(z-w)$ é uniformemente limitada para todos v, φ.

Proposição 2.1.2. *Dois campos $a(z), b(w)$ são locais se, e somente se, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que*

$$(z-w)^N [a(z), b(w)] = 0$$

como uma série de potências formal em $\mathrm{End}(V)[\![z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]\!]$.

Demonstração. Veja [FBZ04], Capítulo 1. □

Definição 2.1.2. Uma **álgebra de vertex** consiste dos seguintes dados:

1. **O espaço dos estados**: um espaço vetorial complexo $\mathcal{V}$.
2. **O vetor vácuo (ou *vacuum*)**: um vetor $|0\rangle \in \mathcal{V}$.
3. **O operador translação**: um endomorfismo $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$.
4. **A correspondência estado-campo** (também chamados de **operadores de vertex**): uma aplicação

linear $Y(\cdot, z) : \mathcal{V} \to \mathrm{End}(\mathcal{V})[\![z^{\pm 1}]\!]$ definida por

$$a \in \mathcal{V} \longmapsto Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \in \mathcal{F}(\mathcal{V})(z). \tag{2.6}$$

Esses dados estão sujeitos aos seguintes axiomas:

1. **O axioma do vácuo**: $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_{\mathcal{V}} \quad , \quad Y(a,z)|0\rangle \in \mathcal{V}[\![z]\!] \quad , \quad Y(a,z)|0\rangle|_{z=0} = a \quad , \quad \forall a \in \mathcal{V}.$

2. **O axioma de translação**: $T|0\rangle = 0 \quad , \quad [T, Y(a,z)] = \partial_z Y(a,z) \quad , \quad \forall a \in \mathcal{V}.$

3. **O axioma de localidade**: para todos $a, b \in \mathcal{V}$, existe $N_{a,b} \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$(z-w)^{N_{a,b}}[Y(a,z), Y(b,w)] = 0. \tag{2.7}$$

Podemos denotar uma álgebra de vertex através da quádrupla $(\mathcal{V}, |0\rangle, T, Y)$.

Uma álgebra de vertex é chamada de **álgebra de vertex comutativa** se todos os operadores de vertex $Y(a,z)$, $a \in \mathcal{V}$, comutam entre si. Em outras palavras, temos $N_{a,b} = 0$ no axioma da localidade, para todos $a, b \in \mathcal{V}$.

Uma álgebra de vertex $\mathcal{V}$ é chamada de **$\mathbb{Z}$-graduada** (resp., $\mathbb{Z}_+$) se $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial $\mathbb{Z}$-graduado (isto é, $\mathcal{V} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}_m$, onde $\mathcal{V}_m + \mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$) (resp., $\mathbb{Z}_+$), $|0\rangle$ é um vetor de grau 0, T é um endomorfismo de grau 1 (isto é, $T(\mathcal{V}_m) \subset \mathcal{V}_{m+1}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$), e para todo $a \in \mathcal{V}_m$ o campo $Y(a,z)$ tem **dimensão conformal** m, isto é, para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\deg\, a_{(n)} = -n + m - 1. \tag{2.8}$$

Conforme o axioma de translação, a ação de T no espaço dos estados $\mathcal{V}$ é completamente determinada por Y, pois $T(a) = a_{(-2)}|0\rangle$ e, além disso, temos que $a = a_{(-1)}|0\rangle$, para todo $a \in \mathcal{V}$. De fato, considerando $Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$, pelo axioma do vácuo temos que

$$a = Y(a,z)|0\rangle|_{z=0} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}|0\rangle z^{-n-1}|_{z=0} = a_{(-1)}|0\rangle \ ,$$

e pelo axioma de translação

$$[T, Y(a,z)]|0\rangle = \partial_z Y(a,z)|0\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n-1) a_{(n)}|0\rangle z^{-n-2}.$$

Além disso,

$$[T, Y(a,z)]|0\rangle = T \circ Y(a,z)|0\rangle - Y(a,z) \circ T|0\rangle = T \circ Y(a,z)|0\rangle \ ,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} T\Big(a_{(n)}|0\rangle\Big) z^{-n-1}|_{z=0} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n-1) a_{(n)}|0\rangle z^{-n-2}|_{z=0}.$$

Então $T(a) = T\big(a_{(-1)}|0\rangle\big) = a_{(-2)}|0\rangle$.

Podemos definir homomorfismos entre álgebras de vertex, subálgebras de vertex, ideais e quocientes.

Definição 2.1.3. Um **homomorfismo** entre álgebras de vertex $\rho : (\mathcal{V}, |0\rangle, T, Y) \to (\mathcal{V}', |0\rangle', T', Y')$ é uma aplicação linear $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ que aplica $|0\rangle \mapsto |0\rangle'$, que entrelaça (*intertwining*) os operadores de translação (isto é, $\rho \circ T = T' \circ \rho$), e satisfaz $\rho(Y(a,z)b) = Y'(\rho(a), z)\rho(b)$ para todos $a, b \in \mathcal{V}$.

Definição 2.1.4. Uma **subálgebra de vertex** $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial T-invariante que contém o vetor vácuo $|0\rangle$, e satisfaz $Y(a,z)b \in \mathcal{V}'(\!(z)\!)$ para todos $a, b \in \mathcal{V}'$ (com a estrutura de álgebra de vertex induzida).

Definição 2.1.5. Um **ideal de álgebra de vertex** $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial T-invariante satisfazendo $Y(a,z)b \in \mathcal{I}(\!(z)\!)$ para todos $a \in \mathcal{I}$, $b \in \mathcal{V}$.

A propriedade anti-simetria $Y(a,z)b = e^{zT}Y(b,-z)a$ das álgebras de vertex também implica que $Y(b,z)a \in \mathcal{I}(\!(z)\!)$ com a e b como acima. Dessa forma, todo ideal $\mathcal{I}$ é automaticamente um ideal bilateral.

Exemplo 2.1.1. Se $\rho : (\mathcal{V}_1, |0\rangle_1, T_1, Y_1) \to (\mathcal{V}_2, |0\rangle_2, T_2, Y_2)$ é um homomorfismo de álgebras de vertex então a **imagem** de ρ , denotada por $\mathrm{im}(\rho)$, é uma subálgebra de vertex de $\mathcal{V}_2$. De fato,

1. $\mathrm{im}(\rho)$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathcal{V}_2$. De fato, $\rho(0) = 0$, isto é, $0 \in \mathrm{im}(\rho)$, e dados $c, d \in \mathrm{im}(\rho)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que existem $a, b \in \mathcal{V}_1$ tais que $\rho(a) = c$ e $\rho(b) = d$, e dessa maneira $\rho(\lambda a + b) = \lambda\rho(a) + \rho(b) = \lambda c + d$, ou seja, $\lambda c + d \in \mathrm{im}(\rho)$.

2. Temos que $|0\rangle_1 \mapsto |0\rangle_2$, ou seja, $\rho\big(|0\rangle_1\big) = |0\rangle_2$. Logo, $|0\rangle_2 \in \mathrm{im}(\rho)$.

3. Seja $b \in \mathrm{im}(\rho)$. Então, existe $a \in \mathcal{V}_1$ tal que $\rho(a) = b$. Logo,

$$T_2(b) = T_2(\rho(a)) = (T_2 \circ \rho)(a) = (\rho \circ T_1)(a) = \rho(T_1(a)) \ ,$$

isto é, $T_2(b) \in \mathrm{im}(\rho)$. Portanto, $\mathrm{im}(\rho)$ é T_2-invariante.

4. Agora, sejam $c, d \in \mathrm{im}(\rho)$. Existem $a, b \in \mathcal{V}_1$ tais que $\rho(a) = c$ e $\rho(b) = d$. Então,

$$Y_2(c,z)d = Y_2(\rho(a), z)\rho(b) = \rho\Big(Y_1(a,z)b\Big).$$

Equivalentemente, podemos dizer que existe $Y_1(a,z)b \in \mathcal{V}_1(\!(z)\!)$ tal que

$$Y_2(c,z)d = \rho\Big(Y_1(a,z)b\Big) \in \rho(\mathcal{V}_1)(\!(z)\!) = \mathrm{im}(\rho)(\!(z)\!).$$

Exemplo 2.1.2. Se $\rho : (\mathcal{V}_1, |0\rangle_1, T_1, Y_1) \to (\mathcal{V}_2, |0\rangle_2, T_2, Y_2)$ é um homomorfismo de álgebras de vertex então o **kernel** de ρ, denotado por $\ker(\rho)$, é um ideal da álgebra de vertex $\mathcal{V}_1$. De fato,

1. Sabemos que $\ker(\rho) = \{v \in \mathcal{V}_1 \mid \rho(v) = 0\}$. Como $\rho(0) = 0$ temos que $0 \in \ker(\rho)$. Além disso, dados $a, b \in \ker(\rho)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que $\rho(\lambda a + b) = \lambda\rho(a) + \rho(b) = 0$, ou seja, $\lambda a + b \in \ker(\rho)$. Assim, $\ker(\rho)$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathcal{V}_1$.

2. Seja $a \in \ker(\rho)$, isto é, $\rho(a) = 0$. Como T_2 é uma aplicação linear temos que $T_2(0) = 0$. Assim, $\rho(T_1(a)) = (\rho \circ T_1)(a) = (T_2 \circ \rho)(a) = T_2(\rho(a)) = T_2(0) = 0$, isto é, $T_1(a) \in \ker(\rho)$. Então $\ker(\rho)$ é T_1-invariante.

3. Dados $a \in \ker(\rho)$ e $b \in \mathcal{V}_1$ precisamos verificar que $Y_1(a, z)b \in \ker(\rho)((z))$. Sabemos que $Y_1(a, z)b \in \mathcal{V}_1((z))$ e além disso
$$\rho\Big(Y_1(a, z)b\Big) = Y_2(\rho(a), z)\rho(b) = Y_2(0, z)\rho(b) = 0.$$
Portanto, $Y_1(a, z)b \in \ker(\rho)((z))$.

Dada uma álgebra de vertex $(\mathcal{V}, |0\rangle, T, Y)$ e um ideal de álgebra de vertex $\mathcal{I}$, podemos definir o $\mathbb{C}$-espaço vetorial quociente $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V}/\mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ é T-invariante, isto é, $T(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$, temos que o endomorfismo $\overline{T} : \overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{V}}$ está bem definido. Além disso, para um campo $Y(a, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$, com $a_{(n)} \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, podemos considerar $\overline{a}_{(n)} \in \mathrm{End}(\mathcal{V}/\mathcal{I}), \forall n \in \mathbb{Z}$, e definir $\overline{Y}(\overline{a}, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{a}_{(n)} z^{-n-1}$. Observamos que para $\bar{b} \in \overline{\mathcal{V}}$ temos que $\overline{a}_{(n)}\overline{b} = \overline{a_{(n)}b} \in \overline{\mathcal{V}}$. Portanto, $(\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V}/\mathcal{I}\ ,\ \overline{|0\rangle}\ ,\ \overline{T}\ ,\ \overline{Y})$ é uma álgebra de vertex chamada de **álgebra de vertex quociente**.

Lema 2.1.2. *Para duas álgebras de vertex* $(\mathcal{V}_1, |0\rangle_1, T_1, Y_1)$ *e* $(\mathcal{V}_2, |0\rangle_2, T_2, Y_2)$*, os dados* $(\mathcal{V}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_2\ ,\ |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2\ ,\ T_1 \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2} + \mathrm{id}_{\mathcal{V}_1} \otimes T_2\ ,\ Y)$ *onde* $Y(a_1 \otimes a_2, z) = Y_1(a_1, z) \otimes Y_2(a_2, z)$ *definem uma álgebra de vertex chamada* ***produto tensorial de*** $\mathcal{V}_1$ ***e*** $\mathcal{V}_2$.

Demonstração. Veja [FBZ04], Capítulo 1. □

Definição 2.1.6. O **produto normal ordenado** dos campos
$$a(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{(m)} z^{-m-1} \quad , \quad b(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_{(n)} w^{-n-1}\ ,$$
é definido como a série de potências formal
$$\begin{aligned} :a(z)b(w): &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{m<0} a_{(m)} b_{(n)} z^{-m-1} + \sum_{m\geq 0} b_{(n)} a_{(m)} z^{-m-1} \Big) w^{-n-1} \\ &= a(z)_+ b(w) + b(w) a(z)_-\ , \end{aligned}$$

onde para a série de potências formal $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^n$, escrevemos

$$f(z)_+ = \sum_{n\geq 0} f_n z^n \quad , \quad f(z)_- = \sum_{n<0} f_n z^n.$$

Agora apresentemos um teorema sobre a construção de álgebras de vertex associadas a álgebras de Lie com dimensão infinita como, por exemplo, a álgebra de vertex afim universal, a álgebra de vertex de Weyl e a álgebra de vertex de Heisenberg. Esse teorema pode ser encontrado, por exemplo, em [FBZ04] (Capítulo 2 e Capítulo 4).

Teorema 2.1.1 (**Teorema de Reconstrução**). *Sejam $\mathcal{V}$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, $|0\rangle$ um vetor não-nulo e T um endomorfismo de $\mathcal{V}$. Seja S um conjunto ordenado enumerável e $\{a^\alpha\}_{\alpha\in S}$ uma coleção de vetores em $\mathcal{V}$. Suponhamos que também são dados campos*

$$a^\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^\alpha_{(n)} z^{-n-1}$$

tais que as seguintes condições são satisfeitas:

1. *Para todos $\alpha \in S$, $a^\alpha(z)|0\rangle = a^\alpha_{(-1)}|0\rangle + \sum_{n\leq -2} a^\alpha_{(n)}|0\rangle z^{-n-1} = a^\alpha + \sum_{m\geq 1} a^\alpha_{(-m-1)}|0\rangle z^m$.*
2. *$T|0\rangle = 0$ e $[T, a^\alpha(z)] = \partial_z a^\alpha(z)$, para todos $\alpha \in S$.*
3. *Todos os campos $a^\alpha(z)$ são mutuamente locais.*
4. *$\mathcal{V}$ é gerado por vetores $a^{\alpha_1}_{(j_1)} \cdots a^{\alpha_m}_{(j_m)}|0\rangle$, com $j_i < 0$, $\alpha_i \in S$, $\forall i$.*

Além disso, definimos a operação de vertex da seguinte maneira

$$Y(a^{\alpha_1}_{(j_1)} \cdots a^{\alpha_m}_{(j_m)}|0\rangle, z) = \frac{1}{(-j_1-1)!\cdots(-j_m-1)!} : \partial_z^{-j_1-1} a^{\alpha_1}(z) \cdots \partial_z^{-j_m-1} a^{\alpha_m}(z) : \tag{2.9}$$

Então, estas estruturas juntamente com a operação de vertex dão origem a uma estrutura de álgebra de vertex bem definida em $\mathcal{V}$. Além disso, esta é a única estrutura de álgebra de vertex em $\mathcal{V}$ que satisfaz as propriedades $(1.) - (4.)$ e tal que $Y(a^\alpha, z) = a^\alpha(z)$.

Demonstração. Veja [FBZ04], Capítulo 4 (*Strong Reconstruction Theorem*). □

2.2 Módulos sobre álgebras de vertex

Definição 2.2.1. Seja $(\mathcal{V}, |0\rangle, T, Y)$ uma álgebra de vertex. Um espaço vetorial M é chamado de $\mathcal{V}$-**módulo** se ele é equipado com uma operação $Y_M(\cdot, z) : \mathcal{V} \to \mathrm{End}(M)[\![z^{\pm 1}]\!]$ que associa cada $a \in \mathcal{V}$ com um campo $Y_M(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^M_{(n)} z^{-n-1}$ em M, ou seja, $Y_M(a,z) \in \mathcal{F}(M)(z)$, onde esses dados estão sujeitos aos seguintes axiomas:

1. $Y_M(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_M$.

2. Para todos $a, b \in \mathcal{V}$ e $c \in M$ as três expressões

$$\begin{aligned} Y_M(a,z)Y_M(b,w)c &\in M(\!(z)\!)(\!(w)\!) \ , \\ Y_M(b,w)Y_M(a,z)c &\in M(\!(w)\!)(\!(z)\!) \ , \\ Y_M(Y(a,z-w)b,w)c &\in M(\!(w)\!)(\!(z-w)\!) \ , \end{aligned}$$

   são as expansões, nos seus respectivos domínios, do mesmo elemento de

$$M[\![z,w]\!][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}].$$

Vamos considerar uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada $\mathcal{V}$. Então um $\mathcal{V}$-módulo M é chamado de **graduado** se M é um espaço vetorial $\mathbb{C}$-graduado e para $a \in \mathcal{V}_m$ o campo $Y_M(a,z)$ tem dimensão conformal m, isto é,

$$\deg\, a^M_{(n)} = -n + m - 1 \tag{2.10}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que, deslocando uma dada graduação em M por um número complexo, obtemos uma nova graduação em M.

2.3 Álgebras de Zhu

Em [Zhu96], Y. Zhu introduziu uma construção funtorial que associa uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada com uma **álgebra associativa** conhecida como **álgebra de Zhu**.

Seja $\mathcal{V}$ uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada. Definimos uma aplicação bilinear em $\mathcal{V}$ por

$$a * b = \mathrm{Res}_{z=0}\left(Y(a,z)\frac{(1+z)^{\deg\, a}}{z} b\right) = \sum_{i=0}^{\deg\, a} \binom{\deg\, a}{i} a_{(i-1)} b \tag{2.11}$$

para elementos homogêneos $a, b \in \mathcal{V}$ e estendemos esse produto linearmente.

Observação 2.3.1.

$$(1+z)^{\deg\, a} = \sum_{i=0}^{\deg\, a} \binom{\deg\, a}{i} 1^{(\deg\, a)-i} z^i = \sum_{i=0}^{\deg\, a} \binom{\deg\, a}{i} z^i.$$

Assim,

$$\frac{(1+z)^{\deg\ a}}{z} = \sum_{i=0}^{\deg\ a} \binom{\deg\ a}{i} z^{i-1}.$$

Então,

$$Y(a,z)\frac{(1+z)^{\deg\ a}}{z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \sum_{i=0}^{\deg\ a} \binom{\deg\ a}{i} z^{i-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{\deg\ a} \binom{\deg\ a}{i} a_{(n)} z^{-n+i-2} \ ,$$

$$Y(a,z)\frac{(1+z)^{\deg\ a}}{z} b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{\deg\ a} \binom{\deg\ a}{i} a_{(n)} b\ z^{-n+i-2}.$$

Portanto,

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(Y(a,z)\frac{(1+z)^{\deg\ a}}{z} b\right) = \mathrm{Res}_{z=0}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{\deg\ a} \binom{\deg\ a}{i} a_{(n)} b\ z^{-n+i-2}\right) = \sum_{i=0}^{\deg\ a} \binom{\deg\ a}{i} a_{(i-1)} b\ .$$

Definimos $O(\mathcal{V})$ como o $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ gerado por

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(Y(a,z)\frac{(1+z)^{\deg\ a}}{z^2} b\right) = \sum_{i=0}^{\deg\ a} \binom{\deg\ a}{i} a_{(i-2)} b \tag{2.12}$$

para elementos homogêneos $a, b \in \mathcal{V}$.

A **álgebra de Zhu** $A(\mathcal{V})$ é definida como

$$A(\mathcal{V}) = \frac{\mathcal{V}}{O(\mathcal{V})}. \tag{2.13}$$

Denotamos por π_{Zhu} a projeção canônica de $\mathcal{V}$ em $A(\mathcal{V})$.

A aplicação bilinear (2.11) induz uma multiplicação associativa no quociente $A(\mathcal{V})$, isto é, $A(\mathcal{V})$ é uma **álgebra associativa** com essa multiplicação. Além disso, definimos $o(a) = a_{(\deg\ a-1)}$, para um elemento homogêneo $a \in \mathcal{V}$.

Consideremos uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada $\mathcal{V}$ e um $\mathcal{V}$-módulo graduado M. Seja $Y_M(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^M_{(n)} z^{-n-1}$, onde $a \in \mathcal{V}$ é um elemento homogêneo. Então o operador $o_M(a) = a^M_{(\deg\ a-1)}$ preserva as componentes homogêneas do $\mathcal{V}$-módulo graduado M.

2.4 Representações de energia positiva

Definição 2.4.1. Seja $\mathcal{V}$ uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada. Dizemos que um $\mathcal{V}$-módulo graduado M é um $\mathcal{V}$-**módulo de energia positiva** se $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{\lambda+n}$ e $M_\lambda \neq 0$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso, denotamos por M_{top} a componente de grau top M_λ de M.

A categoria dos $\mathcal{V}$-módulos de energia positiva será denotada por $\mathcal{E}_+(\mathcal{V})$.

Como o seguinte teorema provado em [Zhu96] mostra, a álgebra de Zhu $A(\mathcal{V})$ desempenha um importante papel na teoria de representações das álgebras de vertex.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Zhu)**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada e seja M um $\mathcal{V}$-módulo de energia positiva. Então a componente de grau top M_{top} é um $A(\mathcal{V})$-módulo, onde a ação $\pi_{\text{Zhu}}(a) \in A(\mathcal{V})$ para $a \in \mathcal{V}$ é dada por $o_M(a)$. Além disso, a correspondência $M \mapsto M_{\text{top}}$ fornece uma bijeção entre o conjunto de $\mathcal{V}$-módulos de energia positiva simples e o conjunto de $A(\mathcal{V})$-módulos simples.*

Para uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}$-graduada $\mathcal{V}$ vimos que podemos associar uma álgebra associativa $A(\mathcal{V})$ chamada álgebra de Zhu. Também podemos associar à $\mathcal{V}$ uma **álgebra de Lie topológica completa** $U(\mathcal{V})$, primeiramente introduzida por Borcherds [Bor86].

Consideremos o operador linear $\partial = T \otimes \text{id} + \text{id}_{\mathcal{V}} \otimes \partial_t$ no espaço vetorial $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Seja

$$U'(\mathcal{V}) = \frac{\left(\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\right)}{\text{im}\partial}.$$

Seja $a \otimes t^n \in \mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Logo $\partial(a \otimes t^n) = T(a) \otimes t^n + n(a \otimes t^{n-1})$. Para $a \in \mathcal{V}$ e $n \in \mathbb{Z}$ denotamos por $a_{[n]}$ a projeção de $a \otimes t^n \in \mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ em $U'(\mathcal{V})$, ou seja, $a_{[n]} = \overline{a \otimes t^n} = a \otimes t^n + \partial(a \otimes t^n)$. Assim $U'(\mathcal{V})$ é gerada por $a_{[n]}$, onde $a \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{Z}$, sujeitos às relações

$$(T(a))_{[n]} = -na_{[n-1]}. \tag{2.14}$$

Como a relação $(T(a))_{(n)} = -na_{(n-1)}$ é válida em $\text{End}(\mathcal{V})$ temos uma aplicação linear bem definida $U'(\mathcal{V}) \to \text{End}(\mathcal{V})$, enviando $a_{[n]} \mapsto a_{(n)}$.

Definimos uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} (\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}])^{\otimes 2} &\to U'(\mathcal{V}) \\ (a \otimes t^m) \otimes (b \otimes t^n) &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (a_{(k)}b)_{[m+n-k]}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Usando a identidade $[T, a_{(n)}] = -na_{(n-1)}$ em $\text{End}(\mathcal{V})$, que segue do axioma de translação, pode-se verificar que esta aplicação se estende a $U'(\mathcal{V})^{\otimes 2}$. Assim, obtemos uma aplicação linear bem definida $[\ ,\ ] : U'(\mathcal{V})^{\otimes 2} \to U'(\mathcal{V})$ dada por

$$[a_{[m]}, b_{[n]}] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (a_{(k)}b)_{[m+n-k]} \tag{2.16}$$

para $a, b \in \mathcal{V}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$.

Consideramos o completamento $U(\mathcal{V})$ de $U'(\mathcal{V})$ com respeito à topologia natural em $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$:

$$U(\mathcal{V}) = \frac{\big(\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))\big)}{\mathrm{im}\partial} \ ,$$

onde $\partial = T \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id}_{\mathcal{V}} \otimes \partial_t$. O colchete de Lie em $U(\mathcal{V})$ é definido por (2.16). Temos que $U(\mathcal{V})$ é uma **álgebra de Lie topológica completa** sendo gerada por combinações lineares $\sum_{n \geq N} f_n a_{[n]}$, onde $f_n \in \mathbb{C}$, $a \in \mathcal{V}$, $N \in \mathbb{Z}$, modulo relações que seguem da identidade (2.14).

Teorema 2.4.2. *O colchete (2.16) define uma estrutura de álgebra de Lie em $U'(\mathcal{V})$ e consequentemente em $U(\mathcal{V})$. Além disso, as aplicações naturais $U'(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$ e $U(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$ são homomorfismos de álgebras de Lie.*

Demonstração. Veja [FBZ04], Capítulo 4. □

Além disso, podemos introduzir uma $\mathbb{Z}$-graduação em $U(\mathcal{V})$ definindo, para um elemento homogêneo $a \in \mathcal{V}$, $\deg\, a_{[n]} = -n + \deg\, a - 1$. A atribuição de um grau aos elementos de $U(\mathcal{V})$ nos fornece uma decomposição triangular

$$U(\mathcal{V}) = U(\mathcal{V})_- \oplus U(\mathcal{V})_0 \oplus U(\mathcal{V})_+ \tag{2.17}$$

da álgebra de Lie $U(\mathcal{V})$ munida com um homomorfismo sobrejetivo canônico $U(\mathcal{V})_0 \to A(\mathcal{V})$ de álgebras de Lie, definido por $a_{[\deg\, a-1]} \mapsto \pi_{\mathrm{Zhu}}(a)$ para um elemento homogêneo $a \in \mathcal{V}$. Notemos que $\deg\, a_{[\deg\, a-1]} = -(\deg\, a - 1) + \deg\, a - 1 = 0$, isto é, o elemento $a_{[\deg\, a-1]}$, de fato, pertence à $U(\mathcal{V})_0$ para um elemento homogêneo $a \in \mathcal{V}$.

Observamos que $A(\mathcal{V})$ é uma álgebra associativa, então $A(\mathcal{V})^{(-)}$ é uma álgebra de Lie com colchete definido como o comutador entre os elementos.

Consideremos um $\mathcal{V}$-módulo M. Então ele também tem uma estrutura natural de $U(\mathcal{V})$-módulo através do homomorfismo canônico de álgebras de Lie $U(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$ definido por $a_{[n]} \mapsto a_{(n)}$ para $a \in \mathcal{V}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Denotamos por $\Omega_{\mathcal{V}}(M)$ o subespaço vetorial de M consistindo em vetores de peso mínimo, isto é, $\Omega_{\mathcal{V}}(M) = \{v \in M \mid U(\mathcal{V})_- v = 0\}$. Segue usando imediatamente a decomposição triangular de $U(\mathcal{V})$ que $\Omega_{\mathcal{V}}(M)$ é um $(U(\mathcal{V})_0 \oplus U(\mathcal{V})_+)$-módulo.

Além disso, por [DLM98] temos que $\Omega_{\mathcal{V}}(M)$ é um $A(\mathcal{V})$-módulo, onde a ação de $\pi_{\mathrm{Zhu}}(a) \in A(\mathcal{V})$

para $a \in \mathcal{V}$ é dada por $o_M(a)$. Temos que

$$\Omega_{\mathcal{V}} : \mathcal{E}(\mathcal{V}) \to \mathcal{M}(A(\mathcal{V})) \quad , \quad M \mapsto \Omega_{\mathcal{V}}(M) \ , \tag{2.18}$$

é um funtor, onde $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ é a categoria dos $\mathcal{V}$-módulos suaves e $\mathcal{M}(A(\mathcal{V}))$ é a categoria de $A(\mathcal{V})$-módulos.

Notemos que se M é um $\mathcal{V}$-módulo de energia positiva, então temos que $M_{\text{top}} \subset \Omega_{\mathcal{V}}(M)$ e $\Omega_{\mathcal{V}}(M) = M_{\text{top}}$ caso M seja um $\mathcal{V}$-módulo simples (ver Teorema de Zhu 2.4.1).

Portanto, podemos considerar um funtor

$$\Omega_{\mathcal{V}} : \mathcal{E}_+(\mathcal{V}) \to \mathcal{M}(A(\mathcal{V})). \tag{2.19}$$

Por outro lado, existe também um funtor indução

$$\mathbb{M}_{\mathcal{V}} : \mathcal{M}(A(\mathcal{V})) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{V}) \tag{2.20}$$

que é um funtor adjunto à esquerda para $\Omega_{\mathcal{V}}$ e tem a seguinte propriedade universal. Para um $\mathcal{V}$-módulo M e um morfismo $\varphi : E \to \Omega_{\mathcal{V}}(M)$ de $A(\mathcal{V})$-módulos, existe um único morfismo $\widetilde{\varphi} : \mathbb{M}_{\mathcal{V}}(E) \to M$ de $\mathcal{V}$-módulos que estende φ (veja [DLM98]). Para um $A(\mathcal{V})$-módulo E temos que $\mathbb{M}_{\mathcal{V}}(E)_{\text{top}} \cong E$ como módulos sobre $A(\mathcal{V})$. Além disso, como o $\mathcal{V}$-módulo $\mathbb{M}_{\mathcal{V}}(E)$ tem um único $\mathcal{V}$-submódulo maximal $\mathbb{K}_{\mathcal{V}}(E)$ tendo intersecção nula com o $A(\mathcal{V})$-submódulo E de $\mathbb{M}_{\mathcal{V}}(E)$, podemos definir

$$\mathbb{L}_{\mathcal{V}}(E) = \frac{\mathbb{M}_{\mathcal{V}}(E)}{\mathbb{K}_{\mathcal{V}}(E)} \tag{2.21}$$

para um $A(\mathcal{V})$-módulo E.

2.5 Álgebra de vertex afim universal

Vamos definir uma álgebra de vertex associada a uma álgebra de Kac-Moody afim. Para encontrar a estrutura única de álgebra de vertex utilizaremos o Teorema de Reconstrução (Teorema 2.1.1) apresentado na Seção 2.1.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples com dimensão finita e κ uma forma bilinear simétrica $\mathfrak{g}$-invariante em $\mathfrak{g}$.

Consideremos o $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo induzido $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(\mathbb{C})$, onde $\mathbb{C}$ é o $\mathfrak{g}$-módulo 1-dimensional trivial, ou seja, $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(\mathbb{C}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{st}})} \mathbb{C}$. Observamos que $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{st}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\text{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\text{st}}$ (1.32), onde $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\text{st}} = (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c$, $\widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\text{st}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]$ e $\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\text{st}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$. Assim $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{st}} = (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![t]\!]) \oplus \mathbb{C}c$. O $\mathfrak{g}$-módulo trivial $\mathbb{C}$ tem estrutura de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{st}}$-módulo onde a ação de $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}}$ é induzida pela ação de $\mathfrak{g}$ e $\widehat{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}}$ age trivialmente. Como $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{st}}$, pelo Teorema PBW (1.2.1) temos que $U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) = U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{st}})$. Dessa forma, $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(\mathbb{C}) \cong U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$, como $U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}})$-módulos.

O $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulo induzido $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(\mathbb{C})$ tem grande importância na teoria das álgebras de vertex, pois ele é equipado com a estrutura natural de uma álgebra de vertex $\mathbb{N}_0$-graduada, chamada de **álgebra de vertex afim universal** (veja [Kac98]), denotada por $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$.

Sabemos que o colchete entre os elementos de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ é definido por

$$[a_n, b_m] = [a,b]_{m+n} + m\kappa(a,b)\delta_{m,-n}c \quad \text{e} \quad [a_n, c] = 0 \quad ,$$

para todos $a, b \in \mathfrak{g}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Para um elemento $a \in \mathfrak{g}$, denotamos por $a(z) \in \widehat{\mathfrak{g}}_\kappa[\![z^{\pm 1}]\!]$ a distribuição formal definida por

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}. \tag{2.22}$$

Usando estas séries de potências formais podemos reescrever as relações de comutação (1.3) para $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ na forma

$$[a(z), b(w)] = [a,b](w)\delta(z-w) + \kappa(a,b)\ c\ \partial_w \delta(z-w). \tag{2.23}$$

De fato, para $a, b \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
[a(z), b(w)] &= [\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^{-m-1}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n w^{-n-1}] \\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} [a_m, b_n] z^{-m-1} w^{-n-1} \\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} [a,b]_{m+n} z^{-m-1} w^{-n-1} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} m\kappa(a,b)\delta_{m,-n}c\ z^{-m-1}w^{-n-1} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} [a,b]_n w^{-n-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} w^m z^{-m-1} + \kappa(a,b)c \sum_{m\in\mathbb{Z}} m\ z^{-m-1} w^{m-1} \\
&= [a,b](w)\delta(z-w) + \kappa(a,b)\ c\ \partial_w \delta(z-w).
\end{aligned}$$

A correspondência estado-campo $Y(\cdot, z) : \mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}))[\![z^{\pm 1}]\!]$ é dada por

$$Y(a_{1,-n_1-1} \cdots a_{k,-n_k-1}|0\rangle, z) = \frac{1}{n_1! \cdots n_k!} : \partial_z^{n_1} a_1(z) \cdots \partial_z^{n_k} a_k(z) : \tag{2.24}$$

para $k \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ e $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathfrak{g}$, onde $|0\rangle \in \mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ é o vetor vácuo (um vetor de peso máximo de $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(\mathbb{C})$). Observamos que $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(\mathbb{C}) \cong U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$, como $U(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathfrak{g},\mathrm{st}})$-módulos, em particular como $\mathbb{C}$-espaços vetoriais. Isso explica o fato de usarmos $a_{1,-n_1-1} \cdots a_{k,-n_k-1}|0\rangle$

como elemento genérico de $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$.

O operador translação $T : \mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}) \to \mathcal{V}_k(\mathfrak{g})$ é definido por $T|0\rangle = 0$ e $[T, a_n] = -na_{n-1}$ para $a \in \mathfrak{g}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $(\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}), |0\rangle, T, Y)$ é a **álgebra de vertex afim universal**.

Na literatura também é comum aparecer outra notação para se referir aos elementos de $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$. Seja $\{J^a\}_{a=1,\ldots,\dim(\mathfrak{g})}$ uma base ordenada de $\mathfrak{g}$. Então os elementos $J^a_n, n \in \mathbb{Z}$, e c formam uma base (topológica) para $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$, enquanto os elementos $J^a_n, n \geq 0$ e c formam uma base para a subálgebra "positiva" $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{st}}$ a qual induzimos $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$. Pelo Teorema PBW (1.2.1), $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{st}})} \mathbb{C}$ tem uma base de monômios da forma $J^{a_1}_{n_1} \cdots J^{a_m}_{n_m}|0\rangle$, onde $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m < 0$ e se $n_i = n_{i+1}$, então $a_i \leq a_{i+1}$. Dizemos que esses monômios estão ordenados lexicograficamente. Além disso, a álgebra de vertex $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ é gerada pelos campos $J^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J^a_n z^{-n-1}$, onde $\{J^a\}_{a=1,\ldots,\dim(\mathfrak{g})}$ é uma base ordenada de $\mathfrak{g}$.

Para descrever as representações de energia positiva de $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$, precisamos conhecer sua álgebra de Zhu, seguindo o funtor $\mathbb{M}_\mathcal{V} : \mathcal{M}(A(\mathcal{V})) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{V})$ (2.20), onde $\mathcal{V}$ é uma álgebra de vertex qualquer e $A(\mathcal{V})$ é sua álgebra de Zhu correspondente. Pode-se verificar que para $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ temos um isomorfismo canônico de álgebras associativas

$$A(\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g}) \tag{2.25}$$

definido por

$$\pi_{\mathrm{Zhu}}(a_{1,-n_1-1}a_{2,-n_2-1}\cdots a_{k,-n_k-1}|0\rangle) \mapsto (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_k} a_k \cdots a_2 a_1 \tag{2.26}$$

para $k \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ e $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathfrak{g}$. Portanto, a álgebra de Zhu da álgebra de vertex $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ é $U(\mathfrak{g})$.

Notemos que para a álgebra de vertex afim universal $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ os funtores $\mathbb{M}_{\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})}$ e $\mathbb{L}_{\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})}$ coincidem com os funtores $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}$ (1.42) e $\mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{g}}$ (1.43), respectivamente. De fato,

$$\mathbb{M}_{\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})} : \mathcal{M}(A(\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}))) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}))$$

e como $A(\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})$ temos que

$$\mathbb{M}_{\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})} : \mathcal{M}(U(\mathfrak{g})) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})) \ .$$

Por outro lado,

$$\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}} : \mathcal{M}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{E}_+(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \ .$$

As categorias $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{M}(U(\mathfrak{g}))$ são equivalentes. Além disso, as categorias $\mathcal{E}_+(\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}))$ e $\mathcal{E}_+(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$

coincidem. Portanto, os funtores $\mathbb{M}_{\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})}$ e $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}$ coincidem.

Logo, segundo o Teorema de Zhu (2.4.1) a atribuição $E \mapsto \mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{g}}(E)$ fornece uma correspondência biunívoca entre as classes de isomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos simples e $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$-módulos de energia positiva simples. Portanto, o estudo dos $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$-módulos de energia positiva se reduz ao estudo dos $\mathfrak{g}$-módulos.

Além disso, o único quociente simples $\mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{g}}(\mathbb{C})$ de $\mathbb{M}_{\kappa,\mathfrak{g}}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ tem também a estrutura natural de uma álgebra de vertex $\mathbb{N}_0$-graduada, chamada de **álgebra de vertex afim simples**, denotada por $\mathcal{L}_\kappa(\mathfrak{g})$. A álgebra de Zhu $A(\mathcal{L}_\kappa(\mathfrak{g}))$ é uma imagem homomórfica de $U(\mathfrak{g})$, então temos que

$$A(\mathcal{L}_\kappa(\mathfrak{g})) \cong \frac{U(\mathfrak{g})}{I_\kappa} \tag{2.27}$$

para algum ideal bilateral I_κ de $U(\mathfrak{g})$. Logo, a atribuição $E \mapsto \mathbb{L}_{\kappa,\mathfrak{g}}(E)$ fornece uma correspondência biunívoca entre as classes de isomorfismo de módulos simples sobre $U(\mathfrak{g})/I_\kappa$ e os $\mathcal{L}_\kappa(\mathfrak{g})$-módulos de energia positiva simples.

2.6 Álgebra de vertex de Weyl

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$ a álgebra de Weyl com infinitos geradores (as álgebras de Weyl com infinitos geradores foram definidas no Capítulo 1, Seção 1.4).

Lembremos do funtor indução $\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)} : \mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)})$ (1.72). Então o $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$-módulo induzido $\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(S(V^*))$, onde $S(V^*)$ é uma álgebra simétrica, carrega a estrutura natural de uma álgebra de vertex $\mathbb{N}_0$-graduada, chamada de **álgebra de vertex de Weyl**, denotada por $\mathcal{M}_V$. Para encontrar a estrutura única de álgebra de vertex utilizaremos o Teorema de Reconstrução (Teorema 2.1.1) apresentado na Seção 2.1.

Sejam $\dim(V) = m$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ as funções de coordenadas lineares em V e $a_i(z), a_i^*(z) \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}[\![z^{\pm 1}]\!]$ para $i = 1, 2, \ldots, m$, as distribuições formais definidas por

$$a_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{i,n} z^{-n-1} \quad \text{e} \quad a_i^*(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{i,n}^* z^{-n} \ , \tag{2.28}$$

onde $a_{i,n} = \partial_{x_{i,n}}$ e $a_{i,n}^* = x_{i,-n}$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, \ldots, m$.

Usando essas distribuições formais, as relações de comutação canônicas para $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$ podem ser escritas na forma

$$[a_i(z), a_j(w)] = 0 \quad , \quad [a_i(z), a_j^*(w)] = \delta_{i,j}\delta(z-w) \quad \text{e} \quad [a_i^*(z), a_j^*(w)] = 0 \ . \tag{2.29}$$

De fato, como $[x_{i,n}, x_{j,k}] = [\partial_{x_{i,n}}, \partial_{x_{j,k}}] = 0, \forall i, j = 1, 2, \ldots, m$ e $\forall n, k \in \mathbb{Z}$ temos que $[a_i(z), a_j(w)] = [a_i^*(z), a_j^*(w)] = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} [a_i(z), a_j^*(w)] &= [\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{i,n} z^{-n-1}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,k}^* w^{-k}] = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} [a_{i,n}, a_{j,k}^*] z^{-n-1} w^{-k} \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} [\partial_{x_{i,n}}, x_{j,-k}] z^{-n-1} w^{-k} = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \delta_{i,j} \delta_{n,-k} z^{-n-1} w^{-k} \\ &= \delta_{i,j} \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} w^n = \delta_{i,j} \delta(z-w) \ . \end{aligned}$$

A correspondência estado-campo $Y(\cdot, z) : \mathcal{M}_V \to \mathrm{End}(\mathcal{M}_V)[\![z^{\pm 1}]\!]$ é dada por

$$\begin{aligned} & Y(a_{i_1,-n_1-1} \cdots a_{i_r,-n_r-1} a_{j_1,-m_1}^* \cdots a_{j_s,-m_s}^* |0\rangle, z) = \\ = & \frac{1}{n_1! \cdots n_r!} \frac{1}{m_1! \cdots m_s!} : \partial_z^{n_1} a_{i_1}(z) \cdots \partial_z^{n_r} a_{i_r}(z) \partial_z^{m_1} a_{j_1}^*(z) \cdots \partial_z^{m_s} a_{j_s}^*(z) : \end{aligned} \tag{2.30}$$

para $r, s \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}_0$, onde $|0\rangle \in \mathcal{M}_V$ é o vetor vácuo (um vetor de peso máximo de $\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)}(S(V^*))$).

O operador translação $T : \mathcal{M}_V \to \mathcal{M}_V$ é definido por

$$T|0\rangle = 0 \quad , \quad [T, a_{i,n}] = -n a_{i,n-1} \quad \text{e} \quad [T, a_{i,n}^*] = -(n-1) a_{i,n-1}^* \ .$$

para $n \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, \ldots, m$. Logo, $(\mathcal{M}_V, |0\rangle, T, Y)$ é a **álgebra de vertex de Weyl**.

Além disso, temos um isomorfismo canônico de álgebras associativas

$$A(\mathcal{M}_V) \cong \mathcal{A}_V \tag{2.31}$$

definido por

$$\begin{aligned} & \pi_{\mathrm{Zhu}}(a_{i_1,-n_1-1} \cdots a_{i_r,-n_r-1} a_{j_{1},-m_1}^* \cdots a_{j_s,-m_s}^* |0\rangle) \mapsto \\ & \delta_{m_1,0} \cdots \delta_{m_s,0} (-1)^{n_1+\cdots+n_r} x_{j_1} \cdots x_{j_s} \partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_r}} \end{aligned} \tag{2.32}$$

para $r, s \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}_0$. Lembremos que $\mathcal{A}_V$ é a álgebra de Weyl com uma quantidade finita de geradores (veja Capítulo 1, Seção 1.5).

Notemos que para a álgebra de vertex de Weyl $\mathcal{M}_V$ os funtores $\mathbb{M}_{\mathcal{M}_V} : \mathcal{M}(A(\mathcal{M}_V)) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{M}_V)$ e $\mathbb{L}_{\mathcal{M}_V} : \mathcal{M}(A(\mathcal{M}_V)) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{M}_V)$ coincidem com os funtores $\mathbb{M}_{\mathcal{K}(V)} : \mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)})$ (1.72) e $\mathbb{L}_{\mathcal{K}(V)} : \mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \to \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)})$ (1.73), respectivamente, pois $A(\mathcal{M}_V) \cong \mathcal{A}_V$ e as categorias $\mathcal{E}_+(\mathcal{M}_V)$ e $\mathcal{E}_+(\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)})$ coincidem.

2.7 Espaço de Fock e a álgebra de vertex de Heisenberg

Basearemos essa seção em [FBZ04] (Capítulo 2). Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ como uma álgebra de Lie comutativa, isto é, $[f(t), g(t)] = 0$, $\forall f, g \in \mathbb{C}(\!(t)\!)$. Definimos a **álgebra de Lie de Heisenberg** $\mathcal{H}$ de dimensão infinita como uma extensão central de $\mathbb{C}(\!(t)\!)$, ou seja, $\mathcal{H} = \mathbb{C}(\!(t)\!) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$.

Existe outra versão da álgebra de Lie de Heisenberg: a extensão central 1-dimensional $\mathcal{H}'$ da álgebra de Lie comutativa dos polinômios de Laurent $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$, ou seja, $\mathcal{H}' = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$. Esta álgebra de Lie tem uma base: $b_n = t^n$, $n \in \mathbb{Z}$, e o elemento central $\mathbf{1}$. A álgebra de Lie $\mathcal{H}$ não possui uma tal base simples. Entretanto, $\mathcal{H}$ é o completamento de $\mathcal{H}'$ com respeito à topologia na qual a base de vizinhanças abertas do 0 é formada por subespaços $t^N\mathbb{C}[t]$, $N \in \mathbb{Z}$. Então faz sentido dizer que $\mathcal{H}$ é gerada topologicamente por $b_n, n \in \mathbb{Z}$, e $\mathbf{1}$, e como o colchete de Lie é contínuo com respeito a esta topologia, temos que $\mathcal{H}$ é uma álgebra de Lie topológica completa.

Uma representação de uma álgebra de Lie topológica como, por exemplo $\mathcal{H}$, é entendida como uma representação contínua em um espaço vetorial V equipado com a topologia discreta, isto é, todo subconjunto em V é um aberto. No caso de $\mathcal{H}$, isto é equivalente a exigir que para qualquer $v \in V$ temos que $t^N\mathbb{C}[\![t]\!] \cdot v = 0$ para algum $N \in \mathbb{Z}$. Uma representação de $\mathcal{H}$ pode ser vista como uma representação de $\mathcal{H}'$ onde para qualquer $v \in V$ temos $t^N\mathbb{C}[t] \cdot v = 0$ para algum $N \in \mathbb{Z}$, porque a ação de $\mathcal{H}'$ em V pode ser estendida para $\mathcal{H}$ por continuidade.

A vantagem de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}'$ é que $\mathcal{H}$ é preservada sob mudanças da coordenada t, enquanto $\mathcal{H}'$ não é. Entretanto, quando estudamos representações concretas, é mais conveniente considerar as representações da álgebra de Lie $\mathcal{H}'$.

Os geradores de $\mathcal{H}'$ satisfazem as seguintes relações

$$[b_n, b_m] = n\delta_{n,-m}\mathbf{1} \quad , \quad [\mathbf{1}, b_n] = 0 \quad , \quad \text{para todos } m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.33}$$

A álgebra envolvente universal $U(\mathcal{H}')$ de $\mathcal{H}'$ é uma álgebra associativa com geradores $b_n, n \in \mathbb{Z}$, e $\mathbf{1}$, e relações

$$b_n b_m - b_m b_n = n\delta_{n,-m}\mathbf{1} \quad , \quad b_n\mathbf{1} - \mathbf{1}b_n = 0 \quad , \quad \text{para todos } m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.34}$$

Introduzimos uma topologia em $U(\mathcal{H}')$ na qual a base de vizinhanças abertas de 0 é formada pelos ideais à esquerda dos subespaços $t^N\mathbb{C}[t] \subset \mathcal{H}' \subset U(\mathcal{H}')$, $N \in \mathbb{Z}$. O completamento de $U(\mathcal{H}')$ com respeito a essa topologia será denotada por $\widetilde{U}(\mathcal{H})$. Temos que $\widetilde{U}(\mathcal{H})$ é uma álgebra associativa com unidade 1 e ela contém como subálgebra $U(\mathcal{H})$. Na verdade, $\widetilde{U}(\mathcal{H})$ é o completamento de $U(\mathcal{H})$ com respeito a topologia na qual a base de vizinhanças abertas de 0 é formada pelos ideais à esquerda dos subespaços $t^N\mathbb{C}[\![t]\!] \subset \mathcal{H} \subset U(\mathcal{H})$, $N \in \mathbb{Z}$.

Definimos o quociente $\widetilde{\mathcal{H}} = \dfrac{\widetilde{U}(\mathcal{H})}{(\mathbf{1}-1)}$, o qual é uma álgebra de Weyl (completada).

Agora definiremos o Espaço de Fock. Desejamos construir uma representação da álgebra de Weyl $\widetilde{\mathcal{H}}$ que é "a menor possível". Ao contrário das álgebras comutativas, $\widetilde{\mathcal{H}}$ não possui representações (contínuas) 1-dimensionais. De fato, em $\widetilde{\mathcal{H}}$ o comutador de b_n, $n \neq 0$, e b_{-n} fornece um múltiplo não-nulo do elemento unidade, $b_n b_{-n} - b_{-n} b_n = n$ e é impossível ter uma representação na qual tanto b_n, $n \neq 0$, e b_{-n} agem por zero.

Consideremos a subálgebra $\widetilde{\mathcal{H}}_+ \subset \widetilde{\mathcal{H}}$ gerada por $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Ela é uma subálgebra comutativa, visto que os colchetes entre os seus geradores são nulos, e então possui uma representação 1-dimensional. De fato, $\widetilde{\mathcal{H}}_+$ é uma subálgebra comutativa maximal de $\widetilde{\mathcal{H}}$. Além disso, $\widetilde{\mathcal{H}}$ é $\widetilde{\mathcal{H}}_+$-módulo à direita. Podemos então definir um módulo sobre $\widetilde{\mathcal{H}}$ como um módulo induzido:

$$\pi = \operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathcal{H}}_+}^{\widetilde{\mathcal{H}}} \mathbb{C} = \widetilde{\mathcal{H}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}}_+} \mathbb{C}.$$

O $\widetilde{\mathcal{H}}$-módulo π é chamado de **representação de Fock de** $\widetilde{\mathcal{H}}$ ou **Espaço de Fock**.

Seja $\widetilde{\mathcal{H}}_-$ a subálgebra comutativa de $\widetilde{\mathcal{H}}$ gerada por $\{b_{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Segue do Teorema PBW (1.2.1) que $\widetilde{\mathcal{H}} \cong \widetilde{\mathcal{H}}_+ \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{\mathcal{H}}_-$. Portanto,

$$\pi \cong \widetilde{\mathcal{H}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}}_+} \mathbb{C} = (\widetilde{\mathcal{H}}_+ \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{\mathcal{H}}_-) \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}}_+} \mathbb{C} \cong \widetilde{\mathcal{H}}_- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[b_{-1}, b_{-2}, \ldots]$$

como $\widetilde{\mathcal{H}}_-$-módulos.

Sob este isomorfismo, os geradores b_n, $n < 0$, simplesmente agem em π por multiplicação. Para encontrar a ação dos elementos b_n, com $n \geq 0$, em um elemento de $\mathbb{C}[b_m]_{m<0}$, usamos as relações entre os geradores para "mover" b_n através de b_m, com $m < 0$, e a regra $b_n \cdot 1 = 0$, $n \geq 0$, onde $1 \in \mathbb{C}[b_m]_{m<0}$, que segue da definição. Obtemos por indução que b_n, com $n > 0$, age como derivação $n\dfrac{\partial}{\partial b_{-n}}$ e b_0 age por 0 em π.

Os operadores b_n com $n < 0$ são conhecidos como operadores de **criação**, visto que eles "criam o estado b_n do vácuo 1", enquanto os operadores b_n com $n \geq 0$ são os operadores de **aniquilação**, pois após repetidas aplicações destes, "matamos" qualquer vetor em π.

O Espaço de Fock π é munido com a estrutura de uma álgebra de vertex $\mathbb{Z}_+$-graduada. Para encontrar a estrutura única de álgebra de vertex em π nos basearemos no Teorema de Reconstrução (Teorema 2.1.1) apresentado na Seção 2.1.

O vetor vácuo será $|0\rangle = 1$. O operador translação T é definido por $T \cdot 1 = 0$ e $[T, b_i] = -ib_{i-1}$. Definamos a operação de vertex $Y(\cdot, z)$. Os operadores de vertex são definidos pela fórmula

$$Y(b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_k}, z) = \frac{1}{(-j_1-1)!(-j_2-1)! \cdots (-j_k-1)!} : \partial_z^{-j_1-1} b(z) \partial_z^{-j_2-1} b(z) \cdots \partial_z^{-j_k-1} b(z) : , \tag{2.35}$$

onde $j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_{<0}$ e $b(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \, z^{-n-1}$.

Sabemos que π tem uma base de monômios da forma $b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_k}$ onde $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k < 0$. Associemos a esse monômio o grau $-\sum_{i=1}^{k} j_i$. Em outras palavras, $\deg(1) = 0$ e $\deg(b_j) = -j$. Assim, π possui essa $\mathbb{N}_0$-graduação.

Portanto, $(\pi, 1, T, Y)$ é uma álgebra de vertex $\mathbb{N}_0$-graduada, que pode ser chamada de **álgebra de vertex de Heisenberg**. Vejamos que existe uma generalização dessa definição.

Para $\kappa \in \mathbb{C}$, seja π^κ um $\mathcal{H}$-módulo induzido da representação 1-dimensional de $\mathcal{H}_+ = \mathbb{C}[\![t]\!] \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ no qual $\mathbb{C}[\![t]\!]$ age por 0 e $\mathbf{1}$ age por multiplicação por κ. Então as fórmulas dadas acima ainda definem uma estrutura de álgebra de vertex em π^κ. Quando $\kappa = 0$, esta álgebra de vertex torna-se uma álgebra de vertex comutativa, e corresponde à álgebra comutativa $\mathbb{C}[b_{-1}, b_{-2}, \ldots]$ com a derivação T.

O Espaço de Fock π é um módulo sobre a álgebra de Weyl $\widetilde{\mathcal{H}}$, e ele também possui uma estrutura de álgebra de vertex. Construamos a álgebra de vertex de Heisenberg em um contexto mais geral, como uma espécie de generalização do Espaço de Fock.

Sejam $\mathcal{K} = \mathbb{C}(\!(t)\!)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}$. Também podemos denotar a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ por $\mathfrak{sl}_2$. Existe o seguinte homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{sl}_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K} \to \mathrm{Vect}(\mathcal{K})$:

$$\begin{aligned} e_n &\mapsto \frac{\partial}{\partial x_n} \quad , \\ h_n &\mapsto -2 \sum_{-i+j=n} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \\ f_n &\mapsto - \sum_{-i-j+k=n} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde os elementos da base (topológica) de $\mathfrak{sl}_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}$ são $e_n = e \otimes t^n$, $f_n = f \otimes t^n$ e $h_n = h \otimes t^n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Podemos simplificar essas fórmulas pela introdução de funções geradoras. Definimos

$$e(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n z^{-n-1} \quad , \quad h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n-1} \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^{-n-1}.$$

Notemos que $e(z)$ se parece com o operador de vertex $Y(e_{-1}|0\rangle, z)$ da álgebra de vertex $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{sl}_2)$, assim como $h(z)$ e $f(z)$.

Introduzimos a notação $a_n = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ e $a_n^* = x_{-n}$, e definimos

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial x_n} z^{-n-1} \ , \\ a^*(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^* z^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{-n} z^{-n}. \end{aligned}$$

Em termos dessas distribuições formais, as equações (2.36) tornam-se

$$\begin{aligned} e(z) &\mapsto a(z) \ , \\ h(z) &\mapsto -2a^*(z)a(z) \ , \\ f(z) &\mapsto -a^*(z)^2 a(z). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Consideremos a álgebra de Weyl $\mathcal{A}$ com geradores a_n e a_n^*, com $n \in \mathbb{Z}$ e relações

$$[a_n, a_m^*] = \delta_{n,-m} \quad \text{e} \quad [a_n, a_m] = [a_n^*, a_m^*] = 0 \ . \tag{2.38}$$

Notemos que a diferença entre $\mathcal{A}$ e $\widetilde{\mathcal{H}}$, é que a última tem apenas uma série de geradores b_n e o elemento b_0 é central.

Nosso objetivo é interpretar as fórmulas (2.37) como vindas de uma aplicação de $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{sl}_2)$ em uma álgebra de vertex associada com a álgebra de Weyl $\mathcal{A}$.

Como espaço vetorial subjacente, para a construção da álgebra de vertex, seja M uma representação irredutível de $\mathcal{A}$ (ou seja, M é um $\mathcal{A}$-módulo simples) gerado pelo vetor $|0\rangle$ que satisfaz

$$a_n|0\rangle = 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad ; \quad a_n^*|0\rangle = 0 \quad , \quad n > 0. \tag{2.39}$$

Então,

$$M \cong \mathbb{C}[a_n]_{n<0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[a_m^*]_{m\leq 0} \ .$$

O Teorema de Reconstrução (2.1.1) nos conduz ao seguinte resultado:

Lema 2.7.1. *Definimos um operador linear T em M pelas fórmulas*

$$T|0\rangle = 0 \quad , \quad [T, a_n] = -n a_{n-1} \quad , \quad [T, a_n^*] = -(n-1) a_{n-1}^* \ .$$

Definimos $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{Id} \quad , \quad Y(a_{-1}|0\rangle, z) = a(z) \quad , \quad Y(a_0^*|0\rangle) = a^*(z)$ *e*

$$\begin{aligned} & Y(a_{n_1} \cdots a_{n_k} a^*_{m_1} \cdots a^*_{m_l}|0\rangle, z) = \\ = \; & \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{(-n_i - 1)!} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(-m_j)!} : \partial_z^{-n_1-1} a(z) \cdots \partial_z^{-n_k-1} a(z) \partial_z^{-m_1} a^*(z) \cdots \partial_z^{-m_l} a^*(z) : \end{aligned}$$

Então estas estruturas satisfazem os axiomas de uma álgebra de vertex.

Portanto, $(M, |0\rangle, T, Y)$ é uma álgebra de vertex chamada de **álgebra de vertex de Heisenberg**, visto que M é um $\mathcal{A}$-módulo, onde $\mathcal{A}$ é a álgebra de Weyl com geradores a_n e a_n^*, com $n \in \mathbb{Z}$. Associando a_n e a_n^* ao grau $-n$, e $|0\rangle$ ao grau 0, obtemos uma $\mathbb{N}_0$-graduação em M, o que faz com que M seja uma álgebra de vertex $\mathbb{N}_0$-graduada. Os geradores de uma álgebra de Weyl são chamados de bósons livres. A álgebra de vertex M, que é um módulo sobre uma álgebra de Weyl, é uma realização do tipo bóson. Consequentemente, qualquer mergulho de uma álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{g}}$ em uma álgebra de Weyl fornece uma realização do tipo bóson.

Vimos na Seção 2.6 uma construção semelhante, também chamada de álgebra de vertex de Weyl onde foi considerada a álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(V)}$. A construção apresentada aqui pode ser encontrada em [FBZ04] (Capítulo 11) e está totalmente relacionada com as realizações de campos livres e os módulos de Wakimoto.

Na literatura física os campos $a(z)$ e $a^*(z)$ são tradicionalmente denotados por $\beta(z)$ e $\gamma(z)$, e a teoria de campos conformais (CFT) correspondente é chamada de $\beta\gamma$-*system*.

Capítulo 3

Módulos de Wakimotos Intermediários

O principal objetivo deste capítulo é apresentar e explorar os módulos de Wakimoto Intermediários construídos em [CF04] por Ben Cox e Vyacheslav Futorny. Brevemente discutimos os módulos do tipo Verma, pois genericamente os módulos de Wakimoto Intermediários são isomorfos a esses módulos. Em [CF04] foram consideradas as álgebras de Kac-Moody afim não-torcidas $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1)$, com $n \in \mathbb{N}$, e foram construídas séries de realizações do tipo bóson que dependem de um parâmetro $0 \leq r \leq n$. Esse parâmetro r é utilizado para definir uma subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_r$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1)$. Se $r = n$, temos $\widehat{\mathfrak{b}}_n = \widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}}$, e esta construção coincide com a construção dos **módulos de Wakimoto** ([Wak86] e [FF88]). Por outro lado, quando $r = 0$, temos $\widehat{\mathfrak{b}}_0 = \widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}$, e a representação obtida fornece uma realização no Espaço de Fock dos **módulos de Verma Imaginários** [Cox05]. Tais realizações são chamadas de **módulos de Wakimoto Intermediários**.

Em [CF04] as fórmulas aparecem mais condensadas utilizando a linguagem das distribuições formais. Para fazer comparações e analisá-las com mais detalhes é necessário descrevê-las de forma mais explícita. Ao longo desse capítulo, o autor desta tese apresenta fórmulas mais explícitas, obtidas após cuidadoso trabalho do mesmo, analisando casos particulares dos módulos de Wakimoto Intermediários. Essas fórmulas explícitas não aparecem em [CF04], porém são necessárias para um aprofundamento no estudo desses módulos e são essenciais para o desenvolvimento desta tese. O autor desta tese também observou ser necessário fazer um ajuste na subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_r$ considerada na construção dos módulos, e apresenta assim o elemento w do grupo de Weyl $\mathfrak{S}_{n+1}$ da álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ responsável por esse ajuste. Também consideramos o módulo de Wakimoto Intermediário $W^{w}_{2,1}(\lambda, \gamma)$ torcido pelo elemento $w = s_1 \in \mathfrak{S}_3$ e apresentamos torções desse módulo pelos outros elementos de $\mathfrak{S}_3$, visto que em [CF04] essa abordagem não foi explorada. Para finalizar o capítulo retomamos a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}'_2)$ (definida a partir de uma partição fechada) de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$, que não foi utilizada na construção dos módulos de Wakimoto Intermediários em [CF04] e apontamos alguns comentários e observações iniciais sobre esse caso particular. Essa abordagem é imprescindível para o desenvolvimento do próximo capítulo.

3.1 Módulos do tipo Verma

Seja $\mathfrak{g}(A)$ a álgebra de Kac-Moody associada com a matriz de Cartan generalizada A e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}(A)$. No Apêndice A podem ser encontrados mais detalhes sobre as álgebras de Kac-Moody.

Um $\mathfrak{g}(A)$-módulo V é chamado de **módulo de peso** (ou **$\mathfrak{h}$-diagonalizável**) se ele admite uma decomposição

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda \ , \tag{3.1}$$

onde cada V_λ é um espaço de peso e $V_\lambda = \{v \in V \mid hv = \lambda(h)v, \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Abordamos os módulos de peso e os módulos de peso generalizados sobre uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ de dimensão finita no Capítulo 1 na Seção 1.3.

Considerando a álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}$ e uma subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$ (veja Capítulo 1, Seção 1.2), em particular temos $\widehat{\mathfrak{h}} \subset \widehat{\mathfrak{b}}$. Um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo de peso V é chamado de **módulo de peso máximo** com **peso máximo** λ (com respeito à $\widehat{\mathfrak{b}}$) se V é gerado por $v_\lambda \in V_\lambda$, tal que v_λ é um autovetor para a subálgebra $\widehat{\mathfrak{b}}$, isto é, se $\widehat{\mathfrak{b}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}$ então $(h+x)v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda$, para todos $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$, $x \in \widehat{\mathfrak{n}}$. De forma análoga, podemos definir um módulo com peso máximo para uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ qualquer.

Um $\mathfrak{g}(A)$-módulo $M(\lambda)$ com peso máximo λ é dito um **módulo de Verma** se cada $\mathfrak{g}(A)$-módulo com peso máximo λ é um quociente de $M(\lambda)$. Esta condição pode ser reescrita como segue: se V é um $\mathfrak{g}(A)$-módulo de peso máximo com peso máximo λ então V é uma imagem homomórfica do módulo de Verma $M(\lambda)$, isto é, existe um homomorfismo de $\mathfrak{g}(A)$-módulos $\varphi : M(\lambda) \to V$ sobrejetor.

Para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ existe um único, a menos de isomorfismo, módulo de Verma $M(\lambda)$, e $M(\lambda)$ contém um único submódulo maximal próprio $M'(\lambda)$.

Podemos também obter $M(\lambda)$ via construção de um módulo induzido semelhante ao que já discutimos no Capítulo 1, Seção 1.3. Considere o $(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h})$-módulo $\mathbb{C}_\lambda$ com espaço subjacente $\mathbb{C}$ definido por $\mathfrak{n}(1) = 0$ e $h(1) = \lambda(h)1$, para $h \in \mathfrak{h}$. Então:

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}(A)) \otimes_{U(\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{h})} \mathbb{C}_\lambda. \tag{3.2}$$

No caso da subálgebra de Borel canônica $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}$ (1.18) de $\widehat{\mathfrak{g}}$ obtemos o **módulo de Verma clássico** (ou, módulo de Verma canônico). Quando consideramos uma subálgebra de Borel não-canônica obtemos um **módulo do tipo Verma**. Se considerarmos a partição natural $\widehat{\Delta}_{+,\text{nat}}$ (1.22) e a subálgebra de Borel natural $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}$ (1.23) de $\widehat{\mathfrak{g}}$, obtemos o **módulo de Verma Imaginário**. Em [Fut94] temos a definição do módulo de Verma Imaginário, além das suas propriedades básicas e estruturas. No Capítulo 5, na Seção 5.1, apresentamos o módulo de Verma Imaginário com mais detalhes.

3.2 Módulos de Wakimoto Intermediários - B. Cox e V. Futorny

Tomaremos como base a construção exibida em [CF04] e [CF06].

Os módulos de Wakimoto Intermediários $W_{n,r}(\lambda,\gamma)$ são basicamente representações da álgebra de Lie afim não-torcida $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C})$, para um inteiro positivo fixo n. Estas representações dependem de alguns parâmetros: $0 \le r \le n$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$ e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Fixe um inteiro positivo n, $0 \le r \le n$ e $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Defina $k = \gamma^2 - (r+1)$. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ e considere E_{ij}, $i,j = 1,\cdots,n+1$ a base canônica para $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C})$. Defina $h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$, $e_i = E_{i,i+1}$ e $f_i = E_{i+1,i}$, com $i = 1,\cdots,n$, os quais são uma base para $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$. Além disso, denotamos a forma de Killing por $(x,y) = tr(xy)$ e $x_m = x \otimes t^m$, para $x,y \in \mathfrak{g}$ e $m \in \mathbb{Z}$.

Seja $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ uma base para Δ_+, o conjunto de raízes positivas para $\mathfrak{g}$, tal que $h_i = \check{\alpha}_i$ (corraiz). Seja Δ_r o sistema de raízes com base $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$, da subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{sl}(r+1,\mathbb{C})$. Se $r = 0$ então $\Delta_r = \emptyset$. Uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é gerada por h_i, $i = 1,\cdots,n$. Respectivamente, uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}_r$ de $\mathfrak{g}_r$ é gerada por h_i, $i = 1,\cdots,r$ e $\mathfrak{h}_0 = 0$.

O grupo de Weyl da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ é o grupo simétrico em $n+1$ elementos $\mathfrak{S}_{n+1}$. Esse grupo será utilizado ao longo desse capítulo e sendo assim precisamos defini-lo. Sejam X um conjunto e $G = \mathfrak{S}(X)$ o conjunto de todas as funções bijetoras $\phi : X \to X$, munido da operação de composição de funções. Então $\mathfrak{S}(X)$ é um grupo, chamado **o grupo das permutações de** X. Se X for um conjunto finito com m elementos, denotamos $\mathfrak{S}(X)$ simplesmente por $\mathfrak{S}_m$ e o chamamos de **grupo simétrico em** m **elementos**. Se $X = \{1,2,\ldots,n+1\}$, um elemento f de $\mathfrak{S}_{n+1}$ é uma função bijetora $f : X \to X$, que pode ser descrita simplesmente declarando-se os valores que assume em cada elemento de X:

$$f(1) = a_1\ ,\ f(2) = a_2\ ,\ \ldots\ ,\ f(n+1) = a_{n+1} \quad , \quad \text{onde } a_j \in X \text{ para } j = 1,2,\ldots,n+1.$$

Alternativamente, podemos descrever essa permutação f por uma tabela:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n+1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots & a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Também podemos utilizar outra descrição das permutações. Por exemplo, em $\mathfrak{S}_3$ a tabela $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ pode ser representada por $f = (1\ 2)$, indicando que 1 é enviado em 2, 2 é enviado em 1, e 3 é enviado em 3 (ou seja, fica fixo).

Considere as álgebras de Kac-Moody afim não-torcidas (estendidas)

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C}) = (\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d\ , \tag{3.3}$$

$$\widehat{\mathfrak{g}}_r = \widehat{\mathfrak{sl}}(r+1,\mathbb{C}) = (\mathfrak{sl}(r+1,\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d\ , \tag{3.4}$$

com $\widehat{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ e $\widehat{\mathfrak{h}}_r = (\mathfrak{h}_r \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, respectivamente. As álgebras de Kac-Moody afim não-torcidas (estendidas) foram definidas no Capítulo 1 em (1.4). Aqui manteremos a notação $\widehat{\mathfrak{g}}$ ao invés de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, seguindo [CF04].

A álgebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ tem geradores e_{im}, f_{im}, h_{im}, com $i = 1, \cdots, n$ e $m \in \mathbb{Z}$, elemento central c e derivação grau d, com colchete (produto):

$$[x_m, y_k] = [x,y]_{m+k} + \delta_{m+k,0}\ m \cdot (x,y)\ c\ , \tag{3.5}$$
$$[x_m, c] = 0\ , \tag{3.6}$$
$$[d, x_m] = m x_m\ , \tag{3.7}$$
$$[d, c] = 0\ , \tag{3.8}$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $m, k \in \mathbb{Z}$.

Seja $\mathfrak{g}_\alpha$ um subespaço de raízes de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ correspondente à raiz α, $\mathfrak{n}^{\pm} = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$. Denotemos também $\mathfrak{n}_r^{\pm} = \mathfrak{n}^{\pm} \cap \mathfrak{g}_r$ e $\mathfrak{n}^+(r) = \mathfrak{n}^+ \backslash \mathfrak{n}_r^+$. Considere

$$\overline{\mathfrak{b}}_r = \Big(\mathfrak{n}^+(r) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{n}_r^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]\Big) \oplus \Big(((\mathfrak{n}_r^-) \oplus \mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big). \tag{3.9}$$

Então $\widehat{\mathfrak{b}}_r = \overline{\mathfrak{b}}_r \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ é uma **subálgebra de Borel** de $\widehat{\mathfrak{g}}$ para qualquer $0 \leq r \leq n$.

Com a necessidade de exemplificar alguns casos explícitos de tais subálgebras de Borel, visto que em [CF04] não aparecem tais exemplos, no Apêndice A, Seção A.3, descrevemos as subálgebras de Borel para $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ e $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$, considerando as partições fechadas. A notação utilizada aqui é diferente da notação utilizada no Apêndice A, mas obtemos as mesmas subálgebras:

Exemplo 3.2.1 (Apêndice A, Subseção A.3.1)**.** $n = 1$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{sl}(r+1,\mathbb{C})$, $0 \leq r \leq 1$. Temos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(1,\mathbb{C}) = \{0\}$ e $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}$. Assim, $\mathfrak{n}^+ = \mathbb{C}e$, $\mathfrak{n}^- = \mathbb{C}f$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Então:

- $r = 0$:

$$\mathfrak{n}_0^+ = \{0\} \quad , \quad \mathfrak{n}_0^- = \{0\} \quad , \quad \mathfrak{n}^+(0) = \mathbb{C}e = \mathfrak{n}^+\ ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_0 = \left(\mathfrak{n}^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\right) \oplus \left(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_0 = \overline{\mathfrak{b}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

- $r = 1 = n$:

$$\mathfrak{n}_1^+ = \mathfrak{n}^+ \quad , \quad \mathfrak{n}_1^- = \mathfrak{n}^- \quad , \quad \mathfrak{n}^+(1) = \{0\} ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 = \left(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathfrak{n}^+ ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_1 = \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

Portanto, $\widehat{\mathfrak{b}}_0 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0)$ e $\widehat{\mathfrak{b}}_1 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1)$.

Exemplo 3.2.2 (Apêndice A, Subseção A.3.2)**.** $n = 2$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{sl}(r+1,\mathbb{C})$, $0 \leq r \leq 2$. Temos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(1,\mathbb{C}) = \{0\}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}$. Assim, $\mathfrak{n}^+ = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$, $\mathfrak{n}^- = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Então:

- $r = 0$:

$$\mathfrak{n}_0^+ = \{0\} \quad , \quad \mathfrak{n}_0^- = \{0\} \quad , \quad \mathfrak{n}^+(0) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 = \mathfrak{n}^+ ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_0 = \left(\mathfrak{n}^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\right) \oplus \left(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_0 = \overline{\mathfrak{b}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

- $r = 1$:

$$\mathfrak{n}_1^+ = \mathbb{C}e_1 \quad , \quad \mathfrak{n}_1^- = \mathbb{C}f_1 \quad , \quad \mathfrak{n}^+(1) = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 = \left((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\right) \oplus \left((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathbb{C}e_1 ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_1 = \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

- $r = 2 = n$:

$$\mathfrak{n}_2^+ = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 = \mathfrak{n}^+ \quad , \quad \mathfrak{n}_2^- = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3 = \mathfrak{n}^- \quad , \quad \mathfrak{n}^+(2) = \{0\} ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_2 = \left(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_2 = \overline{\mathfrak{b}}_2 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

Portanto, $\widehat{\mathfrak{b}}_0 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0)$, $\widehat{\mathfrak{b}}_1 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1)$ e $\widehat{\mathfrak{b}}_2 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2)$.

Exemplo 3.2.3 (Apêndice A, Subseção A.3.3)**.** $n = 3$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{sl}(r+1,\mathbb{C})$, $0 \leq r \leq 3$. Temos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(1,\mathbb{C}) = \{0\}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}$. Assim:

$\mathfrak{n}^+ = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$, $\mathfrak{n}^- = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3 \oplus \mathbb{C}f_4 \oplus \mathbb{C}f_5 \oplus \mathbb{C}f_6$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$.

- $r = 0$:

$$\mathfrak{n}_0^+ = \{0\} \quad , \quad \mathfrak{n}_0^- = \{0\} \quad , \quad \mathfrak{n}^+(0) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6 = \mathfrak{n}^+ \ ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_0 = \Big(\mathfrak{n}^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \ ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_0 = \overline{\mathfrak{b}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

- $r = 1$:

$$\mathfrak{n}_1^+ = \mathbb{C}e_1 \quad , \quad \mathfrak{n}_1^- = \mathbb{C}f_1 \quad , \quad \mathfrak{n}^+(1) = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6 \ ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 = \Big((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \ ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_1 = \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

- $r = 2$

$$\mathfrak{n}_2^+ = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \quad , \quad \mathfrak{n}_2^- = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4 \quad , \quad \mathfrak{n}^+(2) = \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6 \ ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_2 = \Big((\mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4 \oplus \mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \ ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_2 = \overline{\mathfrak{b}}_2 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

- $r = 3 = n$:

$$\mathfrak{n}_3^+ = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6 \ , \ \mathfrak{n}_3^- = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3 \oplus \mathbb{C}f_4 \oplus \mathbb{C}f_5 \oplus \mathbb{C}f_6 \quad , \quad \mathfrak{n}^+(3) = \{0\} \ ,$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_3 = \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6 \ ,$$

$$\widehat{\mathfrak{b}}_3 = \overline{\mathfrak{b}}_3 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

Portanto, $\widehat{\mathfrak{b}}_0 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0)$, $\widehat{\mathfrak{b}}_1 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1)$, $\widehat{\mathfrak{b}}_2 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2)$ e $\widehat{\mathfrak{b}}_3 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_3)$.

Observamos que a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2')$ que aparece no Apêndice A na Subseção A.3.3 não foi descrita aqui. Posteriormente, discutiremos mais sobre essa subálgebra de Borel, que dará origem a um novo módulo de Wakimoto Intermediário (Capítulo 4).

Fixe $\widetilde{\lambda} \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ e considere um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo

$$M_r(\widetilde{\lambda}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}}_r)} \mathbb{C}v_{\widetilde{\lambda}} \ ,$$

onde $\overline{\mathfrak{b}}_r v_{\widetilde{\lambda}} = 0$ e $hv_{\widetilde{\lambda}} = \widetilde{\lambda}(h)v_{\widetilde{\lambda}}$, para todos $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$.

O módulo $M_r(\widetilde{\lambda})$ é um caso particular de um módulo de Verma (definido na Seção 3.1) estudado por B. Cox em [Cox94] e, por V. Futorny e H. Saifi em [FS93]. Quando escolhemos o parâmetro $r = n$

temos a construção de um **módulo de Verma clássico** (associado à subálgebra de Borel canônica). Por outro lado, se escolhemos o parâmetro $r = 0$ temos um **módulo de Verma Imaginário** (associado à subálgebra de Borel natural).

Seja $\widetilde{\lambda}_r = \widetilde{\lambda}|_{\widehat{\mathfrak{h}}_r}$. O módulo do tipo Verma $M_r(\widetilde{\lambda})$ contém um $\widehat{\mathfrak{g}}_r$-submódulo $M(\widetilde{\lambda}_r) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_r)(1 \otimes v_{\widetilde{\lambda}})$, que é isomorfo a um módulo de Verma clássico para $\widehat{\mathfrak{g}}_r$.

Teorema 3.2.1 ((B. Cox [Cox94]), (V. Futorny e H. Saifi [FS93]))**.** *Se $\widetilde{\lambda}(c) \neq 0$, então a estrutura de submódulo de $M_r(\widetilde{\lambda})$ é completamente determinada pela estrutura de submódulo de $M(\widetilde{\lambda}_r)$. Em particular, $M_r(\widetilde{\lambda})$ é irredutível se $M(\widetilde{\lambda}_r)$ é irredutível.*

Continuemos com a construção dos módulos de Wakimoto Intermediários. As álgebras $\widehat{\mathfrak{a}}$ e $\widehat{\mathfrak{b}}$, descritas abaixo, são chamadas de *Oscillator algebras* sendo abordadas em [Kac90] (Capítulo 14).

Seja $\widehat{\mathfrak{a}}$ a álgebra de Heisenberg de dimensão infinita com geradores $a_{ij,m}$, $a^*_{ij,m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, e $\mathbf{1}$, sujeitos às relações:

(A1) $[a_{ij,m}, a_{kl,n}] = [a^*_{ij,m}, a^*_{kl,n}] = 0$,

(A2) $[a_{ij,m}, a^*_{kl,n}] = \delta_{i,k}\delta_{j,l}\delta_{m+n,0}\mathbf{1}$,

(A3) $[a_{ij,m}, \mathbf{1}] = [a^*_{ij,m}, \mathbf{1}] = 0.$

Tal álgebra tem uma representação $\widetilde{\rho} : \widehat{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$ onde

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{ij,m} \mid i, j, m \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq j \leq n] \tag{3.10}$$

denota a álgebra sobre $\mathbb{C}$ gerada pelas indeterminadas $x_{ij,m}$ e $\widetilde{\rho}$ é definida por:

$$\widetilde{\rho}(a_{ij,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{ij,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \text{ e } j \leq r \\ x_{ij,m} & , \text{ caso contrário.} \end{cases} , \tag{3.11}$$

$$\widetilde{\rho}(a^*_{ij,m}) = \begin{cases} x_{ij,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \text{ e } j \leq r \\ -\partial/\partial x_{ij,-m} & , \text{ caso contrário.} \end{cases} , \tag{3.12}$$

e $\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1$. Neste caso, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ é um $\widehat{\mathfrak{a}}$-módulo gerado por $1 =: |0\rangle$, onde:

$$a_{ij,m}|0\rangle = 0, \;\; m \geq 0 \text{ e } j \leq r \quad , \quad a^*_{ij,m}|0\rangle = 0, \;\; m > 0 \text{ ou } j > r.$$

$\widehat{\mathfrak{a}}_r$ denota a subálgebra gerada por $a_{ij,m}$, $a^*_{ij,m}$ e $\mathbf{1}$, onde $1 \leq i \leq j \leq r$ e $m \in \mathbb{Z}$. Se $r = 0$ definimos $\widehat{\mathfrak{a}}_r = \{0\}$.

Sejam $A_n = \Big((\alpha_i, \alpha_j) \Big)$ a matriz de Cartan para $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ e

$$\mathfrak{B} = \gamma^2 A_n - (r+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-r} \end{pmatrix} + r(\delta_{i,r+1} \cdot \delta_{j,r+1})_{1 \le i,j \le n} E_{r+1,r+1} \ , \tag{3.13}$$

isto é, para $1 \le i, j \le n$:

$$\mathfrak{B}_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j) \Big(\gamma^2 - \delta_{i>r}\delta_{j>r}(r+1) + \frac{r}{2}\delta_{i,r+1}\delta_{j,r+1} \Big) \quad , \tag{3.14}$$

onde

$$\delta_{i>r} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \quad i > r \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Temos também a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ com geradores b_{im}, $1 \le i \le n$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{1}$, com relações

(B1) $[b_{im}, b_{jp}] = m\mathfrak{B}_{ij}\delta_{m+p,0}\mathbf{1}$,

(B2) $[b_{im}, \mathbf{1}] = 0$.

Para cada $1 \le i \le n$ fixemos $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e consideremos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Então a álgebra $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem uma representação $\rho_\lambda : \widehat{\mathfrak{b}} \to \mathrm{End}(\mathbb{C}[\mathbf{y}]_\lambda)$ onde

$$\mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[y_{i,m} \mid i, m \in \mathbb{N}^*, 1 \le i \le n] \tag{3.15}$$

e ρ_λ é definida em $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ por

$$\rho_\lambda(b_{i0}) = \lambda_i \quad , \quad \rho_\lambda(b_{i,-m}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{im}) = m\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ , \tag{3.16}$$

para $m > 0$ e $\rho_\lambda(\mathbf{1}) = 1$. Aqui denotamos por

$$\mathbf{y}_m = (y_{1m}, \cdots, y_{nm}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} = \Big(\frac{\partial}{\partial y_{1m}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{nm}} \Big)$$

e $\mathbf{e}_i$ são vetores em $\mathbb{C}^n$ tais que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathfrak{B}_{ij}$, onde $\cdot$ simboliza o produto interno usual.

Considere para $1 \le i \le n$, as seguintes distribuições formais

$$e_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e_{im} z^{-m-1} \quad , \quad f_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{im} z^{-m-1} \quad , \quad h_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{im} z^{-m-1} \quad ,$$

onde e_i, f_i, h_i, com $i = 1, \ldots, n$, são os geradores da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$.

Teorema 3.2.2 (B. Cox e V. Futorny [CF04]). *Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $\lambda_i = \lambda(h_i)$. As funções geradoras*

$$\rho(c) = \gamma^2 - (r+1)$$

$$\rho(f_i)(z) = a_{ii} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}a^*_{i+1,j}$$

$$\rho(h_i)(z) = 2\colon a_{ii}a^*_{ii}\colon + \sum_{j=1}^{i-1}(\colon a_{ji}a^*_{ji}\colon - \colon a_{j,i-1}a^*_{j,i-1}\colon) + \sum_{j=i+1}^{n}(\colon a_{ij}a^*_{ij}\colon - \colon a_{i+1,j}a^*_{i+1,j}\colon) + b_i$$

$$\rho(e_i)(z) = \colon a^*_{ii}\left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1}a^*_{k,i-1} - \sum_{k=1}^{i} a_{ki}a^*_{ki}\right)\colon + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i+1,k}a^*_{i,k} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1}a^*_{k,i} - a^*_{ii}b_i +$$

$$-(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i\leq r}(i+1) - \gamma^2)\partial_z a^*_{ii}$$

definem uma ação dos geradores e_{im}, f_{im}, h_{im}, $i = 1, \ldots, n$, $m \in \mathbb{Z}$ e c, no Espaço de Fock $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]$. Acima, a_{ij}, a^*_{ij} e b_i denotam $a_{ij}(z)$, $a^*_{ij}(z)$ e $b_i(z)$, respectivamente.

Observamos que $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\Big)$ e $\rho(X)_m = \rho(X_m)$, para $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$.

O Teorema 3.2.2 define uma realização do tipo bóson de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C})$ e uma estrutura de módulo no Espaço de Fock $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]$ que depende do parâmetro r, $0 \leq r \leq n$ (no Capítulo 2, Seção 2.7, discutimos o Espaço de Fock com alguns detalhes sobre a sua estrutura de álgebra de vertex). Tais módulos são chamados de **módulos de Wakimoto Intermediários** e são denotados por $W_{n,r}(\lambda,\gamma)$.

Em [CF04] foi verificado que o módulo de Wakimoto Intermediário $W_{n,r}(\lambda,\gamma)$ tem a propriedade que uma dada subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_r$ (3.9) aniquila o vetor $(1 \otimes 1) \in (\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}])$, $h(1 \otimes 1) = \lambda(h)(1 \otimes 1)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$ e $c(1 \otimes 1) = (\gamma^2 - (r+1))(1 \otimes 1)$.

Nas primeiras investigações e estudos sobre esses módulos, o autor desta tese observou que de fato a subálgebra que aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$ não é a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_r$, com $0 \leq r < n$, mas a subálgebra torcida $\overline{\mathfrak{b}}_r^w$ por um elemento w do grupo de Weyl $\mathfrak{S}_{n+1}$ da álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$. Analisando alguns casos dos parâmetros n e r é possível encontrar o elemento w correspondente.

Se $n = 2$ temos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Quando $r = 1$ tomamos o elemento $w = (1\ 2)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_3$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$.

Se $n = 3$ temos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$. Quando $r = 1$ tomamos o elemento $w = (1\ 2)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_4$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$. Quando $r = 2$ tomamos o elemento $w = (1\ 3)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_4$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_2^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$.

Se $n = 4$ temos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5,\mathbb{C})$. Quando $r = 1$ tomamos o elemento $w = (1\ 2)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_5$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$. Quando $r = 2$ tomamos o elemento $w = (1\ 3)$ no grupo simétrico

$\mathfrak{S}_5$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_2^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$. Quando $r = 3$ tomamos o elemento $w = (1\ 4)(2\ 3)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_5$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_3^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$. Notamos que quando $r = 1$ temos $w = (1\ \ r+1)$, quando $r = 2$ temos $w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)$ e quando $r = 3$ temos $w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)$.

Se $n = 5$ temos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$. Quando $r = 1$ tomamos o elemento $w = (1\ 2)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_6$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$. Quando $r = 2$ tomamos o elemento $w = (1\ 3)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_6$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_2^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$. Quando $r = 3$ tomamos o elemento $w = (1\ 4)(2\ 3)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_6$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_3^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$. Quando $r = 4$ tomamos o elemento $w = (1\ 5)(2\ 4)$ no grupo simétrico $\mathfrak{S}_6$ e de fato, $\overline{\mathfrak{b}}_4^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$. Notamos que quando $r = 1$ temos $w = (1\ \ r+1)$, quando $r = 2$ temos $w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)$, quando $r = 3$ temos $w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)$ e quando $r = 4$ temos $w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)(3\ \ r-1)$.

Dessa forma, dados os parâmetros n e r, com $0 \leq r < n$, o elemento correspondente w do grupo de Weyl $\mathfrak{S}_{n+1}$ para definir $\overline{\mathfrak{b}}_r^w$ é do tipo

$$w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)(3\ \ r-1)(4\ \ r-2)\cdots(u\ \ r-u+2) \tag{3.17}$$

onde cada transposição que aparece em w é do tipo $(i\ j)$, com $i \leq j$, somente transposições disjuntas aparecem no produto e u é o maior inteiro tal que $1 \leq u \leq \frac{r}{2} + 1$.

De fato, a subálgebra que aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$ é a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_r^w$, com $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ conforme (3.17). Portanto, podemos utilizar a notação $W_{n,r}^w(\lambda, \gamma)$ ao invés de $W_{n,r}(\lambda, \gamma)$, e por vezes ao invés de chamá-lo de módulo de Wakimoto Intermediário, podemos chamá-lo de **módulo de Wakimoto Intermediário torcido pelo elemento** w. O módulo $W_{n,r}^w(\lambda, \gamma)$ é um representante da família de módulos de Wakimoto Intermediários com parâmetros n e r. Por meio de $W_{n,r}^w(\lambda, \gamma)$ podemos encontrar o representante $W_{n,r}^e(\lambda, \gamma)$ desta família, onde e é o elemento identidade em $\mathfrak{S}_{n+1}$, e então descrever todas as torções por elementos do grupo de Weyl finito $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Em [CF04] também foi verificado que se considerarmos o $\widehat{\mathfrak{g}}_r$-submódulo $W = U(\widehat{\mathfrak{g}}_r)(1 \otimes 1) \cong W_{r,r}(\lambda, \gamma)$ de $W_{n,r}(\lambda, \gamma)$, então W é isomorfo ao **módulo de Wakimoto** $W_{\lambda(r), \widetilde{\gamma}}$ de B. Feigin e E. Frenkel [FF88] onde $\lambda(r) = \lambda|_{\mathfrak{h}_r}$ e $\widetilde{\gamma} = \gamma^2 - (r+1)$.

Considere $\widetilde{\lambda} \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ tal que $\widetilde{\lambda}|_{\mathfrak{h}} = \lambda$, $\widetilde{\lambda}(c) = \gamma^2 - (r+1)$, um módulo do tipo Verma $M_r(\widetilde{\lambda})$ e seu $\widehat{\mathfrak{g}}_r$-submódulo $M(\widetilde{\lambda}_r)$. Suponha que $M(\widetilde{\lambda}_r)$ é irredutível. Neste caso, o módulo de Wakimoto $W_{\lambda(r), \widetilde{\gamma}}$ é isomorfo à $M(\widetilde{\lambda}_r)$. Seja $\widetilde{W} = U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\lambda(r), \widetilde{\gamma}}$ e assuma que $\lambda(c) \neq 0$. Então, pelo Teorema 3.2.1 o módulo $M_r(\widetilde{\lambda})$ é irredutível e, portanto, isomorfo à $\widetilde{W}$. Assim, o Teorema 3.2.2 fornece uma realização do tipo bóson para módulos do tipo Verma genéricos. Se $r = n$ esta construção coincide com a realização do tipo bóson de **módulos de Wakimoto** de B. Feigin e E. Frenkel em [FF88]. Por outro lado, quando

$r = 0$, a representação obtida fornece uma realização no Espaço de Fock (isomorfa a um quociente do **módulo de Verma Imaginário**) descrita no trabalho de B. Cox [Cox05].

Precisamos relembrar os conceitos de **campo** e **produto normal ordenado** já discutidos no Capítulo 2 na Seção 2.1. Para qualquer sequência de elementos $\{a_{(m)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ no anel $\mathrm{End}(V)$, onde V é um espaço vetorial, a distribuição formal

$$a(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{(m)} z^{-m-1}$$

é chamada de **campo**, se para qualquer $v \in V$, $a_{(m)}v = 0$, para $m \gg 0$. Para um campo tal que $a_{(m)}$ são operadores de criação para $m \ll 0$, seja:

$$a(z)_- := \sum_{m\geq 0} a_{(m)} z^{-m-1} \quad , \quad a(z)_+ := \sum_{m<0} a_{(m)} z^{-m-1}.$$

Considerando os módulos de Wakimoto Intermediários e o Teorema 3.2.2, observe que $a_{ij}(z)$ para $j > r$ não é um campo enquanto $a^*_{ij}(z)$ é sempre um campo.

De acordo com [CF04], usaremos a seguinte convenção para $j > r$:

$$a_{ij}(z)_- = 0 \quad , \quad a_{ij}(z)_+ = a_{ij}(z) \ ,$$

$$a^*_{ij}(z)_- = a^*_{ij}(z) \quad , \quad a^*_{ij}(z)_+ = 0.$$

O **produto normal ordenado** de duas distribuições formais $a(z)$ e $b(w)$ é definido por:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} : a_m b_n : z^{-m-1} w^{-n-1} =: a(z)b(w) := \Big(a(z)_+ b(w)\Big) + \Big(b(w)a(z)_-\Big).$$

Na construção dos módulos de Wakimoto Intermediários, para qualquer $1 \leq i \leq j \leq n$, definimos:

$$a^*_{ij}(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{ij,m} z^{-m} \quad , \quad a_{ij}(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{ij,m} z^{-m-1} \quad , \quad b_i(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_{im} z^{-m-1}.$$

Devemos salientar que enquanto $: a^1(z_1)\cdots a^m(z_m) :$ é sempre definido como uma série de potências formal, nós somente definiremos $: a(z)b(z) := \lim_{w\to z} : a(z)b(w) :$ para certos pares $(a(z), b(w))$. Por exemplo:

$$: a_{ij}(z)a^*_{kl}(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} : a_{ij,n} a^*_{kl,m-n} : \right) z^{-m-1}$$

é bem definido como um elemento em $\mathrm{End}\big(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\big)[\![z, z^{-1}]\!]$ para todos $l > r$ ou se vale simultaneamente $l \leq r$ e $j \leq r$. Por exemplo, se $n = 2$ e $r = 1$ temos que $: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :$, $: a_{ij}(z)a^*_{12}(z) :$ e $: a_{ij}(z)a^*_{22}(z) :$ estão bem definidos.

Então definimos recursivamente

$$:a^1(z_1)\cdots a^k(z_k):=\,:a^1(z_1)\Big(:a^2(z_2)\Big(:\cdots:a^{k-1}(z_{k-1})a^k(z_k):\Big)\cdots:\Big):$$

enquanto o produto normal ordenado

$$:a^1(z)\cdots a^k(z):=\lim_{z_1,z_2,\ldots,z_k\to z}:a^1(z_1)\Big(:a^2(z_2)\Big(:\cdots:a^{k-1}(z_{k-1})a^k(z_k):\Big)\cdots:\Big):$$

somente será definido para certas k-uplas $(a^1,\ldots,a^k)$.

Agora, apresentaremos os módulos de Wakimoto intermediários (torcidos) e mostrar as fórmulas explícitas da realização para $n=1$ (Seção 3.3), $n=2$ (Seção 3.4) e $n=3$ (Seção 3.6), isto é, $\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, $\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ e $\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$, conforme a representação ρ apresentada no Teorema 3.2.2, utilizando $0\leq r\leq n$. Na Seção 3.5 discutiremos algumas torções desses módulos no caso $\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$.

3.3 Caso $n=1$: módulos de Wakimoto Intermediários $W_{1,r}(\lambda,\gamma)$

3.3.1 $(n=1,\ r=0)$: $W_{1,0}(\lambda,\gamma)$

Mostremos que neste caso, a representação do Teorema 3.2.2 [CF04] é a mesma que aparece em [Cox05]. Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, com geradores e_1, f_1 e h_1. Então, os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ são e_{1m}, f_{1m}, h_{1m} e c, com $m\in\mathbb{Z}$. Considere as seguintes distribuições formais:

$$e_1(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e_{1m}z^{-m-1}\quad,\quad f_1(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}f_{1m}z^{-m-1}\quad,\quad h_1(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}h_{1m}z^{-m-1}.$$

Como $1\leq i\leq j\leq n=1$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}, a^*_{11,m}$ e $\mathbf{1}$, com $m\in\mathbb{Z}$. Assim, $\widetilde{\rho}(\mathbf{1})=1$, $\widetilde{\rho}(a_{11,m})=x_{11,m}$ e $\widetilde{\rho}(a^*_{11,m})=-\partial/\partial x_{11,-m}$, porque $j=1>r=0$.

A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem os geradores b_{1m} e $\mathbf{1}$, com $m\in\mathbb{Z}$. Então, $\rho_\lambda(b_{10})=\lambda_1$, $\rho_\lambda(b_{1,-m})=y_{1m}$ e $\rho_\lambda(b_{1m})=2km\ \partial/\partial y_{1m}$, com $m>0$, $\lambda_1\in\mathbb{C}$ fixo e $k=\gamma^2-1$.

Além disso, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]=\mathbb{C}[x_{11,m}\mid m\in\mathbb{Z}]$ e $\mathbb{C}[\mathbf{y}]=\mathbb{C}[y_{1m}\mid m\in\mathbb{N}^*]$.

Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n = 1$ e $r = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 1 \\
\rho(f_1)(z) &= a_{11}(z) \\
\rho(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + b_1(z) \\
\rho(e_1)(z) &= - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : - a_{11}^*(z)b_1(z) + k\partial_z a_{11}^*(z)
\end{aligned}$$

onde $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$ é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$, e $\rho(a_1)_m = \rho(a_{1m})$, para $m \in \mathbb{Z}$ e $a \in \{e, f, h\}$.

Em [CF04] as fórmulas aparecem mais condensadas utilizando a linguagem das distribuições formais. Compararemos e analisaremos com mais detalhes ao longo desse capítulo algumas fórmulas exibidas em [CF04]. O autor desta tese apresenta fórmulas mais explícitas, obtidas após cuidadoso trabalho do mesmo. A seguir são exibidas fórmulas explícitas que não aparecem em [CF04], porém são necessárias para um aprofundamento no estudo dos módulos de Wakimoto Intermediários e são essenciais para o desenvolvimento do próximo capítulo.

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(f_{1m}) z^{-m-1} = \rho(f_1)(z) \quad = \quad a_{11}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{11,m} z^{-m-1}.$$

Portanto, para $m \in \mathbb{Z}$:

$$f_{1m} \mapsto x_{11,m}$$

Sabemos que $: a_{11}(z)a_{11}^*(z) := \Big(a_{11}(z)_+ a_{11}^*(z)\Big) + \Big(a_{11}^*(z)a_{11}(z)_-\Big)$ e, por convenção $a_{11}(z)_- = 0$ e $a_{11}(z)_+ = a_{11}(z)$, pois $j = 1 > r = 0$. Assim, $: a_{11}(z)a_{11}^*(z) := a_{11}(z)a_{11}^*(z)$.

Então $\rho(h_1)(z) = 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + b_1(z) = 2a_{11}(z)a_{11}^*(z) + b_1(z)$.

$$\begin{aligned}
\rho(h_1)(z) &= 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{11,m} z^{-m-1} \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-\partial/\partial x_{11,-p}) z^{-p} + b_1(z) \\
&= -2 \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,m} \partial/\partial x_{11,p} z^{-m+p-1} + b_1(z) \\
&= -2 \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,m+p} \partial/\partial x_{11,p} z^{-m-1} + b_1(z) \\
&= -2 \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,m+p} \partial/\partial x_{11,p} z^{-m-1} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\delta_{m,0}\lambda_1 + \delta_{m>0} 2km\partial/\partial y_{1m} + \delta_{m<0} y_{1,-m}) z^{-m-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(h_{1m})z^{-m-1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big((-2\sum_{p\in\mathbb{Z}} x_{11,m+p}\partial/\partial x_{11,p}) + (\delta_{m,0}\lambda_1 + \delta_{m>0}2km\partial/\partial y_{1m} + \delta_{m<0}y_{1,-m}) \Big) z^{-m-1}.$$

Portanto, para $m \in \mathbb{Z}$:

$$h_{1m} \mapsto (-2\sum_{p\in\mathbb{Z}} x_{11,m+p}\partial/\partial x_{11,p}) + (\delta_{m,0}\lambda_1 + \delta_{m>0}2km\partial/\partial y_{1m} + \delta_{m<0}y_{1,-m})$$

Sabemos que

$$: a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) :=: a^*_{11}(z) : a_{11}(z)a^*_{11}(z) ::= \Big(a^*_{11}(z)_+ a_{11}(z)a^*_{11}(z) \Big) + \Big(a_{11}(z)a^*_{11}(z)a^*_{11}(z)_- \Big)$$

e, por convenção $a^*_{11}(z)_+ = 0$ e $a^*_{11}(z)_- = a^*_{11}(z)$, pois $j = 1 > r = 0$. Assim, $: a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) :=$ $a_{11}(z)a^*_{11}(z)a^*_{11}(z)$. Então

$$\rho(e_1)(z) = - : a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : - a^*_{11}(z)b_1(z) + k\partial_z a^*_{11}(z) = -a_{11}(z)a^*_{11}(z)a^*_{11}(z) - a^*_{11}(z)b_1(z) + k\partial_z a^*_{11}(z).$$

$$\begin{aligned}
\rho(e_1)(z) &= -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{11,m}z^{-m} \sum_{p\in\mathbb{Z}} a^*_{11,p}z^{-p} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_{1m}z^{-m-1} + k\partial_z \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} \\
&= -\sum_{s\in\mathbb{Z}} x_{11,s}z^{-s-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-\partial/\partial x_{11,-m})z^{-m} \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-\partial/\partial x_{11,-p})z^{-p} + k\partial_z \sum_{s\in\mathbb{Z}} -\partial/\partial x_{11,-s}z^{-s} + \\
&\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}} (-\partial/\partial x_{11,-s})z^{-s} \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\delta_{m,0}\lambda_1 + \delta_{m<0}y_{1,-m} + \delta_{m>0}2km\partial/\partial y_{1m})z^{-m-1} \\
&= -\sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{11,p} z^{-s+m+p-1} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \partial/\partial x_{11,s}(\delta_{m,0}\lambda_1 + \delta_{m<0}y_{1,-m} + \delta_{m>0}2km\partial/\partial y_{1m})z^{s-m-1} + k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\partial/\partial x_{11,-s}z^{-s-1} \\
&= -\sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s+m+p}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{11,p} z^{-s-1} + \sum_{s,m\in\mathbb{Z}} \delta_{m<0}\partial/\partial x_{11,s}y_{1,-m}z^{s-m-1} + \\
&\quad + \sum_{s,m\in\mathbb{Z}} \delta_{m>0}\partial/\partial x_{11,s}2km\partial/\partial y_{1m}z^{s-m-1} + \sum_{s,m\in\mathbb{Z}} \delta_{m,0}\partial/\partial x_{11,s}\lambda_1 z^{s-m-1} + k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\partial/\partial x_{11,-s}z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho(e_1)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \Big(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s+m+p}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{11,p} \Big) z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{m>0} y_{1m}\partial/\partial x_{11,-m-s} \Big) z^{-s-1} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{m>0} 2km\partial/\partial y_{1m}\partial/\partial x_{11,m-s} \Big) z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} \lambda_1\partial/\partial x_{11,-s}z^{-s-1} + k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\partial/\partial x_{11,-s}z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} e_{1s} \ \mapsto \ & -\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s+m+p}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{11,p} + \sum_{m>0} y_{1m}\partial/\partial x_{11,-m-s} + 2k\sum_{m>0} m\partial/\partial y_{1m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \\ & +(\lambda_1 + sk)\partial/\partial x_{11,-s} \end{aligned}$$

Logo, podemos descrever a representação ρ por meio da ação de cada gerador de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$. Portanto, as ações de e_{1s}, f_{1s}, h_{1s}, $s \in \mathbb{Z}$, c em $\mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$ são:

$$\begin{aligned} f_{1s} \ &\mapsto \ x_{11,s} \\ h_{1s} \ &\mapsto \ (-2\sum_{p\in\mathbb{Z}} x_{11,s+p}\partial/\partial x_{11,p}) + (\delta_{s,0}\lambda_1 + \delta_{s>0}2sk\partial/\partial y_{1s} + \delta_{s<0}y_{1,-s}) \\ e_{1s} \ &\mapsto \ -\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s+m+p}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{11,p} + \sum_{m>0} y_{1m}\partial/\partial x_{11,-m-s} + 2k\sum_{m>0} m\partial/\partial y_{1m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \\ & \quad +(\lambda_1 + sk)\partial/\partial x_{11,-s} \\ c \ &\mapsto \ \gamma^2 - 1 = k \end{aligned}$$

Observe que $\rho(h_{1s})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $\rho(e_{1m})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, isto é,

$$\overline{\mathfrak{b}}_0 = \left(\mathfrak{n}^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\right) \oplus \left(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right)$$

aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$, onde $\widehat{\mathfrak{b}}_0 = \overline{\mathfrak{b}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ é a subálgebra de Borel natural de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$.

Em [BF90], D. Bernard e G. Felder, exibem uma realização do tipo bóson do módulo de Verma Imaginário sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, estendida ao caso $\widehat{\mathfrak{sl}}(n,\mathbb{C})$ por B. Cox em [Cox05], onde a seguinte realização do tipo bóson de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ no Espaço de Fock $\mathbb{C}[x_m \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_m \mid m > 0]$ é apresentada:

$$\begin{aligned} f_s \ &\mapsto \ x_s \\ h_s \ &\mapsto \ -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{m+s}\partial/\partial x_m + \delta_{s<0}y_{-s} + \delta_{s>0}2sK\partial/\partial y_s + \delta_{s,0}J \\ e_s \ &\mapsto \ -\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} x_{k+m+s}\partial^2/\partial x_k\partial x_m + \sum_{k>0} y_k\partial/\partial x_{-k-s} + 2K\sum_{m>0} m\partial^2/\partial y_m\partial x_{m-s} + (J + sK)\partial/\partial x_{-s} \\ c \ &\mapsto \ K \\ J \ &= \ \lambda(h_0) \end{aligned}$$

Concluímos que a representação apresentada no Teorema 3.2.2 [CF04] para $n = 1$ e $r = 0$ é a mesma representação apresentada no trabalho de D. Bernard e G. Felder [BF90] (descrita também em [Cox05]).

3.3.2 $(n=1,\ r=1)$: $W_{1,1}(\lambda,\gamma)$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, com geradores e_1, f_1 e h_1. Então os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ são e_{1m}, f_{1m}, h_{1m} e c, com $m\in\mathbb{Z}$. Considere as seguintes distribuições formais:

$$e_1(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} e_{1m}z^{-m-1} \quad , \quad f_1(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{1m}z^{-m-1} \quad , \quad h_1(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{1m}z^{-m-1}.$$

Para um elemento $\gamma\in\mathbb{C}^*$, seja $k=\gamma^2-(r+1)=\gamma^2-2$.

Como $1\le i\le j\le n=1$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}, a^*_{11,m}$ e $\mathbf{1}$, com $m\in\mathbb{Z}$. Assim,

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m})=\begin{cases}\partial/\partial x_{11,m} & ,\ \text{se}\quad m\ge 0\\ x_{11,m} & ,\ \text{se}\quad m<0\end{cases},$$

$$\widetilde{\rho}(a^*_{11,m})=\begin{cases}x_{11,-m} & ,\ \text{se}\quad m\le 0\\ -\partial/\partial x_{11,-m} & ,\ \text{se}\quad m>0\end{cases},$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1})=1.$$

Note que neste caso, nunca acontece $j>r$, pois $j=1\le r=1$.

A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem geradores b_{1m} e $\mathbf{1}$, com $m\in\mathbb{Z}$. Então,

$$\rho_\lambda(b_{10})=\lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m})=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1m})=m\mathbf{e}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}_m} \ ,$$

com $m>0$ e $\lambda_1\in\mathbb{C}$ fixo.

Observe que $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1=\mathfrak{B}_{11}=2\gamma^2$, onde $\mathbf{e}_1\in\mathbb{C}$.

Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n=1$ e $r=1$, temos:

$$\begin{aligned}\rho(c) &= k=\gamma^2-2\\ \rho(f_1)(z) &= a_{11}(z)\\ \rho(h_1)(z) &= 2:a_{11}(z)a^*_{11}(z):+b_1(z)\\ \rho(e_1)(z) &= -:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z):-a^*_{11}(z)b_1(z)+k\partial_z a^*_{11}(z)\end{aligned}$$

onde $\rho:\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})\to\mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1m}\mid m\in\mathbb{N}^*]\Big)$ é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$.

Observe que $\rho(f_{1s})(1\otimes 1)=0$, $\forall s\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $\rho(e_{1m})(1\otimes 1)=0$ e $\rho(h_{1m})(1\otimes 1)=0$, $\forall m\in\mathbb{Z}_{>0}$. Temos também que $\rho(e_{10})(1 \otimes 1) = -(x_{11,0} \otimes \lambda_1) \neq 0$. Assim, temos que a subálgebra

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 = \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathfrak{n}^+ ,$$

onde $\widehat{\mathfrak{b}}_1 = \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ é a subálgebra de Borel canônica de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$, não aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$, porque $\rho(e_{10})(1 \otimes 1) \neq 0$. Usando o elemento $w = (1\ 2)$ em $\mathfrak{S}_2$ (grupo simétrico em 2 elementos), temos que

$$\overline{\mathfrak{b}}_1^w = \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathfrak{n}^-$$

aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$, onde $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ é a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_1$ torcida pelo elemento w.

Em [FF90b] temos a seguinte representação da álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ no espaço $M \otimes \pi_{\chi/\nu,\nu^2}$, onde M é uma representação irredutível de uma álgebra de Heisenberg específica e $\nu \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c &\mapsto K = \nu^2 - 2 \\
F_1(z) &= a_{11}(z) \\
H_1(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : +\nu b_1(z) \\
E_1(z) &= - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : -\nu a_{11}^*(z)b_1(z) - K(z\frac{d}{dz})a_{11}^*(z).
\end{aligned}$$

O espaço $M \otimes \pi_{\chi/\nu,\nu^2}$, $(\nu \neq 0)$ com esta estrutura de módulo, é um módulo de Wakimoto e é denotado por $W_{\chi,\nu}$. As distribuições formais neste caso são da forma $A(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A(n)z^n$. Observamos que na construção dos módulos de Wakimoto [FF90b], B. Feigin e E. Frenkel consideraram o **módulo de Verma contragradiente** (relacionado com a subálgebra de Borel canônica oposta) ao invés do módulo de Verma clássico (relacionado com a subálgebra de Borel canônica). Isso explica a necessidade da utilização da subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ ao invés de $\overline{\mathfrak{b}}_1$ na definição do módulo de Wakimoto Intermediário $W_{1,1}(\lambda, \gamma)$.

Concluímos que a representação apresentada no Teorema 3.2.2 [CF04] para $n = 1 = r$ é a mesma representação apresentada nos trabalhos de B. Feigin e E. Frenkel [FF88, FF90b].

3.4 Caso $n = 2$: módulos de Wakimoto Intermediários $W_{2,r}(\lambda, \gamma)$

3.4.1 $(n = 2, r = 0)$: $W_{2,0}(\lambda, \gamma)$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, com geradores e_1, e_2, f_1, f_2, h_1 e h_2. Observe que $e_3 = [e_1, e_2]$ e $f_3 = [f_2, f_1]$. Então, os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$ são $e_{1m}, e_{2m}, f_{1m}, f_{2m}, h_{1m}, h_{2m}$ e c, com $m \in \mathbb{Z}$.

Considere as seguintes distribuições formais:

$$e_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e_{im} z^{-m-1} \quad , \quad f_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{im} z^{-m-1} \quad , \quad h_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{im} z^{-m-1} \ ,$$

com $i = 1, 2$.

Para um elemento $\gamma \in \mathbb{C}^*$, seja $k = \gamma^2 - (r+1) = \gamma^2 - 1$.

Como $1 \leq i \leq j \leq n = 2$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}$, $a_{12,m}$, $a_{22,m}$, $a^*_{11,m}$, $a^*_{12,m}$, $a^*_{22,m}$ e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Seja $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}]$. Assim,

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = x_{11,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{12,m}) = x_{12,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{22,m}) = x_{22,m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = -\partial/\partial x_{11,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = -\partial/\partial x_{12,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = -\partial/\partial x_{22,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1 \ ,$$

pois para $j = 1, 2$ temos $j > r = 0$.

A matriz de Cartan associada com $\mathfrak{g}$ é $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Então, como $r = 0$, construímos a matriz $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2(\gamma^2-1) & -(\gamma^2-1) \\ -(\gamma^2-1) & 2(\gamma^2-1) \end{pmatrix}$.

A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem geradores b_{1m}, b_{2m} e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\rho_\lambda(b_{10}) = \lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m}) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1m}) = m\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{20}) = \lambda_2 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2,-m}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2m}) = m\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m})$ e $\partial/\partial\mathbf{y}_m = (\partial/\partial y_{1m}, \partial/\partial y_{2m})$.

Observe que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathfrak{B}_{ii} = 2(\gamma^2 - 1)$ e $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathfrak{B}_{ij} = -(\gamma^2 - 1)$, $(i \neq j)$. Assim, se $\mathbf{e}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{e}_2 = (x_2, y_2)$ temos $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2k$ e $x_1x_2 + y_1y_2 = -k$, com $k = \gamma^2 - 1$.

Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n = 2$ e $r = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 1 \\
\rho(f_1)(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a^*_{22}(z) \\
\rho(f_2)(z) &= a_{22}(z) \\
\rho(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + b_1(z) \\
\rho(h_2)(z) &= 2 : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + b_2(z) \\
\rho(e_1)(z) &= - : a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + a_{22}(z)a^*_{12}(z) - a^*_{11}(z)b_1(z) + k\partial_z a^*_{11}(z) \\
\rho(e_2)(z) &= : a^*_{22}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : - : a^*_{22}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a^*_{22}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + \\
&\quad - a_{11}(z)a^*_{12}(z) - a^*_{22}(z)b_2(z) + k\partial_z a^*_{22}(z)
\end{aligned}$$

onde $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$ é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$.

Como $r = 0$ e $j = 1, 2 > r$ temos $a_{11}(z)$, $a_{12}(z)$ e $a_{22}(z)$ não são campos, enquanto $a^*_{11}(z)$, $a^*_{12}(z)$ e $a^*_{22}(z)$ são. Além disso, usaremos as seguintes convenções: $a_{11}(z)_+ = a_{11}(z)$, $a_{11}(z)_- = 0$, $a_{12}(z)_+ = a_{12}(z)$, $a_{12}(z)_- = 0$, $a_{22}(z)_+ = a_{22}(z)$, $a_{22}(z)_- = 0$, $a^*_{11}(z)_+ = 0$, $a^*_{11}(z)_- = a^*_{11}(z)$, $a^*_{12}(z)_+ = 0$, $a^*_{12}(z)_- = a^*_{12}(z)$, $a^*_{22}(z)_+ = 0$ e $a^*_{22}(z)_- = a^*_{22}(z)$.

Então:

$$: a_{11}(z)a^*_{11}(z) := \Big(a_{11}(z)_+ a^*_{11}(z)\Big) + \Big(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-\Big) = a_{11}(z)a^*_{11}(z) \ ,$$

$$: a_{12}(z)a^*_{12}(z) := \Big(a_{12}(z)_+ a^*_{12}(z)\Big) + \Big(a^*_{12}(z)a_{12}(z)_-\Big) = a_{12}(z)a^*_{12}(z) \ ,$$

$$: a_{22}(z)a^*_{22}(z) := \Big(a_{22}(z)_+ a^*_{22}(z)\Big) + \Big(a^*_{22}(z)a_{22}(z)_-\Big) = a_{22}(z)a^*_{22}(z) \ ,$$

$$: a^*_{11}(z) : a_{11}(z)a^*_{11}(z) ::= \Big(a^*_{11}(z)_+ a_{11}(z)a^*_{11}(z)\Big) + \Big(a_{11}(z)a^*_{11}(z)a^*_{11}(z)_-\Big) = a_{11}(z)a^*_{11}(z)a^*_{11}(z) \ ,$$

$$: a^*_{22}(z) : a_{11}(z)a^*_{11}(z) ::= \Big(a^*_{22}(z)_+ a_{11}(z)a^*_{11}(z)\Big) + \Big(a_{11}(z)a^*_{11}(z)a^*_{22}(z)_-\Big) = a_{11}(z)a^*_{11}(z)a^*_{22}(z) \ ,$$

$$: a^*_{22}(z) : a_{12}(z)a^*_{12}(z) ::= \Big(a^*_{22}(z)_+ a_{12}(z)a^*_{12}(z)\Big) + \Big(a_{12}(z)a^*_{12}(z)a^*_{22}(z)_-\Big) = a_{12}(z)a^*_{12}(z)a^*_{22}(z) \ ,$$

$$: a^*_{22}(z) : a_{22}(z)a^*_{22}(z) ::= \Big(a^*_{22}(z)_+ a_{22}(z)a^*_{22}(z)\Big) + \Big(a_{22}(z)a^*_{22}(z)a^*_{22}(z)_-\Big) = a_{22}(z)a^*_{22}(z)a^*_{22}(z).$$

Agora, escreveremos explicitamente a representação ρ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$ descrita acima. Essas fórmulas explícitas não aparecem em [CF04] tendo sido obtidas pelo autor desta tese após cuidadoso trabalho.

$$\begin{aligned}
\rho(f_1)(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a^*_{22}(z) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{22,s}z^{-m-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{22,s-m}\right)z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(a_{11,s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{22,s-m}\right)z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(x_{11,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{22,m-s}\right)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$f_{1s} \mapsto x_{11,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{22,m-s}$$

$$\rho(f_2)(z) = a_{22}(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}z^{-s-1} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} x_{22,s}z^{-s-1}.$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$f_{2s} \mapsto x_{22,s}$$

$$\begin{aligned}
\rho(h_1)(z) &= 2a_{11}(z)a^*_{11}(z) + a_{12}(z)a^*_{12}(z) - a_{22}(z)a^*_{22}(z) + b_1(z) \\
&= 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s} + \\
&\quad - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1} \\
&= 2\sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{11,m}a^*_{11,s}z^{-m-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s}z^{-m-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s}z^{-m-s-1} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2a_{11,m}a^*_{11,s-m} + a_{12,m}a^*_{12,s-m} - a_{22,m}a^*_{22,s-m} + b_{1s}\right)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho(h_1)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}} -2x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} - x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} + \delta_{s<0}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-s} + \\
&\quad + \delta_{s>0}\ s\ \mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s + \delta_{s,0}\lambda_1\Bigg)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} h_{1s} \quad \mapsto \quad & \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-2x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} - x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s}) + \delta_{s<0}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-s} + \\ & + \delta_{s>0}\ s\ \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s + \delta_{s,0}\lambda_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(h_2)(z) &= 2a_{22}(z)a^*_{22}(z) + a_{12}(z)a^*_{12}(z) - a_{11}(z)a^*_{11}(z) + b_2(z) \\ &= 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + \\ &\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1} \\ &= 2\sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s}z^{-m-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s}z^{-m-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{11,m}a^*_{11,s}z^{-m-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1} \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2a_{22,m}a^*_{22,s-m} + a_{12,m}a^*_{12,s-m} - a_{11,m}a^*_{11,s-m} + b_{2s}\Big)z^{-s-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho(h_2)(z) \quad = \quad & \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} -2x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \delta_{s<0}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_{-s} + \\ & + \delta_{s>0}\ s\ \mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s + \delta_{s,0}\lambda_2\Big)z^{-s-1}. \end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} h_{2s} \quad \mapsto \quad & \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-2x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s}) + \delta_{s<0}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_{-s} + \\ & + \delta_{s>0}\ s\ \mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s + \delta_{s,0}\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(e_1)(z) &= -:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): + a_{22}(z)a^*_{12}(z) - a^*_{11}(z)b_1(z) + k\partial_z a^*_{11}(z) \\ &= -a_{11}(z)a^*_{11}(z)a^*_{11}(z) + a_{22}(z)a^*_{12}(z) - a^*_{11}(z)b_1(z) + k\partial_z a^*_{11}(z) \\ &= -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{11,m}z^{-m}\sum_{p\in\mathbb{Z}} a^*_{11,p}z^{-p} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{12,m}z^{-m} + \\ &\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_{1m}z^{-m-1} + k\partial_z\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} \\ &= -\sum_{m,s,p\in\mathbb{Z}} a_{11,s}a^*_{11,m}a^*_{11,p}z^{-m-s-p-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}a^*_{12,m}z^{-m-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}b_{1m}z^{-m-s-1} + \\ &\quad + k\sum_{s\in\mathbb{Z}}(-s)a^*_{11,s}z^{-s-1} \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{11,s-m-p}a^*_{11,m}a^*_{11,p} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{12,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s-m}b_{1m} - ksa^*_{11,s}\Big)z^{-s-1} \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s-m-p}\partial/\partial x_{11,-m}\partial/\partial x_{11,-p} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + ks\partial/\partial x_{11,-s} + \\ &\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}}(\delta_{m,0}\lambda_1\partial/\partial x_{11,m-s} + \delta_{m<0}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \delta_{m>0}\ m\ \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_m\partial/\partial x_{11,m-s})\Big)z^{-s-1}. \end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned}
e_{1s} \mapsto & -\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s-m-p}\partial/\partial x_{11,-m}\partial/\partial x_{11,-p} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\delta_{m,0}\lambda_1\partial/\partial x_{11,m-s} + \delta_{m<0}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \delta_{m>0}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m\partial/\partial x_{11,m-s}) + \\
& + k\ s\ \partial/\partial x_{11,-s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(e_2)(z) &= :a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z): - :a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z): - :a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z): + \\
&\quad -a_{11}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}^*(z)b_2(z) + k\partial_z a_{22}^*(z) \\
&= a_{11}(z)a_{11}^*(z)a_{22}^*(z) - a_{12}(z)a_{12}^*(z)a_{22}^*(z) - a_{22}(z)a_{22}^*(z)a_{22}^*(z) - a_{11}(z)a_{12}^*(z) + \\
&\quad -a_{22}^*(z)b_2(z) + k\partial_z a_{22}^*(z) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{11,m}^*z^{-m}\sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{22,p}^*z^{-p} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}^*z^{-m}\sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{22,p}^*z^{-p} + \\
&\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}^*z^{-m}\sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{22,p}^*z^{-p} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}^*z^{-m} + \\
&\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}^*z^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_{2m}z^{-m-1} + k\sum_{s\in\mathbb{Z}}(-s)a_{22,s}^*z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho(e_2)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{11,s-m-p}a_{11,m}^*a_{22,p}^* - \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m-p}a_{12,m}^*a_{22,p}^* - \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m-p}a_{22,m}^*a_{22,p}^* + \\
&\quad -\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{11,s-m}a_{12,m}^* - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}^*b_{2m} - k\ s\ a_{22,s}^*\Bigg)z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s-m-p}\partial/\partial x_{11,-m}\partial/\partial x_{22,-p} - \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m-p}\partial/\partial x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-p} + \\
&\quad -\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m-p}\partial/\partial x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-p} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{11,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}}(\delta_{m,0}\lambda_2\partial/\partial x_{22,m-s} + \\
&\quad +\delta_{m<0}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m}\partial/\partial x_{22,m-s} + \delta_{m>0}m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m\partial/\partial x_{22,m-s}) + k\ s\ \partial/\partial x_{22,-s}\Bigg)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned}
e_{2s} \mapsto & \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{11,s-m-p}\partial/\partial x_{11,-m}\partial/\partial x_{22,-p} - \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m-p}\partial/\partial x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-p} + \\
& -\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m-p}\partial/\partial x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-p} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{11,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}}(\delta_{m,0}\lambda_2\partial/\partial x_{22,m-s} + \\
& +\delta_{m<0}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m}\partial/\partial x_{22,m-s} + \delta_{m>0}m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m\partial/\partial x_{22,m-s}) + k\ s\ \partial/\partial x_{22,-s}
\end{aligned}$$

Logo, podemos resumir a representação ρ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ em

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$$

explicitando a ação de $e_{1s}, e_{2s}, h_{1s}, h_{2s}, f_{1s}, f_{2s}$, com $s \in \mathbb{Z}$, e c:

$$\begin{array}{rcl} c & \mapsto & k = \gamma^2 - 1 \quad , \quad \lambda(h_{10}) = \lambda_1 \quad , \quad \lambda(h_{20}) = \lambda_2 \\ f_{1s} & \mapsto & x_{11,s} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{12,m} \partial/\partial x_{22,m-s} \\ f_{2s} & \mapsto & x_{22,s} \\ h_{1s} & \mapsto & \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-2x_{11,m} \partial/\partial x_{11,m-s} - x_{12,m} \partial/\partial x_{12,m-s} + x_{22,m} \partial/\partial x_{22,m-s}) + \delta_{s<0} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-s} + \\ & & + \delta_{s>0}\ s\ \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s + \delta_{s,0} \lambda_1 \\ h_{2s} & \mapsto & \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-2x_{22,m} \partial/\partial x_{22,m-s} - x_{12,m} \partial/\partial x_{12,m-s} + x_{11,m} \partial/\partial x_{11,m-s}) + \delta_{s<0} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_{-s} + \\ & & + \delta_{s>0}\ s\ \mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s + \delta_{s,0} \lambda_2 \\ e_{1s} & \mapsto & - \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} x_{11,s-m-p} \partial/\partial x_{11,-m} \partial/\partial x_{11,-p} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{22,s-m} \partial/\partial x_{12,-m} + \\ & & + \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\delta_{m,0} \lambda_1 \partial/\partial x_{11,m-s} + \delta_{m<0} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-m} \partial/\partial x_{11,m-s} + \delta_{m>0} m \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_m \partial/\partial x_{11,m-s}) + \\ & & + k\ s\ \partial/\partial x_{11,-s} \\ e_{2s} & \mapsto & \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} x_{11,s-m-p} \partial/\partial x_{11,-m} \partial/\partial x_{22,-p} - \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} x_{12,s-m-p} \partial/\partial x_{12,-m} \partial/\partial x_{22,-p} + \\ & & - \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} x_{22,s-m-p} \partial/\partial x_{22,-m} \partial/\partial x_{22,-p} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{11,s-m} \partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\delta_{m,0} \lambda_2 \partial/\partial x_{22,m-s} + \\ & & + \delta_{m<0} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_{-m} \partial/\partial x_{22,m-s} + \delta_{m>0} m \mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_m \partial/\partial x_{22,m-s}) + k\ s\ \partial/\partial x_{22,-s} \end{array}$$

Observe que $\rho(h_{1s})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho(h_{2s})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, $\rho(e_{1m})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho(e_{2m})(1 \otimes 1) = 0$ e $\rho(e_{3m})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, pois $e_{3m} = [e_{1u}, e_{2v}]$ com $m = u + v$. Então

$$\overline{\mathfrak{b}}_0 = \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \Big) \oplus \Big((\mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t] \Big)$$

aniquila o vetor $(1 \otimes 1)$, onde $\widehat{\mathfrak{b}}_0 = \overline{\mathfrak{b}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ é a subálgebra de Borel natural de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$. Agora descreveremos a representação de um módulo de Verma Imaginário sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$ segundo o trabalho de B. Cox [Cox05] e concluir que ela é a mesma representação do Teorema 3.2.2 ([CF04]), com $n = 2$ e $r = 0$, descrita acima.

Usando as notações de [Cox05], considere $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ $(n = 3)$. Como $1 \leq i < j \leq 3$ temos os geradores $a_{ij}(m)$ e $a^*_{ij}(m)$, operadores em $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$, com $\mathbf{x} = \{x_{ij}(m) \mid i, j, m \in \mathbb{Z}, 1 \leq i < j \leq 3\}$. Então, sejam $a_{12}(m), a_{13}(m), a_{23}(m), a^*_{12}(m), a^*_{13}(m), a^*_{23}(m)$, com $m \in \mathbb{Z}$ definidos como segue:

$$a_{12}(m) = -x_{12}(m) \quad , \quad a_{13}(m) = -x_{13}(m) \quad , \quad a_{23}(m) = -x_{23}(m) \ ,$$

$$a^*_{12}(m) = \partial/\partial x_{12}(-m) \quad , \quad a^*_{13}(m) = \partial/\partial x_{13}(-m) \quad , \quad a^*_{23}(m) = \partial/\partial x_{23}(-m).$$

Sejam $b_i(m)$, $1 \leq i \leq 3$ operadores em $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$, com $\mathbf{y} = \{y_i(m) \mid i, m \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq 3\}$, definidos como segue:

$$b_1(0) = -\gamma^{-1}\lambda_1^{'} \quad , \quad b_1(-m) = -\gamma^{-1}y_1(m) \quad , \quad b_1(m) = -\gamma m\partial/\partial y_1(m) \ ,$$

$$b_2(0) = -\gamma^{-1}\lambda_2^{'} \quad , \quad b_2(-m) = -\gamma^{-1}y_2(m) \quad , \quad b_2(m) = -\gamma m\partial/\partial y_2(m) \ ,$$

$$b_3(0) = -\gamma^{-1}\lambda_3^{'} \quad , \quad b_3(-m) = -\gamma^{-1}y_3(m) \quad , \quad b_3(m) = -\gamma m\partial/\partial y_3(m) \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda_1^{'}, \lambda_2^{'}, \lambda_3^{'} \in \mathbb{C}$ fixos e $2K = \gamma^2$, com $\gamma \in \mathbb{C}^*$ fixo.

Definimos uma representação $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\Big)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
c &\mapsto K \\
\rho(f_1)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(f_1(m))w^{-m} &= -a_{12}(w) \\
\rho(f_2)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(f_2(m))w^{-m} &= -a_{23}(w) + a_{13}(w)a_{12}^*(w) \\
\rho(h_1)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(h_1(m))w^{-m} &= 2a_{12}(w)a_{12}^*(w) + a_{13}(w)a_{13}^*(w) - a_{23}(w)a_{23}^*(w) - \gamma b_1(w) + \\
&\quad +(\gamma/2)(b_2^+(w)) \\
\rho(h_2)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(h_2(m))w^{-m} &= 2a_{23}(w)a_{23}^*(w) + a_{13}(w)a_{13}^*(w) - a_{12}(w)a_{12}^*(w) - \gamma b_2(w) + \\
&\quad +(\gamma/2)(b_1^+(w) + b_3^+(w)) \\
\rho(e_1)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(e_1(m))w^{-m} &= a_{12}(w)a_{12}^*(w)a_{12}^*(w) - a_{23}(w)a_{13}^*(w) + a_{13}(w)a_{13}^*(w)a_{12}^*(w) + \\
&\quad -a_{23}(w)a_{23}^*(w)a_{12}^*(w) - \gamma a_{12}^*(w)b_1(w) + (\gamma/2)a_{12}^*(w)(b_2^+(w)) + \\
&\quad -(\gamma^2/2)(w \cdot \tfrac{d}{dw})a_{12}^*(w) \\
\rho(e_2)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(e_2(m))w^{-m} &= a_{23}(w)a_{23}^*(w)a_{23}^*(w) + a_{12}(w)a_{13}^*(w) - \gamma a_{23}^*(w)b_2(w) + \\
&\quad +(\gamma/2)a_{23}^*(w)(b_1^+(w) + b_3^+(w)) - (\gamma^2/2)(w \cdot \tfrac{d}{dw})a_{23}^*(w)
\end{aligned}$$

Agora, escreveremos essas ações explicitamente. Essas fórmulas explícitas não aparecem em [Cox05] e foram obtidas pelo autor desta tese após cuidadoso trabalho.

$$\rho(f_1)(w) \quad = \quad -a_{12}(w) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} -a_{12}(s)w^{-s} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} x_{12}(s)w^{-s}.$$

Então, para todos $s \in \mathbb{Z}$ temos:

$$f_1(s) \quad \mapsto \quad x_{12}(s)$$

$$\begin{aligned}
\rho(f_2)(w) &= -a_{23}(w) + a_{13}(w)a^*_{12}(w)\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} -a_{23}(s)w^{-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13}(m)w^{-m}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12}(s)w^{-s}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} -a_{23}(s)w^{-s} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13}(m)a^*_{12}(s-m)\Big)w^{-s}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(x_{23}(s) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s)\Big)w^{-s}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$ temos:

$$f_2(s) \;\mapsto\; x_{23}(s) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s)$$

$$\begin{aligned}
\rho(h_1)(w) &= 2a_{12}(w)a^*_{12}(w) + a_{13}(w)a^*_{13}(w) - a_{23}(w)a^*_{23}(w) - \gamma b_1(w) + (\gamma/2)(b_2^+(w))\\
&= 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12}(m)w^{-m}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12}(s)w^{-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13}(m)w^{-m}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{13}(s)w^{-s} +\\
&\quad - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23}(m)w^{-m}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{23}(s)w^{-s} - \gamma\sum_{s\in\mathbb{Z}} b_1(s)w^{-s} + (\gamma/2)\sum_{s\in\mathbb{N}^*} b_2(s)w^{-s}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12}(m)a^*_{12}(s-m) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13}(m)a^*_{13}(s-m) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23}(m)a^*_{23}(s-m)\Big)w^{-s} +\\
&\quad -\gamma\sum_{s\in\mathbb{Z}} b_1(s)w^{-s} + (\gamma/2)\sum_{s\in\mathbb{N}^*} b_2(s)w^{-s}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} -2x_{12}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s) - x_{13}(m)\partial/\partial x_{13}(m-s) + x_{23}(m)\partial/\partial x_{23}(m-s)\Big)w^{-s} +\\
&\quad +\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{s,0}\gamma\gamma^{-1}\lambda_1' + \delta_{s>0}\gamma\gamma\; s\;\partial/\partial y_1(s) + \delta_{s<0}\gamma\gamma^{-1}y_1(-s)\Big)w^{-s} +\\
&\quad +(\gamma/2)\sum_{s\in\mathbb{N}^*} -\gamma\; s\;\partial/\partial y_2(s)w^{-s}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} -2x_{12}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s) - x_{13}(m)\partial/\partial x_{13}(m-s) + x_{23}(m)\partial/\partial x_{23}(m-s)\Big)w^{-s} +\\
&\quad +\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{s,0}\lambda_1' + \delta_{s<0}y_1(-s) + \delta_{s>0}\; s\;\gamma^2\Big(\partial/\partial y_1(s) - (1/2)\partial/\partial y_2(s)\Big)\Big)w^{-s}.
\end{aligned}$$

Assim, para $s \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\begin{aligned}
h_1(s) \;\mapsto\; & -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13}(m)\partial/\partial x_{13}(m-s) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23}(m)\partial/\partial x_{23}(m-s) +\\
& +\delta_{s,0}\lambda_1' + \delta_{s<0}y_1(-s) + \delta_{s>0}\; s\;\gamma^2\Big(\partial/\partial y_1(s) - (1/2)\partial/\partial y_2(s)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(h_2)(w) &= 2a_{23}(w)a_{23}^*(w)+a_{13}(w)a_{13}^*(w)-a_{12}(w)a_{12}^*(w)-\gamma b_2(w)+(\gamma/2)(b_1^+(w)+b_3^+(w))\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}2a_{23}(m)a_{23}^*(s-m)+\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{13}(m)a_{13}^*(s-m)-\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{12}(m)a_{12}^*(s-m)\Big)w^{-s}\\
&\quad+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{s,0}\lambda_2^{'}+\delta_{s<0}y_2(-s)+\delta_{s>0}\gamma^2\ s\ \partial/\partial y_2(s)\Big)w^{-s}+\\
&\quad-\sum_{s\in\mathbb{N}^*}(\gamma^2/2)\ s\ \Big(\partial/\partial y_1(s)+\partial/\partial y_3(s)\Big)w^{-s}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}-2x_{23}(m)\partial/\partial x_{23}(m-s)-x_{13}(m)\partial/\partial x_{13}(m-s)+x_{12}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s)\Big)w^{-s}+\\
&\quad+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{s,0}\lambda_2^{'}+\delta_{s<0}y_2(-s)+\delta_{s>0}\ s\ \gamma^2\ \Big(\partial/\partial y_2(s)-(1/2)\partial/\partial y_1(s)-(1/2)\partial/\partial y_3(s)\Big)\Big)w^{-s}.
\end{aligned}$$

Então, para $s\in\mathbb{Z}$ temos:

$$\begin{aligned}
h_2(s) \mapsto\ & -2\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{23}(m)\partial/\partial x_{23}(m-s)-\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{13}(m)\partial/\partial x_{13}(m-s)+\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{12}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s)+\\
&+\delta_{s,0}\lambda_2^{'}+\delta_{s<0}y_2(-s)+\delta_{s>0}\ s\ \gamma^2\ \Big(\partial/\partial y_2(s)-(1/2)\partial/\partial y_1(s)-(1/2)\partial/\partial y_3(s)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(e_1)(w) &= a_{12}(w)a_{12}^*(w)a_{12}^*(w)-a_{23}(w)a_{13}^*(w)+a_{13}(w)a_{13}^*(w)a_{12}^*(w)-a_{23}(w)a_{23}^*(w)a_{12}^*(w)+\\
&\quad-\gamma a_{12}^*(w)b_1(w)+(\gamma/2)a_{12}^*(w)(b_2^+(w))-(\gamma^2/2)(w\cdot\tfrac{d}{dw})a_{12}^*(w)\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{12}(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{12}^*(m)w^{-m}\sum_{p\in\mathbb{Z}}a_{12}^*(p)w^{-p}-\sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{23}(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{13}^*(m)w^{-m}+\\
&\quad+\sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{13}(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{13}^*(m)w^{-m}\sum_{p\in\mathbb{Z}}a_{12}^*(p)w^{-p}+\\
&\quad-\sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{23}(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{23}^*(m)w^{-m}\sum_{p\in\mathbb{Z}}a_{12}^*(p)w^{-p}+\\
&\quad-\gamma\sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{12}^*(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}}b_1(m)w^{-m}+(\gamma/2)\sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{12}^*(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{N}^*}b_2(m)w^{-m}+\\
&\quad+(\gamma^2/2)\sum_{s\in\mathbb{Z}}\ s\ a_{12}^*(s)w^{-s}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}}a_{12}(s-m-p)a_{12}^*(m)a_{12}^*(p)\Big)w^{-s}+\\
&\quad+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}}a_{13}(s-m-p)a_{13}^*(m)a_{12}^*(p)\Big)w^{-s}+\\
&\quad+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}}a_{23}(s-m-p)a_{23}^*(m)a_{12}^*(p)\Big)w^{-s}+\\
&\quad+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{23}(s-m)a_{13}^*(m)\Big)w^{-s}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\gamma\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{12}^*(s-m)b_1(m)\Big)w^{-s}+\\
&\quad+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big((\gamma/2)\sum_{m\in\mathbb{N}^*}a_{12}^*(s-m)b_2(m)\Big)w^{-s}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big((\gamma^2/2)\ s\ a_{12}^*(s)\Big)w^{-s}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho(e_1)(w) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} -x_{12}(s-m-p)\partial/\partial x_{12}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + x_{23}(s-m-p)\partial/\partial x_{23}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + \\
&\quad + \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} -x_{13}(s-m-p)\partial/\partial x_{13}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23}(s-m)\partial/\partial x_{13}(-m)\Bigg)w^{-s} + \\
&\quad + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} \partial/\partial x_{12}(m-s)\Big(\delta_{m,0}\lambda_1^{'} + \delta_{m<0}y_1(-m) + \delta_{m>0}\gamma^2 m\partial/\partial y_1(m)\Big)w^{-s} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg((\gamma/2)\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\partial/\partial x_{12}(m-s)\Big(-\gamma m\partial/\partial y_2(m)\Big)\Bigg)w^{-s} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big((\gamma^2/2)\ s\ \partial/\partial x_{12}(-s)\Big)w^{-s}.
\end{aligned}$$

Então, para $s\in\mathbb{Z}$ temos:

$$\begin{aligned}
e_1(s) &\mapsto \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} -x_{12}(s-m-p)\partial/\partial x_{12}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + x_{23}(s-m-p)\partial/\partial x_{23}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + \\
&\quad + \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} -x_{13}(s-m-p)\partial/\partial x_{13}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23}(s-m)\partial/\partial x_{13}(-m) + \\
&\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Bigg(\delta_{m,0}\lambda_1^{'}\partial/\partial x_{12}(m-s) + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{12}(m-s)y_1(-m) + \\
&\quad + \delta_{m>0}\gamma^2 m\partial/\partial x_{12}(m-s)\Big(\partial/\partial y_1(m) - (1/2)\partial/\partial y_2(m)\Big)\Bigg) + (\gamma^2/2)\ s\ \partial/\partial x_{12}(-s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(e_2)(w) &= a_{23}(w)a_{23}^*(w)a_{23}^*(w) + a_{12}(w)a_{13}^*(w) - \gamma a_{23}^*(w)b_2(w) + \\
&\quad + (\gamma/2)a_{23}^*(w)(b_1^+(w) + b_3^+(w)) - (\gamma^2/2)(w\cdot \tfrac{d}{dw})a_{23}^*(w) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{23}(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23}^*(m)w^{-m}\sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{23}^*(p)w^{-p} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12}(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13}^*(m)w^{-m} + \\
&\quad -\gamma\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{23}^*(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_2(m)w^{-m} + (\gamma/2)\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{23}^*(s)w^{-s}\sum_{m\in\mathbb{N}^*}(b_1(m)+b_3(m))w^{-m} + \\
&\quad -(\gamma^2/2)(w\cdot d/dw)\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{23}^*(s)w^{-s} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{23}(s-m-p)a_{23}^*(m)a_{23}^*(p)\Bigg)w^{-s} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12}(s-m)a_{13}^*(m)\Bigg)w^{-s} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(-\gamma\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23}^*(s-m)b_2(m)\Bigg)w^{-s} + (\gamma^2/2)\sum_{s\in\mathbb{Z}}\ s\ a_{23}^*(s)w^{-s} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg((\gamma/2)\sum_{m\in\mathbb{N}^*} a_{23}^*(s-m)(b_1(m)+b_3(m))\Bigg)w^{-s}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho(e_2)(w) \quad = \quad & \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{23}(s-m-p)\partial/\partial x_{23}(-m)\partial/\partial x_{23}(-p) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12}(s-m)\partial/\partial x_{13}(-m)\Bigg)w^{-s} + \\
& + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} \partial/\partial x_{23}(m-s)\Bigg(\delta_{m,0}\lambda_2^{'} + \delta_{m<0}y_2(-m) + \delta_{m>0}\gamma^2\ m\ \partial/\partial y_2(m)\Bigg)w^{-s} + \\
& + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg((\gamma/2)\sum_{m\in\mathbb{N}^*} -\gamma m\partial/\partial x_{23}(m-s)\Bigg(\partial/\partial y_1(m) + \partial/\partial y_3(m)\Bigg)\Bigg)w^{-s} + \\
& + \sum_{s\in\mathbb{Z}}(\gamma^2/2)\ s\ \partial/\partial x_{23}(-s)w^{-s}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\begin{aligned}
e_2(s) \quad \mapsto \quad & -\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{23}(s-m-p)\partial/\partial x_{23}(-m)\partial/\partial x_{23}(-p) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12}(s-m)\partial/\partial x_{13}(-m) + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Bigg(\delta_{m,0}\lambda_2^{'}\partial/\partial x_{23}(m-s) + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{23}(m-s)y_2(-m) + \\
& + \delta_{m>0}\gamma^2 m\partial/\partial x_{23}(m-s)\Bigg(\partial/\partial y_2(m) - (1/2)\partial/\partial y_1(m) - (1/2)\partial/\partial y_3(m)\Bigg)\Bigg) + \\
& + (\gamma^2/2)\ s\ \partial/\partial x_{23}(-s)
\end{aligned}$$

Podemos resumir as ações descritas acima. Para cada $s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
c &\mapsto K \\
f_1(s) &\mapsto x_{12}(s) \\
f_2(s) &\mapsto x_{23}(s) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s) \\
h_1(s) &\mapsto -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13}(m)\partial/\partial x_{13}(m-s) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23}(m)\partial/\partial x_{23}(m-s) + \\
&\quad +\delta_{s,0}\lambda_1^{'} + \delta_{s<0}y_1(-s) + \delta_{s>0}\ s\ \gamma^2\Big(\partial/\partial y_1(s) - (1/2)\partial/\partial y_2(s)\Big) \\
h_2(s) &\mapsto -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23}(m)\partial/\partial x_{23}(m-s) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13}(m)\partial/\partial x_{13}(m-s) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12}(m)\partial/\partial x_{12}(m-s) + \\
&\quad +\delta_{s,0}\lambda_2^{'} + \delta_{s<0}y_2(-s) + \delta_{s>0}\ s\ \gamma^2\ \Big(\partial/\partial y_2(s) - (1/2)\partial/\partial y_1(s) - (1/2)\partial/\partial y_3(s)\Big) \\
e_1(s) &\mapsto \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} -x_{12}(s-m-p)\partial/\partial x_{12}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + x_{23}(s-m-p)\partial/\partial x_{23}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + \\
&\quad + \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} -x_{13}(s-m-p)\partial/\partial x_{13}(-m)\partial/\partial x_{12}(-p) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23}(s-m)\partial/\partial x_{13}(-m) + \\
&\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Bigg(\delta_{m,0}\lambda_1^{'}\partial/\partial x_{12}(m-s) + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{12}(m-s)y_1(-m) + \\
&\quad +\delta_{m>0}\gamma^2 m\partial/\partial x_{12}(m-s)\Big(\partial/\partial y_1(m) - (1/2)\partial/\partial y_2(m)\Big)\Bigg) + (\gamma^2/2)\ s\ \partial/\partial x_{12}(-s) \\
e_2(s) &\mapsto -\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{23}(s-m-p)\partial/\partial x_{23}(-m)\partial/\partial x_{23}(-p) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12}(s-m)\partial/\partial x_{13}(-m) + \\
&\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Bigg(\delta_{m,0}\lambda_2^{'}\partial/\partial x_{23}(m-s) + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{23}(m-s)y_2(-m) + \\
&\quad +\delta_{m>0}\gamma^2 m\partial/\partial x_{23}(m-s)\Big(\partial/\partial y_2(m) - (1/2)\partial/\partial y_1(m) - (1/2)\partial/\partial y_3(m)\Big)\Bigg) + \\
&\quad +(\gamma^2/2)\ s\ \partial/\partial x_{23}(-s)
\end{aligned}$$

Concluímos que a representação apresentada no Teorema 3.2.2 [CF04] para $n = 2$ e $r = 0$ é a mesma representação descrita no trabalho de B. Cox [Cox05] com $n = 3$. Notamos ser necessário fazer algumas identificações:

$$f_{1s} \leftrightarrow f_2(s) \quad , \quad f_{2s} \leftrightarrow f_1(s) \quad ,$$

$$h_{1s} \leftrightarrow h_2(s) \quad , \quad h_{2s} \leftrightarrow h_1(s)\ ,$$

$$e_{1s} \leftrightarrow e_2(s) \quad , \quad e_{2s} \leftrightarrow e_1(s) \quad ,$$

$$\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2^{'} \quad , \quad \lambda_2 \leftrightarrow \lambda_1^{'}\ ,$$

$$x_{11,s} \leftrightarrow x_{23}(s) \quad , \quad x_{12,s} \leftrightarrow x_{13}(s) \quad , \quad x_{22,s} \leftrightarrow x_{12}(s) \quad ,$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-s} \leftrightarrow y_2(-s) \quad , \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_{-s} \leftrightarrow y_1(-s) \quad ,$$

$$s\ \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s \leftrightarrow \gamma^2\ s\ \Big(\partial/\partial y_2(s) - (1/2)\partial/\partial y_1(s) - (1/2)\partial/\partial y_3(s)\Big)\ ,$$

$$s\ \mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s \leftrightarrow \gamma^2\ s\ \Big(\partial/\partial y_1(s) - (1/2)\partial/\partial y_2(s)\Big).$$

3.4.2 $(n = 2,\ r = 2)$: $W_{2,2}(\lambda, \gamma)$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, com geradores e_1, e_2, f_1, f_2, h_1 e h_2. Então, os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ são $e_{1m}, e_{2m}, f_{1m}, f_{2m}, h_{1m}, h_{2m}$ e c, com $m \in \mathbb{Z}$. Considere as seguintes distribuições formais:

$$e_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e_{im} z^{-m-1} \quad , \quad f_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{im} z^{-m-1} \quad , \quad h_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{im} z^{-m-1}\ ,$$

com $i = 1, 2$.

Para um elemento $\gamma \in \mathbb{C}^*$, seja $k = \gamma^2 - (r+1) = \gamma^2 - 3$. Como $1 \le i \le j \le n = 2$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}, a_{12,m}, a_{22,m}, a^*_{11,m}, a^*_{12,m}, a^*_{22,m}$ e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Seja $\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}]$. Como $j \le 2 = r$ temos:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & ,\ \text{se} \quad m \ge 0 \\ x_{11,m} & ,\ \text{se} \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & ,\ \text{se} \quad m \le 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & ,\ \text{se} \quad m > 0 \end{cases}\ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{12,m} & ,\ \text{se} \quad m \ge 0 \\ x_{12,m} & ,\ \text{se} \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = \begin{cases} x_{12,-m} & ,\ \text{se} \quad m \le 0 \\ -\partial/\partial x_{12,-m} & ,\ \text{se} \quad m > 0 \end{cases}\ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{22,m} & ,\ \text{se} \quad m \ge 0 \\ x_{22,m} & ,\ \text{se} \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = \begin{cases} x_{22,-m} & ,\ \text{se} \quad m \le 0 \\ -\partial/\partial x_{22,-m} & ,\ \text{se} \quad m > 0 \end{cases}\ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

A matriz de Cartan associada com $\mathfrak{g}$ é $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Assim, como $r = 2$, construímos a matriz $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 & -\gamma^2 \\ -\gamma^2 & 2\gamma^2 \end{pmatrix}$.

A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem geradores b_{1m}, b_{2m} e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\rho_\lambda(b_{10}) = \lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m}) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1m}) = m\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{20}) = \lambda_2 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2,-m}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2m}) = m\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m})$ e $\partial/\partial\mathbf{y}_m = (\partial/\partial y_{1m}, \partial/\partial y_{2m})$. Sejam $\lambda_1 = \lambda(h_{10})$ e $\lambda_2 = \lambda(h_{20})$.

Observe que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathfrak{B}_{ii} = 2\gamma^2$ e $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathfrak{B}_{ij} = -\gamma^2$, $(i \neq j)$. Então, se $\mathbf{e}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{e}_2 = (x_2, y_2)$ temos $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2\gamma^2$ e $x_1x_2 + y_1y_2 = -\gamma^2$.

Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n = 2$ e $r = 2$, temos:

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 3 \\
\rho(f_1)(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a_{22}^*(z) \\
\rho(f_2)(z) &= a_{22}(z) \\
\rho(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : +b_1(z) \\
\rho(h_2)(z) &= 2 : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : +b_2(z) \\
\rho(e_1)(z) &= - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : +a_{22}(z)a_{12}^*(z) - a_{11}^*(z)b_1(z) + (k+1)\partial_z a_{11}^*(z) \\
\rho(e_2)(z) &= : a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) : -a_{11}(z)a_{12}^*(z) + \\
&\quad -a_{22}^*(z)b_2(z) + k\partial_z a_{22}^*(z)
\end{aligned}$$

onde $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$ é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$.

Em [FF90b] temos a seguinte representação da álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$ no espaço $M \otimes \pi_{\chi/\nu, \nu^2}$, onde M é uma representação irredutível de uma álgebra de Heisenberg específica e $\nu \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c &\mapsto K = \nu^2 - 3 \\
F_1(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a_{22}^*(z) \\
F_2(z) &= a_{22}(z) \\
H_1(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : +\nu b_1(z) \\
H_2(z) &= 2 : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : +\nu b_2(z) \\
E_1(z) &= - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : +a_{22}(z)a_{12}^*(z) - \nu a_{11}^*(z)b_1(z) - (K+1)(z\frac{d}{dz})a_{11}^*(z) \\
E_2(z) &= : a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) : -a_{11}(z)a_{12}^*(z) + \\
&\quad -\nu a_{22}^*(z)b_2(z) - K(z\frac{d}{dz})a_{22}^*(z)
\end{aligned}$$

O espaço $M \otimes \pi_{\chi/\nu, \nu^2}$, $(\nu \neq 0)$ é um módulo de Wakimoto e é denotado por $W_{\chi,\nu}$.

As distribuições formais, neste caso, são da forma $A(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} A(s)z^s$. Então,

$$(k+1)\partial_z a_{11}^*(z) = -(k+1)\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a_{11,s}^* z^{-s-1} \quad , \quad k\partial_z a_{22}^*(z) = -k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a_{22,s}^* z^{-s-1} \quad \text{e}$$

$$-(K+1)(z\frac{d}{dz})a_{11}^*(z) = -(K+1)\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a_{11}^*(s)z^s \quad , \quad -K(z\frac{d}{dz})a_{22}^*(z) = -K\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a_{22}^*(s)z^s \ .$$

Concluímos que a representação descrita no Teorema 3.2.2 [CF04] para $n = 2 = r$ é a mesma representação descrita nos trabalhos de B. Feigin e E. Frenkel [FF88, FF90b].

3.4.3 $(n = 2, r = 1)$: $W_{2,1}(\lambda, \gamma)$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, com geradores e_1, e_2, f_1, f_2, h_1 e h_2. Estes geradores são matrizes descritas no Apêndice A na Seção A.3, assim como algumas informações sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

Sabemos que o sistema de raízes de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ é $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 3\}$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{h}^*$ tais que $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ e $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$. Temos que $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é uma base de Δ e $\Delta_+ = \Delta_+(\Pi) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ é um conjunto de raízes positivas com respeito à Π. Portanto, $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1-\alpha_2\}$ é um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$, onde $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é uma base de Δ.

O grupo de Weyl W do grupo de Lie $G = SL(3,\mathbb{C}) = \{g \in GL(3,\mathbb{C}) \mid \det(g) = 1\}$ é gerado pelas reflexões simples $s_1 = s_{\alpha_1}$ e $s_2 = s_{\alpha_2}$, onde a ação de W on $\mathfrak{h}^*$ é dada por

$$s_1(\alpha_1) = -\alpha_1 \quad , \quad s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \quad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \quad s_2(\alpha_2) = -\alpha_2 \quad ,$$

e $|W| = 6$; ou seja, $W = \{e, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2\}$. Temos que $W \cong \mathfrak{S}_3$.

Usando a linguagem de permutações podemos descrever este grupo como segue: $W \cong \mathfrak{S}_3 = \{e, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3)\}$.

Para os representantes de W em G tomamos as matrizes:

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\dot{s}_1\dot{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{s}_2\dot{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{s}_1\dot{s}_2\dot{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ são $e_{1m}, e_{2m}, f_{1m}, f_{2m}, h_{1m}, h_{2m}$ e c, com $m \in \mathbb{Z}$. Considere as seguintes distribuições formais:

$$e_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e_{im} z^{-m-1} \quad , \quad f_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{im} z^{-m-1} \quad , \quad h_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{im} z^{-m-1} \ ,$$

com $i = 1, 2$.

Para um elemento $\gamma \in \mathbb{C}^*$, seja $k = \gamma^2 - (r+1) = \gamma^2 - 2$. Como $1 \leq i \leq j \leq n = 2$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}, a_{12,m}, a_{22,m}, a^*_{11,m}, a^*_{12,m}, a^*_{22,m}$ e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Seja $\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}]$. Então:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{11,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = x_{12,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = -\partial/\partial x_{12,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = x_{22,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = -\partial/\partial x_{22,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem geradores b_{1m}, b_{2m} e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\rho_\lambda(b_{10}) = \lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m}) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1m}) = m\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{20}) = \lambda_2 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2,-m}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2m}) = m\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m})$ e $\partial/\partial \mathbf{y}_m = (\partial/\partial y_{1m}, \partial/\partial y_{2m})$. Sejam $\lambda_1 = \lambda(h_{10})$ e $\lambda_2 = \lambda(h_{20})$.

• $W^{w}_{2,1}(\lambda,\gamma)$**, com** $w = (1\ 2)$

Consideremos o elemento $w = s_1 = (1\ 2) \in \mathfrak{S}_3$. Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n = 2$ e $r = 1$, temos:

$$\begin{array}{rcl}
\rho^w(c) & = & k = \gamma^2 - 2 \\
\rho^w(f_1)(z) & = & a_{11}(z) + a_{12}(z)a^*_{22}(z) \\
\rho^w(f_2)(z) & = & a_{22}(z) \\
\rho^w(h_1)(z) & = & 2 : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + b_1(z) \\
\rho^w(h_2)(z) & = & 2 : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + b_2(z) \\
\rho^w(e_1)(z) & = & - : a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + a_{22}(z)a^*_{12}(z) - a^*_{11}(z)b_1(z) + k\partial_z a^*_{11}(z) \\
\rho^w(e_2)(z) & = & : a^*_{22}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : - : a^*_{22}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a^*_{22}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + \\
 & & - a_{11}(z)a^*_{12}(z) - a^*_{22}(z)b_2(z) + k\partial_z a^*_{22}(z)
\end{array}$$

onde $\rho^w : \widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$ é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$. Chamamos $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, com a estrutura de módulo descrita acima, de **módulo de Wakimoto Intermediário torcido pelo elemento** $w = (1\ 2) \in \mathfrak{S}_3$, e denotamos ele por $W^{w}_{2,1}(\lambda,\gamma)$.

Agora consideremos a subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_1 = \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$, onde

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 = \Big((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \ ,$$

e $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$. Observe que $\widehat{\mathfrak{b}}_1$ é a subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ correspondendo à subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathbb{C}f_1$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, cujo fator de Levi redutivo é $\mathfrak{l}_1 = \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \cong \mathbb{C}h_2 \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$; isto é, $\widehat{\mathfrak{b}}_1$ é a subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}$ correspondendo à subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ cuja parte semissimples do fator de Levi redutivo é $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

A ação da reflexão $s_1 \in W \cong \mathfrak{S}_3$ em Δ é:

$$s_1(\alpha_1) = -\alpha_1 \quad , \quad s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \quad s_1(\alpha_1 + \alpha_2) = s_1(\alpha_1) + s_1(\alpha_2) = -\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 \quad ,$$

$$s_1(-\alpha_1) = \alpha_1 \quad , \quad s_1(-\alpha_2) = -\alpha_1 - \alpha_2 \quad , \quad s_1(-\alpha_1 - \alpha_2) = -s_1(\alpha_1) - s_1(\alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_2.$$

Em outras palavras:

$$\mathbb{C}e_1 \mapsto \mathbb{C}f_1 \quad , \quad \mathbb{C}e_2 \mapsto \mathbb{C}e_3 \quad , \quad \mathbb{C}e_3 \mapsto \mathbb{C}e_2 \quad ,$$

$$\mathbb{C}f_1 \mapsto \mathbb{C}e_1 \quad , \quad \mathbb{C}f_2 \mapsto \mathbb{C}f_3 \quad , \quad \mathbb{C}f_3 \mapsto \mathbb{C}f_2.$$

Denotamos por $\widehat{\mathfrak{b}}^w_1$ a subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_1 = \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ torcida pelo elemento $w = s_1$. Então, temos:

$$\widehat{\mathfrak{b}}^w_1 = \overline{\mathfrak{b}}^w_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \ ,$$

onde

$$\overline{\mathfrak{b}}_1^w = \Big((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}f_1.$$

Afirmação: o módulo de Wakimoto Intermediário torcido pelo elemento $w = s_1$, $W_{2,1}^w(\lambda, \gamma)$, tem as seguintes propriedades: a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, $h(1 \otimes 1) = \lambda(h)(1 \otimes 1)$, para todos $h \in \mathfrak{h}$ e $c(1 \otimes 1) = (\gamma^2 - 2)(1 \otimes 1)$.

Verifiquemos esta afirmação. Nesse caso, foi necessário descrever as fórmulas exibidas acima de forma explícita. O autor desta tese utilizou a definição das distribuições formais e descreveu cada fórmula explicitamente a fim de verificar a afirmação.

Para que $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ aniquile o vetor $(1 \otimes 1)$ precisamos que:

- $\rho^w(e_{1s})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(f_{1s})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(h_{1s})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(h_{2s})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- $\rho^w(e_{2m})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{3m})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\rho^w(f_{10})(1 \otimes 1) = 0$.

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_1)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \rho^w(f_{1s}) z^{-s-1} = a_{11}(z) + a_{12}(z) a_{22}^*(z) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s} z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s} z^{-s-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}^* z^{-m} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s} z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m} a_{22,m}^* z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left(a_{11,s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m} a_{22,m}^* \right) z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$f_{1s} \mapsto \delta_{s<0} x_{11,s} + \delta_{s\geq 0} \partial/\partial x_{11,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m} \partial/\partial x_{22,-m}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Então:

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_{1s})(1 \otimes 1) &= \left(\partial/\partial x_{11,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m} \partial/\partial x_{22,-m} \right) (1 \otimes 1) \\
&= \left(\partial/\partial x_{11,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m} \partial/\partial x_{22,-m} \right) (1) \otimes \mathrm{Id}(1) \\
&= 0 \otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

Para $s = 0$ temos:

$$f_{10} \mapsto \partial/\partial x_{11,0} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m} \partial/\partial x_{22,-m}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_{10})(1\otimes 1) &= \Big(\partial/\partial x_{11,0} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-m}\Big)(1\otimes 1)\\
&= \Big(\partial/\partial x_{11,0} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-m}\Big)(1)\otimes \mathrm{Id}(1)\\
&= 0\otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + b_1(z)\\
&= 2\Big(a_{11}(z)_+ a^*_{11}(z)\Big) + 2\Big(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-\Big) + a_{12}(z)a^*_{12}(z) - a_{22}(z)a^*_{22}(z) + b_1(z)\\
&= 2\sum_{m<0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{11,m}z^{-m-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{12,m}z^{-m} +\\
&\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{22,m}z^{-m} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1}\\
&= 2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m}z^{-s-1} + 2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m}z^{-s-1} +\\
&\quad -\sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\big(2\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + 2\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m} + b_{1s}\big)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s\in\mathbb{Z}$, temos:

$$h_{1s} \mapsto 2\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + 2\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m} + b_{1s}$$

Seja $s\in\mathbb{Z}_{>0}$. Assim, $m<0$ implica $s-m>0$ e $m\geq 0$ implica (ou $s-m\leq 0$ ou $s-m>0$). Esse argumento será bastante utilizado sempre que as fórmulas apresentarem o produto normal ordenado e precisarmos escrevê-las explicitamente. Assim:

$$\begin{aligned}
h_{1s} \mapsto\ & -2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) +\\
& -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} + s\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_{1s})(1\otimes 1) &= \Big(-2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) +\\
&\quad -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} + s\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Big)(1\otimes 1)\\
&= \Big(-2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) +\\
&\quad -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{22,-m}\Big)(1)\otimes\mathrm{Id}(1) + \mathrm{Id}(1)\otimes\Big(s\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Big)(1)\\
&= 0\otimes 1 + 1\otimes 0 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_2)(z) &= 2 : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + b_2(z)\\
&= 2a_{22}(z)a_{22}^*(z) + a_{12}(z)a_{12}^*(z) - \Big(a_{11}(z)_+ a_{11}^*(z)\Big) - \Big(a_{11}^*(z)a_{11}(z)_-\Big) + b_2(z)\\
&= 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}^* z^{-m} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}^* z^{-m} +\\
&\quad -\sum_{m<0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}^* z^{-s} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}^* z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{11,m}z^{-m-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1}\\
&= 2\sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a_{22,m}^* z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a_{12,m}^* z^{-s-1} +\\
&\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m<0} a_{11,m}a_{11,s-m}^* z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m\geq 0} a_{11,s-m}^* a_{11,m}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a_{22,m}^* + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a_{12,m}^* - \sum_{m<0} a_{11,m}a_{11,s-m}^* +\\
&\quad -\sum_{m\geq 0} a_{11,s-m}^* a_{11,m} + b_{2s}\Bigg)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$h_{2s} \mapsto 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a_{22,m}^* + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a_{12,m}^* - \sum_{m<0} a_{11,m}a_{11,s-m}^* - \sum_{m\geq 0} a_{11,s-m}^* a_{11,m} + b_{2s}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Analisando todas as possibilidades temos:

$$\begin{aligned}
h_{2s} \mapsto\ & -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} +\\
& -\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \ s\ \mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_{2s})(1\otimes 1) &= \Bigg(-2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} +\\
&\quad -\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m})\Bigg)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) +\\
&\quad +\mathrm{Id}(1)\otimes\Bigg(\ s\ \mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Bigg)(1)\\
&= 0\otimes 1 + 1\otimes 0 = 0.
\end{aligned}$$

$$\rho^w(e_1)(z) = - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + a_{22}(z)a_{12}^*(z) - a_{11}^*(z)b_1(z) + k\partial_z a_{11}^*(z).$$

Temos que $: a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) :=: a^*_{11}(z)(: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :) :$. Logo:

$$
\begin{aligned}
: a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : \quad = \quad & \Big(a^*_{11}(z)_+a_{11}(z)_+a^*_{11}(z)\Big) + \Big(a_{11}(z)_+a^*_{11}(z)a^*_{11}(z)_-\Big) + \\
& + \Big(a^*_{11}(z)_+a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-\Big) + \Big(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-a^*_{11}(z)_-\Big).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
: a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : \quad = \quad & \sum_{m\le 0} a^*_{11,m}z^{-m}\sum_{p<0} a_{11,p}z^{-p-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + \sum_{p<0} a_{11,p}z^{-p-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m>0} a^*_{11,m}z^{-m} + \\
& + \sum_{m\le 0} a^*_{11,m}z^{-m}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{p\ge 0} a_{11,p}z^{-p-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{p\ge 0} a_{11,p}z^{-p-1}\sum_{m>0} a^*_{11,m}z^{-m}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\rho^w(e_1)(z) \quad = \quad & \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\le 0,p<0} a^*_{11,m}a_{11,p}a^*_{11,s-m-p}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m>0,p<0} a_{11,p}a^*_{11,s-m-p}a^*_{11,m}\Big)z^{-s-1} + \\
& + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\le 0,p\ge 0} a^*_{11,m}a^*_{11,s-m-p}a_{11,p}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m>0,p\ge 0} a^*_{11,s-m-p}a_{11,p}a^*_{11,m}\Big)z^{-s-1} + \\
& + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{12,m}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s-m}b_{1m}\Big)z^{-s-1} - k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a^*_{11,s}z^{-s-1}.
\end{aligned}
$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$
\begin{aligned}
& s > 0, m \le 0, p < 0 \quad \text{implica} \quad s-m-p > 0\ , \\
& s > 0, m > 0, p < 0 \quad \text{implica} \quad s-m-p \le 0 \text{ ou } s-m-p > 0\ , \\
& s > 0, m \le 0, p \ge 0 \quad \text{implica} \quad s-m-p \le 0 \text{ ou } s-m-p > 0\ , \\
& s > 0, m > 0, p \ge 0 \quad \text{implica} \quad s-m-p \le 0 \text{ ou } s-m-p > 0.
\end{aligned}
$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ temos:

$$
\begin{aligned}
e_{1s} \quad \mapsto \quad & \sum_{m\le 0,p<0} x_{11,-m}x_{11,p}\partial/\partial x_{11,m+p-s} + \\
& + \sum_{m>0,p<0} \delta_{s\le m+p}x_{11,p}x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,-m} - \sum_{m>0,p<0} \delta_{s>m+p}x_{11,p}\partial/\partial x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,-m} + \\
& - \sum_{m\le 0,p\ge 0} \delta_{s\le m+p}x_{11,-m}x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,p} + \sum_{m\le 0,p\ge 0} \delta_{s>m+p}x_{11,-m}\partial/\partial x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,p} + \\
& + \sum_{m>0,p\ge 0} \delta_{s\le m+p}x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,p}\partial/\partial x_{11,-m} - \sum_{m>0,p\ge 0} \delta_{s>m+p}\partial/\partial x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,p}\partial/\partial x_{11,-m} + \\
& - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \ s\ k\ \partial/\partial x_{11,-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}}(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{11,-s}\lambda_1 - \delta_{m>0}\delta_{s\le m}x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \\
& + \delta_{m>0}\delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{11,m-s}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m})
\end{aligned}
$$

Assim, para $s \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{1s})(1 \otimes 1) &= 0 \otimes 1 + \Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (\delta_{m,0} \partial/\partial x_{11,-s} \lambda_1 - \delta_{m>0} \delta_{s \leq m} x_{11,m-s} m \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_m + \\
&\quad + \delta_{m>0} \delta_{s>m} \partial/\partial x_{11,m-s} m \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_m + \delta_{m<0} \partial/\partial x_{11,m-s} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-m}) \Big)(1 \otimes 1) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Big(\delta_{m,0} \partial/\partial x_{11,-s}(1) \otimes \lambda_1(1) - \delta_{m>0} \delta_{s \leq m} x_{11,m-s}(1) \otimes m \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_m(1) + \\
&\quad + \delta_{m>0} \delta_{s>m} \partial/\partial x_{11,m-s}(1) \otimes m \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_m(1) + \delta_{m<0} \partial/\partial x_{11,m-s}(1) \otimes \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-m}(1) \Big) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Big(\delta_{m,0}(0 \otimes \lambda_1) - \delta_{m>0} \delta_{s \leq m}(x_{11,m-s} \otimes 0) + \delta_{m>0} \delta_{s>m}(0 \otimes 0) + \\
&\quad + \delta_{m<0}(0 \otimes \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-m}) \Big) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_2)(z) &= \, : a_{22}^*(z) a_{11}(z) a_{11}^*(z) : - : a_{22}^*(z) a_{12}(z) a_{12}^*(z) : - : a_{22}^*(z) a_{22}(z) a_{22}^*(z) : - a_{11}(z) a_{12}^*(z) + \\
&\quad - a_{22}^*(z) b_2(z) + k \partial_z a_{22}^*(z).
\end{aligned}$$

Temos que $: a_{22}^*(z) a_{11}(z) a_{11}^*(z) :=: a_{22}^*(z)(: a_{11}(z) a_{11}^*(z) :) :$, $a_{22}^*(z)_+ = 0$ e $a_{22}^*(z)_- = a_{22}^*(z)$. Logo:

$$: a_{22}^*(z) a_{11}(z) a_{11}^*(z) := \Big(a_{11}(z)_+ a_{11}^*(z) a_{22}^*(z) \Big) + \Big(a_{11}^*(z) a_{11}(z)_- a_{22}^*(z) \Big).$$

Isto é,

$$: a_{22}^*(z) a_{11}(z) a_{11}^*(z) := \sum_{m<0} a_{11,m} z^{-m-1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_{11,p}^* z^{-p} \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{22,s}^* z^{-s} + \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_{11,p}^* z^{-p} \sum_{m \geq 0} a_{11,m} z^{-m-1} \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{22,s}^* z^{-s}.$$

Sabemos que $a_{12}(z)_+ = a_{12}(z), a_{12}(z)_- = 0, a_{22}(z)_+ = a_{22}(z), a_{22}(z)_- = 0, a_{12}^*(z)_+ = 0, a_{12}^*(z)_- = a_{12}^*(z), a_{22}^*(z)_+ = 0$ e $a_{22}^*(z)_- = a_{22}^*(z)$, pois $j = 2 > r$. Logo:

$$: a_{22}^*(z) a_{12}(z) a_{12}^*(z) := a_{12}(z) a_{12}^*(z) a_{22}^*(z) \ ,$$

$$: a_{22}^*(z) a_{22}(z) a_{22}^*(z) := a_{22}(z) a_{22}^*(z) a_{22}^*(z).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\rho^w(e_2)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m<0,p\in\mathbb{Z}} a_{11,m}a^*_{11,p}a^*_{22,s-m-p}\Big)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\geq 0,p\in\mathbb{Z}} a^*_{11,p}a_{11,m}a^*_{22,s-m-p}\Big)z^{-s-1}+\\ &+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,p}a^*_{22,s-m-p}\Big)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,p}a^*_{22,s-m-p}\Big)z^{-s-1}+\\ &+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{11,s-m}a^*_{12,m}\Big)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s-m}b_{2m}\Big)z^{-s-1}-k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a^*_{22,s}z^{-s-1}.\end{aligned}$$

Seja $s\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} e_{2s} \ \mapsto\ & -\sum_{m<0,p\leq 0} x_{11,m}x_{11,-p}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\sum_{m<0,p>0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,-p}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\\ &-\sum_{m\geq 0,p\leq 0} x_{11,-p}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\sum_{m\geq 0,p>0}\partial/\partial x_{11,-p}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\\ &-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,-p}\partial/\partial x_{22,m+p-s}-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,-p}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\\ &+s\ k\ \partial/\partial x_{22,-s}+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{s\geq m}\partial/\partial x_{11,s-m}\partial/\partial x_{12,-m}+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{s<m}x_{11,s-m}\partial/\partial x_{12,-m}+\\ &+\sum_{m\in\mathbb{Z}}(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{22,-s}\lambda_2+\delta_{m>0}\partial/\partial x_{22,m-s}m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m+\delta_{m<0}\partial/\partial x_{22,m-s}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m})\end{aligned}$$

Então, para $s\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\rho^w(e_{2s})(1\otimes 1) &= 0\otimes 1+\\ &+\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{m,0}\partial/\partial x_{22,-s}\lambda_2+\delta_{m>0}\partial/\partial x_{22,m-s}m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m+\delta_{m<0}\partial/\partial x_{22,m-s}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m}\Big)(1\otimes 1)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{22,-s}(1)\otimes\lambda_2(1)+\delta_{m>0}\partial/\partial x_{22,m-s}(1)\otimes m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m(1)+\\ &+\delta_{m<0}\partial/\partial x_{22,m-s}(1)\otimes\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m}(1)\Big)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}(0\otimes\lambda_2)+\delta_{m>0}(0\otimes 0)+\delta_{m<0}(0\otimes\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m})\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Precisamos verificar que $\rho^w(e_{3s})(1\otimes 1)=0$, para todo $s\in\mathbb{Z}$. Sabemos que o colchete de Lie em $\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ é:

$$[x\otimes t^m, y\otimes t^s]=[x,y]\otimes t^{m+s}+m\delta_{m,-s}(x,y)c$$

para todos $x,y\in\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $m,s\in\mathbb{Z}$. Observe que a forma de Killing em $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ é $(x,y)=tr(xy)$, para todos $x,y\in\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

Então, em particular $[e_{1m},e_{2s}]=[e_1,e_2]\otimes t^{m+s}+m\delta_{m,-s}(e_1,e_2)c$.

Temos que

$$e_1 e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_3$$

implica que $(e_1, e_2) = tr(e_1 e_2) = 0$.

Logo, $[e_{1m}, e_{2s}] = [e_1, e_2] \otimes t^{m+s} = e_3 \otimes t^{m+s} = e_{3p}$, com $p = m + s \in \mathbb{Z}$.

Considerando a representação ρ^w, precisamos mostrar que $\rho^w(e_{3p})(1 \otimes 1) = \rho^w([e_{1m}, e_{2s}])(1 \otimes 1) = [\rho^w(e_{1m}), \rho^w(e_{2s})](1 \otimes 1) = 0$, para todo $p = m + s \in \mathbb{Z}$.

Sabemos que $\rho^w(e_{1m})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $\rho^w(e_{2s})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}$. Então para $p = m + s$, com $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $s \in \mathbb{Z}$ temos que:

$$\begin{aligned} \rho^w(e_{3p})(1 \otimes 1) &= [\rho^w(e_{1m}), \rho^w(e_{2s})](1 \otimes 1) \\ &= (\rho^w(e_{1m})\rho^w(e_{2s}) - \rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{1m}))(1 \otimes 1) \\ &= \rho^w(e_{1m})\rho^w(e_{2s})(1 \otimes 1) - \rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{1m})(1 \otimes 1) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Agora vamos calcular $\rho^w(e_{10})(1 \otimes 1)$. Temos que:

$$\begin{aligned} e_{10} \mapsto & \sum_{u \leq 0, q < 0} x_{11,-u} x_{11,q} \partial/\partial x_{11,u+q} + \\ & + \sum_{u > 0, q < 0} (\delta_{(-u-q \leq 0)} x_{11,q} x_{11,u+q} \partial/\partial x_{11,-u} - \delta_{(-u-q>0)} x_{11,q} \partial/\partial x_{11,u+q} \partial/\partial x_{11,-u}) + \\ & + \sum_{u \leq 0, q \geq 0} (-\delta_{(-u-q \leq 0)} x_{11,-u} x_{11,u+q} \partial/\partial x_{11,q} + \delta_{(-u-q>0)} x_{11,-u} \partial/\partial x_{11,u+q} \partial/\partial x_{11,q}) + \\ & + \sum_{u > 0, q \geq 0} x_{11,u+q} \partial/\partial x_{11,q} \partial/\partial x_{11,-u} - \sum_{u \in \mathbb{Z}} x_{22,-u} \partial/\partial x_{12,-u} + \\ & - \sum_{u \in \mathbb{Z}} (\delta_{u,0} x_{11,0} \lambda_1 - \delta_{u<0} \partial/\partial x_{11,u} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-u} + \delta_{u>0} x_{11,u} \; u \; \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_u) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \rho^w(e_{10})(1 \otimes 1) &= 0 \otimes 1 - \left(\sum_{u \in \mathbb{Z}} (\delta_{u,0} x_{11,0} \lambda_1 - \delta_{u<0} \partial/\partial x_{11,u} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-u} + \delta_{u>0} x_{11,u} \; u \; \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_u) \right)(1 \otimes 1) \\ &= -\sum_{u \in \mathbb{Z}} \left(\delta_{u,0} x_{11,0}(1) \otimes \lambda_1(1) - \delta_{u<0} \partial/\partial x_{11,u}(1) \otimes \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-u}(1) + \delta_{u>0} x_{11,u}(1) \otimes u \mathbf{e}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_u(1) \right) \\ &= -\sum_{u \in \mathbb{Z}} \left(\delta_{u,0}(x_{11,0} \otimes \lambda_1) - \delta_{u<0}(0 \otimes \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-u}) + \delta_{u>0}(x_{11,u} \otimes 0) \right) \\ &= -(x_{11,0} \otimes \lambda_1). \end{aligned}$$

Assim, com $m = 0$, temos que $p = m + s = s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \rho^w(e_{3p})(1 \otimes 1) &= \rho^w(e_{10})\rho^w(e_{2s})(1 \otimes 1) - \rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{10})(1 \otimes 1) \\ &= 0 + \rho^w(e_{2s})(x_{11,0} \otimes \lambda_1). \end{aligned}$$

Sabemos que para todo $s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
e_{2s} \ \mapsto \ & -\sum_{u<0,q\leq 0} x_{11,u}x_{11,-q}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \sum_{u<0,q>0} x_{11,u}\partial/\partial x_{11,-q}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \\
& -\sum_{u\geq 0,q\leq 0} x_{11,-q}\partial/\partial x_{11,u}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \sum_{u\geq 0,q>0} \partial/\partial x_{11,-q}\partial/\partial x_{11,u}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \\
& -\sum_{u,q\in\mathbb{Z}} x_{12,u}\partial/\partial x_{12,-q}\partial/\partial x_{22,u+q-s} - \sum_{u,q\in\mathbb{Z}} x_{22,u}\partial/\partial x_{22,-q}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \\
& + s\ k\ \partial/\partial x_{22,-s} + \sum_{u\in\mathbb{Z}} \delta_{s\geq u}\partial/\partial x_{11,s-u}\partial/\partial x_{12,-u} + \sum_{u\in\mathbb{Z}} \delta_{s<u}x_{11,s-u}\partial/\partial x_{12,-u} + \\
& + \sum_{u\in\mathbb{Z}}(\delta_{u,0}\partial/\partial x_{22,-s}\lambda_2 + \delta_{u>0}\partial/\partial x_{22,u-s}u\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_u + \delta_{u<0}\partial/\partial x_{22,u-s}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-u})
\end{aligned}$$

Portanto, $\rho^w(e_{3p})(1\otimes 1) = \rho^w(e_{2s})(x_{11,0}\otimes\lambda_1) = 0$.
Finalmente, vamos considerar $m \in \mathbb{Z}_{<0}$, $s \in \mathbb{Z}$ e $p = m+s$. Sabemos que:

$$\begin{aligned}
m<0, s\leq 0, p<0 \quad & \text{implica} \quad m-s-p\leq 0 \text{ ou } m-s-p>0\ , \\
m<0, s>0, p<0 \quad & \text{implica} \quad m-s-p\leq 0 \text{ ou } m-s-p>0\ , \\
m<0, s\leq 0, p\geq 0 \quad & \text{implica} \quad m-s-p\leq 0 \text{ ou } m-s-p>0\ , \\
m<0, s>0, p\geq 0 \quad & \text{implica} \quad m-s-p<0.
\end{aligned}$$

Então, para $m \in \mathbb{Z}_{<0}$ temos que:

$$\begin{aligned}
e_{1m} \ \mapsto \ & \sum_{s\leq 0,p<0}\Big(-\delta_{(m-s-p\leq 0)}x_{11,-s}x_{11,p}x_{11,s+p-m} + \delta_{(m-s-p>0)}x_{11,-s}x_{11,p}\partial/\partial x_{11,s+p-m}\Big) + \\
& + \sum_{s>0,p<0}\Big(\delta_{(m-s-p\leq 0)}x_{11,p}x_{11,s+p-m}\partial/\partial x_{11,-s} - \delta_{(m-s-p>0)}x_{11,p}\partial/\partial x_{11,s+p-m}\partial/\partial x_{11,-s}\Big) + \\
& + \sum_{s\leq 0,p\geq 0}\Big(-\delta_{(m-s-p\leq 0)}x_{11,-s}x_{11,s+p-m}\partial/\partial x_{11,p} + \delta_{(m-s-p>0)}x_{11,-s}\partial/\partial x_{11,s+p-m}\partial/\partial x_{11,p}\Big) + \\
& + \sum_{s>0,p\geq 0} x_{11,s+p-m}\partial/\partial x_{11,p}\partial/\partial x_{11,-s} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} x_{22,m-s}\partial/\partial x_{12,-s} - m\ k\ x_{11,-m} + \\
& - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{s,0}x_{11,-m}\lambda_1 + \delta_{s>0}x_{11,s-m}\ s\ \mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s + \delta_{s<0}\delta_{m\leq s}x_{11,s-m}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-s} + \\
& -\delta_{s<0}\delta_{m>s}\partial/\partial x_{11,s-m}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-s}\Big)
\end{aligned}$$

Assim, para $m \in \mathbb{Z}_{<0}$:

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{1m})(1\otimes 1) \ = \ & 0\otimes 1 + \Big(-\sum_{s\leq 0,p<0}\delta_{m\leq s+p}(x_{11,-s}x_{11,p}x_{11,s+p-m}\otimes 1) - mk(x_{11,-m}\otimes 1) + \\
& -\sum_{s\in\mathbb{Z}}\delta_{s,0}(x_{11,-m}\otimes\lambda_1) + \delta_{s<0}\delta_{m\leq s}(x_{11,s-m}\otimes\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-s})\Big).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\rho^w(e_{3p})(1 \otimes 1) &= \rho^w(e_{1m})\rho^w(e_{2s})(1 \otimes 1) - \rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{1m})(1 \otimes 1) \\
&= 0 + \rho^w(e_{2s})\Bigg(\sum_{s \leq 0, p<0} (x_{11,-s}x_{11,p}x_{11,s+p-m} \otimes 1) \Bigg) + \rho^w(e_{2s})\Bigg(mk(x_{11,-m} \otimes 1) \Bigg) + \\
&\quad + \rho^w(e_{2s})\Bigg(\sum_{s \in \mathbb{Z}} \delta_{s,0}(x_{11,-m} \otimes \lambda_1) + \delta_{s<0}\delta_{m \leq s}(x_{11,s-m} \otimes \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_{-s}) \Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, provamos que: $\rho^w(e_{3p})(1 \otimes 1) = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Por fim, verifiquemos que $h(1 \otimes 1) = \lambda(h)(1 \otimes 1)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. Verificaremos para h_{10} e h_{20}, pois $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_{10} \oplus \mathbb{C}h_{20}$. Para cada $s \in \mathbb{Z}$ temos:

$$
h_{1s} \mapsto 2\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + 2\sum_{m \geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m} + b_{1s}
$$

$$
h_{2s} \mapsto 2\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m} - \sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} - \sum_{m \geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + b_{2s}
$$

Para $s = 0$:

$$
\begin{aligned}
h_{10} &\mapsto 2\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,-m} + 2\sum_{m \geq 0} a^*_{11,-m}a_{11,m} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{12,-m}a^*_{12,m} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{22,-m}a^*_{22,m} + b_{10} \\
&\mapsto -2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + 2\sum_{m \geq 0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \\
&\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-m} + \lambda_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{20} &\mapsto 2\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{22,-m}a^*_{22,m} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{12,-m}a^*_{12,m} - \sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,-m} - \sum_{m \geq 0} a^*_{11,-m}a_{11,m} + b_{20} \\
&\mapsto -2\sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + \\
&\quad - \sum_{m \geq 0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + \lambda_2
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_{10})(1\otimes 1) &= \Big(-2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + 2\sum_{m\geq 0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \\
&\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-m}\Big)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) + \mathrm{Id}(1)\otimes\lambda_1(1) \\
&= 0\otimes 1 + 1\otimes\lambda_1(1) = \lambda_1(1\otimes 1)\ ,
\end{aligned}$$

isto é, $\rho^w(h_{10})(1\otimes 1) = \lambda_1(1\otimes 1) = \lambda(h_{10})(1\otimes 1)$.

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_{20})(1\otimes 1) &= \Big(-2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + \\
&\quad - \sum_{m\geq 0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m}\Big)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) + \mathrm{Id}(1)\otimes\lambda_2(1) \\
&= 0\otimes 1 + 1\otimes\lambda_2(1) = \lambda_2(1\otimes 1)\ ,
\end{aligned}$$

isto é, $\rho^w(h_{20})(1\otimes 1) = \lambda_2(1\otimes 1) = \lambda(h_{20})(1\otimes 1)$.

3.5 Algumas torções do $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário $W^w_{2,1}(\lambda,\gamma)$

Na seção anterior verificamos as propriedades do módulo de Wakimoto Intermediário $W^w_{2,1}(\lambda,\gamma)$ torcido pelo elemento $w = s_1 \in \mathfrak{S}_3$. Nessa seção descreveremos as torções desse módulo pelos outros elementos de $\mathfrak{S}_3$. Enfatizamos que em [CF04] essa abordagem não foi explorada. O que apresentamos aqui é um passo inicial nessa direção.

• **O $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário $W^w_{2,1}(\lambda,\gamma)$, com $w = e \in \mathfrak{S}_3$**

O representante de $s_1 = (1\ 2)$ em $G = SL(3,\mathbb{C})$ e seu inverso são as matrizes:

$$\dot{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{s}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Para $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$ temos que $Ad(g)X := gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$. Então, para todo $g \in G$ temos que $Ad(g)$ é uma conjugação, isto é, $Ad(g) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\forall g \in G$. Temos que se $w = s_1 \in \mathfrak{S}_3$:

$$Ad(\dot{w})(e_1) = -f_1 \quad , \quad Ad(\dot{w})(e_2) = e_3 \quad , \quad Ad(\dot{w})(e_3) = -e_2\ ,$$

$$Ad(\dot{w})(f_1) = -e_1 \quad , \quad Ad(\dot{w})(f_2) = f_3 \quad , \quad Ad(\dot{w})(f_3) = -f_2\ ,$$

$$Ad(\dot{w})(h_1) = -h_1 \quad , \quad Ad(\dot{w})(h_2) = h_1 + h_2 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(e_1) = -f_1 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_2) = -e_3 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_3) = e_2 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(f_1) = -e_1 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_2) = -f_3 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_3) = f_2 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(h_1) = -h_1 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(h_2) = h_1 + h_2.$$

Usando estas relações descreveremos a representação

$$\rho = \rho^e : \widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$$

baseada na representação ρ^w.

Sabemos que $\rho^w = \rho^e \circ Ad(\dot{w}^{-1})$, com $w \in \mathfrak{S}_3$. Então temos que $\rho = \rho^e = \rho^w \circ (Ad(\dot{w}^{-1}))^{-1}$.

Assim, $(Ad(\dot{w}^{-1}))^{-1} = Ad(\dot{w})$, pois $Ad(\dot{w}) \circ Ad(\dot{w}^{-1})(g) = Ad(\dot{w})(\dot{w}^{-1}g\dot{w}) = \dot{w}\dot{w}^{-1}g\dot{w}\dot{w}^{-1} = g$. Portanto, $\rho = \rho^e = \rho^w \circ (Ad(\dot{w}))$. Então, para $w = s_1 \in \mathfrak{S}_3$,

$$\begin{aligned}
\rho(f_1)(z) = \rho^e(f_1)(z) &= (\rho^w \circ (Ad(\dot{w})))(f_1)(z) = -\rho^w(e_1)(z)\\
\rho(f_2)(z) = \rho^e(f_2)(z) &= (\rho^w \circ (Ad(\dot{w})))(f_2)(z) = \rho^w(f_3)(z)\\
\rho(f_3)(z) = \rho^e(f_3)(z) &= (\rho^w \circ (Ad(\dot{w})))(f_3)(z) = -\rho^w(f_2)(z)\\
\rho(h_1)(z) = \rho^e(h_1)(z) &= (\rho^w \circ (Ad(\dot{w})))(h_1)(z) = -\rho^w(h_1)(z)\\
\rho(h_2)(z) = \rho^e(h_2)(z) &= (\rho^w \circ (Ad(\dot{w})))(h_2)(z) = \rho^w(h_1)(z) + \rho^w(h_2)(z)\\
\rho(e_1)(z) = \rho^e(e_1)(z) &= (\rho^w \circ (Ad(\dot{w})))(e_1)(z) = -\rho^w(f_1)(z)\\
\rho(e_2)(z) = \rho^e(e_2)(z) &= (\rho^w \circ (Ad(\dot{w})))(e_2)(z) = \rho^w(e_3)(z)\\
\rho(e_3)(z) = \rho^e(e_3)(z) &= (\rho^w \circ (Ad(\dot{w})))(e_3)(z) = -\rho^w(e_2)(z)
\end{aligned}$$

Recordamos que ρ^w, com $n = 2$, $r = 1$ e $w = s_1 \in \mathfrak{S}_3$, é definida por:

$$\begin{aligned}
\rho^w(c) &= k = \gamma^2 - 2\\
\rho^w(f_1)(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a_{22}^*(z)\\
\rho^w(f_2)(z) &= a_{22}(z)\\
\rho^w(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + a_{12}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}(z)a_{22}^*(z) + b_1(z)\\
\rho^w(h_2)(z) &= 2a_{22}(z)a_{22}^*(z) + a_{12}(z)a_{12}^*(z) - : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + b_2(z)\\
\rho^w(e_1)(z) &= - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + a_{22}(z)a_{12}^*(z) - a_{11}^*(z)b_1(z) + k\partial_z a_{11}^*(z)\\
\rho^w(e_2)(z) &= : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : a_{22}^*(z) - a_{12}(z)a_{12}^*(z)a_{22}^*(z) - a_{22}(z)a_{22}^*(z)a_{22}^*(z) +\\
&\quad - a_{11}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}^*(z)b_2(z) + k\partial_z a_{22}^*(z)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 2\\
\rho(f_1)(z) &= :a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z): - a_{22}(z)a_{12}^*(z) + a_{11}^*(z)b_1(z) - k\partial_z a_{11}^*(z)\\
\rho(f_2)(z) &= \rho^w(f_3)(z)\\
\rho(f_3)(z) &= -a_{22}(z)\\
\rho(h_1)(z) &= -2:a_{11}(z)a_{11}^*(z): - a_{12}(z)a_{12}^*(z) + a_{22}(z)a_{22}^*(z) - b_1(z)\\
\rho(h_2)(z) &= :a_{11}(z)a_{11}^*(z): + a_{22}(z)a_{22}^*(z) + 2a_{12}(z)a_{12}^*(z) + b_1(z) + b_2(z)\\
\rho(e_1)(z) &= -a_{11}(z) - a_{12}(z)a_{22}^*(z)\\
\rho(e_2)(z) &= \rho^w(e_3)(z)\\
\rho(e_3)(z) &= -:a_{11}(z)a_{11}^*(z): a_{22}^*(z) + a_{12}(z)a_{12}^*(z)a_{22}^*(z) + a_{22}(z)a_{22}^*(z)a_{22}^*(z) +\\
&\quad + a_{11}(z)a_{12}^*(z) + a_{22}^*(z)b_2(z) - k\partial_z a_{22}^*(z)
\end{aligned}$$

Chamamos $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, com a estrutura de módulo apresentada acima, de **módulo de Wakimoto Intermediário** e o denotamos por $W_{2,1}(\lambda', \gamma)$.

Observe que $\rho^w(e_3)(z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \rho^w(e_3)_p z^{-p-1} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \rho^w(e_{3p}) z^{-p-1} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} [\rho^w(e_{1m}), \rho^w(e_{2s})] z^{-p-1}$, onde $p = m + s$.

Consideremos a subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_1 = \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$, onde

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 = \Big((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1$$

e $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.

O módulo de Wakimoto Intermediário $W_{2,1}(\lambda', \gamma)$ tem as seguintes propriedades: a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_1$ aniquila o vetor $(1\otimes 1) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathbf{y}]$, $h(1\otimes 1) = \lambda'(h)(1\otimes 1)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$ e $c(1\otimes 1) = (\gamma^2-2)(1\otimes 1)$. Para a verificação dessas propriedades, novamente foi necessário descrever algumas fórmulas de forma explícita, e o autor desta tese utilizou a definição das distribuições formais para descrevê-las.

Para que $\overline{\mathfrak{b}}_1$ aniquile o vetor $(1 \otimes 1)$ precisamos verificar que:

- $\rho(e_{1s})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho(f_{1s})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho(h_{1s})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho(h_{2s})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- $\rho(e_{2m})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho(e_{3m})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\rho(e_{10})(1 \otimes 1) = 0$.

Pelos cálculos exibidos anteriormente, já sabemos que: $\rho^w(e_{1p})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(f_{1p})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(h_{1p})(1 \otimes 1) = 0$, para $p \in \mathbb{Z}_{>0}$, e $\rho^w(e_{2m})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{3m})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Então conforme as fórmulas descritas acima podemos afirmar que: $\rho(e_{1s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho(f_{1s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho(h_{1s})(1\otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}_{>0}$, e $\rho(e_{2m})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho(e_{3m})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Falta verificar que: $\rho(h_{2s})(1\otimes 1)=0$, para $s\in\mathbb{Z}_{>0}$, e $\rho(e_{10})(1\otimes 1)=0$.

$$\begin{aligned}
\rho(h_2)(z) &= \ :a_{11}(z)a^*_{11}(z): + a_{22}(z)a^*_{22}(z) + 2a_{12}(z)a^*_{12}(z) + b_1(z) + b_2(z)\\
&= \left(a_{11}(z)_+ a^*_{11}(z)\right) + \left(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-\right) + a_{22}(z)a^*_{22}(z) + 2a_{12}(z)a^*_{12}(z) + b_1(z) + b_2(z)\\
&= \sum_{m<0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{11,m}z^{-m-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{22,m}z^{-m} +\\
&\quad +2\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{12,m}z^{-m} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m}z^{-s-1} +\\
&\quad +2\sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + \sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m} + 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m} +\\
&\quad + b_{1s} + b_{2s}\Bigg)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s\in\mathbb{Z}$, temos:

$$h_{2s} \mapsto \sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + \sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m} + 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m} + b_{1s} + b_{2s}$$

Seja $s\in\mathbb{Z}_{>0}$. Então:

$$\begin{aligned}
h_{2s} \mapsto\ & -\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) +\\
& -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} - 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + s\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s + s\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho(h_{2s})(1\otimes 1) &= \Bigg(-\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) +\\
&\quad -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} - 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} + s\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s + s\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Bigg)(1\otimes 1)\\
&= \Bigg(-\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) +\\
&\quad -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} - 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{12,-m}\Bigg)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) +\\
&\quad +\mathrm{Id}(1)\otimes\Big(s\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s + s\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Big)(1)\\
&= 0\otimes 1 + 1\otimes 0 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(e_1)(z) &= -a_{11}(z) - a_{12}(z)a^*_{22}(z) \\
&= -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{22,m}z^{-m} \\
&= -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{22,m}z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-a_{11,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{22,m}\Big)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$:

$$e_{1s} \mapsto -\delta_{s<0}x_{11,s} - \delta_{s\geq 0}\partial/\partial x_{11,s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m}$$

Para $s = 0$ temos que:

$$e_{10} \mapsto -\partial/\partial x_{11,0} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-m}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\rho(e_{10})(1\otimes 1) &= \Big(-\partial/\partial x_{11,0} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-m}\Big)(1\otimes 1) \\
&= \Big(-\partial/\partial x_{11,0} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-m}\Big)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) \\
&= 0\otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

Verificaremos que $h(1\otimes 1) = \lambda'(h)(1\otimes 1)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. Para $s \in \mathbb{Z}$:

$$h_{1s} \mapsto -2\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} - 2\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m} - b_{1s}$$

$$h_{2s} \mapsto \sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + \sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{22,m} + 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{12,m} + b_{1s} + b_{2s}$$

Para $s = 0$ temos:

$$h_{10} \mapsto 2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} - 2\sum_{m\geq 0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{12,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \lambda_1$$

$$\begin{aligned}
h_{20} \mapsto\ & -\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + \sum_{m\geq 0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-m} - 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{12,-m} + \\
& +\lambda_1 + \lambda_2
\end{aligned}$$

Portanto, $\rho(h_{10})(1\otimes 1) = \lambda'_1(1\otimes 1)$ e $\rho(h_{20})(1\otimes 1) = \lambda'_2(1\otimes 1)$, onde $\lambda'_1 = \lambda'(h_{10})$, $\lambda'_2 = \lambda'(h_{20})$, $\lambda'_1 = -\lambda_1$ e $\lambda'_2 = \lambda_1 + \lambda_2$.

• **O $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário $W^w_{2,1}(\lambda,\gamma)$, com $w = s_2 = (2\ 3) \in \mathfrak{S}_3$**

O representante de s_2 em $G = SL(3,\mathbb{C})$ e seu inverso são as matrizes:

$$\dot{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{s}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $w = s_2 \in \mathfrak{S}_3$ temos que:

$$Ad(\dot{w}^{-1})(e_1) = e_3 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_2) = -f_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_3) = -e_1 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(f_1) = f_3 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_2) = -e_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_3) = -f_1 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(h_1) = h_1 + h_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(h_2) = -h_2.$$

Sabemos que $\rho^w = \rho \circ Ad(\dot{w}^{-1})$, com $w \in \mathfrak{S}_3$.
Então, para $w = s_2 \in \mathfrak{S}_3$,

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_1)(z) = \rho(f_3)(z) \\
\rho^w(f_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_2)(z) = -\rho(e_2)(z) \\
\rho^w(f_3)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_3)(z) = -\rho(f_1)(z) \\
\rho^w(h_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(h_1)(z) = \rho(h_1)(z) + \rho(h_2)(z) \\
\rho^w(h_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(h_2)(z) = -\rho(h_2)(z) \\
\rho^w(e_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_1)(z) = \rho(e_3)(z) \\
\rho^w(e_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_2)(z) = -\rho(f_2)(z) \\
\rho^w(e_3)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_3)(z) = -\rho(e_1)(z)
\end{aligned}$$

Recordamos que ρ é a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 2 \\
\rho(f_1)(z) &= :a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): - a_{22}(z)a^*_{12}(z) + a^*_{11}(z)b_1(z) - k\partial_z a^*_{11}(z) \\
\rho(f_2)(z) &= \rho^{s_1}(f_3)(z) \\
\rho(f_3)(z) &= -a_{22}(z) \\
\rho(h_1)(z) &= -2:a_{11}(z)a^*_{11}(z): - a_{12}(z)a^*_{12}(z) + a_{22}(z)a^*_{22}(z) - b_1(z) \\
\rho(h_2)(z) &= :a_{11}(z)a^*_{11}(z): + a_{22}(z)a^*_{22}(z) + 2a_{12}(z)a^*_{12}(z) + b_1(z) + b_2(z) \\
\rho(e_1)(z) &= -a_{11}(z) - a_{12}(z)a^*_{22}(z) \\
\rho(e_2)(z) &= \rho^{s_1}(e_3)(z) \\
\rho(e_3)(z) &= -:a_{11}(z)a^*_{11}(z): a^*_{22}(z) + a_{12}(z)a^*_{12}(z)a^*_{22}(z) + a_{22}(z)a^*_{22}(z)a^*_{22}(z) + \\
&\quad + a_{11}(z)a^*_{12}(z) + a^*_{22}(z)b_2(z) - k\partial_z a^*_{22}(z)
\end{aligned}$$

• **O $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário $W^w_{2,1}(\lambda,\gamma)$, com $w = s_1s_2 \in \mathfrak{S}_3$**

O representante de s_1s_2 em $G = SL(3,\mathbb{C})$ e seu inverso são as matrizes:

$$\dot{s}_1\dot{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\dot{s}_1\dot{s}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $w = s_1s_2 \in \mathfrak{S}_3$ temos que:

$$Ad(\dot{w}^{-1})(e_1) = -f_3 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_2) = e_1 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_3) = -f_2 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(f_1) = -e_3 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_2) = f_1 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_3) = -e_2 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(h_1) = -h_1 - h_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(h_2) = h_1.$$

Sabemos que $\rho^w = \rho \circ Ad(\dot{w}^{-1})$, com $w \in \mathfrak{S}_3$.
Então, para $w = s_1s_2 \in \mathfrak{S}_3$,

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_1)(z) = -\rho(e_3)(z) \\
\rho^w(f_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_2)(z) = \rho(f_1)(z) \\
\rho^w(f_3)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_3)(z) = -\rho(e_2)(z) \\
\rho^w(h_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(h_1)(z) = -\rho(h_1)(z) - \rho(h_2)(z) \\
\rho^w(h_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(h_2)(z) = \rho(h_1)(z) \\
\rho^w(e_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_1)(z) = -\rho(f_3)(z) \\
\rho^w(e_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_2)(z) = \rho(e_1)(z) \\
\rho^w(e_3)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_3)(z) = -\rho(f_2)(z)
\end{aligned}$$

Recordamos que ρ é a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 2 \\
\rho(f_1)(z) &= :a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): - a_{22}(z)a^*_{12}(z) + a^*_{11}(z)b_1(z) - k\partial_z a^*_{11}(z) \\
\rho(f_2)(z) &= \rho^{s_1}(f_3)(z) \\
\rho(f_3)(z) &= -a_{22}(z) \\
\rho(h_1)(z) &= -2 :a_{11}(z)a^*_{11}(z): - a_{12}(z)a^*_{12}(z) + a_{22}(z)a^*_{22}(z) - b_1(z) \\
\rho(h_2)(z) &= :a_{11}(z)a^*_{11}(z): + a_{22}(z)a^*_{22}(z) + 2a_{12}(z)a^*_{12}(z) + b_1(z) + b_2(z) \\
\rho(e_1)(z) &= -a_{11}(z) - a_{12}(z)a^*_{22}(z) \\
\rho(e_2)(z) &= \rho^{s_1}(e_3)(z) \\
\rho(e_3)(z) &= - :a_{11}(z)a^*_{11}(z): a^*_{22}(z) + a_{12}(z)a^*_{12}(z)a^*_{22}(z) + a_{22}(z)a^*_{22}(z)a^*_{22}(z) + \\
&\quad + a_{11}(z)a^*_{12}(z) + a^*_{22}(z)b_2(z) - k\partial_z a^*_{22}(z)
\end{aligned}$$

• **O $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário $W^{w}_{2,1}(\lambda,\gamma)$, com $s_2s_1 \in \mathfrak{S}_3$**

O representante de s_2s_1 em $G = SL(3,\mathbb{C})$ e seu inverso são as matrizes:

$$\dot{s}_2\dot{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\dot{s}_2\dot{s}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $w = s_2s_1 \in \mathfrak{S}_3$ temos que:

$$Ad(\dot{w}^{-1})(e_1) = e_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_2) = f_3 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_3) = f_1 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(f_1) = f_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_2) = e_3 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_3) = e_1 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(h_1) = h_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(h_2) = -h_1 - h_2.$$

Sabemos que $\rho^w = \rho \circ Ad(\dot{w}^{-1})$, com $w \in \mathfrak{S}_3$.
Então, para $w = s_2s_1 \in \mathfrak{S}_3$,

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_1)(z) = \rho(f_2)(z) \\
\rho^w(f_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_2)(z) = \rho(e_3)(z) \\
\rho^w(f_3)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_3)(z) = \rho(e_1)(z) \\
\rho^w(h_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(h_1)(z) = \rho(h_2)(z) \\
\rho^w(h_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(h_2)(z) = -\rho(h_1)(z) - \rho(h_2)(z) \\
\rho^w(e_1)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_1)(z) = \rho(e_2)(z) \\
\rho^w(e_2)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_2)(z) = \rho(f_3)(z) \\
\rho^w(e_3)(z) &= (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_3)(z) = \rho(f_1)(z)
\end{aligned}$$

Recordamos que ρ é a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 2 \\
\rho(f_1)(z) &= :a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): - a_{22}(z)a^*_{12}(z) + a^*_{11}(z)b_1(z) - k\partial_z a^*_{11}(z) \\
\rho(f_2)(z) &= \rho^{s_1}(f_3)(z) \\
\rho(f_3)(z) &= -a_{22}(z) \\
\rho(h_1)(z) &= -2 :a_{11}(z)a^*_{11}(z): - a_{12}(z)a^*_{12}(z) + a_{22}(z)a^*_{22}(z) - b_1(z) \\
\rho(h_2)(z) &= :a_{11}(z)a^*_{11}(z): + a_{22}(z)a^*_{22}(z) + 2a_{12}(z)a^*_{12}(z) + b_1(z) + b_2(z) \\
\rho(e_1)(z) &= -a_{11}(z) - a_{12}(z)a^*_{22}(z) \\
\rho(e_2)(z) &= \rho^{s_1}(e_3)(z) \\
\rho(e_3)(z) &= - :a_{11}(z)a^*_{11}(z): a^*_{22}(z) + a_{12}(z)a^*_{12}(z)a^*_{22}(z) + a_{22}(z)a^*_{22}(z)a^*_{22}(z) + \\
&\quad + a_{11}(z)a^*_{12}(z) + a^*_{22}(z)b_2(z) - k\partial_z a^*_{22}(z)
\end{aligned}$$

• **O $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário $W^{w}_{2,1}(\lambda,\gamma)$, com $s_1s_2s_1 \in \mathfrak{S}_3$**

O representante de $s_1s_2s_1$ em $G = SL(3,\mathbb{C})$ e seu inverso são as matrizes:

$$\dot{s}_1\dot{s}_2\dot{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\dot{s}_1\dot{s}_2\dot{s}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $w = s_1s_2s_1 \in \mathfrak{S}_3$ temos que:

$$Ad(\dot{w}^{-1})(e_1) = -f_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_2) = -f_1 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(e_3) = f_3 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(f_1) = -e_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_2) = -e_1 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(f_3) = e_3 \ ,$$

$$Ad(\dot{w}^{-1})(h_1) = -h_2 \quad , \quad Ad(\dot{w}^{-1})(h_2) = -h_1.$$

Sabemos que $\rho^w = \rho \circ Ad(\dot{w}^{-1})$, com $w \in \mathfrak{S}_3$.
Então, para $w = s_1s_2s_1 \in \mathfrak{S}_3$,

$$\begin{array}{rcl}
\rho^w(f_1)(z) & = & (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_1)(z) = -\rho(e_2)(z) \\
\rho^w(f_2)(z) & = & (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_2)(z) = -\rho(e_1)(z) \\
\rho^w(f_3)(z) & = & (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(f_3)(z) = \rho(e_3)(z) \\
\rho^w(h_1)(z) & = & (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(h_1)(z) = -\rho(h_2)(z) \\
\rho^w(h_2)(z) & = & (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(h_2)(z) = -\rho(h_1)(z) \\
\rho^w(e_1)(z) & = & (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_1)(z) = -\rho(f_2)(z) \\
\rho^w(e_2)(z) & = & (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_2)(z) = -\rho(f_1)(z) \\
\rho^w(e_3)(z) & = & (\rho \circ (Ad(\dot{w}^{-1})))(e_3)(z) = \rho(f_3)(z)
\end{array}$$

Recordemos que ρ é a seguinte representação:

$$\begin{array}{rcl}
\rho(c) & = & k = \gamma^2 - 2 \\
\rho(f_1)(z) & = & :a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): - a_{22}(z)a^*_{12}(z) + a^*_{11}(z)b_1(z) - k\partial_z a^*_{11}(z) \\
\rho(f_2)(z) & = & \rho^{s_1}(f_3)(z) \\
\rho(f_3)(z) & = & -a_{22}(z) \\
\rho(h_1)(z) & = & -2 :a_{11}(z)a^*_{11}(z): - a_{12}(z)a^*_{12}(z) + a_{22}(z)a^*_{22}(z) - b_1(z) \\
\rho(h_2)(z) & = & :a_{11}(z)a^*_{11}(z): + a_{22}(z)a^*_{22}(z) + 2a_{12}(z)a^*_{12}(z) + b_1(z) + b_2(z) \\
\rho(e_1)(z) & = & -a_{11}(z) - a_{12}(z)a^*_{22}(z) \\
\rho(e_2)(z) & = & \rho^{s_1}(e_3)(z) \\
\rho(e_3)(z) & = & - :a_{11}(z)a^*_{11}(z): a^*_{22}(z) + a_{12}(z)a^*_{12}(z)a^*_{22}(z) + a_{22}(z)a^*_{22}(z)a^*_{22}(z) + \\
 & & + a_{11}(z)a^*_{12}(z) + a^*_{22}(z)b_2(z) - k\partial_z a^*_{22}(z)
\end{array}$$

3.6 Caso $n = 3$: módulos de Wakimoto Intermediários $W_{3,r}(\lambda, \gamma)$

3.6.1 ($n = 3$, $r = 3$) : $W_{3,3}(\lambda, \gamma)$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, com geradores $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3, h_1, h_2$ e h_3. Observe que $e_4 = [e_1, e_2] = E_{13}$, $e_5 = [e_2, e_3] = E_{24}$, $e_6 = [e_4, e_3] = [[e_1, e_2], e_3] = E_{14}$, $f_4 = [f_2, f_1] = E_{31}$, $f_5 = [f_3, f_2] = E_{42}$ e $f_6 = [f_3, f_4] = [f_3, [f_2, f_1]] = E_{41}$.

Então, os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ são $e_{1m}, e_{2m}, e_{3m}, f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}, h_{1m}, h_{2m}, h_{3m}$ e c, com $m \in \mathbb{Z}$. Considere as seguintes distribuições formais:

$$e_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e_{im} z^{-m-1} \quad , \quad f_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{im} z^{-m-1} \quad , \quad h_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{im} z^{-m-1} \ ,$$

com $1 \leq i \leq 3$.

Para um elemento $\gamma \in \mathbb{C}^*$, seja $k = \gamma^2 - (r + 1) = \gamma^2 - 4$.

Como $1 \leq i \leq j \leq n = 3$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}$, $a_{12,m}$, $a_{13,m}$, $a_{22,m}$, $a_{23,m}$, $a_{33,m}$, $a^*_{11,m}$, $a^*_{12,m}$, $a^*_{13,m}$, $a^*_{22,m}$, $a^*_{23,m}$, $a^*_{33,m}$ e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Seja

$$\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{13,m}, x_{22,m}, x_{23,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}].$$

Então, como $j \leq 3 = r$, temos que:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & , \text{ se } \ m \geq 0 \\ x_{11,m} & , \text{ se } \ m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & , \text{ se } \ m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & , \text{ se } \ m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{12,m} & , \text{ se } \ m \geq 0 \\ x_{12,m} & , \text{ se } \ m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = \begin{cases} x_{12,-m} & , \text{ se } \ m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{12,-m} & , \text{ se } \ m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{13,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{13,m} & , \text{ se } \ m \geq 0 \\ x_{13,m} & , \text{ se } \ m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{13,m}) = \begin{cases} x_{13,-m} & , \text{ se } \ m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{13,-m} & , \text{ se } \ m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{22,m} & , \text{ se } \ m \geq 0 \\ x_{22,m} & , \text{ se } \ m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = \begin{cases} x_{22,-m} & , \text{ se } \ m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{22,-m} & , \text{ se } \ m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{23,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{23,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{23,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{23,m}) = \begin{cases} x_{23,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{23,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{33,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{33,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{33,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{33,m}) = \begin{cases} x_{33,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{33,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

A matriz de Cartan associada com $\mathfrak{g}$ é $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Então podemos construir a matriz $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 & -\gamma^2 & 0 \\ -\gamma^2 & 2\gamma^2 & -\gamma^2 \\ 0 & -\gamma^2 & 2\gamma^2 \end{pmatrix}$, pois $r = 3$.

A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem geradores b_{1m}, b_{2m}, b_{3m} e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\rho_\lambda(b_{10}) = \lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m}) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1m}) = m\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{20}) = \lambda_2 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2,-m}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2m}) = m\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{30}) = \lambda_3 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{3,-m}) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{3m}) = m\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$, $\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m}, y_{3m})$ e $\partial/\partial \mathbf{y}_m = (\partial/\partial y_{1m}, \partial/\partial y_{2m}, \partial/\partial y_{3m})$. Sejam $\lambda_1 = \lambda(h_{10})$, $\lambda_2 = \lambda(h_{20})$ e $\lambda_3 = \lambda(h_{30})$.

Observe que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{C}^3$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathfrak{B}_{ii} = 2\gamma^2$ e $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathfrak{B}_{ij} = -\gamma^2$ ou 0, $(i \neq j)$.

Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n = 3$ e $r = 3$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 4 \\
\rho(f_1)(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a_{22}^*(z) + a_{13}(z)a_{23}^*(z) \\
\rho(f_2)(z) &= a_{22}(z) + a_{23}(z)a_{33}^*(z) \\
\rho(f_3)(z) &= a_{33}(z) \\
\rho(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : + b_1(z) \\
\rho(h_2)(z) &= 2 : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : - : a_{33}(z)a_{33}^*(z) : + b_2(z) \\
\rho(h_3)(z) &= 2 : a_{33}(z)a_{33}^*(z) : + : a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : + : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + b_3(z) \\
\rho(e_1)(z) &= - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + a_{22}(z)a_{12}^*(z) + a_{23}(z)a_{13}^*(z) - a_{11}^*(z)b_1(z) + (k+2)\partial_z a_{11}^*(z) \\
\rho(e_2)(z) &= : a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + a_{33}(z)a_{23}^*(z) + \\
& \quad - a_{11}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}^*(z)b_2(z) + (k+1)\partial_z a_{22}^*(z) \\
\rho(e_3)(z) &= : a_{33}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) : + : a_{33}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) : - : a_{33}^*(z)a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{33}^*(z)a_{23}(z)a_{23}^*(z) : + \\
& \quad - : a_{33}^*(z)a_{33}(z)a_{33}^*(z) : - a_{12}(z)a_{13}^*(z) - a_{22}(z)a_{23}^*(z) - a_{33}^*(z)b_3(z) + k\partial_z a_{33}^*(z)
\end{aligned}
$$

onde $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{13,m}, x_{22,m}, x_{23,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m}, y_{3m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$ é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$.

Em [FF90b] temos a seguinte representação da álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ no espaço $M \otimes \pi_{\chi/\nu, \nu^2}$, onde M é uma representação irredutível de uma álgebra de Heisenberg específica e $\nu \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
c &\mapsto K = \nu^2 - 4 \\
F_1(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a_{22}^*(z) + a_{13}(z)a_{23}^*(z) \\
F_2(z) &= a_{22}(z) + a_{23}(z)a_{33}^*(z) \\
F_3(z) &= a_{33}(z) \\
H_1(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : + \nu b_1(z) \\
H_2(z) &= 2 : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : - : a_{33}(z)a_{33}^*(z) : + \nu b_2(z) \\
H_3(z) &= 2 : a_{33}(z)a_{33}^*(z) : + : a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : + : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + \nu b_3(z) \\
E_1(z) &= - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + a_{22}(z)a_{12}^*(z) + a_{23}(z)a_{13}^*(z) - \nu a_{11}^*(z)b_1(z) - (K+2)(z\frac{d}{dz})a_{11}^*(z) \\
E_2(z) &= : a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + a_{33}(z)a_{23}^*(z) + \\
& \quad - a_{11}(z)a_{12}^*(z) - \nu a_{22}^*(z)b_2(z) - (K+1)(z\frac{d}{dz})a_{22}^*(z) \\
E_3(z) &= : a_{33}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) : + : a_{33}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) : - : a_{33}^*(z)a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{33}^*(z)a_{23}(z)a_{23}^*(z) : + \\
& \quad - : a_{33}^*(z)a_{33}(z)a_{33}^*(z) : - a_{12}(z)a_{13}^*(z) - a_{22}(z)a_{23}^*(z) - \nu a_{33}^*(z)b_3(z) - K(z\frac{d}{dz})a_{33}^*(z)
\end{aligned}
$$

O espaço $M \otimes \pi_{\chi/\nu, \nu^2}$, $(\nu \neq 0)$ é um módulo de Wakimoto $W_{\chi,\nu}$. Como já mencionado anteriormente, nesse caso, as distribuições formais são da forma $A(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} A(s) z^s$.

Comparando as fórmulas dos Teoremas descritos acima, observamos que:

$$\begin{aligned}
(k+2)\partial_z a_{11}^*(z) &= -(k+2)\sum_{s\in\mathbb{Z}} s a_{11,s}^* z^{-s-1} \ , \\
(k+1)\partial_z a_{22}^*(z) &= -(k+1)\sum_{s\in\mathbb{Z}} s a_{22,s}^* z^{-s-1} \ , \\
k\partial_z a_{33}^*(z) &= -k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s a_{33,s}^* z^{-s-1} \quad \text{e} \\
-(K+2)(z\frac{d}{dz})a_{11}^*(z) &= -(K+2)\sum_{s\in\mathbb{Z}} s a_{11}^*(s) z^{s} \ , \\
-(K+1)(z\frac{d}{dz})a_{22}^*(z) &= -(K+1)\sum_{s\in\mathbb{Z}} s a_{22}^*(s) z^{s} \ , \\
-K(z\frac{d}{dz})a_{33}^*(z) &= -K\sum_{s\in\mathbb{Z}} s a_{33}^*(s) z^{s}.
\end{aligned}$$

Concluímos que a representação descrita no Teorema 3.2.2 [CF04] para $n = 3 = r$ é a mesma representação descrita nos trabalhos de B. Feigin e E. Frenkel [FF88, FF90b].

3.6.2 $(n = 3, r = 0)$: $W_{3,0}(\lambda, \gamma)$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, com geradores $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3, h_1$, h_2 e h_3. Então os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ são $e_{1m}, e_{2m}, e_{3m}, f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}, h_{1m}, h_{2m}, h_{3m}$ e c, com $m \in \mathbb{Z}$. Considere as seguintes distribuições formais:

$$e_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e_{im} z^{-m-1} \quad , \quad f_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{im} z^{-m-1} \quad , \quad h_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{im} z^{-m-1} \ ,$$

com $1 \le i \le 3$.

Para um elemento $\gamma \in \mathbb{C}^*$, seja $k = \gamma^2 - (r+1) = \gamma^2 - 1$. Como $1 \le i \le j \le n = 3$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}, a_{12,m}, a_{13,m}, a_{22,m}, a_{23,m}, a_{33,m}$, $a_{11,m}^*, a_{12,m}^*, a_{13,m}^*, a_{22,m}^*, a_{23,m}^*, a_{33,m}^*$ e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Seja $\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{13,m}, x_{22,m}, x_{23,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}]$. Então,

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = x_{11,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{12,m}) = x_{12,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{13,m}) = x_{13,m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = x_{22,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{23,m}) = x_{23,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{33,m}) = x_{33,m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}^*) = -\partial/\partial x_{11,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{12,m}^*) = -\partial/\partial x_{12,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{13,m}^*) = -\partial/\partial x_{13,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}^*) = -\partial/\partial x_{22,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{23,m}^*) = -\partial/\partial x_{23,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{33,m}^*) = -\partial/\partial x_{33,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

pois $j = 1, 2, 3 > r = 0$.

A matriz de Cartan associada com $\mathfrak{g}$ is $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Podemos construir a matriz

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2(\gamma^2-1) & -(\gamma^2-1) & 0 \\ -(\gamma^2-1) & 2(\gamma^2-1) & -(\gamma^2-1) \\ 0 & -(\gamma^2-1) & 2(\gamma^2-1) \end{pmatrix}$$

pois $r = 0$. A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem geradores b_{1m}, b_{2m}, b_{3m} e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\rho_\lambda(b_{10}) = \lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m}) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1m}) = m\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{20}) = \lambda_2 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2,-m}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2m}) = m\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{30}) = \lambda_3 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{3,-m}) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{3m}) = m\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$, $\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m}, y_{3m})$ e $\partial/\partial \mathbf{y}_m = (\partial/\partial y_{1m}, \partial/\partial y_{2m}, \partial/\partial y_{3m})$.

Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n = 3$ e $r = 0$, temos que:

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= k = \gamma^2 - 1 \\
\rho(f_1)(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a_{22}^*(z) + a_{13}(z)a_{23}^*(z) \\
\rho(f_2)(z) &= a_{22}(z) + a_{23}(z)a_{33}^*(z) \\
\rho(f_3)(z) &= a_{33}(z) \\
\rho(h_1)(z) &= 2a_{11}(z)a_{11}^*(z) + a_{12}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}(z)a_{22}^*(z) + a_{13}(z)a_{13}^*(z) - a_{23}(z)a_{23}^*(z) + b_1(z) \\
\rho(h_2)(z) &= 2a_{22}(z)a_{22}^*(z) + a_{12}(z)a_{12}^*(z) - a_{11}(z)a_{11}^*(z) + a_{23}(z)a_{23}^*(z) - a_{33}(z)a_{33}^*(z) + b_2(z) \\
\rho(h_3)(z) &= 2a_{33}(z)a_{33}^*(z) + a_{13}(z)a_{13}^*(z) - a_{12}(z)a_{12}^*(z) + a_{23}(z)a_{23}^*(z) - a_{22}(z)a_{22}^*(z) + b_3(z) \\
\rho(e_1)(z) &= -a_{11}(z)a_{11}^*(z)a_{11}^*(z) + a_{22}(z)a_{12}^*(z) + a_{23}(z)a_{13}^*(z) - a_{11}^*(z)b_1(z) + k\partial_z a_{11}^*(z) \\
\rho(e_2)(z) &= a_{11}(z)a_{11}^*(z)a_{22}^*(z) - a_{12}(z)a_{12}^*(z)a_{22}^*(z) - a_{22}(z)a_{22}^*(z)a_{22}^*(z) + a_{33}(z)a_{23}^*(z) + \\
&\quad -a_{11}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}^*(z)b_2(z) + k\partial_z a_{22}^*(z) \\
\rho(e_3)(z) &= a_{12}(z)a_{12}^*(z)a_{33}^*(z) + a_{22}(z)a_{22}^*(z)a_{33}^*(z) - a_{13}(z)a_{13}^*(z)a_{33}^*(z) - a_{23}(z)a_{23}^*(z)a_{33}^*(z) + \\
&\quad -a_{33}(z)a_{33}^*(z)a_{33}^*(z) - a_{12}(z)a_{13}^*(z) - a_{22}(z)a_{23}^*(z) - a_{33}^*(z)b_3(z) + k\partial_z a_{33}^*(z)
\end{aligned}$$

onde $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{13,m}, x_{22,m}, x_{23,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m}, y_{3m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$ é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$.

Agora descreveremos uma representação de um módulo de Verma Imaginário sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ segundo o trabalho de B. Cox [Cox05] e concluir que ela é a mesma representação do Teorema 3.2.2 ([CF04]), com $n = 3$ e $r = 0$, descrita acima.

Usando as notações utilizadas em [Cox05], considere $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ $(n = 4)$. Como $1 \leq i < j \leq 4$ temos os geradores $a_{ij}(m)$ e $a^*_{ij}(m)$, que são operadores em $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$, com $\mathbf{x} = \{x_{ij}(m) \mid i, j, m \in \mathbb{Z}, 1 \leq i < j \leq 4\}$. Então, sejam $a_{12}(m)$, $a_{13}(m)$, $a_{14}(m)$, $a_{23}(m), a_{24}(m), a_{34}(m), a^*_{12}(m), a^*_{13}(m), a^*_{14}(m), a^*_{23}(m), a^*_{24}(m)$, $a^*_{34}(m)$, com $m \in \mathbb{Z}$, definidos como segue:

$$a_{12}(m) = -x_{12}(m) \quad , \quad a_{13}(m) = -x_{13}(m) \quad , \quad a_{14}(m) = -x_{14}(m) \ ,$$

$$a_{23}(m) = -x_{23}(m) \quad , \quad a_{24}(m) = -x_{24}(m) \quad , \quad a_{34}(m) = -x_{34}(m) \ ,$$

$$a^*_{12}(m) = \partial/\partial x_{12}(-m) \quad , \quad a^*_{13}(m) = \partial/\partial x_{13}(-m) \quad , \quad a^*_{14}(m) = \partial/\partial x_{14}(-m) \ ,$$

$$a^*_{23}(m) = \partial/\partial x_{23}(-m) \quad , \quad a^*_{24}(m) = \partial/\partial x_{24}(-m) \quad , \quad a^*_{34}(m) = \partial/\partial x_{34}(-m).$$

Sejam $b_i(m)$, $1 \leq i \leq 4$ operadores em $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$, com $\mathbf{y} = \{y_i(m) \mid i, m \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq 4\}$, definidos como segue:

$$b_1(0) = -\gamma^{-1}\lambda_1' \quad , \quad b_1(-m) = -\gamma^{-1}y_1(m) \quad , \quad b_1(m) = -\gamma m \partial/\partial y_1(m) \ ,$$

$$b_2(0) = -\gamma^{-1}\lambda_2' \quad , \quad b_2(-m) = -\gamma^{-1}y_2(m) \quad , \quad b_2(m) = -\gamma m \partial/\partial y_2(m) \ ,$$

$$b_3(0) = -\gamma^{-1}\lambda_3' \quad , \quad b_3(-m) = -\gamma^{-1}y_3(m) \quad , \quad b_3(m) = -\gamma m \partial/\partial y_3(m) \ ,$$

$$b_4(0) = -\gamma^{-1}\lambda_4' \quad , \quad b_4(-m) = -\gamma^{-1}y_4(m) \quad , \quad b_4(m) = -\gamma m \partial/\partial y_4(m) \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \lambda_4' \in \mathbb{C}$ fixos e $2K = \gamma^2$, com $\gamma \in \mathbb{C}^*$ fixo.

Defina uma representação $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\Big)$ da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
c &\mapsto K \\
\rho(f_1)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(f_1(m))w^{-m} &= -a_{12}(w) \\
\rho(f_2)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(f_2(m))w^{-m} &= -a_{23}(w) + a_{13}(w)a_{12}^*(w) \\
\rho(f_3)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(f_3(m))w^{-m} &= -a_{34}(w) + a_{14}(w)a_{13}^*(w) + a_{24}(w)a_{23}^*(w) \\
\rho(h_1)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(h_1(m))w^{-m} &= 2a_{12}(w)a_{12}^*(w) + a_{13}(w)a_{13}^*(w) - a_{23}(w)a_{23}^*(w) + a_{14}(w)a_{14}^*(w) + \\
&\quad -a_{24}(w)a_{24}^*(w) - \gamma b_1(w) + (\gamma/2)(b_2^+(w)) \\
\rho(h_2)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(h_2(m))w^{-m} &= 2a_{23}(w)a_{23}^*(w) + a_{13}(w)a_{13}^*(w) - a_{12}(w)a_{12}^*(w) + a_{24}(w)a_{24}^*(w) + \\
&\quad -a_{34}(w)a_{34}^*(w) - \gamma b_2(w) + (\gamma/2)(b_1^+(w) + b_3^+(w)) \\
\rho(h_3)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(h_3(m))w^{-m} &= 2a_{34}(w)a_{34}^*(w) + a_{14}(w)a_{14}^*(w) - a_{13}(w)a_{13}^*(w) + a_{24}(w)a_{24}^*(w) + \\
&\quad -a_{23}(w)a_{23}^*(w) - \gamma b_3(w) + (\gamma/2)(b_2^+(w) + b_4^+(w)) \\
\rho(e_1)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(e_1(m))w^{-m} &= a_{12}(w)a_{12}^*(w)a_{12}^*(w) + a_{13}(w)a_{13}^*(w)a_{12}^*(w) - a_{23}(w)a_{23}^*(w)a_{12}^*(w) + \\
&\quad +a_{14}(w)a_{14}^*(w)a_{12}^*(w) - a_{24}(w)a_{24}^*(w)a_{12}^*(w) - a_{23}(w)a_{13}^*(w) + \\
&\quad -a_{24}(w)a_{14}^*(w) - \gamma a_{12}^*(w)b_1(w) + (\gamma/2)a_{12}^*(w)(b_2^+(w)) + \\
&\quad -(\gamma^2/2)(w \cdot \tfrac{d}{dw})a_{12}^*(w) \\
\rho(e_2)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(e_2(m))w^{-m} &= a_{23}(w)a_{23}^*(w)a_{23}^*(w) + a_{24}(w)a_{24}^*(w)a_{23}^*(w) - a_{34}(w)a_{34}^*(w)a_{23}^*(w) + \\
&\quad -a_{34}(w)a_{24}^*(w) + a_{12}(w)a_{13}^*(w) - \gamma a_{23}^*(w)b_2(w) + \\
&\quad +(\gamma/2)a_{23}^*(w)(b_1^+(w) + b_3^+(w)) - (\gamma^2/2)(w \cdot \tfrac{d}{dw})a_{23}^*(w) \\
\rho(e_3)(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(e_3(m))w^{-m} &= a_{34}(w)a_{34}^*(w)a_{34}^*(w) + a_{13}(w)a_{14}^*(w) + a_{23}(w)a_{24}^*(w) - \gamma a_{34}^*(w)b_3(w) + \\
&\quad +(\gamma/2)a_{34}^*(w)(b_2^+(w) + b_4^+(w)) - (\gamma^2/2)(w \cdot \tfrac{d}{dw})a_{34}^*(w)
\end{aligned}
$$

Concluímos que a representação descrita no Teorema 3.2.2 [CF04] para $n = 3$ e $r = 0$ é a mesma representação descrita no trabalho de B. Cox [Cox05] com $n = 4$. Observamos ser necessário fazer algumas identificações:

$$
\begin{gathered}
f_{1s} \leftrightarrow f_3(s) \quad , \quad f_{2s} \leftrightarrow f_2(s) \quad , \quad f_{3s} \leftrightarrow f_1(s) \quad , \\
h_{1s} \leftrightarrow h_3(s) \quad , \quad h_{2s} \leftrightarrow h_2(s) \quad , \quad h_{3s} \leftrightarrow h_1(s) \quad , \\
e_{1s} \leftrightarrow e_3(s) \quad , \quad e_{2s} \leftrightarrow e_2(s) \quad , \quad e_{3s} \leftrightarrow e_1(s) \quad , \\
x_{11,s} \leftrightarrow x_{34}(s) \quad , \quad x_{12,s} \leftrightarrow x_{24}(s) \quad , \quad x_{13,s} \leftrightarrow x_{14}(s) \quad , \\
x_{22,s} \leftrightarrow x_{23}(s) \quad , \quad x_{23,s} \leftrightarrow x_{13}(s) \quad , \quad x_{33,s} \leftrightarrow x_{12}(s).
\end{gathered}
$$

3.6.3 $(n = 3,\ r = 1)$: $W_{3,1}(\lambda, \gamma)$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, com geradores $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3, h_1, h_2$ e h_3. Então, os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ são $e_{1m}, e_{2m}, e_{3m}, f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}, h_{1m}, h_{2m}, h_{3m}$ e c, com $m \in \mathbb{Z}$. Considere as seguintes distribuições formais:

$$e_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e_{im} z^{-m-1} \quad , \quad f_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{im} z^{-m-1} \quad , \quad h_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{im} z^{-m-1} \ ,$$

com $1 \le i \le 3$.

Para um elemento $\gamma \in \mathbb{C}^*$, seja $k = \gamma^2 - (r+1) = \gamma^2 - 2$. Como $1 \le i \le j \le n = 3$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}$, $a_{12,m}$, $a_{13,m}$, $a_{22,m}$, $a_{23,m}$, $a_{33,m}$, $a^*_{11,m}$, $a^*_{12,m}$, $a^*_{13,m}$, $a^*_{22,m}$, $a^*_{23,m}$, $a^*_{33,m}$ e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Seja

$$\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{13,m}, x_{22,m}, x_{23,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}].$$

Então:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & , \text{ se } \ m \ge 0 \\ x_{11,m} & , \text{ se } \ m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & , \text{ se } \ m \le 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & , \text{ se } \ m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = x_{12,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = -\partial/\partial x_{12,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{13,m}) = x_{13,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{13,m}) = -\partial/\partial x_{13,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = x_{22,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = -\partial/\partial x_{22,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{23,m}) = x_{23,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{23,m}) = -\partial/\partial x_{23,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{33,m}) = x_{33,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{33,m}) = -\partial/\partial x_{33,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem geradores b_{1m}, b_{2m}, b_{3m} e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\rho_\lambda(b_{10}) = \lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m}) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1m}) = m\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{20}) = \lambda_2 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2,-m}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2m}) = m\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{30}) = \lambda_3 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{3,-m}) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{3m}) = m\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$, $\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m}, y_{3m})$ e $\partial/\partial \mathbf{y}_m = (\partial/\partial y_{1m}, \partial/\partial y_{2m}, \partial/\partial y_{3m})$. Sejam $\lambda_1 = \lambda(h_{10})$, $\lambda_2 = \lambda(h_{20})$ e $\lambda_3 = \lambda(h_{30})$.

• $W_{3,1}^{w}(\lambda,\gamma)$**, com** $w = (1\ 2)$

Consideremos o elemento $w = (1\ 2) \in W \cong \mathfrak{S}_4$. Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n = 3$ e $r = 1$, temos:

$$
\begin{aligned}
\rho^w(c) &= k = \gamma^2 - 2\\
\rho^w(f_1)(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a_{22}^*(z) + a_{13}(z)a_{23}^*(z)\\
\rho^w(f_2)(z) &= a_{22}(z) + a_{23}(z)a_{33}^*(z)\\
\rho^w(f_3)(z) &= a_{33}(z)\\
\rho^w(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : + b_1(z)\\
\rho^w(h_2)(z) &= 2 : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : - : a_{33}(z)a_{33}^*(z) : + b_2(z)\\
\rho^w(h_3)(z) &= 2 : a_{33}(z)a_{33}^*(z) : + : a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : + : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + b_3(z)\\
\rho^w(e_1)(z) &= - : a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + a_{22}(z)a_{12}^*(z) + a_{23}(z)a_{13}^*(z) - a_{11}^*(z)b_1(z) + k\partial_z a_{11}^*(z)\\
\rho^w(e_2)(z) &= : a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + a_{33}(z)a_{23}^*(z) +\\
&\quad - a_{11}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}^*(z)b_2(z) + k\partial_z a_{22}^*(z)\\
\rho^w(e_3)(z) &= : a_{33}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) : + : a_{33}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) : - : a_{33}^*(z)a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{33}^*(z)a_{23}(z)a_{23}^*(z) : +\\
&\quad - : a_{33}^*(z)a_{33}(z)a_{33}^*(z) : - a_{12}(z)a_{13}^*(z) - a_{22}(z)a_{23}^*(z) - a_{33}^*(z)b_3(z) + k\partial_z a_{33}^*(z)
\end{aligned}
$$

onde

$$\rho^w : \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{13,m}, x_{22,m}, x_{23,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m}, y_{3m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$$

é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$. Chamamos $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, com a estrutura de módulo apresentada acima, de **módulo de Wakimoto Intermediário torcido pelo elemento** $w = (1\ 2) \in \mathfrak{S}_4$, e o denotamos por $W_{3,1}^{w}(\lambda,\gamma)$.

Agora, consideremos a subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_1 = \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$, onde

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 = \Big((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1$$

e $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d = (\mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$. Observe que $\widehat{\mathfrak{b}}_1$ é a subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ correspondendo à subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathbb{C}f_1$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, cujo fator de Levi redutivo é $\mathfrak{l}_1 = \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \cong \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$; isto é, $\widehat{\mathfrak{b}}_1$ é uma subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}$ correspondente à subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ cuja parte semissimples do fator de Levi redutivo é $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

A ação da reflexão $w = (1\ 2) \in W \cong \mathfrak{S}_4$ em Δ é:

$$w(\alpha_1) = -\alpha_1 \quad , \quad w(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \quad w(\alpha_3) = \alpha_3 \quad ,$$

$$w(\alpha_1+\alpha_2) = \alpha_2 \quad , \quad w(\alpha_2+\alpha_3) = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \quad , \quad w(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \alpha_2+\alpha_3 \quad ,$$

$$w(-\alpha_1) = \alpha_1 \quad , \quad w(-\alpha_2) = -\alpha_1 - \alpha_2 \quad , \quad w(-\alpha_3) = -\alpha_3 \quad ,$$

$$w(-\alpha_1-\alpha_2)=-\alpha_2 \quad , \quad w(-\alpha_2-\alpha_3)=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3 \quad , \quad w(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)=-\alpha_2-\alpha_3.$$

Em outras palavras:

$$\mathbb{C}e_1 \mapsto \mathbb{C}f_1 \quad , \quad \mathbb{C}e_2 \mapsto \mathbb{C}e_4 \quad , \quad \mathbb{C}e_3 \mapsto \mathbb{C}e_3 \quad ,$$

$$\mathbb{C}e_4 \mapsto \mathbb{C}e_2 \quad , \quad \mathbb{C}e_5 \mapsto \mathbb{C}e_6 \quad , \quad \mathbb{C}e_6 \mapsto \mathbb{C}e_5 \quad ,$$

$$\mathbb{C}f_1 \mapsto \mathbb{C}e_1 \quad , \quad \mathbb{C}f_2 \mapsto \mathbb{C}f_4 \quad , \quad \mathbb{C}f_3 \mapsto \mathbb{C}f_3 \quad ,$$

$$\mathbb{C}f_4 \mapsto \mathbb{C}f_2 \quad , \quad \mathbb{C}f_5 \mapsto \mathbb{C}f_6 \quad , \quad \mathbb{C}f_6 \mapsto \mathbb{C}f_5.$$

Denotemos por $\widehat{\mathfrak{b}}_1^w$ a subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_1=\overline{\mathfrak{b}}_1\oplus\widehat{\mathfrak{h}}$ torcida pelo elemento $w=(1\ 2)$. Então temos que:

$$\widehat{\mathfrak{b}}_1^w=\overline{\mathfrak{b}}_1^w\oplus\widehat{\mathfrak{h}} \quad , \quad \text{onde}$$

$$\overline{\mathfrak{b}}_1^w=\Big((\mathbb{C}e_2\oplus\mathbb{C}e_3\oplus\mathbb{C}e_4\oplus\mathbb{C}e_5\oplus\mathbb{C}e_6)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big)\oplus\Big((\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}f_1\oplus\mathbb{C}h_1\oplus\mathbb{C}h_2\oplus\mathbb{C}h_3)\otimes_{\mathbb{C}}t\mathbb{C}[t]\Big)\oplus\mathbb{C}f_1$$

Afirmação: o módulo de Wakimoto Intermediário torcido pelo elemento $w=(1\ 2)$, $W^w_{3,1}(\lambda,\gamma)$, tem as seguintes propriedades: a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ aniquila o vetor $(1\otimes 1)\in\mathbb{C}[\mathbf{x}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathbf{y}]$, $h(1\otimes 1)=\lambda(h)(1\otimes 1)$, para todo $h\in\mathfrak{h}$ e $c(1\otimes 1)=(\gamma^2-2)(1\otimes 1)$.

Verificaremos esta afirmação. Nesse caso, foi necessário descrever as fórmulas de forma explícita, visto que em [CF04] as fórmulas aparecem condensadas na linguagem das distribuições formais. O autor desta tese utilizou a definição das distribuições formais e descreveu cada fórmula explicitamente a fim de verificar a afirmação.

Para que $\overline{\mathfrak{b}}_1^w$ aniquile o vetor $(1\otimes 1)$ precisamos verificar que:

- $\rho^w(e_{1s})(1\otimes 1)=0$, $\rho^w(f_{1s})(1\otimes 1)=0$, $\rho^w(h_{1s})(1\otimes 1)=0$, $\rho^w(h_{2s})(1\otimes 1)=0$, $\rho^w(h_{3s})(1\otimes 1)=0$, $\forall s\in\mathbb{Z}_{>0}$;
- $\rho^w(e_{2m})(1\otimes 1)=0$, $\rho^w(e_{3m})(1\otimes 1)=0$, $\rho^w(e_{4m})(1\otimes 1)=0$, $\rho^w(e_{5m})(1\otimes 1)=0$, $\rho^w(e_{6m})(1\otimes 1)=0$, $\forall m\in\mathbb{Z}$;
- $\rho^w(f_{10})(1\otimes 1)=0$.

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_1)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\rho^w(f_{1s})z^{-s-1}=a_{11}(z)+a_{12}(z)a^*_{22}(z)+a_{13}(z)a^*_{23}(z)\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{11,s}z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{12,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}a^*_{22,m}z^{-m}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{13,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}a^*_{23,m}z^{-m}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}a_{11,s}z^{-s-1}+\sum_{m,s\in\mathbb{Z}}a_{12,s-m}a^*_{22,m}z^{-s-1}+\sum_{m,s\in\mathbb{Z}}a_{13,s-m}a^*_{23,m}z^{-s-1}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(a_{11,s}+\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{12,s-m}a^*_{22,m}+\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{13,s-m}a^*_{23,m}\Big)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Assim, para $s\in\mathbb{Z}$, temos que:

$$f_{1s} \mapsto \delta_{s<0}x_{11,s}+\delta_{s\geq 0}\partial/\partial x_{11,s}-\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m}-\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{13,s-m}\partial/\partial x_{23,-m}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Então:

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_{1s})(1 \otimes 1) &= \Big(\partial/\partial x_{11,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m}\partial/\partial x_{23,-m}\Big)(1 \otimes 1) \\
&= \Big(\partial/\partial x_{11,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m}\partial/\partial x_{23,-m}\Big)(1) \otimes \mathrm{Id}(1) \\
&= 0 \otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

Para $s = 0$ temos:

$$f_{10} \mapsto \partial/\partial x_{11,0} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,-m}\partial/\partial x_{23,-m}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_{10})(1 \otimes 1) &= \Big(\partial/\partial x_{11,0} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,-m}\partial/\partial x_{23,-m}\Big)(1 \otimes 1) \\
&= \Big(\partial/\partial x_{11,0} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,-m}\partial/\partial x_{23,-m}\Big)(1) \otimes \mathrm{Id}(1) \\
&= 0 \otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + : a_{13}(z)a^*_{13}(z) : - : a_{23}(z)a^*_{23}(z) : + b_1(z) \\
&= 2\Big(a_{11}(z)_+ a^*_{11}(z)\Big) + 2\Big(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-\Big) + a_{12}(z)a^*_{12}(z) - a_{22}(z)a^*_{22}(z) + a_{13}(z)a^*_{13}(z) + \\
&\quad - a_{23}(z)a^*_{23}(z) + b_1(z) \\
&= 2\sum_{m<0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{11,m}z^{-m-1} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s} + \\
&\quad - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{13,s}z^{-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{23,s}z^{-s} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1} \\
&= 2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m}z^{-s-1} + 2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m}z^{-s-1} + \\
&\quad - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a^*_{13,s-m}z^{-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(2\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + 2\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + \\
&\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a^*_{13,s-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m} + b_{1s}\Big)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned}
h_{1s} \mapsto\ & 2\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + 2\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a^*_{13,s-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m} + b_{1s}
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Então:

$$\begin{aligned}
h_{1s} \quad \mapsto \quad & -2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \\
& -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + \\
& +s\ \mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_{1s})(1\otimes 1) = \quad & \Big(-2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}}(-x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s}) + \\
& +s\ \mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Big)(1\otimes 1) \\
= \quad & \Big(-2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \\
& -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} - x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} + x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \\
& -x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s}\Big)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) + \mathrm{Id}(1)\otimes\Big(s\ \mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Big)(1) = 0\otimes 1 + 1\otimes 0 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_2)(z) \quad = \quad & 2 : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + : a_{23}(z)a^*_{23}(z) : - : a_{33}(z)a^*_{33}(z) : + b_2(z) \\
= \quad & 2a_{22}(z)a^*_{22}(z) + a_{12}(z)a^*_{12}(z) - \Big(a_{11}(z)_+a^*_{11}(z)\Big) - \Big(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-\Big) + a_{23}(z)a^*_{23}(z) + \\
& -a_{33}(z)a^*_{33}(z) + b_2(z) \\
= \quad & 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s} - \sum_{m<0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + \\
& -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{11,m}z^{-m-1} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{23,s}z^{-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{33,s}z^{-s} + \\
& +\sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1} \\
= \quad & 2\sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m}z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m}z^{-s-1} + \\
& -\sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m}z^{-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{33,m}a^*_{33,s-m}z^{-s-1} + \\
& +\sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1} \\
= \quad & \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m} - \sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} - \sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,m}a^*_{33,s-m} + b_{2s}\Big)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned}
h_{2s} \quad \mapsto \quad & 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m} - \sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} - \sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,m}a^*_{33,s-m} + b_{2s}
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Assim:

$$\begin{aligned} h_{2s} \quad \mapsto \quad & -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \\ & -\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m} x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + \\ & + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,m}\partial/\partial x_{33,m-s} + \ s\ \mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \rho^w(h_{2s})(1\otimes 1) \quad = \quad & \Bigg(-2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + \\ & -\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m} x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + \\ & + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,m}\partial/\partial x_{33,m-s}\Bigg)(1) \otimes \mathrm{Id}(1) + \mathrm{Id}(1) \otimes \Bigg(\ s\ \mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s\Bigg)(1) \\ = \quad & 0 \otimes 1 + 1 \otimes 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^w(h_3)(z) \quad = \quad & 2 : a_{33}(z)a^*_{33}(z) : + : a_{13}(z)a^*_{13}(z) : - : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : + : a_{23}(z)a^*_{23}(z) : - : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + b_3(z) \\ = \quad & 2a_{33}(z)a^*_{33}(z) + a_{13}(z)a^*_{13}(z) - a_{12}(z)a^*_{12}(z) + a_{23}(z)a^*_{23}(z) - a_{22}(z)a^*_{22}(z) + b_3(z) \\ = \quad & 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{33,s}z^{-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{13,s}z^{-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s} + \\ & + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{23,s}z^{-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{3s}z^{-s-1} \\ = \quad & 2\sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{33,m}a^*_{33,s-m}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a^*_{13,s-m}z^{-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m}z^{-s-1} + \\ & + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m}z^{-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{3s}z^{-s-1} \\ = \quad & \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,m}a^*_{33,s-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a^*_{13,s-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m} + \\ & - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + b_{3s}\Bigg)z^{-s-1}. \end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned} h_{3s} \quad \mapsto \quad & 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,m}a^*_{33,s-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a^*_{13,s-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,s-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,s-m} + \\ & - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + b_{3s} \end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Assim,

$$\begin{aligned} h_{3s} \quad \mapsto \quad & -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,m}\partial/\partial x_{33,m-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \\ & - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} + \ s\ \mathbf{e}_3 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_{3s})(1\otimes 1) &= \Big(-2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,m}\partial/\partial x_{33,m-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \\
&\quad - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} + s\ \mathbf{e}_3\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Big)(1\otimes 1) \\
&= \Big(-2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,m}\partial/\partial x_{33,m-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \\
&\quad - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s}\Big)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) + \\
&\quad + \mathrm{Id}(1)\otimes\Big(s\ \mathbf{e}_3\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Big)(1) = 0\otimes 1 + 1\otimes 0 = 0.
\end{aligned}$$

$$\rho^w(e_1)(z) = -:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): + a_{22}(z)a^*_{12}(z) + a_{23}(z)a^*_{13}(z) - a^*_{11}(z)b_1(z) + k\partial_z a^*_{11}(z).$$

Temos que $:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) :=: a^*_{11}(z)(:a_{11}(z)a^*_{11}(z):):$. Assim:

$$\begin{aligned}
:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): &= \Big(a^*_{11}(z)_+ a_{11}(z)_+ a^*_{11}(z)\Big) + \Big(a_{11}(z)_+ a^*_{11}(z) a^*_{11}(z)_-\Big) + \\
&\quad + \Big(a^*_{11}(z)_+ a^*_{11}(z) a_{11}(z)_-\Big) + \Big(a^*_{11}(z) a_{11}(z)_- a^*_{11}(z)_-\Big).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): &= \sum_{m\le 0} a^*_{11,m}z^{-m}\sum_{p<0} a_{11,p}z^{-p-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + \sum_{p<0} a_{11,p}z^{-p-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m>0} a^*_{11,m}z^{-m} + \\
&\quad + \sum_{m\le 0} a^*_{11,m}z^{-m}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{p\ge 0} a_{11,p}z^{-p-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{p\ge 0} a_{11,p}z^{-p-1}\sum_{m>0} a^*_{11,m}z^{-m}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_1)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\le 0,p<0} a^*_{11,m}a_{11,p}a^*_{11,s-m-p}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m>0,p<0} a_{11,p}a^*_{11,s-m-p}a^*_{11,m}\Big)z^{-s-1} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\le 0,p\ge 0} a^*_{11,m}a^*_{11,s-m-p}a_{11,p}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m>0,p\ge 0} a^*_{11,s-m-p}a_{11,p}a^*_{11,m}\Big)z^{-s-1} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{12,s-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{13,s-m}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s-m}b_{1m}\Big)z^{-s-1} + \\
&\quad - k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a^*_{11,s}z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Seja $s\in\mathbb{Z}_{>0}$:

$$\begin{aligned}
&s>0, m\le 0, p<0 \quad \text{implica} \quad s-m-p>0\ , \\
&s>0, m>0, p<0 \quad \text{implica} \quad s-m-p\le 0 \text{ ou } s-m-p>0\ , \\
&s>0, m\le 0, p\ge 0 \quad \text{implica} \quad s-m-p\le 0 \text{ ou } s-m-p>0\ , \\
&s>0, m>0, p\ge 0 \quad \text{implica} \quad s-m-p\le 0 \text{ ou } s-m-p>0.
\end{aligned}$$

Assim, para $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ temos que:

$$\begin{aligned}
e_{1s} \quad \mapsto \quad & \sum_{m\leq 0, p<0} x_{11,-m}x_{11,p}\partial/\partial x_{11,m+p-s} + \sum_{m>0,p<0} \delta_{s\leq m+p}x_{11,p}x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,-m} + \\
& - \sum_{m>0,p<0} \delta_{s>m+p}x_{11,p}\partial/\partial x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,-m} - \sum_{m\leq 0,p\geq 0} \delta_{s\leq m+p}x_{11,-m}x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,p} + \\
& + \sum_{m\leq 0,p\geq 0} \delta_{s>m+p}x_{11,-m}\partial/\partial x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,p} + \sum_{m>0,p\geq 0} \delta_{s\leq m+p}x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,p}\partial/\partial x_{11,-m} + \\
& - \sum_{m>0,p\geq 0} \delta_{s>m+p}\partial/\partial x_{11,m+p-s}\partial/\partial x_{11,p}\partial/\partial x_{11,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{12,m-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{11,-s}\lambda_1 - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \delta_{m>0}\delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \\
& +\delta_{m<0}\partial/\partial x_{11,m-s}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m}\Big) + \; s\;k\;\partial/\partial x_{11,-s}
\end{aligned}$$

Portanto, para $s \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{1s})(1\otimes 1) \quad &= \quad 0\otimes 1 + \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{11,-s}\lambda_1 - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \\
& \quad +\delta_{m>0}\delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{11,m-s}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m}\Big)(1\otimes 1) \\
&= \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{11,-s}(1)\otimes\lambda_1(1) - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}(1)\otimes m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m(1) + \\
& \quad +\delta_{m>0}\delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}(1)\otimes m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m(1) + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{11,m-s}(1)\otimes\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m}(1)\Big) \\
&= \quad +\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}(0\otimes\lambda_1) - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}(x_{11,m-s}\otimes 0) + \delta_{m>0}\delta_{s>m}(0\otimes 0) + \delta_{m<0}(0\otimes\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m})\Big) \\
&= \quad 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_2)(z) \quad = \quad & :a^*_{22}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): - :a^*_{22}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z): - :a^*_{22}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z): + a_{33}(z)a^*_{23}(z) + \\
& -a_{11}(z)a^*_{12}(z) - a^*_{22}(z)b_2(z) + k\partial_z a^*_{22}(z).
\end{aligned}$$

Temos que $:a^*_{22}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) :=: a^*_{22}(z)(:a_{11}(z)a^*_{11}(z):):$, $a^*_{22}(z)_+ = 0$ e $a^*_{22}(z)_- = a^*_{22}(z)$. Então:

$$:a^*_{22}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) := \Big(a_{11}(z)_+a^*_{11}(z)a^*_{22}(z)\Big) + \Big(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-a^*_{22}(z)\Big).$$

Isto é,

$$:a^*_{22}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) := \sum_{m<0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{p\in\mathbb{Z}} a^*_{11,p}z^{-p}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} a^*_{11,p}z^{-p}\sum_{m\geq 0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s}.$$

Sabemos que $a_{12}(z)_+ = a_{12}(z), a_{12}(z)_- = 0, a_{22}(z)_+ = a_{22}(z), a_{22}(z)_- = 0, a^*_{12}(z)_+ = 0, a^*_{12}(z)_- = a^*_{12}(z), a^*_{22}(z)_+ = 0$ e $a^*_{22}(z)_- = a^*_{22}(z)$. Então:

$$:a^*_{22}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) := a_{12}(z)a^*_{12}(z)a^*_{22}(z)\ ,$$

$$:a^*_{22}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) := a_{22}(z)a^*_{22}(z)a^*_{22}(z).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_2)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m<0,p\in\mathbb{Z}} a_{11,m}a^*_{11,p}a^*_{22,s-m-p}\Big)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\geq 0,p\in\mathbb{Z}} a^*_{11,p}a_{11,m}a^*_{22,s-m-p}\Big)z^{-s-1}+\\
&+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m-p}a^*_{12,m}a^*_{22,p}\Big)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m-p}a^*_{22,m}a^*_{22,p}\Big)z^{-s-1}+\\
&+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m}a^*_{23,m}\Big)z^{-s-1}-\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{11,s-m}a^*_{12,m}\Big)z^{-s-1}+\\
&-\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s-m}b_{2m}\Big)z^{-s-1}-\ k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a^*_{22,s}z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Seja $s\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
e_{2s}\ \mapsto\ & -\sum_{m<0,p\leq 0} x_{11,m}x_{11,-p}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\sum_{m<0,p>0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,-p}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\\
&-\sum_{m\geq 0,p\leq 0} x_{11,-p}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\sum_{m\geq 0,p>0}\partial/\partial x_{11,-p}\partial/\partial x_{11,m}\partial/\partial x_{22,m+p-s}+\\
&-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{12,s-m-p}\partial/\partial x_{12,-m}\partial/\partial x_{22,-p}-\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{22,s-m-p}\partial/\partial x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,-p}+\\
&-\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,s-m}\partial/\partial x_{23,-m}+\sum_{m\in\mathbb{Z}}(\delta_{s<m}x_{11,s-m}+\delta_{s\geq m}\partial/\partial x_{11,s-m})\partial/\partial x_{12,-m}+\\
&+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{22,-s}\lambda_2+\delta_{m>0}\partial/\partial x_{22,m-s}m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m+\delta_{m<0}\partial/\partial x_{22,m-s}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m}\Big)+\\
&+\ s\ k\ \partial/\partial x_{22,-s}
\end{aligned}$$

Então, para $s\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{2s})(1\otimes 1) &= 0\otimes 1+\\
&+\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{m,0}\partial/\partial x_{22,-s}\lambda_2+\delta_{m>0}\partial/\partial x_{22,m-s}m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m+\delta_{m<0}\partial/\partial x_{22,m-s}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m}\Big)(1\otimes 1)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{22,-s}(1)\otimes\lambda_2(1)+\delta_{m>0}\partial/\partial x_{22,m-s}(1)\otimes m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m(1)+\\
&\quad+\delta_{m<0}\partial/\partial x_{22,m-s}(1)\otimes\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m}(1)\Big)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}(0\otimes\lambda_2)+\delta_{m>0}(0\otimes 0)+\delta_{m<0}(0\otimes\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m})\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_3)(z) &= \ :a^*_{33}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z):+:a^*_{33}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z):-:a^*_{33}(z)a_{13}(z)a^*_{13}(z):+\\
&-:a^*_{33}(z)a_{23}(z)a^*_{23}(z):-:a^*_{33}(z)a_{33}(z)a^*_{33}(z):-a_{12}(z)a^*_{13}(z)+\\
&-a_{22}(z)a^*_{23}(z)-a^*_{33}(z)b_3(z)+k\partial_z a^*_{33}(z).
\end{aligned}$$

Sabemos que $a_{ij}(z)_+ = a_{ij}(z), a_{ij}(z)_- = 0, a^*_{ij}(z)_+ = 0, a^*_{ij}(z)_- = a^*_{ij}(z)$, para $j > r = 1$. Assim:

$$: a^*_{33}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) := a_{12}(z)a^*_{12}(z)a^*_{33}(z) \ ,$$

$$: a^*_{33}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) := a_{22}(z)a^*_{22}(z)a^*_{33}(z) \ ,$$

$$: a^*_{33}(z)a_{13}(z)a^*_{13}(z) := a_{13}(z)a^*_{13}(z)a^*_{33}(z) \ ,$$

$$: a^*_{33}(z)a_{23}(z)a^*_{23}(z) := a_{23}(z)a^*_{23}(z)a^*_{33}(z) \ ,$$

$$: a^*_{33}(z)a_{33}(z)a^*_{33}(z) := a_{33}(z)a^*_{33}(z)a^*_{33}(z).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_3)(z) \ &= \ \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,p}a^*_{33,s-m-p}\right)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,p}a^*_{33,s-m-p}\right)z^{-s-1} + \\
&\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a^*_{13,p}a^*_{33,s-m-p}\right)z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a^*_{23,p}a^*_{33,s-m-p}\right)z^{-s-1} + \\
&\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a_{33,m}a^*_{33,p}a^*_{33,s-m-p}\right)z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{13,s-m}\right)z^{-s-1} + \\
&\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{23,s-m}\right)z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{33,s-m}b_{3m}\right)z^{-s-1} - k\sum_{s\in\mathbb{Z}} \ s \ a^*_{33,s}z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
e_{3s} \ \mapsto \ &\sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,-p}\partial/\partial x_{33,m+p-s} + \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,-p}\partial/\partial x_{33,m+p-s} + \\
&- \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,-p}\partial/\partial x_{33,m+p-s} - \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,-p}\partial/\partial x_{33,m+p-s} + \\
&- \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{33,m}\partial/\partial x_{33,-p}\partial/\partial x_{33,m+p-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{12,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \\
&+ \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{22,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + \ s \ k \ \partial/\partial x_{33,-s} + \\
&+ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left((\delta_{m,0}\lambda_3 + \delta_{m>0}m\mathbf{e}_3\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \delta_{m<0}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{y}_{-m})\partial/\partial x_{33,m-s}\right)
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$:

$$\rho^w(e_{3s})(1\otimes 1) \ = \ 0.$$

Precisamos ainda verificar que $\rho^w(e_{4p})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{5p})(1\otimes 1) = 0$ e $\rho^w(e_{6p})(1\otimes 1) = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Sabemos que o colchete de Lie em $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ é:

$$[x\otimes t^m, y\otimes t^s] = [x,y]\otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(x,y)c$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, $m, s \in \mathbb{Z}$. Então, em particular

$$[e_{1m}, e_{2s}] = [e_1, e_2]\otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(e_1,e_2)c = e_4\otimes t^{m+s} \quad ,$$

$$[e_{2m}, e_{3s}] = [e_2, e_3] \otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(e_2, e_3)c = e_5 \otimes t^{m+s} \quad ,$$

$$[e_{4m}, e_{3s}] = [e_4, e_3] \otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(e_4, e_3)c = e_6 \otimes t^{m+s}.$$

Assim, $e_{4p} = [e_{1m}, e_{2s}], e_{5p} = [e_{2m}, e_{3s}]$ e $e_{6p} = [e_{4m}, e_{3s}]$, onde $p = m + s \in \mathbb{Z}$.
Como ρ^w é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ temos que:

$$\rho^w(e_{4p}) = \rho^w([e_{1m}, e_{2s}]) = [\rho^w(e_{1m}), \rho^w(e_{2s})] \quad ,$$

$$\rho^w(e_{5p}) = \rho^w([e_{2m}, e_{3s}]) = [\rho^w(e_{2m}), \rho^w(e_{3s})] \quad ,$$

$$\rho^w(e_{6p}) = \rho^w([e_{4m}, e_{3s}]) = [\rho^w(e_{4m}), \rho^w(e_{3s})].$$

Mostraremos que $\rho^w(e_{4p})(1 \otimes 1) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$.

Suponhamos que $p = m + s$, com $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $s \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $\rho^w(e_{1m})(1 \otimes 1) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $\rho^w(e_{2s})(1 \otimes 1) = 0, \forall s \in \mathbb{Z}$. Então, temos que:

$$\begin{aligned} \rho^w(e_{4p})(1 \otimes 1) &= [\rho^w(e_{1m}), \rho^w(e_{2s})](1 \otimes 1) \\ &= (\rho^w(e_{1m})\rho^w(e_{2s}) - \rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{1m}))(1 \otimes 1) \\ &= \rho^w(e_{1m})\rho^w(e_{2s})(1 \otimes 1) - \rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{1m})(1 \otimes 1) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Agora suponhamos que $m = 0$, $s \in \mathbb{Z}$, e $p = m + s = s$.

$$\begin{aligned} \rho^w(e_{4p})(1 \otimes 1) &= [\rho^w(e_{10}), \rho^w(e_{2s})](1 \otimes 1) \\ &= (\rho^w(e_{10})\rho^w(e_{2s}) - \rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{10}))(1 \otimes 1) \\ &= -\rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{10})(1 \otimes 1). \end{aligned}$$

Temos que $\rho^w(e_{10})(1 \otimes 1) = -(x_{11,0} \otimes \lambda_1)$ e

$$\begin{aligned} e_{2s} \mapsto & - \sum_{u<0,q\leq 0} x_{11,u}x_{11,-q}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \sum_{u<0,q>0} x_{11,u}\partial/\partial x_{11,-q}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \\ & - \sum_{u\geq 0,q\leq 0} x_{11,-q}\partial/\partial x_{11,u}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \sum_{u\geq 0,q>0} \partial/\partial x_{11,-q}\partial/\partial x_{11,u}\partial/\partial x_{22,u+q-s} + \\ & - \sum_{u,q\in\mathbb{Z}} x_{12,s-u-q}\partial/\partial x_{12,-u}\partial/\partial x_{22,-q} - \sum_{u,q\in\mathbb{Z}} x_{22,s-u-q}\partial/\partial x_{22,-u}\partial/\partial x_{22,-q} + \\ & - \sum_{u\in\mathbb{Z}} x_{33,s-u}\partial/\partial x_{23,-u} + \sum_{u\in\mathbb{Z}}(\delta_{s<u}x_{11,s-u} + \delta_{s\geq u}\partial/\partial x_{11,s-u})\partial/\partial x_{12,-u} + \\ & + \sum_{u\in\mathbb{Z}} \left(\delta_{u,0}\partial/\partial x_{22,-s}\lambda_2 + \delta_{u>0}\partial/\partial x_{22,u-s}u\mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_u + \delta_{u<0}\partial/\partial x_{22,u-s}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_{-u}\right) + \\ & + s\ k\ \partial/\partial x_{22,-s} \end{aligned}$$

Então, $\rho^w(e_{4p})(1 \otimes 1) = -\rho^w(e_{2s})\rho^w(e_{10})(1 \otimes 1) = \rho^w(e_{2s})(x_{11,0} \otimes \lambda_1) = 0$.
Finalmente, vamos considerar $m \in \mathbb{Z}_{<0}$, $s \in \mathbb{Z}$ e $p = m + s$.

Então, para $m \in \mathbb{Z}_{<0}$:

$$\begin{aligned}\rho^w(e_{1m})(1\otimes 1) &= -\Big(\sum_{u\le 0,q<0}\delta_{m\le u+q}(x_{11,-u}x_{11,q}x_{11,u+q-m}\otimes 1)\Big) - m\ k\ (x_{11,-m}\otimes 1) + \\ &\quad -\Big(\sum_{u\in\mathbb{Z}}\delta_{u,0}(x_{11,-m}\otimes\lambda_1) + \delta_{u<0}\delta_{m\le u}(x_{11,u-m}\otimes \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-u})\Big).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\rho^w(e_{4p})(1\otimes 1) &= \rho^w(e_{2s})\Big(\sum_{u\le 0,q<0}\delta_{m\le u+q}(x_{11,-u}x_{11,q}x_{11,u+q-m}\otimes 1)\Big) + \rho^w(e_{2s})\Big(m\ k\ (x_{11,-m}\otimes 1)\Big) + \\ &\quad +\rho^w(e_{2s})\Big(\sum_{u\in\mathbb{Z}}\delta_{u,0}(x_{11,-m}\otimes\lambda_1) + \delta_{u<0}\delta_{m\le u}(x_{11,u-m}\otimes \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-u})\Big) = 0.\end{aligned}$$

Portanto $\rho^w(e_{4p})(1\otimes 1) = 0$, para todos $p \in \mathbb{Z}$.

Como $\rho^w(e_{2u})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{3u})(1\otimes 1) = 0$ e $\rho^w(e_{4u})(1\otimes 1) = 0$, $\forall u \in \mathbb{Z}$, concluímos que para $p = m + s$, com $m, s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\rho^w(e_{5p})(1\otimes 1) = [\rho^w(e_{2m}), \rho^w(e_{3s})](1\otimes 1) = 0\ ,$$

$$\rho^w(e_{6p})(1\otimes 1) = [\rho^w(e_{4m}), \rho^w(e_{3s})](1\otimes 1) = 0.$$

Agora ainda precisamos verificar que $h(1\otimes 1) = \lambda(h)(1\otimes 1)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. Vamos considerar h_{10}, h_{20} e h_{30}, pois $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_{10}\oplus\mathbb{C}h_{20}\oplus\mathbb{C}h_{30}$.

$$\begin{aligned}h_{10} &\mapsto -2\sum_{m<0}x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + 2\sum_{m\ge 0}x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(-x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} + x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} + \\ &\quad -x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m} + x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m}\Big) + \lambda_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{20} &\mapsto -2\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} + \sum_{m<0}x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} - \sum_{m\ge 0}x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + \\ &\quad -\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{33,m}\partial/\partial x_{33,m} + \lambda_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{30} &\mapsto -2\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{33,m}\partial/\partial x_{33,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m} + \\ &\quad +\sum_{m\in\mathbb{Z}}x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} + \lambda_3\end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho^w(h_{10})(1\otimes 1) = (0\otimes 1) + (1\otimes\lambda_1(1)) = \lambda_1(1\otimes 1)\ ,$$

$$\rho^w(h_{20})(1\otimes 1) = (0\otimes 1) + (1\otimes\lambda_2(1)) = \lambda_2(1\otimes 1)\ ,$$

$$\rho^w(h_{30})(1\otimes 1) = (0\otimes 1) + (1\otimes\lambda_3(1)) = \lambda_3(1\otimes 1)\ ,$$

onde $\lambda_1 = \lambda(h_{10})$, $\lambda_2 = \lambda(h_{20})$ e $\lambda_3 = \lambda(h_{30})$.

3.6.4 $(n = 3,\ r = 2) : W_{3,2}(\lambda, \gamma)$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, com geradores $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3, h_1, h_2$ e h_3. Assim, os geradores de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ são $e_{1m}, e_{2m}, e_{3m}, f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}, h_{1m}, h_{2m}, h_{3m}$ e c, com $m \in \mathbb{Z}$. Consideremos as seguintes distribuições formais:

$$e_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e_{im} z^{-m-1} \quad , \quad f_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{im} z^{-m-1} \quad , \quad h_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{im} z^{-m-1} \ ,$$

com $1 \leq i \leq 3$.

Para um elemento $\gamma \in \mathbb{C}^*$, seja $k = \gamma^2 - (r+1) = \gamma^2 - 3$.

Como $1 \leq i \leq j \leq n = 3$, a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem os geradores $a_{11,m}$, $a_{12,m}$, $a_{13,m}$, $a_{22,m}$, $a_{23,m}$, $a_{33,m}$, $a^*_{11,m}$, $a^*_{12,m}$, $a^*_{13,m}$, $a^*_{22,m}$, $a^*_{23,m}$, $a^*_{33,m}$ e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Seja

$$\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{13,m}, x_{22,m}, x_{23,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}].$$

Assim:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{11,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{12,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{12,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = \begin{cases} x_{12,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{12,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{22,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{22,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = \begin{cases} x_{22,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{22,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{13,m}) = x_{13,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{13,m}) = -\partial/\partial x_{13,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{23,m}) = x_{23,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{23,m}) = -\partial/\partial x_{23,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{33,m}) = x_{33,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{33,m}) = -\partial/\partial x_{33,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

A álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem geradores b_{1m}, b_{2m}, b_{3m} e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\rho_\lambda(b_{10}) = \lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m}) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1m}) = m\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{20}) = \lambda_2 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2,-m}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{2m}) = m\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

$$\rho_\lambda(b_{30}) = \lambda_3 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{3,-m}) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{y}_m \quad , \quad \rho_\lambda(b_{3m}) = m\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \ ,$$

com $m > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$, $\mathbf{y}_m = (y_{1m}, y_{2m}, y_{3m})$ e $\partial/\partial \mathbf{y}_m = (\partial/\partial y_{1m}, \partial/\partial y_{2m}, \partial/\partial y_{3m})$. Sejam $\lambda_1 = \lambda(h_{10})$, $\lambda_2 = \lambda(h_{20})$ e $\lambda_3 = \lambda(h_{30})$.

- $W^w_{3,2}(\lambda, \gamma)$**, com** $w = (1\ 3)$

Consideremos o elemento $w = (1\ 3) \in W \cong \mathfrak{S}_4$. Pelo Teorema 3.2.2 [CF04], com $n = 3$ e $r = 2$, temos:

$$\begin{aligned}
\rho^w(c) &= k = \gamma^2 - 3 \\
\rho^w(f_1)(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a^*_{22}(z) + a_{13}(z)a^*_{23}(z) \\
\rho^w(f_2)(z) &= a_{22}(z) + a_{23}(z)a^*_{33}(z) \\
\rho^w(f_3)(z) &= a_{33}(z) \\
\rho^w(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + : a_{13}(z)a^*_{13}(z) : - : a_{23}(z)a^*_{23}(z) : + b_1(z) \\
\rho^w(h_2)(z) &= 2 : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + : a_{23}(z)a^*_{23}(z) : - : a_{33}(z)a^*_{33}(z) : + b_2(z) \\
\rho^w(h_3)(z) &= 2 : a_{33}(z)a^*_{33}(z) : + : a_{13}(z)a^*_{13}(z) : - : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : + : a_{23}(z)a^*_{23}(z) : - : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + b_3(z) \\
\rho^w(e_1)(z) &= - : a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : + a_{22}(z)a^*_{12}(z) + a_{23}(z)a^*_{13}(z) - a^*_{11}(z)b_1(z) + (k+1)\partial_z a^*_{11}(z) \\
\rho^w(e_2)(z) &= : a^*_{22}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) : - : a^*_{22}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) : - : a^*_{22}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + a_{33}(z)a^*_{23}(z) + \\
&\quad - a_{11}(z)a^*_{12}(z) - a^*_{22}(z)b_2(z) + k\partial_z a^*_{22}(z) \\
\rho^w(e_3)(z) &= : a^*_{33}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) : + : a^*_{33}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) : - : a^*_{33}(z)a_{13}(z)a^*_{13}(z) : - : a^*_{33}(z)a_{23}(z)a^*_{23}(z) : + \\
&\quad - : a^*_{33}(z)a_{33}(z)a^*_{33}(z) : - a_{12}(z)a^*_{13}(z) - a_{22}(z)a^*_{23}(z) - a^*_{33}(z)b_3(z) + k\partial_z a^*_{33}(z)
\end{aligned}$$

onde

$$\rho^w : \widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[x_{11,m}, x_{12,m}, x_{13,m}, x_{22,m}, x_{23,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1m}, y_{2m}, y_{3m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\Big)$$

é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$. Chamamos $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, com a estrutura de módulo apresentada acima, de **módulo de Wakimoto Intermediário torcido pelo elemento** $w = (1\ 3) \in \mathfrak{S}_4$, e o denotamos por $W^w_{3,2}(\lambda, \gamma)$.

Agora consideremos a subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_2 = \overline{\mathfrak{b}}_2 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$, onde

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{b}}_2 \quad = \quad & \Big((\mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \\ & \oplus \Big((\mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4\end{aligned}$$

e $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d = (\mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$. Observe que $\widehat{\mathfrak{b}}_2$ é a subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ correspondente à subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, cujo fator de Levi redutivo é $\mathfrak{l}_2 = \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4 \cong \mathbb{C}h_3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$; isto é, $\widehat{\mathfrak{b}}_2$ é uma subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}$ correspondente à subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ cuja parte semissimples do fator de Levi redutivo é $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

A ação da reflexão $w = (1\ 3) \in W \cong \mathfrak{S}_4$ em Δ é:

$$w(\alpha_1) = -\alpha_2 \quad , \quad w(\alpha_2) = -\alpha_1 \quad , \quad w(\alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad ,$$

$$w(\alpha_1 + \alpha_2) = -\alpha_1 - \alpha_2 \quad , \quad w(\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_2 + \alpha_3 \quad , \quad w(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_3 \quad ,$$

$$w(-\alpha_1) = \alpha_2 \quad , \quad w(-\alpha_2) = \alpha_1 \quad , \quad w(-\alpha_3) = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \quad ,$$

$$w(-\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \quad w(-\alpha_2 - \alpha_3) = -\alpha_2 - \alpha_3 \quad , \quad w(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = -\alpha_3.$$

Em outras palavras:

$$\begin{gathered}\mathbb{C}e_1 \mapsto \mathbb{C}f_2 \quad , \quad \mathbb{C}e_2 \mapsto \mathbb{C}f_1 \quad , \quad \mathbb{C}e_3 \mapsto \mathbb{C}e_6 \quad , \\ \mathbb{C}e_4 \mapsto \mathbb{C}f_4 \quad , \quad \mathbb{C}e_5 \mapsto \mathbb{C}e_5 \quad , \quad \mathbb{C}e_6 \mapsto \mathbb{C}e_3 \quad , \\ \mathbb{C}f_1 \mapsto \mathbb{C}e_2 \quad , \quad \mathbb{C}f_2 \mapsto \mathbb{C}e_1 \quad , \quad \mathbb{C}f_3 \mapsto \mathbb{C}f_6 \quad , \\ \mathbb{C}f_4 \mapsto \mathbb{C}e_4 \quad , \quad \mathbb{C}f_5 \mapsto \mathbb{C}f_5 \quad , \quad \mathbb{C}f_6 \mapsto \mathbb{C}f_3.\end{gathered}$$

Denotemos por $\widehat{\mathfrak{b}}_2^w$ a subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}_2 = \overline{\mathfrak{b}}_2 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ torcida pelo elemento $w = (1\ 3)$. Então temos que:

$$\widehat{\mathfrak{b}}_2^w = \overline{\mathfrak{b}}_2^w \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \ ,$$

onde

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{b}}_2^w \quad = \quad & \Big((\mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \\ & \oplus \Big((\mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4.\end{aligned}$$

Afirmação: o módulo de Wakimoto Intermediário torcido pelo elemento $w = (1\ 3)$, $W^w_{3,2}(\lambda,\gamma)$, tem as seguintes propriedades: a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_2^w$ aniquila o vetor $(1 \otimes 1) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, $h(1 \otimes 1) = \lambda(h)(1 \otimes 1)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$ e $c(1 \otimes 1) = (\gamma^2 - 3)(1 \otimes 1)$.

Verificaremos esta afirmação. Como já dito anteriormente, foi necessário descrever as fórmulas de forma explícita, visto que em [CF04] as fórmulas aparecem condensadas na linguagem das distribuições formais. O autor desta tese utilizou a definição das distribuições formais e descreveu cada fórmula explicitamente a fim de verificar a afirmação.

Para que $\overline{\mathfrak{b}}_2^w$ aniquile o vetor $(1 \otimes 1)$ precisamos verificar:

- $\rho^w(e_{1s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{2s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{4s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(f_{1s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(f_{2s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(f_{4s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(h_{1s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(h_{2s})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(h_{3s})(1\otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- $\rho^w(e_{3m})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{5m})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{6m})(1\otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\rho^w(f_{10})(1\otimes 1) = 0$, $\rho^w(f_{20})(1\otimes 1) = 0$ e $\rho^w(f_{40})(1\otimes 1) = 0$.

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_1)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \rho^w(f_{1s})z^{-s-1} = a_{11}(z) + a_{12}(z)a^*_{22}(z) + a_{13}(z)a^*_{23}(z)\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{22,m}z^{-m} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{13,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{23,m}z^{-m}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{22,m}z^{-s-1} + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{13,s-m}a^*_{23,m}z^{-s-1}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left(a_{11,s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,s-m}a^*_{22,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,s-m}a^*_{23,m}\right)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned}
f_{1s} \;\mapsto\;& \delta_{s<0}x_{11,s} + \delta_{s\geq 0}\partial/\partial x_{11,s} + \sum_{m\leq 0}\left(\delta_{s\geq m}\partial/\partial x_{12,s-m}x_{22,-m} + \delta_{s<m}x_{12,s-m}x_{22,-m}\right) +\\
&-\sum_{m>0}\left(\delta_{s\geq m}\partial/\partial x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} + \delta_{s<m}x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m}\right) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m}\partial/\partial x_{23,-m}
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Então:

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_{1s})(1\otimes 1) &= \Bigg(\partial/\partial x_{11,s} - \sum_{m>0}(\delta_{s\geq m}\partial/\partial x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} + \delta_{s<m}x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m}) +\\
&\quad + \sum_{m\leq 0}\partial/\partial x_{12,s-m}x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m}\partial/\partial x_{23,-m}\Bigg)(1\otimes 1)\\
&= \Bigg(\partial/\partial x_{11,s} - \sum_{m>0}(\delta_{s\geq m}\partial/\partial x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m} + \delta_{s<m}x_{12,s-m}\partial/\partial x_{22,-m}) +\\
&\quad + \sum_{m\leq 0}\partial/\partial x_{12,s-m}x_{22,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m}\partial/\partial x_{23,-m}\Bigg)(1)\otimes \mathrm{Id}(1)\\
&= 0\otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

Para $s = 0$ temos:

$$f_{10} \mapsto \partial/\partial x_{11,0} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\delta_{m\leq 0} x_{22,-m} \partial/\partial x_{12,-m} - \delta_{m>0} x_{12,-m} \partial/\partial x_{22,-m}) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,-m} \partial/\partial x_{23,-m}$$

Assim,

$$\rho^w(f_{10})(1\otimes 1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_2)(z) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \rho^w(f_{2s}) z^{-s-1} = a_{22}(z) + a_{23}(z) a_{33}^*(z) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s} z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{23,s} z^{-s-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,m}^* z^{-m} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left(a_{22,s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m} a_{33,m}^* \right) z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned}
f_{2s} &\mapsto a_{22,s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m} a_{33,m}^* \\
&\mapsto \delta_{s<0} x_{22,s} + \delta_{s\geq 0} \partial/\partial x_{22,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m} \partial/\partial x_{33,-m}
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\rho^w(f_{2s})(1\otimes 1) &= \left(\partial/\partial x_{22,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m} \partial/\partial x_{33,-m} \right)(1\otimes 1) \\
&= \left(\partial/\partial x_{22,s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m} \partial/\partial x_{33,-m} \right)(1) \otimes \mathrm{Id}(1) \\
&= 0 \otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

Para $s = 0$ temos:

$$f_{20} \mapsto \partial/\partial x_{22,0} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,-m} \partial/\partial x_{33,-m}$$

Assim,

$$\rho^w(f_{20})(1\otimes 1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_1)(z) &= 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + : a_{12}(z)a_{12}^*(z) : - : a_{22}(z)a_{22}^*(z) : + : a_{13}(z)a_{13}^*(z) : - : a_{23}(z)a_{23}^*(z) : + b_1(z) \\
&= 2\Big(a_{11}(z)_+ a_{11}^*(z)\Big) + 2\Big(a_{11}^*(z)a_{11}(z)_-\Big) + \Big(a_{12}(z)_+ a_{12}^*(z)\Big) + \Big(a_{12}^*(z)a_{12}(z)_-\Big) + \\
&\quad -\Big(a_{22}(z)_+ a_{22}^*(z)\Big) - \Big(a_{22}^*(z)a_{22}(z)_-\Big) + a_{13}(z)a_{13}^*(z) - a_{23}(z)a_{23}^*(z) + b_1(z) \\
&= 2\sum_{m<0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}^* z^{-s} + 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}^* z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{11,m}z^{-m-1} + \sum_{m<0} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}^* z^{-s} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}^* z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{12,m}z^{-m-1} - \sum_{m<0} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}^* z^{-s} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}^* z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{22,m}z^{-m-1} + \\
&\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{13,s}^* z^{-s} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{23,s}^* z^{-s} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1} \\
&= 2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m<0} a_{11,m}a_{11,s-m}^* + \sum_{m\geq 0} a_{11,s-m}^* a_{11,m}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m<0} a_{12,m}a_{12,s-m}^*\Big)z^{-s-1} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\geq 0} a_{12,s-m}^* a_{12,m}\Big)z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m<0} a_{22,m}a_{22,s-m}^* + \sum_{m\geq 0} a_{22,s-m}^* a_{22,m}\Big)z^{-s-1} + \\
&\quad + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a_{13,s-m}^* z^{-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a_{23,s-m}^* z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{1s}z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(2\sum_{m<0} a_{11,m}a_{11,s-m}^* + 2\sum_{m\geq 0} a_{11,s-m}^* a_{11,m} + \sum_{m<0} a_{12,m}a_{12,s-m}^* + \sum_{m\geq 0} a_{12,s-m}^* a_{12,m} + \\
&\quad - \sum_{m<0} a_{22,m}a_{22,s-m}^* - \sum_{m\geq 0} a_{22,s-m}^* a_{22,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a_{13,s-m}^* - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a_{23,s-m}^* + b_{1s}\Big)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned}
h_{1s} \mapsto\ & 2\sum_{m<0} a_{11,m}a_{11,s-m}^* + 2\sum_{m\geq 0} a_{11,s-m}^* a_{11,m} + \sum_{m<0} a_{12,m}a_{12,s-m}^* + \sum_{m\geq 0} a_{12,s-m}^* a_{12,m} + \\
& - \sum_{m<0} a_{22,m}a_{22,s-m}^* - \sum_{m\geq 0} a_{22,s-m}^* a_{22,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,m}a_{13,s-m}^* - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,m}a_{23,s-m}^* + b_{1s}
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Então:

$$\begin{aligned}
h_{1s} \mapsto\ & -2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \\
& - \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m}) + \\
& + \sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m}) + \\
& - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + s\ \mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s
\end{aligned}$$

Então:

$$
\begin{aligned}
\rho^w(h_{1s})(1\otimes 1) &= \Big(-2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \\
&\quad - \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m}) + \\
&\quad + \sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m}) + \\
&\quad - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s} + \ s\ \mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial \mathbf{y}_s\Big)(1\otimes 1) \\
&= \Big(-2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \\
&\quad - \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m}) + \\
&\quad + \sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m}) + \\
&\quad - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m-s} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m-s}\Big)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) + \mathrm{Id}(1)\otimes\Big(s\ \mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial \mathbf{y}_s\Big)(1) \\
&= 0\otimes 1 + 1\otimes 0 = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho^w(h_2)(z) &= 2:a_{22}(z)a^*_{22}(z): + :a_{12}(z)a^*_{12}(z): - :a_{11}(z)a^*_{11}(z): + :a_{23}(z)a^*_{23}(z): - :a_{33}(z)a^*_{33}(z): + b_2(z) \\
&= 2\Big(a_{22}(z)_+a^*_{22}(z)\Big) + 2\Big(a^*_{22}(z)a_{22}(z)_-\Big) + \Big(a_{12}(z)_+a^*_{12}(z)\Big) + \Big(a^*_{12}(z)a_{12}(z)_-\Big) + \\
&\quad - \Big(a_{11}(z)_+a^*_{11}(z)\Big) - \Big(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-\Big) + a_{23}(z)a^*_{23}(z) - a_{33}(z)a^*_{33}(z) + b_2(z) \\
&= 2\sum_{m<0} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} + 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{22,m}z^{-m-1} + \sum_{m<0} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{12,m}z^{-m-1} - \sum_{m<0} a_{11,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m\geq 0} a_{11,m}z^{-m-1} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{23,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{23,m}z^{-m} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{33,s}z^{-s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{33,m}z^{-m} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1} \\
&= 2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m<0} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + \sum_{m\geq 0} a^*_{22,s-m}a_{22,m}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m<0} a_{12,m}a^*_{12,s-m}\Big)z^{-s-1} + \\
&\quad + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\geq 0} a^*_{12,s-m}a_{12,m}\Big)z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} + \sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m}\Big)z^{-s-1} + \\
&\quad + \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m}a^*_{23,m}z^{-s-1} - \sum_{m,s\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m}a^*_{33,m}z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{2s}z^{-s-1} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(2\sum_{m<0} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + 2\sum_{m\geq 0} a^*_{22,s-m}a_{22,m} + \sum_{m<0} a_{12,m}a^*_{12,s-m} + \sum_{m\geq 0} a^*_{12,s-m}a_{12,m} + \\
&\quad - \sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} - \sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m}a^*_{23,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m}a^*_{33,m} + b_{2s}\Big)z^{-s-1}.
\end{aligned}
$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned} h_{2s} \quad \mapsto \quad & 2\sum_{m<0} a_{22,m}a^*_{22,s-m} + 2\sum_{m\geq 0} a^*_{22,s-m}a_{22,m} + \sum_{m<0} a_{12,m}a^*_{12,s-m} + \sum_{m\geq 0} a^*_{12,s-m}a_{12,m} + \\ & -\sum_{m<0} a_{11,m}a^*_{11,s-m} - \sum_{m\geq 0} a^*_{11,s-m}a_{11,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m}a^*_{23,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m}a^*_{33,m} + b_{2s} \end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Temos que:

$$\begin{aligned} h_{2s} \quad \mapsto \quad & -2\sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m}) + \\ & -\sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m}) + \\ & +\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \\ & -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m}\partial/\partial x_{23,-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,s-m}\partial/\partial x_{33,-m} + s\ \mathbf{e}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \rho^w(h_{2s})(1\otimes 1) \quad = \quad & \Bigg(-2\sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} + 2\sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m}) + \\ & -\sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m}) + \\ & +\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m-s} - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}\partial/\partial x_{11,m}) + \\ & -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m}\partial/\partial x_{23,-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,s-m}\partial/\partial x_{33,-m}\Bigg)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) + \mathrm{Id}(1)\otimes\Bigg(s\ \mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Bigg)(1) \\ = \quad & 0\otimes 1 + 1\otimes 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_3)(z) = \quad & 2 : a_{33}(z)a^*_{33}(z) : + : a_{13}(z)a^*_{13}(z) : - : a_{12}(z)a^*_{12}(z) : + : a_{23}(z)a^*_{23}(z) : - : a_{22}(z)a^*_{22}(z) : + b_3(z) \\
= \quad & 2a_{33}(z)a^*_{33}(z) + a_{13}(z)a^*_{13}(z) - \Big(a_{12}(z)_+ a^*_{12}(z)\Big) - \Big(a^*_{12}(z)a_{12}(z)_-\Big) + a_{23}(z)a^*_{23}(z) + \\
& -\Big(a_{22}(z)_+ a^*_{22}(z)\Big) - \Big(a^*_{22}(z)a_{22}(z)_-\Big) + b_3(z) \\
= \quad & 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{33,s}z^{-s-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{33,m}z^{-m} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{13,s}z^{-s-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{13,m}z^{-m} - \sum_{m<0} a_{12,m}z^{-m-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s} + \\
& -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{12,s}z^{-s} \sum_{m\geq 0} a_{12,m}z^{-m-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{23,s}z^{-s-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{23,m}z^{-m} - \sum_{m<0} a_{22,m}z^{-m-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} + \\
& -\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s}z^{-s} \sum_{m\geq 0} a_{22,m}z^{-m-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{3s}z^{-s-1} \\
= \quad & 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} (\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m}a^*_{33,m})z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} (\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,s-m}a^*_{13,m})z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} (\sum_{m<0} a_{12,m}a^*_{12,s-m})z^{-s-1} + \\
& -\sum_{s\in\mathbb{Z}} (\sum_{m\geq 0} a^*_{12,s-m}a_{12,m})z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} (\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m}a^*_{23,m})z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}} (\sum_{m<0} a_{22,m}a^*_{22,s-m})z^{-s-1} + \\
& -\sum_{s\in\mathbb{Z}} (\sum_{m\geq 0} a^*_{22,s-m}a_{22,m})z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{3s}z^{-s-1} \\
= \quad & \sum_{s\in\mathbb{Z}} \Bigg(2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m}a^*_{33,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,s-m}a^*_{13,m} - \sum_{m<0} a_{12,m}a^*_{12,s-m} - \sum_{m\geq 0} a^*_{12,s-m}a_{12,m} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m}a^*_{23,m} - \sum_{m<0} a_{22,m}a^*_{22,s-m} - \sum_{m\geq 0} a^*_{22,s-m}a_{22,m} + b_{3s}\Bigg)z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned}
h_{3s} \quad \mapsto \quad & 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m}a^*_{33,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{13,s-m}a^*_{13,m} - \sum_{m<0} a_{12,m}a^*_{12,s-m} - \sum_{m\geq 0} a^*_{12,s-m}a_{12,m} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m}a^*_{23,m} - \sum_{m<0} a_{22,m}a^*_{22,s-m} - \sum_{m\geq 0} a^*_{22,s-m}a_{22,m} + b_{3s}
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Assim,

$$\begin{aligned}
h_{3s} \quad \mapsto \quad & -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,s-m}\partial/\partial x_{33,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m}\partial/\partial x_{13,-m} + \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \\
& - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m}) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m}\partial/\partial x_{23,-m} + \\
& + \sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m}x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m}) + \\
& + s\ \mathbf{e}_3 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_s
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\rho^w(h_{3s})(1\otimes 1) = \quad & \Big(-2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,s-m}\partial/\partial x_{33,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m}\partial/\partial x_{13,-m} + \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \\
& - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m} x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m}) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m}\partial/\partial x_{23,-m} + \\
& + \sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s} - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m} x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m}) + \\
& + s\ \mathbf{e}_3\cdot\partial/\partial \mathbf{y}_s\Big)(1\otimes 1) \\
= \quad & \Big(-2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,s-m}\partial/\partial x_{33,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m}\partial/\partial x_{13,-m} + \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m-s} + \\
& - \sum_{m\geq 0}(\delta_{s\leq m} x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{12,m-s}\partial/\partial x_{12,m}) + \\
& - \sum_{m\geq 0} \delta_{s\leq m} x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} - \delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}\partial/\partial x_{22,m} + \\
& - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m}\partial/\partial x_{23,-m} + \sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m-s}\Big)(1)\otimes \mathrm{Id}(1) + \mathrm{Id}(1)\otimes\Big(s\ \mathbf{e}_3\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_s\Big)(1) \\
= \quad & 0\otimes 1 + 1\otimes 0 = 0.
\end{aligned}$$

$$\rho^w(e_1)(z) \quad = \quad -:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): + a_{22}(z)a^*_{12}(z) + a_{23}(z)a^*_{13}(z) - a^*_{11}(z)b_1(z) + (k+1)\partial_z a^*_{11}(z).$$

Temos que $:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z) :=: a^*_{11}(z)(:a_{11}(z)a^*_{11}(z):):$. Logo:

$$\begin{aligned}
:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): \quad = \quad & \Big(a^*_{11}(z)_+ a_{11}(z)_+ a^*_{11}(z)\Big) + \Big(a_{11}(z)_+ a^*_{11}(z)a^*_{11}(z)_-\Big) + \\
& + \Big(a^*_{11}(z)_+ a^*_{11}(z)a_{11}(z)_-\Big) + \Big(a^*_{11}(z)a_{11}(z)_- a^*_{11}(z)_-\Big).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z): \quad = \quad & \sum_{m\leq 0} a^*_{11,m}z^{-m}\sum_{q<0} a_{11,q}z^{-q-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s} + \sum_{q<0} a_{11,q}z^{-q-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{m>0} a^*_{11,m}z^{-m} + \\
& + \sum_{m\leq 0} a^*_{11,m}z^{-m}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{q\geq 0} a_{11,q}z^{-q-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s}z^{-s}\sum_{q\geq 0} a_{11,q}z^{-q-1}\sum_{m>0} a^*_{11,m}z^{-m}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_1)(z) \quad = \quad & \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\leq 0, q<0} a^*_{11,m}a_{11,q}a^*_{11,s-m-q}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m>0,q<0} a_{11,q}a^*_{11,s-m-q}a^*_{11,m}\Big)z^{-s-1} + \\
& + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\leq 0,q\geq 0} a^*_{11,m}a^*_{11,s-m-q}a_{11,q}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m>0,q\geq 0} a^*_{11,s-m-q}a_{11,q}a^*_{11,m}\Big)z^{-s-1} + \\
& + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,s-m}a^*_{12,m}\Big)z^{-s-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m}a^*_{13,m}\Big)z^{-s-1} + \\
& + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big(-\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{11,s-m}b_{1m}\Big)z^{-s-1} - (k+1)\sum_{n\in\mathbb{Z}} s\ a^*_{11,s}z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Considerando todas as possibilidades temos que:

$$\begin{aligned}
e_{1s} \quad \mapsto \quad & \sum_{m\leq 0, q<0} x_{11,-m}x_{11,q}\partial/\partial x_{11,m+q-s} + \sum_{m>0,q<0} \delta_{s\leq m+q}x_{11,q}x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,-m} + \\
& - \sum_{m>0,q<0} \delta_{s>m+q}x_{11,q}\partial/\partial x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,-m} - \sum_{m\leq 0,q\geq 0} \delta_{s\leq m+q}x_{11,-m}x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,q} + \\
& + \sum_{m\leq 0,q\geq 0} \delta_{s>m+q}x_{11,-m}\partial/\partial x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,q} + \sum_{m>0,q\geq 0} \delta_{s\leq m+q}x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,q}\partial/\partial x_{11,-m} + \\
& - \sum_{m>0,q\geq 0} \delta_{s>m+q}\partial/\partial x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,q}\partial/\partial x_{11,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m}\partial/\partial x_{13,-m} + s(k+1)\partial/\partial x_{11,-s} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\delta_{m\leq 0}\partial/\partial x_{22,s-m}x_{12,-m} - \delta_{m>0}\delta_{s<m}x_{22,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} - \delta_{m>0}\delta_{s\geq m}\partial/\partial x_{22,s-m}\partial/\partial x_{12,-m}\Big) + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{11,-s}\lambda_1 - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \delta_{m>0}\delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \\
& + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{11,m-s}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m}\Big)
\end{aligned}$$

Assim, para $s \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{1s})(1\otimes 1) &= 0\otimes 1 + \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{11,-s}\lambda_1 - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \\
&\quad + \delta_{m>0}\delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{11,m-s}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m}\Big)(1\otimes 1) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{11,-s}(1)\otimes\lambda_1(1) - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}x_{11,m-s}(1)\otimes m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m(1) + \\
&\quad + \delta_{m>0}\delta_{s>m}\partial/\partial x_{11,m-s}(1)\otimes m\mathbf{e}_1\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m(1) + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{11,m-s}(1)\otimes\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m}(1)\Big) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{m,0}(0\otimes\lambda_1) - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}(x_{11,m-s}\otimes 0) + \delta_{m>0}\delta_{s>m}(0\otimes 0) + \\
&\quad + \delta_{m<0}(0\otimes\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-m})\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Observe que $\rho^w(e_{10})(1\otimes 1) = -(x_{11,0}\otimes\lambda_1) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_2)(z) \quad = \quad & :a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z): - :a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z): - :a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z): + a_{33}(z)a_{23}^*(z) + \\
& - a_{11}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}^*(z)b_2(z) + k\partial_z a_{22}^*(z).
\end{aligned}$$

$:a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z): := :a_{22}^*(z)(:a_{11}(z)a_{11}^*(z):):$. Assim:

$$\begin{aligned}
:a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z): \quad = \quad & \Big(a_{22}^*(z)_+a_{11}(z)_+a_{11}^*(z)\Big) + \Big(a_{11}(z)_+a_{11}^*(z)a_{22}^*(z)_-\Big) + \\
& + \Big(a_{22}^*(z)_+a_{11}^*(z)a_{11}(z)_-\Big) + \Big(a_{11}^*(z)a_{11}(z)_-a_{22}^*(z)_-\Big).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} :a_{22}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z): \quad = \quad & \sum_{m\leq 0} a_{22,m}^* z^{-m} \sum_{q<0} a_{11,q} z^{-q-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}^* z^{-s} + \sum_{q<0} a_{11,q} z^{-q-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}^* z^{-s} \sum_{m>0} a_{22,m}^* z^{-m} + \\ & + \sum_{m\leq 0} a_{22,m}^* z^{-m} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}^* z^{-s} \sum_{q\geq 0} a_{11,q} z^{-q-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{11,s}^* z^{-s} \sum_{q\geq 0} a_{11,q} z^{-q-1} \sum_{m>0} a_{22,m}^* z^{-m}. \end{aligned}$$

$:a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z) :=: a_{22}^*(z)(:a_{12}(z)a_{12}^*(z):) :$. Logo:

$$\begin{aligned} :a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z): \quad = \quad & \Big(a_{22}^*(z)_+ a_{12}(z)_+ a_{12}^*(z)\Big) + \Big(a_{12}(z)_+ a_{12}^*(z) a_{22}^*(z)_-\Big) + \\ & + \Big(a_{22}^*(z)_+ a_{12}^*(z) a_{12}(z)_-\Big) + \Big(a_{12}^*(z) a_{12}(z)_- a_{22}^*(z)_-\Big). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} :a_{22}^*(z)a_{12}(z)a_{12}^*(z): \quad = \quad & \sum_{m\leq 0} a_{22,m}^* z^{-m} \sum_{q<0} a_{12,q} z^{-q-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}^* z^{-s} + \sum_{q<0} a_{12,q} z^{-q-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}^* z^{-s} \sum_{m>0} a_{22,m}^* z^{-m} + \\ & + \sum_{m\leq 0} a_{22,m}^* z^{-m} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}^* z^{-s} \sum_{q\geq 0} a_{12,q} z^{-q-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{12,s}^* z^{-s} \sum_{q\geq 0} a_{12,q} z^{-q-1} \sum_{m>0} a_{22,m}^* z^{-m}. \end{aligned}$$

$:a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z) :=: a_{22}^*(z)(:a_{22}(z)a_{22}^*(z):) :$. Logo:

$$\begin{aligned} :a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z): \quad = \quad & \Big(a_{22}^*(z)_+ a_{22}(z)_+ a_{22}^*(z)\Big) + \Big(a_{22}(z)_+ a_{22}^*(z) a_{22}^*(z)_-\Big) + \\ & + \Big(a_{22}^*(z)_+ a_{22}^*(z) a_{22}(z)_-\Big) + \Big(a_{22}^*(z) a_{22}(z)_- a_{22}^*(z)_-\Big). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} :a_{22}^*(z)a_{22}(z)a_{22}^*(z): \quad = \quad & \sum_{m\leq 0} a_{22,m}^* z^{-m} \sum_{q<0} a_{22,q} z^{-q-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}^* z^{-s} + \sum_{q<0} a_{22,q} z^{-q-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}^* z^{-s} \sum_{m>0} a_{22,m}^* z^{-m} + \\ & + \sum_{m\leq 0} a_{22,m}^* z^{-m} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}^* z^{-s} \sum_{q\geq 0} a_{22,q} z^{-q-1} + \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{22,s}^* z^{-s} \sum_{q\geq 0} a_{22,q} z^{-q-1} \sum_{m>0} a_{22,m}^* z^{-m}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\rho^w(e_2)(z) \;=\; & \sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\leq 0, q<0} a^*_{22,m}a_{11,q}a^*_{11,s-m-q}\right)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m>0, q<0} a_{11,q}a^*_{11,s-m-q}a^*_{22,m}\right)z^{-s-1}+\\
&+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\leq 0, q\geq 0} a^*_{22,m}a^*_{11,s-m-q}a_{11,q}\right)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m>0, q\geq 0} a^*_{11,s-m-q}a_{11,q}a^*_{22,m}\right)z^{-s-1}+\\
&+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{m\leq 0, q<0} a^*_{22,m}a_{12,q}a^*_{12,s-m-q}\right)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{m>0, q<0} a_{12,q}a^*_{12,s-m-q}a^*_{22,m}\right)z^{-s-1}+\\
&+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{m\leq 0, q\geq 0} a^*_{22,m}a^*_{12,s-m-q}a_{12,q}\right)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{m>0, q\geq 0} a^*_{12,s-m-q}a_{12,q}a^*_{22,m}\right)z^{-s-1}+\\
&+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{m\leq 0, q<0} a^*_{22,m}a_{22,q}a^*_{22,s-m-q}\right)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{m>0, q<0} a_{22,q}a^*_{22,s-m-q}a^*_{22,m}\right)z^{-s-1}+\\
&+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{m\leq 0, q\geq 0} a^*_{22,m}a^*_{22,s-m-q}a_{22,q}\right)z^{-s-1}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(-\sum_{m>0, q\geq 0} a^*_{22,s-m-q}a_{22,q}a^*_{22,m}\right)z^{-s-1}+\\
&+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m}a^*_{23,m}\right)z^{-s-1}-\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{11,s-m}a^*_{12,m}\right)z^{-s-1}+\\
&-\sum_{s\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{22,s-m}b_{2m}\right)z^{-s-1}-k\sum_{s\in\mathbb{Z}}\; s\; a^*_{22,s}z^{-s-1}.
\end{aligned}
$$

Para $s \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$
\begin{aligned}
e_{2s} \quad \mapsto \quad & - \sum_{m\leq 0, q<0} x_{22,-m}x_{11,q}\partial/\partial x_{11,m+q-s} + \\
& + \sum_{m>0,q<0} \Big(- \delta_{s\leq m+q} x_{11,q}x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{22,-m} + \delta_{s>m+q} x_{11,q}\partial/\partial x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{22,-m} \Big) + \\
& + \sum_{m\leq 0,q\geq 0} \Big(\delta_{s\leq m+q} x_{22,-m}x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,q} - \delta_{s>m+q} x_{22,-m}\partial/\partial x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,q} \Big) + \\
& + \sum_{m>0,q\geq 0} \Big(- \delta_{s\leq m+q} x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,q}\partial/\partial x_{22,-m} + \delta_{s>m+q} \partial/\partial x_{11,m+q-s}\partial/\partial x_{11,q}\partial/\partial x_{22,-m} \Big) + \\
& + \sum_{m\leq 0, q<0} x_{22,-m}x_{12,q}\partial/\partial x_{12,m+q-s} + \\
& + \sum_{m>0,q<0} \Big(\delta_{s\leq m+q} x_{12,q}x_{12,m+q-s}\partial/\partial x_{22,-m} - \delta_{s>m+q} x_{12,q}\partial/\partial x_{12,m+q-s}\partial/\partial x_{22,-m} \Big) + \\
& + \sum_{m\leq 0,q\geq 0} \Big(- \delta_{s\leq m+q} x_{22,-m}x_{12,m+q-s}\partial/\partial x_{12,q} + \delta_{s>m+q} x_{22,-m}\partial/\partial x_{12,m+q-s}\partial/\partial x_{12,q} \Big) + \\
& + \sum_{m>0,q\geq 0} \Big(\delta_{s\leq m+q} x_{12,m+q-s}\partial/\partial x_{12,q}\partial/\partial x_{22,-m} - \delta_{s>m+q} \partial/\partial x_{12,m+q-s}\partial/\partial x_{12,q}\partial/\partial x_{22,-m} \Big) + \\
& + \sum_{m\leq 0, q<0} x_{22,-m}x_{22,q}\partial/\partial x_{22,m+q-s} + \\
& + \sum_{m>0,q<0} \Big(\delta_{s\leq m+q} x_{22,q}x_{22,m+q-s}\partial/\partial x_{22,-m} - \delta_{s>m+q} x_{22,q}\partial/\partial x_{22,m+q-s}\partial/\partial x_{22,-m} \Big) + \\
& + \sum_{m\leq 0,q\geq 0} \Big(- \delta_{s\leq m+q} x_{22,-m}x_{22,m+q-s}\partial/\partial x_{22,q} + \delta_{s>m+q} x_{22,-m}\partial/\partial x_{22,m+q-s}\partial/\partial x_{22,q} \Big) + \\
& + \sum_{m>0,q\geq 0} \Big(\delta_{s\leq m+q} x_{22,m+q-s}\partial/\partial x_{22,q}\partial/\partial x_{22,-m} - \delta_{s>m+q} \partial/\partial x_{22,m+q-s}\partial/\partial x_{22,q}\partial/\partial x_{22,-m} \Big) + \\
& - \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\delta_{m\leq 0}\partial/\partial x_{11,s-m}x_{12,-m} - \delta_{m>0}\delta_{s\geq m}\partial/\partial x_{11,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} - \delta_{m>0}\delta_{s<m}x_{11,s-m}\partial/\partial x_{12,-m} \Big) + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\delta_{m,0}\partial/\partial x_{22,-s}\lambda_2 - \delta_{m>0}\delta_{s\leq m}x_{22,m-s}m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \delta_{m>0}\delta_{s>m}\partial/\partial x_{22,m-s}m\mathbf{e}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{y}_m + \\
& + \delta_{m<0}\partial/\partial x_{22,m-s}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-m} \Big) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,s-m}\partial/\partial x_{23,-m} + \ s\ k\ \partial/\partial x_{22,-s}
\end{aligned}
$$

Então, para $s \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$\rho^w(e_{2s})(1\otimes 1) \quad = \quad 0.$$

Observe que $\rho^w(e_{20})(1\otimes 1) = -(x_{22,0}\otimes\lambda_2) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\rho^w(e_3)(z) \quad = \quad & :a^*_{33}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z): + :a^*_{33}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z): - :a^*_{33}(z)a_{13}(z)a^*_{13}(z): + \\
& - :a^*_{33}(z)a_{23}(z)a^*_{23}(z): - :a^*_{33}(z)a_{33}(z)a^*_{33}(z): - a_{12}(z)a^*_{13}(z) + \\
& - a_{22}(z)a^*_{23}(z) - a^*_{33}(z)b_3(z) + k\partial_z a^*_{33}(z).
\end{aligned}
$$

Sabemos que $a_{ij}(z)_+ = a_{ij}(z), a_{ij}(z)_- = 0, a^*_{ij}(z)_+ = 0, a^*_{ij}(z)_- = a^*_{ij}(z)$, para $j > r = 2$. Então:

$$: a^*_{33}(z)a_{13}(z)a^*_{13}(z) := a_{13}(z)a^*_{13}(z)a^*_{33}(z)\ ,$$

$$: a^*_{33}(z)a_{23}(z)a^*_{23}(z) := a_{23}(z)a^*_{23}(z)a^*_{33}(z)\ ,$$

$$: a^*_{33}(z)a_{33}(z)a^*_{33}(z) := a_{33}(z)a^*_{33}(z)a^*_{33}(z).$$

Também sabemos que $: a^*_{33}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) :=: a^*_{33}(z)(: a_{12}(z)a^*_{12}(z) :) :$. Logo:

$$: a^*_{33}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) : \ = \ \Big(a_{12}(z)_+ a^*_{12}(z)a^*_{33}(z)\Big) + \Big(a^*_{12}(z)a_{12}(z)_- a^*_{33}(z)\Big).$$

Assim,

$$: a^*_{33}(z)a_{12}(z)a^*_{12}(z) : \ = \ \sum_{m<0} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{q\in\mathbb{Z}} a^*_{12,q}z^{-q}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{33,s}z^{-s} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} a^*_{12,q}z^{-q}\sum_{m\geq 0} a_{12,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{33,s}z^{-s}.$$

$: a^*_{33}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) :=: a^*_{33}(z)(: a_{22}(z)a^*_{22}(z) :) :$. Então:

$$: a^*_{33}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) : \ = \ \Big(a_{22}(z)_+ a^*_{22}(z)a^*_{33}(z)\Big) + \Big(a^*_{22}(z)a_{22}(z)_- a^*_{33}(z)\Big).$$

Logo,

$$: a^*_{33}(z)a_{22}(z)a^*_{22}(z) : \ = \ \sum_{m<0} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{q\in\mathbb{Z}} a^*_{22,q}z^{-q}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{33,s}z^{-s} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} a^*_{22,q}z^{-q}\sum_{m\geq 0} a_{22,m}z^{-m-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{33,s}z^{-s}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_3)(z) \ = \ & \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m<0,q\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{12,q}a^*_{33,s-m-q} + \sum_{m\geq 0,q\in\mathbb{Z}} a^*_{12,q}a_{12,m}a^*_{33,s-m-q}\Bigg)z^{-s-1} + \\
& + \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m<0,q\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{22,q}a^*_{33,s-m-q} + \sum_{m\geq 0,q\in\mathbb{Z}} a^*_{22,q}a_{22,m}a^*_{33,s-m-q}\Bigg)z^{-s-1} + \\
& - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m,q\in\mathbb{Z}} a_{13,s-m-q}a^*_{13,m}a^*_{33,q}\Bigg)z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m,q\in\mathbb{Z}} a_{23,s-m-q}a^*_{23,m}a^*_{33,q}\Bigg)z^{-s-1} + \\
& - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m,q\in\mathbb{Z}} a_{33,s-m-q}a^*_{33,m}a^*_{33,q}\Bigg)z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{12,m}a^*_{13,s-m}\Bigg)z^{-s-1} + \\
& - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{22,m}a^*_{23,s-m}\Bigg)z^{-s-1} - \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{33,s-m}b_{3m}\Bigg)z^{-s-1} - k\sum_{s\in\mathbb{Z}} s\ a^*_{33,s}z^{-s-1}.
\end{aligned}$$

Seja $s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
e_{3s} \quad \mapsto \quad & \sum_{m<0, q\in\mathbb{Z}} \Big(- \delta_{q\leq 0} x_{12,m} x_{12,-q} \partial/\partial x_{33,m+q-s} + \delta_{q>0} x_{12,m} \partial/\partial x_{12,-q} \partial/\partial x_{33,m+q-s} \Big) + \\
& + \sum_{m\geq 0, q\in\mathbb{Z}} \Big(- \delta_{q\leq 0} x_{12,-q} \partial/\partial x_{12,m} \partial/\partial x_{33,m+q-s} + \delta_{q>0} \partial/\partial x_{12,-q} \partial/\partial x_{12,m} \partial/\partial x_{33,m+q-s} \Big) + \\
& + \sum_{m<0, q\in\mathbb{Z}} \Big(- \delta_{q\leq 0} x_{22,m} x_{22,-q} \partial/\partial x_{33,m+q-s} + \delta_{q>0} x_{22,m} \partial/\partial x_{22,-q} \partial/\partial x_{33,m+q-s} \Big) + \\
& + \sum_{m\geq 0, q\in\mathbb{Z}} \Big(- \delta_{q\leq 0} x_{22,-q} \partial/\partial x_{22,m} \partial/\partial x_{33,m+q-s} + \delta_{q>0} \partial/\partial x_{22,-q} \partial/\partial x_{22,m} \partial/\partial x_{33,m+q-s} \Big) + \\
& - \sum_{m,q\in\mathbb{Z}} x_{13,s-m-q} \partial/\partial x_{13,-m} \partial/\partial x_{33,-q} - \sum_{m,q\in\mathbb{Z}} x_{23,s-m-q} \partial/\partial x_{23,-m} \partial/\partial x_{33,-q} + \\
& - \sum_{m,q\in\mathbb{Z}} x_{33,s-m-q} \partial/\partial x_{33,-m} \partial/\partial x_{33,-q} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\delta_{m<0} x_{12,m} \partial/\partial x_{13,m-s} + \delta_{m\geq 0} \partial/\partial x_{12,m} \partial/\partial x_{13,m-s} \Big) + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\delta_{m<0} x_{22,m} \partial/\partial x_{23,m-s} + \delta_{m\geq 0} \partial/\partial x_{22,m} \partial/\partial x_{23,m-s} \Big) + \ s\ k\ \partial/\partial x_{33,-s} + \\
& + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\delta_{m,0} \partial/\partial x_{33,-s} \lambda_3 + \delta_{m>0} \partial/\partial x_{33,m-s} m \mathbf{e}_3 \cdot \partial/\partial \mathbf{y}_m + \delta_{m<0} \partial/\partial x_{33,m-s} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{y}_{-m} \Big)
\end{aligned}$$

Portanto, para $s \in \mathbb{Z}$:

$$\rho^w(e_{3s})(1 \otimes 1) \quad = \quad 0.$$

Ainda precisamos verificar que:

- $\rho^w(e_{4s})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(f_{4s})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- $\rho^w(e_{5m})(1 \otimes 1) = 0$, $\rho^w(e_{6m})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\rho^w(f_{40})(1 \otimes 1) = 0$.

Lembre que o colchete de Lie em $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ é:

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^s] = [x, y] \otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(x, y)c$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, $m, s \in \mathbb{Z}$. Então, em particular

$$[e_{1m}, e_{2s}] = [e_1, e_2] \otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(e_1, e_2)c = e_4 \otimes t^{m+s} \ ,$$

$$[e_{2m}, e_{3s}] = [e_2, e_3] \otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(e_2, e_3)c = e_5 \otimes t^{m+s} \ ,$$

$$[e_{4m}, e_{3s}] = [e_4, e_3] \otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(e_4, e_3)c = e_6 \otimes t^{m+s} \ ,$$

$$[f_{2m}, f_{1s}] = [f_2, f_1] \otimes t^{m+s} + m\delta_{m,-s}(f_2, f_1)c = f_4 \otimes t^{m+s}.$$

Assim, $e_{4p} = [e_{1m}, e_{2s}]$, $e_{5p} = [e_{2m}, e_{3s}]$, $e_{6p} = [e_{4m}, e_{3s}]$ e $f_{4p} = [f_{2m}, f_{1s}]$, onde $p = m + s \in \mathbb{Z}$. Como ρ^w é uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ temos que:

$$\rho^w(e_{4p}) = \rho^w([e_{1m}, e_{2s}]) = [\rho^w(e_{1m}), \rho^w(e_{2s})] \ ,$$

$$\rho^w(e_{5p}) = \rho^w([e_{2m}, e_{3s}]) = [\rho^w(e_{2m}), \rho^w(e_{3s})] \ ,$$
$$\rho^w(e_{6p}) = \rho^w([e_{4m}, e_{3s}]) = [\rho^w(e_{4m}), \rho^w(e_{3s})] \ ,$$
$$\rho^w(f_{4p}) = \rho^w([f_{2m}, f_{1s}]) = [\rho^w(f_{2m}), \rho^w(f_{1s})].$$

Mostraremos que $\rho^w(e_{4p})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Como já mostramos que $\rho^w(e_{1m})(1\otimes 1) = 0$ e $\rho^w(e_{2s})(1\otimes 1) = 0$, $\forall m, s \in \mathbb{Z}_{>0}$, então $\rho^w(e_{4p})(1\otimes 1) = 0$, $\forall p \geq 2$. Assim, falta mostrar que $\rho^w(e_{41})(1 \otimes 1) = 0$.

Podemos assumir sem perda de generalidade que $1 = p = m + s$, com $m = 0$ e $s = 1$ (a menos de reindexação). Então,

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{41})(1 \otimes 1) &= [\rho^w(e_{10}), \rho^w(e_{21})](1 \otimes 1) \\
&= (\rho^w(e_{10})\rho^w(e_{21}) - \rho^w(e_{21})\rho^w(e_{10}))(1 \otimes 1) \\
&= \rho^w(e_{21})(x_{11,0} \otimes \lambda_1) \\
&= -\sum_{u\leq 0; v<0} x_{22,-u}x_{11,v}\partial/\partial x_{11,u+v-1}(x_{11,0} \otimes \lambda_1) + \\
&\quad + \sum_{u\leq 0; v\geq 0} \delta_{1\leq u+v}x_{22,-u}x_{11,u+v-1}\partial/\partial x_{11,v}(x_{11,0} \otimes \lambda_1) + \\
&\quad - \sum_{u\in\mathbb{Z}} \delta_{u\leq 0}\partial/\partial x_{11,1-u}x_{12,-u}(x_{11,0} \otimes \lambda_1) \\
&= -\sum_{u\leq 0; v<0} \delta_{u+v-1,0}(x_{22,-u}x_{11,v} \otimes \lambda_1) + \sum_{u\leq 0; v\geq 0} \delta_{1-u-v\leq 0}\delta_{v,0}(x_{22,-u}x_{11,u+v-1} \otimes \lambda_1) + \\
&\quad - \sum_{u\in\mathbb{Z}} \delta_{u\leq 0}\delta_{1-u,0}(x_{12,-u} \otimes \lambda_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\rho^w(e_{4p})(1 \otimes 1) = 0$, para todos $p \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Observe que $\rho^w(e_{40})(1 \otimes 1) \neq 0$. De fato, suponha que $m = n = 0$. Assim:

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{40})(1 \otimes 1) &= [\rho^w(e_{10}), \rho^w(e_{20})](1 \otimes 1) \\
&= (\rho^w(e_{10})\rho^w(e_{20}) - \rho^w(e_{20})\rho^w(e_{10}))(1 \otimes 1) \\
&= -\rho^w(e_{10})(x_{22,0} \otimes \lambda_2) + \rho^w(e_{20})(x_{11,0} \otimes \lambda_1) \\
&= -\sum_{u\in\mathbb{Z}} \left(\delta_{u,0}\partial/\partial x_{22,0}x_{12,0}(x_{22,0} \otimes \lambda_2) + \delta_{u<0}x_{12,-u}\partial/\partial x_{22,-u}(x_{22,0} \otimes \lambda_2)\right) + \\
&\quad + \sum_{u\in\mathbb{Z}} \delta_{u,0}x_{11,0}\lambda_1(x_{22,0} \otimes \lambda_2) + \sum_{u\leq 0; v\geq 0} \delta_{-u-v\leq 0}x_{22,-u}x_{11,u+v}\partial/\partial x_{11,v}(x_{11,0} \otimes \lambda_1) + \\
&\quad - \sum_{u\in\mathbb{Z}} \delta_{u,0}x_{12,0}\partial/\partial x_{11,0}(x_{11,0} \otimes \lambda_1) - \sum_{u\in\mathbb{Z}} \delta_{u,0}x_{22,0}\lambda_2(x_{11,0} \otimes \lambda_1) \\
&= -(x_{12,0} \otimes \lambda_2) + (x_{11,0}x_{22,0} \otimes \lambda_1\lambda_2) + (x_{11,0}x_{22,0} \otimes \lambda_1) - (x_{12,0} \otimes \lambda_1) + \\
&\quad -(x_{11,0}x_{22,0} \otimes \lambda_1\lambda_2) \\
&= -(x_{12,0} \otimes \lambda_2) + (x_{11,0}x_{22,0} \otimes \lambda_1) - (x_{12,0} \otimes \lambda_1).
\end{aligned}$$

Verificaremos que $\rho^w(e_{5p})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $\rho^w(e_{5p}) = [\rho^w(e_{2m}), \rho^w(e_{3s})]$.

Suponha que $m > 0$ e $s \in \mathbb{Z}$. Temos que $\rho^w(e_{2m})(1 \otimes 1) = 0$ e $\rho^w(e_{3s})(1 \otimes 1) = 0$. Então,

$$\rho^w(e_{5p})(1 \otimes 1) = 0.$$

Agora, suponhamos que $m = 0$ e $s \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $\rho^w(e_{20})(1 \otimes 1) = -(x_{22,0} \otimes \lambda_2)$. Logo:

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{5p})(1 \otimes 1) &= [\rho^w(e_{20}), \rho^w(e_{3s})](1 \otimes 1) \\
&= (\rho^w(e_{20})\rho^w(e_{3s}) - \rho^w(e_{3s})\rho^w(e_{20}))(1 \otimes 1) \\
&= \rho^w(e_{3s})(x_{22,0} \otimes \lambda_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, suponhamos que $m < 0$ e $s \in \mathbb{Z}$.

Temos que:

$$\begin{aligned}
\rho^w(e_{2m})(1 \otimes 1) = &\sum_{v \leq 0; q < 0} \delta_{m \leq v+q}(x_{22,-v}x_{11,q}x_{11,v+q-m} \otimes 1) - \sum_{v \leq 0; q < 0} \delta_{m \leq v+q}(x_{22,-v}x_{12,q}x_{12,v+q-m} \otimes 1) + \\
&- \sum_{v \leq 0; q < 0} \delta_{m \leq v+q}(x_{22,-v}x_{22,q}x_{22,v+q-m} \otimes 1) - \sum_{v \in \mathbb{Z}} \delta_{v \leq 0}\delta_{m-v<0}(x_{11,m-v}x_{12,-v} \otimes 1) + \\
&- \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left(\delta_{v,0}(x_{22,-m} \otimes \lambda_2) + \delta_{v<0}\delta_{m-v \leq 0}(x_{22,v-m} \otimes \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_{-v}) \right) - km(x_{22,-m} \otimes 1).
\end{aligned}$$

Observamos que o elemento $\rho^w(e_{2m})(1 \otimes 1) \in \mathbb{C}[x_{11,u}, x_{12,u}, x_{13,u}, x_{22,u}, x_{23,u}, x_{33,u} \mid u \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}_u \mid u \in \mathbb{N}^*]$, não tem nenhuma variável do tipo $x_{j3,u}$, com $j = 1, 2, 3$, $u \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, observamos que o operador diferencial $\rho^w(e_{3s})$, com $s \in \mathbb{Z}$, tem em cada um dos seus termos, no mínimo algum operador do tipo $\partial/\partial x_{j3,u}$, com $j = 1, 2$ ou 3 e $u \in \mathbb{Z}$. Então, $\rho^w(e_{5p})(1 \otimes 1) = -\rho^w(e_{3s})\rho^w(e_{2m})(1 \otimes 1) = 0$.

Portanto, $\rho^w(e_{5p})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}$.

Agora verifiquemos que $\rho^w(e_{6p})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $\rho^w(e_{6p}) = [\rho^w(e_{4m}), \rho^w(e_{3s})]$.

Se $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $s \in \mathbb{Z}$ temos que $\rho^w(e_{6p})(1 \otimes 1) = 0$.

Suponha que $m = 0$ e $s \in \mathbb{Z}$. Sabemos que

$$\rho^w(e_{40})(1 \otimes 1) = -(x_{12,0} \otimes \lambda_2) + (x_{11,0}x_{22,0} \otimes \lambda_1) - (x_{12,0} \otimes \lambda_1) \ ,$$

isto é, $\rho^w(e_{40})(1 \otimes 1) \in \mathbb{C}[x_{11,u}, x_{12,u}, x_{13,u}, x_{22,u}, x_{23,u}, x_{33,u} \mid u \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}_u \mid u \in \mathbb{N}^*]$, não tem nenhuma variável do tipo $x_{j3,u}$, com $j = 1, 2, 3$, $u \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, observamos que o operador diferencial $\rho^w(e_{3s})$, com $s \in \mathbb{Z}$, tem em cada um dos seus termos, no mínimo um operador do tipo $\partial/\partial x_{j3,u}$, com $j = 1, 2$ ou 3 e $u \in \mathbb{Z}$. Então, $\rho^w(e_{6p})(1 \otimes 1) = -\rho^w(e_{3s})\rho^w(e_{40})(1 \otimes 1) = 0$.

Por fim, assumiremos que $m \in \mathbb{Z}_{<0}$ e $s \in \mathbb{Z}$. Para $m = u + v$ temos que:

$$\rho^w(e_{4m})(1 \otimes 1) = \rho^w(e_{1u})\rho^w(e_{2v})(1 \otimes 1) - \rho^w(e_{2v})\rho^w(e_{1u})(1 \otimes 1).$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que $u, v \in \mathbb{Z}_{<0}$. Temos que:

$$\begin{aligned}\rho^w(e_{1u})(1\otimes 1) &= \sum_{p\leq 0;q<0} \delta_{u\leq p+q}(x_{11,-p}x_{11,q}x_{11,p+q-u}\otimes 1) - (k+1)u(x_{11,-u}\otimes 1) + \\ &+ \sum_{p\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{p,0}(x_{22,u}x_{12,0}\otimes 1) + \delta_{p<0}\delta_{u-p<0}(x_{22,u-p}x_{12,-p}\otimes 1)\Big) + \\ &- \sum_{p\in\mathbb{Z}}\Big(\delta_{p,0}(x_{11,-u}\otimes\lambda_1) + \delta_{p<0}\delta_{u-p\leq 0}(x_{11,p-u}\otimes \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y}_{-p})\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho^w(e_{2v})(1\otimes 1) &= \sum_{p\leq 0;q<0} \delta_{v\leq p+q}(x_{22,-p}x_{11,q}x_{11,p+q-v}\otimes 1) - kv(x_{22,-v}\otimes 1) + \\ &- \sum_{p\leq 0;q<0} \delta_{v\leq p+q}(x_{22,-p}x_{12,q}x_{12,p+q-v}\otimes 1) - \sum_{p\leq 0;q<0} \delta_{v\leq p+q}(x_{22,-p}x_{22,q}x_{22,p+q-v}\otimes 1) + \\ &- \sum_{p\in\mathbb{Z}}\delta_{p\leq 0}(x_{11,v-p}x_{12,-p}\otimes 1) - \sum_{p\in\mathbb{Z}}\delta_{p<0}\delta_{v-p\leq 0}(x_{22,p-v}\otimes \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y}_{-p}) + \\ &- \sum_{p\in\mathbb{Z}}\delta_{p,0}(x_{22,-v}\otimes\lambda_2).\end{aligned}$$

Então, tanto $\rho^w(e_{1u})\rho^w(e_{2v})(1\otimes 1)$ como $\rho^w(e_{2v})\rho^w(e_{1u})(1\otimes 1)$ não tem nenhuma variável do tipo $x_{j3,u}$, com $j = 1,2,3$, $u\in\mathbb{Z}$. Então $\rho^w(e_{4m})(1\otimes 1) \in \mathbb{C}[x_{11,u}, x_{12,u}, x_{13,u}, x_{22,u}, x_{23,u}, x_{33,u} \mid u\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathbf{y}_u \mid u\in\mathbb{N}^*]$, não tem nenhuma variável do tipo $x_{j3,u}$, com $j = 1,2,3$, $u\in\mathbb{Z}$. Por outro lado, observamos que o operador diferenciável $\rho^w(e_{3s})$, com $s\in\mathbb{Z}$, tem em cada um dos seus termos, no mínimo algum operador do tipo $\partial/\partial x_{j3,u}$, com $j = 1,2$ ou 3 e $u\in\mathbb{Z}$. Então, $\rho^w(e_{6p})(1\otimes 1) = -\rho^w(e_{3s})\rho^w(e_{4m})(1\otimes 1) = 0$.

Portanto, $\rho^w(e_{6p})(1\otimes 1) = 0$, $\forall p\in\mathbb{Z}$.

Verificaremos que $\rho^w(f_{4p})(1\otimes 1) = 0$, $\forall p\in\mathbb{Z}_{>0}$ e $\rho^w(f_{40})(1\otimes 1) = 0$.

Como já mostramos que, $\rho^w(f_{1s})(1\otimes 1) = 0$ e $\rho^w(f_{2m})(1\otimes 1) = 0$, $\forall m, s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ e sabemos que

$$\rho^w(f_{4p})(1\otimes 1) = [\rho^w(f_{2m}), \rho^w(f_{1s})](1\otimes 1)\ ,$$

temos que $\rho^w(f_{4p})(1\otimes 1) = 0$, $\forall p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Para concluir, verifiquemos que $h(1\otimes 1) = \lambda(h)(1\otimes 1)$, para cada $h\in\mathfrak{h}$. Consideremos apenas h_{10}, h_{20} e h_{30}, pois $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_{10}\oplus\mathbb{C}h_{20}\oplus\mathbb{C}h_{30}$.

$$\begin{aligned}h_{10} \mapsto\ & -2\sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} + 2\sum_{m\geq 0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} - \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} + \sum_{m\geq 0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} + \\ & + \sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} - \sum_{m\geq 0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,m}\partial/\partial x_{13,m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,m}\partial/\partial x_{23,m} + \lambda_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{20} \mapsto\ & -2\sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} + 2\sum_{m\geq 0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} - \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} + \sum_{m\geq 0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} + \\ & + \sum_{m<0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} - \sum_{m\geq 0} x_{11,m}\partial/\partial x_{11,m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,-m}\partial/\partial x_{23,-m} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,-m}\partial/\partial x_{33,-m} + \lambda_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{30} \mapsto\ & -2\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{33,-m}\partial/\partial x_{33,-m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{13,-m}\partial/\partial x_{13,-m} + \sum_{m<0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} - \sum_{m\geq 0} x_{12,m}\partial/\partial x_{12,m} + \\ & - \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{23,-m}\partial/\partial x_{23,-m} + \sum_{m<0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} - \sum_{m\geq 0} x_{22,m}\partial/\partial x_{22,m} + \lambda_3 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho^w(h_{10})(1\otimes 1) = (0\otimes 1) + (1\otimes \lambda_1(1)) = \lambda_1(1\otimes 1)\ ,$$

$$\rho^w(h_{20})(1\otimes 1) = (0\otimes 1) + (1\otimes \lambda_2(1)) = \lambda_2(1\otimes 1)\ ,$$

$$\rho^w(h_{30})(1\otimes 1) = (0\otimes 1) + (1\otimes \lambda_3(1)) = \lambda_3(1\otimes 1)\ ,$$

onde $\lambda_1 = \lambda(h_{10})$, $\lambda_2 = \lambda(h_{20})$ e $\lambda_3 = \lambda(h_{30})$.

3.7 Algumas considerações

Fazer os cálculos explícitos para os parâmetros $n = 1, 2$ e 3 foi importante para descobrir qual deveria ser o elemento w do grupo de Weyl $\mathfrak{S}_{n+1}$ utilizado para torcer a subálgebra de Borel $\overline{\mathfrak{b}}_r$, e fazer tudo funcionar.

Depois desses casos explícitos concluímos que dados os parâmetros n e r, com $0 \leq r < n$, o elemento correspondente w do grupo de Weyl $\mathfrak{S}_{n+1}$ para definir $\overline{\mathfrak{b}}_r^w$ é do tipo

$$w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)(3\ \ r-1)(4\ \ r-2)\cdots(u\ \ r-u+2),$$

onde cada transposição que aparece em w é do tipo $(i\ j)$, com $i \leq j$, somente transposições disjuntas aparecem no produto e u é o maior inteiro tal que $1 \leq u \leq \frac{r}{2} + 1$.

Dados n e r, com $0 \leq r < n$, mostramos que $\overline{\mathfrak{b}}_r^w$ aniquila o vetor $(1\otimes 1)$, onde

$$\overline{\mathfrak{b}}_r = \left(\mathfrak{n}^+(r)\otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\right) \oplus \left(\mathfrak{n}_r^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]\right) \oplus \left(((\mathfrak{n}_r^-)\oplus\mathfrak{h})\otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right)$$

tal que $\widehat{\mathfrak{b}}_r = \overline{\mathfrak{b}}_r \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ é a subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C})$ (definida por uma partição fechada).

Temos que $W^w_{n,r}(\lambda,\gamma)$ é um representante da família dos módulos de Wakimoto Intermediários com parâmetros n e r, sendo chamado de módulo de Wakimoto Intermediário torcido pelo elemento w. Podemos encontrar $W^e_{n,r}(\lambda,\gamma)$, onde e é o elemento identidade de $\mathfrak{S}_{n+1}$, e determinar $W^s_{n,r}(\lambda,\gamma)$, $\forall s\in\mathfrak{S}_{n+1}$. Isso foi feito na Seção 3.5 para o caso $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ (parâmetros $n=2$ e $r=1$), onde o grupo de Weyl é o grupo simétrico $\mathfrak{S}_3$.

Como já comentamos anteriormente, a subálgebra de Borel (definida a partir de uma partição fechada) de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$:

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2')=\Big((\mathbb{C}e_2\oplus\mathbb{C}e_4\oplus\mathbb{C}e_5\oplus\mathbb{C}e_6)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big)\oplus\Big((\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_3\oplus\mathbb{C}f_1\oplus\mathbb{C}f_3)\otimes_{\mathbb{C}}t\mathbb{C}[t]\Big)\oplus\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_3\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$$

que aparece no Apêndice A na Subseção A.3.3 não foi utilizada na construção dos módulos de Wakimoto Intermediários em [CF04]. No Capítulo 4 construiremos um novo módulo de Wakimoto Intermediário relacionado a ela. Abaixo, seguem alguns comentários e observações iniciais sobre esse caso particular.

3.7.1 Caso: subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_2'=\mathfrak{l}_2'\oplus\mathfrak{u}_2'$ de $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, onde $\mathfrak{l}_2'\cong\mathbb{C}h_2\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, e a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2')$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$

Inicialmente, considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})=\{X\in M_{4\times4}(\mathbb{C})\mid tr(X)=0\}$.

Os geradores desta álgebra como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ são as matrizes:

$$e_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$[e_1,e_2]=e_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad [e_2,e_3]=e_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad [e_4,e_3]=e_6=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$f_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad f_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad f_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$[f_2,f_1]=f_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad [f_3,f_2]=f_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad [f_3,f_4]=f_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

que satisfazem as seguintes relações:

$$[e_1, f_1] = h_1 \quad , \quad [e_2, f_2] = h_2 \quad , \quad [e_3, f_3] = h_3 \quad , \quad [e_i, f_j] = 0 \ (1 \leq i, j \leq 3, i \neq j) \quad ,$$

$$[e_1, f_4] = -f_2 \quad , \quad [e_1, f_5] = 0 \quad , \quad [e_1, f_6] = -f_5 \quad ,$$

$$[e_2, f_4] = f_1 \quad , \quad [e_2, f_5] = -f_3 \quad , \quad [e_2, f_6] = 0 \quad ,$$

$$[e_3, f_4] = 0 \quad , \quad [e_3, f_5] = f_2 \quad , \quad [e_3, f_6] = f_4 \quad ,$$

$$[e_4, f_1] = -e_2 \quad , \quad [e_4, f_2] = e_1 \quad , \quad [e_4, f_3] = 0 \quad , \quad [e_4, f_4] = h_1 + h_2 \quad , \quad [e_4, f_5] = 0 \quad , \quad [e_4, f_6] = -f_3 \, ,$$

$$[e_5, f_1] = 0 \quad , \quad [e_5, f_2] = -e_3 \quad , \quad [e_5, f_3] = e_2 \quad , \quad [e_5, f_4] = 0 \quad , \quad [e_5, f_5] = h_2 + h_3 \quad , \quad [e_5, f_6] = f_1 \, ,$$

$$[e_6, f_1] = -e_5 \quad , \quad [e_6, f_2] = 0 \quad , \quad [e_6, f_3] = e_4 \quad , \quad [e_6, f_4] = -e_3 \quad , \quad [e_6, f_5] = e_1 \, , \ [e_6, f_6] = h_1 + h_2 + h_3 ,$$

$$[h_1, e_1] = 2e_1 \quad , \quad [h_1, e_2] = -e_2 \quad , \quad [h_1, e_3] = 0 \quad , \quad [h_1, e_4] = e_4 \quad , \quad [h_1, e_5] = -e_5 \quad , \quad [h_1, e_6] = e_6 \, ,$$

$$[h_1, f_1] = -2f_1 \quad , \quad [h_1, f_2] = f_2 \quad , \quad [h_1, f_3] = 0 \quad , \quad [h_1, f_4] = -f_4 \quad , \quad [h_1, f_5] = f_5 \quad , \quad [h_1, f_6] = -f_6 \, ,$$

$$[h_2, e_1] = -e_1 \quad , \quad [h_2, e_2] = 2e_2 \quad , \quad [h_2, e_3] = -e_3 \quad , \quad [h_2, e_4] = e_4 \quad , \quad [h_2, e_5] = e_5 \quad , \quad [h_2, e_6] = 0 \, ,$$

$$[h_2, f_1] = f_1 \quad , \quad [h_2, f_2] = -2f_2 \quad , \quad [h_2, f_3] = f_3 \quad , \quad [h_2, f_4] = -f_4 \quad , \quad [h_2, f_5] = -f_5 \quad , \quad [h_2, f_6] = 0 \, ,$$

$$[h_3, e_1] = 0 \quad , \quad [h_3, e_2] = -e_2 \quad , \quad [h_3, e_3] = 2e_3 \quad , \quad [h_3, e_4] = -e_4 \quad , \quad [h_3, e_5] = e_5 \quad , \quad [h_3, e_6] = e_6 \, ,$$

$$[h_3, f_1] = 0 \quad , \quad [h_3, f_2] = f_2 \quad , \quad [h_3, f_3] = -2f_3 \quad , \quad [h_3, f_4] = f_4 \quad , \quad [h_3, f_5] = -f_5 \quad , \quad [h_3, f_6] = -f_6 \, ,$$

$$[e_1, e_3] = 0 \quad , \quad [e_1, [e_1, e_2]] = 0 \quad , \quad [e_2, [e_2, e_1]] = 0 \quad , \quad [e_2, [e_2, e_3]] = 0 \quad , \quad [e_3, [e_3, e_2]] = 0 \, ,$$

$$[f_1, f_3] = 0 \quad , \quad [f_1, [f_1, f_2]] = 0 \quad , \quad [f_2, [f_2, f_1]] = 0 \quad , \quad [f_2, [f_2, f_3]] = 0 \quad , \quad [f_3, [f_3, f_2]] = 0 \, .$$

A matriz de Cartan associada à $\mathfrak{g}$ is $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Temos que $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

As relações entre os colchetes descritos acima podem ser resumidos através dos elementos da matriz de Cartan e das relações de Serre, isto é,

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \quad , \quad [h_i, e_j] = a_{ij} e_j \quad , \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j \ ,$$

$$\mathrm{ad}(e_i)^{-a_{ij}+1}(e_j) = 0 \ (i \neq j) \quad , \quad \mathrm{ad}(f_i)^{-a_{ij}+1}(f_j) = 0 \ (i \neq j).$$

Temos a seguinte decomposição triangular: $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, com $\overline{\mathfrak{n}} = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3 \oplus \mathbb{C}f_4 \oplus \mathbb{C}f_5 \oplus \mathbb{C}f_6$ e $\mathfrak{n} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$.

A subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}, \ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}.$$

Para $i = 1, \ldots, 4$, defina $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ por $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4)) = a_i$.

O sistema de raízes de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ é $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 4\}$.

Além disso,

$$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C}) = \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha) \quad , \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h_1, x] = \alpha(h_1)x \ , \ [h_2, x] = \alpha(h_2)x \ , \ [h_3, x] = \alpha(h_3)x\}.$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathfrak{h}^*$ tais que $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ e $\alpha_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$. Temos que $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ é uma base de Δ, $I = \{1, 2, 3\}$ e $\Delta_+ = \Delta_+(\Pi) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$ é um conjunto de raízes positivas com respeito à Π. Notemos que $\alpha_1 + \alpha_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$ não é uma raiz. Como,

1. $\alpha_1(h_1) = 2$, $\alpha_1(h_2) = -1$ e $\alpha_1(h_3) = 0$,

2. $\alpha_2(h_1) = -1$, $\alpha_2(h_2) = 2$ e $\alpha_2(h_3) = -1$,

3. $\alpha_3(h_1) = 0$, $\alpha_3(h_2) = -1$ e $\alpha_3(h_3) = 2$,

concluímos que $\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \mathbb{C}e_1$, $\mathfrak{g}_{\alpha_2} = \mathbb{C}e_2$, $\mathfrak{g}_{\alpha_3} = \mathbb{C}e_3$, $\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathbb{C}e_4$, $\mathfrak{g}_{\alpha_2+\alpha_3} = \mathbb{C}e_5$, $\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = \mathbb{C}e_6$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_1} = \mathbb{C}f_1$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_2} = \mathbb{C}f_2$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_3} = \mathbb{C}f_3$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2} = \mathbb{C}f_4$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_2-\alpha_3} = \mathbb{C}f_5$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = \mathbb{C}f_6$.

Logo, $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\}$ é um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$, onde $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ é uma base de Δ.

Considerando a base $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ temos as seguintes possibilidades para subconjuntos $S \subseteq \Pi$:

- $S = \emptyset$.

- $S = \{\alpha_1\}$ (o caso $S = \{\alpha_2\}$ ou $S = \{\alpha_3\}$ são similares).

- $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ (o caso $S = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ é similar).

- $S = \{\alpha_1, \alpha_3\}$.

- $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \Pi$.

De maneira equivalente, considerando o conjunto de índices $I = \{1, 2, 3\}$ temos as seguintes possibilidades para subconjuntos $X \subseteq I$:

- $X = \emptyset$.

- $X = \{1\}$ (o caso $X = \{2\}$ ou $X = \{3\}$ são similares).

- $X = \{1, 2\}$ (o caso $X = \{2, 3\}$ é similar).

- $X = \{1, 3\}$.

- $X = \{1, 2, 3\} = I$.

De acordo com a Proposição A.3.1 (Apêndice A), obtemos os seguintes subconjuntos parabólicos de Δ:

1. $P_0 = \Delta^+(\Pi) \cup \mathrm{add}(\emptyset) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\} = \Delta^+$.

2. $P_1 = \Delta^+(\Pi) \cup \mathrm{add}(-\alpha_1) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1\}$.

3. $P_2 = \Delta^+(\Pi) \cup \mathrm{add}(-\alpha_1, -\alpha_2) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}$.

4. $P_2' = \Delta^+(\Pi) \cup \mathrm{add}(-\alpha_1, -\alpha_3) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_3\}$.

5. $P_3 = \Delta^+(\Pi) \cup \mathrm{add}(-\Pi) = \Delta$.

Esses subconjuntos parabólicos definem as seguintes subálgebras parabólicas de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$:

- $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{b}$, associada com P_0, onde $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{n}$.

- $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}f_1$, associada com P_1, onde $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1$ e $\mathfrak{u}_1 = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$.

- $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4$, associada com P_2, onde $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4$ e $\mathfrak{u}_2 = \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$.

- $\mathfrak{p}_2' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3$, associada com P_2', onde $\mathfrak{l}_2' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3$ e $\mathfrak{u}_2' = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$.

- $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$, associada com P_3, onde $\mathfrak{l}_3 = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n}$ e $\mathfrak{u}_3 = \{0\}$.

Observe que o fator de Levi redutivo de $\mathfrak{p}_1$ é $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 = \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1$, com subconjunto $L_1 = P_1 \cap -P_1 = \{\alpha_1, -\alpha_1\}$. Então $\mathfrak{l}_1 \cong \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3 \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

O fator de Levi redutivo de $\mathfrak{p}_2$ é $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4 = \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4$, com subconjunto $L_2 = P_2 \cap -P_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1-\alpha_2\}$. Então $\mathfrak{l}_2 \cong \mathbb{C}h_3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

O fator de Levi redutivo de $\mathfrak{p}_2'$ é $\mathfrak{l}_2' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3 = \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_3$, com subconjunto $L_2' = P_2' \cap -P_2' = \{\alpha_1, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_3\}$. Então $\mathfrak{l}_2' \cong \mathbb{C}h_2 \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Portanto, conforme (1.15), as subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ são (a menos de classes de conjugação):

- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0) = \Big(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$
- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1) = \Big((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$
- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2) = \Big((\mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$
- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2') = \Big((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$
- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_3) = \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$

Notemos que $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0)$ é a **subálgebra de Borel natural** e $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_3)$ é a **subálgebra de Borel canônica** de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$. No Capítulo 4 utilizaremos a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2')$ e encontraremos o módulo de Wakimoto Intermediário associado a ela.

Considerando

$$\overline{\mathfrak{b}}_r = \Big(\mathfrak{n}^+(r) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{n}_r^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]\Big) \oplus \Big(((\mathfrak{n}_r^-) \oplus \mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big)$$

temos que $\widehat{\mathfrak{b}}_r = \overline{\mathfrak{b}}_r \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ é uma subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}$ para qualquer $0 \leq r \leq n$ (3.9).

A subálgebra de Borel afim $\widehat{\mathfrak{b}}_r$, com $0 \leq r \leq n$, está em correspondência com a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_r$ de $\mathfrak{g}$ cujo fator de Levi redutivo é $\mathfrak{l}_r \cong \mathfrak{sl}(r+1,\mathbb{C}) + \mathfrak{h}$. Consequentemente, em $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$, temos que $\widehat{\mathfrak{b}}_0 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0)$, $\widehat{\mathfrak{b}}_1 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1)$, $\widehat{\mathfrak{b}}_2 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2)$ e $\widehat{\mathfrak{b}}_3 \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{p}_3)$.

Observamos que a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2')$ parametrizada por $\mathfrak{p}_2'$ e $X = \{1,3\}$ não foi descrita aqui. Observamos que $X = \emptyset$ equivale ao caso $r = 0$, $X = \{1\}$ equivale ao caso $r = 1$, $X = \{1,2\}$ equivale ao caso $r = 2$ e $X = I$ equivale ao caso $r = 3 = n$.

Podemos descrever explicitamente as partições fechadas do sistema de raízes $\widehat{\Delta}$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ equivalentes a cada subálgebra de Borel afim, descritas anteriormente. São elas:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_0} &= \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_+, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{m\delta \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \ , \\
\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_1} &= \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_1\}, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_1\} \cup \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \{\alpha_1, -\alpha_1\}, m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{m\delta \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \ , \\
\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_2} &= \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2\}, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2\} \cup \\
&\quad \cup \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1-\alpha_2\}, m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{m\delta \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \ , \\
\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_2'} &= \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\}, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_1, \alpha_3\} \cup \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_3\}, m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \\
&\quad \cup \{m\delta \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \ , \\
\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_3} &= \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta, m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \Delta_+ \cup \{m\delta \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\}.
\end{aligned}$$

Analisando a descrição dos conjuntos relacionados acima podemos observar que: partindo de $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_0}$ $(X = \emptyset)$ podemos construir $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_1}$ $(X = \{1\})$ excluindo as raízes $\alpha_1 + m\delta$ com $m \in \mathbb{Z}_{<0}$ das raízes reais e incluindo as raízes $-\alpha_1 + m\delta$ com $m \in \mathbb{Z}_{>0}$; partindo de $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_0}$ $(X = \emptyset)$ podemos construir $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_2}$ $(X = \{1,2\})$ excluindo as raízes $\alpha_1 + m\delta$, $\alpha_2 + m\delta$, $\alpha_1 + \alpha_2 + m\delta$, com $m \in \mathbb{Z}_{<0}$, das raízes reais e incluindo as raízes $-\alpha_1 + m\delta$, $-\alpha_2 + m\delta$, $-\alpha_1 - \alpha_2 + m\delta$ com $m \in \mathbb{Z}_{>0}$; partindo de $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_0}$ $(X = \emptyset)$ podemos construir $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_2'}$ $(X = \{1,3\})$ excluindo as raízes $\alpha_1 + m\delta$, $\alpha_3 + m\delta$, com $m \in \mathbb{Z}_{<0}$, das raízes reais e incluindo as raízes $-\alpha_1 + m\delta$, $-\alpha_3 + m\delta$ com $m \in \mathbb{Z}_{>0}$; partindo de $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_0}$ $(X = \emptyset)$ podemos construir $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_3}$ $(X = \{1,2,3\} = I)$ excluindo todas as raízes $\alpha + m\delta$, com $\alpha \in \Delta_+$ e $m \in \mathbb{Z}_{<0}$, das raízes reais e incluindo todas as raízes $-\alpha + m\delta$, com $\alpha \in \Delta_+$ e $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.

De acordo com [CF04] os módulos de Wakimoto Intermediários $W_{n,r}(\lambda,\gamma)$ são parametrizados por $0 \leq r \leq n$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Se $r = n$ esta construção coincide com a realização do tipo bóson dos módulos de Wakimoto de B. Feigin e E. Frenkel em [FF88, FF90b]. Por outro lado, quando $r = 0$ a representação obtida fornece uma realização no Espaço de Fock descrita no trabalho de B. Cox [Cox05].

Em [Cox05], B. Cox considera $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, o sistema de raízes $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ e define os geradores $a_{ij}(m)$ e $a^*_{ij}(m)$ da álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$, de maneira que $a_{ij}(m)$ pode ser pensado como $a_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}(m)$ e $a^*_{ij}(m)$ pode ser pensado como $a^*_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}(m)$. Por outro lado, em [FF88] a notação utilizada para os geradores da álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$ é a seguinte: $a_{ij,m} = a_{-(\alpha_i + \cdots + \alpha_j),m}$ e $a^*_{ij,m} = a^*_{-(\alpha_i + \cdots + \alpha_j),m}$, visto que na construção dos módulos de Wakimoto de B. Feigin e E. Frenkel, eles consideram o módulo de Verma contragradiente, ao invés do módulo de Verma clássico, daí a presença do sinal negativo. Observando [CF04] percebemos que a notação utilizada para os geradores da álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$, é mesma utilizada em [FF88, FF90b], isto é, $a_{ij,m} = a_{(\alpha_i + \cdots + \alpha_j),m}$ e $a^*_{ij,m} =$

$a^*_{(\alpha_i+\cdots+\alpha_j),m}$, onde $1 \leq i \leq j \leq n$. Essa observação é importante no entendimento da construção dos módulos de Wakimoto Intermediários $W_{n,r}(\lambda,\gamma)$.

Retornando ao caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, observaremos nos casos $r = 0, 1, 2$ e 3, como são definidas as ações dos operadores $a_{ij,m}$ e $a^*_{ij,m}$. Sabemos que a álgebra de Heisenberg de dimensão infinita $\widehat{\mathfrak{a}}$ com geradores $a_{ij,m}$, $a^*_{ij,m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, e $\mathbf{1}$, sujeita as relações:

1. $[a_{ij,m}, a_{kl,n}] = [a^*_{ij,m}, a^*_{kl,n}] = 0$,

2. $[a_{ij,m}, a^*_{kl,n}] = \delta_{i,k}\delta_{j,l}\delta_{m+n,0}\mathbf{1}$,

3. $[a_{ij,m}, \mathbf{1}] = [a^*_{ij,m}, \mathbf{1}] = 0$,

possui uma representação $\widetilde{\rho} : \widehat{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$ onde

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{ij,m} \mid i, j, m \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq j \leq n]$$

denota a álgebra sobre $\mathbb{C}$ gerada pelas indeterminadas $x_{ij,m}$ e $\widetilde{\rho}$ é definida por:

$$\widetilde{\rho}(a_{ij,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{ij,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \text{ e } j \leq r \\ x_{ij,m} & , \text{ caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a^*_{ij,m}) = \begin{cases} x_{ij,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \text{ e } j \leq r \\ -\partial/\partial x_{ij,-m} & , \text{ caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1$$

- $r = 0$:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = x_{11,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{12,m}) = x_{12,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{13,m}) = x_{13,m} \; ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = x_{22,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{23,m}) = x_{23,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a_{33,m}) = x_{33,m} \; ,$$

$$\widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = -\partial/\partial x_{11,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = -\partial/\partial x_{12,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{13,m}) = -\partial/\partial x_{13,-m} \; ,$$

$$\widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = -\partial/\partial x_{22,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{23,m}) = -\partial/\partial x_{23,-m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{33,m}) = -\partial/\partial x_{33,-m} \; ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

- $r = 1$:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{11,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = x_{12,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = -\partial/\partial x_{12,-m} \; ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{13,m}) = x_{13,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{13,m}) = -\partial/\partial x_{13,-m} \; ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = x_{22,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = -\partial/\partial x_{22,-m} \; ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{23,m}) = x_{23,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{23,m}) = -\partial/\partial x_{23,-m} \; ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{33,m}) = x_{33,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{33,m}) = -\partial/\partial x_{33,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

- $r = 2$:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{11,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{12,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{12,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = \begin{cases} x_{12,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{12,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{22,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{22,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = \begin{cases} x_{22,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{22,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{13,m}) = x_{13,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{13,m}) = -\partial/\partial x_{13,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{23,m}) = x_{23,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{23,m}) = -\partial/\partial x_{23,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{33,m}) = x_{33,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{33,m}) = -\partial/\partial x_{33,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

- $r = 3 = n$:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{11,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{12,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{12,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = \begin{cases} x_{12,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{12,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{13,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{13,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{13,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{13,m}) = \begin{cases} x_{13,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{13,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{22,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{22,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = \begin{cases} x_{22,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{22,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{23,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{23,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{23,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{23,m}) = \begin{cases} x_{23,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{23,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{33,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{33,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \\ x_{33,m} & , \text{ se } \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{33,m}) = \begin{cases} x_{33,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{33,-m} & , \text{ se } \quad m > 0 \end{cases} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

Analisando as definições dadas acima percebemos que a "forma de particionar" os operadores $a_{ij,m}$ e $a^*_{ij,m}$ está intimamente relacionada à construção da partição parabólica de $\widehat{\mathfrak{b}}_r$ para o r considerado:

X	r	raízes "excluídas" de Δ^+ na construção de $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_r}$	operadores $a_{ij,m}$ e $a^*_{ij,m}$ particionados
$\emptyset$	0	nenhuma	nenhum
$\{1\}$	1	α_1	$a_{11,m},\ a^*_{11,m}$
$\{1,2\}$	2	$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2$	$a_{11,m},\ a_{22,m},\ a_{12,m},\ a^*_{11,m},\ a^*_{22,m},\ a^*_{12,m}$
$\{1,2,3\}$	3	$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$	$a_{11,m},\ a_{22,m},\ a_{33,m},\ a_{12,m},\ a_{23,m},\ a_{13,m},$ $a^*_{11,m},\ a^*_{22,m},\ a^*_{33,m},\ a^*_{12,m},\ a^*_{23,m},\ a^*_{13,m}$

Considerando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ e $I = \{1,2,3\}$, como já comentamos anteriormente, o subconjunto $X = \{1,3\}$ não foi considerado na construção dos módulos de Wakimoto Intermediários. Também já observamos que o parâmetro $0 \leq r \leq 3$ está em correspondência com alguns subconjuntos $X \subseteq I$. Sendo assim, inspirados na tabela acima, podemos tratar o caso $X = \{1,3\}$ da seguinte maneira:

X	r	raízes "excluídas" de Δ^+ na construção de $\widehat{\Delta}_{\mathfrak{p}_r}$	operadores $a_{ij,m}$ e $a^*_{ij,m}$ particionados
$\{1,3\}$		$\alpha_1,\ \alpha_3$	$a_{11,m},\ a^*_{11,m},\ a_{33,m},\ a^*_{33,m}$

Em outras palavras, consideraremos:

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & ,\ \text{se} \quad m \geq 0 \\ x_{11,m} & ,\ \text{se} \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & ,\ \text{se} \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & ,\ \text{se} \quad m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = x_{12,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = -\partial/\partial x_{12,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{13,m}) = x_{13,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{13,m}) = -\partial/\partial x_{13,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = x_{22,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = -\partial/\partial x_{22,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{23,m}) = x_{23,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{23,m}) = -\partial/\partial x_{23,-m} \ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{33,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{33,m} & ,\ \text{se} \quad m \geq 0 \\ x_{33,m} & ,\ \text{se} \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{33,m}) = \begin{cases} x_{33,-m} & ,\ \text{se} \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{33,-m} & ,\ \text{se} \quad m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

Em [CF04] também foram feitas algumas convenções sobre as distribuições formais $a_{ij}(z)$ e $a^*_{ij}(z)$

que dependem do parâmetro $0 \leq r \leq n$. Para $j > r$:

$$a_{ij}(z)_- = 0 \quad , \quad a_{ij}(z)_+ = a_{ij}(z) \quad ,$$

$$a^*_{ij}(z)_- = a^*_{ij}(z) \quad , \quad a^*_{ij}(z)_+ = 0 \ .$$

Como queremos trocar o parâmetro r pelo parâmetro X devemos analisar os casos $r = 0, 1, 2$ e 3, para decidir como devemos convencionar ao considerar um subconjunto $X \subseteq I$. Relacionamos esses casos na tabela a seguir:

X	r	$j \in I$ tal que $j > r$	distribuições formais que satisfazem a convenção
$\emptyset$	0	$1, 2, 3$	$a_{11}(z)$, $a_{22}(z)$, $a_{33}(z)$, $a_{12}(z)$, $a_{23}(z)$, $a_{13}(z)$, $a^*_{11}(z)$, $a^*_{22}(z)$, $a^*_{33}(z)$, $a^*_{12}(z)$, $a^*_{23}(z)$, $a^*_{33}(z)$
$\{1\}$	1	$2, 3$	$a_{22}(z)$, $a_{33}(z)$, $a_{12}(z)$, $a_{23}(z)$, $a_{13}(z)$, $a^*_{22}(z)$, $a^*_{33}(z)$, $a^*_{12}(z)$, $a^*_{23}(z)$, $a^*_{33}(z)$
$\{1, 2\}$	2	3	$a_{33}(z)$, $a_{23}(z)$, $a_{13}(z)$, $a^*_{33}(z)$, $a^*_{23}(z)$, $a^*_{33}(z)$
$\{1, 2, 3\}$	3	nenhum	nenhuma

Substituindo a condição ($j \in I$ tal que $j > r$) por ($j \in I \setminus X$), podemos reescrever as convenções das distribuições formais $a_{ij}(z)$ e $a^*_{ij}(z)$, para os casos listados acima: $\forall j \in I \setminus X$ convencionaremos que

$$a_{ij}(z)_- = 0 \quad , \quad a_{ij}(z)_+ = a_{ij}(z) \quad ,$$

$$a^*_{ij}(z)_- = a^*_{ij}(z) \quad , \quad a^*_{ij}(z)_+ = 0 \ .$$

Considerando o caso $X = \{1, 3\}$, seguindo a lógica dos casos listados acima, precisamos desta convenção nas distribuições formais $a_{12}(z)$, $a_{13}(z)$, $a_{22}(z)$, $a_{23}(z)$, $a^*_{12}(z)$, $a^*_{13}(z)$, $a^*_{22}(z)$ e $a^*_{23}(z)$, para termos nestes casos campos quânticos. Dessa forma, a condição para utilizar as convenções no caso $X = \{1, 3\}$ deverá ser: se ($i \in I \setminus X$) ou ($j \in I \setminus X$) ou ($i \in \{1\}$ e $j \in \{3\}$).

As possibilidades de subconjuntos $X \subseteq I$ quando $I = \{1, 2, 3\}$ são $X = \emptyset$, $X = \{1\}$, $X = \{2\}$, $X = \{3\}$, $X = \{1, 2\}$, $X = \{2, 3\}$, $X = \{1, 3\}$ e $X = \{1, 2, 3\} = I$. Uma questão que surge naturalmente é: o que difere o subconjunto $X = \{1, 3\} \subset I$ dos outros subconjuntos? Dentre os subconjuntos listados acima existe um tipo onde todo elemento é consecutivo ao anterior, e existe um tipo onde pelo menos um elemento é não-consecutivo, por exemplo, $X = \{1, 3\}$. Pensando sobre isso, chegamos na seguinte definição:

Definição 3.7.1. Seja $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ uma base fixa de $\mathfrak{g}$. Considere o conjunto de índices $I = \{1, \cdots, n\}$ e um subconjunto ordenado $X \subseteq I$ tal que $X = \{s_0, \cdots, s_m\}$. O subconjunto X será chamado de **consecutivo** (ou do tipo 1) se $(X = \emptyset)$ ou ($m = 0$, isto é, X é um subconjunto unitário) ou (se $m \geq 1$ e $s_u = s_{u-1} + 1$, $\forall\ u = 1, \cdots, m$). O subconjunto ordenado $X = \{s_0, \ldots, s_m\}$, com $m \geq 1$, será chamado de **não-consecutivo** (ou do tipo 2) se $s_u \neq s_{u-1} + 1$ para pelo menos um índice $u = 1, \cdots, m$.

Exemplo 3.7.1. Considerando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ e $I = \{1, 2, 3\}$:

- consecutivos: $X = \emptyset$, $X = \{1\}$, $X = \{2\}$, $X = \{3\}$, $X = \{1, 2\}$, $X = \{2, 3\}$, $X = \{1, 2, 3\}$.
- não-consecutivos: $X = \{1, 3\}$.

Exemplo 3.7.2. Considerando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{C})$ e $I = \{1, 2, 3, 4\}$:

- consecutivos: $X = \emptyset$, $X = \{1\}$, $X = \{2\}$, $X = \{3\}$, $X = \{4\}$, $X = \{1, 2\}$, $X = \{2, 3\}$, $X = \{3, 4\}$, $X = \{1, 2, 3\}$, $X = \{2, 3, 4\}$, $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
- não-consecutivos: $X = \{1, 3\}$, $X = \{2, 4\}$, $X = \{1, 4\}$, $X = \{1, 2, 4\}$, $X = \{1, 3, 4\}$.

Podemos observar que um subconjunto não-consecutivo é uma união disjunta de subconjuntos consecutivos. A forma de expressar essa união disjunta não é única, por exemplo, $X = \{1, 2, 4\}$ pode ser $X = \{1\} \uplus \{2\} \uplus \{4\}$ ou $X = \{1, 2\} \uplus \{4\}$. Sempre vamos considerar o caso onde as separações do subconjunto X acontecem nos elementos não-consecutivos; no exemplo acima, vamos considerar o caso $X = \{1, 2\} \uplus \{4\}$.

Seja n um inteiro não-negativo. Consideremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ e $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ uma base de Δ. Seja $I = \{1, \cdots, n\}$ o conjunto de índices dos elementos da base Π e $X \subseteq I$ um subconjunto ordenado. Consideremos os geradores $a_{ij,m}$, $a^*_{ij,m}$, $\mathbf{1}$, da álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$, onde $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq j \leq n$. Podemos reescrever as relações (3.11) e (3.12) da seguinte maneira:

- X **consecutivo**:

$$\widetilde{\rho}(a_{ij,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{ij,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \quad \text{e} \quad i, j \in X \\ x_{ij,m} & , \text{ caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a^*_{ij,m}) = \begin{cases} x_{ij,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \quad \text{e} \quad i, j \in X \\ -\partial/\partial x_{ij,-m} & , \text{ caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

- X **não-consecutivo e** $X = X_1 \cup \cdots \cup X_t$ **(união disjunta), onde cada** X_u **é consecutivo**:

$$\widetilde{\rho}(a_{ij,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{ij,m} & , \text{ se } \quad m \geq 0 \quad \text{e} \quad (i,j \in X_1 \quad \text{ou} \quad \ldots \quad \text{ou} \quad i,j \in X_t) \\ x_{ij,m} & , \text{ caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a^*_{ij,m}) = \begin{cases} x_{ij,-m} & , \text{ se } \quad m \leq 0 \quad \text{e} \quad (i,j \in X_1 \quad \text{ou} \quad \ldots \quad \text{ou} \quad i,j \in X_t) \\ -\partial/\partial x_{ij,-m} & , \text{ caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{1}) = 1.$$

Devemos adotar as seguintes convenções para as distribuições formais $a_{ij}(z)$ e $a^*_{ij}(z)$, com $1 \leq i \leq j \leq n$:

- X **consecutivo**: se $(j \in I \setminus X)$ temos que:

$$a_{ij}(z)_- = 0 \quad , \quad a_{ij}(z)_+ = a_{ij}(z) \ ,$$

$$a^*_{ij}(z)_- = a^*_{ij}(z) \quad , \quad a^*_{ij}(z)_+ = 0.$$

- X **não-consecutivo e** $X = X_1 \cup \cdots \cup X_t$ **(união disjunta), onde cada** X_u **é consecutivo**: se $(i \in I \setminus X)$ ou $(j \in I \setminus X)$ ou $(i \in X_u$ e $j \in X_v$, com $u \neq v)$ temos que:

$$a_{ij}(z)_- = 0 \quad , \quad a_{ij}(z)_+ = a_{ij}(z) \ ,$$

$$a^*_{ij}(z)_- = a^*_{ij}(z) \quad , \quad a^*_{ij}(z)_+ = 0.$$

Todas essas constatações (Seção 3.7) fez com que acreditássemos que existiam novos módulos de Wakimoto Intermediários relacionados com as subálgebras de Borel não consideradas em [CF04]. No Capítulo 4, construiremos um novo módulo de Wakimoto Intermediário e a partir dele conjecturaremos a existência de outros novos módulos de Wakimoto Intermediários. Para isso utilizaremos uma realização geométrica (uma espécie de realização de campos livres, ou seja, uma representação cuja imagem está contida em uma álgebra de Weyl) descrita em [FKS19].

Capítulo 4

Construção explícita de um novo módulo de Wakimoto Intermediário sobre $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ a partir de uma realização geométrica $\pi : \widehat{\mathfrak{g}} \hookrightarrow \mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathbf{loc}}$

O principal objetivo desse capítulo é construir um novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário relacionado à subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}'_2)$ que foi apresentada no Capítulo 3, na Seção 3.7, e que não foi considerada na construção dos módulos de Wakimoto Intermediários em [CF04]. Para descrever esse novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-módulo utilizaremos uma realização geométrica apresentada em [FKS19] que está intimamente relacionada com módulos de Verma Imaginários generalizados. Após a descrição explícita desse novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-módulo, analisaremos algumas propriedades, verificando que de fato ele corresponde ao que se espera de um módulo de Wakimoto Intermediário. Chamamos esse novo módulo de **módulo de Wakimoto Imaginário generalizado**. Também apresentamos uma conjectura sobre a construção de novos módulos, utilizando a mesma técnica apresentada aqui. Por fim, baseados em [GKM+23] (trabalho do qual o doutorando autor desta tese fez parte, onde com outros pesquisadores foram investigadas propriedades relacionadas aos módulos de Verma Imaginários generalizados) apresentamos um critério de irredutibilidade para esse novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-módulo.

4.1 O mergulho de $\widehat{\mathfrak{g}}$ em $\mathcal{R}_{\mathbf{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$

Apresentaremos nessa seção uma realização geométrica apresentada em [FKS19], que será utilizada para a construção de novos módulos de Wakimoto Intermediários. Chamaremos esses novos módulos construídos neste capítulo de **módulos de Wakimoto Imaginários generalizados**, por conta da relação com os módulos de Wakimoto Intermediários e com a subálgebra parabólica natural (que contém a subálgebra de Borel natural).

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples complexa e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ (veja Capítulo 1, Seção 1.2). Sejam $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u})\}$ uma base de $\overline{\mathfrak{u}}$ e $\{x_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u})\}$ funções coordenadas lineares em $\overline{\mathfrak{u}}$ com respeito a esta base de $\overline{\mathfrak{u}}$, isto é, $x_\alpha(f_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$. Então o conjunto $\{f_\alpha \otimes t^m \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}), m \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base topológica de $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}}) = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}}$, e o conjunto $\{x_\alpha \otimes t^{-m-1}dt \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}), m \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base topológica dual de $\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \simeq (\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}})^*$.

Para $a \in \mathfrak{g}$ definimos uma distribuição formal $a(z) \in \widehat{\mathfrak{g}}[\![z^{\pm 1}]\!]$ por

$$a(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^{-m-1} \,, \tag{4.1}$$

onde $a_m = a \otimes t^m$ para $m \in \mathbb{Z}$.

Também podemos introduzir as distribuições formais $a_\alpha(z), a_\alpha^*(z) \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}[\![z^{\pm 1}]\!]$ por

$$a_\alpha(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{\alpha,m} z^{-m-1} \quad \text{e} \quad a_\alpha^*(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{\alpha,m}^* z^{-m} \,, \tag{4.2}$$

onde $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$ é a álgebra de Weyl com infinitos geradores, topologicamente gerada por

$$\{x_{\alpha,m} \,,\ \partial_{x_{\alpha,m}} \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}), m \in \mathbb{Z}\}$$

tal que $a_{\alpha,m} = \partial_{x_{\alpha,m}} = f_{\alpha,m} = f_\alpha \otimes t^m$ e $a_{\alpha,m}^* = x_{\alpha,-m} = x_\alpha \otimes t^{m-1}dt$, para $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$, $m \in \mathbb{Z}$ (veja Capítulo 1, Seção 1.4).

Denotamos por $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ (1.66) uma álgebra de Lie topológica construída a partir das escolhas de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{p}$, de acordo com [FKS19]. Essa álgebra de Lie topológica é essencial para a construção da realização geométrica citada anteriormente. Fizemos uma breve descrição de alguns passos da construção de $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ no Capítulo 1 na Subseção 1.4.1. Mais detalhes podem ser encontrados em [FKS19].

Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}} \subset \mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$ gerado pelos coeficientes de Fourier das formas

$$\operatorname{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) h(z) f(z) dz \quad \text{e}$$
$$\operatorname{Res}_{z=0} P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots)\ c\ f(z) dz\ ,$$

onde $P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots)$ é um polinômio diferencial em $a^*_\alpha(z)$ para $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$, $h \in \mathfrak{p}$ e $f(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$. Observamos que $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} = \big(\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\big) \oplus \mathbb{C}c$. Além disso, temos que $\mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}$ é uma álgebra de Lie topológica e induz uma estrutura natural de uma álgebra de Lie topológica em uma soma semidireta

$$\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}} = \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\text{op}}_{\leq 1,\text{loc}} \oplus \mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}.$$

Teorema 4.1.1 (V. Futorny, L. Křižka e P. Somberg [FKS19], Teorema 3.3)**.** *O mergulho de $\widehat{\mathfrak{g}}$ em $\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}$ é dado por*

$$\pi(a) \;=\; -\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{\alpha,m}} \left[\frac{\operatorname{ad}(u(x))e^{\operatorname{ad}(u(x))}}{e^{\operatorname{ad}(u(x))} - \operatorname{id}_{\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}}}} (e^{-\operatorname{ad}(u(x))}a)_{\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}}}\right]_{\alpha,m} + (e^{-\operatorname{ad}(u(x))}a)_{\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}} \quad ,$$

para todo $a \in \widehat{\mathfrak{g}}$, onde

$$u(x) \;=\; \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})}\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{\alpha,m} f_{\alpha,m} \tag{4.3}$$

e $[b]_{\alpha,m}$ é a (α,m)-ésima coordenada de $b \in \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}}$ com respeito a base topológica $\{f_{\alpha,m} \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}), m \in \mathbb{Z}\}$ de $\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}}$.

Demonstração. Segue do Teorema 4.1.2, o qual é uma reformulação do Teorema 4.1.1 utilizando o conceito das distribuições formais, fazendo com que este seja escrito de uma forma mais concisa. □

Denotemos por $\mathcal{P}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}(z)$ o espaço vetorial de todos os polinômios em $a^*_\alpha(z)$ para $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$, por $\mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}(z)$ o espaço vetorial de todos os polinômios diferenciais $a^*_\alpha(z)$ para $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$ e por $\mathcal{C}^{\mathfrak{g}}_{\text{loc}}(z)$ o espaço vetorial de todas as distribuições formais da forma $a(z)$ para $a \in \mathfrak{g}$. Definimos uma série de potências formal $u(z) \in \overline{\mathfrak{u}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{P}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}(z)$ por

$$u(z) \;=\; \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})} a^*_\alpha(z) f_\alpha. \tag{4.4}$$

Temos o seguinte teorema que é equivalente ao Teorema 4.1.1, reescrito utilizando a linguagem das distribuições formais:

Teorema 4.1.2 (V. Futorny, L. Křižka e P. Somberg [FKS19], Teorema 3.6)**.** *O mergulho de $\widehat{\mathfrak{g}}$ em $\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ é dado por $\pi(c) = c$ e para todo $a \in \mathfrak{g}$ temos que*

$$\begin{aligned}\pi(a(z)) &= -\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})} a_\alpha(z)\left[\frac{\mathrm{ad}(u(z))e^{\mathrm{ad}(u(z))}}{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}}(e^{-\mathrm{ad}(u(z))}(a))_{\overline{\mathfrak{u}}}\right]_\alpha + \\ &\quad +(e^{-\mathrm{ad}(u(z))}a(z))_{\mathfrak{p}} - \left(\frac{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}}{\mathrm{ad}(u(z))}\partial_z u(z), a\right)c \quad , \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde

$$u(z) = \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})} a^*_\alpha(z) f_\alpha \tag{4.6}$$

e $[b]_\alpha$ é a α-ésima coordenada de $b \in \overline{\mathfrak{u}}$ com respeito a base $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u})\}$ de $\overline{\mathfrak{u}}$. Em particular, para $a \in \overline{\mathfrak{u}}$ temos

$$\pi(a(z)) = -\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})} a_\alpha(z)\left[\frac{\mathrm{ad}(u(z))}{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}}(a)\right]_\alpha \tag{4.7}$$

e para $a \in \mathfrak{l}$ temos

$$\pi(a(z)) = \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})} a_\alpha(z)[\mathrm{ad}(u(z))(a)]_\alpha + a(z). \tag{4.8}$$

Demonstração. Descreveremos a ideia envolvida na demonstração deste teorema. Para maiores detalhes indicamos [FKS19].

Introduzimos:

$$D(a,z) = -\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})} a_\alpha(z)\left[\frac{\mathrm{ad}(u(z))e^{\mathrm{ad}(u(z))}}{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}}(e^{-\mathrm{ad}(u(z))}(a))_{\overline{\mathfrak{u}}}\right]_\alpha \quad , \tag{4.9}$$

$$A(a,z) = (e^{-\mathrm{ad}(u(z))}a(z))_{\mathfrak{p}} \quad , \tag{4.10}$$

$$C(a,z) = -\left(\frac{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}}{\mathrm{ad}(u(z))}\partial_z u(z), a\right)c\ . \tag{4.11}$$

Assim,

$$\pi(a(z)) = D(a,z) + A(a,z) + C(a,z). \tag{4.12}$$

Usando distribuições formais podemos reescrever as relações de comutação de $\widehat{\mathfrak{g}}$ da seguinte forma (2.23):

$$[a(z), b(w)] = [a,b](w)\delta(z-w) + \kappa(a,b)c\partial_w\delta(z-w) \quad , \quad \text{para } a, b \in \mathfrak{g}.$$

Para mostrar que $\pi : \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie precisamos verificar que $\pi\big([a(z), b(w)]\big) = [\pi(a(z)), \pi(b(w))]$, para todos $a, b \in \mathfrak{g}$. Em outras palavras, precisamos verificar as seguintes igualdades:

$$[D(a,z), D(b,w)] = D([a,b],w)\delta(z-w) \ , \tag{4.13}$$

$$[D(a,z), A(b,w)] + [A(a,z), D(b,w)] + [A(a,z), A(b,w)]_{\mathrm{n}} = A([a,b],w)\delta(z-w) \ , \tag{4.14}$$

$$[D(a,z), C(b,w)] + [C(a,z), D(b,w)] + [A(a,z), A(b,w)]_{\mathrm{c}} = C([a,b],w)\delta(z-w) + (a,b)c\partial_w\delta(z-w) \ , \tag{4.15}$$

para todos $a, b \in \mathfrak{g}$, onde

$$[A(a,z), A(b,w)]_{\mathrm{c}} = \big((e^{-\mathrm{ad}(u(z))}a)_{\mathfrak{p}} \ , \ (e^{-\mathrm{ad}(u(w))}b)_{\mathfrak{p}}\big) \ c \ \partial_w\delta(z-w) \ , \tag{4.16}$$

$$[A(a,z), A(b,w)]_{\mathrm{n}} = [(e^{-\mathrm{ad}(u(z))}a(w))_{\mathfrak{p}} \ , \ (e^{-\mathrm{ad}(u(w))}b(w))_{\mathfrak{p}}] \ \delta(z-w) \ . \tag{4.17}$$

Observamos que $[A(a,z), C(b,w)] = 0$, $[C(a,z), A(b,w)] = 0$ e $[C(a,z), C(b,w)] = 0$. Provando as igualdades acima, estamos mostrando que:

$$\pi([a(z), b(w)]) = [\pi(a(z)), \pi(b(w))] \tag{4.18}$$

para todos $a, b \in \mathfrak{g}$.

Em [FKS19], a igualdade (4.13) é demonstrada no Lema 3.11, a igualdade (4.14) é demonstrada no Lema 3.10 e a igualdade (4.15) é demonstrada no Lema 3.9. □

Utilizando o Teorema 4.1.2 podemos introduzir uma estrutura de $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo no espaço vetorial topológico $\mathrm{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V$, onde V é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo contínuo. Observamos que $\mathrm{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)$ foi definida no Capítulo 1 na Seção 1.4.

Teorema 4.1.3 (V. Futorny, L. Křižka e P. Somberg [FKS19], Teorema 3.14)**.** *Seja* (σ, V) *um* $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$*-módulo contínuo tal que* $\sigma(c) = k \cdot \mathrm{id}_V$ *para* $k \in \mathbb{C}$*. Então o espaço vetorial topológico* $\mathrm{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V$ *é um* $\widehat{\mathfrak{g}}$*-módulo contínuo de nível* k*.*

Demonstração. Descreveremos os principais passos envolvidos na demonstração deste teorema. Para maiores detalhes indicamos [FKS19]. Do Teorema 4.1.2 temos o homomorfismo injetor de álgebras de Lie topológicas $\pi : \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$. Dessa maneira, existe uma cópia de $\widehat{\mathfrak{g}}$ em $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$. Portanto, é suficiente mostrar que $\mathrm{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V$ é um $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$-módulo contínuo.

Em [FKS19], pelo Lema 3.13 temos que

$$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}(z)\Big(\mathrm{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)\Big) \subset \mathrm{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(z)\!) \ ,$$

onde $\mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}$ foi definido em (1.53).

Se V é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo contínuo e $\text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)$ é um $\mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$-módulo contínuo, obtemos que o produto tensorial completado $\text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}V$ é um $(\mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}})$-módulo contínuo. Dessa forma, $\text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}V$ é um $\mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}$-módulo contínuo, visto que $\mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}} \subset \mathcal{F}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$. Também podemos verificar que $\text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}V$ é um $\mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\text{op}}_{\leq 1,\text{loc}}$-módulo contínuo. Como $\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}} = \mathcal{A}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p},\text{op}}_{\leq 1,\text{loc}} \oplus \mathcal{J}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}$ (soma semi-direta) segue o resultado. □

Note que $\text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) = \text{Pol}\Big((\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}})^*\Big) \simeq S(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}})$ e $B = \{f_{\alpha,m} \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}), m \in \mathbb{Z}\}$ é uma base (topológica) de $\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}}$, onde $f_{\alpha,m} = f_\alpha \otimes t^m = \partial_{x_{\alpha,m}}$.

A álgebra simétrica $S(V)$ em um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{F}$ que contém V, e é, em algum sentido, minimal com essa propriedade. Se B é uma base de V, a álgebra simétrica $S(V)$ pode ser identificada, por meio de um isomorfismo canônico, com o anel de polinômios $\mathbb{F}[B]$, onde os elementos de B são as indeterminadas.

Portanto,

$$\text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \simeq S(\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}}) \simeq \mathbb{C}[\partial_{x_{\alpha,m}} \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}), m \in \mathbb{Z}].$$

Definição 4.1.1. Seja $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$ um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo tal que $\sigma(c) = k \cdot \text{id}_V$ para $k \in \mathbb{C}$. Então o **módulo de Verma Imaginário generalizado** no nível k é o $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo induzido

$$\mathbb{M}_{\sigma,k,\mathfrak{p}}(V) = \text{Ind}^{\widehat{\mathfrak{g}}}_{\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}}(V) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}})} V. \tag{4.19}$$

Existe uma relação entre o módulo de Verma Imaginário generalizado $\mathbb{M}_{\sigma,k,\mathfrak{p}}(V)$ e o espaço vetorial topológico $\text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V$ apresentada no seguinte teorema:

Teorema 4.1.4 (V. Futorny, L. Křižka e P. Somberg [FKS19], Teorema 3.15)**.** *Seja (σ, V) um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo contínuo tal que $\sigma(c) = k \cdot \text{id}_V$ para $k \in \mathbb{C}$. Então temos que*

$$\mathbb{M}_{\sigma,k,\mathfrak{p}}(V) \cong \text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V \tag{4.20}$$

como $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos contínuos.

Demonstração. Descreveremos a principal ideia envolvida na demonstração deste teorema. Para maiores detalhes indicamos [FKS19]. Do Teorema 4.1.3 obtemos um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo contínuo $\text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V$ de nível k para qualquer $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo (V, σ) tal que $\sigma(c) = k \cdot \text{id}_V$ para $k \in \mathbb{C}$. Utilizando o Teorema 4.1.2 construímos um homomorfismo φ de $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos contínuos:

$$\varphi : \mathbb{M}_{\sigma,k,\mathfrak{p}}(V) \to \text{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V. \tag{4.21}$$

Por fim, mostrando que a aplicação associada

$$\mathrm{gr}\ \varphi : \mathrm{gr}\ \mathbb{M}_{\sigma,k,\mathfrak{p}}(V) \to \mathrm{gr}\ \mathrm{Pol}\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V \tag{4.22}$$

de $\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}}$-módulos graduados é um isomorfismo, concluímos que φ é um isomorfismo. □

4.2 Módulos de Verma Imaginários generalizados para $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C})$

Consideremos a álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$, e a subálgebra de Cartan

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) \mid a_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\}.$$

Para $i = 1, 2, \cdots, n+1$ definimos $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ by $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})) = a_i$. Então o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$ é $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n+1\}$. Temos o conjunto de raízes simples $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, onde $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$. O subconjunto $\Sigma \subseteq \Pi$, $\Sigma = \{\alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ gera o subsistema de raízes Δ_Σ em $\mathfrak{h}^*$.

Associamos a Σ, a subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$, onde $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha\right)$ (fator de Levi redutivo) e $\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})} \mathfrak{g}_\alpha$ (nilradical). Observamos que em [FKS19], em particular, foi considerada a **subálgebra parabólica maximal** com o nilradical comutativo, mas podemos encontrar o mergulho do Teorema 4.1.2 para qualquer parabólica natural $\widehat{\mathfrak{p}}$.

Seja $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ uma base dos espaços de raízes no nilradical oposto $\overline{\mathfrak{u}}$ dada por

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base dos espaços de raízes no nilradical $\mathfrak{u}$ dada por

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 & 1_i^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A subálgebra de Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$ é o subespaço vetorial gerado por

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} I_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad ,$$

onde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ satisfaz $\text{tr}(A) = 0$.

Denotemos por $\{x_i \mid i = 1, 2, \cdots , n\}$ as funções de coordenadas lineares em $\overline{\mathfrak{u}}$ com respeito a base $\{f_i \mid i = 1, 2, \cdots , n\}$ do nilradical oposto $\overline{\mathfrak{u}}$. Então o conjunto $\{f_i \otimes t^m \mid m \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \cdots , n\}$ forma uma base topológica de $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}}) = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}}$ e o conjunto $\{x_i \otimes t^{-m-1}dt \mid \; m \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \cdots , n\}$ forma uma base topológica dual de $\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \simeq (\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\text{nat}})^*$. Denotemos por $x_{i,m} = x_i \otimes t^{-m-1}dt$ e $\partial_{x_{i,m}} = f_i \otimes t^m$ para $m \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, \cdots , n$. A álgebra de Weyl $\mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}$ é topologicamente gerada por $\{x_{i,m}, \partial_{x_{i,m}} \mid m \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \cdots , n\}$ com relações de comutação canônicas.

As distribuições formais $a_i(z), a^*_i(z) \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}})}[\![z^{\pm1}]\!]$ são definidas por

$$a_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{i,m}z^{-m-1} \quad \text{e} \quad a^*_i(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{i,m}z^{-m} \;, \tag{4.23}$$

onde $a_{i,m} = \partial_{x_{i,m}}$ e $a^*_{i,m} = x_{i,-m}$, para $i = 1, 2, \cdots , n$.

Seja $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$ um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo tal que $\sigma(c) = k \cdot \text{id}_V$ para $k \in \mathbb{C}$.

Teorema 4.2.1 (V. Futorny, L. Křižka e P. Somberg [FKS19], Teorema 4.1)**.** *O mergulho de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$ em $\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}$ é dado por*

1.

$$\pi(f_i(z)) = -a_i(z) \quad , \quad \textit{para } i = 1, 2, \cdots , n.$$

2.

$$\pi(c) = \sigma(c) \;,$$

$$\pi(h(z)) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} a_j(z)a^*_j(z) + \sigma(h(z)) \;,$$

$$\pi(h_A(z)) = -\sum_{r,s=1}^{n} a_{r,s}a_r(z)a^*_s(z)+\sigma(h_A(z)) \quad , \quad \textit{para toda } A = (a_{r,s}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \textit{ tal que } tr(A) = 0.$$

3.

$$\pi(e_i(z)) = \sum_{j=1}^{n} a_j(z)a^*_j(z)a^*_i(z)-\partial_z a^*_i(z)\sigma(c)+\sigma(e_i(z))+a^*_i(z)\sigma(h(z))-\sum_{j=1}^{n} a^*_j(z)\sigma(h_{(E_{ji}-(1/n)I_n\delta_{i,j})}(z)) \;,$$

para $i = 1, 2, \cdots , n$.

Demonstração. Descreveremos a principal ideia envolvida na demonstração deste teorema. Para maiores detalhes indicamos [FKS19]. Do Teorema 4.1.2 para $a \in \overline{\mathfrak{u}}$ temos que

$$\pi(a(z)) \;\; = \;\; -\sum_{i=1}^{n} a_i(z) \left[\frac{\text{ad}(u(z))}{e^{\text{ad}(u(z))} - \text{id}}(a)\right]_i . \tag{4.24}$$

Como $\text{ad}(u(z))(a) = 0$, temos que $\pi(a(z)) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(z)[a]_i$.

Similarmente, pelo Teorema 4.1.2, para $a \in \mathfrak{l}$ temos

$$\pi(a(z)) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(z)[\mathrm{ad}(u(z))(a)]_i + a(z). \tag{4.25}$$

Para $a \in \mathfrak{u}$ podemos utilizar o Teorema 4.1.2 e mostrar que

$$\pi(a(z)) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i(z)[(\mathrm{ad}(u(z)))^2(a)]_i + a(z) - \mathrm{ad}(u(z))(a(z)) - (\partial_z u(z), a)c. \tag{4.26}$$

O resultado segue de (4.24), (4.25) e (4.26). □

Podemos escrever explicitamente a ação dos geradores topológicos de $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$:

Teorema 4.2.2 (V. Futorny, L. Křižka e P. Somberg [FKS19], Teorema 4.2)**.** *O mergulho de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$ em $\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ é dado explicitamente por*

1. $$\pi(f_{i,m}) = -\partial_{x_{i,m}} \quad , \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots, n \text{ e } m \in \mathbb{Z}.$$

2. $$\pi(c) = \sigma(c) \ ,$$

$$\pi(h_m) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{j,m+p}} x_{j,p} + \sigma(h_m) \ ,$$

$$\pi(h_{A,m}) = -\sum_{r,s=1}^{n}\sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{r,s}\partial_{x_{r,m+p}} x_{s,p} + \sigma(h_{A,m}) \ , \ \text{com } A = (a_{r,s}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \text{ tal que } tr(A) = 0, m \in \mathbb{Z}.$$

3. $$\begin{aligned} \pi(e_{i,m}) \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{l,p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{j,m+l+p}} x_{i,p} x_{j,l} + m x_{i,-m}\sigma(c) + \sigma(e_{i,m}) + \sum_{p\in\mathbb{Z}} x_{i,p}\sigma(h_{m+p}) + \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n}\sum_{p\in\mathbb{Z}} x_{j,p}\sigma(h_{(E_{ji}-(1/n)I_n\delta_{i,j}),m+p}) \quad , \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots, n \text{ e } m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Demonstração. O resultado segue do Teorema 4.2.1 expandindo as correspondentes distribuições formais. □

4.3 Módulos de Wakimoto Intermediários construídos por Cox-Futorny [CF04]

Apresentamos no Capítulo 3 a construção dos módulos de Wakimoto Intermediários seguindo [CF04]. Os módulos de Wakimoto Intermediários $W_{n,r}(\lambda, \gamma)$ são basicamente representações de álgebras de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$, com um inteiro positivo fixo n. Estes módulos dependem de alguns parâmetros ($0 \leq r \leq n$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$ e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$) e temos que genericamente módulos do tipo Verma e módulos de Wakimoto Intermediários são isomorfos.

Por um lado, podemos definir um módulo de Wakimoto Intermediário baseado em [CF04]. Por outro lado, após análise e investigação, percebemos que podemos realizá-lo usando a realização geométrica apresentada em [FKS19], escolhendo a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ apropriada.

Em [CF04], os módulos de Wakimoto Intermediários são construídos a partir de uma classe de subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C})$. Se analisarmos, por exemplo, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, podemos definir uma subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}$ que não foi considerada na construção apresentada em [CF04]. Desta maneira, sabendo da conexão da realização geométrica de [FKS19] com os módulos de Wakimoto Intermediários, podemos encontrar esses módulos não considerados em [CF04], generalizando um pouco mais a construção.

Nas próximas seções analisaremos alguns casos particulares para melhor entender a conexão entre os módulos de Wakimoto Intermediários de [CF04] e a realização geométrica de [FKS19].

4.4 Caso $(n = 1, r = 0)$

Sejam $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ e $r = 0$. Consideremos a seguinte subálgebra de Borel:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{b}}_0 &= \overline{\mathfrak{b}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}\ , \text{ onde}\\
\overline{\mathfrak{b}}_0 &= \Big(\mathbb{C}E_{12} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathbb{C}h_1 \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) = \Big(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big)\ ,\\
\widehat{\mathfrak{h}} &= (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c\ ,
\end{aligned}$$

isto é, a subálgebra de Borel natural $\widehat{\mathfrak{b}}_0 = \widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

O módulo de Wakimoto Intermediário $W_{1,0}(\lambda,\gamma)$ neste caso, coincide com a realização de campos livres apresentada por B. Cox [Cox05], que é isomorfa a um quociente do módulo de Verma Imaginário generalizado. Precisamos encontrar o $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo (σ, V) para que a realização geométrica em [FKS19] coincida com o módulo de Wakimoto Intermediário $W_{1,0}(\lambda,\gamma)$.

Fixe $\mathbf{k} = \gamma^2 - 1$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Considere a álgebra de Heisenberg de dimensão infinita $\widehat{\mathfrak{a}}$ com geradores $a_{11,m}, a^*_{11,m}$ e $\mathbf{1}_{\widehat{\mathfrak{a}}}$ sujeitos as relações:

$$[a_{11,m}, a^*_{11,p}] = \delta_{m+p,0}\mathbf{1}_{\widehat{\mathfrak{a}}} \quad , \quad [a_{11,m}, \mathbf{1}_{\widehat{\mathfrak{a}}}] = [a^*_{11,m}, \mathbf{1}_{\widehat{\mathfrak{a}}}] = 0.$$

Esta álgebra $\widehat{\mathfrak{a}}$ tem uma representação $\widetilde{\rho} : \widehat{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$ definida em $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}]$ por

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = x_{11,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = -\partial_{x_{11,-m}} \quad , \quad \widetilde{\rho}(\mathbf{1}_{\widehat{\mathfrak{a}}}) = 1.$$

Considere também a álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ com geradores $b_{1,m}, \mathbf{1}_{\widehat{\mathfrak{b}}}$ satisfazendo:

$$[b_{1,m}, b_{1,p}] = m\mathfrak{B}_{11}\delta_{m+p,0}\mathbf{1}_{\widehat{\mathfrak{b}}} \quad , \quad [b_{1,m}, \mathbf{1}_{\widehat{\mathfrak{b}}}] = 0.$$

Esta álgebra $\widehat{\mathfrak{b}}$ tem uma representação $\rho_\lambda : \widehat{\mathfrak{b}} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}[\mathbf{y}]_\lambda)$ definida em $\mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[y_{1,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$ por

$$\rho_\lambda(b_{1,0}) = \lambda_1 \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,-m}) = \mathrm{e}_1 \cdot y_{1,m} \quad , \quad \rho_\lambda(b_{1,m}) = m\mathrm{e}_1 \cdot \partial_{y_{1,m}}.$$

Pelo Teorema 3.2.2 [CF04] temos uma representação $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}])$ definida por

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= \gamma^2 - 1 = \mathbf{k}\\
\rho(E_{21})(z) &= a_{11}(z)\\
\rho(h_1)(z) &= 2a_{11}(z)a_{11}^*(z) + b_1(z)\\
\rho(E_{12})(z) &= -a_{11}(z)a_{11}^*(z)a_{11}^*(z) + \partial_z a_{11}^*(z)\mathbf{k} - a_{11}^*(z)b_1(z)
\end{aligned}$$

onde $W_{1,0}(\lambda,\gamma) = \mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$ é o módulo de Wakimoto Intermediário para $(n=1, r=0)$.

Por outro lado, consideremos a realização geométrica $\pi : \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$, apresentada em [FKS19], definida por

$$\begin{aligned}
\pi(c) &= \sigma(c)\\
\pi(f(z)) &= -a(z)\\
\pi(h(z)) &= 2a(z)a^*(z) + \sigma(h(z))\\
\pi(e(z)) &= a(z)a^*(z)a^*(z) - \partial_z a^*(z)\sigma(c) + a^*(z)\sigma(h(z)) + \sigma(e(z))
\end{aligned}$$

tal que $\mathbb{M}_{\sigma,k,\mathfrak{b}}(V) \cong \mathbb{C}[\partial_{x_m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} V$ é um módulo de Verma Imaginário generalizado.

Sabemos que $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} = (\mathfrak{b} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))) \oplus \mathbb{C}c$. Então os geradores de $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$ são $\{h_s, e_s, c \mid s \in \mathbb{Z}\}$.

Consideremos $V = \mathbb{C}[y_{1,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$ e definimos $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$ por:

$$\sigma(h_s) = b_s \quad , \quad \sigma(c) = \mathbf{k} \quad , \quad \sigma(e_s) = 0.$$

Notamos que por conta das relações na álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ temos que (σ, V) é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo.

Para facilitar a visualização precisamos renomear as variáveis utilizadas na definição do módulo de Wakimoto Intermediário como segue: $x_{11} = x$ e $b_1 = b$. Observamos que se usarmos um automorfismo

φ_1 da álgebra de Weyl (utilizado na transformação de Fourier):

$$\varphi_1 : x_s \mapsto -\partial_{x_s} \quad , \quad \partial_{x_s} \mapsto x_s \quad \text{e} \quad \varphi_1^2 = -\text{id}$$

e considerarmos que, $\widetilde{\rho} : \widehat{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$ e $\rho_\lambda : \widehat{\mathfrak{b}} \longrightarrow \text{End}(\mathbb{C}[\mathbf{y}]_\lambda)$ definem

$$\rho = \widetilde{\rho} \otimes \rho_\lambda : \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}) \hookrightarrow \Big(\widehat{\mathfrak{a}} \otimes_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{b}}\Big) \longrightarrow \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\Big)$$

temos que

$$\varphi_1 \circ \rho = (\varphi_1 \circ \widetilde{\rho}) \otimes \rho_\lambda = \pi.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ \rho(c) &= \rho(c) = \mathbf{k} = \sigma(c) = \pi(c) \\
\varphi_1 \circ \rho(f_s) &= \varphi_1(x_s) = -\partial_{x_s} = \pi(f_s) \\
\varphi_1 \circ \rho(h_s) &= -2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_1(x_{k+s})\varphi_1(\partial_{x_k}) + b_s = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{k+s}} x_k + b_s = \pi(h_s) \\
\varphi_1 \circ \rho(e_s) &= -\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \varphi_1(x_{k+l+s})\varphi_1(\partial_{x_k})\varphi_1(\partial_{x_l}) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_1(\partial_{x_k}) b_{k+s} + s\ \varphi_1(\partial_{x_{-s}})\varphi_1(\mathbf{k}) \\
&= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{k+l+s}} x_k x_l + \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k b_{k+s} + s\ x_{-s}\mathbf{k} = \pi(e_s)
\end{aligned}$$

4.5 Caso $(n = 2, r = 0)$

Esse caso, é bem semelhante ao caso anterior (Seção 4.4), mas é necessário para perceber que existe um padrão na construção utilizando a realização geométrica.

Sejam $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ e $r = 0$. Consideremos a seguinte subálgebra de Borel:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{b}_0} &= \overline{\mathfrak{b}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}\ ,\ \text{onde} \\
\overline{\mathfrak{b}}_0 &= \Big((\mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}E_{13}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \\
&= \Big(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big)\ , \\
\widehat{\mathfrak{h}} &= (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c\ ,
\end{aligned}$$

isto é, a subálgebra de Borel natural $\widehat{\mathfrak{b}_0} = \widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}$.

Primeiramente, precisamos descrever a realização geométrica π para $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ apresentada em [FKS19]. Consideremos a base $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ e $\Sigma = \{\alpha_2\}$. Desta maneira definimos a subálgebra parabólica

$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$, onde $\mathfrak{l} = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}E_{32}$ e $\mathfrak{u} = \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{13}$.

Então, $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$ é gerada pelos elementos $\{E_{23,m}, E_{32,m}, E_{12,m}, E_{13,m}, h_{1,m}, h_{2,m}, c \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Dessa forma, precisamos encontrar $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$, isto é, um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo V.

Usando a linguagem das distribuições formais temos:

$$\begin{aligned}
\pi(c) &= \sigma(c)\\
\pi(E_{21})(z) &= -a_1(z)\\
\pi(E_{31})(z) &= -a_2(z)\\
\pi(h_1)(z) &= 2a_1(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z) + \sigma(h_1)(z)\\
\pi(h_2)(z) &= -a_1(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z) + \sigma(h_2)(z)\\
\pi(h)(z) &= \pi(h_1)(z) + \tfrac{1}{2}\pi(h_2)(z) \; = \tfrac{3}{2}a_1(z)a_1^*(z) + \tfrac{3}{2}a_2(z)a_2^*(z) + \sigma(h_1)(z) + \tfrac{1}{2}\sigma(h_2)(z)\\
\pi(E_{32})(z) &= -a_2(z)a_1^*(z) + \sigma(E_{32})(z)\\
\pi(E_{23})(z) &= -a_1(z)a_2^*(z) + \sigma(E_{23})(z)\\
\pi(E_{12})(z) &= a_1(z)a_1^*(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_1^*(z) - \partial_z a_1^*(z)\sigma(c) +\\
&\quad -a_2^*(z)\sigma(E_{32})(z) + a_1^*(z)\sigma(h_1)(z) + \sigma(E_{12})(z)\\
\pi(E_{13})(z) &= a_1(z)a_1^*(z)a_2^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_2^*(z) - \partial_z a_2^*(z)\sigma(c) +\\
&\quad -a_1^*(z)\sigma(E_{23})(z) + a_2^*(z)\sigma(h_1)(z) + a_2^*(z)\sigma(h_2)(z) + \sigma(E_{13})(z)
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2.2 [CF04] temos a representação ρ:

$$\begin{aligned}
\rho(c) &= \gamma^2 - 1 = \mathbf{k}\\
\rho(F_1)(z) = \rho(E_{32})(z) &= a_{11}(z) + a_{12}(z)a_{22}^*(z)\\
\rho(F_2)(z) = \rho(E_{21})(z) &= a_{22}(z)\\
[\rho(F_1)(z), \rho(F_2)(w)] &= [\rho(E_{32})(z), \rho(E_{21})(w)] = \rho(E_{31})(w)\delta(z-w) = \rho(F_3)(w)\delta(z-w)\\
\rho(F_3)(z) = \rho(E_{31})(z) &= -a_{12}(z)\\
\rho(H_1')(z) = \rho(H_2)(z) &= 2a_{22}(z)a_{22}^*(z) + a_{12}(z)a_{12}^*(z) - a_{11}(z)a_{11}^*(z) + b_2(z)\\
\rho(H_2')(z) = \rho(H_1)(z) &= 2a_{11}(z)a_{11}^*(z) + a_{12}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}(z)a_{22}^*(z) + b_1(z)\\
\rho(H_1')(z) + \tfrac{1}{2}\rho(H_2')(z) &= \tfrac{3}{2}a_{22}(z)a_{22}^*(z) + \tfrac{3}{2}a_{12}(z)a_{12}^*(z) + b_2(z) + \tfrac{1}{2}b_1(z)\\
\rho(E_1)(z) = \rho(E_{23})(z) &= -a_{11}(z)a_{11}^*(z)a_{11}^*(z) + a_{22}(z)a_{12}^*(z) - a_{11}^*(z)b_1(z) + \mathbf{k}\partial_z a_{11}^*(z)\\
\rho(E_2)(z) = \rho(E_{12})(z) &= a_{11}(z)a_{11}^*(z)a_{22}^*(z) - a_{12}(z)a_{12}^*(z)a_{22}^*(z) - a_{22}(z)a_{22}^*(z)a_{22}^*(z) +\\
&\quad -a_{11}(z)a_{12}^*(z) - a_{22}^*(z)b_2(z) + \mathbf{k}\partial_z a_{22}^*(z)\\
[\rho(E_1)(z), \rho(E_2)(w)] &= [\rho(E_{23})(z), \rho(E_{12})(w)] = -\rho(E_{13})(w)\delta(z-w) = \rho(E_3)(w)\delta(z-w)\\
\rho(E_3)(z) = -\rho(E_{13})(z) &= -a_{11}(z)a_{11}^*(z)a_{11}^*(z)a_{22}^*(z) + a_{12}(z)a_{12}^*(z)a_{12}^*(z) + a_{22}(z)a_{22}^*(z)a_{12}^*(z) +\\
&\quad +a_{11}(z)a_{12}^*(z)a_{11}^*(z) - a_{22}^*(z)a_{11}^*(z)b_1(z) + a_{12}^*(z)b_1(z) + a_{12}^*(z)b_2(z) +\\
&\quad -\mathbf{k}\partial_z a_{12}^*(z) + \mathbf{k}a_{22}^*(z)\partial_z a_{11}^*(z)
\end{aligned}$$

Em resumo, na realização geométrica π escolhemos $\Sigma = \{\alpha_2\}$, isto é, consideramos a tripla

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \langle E_{23}, E_{32}, h_2\rangle$, definimos a subálgebra parabólica $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$ com geradores

$$\{E_{23,m}\ ,\ E_{32,m}\ ,\ E_{12,m}\ ,\ E_{13,m}\ ,\ h_{1,m}\ ,\ h_{2,m}\ ,\ c \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

e definimos uma representação $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$, isto é, definimos um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo V. Temos que

$$\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V \cong \mathbb{C}[\partial_{x_{1,m}}\ ,\ \partial_{x_{2,m}} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} V$$

tal que $(\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V\ ,\ \pi)$ é uma $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$-representação.

Por outro lado, no módulo de Wakimoto Intermediário $W_{2,0}(\lambda,\gamma)$ sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ temos $(\mathbb{C}[\mathbf{x}], \widetilde{\rho})$, com $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{11,m}\ ,\ x_{12,m}\ ,\ x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}]$, $(\mathbb{C}[\mathbf{y}], \rho_\lambda)$, com $\mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[y_{1,m}\ ,\ y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$ e $(W_{2,0}(\lambda,\gamma) = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\ ,\ \rho)$, onde $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}])$.

Agora, precisamos escolher o $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo V, isto é, a representação $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$, tal que

$$(\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V\ ,\ \pi) \cong (W_{2,0}(\lambda,\gamma) = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\ ,\ \rho).$$

Sabemos que $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}}$, onde $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} \cong \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}) + \widehat{\mathfrak{h}}$. Então consideraremos:

$$V = \mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m}, y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] = W_{1,0}(\lambda,\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\ ,$$

onde

$$W_{1,0}(\lambda,\gamma) = \mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$$

é o módulo de Wakimoto Intermediário no caso $(n = 1, r = 0)$ sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, e σ é definido por:

$$\begin{aligned}
\sigma(c) &= \mathbf{k} = \gamma^2 - 1\\
\sigma(E_{32})(z) &= a_{11}(z)\\
\sigma(E_{23})(z) &= -a_{11}(z)a_{11}^*(z)a_{11}^*(z) - a_{11}^*(z)b_1(z) + \mathbf{k}\partial_z a_{11}^*(z)\\
\sigma(h_2)(z) &= 2a_{11}(z)a_{11}^*(z) + b_1(z)\\
\sigma(h_1)(z) &= -a_{11}(z)a_{11}^*(z) + b_2(z)\\
\sigma(E_{12})(z) &= 0\\
\sigma(E_{13})(z) &= 0
\end{aligned}$$

Temos que (σ, V) é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo, tal que a matriz $\mathfrak{B}$ definida em [CF04], utilizada na definição de $b_1(z)$ e $b_2(z)$, considerando o caso $(n = 2, r = 0)$ é a seguinte:

$$\mathfrak{B} = \gamma^2 A_2 - A_2 = (\gamma^2 - 1)A_2 = \mathbf{k}A_2 = \begin{pmatrix} 2\mathbf{k} & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & 2\mathbf{k} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{onde} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma(c) = \mathbf{k} = \gamma^2 - 1 \quad , \quad \mathfrak{B}_{11} = 2\mathbf{k} \quad , \quad \mathfrak{B}_{22} = 2\mathbf{k} \quad , \quad \mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{B}_{21} = -\mathbf{k}.$$

Inserindo o $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo (σ, V) em $\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V$ temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V &\cong \mathbb{C}[\partial_{x_{1,m}} \, , \, \partial_{x_{2,m}} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} V \\ &= \mathbb{C}[x_{0,m} \, , \, \partial_{x_{1,m}} \, , \, \partial_{x_{2,m}} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m} \, , \, y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] \end{aligned}$$

com $\pi : \widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C}) \to \mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$.

Para comparar a realização geométrica $(\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C}), \pi)$ e o módulo de Wakimoto Intermediário $(n = 2, r = 0, \rho)$, é suficiente observar que:

- Renomeando as variáveis $x_{11} = x_0, x_{12} = x_2$ e $x_{22} = x_1$ temos que

$$W_{2,0}(\lambda, \gamma) = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[x_{0,m} \, , \, x_{1,m} \, , \, x_{2,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m} \, , \, y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*].$$

- Em π consideramos o $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo (σ, V) onde $V = W_{1,0}(\lambda, \gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$.

- Utilizamos o automorfismo φ_1 da álgebra de Weyl $\widehat{\mathfrak{a}}$ utilizado na transformação de Fourier

$$\begin{aligned} x_{22,m} = x_{1,m} &\mapsto -\partial_{x_{1,m}} \quad , \\ \partial/\partial x_{22,m} = \partial_{x_{1,m}} &\mapsto x_{1,m} \quad , \\ x_{12,m} = x_{2,m} &\mapsto \partial_{x_{2,m}} \quad , \\ \partial/\partial x_{12,m} = \partial_{x_{2,m}} &\mapsto -x_{2,m}. \end{aligned}$$

Por conta de $\widetilde{\rho} : \widehat{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$ e $\rho_\lambda : \widehat{\mathfrak{b}} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}[\mathbf{y}]_\lambda)$ definimos $\rho = \widetilde{\rho} \otimes \rho_\lambda : \widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C}) \hookrightarrow \Big(\widehat{\mathfrak{a}} \otimes_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{b}}\Big) \longrightarrow \mathfrak{gl}\Big(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\Big)$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi_1(a_{11}(z)) = a_0(z) \quad &, \quad \varphi_1(a^*_{11}(z)) = a^*_0(z) \\ \varphi_1(a_{12}(z)) = a_2(z) \quad &, \quad \varphi_1(a^*_{12}(z)) = a^*_2(z) \\ \varphi_1(a_{22}(z)) = -a_1(z) \quad &, \quad \varphi_1(a^*_{22}(z)) = -a^*_1(z) \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\varphi_1(a_{12}(z)) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_1(a_{12,m})z^{-m-1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_1(x_{12,m})z^{-m-1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_1(x_{2,m})z^{-m-1} = \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{2,m}} z^{-m-1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{2,m} z^{-m-1} = a_2(z) \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(a^*_{22}(z)) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_1(a^*_{22,m})z^{-m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_1(-\partial/\partial x_{22,-m})z^{-m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} -\varphi_1(\partial_{x_{1,-m}})z^{-m} = \\ &= -\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{1,-m} z^{-m} = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{1,m} z^{-m} = -a^*_1(z) \quad ,\end{aligned}$$

e os outros casos seguem de maneira análoga.

Finalmente temos que

$$\varphi_1 \circ \rho = (\varphi_1 \circ \widetilde{\rho}) \otimes \rho_\lambda = \pi.$$

4.6 Caso $(n = 2, r = 1)$

Sejam $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$ e $r = 1$. Consideremos a subálgebra de Borel:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{b}_1} &= \overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \text{ , onde} \\ \overline{\mathfrak{b}}_1 &= \Big((\mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}E_{13}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{21} \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}E_{12} \text{ ,} \\ \widehat{\mathfrak{h}} &= (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c.\end{aligned}$$

Este caso é também similar aos casos anteriores (Seções 4.4 e 4.5), e ele auxiliará no entendimento e análise de um padrão na construção de um módulo de Wakimoto Intermediário a partir da realização geométrica. Para definir a subálgebra de Borel acima escolhemos $\Sigma = \{\alpha_1\}$. Observamos que de maneira similar podemos considerar $\Sigma = \{\alpha_2\}$ e definir:

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 = \Big((\mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{13}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\Big) \oplus \Big((\mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}E_{32} \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}E_{23}.$$

Usamos $\widehat{\mathfrak{b}_1}$ na construção do módulo de Wakimoto Intermediário $W_{2,1}(\lambda, \gamma)$.

Precisamos encontrar o $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo (σ, V) para a realização geométrica coincidir com o módulo de Wakimoto Intermediário $W_{2,1}(\lambda, \gamma)$.

Em resumo, na realização geométrica escolhemos $\Sigma = \{\alpha_2\}$, isto é, definimos a tripla $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) =$

$\langle E_{23}, E_{32}, h_2\rangle$. Definimos também a subálgebra $\widehat{\mathfrak{p}}_{\rm nat}$ com geradores

$$\{E_{23,m}\ ,\ E_{32,m}\ ,\ E_{12,m}\ ,\ E_{13,m}\ ,\ h_{1,m}\ ,\ h_{2,m}\ ,\ c \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Temos que $\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V \cong \mathbb{C}[\partial_{x_{1,m}}\ ,\ \partial_{x_{2,m}} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} V$ onde V é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\rm nat}$-módulo e $(\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V\ ,\ \pi)$ é uma $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$-representação.

Por outro lado, no módulo de Wakimoto Intermediário $W_{2,1}(\lambda,\gamma)$ sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C})$ temos que:

- $(\mathbb{C}[\mathbf{x}]\ ,\ \widetilde{\rho})$, onde $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{11,m}\ ,\ x_{12,m}\ ,\ x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}]$

$$\widetilde{\rho}(a_{11,m}) = \begin{cases} \partial/\partial x_{11,m} & ,\ \text{se} \quad m \geq 0 \\ x_{11,m} & ,\ \text{se} \quad m < 0 \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{11,m}) = \begin{cases} x_{11,-m} & ,\ \text{se} \quad m \leq 0 \\ -\partial/\partial x_{11,-m} & ,\ \text{se} \quad m > 0 \end{cases} ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{12,m}) = x_{12,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{12,m}) = -\partial/\partial x_{12,-m}\ ,$$

$$\widetilde{\rho}(a_{22,m}) = x_{22,m} \quad , \quad \widetilde{\rho}(a^*_{22,m}) = -\partial/\partial x_{22,-m}.$$

- $(\mathbb{C}[\mathbf{y}]\ ,\ \rho_\lambda)$, onde $\mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[y_{1,m}\ ,\ y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$.
- $(W_{2,1}(\lambda,\gamma) = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\ ,\ \rho)$, onde $\rho : \widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}])$.

Portanto, precisamos escolher o $\widehat{\mathfrak{p}}_{\rm nat}$-módulo V, isto é, a representação $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\rm nat} \to \mathfrak{gl}(V)$, tal que

$$(\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V\ ,\ \pi) \cong (W_{2,1}(\lambda,\gamma) = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]\ ,\ \rho).$$

Sabemos que $\widehat{\mathfrak{p}}_{\rm nat} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\rm nat} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\rm nat}$, onde $\widehat{\mathfrak{l}}_{\rm nat} \cong \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}) + \widehat{\mathfrak{h}}$. Consideraremos:

$$V = \mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m}, y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] = W_{1,1}(\lambda,\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\ ,$$

onde

$$W_{1,1}(\lambda,\gamma) = \mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$$

é o módulo de Wakimoto Intermediário no caso $(n = 1, r = 1)$ sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$, e σ é definido por:

$$\begin{aligned}
\sigma(c) &= \mathbf{k} \ = \ \gamma^2 - 2 \\
\sigma(E_{32})(z) &= a_{11}(z) \\
\sigma(E_{23})(z) &= - : a_{11}^*(z) a_{11}(z) a_{11}^*(z) : - a_{11}^*(z) b_1(z) + \mathbf{k} \partial_z a_{11}^*(z) \\
\sigma(h_2)(z) &= 2 : a_{11}(z) a_{11}^*(z) : + b_1(z) \\
\sigma(h_1)(z) &= - : a_{11}(z) a_{11}^*(z) : + b_2(z) \\
\sigma(E_{12})(z) &= 0 \\
\sigma(E_{13})(z) &= 0
\end{aligned}$$

Notemos que incluímos o produto normal ordenado em alguns lugares. Temos que (σ, V) é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo, onde a matriz $\mathfrak{B}$ definida em [CF04], utilizada na definição de $b_1(z)$ e $b_2(z)$ no caso $(n = 2, r = 1)$, é a seguinte:

$$\mathfrak{B} = \gamma^2 A_2 - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 & -\gamma^2 \\ -\gamma^2 & 2\gamma^2 - 3 \end{pmatrix} ,$$

onde

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma(c) = \mathbf{k} = \gamma^2 - 2 \quad , \quad \mathfrak{B}_{11} = 2\mathbf{k} + 4 \quad , \quad \mathfrak{B}_{22} = 2\mathbf{k} + 1 \quad , \quad \mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{B}_{21} = -\mathbf{k} - 2.$$

Construímos o $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$-módulo

$$\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V \cong \mathbb{C}[x_{0,m}, \partial_{x_{1,m}} \ , \ \partial_{x_{2,m}} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m}, y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$$

e finalmente, inserindo (σ, V) em $\pi : \widehat{\mathfrak{sl}}(3,\mathbb{C}) \to \mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\text{loc}}$ temos que

$$\begin{aligned}
\pi(c) &= \sigma(c) \;=\; \mathbf{k} \;=\; \gamma^2 - 2 \\
\pi(E_{21})(z) &= -a_1(z) \\
\pi(E_{31})(z) &= -a_2(z) \\
\pi(h_1)(z) &= 2a_1(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z) - :a_0(z)a_0^*(z): + b_2(z) \\
\pi(h_2)(z) &= 2:a_0(z)a_0^*(z): - a_1(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z) + b_1(z) \\
\pi(E_{32})(z) &= a_0(z) - a_2(z)a_1^*(z) \\
\pi(E_{23})(z) &= -:a_0^*(z)a_0(z)a_0^*(z): - a_1(z)a_2^*(z) - a_0^*(z)b_1(z) + \mathbf{k}\partial_z a_0^*(z) \\
\pi(E_{12})(z) &= a_1(z)a_1^*(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_1^*(z) - \mathbf{k}\partial_z a_1^*(z) + \\
&\quad -a_0(z)a_2^*(z) - :a_0(z)a_0^*(z): a_1^*(z) + a_1^*(z)b_2(z) \\
\pi(E_{13})(z) &= a_1(z)a_1^*(z)a_2^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_2^*(z) - \mathbf{k}\partial_z a_2^*(z) + \\
&\quad + :a_0^*(z)a_0(z)a_0^*(z): a_1^*(z) + a_0^*(z)a_1^*(z)b_1(z) - \mathbf{k}a_1^*(z)\partial_z a_0^*(z) + \\
&\quad + :a_0(z)a_0^*(z): a_2^*(z) + a_2^*(z)b_1(z) + a_2^*(z)b_2(z)
\end{aligned}$$

o qual é o módulo de Wakimoto Intermediário

$$W_{2,1}(\lambda,\gamma) = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[x_{11,m}\ ,\ x_{12,m}\ ,\ x_{22,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m}\ ,\ y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] \quad ,$$

fazendo as devidas identificações das variáveis ($x_{11} = x_0, x_{12} = x_2$ e $x_{22} = x_1$), tomando o automorfismo φ_1 da álgebra de Weyl $\widehat{\mathfrak{a}}$ utilizado na transformação de Fourier e considerando

$$\begin{aligned}
\varphi_1(a_{11}(z)) = a_0(z) \quad &, \quad \varphi_1(a_{11}^*(z)) = a_0^*(z) \quad , \\
\varphi_1(a_{12}(z)) = a_2(z) \quad &, \quad \varphi_1(a_{12}^*(z)) = a_2^*(z) \quad , \\
\varphi_1(a_{22}(z)) = -a_1(z) \quad &, \quad \varphi_1(a_{22}^*(z)) = -a_1^*(z).
\end{aligned}$$

4.7 Novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário

Agora, usaremos os casos descritos acima para construir um novo módulo que não foi considerado em [CF04]. Vamos construí-lo utilizando a realização geométrica π [FKS19] e o padrão encontrado na análise dos casos anteriores (Seções 4.4, 4.5 e 4.6).

Considere $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ $(n = 3)$ e a subálgebra de Borel:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{b}} &= \overline{\mathfrak{b}} \oplus \widehat{\mathfrak{h}}\ ,\ \text{onde} \\
\overline{\mathfrak{b}} &= \Big((\mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}E_{13} \oplus \mathbb{C}E_{24} \oplus \mathbb{C}E_{14}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \\
&\quad \oplus \Big((\mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{21} \oplus \mathbb{C}E_{34} \oplus \mathbb{C}E_{43} \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{34}\ , \\
\widehat{\mathfrak{h}} &= (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c.
\end{aligned}$$

Para definir a subálgebra de Borel descrita acima escolhemos $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_3\}$.

Queremos construir o módulo de Wakimoto Intermediário $W_{3,*}(\lambda, \gamma)$ relacionado a esta subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$. Em [CF04] tínhamos um parâmetro r na definição da classe de subálgebras de Borel que foram consideradas. Aqui estamos utilizando uma subálgebra de Borel que não está relacionada ao parâmetro r, e por esse motivo, inicialmente incluímos o símbolo $*$ na notação deste módulo.

Baseado nas construções apresentadas acima, encontraremos o $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo (σ, V) apropriado para que a realização geométrica coincida com o módulo de Wakimoto Intermediário $W_{3,*}(\lambda, \gamma)$ investigado.

Em resumo, na realização geométrica:

- Escolheremos $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_3\}$, isto é, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \langle E_{12}, E_{21}, h_1 \rangle \oplus \langle E_{34}, E_{43}, h_3 \rangle$.
- Definiremos a subálgebra parabólica $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$ com geradores

$$\{E_{12,m}\ ,\ E_{21,m}\ ,\ E_{34,m}\ ,\ E_{43,m}\ ,\ h_{1,m}\ ,\ h_{2,m}\ ,\ h_{3,m}\ ,\ E_{23,m}\ ,\ E_{13,m}\ ,\ E_{24,m}\ ,\ E_{14,m}\ ,\ c \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

- Encontraremos a representação $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$, isto é, definiremos um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo V.
- Teremos

$$\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V \cong \mathbb{C}[\partial_{x_{1,m}}\ ,\ \partial_{x_{2,m}}\ ,\ \partial_{x_{3,m}}\ ,\ \partial_{x_{4,m}} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} V\ ,$$

  onde $(\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V\ ,\ \pi)$ é um $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$-módulo.

Também precisaremos descrever $\pi : \widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ para a subálgebra parabólica definida por $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ usando o Teorema 4.1.2 [FKS19]. Em [FKS19] as fórmulas explícitas para $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ foram descritas para o caso $\Sigma = \{\alpha_2, \alpha_3\}$.

Como dito anteriormente, para utilizar a realização geométrica precisamos primeiramente encontrar um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo V, isto é, uma representação $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que

$$(\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*)) \otimes_{\mathbb{C}} V\ ,\ \pi) \cong (W_{3,*}(\lambda, \gamma) = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]).$$

Sabemos que $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}}$, onde $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} \cong (\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})) + \widehat{\mathfrak{h}}$. Então considere

$$V = \mathbb{C}[x_{11,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] = W_{1,1}(\lambda, \gamma) \otimes_{\mathbb{C}} W_{1,1}(\lambda', \gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]$$

$$\text{onde}\ ,\ W_{1,1}(\lambda, \gamma) = \mathbb{C}[x_{11,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\ ,$$

$$W_{1,1}(\lambda', \gamma) = \mathbb{C}[x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{3,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\ ,$$

são módulos de Wakimoto Intermediários no caso $(n=1, r=1)$ sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, definidos por α_1 e por α_3, respectivamente.

Consideraremos a matriz simétrica $\mathfrak{B}$, utilizada na definição de $b_1(z)$, $b_2(z)$ e $b_3(z)$, considerando o caso $n=3$:

$$\mathfrak{B} = \gamma^2 A_3 - 2E_{22} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2E_{22} = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 & -\gamma^2 & 0 \\ -\gamma^2 & 2\gamma^2-2 & -\gamma^2 \\ 0 & -\gamma^2 & 2\gamma^2 \end{pmatrix} \; ,$$

onde

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; ,$$

$$\sigma(c) = \mathbf{k} = \gamma^2 - 2 \; ,$$

$$\mathfrak{B}_{11} = 2\mathbf{k}+4 \quad , \quad \mathfrak{B}_{22} = 2\mathbf{k}+2 \quad , \quad \mathfrak{B}_{33} = 2\mathbf{k}+4$$

$$\mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{B}_{21} = -\mathbf{k}-2 \quad , \quad \mathfrak{B}_{23} = \mathfrak{B}_{32} = -\mathbf{k}-2 \quad , \quad \mathfrak{B}_{13} = \mathfrak{B}_{31} = 0.$$

Teorema 4.7.1. *Seja*

$$\begin{aligned} V &= W_{1,1}(\lambda,\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} W_{1,1}(\lambda',\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] \\ &= \mathbb{C}[x_{11,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] \; , \end{aligned}$$

onde $\gamma \in \mathbb{C}^*$, λ *e* λ' *são genéricos, e* $\lambda(c)$ *e* $\lambda'(c)$ *são não-nulos. Considere a subálgebra parabólica natural* $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\text{nat}}$*, onde* $\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} \cong (\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}) \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})) + \widehat{\mathfrak{h}}$*. Temos que* (V,σ) *é um* $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$*-módulo,* *onde* $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$ *é definida por:*

$$\begin{aligned}
\sigma(c) &= \mathbf{k} \;=\; \gamma^2 - 2 \\
\sigma(E_{21})(z) &= a_{11}(z) \\
\sigma(E_{12})(z) &= -:a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z): - a_{11}^*(z)b_1(z) + \mathbf{k}\partial_z a_{11}^*(z) \\
\sigma(h_1)(z) &= 2:a_{11}(z)a_{11}^*(z): + b_1(z) \\
\sigma(E_{43})(z) &= a_{33}(z) \\
\sigma(E_{34})(z) &= -:a_{33}^*(z)a_{33}(z)a_{33}^*(z): - a_{33}^*(z)b_3(z) + \mathbf{k}\partial_z a_{33}^*(z) \\
\sigma(h_3)(z) &= 2:a_{33}(z)a_{33}^*(z): + b_3(z) \\
\sigma(h_2)(z) &= -:a_{11}(z)a_{11}^*(z): - :a_{33}(z)a_{33}^*(z): + b_2(z) \\
\sigma(E_{23})(z) &= 0 \\
\sigma(E_{13})(z) &= 0 \\
\sigma(E_{24})(z) &= 0 \\
\sigma(E_{14})(z) &= 0
\end{aligned}$$

Demonstração. Vamos verificar que (V,σ) é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo calculando os colchetes. Observamos que $W_{1,1}(\lambda,\gamma)$ e $W_{1,1}(\lambda',\gamma)$ são módulos de Wakimoto Intermediários sobre a álgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ definidos por α_1 e α_3, respectivamente. Algumas das seguintes igualdades serão utilizadas nos cálculos:

$$\begin{aligned}
\partial_z\delta(z-w) &= -\partial_w\delta(z-w) \\
a_{ij}(z)\delta(z-w) &= a_{ij}(w)\delta(z-w) \\
a_{ij}^*(z)\delta(z-w) &= a_{ij}^*(w)\delta(z-w) \\
b_i(z)\delta(z-w) &= b_j(w)\delta(z-w) \\
[a_{ij}(z), a_{kl}^*(w)] &= \delta_{i,k}\delta_{j,l}\mathbf{1}\delta(z-w) \\
[b_i(z), b_j(w)] &= \mathfrak{B}_{ij}\partial_w\delta(z-w) \\
[a_{ij}(z), \partial_w a_{kl}^*(w)] &= \delta_{i,j}\delta_{j,l}\partial_w\delta(z-w) \\
a_{ij}^*(z)\partial_w\delta(z-w) &= a_{ij}^*(w)\partial_w\delta(z-w) + \Big(\partial_w a_{ij}^*(w)\Big)\delta(z-w) \\
[:a_{ij}(z)a_{ij}^*(z):\,,\; :a_{ij}(w)a_{ij}^*(w):] &= -\partial_w\delta(z-w)
\end{aligned}$$

Seguem os cálculos dos colchetes:

1. $[h_1, h_1] = 0$, $(h_1, h_1) = 2$,

$$\sigma([h_1(z), h_1(w)]) = 2\sigma(c)\partial_w\delta(z-w) = 2\mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_1)(z),\sigma(h_1)(w)] &= 4[: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, : a_{11}(w)a^*_{11}(w) :] + [b_1(z), b_1(w)]\\
&= -4\partial_w\delta(z-w) + \mathfrak{B}_{11}\partial_w\delta(z-w)\\
&= (\mathfrak{B}_{11}-4)\partial_w\delta(z-w)\\
&= 2\mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

2. $[h_3,h_3]=0$, $(h_3,h_3)=2$,

$$\sigma([h_3(z),h_3(w)]) = 2\sigma(c)\partial_w\delta(z-w) = 2\mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_3)(z),\sigma(h_3)(w)] &= 4[: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, : a_{33}(w)a^*_{33}(w) :] + [b_3(z), b_3(w)]\\
&= -4\partial_w\delta(z-w) + \mathfrak{B}_{33}\partial_w\delta(z-w)\\
&= (\mathfrak{B}_{33}-4)\partial_w\delta(z-w)\\
&= 2\mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

3. $[h_1,h_2]=0$, $(h_1,h_2)=-1$,

$$\sigma([h_1(z),h_2(w)]) = -\sigma(c)\partial_w\delta(z-w).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_1)(z),\sigma(h_2)(w)] &= -2[: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, : a_{11}(w)a^*_{11}(w) :] + [b_1(z), b_2(w)]\\
&= 2\partial_w\delta(z-w) + \mathfrak{B}_{12}\partial_w\delta(z-w)\\
&= (\mathfrak{B}_{12}+2)\partial_w\delta(z-w)\\
&= (-\mathbf{k}-2+2)\partial_w\delta(z-w)\\
&= -\mathbf{k}\partial_w\delta(z-w) = -\sigma(c)\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

4. $[h_2,h_3]=0$, $(h_2,h_3)=-1$,

$$\sigma([h_2(z),h_3(w)]) = -\sigma(c)\partial_w\delta(z-w).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_2)(z),\sigma(h_3)(w)] &= -2[: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, : a_{33}(w)a^*_{33}(w) :] + [b_2(z), b_3(w)]\\
&= 2\partial_w\delta(z-w) + \mathfrak{B}_{23}\partial_w\delta(z-w)\\
&= (\mathfrak{B}_{23}+2)\partial_w\delta(z-w)\\
&= (-\mathbf{k}-2+2)\partial_w\delta(z-w)\\
&= -\mathbf{k}\partial_w\delta(z-w) = -\sigma(c)\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

5. $[h_2, h_2] = 0$, $(h_2, h_2) = 2$,

$$\sigma([h_2(z), h_2(w)]) = 2\sigma(c)\partial_w\delta(z-w) = 2\mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\sigma(h_2)(z), \sigma(h_2)(w)] &= [: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, : a_{11}(w)a^*_{11}(w) :] + [: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, : a_{33}(w)a^*_{33}(w) :] + \\ &\quad +[b_2(z), b_2(w)] \\ &= -2\partial_w\delta(z-w) + \mathfrak{B}_{22}\partial_w\delta(z-w) \\ &= (\mathfrak{B}_{22} - 2)\partial_w\delta(z-w) \\ &= 2\mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).\end{aligned}$$

6. $[h_1, h_3] = 0$, $(h_1, h_3) = 0$,

$$\sigma([h_1(z), h_3(w)]) = 0.$$

Por outro lado,

$$[\sigma(h_1)(z), \sigma(h_3)(w)] = [b_1(z), b_3(w)] = \mathfrak{B}_{13}\partial_w\delta(z-w) = 0.$$

7. $[E_{21}, E_{21}] = 0$,

$$\sigma([E_{21}(z), E_{21}(w)]) = 0.$$

Por outro lado,

$$[\sigma(E_{21})(z), \sigma(E_{21})(w)] = [a_{11}(z), a_{11}(w)] = 0.$$

8. $[E_{43}, E_{43}] = 0$,

$$\sigma([E_{43}(z), E_{43}(w)]) = 0.$$

Por outro lado,

$$[\sigma(E_{43})(z), \sigma(E_{43})(w)] = [a_{33}(z), a_{33}(w)] = 0.$$

9. $[E_{12}, E_{34}] = 0$. Logo $\sigma([E_{12}(z), E_{34}(w)]) = 0$.

   Por outro lado,

$$[\sigma(E_{12})(z), \sigma(E_{34})(w)] = [a^*_{11}(z)b_1(z), a^*_{33}(w)b_3(w)] = \mathfrak{B}_{13}a^*_{11}(z)a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) = 0.$$

10. $[h_1, E_{23}] = [E_{11} - E_{22}, E_{23}] = -E_{23}$. Logo, $\sigma([h_1(z), E_{23}(w)]) = -\sigma(E_{23})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_1)(z), \sigma(E_{23})(w)] = 0$.

11. $[h_1, E_{13}] = [E_{11} - E_{22}, E_{13}] = E_{13}$. Logo, $\sigma([h_1(z), E_{13}(w)]) = \sigma(E_{13})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_1)(z), \sigma(E_{13})(w)] = 0$.

12. $[h_1, E_{24}] = [E_{11} - E_{22}, E_{24}] = -E_{24}$. Logo, $\sigma([h_1(z), E_{24}(w)]) = -\sigma(E_{24})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_1)(z), \sigma(E_{24})(w)] = 0$.

13. $[h_1, E_{14}] = [E_{11} - E_{22}, E_{14}] = E_{14}$. Logo, $\sigma([h_1(z), E_{14}(w)]) = \sigma(E_{14})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_1)(z), \sigma(E_{14})(w)] = 0$.

14. $[h_2, E_{23}] = [E_{22}-E_{33}, E_{23}] = E_{23}+E_{23} = 2E_{23}$. Logo, $\sigma([h_2(z), E_{23}(w)]) = 2\sigma(E_{23})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_2)(z), \sigma(E_{23})(w)] = 0$.

15. $[h_2, E_{13}] = [E_{22} - E_{33}, E_{13}] = E_{13}$. Logo, $\sigma([h_2(z), E_{13}(w)]) = \sigma(E_{13})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_2)(z), \sigma(E_{13})(w)] = 0$.

16. $[h_2, E_{24}] = [E_{22} - E_{33}, E_{24}] = E_{24}$. Logo, $\sigma([h_2(z), E_{24}(w)]) = \sigma(E_{24})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_2)(z), \sigma(E_{24})(w)] = 0$.

17. $[h_2, E_{14}] = [E_{22}-E_{33}, E_{14}] = 0$. Logo, $\sigma([h_2(z), E_{14}(w)]) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_2)(z), \sigma(E_{14})(w)] = 0$.

18. $[h_3, E_{23}] = [E_{33} - E_{44}, E_{23}] = -E_{23}$. Logo, $\sigma([h_3(z), E_{23}(w)]) = -\sigma(E_{23})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_3)(z), \sigma(E_{23})(w)] = 0$.

19. $[h_3, E_{13}] = [E_{33} - E_{44}, E_{13}] = -E_{13}$. Logo, $\sigma([h_3(z), E_{13}(w)]) = -\sigma(E_{13})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_3)(z), \sigma(E_{13})(w)] = 0$.

20. $[h_3, E_{24}] = [E_{33} - E_{44}, E_{24}] = E_{24}$. Logo, $\sigma([h_3(z), E_{24}(w)]) = \sigma(E_{24})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_3)(z), \sigma(E_{24})(w)] = 0$.

21. $[h_3, E_{14}] = [E_{33} - E_{44}, E_{14}] = E_{14}$. Logo, $\sigma([h_3(z), E_{14}(w)]) = \sigma(E_{14})(w)\delta(z-w) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(h_3)(z), \sigma(E_{14})(w)] = 0$.

22. $[E_{21}, E_{43}] = 0$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), E_{43}(w)]) = 0$. Por outro lado,

$$[\sigma(E_{21})(z), \sigma(E_{43})(w)] \;=\; [a_{11}(z), a_{33}(w)] = 0.$$

23. $[E_{21}, E_{12}] = E_{22} - E_{11} = -h_1 \;\;,\;\; (E_{21}, E_{12}) = 1$.

Logo,

$$\sigma([E_{12}(z), E_{21}(w)]) \;=\; \sigma(h_1)(w)\delta(z-w) + \mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\sigma(E_{12})(z), \sigma(E_{21})(w)] &= 2 : a_{11}(w)a_{11}^*(w) : \delta(z-w) + b_1(w)\delta(z-w) + \mathbf{k}[\partial_z a_{11}^*(z), a_{11}(w)] \\ &= \sigma(h_1)(w)\delta(z-w) - \mathbf{k}\partial_z\delta(z-w) \\ &= \sigma(h_1)(w)\delta(z-w) + \mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).\end{aligned}$$

24. $[E_{21}, E_{34}] = 0$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), E_{34}(w)]) = 0$. Por outro lado,

$$[\sigma(E_{21})(z), \sigma(E_{34})(w)] \;=\; [a_{11}(z), -: a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) : -a^*_{33}(w)b_3(w) + \mathbf{k}\partial_w a^*_{33}(w)] = 0.$$

25. $[E_{21}, h_1] = [E_{21}, E_{11} - E_{22}] = E_{21} + E_{21} = 2E_{21}$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), h_1(w)]) = 2\sigma(E_{21})(w)\delta(z-w)$. Por outro lado,

$$[\sigma(E_{21})(z), \sigma(h_1)(w)] \;=\; [a_{11}(z), 2 : a_{11}(w)a^*_{11}(w) : +b_1(w)] = 2a_{11}(w)\delta(z-w).$$

26. $[E_{21}, h_2] = [E_{21}, E_{22} - E_{33}] = -E_{21}$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), h_2(w)]) = -\sigma(E_{21})(w)\delta(z-w)$. Por outro lado,

$$[\sigma(E_{21})(z), \sigma(h_2)(w)] \;=\; [a_{11}(z), -: a_{11}(w)a^*_{11}(w) : -: a_{33}(w)a^*_{33}(w) : +b_2(w)] = -a_{11}(w)\delta(z-w).$$

27. $[E_{21}, h_3] = [E_{21}, E_{33} - E_{44}] = 0$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), h_3(w)]) = 0$. Por outro lado,

$$[\sigma(E_{21})(z), \sigma(h_3)(w)] \;=\; [a_{11}(z), 2 : a_{33}(w)a^*_{33}(w) : +b_3(w)] = 0.$$

28. $[E_{21}, E_{23}] = 0$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), E_{23}(w)]) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{21})(z), \sigma(E_{23})(w)] = 0$.

29. $[E_{21}, E_{13}] = E_{23}$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), E_{13}(w)]) = \sigma(E_{23})(w)\delta(z-w) = 0$.
Por outro lado, $[\sigma(E_{21})(z), \sigma(E_{13})(w)] = 0$.

30. $[E_{21}, E_{24}] = 0$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), E_{24}(w)]) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{21})(z), \sigma(E_{24})(w)] = 0$.

31. $[E_{21}, E_{14}] = E_{24}$. Logo, $\sigma([E_{21}(z), E_{14}(w)]) = \sigma(E_{24})(w)\delta(z-w) = 0$.
Por outro lado, $[\sigma(E_{21})(z), \sigma(E_{14})(w)] = 0$.

32. $[E_{43}, E_{12}] = 0$. Logo, $\sigma([E_{43}(z), E_{12}(w)]) = 0$. Por outro lado,

$$[\sigma(E_{43})(z), \sigma(E_{12})(w)] = [a_{33}(z), -: a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) : -a^*_{11}(w)b_1(w) + \mathbf{k}\partial_w a^*_{11}(w)] = 0.$$

33. $[E_{43}, E_{34}] = E_{44} - E_{33} = -h_3 \quad , \quad (E_{43}, E_{34}) = 1$.
Logo, $\sigma([E_{43}(z), E_{34}(w)]) = -\sigma(h_3)(w)\delta(z-w) + \mathbf{k}\partial_w\delta(z-w)$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(E_{43})(z), \sigma(E_{34})(w)] &= [a_{33}(z), -: a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) : -a^*_{33}(w)b_3(w) + \mathbf{k}\partial_w a^*_{33}(w)] \\
&= -2 : a_{33}(w)a^*_{33}(w) : \delta(z-w) - b_3(w)\delta(z-w) + \mathbf{k}[a_{33}(z), \partial_w a^*_{33}(w)] \\
&= -2 : a_{33}(w)a^*_{33}(w) : \delta(z-w) - b_3(w)\delta(z-w) + \mathbf{k}\partial_w\delta(z-w) \\
&= -\sigma(h_3)(w)\delta(z-w) + \mathbf{k}\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

34. $[E_{43}, h_1] = [E_{43}, E_{11} - E_{22}] = 0$. Logo, $\sigma([E_{43}(z), h_1(w)]) = 0$. Por outro lado,

$$[\sigma(E_{43})(z), \sigma(h_1)(w)] = [a_{33}(z), 2 : a_{11}(w)a^*_{11}(w) : +b_1(w)] = 0.$$

35. $[E_{43},h_2]=[E_{43},E_{22}-E_{33}]=-E_{43}$. Logo, $\sigma([E_{43}(z),h_2(w)])=-\sigma(E_{43})(w)\delta(z-w)$.

    Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\sigma(E_{43})(z),\sigma(h_2)(w)] &= [a_{33}(z),-:a_{11}(w)a^*_{11}(w):-:a_{33}(w)a^*_{33}(w):+b_2(w)]\\ &= -a_{33}(w)\delta(z-w).\end{aligned}$$

36. $[E_{43},h_3]=[E_{43},E_{33}-E_{44}]=E_{43}+E_{43}=2E_{43}$. Logo, $\sigma([E_{43}(z),h_3(w)])=2\sigma(E_{43})(w)\delta(z-w)$.

    Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\sigma(E_{43})(z),\sigma(h_3)(w)] &= [a_{33}(z),2:a_{33}(w)a^*_{33}(w):+b_3(w)]\\ &= 2a_{33}(w)\delta(z-w).\end{aligned}$$

37. $[E_{43},E_{23}]=0$. Logo, $\sigma([E_{43}(z),E_{23}(w)])=0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{43})(z),\sigma(E_{23})(w)]=0$.

38. $[E_{43},E_{13}]=0$. Logo, $\sigma([E_{43}(z),E_{13}(w)])=0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{43})(z),\sigma(E_{13})(w)]=0$.

39. $[E_{43},E_{24}]=-E_{23}$. Logo, $\sigma([E_{43}(z),E_{24}(w)])=-\sigma(E_{23})(w)\delta(z-w)=0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{43})(z),\sigma(E_{24})(w)]=0$.

40. $[E_{43},E_{14}]=-E_{13}$. Logo, $\sigma([E_{43}(z),E_{14}(w)])=-\sigma(E_{13})(w)\delta(z-w)=0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{43})(z),\sigma(E_{14})(w)]=0$.

41. $[E_{12},E_{12}]=0$. Logo, $\sigma([E_{12}(z),E_{12}(w)])=0$.

    Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\sigma(E_{12})(z),\sigma(E_{12})(w)] &= [:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z):,:a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w):]+\\ &\quad +[:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z):,a^*_{11}(w)b_1(w)]+\\ &\quad -\mathbf{k}[:a^*_{11}(z)a_{11}(z)a^*_{11}(z):,\partial_w a^*_{11}(w)]+\\ &\quad +[a^*_{11}(z)b_1(z),:a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w):]+\\ &\quad +[a^*_{11}(z)b_1(z),a^*_{11}(w)b_1(w)]-\mathbf{k}[\partial_z a^*_{11}(z),:a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w):]\\ &= -4a^*_{11}(z)a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w)+a^*_{11}(w)a^*_{11}(w)b_1(w)\delta(z-w)+\\ &\quad -\mathbf{k}a^*_{11}(z)a^*_{11}(z)\partial_w\delta(z-w)-a^*_{11}(w)a^*_{11}(w)b_1(w)\delta(z-w)+\\ &\quad +\mathfrak{B}_{11}a^*_{11}(z)a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w)+\mathbf{k}a^*_{11}(w)a^*_{11}(w)\partial_z\delta(z-w)\\ &= -4a^*_{11}(w)a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w)-4a^*_{11}(w)(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w)+\\ &\quad -2\mathbf{k}a^*_{11}(w)(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w)-\mathbf{k}a^*_{11}(w)a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w)+\\ &\quad +\mathfrak{B}_{11}a^*_{11}(w)a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w)+\mathfrak{B}_{11}a^*_{11}(w)(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w)+\\ &\quad -\mathbf{k}a^*_{11}(w)a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w)\\ &= -\big(4+2\mathbf{k}-\mathfrak{B}_{11}\big)\Big(a^*_{11}(w)a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w)+a^*_{11}(w)(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w)\Big)\\ &= 0 \quad , \quad \text{pois } \mathfrak{B}_{11}=2\mathbf{k}+4.\end{aligned}$$

42. $[E_{12},h_1]=[E_{12},E_{11}-E_{22}]=-E_{12}-E_{12}=-2E_{12}$.

    Logo, $\sigma([h_1(z),E_{12}(w)])=2\sigma(E_{12})(w)\delta(z-w)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_1)(z), \sigma(E_{12})(w)] &= [2 : a_{11}(z)a^*_{11}(z) : +b_1(z), - : a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) : -a^*_{11}(w)b_1(w) + \mathbf{k}\partial_w a^*_{11}(w)] \\
&= -2[: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, : a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) :] - 2[: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, a^*_{11}(w)b_1(w)] + \\
&\quad +2\mathbf{k}[: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, \partial_w a^*_{11}(w)] - [b_1(z), a^*_{11}(w)b_1(w)] \\
&= -2 : a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) : \delta(z-w) + 4a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) + \\
&\quad -2a^*_{11}(w)b_1(w)\delta(z-w) + 2\mathbf{k}a^*_{11}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{11}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) \\
&= -2 : a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) : \delta(z-w) - 2a^*_{11}(w)b_1(w)\delta(z-w) + \\
&\quad +4a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}a^*_{11}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{11}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned}
& 4a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}a^*_{11}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{11}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) = \\
= \ & 4a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{11}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) \\
= \ & (4 + 2\mathbf{k} - \mathfrak{B}_{11})a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w) \\
= \ & 2\mathbf{k}(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w) \quad , \quad \text{pois } \mathfrak{B}_{11} = 2\mathbf{k} + 4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_1)(z), \sigma(E_{12})(w)] &= -2 : a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) : \delta(z-w) - 2a^*_{11}(w)b_1(w)\delta(z-w) + \\
&\quad +2\mathbf{k}(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w) \\
&= 2\sigma(E_{12})(w)\delta(z-w).
\end{aligned}$$

43. $[E_{12}, h_2] = [E_{12}, E_{22} - E_{33}] = E_{12}$.

Logo, $\sigma([h_2(z), E_{12}(w)]) = -\sigma(E_{12})(w)\delta(z-w)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_2)(z), \sigma(E_{12})(w)] &= [: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, : a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) :] + [: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, a^*_{11}(w)b_1(w)] + \\
&\quad -\mathbf{k}[: a_{11}(z)a^*_{11}(z) :, \partial_w a^*_{11}(w)] - [b_2(z), a^*_{11}(w)b_1(w)] \\
&= : a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) : \delta(z-w) - 2a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) + \\
&\quad +a^*_{11}(w)b_1(w)\delta(z-w) - \mathbf{k}a^*_{11}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{21}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) \\
&= : a^*_{11}(w)a_{11}(w)a^*_{11}(w) : \delta(z-w) + a^*_{11}(w)b_1(w)\delta(z-w) + \\
&\quad -2a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}a^*_{11}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{21}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned}
& -2a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}a^*_{11}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{21}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) = \\
= \ & -2a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{21}a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) \\
= \ & -(2 + \mathbf{k} + \mathfrak{B}_{21})a^*_{11}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w) \\
= \ & -\mathbf{k}(\partial_w a^*_{11}(w))\delta(z-w) \quad , \quad \text{pois } \mathfrak{B}_{21} = -\mathbf{k} - 2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_2)(z),\sigma(E_{12})(w)] &= \,:a_{11}^*(w)a_{11}(w)a_{11}^*(w):\delta(z-w)+a_{11}^*(w)b_1(w)\delta(z-w)+\\
&\quad -\mathbf{k}(\partial_w a_{11}^*(w))\delta(z-w)\\
&= -\sigma(E_{12})(w)\delta(z-w).
\end{aligned}$$

44. $[E_{12},h_3]=[E_{12},E_{33}-E_{44}]=0$. Logo $\sigma([E_{12}(z),h_3(w)])=0$.

    Por outro lado, $[\sigma(E_{12})(z),\sigma(h_3)(w)]=[-a_{11}^*(z)b_1(z),b_3(w)]=-\mathfrak{B}_{13}a_{11}^*(z)\partial_w\delta(z-w)=0$.

45. $[E_{12},E_{23}]=E_{13}$. Logo $\sigma([E_{12}(z),E_{23}(w)])=\sigma(E_{13})(w)\delta(z-w)=0$.

    Por outro lado, $[\sigma(E_{12})(z),\sigma(E_{23})(w)]=0$.

46. $[E_{12},E_{13}]=0$. Logo $\sigma([E_{12}(z),E_{13}(w)])=0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{12})(z),\sigma(E_{13})(w)]=0$.

47. $[E_{12},E_{24}]=E_{14}$. Logo $\sigma([E_{12}(z),E_{24}(w)])=\sigma(E_{14})(w)\delta(z-w)=0$.

    Por outro lado, $[\sigma(E_{12})(z),\sigma(E_{24})(w)]=0$.

48. $[E_{12},E_{14}]=0$. Logo $\sigma([E_{12}(z),E_{14}(w)])=0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{12})(z),\sigma(E_{14})(w)]=0$.

49. $[E_{34},E_{34}]=0$. Logo, $\sigma([E_{34}(z),E_{34}(w)])=0$.

    Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(E_{34})(z),\sigma(E_{34})(w)] &= [:a_{33}^*(z)a_{33}(z)a_{33}^*(z):,:a_{33}^*(w)a_{33}(w)a_{33}^*(w):]+\\
&\quad +[:a_{33}^*(z)a_{33}(z)a_{33}^*(z):,a_{33}^*(w)b_3(w)]+\\
&\quad -\mathbf{k}[:a_{33}^*(z)a_{33}(z)a_{33}^*(z):,\partial_w a_{33}^*(w)]+\\
&\quad +[a_{33}^*(z)b_3(z),:a_{33}^*(w)a_{33}(w)a_{33}^*(w):]+\\
&\quad +[a_{33}^*(z)b_3(z),a_{33}^*(w)b_3(w)]-\mathbf{k}[\partial_z a_{33}^*(z),:a_{33}^*(w)a_{33}(w)a_{33}^*(w):]\\
&= -4a_{33}^*(z)a_{33}^*(w)\partial_w\delta(z-w)+a_{33}^*(w)a_{33}^*(w)b_3(w)\delta(z-w)+\\
&\quad -\mathbf{k}a_{33}^*(z)a_{33}^*(z)\partial_w\delta(z-w)-a_{33}^*(w)a_{33}^*(w)b_3(w)\delta(z-w)+\\
&\quad +\mathfrak{B}_{33}a_{33}^*(z)a_{33}^*(w)\partial_w\delta(z-w)+\mathbf{k}a_{33}^*(w)a_{33}^*(w)\partial_z\delta(z-w)\\
&= -4a_{33}^*(w)a_{33}^*(w)\partial_w\delta(z-w)-4a_{33}^*(w)(\partial_w a_{33}^*(w))\delta(z-w)+\\
&\quad -2\mathbf{k}a_{33}^*(w)(\partial_w a_{33}^*(w))\delta(z-w)-\mathbf{k}a_{33}^*(w)a_{33}^*(w)\partial_w\delta(z-w)+\\
&\quad +\mathfrak{B}_{33}a_{33}^*(w)a_{33}^*(w)\partial_w\delta(z-w)+\mathfrak{B}_{33}a_{33}^*(w)(\partial_w a_{33}^*(w))\delta(z-w)+\\
&\quad -\mathbf{k}a_{33}^*(w)a_{33}^*(w)\partial_w\delta(z-w)\\
&= -\big(4+2\mathbf{k}-\mathfrak{B}_{33}\big)\Big(a_{33}^*(w)a_{33}^*(w)\partial_w\delta(z-w)+a_{33}^*(w)(\partial_w a_{33}^*(w))\delta(z-w)\Big)\\
&= 0 \quad , \quad \text{pois } \mathfrak{B}_{33}=2\mathbf{k}+4.
\end{aligned}$$

50. $[E_{34},h_1]=[E_{34},E_{11}-E_{22}]=0$. Logo, $\sigma([E_{34}(z),h_1(w)])=0$.

    Por outro lado, $[\sigma(E_{34})(z),\sigma(h_1)(w)]=[-a_{33}^*(z)b_3(z),b_1(w)]=-a_{33}^*(z)\mathfrak{B}_{31}\partial_w\delta(z-w)=0$.

51. $[E_{34},h_2]=[E_{34},E_{22}-E_{33}]=E_{34}$.

    Logo, $\sigma([h_2(z),E_{34}(w)])=-\sigma(E_{34})(w)\delta(z-w)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_2)(z), \sigma(E_{34})(w)] &= [: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, : a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) :] + [: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, a^*_{33}(w)b_3(w)] + \\
&\quad -\mathbf{k}[: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, \partial_w a^*_{33}(w)] - [b_2(z), a^*_{33}(w)b_3(w)] \\
&= : a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) : \delta(z-w) - 2a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) + \\
&\quad +a^*_{33}(w)b_3(w)\delta(z-w) - \mathbf{k}a^*_{33}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{23}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) \\
&= : a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) : \delta(z-w) + a^*_{33}(w)b_3(w)\delta(z-w) + \\
&\quad -2a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}a^*_{33}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{23}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned}
& -2a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}a^*_{33}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{23}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) = \\
= \; & -2a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}(\partial_w a^*_{33}(w))\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{23}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) \\
= \; & -(2+\mathbf{k}+\mathfrak{B}_{23})a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) - \mathbf{k}(\partial_w a^*_{33}(w))\delta(z-w) \\
= \; & -\mathbf{k}(\partial_w a^*_{33}(w))\delta(z-w) \quad , \quad \text{pois } \mathfrak{B}_{23} = -\mathbf{k} - 2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_2)(z), \sigma(E_{34})(w)] &= : a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) : \delta(z-w) + a^*_{33}(w)b_3(w)\delta(z-w) + \\
&\quad -\mathbf{k}(\partial_w a^*_{33}(w))\delta(z-w) \\
&= -\sigma(E_{34})(w)\delta(z-w).
\end{aligned}$$

52. $[E_{34}, h_3] = [E_{34}, E_{33} - E_{44}] = -E_{34} - E_{34} = -2E_{34}$.

Logo, $\sigma([h_3(z), E_{34}(w)]) = 2\sigma(E_{34})(w)\delta(z-w)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\sigma(h_3)(z), \sigma(E_{34})(w)] &= [2 : a_{33}(z)a^*_{33}(z) : +b_3(z), - : a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) : -a^*_{33}(w)b_3(w) + \mathbf{k}\partial_w a^*_{33}(w)] \\
&= -2[: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, : a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) :] - 2[: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, a^*_{33}(w)b_3(w)] + \\
&\quad +2\mathbf{k}[: a_{33}(z)a^*_{33}(z) :, \partial_w a^*_{33}(w)] - [b_3(z), a^*_{33}(w)b_3(w)] \\
&= -2 : a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) : \delta(z-w) + 4a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) + \\
&\quad -2a^*_{33}(w)b_3(w)\delta(z-w) + 2\mathbf{k}a^*_{33}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{33}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) \\
&= -2 : a^*_{33}(w)a_{33}(w)a^*_{33}(w) : \delta(z-w) - 2a^*_{33}(w)b_3(w)\delta(z-w) + \\
&\quad +4a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}a^*_{33}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{33}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w).
\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned}
& 4a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}a^*_{33}(z)\partial_w\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{33}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) = \\
= \; & 4a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}(\partial_w a^*_{33}(w))\delta(z-w) - \mathfrak{B}_{33}a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) \\
= \; & (4+2\mathbf{k}-\mathfrak{B}_{33})a^*_{33}(w)\partial_w\delta(z-w) + 2\mathbf{k}(\partial_w a^*_{33}(w))\delta(z-w) \\
= \; & 2\mathbf{k}(\partial_w a^*_{33}(w))\delta(z-w) \quad , \quad \text{pois } \mathfrak{B}_{33} = 2\mathbf{k} + 4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}[\sigma(h_3)(z),\sigma(E_{34})(w)] &= -2 :a_{33}^*(w)a_{33}(w)a_{33}^*(w): \delta(z-w) - 2a_{33}^*(w)b_3(w)\delta(z-w) + \\ &\quad +2\mathbf{k}(\partial_w a_{33}^*(w))\delta(z-w) \\ &= 2\sigma(E_{34})(w)\delta(z-w).\end{aligned}$$

53. $[E_{34},E_{23}] = -E_{24}$. Logo $\sigma([E_{34}(z),E_{23}(w)]) = -\sigma(E_{24})(w)\delta(z-w) = 0$.
    Por outro lado, $[\sigma(E_{34})(z),\sigma(E_{23})(w)] = 0$.
54. $[E_{34},E_{13}] = -E_{14}$. Logo $\sigma([E_{34}(z),E_{13}(w)]) = -\sigma(E_{14})(w)\delta(z-w) = 0$.
    Por outro lado, $[\sigma(E_{34})(z),\sigma(E_{13})(w)] = 0$.
55. $[E_{34},E_{24}] = 0$. Logo $\sigma([E_{34}(z),E_{24}(w)]) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{34})(z),\sigma(E_{24})(w)] = 0$.
56. $[E_{34},E_{14}] = 0$. Logo $\sigma([E_{34}(z),E_{14}(w)]) = 0$. Por outro lado, $[\sigma(E_{34})(z),\sigma(E_{14})(w)] = 0$.
57. Como

$$\begin{array}{rrrr}[E_{23},E_{23}]=0 \ , & [E_{23},E_{13}]=0 \ , & [E_{23},E_{24}]=0 \ , & [E_{23},E_{14}]=0 \\ & [E_{13},E_{13}]=0 \ , & [E_{13},E_{24}]=0 \ , & [E_{13},E_{14}]=0 \\ & & [E_{24},E_{24}]=0 \ , & [E_{24},E_{14}]=0 \\ & & & [E_{14},E_{14}]=0,\end{array}$$

os colchetes da representação σ, nesses casos, seguem trivialmente.

Concluímos que (V,σ) é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo. □

4.7.1 Descrição de $\pi : \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbf{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ com $\Sigma = \{\alpha_1,\alpha_3\}$

Considere a subálgebra de Borel natural $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$ de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$, isto é, $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_{\mathrm{nat}}$ onde

$$\widehat{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h}\otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c \quad , \quad \widehat{\mathfrak{n}}_{\mathrm{nat}} = (\mathfrak{n}\otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]) \oplus (\mathfrak{h}\otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]) \ ,$$

ou seja, $\widehat{\mathfrak{h}}$ é gerada por $\{h_{1,0}\ ,\ h_{2,0}\ ,\ h_{3,0}\ ,\ c\}$ e $\widehat{\mathfrak{n}}_{\mathrm{nat}}$ é gerado por

$$\{E_{12,m}\ ;\ E_{23,m}\ ;\ E_{34,m}\ ;\ E_{13,m}\ ;\ E_{24,m}\ ;\ E_{14,m}\ ;\ h_{1,s}\ ;\ h_{2,s}\ ;\ h_{3,s} \mid m\in\mathbb{Z}, s\in\mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ e $\pi = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ a base de raízes simples. Considere $\Sigma = \{\alpha_1,\alpha_3\}$ para definir a subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\Sigma = \mathfrak{l}_\Sigma \oplus \mathfrak{u}_\Sigma$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_\Sigma &= \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{21} \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}E_{34} \oplus \mathbb{C}E_{43} \oplus \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}h_2 \ , \\ \mathfrak{u}_\Sigma &= \mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}E_{13} \oplus \mathbb{C}E_{24} \oplus \mathbb{C}E_{14} \ , \\ \overline{\mathfrak{u}}_\Sigma &= \mathbb{C}E_{32} \oplus \mathbb{C}E_{31} \oplus \mathbb{C}E_{42} \oplus \mathbb{C}E_{41}. \end{aligned}$$

A subálgebra parabólica natural $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$ em $\widehat{\mathfrak{g}}$ que contém a subálgebra de Borel natural $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$ é definida como segue: $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}}$ onde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} &= (\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)) \oplus \mathbb{C}c \ , \\ \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}} &= (\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)) \ , \\ \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}} &= (\overline{\mathfrak{u}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)) \ , \end{aligned}$$

de forma que $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}}$ é gerada por $\{E_{12,m}; E_{21,m}; h_{1,m}; E_{34,m}; E_{43,m}; h_{3,m}, h_{2,m}, c \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $\widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}}$ é gerado por $\{E_{23,m}; E_{13,m}; E_{24,m}; E_{14,m} \ |m \in \mathbb{Z}\}$ e $\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}}$ é gerado por $\{E_{32,m}; E_{31,m}; E_{42,m}; E_{41,m} \ |m \in \mathbb{Z}\}$.

Como $\Delta(\mathfrak{u}) = \Delta_+ \backslash \Delta_{\Sigma,+} = \{\alpha_2, \alpha_1{+}\alpha_2, \alpha_2{+}\alpha_3, \alpha_1{+}\alpha_2{+}\alpha_3\}$, seja $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u})\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ a base de $\overline{\mathfrak{u}}$, onde $f_1 = E_{32}$, $f_2 = E_{31}$, $f_3 = E_{42}$ e $f_4 = E_{41}$. Seja $\{x_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{u})\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ as funções coordenadas lineares em $\overline{\mathfrak{u}}$ com respeito a base de $\overline{\mathfrak{u}}$, isto é, $x_i(f_j) = \delta_{i,j}$.

O conjunto $\{f_i \otimes t^m \mid 1 \leq i \leq 4, m \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base topológica de $\mathcal{K}(\overline{\mathfrak{u}}) = \widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}}$, e o conjunto $\{x_i \otimes t^{-m-1}dt \mid 1 \leq i \leq 4, m \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base topológica dual de $\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \simeq (\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}})^*$.

O mergulho de $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ em $\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$, conforme o Teorema 4.1.2, é dado por $\pi(c) = \sigma(c)$ e

$$\begin{aligned} \pi(a(z)) &= -\sum_{i=1}^{4} a_i(z) \left[\frac{\mathrm{ad}(u(z)) e^{\mathrm{ad}(u(z))}}{e^{\mathrm{ad}(u(z))} - \mathrm{id}} (e^{-\mathrm{ad}(u(z))}(a))_{\overline{\mathfrak{u}}} \right]_i + (e^{-\mathrm{ad}(u(z))} a(z))_{\mathfrak{p}} + \\ &\quad - \left(\frac{e^{\mathrm{ad}(u(z))} - \mathrm{id}}{\mathrm{ad}(u(z))} \partial_z u(z), a \right) c \end{aligned} \tag{4.27}$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$, onde

$$u(z) = \sum_{i=1}^{4} a_i^*(z) f_i \tag{4.28}$$

e $[b]_i$ é a i-ésima coordenada de $b \in \overline{\mathfrak{u}}$ com respeito a base $\{f_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$ of $\overline{\mathfrak{u}}$.

Em particular, para $a \in \overline{\mathfrak{u}}$ temos

$$\pi(a(z)) = -\sum_{i=1}^{4} a_i(z)\left[\frac{\mathrm{ad}(u(z))}{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}}(a)\right]_i \tag{4.29}$$

e para $a \in \mathfrak{l}$ temos que

$$\pi(a(z)) = \sum_{i=1}^{4} a_i(z)[\mathrm{ad}(u(z))(a)]_i + a(z). \tag{4.30}$$

Introduzindo a seguinte notação

$$D(a,z) = -\sum_{i=1}^{4} a_i(z)\left[\frac{\mathrm{ad}(u(z))e^{\mathrm{ad}(u(z))}}{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}}(e^{-\mathrm{ad}(u(z))}(a))_{\overline{\mathfrak{u}}}\right]_i \tag{4.31}$$

$$A(a,z) = (e^{-\mathrm{ad}(u(z))}a(z))_{\mathfrak{p}} \tag{4.32}$$

$$C(a,z) = -\left(\frac{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}}{\mathrm{ad}(u(z))}\partial_z u(z), a\right)c \tag{4.33}$$

temos que

$$\pi(a(z)) = D(a,z) + A(a,z) + C(a,z). \tag{4.34}$$

Note que,

$$a_i(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{i,s}z^{-s-1} \quad , \quad a_i^*(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{i,s}^* z^{-s} \quad \text{onde } a_{i,s} = \partial_{x_{i,s}} \text{ e } a_{i,s}^* = x_{i,-s}.$$

Além disso,

$$e^{-\mathrm{ad}(u(z))} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\mathrm{ad}(u(z)))^k}{k!} \ ,$$

$$\frac{\mathrm{ad}(u(z))}{e^{\mathrm{ad}(u(z))}-\mathrm{id}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(\mathrm{ad}(u(z)))^k \quad , \quad \text{onde } B_0 = 1, B_1 = -\tfrac{1}{2}, B_2 = \tfrac{1}{6}, B_3 = 0, \ldots$$

Conforme o Teorema 4.1.2, descreveremos explicitamente o mergulho π seguindo nossa escolha particular de subálgebra parabólica (definida a partir de $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_3\}$):

Teorema 4.7.2. *Seja $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}}$ a parabólica natural em $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$ contendo a subálgebra de Borel natural, tal que $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}}$ é gerada por $\{E_{12,m}; E_{21,m}; h_{1,m}; E_{34,m}; E_{43,m}; h_{3,m}, h_{2,m}, c \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $\widehat{\mathfrak{u}}_{\mathrm{nat}}$ é gerado por $\{E_{23,m}; E_{13,m}; E_{24,m}; E_{14,m} \ |m \in \mathbb{Z}\}$ e $\widehat{\overline{\mathfrak{u}}}_{\mathrm{nat}}$ é gerado por $\{E_{32,m}; E_{31,m}; E_{42,m}; E_{41,m} \ |m \in$*

$\mathbb{Z}\}$. *O mergulho* π *de* $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ *em* $\mathcal{R}_{\text{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ *é dado explicitamente por:*

$$
\begin{aligned}
\pi(c) &= \sigma(c)\\
\pi(E_{32}(z)) &= -a_1(z)\\
\pi(E_{31}(z)) &= -a_2(z)\\
\pi(E_{42}(z)) &= -a_3(z)\\
\pi(E_{41}(z)) &= -a_4(z)\\
\pi(E_{12}(z)) &= a_1(z)a_2^*(z) + a_3(z)a_4^*(z) + \sigma(E_{12})(z)\\
\pi(E_{21}(z)) &= a_2(z)a_1^*(z) + a_4(z)a_3^*(z) + \sigma(E_{21})(z)\\
\pi(E_{34}(z)) &= -a_1(z)a_3^*(z) - a_2(z)a_4^*(z) + \sigma(E_{34})(z)\\
\pi(E_{43}(z)) &= -a_3(z)a_1^*(z) - a_4(z)a_2^*(z) + \sigma(E_{43})(z)\\
\pi(h_1(z)) &= -a_1(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z) - a_3(z)a_3^*(z) + a_4(z)a_4^*(z) + \sigma(h_1)(z)\\
\pi(h_2(z)) &= 2a_1(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z) + a_3(z)a_3^*(z) + \sigma(h_2)(z)\\
\pi(h_3(z)) &= -a_1(z)a_1^*(z) - a_2(z)a_2^*(z) + a_3(z)a_3^*(z) + a_4(z)a_4^*(z) + \sigma(h_3)(z)\\
\pi(E_{23}(z)) &= a_1(z)a_1^*(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_1^*(z) + a_3(z)a_3^*(z)a_1^*(z) + a_4(z)a_2^*(z)a_3^*(z) +\\
&\quad +\sigma(E_{23})(z) + a_1^*(z)\sigma(h_2)(z) + a_2^*(z)\sigma(E_{21})(z) - a_3^*(z)\sigma(E_{43})(z) - \partial_z a_1^*(z)\sigma(c)\\
\pi(E_{13}(z)) &= a_1(z)a_1^*(z)a_2^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_2^*(z) + a_3(z)a_1^*(z)a_4^*(z) + a_4(z)a_4^*(z)a_2^*(z) +\\
&\quad +\sigma(E_{13})(z) + a_1^*(z)\sigma(E_{12})(z) + a_2^*(z)\sigma(h_1)(z) + a_2^*(z)\sigma(h_2)(z) - a_4^*(z)\sigma(E_{43})(z) +\\
&\quad -\partial_z a_2^*(z)\sigma(c)\\
\pi(E_{24}(z)) &= a_1(z)a_1^*(z)a_3^*(z) + a_2(z)a_1^*(z)a_4^*(z) + a_3(z)a_3^*(z)a_3^*(z) + a_4(z)a_4^*(z)a_3^*(z) +\\
&\quad +\sigma(E_{24})(z) - a_1^*(z)\sigma(E_{34})(z) + a_3^*(z)\sigma(h_2)(z) + a_3^*(z)\sigma(h_3)(z) + a_4^*(z)\sigma(E_{21})(z) +\\
&\quad -\partial_z a_3^*(z)\sigma(c)\\
\pi(E_{14}(z)) &= a_1(z)a_2^*(z)a_3^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_4^*(z) + a_3(z)a_3^*(z)a_4^*(z) + a_4(z)a_4^*(z)a_4^*(z) +\\
&\quad +\sigma(E_{14})(z) - a_2^*(z)\sigma(E_{34})(z) + a_3^*(z)\sigma(E_{12})(z) + a_4^*(z)\sigma(h_1)(z) + a_4^*(z)\sigma(h_2)(z) +\\
&\quad +a_4^*(z)\sigma(h_3)(z) - \partial_z a_4^*(z)\sigma(c)
\end{aligned}
$$

Demonstração. Seguem alguns dos cálculos para a obtenção das fórmulas explícitas do mergulho $\pi : \widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{R}_{\text{loc}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ no caso da subálgebra parabólica definida por $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_3\}$.

1. $a = E_{32} \in \overline{\mathfrak{u}}$.

$$\begin{aligned}
[f_1, a] &= [E_{32}, E_{32}] = 0 \ , \\
[f_2, a] &= [E_{31}, E_{32}] = 0 \ , \\
[f_3, a] &= [E_{42}, E_{32}] = 0 \ , \\
[f_4, a] &= [E_{41}, E_{32}] = 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(u(z))(a) &= \sum_{i=1}^{4} a_i^*(z)[f_i, a] = 0 \ , \\
\mathrm{ad}(u(z))^k(a) &= 0 \quad , \quad \forall k \geq 1 \ , \\
\frac{\mathrm{ad}(u(z))}{e^{\mathrm{ad}(u(z))} - \mathrm{id}}(a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(\mathrm{ad}(u(z)))^k(a) = B_0 a = E_{32} = f_1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\pi(E_{32}(z)) &= -\sum_{i=1}^{4} a_i(z) \left[\frac{\mathrm{ad}(u(z))}{e^{\mathrm{ad}(u(z))} - \mathrm{id}}(E_{32}) \right]_i \\
&= -\sum_{i=1}^{4} a_i(z) \left[f_1 \right]_i = -a_1(z).
\end{aligned}$$

2. $a = E_{12} \in \mathfrak{l}$.

$$\begin{aligned}
[f_1, a] &= [E_{32}, E_{12}] = 0 \ , \\
[f_2, a] &= [E_{31}, E_{12}] = E_{32} = f_1 \ , \\
[f_3, a] &= [E_{42}, E_{12}] = 0 \ , \\
[f_4, a] &= [E_{41}, E_{12}] = E_{42} = f_3.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(u(z))(a) &= \sum_{i=1}^{4} a_i^*(z)[f_i, a] \ = \ a_2^*(z) f_1 + a_4^*(z) f_3 \ , \\
\mathrm{ad}(u(z))^k(a) &= 0 \quad , \quad \forall k \geq 2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\pi(E_{12}(z)) &= \sum_{i=1}^{4} a_i(z)[\mathrm{ad}(u(z))(E_{12})]_i + E_{12}(z) \\
&= \sum_{i=1}^{4} a_i(z)[a_2^*(z)f_1 + a_4^*(z)f_3]_i + \sigma(E_{12})(z) \\
&= a_1(z)a_2^*(z) + a_3(z)a_4^*(z) + \sigma(E_{12})(z).
\end{aligned}$$

3. $a = h_2 = E_{22} - E_{33} \in \mathfrak{l}$.

$$\begin{aligned}
[f_1, a] &= [E_{32}, E_{22} - E_{33}] = E_{32} + E_{32} = 2f_1 \ , \\
[f_2, a] &= [E_{31}, E_{22} - E_{33}] = E_{31} = f_2 \ , \\
[f_3, a] &= [E_{42}, E_{22} - E_{33}] = E_{42} = f_3 \ , \\
[f_4, a] &= [E_{41}, E_{22} - E_{33}] = 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(u(z))(a) &= \sum_{i=1}^{4} a_i^*(z)[f_i, a] \ = \ 2a_1^*(z)f_1 + a_2^*(z)f_2 + a_3^*(z)f_3 \ , \\
\mathrm{ad}(u(z))^k(a) &= 0 \quad , \quad \forall k \geq 2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\pi(h_2(z)) &= \sum_{i=1}^{4} a_i(z)[\mathrm{ad}(u(z))(h_2)]_i + h_2(z) \\
&= \sum_{i=1}^{4} a_i(z)[2a_1^*(z)f_1 + a_2^*(z)f_2 + a_3^*(z)f_3]_i + \sigma(h_2)(z) \\
&= 2a_1(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z) + a_3(z)a_3^*(z) + \sigma(h_2)(z).
\end{aligned}$$

4. $a = E_{23} \in \mathfrak{u}$.

$$\begin{aligned}
[f_1, a] &= [E_{32}, E_{23}] = E_{33} - E_{22} = -h_2 \ , \\
[f_2, a] &= [E_{31}, E_{23}] = -E_{21} \ , \\
[f_3, a] &= [E_{42}, E_{23}] = E_{43} \ , \\
[f_4, a] &= [E_{41}, E_{23}] = 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\mathrm{ad}(u(z))(a) \ = \ \sum_{i=1}^{4} a_i^*(z)[f_i, a] \ = \ -a_1^*(z)h_2 - a_2^*(z)E_{21} + a_3^*(z)E_{43}.$$

$$\begin{aligned}
[f_1, h_2] &= [E_{32}, E_{22} - E_{33}] = E_{32} + E_{32} = 2f_1 \ , \\
[f_2, h_2] &= [E_{31}, E_{22} - E_{33}] = E_{31} = f_2 \ , \\
[f_3, h_2] &= [E_{42}, E_{22} - E_{33}] = E_{42} = f_3 \ , \\
[f_4, h_2] &= [E_{41}, E_{22} - E_{33}] = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f_1, E_{21}] &= [E_{32}, E_{21}] = E_{31} = f_2 \ , \\
[f_2, E_{21}] &= [E_{31}, E_{21}] = 0 \ , \\
[f_3, E_{21}] &= [E_{42}, E_{21}] = E_{41} = f_4 \ , \\
[f_4, E_{21}] &= [E_{41}, E_{21}] = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f_1, E_{43}] &= [E_{32}, E_{43}] = -E_{42} = -f_3 \ , \\
[f_2, E_{43}] &= [E_{31}, E_{43}] = -E_{41} = -f_4 \ , \\
[f_3, E_{43}] &= [E_{42}, E_{43}] = 0 \ , \\
[f_4, E_{43}] &= [E_{41}, E_{43}] = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{ad}(u(z))^2(a) &= \text{ad}(u(z))\text{ad}(u(z))(a) \\
&= \text{ad}(u(z))(-a_1^*(z)h_2 - a_2^*(z)E_{21} + a_3^*(z)E_{43}) \\
&= \sum_{j=1}^{4} a_j^*(z)\Big(- a_1^*(z)[f_j, h_2] - a_2^*(z)[f_j, E_{21}] + a_3^*(z)[f_j, E_{43}]\Big) \\
&= -2a_1^*(z)a_1^*(z)f_1 - a_2^*(z)a_1^*(z)f_2 - a_3^*(z)a_1^*(z)f_3 + \\
&\quad -a_1^*(z)a_2^*(z)f_2 - a_3^*(z)a_2^*(z)f_4 + \\
&\quad -a_1^*(z)a_3^*(z)f_3 - a_2^*(z)a_3^*(z)f_4 \\
&= -2a_1^*(z)a_1^*(z)f_1 - 2a_1^*(z)a_2^*(z)f_2 - 2a_1^*(z)a_3^*(z)f_3 - 2a_2^*(z)a_3^*(z)f_4.
\end{aligned}$$

Temos que $\text{ad}(u(z))^k(a) = 0$, $\forall k \geq 3$.

$$\begin{aligned}
e^{-\text{ad}(u(z))}(E_{23}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \text{ad}(u(z))^k(E_{23})}{k!} = E_{23} - \text{ad}(u(z))(E_{23}) + \tfrac{1}{2}\text{ad}(u(z))^2(E_{23}) \\
&= E_{23} + a_1^*(z)h_2 + a_2^*(z)E_{21} - a_3^*(z)E_{43} + \\
&\quad -a_1^*(z)a_1^*(z)f_1 - a_1^*(z)a_2^*(z)f_2 - a_1^*(z)a_3^*(z)f_3 - a_2^*(z)a_3^*(z)f_4.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(e^{-\text{ad}(u(z))}(E_{23}))_{\overline{\mathfrak{u}}} &= -a_1^*(z)a_1^*(z)f_1 - a_1^*(z)a_2^*(z)f_2 - a_1^*(z)a_3^*(z)f_3 - a_2^*(z)a_3^*(z)f_4. \\
e^{\text{ad}(u(z))}(e^{-\text{ad}(u(z))}(E_{23}))_{\overline{\mathfrak{u}}} &= -a_1^*(z)a_1^*(z)f_1 - a_1^*(z)a_2^*(z)f_2 - a_1^*(z)a_3^*(z)f_3 - a_2^*(z)a_3^*(z)f_4. \\
\frac{\text{ad}(u(z))e^{\text{ad}(u(z))}}{e^{\text{ad}(u(z))} - \text{id}}(e^{-\text{ad}(u(z))}(E_{23}))_{\overline{\mathfrak{u}}} &= -a_1^*(z)a_1^*(z)f_1 - a_1^*(z)a_2^*(z)f_2 - a_1^*(z)a_3^*(z)f_3 - a_2^*(z)a_3^*(z)f_4.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
D(E_{23}, z) &= -\sum_{i=1}^{4} a_i(z)\left[\frac{\text{ad}(u(z))e^{\text{ad}(u(z))}}{e^{\text{ad}(u(z))} - \text{id}}(e^{-\text{ad}(u(z))}(E_{23}))_{\overline{\mathfrak{u}}}\right]_i \\
&= -\sum_{i=1}^{4} a_i(z)\left[-a_1^*(z)a_1^*(z)f_1 - a_1^*(z)a_2^*(z)f_2 - a_1^*(z)a_3^*(z)f_3 - a_2^*(z)a_3^*(z)f_4\right]_i \\
&= a_1(z)a_1^*(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_1^*(z) + a_3(z)a_3^*(z)a_1^*(z) + a_4(z)a_2^*(z)a_3^*(z).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} e^{-\mathrm{ad}(u(z))}(E_{23}) &= E_{23} + a_1^*(z)h_2 + a_2^*(z)E_{21} - a_3^*(z)E_{43} + \\ &\quad -a_1^*(z)a_1^*(z)f_1 - a_1^*(z)a_2^*(z)f_2 - a_1^*(z)a_3^*(z)f_3 - a_2^*(z)a_3^*(z)f_4 \ , \end{aligned}$$

onde $E_{23}, h_2, E_{21}, E_{43} \in \mathfrak{p}$ e $f_1, f_2, f_3, f_4 \notin \mathfrak{p}$ temos

$$\begin{aligned} A(E_{23}, z) &= (e^{-\mathrm{ad}(u(z))}E_{23}(z))_{\mathfrak{p}} \\ &= E_{23}(z) + a_1^*(z)h_2(z) + a_2^*(z)E_{21}(z) - a_3^*(z)E_{43}(z) \\ &= \sigma(E_{23})(z) + a_1^*(z)\sigma(h_2)(z) + a_2^*(z)\sigma(E_{21})(z) - a_3^*(z)\sigma(E_{43})(z). \end{aligned}$$

Para calcular $C(E_{23}, z)$ precisamos utilizar a forma bilinear normalizada de $\mathfrak{g}$. Temos que:

$$\begin{aligned} (f_1, E_{23}) &= (E_{32}, E_{23}) = tr(E_{33}) = 1 \ , \\ (f_2, E_{23}) &= (E_{31}, E_{23}) = tr(0) = 0 \ , \\ (f_3, E_{23}) &= (E_{42}, E_{23}) = tr(E_{43}) = 0 \ , \\ (f_4, E_{23}) &= (E_{41}, E_{23}) = tr(0) = 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} C(E_{23}, z) &= -\left(\frac{e^{\mathrm{ad}(u(z))} - \mathrm{id}}{\mathrm{ad}(u(z))}\partial_z u(z), E_{23}\right)c \;=\; -\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ad}(u(z))^{k-1}}{k!}\partial_z u(z), E_{23}\right)c \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ad}(u(z))^{k-1}}{k!}\left(\sum_{j=1}^{4}\partial_z a_j^*(z)f_j, E_{23}\right)c \;=\; -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ad}(u(z))^{k-1}}{k!}\sum_{j=1}^{4}\partial_z a_j^*(z)\Big(f_j, E_{23}\Big)c \\ &= -\sum_{j=1}^{4}\partial_z a_j^*(z)\Big(f_j, E_{23}\Big)c \;=\; -\partial_z a_1^*(z)c \;=\; -\partial_z a_1^*(z)\sigma(c). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \pi(E_{23}(z)) &= D(E_{23}, z) + A(E_{23}, z) + C(E_{23}, z) \\ &= a_1(z)a_1^*(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_1^*(z) + a_3(z)a_3^*(z)a_1^*(z) + a_4(z)a_2^*(z)a_3^*(z) + \\ &\quad +\sigma(E_{23})(z) + a_1^*(z)\sigma(h_2)(z) + a_2^*(z)\sigma(E_{21})(z) - a_3^*(z)\sigma(E_{43})(z) - \partial_z a_1^*(z)\sigma(c). \end{aligned}$$

As fórmulas para os outros geradores podem ser obtidas de maneira análoga ao apresentado acima.

□

4.7.2 Propriedades deste novo módulo

De acordo com [CF04], os módulos de Wakimoto Intermediários $W_{n,r}(\lambda,\gamma)$ satisfazem as seguintes propriedades: $h(1\otimes 1) = \lambda(h)(1\otimes 1)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$, $c(1\otimes 1) = (\gamma^2 - (r+1))(1\otimes 1)$ e a subálgebra $\overline{\mathfrak{b}}_r^w$ aniquila o vetor $(1\otimes 1) \in (\mathbb{C}[\mathbf{x}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathbf{y}])$, tal que $w = (1\ \ r+1)(2\ \ r)(3\ \ r-1)(4\ \ r-2)\cdots(u\ \ r-u+2) \in \mathfrak{S}_{n+1}$, onde cada transposição que aparece em w é do tipo $(i\ j)$, com $i \leq j$, somente transposições disjuntas aparecem no produto e u é o maior inteiro tal que $1 \leq u \leq \frac{r}{2}+1$.

Precisamos verificar que o novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$-módulo construído nesta seção através do Teorema 4.7.1 e do Teorema 4.7.2 satisfaz estas propriedades, para podermos chamá-lo de módulo de Wakimoto Intermediário. Nesta construção particular deste novo módulo não descrito em [CF04] mostraremos qual elemento w do grupo de Weyl $\mathfrak{S}_4$ consideraremos na torção da subálgebra de Borel correspondente (ver Capítulo 3, Seção 3.2). Observamos que esse elemento w não seguirá o modelo descrito acima, visto que não utilizamos o parâmetro r na construção do novo módulo.

Consideramos $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ para definir a subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\Sigma = \mathfrak{l}_\Sigma \oplus \mathfrak{u}_\Sigma$, tal que o fator de Levi redutivo de $\mathfrak{p}$ é $\mathfrak{l}_\Sigma = \mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}E_{12}\oplus\mathbb{C}E_{34}\oplus\mathbb{C}E_{21}\oplus\mathbb{C}E_{43} = \mathbb{C}h_2\oplus\mathbb{C}h_1\oplus\mathbb{C}E_{12}\oplus\mathbb{C}E_{21}\oplus\mathbb{C}h_3\oplus\mathbb{C}E_{34}\oplus\mathbb{C}E_{43}$, com subconjunto $L_\Sigma = P_\Sigma \cap -P_\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_3\}$. Então, $\mathfrak{l}_\Sigma \cong \mathbb{C}h_2\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Considere $\widehat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{p})} \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$, isto é,

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = \overbrace{\left((\mathbb{C}E_{23}\oplus\mathbb{C}E_{13}\oplus\mathbb{C}E_{24}\oplus\mathbb{C}E_{14})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[t,t^{-1}]\right)\oplus\left((\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}E_{12}\oplus\mathbb{C}E_{34}\oplus\mathbb{C}E_{21}\oplus\mathbb{C}E_{43})\otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right)\oplus\mathbb{C}E_{12}\oplus\mathbb{C}E_{34}\oplus}^{\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{p})}}$$

$$\oplus\underbrace{\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}c}_{\widehat{\mathfrak{h}}}$$

Considere o elemento $w = (1\ 2)(3\ 4) \in \mathfrak{S}_4$. Esse elemento envia α_1 em $-\alpha_1$ e α_3 em $-\alpha_3$. Em outras palavras, a ação de w é como segue:

$$\mathbb{C}E_{12}\mapsto\mathbb{C}E_{21}\quad,\quad\mathbb{C}E_{23}\mapsto\mathbb{C}E_{14}\quad,\quad\mathbb{C}E_{34}\mapsto\mathbb{C}E_{43}\ ,$$

$$\mathbb{C}E_{13}\mapsto\mathbb{C}E_{24}\quad,\quad\mathbb{C}E_{24}\mapsto\mathbb{C}E_{13}\quad,\quad\mathbb{C}E_{14}\mapsto\mathbb{C}E_{23}\ ,$$

$$\mathbb{C}E_{21}\mapsto\mathbb{C}E_{12}\quad,\quad\mathbb{C}E_{32}\mapsto\mathbb{C}E_{41}\quad,\quad\mathbb{C}E_{43}\mapsto\mathbb{C}E_{34}\ ,$$

$$\mathbb{C}E_{31}\mapsto\mathbb{C}E_{42}\quad,\quad\mathbb{C}E_{42}\mapsto\mathbb{C}E_{31}\quad,\quad\mathbb{C}E_{41}\mapsto\mathbb{C}E_{32}.$$

Denote por $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})^w$ a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{p})} \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ torcida pelo elemento $w = (1\ 2)(3\ 4)$.

Então:

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p})^w = \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{p})}^w \oplus \widehat{\mathfrak{h}}\ ,$$

onde

$$\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{p})}^{w} = \Big((\mathbb{C}E_{23}\oplus\mathbb{C}E_{13}\oplus\mathbb{C}E_{24}\oplus\mathbb{C}E_{14})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big)\oplus\Big((\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}E_{12}\oplus\mathbb{C}E_{34}\oplus\mathbb{C}E_{21}\oplus\mathbb{C}E_{43})\otimes_{\mathbb{C}}t\mathbb{C}[t]\Big)\oplus\mathbb{C}E_{21}\oplus\mathbb{C}E_{43}.$$

Teorema 4.7.3. *O $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$-módulo $W^{w}_{3,*}(\sigma,\pi)$ construído a partir do Teorema 4.7.1 e do Teorema 4.7.2 é um módulo de Wakimoto Intermediário, chamado de **módulo de Wakimoto Imaginário generalizado**, associado com a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})^{w}$ descrita acima.*

Demonstração. Precisamos verificar que $(1\otimes 1)\in W^{w}_{3,*}(\sigma,\pi)$ (o módulo de Wakimoto Intermediário parametrizado pelo subconjunto $X=\{1,3\}$ ou $\Sigma=\{\alpha_1,\alpha_3\}$, que depende de σ e π) é aniquilado por $\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{p})}^{w}$, isto é,

- $\pi(E_{12,s})(1\otimes 1)=0$, $\pi(E_{34,s})(1\otimes 1)=0$, $\pi(E_{21,s})(1\otimes 1)=0$, $\pi(E_{43,s})(1\otimes 1)=0$, $\pi(h_{1,s})(1\otimes 1)=0$, $\pi(h_{2,s})(1\otimes 1)=0$, $\pi(h_{3,s})(1\otimes 1)=0$, $\forall s\in\mathbb{Z}_{>0}$;
- $\pi(E_{23,m})(1\otimes 1)=0$, $\pi(E_{13,m})(1\otimes 1)=0$, $\pi(E_{24,m})(1\otimes 1)=0$, $\pi(E_{14,m})(1\otimes 1)=0$, $\forall m\in\mathbb{Z}$;
- $\pi(E_{21,0})(1\otimes 1)=0$, $\pi(E_{43,0})(1\otimes 1)=0$.

Considere

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}[x_{11,m},x_{33,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1,m},y_{2,m},y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*] \\ &= W_{1,1}(\lambda,\gamma)\otimes_{\mathbb{C}}W_{1,1}(\lambda',\gamma)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{2,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]\ , \end{aligned}$$

onde

$$W_{1,1}(\lambda,\gamma)=\mathbb{C}[x_{11,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]\ ,$$

$$W_{1,1}(\lambda',\gamma)=\mathbb{C}[x_{33,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]\ ,$$

isto é, o $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo (V,σ) do Teorema 4.7.1.

Considere também

$$\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*))\simeq\mathbb{C}[\partial_{x_{1,m}}\ ,\ \partial_{x_{2,m}}\ ,\ \partial_{x_{3,m}}\ ,\ \partial_{x_{4,m}}\mid m\in\mathbb{Z}].$$

Então,

$$\begin{aligned} W^{w}_{3,*}(\sigma,\pi) &= \mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*))\otimes_{\mathbb{C}}V \\ &\simeq \mathbb{C}[x_{11,m}\ ,\ x_{33,m}\ ,\ \partial_{x_{1,m}}\ ,\ \partial_{x_{2,m}}\ ,\ \partial_{x_{3,m}}\ ,\ \partial_{x_{4,m}}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1,m},y_{2,m},y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*] \end{aligned}$$

tal que

- $\pi:\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})\hookrightarrow\mathcal{R}^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{\mathrm{loc}}$ é o mergulho descrito no Teorema 4.7.2.
- $\partial_{x_{ii}}$, com $i=1,3$, age como uma derivação em V e x_{ii}, com $i=1,3$, age como multiplicação em V.

- ∂_{x_i}, with $1 \leq i \leq 4$, age como multiplicação em $\mathrm{Pol}(\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*))$, enquanto x_i, com $1 \leq i \leq 4$, age como uma derivação.

1. Precisamos verificar que $\pi(E_{23,s})(1 \otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}$. Temos

$$\begin{aligned}
\pi(E_{23}(z)) &= a_1(z)a_1^*(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z)a_1^*(z) + a_3(z)a_3^*(z)a_1^*(z) + a_4(z)a_2^*(z)a_3^*(z) + \\
&\quad + \sigma(E_{23})(z) + a_1^*(z)\sigma(h_2)(z) + a_2^*(z)\sigma(E_{21})(z) - a_3^*(z)\sigma(E_{43})(z) - \partial_z a_1^*(z)\sigma(c)\ ,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sigma(c) &= \gamma^2 - 2 = \mathbf{k} \\
\sigma(E_{21})(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sigma(E_{21,m})z^{-m-1} = a_{11}(z) \\
\sigma(E_{21,m}) &= \delta_{m<0}x_{11,m} + \delta_{m\geq 0}\partial_{x_{11,m}} \\
\sigma(E_{43})(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sigma(E_{43,m})z^{-m-1} = a_{33}(z) \\
\sigma(E_{43,m}) &= \delta_{m<0}x_{33,m} + \delta_{m\geq 0}\partial_{x_{33,m}} \\
\sigma(h_2)(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sigma(h_{2,m})z^{-m-1} = -:a_{11}(z)a_{11}^*(z): - :a_{33}(z)a_{33}^*(z): + b_2(z) \\
\sigma(h_{2,m}) &= -\sum_{k<0} a_{11,k}a^*_{11,m-k} - \sum_{k\geq 0} a^*_{11,m-k}a_{11,k} - \sum_{k<0} a_{33,k}a^*_{33,m-k} - \sum_{k\geq 0} a^*_{33,m-k}a_{33,k} + b_{2,m} \\
\sigma(E_{23})(z) &= 0
\end{aligned}$$

Podemos observar $\pi(E_{23}(z))$ detalhadamente.

$$\begin{aligned}
a_1(z)a_1^*(z)a_1^*(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_{1,r}z^{-r-1} \sum_{s\in\mathbb{Z}} a^*_{1,s}z^{-s} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a^*_{1,m}z^{-m} \\
&= \sum_{r,s,m\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,r}}\ x_{1,-s}\ x_{1,-m}\ z^{-r-s-m-1} \\
&= \sum_{r,s,m\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,r}}\ x_{1,s}\ x_{1,-m}\ z^{-r+s-m-1} \\
&= \sum_{r,s,m\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,r}}\ x_{1,s}\ x_{1,-m+r-s}\ z^{-m-1}.
\end{aligned}$$

Então, $\sum_{r,s\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,r}}\ x_{1,s}\ x_{1,-m+r-s}(1 \otimes 1) = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,r}}\ x_{1,s}\ x_{1,-m+r-s}(1) \otimes 1 = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, isto é, $a_1(z)a_1^*(z)a_1^*(z)(1 \otimes 1) = 0$. Analogamente, temos

$$a_2(z)a_2^*(z)a_1^*(z)(1 \otimes 1) = a_3(z)a_3^*(z)a_1^*(z)(1 \otimes 1) = a_4(z)a_2^*(z)a_3^*(z)(1 \otimes 1) = 0.$$

Também temos

$$\begin{aligned}
a_1^*(z)\sigma(h_2)(z) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} a^*_{1,p}z^{-p} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sigma(h_{2,m})z^{-m-1} \\
&= \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} a^*_{1,p-m}\sigma(h_{2,m})z^{-p-1} \\
&= \sum_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{1,m-p}\sigma(h_{2,m})z^{-p-1}.
\end{aligned}$$

Então, $\sum\limits_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{1,m-p}\sigma(h_{2,m})(1\otimes 1) = \sum\limits_{m,p\in\mathbb{Z}} x_{1,m-p}(1)\otimes\sigma(h_{2,m})(1) = 0\otimes\sigma(h_{2,m})(1) = 0$, $\forall p\in\mathbb{Z}$, isto é, $a_1^*(z)\sigma(h_2)(z)(1\otimes 1)=0$. Analogamente, temos

$$a_2^*(z)\sigma(E_{21})(z)(1\otimes 1) = a_3^*(z)\sigma(E_{43})(z)(1\otimes 1) = \partial_z a_1^*(z)\sigma(c)(1\otimes 1) = 0.$$

Portanto,

$$\pi(E_{23,s})(1\otimes 1) = 0 \quad , \quad \forall s\in\mathbb{Z}.$$

2. Por analogia ao caso anterior, temos que

$$\begin{aligned} \pi(E_{13,s})(1\otimes 1) &= 0 \quad , \quad \forall s\in\mathbb{Z}\ , \\ \pi(E_{24,s})(1\otimes 1) &= 0 \quad , \quad \forall s\in\mathbb{Z}\ , \\ \pi(E_{14,s})(1\otimes 1) &= 0 \quad , \quad \forall s\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3. Precisamos verificar que $\pi(E_{12,s})(1\otimes 1)=0$, $\forall s\in\mathbb{Z}_{>0}$. Temos que

$$\begin{aligned} \pi(E_{12}(z)) &= a_1(z)a_2^*(z) + a_3(z)a_4^*(z) + \sigma(E_{12})(z) \quad , \quad \text{onde} \\ \sigma(E_{12})(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sigma(E_{12,m})z^{-m-1} = -:a_{11}^*(z)a_{11}(z)a_{11}^*(z): - a_{11}^*(z)b_1(z) + \mathbf{k}\partial_z a_{11}^*(z). \end{aligned}$$

Da definição do módulo de Wakimoto Intermediário $W_{1,1}(\lambda,\gamma)$ sabemos que para $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ temos que $\sigma(E_{12,m})(1\otimes 1) = 1\otimes\sigma(E_{12,m})(1) = 1\otimes 0 = 0$.

$$\begin{aligned} a_1(z)a_2^*(z) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{1,p}z^{-p-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{2,m}^* z^{-m} = \sum_{p,m\in\mathbb{Z}} a_{1,p}a_{2,m-p}^* z^{-m-1} \\ &= \sum_{p,m\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,p}} x_{2,p-m} z^{-m-1}\ , \end{aligned}$$

isto é, para $\forall m\in\mathbb{Z}$ temos $\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}}\partial_{x_{1,p}}x_{2,p-m}(1\otimes 1) = \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}}\partial_{x_{1,p}}x_{2,p-m}(1)\otimes 1 = 0\otimes 1 = 0$.

Também, para $\forall m\in\mathbb{Z}$ temos $\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}}\partial_{x_{3,p}}x_{4,p-m}(1\otimes 1) = \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}}\partial_{x_{3,p}}x_{4,p-m}(1)\otimes 1 = 0$.

Portanto,

$$\pi(E_{12,s})(1\otimes 1) = 0 \quad , \quad \forall s\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

4. Por analogia ao caso anterior, temos que

$$\pi(E_{34,s})(1\otimes 1) = 0 \quad , \quad \forall s\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

5. Precisamos verificar que $\pi(E_{21,s})(1\otimes 1)=0$, $\forall s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Temos

$$\begin{aligned} \pi(E_{21}(z)) &= a_2(z)a_1^*(z) + a_4(z)a_3^*(z) + \sigma(E_{21})(z) \quad , \quad \text{onde} \\ \sigma(E_{21})(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sigma(E_{21,m})z^{-m-1} = a_{11}(z)\ , \\ \pi(E_{21,m}) &\mapsto \sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{2,p}}x_{1,p-m} + \sum_{p\in\mathbb{Z}}\partial_{x_{4,p}}x_{3,p-m} + \delta_{m<0}x_{11,m} + \delta_{m\geq 0}\partial_{x_{11,m}}. \end{aligned}$$

Da definição do módulo de Wakimoto Intermediário $W_{1,1}(\lambda,\gamma)$ sabemos que para $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ temos que $\sigma(E_{21,m})(1 \otimes 1) = 1 \otimes \sigma(E_{21,m})(1) = 1 \otimes 0 = 0$.

$$\begin{aligned} a_2(z)a_1^*(z) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{2,p}z^{-p-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{1,m}^* z^{-m} = \sum_{p,m\in\mathbb{Z}} a_{2,p}a_{1,m-p}^* z^{-m-1} \\ &= \sum_{p,m\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{2,p}} x_{1,p-m} z^{-m-1}\ , \end{aligned}$$

isto é, para $\forall m \in \mathbb{Z}$ temos que $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{2,p}} x_{1,p-m}(1\otimes 1) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{2,p}} x_{1,p-m}(1) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$.

Da mesma forma, para $\forall m \in \mathbb{Z}$ temos $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{4,p}} x_{3,p-m}(1\otimes 1) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{4,p}} x_{3,p-m}(1) \otimes 1 = 0$.

Portanto,

$$\pi(E_{21,s})(1\otimes 1) = 0 \quad , \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

6. Por analogia ao caso anterior, temos que

$$\pi(E_{43,s})(1\otimes 1) \;=\; 0 \quad , \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

7. Precisamos verificar que $\pi(h_{1,s})(1\otimes 1) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Temos que

$$\begin{aligned} \pi(h_1(z)) &= -a_1(z)a_1^*(z) + a_2(z)a_2^*(z) - a_3(z)a_3^*(z) + a_4(z)a_4^*(z) + \sigma(h_1)(z) \quad , \quad \text{onde} \\ \sigma(h_1)(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sigma(h_{1,m})z^{-m-1} = 2 : a_{11}(z)a_{11}^*(z) : + b_1(z). \end{aligned}$$

Da definição do módulo de Wakimoto Intermediário $W_{1,1}(\lambda,\gamma)$ sabemos que para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ temos que $\sigma(h_{1,m})(1 \otimes 1) = 1 \otimes \sigma(h_{1,m})(1) = 1 \otimes 0 = 0$.

$$\begin{aligned} a_1(z)a_1^*(z) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{1,p}z^{-p-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{1,m}^* z^{-m} = \sum_{p,m\in\mathbb{Z}} a_{1,p}a_{1,m-p}^* z^{-m-1} \\ &= \sum_{p,m\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,p}} x_{1,p-m} z^{-m-1}\ , \end{aligned}$$

isto é, para $\forall m \in \mathbb{Z}$ temos que $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,p}} x_{1,p-m}(1\otimes 1) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{1,p}} x_{1,p-m}(1) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$.

Similarmente, para $\forall m \in \mathbb{Z}$ temos que $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{j,p}} x_{j,p-m}(1\otimes 1) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \partial_{x_{j,p}} x_{j,p-m}(1) \otimes 1 = 0$, com $j = 2, 3, 4$.

Portanto,

$$\pi(h_{1,s})(1\otimes 1) = 0 \quad , \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

8. Por analogia ao caso anterior, temos que

$$\begin{aligned} \pi(h_{2,s})(1\otimes 1) &= 0 \quad , \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{>0}\ , \\ \pi(h_{3,s})(1\otimes 1) &= 0 \quad , \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{>0}. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\pi(h_{1,0})(1\otimes 1) &= 0\otimes 1+1\otimes\sigma(h_{1,0})(1)=1\otimes(\lambda_1\cdot 1)=\lambda_1(1\otimes 1).\\ \pi(h_{2,0})(1\otimes 1) &= 0\otimes 1+1\otimes\sigma(h_{2,0})(1)=1\otimes(\lambda_2\cdot 1)=\lambda_2(1\otimes 1).\\ \pi(h_{3,0})(1\otimes 1) &= 0\otimes 1+1\otimes\sigma(h_{3,0})(1)=1\otimes(\lambda_3\cdot 1)=\lambda_3(1\otimes 1).\end{aligned}$$

10. Além disso, genericamente, esse novo módulo é isomorfo a um módulo de Verma Imaginário generalizado.

□

4.8 Construção de novos módulos de Wakimoto Intermediários

Observamos o seguinte padrão nas construções dos módulos de Wakimoto Intermediários $W_{n,r}(\lambda,\gamma)$, com $0\le r<n$, a partir da realização geométrica, no que diz respeito a escolha do $\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}$-módulo V:

- Caso $(n=1, r=0)$:

$$V=\mathbb{C}[y_{1,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]\quad,\quad \sigma(h_m)=b_m\quad,\quad \sigma(h_1)(z)=b_1(z).$$

- Caso $(n=2, r=0)$:

$$V=\mathbb{C}[x_{11,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1,m},y_{2,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]=W_{1,0}(\lambda,\gamma)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{2,m}\mid m\in\mathbb{N}^*].$$

- Caso $(n=2, r=1)$:

$$V=\mathbb{C}[x_{11,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1,m},y_{2,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]=W_{1,1}(\lambda,\gamma)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{2,m}\mid m\in\mathbb{N}^*].$$

- Caso $(n=3, r=0)$:

$$V=\mathbb{C}[x_{11,m},x_{12,m},x_{22,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1,m},y_{2,m},y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]=W_{2,0}(\lambda,\gamma)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*].$$

- Caso $(n=3, r=1)$:

$$V=\mathbb{C}[x_{11,m},x_{12,m},x_{22,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1,m},y_{2,m},y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]=W_{2,1}(\lambda,\gamma)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*].$$

- Caso $(n=3, r=2)$:

$$V=\mathbb{C}[x_{11,m},x_{12,m},x_{22,m}\mid m\in\mathbb{Z}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{1,m},y_{2,m},y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*]=W_{2,2}(\lambda,\gamma)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{3,m}\mid m\in\mathbb{N}^*].$$

Então, indutivamente, para o caso (n,r), com $0\le r<n$, temos que

$$V=W_{n-1,r}(\lambda,\gamma)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[y_{n,a}\mid a\in\mathbb{N}^*]. \tag{4.35}$$

Analisando o novo módulo de Wakimoto Intermediário construído anteriormente através dos Teoremas 4.7.1, 4.7.2, 4.7.3 e dos seguintes dados

- $(n = 3\ ,\ I = \{1,2,3\}\ ,\ X = \{1,3\}$ é um conjunto ordenado não-consecutivo , $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_3\})$:

$$\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} = \big(\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}) \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})\big) + \widehat{\mathfrak{h}}\ ,$$

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}[x_{11,m}, x_{33,m} \mid m \in \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m} \mid m \in \mathbb{N}^*] \\ &= W^{\alpha_1}_{1,1}(\lambda,\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} W^{\alpha_3}_{1,1}(\lambda',\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{2,m} \mid m \in \mathbb{N}^*]\ , \end{aligned}$$

indutivamente podemos concluir que

- Novos casos: $(n\ ,\ I = \{1,\dots,n\}\ ,\ X = X_s \cup X_t \subset I$ é um conjunto ordenado não-consecutivo, $|X| < n$, onde $X_s = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ e $X_t = \{j_1, j_2, \dots, j_t\}$ são conjuntos ordenados consecutivos, $\Sigma = \{\alpha^s_{i_1}, \alpha^s_{i_2}, \dots, \alpha^s_{i_s}, \alpha^t_{j_1}, \alpha^t_{j_2}, \dots, \alpha^t_{j_t}\})$:

$$\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} = \big(\widehat{\mathfrak{sl}}(s+1,\mathbb{C}) \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(t+1,\mathbb{C})\big) + \widehat{\mathfrak{h}}\ ,$$

$$V = W^{\alpha^s_{i_1},\alpha^s_{i_2},\dots,\alpha^s_{i_s}}_{s,s}(\lambda,\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} W^{\alpha^t_{j_1},\alpha^t_{j_2},\dots,\alpha^t_{j_t}}_{t,t}(\lambda',\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{i,a} \mid i \in I \setminus X\ ,\ a \in \mathbb{N}^*]\ ,$$

visto que nesse caso V terá uma estrutura de $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo (seguindo a ideia do Teorema 4.7.1) e através da realização geométrica π (seguindo a ideia do Teorema 4.7.2) teremos que o novo módulo (genericamente) será isomorfo a um módulo de Verma Imaginário generalizado (seguindo a ideia do Teorema 4.7.3). Segue uma conjectura dessa possível generalização:

Conjectura 4.8.1. *Sejam $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(n+1,\mathbb{C})$, $I = \{1,\dots,n\}$, um conjunto ordenado não-consecutivo $X = X_s \cup X_t \subset I$, $|X| < n$, onde $X_s = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ e $X_t = \{j_1, j_2, \dots, j_t\}$ são conjuntos ordenados consecutivos. Considere $\Sigma = \{\alpha^s_{i_1}, \alpha^s_{i_2}, \dots, \alpha^s_{i_s}, \alpha^t_{j_1}, \alpha^t_{j_2}, \dots, \alpha^t_{j_t}\}$ e*

$$V = W^{\alpha^s_{i_1},\alpha^s_{i_2},\dots,\alpha^s_{i_s}}_{s,s}(\lambda,\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} W^{\alpha^t_{j_1},\alpha^t_{j_2},\dots,\alpha^t_{j_t}}_{t,t}(\lambda',\gamma) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y_{i,a} \mid i \in I \setminus X\ ,\ a \in \mathbb{N}^*]\ ,$$

onde $\gamma \in \mathbb{C}^*$, λ e λ' são genéricos, e $\lambda(c)$ e $\lambda'(c)$ são não-nulos. Considere a subálgebra parabólica natural $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\text{nat}}$, onde $\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}} = \big(\widehat{\mathfrak{sl}}(s+1,\mathbb{C}) \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(t+1,\mathbb{C})\big) + \widehat{\mathfrak{h}}$, ou seja, $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$ é definida por Σ. Então (V,σ) é um $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$-módulo, onde $\sigma : \widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}} \to \mathfrak{gl}(V)$ é definida através das estruturas de $\widehat{\mathfrak{sl}}(s+1,\mathbb{C})$-módulo de $W^{\alpha^s_{i_1},\alpha^s_{i_2},\dots,\alpha^s_{i_s}}_{s,s}(\lambda,\gamma)$ e $\widehat{\mathfrak{sl}}(t+1,\mathbb{C})$-módulo de $W^{\alpha^t_{j_1},\alpha^t_{j_2},\dots,\alpha^t_{j_t}}_{t,t}(\lambda',\gamma)$, que são módulos de Wakimoto Intermediários.

4.9 Critério de Irredutibilidade

Os resultados apresentados nesta seção estão presentes em [GKM+23], trabalho do qual o doutorando autor desta tese fez parte, onde com outros pesquisadores foram investigadas propriedades relacionadas aos módulos de Verma Imaginários generalizados. Em [GKM+23] foi desenvolvida uma técnica geral de construção de novos módulos de peso irredutíveis para qualquer álgebra de Kac-Moody afim usando a indução parabólica, no caso em que o fator de Levi de uma subálgebra parabólica tem dimensão infinita e a carga central é diferente de zero. A abordagem unificou e generalizou todos os resultados previamente conhecidos com restrições impostas aos módulos induzidos.

Observamos que a realização geométrica [FKS19] apresentada anteriormente, está intimamente relacionada com os módulos de Verma Imaginários generalizados (Teorema 4.1.4). Consequentemente, o novo módulo de Wakimoto Intermediário construído na Seção 4.7 - chamado de **módulo de Wakimoto Imaginário generalizado** - também está relacionado.

Seja $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$ uma subálgebra parabólica de $\widehat{\mathfrak{g}}$ do tipo II (veja Capítulo 1, Seção 1.2).

Utilizaremos nesta seção a notação utilizada em [GKM+23]. Para isso definiremos alguns objetos. Sejam $a \in \mathbb{C}$ e V um $\widehat{\mathfrak{p}}$-módulo com carga central a tal que $\widehat{\mathfrak{u}} \cdot V = 0$. Então o **módulo de Verma Imaginário generalizado** com carga central a é o $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo induzido

$$M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{p}})} V.$$

Se M é um $\widehat{\mathfrak{l}^0}$-módulo de peso (com respeito a $\widehat{\mathfrak{h}}$) com carga central a e S é um $(G(\widehat{\mathfrak{l}})^{\perp} \oplus \mathbb{C}d)$-módulo com mesma carga central e ação diagonalizável de d, onde G é a subálgebra de Heisenberg de $\widehat{\mathfrak{g}}$ e $d \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ é responsável por uma $\mathbb{Z}$-graduação em G, então $M \otimes S$ é um $\widehat{\mathfrak{l}}$-módulo. Tais $\widehat{\mathfrak{l}}$-módulos são chamados de **módulos tensor** (*tensor modules*).

Seja $\mathcal{T} = \mathcal{T}_a(\widehat{\mathfrak{l}})$ a categoria de $\widehat{\mathfrak{l}}$-módulos tensor com carga central a. Qualquer $V \in \mathcal{T}_a(\widehat{\mathfrak{l}})$ tem uma estrutura de um $\widehat{\mathfrak{p}}$-módulo com a ação trivial do radical $\widehat{\mathfrak{u}}$. Além disso, a indução de um $\widehat{\mathfrak{p}}$-módulo a um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo define o funtor $\mathbb{I}^{\mathcal{T}}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}$ da categoria dos $\widehat{\mathfrak{l}}$-módulos tensor com carga central a para a categoria dos $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos de peso.

O seguinte teorema, presente em [GKM+23], fornece uma ferramenta para a construção de novos módulos irredutíveis para todas as álgebras de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}$:

Teorema 4.9.1 ([GKM+23]). *Se $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então o funtor $\mathbb{I}^{\mathcal{T}}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}$ preserva a irredutibilidade.*

Denote por $\mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{l}})$ a categoria de todos os $\widehat{\mathfrak{l}}$**-módulos de peso** (i.e. $\widehat{\mathfrak{h}}$-diagonalizável) com carga central a, e por $\mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{g}})$ a categoria de todos $\widehat{\mathfrak{g}}$**-módulos de peso** com a mesma carga central. Então temos o seguinte **funtor (indução) Imaginário**

$$\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}} \colon \mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{l}}) \to \mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{g}}), \tag{4.36}$$

que envia um $\widehat{\mathfrak{l}}$-módulo V no $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$.

Relembremos o seguinte critério de irredutibilidade para $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos tensor admissíveis que segue de [FK18]:

Teorema 4.9.2 (V. Futorny e I. Kashuba [FK18])**.** *Seja $a \in \mathbb{C}$, $\widehat{\mathfrak{l}} = \widehat{\mathfrak{l}^0} + G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ e $V \simeq M \otimes S$, onde M é um $\widehat{\mathfrak{l}^0}$-módulo de peso irredutível e S é um $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$-módulo $\mathbb{Z}$-graduado admissível irredutível. Se $a \neq 0$ então $\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = \mathbb{I}^{\mathcal{T}}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ é $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo irredutível.*

Em [GKM+23] temos a seguinte generalização do Teorema 4.9.2:

Teorema 4.9.3 ([GKM+23])**.** *Seja $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e seja $V = M \otimes S$ um $\widehat{\mathfrak{l}}$-módulo tensor de peso irredutível, onde M é um $\widehat{\mathfrak{l}^0}$-módulo de peso e S é um $(G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp \oplus \mathbb{C}d)$-módulo com ação diagonalizável de d. Considere V como um $\widehat{\mathfrak{p}}$-módulo com ação trivial do radical $\widehat{\mathfrak{u}}$. Então o $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo de Verma Imaginário generalizado $\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ é irredutível.*

Demonstração. Veja [GKM+23], Teorema 3.7. □

Seja $W_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}}(V) = \mathrm{Pol}\,\Omega_{\mathcal{K}}(\overline{\mathfrak{u}}^*) \otimes_{\mathbb{C}} V$ (veja Seção 4.1). O $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo $W_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}}(V)$ também é chamado de **módulo de Wakimoto Imaginário generalizado** devido a sua similaridade com módulos de Verma Imaginários generalizados. De fato, temos um isomorfismo de $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos

$$W_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}}(V) \simeq M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}}(V)$$

para qualquer $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}}$-módulo V (veja Seção 4.1, Teorema 4.1.4).

Como já dito anteriormente, famílias de módulos de Wakimoto Imaginários generalizados foram estudados em [Cox05], [CF04] e [CF06] sobre o nome de módulos de Wakimoto Intermediários.

Aplicando o Teorema 4.9.3 obtemos imediatamente:

Corolário 4.9.1. *Seja V um módulo tensor irredutível sobre o fator de Levi $\widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}}$ com carga central $a \neq 0$. Então $W_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}}(V)$ é irredutível.*

Definimos o seguinte **funtor Wakimoto Imaginário**

$$\mathbb{IW}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\mathrm{nat}}} \colon \mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{l}}_{\mathrm{nat}}) \to \mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{g}}), \tag{4.37}$$

que envia um $\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}$-módulo V em um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo $W_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}}(V)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(a,\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}) \arrow[d, bend right=60, swap, "\text{funtor Wakimoto Imaginário}\quad \mathbb{IW}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}}"] \arrow[d, "\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}}\quad \text{funtor indução Imaginário}"] \\
\mathcal{M}(a,\widehat{\mathfrak{g}})
\end{tikzcd}$$

Se tomarmos o $\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}$-módulo de Wakimoto $W_{\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}}(\lambda)$ com peso máximo λ então $\mathbb{IW}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}}(W_{\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}}(\lambda))$ é um módulo de Wakimoto Intermediário para a subálgebra parabólica $\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}$. Para um λ genérico (genérico é aquele para o qual $M_{\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}}(\lambda)$ é irredutível) temos um isomorfismo $M_{\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}}(\lambda) \simeq W_{\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}}(\lambda)$ e então

$$\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}}(M_{\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}}(\lambda)) \simeq \mathbb{IW}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}}(W_{\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}}(\lambda)).$$

Além disso, se $\lambda(c) \neq 0$ então $\mathbb{IW}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}_{\text{nat}}}(W_{\widehat{\mathfrak{l}}_{\text{nat}}}(\lambda))$ é irredutível pelo Teorema 4.9.3.

Portanto, se $\pi(c) = \sigma(c) = \mathbf{k} \neq 0$ temos que o novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$-módulo $W^{w}_{3,*}(\sigma,\pi)$, construído na Seção 4.7, é irredutível.

Pretendemos futuramente estudar mais profundamente a estrutura de submódulos dos módulos de Wakimoto Imaginários generalizados utilizando o critério de irredutibilidade de tais módulos apresentado aqui, juntamente com os estudos apresentados em [CF06]. Também planejamos estudar a localização de tais módulos.

Capítulo 5

Módulos de Verma Imaginários Reduzidos e a categoria $\mathcal{O}_{red,im}$

Os resultados apresentados nesse capítulo seguem de um trabalho que está em andamento entre o autor desta tese, com seu orientador Vyacheslav Futorny e o colaborador Juan Camilo Arias [AFdO23]. Investigamos propriedades relacionadas aos módulos de Verma Imaginários Reduzidos e uma categoria $\mathcal{O}_{red,im}$ associada a esses módulos. Verificamos que os $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos de Verma Imaginários Reduzidos irredutíveis $\tilde{M}(\lambda)$, com $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$, são objetos dessa categoria, enquanto os módulos de loop $\hat{M} = M \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, onde M é um $\mathfrak{g}$-módulo na categoria $\mathcal{O}$, não são objetos de $\mathcal{O}_{red,im}$. Mostramos que a categoria $\mathcal{O}_{red,im}$ é uma categoria semissimples (abeliana) onde os módulos de Verma Imaginários Reduzidos irredutíveis $\tilde{M}(\lambda)$ são os seus objetos simples, e se M é um objeto arbitrário em $\mathcal{O}_{red,im}$, então $M \cong \bigoplus_{\lambda_i \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}} \tilde{M}(\lambda_i)$, para alguns $\lambda_i's$. Além disso, a categoria $\mathcal{O}_{red,im}$ é fechada sob subquocientes e somas diretas.

5.1 Módulos de Verma Imaginários Reduzidos

Sejam $I_0 = \{1, \ldots, N\}$ e Δ_0 o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ with θ sendo a raiz positiva mais longa. Denotemos por Q_0 e P_0 a estrutura de raízes e pesos de $\mathfrak{g}$. Seja $I = \{0, 1, \ldots, N\}$, $\widehat{\Delta}$ o sistema de raízes de $\widehat{\mathfrak{g}}$ com raízes simples $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ e seja $\delta = \alpha_0 + \theta$ a **raiz imaginária indivisível**. Q denota a estrutura de raízes, P a estrutura de pesos, e $\check{Q}$, $\check{P}$ denota a estrutura de corraízes e copesos, respectivamente. $\widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}$ e $\widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}$ denotam os conjuntos de raízes reais e imaginárias de $\widehat{\Delta}$.

Seja S uma partição fechada do sistema de raízes $\widehat{\Delta}$. Seja $\widehat{\mathfrak{g}}$ a álgebra de Kac-Moody afim não-torcida que tem, com respeito a partição S, a decomposição triangular $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}}_S \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{-S}$, onde

$\widehat{\mathfrak{g}}_S = \bigoplus_{\alpha\in S} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ e $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ é uma subálgebra de Cartan afim estendida. Sejam $U(\widehat{\mathfrak{g}}_S)$ e $U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-S})$, respectivamente, as álgebras envolventes universais de $\widehat{\mathfrak{g}}_S$ e $\widehat{\mathfrak{g}}_{-S}$. Para mais detalhes, veja a Seção 1.2 do Capítulo 1.

Seja $\lambda \in P$. Um $U(\widehat{\mathfrak{g}})$-módulo de peso V é chamado de um S-**módulo de peso máximo com respeito ao peso** λ se existe algum vetor não-nulo $v \in V$ tal que:

- $u \cdot v = 0$ para todo $u \in \widehat{\mathfrak{g}}_S$.
- $h \cdot v = \lambda(h)v$ para todo $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$.
- $V = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \cdot v \cong U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-S}) \cdot v$.

No que segue, consideraremos S como a partição natural de $\widehat{\Delta}$, i.e., $S = \widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}$ e então $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{g}}_{\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}} \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ (veja 1.23). Podemos considerar $\mathbb{C}$ como um $U(\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}})$-módulo tomando um vetor gerador v e definindo $(x+h)\cdot v = \lambda(h)v$, para todos $x \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}}$ e $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$. O módulo induzido

$$M(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}})} \mathbb{C}v \cong U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}}) \otimes \mathbb{C}v$$

é chamado de **módulo de Verma Imaginário** com $\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}$-**peso máximo** λ. Equivalentemente, podemos definir $M(\lambda)$ como segue: seja $I_{\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}}(\lambda)$ o ideal de $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ gerado por $e_{ik} := e_i \otimes t^k$, $h_{is} := h_i \otimes t^s$ para $i \in I_0$, $k \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, e por $h_i - \lambda(h_i)\cdot 1$, $d - \lambda(d)\cdot 1$ e $c - \lambda(c)\cdot 1$. Então $M(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}})/I_{\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}}(\lambda)$.

As principais propriedades desses módulos, válidas para qualquer álgebra de Kac-Moody afim, foram provadas em [Fut94], e estão descritas a seguir:

Proposição 5.1.1 (V. Futorny [Fut94]). *Sejam $\lambda \in P$ e $M(\lambda)$ o módulo de Verma Imaginário de $\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}$-peso máximo λ. Então $M(\lambda)$ tem as seguintes propriedades:*

1. *O módulo $M(\lambda)$ é um $U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}})$-módulo livre de rank 1 gerado pelo vetor de $\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}$-peso máximo $(1\otimes 1)$ de peso λ.*
2. *$M(\lambda)$ tem um único submódulo maximal.*
3. *Seja V um $U(\widehat{\mathfrak{g}})$-módulo gerado por algum vetor $\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}$-peso máximo v de peso λ. Então existe um único homomorfismo sobrejetor $\phi : M(\lambda) \to V$ tal que $(1\otimes 1) \mapsto v$.*
4. *$\dim M(\lambda)_\lambda = 1$; para qualquer $\mu = \lambda - k\delta$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $0 < \dim M(\lambda)_\mu < \infty$; se $\mu \neq \lambda - k\delta$ para qualquer inteiro $k \geq 0$ e $M(\lambda)_\mu \neq 0$, então $\dim M(\lambda)_\mu = \infty$.*
5. *Sejam $\lambda, \mu \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$. Qualquer elemento não-nulo de $\mathrm{Hom}_{U(\widehat{\mathfrak{g}})}(M(\lambda), M(\mu))$ é injetor.*

6. O módulo $M(\lambda)$ é irredutível se, e somente se, $\lambda(c) \neq 0$.

Demonstração. Veja [Fut94], Proposição 1 e Teorema 1. □

Suponha agora que $\lambda(c) = 0$ e considere o ideal $J_{\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}}(\lambda)$ gerado por $I_{\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}}(\lambda)$ e h_{is}, $i \in I_0$ e $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Em outras palavras, incluímos os elementos h_{is} com $i \in I_0, s \in \mathbb{Z}_{<0}$ nos geradores de $I_{\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}}(\lambda)$. Seja

$$\tilde{M}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}})/J_{\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}}(\lambda). \tag{5.1}$$

Então $\tilde{M}(\lambda)$ é imagem homomórfica de $M(\lambda)$ (pelo item (*3.*) da Proposição 5.1.1) que será chamado de **módulo de Verma Imaginário Reduzido**. O seguinte resultado está provado em [Fut94], Teorema 1:

Proposição 5.1.2 (V. Futorny [Fut94])**.** *$\tilde{M}(\lambda)$ é irredutível se, e somente se, $\lambda(h_i) \neq 0$ para todo $i \in I_0$.*

5.2 A categoria $\mathcal{O}_{red,im}$

Apresentaremos nessa seção uma categoria cujos objetos incluem os módulos de Verma Imaginários Reduzidos irredutíveis.

Considere a subálgebra de Heisenberg G de $\widehat{\mathfrak{g}}$, que por definição é

$$G = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} \oplus \mathbb{C}c. \tag{5.2}$$

Dizemos que um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo V é G-**compatível** se:

(i) V tem uma decomposição $V = T(V) \oplus TF(V)$ onde $T(V)$ e $TF(V)$ são G-módulos não-nulos, chamados, respectivamente, de **módulo de torção** (*torsion*) e **módulo livre de torção** (*torsion free*) associados a V.

(ii) h_{im} para $i \in I_0$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ age bijetivamente em $TF(V)$, isto é, eles são bijeções em $TF(V)$.

(iii) $TF(V)$ não possui $\widehat{\mathfrak{g}}$-submódulos não-nulos.

(iv) $G \cdot T(V) = 0$.

Considere o conjunto

$$\widehat{\mathfrak{h}}^*_{red} = \{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^* \mid \lambda(c) = 0, \lambda(h_i) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ para qualquer } i \in I_0\}. \tag{5.3}$$

Definimos a **categoria** $\mathcal{O}_{red,im}$ como a categoria cujos objetos são $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos M tais que:

1. M é $\widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$-diagonalizável, ou seja,

$$M = \bigoplus_{\nu \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}} M_\nu, \text{ onde } M_\nu = \{m \in M | h_i m = \nu(h_i)m, dm = \nu(d)m, i \in I_0\}. \tag{5.4}$$

2. Para qualquer $i \in I_0$ e qualquer $s \in \mathbb{Z}$, e_{is} age localmente nilpotentemente.
3. M é G-compatível.
4. Os morfismos entre os módulos são $\widehat{\mathfrak{g}}$-homomorfismos.

Exemplo 5.2.1. Os módulos de Verma Imaginários Reduzidos pertencem à $\mathcal{O}_{red,im}$. De fato, para $\tilde{M}(\lambda)$ considere $T(\tilde{M}(\lambda)) = \mathbb{C}v_\lambda$ e $TF(\tilde{M}(\lambda)) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}, n_1,\ldots,n_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{M}(\lambda)_{\lambda + k\delta - n_1\alpha_1 - \ldots - n_N\alpha_N}$, e no mínimo para algum índice j temos $n_j \neq 0$. Além disso, somas diretas de módulos de Verma Imaginários Reduzidos pertencem à $\mathcal{O}_{red,im}$.

Um $\widehat{\mathfrak{g}}$**-módulo de loop** é qualquer representação da forma $\hat{M} := M \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ onde M é um $\mathfrak{g}$-módulo e a ação de $\widehat{\mathfrak{g}}$ em $\hat{M}$ é dada por

$$(x \otimes t^k)(m \otimes t^s) := (x \cdot m) \otimes t^{k+s} \quad , \quad c(m \otimes t^s) = 0$$

para $x \in \mathfrak{g}$, $m \in M$ e $k, s \in \mathbb{Z}$. Aqui $x \cdot m$ é a ação de $x \in \mathfrak{g}$ em $m \in M$.

A **categoria** $\mathcal{O}$ (também conhecida como **categoria BGG**), introduzida por J. Bernstein (1945−), I. M. Gel'fand (1913 − 2009) e S. I. Gel'fand [BGG76] , é definida como a subcategoria plena de $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ (a categoria dos $\mathfrak{g}$-módulos) cujos objetos são os $\mathfrak{g}$-módulos M que satisfazem as seguintes três condições:

$\mathcal{O}_1$. M é um $U(\mathfrak{g})$-módulo finitamente gerado.

$\mathcal{O}_2$. M é $\mathfrak{h}$-semissimples, isto é, M é um módulo de peso: $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$.

$\mathcal{O}_3$. M é localmente $\mathfrak{n}$-finito: para cada $v \in M$, o subespaço $U(\mathfrak{n}) \cdot v$ de M tem dimensão finita.

Proposição 5.2.1. *Seja M um $\mathfrak{g}$-módulo na categoria $\mathcal{O}$ (categoria BGG). Então o módulo de loop $\hat{M}$ não pertence à $\mathcal{O}_{red,im}$.*

Demonstração. Sejam $M \in \mathcal{O}$ e $\hat{M}$ o módulo de loop associado. Se M tem dimensão finita, ele é uma soma direta de $\mathfrak{g}$-módulos irredutíveis de dimensão finita, e estes tem pesos máximos que são inteiros não-negativos quando avaliados em h_i para qualquer $i \in I_0$. Então, a condição (1.) não é satisfeita e $\hat{M}$ não pertence à $\mathcal{O}_{red,im}$.

Assuma agora que M é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão infinita. Como ele é um objeto na categoria $\mathcal{O}$ ele é localmente $\mathfrak{n}$-finito, e assim temos que $\hat{M}$ satisfaz (2.). Se (1.) não é satisfeita, então acabou. Vamos assumir que (1.) seja satisfeita por $\hat{M}$ e também que ele é G-compatível, ou seja, $\hat{M} = T(\hat{M}) \oplus TF(\hat{M})$ satisfaz (i) - (iv), como acima. Considere um elemento não-nulo qualquer $\sum_{i=-k}^{k} m_i \otimes t^i \in T(\hat{M})$ com $m_i \in M_\mu$ para algum peso $\overline{\mu} \in \widehat{\mathfrak{h}}_{red}^*$. Então, por (iv) temos que

$$0 = (h_j \otimes t^r) \left(\sum_{i=-k}^{k} m_i \otimes t^i \right) = \sum_{i=-k}^{k} (h_j \cdot m_i) \otimes t^{i+r} = \overline{\mu}(h_j) \left(\sum_{i=-k}^{k} m_i \otimes t^{i+r} \right)$$

onde $j \in I_0$, $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Assim $\overline{\mu}(h_j) = 0$, para qualquer $j \in I_0$, o que contradiz $\overline{\mu} \in \widehat{\mathfrak{h}}_{red}^*$. Então $T(\hat{M}) = 0$ e $\hat{M} = TF(\hat{M})$ que é um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo contradizendo (i) and (iii), e então (3.). Isto completa a demonstração. □

5.3 Propriedades da categoria $\mathcal{O}_{red,im}$

Nesta seção mostraremos que a categoria $\mathcal{O}_{red,im}$ é uma categoria semissimples (abeliana) onde os módulos de Verma Imaginários Reduzidos irredutíveis são os seus objetos simples.

Definição 5.3.1. Em uma categoria abeliana, um **subobjeto** Y de X é um objeto Y munido com um monomorfismo $i : Y \to X$. Um objeto não-nulo X em uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ é um **objeto simples** se 0 e X são os seus únicos subobjetos (a menos de isomorfismo). Um objeto X em $\mathcal{C}$ é **semissimples** se ele é uma soma direta de objetos simples. A categoria $\mathcal{C}$ é **semissimples** (abeliana) se todos os seus objetos são semissimples.

A proposição a seguir mostra que os módulos de Verma Imaginários Reduzidos não possuem extensões não-triviais em $\mathcal{O}_{red,im}$.

Teorema 5.3.1 ([AFdO23])**.** *Se* $\lambda, \mu \in \widehat{\mathfrak{h}}_{red}^*$ *então* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{red,im}}(\tilde{M}(\lambda), \tilde{M}(\mu)) = 0$.

Demonstração. Seja M uma extensão de $\tilde{M}(\lambda)$ e $\tilde{M}(\mu)$ que se encaixa na seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \tilde{M}(\lambda) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} \tilde{M}(\mu) \longrightarrow 0.$$

Suponhamos que $\mu = \lambda + k\delta - \sum_{i=1}^{N} s_i \alpha_i$, com $s_i, k \in \mathbb{Z}$, e todos os s_i's tem o mesmo sinal ou são iguais a 0. Primeiramente, consideremos o caso quando $s_i = 0$ para todos $i \in I_0$. Neste caso $\mu = \lambda + k\delta$ e então, em M existirão dois vetores v_λ e v_μ de pesos λ e μ, respectivamente, aniquilados por $\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Além disso, por conta da condição (iv) na definição da G-compatibilidade, estes dois pontos são isolados. Então, os vetores v_λ e v_μ são vetores de peso máximo e cada um gera uma subrepresentação irredutível, isomorfa a $\tilde{M}(\lambda)$ e $\tilde{M}(\mu)$, respectivamente. Assim, a extensão cinde. Dessa forma, podemos assumir que nem todos s_i são iguais a zero e que a aplicação $\iota : \tilde{M}(\lambda) \to M$ na sequência exata curta é uma inclusão.

Assumiremos que $s_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para todo i e nem todos são nulos. Seja $\overline{v}_\mu \in M$ uma pré-imagem sob a aplicação π de um vetor de peso máximo $v_\mu \in \tilde{M}(\mu)$ de peso μ. Temos que $(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}])v_\mu = Gv_\mu = 0$, e mostraremos que $G\overline{v}_\mu = 0$. Se $\overline{v}_\mu \in T(M)$ então acabou. Assumiremos que $\overline{v}_\mu \notin T(M)$ e então teremos que $T(M) = \mathbb{C}v_\lambda$. De fato, temos que $\mathbb{C}v_\lambda \subset T(M)$. Se $u \in T(M) \setminus \mathbb{C}v_\lambda$ é algum elemento de peso não-nulo, então $G \cdot u = 0$ e $\pi(u)$ pertence a $T(\tilde{M}(\mu)) = \mathbb{C}v_\mu$. Se $\pi(u) = 0$ então $u \in \tilde{M}(\lambda)$, que é uma contradição. Se $\pi(u)$ é um múltiplo não-nulo de v_μ, então u tem peso μ e então u é um múltiplo de $\overline{v}_\mu$, que é uma contradição novamente. Então, assumiremos que $T(M) = \mathbb{C}v_\lambda$.

Notemos que para qualquer $i \in I_0$ e $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ temos $0 = h_{im}v_\mu = h_{im}\pi(\overline{v}_\mu) = \pi(h_{im}\overline{v}_\mu)$, então $h_{im}\overline{v}_\mu \in \tilde{M}(\lambda)$. Suponha que existe $j \in I_0$ tal que $h_{jm}\overline{v}_\mu \neq 0$ para $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Como $h_{jm}\overline{v}_\mu \in \tilde{M}(\lambda)$ com peso $\mu + m\delta$, ele pertence a $TF(\tilde{M}(\lambda))$. Assim, existe um $v' \in \tilde{M}(\lambda)$ não-nulo de peso μ tal que $h_{jm}\overline{v}_\mu = h_{jm}v'$. Então, $h_{jm}(\overline{v}_\mu - v') = 0$, implicando que $\overline{v}_\mu - v' \in T(M) \cong \mathbb{C}v_\lambda$. Logo, $\overline{v}_\mu - v' = p\ v_\lambda$, para algum $p \in \mathbb{C}$. Comparando os pesos chegamos em uma contradição. Assim, $h_{in}\overline{v}_\mu = 0$, para qualquer $i \in I_0$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Portanto, $G\overline{v}_\mu = 0$.

Sabemos que os operadores e_{in} agem localmente nilpotentemente em $\tilde{M}(\lambda)$. Afirmamos que $e_{in}\overline{v}_\mu = 0$, para todo $i \in I_0$ e $n \in \mathbb{Z}$. De fato, assuma que $e_{jm}\overline{v}_\mu \neq 0$ para algum $j \in I_0$ e algum inteiro m. Então, $e_{jm}\overline{v}_\mu \in \tilde{M}(\lambda)$. Considere a $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-subálgebra $\mathfrak{s}(j)$ gerada por f_{jn}, e_{jn} e h_{jl} para $n, l \in \mathbb{Z}$. Seja M_j um $\mathfrak{s}(j)$-submódulo de M gerado por $\overline{v}_\mu$. Então M_j é uma extensão de $\mathfrak{s}(j)$-módulos de Verma Imaginários Reduzidos, onde um deles tem peso máximo μ. Como $M \in \mathcal{O}_{red,im}$, temos imediatamente que M_j é um objeto da correspondente categoria reduzida $\mathcal{O}_{red,im}(\mathfrak{s}(j))$ para $\mathfrak{s}(j)$. Mas esta categoria é semissimples por [CFM17]. Então, $e_{in}\overline{v}_\mu = 0$ para todo $i \in I_0$ e $n \in \mathbb{Z}$. Como $G\overline{v}_\mu = e_{in}\overline{v}_\mu = 0$ para todo $i \in I_0$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\overline{v}_\mu$ gera um $\mathfrak{g}$-submódulo de M isomorfo a $\tilde{M}(\mu)$. Portanto, a sequência exata curta cinde.

Assumiremos agora que $s_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ para todo i e nem todos são nulos. Como $\tilde{M}(\mu)$ é irredutível e $\tilde{M}(\lambda)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de M, a sequência exata curta cinde e a prova está completa.

□

Teorema 5.3.2 ([AFdO23]). *Se M é um módulo irredutível na categoria $\mathcal{O}_{red,im}$, então $M \cong \tilde{M}(\lambda)$ para algum $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$.*

Demonstração. Seja M um módulo irredutível em $\mathcal{O}_{red,im}$. Como um G-módulo, $M \cong T(M) \oplus TF(M)$

onde ambos os somandos são não-nulos. Seja $v \in T(M)$ um elemento não-nulo de peso $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$. Então $h_{im}v = 0$ para todo $i \in I_0$ e todo $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para cada $i \in I_0$ seja $p_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ o menor inteiro possível tal que $e_{i0}^{p_i}v = 0$. Se $p_i = 1$ para todo i, temos que $e_{i0}v = 0$ e então, como $[h_{in}, e_{i0}] = 2e_{in}$ segue que

$$2e_{in}v = [h_{in}, e_{i0}]v = h_{in}e_{i0}v - e_{i0}h_{in}v = 0 \ ,$$

ou seja, $e_{in}v = 0$ para todo $i \in I_0$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Assim, temos um epimorfismo $\tilde{M}(\lambda) \twoheadrightarrow M$. Como $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$ segue que $\tilde{M}(\lambda)$ é simples. Portanto, $M \cong \tilde{M}(\lambda)$.

Por outro lado, assuma que existe no mínimo um p_i tal que $p_i > 1$. Construamos um conjunto de elementos em M que são aniquilados por e_{i0} para todo $i \in I_0$. Primeiro de tudo, seja $p^{(1)} = \max\{p_i | i \in I_0\}$ e seja $w_i := e_{i0}^{p^{(1)}-1}v$. Notemos que $w_i = 0$ se $p^{(1)} > p_i$ e $w_i \neq 0$ se $p^{(1)} = p_i$, então no mínimo um w_i é não-nulo. Se para todo $j \in I_0$, $e_{j0}w_i = 0$ acabamos. Caso contrário, existem números $p_{ij} \in \mathbb{Z}_{>0}$ tais que $e_{j0}^{p_{ij}}w_i = 0$ e alguns dos p_{ij} são estritamente maiores do que 1. Sejam $p^{(2)} = \max\{p_{ij} | i, j \in I_0\}$ e $w_{ij} = e_{j0}^{p^{(2)}-1}w_i$. Note que no mínimo um w_{ij} é não-nulo. Se $e_{k0}w_{ij} = 0$ para todos $k \in I_0$ acabamos, senão repetimos o processo. Devido à nilpotência local dos e_{l0} para $l \in I_0$, em uma quantidade finita de passos, digamos ℓ passos, podemos encontrar no mínimo um elemento não-nulo $w_{\mathbf{i}}$, para um *string* de elementos $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_\ell$ em I_0 tal que $e_{l0}w_{\mathbf{i}} = 0$. Além disso, se $\mathbf{i}^-$ denota o *string* $i_1 i_2 \dots i_{\ell-1}$, então $w_{\mathbf{i}} = e_{i_\ell 0}^{p^{(\ell)}-1}w_{\mathbf{i}^-}$ e assim, para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $0 = h_{i_\ell n}e_{i_\ell 0}^{p^{(\ell)}}w_{\mathbf{i}^-} = 2p^{(\ell)}e_{i_\ell n}w_{\mathbf{i}}$, i.e., $e_{i_\ell n}w_{\mathbf{i}} = 0$. Agora, $0 = h_{j0}e_{jm}e_{i_\ell 0}^{p^{(\ell)}}w_{\mathbf{i}^-} = e_{jm}h_{j0}e_{i_\ell 0}^{p^{(\ell)}}w_{\mathbf{i}^-} + 2e_{jm}e_{i_\ell 0}^{p^{(\ell)}}w_{\mathbf{i}^-} = 2p^{(\ell)}e_{jm}e_{i_\ell 0}^{p^{(\ell)}-1}w_{\mathbf{i}^-} = 2p^{(\ell)}e_{jm}w_{\mathbf{i}}$.

Escolha um dos elementos não-nulos $w_{\mathbf{i}}$ construídos acima e seja $W_{\mathbf{i}} = U(G)w_{\mathbf{i}}$ um G-submódulo de M. Pela construção, $e_{ln}W_{\mathbf{i}} = 0$ para todo $l \in I_0$ e $n \in \mathbb{Z}$. Considere o módulo induzido $I(W_{\mathbf{i}}) = \mathrm{Ind}_{G\oplus H\oplus N_+}^{\widehat{\mathfrak{g}}} W_{\mathbf{i}}$, onde $N_+ = \bigoplus_{i\in I_0, n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}e_{in}$ age por 0 e $H = \bigoplus_{i\in I_0} \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}d$ age por $h_i w_{\mathbf{i}} = \mu(h_i)w_{\mathbf{i}}$, $dw_{\mathbf{i}} = \mu(d)w_{\mathbf{i}}$, para algum peso μ. Como M é simples, ele é um quociente de $I(W_{\mathbf{i}})$. Se $w_{\mathbf{i}} \in T(M)$, temos $W_{\mathbf{i}} = \mathbb{C}w_{\mathbf{i}}$, e então M é um quociente de $I(W_{\mathbf{i}}) = \tilde{M}(\lambda)$ e terminamos.

No caso $w_{\mathbf{i}} \notin T(M)$, como na demonstração da Proposição 6.0.3. de [CFM17] temos uma contradição e completamos a demonstração. □

Proposição 5.3.1 ([AFdO23]). *Se M é um objeto arbitrário em $\mathcal{O}_{red,im}$, então $M \cong \bigoplus_{\lambda_i \in \widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}} \tilde{M}(\lambda_i)$, para alguns λ_i's.*

Demonstração. Como M está em $\mathcal{O}_{red,im}$, ele é G-compatível e tem uma decomposição como G-módulo dada por $M \cong T(M) \oplus TF(M)$. Devido a todos os pesos de M pertencerem a $\widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$, $T(M)$ não é um $\widehat{\mathfrak{g}}$-submódulo de M. De fato, suponhamos que $T(M)$ é um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo. Seja $v \in T(M)$ e considere $f_0 v \in T(M)$. Então, $h_{0m}f_0 v = 0$ e $f_m v = 0$ para qualquer $m \neq 0$. Aplicando $h_{0,-m}$ temos

$h_{0,-m}f_m v = 0$ e $f_0 v = 0$. Como o peso de v pertence a $\widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$, $e_0^p v \neq 0$ para qualquer $p > 0$. Mas se p é suficientemente grande o peso de $e_0^p v$ não estará em $\widehat{\mathfrak{h}}^*_{red}$ e temos uma contradição.

Seja $v \in T(M)$ não-nulo. Como na demonstração do Teorema 5.3.2, existe um *string* $\mathbf{i}$ de elementos de I_0 e um vetor $w_{\mathbf{i}}$ tal que $e_{jm}w_{\mathbf{i}} = 0$ para todos $j \in I_0$ e $m \in \mathbb{Z}$. Seja $W_{\mathbf{i}} = U(G)w_{\mathbf{i}}$. Então temos duas possibilidades: ou $w_{\mathbf{i}} \notin T(M)$ ou $w_{\mathbf{i}} \in T(M)$.

No primeiro caso, consideremos o módulo induzido $I(W_{\mathbf{i}})$. Claramente $TF(I(W_{\mathbf{i}})) \subseteq I(W_{\mathbf{i}})$. Agora, se $w \in I(W_{\mathbf{i}})$, como $w_{\mathbf{i}} \notin T(M)$ temos $gw \neq 0$ para $g \in G$ e então $w \in TF(I(W_{\mathbf{i}}))$. Logo $TF(I(W_{\mathbf{i}})) = I(W_{\mathbf{i}})$. Pelo Lema dos Cinco, qualquer quociente e subquociente de $I(W_{\mathbf{i}})$ também satisfaz essa propriedade. Seja $M' := U(\widehat{\mathfrak{g}})w_{\mathbf{i}}$ que é um subquociente de $I(W_{\mathbf{i}})$. Então M' é um $\widehat{\mathfrak{g}}$-submódulo de M e assim $M' = TF(M')$ é um $\widehat{\mathfrak{g}}$-submódulo de $TF(M)$, mas $TF(M)$ não tem $\widehat{\mathfrak{g}}$-submódulo próprio. Logo, $M' = TF(M)$. Mas, $W_{\mathbf{i}}$ é um G-submódulo próprio de M', o que não é possível, pois M está em $\mathcal{O}_{red,im}$. Então este caso não ocorre.

No segundo caso, $W_{\mathbf{i}} = \mathbb{C}w_{\mathbf{i}} \subseteq T(M)$. Então, $I(W_{\mathbf{i}}) \cong \tilde{M}(\lambda_{\mathbf{i}})$ (como $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulos) para algum $\lambda_{\mathbf{i}}$, é um $\widehat{\mathfrak{g}}$-submódulo de M. Portanto, qualquer elemento não-nulo de $T(M)$ gera um módulo de Verma Imaginário Reduzido irredutível que é um $\widehat{\mathfrak{g}}$-submódulo de M e por conta de não existir extensões entre eles, conforme o Teorema 5.3.1, eles são somandos diretos em M. $\square$

Corolário 5.3.1 ([AFdO23])**.** *A categoria $\mathcal{O}_{red,im}$ é fechada sob subquocientes e somas diretas e, portanto, é uma subcategoria de Serre.*

Apêndice A

Álgebras de Kac-Moody

As álgebras de Lie surgiram com Sophus Lie (1842 – 1899) na década de 1870. De acordo com [Mar99]: “elas nasceram da tentativa de se obter uma teoria para o estudo das equações diferenciais, análogo à teoria de Évariste Galois (1811 – 1832) para equações polinomiais. Utilizando as chamadas transformações de contato, Sophus Lie examinou um processo, criado por Carl Jacobi (1804 – 1851), de obtenção de novas soluções de equações diferenciais a partir de uma dada solução. Isso levou S. Lie a tratar seus grupos de transformações (denominados atualmente **grupos de Lie**) através do que hoje chamamos de “álgebras de Lie” (ou grupos infinitesimais)”. Podemos dizer que a teoria de Lie consiste em relacionar grupos e álgebras de Lie. O nome “álgebra de Lie” foi dado por Hermann Weyl (1885 – 1955) na década de 1930.

Uma álgebra de Lie surge naturalmente como um espaço vetorial de transformações lineares onde o comutador de duas transformações lineares é definido como um produto. Este produto é bilinear, mas, em geral, não é comutativo e nem associativo. Um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ munido com uma operação bilinear $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ é dito uma **álgebra de Lie** se a operação $[\cdot,\cdot]$ satisfaz as seguintes condições:

1. $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.

2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (identidade de Jacobi).

A operação $[\cdot,\cdot]$ é chamada de **colchete** (de Lie) ou *bracket* de $\mathfrak{g}$.

A.1 Álgebras de Kac-Moody

Neste apêndice introduziremos brevemente as álgebras de Kac-Moody com ênfase nas álgebras de Kac-Moody afim. O leitor pode encontrar mais detalhes, principalmente, em [Kac90] e [MP95].

A.1.1 Definições básicas das álgebras de Kac-Moody

Uma matriz $n \times n$ complexa $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, de *rank* l, é chamada de **matriz de Cartan generalizada (GCM)** se ela satisfaz as seguintes condições:

(C_1) $a_{ii} = 2$ para $i = 1, \dots, n$;

(C_2) a_{ij} são inteiros não-positivos para $i \neq j$;

(C_3) $a_{ij} = 0$ implica $a_{ji} = 0$.

Uma **realização** de A é uma tripla $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$, onde $\mathfrak{h}$ é um espaço vetorial complexo, $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ e $\pi^\vee = \{h_1, \dots, h_n\} \subset \mathfrak{h}$ são subconjuntos que satisfazem as seguintes condições:

(R_1) π e $\pi^\vee$ são linearmente independentes;

(R_2) $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ para todos $i, j = 1, \dots, n$;

(R_3) $\dim(\mathfrak{h}) = 2n - l$, onde $l = rank(A)$.

Definimos o **reticulado de raízes** Q (ou estrutura de raízes) e o **reticulado de raízes positivas** Q_+ como abaixo:

$$Q = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \text{ com } k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$$

$$Q_+ = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \text{ com } k_i \in \mathbb{Z}, k_i \geq 0\}$$

Antes de definir uma álgebra de Kac-Moody, definimos uma álgebra de Lie que chamamos de álgebra auxiliar. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ e $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ uma realização de A. Defina $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ como a álgebra de Lie complexa com geradores $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ e $\mathfrak{h}$ com as seguintes relações:

$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i & i, j = 1, \dots, n \\ [h, h'] = 0 & \text{para todos } h, h' \in \mathfrak{h} \\ [h, e_i] = \alpha_i(h) e_i & \text{para todos } h \in \mathfrak{h} \text{ e } i = 1, \dots, n \\ [h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i & \text{para todos } h \in \mathfrak{h} \text{ e } i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{A.1}$$

Em particular, $[h_i, e_j] = \alpha_j(h_i)e_j = a_{ij}e_j$ e $[h_i, f_j] = -\alpha_j(h_i)f_j = -a_{ij}f_j$.

Pode-se mostrar que $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ depende (a menos de isomorfismo) somente da matriz A [Kac90].

Denotamos por $\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{n}}^-$) a subálgebra de $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ gerada por $e_1, \dots, e_n$ (resp. $f_1, \dots, f_n$). Então temos uma decomposição triangular [MP95]:

Teorema A.1.1. **(a)** $\widetilde{\mathfrak{g}}(A) = \widetilde{\mathfrak{n}}^{-} \oplus \mathfrak{h} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}^{+}$ *(soma direta de subespaços vetoriais).*

(b) *A subálgebra* $\widetilde{\mathfrak{n}}^{+}$ *é livremente gerada por* $e_1, \ldots, e_n$ *e* $\widetilde{\mathfrak{n}}^{-}$ *é livremente gerada por* $f_1, \ldots, f_n$*.*

(c) $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ *é uma álgebra de Lie* Q*-graduada. Mais precisamente, com respeito à* $\mathfrak{h}$ *temos uma decomposição em espaços de raízes de* $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$*:*

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(A) = (\bigoplus_{\alpha \in Q_+ \setminus \{0\}} \widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}) \oplus \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in Q_+ \setminus \{0\}} \widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha}) \ ,$$

onde $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} = \{x \in \widetilde{\mathfrak{g}}(A) \mid [h, x] = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$*. Além disso,* $\dim(\widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha}) < \infty$*.*

(d) *Existe um único ideal maximal* $\mathfrak{r}$ *de* $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$*, que intercepta* $\mathfrak{h}$ *trivialmente. Além disso,* $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \widetilde{\mathfrak{n}}^{-}) \oplus (\mathfrak{r} \cap \widetilde{\mathfrak{n}}^{+})$ *(soma direta de ideais).*

Considerando $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ e $\mathfrak{r}$ podemos obter o quociente

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{g}(A).$$

O conjunto $\mathfrak{g}(A)$ é a **álgebra de Lie associada à matriz complexa** A. Observamos que $\mathfrak{g}(A)$ não possui ideais não-nulos que interceptam $\mathfrak{h}$ trivialmente.

A quádrupla $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \pi, \pi^{\vee})$ é chamada de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-par associado à matriz A.

Definição A.1.1. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ é chamada de **álgebra de Kac-Moody** se A é uma matriz de Cartan generalizada.

Usaremos a mesma notação para as imagens dos geradores $e_i, f_i, i = 1, \ldots, n$, e os elementos de $\mathfrak{h}$ sob a aplicação canônica $\widetilde{\mathfrak{g}}(A) \to \widetilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$, e obtemos a decomposição de $\mathfrak{g}$ em espaços de raízes com respeito à $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A) = (\bigoplus_{\alpha \in Q_+ \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{-\alpha}) \oplus \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in Q_+ \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{\alpha}) \ ,$$

onde $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Os elementos $e_i, f_i, i = 1, \ldots, n$, são chamados de **geradores de Chevalley** de $\mathfrak{g}$. A subálgebra $\mathfrak{h}$ é chamada de **subálgebra de Cartan** de $\mathfrak{g}$. Um elemento $\alpha \in Q$ é chamado de **raiz** de $\mathfrak{g}$ se $\alpha \neq 0$ e $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq \{0\}$. O número $\mathrm{mult}(\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_{\alpha})$ é a multiplicidade de α.

Observamos que $[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i$ e $[h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i$, para todos $h \in \mathfrak{h}$ e $i = 1, \ldots, n$, ou seja, $\pm\alpha_i = \pm 1\alpha_i \neq 0$ e $\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i} \neq \{0\}$, pois $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ e $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. Portanto $\pm\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, são raízes de $\mathfrak{g}$. Os elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são chamados de **raízes simples** e os elementos $h_1, \ldots, h_n$ são chamados de

corraízes simples de $\mathfrak{g}$. Denotemos por Δ, Δ_+ e Δ_-, os conjuntos de todas **as raízes**, **raízes positivas** e **raízes negativas**, respectivamente. Então $\Delta_- = -\Delta_+$ e $\Delta = \Delta_- \uplus \Delta_+$ (união disjunta).

Observação A.1.1. Seja $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ uma realização de A, onde $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ e $\pi^\vee = \{h_1, \ldots, h_n\} \subset \mathfrak{h}$. Então, definindo $h(\alpha) := \alpha(h)$, temos que $(\mathfrak{h}^*, \pi^\vee, \pi)$ é uma realização de ${}^tA$, a matriz transposta de A. Assim, podemos identificar as raízes simples (resp. corraízes simples) de $\mathfrak{g}(A)$ com corraízes simples (resp. raízes simples) de $\mathfrak{g}({}^tA)$: seja $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ uma realização de A e $(\mathfrak{h}^*, \pi^\vee, \pi)$ uma realização de ${}^tA$; temos que $\alpha_j(h_i) = a_{ij} \in A$ e $h_j(\alpha_i) := \alpha_i(h_j) = a_{ji} \in {}^tA$, ou seja, $\pi \subset \mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{g}(A)$ está em correspondência com $\pi^\vee \subset \mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}({}^tA)$. A álgebra $\mathfrak{g}({}^tA)$ é chamada de **álgebra dual** de $\mathfrak{g}(A)$. Em geral $\mathfrak{g}(A) \ncong \mathfrak{g}({}^tA)$.

Vejamos uma proposição de [Kac90] com algumas propriedades relacionadas à unicidade de uma álgebra de Kac-Moody. Pela unicidade de $\mathfrak{g}(A)$ associada com a matriz A temos:

Proposição A.1.1. **(a)** *Sejam $\mathfrak{g}_1$ uma álgebra de Lie, $\mathfrak{h}_1$ uma subálgebra comutativa de $\mathfrak{g}_1$, $e_i, f_i \in \mathfrak{g}_1$, $i = 1, \ldots, n$. Sejam $\pi_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}_1^*$, $\pi_1^\vee = \{h_1, \ldots, h_n\} \subset \mathfrak{h}_1$ subconjuntos linearmente independentes que satisfazem as relações descritas em A.1. Suponha que $e_i, f_i, i = 1, \ldots, n$, e $\mathfrak{h}_1$ geram $\mathfrak{g}_1$ como uma álgebra de Lie, e que $\mathfrak{g}_1$ não tem ideais não-nulos que interceptam $\mathfrak{h}_1$ trivialmente. Finalmente, seja $A = (\alpha_j(h_i))$, e suponha que $\dim(\mathfrak{h}_1) = 2n - rank(A)$. Então existe um isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}(A)$, tal que $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}$, $\varphi(\pi_1^\vee) = \pi^\vee$ e $\varphi(\pi_1) = \pi$.*

(b) *Duas álgebras de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ e $\mathfrak{g}(A')$ são isomorfas, no sentido acima se, e somente se, A' pode ser obtida de A pela reordenação do conjunto de índices.*

(c) *A álgebra de Kac-Moody associada a uma soma diagonal de A_i's, onde cada uma é GCM, é isomorfa à soma direta das álgebras de Kac-Moody associadas às A_i's, isto é, se*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

então $\mathfrak{g}(A) \cong \mathfrak{g}(A_1) \oplus \mathfrak{g}(A_2) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}(A_n)$.

(d) *O centro $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}(A)$ é*

$$\mathfrak{c} := \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha_i(h) = 0, \forall i = 1, \ldots, n\}$$

$e \dim(\mathfrak{c}) = corank(A)$.

A.2 Álgebra de Kac-Moody afim

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples complexa e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Denotemos por Δ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito à $\mathfrak{h}$, por Δ_+ o sistema de raízes positivas em Δ e por $\pi \subset \Delta$ o conjunto de raízes simples.

Associamos ao sistema de raízes positivas Δ_+ as **subálgebras de Lie nilpotentes**

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}\ ,$$

e as **subálgebras de Lie solúveis**

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}}$$

de $\mathfrak{g}$. As subálgebras de Lie $\mathfrak{b}$ e $\overline{\mathfrak{b}}$ são as **subálgebra de Borel canônica** e a **subálgebra de Borel canônica oposta** de $\mathfrak{g}$, respectivamente.

Consideremos um subconjunto Σ de π e denotemos por Δ_Σ o subsistema em $\mathfrak{h}^*$ gerado por Σ.

Então a **subálgebra parabólica canônica** $\mathfrak{p}$ e a **subálgebra parabólica canônica oposta** $\overline{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{g}$ associadas à Σ são definidas por

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{l} \oplus \overline{\mathfrak{u}}$$

onde a **subálgebra de Levi redutiva** (ou fator de Levi redutivo) $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$ e $\overline{\mathfrak{p}}$ é definida por

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

e o **nilradical** $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{p}$ e o **nilradical oposto** $\overline{\mathfrak{u}}$ de $\overline{\mathfrak{p}}$ são dados por

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_{+,\Sigma}} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{u}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_{+,\Sigma}} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

Notemos que a subálgebra de Borel canônica $\mathfrak{b}$ (subálgebra de Borel canônica oposta $\overline{\mathfrak{b}}$) está contida na subálgebra parabólica canônica $\mathfrak{p}$ (subálgebra parabólica canônica oposta $\overline{\mathfrak{p}}$).

Temos a seguinte decomposição de $\mathfrak{g}$ conhecida como **decomposição de Cartan**:

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Também temos outra decomposição “triangular” de $\mathfrak{g}$ com respeito à subálgebra de Levi e os nilradicais:

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{u}} \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}.$$

Estas álgebras são parametrizadas por matrizes de Cartan $A = (a_{ij})$, que são matrizes positivas definidas, que satisfazem as seguintes condições: (1) $a_{ii} = 2$, $\forall i$; (2) a_{ij} são inteiros não-positivos para $i \neq j$; e (3) $a_{ij} = 0$ se, e somente se, $a_{ji} = 0$, para todos i, j.

Em 1967, V. Kac e R. Moody generalizaram independentemente estas à uma nova classe de álgebras de Lie, conhecidas hoje como álgebras de Kac-Moody, através do relaxamento da condição da matriz de Cartan ser positiva definida. Um caso particular onde $\det(A) = 0$ e os menores principais próprios de A são positivos, correspondem às **álgebras de Kac-Moody afim** (ou **álgebras de Lie afim**).

Todas as álgebras de Lie afim são divididas em duas classes: não-torcidas e torcidas. Álgebras de Lie afim não-torcidas têm uma realização concreta. Sejam $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ os polinômios de Laurent, $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples complexa com dimensão finita e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan fixa. Consideremos $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ com o seguinte colchete de Lie

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n} \ ,$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Esta é chamada de **álgebra de loop** associada com $\mathfrak{g}$. As álgebras de loop possuem uma extensão central universal 1-dimensional

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \left(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \right) \oplus \mathbb{C}c \ ,$$

com o seguinte colchete de Lie

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n} + m(x, y)\delta_{m+n,0}c \ ,$$

$$[x \otimes t^m, c] = 0 \ ,$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, e $(\cdot, \cdot)$ denota a forma de Killing em $\mathfrak{g}$. Notemos que c é um elemento central de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Finalmente, seja $d : \widehat{\mathfrak{g}} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ uma derivação grau tal que $d(x \otimes t^m) = m(x \otimes t^m)$ e $d(c) = 0$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $m \in \mathbb{Z}$. A álgebra

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d = \left(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \right) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \ ,$$

onde $[d, x \otimes t^m] = d(x \otimes t^m) = m(x \otimes t^m)$ e $[d, c] = d(c) = 0$, é uma **álgebra de Kac-Moody afim não-torcida estendida**, com subálgebra de Cartan afim estendida $\widehat{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.

Seja δ a **raiz imaginária positiva indivisível** para $\widehat{\mathfrak{g}}$ e seja $\widehat{\Delta} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta \cup \{0\}, n \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0\}$ o conjunto de raízes de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Como em [JK85], chamamos um subconjunto $\widehat{\Delta}_+ \subseteq \widehat{\Delta}$ de **conjunto de raízes positivas** (ou **partição fechada**) se ele satisfaz as seguintes condições:

1. Se $\alpha, \beta \in \widehat{\Delta}_+$ e $\alpha + \beta \in \widehat{\Delta}$, então $\alpha + \beta \in \widehat{\Delta}_+$ (aditivamente fechado).

2. Se $\alpha \in \widehat{\Delta}$, então $\alpha \in \widehat{\Delta}_+$ ou $-\alpha \in \widehat{\Delta}_+$, isto é, $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}_+ \cup -\widehat{\Delta}_+$.

3. Se $\alpha \in \widehat{\Delta}_+$, então $-\alpha \notin \widehat{\Delta}_+$, isto é, $\widehat{\Delta}_+ \cap -\widehat{\Delta}_+ = \emptyset$.

Um subconjunto satisfazendo as condições (1.) e (2.), listadas acima, é chamado de **subconjunto parabólico**.

Se $\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita, então cada partição corresponde à escolha de raízes positivas em Δ e todas as partições são conjugadas pelo grupo de Weyl. A situação é diferente no caso de dimensão infinita. Se $\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Lie afim, então as partições são divididas em uma quantidade finita de órbitas do grupo de Weyl (veja [JK85] e [Fut97] para mais detalhes).

Uma subálgebra $\widehat{\mathfrak{b}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$ é uma **subálgebra de Borel** se

$$\widehat{\mathfrak{b}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \left(\oplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \right)$$

para algum conjunto de raízes positivas $\widehat{\Delta}_+$ de $\widehat{\Delta}$.

A classificação de todas as subálgebras de Borel no caso afim foi obtida por V. Futorny em [Fut97] para o caso das partições fechadas. Neste caso nem todas elas são conjugadas, mas existe uma quantidade finita de classes de conjugação. As classes de conjugação das subálgebras de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$ são parametrizadas pelas subálgebras parabólicas da álgebra de Lie de dimensão finita subjacente $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{p}$ é uma subálgebra parabólica de uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ contendo uma subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ fixa, então $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$, onde $\mathfrak{l}$ é um fator de Levi redutivo e $\mathfrak{u}$ é um nilradical. Defina

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = \left(\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \right) \oplus \left(\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t] \right) \oplus (\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{u}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

Para qualquer subálgebra de Borel $\widehat{\mathfrak{b}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$, existe uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\widehat{\mathfrak{b}}$ é conjugada à $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ [JK85, Fut97].

A.2.1 Subálgebra de Borel canônica de $\widehat{\mathfrak{g}}$

Considere o seguinte conjunto de raízes positivas

$$\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{st}} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{N}\} \mathbin{\dot\cup} \Delta_+ \mathbin{\dot\cup} \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Então $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \left(\oplus_{\alpha\in\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{st}}} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha\right)$ é a **subálgebra de Borel canônica** de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Podemos escrever $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}$ da seguinte maneira:

$$\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}} = \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathrm{st}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_{\mathrm{st}}\ ,$$

onde $\widehat{\mathfrak{n}}_{\mathrm{st}} = \Big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \oplus (\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1)$ e $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathrm{st}} = (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d = \widehat{\mathfrak{h}}$.

A.2.2 Subálgebra de Borel natural de $\widehat{\mathfrak{g}}$

Considere o seguinte conjunto de raízes positivas

$$\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta_+, n \in \mathbb{Z}\} \mathbin{\dot\cup} \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Este conjunto é chamado de **partição natural**.

Então, $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \left(\oplus_{\alpha\in\widehat{\Delta}_{+,\mathrm{nat}}} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha\right)$ é a **subálgebra de Borel natural** de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Portanto, a **subálgebra de Borel natural** $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$ é definida por

$$\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}} = \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathrm{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_{\mathrm{nat}}\ ,$$

tal que a **subálgebra de Cartan natural** $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathrm{nat}}$ é dada por

$$\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathrm{nat}} = (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d = \widehat{\mathfrak{h}}$$

e, o **nilradical** $\widehat{\mathfrak{n}}_{\mathrm{nat}}$ e o **nilradical oposto** $\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\mathrm{nat}}$ de $\widehat{\mathfrak{b}}_{\mathrm{nat}}$ são

$$\widehat{\mathfrak{n}}_{\mathrm{nat}} = \Big(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\Big) \quad \text{e} \quad \widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\mathrm{nat}} = \Big(\overline{\mathfrak{n}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\Big).$$

A.3 Classificação de subálgebras parabólicas em álgebras de Lie de dimensão finita

Subálgebras parabólicas correspondem à escolha de uma base π do sistema de raízes Δ e um subconjunto $S \subseteq \pi$. Para qualquer subconjunto $S \subseteq \Delta$, denotamos um fecho aditivo de S por $\mathrm{add}(S)$, isto é, se $\alpha, \beta \in \mathrm{add}(S)$ e $\alpha + \beta \in \Delta$ então $\alpha + \beta \in \mathrm{add}(S)$.

Proposição A.3.1 ([Bou68])**.** *Seja P um subconjunto parabólico de um sistema de raízes finito Δ, isto é, $P = \mathrm{add}(P)$ e $P \cup -P = \Delta$.*

1. *Se P é uma partição fechada (isto é, $P \cap -P = \emptyset$) então P coincide com um conjunto de raízes positivas com respeito à alguma base π de Δ (caso $S = \emptyset$);*
2. *Se $P \cap -P \neq \emptyset$ então $P = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(-S)$, para alguma base π em Δ e um subconjunto não-vazio $S \subseteq \pi$, onde $\Delta^+(\pi)$ é o conjunto de raízes positivas gerado por π.*

Considere um subconjunto parabólico P. Temos o subconjunto $L = P \cap -P$, chamado de **fator de Levi redutivo**, e o subconjunto $U^+ = P \setminus -P$. Esses subconjuntos dão origem às seguintes subálgebras:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in L} \mathfrak{g}_\alpha \right) \quad \text{e} \quad \mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in U^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

chamadas de **subálgebra de Levi redutiva** e **nilradical**, respectivamente.

Agora exemplificaremos este resultado com algumas álgebras de Lie do tipo $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ importantes no estudo dos módulos dos Wakimoto Intermediários (Capítulo 3).

A.3.1 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}$.

Os geradores desta álgebra como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ são as matrizes

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

que satisfazem as seguintes relações:

$$[e, f] = h \quad , \quad [h, e] = 2e \quad \text{e} \quad [h, f] = -2f.$$

A matriz de Cartan associada à $\mathfrak{g}$ é $A_1 = (2)$. Temos que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) = rank(A_1) = 1$, onde $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Portanto, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$.

Temos a seguinte decomposição triangular: $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, com $\overline{\mathfrak{n}} = \mathbb{C}f$, $\mathfrak{n} = \mathbb{C}e$.

Podemos considerar $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C},\ a_1 + a_2 = 0\}$. Para $i = 1, 2$ definimos $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ por $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(a_1, a_2)) = a_i$. Seja $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Assim $\alpha(h) = \varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h) = 2$. Então $[h, e] = 2e = \alpha(h)e$ e $[h, f] = -2f = -\alpha(h)f$.

Portanto, $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$ é um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$, onde $\pi = \{\alpha\} = \Delta_+$ é uma base de Δ.

Quais são os possíveis subconjuntos parabólicos $P \subseteq \Delta = \{\alpha, -\alpha\}$?

Considerando o sistema de raízes $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$ de $\mathfrak{g}$ e a base $\pi = \{\alpha\}$ temos duas possibilidades de escolhas de subconjuntos $S \subseteq \pi$. As possibilidades são: $S = \emptyset$ e $S = \pi$.

De acordo com a Proposição A.3.1, temos dois subconjuntos parabólicos:

1. $P_0 = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(\emptyset) = \{\alpha\}$.

2. $P_1 = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(-\alpha) = \Delta$.

Esses dois subconjuntos parabólicos definem as subálgebras parabólicas:

- $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{b}$, associada com P_0, onde $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{n}$.

- $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$, associada com P_1, onde $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n}$ e $\mathfrak{u}_1 = \{0\}$.

De acordo com a Seção A.2, as subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}$ são parametrizadas pelas subálgebras parabólicas de $\mathfrak{g}$.

Portanto, as subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ são (a menos de conjugação):

- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0) = \left(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\right) \oplus \left(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$

- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1) = \left(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$

Observamos que $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0)$ é a **subálgebra de Borel natural** e $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1)$ é a **subálgebra de Borel canônica** de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$.

A.3.2 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \{X \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}$.

Os geradores desta álgebra como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ são as matrizes

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [e_1, e_2] = e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad [f_2, f_1] = f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

que satisfazem as seguintes relações:

$$[e_1, f_1] = h_1 \quad , \quad [e_1, f_2] = 0 \quad , \quad [e_1, f_3] = -f_2 \ ,$$

$$[e_2, f_1] = 0 \quad , \quad [e_2, f_2] = h_2 \quad , \quad [e_2, f_3] = f_1 \ ,$$

$$[e_3, f_1] = -e_2 \quad , \quad [e_3, f_2] = e_1 \quad , \quad [e_3, f_3] = h_1 + h_2 \ ,$$

$$[h_1, e_1] = 2e_1 \quad , \quad [h_1, e_2] = -e_2 \quad , \quad [h_1, f_1] = -2f_1 \quad , \quad [h_1, f_2] = f_2 \ ,$$

$$[h_2, e_1] = -e_1 \quad , \quad [h_2, e_2] = 2e_2 \quad , \quad [h_2, f_1] = f_1 \quad , \quad [h_2, f_2] = -2f_2 \ ,$$

$$[h_1, e_3] = e_3 \quad , \quad [h_2, e_3] = e_3 \quad , \quad [h_1, f_3] = -f_3 \quad , \quad [h_2, f_3] = -f_3 \ ,$$

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad , \quad [e_i, [e_i, e_j]] = 0 \ (i \neq j) \quad , \quad [f_1, f_2] = -f_3 \quad , \quad [f_i, [f_i, f_j]] = 0 \ (i \neq j).$$

A matriz de Cartan associada à $\mathfrak{g}$ é $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Então, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) = rank(A_2) = 2$, onde $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Portanto $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2$.

As relações entre os colchetes descritos acima podem ser resumidos através dos elementos da matriz de Cartan e das relações de Serre, isto é,

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \quad , \quad [h_i, e_j] = a_{ij} e_j \quad , \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j \ ,$$

$$\mathrm{ad}(e_i)^{-a_{ij}+1}(e_j) = 0 \ (i \neq j) \quad , \quad \mathrm{ad}(f_i)^{-a_{ij}+1}(f_j) = 0 \ (i \neq j).$$

Temos a seguinte decomposição triangular: $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, com $\overline{\mathfrak{n}} = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3$, $\mathfrak{n} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$.

Podemos considerar $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C},\ a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$. Para $i = 1, 2, 3$, definimos $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ por $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)) = a_i$.

Sabemos que o sistema de raízes de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ é $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 3\}$.

Também sabemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \right)$, onde $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h_1, x] = \alpha(h_1)x \ , \ [h_2, x] = \alpha(h_2)x\}$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{h}^*$ tais que $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ e $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$.

Temos que $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é uma base de Δ e $\Delta_+ = \Delta_+(\pi) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ é um conjunto de raízes positivas com respeito à π.

Portanto $\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \mathbb{C}e_1$, $\mathfrak{g}_{\alpha_2} = \mathbb{C}e_2$, $\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathbb{C}e_3$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_1} = \mathbb{C}f_1$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_2} = \mathbb{C}f_2$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2} = \mathbb{C}f_3$, pois $\alpha_1(h_1) = 2$, $\alpha_1(h_2) = -1$, $\alpha_2(h_1) = -1$ e $\alpha_2(h_2) = 2$.

Assim, $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}$ é um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$, onde $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é uma base de Δ.

Portanto, temos as seguintes possibilidades para subconjuntos $S \subseteq \pi$: $S = \emptyset$, $S = \{\alpha_1\}$, $S = \{\alpha_2\}$ e $S = \pi$. Notemos que os casos $S = \{\alpha_1\}$ e $S = \{\alpha_2\}$ são similares.

De acordo com a Proposição A.3.1, temos três subconjuntos parabólicos:

1. $P_0 = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(\emptyset) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\} = \Delta_+$.

2. $P_1 = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(-\alpha_1) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1\}$.

3. $P_2 = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(-\pi) = \Delta$.

Esses subconjuntos parabólicos definem as subálgebras parabólicas:

- $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{b}$, associada com P_0, onde $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{n}$.

- $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}f_1$, associada com P_1, onde $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1$ e $\mathfrak{u}_1 = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$.

- $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$, associada com P_2, onde $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n}$ e $\mathfrak{u}_2 = \{0\}$.

Notemos que o fator de Levi redutivo de $\mathfrak{p}_1$ é $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 = \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1$, com subconjunto $L_1 = P_1 \cap -P_1 = \{\alpha_1, -\alpha_1\}$. Então $\mathfrak{l}_1 \cong \mathbb{C}h_2 \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Portanto, as subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$ são (a menos de conjugação):

- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0) = \left(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \right) \oplus \left(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t] \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.

- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1) = \left((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \right) \oplus \left((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t] \right) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.

- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2) = \left(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t] \right) \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.

Observamos que $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0)$ é a **subálgebra de Borel natural** e $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2)$ é a **subálgebra de Borel canônica** de $\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$.

A.3.3 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$

Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C}) = \{X \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}$.

Os geradores desta álgebra como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ são as matrizes:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$[e_1, e_2] = e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad [e_2, e_3] = e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad [e_4, e_3] = e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$[f_2, f_1] = f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad [f_3, f_2] = f_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad [f_3, f_4] = f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

que satisfazem as seguintes relações:

$$[e_1, f_1] = h_1 \quad , \quad [e_2, f_2] = h_2 \quad , \quad [e_3, f_3] = h_3 \quad , \quad [e_i, f_j] = 0 \ (1 \leq i, j \leq 3, i \neq j) \ ,$$

$$[e_1, f_4] = -f_2 \quad , \quad [e_1, f_5] = 0 \quad , \quad [e_1, f_6] = -f_5 \quad ,$$

$$[e_2, f_4] = f_1 \quad , \quad [e_2, f_5] = -f_3 \quad , \quad [e_2, f_6] = 0 \quad ,$$

$$[e_3,f_4]=0 \quad , \quad [e_3,f_5]=f_2 \quad , \quad [e_3,f_6]=f_4 \quad ,$$

$$[e_4,f_1]=-e_2 \quad , \quad [e_4,f_2]=e_1 \quad , \quad [e_4,f_3]=0 \quad , \quad [e_4,f_4]=h_1+h_2 \quad , \quad [e_4,f_5]=0 \quad , \quad [e_4,f_6]=-f_3 \, ,$$

$$[e_5,f_1]=0 \quad , \quad [e_5,f_2]=-e_3 \quad , \quad [e_5,f_3]=e_2 \quad , \quad [e_5,f_4]=0 \quad , \quad [e_5,f_5]=h_2+h_3 \quad , \quad [e_5,f_6]=f_1 \, ,$$

$$[e_6,f_1]=-e_5 \quad , \quad [e_6,f_2]=0 \quad , \quad [e_6,f_3]=e_4 \quad , \quad [e_6,f_4]=-e_3 \quad , \quad [e_6,f_5]=e_1 \, , \, [e_6,f_6]=h_1+h_2+h_3,$$

$$[h_1,e_1]=2e_1 \quad , \quad [h_1,e_2]=-e_2 \quad , \quad [h_1,e_3]=0 \quad , \quad [h_1,e_4]=e_4 \quad , \quad [h_1,e_5]=-e_5 \quad , \quad [h_1,e_6]=e_6 \, ,$$

$$[h_1,f_1]=-2f_1 \quad , \quad [h_1,f_2]=f_2 \quad , \quad [h_1,f_3]=0 \quad , \quad [h_1,f_4]=-f_4 \quad , \quad [h_1,f_5]=f_5 \quad , \quad [h_1,f_6]=-f_6 \, ,$$

$$[h_2,e_1]=-e_1 \quad , \quad [h_2,e_2]=2e_2 \quad , \quad [h_2,e_3]=-e_3 \quad , \quad [h_2,e_4]=e_4 \quad , \quad [h_2,e_5]=e_5 \quad , \quad [h_2,e_6]=0 \, ,$$

$$[h_2,f_1]=f_1 \quad , \quad [h_2,f_2]=-2f_2 \quad , \quad [h_2,f_3]=f_3 \quad , \quad [h_2,f_4]=-f_4 \quad , \quad [h_2,f_5]=-f_5 \quad , \quad [h_2,f_6]=0 \, ,$$

$$[h_3,e_1]=0 \quad , \quad [h_3,e_2]=-e_2 \quad , \quad [h_3,e_3]=2e_3 \quad , \quad [h_3,e_4]=-e_4 \quad , \quad [h_3,e_5]=e_5 \quad , \quad [h_3,e_6]=e_6 \, ,$$

$$[h_3,f_1]=0 \quad , \quad [h_3,f_2]=f_2 \quad , \quad [h_3,f_3]=-2f_3 \quad , \quad [h_3,f_4]=f_4 \quad , \quad [h_3,f_5]=-f_5 \quad , \quad [h_3,f_6]=-f_6 \, ,$$

$$[e_1,e_3]=0 \quad , \quad [e_1,[e_1,e_2]]=0 \quad , \quad [e_2,[e_2,e_1]]=0 \quad , \quad [e_2,[e_2,e_3]]=0 \quad , \quad [e_3,[e_3,e_2]]=0 \, ,$$

$$[f_1,f_3]=0 \quad , \quad [f_1,[f_1,f_2]]=0 \quad , \quad [f_2,[f_2,f_1]]=0 \quad , \quad [f_2,[f_2,f_3]]=0 \quad , \quad [f_3,[f_3,f_2]]=0.$$

A matriz de Cartan associada à $\mathfrak{g}$ is $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Então, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) = rank(A_3) = 3$, onde $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Portanto, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3$.

As relações entre os colchetes descritos acima podem ser resumidos através dos elementos da matriz de Cartan e das relações de Serre, isto é,

$$[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i \quad , \quad [h_i,e_j]=a_{ij}e_j \quad , \quad [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j \, ,$$

$$\mathrm{ad}(e_i)^{-a_{ij}+1}(e_j)=0 \ (i\neq j) \quad , \quad \mathrm{ad}(f_i)^{-a_{ij}+1}(f_j)=0 \ (i\neq j).$$

Temos a seguinte decomposição triangular: $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, com $\overline{\mathfrak{n}} = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3 \oplus \mathbb{C}f_4 \oplus \mathbb{C}f_5 \oplus \mathbb{C}f_6$ e $\mathfrak{n} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$.

Podemos considerar $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3,a_4) \mid a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{C},\ a_1+a_2+a_3+a_4=0\}$. Para $1 \le i \le 4$, defina $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ por $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3,a_4)) = a_i$.

Sabemos que o sistema de raízes de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ é $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 4\}$.

Também sabemos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha) \quad , \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h_1, x] = \alpha(h_1)x \ , \ [h_2, x] = \alpha(h_2)x \ , \ [h_3, x] = \alpha(h_3)x\}.$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathfrak{h}^*$ tais que $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ e $\alpha_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$.

Temos $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ é uma base de Δ e $\Delta_+ = \Delta_+(\pi) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}$ é um conjunto de raízes positivas com respeito à π. Notemos que $\alpha_1 + \alpha_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, isto é, $\alpha_1 + \alpha_3$ não é uma raiz porque não pertence à Δ.

Como,

1. $\alpha_1(h_1) = 2$, $\alpha_1(h_2) = -1$ e $\alpha_1(h_3) = 0$.

2. $\alpha_2(h_1) = -1$, $\alpha_2(h_2) = 2$ e $\alpha_2(h_3) = -1$.

3. $\alpha_3(h_1) = 0$, $\alpha_3(h_2) = -1$ e $\alpha_3(h_3) = 2$.

temos que $\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \mathbb{C}e_1$, $\mathfrak{g}_{\alpha_2} = \mathbb{C}e_2$, $\mathfrak{g}_{\alpha_3} = \mathbb{C}e_3$, $\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathbb{C}e_4$, $\mathfrak{g}_{\alpha_2+\alpha_3} = \mathbb{C}e_5$, $\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = \mathbb{C}e_6$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_1} = \mathbb{C}f_1$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_2} = \mathbb{C}f_2$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_3} = \mathbb{C}f_3$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2} = \mathbb{C}f_4$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_2-\alpha_3} = \mathbb{C}f_5$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = \mathbb{C}f_6$.

Portanto, $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1-\alpha_2, -\alpha_2-\alpha_3, -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\}$ é um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$, onde $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ é uma base de Δ.

Temos as seguintes possibilidades para subconjuntos $S \subseteq \pi$:

- $S = \emptyset$;

- $S = \{\alpha_1\}$ (os casos $S = \{\alpha_2\}$ e $S = \{\alpha_3\}$ são similares);

- $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ (o caso $S = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ é similar);

- $S = \{\alpha_1, \alpha_3\}$;

- $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \pi$.

De acordo com a Proposição A.3.1, temos os seguintes subconjuntos parabólicos:

1. $P_0 = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(\emptyset) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\} = \Delta_+$.

2. $P_1 = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(-\alpha_1) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1\}$.

3. $P_2 = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(-\alpha_1, -\alpha_2) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}$.

4. $P_2' = \Delta_+(\pi) \cup \mathrm{add}(-\alpha_1, -\alpha_3) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_3\}$.

5. $P_3 = \Delta_+(\pi) \cup \text{add}(-\pi) = \Delta$.

Esses subconjuntos parabólicos definem as subálgebras parabólicas:

- $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{b}$, associada com P_0, onde $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{n}$.
- $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}f_1$, associada com P_1, onde $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1$ e $\mathfrak{u}_1 = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$.
- $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4$, associada com P_2, onde $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4$ e $\mathfrak{u}_2 = \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$.
- $\mathfrak{p}_2' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3$, associada com P_2', onde $\mathfrak{l}_2' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3$ e $\mathfrak{u}_2' = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6$.
- $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$, associada com P_3, onde $\mathfrak{l}_3 = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n}$ e $\mathfrak{u}_3 = \{0\}$.

Observe que o fator de Levi redutivo de $\mathfrak{p}_1$ é $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 = \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1$, com subconjunto $L_1 = P_1 \cap -P_1 = \{\alpha_1, -\alpha_1\}$. Então $\mathfrak{l}_1 \cong \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_3 \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

O fator de Levi redutivo de $\mathfrak{p}_2$ é $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4 = \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4$, com subconjunto $L_2 = P_2 \cap -P_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}$. Então $\mathfrak{l}_2 \cong \mathbb{C}h_3 \oplus \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

O fator de Levi redutivo de $\mathfrak{p}_2'$ é $\mathfrak{l}_2' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3 = \mathbb{C}h_2 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}h_3 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_3$, com subconjunto $L_2' = P_2' \cap -P_2' = \{\alpha_1, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_3\}$. Então $\mathfrak{l}_2' \cong \mathbb{C}h_2 \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Portanto, as subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$ são (a menos de conjugação):

- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0) = \left(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\right) \oplus \left(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.
- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_1) = \left((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\right) \oplus \left((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.
- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2) = \left((\mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\right) \oplus \left((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_4) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.
- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2') = \left((\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5 \oplus \mathbb{C}e_6) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\right) \oplus \left((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_3) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.
- $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_3) = \left(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right) \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.

Notemos que $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_0)$ é a **subálgebra de Borel natural** e $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_3)$ é a **subálgebra de Borel canônica** de $\widehat{\mathfrak{sl}}(4, \mathbb{C})$.

Observamos também que a subálgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}_2')$ não foi considerada na construção dos módulos de Wakimoto Intermediários em [CF04], sendo utilizada na construção de um novo $\widehat{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{C})$-módulo de Wakimoto Intermediário no Capítulo 4 desta tese.

Apêndice B

Realizações de Campos Livres

Neste apêndice descreveremos brevemente a poderosa técnica de realizações de campos livres de uma álgebra de vertex afim $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$. Esta envolve uma interação de ideias da teoria de representação e "geometria semi-infinita", com o maquinário de álgebras de vertex agindo como um intermediário.

Uma realização de campos livres pode ser construída de um mergulho de uma álgebra de Lie em uma álgebra de Weyl. Tais mergulhos podem ser obtidos de uma ação da álgebra de Lie em um espaço afim. Considerando tais ações no caso de dimensão finita somos conduzidos ao estudo das variedades bandeiras e várias representações associadas a elas. Apresentaremos a construção análoga para álgebras de Kac-Moody afim. Basearemos esse apêndice principalmente em [FBZ04] e [Fre07].

A ideia de representar ou realizar algo em matemática é basicamente descrever elementos abstratos de uma forma mais concreta. Pelos exemplos das realizações de campos livres podemos perceber que a ideia envolvida nessa construção é basicamente construir um homomorfismo de uma álgebra de Lie (abstrato) em um produto tensorial de álgebras de vertex, que como sabemos é uma álgebra de vertex (concreto). Sendo assim, esse homomorfismo envia os elementos da álgebra de Lie em campos da álgebra de vertex. Através desse homomorfismo construído, percebemos que as relações satisfeitas pelos elementos da álgebra de Lie são transformadas em relações satisfeitas pelos campos. Além disso, se considerarmos os geradores da álgebra de Lie podemos descrever os geradores equivalentes na álgebra de vertex, nos dando a ideia de base e nos remetendo à palavra "livre".

B.1 Álgebras de vertex e operadores diferenciais

Devemos pensar em como construir um homomorfismo de $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ em uma álgebra de vertex $\mathcal{W}$.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples com dimensão finita e $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ a álgebra de Kac-Moody afim não torcida associada à $\mathfrak{g}$ e κ.

Sabemos que a álgebra de vertex $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ é gerada pelos campos $J^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J^a_n z^{-n-1}$, onde $\{J^a\}_{a=1,\ldots,\dim(\mathfrak{g})}$ é uma base de $\mathfrak{g}$. Em particular, $\mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g})$ tem uma base de monômios $J^{a_1}_{n_1}\cdots J^{a_k}_{n_k}|0\rangle$ ordenados lexicograficamente (veja Seção 2.5).

Lema B.1.1 ([FBZ04], Capítulo 11)**.** *Definir um homomorfismo de álgebras de vertex $\rho : \mathcal{V}_\kappa(\mathfrak{g}) \to \mathcal{W}$ é equivalente a escolher operadores de vertex $\widetilde{J}^a(z)$, $a = 1,\ldots,\dim(\mathfrak{g})$, de dimensão conformal 1, ou seja, $\widetilde{J}^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{J}^a_n z^{-n-1}$, na álgebra de vertex $\mathcal{W}$, cujos coeficientes de Fourier satisfazem as relações de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ de nível κ.*

Para cada álgebra de vertex $\mathcal{W}$ podemos construir a álgebra de Lie (topológica completada) $U(\mathcal{W})$, gerada pelos coeficientes de Fourier dos operadores de vertex de $\mathcal{W}$ (veja Seção 2.4).

O Lema B.1.1 mostra que para definir um homomorfismo de álgebras de vertex precisamos definir um homomorfismo de álgebras de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa \to U(\mathcal{W})$.

Se $\mathcal{W}$ é a álgebra de vertex de Heisenberg, então $U(\mathcal{W})$ pertence ao completamento da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie de Heisenberg, na qual identificamos o elemento central com o elemento identidade. Em outras palavras, $U(\mathcal{W})$ pertence a uma álgebra de Weyl completada (veja Seção 2.7). Além disso, uma álgebra de Weyl pode ser pensada como um anel dos operadores diferenciais (algébricos) em um espaço afim.

Por exemplo, dada uma $\mathbb{C}$-álgebra comutativa R, a álgebra dos operadores diferenciais $\mathcal{D}(R)$ de R é o conjunto de todos os operadores de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(R)$ de ordem finita com as operações de soma e composição de operadores. Em outras palavras, $\mathcal{D}(R)$ é a união de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais $\mathcal{D}_{\leq n}(R)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, onde $\mathcal{D}_{\leq n}(R)$ é o conjunto de todos os operadores de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(R)$ de ordem $\leq n$. O anel dos operadores diferenciais da álgebra polinomial $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] = \mathbb{C}[X]$ é a n-ésima álgebra de Weyl $\mathcal{A}_n$, ou seja,

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{D}(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_{\leq n}(\mathbb{C}[X])$$

onde, em particular $\mathcal{D}_0(\mathbb{C}[X]) = \mathbb{C}[X]$ e $\mathcal{D}_{\leq 1}(\mathbb{C}[X]) = \mathbb{C}[X] + \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$.

Portanto, em linhas gerais, nossa tarefa é incorporar a álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ em uma álgebra de operadores diferenciais. Sabemos que uma álgebra de Lie pode ser mapeada por operadores diferenciais sempre que tivermos uma ação infinitesimal desta álgebra de Lie em uma variedade por campos de vetores. Então, variedades homogêneas de grupos de Lie fornecem uma fonte para esses mergulhos.

B.2 Realizações de campos livres no caso finito

B.2.1 Grupos de Lie

Os grupos de Lie são objetos geométricos e estão entre os mais importantes exemplos de variedades diferenciáveis, enquanto as álgebras de Lie são objetos algébricos. Vejamos algumas relações entre esses dois objetos.

Um **grupo de Lie** G é um grupo (isto é, um conjunto não vazio, munido de uma operação binária associativa e um elemento identidade, onde todo elemento possui um inverso) cujo conjunto subjacente G tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação multiplicação $\mu : (g,h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ e a aplicação inversão $\iota : g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ são diferenciáveis.

Para uma variedade diferenciável arbitrária M, o espaço Vect$M$ de campos de vetores diferenciáveis em M é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com dimensão infinita. Além disso, podemos definir um colchete de Lie, ou seja, uma aplicação bilinear $[\cdot,\cdot] : \text{Vect}M \times \text{Vect}M \to \text{Vect}M$ satisfazendo:

1. $[Y,X] = -[X,Y]$,

2. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (identidade de Jacobi) ,

para todos $X, Y \in \text{Vect}M$. Nesse caso, Vect$M$ é uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ com dimensão infinita.

Dado $g \in G$, as translações à esquerda $L_g : G \to G$ e à direita $R_g : G \to G$, são definidas respectivamente por $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$. Essas aplicações são diferenciáveis. Na verdade, ambas são difeomorfismos, pois $L_g \circ L_{g^{-1}} = R_g \circ R_{g^{-1}} = \text{id}$.

Um **campo de vetores** X tangente a um grupo de Lie G é uma aplicação que a cada ponto $g \in G$ corresponde um vetor X_g de T_gG, onde T_gG é o espaço tangente à G em g.

Existem várias maneiras de entender a construção da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G. Uma abordagem, usa campos de vetores invariantes à esquerda (a abordagem utilizando campos de vetores invariantes à direita é análoga). Um campo de vetores X em G é dito ser **invariante à esquerda**, se para quaisquer $g, h \in G$,

$$(dL_g)_h(X_h) = X_{gh}$$

onde $L_g : G \to G$, $x \mapsto gx$ (multiplicação à esquerda por g) e $(dL_g)_h : T_hG \to T_{gh}G$ é o diferencial de L_g entre os espaços tangentes. Esta condição é simplesmente $dL_g \circ X = X \circ L_g$. Em outras palavras, X é L_g-relacionado a ele mesmo para qualquer g em G.

Seja $\text{Inv}^L(G)$ o conjunto de todos os campos de vetores em G invariantes à esquerda (denotamos o conjunto de todos os campos de vetores em G invariantes à direita por $\mathrm{Inv}^R(G)$). Ele é um espaço vetorial que é fechado sob o colchete de Lie, isto é, $[X, Y]$ é invariante à esquerda sempre que X, Y são. Então, $\mathrm{Inv}^L(G)$ é uma subálgebra de $\mathrm{Vect}G$. Podemos entendê-la mais concretamente identificando o espaço dos campos de vetores invariantes à esquerda com o espaço tangente na identidade, como segue: dado um campo de vetores invariante à esquerda, podemos tomar seu valor na identidade, isto é, $X_g = (dL_g)_e(X_e)$ e dado um vetor tangente na identidade, podemos estendê-lo a um campo de vetores invariante à esquerda. Então, a álgebra de Lie pode ser pensada como o espaço tangente de G na identidade e o colchete de X e Y em T_eG pode ser computado estendendo eles a campos de vetores invariantes à esquerda, tomando o comutador de campos de vetores, e por fim avaliando na identidade. Denotamos essa última álgebra de Lie por $(T_eG, [\cdot, \cdot]_L)$.

Portanto, a **álgebra de Lie** de G com dimensão finita, denotada por $\mathfrak{g}$, é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas $\mathrm{Inv}^L(G)$, $\mathrm{Inv}^R(G)$, $(T_eG, [\cdot, \cdot]_L)$ ou $(T_eG, [\cdot, \cdot]_R)$.

Agora, apresentemos a aplicação fundamental que relaciona G e $\mathfrak{g}$, a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Relembremos que o exponencial de uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (ou $M_{n\times n}(\mathbb{C})$) é dada pela fórmula:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Temos que todo campo de vetores X em G invariante à esquerda é completo, ou seja, para qualquer $g \in G$ existe uma curva integral $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ de X tal que $\gamma_X(0) = g$.

Consideremos a curva integral γ_X de qualquer $X \in \mathfrak{g}$ começando na identidade. A aplicação **exponencial** de G é a aplicação $\exp : \mathfrak{g} \to G$ definida por $\exp(X) = \gamma_X(1)$. Notemos que $\frac{d}{ds}|_{s=s_0}\gamma_X(ts) = t\gamma_X'(ts_0) = tX(\gamma_X(ts_0))$. Isto implica que $\gamma_X(ts) = \gamma_{tX}(s)$ para todos $s, t \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\gamma_X(t) = \gamma_{tX}(1) = \exp(tX)$.

B.2.2 Caso da dimensão finita

Suponhamos que S é um espaço homogêneo para um grupo de Lie G. Então a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G mapeia a álgebra de Lie $\mathrm{Vect}S$ dos campos de vetores em S. Suponhamos que $U \subset S$ é um subconjunto aberto de Zariski isomorfo ao espaço afim $\mathbb{A}^m$ com coordenadas $y_1, \ldots, y_m$. Em geral, é impossível restringir a ação de G para U, mas podemos sempre restringir a ação da álgebra de Lie correspondente,

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}S \hookrightarrow \mathrm{Vect}U.$$

Então obtemos uma aplicação de $\mathfrak{g}$ para os campos de vetores em U.

Denotamos por $\mathcal{D}(U)$ a álgebra dos operadores diferenciais no espaço afim $U = \mathbb{A}^m$. Ela tem geradores y_i, $\dfrac{\partial}{\partial y_i}$, $i = 1, \ldots, m$, e relações $[\dfrac{\partial}{\partial y_i}, y_j] = \delta_{ij}$.

Esta álgebra é a álgebra de Weyl. Como já vimos, ela nada mais é do que a álgebra envolvente universal da álgebra de Lie de Heisenberg, na qual o elemento central é identificado com 1. Um exemplo de uma álgebra de Weyl (completada) é a álgebra $\widetilde{\mathcal{H}}$ introduzida na Seção 2.7. Notemos que as representações de uma álgebra de Lie de Heisenberg nas quais o elemento central age como a identidade são como representações da correspondente álgebra de Weyl.

A álgebra $\mathcal{D}(U)$ tem uma filtração natural $\{\mathcal{D}_{\leq i}(U)\}$ pela ordem do operador diferencial. Funções e campos de vetores em U encaixam-se na sequência exata curta

$$0 \to \mathrm{Fun}U \to \mathcal{D}_{\leq 1}(U) \to \mathrm{Vect}U \to 0 \tag{B.1}$$

a qual cinde canonicamente: a saber, levantamos $\xi \in \mathrm{Vect}U$ à um único operador diferencial de primeira ordem D_ξ cujo símbolo é igual a ξ e que aniquila as funções constantes $D_\xi \cdot 1 = 0$. De fato, geralmente tomamos isso como garantido e não fazemos distinção entre campos de vetores e os correspondentes operadores diferenciais.

Agora vemos que podemos levantar a aplicação $\mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}U$ para uma aplicação $\mathfrak{g} \to \mathcal{D}(U)$. Em resumo, uma aplicação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada para uma álgebra de Weyl pode ser obtida considerando a ação de $\mathfrak{g}$ em um subconjunto aberto de um espaço homogêneo. Usaremos este método no contexto da dimensão infinita para obter realizações de campos livres.

B.2.3 Variedade bandeira

Agora consideremos uma álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$ arbitrária. Ela tem uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ (como espaço vetorial), onde $\mathfrak{h}$ é a subálgebra de Cartan, $\overline{\mathfrak{n}}$ é a subálgebra nilpotente inferior e $\mathfrak{n}$ é a subálgebra nilpotente superior. Consideremos também as subálgebras de Borel canônica $\mathfrak{b}$ e oposta $\overline{\mathfrak{b}}$.

Sejam V um espaço vetorial com dimensão finita e $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r \leq n$ uma sequência de inteiros. Uma **variedade bandeira** $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$ é definida por

$$\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r) = \{\{0\} \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_r \subseteq V \mid \dim(V_i) = n_i\}.$$

Uma **bandeira completa** de subespaços de V é uma cadeia $\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$ de comprimento $n = \dim(V)$. Lembremos que uma cadeia de subespaços em V é uma coleção $\mathcal{C}$ de subespaços de V, onde dois a dois são distintos e para quaisquer $F, F' \in \mathcal{C}$ temos que $F \subsetneq F'$ ou $F' \subsetneq F$. Cada cadeia de subespaços é ordenada pela inclusão própria. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V e $V^i := \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$, para $i = 1, \dots, n$, temos que $\{0\} \subsetneq V^1 \subsetneq \cdots \subsetneq V^n = V$ é uma **bandeira completa canônica** em V.

Por exemplo, para $G = SL_n$ esta é a variedade das bandeiras completas de subespaços de $\mathbb{C}^n$: $V^1 \subset \cdots \subset V^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, $\dim V^i = i$. O grupo SL_n age transitivamente nesta variedade, e o estabilizador da bandeira na qual $V^i = \text{span}\{e_n, \dots, e_{n-i+1}\}$ é o subgrupo $\overline{B}$ das matrizes triangulares inferiores.

Seja G o grupo de Lie simplesmente-conexo conexo correspondente à $\mathfrak{g}$, N o subgrupo unipotente superior de G correspondente à $\mathfrak{n}$ e B o subgrupo de Borel de G correspondente à $\mathfrak{b}$. Também temos o subgrupo unipotente inferior $\overline{N}$ correspondente à $\overline{\mathfrak{n}}$ e o subgrupo de Borel $\overline{B}$ correspondente à $\overline{\mathfrak{b}}$.

Queremos um espaço homogêneo S em G tal que exista $U \subset S$ um subconjunto aberto na topologia de Zariski, onde $U \cong \mathbb{A}^m$ (um espaço afim). Dessa maneira, podemos definir o anel de operadores diferenciais $\mathcal{D}(U)$, que é uma álgebra de Weyl. Como $\mathfrak{g}$ age em U através de $\mathfrak{g} \to \text{Vect}U$, podemos obter uma aplicação $\mathfrak{g} \to \mathcal{D}(U)$.

Um candidato natural para um espaço homogêneo em G no qual podemos realizar $\mathfrak{g}$ por operadores diferenciais é a variedade bandeira $G/\overline{B}$. A variedade bandeira tem um subconjunto aberto $U = N \cdot [1] \subset G/\overline{B}$, chamado de *big cell*, que é isomorfo à N.

B.3 Realizações de campos livres no caso afim

Nesta seção, ao invés de considerar uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com dimensão finita, vamos considerar uma álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$, que possui dimensão infinita.

B.3.1 Variedades bandeiras generalizadas

É possível definir uma variedade bandeira para uma álgebra de Kac-Moody arbitrária, e em particular para álgebras de Kac-Moody afim. Vimos que a variedade bandeira é definida no contexto da dimensão finita como o quociente do grupo de Lie G pelo seu subgrupo de Borel. Entretanto, no caso das álgebras afim existem alguns candidatos para o "subgrupo de Borel", e então várias escolhas para a variedade bandeira.

Pela sua própria definição, cada álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ vem equipada com uma decomposição de Cartan. Portanto, cada álgebra de Kac-Moody vem equipada com duas escolhas óbvias para uma subálgebra de Borel: $\overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h} \oplus \overline{\mathfrak{n}}$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. Contudo, existem outras escolhas também. Considere a anti-involução ω em $\mathfrak{g}$ que preserva $\mathfrak{h}$ e envia os geradores canônicos de $\mathfrak{n}$ nos geradores canônicos em $\overline{\mathfrak{n}}$, e vice-versa. É natural chamar uma subálgebra $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ de subálgebra de Borel generalizada se $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, onde $\mathfrak{n}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \omega(\mathfrak{n})$. Em outras palavras, $\mathfrak{b}$ é subálgebra de Borel generalizada de $\mathfrak{g}$ se $\mathfrak{b} + \omega(\mathfrak{b}) = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{b} \cap \omega(\mathfrak{b}) = \mathfrak{h}$.

Agora, dada uma subálgebra de Borel generalizada, consideremos o subgrupo B correspondente do grupo de Kac-Moody, e definimos a variedade bandeira correspondente como G/B. As variedades bandeiras correspondentes à duas diferentes escolhas de subgrupos de Borel B e B', são isomorfas se, e somente se, B e B' são conjugados por um elemento de G. Por exemplo, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples com dimensão finita, então todas as subálgebras de Borel são conjugadas umas as outras e, portanto, existe somente uma variedade bandeira a menos de um isomorfismo (e.g., temos que $G/B \cong G/\overline{B}$). Porém, se $\mathfrak{g}$ tem dimensão infinita, isto está longe de ser verdade.

B.3.2 O caso das álgebras de Kac-Moody afim

Podemos examinar com mais detalhes decomposições de Cartan generalizadas de álgebras de Kac-Moody afim. Consideremos por um momento a versão polinomial da álgebra afim $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$, a qual é a extensão central da álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ (ao invés de considerar $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)$). Vamos denotá-la por $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa^{\text{pol}}$. Esta álgebra de Lie tem a seguinte decomposição de Cartan:

$$\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa^{\text{pol}} = \widehat{\overline{\mathfrak{n}}}^{\text{pol}} \oplus \widehat{\mathfrak{h}}^{\text{pol}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^{\text{pol}} \ , \tag{B.2}$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{n}}^{\text{pol}} &= (\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]) \ , \\ \widehat{\mathfrak{h}}^{\text{pol}} &= (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c \ , \\ \widehat{\overline{\mathfrak{n}}}^{\text{pol}} &= (\overline{\mathfrak{n}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]). \end{aligned}$$

Podemos observar em (1.18) a definição da subálgebra de Borel canônica $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$. Percebemos que $\widehat{\mathfrak{h}}^{\text{pol}} = \widehat{\mathfrak{h}}$ e $\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}^{\text{pol}} = \widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\text{st}}$. Porém, existe uma diferença entre $\widehat{\mathfrak{n}}_{\text{st}}$ e $\widehat{\mathfrak{n}}^{\text{pol}}$, que acontece por conta da escolha de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ ao invés de $\mathbb{C}(\!(t)\!)$, visto que as potências positivas de t em $\widehat{\mathfrak{n}}_{\text{st}}$ podem ser infinitas.

As candidatas óbvias para subálgebras de Borel são $\widehat{\mathfrak{b}} = (\widehat{\mathfrak{n}}^{\text{pol}} \oplus \widehat{\mathfrak{h}})$ e $\widehat{\overline{\mathfrak{b}}} = (\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}^{\text{pol}} \oplus \widehat{\mathfrak{h}})$, de forma que podemos dizer informalmente que elas são versões polinomiais da subálgebra de Borel canônica e subálgebra de Borel canônica oposta, respectivamente. Mas diferente do caso de dimensão finita, elas não são conjugadas uma em relação à outra, e então dão origem à diferentes variedades bandeiras. De fato, o cenário é mais rico, porque além das duas escolhas óbvias de subálgebras de Borel descritas acima existem outras escolhas "intermediárias". As mais naturais dentre elas são as subálgebras de Borel definidas a partir das seguintes subálgebras de Lie

$$(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]) \quad , \quad (\overline{\mathfrak{n}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]). \tag{B.3}$$

Estas escolhas resultarão em uma versão polinomial "torcida" da subálgebra de Borel natural e subálgebra de Borel natural oposta, respectivamente (veja Seção 1.2). Saindo da versão polinomial podemos relembrar que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa} &= \widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\text{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{h}}_{\text{nat}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_{\text{nat}} \quad , \quad \text{onde} \\ \widehat{\mathfrak{n}}_{\text{nat}} &= \Big(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[\![t]\!]\Big) , \\ \widehat{\mathfrak{h}}_{\text{nat}} &= (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}1) \oplus \mathbb{C}c = \widehat{\mathfrak{h}} , \\ \widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\text{nat}} &= \Big(\overline{\mathfrak{n}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\!(t)\!)\Big) \oplus \Big(\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\Big) , \end{aligned}$$

onde $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_{\text{nat}}$ é a subálgebra de Borel natural e $\widehat{\overline{\mathfrak{b}}}_{\text{nat}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\text{nat}}$ é a subálgebra de Borel natural oposta de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$. Agora observando B.3 percebemos que os elementos $h \otimes t^n$, com $h \in \mathfrak{h}$ e $n \neq 0$, estão invertidos se compararmos com a subálgebra de Borel natural e a subálgebra de Borel natural oposta. Podemos dizer que utilizamos uma torção φ nesses elementos. Indiquemos as subálgebras de Borel definidas por meio de B.3 por $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat},\varphi}$ e $\widehat{\overline{\mathfrak{b}}}_{\text{nat},\varphi}$, respectivamente.

Agora consideraremos os grupos de Lie correspondentes. Neste ponto retornamos para as versões das séries de potências formal das nossas álgebras de Lie, ou seja, consideremos $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$ ao invés de $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}^{\text{pol}}$. Observe que, no que diz respeito as variedades bandeiras, as extensões centrais são irrelevantes, pois qualquer subgrupo de Borel conterá o centro e, portanto, quando a extensão central for quocientada por um subgrupo de Borel, eliminamos o centro. Sendo assim consideraremos os grupos de loop. O grupo de loop de $\mathfrak{g}(\!(t)\!)$ é o ind-grupo $G(\!(t)\!)$, ou seja, $\text{Lie}(G(\!(t)\!)) = \mathfrak{g}(\!(t)\!)$. Os grupos de lie $\widehat{B}_{\text{st}}$ e $\widehat{N}_{\text{st}}$ de $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}}$ e $\widehat{\mathfrak{n}}_{\text{st}}$, respectivamente, são subgrupos do grupo $G[\![t]\!]$. Os grupos $\widehat{\overline{B}}_{\text{st}}$ e $\widehat{\overline{N}}_{\text{st}}$ correspondendo à $\widehat{\overline{\mathfrak{b}}}_{\text{st}}$ e $\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{\text{st}}$, respectivamente, são subgrupos do ind-grupo $G[t^{-1}]$.

Agora vamos olhar para as variedades bandeiras correspondentes e suas $\widehat{N}_{\text{st}}$-órbitas. A razão pela qual estamos interessados em $\widehat{N}_{\text{st}}$-órbitas é a mesma que no caso da dimensão finita. Ou seja, existe uma analogia da categoria $\mathcal{O}$ no caso afim, cujos objetos são $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa}$-módulos com ação diagonal de $\widehat{\mathfrak{h}}$ e ação localmente nilpotente de $\widehat{\mathfrak{n}}_{\text{st}}$. Os espaços das funções delta suportadas em $\widehat{N}_{\text{st}}$-órbitas (e espaços de seções globais de feixes $\widehat{N}_{\text{st}}$-equivariantes mais gerais) em qualquer das variedades bandeiras fornecem

$\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos da categoria $\mathcal{O}$.

Pode-se mostrar que a variedade bandeira $G((t))/\widehat{\overline{B}}_{\text{st}}$ pode receber a estrutura de um esquema de tipo infinito. Além disso, ela é estratificada por $\widehat{N}_{\text{st}}$-órbitas de codimensão finita, parametrizadas pelo grupo de Weyl afim. Em particular, existe uma órbita aberta $\widehat{U}$ que é a análoga da big cell $U \subset G/\overline{B}$. A órbita $\widehat{U}$ é isomorfa ao limite projetivo de espaços afim, e então o espaço de funções Fun$\widehat{U}$ em $\widehat{U}$ é o anel de polinômios em uma quantidade infinita de variáveis. A álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ age em $\widehat{U}$, e o espaços de funções Fun$\widehat{U}$ em $\widehat{U}$, considerados como $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-módulos via levantamento diferencial de $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ na álgebra de operadores diferenciais, são justamente os módulos de Verma contragradientes sobre $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$.

Por outro lado, a variedade bandeira "oposta" $G((t))/\widehat{B}_{\text{st}}$ pode receber a estrutura de um ind-esquema, estratificado pelas $\widehat{N}_{\text{st}}$-órbitas de dimensão finita (além disso, a ind-estrutura pode ser obtida dos fechos destas órbitas, os quais são variedades algébricas de dimensão finita). Os espaços das funções delta suportadas na $\widehat{N}_{\text{st}}$-órbita 1-ponto dão origem aos módulos de Verma sobre $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$.

Outras $\widehat{N}_{\text{st}}$-órbitas em $G((t))/\widehat{B}_{\text{st}}$ e $G((t))/\widehat{\overline{B}}_{\text{st}}$ dão origem a vários módulos de Verma torcidos e módulos de Verma contragradientes torcidos. Note que módulos de Verma e módulos de Verma contragradientes sobre $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ agora "vivem" em diferentes variedades bandeiras.

Referências Bibliográficas

[AFdO23] J. C. Arias, V. Futorny e A. de Oliveira. The Category of reduced imaginary Verma modules. 2023. arXiv: 2307.04306. xvi, 207, 211, 212, 213, 214

[BBFK13] V. Bekkert, G. Benkart, V. Futorny e I. Kashuba. New irreducible modules for Heisenberg and affine Lie algebras. *J. Algebra*, 373:284–298, 2013. 10

[BF90] D. Bernard e G. Felder. Fock representations and BRST cohomology in $\mathfrak{sl}(2)$ current algebra. *Comm. Math. Phys.*, 127(1):145–168, 1990. 67

[BGG76] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand e S. I. Gelfand. On a category of $\mathfrak{g}$-modules. *Func. Analysis and App.*, 10:87–92, 1976. English translation. 210

[Bor86] R. E. Borcherds. Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 83(10):3068–3071, 1986. xiii, 29, 41

[Bou68] N. Bourbaki. Éléments de mathématique. Groupes et Algèbres de Lie (Ch. IV - VI). *Hermann, Paris*, 1968. xvi, 223

[BPZ84] A. Belavin, A. Polyakov e A. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetries in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, 241:333–380, 1984. xiii

[Car94] É. Cartan. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. *Faculté des Sciences de Paris, Nony*, 1894. Thèse de doctorat. xi, 5

[CF04] B. Cox e V. Futorny. Intermediate Wakimoto modules for affine $\mathfrak{sl}(n+1)$. *J. Phys. A.*, 37(21):5589–5603, 2004. iii, v, viii, xiv, xv, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 71, 72, 75, 81, 83, 84, 86, 96, 107, 108, 109, 110, 111, 113, 114, 125, 127, 144, 149, 152, 155, 157, 165, 166, 167, 169, 170, 174, 175, 176, 196, 204, 231

[CF06] B. Cox e V. Futorny. Structure of Intermediate Wakimoto modules. *J. Algebra*, 306:682–702, 2006. xiv, 55, 204, 205

[CFM17] B. Cox, V. Futorny e K. Misra. Imaginary Verma modules for $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ and crystal-like bases. *J. Algebra*, 481:12–35, 2017. 212, 213

[Cox94] B. Cox. Verma modules induced from nonstandard Borel subalgebras. *Pac. J. Math.*, 165(2):269–294, 1994. xiv, 58, 59

[Cox05] B. Cox. Fock Space realizations of Imaginary Verma modules. *Springer*, 8:173–206, 2005. xiv, 53, 63, 64, 67, 75, 76, 81, 110, 111, 149, 166, 204

[DFG09] I. Dimitrov, V. Futorny e D. Grantcharov. Parabolic sets of roots. *Contemp. Math.*, 499:61–73, 2009. 9

[DLM98] C. Dong, H. Li e G. Mason. Vertex operator algebras and associative algebras. *J. Algebra*, 206(1):67–96, 1998. 42, 43

[Dyn47] E. B. Dynkin. The structure of semi-simple algebras. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 2(20):59–127, 1947. xi

[FBZ04] E. Frenkel e D. Ben-Zvi. Vertex algebras and Algebraic Curves. *Amer. Math. Soc.*, 2004. xvi, 6, 18, 21, 22, 29, 30, 32, 34, 37, 38, 42, 48, 52, 233, 234

[FF88] B. L. Feigin e E. Frenkel. A family of representations of affine Lie algebras. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 5(263):227–228, 1988. xiv, 53, 62, 69, 84, 108, 149

[FF90a] B. L. Feigin e E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 128(1):161–189, 1990. xiv

[FF90b] B. L. Feigin e E. Frenkel. Representations of affine Kac-Moody algebras, bosonization and resolutions. *Let. in Math. Phys*, 19(4):307–317, 1990. 69, 83, 84, 107, 108, 149

[FK80] I. Frenkel e V. Kac. Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models. *Invent. Math.*, 62:23–66, 1980. xiii, 29

[FK18] V. Futorny e I. Kashuba. Structure of parabolically induced modules for affine Kac–Moody algebras. *J. Algebra*, 500:362–374, 2018. 8, 9, 204

[FK21] V. Futorny e L. Křižka. Positive energy representations of affine vertex algebras. *Comm. Math. Phys.*, 383:1–51, 2021. 12

[FKS19] V. Futorny, L. Křižka e P. Somberg. Geometric realizations of affine Kac-Moody algebras. *J. Algebra*, 528:177–216, 2019. iii, v, xii, xv, 21, 22, 24, 155, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 175, 176, 203

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky e A. Meurman. Vertex operator algebras and the Monster. *Academic Press*, 1988. xiii

[Fre07] E. Frenkel. Langlands correspondence for Loop Groups. *Cambridge University Press*, 2007. xvi, 6, 15, 18, 21, 29, 233

[FS93] V. Futorny e H. Saifi. Modules of Verma type and new irreducible representations for affine Lie algebras. *Amer. Math. Soc.*, 14:185–191, 1993. xiv, 58, 59

[Fut92] V. Futorny. The parabolic subsets of root systems and corresponding representations of affine Lie algebras. *Contemp. Math.*, (131):45–52, 1992. 11

[Fut94] V. Futorny. Imaginary Verma modules for affine Lie algebras. *Canad. Math. Bull*, 37(2):213–218, 1994. xiv, xvi, 10, 55, 208, 209

[Fut97] V. Futorny. Representations of affine Lie algebras. *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, Queen's University, Kingston*, 106, 1997. xii, 9, 10, 11, 221

[GKM+23] M. Guerrini, I. Kashuba, O. Morales, A. de Oliveira e F. J. Santos. Generalized Imaginary Verma and Wakimoto modules. *J. Pure and Applied Algebra*, 227(7):107332–107362, 2023. iii, v, xvi, 157, 203, 204

[Hal15] B. C. Hall. Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction. *Graduate Texts in Mathematics*, 2015. 4

[JK85] H. Jakobsen e V. Kac. A new class of unitarizable highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras. *Springer-Verlag*, 226:1–20, 1985. xiv, 8, 10, 221

[Kac67] V. Kac. Simple Graduated Lie Algebras of Finite Growth. *Func. Analysis and App.*, 1:328–329, 1967. xi, 5

[Kac68a] V. Kac. Graduated Lie Algebras and Symmetric Spaces. *Func. Analysis and App.*, 2:182–183, 1968. xi, 5

[Kac68b] V. Kac. Simple Irreducible Graded Lie Algebras of Finite Growth. *Math. USSR - Izvestiya*, 2:1271–1311, 1968. xi, 5

[Kac90] V. Kac. Infinite dimensional Lie algebras. *Cambridge University Press*, 1990. xiii, xvi, 2, 3, 7, 8, 59, 215, 216, 218

[Kac98] V. Kac. Vertex algebras for beginners. *Amer. Math. Soc.*, 1998. 29, 32, 44

[LW78] J. Lepowsky e R. L. Wilson. Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.*, 62:43–53, 1978. xiii, 29

[Mar99] L. A. B. San Martin. Álgebras de Lie. *Editora Unicamp*, 1999. 215

[Moo67] R. V. Moody. Lie Algebras Associated to Generalized Cartan Matrices. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 73:217–221, 1967. xi, 5

[Moo68] R. V. Moody. A New Class of Lie Algebras. *J. Algebra*, 10:211–230, 1968. xi, 5

[Moo69] R. V. Moody. Euclidean Lie Algebras. *Canad. J. of Math.*, 21:1432–1454, 1969. xi, 5

[MP95] R. V. Moody e A. Pianzola. Lie Algebras with Triangular Decompositions. *Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts*, 1995. xvi, 3, 215, 216

[Ver68] D. N. Verma. Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74(1):160–166, 1968. Yale University, Ph.D. thesis (1966). xiii

[Wak86] M. Wakimoto. Fock Representations of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.*, 104(4):605–609, 1986. xiv, 53

[Zhu96] Y. Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *Amer. Math. Soc.*, 9(1):237–302, 1996. xiii, 39, 41