Injetividade e Módulos Pobres

Helen Samara dos Santos

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies

Durante parte do desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, dezembro de 2012.

Injetividade e Módulos Pobres

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/11/2012. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Francisco Cesar Polcino Milies (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Paques - IM-UFRGS
- Prof. Dr. Raul Antonio Ferraz - IME-USP

Dedicatória

Dedico à minha família, porto seguro, fonte de apoio e amor.

Dedico, com carinho, à minha avó, Santarosa Costa dos Santos (*in memoriam*), que, infelizmente, faleceu durante a realização deste trabalho. Um exemplo de bondade e de tantos outros adjetivos positivos. Enquanto eu viver, será amada e lembrada.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies pela ótima sugestão do tema e orientação. Agradeço pelo apoio, paciência, ajuda, leitura cuidadosa do texto e sugestões enriquecedoras. Obrigada por tudo.

Agradeço aos professores Sergio R. López-Permouth pelo incentivo, colaboração e pelas dúvidas sanadas.

Agradeço aos professores Raul Antonio Ferraz, Antonio Paques e Alegria Gladys Shalom pela participação na Defesa da dissertação, leitura do texto, comentários sobre o trabalho e propostas de alterações.

Agradeço aos professores do IME que, de uma forma geral, me ensinaram não somente coisas relacionadas com matemática. Com maior apreço, agradeço às professoras Maria Izabel Ramalho Martins e Sônia Regina Leite Garcia.

Agradeço aos meus pais, Dauto Costa dos Santos e Marlene dos Santos, por tudo o que são, por tudo o que fizeram e fazem pela nossa família. Tudo o que conquistei e conquistarei é, sem dúvida, me espelhando em vocês.

Agradeço ao meu irmão, Helder dos Santos, por toda a confiança, aprovação e por todas as as experiências que vivemos juntos e que colaboraram para todas as nossas atuais conquistas. Como de costume, a "operação jantar-fora" está concluída.

Agradeço ao Caio De Naday Hornhardt, por todo apoio, companheirismo e amizade durante estes anos mais recentes da minha vida.

Agradeço à Valéria Lopes pela proximidade, agradável e de grande valor, durante esta etapa da minha vida. Tudo de bom.

Agradeço ao meus parentes e amigos, por darem mais trama, sabor e motivação à minha vida. Não nomearei cada um dos parentes dos quais agradeço pois, felizmente, a família é grande. Quanto aos amigos, agradeço, em especial, à Zô, Fatiminha, Carol, Eneas, Mendes, Serpa e aos meus amigos IMEanos, pela cumplicidade e apoio.

Agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro prestado.

Por fim, agradeço a todos aqueles que nunca receberão um agradecimento.

Resumo

Santos, H. S. **Injetividade e Módulos Pobres**. 2012. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

O objetivo deste trabalho é estudar algumas classes de anéis. Para isso, introduzimos o conceito de módulo pobre e provamos algumas propriedades básicas destes módulos. Além disso, estudamos quais hipóteses sobre um anel R fazem com que alguma família da classe dos R-módulos seja uma família destituída (famílias tais que todo R-módulo é pobre), uma família sem classe média (famílias tais que todo R-módulo ou é pobre ou é injetivo) ou uma família que é uma utopia (famílias tais que todo R-módulo não é pobre).

Palavras-chave: módulo pobre, módulo injetivo, teoria de anéis.

Abstract

Santos, H. S. **Injectivity and Poor Modules**. 2012. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

The goal of this dissertation is to study certain classes of rings. To this end, we introduce the definition of a poor module and prove some basic properties of these modules. Furthermore, we study which hypotheses on a ring R turn some classes of R-modules into a destitute family (families such that every R-module is poor), a family with no middle class (families such that every R-module is either poor or injective) or a family that is an utopia (families such that every R-module is not poor).

Keywords: poor module, injective module, ring theory.

Lista de Símbolos

$Im(f)$	Imagem do homomorfismo f
$J(R)$	O Radical de Jacobson do anel R
$Ker(f)$	Núcleo do homomorfismo f
$Mod\text{-}R$	A classe dos R-módulos
$SSMod\text{-}R$	A classe dos R-módulos semisimples

Sumário

Introdução

De acordo com [9], os módulos injetivos, que ainda não eram denotados assim, foram inicialmente considerados por Baer no seu trabalho publicado no Bull. Am. Math. Soc., v. 46, em 1940, que generalizava o teorema "um subgrupo divisível de um grupo abeliano é um somando direto deste grupo" para módulos.

Podemos definir módulo injetivo como sendo um módulo tal que se é somando direto de todo módulo que o contêm.

Os módulos injetivos são interessantes em muitos aspectos, por exemplo, sabemos que todo módulo está contido em um módulo injetivo.

Com o conceito de domínio de injetividade, podemos definir módulos injetivos de uma outra maneira:

Dado um R-módulo M, na classe dos R-módulos, chamamos a subclasse $\{S \subseteq M;\ M \text{ é } S\text{-injetivo}\}$ de domínio de injetividade de M.

Equivalentemente à definição mencionada acima, os módulos injetivos são aqueles tais que o domínio de injetividade é o maior possível, isto é, um módulo M diz-se injetivo se $In^{-1}(M) = Mod\text{-}R$.

Neste ponto, é natural nos perguntarmos se, com a ordem parcial da inclusão, existe uma cota inferior maior do que o módulo nulo para o domínio de injetividade de um R-módulo M dado, ou ainda, será que dado um anel R, existe um R-módulo M tal que $In^{-1}(M) = 0$?

É fácil ver que (e vamos provar este resultado neste trabalho) dado um anel R e um R-módulo qualquer M, então a classe dos R-módulos semisimples está contida em $In^{-1}(M)$! Assim, dado um anel R e um R-módulo M, temos uma cota inferior para o domínio de injetividade de M que, ao menos quando estamos no anel nulo, é maior que o módulo nulo.

Ainda na seção 1 do capítulo 1, vamos mostrar que esta cota inferior é a menor das cotas inferiores e, na seção 2 do mesmo capítulo, definimos o o que significa um módulo ser dito pobre: seja R um anel e M um R-módulo, M é dito pobre se $In^{-1}(M) = Mod\text{-}R$.

Note que, enquanto os módulos injetivos tem o "maior" domínio de injetividade possível, os módulos pobres são aqueles que tem o "menor" domínio de injetividade possível.

Esta notação "pobre", bem como as notações (que ainda introduziremos) "utopia", "classe média", "classe destituída", foram todas introduzidas por **Adel N. Alahmadi**, **Mustafa Alkan** e **Sergio López-Permouth**, no artigo [1].

Antes de iniciar nossa procura por módulos pobres, vamos primeiro provar um critério (mais fácil do que testar se todo R-módulo semisimples está no domínio de injetividade de M) suficiente para verificar se um módulo dado é ou não é pobre.

Além disso, no capítulo 1, também introduzimos os módulos projetivos, injetivos e estudamos algumas propriedades básicas destes.

Na seção 3, introduzimos alguns pré-requisitos necessários para o decorrer do texto, por exemplo, lá estão algumas definições novas tais como ideal essencial, submódulos uniformes, anel PCI, SI, V, VG, hereditário e a condição C1.

Começamos o capítulo 2 procurando por exemplos de módulos pobres.

Depois disto, queremos uma abordagem um pouco mais global. Podemos nos perguntar sobre que propriedades podemos concluir do anel se sabemos que todo R-módulo é pobre? Bem, neste caso, em particular sabemos que o R-módulo 0 é pobre, logo, todo R-módulo é semisimples, donde temos que o anel R é semisimples! E o que acontece se todo R-módulo não é pobre? E se todo R-módulo é ou pobre ou injetivo? Pensamentos nesta direção faz com que as seguintes definições se tornem naturais:

Dada uma subfamília F da classe dos R-módulos, dizemos que F é destituída se todo R-módulo pertencente a F é pobre; dizemos que F é sem classe média se todo R-módulos pertencente a R é ou pobre ou injetivo e; dizemos que F é uma *utopia* se todo R-módulo pertencente a R não é pobre.

Nas últimas seções do capítulo 2, usando as definições acima, vamos relacionar propriedades do anel com propriedades da classe dos R-módulos e vice-versa.

Como motivação, podemos atentar para o seguinte: sabe-se que um anel R é noetheriano se e somente se qualquer soma de R-módulos injetivos é injetivo. Isto exemplifica o fato de que propriedades do anel podem implicar propriedades na classe dos R-módulos, vice-versa.

Assim, nas seções 2.2, 2.3 e 2.4, vamos, dentre outras coisas, estudar ques propriedades do anel implica a existência de uma família na classe dos R-módulos sem classe média, ou destituída, ou uma utopia.

Por exemplo, na seção 2.3, vamos provar que se R é um anel artiniano tal que existe um único R-módulo simples S (a menos de isomorfismos), então a classe dos R-módulos simples é destituída (teorema 2.3.6).

No capítulo 2, também introduzimos novos conceitos.Dentre eles, definimos os chamados módulos contínuos e provamos algumas propriedades básicas destes.

Durante o texto expomos alguns exemplos para facilitar a leitura, inclusive, terminamos o capítulo 2 com um exemplo de uma utopia-artiniana. Boa leitura!

Capítulo 1

Noções Básicas

1.1 Módulos Injetivos e Projetivos

Neste trabalho, exceto quando houver menção, todos as estruturas são à direita e todos os anéis são associativos e têm unidade.

Os pré-requisitos para a leitura deste texto são conhecimentos básicos de estruturas algébricas como anéis e módulos. Os livros [2] e [3] cobrem todos os pré-requisitos necessários para a plena compreensão deste texto, no livro [3] é suficiente ler o capítulo 2 e seções 5.1, 5.2, 5.3, 6.1, 6.4, 6.5, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 e 8.1. A ementa da disciplina MAT5734, oferecida regularmente pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, também contém todos os pré-requisitos.

No decorrer do texto, $J(R)$ denota o radical de Jacobson do anel R; quando não houver perigo de confusão, denotaremos $J(R)$ por J, além disso, diremos que um anel R é **J-semisimples** se $J(R) = 0$. Denotaremos a categoria dos R-módulos por *Mod*-R.

Vamos usar as seguintes definições para anel simples/semisimples e para módulo simples/semisimples:

Definição 1.1.1 (Módulo Simples/Semisimples)**.** Um R-módulo M é dito **simples** se não contêm submódulo não-trivial próprio e é dito **semisimples** se é soma direta de submódulos simples.

Definição 1.1.2 (Anel Simples/Semisimples)**.** Um anel R é dito **simples** (respectivamente, **semisimples**) se o R-módulo R_R é simples (respectivamente, semisimples).

Denotaremos a categoria dos R-módulos semisimples por *SSMod*-R. Durante o texto, faremos livre uso dos seguintes teoremas:

Teorema 1.1.3 (Teorema VI.5.1. de [2]). *Seja M um R-módulo. São equivalentes:*

(a) M é semisimples;

(b) M é a soma de seus submódulos simples;

(c) Se N é submódulo de M então existe P submódulo de M tal que $M = N \oplus P$;

Teorema 1.1.4 (Teorema VI.5.2. de [2]). *(a) Todo submódulo de um R-módulo semisimples é semisimples.*

(b) Todo quociente de um R-módulo semisimples é semisimples.

(c) Se $\{N_i\}_{i \in I}$ é uma família de R-módulos semisimples, então $M = \oplus_{i \in I} N_i$ é semisimples.

Teorema 1.1.5 (Teorema 7.30 de [3]). *Um anel R é semisimples se e somente se é artiniano e é J-semisimples.*

Definição 1.1.6 (Módulo S-Injetivo). Seja S um R-módulo. Um R-módulo M é dito **S-injetivo** quando dados um R-módulo P e homomorfismos de módulos $f\colon P \hookrightarrow S$, $g\colon P \to M$ com f injetora, então, existe um homomorfimo de módulos $h\colon S \to M$ tal que $h \circ f = g$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & S \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Diremos que um R-módulo M é **injetivo** se M é S-injetivo para todo $S \in Mod$-R. Também diremos que um anel R é **auto-injetivo** se R_R é R-injetivo. Durante o decorrer do texto, usaremos muitas vezes o Critério de Baer para provarmos que um módulo é injetivo.

Teorema 1.1.7 (Critério de Baer, Proposição V.3.1 de [2]). *Um R-módulo M é injetivo se e somente se quando dados um ideal I de R, e homomorfismos de módulos $f\colon I_R \hookrightarrow R_R$, $g\colon I_R \to M$ com f injetora, existe um homomorfimo de módulos $h\colon R_R \to M$ tal que $h \circ f = g$.*

Um exemplo de módulo injetivo é o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$: sejam um número natural n e homomorfismo de módulos $f\colon n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $g\colon n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ com f injetora. Considerando o homomorfismo de módulos $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ tal que

$$h(x) = \frac{g(n)}{f(n)}x$$

temos que

$$h(f(nx)) = \frac{g(n)}{f(n)}f(nx) = \frac{g(n)}{f(n)}f(n)x = g(n)x = g(nx).$$

Outro resultado devido à Baer é o seguinte teorema:

Teorema 1.1.8 (Teorema 6.96 de [3])**.** *Todo módulo é submódulo de um módulo injetivo.*

Proposição 1.1.9 (Teorema 6.88 de [3])**.** *Soma direta finita de módulos injetivos é um módulo injetivo.*

Sabe-se que a soma direta qualquer de R-módulos injetivos é sempre um R-módulo injetivo se e somente se o anel R é noetheriano. Neste texto, só vamos usar a seguinte implicação:

Proposição 1.1.10 (Teorema 6.97 parte (i) de [3])**.** *Se R é noetheriano, então soma direta de R-módulos injetivos é um R-módulo injetivo.*

Existe um noção dual de módulo injetivo:

Definição 1.1.11 (Módulo S-Projetivo)**.** Um R-módulo M é dito **S-projetivo** quando dados um R-módulos P e homomorfismos de módulos $f\colon S \twoheadrightarrow P$, $g\colon M \to P$ com f sobrejetora, então, existe um homomorfimo de módulos $h\colon M \to S$ tal que $f \circ h = g$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\
S \arrow[r, "f"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definição 1.1.12 (Módulo Livre)**.** Seja R um anel. Um R-módulo M diz-se livre se, existe um número natural k tal que M é isomorfo ao R-módulo $R^{(k)} = \underbrace{R \times ... \times R}_{k \text{ vezes}}$.

Diremos que um R-módulo M é **projetivo** se M é S-projetivo para todo $S \in Mod\text{-}R$.

Proposição 1.1.13 (Proposição V.2.1 de [2]). *Seja um A-módulo P. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) P é projetivo;

(b) Se P é imagem de um A-módulo M por um epimorfismo $f : M \to P$, então P é isomorfo a um somando direto X de M, além disso, $M = X \oplus Ker(f)$.

(c) P é somando direto de um A-módulo livre.

Note que, da proposição acima, temos que os módulos livres são projetivos, além disso, temos o seguinte corolário imediato:

Corolário 1.1.14. *Somando direto de um módulo projetivo é projetivo.*

Proposição 1.1.15 (de [8]). *Se M é a soma direta de uma família de R-módulos $\{M_i\}_{i \in I}$ então M é projetivo se e somente se cada M_i o é.*

Teorema 1.1.16 (Teorema VI.6.1. de [2]). *Seja R um anel. São equivalentes:*

(a) R é semisimples;

(b) Todo R-módulo é semisimples;

(c) Todo R-módulo é injetivo;

(d) Todo R-módulo é projetivo;

(e) R é soma direta finita de ideais minimais.

Observe que o teorema acima implica que todo anel semisimples é artiniano e noetheriano.

Definição 1.1.17 (Domínio de Injetividade). A classe

$$\{S \in Mod\text{-}R : \text{M é S-injetivo}\}$$

é chamada de **Domínio de Injetividade** do R-módulo M e é denotada por $In^{-1}(M)$.

Note que, com esta notação, se M é um R-módulo injetivo então $In^{-1}(M)$=Mod-R.

Observe, também, que dado um R-módulo M então $SSMod\text{-}R \subset In^{-1}(M)$. Com efeito, seja M um R-módulo e tomemos $S \in SSMod\text{-}R$. Tomemos um R-módulo P e homomorfismos de módulos $f\colon P \to S$ e $g\colon P \to M$ com f injetora. Como S é semi-simples, existe um submódulo de $W \subseteq S$ tal que $S = Im(f) \oplus W$, onde $Im(f)$ denota a imagem do homomorfimo f, além disso, como f é injetora, f define um isomorfismo de P e $Im(f)$. Assim, denotando por id a aplicação identidade de S em $Im(f) \oplus W$, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & S \arrow[d, "id"] \\
 & M & Im(f) \oplus W \arrow[d, "\pi"] \\
 & & Im(f) \arrow[uul, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

onde $\pi\colon Im(f) \oplus W \to Im(f)$ é a projeção e f^{-1} denota o homomorfimo inverso de f. Consideremos o homomorfimo de módulos $h : S \to M$ tal que $h = g \circ f^{-1} \circ \pi \circ id$. Para concluirmos, basta mostrarmos que h, escolhido assim, é tal que $h \circ f = g$: seja $x \in P$, $(h \circ f)(x) = (g \circ f^{-1} \circ \pi \circ id)(f(x)) = g(f^{-1}(\pi(id(f(x))))) = g(f^{-1}(\pi(f(x)))) = g(f^{-1}(f(x))) = g(x)$. Assim, concluimos que $SSMod\text{-}R \subset In^{-1}(M)$.

Teorema 1.1.18. *Seja R um anel, então*

$$SSMod\text{-}R = \bigcap_{M \in Mod\text{-}R} In^{-1}(M)$$

Usaremos a seguinte proposição na demonstração deste teorema:

Proposição 1.1.19. *Seja T submódulo de N tal que T é N-injetivo então T é somando direto de N.*

Demonstração. Se T é N-injetivo, então existe um homomorfismo $h : N \to T$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

onde i é o homomorfismo inclusão e id é o homomorfismo identidade. Note que $h \circ i = id$ e que h é um homomorfimo sobrejetor. Consideremos o homomorfismo $\pi : N \to N$ tal que $\pi = i \circ id \circ h$. Observe que $\pi^2 = \pi$ pois $\pi \circ \pi = (h \circ id \circ i) \circ (h \circ id \circ i) = h \circ id \circ (i \circ h) \circ id \circ i = h \circ (id)^3 \circ i = h \circ i = \pi$.

Afirmamos que $N = T \oplus Ker(\pi)$, com efeito, se $x \in N$ então $x = (\pi(x)) + (x - \pi(x)) \in T \oplus Ker(\pi)$, além disso, se $x \in T \cap Ker(\pi)$ então $x = \pi(x) = 0$. □

É claro que se T é injetivo então T é M-injetivo, para todo $M \in Mod\text{-}R$, assim, temos o seguinte corolário imediato da proposição 1.1.19:

Corolário 1.1.20. *Um módulo injetivo é somando direto de todo módulo que o contêm.*

Também vale a volta do corolário 1.1.20:

Lema 1.1.21 (Teorema 6.86 de [3])**.** *Somando direto de módulo injetivo é injetivo.*

Teorema 1.1.22. *São equivalentes:*

(a) M é um R-módulo injetivo;

(b) M é somando direto de todo módulo que o contêm.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) É o corolário 1.1.20.
(b) $\Rightarrow$ (a) Se um módulo M é somando direto de todo módulo que o contêm, em particular, pelo teorema 1.1.8, M é somando direto de um R-módulo injetivo, logo, pelo lema 1.1.21, M também é injetivo. □

Vamos à demonstração do teorema 1.1.18:

Demonstração. Já provamos que $SSMod\text{-}R \subset In^{-1}(M)$, para todo $M \in Mod\text{-}R$, assim $SSMod\text{-}R \subset \cap_{M \in Mod-R} In^{-1}(M)$.

Seja $N \in \cap_{M \in Mod-R} In^{-1}(M)$ e consideremos T um submódulo de N. Todo R-módulo é N-injetivo, em particular, T é N-injetivo, e pela proposição 1.1.19 temos que T é somando direto de N, logo, N é semisimples.

Portanto $SSMod\text{-}R = \cap_{M \in Mod-R} In^{-1}(M)$. □

1.2 Módulos Pobres

Note que o último teorema da seção anterior nos diz que *SSMod-R* é um limitante inferior para o domínio de injetividade dos módulos sobre R. Será que este limite é atingido, isto é, será que dado um anel R existe um R-módulo M tal que $SSMod\text{-}R = In^{-1}(M)$?

É natural definirmos

Definição 1.2.1 (Módulo Pobre)**.** Um R-módulo M é dito **pobre** quando $SSMod\text{-}R = In^{-1}(M)$.

Módulos pobres é o conceito central da dissertação. Provaremos muitos resultados envolvendo este conceito e usaremos, para classificar algumas classes de anéis.

Utilizando as definições que fizemos, a primeira pergunta que nos vem à mente é a seguinte: será que todo anel tem um módulo pobre? Ou ainda: quais condições são necessárias sobre um anel R para que exista um R-módulo M pobre? Vamos andar na direção de responder estas perguntas.

Começamos introduzindo algumas definições e resultados convenientes para o decorrer do texto:

Lema 1.2.2. *Seja M um R-módulo. Se $N \in In^{-1}(M)$ e T é submódulo de N então $T \in In^{-1}(M)$.*

Demonstração. Sejam M, N, T como no enunciado e homomorfismos de módulos $f : P \to T$, $g : P \to M$ com f injetora, onde P é um submódulo de T. Consideremos $i : T \to N$ o homomorfimo inclusão. Como f,i são injetoras, $i \circ f$ é injetora. Como $N \in In^{-1}(M)$, existe o homomorfimo $j : N \to M$ tal que $j \circ (i \circ f) = g$, assim, existe um homomorfismo de módulos $h : T \to M$ tal que $h \circ f = g$. De fato, basta tomarmos $h = j \circ i$. Em diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & T \arrow[r, "i"] \arrow[dl, dashed, "h"] & N \arrow[dll, dashed, "j"] \\
 & M & &
\end{tikzcd}$$

□

Proposição 1.2.3. *Um R-módulo M é pobre se e só se todo módulo cíclico $L \in In^{-1}(M)$ é semisimples.*

Demonstração. Se M é um R-módulo pobre então é claro que se $L \in In^{-1}(M)$ então L é *semisimples*.

Por outro lado, suponha que *se* $L \in In^{-1}(M)$ *então* L *é semisimples* e tomemos N um R-módulo tal que M é N-injetivo. Certamente $N = \sum_{x \in N} xR$ e, pelo lema 1.2.2, $xR \in In^{-1}(M)$ para todo x pertencente a N, logo, N é a soma de submódulos semisimples, ou seja, N é semisimples e portanto M é pobre. □

Definição 1.2.4 (Utopia)**.** Dizemos que uma classe A de R-módulos é uma **utopia** se A não contem módulos pobres e dizemos que um anel R é uma utopia se *Mod-R* não contém módulos pobres.

Definição 1.2.5 (Classe Média)**.** Dizemos que uma classe A de R-módulos **não possui classe média** se dado um R-módulo M pertencente a A então ou M é injetivo ou M é pobre (dizemos que um anel R não possui classe média se dado um R-módulo M então ou M é injetivo ou M é pobre).

Definição 1.2.6 (Classe Destituída)**.** Dizemos que uma classe A é **destituída** se dado um R-módulo M pertencente a A então M é pobre (analogamente, dizemos que um anel R é destituído se dado um R-módulo M então M é pobre).

Lema 1.2.7. *Seja R um anel. São equivalentes:*

(a) R é semisimples

(b) Mod-R é destituída

(c) $\{0\}$ *é um módulo pobre*

(d) Existe um R-módulo M injetivo e pobre

Demonstração. (a) ⇒ (b) Se R é semisimples então todo R-módulo é semisimples e todo R-módulo é injetivo, logo, $In^{-1}(M) = Mod\text{-}R = SSMod\text{-}R$;
(b) ⇒ (c) Como *Mod-R* é destituída, o R-módulo $\{0\}$ é um módulo pobre;
(c) ⇒ (d) Como $\{0\}$ é um R-módulo injetivo, $\{0\}$ é um R-módulo injetivo e pobre;
(d) ⇒ (a) Por hipótese existe um R-módulo M tal que M é injetivo e pobre, isto é, $In^{-1}(M) = Mod\text{-}R = SSMod\text{-}R$, ou seja, todo R-módulo é semisimples, logo, R é semisimples. □

Lema 1.2.8. *Se M é um R-módulo pobre então* $M \oplus N$ *é pobre, para todo* $N \in Mod\text{-}R$.

Demonstração. Sejam M, N como no enunciado e seja $S \in In^{-1}(M \oplus N)$. Nestas condições, vamos mostrar que $S \in In^{-1}(M)$: sejam A um R-módulo e homomorfismo de módulos $f : A \to S$ e $g : A \to M$ com f injetora. Consideremos o homomorfismo $i \circ g : A \to M \oplus N$, onde $i : M \to M \oplus N$ é a inclusão canônica. Como $S \in In^{-1}(M \oplus N)$, existe $h_0 : S \to M \oplus N$ tal que $h_0 \circ f = i \circ g$, assim, considerando o homomorfismo $h = \pi \circ h_0 : xR \to M$, onde $\pi : M \oplus N \to M$ é a projeção canônica, temos que $h \circ f = g$. Em diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & S \arrow[dl, dashed, "h"] \arrow[ddl, dashed, "h_0"] \\
& M \arrow[d, shift right, "i"'] & \\
& M \oplus N \arrow[u, shift right, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Como M é pobre, S é semisimples, assim, como S é qualquer, $M \oplus N$ é pobre. □

1.3 Outros Conceitos Importantes

Definição 1.3.1 (Extensões e Submódulos Essenciais)**.** Sejam A, C R-módulos. A é dito um **submódulo essencial** de C, ou C é dito uma **extensão essencial** de A, se $A \subseteq C$ e $A \cap B \neq 0$ para todo submódulo não nulo B de C.

Em particular, definimos I **ideal essencial** de R, se $I \cap K \neq 0$ para todo K ideal não nulo de R.

Para exemplificar, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ é um submódulo essencial de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$. De fato, seja A um submódulo não-nulo de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ e seja $p/q \in A$ tal que $p/q \neq 0$, assim, $p = (p/q)q \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \cap A$ e $p \neq 0$.

Note que todo R-módulo A é extensão essencial de A. Além disso, se o submódulo nulo for um submódulo essencial de um dado R-módulo A então $A = 0$.

Proposição 1.3.2 (Proposição 5.6 de [5])**.** *(a) Sejam A,B,C módulos tais que A é submódulo de B e B é submódulo de C. Assim, A é submódulo essencial de*

C se, e somente se, A é submódulo essencial de B e B é submódulo essencial de C.

(b) *Sejam A_1,A_2,B_1,B_2 submódulos de um módulo C. Se A_1 é submódulo essencial de B_1 e A_2 é submódulo essencial de B_2 então $A_1 \cap A_2$ é submódulo essencial de $B_1 \cap B_2$.*

Observe que soma de ideais essenciais é um ideal essencial, além disso, do item (b) da proposição acima temos que intersecção finita de ideais essenciais é um ideal essencial.

Definição 1.3.3 (Extensão Essencial Própria)**.** Seja A um R-módulo, uma **extensão essencial própria** de A é um R-módulo B tal que A está contido própriamente em B e A é essencial em B.

Definição 1.3.4 (Homomorfismo Essencial)**.** Dizemos que um homomorfismo de módulos $f : A \to B$ é um **homomorfismo essencial** se $f(A)$ é um submódulo essencial de B.

Podemos utilizar o conceito de essencial para caracterizar módulos injetivos conforme mostraremos no teorema 1.3.10. Para tal, vamos provar alguns resultados preliminares.

Proposição 1.3.5. *Sejam A, B submódulos de um módulo M tais que B é maximal com respeito a propriedade $A \cap B = 0$. Assim, $A \oplus B$ é um submódulo essencial de M e $(A \oplus B)/B$ é submódulo essencial de M/B.*

Demonstração. Seja C submódulo de M tal que $(A \oplus B) \cap C = 0$, assim, $A \cap (B \oplus C) = 0$, pela maximalidade de B, $B \oplus C = B$, logo $C = 0$ e portanto $A \oplus B$ é essencial em M.

Seja C/B submódulo próprio não-nulo de M/B. Como C/B é não nulo, B está contido propriamente em C e pela maximilidade de B, $A \cap C \neq 0$, assim, $(A \oplus B) \cap C \neq 0$, logo, $((A \oplus B)/B) \cap (C/B) \neq 0$, assim, concluimos que $(A \oplus B)/B$ é essencial em M/B. □

Corolário 1.3.6. *Todo submódulo de M é somando direto de um submódulo essencial de M.*

Demonstração. Seja N submódulo de M. Utilizando o lema de Zorn, tomemos o submódulo A de M maximal com respeito a propriedade $A \cap N = 0$, assim, temos que $N \subseteq A \oplus N$ e, pela proposição 1.3.5, $A \oplus N$ é essencial em M. □

Corolário 1.3.7. *Um módulo M é semisimples se e somente se não possui submódulos próprios essenciais.*

Demonstração. Seja M um módulo semisimples, assim, dado N submódulo próprio de M, existe P submódulo de M tal que $M = N \oplus P$, ou seja, N não é um submódulo essencial de M. Por outro lado, suponha que M não possui submódulos próprios essenciais e seja N submódulo de M, assim, pelo corolário 1.3.6, N é somando direto de M (pois M é o único submódulo essencial de M), ou seja, M é semisimples.

□

O próximo teorema nos mostra que podemos refinar o critério de Baer utilizando o conceito de essencialidade.

Teorema 1.3.8 (Refinamento do Critério de Baer). *Um R-módulo M é injetivo se e somente se quando dados um ideal essencial I de R e homomorfismos de módulos $f\colon I_R \hookrightarrow R_R$, $g\colon I_R \to M$ com f injetora, existe um homomorfimo de módulos $h\colon R_R \to M$ tal que $h \circ f = g$.*

Demonstração. Pelo definição de injetivo, é claro que se M é um R-módulo injetivo então dados I ideal essencial de R, e homomorfismos de módulos $f\colon I_R \hookrightarrow R_R$, $g\colon I_R \to M$ com f injetora, existe um homomorfimo de módulos $h\colon R_R \to M$ tal que $h \circ f = g$.

Sejam I um ideal de R e $f\colon I_R \hookrightarrow R_R$, $g\colon I_R \to M$ homomorfismos de módulos com f injetora. Pelo corolário 1.3.6, existe A_R submódulo de R_R tal que $f(I_R) \oplus A_R$ é um submódulo essencial em R_R. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_R \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "g"] & f(I_R) \arrow[r, shift left, "i_1"] & f(I_R) \oplus A_R \arrow[l, shift left, "\pi"] \arrow[r, "i_2"] \arrow[dll, "g\widetilde{f}^{-1}\pi"] & R_R \\
 & M & & &
\end{tikzcd}$$

onde $\pi : f(I_R) \oplus A_R \to f(I_R)$ é a projeção canônica; $i_1 : f(I_R) \to f(I_R) \oplus A_R$, $i_2 : f(I_R) \oplus A_R \to R_R$ são as inclusões canônicas; $\widetilde{f} : I_R \to f(I_R)$ é tal que, para todo $x \in I_R$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$; e $\widetilde{f}^{-1} : f(I_R) \to I_R$ é o homomorfismo inverso de $\widetilde{f}$.

Como $f(I_R) \oplus A_R$ é essencial em R_R, existe o homomorfismo $h : R_R \to M$ tal que $h \circ i_2 = g \circ \widetilde{f}^{-1} \circ \pi$. Nestas condições, $h \circ f = h \circ (i_2 \circ i_1 \circ \widetilde{f}) = (h \circ i_2) \circ i_1 \circ \widetilde{f} = (g \circ \widetilde{f}^{-1} \circ \pi) \circ i_1 \circ \widetilde{f} = g \circ (\widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{f}) = g$, assim, pelo critério de Baer, concluimos que M é injetivo. □

Também podemos usar o conceito de essencialidade para caracterizar os módulos injetivos, veremos isto no teorema 1.3.10.

Lema 1.3.9. *Sejam R-módulos A, B, C tais que existe um isomorfismo $\phi : A \to B$, $C - B$ não está contido em A e B é um submódulo próprio de C, então existe um R-módulo D tal que A é submódulo próprio de D.*

Demonstração. Tomemos D como sendo o conjunto $(C - B) \cup A$ munido da operação $+_D : DxD \to D$ definida da seguinte maneira:

$$+_D(x, y) = \begin{cases} \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y)), & \text{se} \quad x \in A \quad \text{e} \quad y \in A, \\ \phi^{-1}(\phi(x) + y), & \text{se} \quad x \in A \quad \text{e} \quad y \notin A, \\ \phi^{-1}(x + \phi(y)), & \text{se} \quad x \notin A \quad \text{e} \quad y \in A, \\ \phi^{-1}(x + y), & \text{se} \quad x \notin A \quad \text{e} \quad y \notin A, \end{cases}$$

Onde ϕ^{-1} denota o homomorfismo inverso de ϕ. Note que a operação $+_D$ está bem definida, além disso, temos que o conjunto D munido da operação $+_D$ é um grupo abeliano.

Consideremos a operação . : $DxR \to D$ tal que $.(r, x) = \phi^{-1}(r\phi(x))$.

Com tais operações e com o fato de que $C - B$ não está contido em A, temos que D é um R-módulo que contém A propriamente. □

Teorema 1.3.10 (Eckmann-Schopf)**.** *Um módulo A é injetivo se e somente se não tem extensões essenciais próprias.*

Demonstração. Suponha que A é injetivo e seja M uma extensão essencial de A, assim, pelo corolário 1.1.20, existe um módulo B tal que $M = A \oplus B$. Como $A \cap B = 0$ temos que $B = 0$ pois A é essencial em M, logo, $A = M$.

Por outro lado, se A não é injetivo, pelo teorema 1.1.22, existe um módulo M que contêm A tal que A não é somando direto de M. Utilizando o lema de Zorn, tomemos B submódulo de M maximal com respeito a propriedade $A \cap B = 0$. Note que $A \oplus B$ é submódulo próprio de M pois A não é somando direto de M e, assim, $(A \oplus B)/B$ é submódulo próprio de M/B, além disso, pela proposição 1.3.5, $(A \oplus B)/B$ é submódulo essencial de M/B. Como A é isomorfo a $(A \oplus B)/B$ e $(M/B) - ((A \oplus B)/B)$ não está contido em A, pelo lema 1.3.9, concluimos que A tem uma extensão essencial própria. □

Definição 1.3.11 (Envolvente Injetivo)**.** Seja A um módulo. O **envolvente injetivo** de A é um módulo injetivo B tal que B é uma extensão essencial de A. Denotaremos o envolvente injetivo de A por $E(A)$.

Por exemplo, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ é um envolvente injetivo de $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ pois, conforme já exposto, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ é um submódulo essencial de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ é injetivo.

Definição 1.3.12 (Essencialmente fechado)**.** Um submódulo A de um R-módulo dado M é dito um submódulo **essencialmente fechado** em M se dado um submódulo $B \subseteq M$ tal que A é essencial em B então $A = B$.

Observe que é equivalente dizer que um submódulo A de um módulo M é um submódulo essencialmente fechado se não existe um submódulo $B \subseteq M$ tal que B é extensão essencial própria de A.

Proposição 1.3.13. *Seja um submódulo A de um R-módulo injetivo E. O submódulo A é injetivo se e somente se A é essencialmente fechado em E*

Demonstração. Sejam A e E como no enunciado.

Se A é injetivo então, pelo teorema 1.3.10, o submódulo A é essencialmente fechado em todo R-módulo que contem A, em particular, A é essencialmente fechado em E.

Por outro lado, se A é essencialmente fechado em E então tomemos um R-módulo B tal que B é uma extensão essencial de A e consideremos os homomorfimos inclusões $i_1 : A \to E$, $i_2 : A \to B$. Como E é injetivo, existe o homomorfismo $h : B \to E$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & E &
\end{tikzcd}$$

Como i_1 é a inclusão canônica e h é uma extensão de i, temos que $A \cap Ker(h) = 0$, donde temos que $Ker(h) = 0$ pois A é essencial em E. Assim, B é isomorfo a $h(B)$, logo, $A = i_1(A) = h \circ i_2(A) = h(A)$ é essencial em $h(B) \subseteq E$, e como A é essencialmente fechado em E, temos que $A = h(B)$. Assim, $h(B) = h(i_2(A)) = h(A)$ e como h é um homomorfismo injetor, concluimos que $A = B$. Como B é uma extensão essencial qualquer de A, o submódulo A não tem extensão essencial própria. Pelo teorema 1.3.10, A é injetivo. □

Teorema 1.3.14. *Se um R-módulo M é injetivo e A é um submódulo de M. Então $E(A) \subseteq M$.*

Demonstração. Sejam R-módulos M e A como no enunciado.

Consideremos a família dos submódulos de M tais que são extensões essenciais de A, isto é,

$$\mathbb{F} = \{B \subseteq M;\ A \text{ é essencial em } B\},$$

parcialmente ordenada pela inclusão. Sabemos que $\mathbb{F} \neq \emptyset$ pois o R-módulos A pertence a $\mathbb{F}$. Além disso, toda subfamília totalmente ordenada $\mathbb{G}$ tem limitante superior, basta tomarmos a união dos elementos da subfamília pois a união de submódulos encaixados é um submódulo. Vamos provar que A é essencial na união dos elementos de $\mathbb{G}$: seja K um submódulo, não-nulo, da união dos elementos de $\mathbb{G}$. Se a intersecção de K com cada um dos elementos de $\mathbb{G}$ for zero, então $K = 0$. Logo, existe $L \in \mathbb{G}$ tal que $L \cap K \neq 0$, então, $L \cap K \cap A \neq 0$ pois A é essencial em L. Assim, $K \cap A \neq 0$. Como K é qualquer, A é essencial na união dos elementos de $\mathbb{G}$.

Pelo lema de Zorn, existe um R-módulo $E \subseteq M$ tal que A é essencial em E. Afirmamos que E é injetivo. De fato, suponha que existe $F \subseteq M$ tal que E é essencial em F. Assim, pelo teorema , A é essencial em F, e como E é maximal, temos que $E = F$, ou seja, E é essencialmente fechado em M. Como M é injetivo, podemos aplicar o teorema 1.3.13, donde concluimos que E é injetivo. Portanto, $E = E(A)$. □

Note que, pelos teoremas 1.1.8 e 1.3.14, todo R-módulo tem um envolvente injetivo.

Agora podemos nos perguntar se o envolvente injetivo é único. O enunciado a seguir nos diz que o envolvente injetivo é único a menos de isomorfismo.

Proposição 1.3.15 (Proposição 5.13 de [5])**.** *Sejam os envolventes injetivos M,N dos módulos M_0,N_0, respectivamente. Se M_0 e N_0 são isomorfos então qualquer isomorfismo de M_0 em N_0 se extende para um isomorfismo de M em N. Em particular, se M e N são dois envolventes injetivos de um dado módulo M_0 então a identidade de M_0 em M_0 se extende para um isomorfismo de M em N.*

Lembramos que um domínio é um anel tal que se a, b são elementos do anel tais que $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Definição 1.3.16 (Domínio de Ore)**.** Um **domínio de Ore** R é um domínio com a seguinte propriedade: se a,b são elementos não-nulos de R então $aR \cap bR \neq 0$.

Definição 1.3.17 (Módulo Uniforme)**.** Um **módulo uniforme** M é um módulo não-nulo tal que: dados dois submódulos não-nulos A,B de M tem-se que $A \cap B \neq 0$.

Se R_R for uniforme, diremos que R é um anel uniforme. Note que poderíamos ter definido módulo uniforme como sendo um módulo M não-nulo tal que todo submódulo de M é essencial em M; observe também que R é um domínio uniforme se e somente se R é domínio de Ore.

Definição 1.3.18 (Família Independente)**.** Seja M um R-módulo. Uma família $\mathcal{F}$ de submódulos de M é dita **independente** se dados $X_0, X_1, ..., X_n$ elementos de $\mathcal{F}$ então $X_0 \cap (X_1 + ... + X_n) = 0$.

Definição 1.3.19 (Módulo de dimensão finita)**.** Um R-módulo A diz-se de **dimensão finita** se $E(A)$ é uma soma direta finita de submódulos indecomponíveis.

Os próximos resultados até, inclusive, o Teorema de Goldie, estão em [5].

Lema 1.3.20. *Um R-módulo A é uniforme se e somente se $E(A)$ é indecomponível.*

Demonstração. Seja A um R-módulo uniforme e sejam B,C submódulos de $E(A)$ tais que $E(A) = B \oplus C$.

Como $(B \cap A) \cap (C \cap A) = 0$ e A é um módulo uniforme, temos que ou $B \cap A = 0$ ou $C \cap A = 0$.

Se $B \cap A = 0$, como A é essencial em $E(A)$, concluimos que $B = 0$. Analogamente, se $C \cap A = 0$, concluimos que $C = 0$.

Em todo caso, temos que ou $B = 0$ ou $C = 0$, logo, $E(A)$ é indecomponível.

Agora, seja A um R-módulo tal que $E(A)$ é indecomponível. Suponha, por absurdo, que A não é uniforme.

Assim, existem submódulos não-nulos B,C de A tais que $B \cap C = 0$.

Como $B \subseteq A \subseteq E(A)$, pelo teorema 1.3.14, temos que $E(B) \subseteq E(A)$. Além disso, como B é essencial em $E(B)$, temos $E(B) \cap C = 0$.

Logo, $E(B) \subsetneq E(A)$ é um somando direto de $E(A)$. Portanto, $E(A)$ é decomponível, uma contradição. □

Proposição 1.3.21. *Um R-módulo A tem dimensão finita se e somente se existe um submódulo essencial que é soma direta finita de submódulos uniformes.*

Demonstração. Seja A um R-módulo de dimensão finita n.

Existem R-módulos indecomponíveis e não-nulos $E_1, ..., E_n$ tais que $E(A) = E_1 \oplus ... \oplus E_n$.

Para todo $i \in \{1, ..., n\}$, definimos $A_i = A \cap E_i$.

Note que, como A é essencial em $E(A)$, temos que, para todo $i \in \{1, .., n\}$, A_i é não-nulo, logo, A_i é uniforme. Além disso, como $\{E_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ é uma família independente, $\{A_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ também o é.

Assim, podemos considerar a soma direta $A_1 \oplus ... \oplus A_n \subseteq E_1 \oplus ... \oplus E(n) = E(A)$.

Vamos mostrar que $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ é essencial em A.

Fixado $i \in \{1, ..., n\}$, $E(E_i) = E_i$, assim, pelo lema 1.3.20, temos que E_i é uniforme. Logo, A_i é essencial em E_i. Donde segue que, $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ é essencial em $E(A) \supseteq A$. Portanto, $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ é essencial em A.

Por outro lado, seja M um R-módulo e $A_1, ..., A_n$ submódulos idependentes e uniformes contidos em A, tais que $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ é essencial em A.

Como, por definição, A é essencial em $E(A)$, temos que $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ é essencial em $E(A)$. Assim, $E(A) = E(A_1 \oplus ... \oplus A_n) \simeq E(A_1) \oplus ... \oplus E(A_n)$.

Por hipótese, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, temos que A_i é uniforme, logo, pelo lema 1.3.20, E_i é indecomponível. Portanto, A tem dimensão uniforme finita. □

Lema 1.3.22. *Se um R-módulo E é a soma direta finita de n submódulos uniformes, então E não contêm uma soma direta de $n + 1$ submódulos não-nulos.*

Demonstração. Faremos a prova por indução.

Se $n = 0$ então $E = 0$. Se $n = 1$ então E é uniforme e, pelo lema 1.3.20, E é indecomponível.

Fixemos um número natural $n > 1$ e vamos supor que se M é um R-módulo tal que pode ser escrito como soma direta de $n - 1$ submódulos uniformes então M não contêm uma soma direta de n submódulos.

Nestas condições, seja um R-módulo E e $E_1, ..., E_n$ submódulos uniformes de E tais que $E = E_1 \oplus ... \oplus E_n$. Suponha, por absurdo, que existam, $A_1, ..., A_{n+1}$ submódulos não-nulos de E tais que $A_1 \oplus ... \oplus A_{n+1} \subseteq E$.

Consideremos a projeção canôninca $\pi : E_1 \oplus ... \oplus E_n \to E_2 \oplus .... \oplus E_n$. E chamemos $A = A_1 \oplus ... \oplus A_n$.

Se $A \cap E_1 = 0$, então $A \simeq \pi(A) \subseteq E_2 \oplus .... \oplus E_n$. Assim, $E_2 \oplus .... \oplus E_n$ contêm uma soma direta de n submódulos não-nulos, o que contradiz a hipótese de indução. Logo, $A \cap E_1 \neq 0$.

Analogamente, podemos provar que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $A \cap E_i \neq 0$.

Como E_i é uniforme, $A \cap E_i$ é essencial em E_i.

Assim, $(A \cap E_1) \oplus ... \oplus (A \cap E_n)$ é essencial em $E_1 \oplus ... \oplus E_n = E$. Donde segue que A é essencial em E.

Mas $A \cap A_{n+1} = 0$, uma contradição. Portanto E não contêm uma soma direta de $n + 1$ submódulos não-nulos. □

Teorema 1.3.23 (Teorema de Goldie)**.** *Um R-módulo A tem dimensão finita se e somente se toda família independente de submódulos de A tem cardinalidade finita.*

Demonstração. Seja A um R-módulo.

Se A tem dimensão finita, então existe um número natural n tal que $E(A)$ é soma direta de n submódulos uniformes. Pelo lema 1.3.22, $E(A)$ não contêm a soma direta de $n + 1$ submódulos não-nulos, em particular, não existe uma família independente de submódulos de A cuja cardinalidade seja maior que n.

Por outro lado, se A não tem dimensão finita então $A \neq 0$ e não existe um número natural n tal que $E(A)$ é a soma direta de n submódulos indecomponíveis.

Chamemos $C_0 = E(A)$. Como C_0 não é indecomponível, existem submódulos não-nulos B_1, C_1 tais que $C_0 = B_1 \oplus C_1$. Além disso, ou B_1 ou C_1 não é a soma direta de submódulos indecomponíveis. Sem perda de generalidade, podemos supor que C_1 não é uma soma direta finita de submódulos indecomponíveis.

Repetindo este argumento, podemos decompor C_1 como a soma direta de dois submódulos não-nulos B_2 e C_2 tal que C_2 não é uma soma direta finita de submódulos indecomponíveis.

Indutivamente, obtemos B_1, C_1, B_2, C_2, ... submódulos não-nulos de C_0 tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $C_n = B_{n+1} \oplus C_{n+1}$, e, C_n não é uma soma direta finita de submódulos indecomponíveis.

Sejam k,n números naturais tais que $k > n$. Assim, $B_k \subseteq C_n$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$B_n \cap \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \right) \subseteq (B_n \cap C_n) = 0$$

Donde segue que $B_1, B_2, ...$ são submódulos independentes de $E(A)$.

Assim, $A \cap B_1, A \cap B_2, ...$ é uma sequência infinita de submódulos independentes de A e como A é essencial em $E(A)$, temos que $B_n \cap A \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, A contêm uma soma direta infinita de submódulos não-nulos. □

Proposição 1.3.24. *Todo módulo noetheriano tem dimensão finita.*

Demonstração. Seja um R-módulo noetheriano M. Se M não tem dimensão finita então, pelo teorema 1.3.23, exite uma família independente e infinita $\mathbb{F} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de submódulos não-nulos de M. Assim, a sequência $B_1 \subseteq (B_1 \oplus B_2) \subseteq (B_1 \oplus B_2 \oplus B_3) \subseteq ...$ é estritamente ascendente e não estacionária, uma contradição pois M é noetheriano. □

Se M é um R-módulo de dimensão finita então, pelo lema 1.3.22, sabemos que existe um número natural n tal $E(A)$ se escreve como uma soma direta finita de n submódulos uniformes. Além disso, para qualquer $j \neq n$, não podemos escrever $E(A)$ como soma direta finita de j submódulos uniformes.

Definição 1.3.25 (Dimensão uniforme)**.** O número natural n, que mencionamos no parágrafo acima, diz-se a **dimensão uniforme** de M.

Definição 1.3.26 (Anel PCI)**.** Um anel R é dito um **anel PCI** se todo R-módulo cíclico, que não é isomorfo a R, é injetivo.[1]

Definição 1.3.27 (Módulo co-semisimples)**.** Um R-módulo M é dito um **módulo co-semisimples** se todo R-módulo simples é M-injetivo.

Observe que se M é um R-módulo semisimples então M é co-semisimples.

Definição 1.3.28 (V-Anel)**.** Um anel R diz-se um **anel co-semisimples** ou **V-anel** se R_R é um R-módulo co-semisimples, isto é, se todo R-módulo simples é injetivo.[2]

Definição 1.3.29 (VG-Anel)**.** Um anel R diz-se um **VG-anel** ou **V-anel generalizado** se todo R-módulo simples é injetivo ou projetivo.

Definição 1.3.30 (Anel Hereditário)**.** Um anel R é dito **hereditário** se para todo I ideal de R, I_R é projetivo;

Note que, pelo teorema 1.1.16, todo anel semisimples é hereditário, além disso,

O próximo resultado é o Teorema Central de [16]. Ele será usado no decorrer do texto. Omitiremos a demonstração deste teorema pois ela é extensa e foge do escopo deste trabalho.

Teorema 1.3.31. *Se R é um anel PCI então ou R é semisimples ou R é noetheriano, hereditário, V-domínio de Ore e não tem ideais bilaterais não triviais.*

Dado um R-módulo M, definamos o conjunto $Z(M) = \{x \in M; xI = 0 \text{ para algum ideal essencial } I \text{ de } R\}$. O conjunto $Z(M)$ com a soma herdada de M é um R-módulo pois se x, $y \in Z(M)$ então existem I_x e I_y ideais essenciais de R tais que $xI_x = 0$ e $yI_y = 0$, assim $(x+y)(I_x \cap I_y) = 0$ e, pela proposição 1.3.2, $I_x \cap I_y$ é um ideal essencial de R.

Definição 1.3.32 (Módulo Singular)**.** Seja M um R-módulo. M diz- se um **R-módulo singular** se $M = \{x \in M; xI = 0 \text{ para algum ideal essencial } I \text{ de } R\}$.

Dado isto, é natural definirmos

[1]PCI são as iniciais de Próprio Cíclico Injetivo

[2]A letra "V" se refere a O.E. Villamayor, o primeiro a dar atenção à anéis com essa propriedade.

Definição 1.3.33 (Módulo/Anel Singular/Não-Singular)**.** Dizemos que um módulo M é um **módulo singular** se $Z(M) = M$ e, que é um **módulo não-singular** se $Z(M) = 0$.

Dizemos que o anel R é um **anel singular** se $Z(R_R) = R_R$ e, que é um **anel não-singular** se $Z(R_R) = 0$.

Lema 1.3.34. *Se R é um anel singular e x é um elemento de R então $ann_R(x)$ é um ideal essencial de R.*

Demonstração. Sejam um anel singular R e um elemento $x \in R$. Como R é singular, existe um ideal I essencial em R tal que $I \subseteq ann_R(x)$, assim, pelo proposição 1.3.2, item (a), o ideal $ann_R(x)$ é essencial em R. □

Proposição 1.3.35 (Proposição 1.22 de [4])**.** *(a) A classe dos R-módulos não singulares é fechada para submódulos, produto direto, extensões essenciais e e extensões de módulos.*

(b) A classe dos R-módulos singulares é fechada para submódulos, quocientes e somas diretas.

Proposição 1.3.36. *Seja um anel R e um ideal não-nulo $I \subsetneq R$. O ideal I é essencial em R se e somente se o R-módulo R/I é singular.*

Demonstração. Sejam um anel R e um ideal não-nulo $I \subsetneq R$.

Suponha que o ideal I é essencial em R e seja um elemento $\bar{r} \in R/I$. Vamos mostrar que $ann_R(\bar{r})$ é um ideal essencial de R, para tal, basta mostrarmos que se K é um ideal principal de R então $K \cap ann_R(\bar{r}) \neq 0$.

Tomemos um elemento $x \in R$. Se $rx = 0$ então podemos tomar um elemento não-nulo $\alpha \in R$ donde temos que $rx\alpha \in I$, o que implica, $\bar{r}x\alpha = 0$, logo, $xR \cap ann_R(\bar{r}) \neq 0$. Se $rx \neq 0$ então o ideal rxR é não-nulo, assim, como o ideal I é essencial em R, existe um elemento não-nulo $\beta \in ((rx)R \cap I)$, ou seja, existe um elemento não-nulo $\alpha \in R$ tal que $rx\alpha \in I$, assim, $\bar{r}x\alpha = 0$, portanto, $xR \cap ann_R(\bar{r}) \neq 0$.

Vamos provar a volta: suponha que R/I é um R-módulo singular. Pelo lema 1.3.34, $ann_R(\bar{1}) = I$ é um ideal essencial de R. □

A proposição 1.3.39, que é sobre caracterização dos módulos singulares, nos será útil na demonstração do teorema 2.1.15. Para demonstrá-la precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 1.3.37. *Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de R-módulos. Então $f(Z(A)) \subseteq Z(B)$.*

Demonstração. Seja $f(x) \in f(Z(A))$, assim, existe I ideal essencial de R tal que $xI = 0$, ou seja, para todo $i \in I$, $xi = 0$, assim, $(f(x))I = \{(f(x))i \in B; i \in I\} = \{f(xi) \in B; i \in I\} = \{0 \in B; i \in I\} = 0$, portanto $f(x) \in Z(B)$. □

Lema 1.3.38. *Se B é um R-módulo então $Z(B)$ é um R-módulo singular.*

Demonstração. Se $x \in Z(B)$ então existe um ideal essencial I de R tal que $xI = 0$, logo, $x \in Z(Z(B))$, portanto $Z(B) \subseteq Z(Z(B))$. Por outro lado, se $x \in Z(Z(B))$ então, por definição, $x \in Z(B)$, logo, $Z(B) = Z(Z(B))$. □

Proposição 1.3.39. *Um R-módulo B é não-singular se e só se $Hom_R(A, B) = 0$, para todo R-módulo singular A.*

Demonstração. Sejam A um R-módulo singular, B um R-módulo não-singular e $f \in Hom_R(A, B)$. Como A é um R-módulo singular, $f(A) = f(Z(A))$, assim, pelo lema 1.3.37, $f(Z(A))$ é submódulo de $Z(B) = 0$, portanto $f = 0$.

Por outro lado, se $Hom_R(A, B) = 0$ para todo R-módulo singular A então, pelo lema 1.3.38, $Hom_R(Z(B), B) = 0$, assim, o homomorfimo inclusão $i : Z(B) \to B$ é o homomorfismo nulo, ou seja, $Z(B) = 0$. □

Definição 1.3.40 (Anel SI)**.** Dizemos que R é um **anel SI** se todo R-módulo singular é injetivo.[3]

Definição 1.3.41 (Condição C1)**.** Dizemos que um módulo M satisfaz a **condição C1** para todo submódulo A de M existe um submódulo K de M tal que A é essencial em K e K é um somando direto de M.

Um módulo que satisfaz a condição C1 diz-se um **módulo SC**.[4]

Lema 1.3.42. *Se M é um R-módulo injetivo. Então M satisfaz a condição C1.*

Demonstração. Seja M um R-módulo injetivo.

Seja um submódulo $A \subseteq M$. Como M é injetivo, podemos aplicar a proposição 1.3.14, donde temos que M contém o envolvente injetivo $E(A)$ de A. Como $E(A)$ é injetivo, $E(A)$ é um somando direto de M. Como A é qualquer, concluimos que o R-módulo M satisfaz a condição C1. □

O próximo resultado é uma consequência imediata do Teorema Central de [15]. Não vamos demonstrar o Teorema Central de [15] pois a demonstração é extensa e técnica, de modo que o resultado será aceito aqui.

[3]SI são as iniciais de Singular Injetivo.

[4]As letras “SC” são as iniciais de Submódulo Complementado.

Lema 1.3.43. *Seja R um anel tal que todo R-módulo cíclico e singular satisfaz C1. Então todo R-módulo cíclico e singular é soma direta de finitos submódulos uniformes.*

Lema 1.3.44 (Corolário 4 de [15])**.** *Seja R um anel tal que todo R-módulo cíclico singular é injetivo. Então todo R-módulo singular é semisimples.*

Demonstração. Seja R um anel como no enunciado deste lema.

Inicialmente, vamos provar que todo R-módulo singular que é cíclico é semisimples.

Seja xR um R-módulo cíclico, singular. Por hipótese, xR é injetivo. Assim, pelo lema 1.3.42, xR satisfaz a condição C1. Como xR é qualquer R-módulo cíclico e singular, pelo lema 1.3.43, temos que xR é soma direta finita de R-módulos uniformes. Denotemos $xR = U_1 \oplus ... \oplus U_n$, onde, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, U_i é um submódulo uniforme.

Fixemos $i \in \{1, ..., n\}$. Seja $0 \neq y \in U_i$. Se $U_i \neq yR$ então existe um submódulo $0 \neq K \subseteq U_i$ tal que $yR \oplus K = U_i$ o que é absurdo pois U_i é uniforme. Logo, $U_i = yR$. Como y é qualquer elemento de U_i, temos que U_i é simples. Portanto, xR é semisimples.

Agora, seja M um R-módulo singular qualquer. Para todo $x \in M$, temos que $xR \subseteq M$ é um submódulo cíclico e singular. Pelo o que acabamos de provar xR é semisimples. Assim, para todo $x \in M$, tem-se que $xR \subseteq Soc(xR) \subseteq Soc(M) \subseteq M$. Logo, $M = Soc(M)$, que é semisimples. □

Teorema 1.3.45. *São equivalentes:*

(a) R é um anel SI;

(b) Todo R-módulo cíclico singular é injetivo;

(c) Todo R-módulo singular é semisimples;

(d) Para todo ideal essencial I de R, tem-se que R/I é semisimples.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Imediata.

(b) $\Rightarrow$ (c) É o lema 1.3.44.

(c) $\Rightarrow$ (d) Se I é um ideal essencial de R então, pela proposição 1.3.36, R/I é singular.

(d) $\Rightarrow$ (a) Sejam M um R-módulo singular, I ideal essencial de R e homomorfismos de módulos $f\colon I_R \hookrightarrow R_R$, $g\colon I_R \to M$ com f injetora. Como M é um R-módulo singular, $I/Ker(g)$ também o é, pois $(I/Ker(g)) \simeq Im(g) \subseteq M$. Nestas condições, pela proposição 1.3.36, $Ker(g)$ é um ideal essencial de R e pelo item (d), $R/Ker(g)$ é semisimples, logo, existe um R-módulo A tal que $R/Ker(g) = I/Ker(g) \oplus A/Ker(g)$

Consideremos o homomorfismo

$$\overline{f} : \frac{I}{Ker(g)} \to \frac{R}{Ker(g)} \text{ tal que } \overline{f}(i + Ker(g)) = f(i) + Ker(g),\ \forall i \in I$$

e o homomorfismo

$$\overline{g} : \frac{I}{Ker(g)} \to M \text{ tal que } \overline{g}(i + Ker(g)) = g(i),\ \forall i \in I.$$

Note que os homomorfismos f e g estão bem definifos, de fato, se $i+Ker(g)$, $j+Ker(g)$ são elementos de $I/Ker(g)$ tais que $i+Ker(g) = j+Ker(g)$ então, $i - j \in Ker(g)$, assim,

(i) $\overline{f}(i+Ker(g))-\overline{f}(j+Ker(g)) = (f(i)+Ker(g))-(f(j)+Ker(g)) = (f(i)-f(j))+Ker(g) = f(i-j)+Ker(g) = \overline{f}((i-j)+Ker(g)) = \overline{f}(0+Ker(g)) = 0+Ker(g)$;

(ii) $\overline{g}(i + Ker(g)) - \overline{g}(j + Ker(g)) = (g(i) + Ker(g)) - (g(j) + Ker(g)) = (g(i) - g(j)) + Ker(g) = g(i - j) + Ker(g) = 0 + Ker(g)$.

Observe também que $\overline{f}$ é injetora pois se i, j são elementos de I tais que $\overline{f}(i+Ker(g)) = \overline{f}(j+Ker(g))$ então $f(i)+Ker(g) = f(j)+Ker(g)$, o que implica que $f(i - j) \in Ker(g)$, logo, $i + Ker(g) = j + Ker(g)$.

Assim, existe um homomorfimo $\overline{h} : R/Ker(g) \to M$ tal que $\overline{hf} = \overline{g}$. Em diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \frac{I}{Ker(g)} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[dll, "\overline{g}"'] & \frac{R}{Ker(g)} = \frac{I}{Ker(g)} \oplus \frac{A}{Ker(g)} \arrow[dlll, dashed, "\overline{h}"] \\
M & & &
\end{tikzcd}$$

Se $i : R_R \to R/Ker(g)$ indica o homomorfismo inclusão, podemos completar o diagrama anterior da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_R \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd, "g"] & & & R_R \arrow[d, "i"] \\
& & 0 \arrow[r] & \frac{I}{Ker(g)} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[dll, "\overline{g}"] & \frac{R}{Ker(g)} = \frac{I}{Ker(g)} \oplus \frac{A}{Ker(g)} \arrow[dlll, dashed, "\overline{h}"] \\
& M & & &
\end{tikzcd}$$

Considerando o homomorfimo $h = \overline{h} \circ i$ temos que $h \circ f = g$. Com efeito, se $x \in R_R$ então, $(\overline{h} \circ i)(f(x)) = \overline{h}(f(x) + Ker(g)) = \overline{h}(\overline{f}(x + Ker(g))) = \overline{g}(x + Ker(g)) = g(x)$.

Portanto, M é injetivo. □

Teorema 1.3.46. *Se R é um domínio PCI então R é um domínio SI.*

Demonstração. Seja R um domínio PCI. Um R-módulo cíclico (e singular) é da forma R/I onde I é um ideal de R. Sabendo disto, tomemos um R-módulo cíclico e singular R/I.

Se R/I é isomorfo a R_R então R_R é um R-módulo singular, logo, $0 = ann_R(1)$ é um ideal essencial de R, assim, $R = 0$ e, em particular, $R/I = 0$ é um R-módulo injetivo.

Se R/I não é isomorfo a R_R então, como R é PCI, R/I é injetivo. Assim, pelo teorema 1.3.45 item (b), R é SI. □

Capítulo 2

Algumas Classes de Anéis

2.1 Anéis com Módulos Pobres

Nesta seção vamos investigar alguns anéis que tem módulos pobres, isto é, procuramos um anel R tal que existe um R-módulo M pobre.

Começamos a nossa busca analisando os anéis PCI. No próximo teorema, vamos mostrar que se R é um anel PCI então R_R é um módulo pobre. Para provar este teorema, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.1.1. *Se R é um domínio PCI e xR é um R-módulo cíclico, não isomorfo a R, então xR é semisimples.*

Demonstração. Pelo teorema 1.3.31, ou R é semisimples ou é noetheriano, hereditário e um V-domínio de Ore.

Se R é semisimples então todo R-módulo o é.

Se R é um domínio de Ore então todo ideal I de R é essencial. Assim, dado um R-módulo cíclico xR temos que $xR \simeq R/I$, onde I é um ideal essencial de R.

Pelo teorema 1.3.46, R é um domínio SI, assim, pelo teorema 1.3.45 item (d), xR é semisimples. □

Teorema 2.1.2. *Se R é um domínio PCI, então R não tem classe média e R_R é um módulo pobre.*

Demonstração. Se todo R-módulo for injetivo então, pelo teorema 1.1.16, todo R-módulo é semisimples, logo, R não tem classe média e R_R é um módulo pobre.

Suponha que existe um R-módulo M que não é injetivo. Vamos provar que todo $xR \in In^{-1}(M)$ é semisimples.

Se $xR \simeq R_R$ então $R_R \in In^{-1}(M)$, logo, M é injetivo o que contradiz a hipótese. Assim, xR é um R-módulo cíclico não isomorfo a R_R, e, pelo lema 2.1.1, xR é semisimples. Como xR é qualquer, M é pobre. Portanto *Mod-R* não tem classe média.

Para completar a demonstração deste teorema, resta-nos provar que R_R é pobre:

Pelo teorema 1.3.31, ou R é semisimples ou é noetheriano, hereditário, V-domínio de Ore.

Se R_R é semisimples então, pelo lema 1.2.7, R_R é um módulo pobre.

Se R_R não é semisimples então, em particular, R_R não é simples, ou seja, existe um submódulo próprio não-trivial I_R de R_R.

Nestas condições, suponha, por contradição, que R_R é injetivo e tomemos um elemento não-nulo $x \in I_R$.

Assim, o submódulo próprio e cíclico xR de R_R é injetivo: se xR não é isomorfo a R_R então xR é injetivo pois R é um domínio PCI e se xR é isomorfo a R_R então xR é injetivo pois R_R o é.

Além disso, observe que como R_R é uniforme, xR é um submódulo essencial de R_R, ou seja, R_R é uma extensão essencial própria de xR e, pelo teorema 1.3.10, xR não é injetivo, o que é uma contradição.

Portanto R_R não é injetivo, logo, é pobre. □

Corolário 2.1.3. *Se R é um domínio PCI então R não é uma Utopia.*

Demonstração. R_R é um R-módulo pobre. □

O próximo teorema mostra que se R é um anel artiniano, então *Mod-R* não é uma utopia.

Teorema 2.1.4. *Se R é um anel artiniano e J é seu radical de Jacobson. Então o R-módulo cíclico $M = R/J$ é pobre.*

Demonstração. Seja $xR \in In^{-1}(R/J)$, um módulo cíclico, não nulo, e seja N_1 submódulo simples de xR; note que N_1 existe pois R é artiniano, logo, xR também o é. Existe um ideal maximal I de R tal que $N_1 \simeq R/I$. É claro que $J \subseteq I$, assim, $R/J \supseteq R/I \simeq N_1$, ou seja, M contém uma cópia isomorfa de N_1. Como R/J é semisimples (pois R/J é J-semisimples e artiniano), existe um submódulo B de R/J tal que $R/J = (R/I) \oplus B$.

Afirmamos que N_1 é xR-injetivo. Com efeito, sejam A submódulo de xR e homomorfismos $f : A \to xR$, $g : A \to N_1$ com f injetora. Consideremos os isomorfismos $\phi : N_1 \to R/I$, $\phi^{-1} : R/I \to N_1$ e os homomorfismos $i : R/I \to R/J$, $\pi : R/J \to R/I$, a inclusão e a projeção, respectivamente. Como $xR \in In^{-1}(R/J)$, existe o homomorfismo $j : xR \to R/J$ tal que $j \circ f = i \circ \phi \circ g$, assim, tomando h o homomorfismo $h : xR \to N_1$ tal que $h = \phi^{-1} \circ \pi \circ j$, temos que $h \circ f = (\phi^{-1} \circ \pi \circ j) \circ f = \phi^{-1} \circ \pi \circ (j \circ f) = (\phi^{-1} \circ \pi) \circ (i \circ \phi \circ g) = (\phi^{-1} \circ \phi) \circ g = g$. Em diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & xR \arrow[dl, dashed, "h = \phi \circ \pi \circ j"] \arrow[dddl, dashed, "j"] \\
 & N_1 \arrow[d, shift right, "\phi^{-1}"'] & \\
 & \frac{R}{I} \arrow[u, shift right, "\phi"'] \arrow[d, shift right, "i"'] & \\
 & \frac{R}{J} = \frac{R}{I} \oplus B \arrow[u, shift right, "\pi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Pelo lema 1.1.19, N_1 é somando direto de xR, ou seja, existe um submódulo L_1 de xR tal que $xR = N_1 \oplus L_1$. Se $L_1 = 0$ então $xR = N_1 \simeq R/I \subseteq R/J$; logo, xR é semisimples. Se $L_1 \neq 0$ então vamos repetir o procedimento, isto é, tomemos um submódulo simples N_2 de L_1 e vamos encontrar $L_2 \subseteq L_1$ tal que $L_1 = N_2 \oplus L_2$, e assim por diante. Note que estamos criando uma cadeia descendente $xR \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq ...$ e como xR é artiniano, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $L_n = L_{n+m}$, para todo número natural m, ou seja, o processo acaba em um número finito de passos. Assim, xR é semisimples. Como $xR \in In^{-1}(M)$ é qualquer, M é pobre. □

Vamos continuar a busca por módulos pobres, considerando o caso em que o anel R é um domínio hereditário e noetheriano. Será necessário introduzir algumas definições.

Definição 2.1.5 (Anel Primo)**.** Um anel R é dito **primo** se dados dois elementos $a,b \in R$ tais que $aRb = 0$ então ou $a = 0$ ou $b = 0$.

Definição 2.1.6 (Módulo Uniserial)**.** Um módulo é dito **uniserial** se é artiniano, noetheriano e contém uma única série de composição;

Definição 2.1.7 (Módulo Cadeia)**.** Um módulo M é dito um **módulo-cadeia** se o conjunto $X = \{N \subseteq M; N \text{ é submódulo de } M\}$ é totalmente ordenado com relação à inclusão;

Definição 2.1.8 (Módulo Uniserial Generalizado)**.** Um anel R é dito **uniserial generalizado** se todo R-módulo é soma direta de submódulos cadeia.

Observe que o anel $\mathbb{Z}$ é primo, hereditário e noetheriano. Se um $\mathbb{Z}$-módulo é de torção e finitamente gerado, então é um grupo abeliano finito. Estes grupos são soma direta de grupos cíclicos de ordens potencia de primos e estes são módulos uniseriais.

O lema 2.1.9, que citamos sem demonstração, é uma generalização desta observação.

Lema 2.1.9. *(a) (Lema 1 de [11]) Seja R um anel primo, hereditário e noetheriano. Todo R-módulo de torção finitamente gerado é soma direta de um número finito de módulos uniseriais;*

(b) (Lema 2 parte i de [10]) Se, em um R-módulo M, um elemento x é de torção então xR é submódulo de torção com $ann_R(xR) \neq 0$;

Note que um R-módulo uniserial contém somente um submódulo simples que, inclusive, é seu único submódulo semisimples.

Proposição 2.1.10. *Seja R um domínio hereditário e noetheriano e seja M o R-módulo semisimples que contém exatamente uma cópia de cada R-módulo simples. Nestas condições, M é ou pobre ou injetivo.*

Demonstração. Sejam R e M como no enunciado. Suponha que M não é injetivo, neste caso, vamos provar que M é pobre usando a proposição 1.2.3: Seja $xR \in In^{-1}(M)$; consideremos o homomorfismo sobrejetor ϕ: $R_R \to xR$ tal que $\phi(a) = xa$, $\forall\ a \in R$. Assim, $R_R/Ker(\phi) \simeq xR$. Se $Ker(\phi) = 0$ então $R_R \simeq xR$ e, pelo critério de Baer, M é injetivo, o que é contradição. Portanto $Ker(\phi) \neq 0$ donde concluimos que x é um elemento de torção, assim, pelo item b. do lema 2.1.9, xR é um submódulo de torção.

Observando que todo domínio é um anel primo, podemos aplicar o item a. do lema 2.1.9, assim, xR é uma soma direta de um número finito de R-módulos uniseriais $U_1, ..., U_n$, isto é, $xR = U_1 \oplus ... \oplus U_n$. Vamos provar que U_i é simples, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Seja $i \in \{1, ..., n\}$ e suponha, por absurdo, que U_i não é simples. Tomemos o submódulo simples e não-nulo S de U_i, lembre-se que S existe e é único pois U_i é uniserial. Como S é um R-módulo simples, M contém uma cópia de S, assim, existe um homomorfismo de módulos g: $S \to M$ tal que $Im(g) \simeq S$, com, $Ker(g) = 0$. Como M é U_i-injetivo, existe o homomorfismo de módulos h: $U_i \to M$ tal que $g = h \circ i$, onde i: $S \to U_i$ é a inclusão canônica. Em diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & U_i \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Como U_i é uniserial ou $Ker(h) = 0$ ou $Ker(h) \supseteq S$. Se $Ker(h) \supseteq S$ então $g = h \circ i$ é o homomorfismo nulo, o que contradiz a hipótese. Assim, $Ker(h) = 0$ donde segue que $U_i \simeq M$, assim, U_i é semisimples e como U_i é uniserial, $U_i = S$ é simples, uma contradição. Esta contradição vem do fato de supormos que U_i não é simples, logo, U_i é simples e, consequentemente, xR é semisimples. □

Observe que, pela proposição acima, no caso particular em que R tem apenas um R-módulo simples M (a menos de isomorfismo) então M é ou injetivo ou pobre.

Além disso, se R é um V-anel, então, pelo lema 1.1.9, o R-módulo semisimples M, definido como na proposição acima, é injetivo. Por outro lado, se M é injetivo então R é um V-anel. Com efeito, seja S um R-módulo simples, vamos mostrar que S é injetivo. Dados R-módulos A,B e homomorfismos de módulos $f\colon B \hookrightarrow A$, $g\colon B \to S$ com f injetora, considere o homomorfismo inclusão $i\colon S \to M$. Como M é injetivo, existe o homomorfismo $j\colon A \to M$ tal que $i \circ g = j \circ f$. Em diagramas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[ddl, dashed, "j"] \\
& S \arrow[d, "i"] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Consideremos o homomorfismo projeção $\pi\colon M \to S$, assim, existe o homomorfismo $h = \pi \circ j\colon A \to S$ tal que $(\pi \circ j) \circ f = g$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl, dashed, "h"] \arrow[ddl, dashed, "j"] \\
& S & \\
& M \arrow[u, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

logo, S é injetivo. Acabamos de demonstrar o seguinte corolário:

Corolário 2.1.11. *Nas condições da proposição acima, M é injetivo se e só se R é um V-anel.*

Corolário 2.1.12. *Seja R um domínio hereditário noetheriano. Se existe um R-módulo uniserial U, não-trivial e não-simples então o R-módulo M, definido como na proposição 2.1.10, é um R-módulo pobre.*

Demonstração. Basta provarmos que M não é injetivo. Suponha, por absurdo, que M é injetivo e tomemos o R-submódulo próprio simples S de U (S existe pois U é uniserial, não-trivial e não-simples). Consideremos os homomorfismos de módulos g: $S \to M$, i: $S \to U$ tais que $Im(g) \simeq S$ e i é a inclusão. Como M é injetivo, existe um homomorfismo de módulos h: $U \to M$ tal que $g = h \circ i$, em diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & U_i \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Como U é uniserial, ou $Ker(h) = 0$ ou $Ker(h) \supseteq S$. Se $Ker(h) \supseteq S$ então $g = h \circ i$ é o homomorfismo nulo, o que contradiz a hipótese. Assim, $Ker(h) = 0$ donde segue que $U \simeq M$, assim, U é semisimples e como U é uniserial concluimos que U é simples, o que é absurdo. Portanto, M não é injetivo. □

Vamos mostrar que podem ocorrer os dois casos da proposição 2.1.10 :

Exemplo 2.1.13. Tomemos $R = \mathbb{Z}$. Sabemos que $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais, em particular, todo ideal é finitamente gerado, ou seja, $\mathbb{Z}$ é noetheriano, além disso, se I é um ideal de $\mathbb{Z}$ então o R-módulo I_R é um R-módulo livre, logo I_R é projetivo, donde concluímos que $\mathbb{Z}$ é hereditário.

Afirmamos que todo $\mathbb{Z}$-módulo simples é isomorfo a $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$ para algum p primo. Com efeito, seja S um $\mathbb{Z}$-módulo simples. S é cíclico, logo, existe um ideal $I = n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ tal que $S \simeq (\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_n$; se n não é primo então $n = pq$, com $p,q \in \mathbb{Z} - \{1\}$, assim, $\mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{Z}_q$ são submódulos não triviais de S, o que contraria a simplicidade de S, logo, n é primo.

Tomemos M como na proposição 2.1.10, da afirmação acima, sabemos que $M = \oplus_{p\ primo}(\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})) = \oplus_{p\ primo}\mathbb{Z}_p$. Vamos provar que M é pobre: seja $x\mathbb{Z} \in In^{-1}(M)$, sabemos que existem $p_1, ..., p_r$ primos distintos e $n_1, ..., n_r$ números naturais estritamente positivos tais que $n = p_1^{n_1}...p_r^{n_r} = n$ e $\mathbb{Z}_n = x\mathbb{Z}$, além disso, sabemos que dados um submódulo A de $x\mathbb{Z}$ e homomorfismo de módulos $f : A \to x\mathbb{Z}$, $g : A \to M$ com f é injetora, existe o homomorfismo $h : x\mathbb{Z} \to M$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & x\mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Suponha, por absurdo, que $x\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ não é semisimples. Então existe $i \in \{1, ..., r\}$ tal que $n_i \geq 2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $n_1 \geq 2$. Note que $n/p_1 \in \mathbb{Z}$ pois p_1^2 divide n. Tomando $A = (n/p_1)Z_n$, $g : A \to M$ tal que $g(n/p_1) = 1_{Z_{p_1}}$ e $f : (n/p_1)\mathbb{Z}_n \to x\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ a inclusão canônica Nestas condições, temos que

$$1_{\mathbb{Z}_{p_1}} = g(\frac{n}{p_1}) = hf(\frac{n}{p_1}) = h(\frac{n}{p_1}) = \frac{n}{p_1}h(1) \tag{2.1}$$

Consideremos $\pi : \oplus_{p\ primo}\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p_1}$ a projeção usual e consideremos $\pi(h(1)) \in \mathbb{Z}_{p_1}$. Pela equação (2.1), $(n/p_1)\pi(h(1)) = 1$, mas p_1 divide (n/p_1), logo, $1 = p_1(n/p_1^2)\pi(h(1)) = 0$, absurdo. Portanto $x\mathbb{Z}$ é semisimples. Assim, pela proposição 1.2.3, concluimos que M é pobre.

O $\mathbb{Z}$-módulo M também é um exemplo de um módulo pobre tal que nenhum submódulo próprio é pobre. De fato, seja N submódulo próprio de M, assim, existe p um número primo tal que nenhum submódulo de N é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Consideremos o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{p^2}$ que não é semisimples;

note que $\mathbb{Z}_{p^2}$ só tem um submódulo não trivial, que inclusive é simples, a saber, $p\mathbb{Z}_{p^2} \simeq \mathbb{Z}_p$. Vamos mostrar que $\mathbb{Z}_{p^2} \in In^{-1}(N)$: Sejam A submódulo de $\mathbb{Z}_{p^2}$ e homomorfismos de módulos $f : A \to \mathbb{Z}_{p^2}$, $g : A \to N$ com f é injetora.

Se A é um dos submódulos triviais de $\mathbb{Z}_{p^2}$, então é trivial encontrar $h : \mathbb{Z}_{p^2} \to N$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z}_{p^2} \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

Se $A = p\mathbb{Z}_{p^2} \simeq \mathbb{Z}_p$ então g é o homomorfismo nulo pois, por hipótese, nenhum submódulo de N é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, assim, basta tomarmos h o homomorfismo nulo que o diagrama acima comuta.

Portanto, $\mathbb{Z}_{p^2} \in In^{-1}(N)$, logo, N não é pobre.

Exemplo 2.1.14. Tomemos R um domínio PCI.

Se R é semisimples então R é hereditário e noetheriano. Assim, pelo teorema 1.3.31, em qualquer caso, R é hereditário e noetheriano.

No conjunto dos ideais maximais de R, definimos a relação $I \sim K$ se e somente se $R/I \simeq R/K$, que é, obviamente, uma relação de equivalência. Seja $\mathbb{A}$ um conjunto de representantes destas classes. Assim, podemos escrever o R-módulo M, definido como na proposição 2.1.10, como $M = \bigoplus_{I \in \mathbb{A}} R/I$.

Se existe um ideal I de $\mathbb{A}$ tal que $(R/I) \simeq R_R$ então $R_R \simeq R/I \subseteq M$ e, como M é semisimples, segue que R_R é semisimples, logo, todo R-módulo é semisimples e M é pobre e injetivo.

Se para todo ideal I de A, R/I não é isomorfo a R_R então M é a soma de R-módulos injetivos e, pelo lema 1.1.10, é injetivo.

Portanto, se tomarmos um domínio *PCI* temos um exemplo onde M, definido como na proposição 2.1.10, é injetivo.

O último teorema que vamos provar neste seção é o seguinte:

Teorema 2.1.15. *Se R é um anel não singular que tem um R-módulo pobre não singular então R é um anel SI.*

Demonstração. Seja R um anel não-singular que tem um R-módulo pobre M não-singular. Se N é um R-módulo singular então $N \in In^{-1}(M)$. Com efeito, sejam um submódulo B de N e homomorfismo de módulos $f\colon B \hookrightarrow N$, $g\colon B \to M$, com f injetora. Como N é singular, B também o é, assim, pela proposição 1.3.39, g é o homomorfismo nulo, logo, basta tomarmos o homomorfismo nulo $h : N \to M$ que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g=0"'] & N \arrow[dl, dashed, "h=0"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Como M é pobre concluimos que todo R-módulo singular é semisimples e pelo lema 1.3.45, R é um anel SI. □

2.2 Anéis Sem Classe Média

Nós já definimos o que significa um anel não ter classe média. Vamos dizer que R não possui **classe média simples** se a classe $\{M \in Mod\text{-}R; M \text{ é simples }\}$ não possui classe média. Analogamente, definimos o que significa o anel R não possuir **classe média semisimples** ou **classe média projetiva**.

Teorema 2.2.1. *Seja R um anel tal que $J(R)$ é um ideal simples e essencial em R. Se $R/J(R)$ é semisimples então R não tem classe média. Além disso, $J(R)$ é um R-módulo pobre.*

Demonstração. Seja M um R-módulo não injetivo e seja xR um R-módulo cíclico tal que $xR \in In^{-1}(M)$. Como M não é injetivo, xR não é isomorfo a R_R, isto é, existe um ideal não nulo I de R tal que $xR \simeq (R/I)$. Assim, segue que $J(R) \subseteq I$ pois I é não nulo e $J(R)$ é simples e essencial em R; logo, temos que

$$\frac{\frac{R}{J(R)}}{\frac{I}{J(R)}} \simeq \frac{R}{I} \simeq xR.$$

Como R/J é semisimples, xR também o é; assim, pela proposição 1.2.3, M é pobre, ou seja, R não tem classe média. Como um anel com unidade sempre contem um ideal maximal, $J(R)$ é um ideal próprio de R, ou seja, $J(R)_R$ é um R-módulo próprio e essencial de R_R; assim, pelo Teorema 1.3.10, $J(R)_R$ não é injetivo e portanto é pobre. □

Vamos ver alguns exemplos de famílias que não tem classe média:

Exemplo 2.2.2. Se R é um domínio PCI então a família dos R-módulos não tem classe média, este resultado está em 2.1.2.

Exemplo 2.2.3. Se R é um V-anel então a família dos R-módulos simples não tem classe média, este resultado é imediato a partir da definição de V-anel.

Para o próximo exemplo, vamos introduzir a seguinte definição:

Definição 2.2.4 (Anel Quase-Frobenius)**.** Um anel injetivo e noetheriano R diz-se um **anel Quase-Frobenius**(**QF**).

Exemplo 2.2.5. ¡2-¿ Exemplos de anéis QF: $\mathbb{Z}_n$, com $n > 1$.

Proposição 2.2.6. *Se um anel R é QF então todo R-módulo projetivo é injetivo.*

Demonstração. Seja um anel R que é QF.

Afirmamos que todo R-módulo livre é um R-módulo injetivo. De fato, todo R-módulo livre é soma direta de cópias de R. Como o anel R é injetivo temos que todo R-módulo livre é soma direta de submódulos injetivos. Usando a hipótese que o anel é noetheriano, podemos aplicar a proposição 1.1.10, donde concluímos que todo R-módulo livre é injetivo.

Assim, se tomarmos um R-módulo projetivo P, temos que P é injetivo pois é somando direto de um módulo livre e somando direto de R-módulo injetivo é um R-módulo injetivo, conforme vimos em 1.1.21. □

Também vale a volta da proposição acima, isto é, se um anel R é tal que todo módulo projetivo é injetivo então o anel R é quase-Frobenius. Não vamos provar esta recíproca pois ela não será necessária no decorrer do texto.

Exemplo 2.2.7. Pela proposição 2.2.6, concluimos que se R é um anel QF então a família dos R-módulos projetivos não tem classe média.

Um anel R diz-se um **anel de Frobenius** se R é Quase-Frobenius e $Soc(R_R) \simeq (R/J)$.

Note que, por definição e pela proposição 2.2.6, se R é um anel de Frobenius então a família dos R-módulos projetivos não tem classe média.

Definição 2.2.8 (Módulos Ortogonais)**.** Dois módulos M,N são ditos **ortogonais** se não existem M_0, N_0 submódulos não-nulos de M,N, respectivamente, tais que M_0 e N_0 são isomorfos.

Lema 2.2.9. *Sejam um R-módulo projetivo e semisimples M, um R-módulo semisimples B que é ortogonal ao R-módulo M e um submódulo X de E(B). Então Hom(X, M) = 0*

Demonstração. Sejam M, B e X como no enunciado e seja $f \in Hom(X, M)$.

Como M é semisimples, $f(X)$ é somando direto de M, assim, pelo corolário 1.1.14, $f(X)$ também é projetivo. Pela proposição 1.1.13, $f(X)$ é isomorfo a um somando direto de X, ou seja, $X = Y \oplus Ker(f)$ onde Y é isomorfo a $f(X)$.

Suponha que $f(X \cap B) \neq 0$, assim, pelo mesmo argumento que expomos no parágrafo anterior, temos que $X \cap B$ é isomorfo a $f(X \cap B) \oplus [(Ker(f) \cap (X \cap B))]$ o que é uma contradição pois B e M são ortogonais. Logo, $f(X \cap B) = 0$, donde segue que $X \cap B \subseteq Ker(f) \subseteq X$.

Como B é essencial em $E(B)$ e X é essencial em X, pela proposição 1.3.2, item (b), $X \cap B$ é essencial em X, assim, pela proposição 1.3.2, item (a), $Ker(f)$ é essencial em X, logo, $Y = 0$, ou seja, $X = Ker(f)$. □

Teorema 2.2.10. *Se M é um módulo projetivo, pobre e semisimples então qualquer módulo semisimples B, que é ortogonal a M, é injetivo.*

Demonstração. Vamos provar que $E(B) = B$, daí, como $E(B)$ é injetivo, B também o é.

Tomemos $X \subseteq E(B)$. Pelo lema 2.2.9, $Hom(X, M) = 0$ assim, como X é qualquer, M é $E(B)$ injetivo. Note que, se M é $E(B)$ injetivo então $E(B)$ é semisimples pois M é pobre. Consequentemente, pelo teorema 1.3.10, $E(B)$ não possui submódulo próprio essencial, logo, $E(B) = B$. □

Corolário 2.2.11. *Se R é um anel tal que existe um R-módulo simples projetivo e pobre M, então R é um VG-anel.*

Demonstração. Seja R um anel tal que existe um R-módulo simples projetivo e pobre M e seja B um R-módulo simples. Se B é isomorfo a M então B é projetivo pois, por hipótese, M o é. Se B não é isomorfo a M então, pela simplicidade de B e M, B é ortogonal a M, logo, podemos aplicar o teorema 2.2.10, donde temos que B é injetivo. Portanto R é um VG-anel. □

Baseado no corolário acima, podemos exibir mais um exemplo de um anel que não tem classe média simples:

Exemplo 2.2.12. Seja F um corpo e consideremos o anel das matrizes triangulares superiores, 2x2, com coeficientes em F, isto é,

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\text{x}2}(F);\ c = 0 \right\} = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$$

Para classificarmos, a menos de isomorfismos, os R-módulos simples, precisamos estudar os quocientes da forma R/I, onde I é um ideal maximal de R.

Comecemos pensando nos ideais de R.

Afirmamos que se I é um ideal de R então

i) ou I é igual ao ideal $I_1 = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R$. Neste caso, é fácil ver que I_1 é maximal.

ii) ou I é igual ao ideal $I_2 = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R$. Note que I_2 é minimal.

iii) ou I é igual ao ideal $I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R$. Observe que I_3 é minimal.

iv) ou existem elementos $b, c \in F$, ambos os elementos não nulos e tais que I é igual ao ideal $I_{(b,c)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & cx \end{bmatrix} \in R \,;\, x \in F \right\} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} R$.

v) ou I é igual ao ideal $I_4 = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix} = I_2 + I_3$.

Vamos provar a afirmação. Seja um ideal $I \subseteq R$ e tomemos um elemento não-nulo $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in I$.

Se $b = c = 0$ então $a \neq 0$ pois α é não-nulo. Assim, $I \supseteq I_1$. Como I_1 é maximal, $I = I_1$.

Se $b = 0$ e $c \neq 0$, temos dois casos, se $a = 0$ então $I \supseteq I_3$, logo, ou $I = I_3$ ou $I = I_4$. Observe que, não existem elementos não-nulos $y, z \in F$ tais que $I_3 \subseteq I_{(y,z)}$.

Por outro lado, se $b \neq 0$ e $c = 0$ temos dois casos, se $a = 0$ então $I \supseteq I_2$, logo ou $I = I_1$ ou $I = I_2$ ou $I = R$. Se $a \neq 0$ então $I \supseteq I_1$ e, como I_1 é maximal, $I = I_1$.

Se $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $a \neq 0$ então $I = R$. Se $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $a = 0$ então $J \supseteq I_{(b,c)}$, logo, ou $I = I_{(b,c)}$ ou $I = I_4$ ou $I = R$.

Dados $b, c \in F$, ambos não-nulos, $I_{(b,c)}$ não é um ideal maximal pois $I_{(b,c)} \subsetneq I_4 \subsetneq R$.

Além disso, como $I_2 \subsetneq I_1 \subsetneq R$ e $I_3 \subsetneq I_4 \subsetneq R$, temos que os únicos ideais maximais de R são I_1 e I_4.

Assim, Se M é um R-módulo simples então ou $M \simeq R/I_1 \simeq I_3$ ou $M \simeq R/I_4$.

Para podermos aplicar o corolário 2.2.11, vamos mostrar que R/I_1 é projetivo e pobre.

Como $R_R = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R\right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R\right) = I_3 \oplus I_1$, temos que I_3 é somando direto do módulo livre R_R, logo, é projetivo. Portanto, R/I_1 é projetivo.

Queremos provar que todos os R-módulos cíclicos no domínio de injetividade de I_3 são semisimples. Para isso, vamos analisar inicialmente os quocientes da forma R/I onde I é um ideal de R.

i) Já sabemos que R/I_1 é simples pois I_1 é maximal.

ii) $R/I_2 = \left(R/\begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$ logo, R/I_2 é semisimples.

iii) $R/I_3 = R/\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \simeq I_1$.

Suponha, por absurdo, $I_1 \in In^{-1}(I_3)$.

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R & \end{tikzcd}$$

Onde g é o homomorfismo tal que $g\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, i é inclusão canônica e h é tal que $h \circ f = g$.

Seja $x \in F$ tal que $h\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$. Assim,

$$h \circ i\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$g\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ uma contradição.}$$

Portanto $I_1 \notin In^{-1}(I_3)$ e como R/I_3 é isomorfo a I_1 concluimos que $R/I_3 \notin In^{-1}(I_3)$.

iv) Sejam a,b elementos não-nulos de F.

Suponha, por absurdo, que $R/I_{(a,b)} \in In^{-1}(I_3)$.

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & R/\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}R \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}R &
\end{tikzcd}$$

Onde g é o homomorfismo tal que para todo $x \in F$, $g\left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$,
i é a inclusão canônica e h é um homomorfismo tal que $h \circ f = g$.

Seja $y \in F$ tal que $h\left(\overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$. Assim, temos que

$$h \circ i\left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}\right) = h\left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}\right) = h\left(\overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}\right) = h\left(\overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$g\left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ uma contradição.}$$

Portanto $R/I_{(a,b)} \notin In^{-1}(I_3)$.

v) Já mencionamos que R/I_4 é simples pois I_4 é maximal.

Logo, todos os R-módulos cíclicos no domínio de injetividade de I_3 são semisimples. Assim, pela proposição 1.2.3, I_3 é pobre.

Como R/I_1 é isomorfo a I_3, concluimos que R/I_1 é pobre.

Ou seja, R é um anel tal que o R-módulo R/I_1 é simples, projetivo e pobre. Pelo corolário 2.2.11, o anel R não tem classe média simples.

Corolário 2.2.13. *Seja R um anel que não é semisimples. Se existe um R-módulo simples, projetivo e pobre $M \neq 0$, então*

(a) Toda soma direta de R-módulos simples e injetivos é um R-módulo injetivo.

(b) R não tem classe média simples.

Demonstração. (a) Seja $B = \oplus_{i \in \lambda} S_i$ uma soma direta de R-módulos simples e injetivos. Como S_i é injetivo para todo $i \in \lambda$ e o anel R não é semisimples, não existe $i_0 \in \lambda$ tal que S_{i_0} é não-nulo e é isomorfo a M pois se existisse, teríamo um R-módulo S_{i_0} injetivo e pobre, logo, o anel R é semisimples, uma contradição.

Assim, pela simplicidade de M, o R-módulo B, além de semisimples, é ortogonal a M. Logo, pelo teorema 2.2.10, B é um R-módulo injetivo.

(b) Decorre imediatamente do corolário 2.2.11.

□

Para o próximo teorema, vamos precisar da seguinte definição e do seguinte resultado:

Definição 2.2.14 (Anel Kasch)**.** Um anel R diz-se um **anel Kasch** se todo R-módulo simples é isomorfo a um ideal de R. [1]

Proposição 2.2.15. *Se R é um anel e A é um submódulo próprio de R_R então existe B submódulo maximal de R_R tal que $A \subseteq B$.*

Demonstração. Sejam um anel R e um submódulo próprio A de R_R. Consideremos a família $\mathcal{F}$ dos submódulos próprios N de R_R com $A \subseteq N$; parcialmente ordenada pela inclusão, isto é, $\mathcal{F} = \{N \text{ submódulo de } R_R; A \subseteq N \text{ e } 1 \notin R_R\}$. Note que esta família é não-vazia pois o R-módulo A pertence a $\mathcal{F}$, além disso, toda subfamília totalmente ordenada tem elemento maximal. Com efeito, seja $\{N_i\}_{i \in I}$ subfamília totalmente ordenada de $\mathcal{F}$, assim $\cup_{i \in I} N_i$ é tal que $A \subseteq \cup_{i \in I} N_i$ e $1 \notin \cup_{i \in I} N_i$, logo, $\cup_{i \in I} N_i$ é um elemento maximal. Assim, podemos aplicar o lema de Zorn, donde concluimos que existe um elemento maximal B da família $\mathcal{F}$. □

Lema 2.2.16. *Se todo ideal maximal $I \subseteq R$ é somando direto do anel R então o anel R é semisimples.*

[1] O nome "Kasch" é em homenagem ao matemático Friedrich Kasch, que introduziu esta noção.

Demonstração. Suponha que todo ideal maximal é somando direto e tomemos A submódulo de R_R, pela proposição 1.3.5, existe B submódulo de R_R tal que $A \oplus B$ é essencial em R_R. Se $A \oplus B \neq R_R$ então, pela proposição 2.2.15, existe N submódulo maximal de R_R tal que $A \oplus B \subseteq N$. Como todo submódulo maximal é um somando direto, existe $E \neq 0$ tal que $N \oplus E = R_R$, em particular, $N \cap E = 0$ e como $A \oplus B \subseteq N$, $(A \oplus B) \cap E = 0$ o que contradiz o fato de $A \oplus B$ ser essencial em R_R. Portanto $A \oplus B = R_R$. □

Teorema 2.2.17. *Seja R um anel Kasch. Se existe um R-módulo não-nulo, semisimples projetivo e pobre, então R é semisimples.*

Demonstração. Tomemos R como no enunciado. Para provarmos que R é semisimples, pelo lema 2.2.16, basta mostrarmos que todo ideal maximal é somando direto.

Seja I um ideal maximal de R. Pelo corolário 2.2.11 ou R/I é injetivo ou R/I é projetivo. Se R/I é projetivo então podemos considerar o homomorfimo projeção $\pi : R \to R/I$, assim, R/I é imagem do R-módulo R_R por um epimorfimo, logo, pela proposição 1.1.13 item (b), R/I é isomorfo a um somando direto de R_R, isto é, existe T submódulo de R_R tal que $R/I \simeq T$ e $T \oplus Ker(\pi) = T \oplus I = R_R$. No caso em que R/I é projetivo, provamos que I é um somando direto de R_R.

Seja R/I injetivo. Como R é um anel Kasch, existe S submódulo simples de R_R tal que R/I é isomorfo a S. Sabemos que S é injetivo pois R/I o é, assim, pelo corolário 1.1.20, S é somando direto de R_R. Como R_R é um R-módulo livre, podemos aplicar a proposição 1.1.13 item (c), donde concluimos que S é projetivo, logo, R/I é projetivo e, neste caso, já provamos que I é somando direto de R_R. □

Vamos introduzir o conceito de módulo indecomponível, um conceito mais fraco que simplicidade:

Definição 2.2.18 (Módulo Indecomponível)**.** Um R-módulo não-nulo diz-se **indecomponível** se não pode ser escrito como soma direta de dois submódulos não-nulos.

Observe que se M é um R-módulo simples então é claro que é indecomponível, no entanto, o $\mathbb{Z}$-módulo dos números inteiros é um exemplo de um módulo que é indecomponível e não é simples.

Definição 2.2.19 (Módulo Local)**.** Um R-módulo M diz-se **local** se existe um único submódulo I maximal em R.

Lembramos que um elemento x diz-se **idempotente** se $x^2 = x$.

Definição 2.2.20 (Idempotente Local)**.** Um elemento x de um anel R diz-se um **idempotente local** se x é idempotente e se o R-módulo xR é local.

Lema 2.2.21. *Se R é um anel e $x \in R$ é um idempotente local então xR é indecomponível.*

Demonstração. Sejam um anel R e um elemento idempotente local $x \in R$.

Se xR é decomponível então existem submódulos não-nulos $A, B \subseteq xR$ tais que $xR = A \oplus B$. Pela proposição 2.2.15, existem submódulos maximais M_A, M_B de xR tais que A está contido em M_A e B está contido em M_B. Como x é um idempotente local, xR só tem um ideal maximal, donde temos que $M_A = M_B$. Assim, $A, B \subseteq M_A$, logo $xR = A \oplus B \subseteq M_A$ o que é uma contradição pois M_A é maximal em xR.

Portanto, xR é indecomponível. □

Definição 2.2.22 (Anel Semiperfeito)**.** Um anel R diz-se um **anel semiperfeito** se existem $e_1, ..., e_n$ idempotentes locais tais que $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$.

Teorema 2.2.23. *Seja R um anel semiperfeito. Se existe um R-módulo projetivo simples e pobre então existem ideais R_1, R_2 tais que $R = R_1 \oplus R_2$ com R_1 semisimples e R_2 semiperfeito. Além disso, $Soc(R_2)$ é projetivo, pobre e todos os ideais minimais de $Soc(R_2)$ são isomorfos entre si.*

Demonstração. Seja um anel R como no enunciado. Se o anel R é semisimples então a tese é trivial. Vamos supor que o anel R não é semisiples.

Como R é semiperfeito, existem $e_1, ..., e_n$ idempotentes locais tais que $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$.

Se existe algum e_i tal que e_iR é um ideal minimal e injetivo, então, tomemos R_1 como sendo a soma de todos os e_iR que são ideais minimais injetivos. Caso contrário, definimos $R_1 = 0$. Definido assim, R_1 é semisimples.

Consideremos a soma dos e_iR restantes e denotemos por R_2. Note que, R_2 é semiperfeito.

Além disso, observe que, por construção, $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR = R_1 \oplus R_2$.

Assim, para concluir a demonstração, basta mostrarmos que $Soc(R_2)$ é projetivo, pobre e dados dois submódulos simples A,B de $Soc(R_2)$, A é isomorfo a B.

Vamos provar que existe um ideal minimal projetivo e pobre contido em $Soc(R_2)$. Seja S um R-módulo projetivo simples e pobre, como no enunciado. Como S é simples, existe um ideal maximal $T \subseteq R$ tal que $S \simeq R/T$, logo, R/T é projetivo. Pela proposição 1.1.13, item (b), existe um ideal minimal $K \subseteq R$ tal que $K \simeq R/T$ e $R = K \oplus T$. Afirmamos que o ideal K

pertence a $Soc(R_2)$. Com efeito, suponha que K é um ideal minimal injetivo, assim, $R \in In^{-1}(K)$ e como K é pobre, R é semisimples, uma contradição.

Agora vamos mostrar que todo ideal minimal de $Soc(R_2)$ é isomorfo a K. Seja P um submódulo simples, não-nulo, de $Soc(R_2)$. Se P não é isomorfo a K então, pelo teorema 2.2.10, P é injetivo, logo, é somando direto de todo módulo que o contêm. Pelo lema 2.2.21, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, e_iR é indecomponível, assim, temos que $P = e_xR$ para algum $x \in \{1, ..., n\}$, logo, $P \in R_1 \cap Soc(R_2)$ o que é uma contradição pois P é não-nulo.

Portanto P é isomorfo a K, logo, P é projetivo e pobre. Como soma de módulos projetivos é projetivo e, pelo 1.2.8, $Soc(R_2)$ é projetivo e pobre. □

Corolário 2.2.24. *Se R é um anel tal que existe um R-módulo M projetivo, semisimples e pobre então $Soc(R)$ é projetivo. Além disso, sob estas condições, se P é um R-módulo projetivo então $Soc(P)$ é projetivo.*

Demonstração. Suponha que R é um anel tal que existe um R-módulo M como no enunciado e seja um ideal minimal I de R. Se I é isomorfo a algum submódulo de S então I é projetivo. Se I é ortogonal a S então, pelo teorema 2.2.10, I é injetivo, logo, pelo corolário 1.1.20, I é somando direto do módulo livre R_R, assim, pela proposição 1.1.13 item (c), I é projetivo. Como I é qualquer, concluimos que todo ideal minimal é projetivo. Portanto, pela definição de $Soc(R)$ e pela proposição 1.1.15, $Soc(R)$ é projetivo.

Seja P um R-módulo projetivo e seja S submódulo simples não-nulo de P. Se S é isomorfo a algum submódulo Q não-nulo de M então, como M é projetivo e semisimples podemos aplicar o corolário 1.1.14 donde concluimos que Q é projetivo, logo S é projetivo. Se S é ortogonal a M então, pelo teorema 2.2.10, S é injetivo, assim, pelo corolário 1.1.20, S é somando direto do R-módulo projetivo P, logo, pelo corolário 1.1.14, S é projetivo. Como S é qualquer, concluimos que todo submódulo simples não-nulo de P é projetivo, assim, pela definição de $Soc(P)$ e pela proposição 1.1.15, $Soc(P)$ é projetivo. □

Definição 2.2.25 (Anel Semiprimo)**.** Um anel R diz-se **semiprimo** se todo ideal não-nulo I de R é tal que $I^2 \neq 0$.

Lema 2.2.26. *Se R é um anel semiprimo e I é um ideal minimal, não-nulo, de R então existe um elemento idempotente $e \in R$ tal que $I = eR$.*

Demonstração. Sejam R,I como no enunciado. Como o ideal I é não nulo e o anel R é semiprimo, existe um elemento $a \in I$ tal que $aI \neq 0$ e como I é minimal, temos que $aI = I$. Assim, existe um elemento não-nulo $e \in I \subseteq R$ tal que $ae = a \neq 0$.

Consideremos o ideal $K = \{x \in I;\ xa = 0\} \subseteq I$. De $ae = a \neq 0$ temos que $(e-1)a = 0$, logo, $e(e-1)a = 0$, portanto, $(e^2 - e) \in K$. Mas, como $e \notin K$ e I é minimal, temos que $K = 0$, logo, $e^2 = e$, ou seja, o elemento e é idempotente.

Pela minimalidade de I temos que $I = eR$. □

Teorema 2.2.27. *Seja R um anel semiprimo com dimensão uniforme finita. Se existe um R-módulo M projetivo, simples e pobre então R é semisimples.*

Demonstração. Sejam R um anel e M um R-módulo como no enunciado.

Vamos supor que $M \neq 0$ pois se $M = 0$ a tese é satisfeita trivialmente. De fato, se $M = 0$ então $In^{-1}(R) = Mod - R = SSMod - R$ pois M é pobre, logo R é semisimples.

Pela simplicidade de M, sabemos que existe um ideal T de R tal que M é isomorfo a R/T. Como M é projetivo, R/T também o é, assim, pelo teorema 1.1.13 item (b), existem um ideal minimal I e um ideal maximal K de R, tal que I é isomorfo a R/T e $R = I \oplus K$. Note que, como $M \neq 0$, $I \neq 0$.

Se $Hom_R(K, I) = 0$ então I é K-injetivo. De fato, seja X um submódulo de K e suponha que existe um homomorfismo não-nulo $g \in Hom_R(X, I)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & K \\ & I & \end{tikzcd}$$

Note que g é um homomorfimo sobrejetor pois I é simples e $g \neq 0$.

Como I é projetivo e simples, existem um submódulo simples I_1 de X e um submódulo X_1 de X tais que I_1 é isomorfo a I e $X = I_1 \oplus X_1$.

Além disso, $I_1 \subseteq K$ é projetivo pois I é projetivo. Logo, I_1 é um somando direto de K.

Como I_1 é somando direto de K, $Hom_R(K, I) \neq 0$ o que contradiz a nossa hipótese. Assim, concluimos que no caso em que $Hom_R(K, I) = 0$, I é K-injetivo e como I é pobre temos que K é semisimples, portanto, R é semisimples.

Se $Hom_R(K, I) \neq 0$, como I é simples projetivo e pobre, pelo teorema 1.1.13 item (b), temos que existem submódulos I_1, K_1 de K tais que $K = K_1 \oplus I_1$ e I_1 é simples projetivo e pobre. Neste caso, $R = (K_1 \oplus I_1) \oplus I$. Se $Hom_R(K_1, I_1) = 0$ então K_1 é I_1 injetivo e, como I_1 é pobre, K_1 é semisimples. Logo R também é semisimples. Se $Hom_R(K_1, I_1) \neq 0$ então, repetimos o argumento anterior donde concluimos que existem submódulos I_2, K_2 de K_1 tais que $K_1 = K_2 \oplus I_2$ e I_2 é simples projetivo e pobre. Neste caso, $R = ((K_2 \oplus I_2) \oplus I_1) \oplus I$.

Como o anel é de dimensão finita, este processo acaba em um número finito de passos. Portanto R é semisimples. □

2.3 Anéis Destituídos

Tal como fizemos no começo da seção anterior, vamos dizer que R possui **classe simples destituída** se a classe $\{M \in Mod\text{-}R; M \text{ é simples }\}$ é destituída, idem para **classe semisimples destituída** ou **classe projetiva destituída**.

Começemos com alguns exemplos de anéis que possuem classes destituídas.

Exemplo 2.3.1. O anel $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ possui classe simples destituída.

Se M é um $\mathbb{Z}_4$-módulo simples, não-nulo, então existe um ideal I de $\mathbb{Z}_4$ tal que $M \simeq (\mathbb{Z}_4/I)$.

Como o anel $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais e $\mathbb{Z}_4$ é um quociente de $\mathbb{Z}$, temos que os ideais de $\mathbb{Z}_4$ também são gerados por um único elemento, assim, uma conta simples nos revela que os únicos ideais de $\mathbb{Z}_4$ são o ideal nulo 0, o ideal $2\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ e o ideal trivial $\mathbb{Z}_4$. Assim, da simplicidade de M, concluimos que $M \simeq \mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_2$.

Afirmamos que $\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{Z}_4$-módulo pobre. Com efeito, seja $N \in In^{-1}(\mathbb{Z}_2)$ um $\mathbb{Z}_4$-módulo cíclico, vamos provar que N é semisimples. Como N é um $\mathbb{Z}_4$-módulo cíclico, existe um ideal K de $\mathbb{Z}_4$ tal que $N \simeq (\mathbb{Z}_4/K)$. Pelo o que já argumentamos anteriormente, ou $N = \mathbb{Z}_4$ ou $N \simeq \mathbb{Z}_2 = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ ou $N = 0$.

Se $N \simeq \mathbb{Z}_2$ ou $N = 0$, temos que N é semisimples.

Se $N = \mathbb{Z}_4$ então dados os homomorfismos inclusão canônica $i : 2\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ e $g : 2\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ tal que $g(\overline{2}) = \tilde{1}$, existe um homomorfismo $h : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ tal que $h \circ i = g$. Como i é não nula e g é um isomorfismo, sabemos que o homomorfismo h é não nulo, assim, $h(\overline{1}) = \tilde{1}$, logo, $h \circ i(\overline{2}) = h(\overline{2}) = h(\overline{1}).2 = \tilde{1}.2 = \tilde{2} = 0 \neq \tilde{1} = g(\overline{2})$ o que é uma contradição. Logo, $N \neq \mathbb{Z}_4$.

Exemplo 2.3.2. Note que podemos generalizar o exemplo anterior: seja p um número primo e n um número natural positivo. Vamos provar que o anel $R = Z_{p^n}$ tem classe simples destituída.

Analogamente ao que fizemos no exemplo anterior, é fácil ver que todo R-módulo simples é isomorfo a Z_p. Além disso, todo R-módulo cíclico é isomorfo a Z_{p^i}, para algum número natural $1 \leq i \leq n$.

Vamos mostrar que, se i é maior ou igual que 2, então Z_{p^i} não pertence ao domínio de injetividade de Z_p. Disto segue que Z_p é pobre. Como Z_p

é, a menos de isomorfismos, o único R-módulo simples, concluimos que R tem classe simples destituída.

Observe que é suficiente provarmos que $Z_{p^2} \notin In^{-1}(Z_p)$.

Suponha, por absurdo que $Z_{p^2} \in In^{-1}(Z_p)$ e consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"] & Z_{p^2} \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& Z_p &
\end{tikzcd}$$

Onde f é o homomorfismo injetor tal que $f(\overline{1}) = (p\tilde{1})$, id é a identidade e h é tal que o diagrama acima comuta.

Assim, $h(f(\overline{1})) = h(p\tilde{1}) = ph(\tilde{1}) = 0$, por outro lado, $h(f(\overline{1})) = id(\overline{1}) = \overline{1}$, uma contradição.

Logo, $Z_{p^2} \notin In^{-1}(Z_p)$.

Vamos enunciar o próximo exemplo como um teorema.

Teorema 2.3.3. *Seja um anel semiperfeito R. Se a classe dos R-módulos projetivos e indecomponíveis é pobre então R_R é pobre.*

Demonstração. Como R é um anel semiperfeito, existem idempotentes locais $e_1, ..., e_n$ tais que $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$.

Observe que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, e_iR é projetivo pois é somando direto do R-módulo livre R_R. Além disso, note que, pelo lema 2.2.21, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, tem-se que e_iR é indecomponível.

Como, por hipótese, todo R-módulo projetivo e indecomponível é pobre, concluimos que o R-módulo R é soma direta finita de R-módulos pobres; logo, pelo lema 1.2.8, R_R é pobre. □

É possível obtermos um resultado mais geral do que o enunciado acima. De fato, assumindo o seguinte lema sobre anéis semiperfeitos, vamos provar uma generalização do teorema 2.3.3.

Lema 2.3.4 (Corolário 24.14, item a., de [7])**.** *Seja um anel semiperfeito R. Se P é um R-módulo projetivo finitamente gerado então P é isomorfo a uma soma direta de R-módulos indecomponíveis.*

Teorema 2.3.5. *Seja um anel semiperfeito R. O anel R tem classe projetiva destituída se e somente se todo R-módulo projetivo e indecomponível é pobre. Se qualquer uma das duas condições acima ocorre, então o R-módulo R é pobre.*

Demonstração. Se o anel R tem classe projetiva destituída então todo R-módulo projetivo é pobre, em particular, os R-módulos projetivos e indecomponíveis são pobres.

Por outro lado, se P é um R-módulo projetivo então, pelo lema 2.3.4, P é isomorfo a uma soma direta de R-módulos indecomponíveis $\oplus_{i \in \mathbb{I}} P_i$, onde $\mathbb{I}$ é um conjunto de índices. Como somando direto de módulo projetivo é projetivo temos que P_i é projetivo para todo $i \in \mathbb{I}$. Assim, pelo lema 1.2.8, P é pobre.

Vamos mostrar que se R é um anel tal que todo R-módulo projetivo e indecomponível é pobre então o R-módulo R é pobre:

Como R é um anel semiperfeito, existem $e_1, ..., e_n$ idempotentes locais tais que $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$.

Observe que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, e_iR é projetivo pois dado $i \in \{1, ..., n\}$ temos que e_iR é somando direto do R-módulo livre R. Além disso, note que, pelo lema 2.2.21, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, e_iR é indecomponível.

Como, por hipótese, todo R-módulo projetivo e indecomponível é pobre, concluimos que o R-módulo R é soma direta finita de R-módulos pobres, logo, pelo lema 1.2.8, o R-módulo R é pobre. □

Teorema 2.3.6. *Seja R um anel artiniano tal que existe, a menos de isomorfismos, um único R-módulo simples S. Então S é pobre. Em particular, o anel R tem classe simples destituída.*

Demonstração. Sejam S um R-módulo simples e $B \in In^{-1}(S)$ um R-módulo cíclico. Como o anel R é artiniano, todo quociente de R também o é, e como B é cíclico, B é isomorfo a um quociente de R, logo, B é artiniano. Assim, existe um submódulo simples B_1 de B. Pela hipótese de que existe, a menos de isomorfismos, um único R-módulo simples, temos que existe um isomorfismo de módulos $\phi : B_1 \to S$. Usando a hipótese de que B está contido no domínio de injetividade do R-módulo S, podemos considerando o homomorfismo inclusão $i : B_1 \to B$ donde temos que existe um homomorfismo $h : B \to S$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Assim, existe um submódulo $C_1 \subseteq B$ tal que $B = B_1 \oplus C_1$.

Se C_1 é semisimples então B é semisimples.

Se C_1 não é semisimples então, como $C_1 \in In^{-1}(S)$, podemos repetir o argumento anterior, donde teremos que $C_1 = B_2 \oplus C_2$ onde B_2 é um R-módulo simples. Neste caso, se C_2 é semisimples então $B = B_1 \oplus B_2 \oplus C_2$ é semisimples. Se C_2 não é semisimples então, novamente, vamos repetir o processo. Observe que $C_1 \supseteq C_2 \supseteq ...$, e como o R-módulo B é artiniano, este processo acaba em um número finito de passos. Portanto B é semisimples.

Como B é qualquer, S é pobre. Como, a menos de isomorfismos, só existe um R-módulo simples, todo R-módulo simples é pobre, isto é, o anel R tem classe simples destituída □

Lema 2.3.7 (Proposição 1.24 de [4]). *Se S é um R-módulo simples então ou S é singular ou S é projetivo, mas nunca ambos.*

Demonstração. Seja S um R-módulo simples. Assim, existe um ideal maximal I tal que $S \simeq R/I$.

Pela proposição 1.3.36, sabemos que R/I é singular se e somente se I é um ideal essencial de R. Assim, se supormos que R/I não é singular, temos que I não é um ideal essencial de R. Logo, existe um ideal, não nulo, K de R tal que $K \cap I = 0$.

Como I é um ideal maximal e $I \subsetneq K \oplus I \subseteq R$, temos que $K \oplus I = R$. Portanto $K \simeq R/I$ é projetivo.

Vamos provar que nunca ocorrem ambos os casos: se S é um R-módulo projetivo então sabemos que existe um ideal não-nulos $K \subseteq R$ tal que $R = I \oplus K \supsetneq I$.

Logo, I não é um ideal essencial de R pois $K \neq 0$ e $I \cap K = 0$.

Assim, pela proposição 1.3.36, R/I não é singular. □

Teorema 2.3.8. *Se R é um anel que não é semisimples e que tem classe simples destituída. Então todo R-módulo simples é singular.*

Demonstração. Seja um anel R como no enunciado e seja S um R-módulo simples.

Vamos provar que S não é projetivo.

Suponha, por absurdo, que S é projetivo.

Afirmamos que todo R-módulo simples é isomorfo a S. Com efeito, suponha que exista um R-módulo simples A que não é isomorfo a S. Então, pelo teorema 2.2.10, A é injetivo, donde, $R \in In^{-1}(S)$. Como o anel R tem classe simples destituída, o R-módulo simples S é pobre; portanto, o anel R é semisimples, o que é uma contradição.

Seja um ideal maximal $I \subseteq R$, vamos provar que I é somando direto de R. O R-módulo R/I é simples, logo, é isomorfo a S que é projetivo.

Como R/I é projetivo, podemos utilizar a proposição 1.1.13, item (b), donde temos que I é somando direto de R. Como I é qualquer ideal maximal, pelo lema 2.2.16, R é semisimples, o que é uma contradição.

Portanto, S não é projetivo. Assim, pelo lema 2.3.7, S é singular. □

Para o corolário a seguir, vamos introduzir algumas definições e lemas:

Definição 2.3.9 (Anel Semiprimário)**.** Um anel R diz-se um **anel semiprimário** se $J(R)$ é nilpotente e $R/J(R)$ é semisimples.

Lema 2.3.10. *Todo anel semiprimário é semiperfeito.*

Demonstração. Seja R um anel semiprimário.

Como $\overline{R} = R/J(R)$ é semisimples, existem $\overline{\epsilon_1}, ..., \overline{\epsilon_n} \in \overline{R}$ idempotentes tais que $\overline{R} = \overline{\epsilon_1}\overline{R} \oplus ... \oplus \overline{\epsilon_n}\overline{R}$ com $\overline{\epsilon_i}\overline{R}$ simples, $1 \leq i \leq n$.

Como $J(R)$ é nilpotente, pelo teorema 21.28 de [7], existem idempotentes $e_1, ..., e_n \in R$ tais que $\overline{e_i} = \overline{\epsilon_i}$, $1 \leq i \leq n$. Além disso, como, para todo $1 \leq i \leq n$, $\overline{\epsilon_i}\overline{R}$ é simples, pela proposição 21.18 de [7], e_iR é local.

Portanto R é semiperfeito. □

Corolário 2.3.11. *Seja R um anel que tem classe simples destituída e tal que $(R/Soc(R))$ é semisimples. Então valem as seguintes afirmações:*

(a) O anel R é semiprimário com $(J(R))^2 = 0$;

(b) Se o anel R não é semisimples então $Soc(R) = J(R) = Z(R)$;

(c) O ideal $Soc(R)$ é essencial em R.

Demonstração. (a) Se o anel R é semisimples então, pelo teorema 1.1.5, $J(R) = 0$; logo, o anel R é semiprimário.

Se o anel R não é semisimples então podemos aplicar o teorema 2.3.8 donde temos que todo R-módulo simples é singular. Tomemos um ideal maximal T de R. Então, R/T é singular, logo, $ann_{R/T}(\overline{1}) = T$ é essencial em R. Assim, todo ideal minimal $A \subseteq R$ é tal que $A \subseteq T$. Logo $Soc(R) \subseteq T$.

Como isto vale para todo ideal maximal, temos que $Soc(R) \subseteq J(R)$. Ainda é fácil ver que $J(R/Soc(R)) = J(R)/Soc(R)$.

Como $R/Soc(R)$ é semisimples, podemos aplicar o teorema 1.1.5, donde concluimos que $J(R)/Soc(R) = 0$. Assim, $J(R) = Soc(R)$, logo, $R/J(R)$ é semisimples.

Para concluir a demonstração deste item (a), vamos provar que $J(R)$ é nilpotente.

Seja K um ideal minimal contido em $Soc(R)$.

Pelo teorema 2.3.8, todo R-módulo simples é singular. Logo, existe um ideal essencial $I \subseteq R$ tal que $KI = 0$.

É fácil ver que todo ideal essencial contêm $Soc(R)$. Assim, $K(Soc(R)) \subseteq KI = 0$.

Como K é qualquer ideal minimal de $Soc(R)$, tem-se que $Soc(R)Soc(R) = 0$. Portanto, $(J(R))^2 = (Soc(R))^2 = 0$, ou seja, $J(R)$ é nilpotente.

(b) Se o anel R não é semisimples, podemos aplicar o teorema 2.3.8 donde segue que todo R-módulo simples é singular. Assim, pela proposição 1.3.35, item (b), e pela definição de $Soc(R)$, concluimos que $Soc(R) = Z(R)$. Pelo item (a) deste corolário, $J(R) = Soc(R)$. Portanto, temos que $J(R) = Soc(R) = Z(R)$.

(c) Suponha que o ideal $Soc(R)$ não é essencial em R e tomemos um ideal, não-nulo, $I \subseteq R$ tal que $(I \cap Soc(R)) = 0$. Como $I = I/(I \cap Soc(R)) \simeq (I + Soc(R))/Soc(R)$ e $R/Soc(R)$ é semisimples, temos que I também é semisimples, logo, $I \subseteq (Soc(R) \cap I) = 0$, o que é uma contradição pois $I \neq 0$. □

Observe que como $Soc(\mathbb{Z}_4) = 2\mathbb{Z}_2$, o anel $\mathbb{Z}_4$, do exemplo 2.3.1, é um exemplo de anel nas condições do enunciado pois $\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$ é semisimples.

Para o que segue, precisaremos ter em mente o que significa um módulo satisfazer a condição C1. Como definimos em 1.3.41, um módulo M satisfaz a **condição C1** se para todo submódulo A de M existe um submódulo K de M tal que A é essencial em K e K é um somando direto de M.

Note que se M é um R-módulo que satisfaz a condição C1 e A é um submódulo essencialmente fechado de M então o submódulo A é somando direto de M pois a única extensão essencial de A é o próprio submódulo A.

Por outro lado, suponha que todo submódulo essencialmente fechado é um somando direto de M e seja A um submódulo de M. A família

$$\mathbb{F} = \{B \subseteq M\,;\, B \text{ é submódulo e } A \text{ é essencial em } B\}$$

é não-vazia pois $A \in \mathbb{F}$. Além disso, toda subfamília, $\mathbb{G}$ de $\mathbb{F}$, totalmente ordenada por inclusão tem um limitante superior. De fato, basta tomarmos a união dos elementos de $\mathbb{G}$, que denotaremos por $\mathcal{G}$. Seja K um submódulo, não-nulo, de $\mathcal{G}$. Logo, existe $L \in \mathbb{G}$ tal que $L \cap K \neq 0$. Como A é essencial em L, temos que $(L \cap K) \cap A \neq 0$. Assim, $K \cap A \neq 0$. Como K é qualquer, A é essencial em $\mathcal{G}$.

Pelo lema de Zorn, existe um submódulo C de M, maximal em $\mathbb{F}$. O submódulo C é essencialmente fechado, por ser maximal. Logo, é somando direto de M. Como A é qualquer, o R-módulo M satisfaz a condição C1.

Assim, provamos o seguinte enunciado:

Lema 2.3.12. *Um módulo M satisfaz a condição C1 se e somente se todo submódulo essencialmente fechado é somando direto de M.*

Definição 2.3.13 (Condição C2)**.** Dizemos que um módulo M satisfaz a **condição C2** se todo submódulo que é isomorfo a um somando direto de M, é, ele mesmo, um somando direto de M.

Definição 2.3.14 (Condição C3)**.** Dizemos que um módulo M satisfaz a **condição C3** se dados somandos diretos N_1,$N_2 \in M$ tais que $N_1 \cap N_2 = 0$ então $N_1 \oplus N_2$ também é um somando direto de M.

Analogamente, dizemos que um anel R satisfaz a condição C2 (ou C3) se o R-módulo R_R satisfaz a condição C2 (ou C3).

Proposição 2.3.15. *Se um R-módulo M é injetivo então M satisfaz as condições C1, C2 e C3.*

Demonstração. Seja M um R-módulo injetivo.

Pelo lema 1.3.42, M satisfaz a condição C1.

Vamos mostrar que M satisfaz a condição C2. Tomemos um submódulo $E \subseteq M$ tal que E é isomorfo a um somando direto A de M. Como A é somando direto de um R-módulo injetivo, A também é um R-módulo injetivo. Assim, E é um R-módulo injetivo, portanto é um somando direto de M. Como $E \subseteq M$ é qualquer, temos que M satisfaz a condição C2.

Para concluirmos, vamos mostrar que M satisfaz a condição C3. Sejam M_1, $M_2 \subseteq M$ tais que M_1 e M_2 são somandos-direto de M e $M_1 \cap M_2 = 0$. Como M é injetivo, e somando direto de injetivo é injetivo, os R-módulos M_1 e M_2 são injetivos. Assim, pelo teorema 1.1.9, $M_1 \oplus M_2$ é um submódulo injetivo de M, logo, $M_1 \oplus M_2$ é um somando direto de M. Portanto, o R-módulo M satisfaz a condição C3. □

Definição 2.3.16 (Módulo Contínuo)**.** Um módulo M diz-se **contínuo** se satisfaz as condições C1 e C2.

Definição 2.3.17 (Módulo Quase-contínuo)**.** Um módulo M diz-se **quase-contínuo** se satisfaz as condições C1 e C3.

Dizemos que um anel R é **contínuo** (ou **quase-contínuo**) se o R-módulo R_R é contínuo (ou quase-contínuo).

O corolário imediato, da proposição 2.3.15, abaixo nos mostra que já conhecemos exemplos de anéis contínuos.

Corolário 2.3.18. *Se R é um anel auto-injetivo então R_R é contínuo.*

Os próximos resultados são as proposições 2.2, 2.7 e 2.10 de [14], para demonstrá-los usaremos o seguinte lema:

Lema 2.3.19 (Lei Modular)**.** *Se B, C e D são R-módulos tais que $B \cap C = 0$ e $B \subseteq D \subseteq B \oplus C$. Então $D = B \oplus (C \cap D)$.*

Demonstração. Sejam B, C e D como no enunciado.

Tomemos um elemento $d \in D$, como $D = (B \oplus C) \cap D$, temos que existem elementos $b \in B$ e $c \in C$ tais que $d = b + c$, assim, $c = b - d$, isso implica que $c \in C \cap D$ pois, por hipótese, $B \subseteq D$. Logo, $D \subseteq B + (C \cap D)$. Como $B \cap (C \cap D) \subseteq B \cap C = 0$, a soma $B + (C \cap D)$ é direta. □

Proposição 2.3.20. *Seja um R-módulo M. Se M satisfaz a condição C2 então M satisfaz a condição C3.*

Demonstração. Sejam M_1, M_2 somandos direto de M tais que $M_1 \cap M_2 = 0$.

Do fato de M_1 ser somando direto de M, sabemos que existe M_1^* tal que $M = M_1 \oplus M_1^*$.

Consideremos a projeção canônica $\pi : M_1 \oplus M_1^* \to M_1^*$.

Vamos mostrar que o homomorfismo π, restrito ao submódulo M_2, é um isomorfismo.

Seja $y \in M_2 \subseteq M_1 \oplus M_1^*$ tal que $\pi(y) = 0$. Assim, $y \in M_1$, logo $y \in M_1 \cap M_2 = 0$.

Como M satisfaz a condição C2, e M_2 é um somando direto de M, temos que $\pi(M_2)$ também é um somando direto de M. Ou seja, existe um submódulo $X \subseteq M$ tal que $M = \pi(M_2) \oplus X$. Como $\pi(M_2)$ está contido em M_1^*, podemos aplicar a lei modular, donde concluimos que $M_1^* = \pi(M_2) \oplus (X \cap M_1^*)$.

Assim, $M = M_1 \oplus M_1^* = M_1 \oplus (\pi(M_2) \oplus (X \cap M_1^*)) = (M_1 \oplus \pi(M_2)) \oplus (X \cap M_1^*)$. Como $M_1 \oplus \pi(M_2) \simeq M_1 \oplus M_2$ e M satisfaz C2, concluimos que $M_1 \oplus M_2$ é somando direto de M. □

Note que, a proposição 2.3.20, mostra que todo R-módulo contínuo é quase-contínuo.

Lema 2.3.21 (Lema 2.6 de [14])**.** *Seja M um R-módulo e A um submódulo de M. Seja A essencialmente fechado em um somando direto de M. Então A é essencialmente fechado em M.*

Demonstração. Sejam M um R-módulo e M_1, M_2, A submódulos de M tais que $M = M_1 \oplus M_2$, $A \subseteq M_1$ e A é essencialmente fechado em M_1. Seja B um submódulo de M tal que A é essencial em B. Nosso objetivo é provar que $A = B$.

Consideremos a projeção $\pi : M_1 \oplus M_2 \to M_1$. É fácil ver que $A \subseteq B$ implica $\pi(A) \subseteq \pi(B)$.

Vamos provar que $\pi(A)$ é essencial em $\pi(B) \subseteq M_1$. Seja X um submódulo de $\pi(B)$. A pré-imagem do submódulo $X \subseteq \pi(B)$ pelo homomorfismo π é um submódulo de B, que denotaremos por $\pi^{-1}(X) \subseteq B$. Como A é essencial em B, temos que $A \cap \pi^{-1}(X) \neq 0$, ou seja, existe um elemento não nulo $x \in A \cap \pi^{-1}(X)$, usando que o homomorfismo projeção restrito ao submódulo A é um isomorfismo, segue que $0 \neq \pi(x) \in \pi(A) \cap X$.

Como X é qualquer submódulo de $\pi(B)$, concluimos que $A = \pi(A)$ é essencial em $\pi(B) \subseteq M_1$. Usando que A é essencialmente fechado em M_1, $A = \pi(B) \subseteq B$. Logo, $(I - \pi)B \subseteq B$.

Vamos mostrar que $B = \pi(B)$.

Afirmamos que $(I-\pi)B \cap A = 0$. De fato, se $x \in (I-\pi)B \cap A$ então existe $b \in B$ tal que $x = b - \pi(b)$. Além disso, como $A = \pi(A)$, tem-se que $x = \pi(x)$, assim, $b - \pi(b) = \pi(b - \pi(b)) = 0$.

Como A é essencial em B e $(I - \pi)B \cap A = 0$, temos que $(I - \pi)B = 0$, donde segue que $B = \pi(B)$. E $A = \pi(B) = B$. Logo, A é essencialmente fechado em M. □

Teorema 2.3.22. *Se M_1,M_2 são R-módulos tais que $M_1 \oplus M_2$ é um R-módulo contínuo. Então M_1 e M_2 são contínuos.*

Demonstração. Sejam M_1, M_2 como no enunciado. Vamos provar que M_1 é contínuo.

Seja A submódulo essencialmente fechado em M_1. Pelo lema 2.3.21, A é essencialmente fechado em $M_1 \oplus M_2$. Como $M_1 \oplus M_2$ satisfaz C1, A é somando direto de $M_1 \oplus M_2$, ou seja, existe um submódulo X tal que $M_1 \oplus M_2 = A \oplus X$.

Aplicando a lei modular concluimos que $M_1 = A \oplus (M_1 \cap X)$. Logo, M_1 satisfaz a condição C1.

Sejam A, B submódulos de M_1 tais que $A \simeq B$ e B é somando direto de M_1. Assim, B é somando direto de $M_1 \oplus M_2$. Como $M_1 \oplus M_2$ satisfaz C2, A é somando direto de $M_1 \oplus M_2$. Donde segue que existe um submódulo $X \subseteq M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \oplus M_2 = A \oplus X$.

Assim, pela lei modular, $M_1 = A \oplus (X \cap M_1)$. Logo, M_1 satisfaz C2. □

Teorema 2.3.23. *Se M_1, M_2 são R-módulos tais que $M_1 \oplus M_2$ é um R-módulo contínuo. Então M_2 é M_1-injetivo.*

Demonstração. Sejam R-módulos M_1, M_2 como no enunciado.

Seja X um submódulo de M_1 e $f : X \to M_1$ e $g : X \to M_2$ homomorfismos de módulos com f injetora.

Consideremos os homomorfismos de inclusão $i_1 : M_1 \to M_1 \oplus M_2$, e $i_2 : M_2 \to M_1 \oplus M_2$. Em diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & M_1 \arrow[r, "i_1"] & M_1 \oplus M_2 \\
& M_2 \arrow[urr, "i_2"] & &
\end{tikzcd}$$

Consideremos o subconjunto

$$B = \{i_1(f(x)) - i_2(g(x)) \in M_1 \oplus M_2\,;\, x \in X\} \subseteq M_1 \oplus M_2$$

Afirmamos que $B \cap M_2 = 0$. De fato, se $y \in B \cap M_2$ então existe $x \in X$ tal que $y = i_1(f(x)) - i_2(g(x))$; assim, $f(x) = i_1(f(x)) = y + i_2(g(x)) = y + g(x) \in M_1 \cap M_2 = 0$.

Consideremos a seguinte família de submódulos de M:

$$\mathbb{F} = \{K \subseteq M\,;\, K \supseteq B \,\text{e}\, K \cap M_2 = 0\},$$

ordenada parcialmente pela inclusão.

A família $\mathbb{F}$ é não vazia pois $B \in \mathbb{F}$. Além disso, se $\{K_i\}_{i \in I}$ é uma subfamília totalmente ordenada então $\cup_{i \in I} K_i$ é um elemento maximal contido em $\mathbb{F}$. De fato, como para todo $i \in I$, $K_i \supseteq B$, temos que $\cup_{i \in I} K_i \supseteq B$ e $(\cup_{i \in I} K_i) \cap M_2 = \cup_{i \in I}(K_i \cap M_2) = 0$.

Aplicando o lema de Zorn, temos que existe um submódulo maximal $K \subseteq M$ tal que $K \subseteq B$ e $K \cap M_2 = 0$.

Vamos provar que K é um somando direto de M. Para tal, vamos provar que K é essencialmente fechado em M.

Seja W um submódulo de M tal que K é essencial em W.

Seja $y \in W \cap M_2$. Suponha que $y \neq 0$. Como M_2 é submódulo, $yR \subseteq M_2$. Assim, usando o fato de que K é essencial em W, temos que $0 \neq yR \cap K = (yR \cap M_2) \cap K = yR \cap (K \cap M_2) = yR \cap 0 = 0$, uma contradição. Logo, $y = 0$, donde segue que $W \in \mathbb{F}$.

Como K é o elemento maximal da família $\mathbb{F}$ e temos que $K \subseteq W$, segue que, $K = W$.

Como W é qualquer submódulo de M tal que K é essencial em W, concluimos que K é essencialmente fechado.

Usando que $M_1 \oplus M_2$ satisfaz C1, temos que K é somando direto de M. Além disso, podemos aplicar o fato de que se $M_1 \oplus M_2$ é contínuo então também é quase-contínuo, ou seja, satisfaz C3. Assim, $K \oplus M_2$ é somando direto de $M_1 \oplus M_2$.

Tomemos um submódulo $B \subseteq M$ tal que $(K \oplus M_2) \oplus B = M_1 \oplus M_2$. Logo, $(K \oplus B) \oplus M_2 = M_1 \oplus M_2$. Donde segue que $(K \oplus B) \in \mathbb{F}$. Pela maximalidade de K, concluimos que $K \oplus B = K$. Portanto $K \oplus M_2 = M_1 \oplus M_2$.

Consideremos o homomorfismo projeção $\pi_2 : K \oplus M_2 \to M_2$.

Tomando o homomorfismo $h = \pi_2 \circ i_1$, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & M_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dl, dashed, "\pi_2 \circ i_1"] & M_1 \oplus M_2 = K \oplus M_2 \arrow[dll, "\pi_2"] \\
& M_2 & &
\end{tikzcd}$$

De fato, se $x \in X$ então, como $B \subseteq K$, temos que $0 = \pi_2(i_1 \circ f(x) - i_2 \circ g(x)) = \pi_2 \circ i_1(f(x)) - \pi_2 \circ i_2(g(x)) = \pi_2 \circ i_1 \circ f(x) - g(x)$. Portanto $(\pi_2 \circ i_1) \circ f(x) = g(x)$. □

Note que poderíamos ter enunciado os teoremas 2.3.23 e 2.3.22 juntos:

Teorema 2.3.24. *Sejam R-módulos M_1, M_2. Se R-módulo $M_1 \oplus M_2$ é contínuo então os R-módulos M_1,M_2 são contínuos, M_1 é M_2-injetivo e M_2 é M_1-injetivo.*

Embora não vamos provar, nem utilizar a implicação contrária do teorema 2.3.24, é verdade que vale a volta. O "se e somente se" é o corolário 2.14 de [14].

Corolário 2.3.25. *Seja R um anel. O R-módulo $R \oplus R$ é contínuo se e somente se R é injetivo.*

Demonstração. Seja R um anel. Se o R-módulo $R \oplus R$ é contínuo, então, pelo teorema 2.3.23, o anel R é auto-injetivo.

Por outro lado, se o anel R é injetivo então, pela proposição 1.1.9, $R \oplus R$ é um R-módulo injetivo, e, pela proposição 2.3.15, o R-módulo $R \oplus R$ é contínuo. □

Definição 2.3.26. Sejam M um R-módulo e N um submódulo de M. Dizemos que N **encontra-se sobre** um somando direto de M se existem submódulos $L, K \subseteq M$ tais que $M = L \oplus K$, $N = L \oplus (N \cap K)$, e $N \cap K \subseteq J(M)$.

O próximo lema introduz um exemplo de módulo que satisfaz a propriedade acima.

Lema 2.3.27 (Corolário 4.43 de [14])**.** *Seja R um anel semiperfeito e k um número inteiro positivo. Todo submódulo de $R^{(k)} = \underbrace{R \times \ldots \times R}_{k\ vezes}$ encontra-se sobre um somando direto de $R^{(k)}$.*

Não vamos provar o lema anterior pois a demonstração é muito extensa; além disso, para a demonstração, teríamos que introduzir vários resultados preliminares sobre os chamados módulos discretos de que não trataremos aqui.

Proposição 2.3.28. *Se R é um anel que tem classe simples destituída e tal que $(R/Soc(R))$ é semisimples. Então, para todo inteiro positivo k, o anel $R^{(k)} = \underbrace{R \times \ldots \times R}_{k\ vezes}$ satisfaz a condição C2.*

Demonstração. Seja um anel R como no enunciado e seja um número natural estritamente positivo k. Consideremos dois R-módulos isomorfos A e B tais que B é um somando direto de $R^{(k)}$. Nosso objetivo é mostrar que o R-módulo A também é um somando direto de $R^{(k)}$.

Pelo teorema 2.3.11, item (a), sabemos que R é um anel semiperfeito. Assim, podemos lançar mão do lema 2.3.27, donde temos que existem submódulos C,D de $R^{(k)}$ com $R^{(k)} = C \oplus D$; além disso, $A = C \oplus (A \cap D)$ e, $A \cap D \subseteq J(R^{(k)})$.

Como o R-módulo B é somando direto do R-módulo livre $R^{(k)}$, B é projetivo e como $A \simeq B$, temos que o R-módulo A também é projetivo. Como somando direto de um módulo projetivo é um módulo projetivo, concluímos que $A \cap D$ é projetivo.

Pelo corolário 2.3.11, item (b), temos que $J(R) = Z(R)$. Assim

$$J(R^{(k)}) = J(\underbrace{R \times \ldots \times R}_{k\ vezes}) \simeq \underbrace{J(R) \times \ldots \times J(R)}_{k\ vezes} = \underbrace{Z(R) \times \ldots \times Z(R)}_{k\ vezes},$$

logo, o módulo $A \cap D$ é finitamente gerado, projetivo e singular, portanto, $A \cap D = 0$, donde temos que $A = C$ é um somando direto de $R^{(k)}$. □

Uma condição mais fraca que a condição C1 é a seguinte:

Definição 2.3.29 (Módulo SC-Fraco (Condição C1-Fraca))**.** Um módulo M diz-se um **módulo SC-fraco** se para todo submódulo semisimples A de M existe um submódulo K de M tal que A é essencial em K e o submódulo K é um somando direto de M.

Depois de definirmos a condição C1, provamos que um módulo M satisfaz a condição C1 se e somente se todo submódulo essencialmente fechado $N \subseteq M$ é somando direto de M. Com um argumento análogo, podemos provar que um módulo M satisfaz a condição C1-fraca se e somente se todo submódulo semisimples e essencialmente fechado é um somando direto de M. Assim, podemos considerar a seguinte generalização da definição 2.3.29:

Definição 2.3.30 (Módulo SSC)**.** Um módulo M diz-se um **módulo SSC** se todo submódulo simples e essencialmente fechado de M é um somando direto.

Proposição 2.3.31. *Seja R um anel não semisimples que tem classe simples destituída e tal que R_R é um módulo SSC. Então não existe um submódulo simples, essencialmente fechado em R_R.*

Demonstração. Nas condições do enunciado, suponha que exista um submódulo simples e essencialmente fechado $S \subseteq R_R$. Como R é um anel SSC,temos que S é um somando direto do R-módulo livre R_R, logo, S é projetivo. Por outro lado, como o anel R tem classe simples destituída e não é semisimples, podemos aplicar o teorema 2.3.8, donde concluímos que S é singular. Pelo lema 2.3.7, temos uma contradição. □

Para a demonstração do nosso próximo teorema, precisaremos de alguns resultados que exporemos a seguir.

Lema 2.3.32. *Se o anel R é auto-injetivo e tal $R/Soc(R)$ é um anel noetheriano então o anel R é noetheriano.*

Demonstração. Seja um anel auto-injetivo R tal que $R/Soc(R)$ é noetheriano.

Vamos provar que $Soc(R)$ é noetheriano. Uma vez provado isto, temos que $R/Soc(R)$ e $Soc(R)$ são noetherianos, logo, R é noetheriano.

Para provarmos que $Soc(R)$ é noetheriano, vamos provar que $Soc(R)$ é uma soma direta finita de submódulos simples de R e, portanto, é noetheriano.

Pela proposição 1.3.24, $R/Soc(R)$ tem dimensão uniforme finita n.

Suponha, por contradição, que $Soc(R) = \oplus_{i\in\mathbb{I}} S_i$ onde $\mathbb{I}$ é um conjunto infinito de índices. Como $\mathbb{I}$ é infinito, podemos escrever $\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \cup ... \cup \mathbb{I}_{n+1}$, onde, para todo $j \in \{1, ..., n+1\}$, $\mathbb{I}_j$ é um conjunto infinito de índices e se $i \neq j$ então $\mathbb{I}_i \cap \mathbb{I}_j = \emptyset$.

Afirmamos que para qualquer subconjunto infinito de índices $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{I}$, temos que $E(\oplus_{i\in\mathbb{K}} S_i) \neq (\oplus_{i\in\mathbb{K}} S_i)$. De fato, se $E(\oplus_{i\in\mathbb{K}} S_i) = (\oplus_{i\in\mathbb{K}} S_i)$ então, como $E(\oplus_{i\in\mathbb{K}} S_i)$ é injetivo, existe um submódulo $L \in R_R$ tal que $R_R = (E(\oplus_{i\in\mathbb{K}} S_i)) \oplus$

$L = (\oplus_{i\in\mathbb{K}}S_i) \oplus L$. Como o anel tem unidade, o elemento $1 \in R$ se escreve como uma soma finita dos elementos de $(\oplus_{i\in\mathbb{K}}S_i) \oplus L$, logo, $\mathbb{K}$ é finito, uma contradição.

Definamos $T_i = \oplus_{j\in\mathbb{I}_i}S_j$, assim, $Soc(R) = T_1 \oplus ... \oplus T_{n+1}$. A afirmação que fizemos nos garante que, para todo $i \in \{1, ..., n+1\}$, $E(T_i)/T_i \neq 0$.

Como a soma finita de módulos injetivos é um módulo injetivo, existe um submódulo $N \in R_R$ tal que $R = (E(T_1) \oplus ... \oplus E(T_{n+1})) \oplus N$. Assim, $R/Soc(R) \simeq E(T_1)/T_1 \oplus ... \oplus E(T_{n+1})/T_{n+1} \oplus N$, ou seja, $R/Soc(R)$ pode ser escrito como a soma direta de mais de n submódulos independentes, o que é uma contradição. □

Lema 2.3.33. *Seja um anel R tal que R tem classe simples destituída e $(R/Soc(R))$ é semisimples. Se $R \oplus R$ é um R-módulo SSC então $R \oplus R$ satisfaz a condição C1.*

Demonstração. Seja um submódulo $K \subseteq R \oplus R$, essencialmente fechado em $R \oplus R$. Usando a proposição 2.3.12, nosso objetivo é mostrar que K é um somando direto de $R \oplus R$.

Pelo corolário 2.3.11, item (a), o anel R é semiprimário. Assim, pelo lema 2.3.10, o anel R é semiperfeito. Pelo lema 2.3.27, K encontra-se sobre um somando direto de $R \oplus R$, isto é, existem submódulos $A, B \subseteq (R \oplus R)$ tais que $R \oplus R = A \oplus B$, $A \subseteq K$ e $(K \cap B) \subseteq J(R \oplus R) \simeq J(R) \oplus J(R)$.

Pelo corolário 2.3.11, item (b), $J(R) \oplus J(R) \simeq Soc(R) \oplus Soc(R)$, logo, $B \cap K$ é semisimples.

Se $B \cap K \neq 0$ então podemos tomar um submódulo simples $S \subseteq (B \cap K)$. Assim, existe $N \subseteq B \cap K$ tal que $B \cap K = N \oplus S$. Pela proposição 2.3.31, S não é fechado, donde temos que existe um somando direto $M \in R \oplus R$ tal que S é essencial em M. Assim, $K = A \oplus N \oplus S$ é essencial em $A \oplus N \oplus M$, e como K é essencialmente fechado, $A \oplus N \oplus S = A \oplus N \oplus M$, logo, $S = M$ é fechado, o que é uma contradição.

Portanto, $B \cap K = 0$, logo, K é somando direto de $R \oplus R$. Como K é qualquer, pelo lema 2.3.12, $K \oplus K$ satisfaz a condição C1. □

Teorema 2.3.34. *Seja um anel R tal que R tem classe simples destituída e $(R/Soc(R))$ é semisimples. Se $R \oplus R$ é um R-módulo SSC então R é um anel QF e tal que $(J(R))^2 = 0$.*

Demonstração. Pelo corolário 2.3.11, item (a), $(J(R))^2 = 0$.

Para provar que o anel é QF, vamos começar provando que o anel R é auto-injetivo. Pelo lema 2.3.33, o R-módulo $(R \oplus R)$ é SC, assim, pela proposição 2.3.28, $R \oplus R$ é contínuo, e, pelo teorema 2.3.23, temos que R é auto-injetivo.

Como o anel $R/Soc(R)$ é semisimples, o anel $R/Soc(R)$ é noetheriano, assim, podemos aplicar o lema 2.3.32, donde concluimos que o anel R é noetheriano, logo, o anel R é QF. □

A tese do teorema 2.3.34 não vale se só assumirmos a hipótese de que o anel R tem classe simples destituída. Mostramos isto no exemplo a seguir:

Exemplo 2.3.35. Consideremos o conjunto

$$\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; q \notin 2\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$$

Observe que a adição e a multiplicação usual de $\mathbb{Q}$ são operações fechadas em $\mathbb{Z}_{(2)}$ pois a multiplicação de números ímpares é um número ímpar, além disso, note que $1 \in \mathbb{Z}_{(2)}$. Assim $\mathbb{Z}_{(2)} = R$ é um sub-anel de $\mathbb{Q}$.

Vamos mostrar que o anel R tem classe simples destituída, porém, não é um anel QF.

Afirmamos que todo ideal de R é um ideal principal. De fato, seja um ideal, não-nulo, $I \subseteq R$. Como o conjunto

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z}\,;\, x > 0 \,\text{e}\, \exists q \notin 2\mathbb{Z} \,\text{com}\, \frac{x}{q} \in I\right\}$$

está contido em $\mathbb{N}$ e é não-vazio, podemos considerar o elemento mínimo do conjunto A; denotemos $a = min(A)$. É claro que $a \in I$ pois dado que existe $q \notin 2\mathbb{Z}$ tal que $a/q \in I$ temos que $a = q(a/q) \in I$. Assim, $a\mathbb{Z}_{(2)} \subseteq I$. Vamos provar a inclusão contrária. Seja $p/q \in I$ um elemento não-nulo, assim, $p = (p/q)q \in I$, logo, $|p| \in I$. Pelo algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$, temos que existe um número natural r tal que $|p| = aq + r$ e $0 \leq r < a$. Assim, $r = |p| - aq \in I$. Se $r \neq 0$ então $r \in A$, donde segue que $r > a = min(A)$, uma contradição. Logo, $r = 0$ e $p/q \in a\mathbb{Z}_{(2)}$. Portanto, $I = a\mathbb{Z}_{(2)}$.

Seja um número inteiro x. Sabemos que existe um número ímpar i e um número natural n tais que $x = 2^n i$. Como o elemento i é ímpar, ele é inversível em $\mathbb{Z}_{(2)}$, logo, $x\mathbb{Z}_{(2)} = 2^n i\mathbb{Z}_{(2)} = 2^n\mathbb{Z}_{(2)}$, ou seja, todos os ideais de $\mathbb{Z}_{(2)}$, além de principais, são gerados por um elemento da forma 2^n, onde n é um número natural positivo.

Esta informação nos permite concluir que a classe dos ideais de $\mathbb{Z}_{(2)}$ é totalmente ordenada:

$$0 \subseteq ... \subseteq 2^n\mathbb{Z}_{(2)} \subseteq 2^{n-1}\mathbb{Z}_{(2)} \subseteq ... \subseteq 2\mathbb{Z}_{(2)} \subseteq \mathbb{Z}_{(2)}.$$

Além disso, concluímos que o anel $\mathbb{Z}_{(2)}$ é noetheriano e, embora não tenha um ideal minimal, tem somente um ideal maximal, a saber, $2\mathbb{Z}_{(2)}$.

Quem são os R-módulos cíclicos? Sabemos que um R-módulo cíclico é isomorfo a algum R-módulo da forma R/I onde I é um ideal de R. Pelo o que já vimos anteriormente, temos que se S é um R-módulo cíclico então ou $S = 0$, ou $S \simeq \mathbb{Z}_{(2)}$, ou $S \simeq \mathbb{Z}_{(2)}/2^n\mathbb{Z}_{(2)}$.

Vamos provar que $\mathbb{Z}_{(2)}/2^n\mathbb{Z}_{(2)}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_{2^n}$ com a estrutura de $\mathbb{Z}_{(2)}$-módulo que definimos a seguir. Note que se $p/q \in \mathbb{Z}_{(2)}$ então q é ímpar, logo, é invertível em $\mathbb{Z}_{2^n}$.

Definimos

$$\star : \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_{2^n},$$

tal que

$$\star\left(\overline{x}, \frac{p}{q}\right) = \overline{x}\,\overline{p}\,\overline{q^{-1}}.$$

Observe que esta operação está bem definida e com ela, podemos considerar $\mathbb{Z}_{2^n}$ como $\mathbb{Z}_{(2)}$-módulo. Assim, podemos construir o seguinte epimorfismo de $\mathbb{Z}_{(2)}$-módulos:

$$\phi : \mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_{2^n},$$

com,

$$\phi\left(\frac{a}{b}\right) = \overline{a}\,\overline{b^{-1}}.$$

Logo,

$$\mathbb{Z}_{2^n} \simeq \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{Ker(\phi)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{2^n\mathbb{Z}_{(2)}}.$$

Como $\mathbb{Z}_{(2)}$ tem um único ideal maximal, todo R-módulo cíclico e simples é isomorfo a $\mathbb{Z}_{(2)}/2\mathbb{Z}_{(2)} \simeq \mathbb{Z}_2$ (visto como $\mathbb{Z}_{(2)}$-módulo). Assim, para mostrar que o anel R tem classe simples destituída, precisamos somente provar que o $\mathbb{Z}_{(2)}$-módulo $\mathbb{Z}_2$ é pobre.

Vamos mostrar que não existem R-módulos cíclicos, que não são semisimples, e estão no domínio de injetividade de $\mathbb{Z}_2$.

Suponha que exista um R-módulo cíclico, não-semisimples, $xR \in In^{-1}(\mathbb{Z}_2)$. Sabemos que ou $xR \simeq \mathbb{Z}_{(2)}$ ou $xR \simeq \mathbb{Z}_{2^n}$, para algum número natural $n \geq 2$.

Se $xR \simeq \mathbb{Z}_{(2)}$ então $\mathbb{Z}_{(2)} \in In^{-1}(\mathbb{Z}_2)$. Logo, se considerarmos a inclusão canônica $i : 2\mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_{(2)}$ e o isomorfismo $\phi : 2\mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_2$ onde, $\phi(x) = \overline{x/2}$, $\forall\, x \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$; temos que existe $h : \mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_2$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 2\mathbb{Z}_{(2)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{Z}_{(2)} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & \mathbb{Z}_2 & \end{tikzcd}$$

Assim, $1 = \phi(2) = h(i(2)) = h(2) = 2.h(1) = 0$, uma contradição.

Por outro lado, se $xR \simeq \mathbb{Z}_{2^n}$, para algum número natural $n \geq 2$, tem-se que $\mathbb{Z}_{2^n} \in In^{-1}(\mathbb{Z}_2)$. Observe que $2^{n-1}\mathbb{Z}_{2^n} = \{0, \overline{2^{n-1}}\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Assim, se considerarmos a inclusão canônica $i : 2^{n-1}\mathbb{Z}_{2^n} \to \mathbb{Z}_{2^n}$ e o isomorfismo $\phi : 2^{n-1}\mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_2$ onde, $\phi(0) = 0$ e $\phi(\overline{2^{n-1}}) = \overline{1}$ temos que existe $h : \mathbb{Z}_{2^n} \to \mathbb{Z}_2$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 2^{n-1}\mathbb{Z}_{2^n} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{Z}_{2^n} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & \mathbb{Z}_2 & \end{tikzcd}$$

Logo, tem-se que $1 = \phi(2^{n-1}) = h(i(2^{n-1})) = h(2^{n-1}) = 2^{n-1}.h(1) = 0$, uma contradição.

Assim, concluimos que não existem R-módulos que não são semisimples e estão no domínio de injetividade do R-módulo $\mathbb{Z}_2$, ou seja, $\mathbb{Z}_2$ é pobre. Como todo R-módulo simples é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, temos que o anel R tem classe simples destituída.

Vamos mostrar que o anel R não é QF. Como R é noetheriano, precisamos provar que R não é auto-injetivo.

Suponha que o anel R é auto-injetivo. Assim, considerando o homomorfismo inclusão, $i : 2\mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_{(2)}$ e o isomorfismo $\phi : 2\mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_{(2)}$ onde, $\phi(2x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}_{(2)}$, temos que existe $h : \mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_{(2)}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 2\mathbb{Z}_{(2)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{Z}_{(2)} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & \mathbb{Z}_{(2)} & \end{tikzcd}$$

Da comutatividade do diagrama acima, segue que $1 = \phi(2) = h(i(2)) = h(2) = 2.h(1)$. Ou seja, temos a seguinte igualdade $2h(1) = 1$ em $\mathbb{Z}_{(2)} \subseteq \mathbb{Q}$, logo, $h(1) = 1/2 \notin \mathbb{Z}_{(2)}$, o que é uma contradição.

Portanto, o anel R não é auto-injetivo, e, em particular, não é QF.

Notamos que o anel $\mathbb{Z}_{(2)}$ é chamado de **localização do anel $\mathbb{Z}$ em** $2\mathbb{Z}$.

Para o próximo corolário, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 2.3.36. *Seja um anel $R \neq 0$. Se o anel R é semiperfeito, contínuo, $Soc(R)$ é essencial em R e $e_1, ..., e_n \in R$ são idempotentes locais tais que $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$. Então, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $Soc(e_iR)$ é simples.*

Demonstração. Seja um anel R como no enunciado e $e_1, ..., e_n \in R$ idempotentes locais tais que $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$.

Seja $i \in \{1, ..., n\}$.

Se $Soc(e_iR) = 0$ então $Soc(e_iR)$ é simples. Se $Soc(e_iR) \neq 0$ então existe um submódulo simples $A \in Soc(e_iR)$. Pela proposição 2.3.22, e_iR é C1. Assim, existem submódulos $B,D \subseteq e_iR$ tais que A é essencial em B e $e_iR = B \oplus D$. Como e_iR é indecomponível, $D = 0$, assim, A é essencial em e_iR.

Suponha, que existe um submódulo simples $S \subseteq Soc(e_iR)$, não-nulo, e tal que $S \neq A$. Assim, $S \cap A = 0$ e, como A é essencial em e_iR, temos que $S = 0$, uma contradição. Portanto $Soc(e_iR)$ é simples. □

Corolário 2.3.37. *Seja um anel $R \neq 0$ tal que R tem classe simples destituída e $(R/Soc(R))$ é semisimples. Se $R \oplus R$ é um R-módulo SSC então R é uma soma direta finita de submódulos locais $R_1, ..., R_n$ tais que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $Soc(R_i)$ é simples.*

Demonstração. Pelo corolário 2.3.11, item (a), o anel R é semiprimário. Assim, pela proposição 2.3.10, o anel R é semiperfeito.

Logo, existem $e_1, ..., e_n$ indempotentes locais tais que $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$.

Pelo lema 2.3.33, $R \oplus R$ satisfaz a condição C1, pela proposição 2.3.28, temos que $R \oplus R$ é contínuo, e, pela proposição 2.3.22, concluímos que R é contínuo.

Além disso, pelo corolário 2.3.11, item (c), $Soc(R)$ é essencial em R.

Mostramos que o anel R é semiperfeito, contínuo e $Soc(R)$ é essencial em R. Nestas condições, podemos aplicar o lema 2.3.36, donde concluímos que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $Soc(e_iR)$ é simples. □

2.4 Anéis que são Utopias

Vamos dizer que R é uma **utopia-simples** se a classe $\{M \in Mod\text{-}R; M \text{ é simples }\}$ é uma utopia, analogamos diremos que o anel R é uma **utopia-projetiva** ou uma **utopia-artiniana** se, respectivamente, a classe dos R-módulos projetivos é uma utopia ou se a classe dos R-módulos artinianos é uma utopia.

Exemplo 2.4.1. Seja R um V-anel que não é semisimples e seja um R-módulo simples S. Por definição, o R-módulo S é injetivo, assim, $R \in In^{-1}(S)$. Como o anel R não é semisimples, temos que o R-módulo S não é pobre. Como o R-módulo S é um R-módulo simples qualquer, concluimos que o anel R é uma utopia-simples.

Exemplo 2.4.2. Seja R um anel QF que não é semisimples e seja um R-módulo projetivo P. Pela proposição 2.2.6, sabemos que o R-módulo P é injetivo, assim, $R \in In^{-1}(P)$. Agora podemos utilizar exatamente o mesmo argumento do exemplo anterior: como o anel R não é semisimples, temos que o R-módulo P não é pobre. Como o R-módulo P é um R-módulo projetivo qualquer, concluimos que o anel R é uma utopia-projetiva.

Exemplo 2.4.3. Se R é um domínio PCI que não é um anel com divisão então R é uma utopia-singular. De fato, suponha que exista um R-módulo singular e pobre M.

Já sabemos que todo domínio PCI é SI (teorema 1.3.46), assim, o R-módulo singular M é injetivo, logo, $R \in In^{-1}(M)$ e como M é pobre, concluimos que o anel R é semisimples.

Nestas condições, vamos provar que R é um anel com divisão: tomemos um elemento não-nulo $x \in R$. Como todo anel semisimples é artiniano, a cadeia descendente $xR \supseteq x^2R \supseteq ... \supseteq x^nR \supseteq ...$ estaciona, isto é, existe um número natural n tal que para todo número natural $k \geq n$, temos $x^nR = x^kR$, em particular, $x^nR = x^{n+1}R$, assim, existe um elemento $r \in R$ tal que $x^n = x^{n+1}r$, logo, $x^n(1 - xr) = 0$ e como o anel R é um domínio e x é um elemento não-nulo, temos que $xr = 1$. Como o elemento x é qualquer, temos que o domínio R é um anel com divisão, uma contradição.

Teorema 2.4.4. *Seja um anel R tal que existam sub-anéis $R_1,R_2 \subseteq R$ com $R = R_1 \oplus R_2$. Nestas condições, se M é um R-módulo pobre então, para $i \in \{1, 2\}$ tem-se que MR_i é um R_i-módulo pobre. Por outro lado, se R_2 não é semisimples então o R-módulo MR_1 não é pobre.*

Demonstração. Sejam um anel R e um R-módulo $M = MR$ como no enunciado.

Vamos mostrar que $M_1 = MR_1$ é um R_1-módulo pobre. O mesmo argumento prova que MR_2 é um R_2-módulo pobre.

Seja um R_1-módulo cíclico $N \in In^{-1}(M_1)$.

Consideremos a operação $\star : N \times R \to N$ tal que, para todo $n \in N$ e para todo $(r_1 + r_2) \in R$, tem-se $n \star (r_1 + r_2) = nr_1$.

Note que com a operação definida acima, N é um R-módulo. Denotaremos por N_R. Vamos provar que N_R está no domínio de injetividade de M.

Seja A um submódulo de N_R e consideremos um homomorfismo injetor $f : A \to N_R$. Seja um homomorfismo $g : A \to M$. Em diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N_R \\ & M & \end{tikzcd}$$

Note que, $g(A) \subseteq M_1$, pois, se $a \in A$, então $g(a) = g(a1_R) = g(a(1_{R_1+1_{R_2}})) = g(a1_{R_1}) = g(a)1_{R_1} \in M_1$. Analogamente, $f(A) \subseteq N$.

Além disso, restringindo os escalares, podemos considerar g e f como R_1-homomorfismos. Notando que $A \subseteq N$ também herda uma estrutura natural de R_1-módulo, temos o seguinte diagrama de R_1-módulos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N \\ & M_1 & \end{tikzcd}$$

Como $N \in In^{-1}(M_1)$, existe um R_1-homomorfismo $h : N \to M_1 \subseteq M$ tal que o diagrama acima comuta.

Afirmamos que h também é um R-homomorfismo. De fato, se $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$ e $n \in N$ então $h(n(r_1 + r_2)) = h(r_1 n) = r_1 h(n) = r_1 h(n) + r_2 h(n)$. Note que $r_2 h(n) = 0$ pois $r_2 \in R_2$ e $h(n) \in M_1$.

Portanto, $N_R \in In^{-1}(M)$, logo, é um R-módulo semisimples. Como os submódulos de N_R são os mesmos de N, temos que N é um R_1-módulo semisimples. Isto conclui a primeira parte do teorema.

Vamos agora provar que se $M_1 = MR_1$ for pobre como R-módulo então R_2 é semisimples.

Observe que, com a operação $\circledcirc : R_2 \times R \to R_2$ tal que, para todo $r \in R_2$ e para todo $(r_1 + r_2) \in R$, tem-se $r \circledcirc (r_1 + r_2) = rr_2$. Podemos considerar R_2 com estrutura de R-módulo.

Seja um submódulo $S \subseteq R_2$ e $g : S \to M_1$ um homomorfismo. Se $s \in S$ então $g(s) = g(s1_R) = g(s(1_{R_1} + 1_{R_2})) = g(s1_{R_2}) = g(s)1_{R_2} = 0$ pois $g(s) \in M_1$. Como s é qualquer elemento de S, temos que $g = 0$. Assim, para qualquer homomorfismo de R-módulos $f : S \to R_2$ injetor, tomando o homomorfismo nulo $h : R_2 \to M_1$, tem-se que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & R_2 \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M_1 &
\end{tikzcd}$$

Logo, $R_2 \subseteq In^{-1}(M_1)$.

Como M_1 é pobre, R_2 é um R-módulo semisimples.

Já vimos que os submódulos de R_2 como R_2-módulo e como R-módulo coincidem, logo, R_2 é um R_2-módulo semisimples. □

Teorema 2.4.5. *Se R é um anel e R_1,S_1 são sub-anéis de R tais que $R = R_1 \oplus S_1$, $R_1 \simeq R$ e S_1 não é semisimples. Então o anel R é um utopia-artiniana.*

Demonstração. Seja $M \neq 0$ um R-módulo pobre, vamos mostrar que M não é artiniano; para tal, vamos contruir em M uma cadeia descendente que não estaciona.

Pelo teorema 2.4.4, $M_1 = MR_1 \neq 0$ é um R_1-módulo pobre que não é um R-módulo pobre. Assim, M_1 é um R-submódulo, não-nulo, próprio de M.

Como $R_1 \simeq R$, existem sub-anéis R_2, S_2 de R_1 tais que $R_1 = R_2 \oplus S_2$, $R_2 \simeq R_1$ e S_2 não é semisimples. Repetindo o argumento acima, temos que existe um R-módulo, não-nulo, $M_2 = M_1R_2$, tal que M_2 é um submódulo próprio de M_1 e M_2 é R_2-módulo pobre.

Indutivamente temos a cadeia decrescente $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que não estaciona. □

Exemplo 2.4.6. Consideremos um corpo F e seja o anel $R = \prod_{i\in\mathbb{N}} F_i$ onde $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $F_i = F$.

É fácil ver que R não é artiniano e que $R \simeq R \oplus R$.

Assim, estamos nas hipóteses do teorema 2.4.5, donde podemos concluir que o anel R é uma utopia-artiniana.

Note que, em vez de tomar o conjunto dos números naturais, poderíamos ter tomado qualquer conjunto infinito de índices. Em qualquer caso, teríamos satisfeitas as hipóteses do teorema 2.4.5.

Referências Bibliográficas

[1] Adel N. Alahmadi, Mustafa Alkan and Sergio López-Permouth, *Poor modules: the opposite of injectivity*, (Glasgow Mathematical Journal, volume 52, 2010, páginas 7-17).

[2] Polcino Milies, F.C., *Anéis e Módulos*, (Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972).

[3] Joseph J. Rotman, *Advanced Modern Algebra Second Edition*, (Graduate Studies in Mathematics, Volume 114, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010).

[4] K. R. Goodearl, *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, (Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1976).

[5] K. R. Goodearl e R. B. Warfield, Jr; *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings Second Edition*, (London Mathematical Society Student Texts 61, Cambridge University Press, 2004).

[6] Robert Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research*, (Gordon and Breach Science Publishers, 1991).

[7] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings Second Edition*, (Graduate Texts in Mathematics, Volume 131, Springer-Verlag, New York, 2001).

[8] J. Lambek, *Lectures in Rings and Modules Third Edition*, (Chelsea Publishing Company, New York, 1986).

[9] Tsai Chi-Te, *Report on Injective Modules*, (Queen's papers in pure and applied mathematics - no.6, Queen's University, Kingston, Ontario, 1966).

[10] S. Singh, *Quasi-injective and quasi-projective modules over hereditary Noetherian prime rings*, (Can. J. Math., volume 26, 1974, páginas 1173-1185).

[11] S. Singh, *Modules over hereditary Noetherian prime rings*, (Can. J. Math., volume 27, 1975, páginas 867-883).

[12] K. R. Goodearl, *Singular torsion and the splitting properties*, (Memoirs of the American Mathematical Society, N°124; American Mathematical Society, Providence, RI, 1972).

[13] N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith e R. Wisbauer, *Extending modules*, (Pitman Research Notes in Mathematics 313, Longman, Harlow, UK, 1994).

[14] S. H. Mohamed, Bruno J. Müller, *Continuous and Discrete Modules*, (London Mathematical Society Lecture Note Series 147, Cambridge University Press, 1990).

[15] Barbara L. Osofsky, Patrick F. Smith, *Cyclic Modules Whose Quotients Have All Complement Submodules Direct Summands, (Journal of Algebra, volume 139, 1991, páginas 342-354).*

[16] Robert F. Damiano, A right PCI ring is right noetherian*, (American Mathematical Society, volume 77, 1979, páginas 11-14).*

[17] A. Ç. Özcan e M. Alkan, Semiperfect modules with respect to a preradical*, (Communications in Algebra, volume 34, 2006, páginas 841-856).*

[18] J. L. Gómez Pardo e M. F. Yousif, Semiperfect Min-CS Rings*, (Glasgow Math. J., volume 41, 1999, páginas 231-238).*

Índice Remissivo