Álgebras Normadas e Álgebras com Valor Absoluto

Daniel Eiti Nishida Kawai

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Pós-Graduação em Matemática
Orientador: Prof. Dr. Henrique Guzzo Junior

São Paulo, junho de 2022

Álgebras Normadas e Álgebras com Valor Absoluto

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 14/07/2022. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Henrique Guzzo Junior (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Bruno Leonardo Macêdo Ferreira - UTFPR
- Prof^{a}. Dr^{a}. Ma Isabel Hernández - CONACYT-MEX

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Henrique Guzzo Junior, pelas sugestões de projeto, de acordo com meus interesses em álgebra, topologia e análise. Também agradeço a ele pelo incentivo, compreensão, paciência e ajuda.

À minha família pelo amor, educação e apoio emocional e financeiro que me ofereceu ao decorrer de toda minha vida.

Aos meus amigos para quem pude expressar uma porção dos meus sentimentos, pensamentos e até mesmo minhas fraquezas. Agradeço especialmente ao meu amigo Douglas de Araujo Smigly, que considero uma espécie de irmão ao decorrer da porção de minha vida dedicada à universidade.

Ao colega André Zaidan, que ouviu os meus interesses sobre matemática, especialmente lógica matemática, e me apresentou ao Hugo Luiz Mariano. Agradeço a ele também pelos projetos de aprendizado em álgebra, por exemplo, tendo coordenado o chamado Grupo S4 durante o tempo em que estava na graduação.

Aos professores Hugo Luiz Mariano, Odilon e Rogério Fajardo pela sua compreensão, paciência e pelas conversas e conselhos edificantes. Também agradeço ao professor Hugo Luiz Mariano por ter me apresentado ao professor Javier Sánchez.

Ao professor Javier Sánchez, por se dispor a ser meu orientador para a iniciação científica com bolsa da FAPESP e pelos seus conselhos sobre minha busca pela carreira acadêmica.

Resumo

KAWAI, D. E. N. **Álgebras Normadas e Álgebras com Valor Absoluto**. 2022. 181 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Apresentamos uma demonstração de uma generalização do Teorema de Frobenius-Zorn para $\mathbb{R}$-álgebras algébricas alternativas à direita sem divisores juntos de zero. Estudamos conceitos e resultados básicos sobre álgebras normadas e mostramos uma generalização do Teorema de Gelfand-Mazur-Kaplansky sobre classificação das álgebras normadas alternativas à direita sem divisores topológicos juntos de zero. Depois estudamos a teoria básica de álgebras munidas com valor absoluto, apresentando o Teorema de Urbanik-Wright de que uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com unidade é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Fazemos um resumo da atual situação sobre a classificação de álgebras com valor absoluto de dimensão finita. Apresentamos alguns resultados sobre álgebras com valor absoluto satisfazendo algumas identidades. Mostramos que toda álgebra algébrica com valor absoluto tem dimensão finita e apresentamos uma classificação das álgebras de grau 2 com valor absoluto.

Palavras-chave: Álgebras Normadas, Álgebras com Valor Absoluto, Álgebras Algébricas, Álgebras Satisfazendo Identidades.

Abstract

KAWAI, D. E. N. **Normed Algebras and Absolute Valued Algebras**. 2022. 181 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

We present a proof of a generalization of Frobenius-Zorn Theorem for right alternative algebraic $\mathbb{R}$-algebras without joint divisors of zero. We study basic definitions and results about normed algebras and we prove a generalization of Gelfand-Mazur-Kaplansky Theorem about classification of right alternative normed algebras without topological joint divisors of zero. In sequence we study the basic theory about absolute valued algebras, presenting the Urbanik-Wright Theorem, that an absolute valued $\mathbb{R}$-algebra with unity is isomorphic to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ or $\mathbb{O}$. We present a summary about the current state about the classification of finite-dimensional absolute valued algebras. We present some results about absolute valued algebras that satisfy certain identities. We show that any algebraic absolute valued algebra is finite-dimensional and we present a classification of absolute valued algebras with degree 2.

Keywords: Normed Algebras, Absolute Valued Algebras, Algebraic Algebras, Algebras Satisfying Identities.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos inteiros positivos
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos complexos
I_X	Função identidade no conjunto X
$*$	Multiplicação
$\mathbb{H}$	$\mathbb{R}$-álgebra dos quatérnios
$\mathbb{O}$	$\mathbb{R}$-álgebra dos octônios
$\mathbb{K}[x]$	$\mathbb{K}$-álgebra dos polinômios usuais sobre x com coeficientes em $\mathbb{K}$
$\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(X)$	Conjunto das combinações $\mathbb{K}$-lineares do conjunto X
$\mathrm{Lin}(X)$	$\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(X)$
$\mathbb{K}x_1 + \cdots + \mathbb{K}x_n$	$\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(\{x_1, \ldots, x_n\})$
$A(X)$	Subálgebra gerada pelo conjunto X
$A(x_1, \ldots, x_n)$	$A(\{x_1, \ldots, x_n\})$
$\mathbf{1}$	Elemento unidade
$A^{\#}$	Adjunção formal de unidade
$\otimes$	Produto de Kronecker
(a, b, c)	Associador de a, b e c
$[a, b]$	Comutador de a e b
$a \bullet b$	Produto de Jordan de a e b
$A^{(-)}$	A munido do comutador
$A^{(+)}$	A munido do produto de Jordan
$N_\lambda(A)$	Centro associativo à esquerda
$N_\mu(A)$	Centro associativo ao meio
$N_\rho(A)$	Centro associativo à direita
$N(A)$	Centro associativo
$K(A)$	Centro comutativo
$Z(A)$	Centro

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$	Conjunto das funções $\mathbb{K}$-lineares de A em A.
R_a	Multiplicação à direita por a
R_A	$\{R_a : a \in A\}$
L_a	Multiplicação à esquerda por a
L_A	$\{L_a : a \in A\}$
$M^A(B)$	Subálgebra de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ gerada por $\{R_b : b \in B\} \cup \{L_b : b \in B\} \cup \{I_A\}$
$M(A)$	$M^A(A)$
$\mathrm{Inv}(A)$	Conjunto dos elementos invertíveis de A
$A^{(n)}$	Série derivada
$M\langle X\rangle$	Magma livre sobre o conjunto X
$\deg(u)$	Grau da palavra u
$\mathbb{K}\langle X\rangle$	$\mathbb{K}$-álgebra livre sobre X
$T(A)$	Ideal das identidades de A
$T(\mathcal{M})$	Ideal das identidades da variedade $\mathcal{M}$
$I(A)$	Ideal de A gerado por $f(a_1, \ldots, a_n)$ onde $f \in \mathbb{K}[X]$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$
$\mathbb{K}_{\mathcal{M}}\langle X\rangle$	$\mathbb{K}$-álgebra livre na variedade $\mathcal{M}$
$A_1, A_{\frac{1}{2}}, A_0$	Decomposição de Peirce para idempotente comutativo
$A_{(1)}, A_{(\frac{1}{2})}, A_{(0)},$	Decomposição de Peirce para idempotente qualquer
$\dim(V)$	Dimensão do espaço vetorial V
$\deg(A)$	Grau da álgebra A
$d(x, y)$	Distância entre x e y
$B_X(x, r)$	Bola aberta de centro x e raio r
$B_[x, r]$	Bola fechada de centro x e raio r
$x_n \to x$	Sequência dos x_n converge a x
$\lim_n x_n$	Limite da sequência dos x_n
$\hat{X}$	Completamento de X
$\overline{S}$	Fecho topológico de S
$[S]_X$	Fecho de S relativo ao subespaço X
$\lVert x\rVert$	Norma de x
$\mathbb{B}_X$	Bola unitária
$\mathbb{S}_X$	Esfera unitária

$BL(X,Y)$	Conjunto das funções lineares contínuas de X em Y
$BL(X)$	$BL(X,X)$
$X^\star$	$BL(X,\mathbb{K})$
$f^\star$	Dual de f
$\langle x,y\rangle$	Produto interno de x e y
$\mathfrak{r}(a)$	Raio espectral de a
$\mathrm{sp}(A,a)$	Espectro de elemento
$A_{\mathbb{C}}$	Complexificação da $\mathbb{R}$-álgebra A
$k(F)$	$\inf_{x\neq 0}\frac{\lVert F(x)\rVert}{\lVert x\rVert}$
C_A	Centroide estendida da álgebra prima A
$A_{f,g}$	A munido da multiplicação $x\diamond y=f(x)g(y)$
$A,{}^*A,A^*,\overset{*}{A}$	Isotópicas padrões de A
$\mathbb{H}_n(a,b)$	Isotópicas principais de $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}(a,b),{}^*\mathbb{H}(a,b),\mathbb{H}^*(a,b),\overset{*}{\mathbb{H}}(a,b)$	$\mathbb{H}_1(a,b),\mathbb{H}_2(a,b),\mathbb{H}_3(a,b),\mathbb{H}_4(a,b)$
$\mathcal{F}_X$	Filtro principal de X
$\mathcal{U}_x$	Ultrafiltro principal de x
$\mathcal{F}_\infty$	Filtro de Fréchet
$\lim_{\mathcal{F}} f$	Limite de f através do filtro $\mathcal{F}$
$l_\infty(I,X_i)$	Produto de espaços normados X_i com norma do supremo
$N_{\mathcal{U}}$	Conjunto dos $(x_i)_{i\in I}l_\infty(I,X_i)$ tais que $\lim_{\mathcal{U}}\lVert x_i\rVert=0$
$(X_i)_{\mathcal{U}}$	Ultraproduto dos X_i
$X_{\mathcal{U}}$	Ultrapotência de X
$\check{X}$	Subespaço de $X_{\mathcal{U}}$ isomorfo a X
$D(X,u)$	Conjunto dos estados de X relativos a u
$V(X,u,x)$	Alcance numérico de X
$X_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}$-espaço obtido com restrição da multiplicação escalar
$\Re(z)$	Parte real de z
$\mathrm{Ann}(a)$	Anulador de a
A_n	Conjunto dos $a\in A$ tais que $\dim(A(a))\leqslant n$

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Em várias áreas da matemática, como análise funcional e álgebra comutativa, estudamos várias estruturas algébricas, como o corpo dos reais, o corpo dos complexos, espaços de Banach, espaços de Hilbert e corpos valorados, considerando suas interações com estruturas matemáticas extras, tais como uma topologia, norma ou produto interno. Suas motivações e aplicações aparecem em outras ciências como a física e a química. Com isso, certas classes de álgebras passaram a ser estudadas, como álgebras normadas e álgebras com valor absoluto.

Uma das principais motivações para o estudo de álgebras normadas e em particular álgebras de Banach é o estudo da álgebra $BL(X)$ das transformações lineares contínuas de um espaço normado X nele mesmo, levando em consideração o conceito de norma de um operador. Um estudo organizado sobre de álgebras normadas associativas foi iniciado por Gelfand em [Gel41]. Ali foram desenvolvidas conceitos como raio espectral, em analogia ao raio de convergência de uma série de potências, e espectro de elemento, em analogia ao espectro de uma transformação linear. A teoria geral das álgebras de Banach fornecem resultados em análise como o Teorema de Wiener-Levy a respeito de séries trigonométricas. Mais detalhes podem ser vistas em [Ż73].

As álgebras com valor absoluto, além de serem exemplos particulares de álgebras normadas, têm motivações em várias outras áreas de matemática. Uma delas é o estudo de corpos com valor absoluto, sendo um exemplo clássico o artigo [Ost16] de Ostrowski, e possui aplicações em corpos valorados na álgebra comutativa. Ele mostrou que todo valor absoluto não-trivial no corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é equivalente valor absoluto real usual ou ao valor absoluto p-ádico. Além disso ele mostrou que todo corpo com valor absoluto arquimediano e completo é isomorfo a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mais detalhes podem ser vistos em [Kob84] e [Cas86].

Uma outra motivação para as álgebras com valor absoluto é o problema da expressividade de produtos de somas de quadrados como somas de quadrados. Mais especificamente, Hurwitz em 1898 mostrou que, se n é um natural e $a_{ijk} \in \mathbb{R}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, são reais tais que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijk} x_i y_j\right)^2$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, então $n = 1$, 2, 4 ou 8. De fato, Hurwitz em [Hur98] mostrou que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto induzido por produto interno e com unidade é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, onde $\mathbb{H}$ é a álgebra dos quatérnios e $\mathbb{O}$ é a álgebra dos octônios. Com isso, surgiu o estudo de álgebras com composição sobre outros corpos e também o estudo de álgebras com valor absoluto.

Albert em [Alb47] mostrou que toda álgebra com valor absoluto de dimensão finita é isotópica a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, em particular tem dimensão 1, 2, 4 ou 8 e sua norma vem de um produto interno. Com ajuda de vários resultados particulares, Urbanik e Wright em [UW60] mostraram que toda álgebra com valor absoluto e com unidade é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ e toda álgebra comutativa com valor absoluto é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$, onde $\overset{*}{\mathbb{C}}$ é uma álgebra isotópica a $\mathbb{C}$ com a multiplicação $x \diamond y = \bar{x}\bar{y}$, além de mostrarem a existência de álgebras com valor absoluto de dimensão infinita. A partir disso, surgiram várias linhas de pesquisa, algumas das quais são as seguintes:

i) Classificar todas as álgebras com valor absoluto e com dimensão finita. Já foram classificados as álgebras com valor absoluto de dimensão $n = 1, 2$ ou 4, restando ainda o caso $n = 8$.

ii) Descobrir novas propriedades, tais como existência de elementos semelhantes a unidades ou identidades, de modo que toda álgebra com valor absoluto satisfazendo elas tenha dimensão finita ou pelo menos seja pré-Hilbertiana, ou seja, sua norma venha de um produto interno.

Enquanto isso, também surgiu a questão de classificar de certas classes de álgebras normadas. Gelfand em [Gel41] mostrou que $\mathbb{C}$ é a única $\mathbb{C}$-álgebra normada associativa com divisão e Mazur, com a ajuda do Teorema de Frobenius mostrou em [Maz38] que $\mathbb{R}$-álgebras normadas associativas com divisão são isomorfas a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Com auxílio de vários resultados particulares, El-Mallah e Micali em [EMM80] mostraram que toda álgebra normada alternativa sem divisores topológicos juntos de zero é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Com o auxílio de um resultado de Mikheev conforme em [Mih69], podemos generalizar o resultado para álgebras normadas alternativas à direita sem divisores topológicos juntos de zero.

Depois, os autores K. El-Amin, M. I. Ramirez e A. R. Palacios em [EARRP97] mostraram que toda álgebra algébrica com valor absoluto tem dimensão finita, utilizando tópicos de análise funcional, álgebras normadas e ultraprodutos de espaços normados. Desse modo podemos ver que toda álgebra algébrica com valor absoluto terá grau algébrico limitado igual a 1, 2, 4 ou 8 e, para cada álgebra com valor absoluto de dimensão finita, podemos tentar saber qual é o seu grau algébrico. Palacios em [RP94] obteve uma classificação de todas as álgebras com valor absoluto e de grau no máximo 2, mas a classificação daquelas com grau no máximo 4 ainda está em aberto.

1.1 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos sobre estruturas algébricas, principalmente sobre álgebras não-associativas, para estabelecer notações e terminologia para o presente trabalho e apresentamos também os conceitos básicos de álgebras não-associativas livres, identidades e variedades.

No Capítulo 3 apresentamos algumas classes de álgebras e, com a ajuda de um resultado de Mikheev, demonstramos uma generalização do Teorema de Frobenius-Zorn, mais especificamente que toda $\mathbb{R}$-álgebra algébrica alternativa à direita sem divisores juntos de zero.

No Capítulo 4 estudamos conceitos e resultados básicos sobre álgebras normadas e, com a ajuda da generalização do Teorema de Frobenius-Zorn, mostramos uma generalização do Teorema de Gelfand-Mazur-Kaplansky, mais especificamente que $\mathbb{R}$-álgebra normada alternativa à direita sem divisores topológicos juntos de zero é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

No Capítulo 5, apresentamos o conceito de álgebra com valor absoluto, apresentamos o Teorema de Urbanik-Wright de que uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com unidade é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Depois, mostramos que toda álgebra com valor absoluto de dimensão finita tem dimensão 1, 2, 4 ou 8. Mostramos que toda álgebra com valor absoluto com dimensão $\leqslant 2$ é isomorfo a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$, onde $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ e $\overset{*}{\mathbb{C}}$ são as álgebras isotópicas padrões de $\mathbb{C}$ com as multiplicações $x \diamond y = xy$, $x \diamond y = \bar{x}y$, $x \diamond y = x\bar{y}$ e $x \diamond y = \bar{x}\bar{y}$ respectivamente. Apresentamos um resumo sobre a classificação das álgebras com valor absoluto de dimensão 4 e tentativas de classificar as com dimensão 8.

Em seguida, estudamos as álgebras com valor absoluto satisfazendo a identidade $(x, x, x) = 0$. Primeiro mostramos que, se a norma é pré-Hilbertiana, então a álgebra tem dimensão finita. Depois, com a ajuda de um resultado a respeito de álgebras com composição de dimensão finita satisfazendo $(x, x, x) = 0$, mostramos que toda álgebra com valor absoluto com dimensão finita satisfazendo $(x, x, x) = 0$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$.

No Capítulo 6, apresentaremos os conceitos necessários para mostrar que toda álgebra algébrica com valor absoluto tem dimensão finita. Também mostramos que toda álgebra de grau $\leqslant 2$ com valor absoluto é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, ${}^*\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, ${}^*\mathbb{O}$, $\mathbb{O}^*$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos sobre álgebras não-associativas para estabelecer notações e terminologia para o presente trabalho. O símbolo $\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{Z}$ denotará o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Q}$ denotará o conjunto dos racionais, $\mathbb{R}$ denotará o conjunto dos reais e $\mathbb{C}$ denotará o conjunto dos complexos. Para todo conjunto X, denotaremos a função identidade em X por I_X. Por fim, o símbolo $\mathbb{K}$ denotará o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Álgebras

Apresentaremos várias definições básicas sobre álgebras e forneceremos vários exemplos úteis para o presente trabalho, com base em [Sch66].

2.1.1 Definições Iniciais

Definição 2.1.1. Uma $\mathbb{K}$**-álgebra**, ou uma **álgebra** se $\mathbb{K}$ ficar claro pelo contexto, é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial A munido de uma operação bilinear $* : A \times A \to A$. A operação bilinear $*$ é chamada **multiplicação** e em geral denotamos $a * b$ por ab se a multiplicação ficar clara pelo contexto.

Seja A um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e seja E uma de suas bases sobre $\mathbb{K}$. A partir de uma função qualquer $f : E \times E \to A$, podemos definir a multiplicação assim:

$$\left(\sum_i \alpha_i u_i\right)\left(\sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(u_i, v_j),$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$ e $u_i, v_j \in E$. Com isso, obtemos uma estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra.

A multiplicação das $\mathbb{K}$-álgebras podem satisfazer algumas propriedades algébricas familiares, tais como a associatividade e comutatividade, que definiremos a seguir.

Definição 2.1.2. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra.

- Dizemos que A é **associativa** se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$.
- Dizemos que A é **comutativa** se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$.

Além disso, algumas $\mathbb{K}$-álgebras podem possuir elementos importantes, tais como unidade.

Definição 2.1.3. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja $e \in A$.

- e é dito uma **unidade à esquerda** se satisfaz $ea = a$ para todo $a \in A$.
- e é dito uma **unidade à direita** se satisfaz $ae = a$ para todo $a \in A$.
- e é dito uma **unidade** se é uma unidade à esquerda e é uma unidade à direita.

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Se e é uma unidade à esquerda e f é uma unidade à direita, então temos $e = ef = f$. Em particular, se A é uma álgebra com unidade, então o elemento unidade é único. Em geral denotamos tal elemento por $\mathbf{1}$. Além disso, identificamos $\alpha\mathbf{1}$ com α para todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, de modo que nesse caso ocasionalmente escrevemos $\mathbb{K} \subseteq A$ em vez de $\mathbb{K}\mathbf{1} \subseteq A$.

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Seja $e \in A$ um elemento. Se e é uma unidade à esquerda ou uma unidade à direita, é fácil ver que $ee = e$. Elementos desse tipo possui um nome especial.

Definição 2.1.4. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja $e \in A$. Dizemos que e é **idempotente** se $ee = e$.

O termo "idempotência" foi introduzido por Benjamin Peirce em 1870 no contexto de elementos de álgebras que são invariantes quando elevados a uma potência inteira positiva, e literalmente significa "mesma potência", de "idem" + "potência" ("mesma" + "potência").

Exemplo 2.1.5. Consideremos a matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então E é idempotente, mas não é uma unidade à esquerda nem uma unidade à direita da álgebra das matrizes.

Algumas $\mathbb{K}$-álgebras possuem multiplicações de estruturas essencialmente iguais no ponto de vista da álgebra. Mais especificamente apresentamos as seguintes definições.

Definição 2.1.6. Sejam A e B duas $\mathbb{K}$-álgebras. Um **homomorfismo** de A em B é uma função linear $f : A \to B$ tal que:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

para quaisquer $a, b \in A$. O homomorfismo f é dito **isomorfismo** se f é uma função bijetora.

2.1.2 Exemplos Iniciais

Exemplo 2.1.7. Os **números complexos**, denotado por $\mathbb{C}$, podem ser definidos assim. Seja $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, então $\mathbb{C}$ possui a seguinte base:

$$1 = (1, 0), \qquad i = (0, 1).$$

Para definirmos uma multiplicação em $\mathbb{C}$, basta definirmos o seguinte:

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot i = i, \qquad i \cdot 1 = i, \qquad i \cdot i = -1.$$

Com isso, obtemos a seguinte multiplicação:

$$(\alpha_0, \alpha_1)(\beta_0, \beta_1) = (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1, \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)$$

para $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Então $\mathbb{C}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa, comutativa e com unidade.

Exemplo 2.1.8. A **álgebra dos quatérnios**, denotada por $\mathbb{H}$ e descoberta por Hamilton em 1843, é definida assim. Seja $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, então $\mathbb{H}$ possui a seguinte base:

$$1 = (1, 0, 0, 0), \qquad i = (0, 1, 0, 0), \qquad j = (0, 0, 1, 0), \qquad k = (0, 0, 0, 1).$$

Para definirmos uma multiplicação em $\mathbb{H}$, começamos assim:

- $1e = e1 = e$ para $e \in \{1, i, j, k\}$.
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Para os casos restantes, observemos a Figura 2.1. Quando a multiplicação estiver no sentido das setas, permanece o sinal positivo. Por exemplo, $ij = k$. Quando a multiplicação está no sentido contrário da seta, adota-se o sinal negativo. Por exemplo, $ji = -k$.

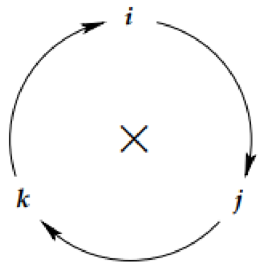

Figura 2.1: *Multiplicação de i, j e k em $\mathbb{H}$ e o produto vetorial $\times$ em $\mathbb{R}^3$, onde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.*

A Tabela 2.1 abaixo apresenta todas as combinações possíveis.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tabela 2.1: *Tabela de multiplicação apresentada para os quatérnios.*

Explicitamente, dados $x, y \in \mathbb{H}$, com:

$$x = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k,$$

$$y = \beta_0 1 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k,$$

temos:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3)1 \\ &+ (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)i \\ &+ (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1)j \\ &+ (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)k \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{H}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa com unidade, mas não é comutativa.

Exemplo 2.1.9. A **álgebra dos octônios**, denotada por $\mathbb{O}$, descoberta por Graves em 1843 e depois redescoberta por Cayley em 1845, é definida assim. Seja $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$, então seus elementos podem ser representados na seguinte forma:

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, 7$. Para definirmos uma multiplicação em $\mathbb{O}$, começamos assim:

- $1e_i = e_i 1 = e_i$ para $i = 1, \ldots, 7$.
- $e_i^2 = -1$ para $i = 1, \ldots, 7$.

Os casos restantes podem ser representados por meio do chamado Plano de Fano, ilustrado na Figura 2.2. Quando a multiplicação estiver no sentido das setas, permanece o sinal positivo. Por exemplo, $e_3e_4 = e_6$. Quando a multiplicação está no sentido contrário da seta, adota-se o sinal negativo. Por exemplo, $e_4e_3 = -e_6$.

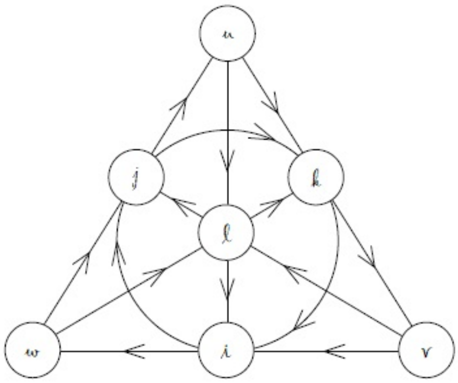

Figura 2.2: *Plano de Fano representando a multiplicação entre os elementos da base de* $\mathbb{O}$.

A tabela 2.2 abaixo apresenta todas as combinações possíveis do plano de Fano.

	1	i	j	k	l	u	v	w
1	1	i	j	k	l	u	v	w
i	i	-1	k	$-j$	$-u$	l	$-w$	v
j	j	$-k$	-1	i	$-v$	w	l	$-u$
k	k	j	$-i$	-1	$-w$	$-v$	u	l
l	l	u	v	w	-1	$-i$	$-j$	$-k$
u	u	$-l$	$-w$	v	i	-1	$-k$	j
v	v	w	$-l$	$-u$	j	k	-1	$-i$
w	w	$-v$	u	$-l$	k	$-j$	i	-1

Tabela 2.2: *Tabela de multiplicação apresentada pelo plano de Fano.*

O Plano de Fano determina completamente a multiplicação em $\mathbb{O}$. De fato, para $x, y \in \mathbb{O}$, com:

$$x = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \alpha_4 l + \alpha_5 u + \alpha_6 v + \alpha_7 w,$$

$$y = \beta_0 1 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k + \beta_4 l + \beta_5 u + \beta_6 v + \beta_7 w,$$

temos:

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4 - \alpha_5\beta_5 - \alpha_6\beta_6 - \alpha_7\beta_7)1 \\
&+ (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 - \alpha_6\beta_7 + \alpha_7\beta_6)i \\
&+ (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_6 + \alpha_5\beta_7 + \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5)j \\
&+ (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0 - \alpha_4\beta_7 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5 + \alpha_7\beta_4)k \\
&+ (\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6 + \alpha_3\beta_7 + \alpha_4\beta_0 - \alpha_5\beta_1 - \alpha_6\beta_2 - \alpha_7\beta_3)l \\
&+ (\alpha_0\beta_5 - \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_3\beta_6 + \alpha_4\beta_1 + \alpha_5\beta_0 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_7\beta_2)u \\
&+ (\alpha_0\beta_6 + \alpha_1\beta_7 - \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_5\beta_3 + \alpha_6\beta_0 - \alpha_7\beta_1)v \\
&+ (\alpha_0\beta_7 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_6\beta_1 + \alpha_7\beta_0)w
\end{aligned}$$

Esta álgebra tem unidade e não é associativa. Não obstante, ela satisfaz identidades algébricas próximas da associatividade, expressas na definição a seguir.

Definição 2.1.10. Uma $\mathbb{K}$-álgebra é dita **alternativa** se satisfaz as seguintes identidades:

$$(xx)y = x(xy), \qquad (xy)y = x(yy),$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Álgebras alternativas têm esse nome pois podemos mostrar que a função:

$$f(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$$

é uma função trilinear alternada, ou seja, vale zero se dois dos valores x, y, z forem iguais.

Exemplo 2.1.11. As $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são $\mathbb{R}$-álgebras alternativas. Podemos verificar que $\mathbb{O}$ é alternativa testando todas as possibilidades para os elementos da base $1, e_1, \ldots, e_7$, mas também podemos utilizar a Proposição 2.1.20

Por fim, mostraremos um exemplo de que uma $\mathbb{K}$-álgebra pode ter duas unidades à esquerda diferentes.

Exemplo 2.1.12. Seja $A = \mathbb{R}^2$ e consideremos a base:

$$u = (1,0), \qquad v = (0,1).$$

Consideremos a seguinte multiplicação:

$$u \cdot u = u, \qquad u \cdot v = v, \qquad v \cdot u = u, \qquad v \cdot v = v.$$

Então u e v são unidades à esquerda.

2.1.3 Construção de Cayley-Dickson

As $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ podem ser obtidas através da chamada construção de Cayley-Dickson. Ela apresenta uma forma de obtermos uma nova álgebra a partir do que chamamos de álgebra com involução.

Definição 2.1.13. Uma **$\mathbb{K}$-álgebra com involução** é uma $\mathbb{K}$-álgebra A munido de uma função linear $* : A \to A$, denotada também por $a \mapsto a^*$, satisfazendo as seguintes propriedades para quaisquer $a, b \in A$:

- $a^{**} = a$.
- $(ab)^* = b^*a^*$.

A construção de Cayley-Dickson é uma generalização da construção dos números complexos a partir dos números reais.

Definição 2.1.14. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com involução e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. A **construção de Cayley-Dickson** é o $\mathbb{K}$-espaço $\mathcal{D}_\alpha(A) = A \oplus A$, na qual definimos:

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4 a_2^*, a_1^* a_4 + a_3 a_2)$$

e também definimos:

$$(a_1, a_2)^* = (a_1^*, -a_2).$$

Então $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com involução. Além disso, denotaremos $\mathcal{D}_{-1}(A)$ por $\mathcal{D}(A)$.

Podemos aplicar a construção de Cayley-Dickson várias vezes sucessivas em uma álgebra com involução. Além disso, temos um homomorfismo injetor de A em $\mathcal{D}_\alpha(A)$.

Proposição 2.1.15. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com involução e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então a função $a \mapsto (a, 0)$ é um homomorfismo injetor de A em $\mathcal{D}_\alpha(A)$.

Exemplo 2.1.16. Consideremos a $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{R}$ com a função $x^* = x$. Aplicando a construção de Cayley-Dickson, obtemos $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$, onde $x^* = \bar{x}$ é a conjugação usual dos complexos. Aplicando novamente a construção, obtemos $\mathcal{D}(\mathbb{C}) = \mathbb{H}$. Além disso, obtemos $\mathcal{D}(\mathbb{H}) = \mathbb{O}$. A seguinte figura mostra várias álgebras posteriores obtidas pela construção de Cayley-Dickson.

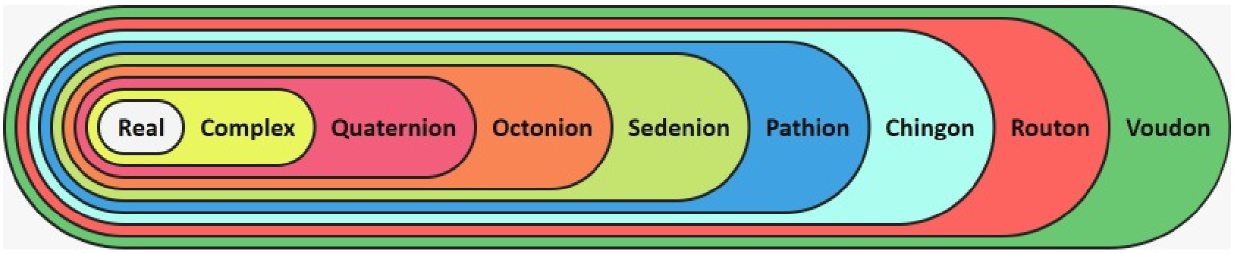

Figura 2.3: *Álgebras obtidas a partir de $\mathbb{R}$ por construções sucessivas de Cayley-Dickson.*

As $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ possuem unidade e satisfazem $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$. De modo geral temos.

Proposição 2.1.17. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com involução e seja $e \in A$.

- Se e é uma unidade à esquerda, então e^* é uma unidade à direita.
- Se e é uma unidade à direita, então e^* é uma unidade à esquerda.

Em particular, se A tem unidade $\mathbf{1}$, então $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$.

Demonstração. Se e é uma unidade à esquerda, então para todo $a \in A$ temos:

$$ea^* = a^*,$$

assim:

$$(ea^*)^* = a^{**},$$

portanto $ae^* = a$. □

A construção de Cayley-Dickson preserva unidades, conforme a seguinte proposição.

Proposição 2.1.18. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com involução e com unidade $\mathbf{1}$ e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $\mathcal{D}_\alpha(A)$ tem unidade $(\mathbf{1}, 0)$.

A construção de Cayley-Dickson em geral não preserva comutatividade.

Proposição 2.1.19. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com involução e com unidade 1 e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é comutativa se e só se $a^* = a$ para todo $a \in A$.

Demonstração. Temos o seguinte:

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4a_2^*, a_1^*a_4 + a_3a_2), \tag{2.1}$$

e também:

$$(a_3, a_4)(a_1, a_2) = (a_3a_1 + \alpha a_2a_4^*, a_3^*a_2 + a_1a_4). \tag{2.2}$$

a) Suponhamos que $a^* = a$ para todo $a \in A$. Então A é comutativa, pois:

$$ab = (ab)^* = b^*a^* = ba.$$

Por isso, juntamente com (2.1) e (2.2), é fácil ver que $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é comutativa.

b) Suponhamos que $\mathcal{D}_\alpha(A)$ seja comutativa. Então para todo $a \in A$ temos:

$$(a, 0)(0, 1) = (0, a^*), \qquad (0, 1)(a, 0) = (0, a),$$

assim $a^* = a$. □

A construção de Cayley-Dickson em geral também não preserva associatividade.

Proposição 2.1.20. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com involução e com unidade e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é associativa se e só se A é associativa e comutativa.

Demonstração. Temos a seguinte identidade, que chamaremos de $(*)$:

$$\begin{aligned}
& \big((a_1, a_2)(a_3, a_4)\big)\,(a_5, a_6) \\
= \; & (a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a}_2, \overline{a}_1a_4 + a_3a_2)(a_5, a_6) \\
= \; & \Big((a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a}_2)a_5 + \alpha a_6\overline{(\overline{a}_1a_4 + a_3a_2)}, \overline{(a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a}_2)}a_6 + a_5(\overline{a}_1a_4 + a_3a_2)\Big) \\
= \; & \big((a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a}_2)a_5 + \alpha a_6(\overline{a}_4a_1 + \overline{a}_2\overline{a}_3), (\overline{a}_3\overline{a}_1 + \alpha a_2\overline{a}_4)a_6 + a_5(\overline{a}_1a_4 + a_3a_2)\big) \\
= \; & \big((a_1a_3)a_5 + \alpha(a_4\overline{a}_2)a_5 + \alpha a_6(\overline{a}_4a_1) + \alpha a_6(\overline{a}_2\overline{a}_3), (\overline{a}_3\overline{a}_1)a_6 + \alpha(a_2\overline{a}_4)a_6 + a_5(\overline{a}_1a_4) + a_5(a_3a_2)\big)\,,
\end{aligned}$$

e também temos a seguinte identidade, que chamaremos de $(**)$:

$$\begin{aligned}
& (a_1, a_2)\,\big((a_3, a_4)(a_5, a_6)\big) \\
= \; & (a_1, a_2)(a_3a_5 + \alpha a_6\overline{a}_4, \overline{a}_3a_6 + a_5a_4) \\
= \; & \big(a_1(a_3a_5 + \alpha a_6\overline{a}_4) + \alpha(\overline{a}_3a_6 + a_5a_4)\overline{a}_2, \overline{a}_1(\overline{a}_3a_6 + a_5a_4) + (a_3a_5 + \alpha a_6\overline{a}_4)a_2\big) \\
= \; & \big(a_1(a_3a_5) + \alpha a_1(a_6\overline{a}_4) + \alpha(\overline{a}_3a_6)\overline{a}_2 + \alpha(a_5a_4)\overline{a}_2, \overline{a}_1(\overline{a}_3a_6) + \overline{a}_1(a_5a_4) + (a_3a_5)a_2 + \alpha(a_6\overline{a}_4)a_2\big)\,.
\end{aligned}$$

a) Suponhamos que A seja associativa e comutativa. Comparando os termos de $(*)$ e $(**)$, é fácil ver que $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é associativa.

b) Suponhamos que $\mathcal{D}_\alpha(A)$ seja associativa. É fácil ver que A é associativa. Além disso, para $a, b \in A$ temos:

$$\big((0,1)(b,0)\big)(a,0) = (0, ab), \qquad (0,1)\big((b,0)(a,0)\big) = (0, ba),$$

assim $ab = ba$. Portanto A é comutativa. $\square$

Consideraremos um tipo importante de $\mathbb{K}$-álgebra com involução sobre a qual consideramos a construção de Cayley-Dickson, as chamadas álgebras de Cayley.

Definição 2.1.21. Uma **$\mathbb{K}$-álgebra de Cayley** é uma $\mathbb{K}$-álgebra com involução e com unidade satisfazendo as seguintes propriedades para todo $a \in A$:

- $a + a^* \in \mathbb{K}\mathbf{1}$.
- $aa^* \in \mathbb{K}\mathbf{1}$.

Sendo assim, para todo $a \in A$ definiremos $\tau_a, \nu_a \in \mathbb{K}$ assim:

$$a + a^* = \tau_a \mathbf{1}, \qquad aa^* = \nu_a \mathbf{1}. \tag{2.3}$$

Uma propriedade imediata da $\mathbb{K}$-álgebras de Cayley é a seguinte:

Proposição 2.1.22. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley. Então:

$$aa^* = a^*a.$$

para todo $a \in A$.

Demonstração. De fato:

$$aa^* = a\tau_a - aa = \tau_a a - aa = a^*a,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Outra propriedade útil é a seguinte.

Proposição 2.1.23. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley. Então:

$$\tau_{ab} = \tau_{ba}$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Demonstração. Temos o seguinte:

$$\tau_{ab} = (a + b^*)(a + b^*)^* - aa^* - b^*b = (a + b^*)^*(a + b^*) - a^*a - bb^* = \tau_{ba},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 2.1.24. As $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são $\mathbb{R}$-álgebras de Cayley. De modo geral, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.25. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então a construção de Cayley-Dickson $\mathcal{D}_\alpha(A)$ também é uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley.

Demonstração. Para uma melhor visualização, para todo $a \in A$ denotaremos a^* por $\overline{a}$. Lembremos que, se 1 é a unidade de A, então $(1, 0)$ é a unidade de $\mathcal{D}_\alpha(A)$. Temos:

$$(a, b) + \overline{(a, b)} = (a, b) + (\overline{a}, -b) = (a + \overline{a}, 0) \in \mathbb{K}\mathbf{1}$$

e também:

$$(a, b)\overline{(a, b)} = (a, b)(\overline{a}, -b) = (a\overline{a} - \alpha b\overline{b}, 0) \in \mathbb{K}\mathbf{1}.$$

Assim $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley. $\square$

A demonstração acima mostra que, se A é uma álgebra de Cayley, então em $\mathcal{D}_\alpha(A)$ temos:

$$\tau_{(a,b)} = \tau_a, \qquad \nu_{(a,b)} = \nu_a - \alpha\nu_b. \tag{2.4}$$

A construção de Cayley-Dickson em geral não preserva a alternatividade. Primeiro, notemos que, numa álgebra de Cayley A, as seguintes condições são equivalentes:

- $(xx)y = x(xy)$ para quaisquer $x, y \in A$.
- $(x^*x)y = x^*(xy)$ para quaisquer $x, y \in A$.
- $(xx^*)y = x(x^*y)$ para quaisquer $x, y \in A$.

De fato, temos o seguinte:

$$\left((x + x^*)x\right) y = (\tau_x x)y = \tau_x(xy) = (x + x^*)(xy),$$
$$\left(x(x + x^*)\right) y = (x\tau_x)y = x(\tau_x y) = x\left((x + x^*)y\right).$$

Analogamente, numa álgebra de Cayley A, as seguintes condições são equivalentes:

- $(xy)y = x(yy)$ para quaisquer $x, y \in A$.
- $(xy^*)y = x(y^*y)$ para quaisquer $x, y \in A$.
- $(xy)y^* = x(yy^*)$ para quaisquer $x, y \in A$.

Com isso, podemos apresentar a próxima proposição.

Proposição 2.1.26. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é alternativa se e só se A é associativa.

Demonstração. Pela identidade (2.4), temos o seguinte:

$$\left((a_1, a_2)\overline{(a_1, a_2)}\right)(a_3, a_4) = (\nu_{a_1}a_3 - \alpha\nu_{a_2}a_3, \nu_{a_1}a_4 - \alpha\nu_{a_2}a_4).$$
$$(a_1, a_2)\left(\overline{(a_3, a_4)}(a_3, a_4)\right) = (\nu_{a_3}a_1 - \alpha\nu_{a_4}a_1, \nu_{a_3}a_2 - \alpha\nu_{a_4}a_2).$$

a) Suponhamos que A seja alternativa. Pela identidade $(*)$ da demonstração da Proposição 2.1.20:

$$\begin{aligned}
&\left((a_1, a_2)\overline{(a_3, a_4)}\right)(a_3, a_4) \\
= \;& \left((a_1\overline{a}_3)a_3 - \alpha(a_4\overline{a}_2)a_3 - \alpha a_4(\overline{a}_4 a_1) + \alpha a_4(\overline{a}_2 a_3), (a_3\overline{a}_1)a_4 - \alpha(a_2\overline{a}_4)a_4 - a_3(\overline{a}_1 a_4) + a_3(\overline{a}_3 a_2)\right) \\
= \;& \left(\nu_{a_3}a_1 - \alpha(a_4\overline{a}_2)a_3 - \nu_{a_4}a_1 + \alpha a_4(\overline{a}_2 a_3), (a_3\overline{a}_1)a_4 - \alpha\nu_{a_4}a_2 - a_3(\overline{a}_1 a_4) + \nu_{a_3}a_2\right).
\end{aligned}$$

Pela identidade $(**)$ da demonstração da Proposição 2.1.20:

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2)\left(\overline{(a_1, a_2)}(a_3, a_4)\right) \\
= \;& \left(a_1(\overline{a}_1 a_3) - \alpha a_1(a_4\overline{a}_2) + \alpha(a_1 a_4)\overline{a}_2 - \alpha(a_3 a_2)\overline{a}_2, \overline{a}_1(a_1 a_4) - \overline{a}_1(a_3 a_2) + (\overline{a}_1 a_3)a_2 - \alpha(a_4\overline{a}_2)a_2\right) \\
= \;& \left(\nu_{a_1}a_3 - \alpha a_1(a_4\overline{a}_2) + \alpha(a_1 a_4)\overline{a}_2 - \alpha\nu_{a_2}a_3, \nu_{a_1}a_4 - \overline{a}_1(a_3 a_2) + (\overline{a}_1 a_3)a_2 - \alpha\nu_{a_2}a_4\right).
\end{aligned}$$

b) Suponhamos que A seja associativa. Comparando os termos do raciocínio acima, é fácil ver que $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é alternativa.

c) Suponhamos que $\mathcal{D}_\alpha(A)$ seja alternativa. Então A é alternativa, logo para $a, b, c \in A$ temos:

$$\left((\bar{b},0)\overline{(a,c)}\right)(a,c) - (\bar{b},0)\left(\overline{(a,c)}(a,c)\right) = \left((ab)c - a(bc), 0\right).$$

Assim A é associativa. □

2.1.4 Álgebra dos Polinômios

Expressaremos a noção familiar de polinômios através do conceito de $\mathbb{K}$-álgebras.

Definição 2.1.27. Definiremos a **$\mathbb{K}$-álgebra dos polinômios** é o $\mathbb{K}$-espaço $\mathbb{K}[x]$ com uma base infinita enumerável cujos elementos denotaremos por $x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots$. A multiplicação é definida assim:

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Essa $\mathbb{K}$-álgebra é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa, comutativa e com unidade, mais especificamente a unidade é o elemento x^0, que denotaremos por 1, além disso denotaremos x^1 por x.

A álgebra dos polinômios apresenta a seguinte propriedade, que exprime a ideia da substituição da incógnita x por um valor.

Proposição 2.1.28. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade e seja $a \in A$. Então existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\varphi_a : \mathbb{K}[x] \to A$ tal que $\varphi_a(1) = 1$ e $\varphi_a(x) = a$.

Por causa disso, se $p \in \mathbb{K}[x]$, então costumamos denotar p por $p(x)$ e para cada $a \in A$ costumamos denotar $\varphi_a(p)$ por $p(a)$.

2.1.5 Produto de Kronecker

Assim como podemos considerar o produto cartesiano de dois conjuntos, podemos considerar o chamado produto de Kronecker de duas $\mathbb{K}$-álgebras. Para isso revisaremos brevemente o conceito de produto tensorial de dois $\mathbb{K}$-espaços.

Definição 2.1.29. Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços. Sejam E e F bases de X e Y respectivamente. Nós definimos um **produto tensorial** de X e Y como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $X \otimes_{\mathbb{K}} Y$ com uma base consistindo de elementos $g_{e,f}$ indexados por $(e, f) \in E \times F$, juntamente com a única função bilinear $\otimes : X \times Y \to X \otimes_{\mathbb{K}} Y$, denotada por $(x, y) \mapsto x \otimes y$, tal que $e \otimes f = g_{e,f}$ para quaisquer $e \in E$ e $f \in F$.

A escolha das bases E e F de X e Y respectivamente não é muito relevante no sentido de que todos os possíveis candidatos a um produto tensorial de X e Y são isomorfos um ao outro, através da seguinte proposição.

Proposição 2.1.30. Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Para quaisquer $\mathbb{K}$-espaço vetorial Z e função bilinear $h : X \times Y \to Z$, então existe uma única função linear $\hat{h} : X \otimes_{\mathbb{K}} Y \to Z$ tal que $\hat{h}(x \otimes y) = h(x, y)$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Podemos apresentar um modo de obtermos o produto tensorial que não envolve escolha de bases. Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços. Consideremos um $\mathbb{K}$-espaço Z com base consistindo de elementos $e_{x,y}$ onde $(x, y) \in X \times Y$. Seja W o subespaço de Z consistindo de combinações lineares de todos os elementos de uma das seguintes formas:

- $e_{x+x',y} - e_{x,y} - e_{x',y}$,
- $e_{\alpha x,y} - \alpha e_{x,y}$,
- $e_{x,y+y'} - e_{x,y} - e_{x,y'}$,

- $e_{x,\beta y} - \beta e_{x,y}$,

onde $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então o $\mathbb{K}$-espaço quociente Z/W é um produto tensorial dos espaços X e Y.

Definição 2.1.31. Sejam A e B duas $\mathbb{K}$-álgebras. O **produto de Kronecker** é o produto tensorial $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ munido de uma multiplicação dada por:

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

para quaisquer $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$.

A multiplicação está bem definida. De fato, sendo E e F bases de A e B respectivamente, então os elementos $e \otimes f$ onde $(e, f) \in E \times F$ constituem uma base de $A \otimes_{\mathbb{K}} B$, de modo que basta definirmos a multiplicação assim:

$$(e \otimes f)(e' \otimes f') = ee' \otimes ff'$$

para $e, e' \in E$ e $f, f' \in F$.

Além disso, o produto de Kronecker apresenta a seguinte propriedade.

Proposição 2.1.32. Sejam A e B duas $\mathbb{K}$-álgebras. Para quaisquer $\mathbb{K}$-álgebra C e função bilinear $f : A \times B \to C$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$f(a, b)f(a', b') = f(aa', bb')$$

para quaisquer $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, então existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\hat{f} : A \otimes_{\mathbb{K}} B \to C$ função linear $\hat{f} : A \otimes_{\mathbb{K}} B \to C$ tal que $\hat{f}(a \otimes b) = f(a, b)$ para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$.

2.1.6 Subálgebras e Ideais

Durante o estudo de $\mathbb{K}$-álgebras, apresentaremos alguns subconjuntos importantes, bem como notações e terminologia úteis para o presente trabalho.

Definição 2.1.33. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Para quaisquer subespaços X e Y de A, denotamos por XY o subespaço gerado pelos elementos da forma xy onde $x \in X$ e $y \in Y$. Também definimos:

$$X^1 = X, \qquad X^n = X^{n-1}X + X^{n-2}X^2 + \cdots + XX^{n-1}$$

para todo subespaço X de A.

Em seguida, definiremos o que são subálgebras e ideais de uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Definição 2.1.34. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Dizemos o seguinte:

- Uma **subálgebra** de A é um subespaço B de A tal que para quaisquer $a, b \in B$ tenhamos $ab \in B$.
- Um **ideal à direita** (resp. **à esquerda**) de A é um subespaço I de A tal que para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$ tenhamos $xa \in I$ (resp $ax \in I$). Mais concisamente, isso equivale a dizer que $IA \subseteq I$ (resp. $AI \subseteq I$).
- Um **ideal** de A é um subconjunto I de A que é simultaneamente um ideal à direita e um ideal à esquerda de A.

Conforme o próximo exemplo, existem $\mathbb{K}$-álgebras onde existem subálgebras que não são ideais.

Exemplo 2.1.35. Consideremos a $\mathbb{K}$-álgebra dos polinômios $A = \mathbb{K}[x]$. Consideremos o conjunto B das combinações lineares dos elementos $1, x^2, x^4, \ldots$. Então B é uma subálgebra de A, mas não é um ideal, pois $x^2 \in B$, mas $x \cdot x^2 = x^3 \notin B$.

Conforme o próximo exemplo, existem $\mathbb{K}$-álgebras onde existem ideais à esquerda que não são ideais.

Exemplo 2.1.36. Sejam x e y dois símbolos e seja Z o conjunto das sequências finitas $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ onde $\alpha_i \in \{x, y\}$, incluindo a sequência vazia. Seja A um $\mathbb{K}$-espaço com base consistindo de elementos e_z onde $z \in Z$. Definimos uma multiplicação em A assim:

$$e_z e_w = e_{zw},$$

onde $z, w \in Z$ e zw é a concatenação de z e w. Seja B o conjunto das combinações lineares dos elementos da forma e_{zx}, onde $z \in Z$. Então B é um ideal à esquerda de A, mas não é um ideal de A, pois $e_x \in B$, mas $e_x e_y = e_{xy} \notin B$.

Definição 2.1.37. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja X um subconjunto de A.

- Denotamos o conjunto das combinações lineares de X por $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(X)$, ou $\mathrm{Lin}(X)$ se $\mathbb{K}$ ficar claro pelo contexto. Se $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, denotamos $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ por $\mathbb{K}x_1 + \cdots + \mathbb{K}x_n$.
- Definimos a **subálgebra de** A **gerada por** X como a interseção de todas as subálgebras de A que contém X e denotamos por $A(X)$. Se $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, denotamos $A(\{x_1, \ldots, x_n\})$ por $A(x_1, \ldots, x_n)$.

Definição 2.1.38. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e I um ideal de A. Definimos a **álgebra quociente** de A por I como sendo o $\mathbb{K}$-módulo quociente A/I munido do produto definido por:

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Observe que o produto está bem definido, já que não depende da escolha dos representantes das classes laterais. A classe lateral $a + I$ ocasionalmente será denotada por $\bar{a}$.

A função $\pi : A \to A/I$ dada por $\pi(a) = a + I$ é um homomorfismo de álgebras. Chamaremos essa função de **homomorfismo natural**.

Proposição 2.1.39 (Teorema do Isomorfismo)**.** Sejam A e B duas $\mathbb{K}$-álgebra. Se $f : A \to B$ é um homomorfismo sobrejetor, então existe um isomorfismo $\varphi : A/\mathrm{Ker}(f) \to B$ tal que $\varphi(\pi(a)) = f(a)$ para todo $a \in A$.

Com o conceito dos ideais, definiremos o que são $\mathbb{K}$-álgebras simples, $\mathbb{K}$-álgebras primas e $\mathbb{K}$-álgebras semiprimas.

Definição 2.1.40. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é dita **simples** se $A^2 \neq \{0\}$ e também os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A.

Todo anel com divisão é um anel simples. O próximo exemplo apresenta uma álgebra simples que não é um anel com divisão.

Exemplo 2.1.41. Seja $M_n(\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$-álgebra das matrizes quadradas com entradas em $\mathbb{K}$. Então $M_n(\mathbb{K})$ é simples.

Apresentaremos o conceito de álgebra prima, que é uma generalização natural dos domínios de integridade e das álgebras simples.

Definição 2.1.42. Uma $\mathbb{K}$-álgebra é dita **prima** se $A \neq 0$ e, para quaisquer ideais I e J de A, se $IJ = 0$, então $I = 0$ ou $J = 0$.

Apresentaremos o conceito de álgebra semiprima, que é uma generalização das álgebras primas.

Definição 2.1.43. Uma $\mathbb{K}$-álgebra é dita **semiprima** se $A \neq 0$ e, para qualquer ideal I de A, se $I^2 = 0$, então $I = 0$.

Por exemplo, o anel $\mathbb{Z}_6$ é um anel semiprimo, mas não é um anel primo.

2.1.7 Adjunção de Unidade

Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra sem unidade, pode ser útil considerar A como uma subálgebra de uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade. A menor $\mathbb{K}$-álgebra com unidade contendo A é a $\mathbb{K}$-álgebra $A^\#$ obtida de A através da adjunção de uma unidade, conforme a seguinte definição.

Definição 2.1.44. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Definimos:

$$A^\# = A \oplus \mathbb{K}$$

como a soma direta dos $\mathbb{K}$-módulos A e $\mathbb{K}$, denotando os elementos de $A^\#$ na forma $a + \alpha$, onde $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Definimos uma multiplicação da seguinte maneira:

$$(a + \alpha)(b + \beta) = (ab + \alpha b + \beta a) + \alpha\beta,$$

onde $a, b \in A$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Chamamos $A^\#$ de **adjunção formal de unidade** em A.

Com essa definição, podemos facilmente ver que A é uma subálgebra de $A^\#$. Aliás, A é de fato um ideal de $A^\#$. Além disso, várias propriedades algébricas são preservadas pela adjunção formal da unidade.

Proposição 2.1.45. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade. Então temos o seguinte:

- Se A é associativa, então $A^\#$ é associativa.
- Se A é comutativa, então $A^\#$ é comutativa.

A próxima proposição expressa o fato de que $A^\#$ é a menor álgebra com unidade que contém uma dada álgebra A sem unidade.

Proposição 2.1.46. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Seja B uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade e seja $f : A \to B$ um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Então existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\hat{f} : A^\# \to B$ tal que $f(1) = 1$.

Exemplo 2.1.47. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra *associativa* e seja X um subespaço de A. Então o ideal de A gerado por X é o conjunto $X + XA + AX + AXA$. Por outro lado, podemos considerar A como subálgebra de $A^\#$, assim o ideal de A gerado por X pode ser expresso mais concisamente como $A^\# X A^\#$.

2.1.8 Associatividade e Comutatividade

Na definição de $\mathbb{K}$-álgebra, não assumimos que a álgebra seja associativa ou comutativa. Por isso, as seguintes notações são úteis para abreviar algumas contas.

Definição 2.1.48. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra.

- Dados elementos $a, b, c \in A$, definimos o **associador** (a, b, c) de a, b, c por:

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc).$$

- Dados elementos $a, b \in A$, definimos o **comutador** $[a, b]$ de a, b por:

$$[a, b] = ab - ba.$$

- Dados elementos $a, b \in A$, definimos o **produto de Jordan** $a \bullet b$ de a, b por:

$$a \bullet b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Com a notação de associador, temos uma identidade que é válida em qualquer $\mathbb{K}$-álgebra.

Proposição 2.1.49. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Então a seguinte identidade:

$$x(y,z,w) + (x,y,z)w = (xy,z,w) - (x,yz,w) + (x,y,zw)$$

é válida para quaisquer $x,y,z,w \in A$.

Demonstração. Só desenvolver os associadores. □

O comutador e o produto de Jordan são funções bilineares, aí podemos obter novas estruturas de álgebras.

Definição 2.1.50. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra.

- Definimos a $\mathbb{K}$-álgebra $A^{(-)}$ como o espaço vetorial de A munido do comutador.
- Definimos a $\mathbb{K}$-álgebra $A^{(+)}$ como o espaço vetorial de A munido do produto de Jordan.

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. A $\mathbb{K}$-álgebra $A^{(-)}$ satisfaz algumas identidades importantes, que definem o que chamamos de $\mathbb{K}$-álgebra de Lie.

Definição 2.1.51. Uma **$\mathbb{K}$-álgebra de Lie** é uma $\mathbb{K}$-álgebra A tal que as seguintes identidades são satisfeitas para quaisquer $x,y,z \in A$:

- $xx = 0$.
- $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$.

Proposição 2.1.52. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. Então toda subálgebra de $A^{(-)}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de Lie.

A recíproca também é verdadeira, através do chamado Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt. A demonstração pode ser vista, por exemplo, no Capítulo 5 de [Jac79] e no Capítulo 5 de [Hum78].

Teorema 2.1.53. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Lie. Então existe uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa B tal que A seja isomorfa a uma subálgebra de $B^{(-)}$.

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. A $\mathbb{K}$-álgebra $A^{(+)}$ satisfaz algumas identidades importantes, que definem o que chamamos de $\mathbb{K}$-álgebra de Jordan.

Definição 2.1.54. Uma **$\mathbb{K}$-álgebra de Jordan** é uma $\mathbb{K}$-álgebra A tal que as seguintes identidades são satisfeitas para quaisquer $x,y \in A$:

- $[x,y] = 0$.
- $(xx,y,x) = 0$.

Proposição 2.1.55. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. Então toda subálgebra de $A^{(+)}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de Jordan.

Diferentemente das $\mathbb{K}$-álgebras de Lie, a recíproca da proposição anterior não é verdadeira.

Exemplo 2.1.56. Seja $\mathbb{O}$ a $\mathbb{R}$-álgebra dos octônios com a involução usual obtida de sucessivas construções de Cayley-Dickson a partir de $\mathbb{R}$, e seja $M_3(\mathbb{O})$ a $\mathbb{R}$-álgebra das matrizes quadradas de tamanho 3 com entradas em $\mathbb{O}$. A função $X \mapsto X^*$, onde X^* é a matriz obtida de X aplicando a involução em cada entrada e transpondo, ou seja, a transposta-conjugada de X, é uma involução em $M_3(\mathbb{O})$. Seja A o conjunto das matrizes $X \in M_3(\mathbb{O})$ tais que $X^* = X$. Então A é uma subálgebra de $M_3(\mathbb{O})^{(+)}$. A $\mathbb{R}$-álgebra A é uma $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan, mas não existem $\mathbb{R}$-álgebras *associativas* B tais que A seja isomorfa a uma subálgebra de $B^{(+)}$.

No entanto, temos uma pequena porção da recíproca, através do chamado Teorema de Shirshov, cuja demonstração pode ser vista no Capítulo 3 de [ZSSS82].

Teorema 2.1.57. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Jordan *gerada por dois elementos*. Então existe uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa B tal que A seja isomorfa a uma subálgebra de $B^{(+)}$.

Apresentaremos os conjuntos dos elementos que associam ou comutam com outros elementos em uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Definição 2.1.58. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra.

- Definimos o **centro associativo à esquerda** como o conjunto $N_\lambda(A)$ dos $p \in A$ tais que:

$$(p, x, y) = 0$$

  para quaisquer $x, y \in A$.

- Definimos o **centro associativo ao meio** como o conjunto $N_\mu(A)$ dos $p \in A$ tais que:

$$(x, p, y) = 0$$

  para quaisquer $x, y \in A$.

- Definimos o **centro associativo à direita** como o conjunto $N_\rho(A)$ dos $p \in A$ tais que:

$$(x, y, p) = 0$$

  para quaisquer $x, y \in A$.

- Definimos o **centro associativo** como o conjunto:

$$N(A) = N_\lambda(A) \cap N_\mu(A) \cap N_\rho(A).$$

- Definimos o **centro comutativo** de A como o conjunto $K(A)$ dos elementos $p \in A$ tal que tenhamos:

$$[p, x] = 0$$

  para todo $x \in A$.

- Definimos o **centro** de A como o conjunto:

$$Z(A) = N(A) \cap K(A).$$

Como exemplo, podemos aplicar essa definição nas $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$.

Exemplo 2.1.59. Mostraremos que $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ e $N(\mathbb{O}) = \mathbb{R}$.

a) Seja $a \in Z(\mathbb{H})$ representado por:

$$a = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Temos:

$$0 = [a, i] = 2\alpha_3 j - 2\alpha_2 k,$$

assim $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ou seja:

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i.$$

Agora temos:

$$0 = [a, j] = 2\alpha_1 k,$$

de modo que $\alpha_1 = 0$. Portanto $a = \alpha_0 1 \in \mathbb{R}$.

b) Seja $a \in N(\mathbb{O})$ representado por:

$$a = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \alpha_4 l + \alpha_5 u + \alpha_6 v + \alpha_7 w,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Então temos:

$$0 = (a, i, j) = 2\alpha_7 l + 2\alpha_6 u - 2\alpha_5 v - 2\alpha_4 w,$$

assim $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0$, ou seja:

$$a = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k.$$

Agora temos:

$$0 = (l, a, i) = -2\alpha_3 v + 2\alpha_2 w,$$

assim temos $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ou seja:

$$a = \alpha_0 1 + \alpha_1 i.$$

Agora temos:

$$0 = (l, a, j) = -2\alpha_1 w,$$

assim $\alpha_1 = 0$. Portanto $a = \alpha_0 1 \in \mathbb{R}$.

2.2 Álgebra das Multiplicações

Nesta seção definiremos os conceitos de multiplicações à direita e à esquerda, juntamente com vários conceitos relacionados. As definições e resultados são baseados em [Sch66].

2.2.1 Operadores de Multiplicação

Seja X um $\mathbb{K}$-espaço. Denotamos por $\text{End}_{\mathbb{K}}(X)$ o conjunto das funções lineares de X em X. Então $\text{End}_{\mathbb{K}}(X)$ é um $\mathbb{K}$-espaço e também, se definirmos a multiplicação como composição de funções, o espaço $\text{End}_{\mathbb{K}}(X)$ será de fato uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade.

Definição 2.2.1. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra.

- Para $a \in A$, definimos a **multiplicação à direita por** a como a função $R_a : A \to A$ dada por $R_a(x) = xa$. Também definimos $R_A = \{R_a : a \in A\}$.
- Para $a \in A$, definimos a **multiplicação à esquerda por** a como a função $L_a : A \to A$ dada por $L_a(x) = ax$. Também definimos $L_A = \{L_a : a \in A\}$.
- Se B é um subconjunto de A, definimos $M^A(B)$ como a subálgebra de $\text{End}_{\mathbb{K}}(A)$ gerada por $\{R_b : b \in B\} \cup \{L_b : b \in B\} \cup \{I_A\}$. Também definimos $M(A) = M^A(A)$.

2.2.2 Álgebras com Divisão

Com as notações apresentadas anteriormente, podemos definir álgebras com divisão e seus afins.

Definição 2.2.2. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra não nula.

- A é uma **álgebra com divisão à direita** se, para todo elemento $a \neq 0$ de A, o operador R_a é bijetor.
- A é uma **álgebra com divisão à esquerda** se, para todo elemento $a \neq 0$ de A, o operador L_a é bijetor.

- A é uma **álgebra com divisão** se, para todo elemento $a \neq 0$ de A, os operadores L_a e R_a são bijetores.
- A é uma **álgebra com quase-divisão** se, para todo elemento $a \neq 0$ de A, o operador L_a é bijetor ou o operador R_a é bijetor.

Apresentaremos um exemplo de uma álgebra com divisão à esquerda que não é uma álgebra com divisão.

Exemplo 2.2.3. Seja $\mathbb{K}(x)$ a $\mathbb{K}$-álgebra das frações racionais em uma indeterminada x sobre $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}(x)$ tem dimensão infinita, então existe uma função linear injetora não sobrejetora $F : \mathbb{K}(x) \to \mathbb{K}(x)$. Define um novo produto $*$ em $\mathbb{K}(x)$ assim:

$$a * b = F(a)b.$$

Com esse novo produto, $\mathbb{K}(x)$ se torna uma $\mathbb{K}$-álgebra com divisão à esquerda que não é uma $\mathbb{K}$-álgebra com divisão.

Agora apresentaremos uma álgebra com quase-divisão que não é uma álgebra com divisão à direita e não é uma álgebra com divisão à esquerda.

Exemplo 2.2.4. Consideremos a seguinte $\mathbb{K}$-álgebra dada pelo espaço $A = \mathbb{K}^2$, com base:

$$e_1 = (1, 0), \qquad e_2 = (0, 1).$$

Definamos a multiplicação assim:

$$e_1^2 = e_2, \qquad e_1 e_2 = e_1, \qquad e_2 e_1 = 0, \qquad e_2^2 = e_2.$$

a) Pela própria identidade:

$$e_2 e_1 = 0,$$

podemos ver que A não é uma álgebra com divisão à direita e não é uma álgebra com divisão à esquerda.

b) Mostraremos que A é uma álgebra com quase-divisão. Para isso, como A tem dimensão finita, basta mostrarmos que para todo $a \neq 0$ então R_a é injetor ou L_a é injetor. Para isso, basta mostrar que, para quaisquer:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \qquad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$, então temos as seguintes implicações:

$$(ab = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_1 \neq 0) \quad \Rightarrow \quad b = 0,$$

$$\big(ab = 0 \quad \text{e} \quad \beta_2 \neq 0\big) \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

Primeiro suponhamos que $ab = 0$. Então:

$$0 = ab = \alpha_1 \beta_2 e_1 + (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) e_2,$$

assim:

$$\alpha_1 \beta_2 = 0, \qquad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0.$$

1) Se $\alpha_1 \neq 0$, então $\beta_2 = 0$, de modo que:

$$0 = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = \alpha_1 \beta_1,$$

assim $\beta_1 = 0$, logo:

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = 0.$$

2) Se $\beta_2 \neq 0$, então $\alpha_1 = 0$, de modo que:

$$0 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \alpha_2\beta_2,$$

assim $\alpha_2 = 0$, logo:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0.$$

Isso conclui a demonstração.

Para álgebras com unidade, podemos definir o que chamaremos de álgebra com divisão clássica.

Definição 2.2.5. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade.

- Dizemos que um elemento $a \in A$ é **invertível** em A se existe $b \in A$ tal que $ab = ba = \mathbf{1}$. Tal elemento b é dito um **inverso** de a.
- Denotamos o conjunto dos elementos invertíveis em A por $\mathrm{Inv}(A)$.
- Uma **álgebra com divisão clássica** é uma álgebra com unidade A tal que todo elemento não nulo é invertível em A.

Na Subseção 3.3.2, mostraremos que, em toda álgebra alternativa, os conceitos de álgebras com divisão e afins apresentadas na Definição 2.2.2 e o conceito de álgebra com divisão clássica apresentada na Definição 2.2.5 são equivalentes.

2.2.3 Divisores de Zero

Juntamente com os conceitos de álgebras com divisão e álgebras com divisão clássica, podemos definir os vários tipos de divisores em uma álgebra.

Definição 2.2.6. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja $a \in A\backslash\{0\}$.

- a é um **divisor de zero à direita** se existe um $b \in A\backslash\{0\}$ tal que $ba = 0$.
- a é um **divisor de zero à esquerda** se existe um $b \in A\backslash\{0\}$ tal que $ab = 0$.
- a é um **divisor de zero** se existe um $b \in A\backslash\{0\}$ tal que $ab = 0$ ou $ba = 0$.
- a é um **divisor junto de zero** se existe um $b \in A\backslash\{0\}$ tal que $ab = ba = 0$.

Apresentaremos um exemplo de uma álgebra que possui algum elemento que é simultaneamente divisor de zero à direita e divisor de zero à esquerda, mas não possui divisor junto de zero.

Exemplo 2.2.7. Consideremos a seguinte $\mathbb{K}$-álgebra dada pelo espaço $A = \mathbb{K}^2$, com base:

$$e_1 = (1, 0), \qquad e_2 = (0, 1).$$

Definamos a multiplicação assim:

$$e_1^2 = e_1, \qquad e_1e_2 = 0, \qquad e_2e_1 = e_1, \qquad e_2^2 = e_2.$$

a) É fácil verificar que:

$$e_1e_2 = (e_1 - e_2)e_1 = 0,$$

de modo que e_1 é simultaneamente um divisor de zero à direita e um divisor de zero à esquerda.

b) Mostraremos que A não tem divisores juntos de zero. De fato, sejam:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \qquad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$. Suponhamos que $ab = ba = 0$. Então:

$$0 = ab = (\alpha_1 + \alpha_2)\beta_1 e_1 + \alpha_2\beta_2 e_2,$$

$$0 = ba = \alpha_1(\beta_1 + \beta_2)e_1 + \alpha_2\beta_2 e_2,$$

assim:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\beta_1 = 0, \qquad \alpha_1(\beta_1 + \beta_2) = 0, \qquad \alpha_2\beta_2 = 0.$$

Portanto temos $\alpha_2 = 0$ ou $\beta_2 = 0$. Podemos supor sem perder generalidade que $\alpha_2 = 0$, pois o caso $\beta_2 = 0$ é análogo. Então:

$$0 = (\alpha_1 + \alpha_2)\beta_1 = \alpha_1\beta_1.$$

Portanto $\alpha_1 = 0$ ou $\beta_1 = 0$. Temos dois casos.

1) Suponhamos que $\alpha_1 = 0$. Então:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0.$$

2) Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$. Então $\beta_1 = 0$, de modo que:

$$0 = \alpha_1(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1\beta_2,$$

mas $\alpha_1 \neq 0$, aí $\beta_2 = 0$, logo:

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = 0.$$

Portanto concluímos que $a = 0$ ou $b = 0$.

2.2.4 Potências em Álgebras

Apesar de uma álgebra não necessariamente ser associativa, ainda podemos definir de certo modo uma noção de potências.

Definição 2.2.8. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra.

- Para todo $a \in A$, definimos por recursão $a^1 = {}^1a = a$, $a^n = a^{n-1} \cdot a$ e ${}^na = a \cdot {}^{n-1}a$ para $n \geqslant 2$ e chamaremos os a^n (resp. ${}^na$), $n \geqslant 1$, de **potências principais à direita de** a (resp. **à esquerda**).
- Dizemos que A é uma **álgebra com potências associativas** (resp. **comutativas**) se para todo $a \in A$ a subálgebra $A(a)$ é associativa (resp. comutativa).

Em outras palavras, se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra e $a \in A$ é um elemento, as potências principais podem ser definidas assim:

$$a^n = R_a^{n-1}(a), \qquad {}^na = L_a^{n-1}(a).$$

Caso A seja uma $\mathbb{K}$-álgebra *com unidade*, então temos:

$$a^n = R_a^n(\mathbf{1}), \qquad {}^na = L_a^n(\mathbf{1}).$$

Em termos das potências principais, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.9. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- A é uma álgebra com potências associativas.
- Para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$ temos $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- Para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$ temos ${}^ma \cdot {}^na = {}^{m+n}a$.

Além disso, as seguintes propriedades são equivalentes:

- A é uma álgebra com potências comutativas.
- Para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$ temos $a^m \cdot a^n = a^n \cdot a^m$.
- Para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$ temos ${}^m a \cdot {}^n a = {}^n a \cdot {}^m a$.

Mostraremos um exemplo interessante de álgebra com potências associativas.

Proposição 2.2.10. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley. Então A tem potências associativas.

Demonstração. Basta mostrar que para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$ temos $a^m a^n = a^{m+n}$. Faremos isso por indução em $m+n$. Se $m+n \leqslant 2$, é trivial. Agora suponhamos que $m+n > 2$. Então $m > 1$ ou $n > 1$. Podemos supor sem perder generalidade que $m > 1$, pois o caso $n > 1$ é análogo. Para $a \in A$ temos:

$$a^m a^n = R_a^{m-2}(aa)a^n = R_a^{m-2}(a\tau_a)a^n - R_a^{m-2}(a\bar{a})a^n = \tau_a a^{m-1}a^n - \nu_a a^{m-2}a^n,$$

$$a^{m+n} = R_a^{m+n}(aa) = R_a^{m+n-2}(a\tau_a) - R_a^{m+n-2}(a\bar{a}) = \tau_a a^{m+n-1} - \nu_a a^{m+n-2},$$

assim basta usar a hipótese de indução. □

Em particular temos o seguinte.

Exemplo 2.2.11. Todas as possíveis construções sucessivas de Cayley-Dickson feitas a partir de uma álgebra de Cayley são álgebras com potências associativas.

2.2.5 Álgebras Solúveis

Agora discutiremos o conceito de álgebra solúvel.

Definição 2.2.12. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. A **série derivada** é definida recursivamente por $A^{(0)} = A$ e $A^{(n+1)} = (A^{(n)})^2$. Dizemos que A é **solúvel** se $A^{(n)} = \{0\}$ para algum n.

Proposição 2.2.13. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja I um ideal de A. Se I e A/I são solúveis, então A é solúvel.

Demonstração. A função quociente $\pi : A \to A/I$ dada por $a \mapsto a + I$ é um homomorfismo, assim é fácil ver que $\pi(A^{(n)}) = \pi(A)^{(n)}$ para todo n. Assim, se A/I é solúvel, então existe um r tal que $(A/I)^{(r)} = \{0\}$, aí $\pi(A^{(r)}) = \{0\}$, de modo que $A^{(r)} \subseteq I$. Porém se I é solúvel, então $I^{(s)} = 0$ para algum s. Desse modo $A^{(r+s)} = (A^{(r)})^{(s)} \subseteq I^{(s)} = \{0\}$. Logo A é solúvel. □

Proposição 2.2.14. Se I e J são ideais solúveis de uma $\mathbb{K}$-álgebra, então $I + J$ é um ideal solúvel de A. Se A for Noetheriana[1], então A tem um único ideal solúvel maximal N. Além disso, o único ideal solúvel de A/N é $\{0\}$.

Demonstração. O conjunto $I + J$ é um ideal pois I e J são ideais. Além disso, temos $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$. Mas $I/(I \cap J)$ é uma imagem homomórfica de uma álgebra solúvel, assim também é solúvel. Portanto $I + J$ é solúvel.

Agora, se A é Noetheriana, seja N um ideal solúvel maximal, então N é único já que para todo ideal solúvel I então $N + I$ é solúvel e $N \subseteq N + I$, aí $N = N + I$, aí $I \subseteq N$. Seja $\overline{I}$ um ideal solúvel de $\overline{A} = A/N$. Então a imagem inversa I de $\overline{I}$ sob o homomorfismo natural de A em $\overline{A}$ é um ideal de A contendo N tal que $I/N = \overline{I}$. Assim I é solúvel, aí $I \subseteq N$, aí $I = N$, de modo que $\overline{I} = \{0\}$. □

[1] Isso quer dizer que todo conjunto não vazio de ideais tem elementos maximais em relação à inclusão.

2.2.6 Álgebras Nilpotentes

Agora discutiremos o conceito de álgebra nilpotente.

Definição 2.2.15. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é dito **nilpotente** se existe um inteiro t tal que $A^t = \{0\}$. Isso equivale a dizer que existe t tal que qualquer produto $z_1 z_2 \cdots z_t$ com qualquer associação de parênteses vale zero.

Teorema 2.2.16. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja I um ideal de A. Então I é nilpotente se e só se $M^A(I)$ é nilpotente.

Demonstração. Suponha que qualquer produto de t elementos de I com qualquer associação de produtos seja zero. Então o mesmo é verdadeiro para qualquer produto de mais de t elementos de I. Seja $T = T_t \cdots T_1$ qualquer produto de t elementos de $M^A(I)$. Então T é soma de termos cada qual é um produto de pelo menos t operadores lineares $S_i \in \{R_{b_i}, L_{b_i}\}$, onde $b_i \in I$. Como I é um ideal de A, então $S_1(x) \in I$ para todo $x \in A$. Assim $T(x)$ é uma soma de termos, cada qual é um produto de pelo menos t elementos de B. Assim $T(x) = 0$ para todo $x \in A$, aí $T = 0$, de modo que $M^A(I)$ é nilpotente.

Para a recíproca, usaremos apenas o fato de que I é uma subálgebra de A. Mostraremos por indução em n que qualquer produto de pelo menos 2^n elementos de I com qualquer associação de parênteses é da forma $S_n \cdots S_1(b)$ onde $b \in I$ e $S_i \in M^A(I)$.

Para $n = 1$ tomamos qualquer produto de pelo menos 2 elementos de I. Existe uma multiplicação final que é feita. Como I é uma subálgebra, cada um dos dois fatores está em I, de modo que temos $bb_1 = R_{b_1}(b) = S_1(b)$.

Similarmente, para $n \geqslant 2$, em qualquer produto de pelo menos 2^n elementos de I com qualquer associação de parênteses, existe uma multiplicação final que é feita. Pelo menos um dos dois fatores é um produto de pelo menos 2^{n-1} elementos de I, enquanto o outro fator está em I. Assim, pela hipótese de indução temos:

$$b'(S_{n-1} \cdots S_1(b)) = L_{b'} S_{n-1} \cdots S_1(b) = S_n S_{n-1} \cdots S_1(b),$$

ou:

$$(S_{n-1} \cdots S_1(b))b' = R_{b'} S_{n-1} \cdots S_1(b) = S_n S_{n-1} \cdots S_1(b).$$

Assim, se qualquer produto $S_t \cdots S_1$ de t elementos em $M^A(I)$ é 0, então qualquer produto de 2^t elementos de I com qualquer associação de parênteses é 0. Ou seja, I é nilpotente. □

2.2.7 Derivações

Apresentaremos a noção de derivação formal em álgebra, que será útil para essa subseção e para o restante do presente trabalho.

Definição 2.2.17. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Uma **derivação** em A é um operador linear D em A tal que:

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Note que um operador linear D é uma derivação se e só se:

$$[D, L_a] = L_{D(a)}$$

para todo $a \in A$, o que equivale a termos:

$$[D, R_b] = R_{D(b)}$$

para todo $b \in A$.

Exemplo 2.2.18. O principal exemplo de derivação é motivado pelo cálculo e é definido assim. Consideremos $A = \mathbb{K}[x]$ a álgebra dos polinômios, lembrando que ela possui base constituindo dos elementos $1, x, x^2, x^3, \ldots$. Seja $D : A \to A$ o operador linear tal que:

$$D(1) = 0, \qquad D(x^n) = nx^{n-1}$$

para $n \geqslant 1$. Então D é uma derivação em $\mathbb{K}[x]$.

2.3 Identidades de Álgebras

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e alguns resultados preliminares sobre álgebras não-associativas livres e identidades de álgebras. O principal propósito é formalizar o conceito de identidade satisfeita por álgebras através da Definição 2.3.4 e formalizar um argumento chamado *linearização de identidades*, através do Teorema 2.3.20, que é utilizado várias vezes durante o presente trabalho. Para uma discussão mais detalhada, o leitor pode consultar o Capítulo 1 de [ZSSS82].

2.3.1 Álgebras Livres

Definição 2.3.1. Seja X um conjunto. Definimos o **magma livre** sobre X como um conjunto $M\langle X\rangle$ de sequências, de modo recursivo, como segue:

- Para todo $x \in X$ então $x \in M\langle X\rangle$.
- Para quaisquer $x, y \in X$ e $u, v \in M\langle X\rangle \backslash X$, então $xy, x(v), (u)y, (u)(v) \in M\langle X\rangle$.

Nenhuma outra sequência pertence a $M\langle X\rangle$. Chamamos os elementos de $M\langle X\rangle$ de **palavras não-associativas** sobre X. O número de elementos de X que aparecem num elemento $u \in M\langle X\rangle$ é dito o **grau** de u e denotado por $\deg(u)$.

Podemos definir no conjunto $M\langle X\rangle$ uma operação binária, denotado por $(u, v) \mapsto u \cdot v$, do seguinte modo. Para quaisquer $x, y \in X$ e $u, v \in M\langle X\rangle \backslash X$ temos:

- $x \cdot y = xy$.
- $x \cdot v = x(v)$.
- $u \cdot y = (u)y$.
- $u \cdot v = (u)(v)$.

Definição 2.3.2. A **$\mathbb{K}$-álgebra não-associativa livre** sobre o conjunto de geradores X é definida como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}\langle X\rangle$ com base $M\langle X\rangle$ e multiplicação induzida pela operação binária no magma livre $M\langle X\rangle$.

A álgebra não-associativa livre possui a seguinte propriedade universal.

Teorema 2.3.3. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e $\theta : X \to A$ uma função. Existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\hat{\theta} : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A$ tal que $\hat{\theta}(x) = \theta(x)$ para todo $x \in X$.

Os elementos da $\mathbb{K}$-álgebra $\mathbb{K}\langle X\rangle$ são chamados **polinômios não-associativos** sobre X. Note que, se $X = \{x\}$, então $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $\mathbb{K}[x]$ são álgebras diferentes, sendo que $\mathbb{K}\langle X\rangle$ não é associativa nem comutativa, enquanto $\mathbb{K}[x]$ é associativa e comutativa.

Se f é um polinômio não-associativo não nulo, então podemos expressar f de maneira única como combinação linear de palavras não-associativas:

$$f = \sum_{u \in M\langle X\rangle} \alpha_u u,$$

onde $\alpha_u \in \mathbb{K}$. Definimos o **grau do polinômio** f, denotado por $\deg(f)$, como o máximo dos números $\deg(u)$ tais que $\alpha_u \neq 0$, ou seja, o máximo dos graus das palavras não-associativas de coeficiente não nulo.

2.3.2 Identidades

Seja X um conjunto qualquer e seja f um elemento de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Então apenas um número finito de símbolos de X aparecem em f, por exemplo $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nesse caso escreveremos:

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Seja $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, digamos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Então existe um único homomorfismo $\theta : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A$ tal que $\theta(x_i) = a_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ e $\theta(x) = 0$ para $x \in X \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$. Denotaremos $\theta(f)$ por $f(a_1, \ldots, a_n)$.

Definição 2.3.4. Um polinômio não-associativo $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é chamado uma **identidade** da $\mathbb{K}$-álgebra A se $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Também dizemos que A satisfaz a identidade f ou a identidade f é válida em A.

Exemplo 2.3.5. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Então o seguinte polinômio não-associativo:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$$

é uma identidade de toda $\mathbb{K}$-álgebra associativa.

Exemplo 2.3.6. Seja $X = \{x_1, x_2\}$. Então o seguinte polinômio não-associativo:

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade de toda $\mathbb{K}$-álgebra comutativa.

O conjunto das identidades em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que são satisfeitas por uma $\mathbb{K}$-álgebra A é denotado por $T(A)$ e é chamado de **ideal das identidades de** A. De fato, $T(A)$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que para todo $f \in T(A)$ e todo homomorfismo $\alpha : \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X\rangle$ temos $\alpha(f) \in T(A)$. Aliás, pela definição de $T(A)$, podemos mostrar o seguinte:

$$T(A) = \bigcap_{\theta:\mathbb{K}\langle X\rangle \to A} \operatorname{Ker}(\theta).$$

Exemplo 2.3.7. Seja $X = \{x_1, x_2\}$ e consideremos os polinômios não-associativos:

$$f(x_1, x_2) = (x_1x_1)x_2 - x_1(x_1x_2), \qquad g(x_1, x_2) = (x_1x_2)x_2 - x_1(x_2x_2).$$

Então $f \in T(A)$ e $g \in T(A)$ para toda $\mathbb{K}$-álgebra alternativa A.

O conjunto das identidades em $\mathbb{K}[X]$ que são satisfeitas por todas as $\mathbb{K}$-álgebras de alguma classe $\mathcal{M}$ de $\mathbb{K}$-álgebras é denotado por $T(\mathcal{M})$ e é chamado **ideal das identidades de** $\mathcal{M}$. De fato, $T(\mathcal{M})$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que para todo $f \in T(\mathcal{M})$ e todo homomorfismo $\alpha : \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X\rangle$ temos $\alpha(f) \in T(\mathcal{M})$. Aliás, pela definição de $T(\mathcal{M})$ temos:

$$T(\mathcal{M}) = \bigcap_{A \in \mathcal{M}} T(A).$$

2.3.3 Variedades

Apresentaremos o conceito de variedade. Intuitivamente, uma variedade é uma classe de $\mathbb{K}$-álgebras que satisfazem um dado conjunto de identidades.

Definição 2.3.8. Uma classe $\mathcal{M}$ de $\mathbb{K}$-álgebras é dita uma **variedade** se existe um subconjunto $I \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que $\mathcal{M}$ seja exatamente a classe das $\mathbb{K}$-álgebras que satisfazem todas as identidades em I. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{M}$ é a **variedade determinada por** I e também que I **define a variedade** $\mathcal{M}$.

Exemplo 2.3.9. Consideremos $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e seja $I \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$ o conjunto que consiste dos seguintes elementos:

$$f(x_1) = x_1x_1, \qquad g(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2.$$

Então a classe $\mathcal{M}$ das álgebras de Lie é a variedade determinada por I.

Seja $I \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$ e seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Denotaremos por $I(A)$ o ideal da $\mathbb{K}$-álgebra A gerada por todos os elementos da forma $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ onde $f \in I$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Para $I, J \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$, se I e J determinam uma mesma variedade, então é fácil ver que, se Y é um outro conjunto, temos $I(\mathbb{K}\langle Y\rangle) = J(\mathbb{K}\langle Y\rangle)$. Assim podemos definir o seguinte.

Definição 2.3.10. Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de $\mathbb{K}$-álgebras definida, digamos, por $I \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$. Seja Y um outro conjunto. Definimos $\mathbb{K}_{\mathcal{M}}\langle Y\rangle = \mathbb{K}\langle Y\rangle / I(\mathbb{K}\langle Y\rangle)$ e chamamos de **$\mathbb{K}$-álgebra livre na variedade** $\mathcal{M}$ sobre o conjunto de geradores Y.

As $\mathbb{K}$-álgebras livres em variedades possuem a seguinte propriedade.

Teorema 2.3.11. Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de $\mathbb{K}$-álgebras. Então:

a) A $\mathbb{K}$-álgebra $\mathbb{K}_{\mathcal{M}}\langle Y\rangle$ está na variedade $\mathcal{M}$.

b) Para toda $\mathbb{K}$-álgebra A na variedade $\mathcal{M}$ e toda função $\theta : Y \to A$ então existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\hat{\theta} : \mathbb{K}_{\mathcal{M}}\langle Y\rangle \to A$ tal que $\hat{\theta}(y) = \theta(y)$ para todo $y \in Y$.

Com isso podemos obter a álgebra dos polinômios $\mathbb{K}[x]$ em termos do conceito de variedade.

Exemplo 2.3.12. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e seja $I \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$ o conjunto que consiste do seguinte elemento:

$$(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3).$$

Seja $\mathcal{M}$ a variedade definida por I. Seja $Y = \{x\}$. Então $\mathbb{K}[x]$ pode ser vista como a álgebra $\mathbb{K}_{\mathcal{M}}\langle Y\rangle^{\#}$, conforme as Proposições 2.1.28 e 2.1.46.

2.3.4 Linearização de Identidades

Seja X um conjunto, seja $u \in M\langle X\rangle$ uma palavra não-associativa e seja $x \in X$. O **grau de** u **em** x é o número de ocorrências de x em u e denotamos por $\deg_x(u)$.

Seja $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um polinômio não-associativo não nulo. Então f pode ser expressa de maneira única como combinação linear de palavras não-associativas:

$$f = \sum_{u \in M\langle X\rangle} \alpha_u u.$$

Dado $x \in X$, o **grau do polinômio** f, denotado por $\deg_x(f)$, é o máximo dos números $\deg_x(u)$ tais que $\alpha_u \neq 0$, ou seja, o máximo dos graus em x das palavras não-associativas de coeficiente não nulo. Dado $x \in X$, dizemos que f é **homogêneo em** x se os números $\deg_x(u)$ tais que $\alpha_u \neq 0$ forem iguais, ou seja, se todas as palavras não-associativas de coeficiente não nulo tiverem o mesmo grau em x. Dizemos que f é **homogêneo** se f é homogêneo em todas as variáveis $x \in X$.

Para discutirmos a ideia de linearizações parciais, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3.13. Consideremos a palavra não-associativa:

$$u(x) = (xx)(xx)$$

Agora, queremos desenvolver a seguinte expressão, onde $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$u(x+\lambda y) = \big((x+\lambda y)(x+\lambda y)\big)\,\big((x+\lambda y)(x+\lambda y)\big)$$

Temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
u(x+\lambda y) &= \big((x+\lambda y)(x+\lambda y)\big)\,\big((x+\lambda y)(x+\lambda y)\big)\\
&= (xx)(xx)\\
&+ \lambda\left((yx)(xx)+(xy)(xx)+(xx)(yx)+(xx)(xy)\right)\\
&+ \lambda^2\left((yy)(xx)+(yx)(yx)+(yx)(xy)+(xy)(yx)+(xy)(xy)+(xx)(yy)\right)\\
&+ \lambda^3\left((yy)(yx)+(yy)(xy)+(yx)(yy)+(xy)(yy)\right)\\
&+ \lambda^4(yy)(yy)
\end{aligned}$$

Queremos definir as linearizações parciais de $(xx)(xx)$ como os "coeficientes" dos escalares λ^k onde $k = 0,\ldots,4$. Note que cada λ^k está acompanhado da soma de todas as palavras não-associativas obtidas de $(xx)(xx)$ substituindo exatamente k ocorrências de x por y.

Definição 2.3.14. Seja X um conjunto e seja $y \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Definimos a transformação linear $\Delta_x^k(y) : \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X\rangle$, onde $x \in X$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, do seguinte modo. Seja $u \in M\langle X\rangle$ uma palavra não-associativa de grau m em X.

- Para $k \leqslant m$, definimos:
$$\Delta_x^k(y)(u) = u_1 + u_2 + \cdots + u_{\binom{m}{k}},$$
onde:
$$u_1, u_2, \ldots, u_{\binom{m}{k}}$$
são todas as possíveis palavras não-associativas obtidas de u substituindo exatamente k ocorrências de x por y.

- Para $k > m$, definimos:
$$\Delta_x^k(y)(u) = 0.$$

Por fim, definimos $\Delta_x^k(y)$ em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ por lineridade tendo em mente que $M\langle X\rangle$ é uma base de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Exemplo 2.3.15. Seja $u(x_1,x_2) = x_1^2(x_2x_1)$. Então:

$$\Delta_{x_1}^2(y)\left(x_1^2(x_2x_1)\right) = y^2(x_2x_1) + (yx_1)(x_2y) + (x_1y)(x_2y).$$

Exemplo 2.3.16. Seja $u(x_1,x_2) = (x_1^2x_2)x_1$. Então:

- $\Delta_{x_1}^1(y)\left((x_1^2x_2)x_1\right) = (x_1^2x_2)y + \left((x_1y)x_2\right)x_1 + \left((yx_1)x_2\right)x_1.$
- $\Delta_{x_1}^2(y)\left((x_1^2x_2)x_1\right) = \left((x_1y)x_2\right)y + \left((yx_1)x_2\right)y + (y^2x_2)x_1.$
- $\Delta_{x_1}^3(y)\left((x_1^2x_2)x_1\right) = (y^2x_2)y.$

- $\Delta^4_{x_1}(y)\left((x_1^2x_2)x_1\right) = 0.$

Por simples argumentos combinatórios, temos a seguinte proposição, útil para trabalharmos com demonstrações por indução no grau de palavras não-associativas.

Proposição 2.3.17. Seja X um conjunto e seja $y \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. A transformação linear $\Delta^k_x(y) : \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X\rangle$, onde $x \in X$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, satisfaz as seguintes propriedades:

- $\Delta^0_x(y) = I_{\mathbb{K}\langle X\rangle}$ é a função identidade.
- $\Delta^k_x(y)(x') = 0$ se $k > 1$ ou $x' \neq x$, para qualquer $x' \in X$.
- $\Delta^1_x(y)(x) = y$.
- $\Delta^k_x(y)(u \cdot v) = \sum\limits_{r+s=k} \Delta^r_x(y)(u) \cdot \Delta^s_x(y)(v)$ para quaisquer $u, v \in M\langle X\rangle$.

Tendo em mente o Exemplo 2.3.13, a seguinte proposição geral pode ser demonstrada seguindo um raciocínio semelhante à demonstração do *Binômio de Newton*.

Lema 2.3.18. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, x)$ um polinômio não-associativo em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ de grau m em x. Então:

$$f(x_1, \ldots, x_n, x + y) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k_x(y)(f).$$

Demonstração. Pela linearidade de $\Delta^k_x(y)$, basta considerar o caso em que f é uma palavra não-associativa. Provaremos por indução no grau de f. Se $\deg(f) = 1$, então é trivial. Agora suponhamos que $\deg(f) > 1$, de modo que $f = f_1 \cdot f_2$, onde $\deg(f_i) < \deg(f)$, e seja $m_i = \deg_x(f_i)$. Pela hipótese de indução e pela Proposição 2.3.17, temos:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, x + y) &= f_1(x_1, \ldots, x_n, x + y) f_2(x_1, \ldots, x_n, x + y) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m_1} \Delta^k_x(y)(f_1)\right)\left(\sum_{r=0}^{m_2} \Delta^2_x(y)(f_2)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{k+r=j}\left(\Delta^k_x(y)(f_1)\right)\left(\Delta^r_x(y)(f_2)\right)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \Delta^j_x(y)(f), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Definição 2.3.19. Considere um polinômio não-associativo:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle,$$

e seja $x \in X \backslash \{x_1 \ldots, x_n\}$. Chamaremos os polinômios:

$$f^{(k)}_{x_i}(x_1, \ldots, x_n; x) = \Delta^k_{x_i}(x)(f)$$

de **linearizações parciais de f em x_i de grau k**.

Suponhamos que o polinômio f tenha grau s em x_i. Se $k \leqslant s$, então o polinômio:

$$f^{(k)}_{x_i}(x_1, \ldots, x_n; x) \tag{2.5}$$

é homogêneo de grau k em x. Se $k > s$, então (2.5) vale 0.

Por fim notamos que, para todo $y \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, o elemento $\Delta^k_{x_i}(y)(f)$ é obtido de $f^{(k)}_{x_i}(x_1,\ldots,x_n;x)$ substituindo x por y.

Como o corpo $\mathbb{K}$ é infinito, então temos o seguinte resultado. Pode ser útil comparar a demonstração ao Exemplo 2.3.13.

Teorema 2.3.20. Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n,x) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ uma identidade de uma $\mathbb{K}$-álgebra A que seja homogênea em x. Então todas as linearizações parciais em x do polinômio são identidades da álgebra A.

Demonstração. Seja $k = \deg_x(f)$. Sejam $a_1,\ldots,a_n,a,b \in A$. Para pouparmos notação, nós denotaremos $f^{(m)}_x(a_1,\ldots,a_n,a;b)$ por $f^{(m)}_x$. Pelo Lema 2.3.18, temos:

$$0 = f(a_1,\ldots,a_n,a+b) = \sum_{s=0}^{k} f^{(s)}_x = \sum_{s=1}^{k-1} f^{(s)}_x, \tag{2.6}$$

já que:

$$f^{(0)}_x = f(a_1,\ldots,a_i,a) = 0$$

e também:

$$f^{(k)}_x = f(a_1,\ldots,a_n,b) = 0.$$

Tomando $k-1$ elementos não nulos e distintos $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}$ de $\mathbb{K}$, podemos substituir sucessivamente na equação (2.6) o elemento b por $\alpha_1 b,\ldots,\alpha_{k-1}b$ e assim obter:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 f^{(1)}_x & + & \alpha_1^2 f^{(2)}_x & + & \cdots & + & \alpha_1^{k-1} f^{(k-1)}_x & = & 0\\
\alpha_2 f^{(1)}_x & + & \alpha_2^2 f^{(2)}_x & + & \cdots & + & \alpha_2^{k-1} f^{(k-1)}_x & = & 0\\
 & & & & \vdots & & & & \\
\alpha_{k-1} f^{(1)}_x & + & \alpha_{k-1}^2 f^{(2)}_x & + & \cdots & + & \alpha_{k-1}^{k-1} f^{(k-1)}_x & = & 0
\end{array}$$

Considerando as matrizes:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{k-1}\\ \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{k-1}\\ & & \vdots & \\ \alpha_{k-1} & \alpha_{k-1}^2 & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f^{(1)}_x \\ f^{(2)}_x \\ \vdots \\ f^{(k-1)}_x\end{pmatrix},$$

então temos $CF = 0$, onde consideramos o $\mathbb{K}$-espaço A^n como um $M_n(\mathbb{K})$-módulo, onde $M_n(\mathbb{K})$ é a $\mathbb{K}$-álgebra das matrizes quadradas de tamanho n com entradas em $\mathbb{K}$. Sendo D a matriz adjunta de C, então temos:

$$0 = D(CF) = (DC)F = (cI_n)F = cF,$$

onde $c = \det(C)$. Assim obtemos $cf^{(s)}_x = 0$ para todo $s = 1,\ldots,k-1$. Porém, pela determinante de Vandermonde:

$$c = \left(\prod_{s=1}^{k-1}\alpha_s\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k-1}(\alpha_j-\alpha_i)\right),$$

de modo que $c \neq 0$, assim temos $f^{(s)}_x = 0$ para todo $s = 1,\ldots,k-1$. Portanto o polinômio não-associativo $f^{(s)}_x(x_1,\ldots,x_n,x;y)$ é uma identidade de A para todo $s = 1,\ldots,k-1$. $\square$

Capítulo 3

Teorema de Frobenius-Zorn

Neste capítulo pretendemos estudar algumas classes importantes de álgebras e alguns resultados para o presente trabalho e mostrar o Teorema 3.6.1, chamado Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn, que diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra algébrica alternativa à direita sem divisores juntos de zero é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Frobenius em [Fro78] mostrou que toda $\mathbb{R}$-álgebra associativa com divisão e de dimensão finita é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, sendo esse resultado chamado Teorema de Frobenius. Mais tarde, Zorn em [Zor31] mostrou que toda álgebra alternativa com divisão e de dimensão finita é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, sendo esse resultado chamado Teorema de Frobenius-Zorn. Uma prova elementar do Teorema de Frobenius-Zorn pode ser encontrada no artigo [One02].

Na Seção 3.1, mostraremos que toda álgebra flexível tem potências comutativas. Na Seção 3.2, mostraremos que toda álgebra alternativa à direita sem divisores juntos de zero é alternativa. Aí, para demonstrar o Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn, podemos assumir que a álgebra é alternativa. Na Seção 3.3, mostraremos que, em toda álgebra alternativa, todo conjunto de dois de seus elementos gera uma subálgebra associativa.

Depois disso, na Seção 3.4, mostraremos que, em toda álgebra com potências associativas sem divisores juntos de zero, todo idempotente não nulo é uma unidade. Na Seção 3.5, mostraremos que toda álgebra algébrica com potências associativas sem divisores de zero é quadrática. Assim, para demonstrar o Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn, podemos assumir que a álgebra é quadrática.

Por fim, na Seção 3.6, sabendo que a álgebra em questão é alternativa e quadrática, encerraremos a demonstração do Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn adaptando o raciocínio presente no artigo [One02].

Lembremos que $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$, em particular tem característica zero.

3.1 Álgebras Flexíveis

As álgebras flexíveis foram introduzidos por Albert no artigo [Alb48]. Elas são generalizações das álgebras associativas e das álgebras comutativas. Assim a identidade flexível é importante para álgebras que não são associativas nem comutativas, conforme veremos, por exemplo, na álgebra dos sedênios, que nem sequer é alternativa.

Na Subseção 3.1.1, apresentaremos a definição de álgebras flexíveis e mostraremos que a álgebra dos sedênios é flexível. Na Subseção 3.1.2, mostraremos que toda álgebra flexível tem potências comutativas.

3.1.1 Definições e Exemplos

Definição 3.1.1. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é **flexível** se a seguinte identidade:

$$(a, b, a) = 0,$$

chamada **identidade flexível**, é satisfeita para quaisquer $a, b \in A$.

Portanto, em álgebras flexíveis podemos escrever o produto aba sem indicar um arranjo específico de parênteses. Uma propriedade imediata das álgebra flexíveis é a seguinte proposição.

Proposição 3.1.2. Seja A uma álgebra flexível. Temos:

$$(ab)c + (cb)a = a(bc) + c(ba)$$

para quaisquer $a, b, c \in A$.

Demonstração. Basta linearizar a identidade flexível em a. □

Exemplo 3.1.3. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley alternativa. Definamos uma nova $\mathbb{K}$-álgebra $\overset{*}{A}$ assim. O $\mathbb{K}$-espaço vetorial de $\overset{*}{A}$ é o mesmo de A, mas definimos a multiplicação assim:

$$x \diamond y = \bar{x}\bar{y}.$$

Mostraremos que $\overset{*}{A}$ é flexível. De fato, para quaisquer $x, y \in \overset{*}{A}$ temos:

$$(x \diamond y) \diamond x = (\bar{x}\bar{y}) \diamond x = \overline{(\bar{x}\bar{y})}\bar{x} = (yx)\bar{x} = y(x\bar{x}) = \nu_x y,$$

$$x \diamond (y \diamond x) = x \diamond (\bar{y}\bar{x}) = \bar{x}\overline{(\bar{y}\bar{x})} = \bar{x}(xy) = (\bar{x}x)y = \nu_x y,$$

portanto $\overset{*}{A}$ é flexível.

Schafer mostrou no artigo [Sch54] que, diferentemente das identidades comutativa, associativa e alternativa, a construção de Cayley-Dickson para as álgebras de Cayley preserva a identidade flexível. Essa é a Proposição 3.1.6, cuja demonstração será apresentada através de várias proposições prévias.

Proposição 3.1.4. Seja A uma álgebra de Cayley flexível. Então:

$$\tau_{(ab)c} = \tau_{a(bc)}$$

para quaisquer $a, b, c \in A$

Demonstração. Pela Proposição 3.1.2, temos:

$$(ab)c + (cb)a = a(bc) + c(ba),$$

assim:

$$(ab)c + \Big((\tau_c - \bar{c})(\tau_b - \bar{b})\Big)(\tau_a - \bar{a}) = a(bc) + (\tau_c - \bar{c})\Big((\tau_b - \bar{b})(\tau_a - \bar{a})\Big),$$

portanto, desenvolvendo tudo e utilizando o fato de que $\tau_a, \tau_b, \tau_c \in \mathbb{K}$, obtemos:

$$(ab)c - (\bar{c}\bar{b})\bar{a} = a(bc) - \bar{c}(\bar{b}\bar{a}),$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 3.1.5. Seja A uma álgebra de Cayley flexível. Então:

$$(a\bar{b})b = b(\bar{b}a)$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.2, temos:

$$(a\overline{b})b + (b\overline{b})a = a(\overline{b}b) + b(\overline{b}a),$$

assim:

$$(a\overline{b})b + \nu_b a = a\nu_b + b(\overline{b}a),$$

assim $(a\overline{b})b = b(\overline{b}a)$. □

Proposição 3.1.6. Seja A uma álgebra de Cayley flexível e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então a construção de Cayley-Dickson A é flexível.

Demonstração. Pelas identidades $(*)$ e $(**)$ da demonstração da Proposição 2.1.20, temos:

$$\begin{aligned}
&\left((a_1, a_2)(a_3, a_4)\right)(a_1, a_2) \\
= &\left((a_1a_3)a_1 + \alpha(a_4\overline{a}_2)a_1 + \alpha a_2(\overline{a}_4a_1) + \alpha a_2(\overline{a}_2\overline{a}_3), (\overline{a}_3\overline{a}_1)a_2 + \alpha(a_2\overline{a}_4)a_2 + a_1(\overline{a}_1a_4) + a_1(a_3a_2)\right).
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2)\left((a_3, a_4)(a_1, a_2)\right) \\
= &\left(a_1(a_3a_1) + \alpha a_1(a_2\overline{a}_4) + \alpha(\overline{a}_3a_2)\overline{a}_2 + \alpha(a_1a_4)\overline{a}_2, \overline{a}_1(\overline{a}_3a_2) + \overline{a}_1(a_1a_4) + (a_3a_1)a_2 + \alpha(a_2\overline{a}_4)a_2\right).
\end{aligned}$$

Mostraremos que $\mathcal{D}_\alpha(A)$ é flexível.

1) Como A é flexível, temos:

$$(a_1a_3)a_1 = a_1(a_3a_1),$$

2) Temos:

$$a_1(\overline{a}_1a_4) - \overline{a}_1(a_1a_4) = a_1\left((\tau_{a_1} - a_1)a_4\right) - (\tau_{a_1} - a_1)(a_1a_4) = 0.$$

3) Por causa da Proposição 3.1.5, temos:

$$\begin{aligned}
a_2(\overline{a}_2\overline{a}_3) - (\overline{a}_3a_2)\overline{a}_2 &= (\overline{a}_3\overline{a}_2)a_2 - (\overline{a}_3a_2)\overline{a}_2 \\
&= \left(\overline{a}_3(\tau_{a_2} - a_2)\right)a_2 - (\overline{a}_3a_2)(\tau_{a_2} - a_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4) Temos:

$$\begin{aligned}
(\overline{a}_3\overline{a}_1)a_2 + a_1(a_3a_2) &= \left((\tau_{a_3} - a_3)(\tau_{a_1} - a_1)\right)a_2 + a_1(a_3a_2) \\
&= (\tau_{a_1} - a_1)\left((\tau_{a_3} - a_3)a_2\right) + (a_3a_1)a_2 \\
&= \overline{a}_1(\overline{a}_3a_2) + (a_3a_1)a_2.
\end{aligned}$$

5) Por fim, por causa das Proposições 2.1.23 e 3.1.4, temos:

$$\begin{aligned}
(a_4\overline{a}_2)a_1 - a_1(a_2\overline{a}_4) + a_2(\overline{a}_4a_1) - (a_1a_4)\overline{a}_2 &= \tau_{(a_4\overline{a}_2)a_1} - \tau_{a_1}(a_2\overline{a}_4) + a_2(\overline{a}_4\tau_{a_1}) - \tau_{(a_1a_4)\overline{a}_2} \\
&= \tau_{a_1(a_4\overline{a}_2)} - \tau_{a_1(a_4\overline{a}_2)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Com isso, podemos obter um exemplo de uma álgebra que é flexível e não é alternativa.

Exemplo 3.1.7. Consideremos a **álgebra dos sedênios**, definida por $\mathbb{S} = \mathcal{D}(\mathbb{O})$, onde $\mathbb{O}$ está munida da involução usual. Então $\mathbb{S}$ é flexível, mas não é alternativa, pois $\mathbb{O}$ não é associativa.

3.1.2 Comutatividade de Potências em Álgebras Flexíveis

Nesta subseção mostraremos o Teorema 3.1.11, cujo enunciado diz que toda álgebra flexível é uma álgebra com potências comutativas. Ele foi obtido em [Raf50], mas apresentaremos um enunciado e uma demonstração baseados em [EA78], através de alguns lemas. Relembremos a definição de álgebras com potências comutativas.

Definição 3.1.8. Uma $\mathbb{K}$-álgebra é dita uma **$\mathbb{K}$-álgebra com potências comutativas** se para todo $a \in A$ a subálgebra $A(a)$ gerada por a é comutativa.

Agora mostraremos os lemas necessários para o resultado principal desta subseção.

Lema 3.1.9. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é flexível se e só se a igualdade:

$$[a \bullet b, b] = b \bullet [a, b]$$

ocorre para quaisquer $a, b \in A$, onde:

$$a \bullet b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

é o produto de Jordan.

Demonstração. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
[a \bullet b, b] = b \bullet [a, b] \quad &\Leftrightarrow \quad [2(a \bullet b), b] = 2(b \bullet [a, b]) \\
&\Leftrightarrow \quad [ab + ba, b] = b[a, b] + [a, b]b \\
&\Leftrightarrow \quad (ab + ba)b - b(ab + ba) = b(ab - ba) + (ab - ba)b \\
&\Leftrightarrow \quad (ab)b + (ba)b - b(ab) - b(ba) = b(ab) - b(ba) + (ab)b - (ba)b \\
&\Leftrightarrow \quad 2(ba)b = 2b(ab) \\
&\Leftrightarrow \quad (ba)b = b(ab),
\end{aligned}$$

de modo que o lema segue. □

Lema 3.1.10. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Então as seguintes condições são equivalentes:

i) A é flexível.

ii) Para cada $a \in A$, a função $b \mapsto [a, b]$ é uma derivação em $A^{(+)}$.

Demonstração. (i)⇒(ii) Assuma que A é flexível. Podemos linearizar na variável a a identidade flexível:

$$(ab)a = a(ba)$$

para assim obter:

$$(ab)c + (cb)a = a(bc) + c(ba),$$

assim, tomando $c = b$, temos:

$$[a, b^2] = (ab)b - b(ba) = (ab + ba)b - b(ba + ab) = 2[a \bullet b, b].$$

Segue do Lema 3.1.9 que:
$$[a, b^2] = 2b \bullet [a, b],$$
assim a condição (ii) ocorre.

(ii)⇒(i) Assuma que a condição (ii) ocorra. Então, para $a, b \in A$, temos:

$$[a \bullet b, b] = a \bullet [b, b] + [a, b] \bullet b = b \bullet [a, b],$$

assim, pelo Lema 3.1.9, A é flexível. □

Teorema 3.1.11. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra flexível. Então os subconjuntos comutativos maximais de A são subálgebras de A. Como uma consequência, para todo subconjunto comutativo T de A, então $A(T)$ é comutativa. Em particular A é uma álgebra com potências comutativas.

Demonstração. Seja S um subconjunto maximal comutativo de A. Então, como acontece em todo subconjunto maximal comutativo de qualquer álgebra, S é um subespaço de A. Sejam $x, y \in S$. Então, pelo Lema 3.1.10, para todo $z \in S$ temos:

$$[z, xy] = [z, x \bullet y] = x \bullet [z, y] + [z, x] \bullet y = 0,$$

assim $S \cup \{xy\}$ é um subconjunto comutativo de A. Segue da maximalidade de S que $xy \in S$. Assim S é uma subálgebra de A.

Seja T um subconjunto comutativo de A. Então, pelo Lema de Zorn, existe algum subconjunto comutativo maximal S de A contendo T. Como S é uma subálgebra de A, segue que a subálgebra de A gerada por T é comutativa. □

3.2 Álgebras Alternativas à Direita

As álgebras alternativas à direita surgiram de estudos de planos projetivos e formam alguns dos exemplos mais estudados de álgebras com potências associativas, sendo que Albert, nos artigos [Alb49b] e [Alb54], obteve alguns resultados sobre sua estrutura.

Baseamos a apresentação desta seção em [Mih69] e [Jun85]. Na Subseção 3.2.1, apresentaremos a definição de álgebras alternativas à direita juntamente com alguns resultados elementares. Na Subseção 3.2.2 mostraremos que todas as $\mathbb{K}$-álgebras alternativas à direita possuem potências associativas. Por fim, na Subseção 3.2.3 mostraremos um resultado, que chamaremos de Teorema de Mikheev, que implica em particular que toda álgebra alternativa à direita sem divisores juntos de zero é alternativa.

3.2.1 Definições e Resultados Iniciais

Definição 3.2.1. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é **alternativa à direita** (resp. **à esquerda**) se a identidade:

$$(a, b, b) = 0 \qquad \text{(resp. } (a, a, b) = 0)$$

chamada **identidade alternativa à direita** (resp. **à esquerda**), é satisfeita para quaisquer $a, b \in A$.

Linearizando a identidade alternativa à direita (resp. à esquerda), obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.2. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita (resp. à esquerda). Então:

$$(a, b, c) + (a, c, b) = 0 \qquad \text{(resp. } (a, b, c) + (b, a, c) = 0). \tag{3.1}$$

para quaisquer $a, b, c \in A$.

Com as Proposições 3.1.2 e 3.2.2, podemos mostrar o seguinte resultado elementar, vindo do artigo [Alb49b].

Proposição 3.2.3. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Consideremos as seguintes condições:

a) A é flexível.

b) A é alterntiva à direita.

c) A é alternativa à esquerda.

Se assumirmos duas das condições acima, então a condição restante é válida.

Demonstração. Temos o seguinte:

1) ((a) e (b)) $\Rightarrow$ (c). Suponhamos que A seja flexível e alternativa à direita. Então, para $a, b \in A$, pela Proposição 3.2.2 temos:

$$(a, b, a) + (a, a, b) = 0,$$

mas A é flexível, de modo que $(a, b, a) = 0$, assim $(a, a, b) = 0$. Portanto, A é alternativa à esquerda.

2) ((a) e (c)) $\Rightarrow$ (b). Suponhamos que A seja flexível e alternativa à esquerda. Então, para $a, b \in A$, pela Proposição 3.2.2 temos:

$$(a, b, a) + (b, a, a) = 0,$$

mas A é flexível, de modo que $(a, b, a) = 0$, assim $(b, a, a) = 0$. Portanto, A é alternativa à direita.

3) ((b) e (c)) $\Rightarrow$ (a). Suponhamos que A seja alternativa à direita e alternativa à esquerda. Então, para $a, b \in A$, pela Proposição 3.2.2 temos:

$$(a, b, a) + (a, a, b) = 0,$$

mas A é alternativa à esquerda, de modo que $(a, a, b) = 0$, assim $(a, b, a) = 0$. Portanto, A é flexível. □

Apresentaremos um exemplo de álgebra flexível que não é alternativa à direita nem alternativa à esquerda.

Exemplo 3.2.4. Sejam x e y dois símbolos e seja Z o conjunto das sequências finitas $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ onde $\alpha_i \in \{x, y\}$, incluindo a sequência vazia. Seja A um $\mathbb{K}$-espaço com base consistindo de elementos e_z onde $z \in Z$. Definimos uma multiplicação em A assim:

$$e_z e_w = e_{zw},$$

onde $z, w \in Z$ e zw é a concatenação de z e w. Consideremos agora a álgebra B, definida como o $\mathbb{K}$-espaço vetorial de A com a multiplicação é dada por:

$$a * b = ab + ba.$$

Então B é comutativa, portanto é flexível. Entretanto:

$$(e_x * e_x) * e_y = 2e_{xxy} + 2e_{yxx},$$

$$e_x * (e_x * e_y) = e_{xxy} + 2e_{xyx} + e_{yxx},$$

assim B não é alternativa à esquerda. Mas B é comutativa, de modo que B também não é alternativa à direita.

Agora apresentaremos um exemplo de uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita que não é alternativa à esquerda nem flexível.

Exemplo 3.2.5. Consideremos a seguinte $\mathbb{K}$-álgebra dada pelo espaço $A = \mathbb{K}^3$, com base:

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1).$$

Definimos a multiplicação pela seguinte tabela:

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_3	0
e_2	e_2	0	0
e_3	0	0	0

Tabela 3.1: *Tabela de multiplicação para álgebra alternativa à direita que não é alternativa.*

a) É fácil ver que A não é alternativa à esquerda, pois:

$$(e_1e_1)e_2 = e_1e_2 = e_3,$$

$$e_1(e_1e_2) = e_1e_3 = 0.$$

b) A álgebra não é flexível pois:

$$(e_1e_2)e_1 = e_3e_1 = 0,$$

$$e_1(e_2e_1) = e_1e_2 = e_3.$$

c) A álgebra é alternativa à direita, pois, para $a, b \in A$, sendo:

$$a = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3, \qquad b = \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3,$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, então temos:

$$\begin{aligned}
(ab)b &= \big((\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3)(\beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3)\big)\,(\beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3) \\
&= (\alpha_1\beta_1e_1 + \alpha_2\beta_1e_2 + \alpha_1\beta_2e_3)(\beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3) \\
&= \alpha_1\beta_1\beta_1e_1 + \alpha_2\beta_1\beta_1e_2 + \alpha_1\beta_1\beta_2e_3,
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
a(bb) &= (\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3)\,\big((\beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3)(\beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3)\big) \\
&= (\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3)(\beta_1\beta_1e_1 + \beta_2\beta_1e_2 + \beta_1\beta_2e_3) \\
&= \alpha_1\beta_1\beta_1e_1 + \alpha_2\beta_1\beta_1e_2 + \alpha_1\beta_2\beta_1e_3,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

3.2.2 Associatividade de Potências em Álgebras Alternativas à Direita

Nesta subseção, mostraremos o Teorema 3.2.8, cujo enunciado diz que toda álgebra alternativa à direita tem potências associativas. Para isso, nós antes mostraremos que toda álgebra alternativa à direita satisfaz a chamada identidade de Moufang à direita.

Lema 3.2.6. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita (resp. à esquerda). Então A satisfaz a identidade:

$$((xy)z)y = x((yz)y) \qquad \text{(resp. } (x(yx))z = x(y(xz))\text{)},$$

chamada **identidade de Moufang à direita** (resp. **à esquerda**).

Demonstração. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita. Fazendo $x \mapsto y$ em (3.1), temos:

$$0 = (y, y, z) + (y, z, y) = y^2 z - y(yz) + (yz)y - y(zy).$$

Logo temos:

$$-y^2 z + y(yz) + y(zy) = (yz)y.$$

Daí:

$$(zy + yz)y + y(zy + yz) - (zy^2 + y^2 z) = zy^2 + (yz)y + y(zy) + y(yz) - zy^2 - y^2 z = 2(yz)y.$$

Assim, usando novamente (3.1), temos:

$$\begin{aligned}
2x((yz)y) &= x((zy + yz)y + y(zy + yz)) - x(zy^2 + y^2 z) \\
&= (x(zy + yz))y + (xy)(zy + yz) - (xz)y^2 - (xy^2)z \\
&= ((xz)y + (xy)z)y + ((xy)z)y + ((xy)y)z - (xz)y^2 - (xy^2)z \\
&= (xz)y^2 + ((xy)z)y + ((xy)z)y + (xy^2)z - (xz)y^2 - (xy^2)z \\
&= 2((xy)z)y,
\end{aligned}$$

assim concluímos a demonstração. □

Mostraremos uma forma mais útil equivalente à identidade de Moufang à direita.

Proposição 3.2.7. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra qualquer. Então a identidade de Moufang à direita é equivalente a:

$$(x, yz, y) = -(x, y, z)y. \tag{3.2}$$

Nesse caso, também vale a seguinte identidade:

$$(x, yz, w) + (x, wz, y) = -(x, y, z)w - (x, w, z)y. \tag{3.3}$$

Demonstração. De fato:

$$(x, yz, y) + (x, y, z)y = (x(yz))y - x((yz)y) + ((xy)z)y - (x(yz))y = -x((yz)y) + ((xy)z)y.$$

Além disso, linearizando a identidade (3.2), obtemos a identidade (3.3). □

Mostraremos que toda álgebra alternativa à direita é uma álgebra com potências associativas. Depois disso, mostraremos por meio de um exemplo que a recíproca não é verdadeira.

Teorema 3.2.8. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita. Então A é uma álgebra com potências associativas.

Demonstração. Dado $x \in A$, denotaremos por $p = p(x)$ o produto $a_1 a_2 \cdots a_n$ de n fatores $a_i = x$ com alguma distribuição de parênteses e n será chamado grau de p e denotado por $\deg(p)$. Para provar que a subálgebra $A(x)$ gerada por x é associativa, é suficiente mostrar que $(p_1, p_2, p_3) = 0$ para quaisquer produtos $p_i = p_i(x)$, com $i = 1, 2, 3$. Faremos a demostração por indução sobre a soma:

$$\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3).$$

É claro que o resultado é verdadeiro se $\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3) = 3$. Assumiremos que $(p_1, p_2, p_3) = 0$ sempre que $\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3) < n$. Sejam os produtos p_i com $i = 1, 2, 3$

tais que $\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3) = n$. Para cada $i = 1, 2, 3$, como $\deg(p_i) < n$, pela hipótese de indução, podemos usar a associatividade no produto $p_i = p_i(x)$. Se $\deg(p_3) > 1$, então $p_3 = p_3'x$. Da Proposição 2.1.49, juntamente com a hipótese de que $\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3') < n$, temos:

$$\begin{aligned}(p_1, p_2, p_3) &= (p_1, p_2, p_3'x)\\ &= p_1(p_2, p_3', x) + (p_1, p_2, p_3')x - (p_1p_2, p_3', x) + (p_1, p_2p_3', x)\\ &= p_1(p_2, p_3', x) - (p_1p_2, p_3', x) + (p_1, p_2p_3', x).\end{aligned}$$

Logo podemos assumir $p_3 = x$. Se $\deg(p_2) = 1$, então $p_2 = x$, logo:

$$(p_1, p_2, p_3) = (p_1, x, x) = 0.$$

Se $\deg(p_2) > 1$, então $p_2 = xp_2'$, assim de $\deg(p_1) + \deg(p_2') + \deg(p_3) < n$ e (3.2) temos:

$$(p_1, p_2, p_3) = (p_1, xp_2', x) = -(p_1, x, p_2')x = 0,$$

concluindo a demonstração. □

Exibiremos um exemplo de álgebra com potências associativas que não é alternativa à direita.

Exemplo 3.2.9. Pela Proposição 2.2.10, toda álgebra de Cayley é uma álgebra com potências associativas. Em particular, a álgebra $\mathbb{S}$ dos sedênios é uma álgebra com potências associativas. Entretanto, conforme um raciocínio semelhante à demonstração da Proposição 2.1.26, como $\mathbb{O}$ é alternativa e não é associativa, então $\mathbb{S} = \mathcal{D}(\mathbb{O})$ não é alternativa à direita.

3.2.3 Teorema de Mikheev

Nesta subseção mostraremos o Teorema 3.2.12, chamado de Teorema de Mikheev, cujo enunciado diz que toda álgebra alternativa à direita satisfaz a identidade $(a, a, b)^4 = 0$. A demonstração total é longa e requer uma série de lemas prévios.

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita. Da identidade alternativa à direita e da identidade de Moufang à direita obtemos:

$$R_{a^2} = R_a^2, \qquad R_{(ab)a} = R_aR_bR_a, \tag{3.4}$$

para quaisquer $a, b \in A$. A partir de (3.4), para quaisquer $a, b, c \in A$, desenvolvendo:

$$R_{(a+b)^2} = R_{a+b}^2, \qquad R_{((a+c)b)(a+c)} = R_{a+c}R_bR_{a+c},$$

obtemos:

$$R_{ab+ba} = R_aR_b + R_bR_a, \qquad R_{(ab)c+(cb)a} = R_aR_bR_c + R_cR_bR_a. \tag{3.5}$$

Numa álgebra qualquer A, para $a, b \in A$ definimos as funções lineares:

$$a^b = R_{ab} - R_aR_b, \qquad a_b = R_{ab} - R_bR_a.$$

Lema 3.2.10. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita. Então para quaisquer $a, b, c, x \in A$ temos:

$$a^b + b^a = a_b + b_a = 0, \qquad a_b + a^b = R_q \tag{3.6}$$

$$a_b(x) = -(x, a, b), \qquad a^b(x) = x[a, b] + (x, a, b) \tag{3.7}$$

$$a^ba_b = 0, \qquad a^ba_c + a^ca_b = 0 \tag{3.8}$$

$$a_ba^b = -R_{(q,a,b)} \tag{3.9}$$

$$a^bR_aa_b = 0, \qquad a_bR_aa^b = -R_{(qa,a,b)} \tag{3.10}$$

$$R_p = a_{ba} - a_b R_a = a^{ba} - R_a a^b \tag{3.11}$$

onde:

$$p = (a, a, b), \qquad q = [a, b].$$

Demonstração. **i)** Demonstração de (3.6):

$$a^b + b^a = R_{ab} - R_a R_b + R_{ba} - R_b R_a = R_{ab+ba} - (R_a R_b + R_b R_a),$$

logo por (3.5) temos o resultado. Analogamente $a_b + b_a = 0$. Além disso:

$$R_q = R_{[a,b]} = R_{ab-ba} = R_{ab+ba} - R_{2ba} = R_a R_b + R_b R_a - 2R_{ba} = -b^a - b_a = a^b + a_b.$$

ii) Demonstração de (3.7):

$$a_b(x) = R_{ab}(x) - (R_b R_a)(x) = x(ab) - (xa)b = -(x, a, b),$$

e utilizando (3.1) temos:

$$a^b(x) = x(ab) - (xb)a = x[a,b] + x(ba) - (xb)a = x[a,b] - (x, b, a) = x[a,b] + (x, a, b),$$

iii) Demonstração de (3.8):

$$\begin{aligned}
a^b a_b &= (R_{ab} - R_a R_b)(R_{ab} - R_b R_a) \\
&= R_{ab}^2 - R_{ab} R_b R_a - R_a R_b R_{ab} + R_a R_b^2 R_a \\
&= R_{(ab)^2} - R_{((ab)b)a} - R_{(ab)(ab)} + R_{(ab^2)a} \\
&= R_{(ab)^2 - (ab^2)a - (ab)^2 + (ab^2)a} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde utilizamos (3.4) e (3.5). Além disso:

$$0 = a^{b+c} a_{b+c} = (a^b + a^c)(a_b + a_c) = a^b a_c + a^c a_b.$$

iv) Demonstração de (3.9):

$$\begin{aligned}
a_b a^b &= (R_{ab} - R_b R_a)(R_{ab} - R_a R_b) \\
&= R_{(ab)^2} - R_{ab} R_a R_b - R_b R_a R_{ab} + R_b R_{a^2} R_b \\
&= R_{(ab)^2} - R_{((ab)a)b} - R_{(ba)(ab)} + R_{(ba^2)b} \\
&= R_{(ab)^2 - ((ab)a)b - (ba)(ab) + (ba^2)b} \\
&= R_{(ab-ba)(ab) - ((ab)a - ba^2)b} \\
&= R_{q(ab) - (qa)b} \\
&= -R_{(q,a,b)}.
\end{aligned}$$

v) Demonstração de (3.10):

$$\begin{aligned}
a^b R_a a_b &= (R_{ab} - R_a R_b) R_a (R_{ab} - R_b R_a) \\
&= R_{ab} R_a R_{ab} - R_{ab} R_a R_b R_a - R_a R_b R_a R_{ab} + R_a R_b R_a R_b R_a \\
&= R_{((ab)a)(ab)} - R_{ab} R_{(ab)a} - R_{(ab)a} R_{ab} + R_a R_{(ba)b} R_a \\
&= R_{((ab)a)(ab)} - R_{(ab)((ab)a)+((ab)a)(ab)} + R_{(a((ba)b))a} \\
&= R_{(a((ba)b))a-(ab)((ab)a)}.
\end{aligned}$$

Mas:

$$(a((ba)b))a - (ab)((ab)a) = (R_a R_{(ba)b})(a) - (R_{(ab)a} R_b)(a) = (R_a R_b R_a R_b - R_a R_b R_a R_b)(a) = 0,$$

logo $a^b R_a a_b = 0$. Utilizamos (3.4) e (3.5).

$$\begin{aligned}
a_b R_a a^b &= (R_{ab} - R_b R_a) R_a (R_{ab} - R_a R_b) \\
&= R_{ab} R_a R_{ab} - R_{ab} R_{a^2} R_b - R_b R_{a^2} R_{ab} + R_b R_{a^3} R_b \\
&= R_{((ab)a)(ab)} - R_{((ab)a^2)b} - R_{(ba^2)(ab)} + R_{(ba^3)b} \\
&= R_{((ab-ba)a)(ab)-((ab-ba)a^2)b} \\
&= R_{(qa)(ab)-(qa^2)b} \\
&= -R_{(qa,a,b)}.
\end{aligned}$$

vi) Demonstração de (3.11):

$$\begin{aligned}
R_p - a_{ba} &= R_{(a,a,b)} - R_{a(ba)} + R_{ba} R_a \\
&= -R_{(a,b,a)} - R_{a(ba)} + R_{ba} R_a \\
&= -R_{(ab)a} + R_{a(ba)} - R_{a(ba)} + R_{ba} R_a \\
&= -R_a R_b R_a + R_{ba} R_a \\
&= (R_{ba} - R_a R_b) R_a \\
&= b_a R_a \\
&= -a_b R_a.
\end{aligned}$$

Utilizamos (3.1), (3.4) e (3.6). Analogamente temos $R_p = a^{ba} - R_a a^b$. □

Lema 3.2.11. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita. Então para quaisquer $a, b \in A$, sendo:

$$p = (a, a, b), \qquad q = [a, b],$$

então temos:

$$p(q, a, b) = 0, \tag{3.12}$$

$$p(qa,a,b)=0. \tag{3.13}$$

Demonstração. Fazendo $x=a$ em (3.7) temos:

$$a_b(a)=-(a,a,b)=-p.$$

Utilizando (3.9) e (3.8) temos:

$$p(q,a,b)=-(R_{(q,a,b)}a_b)(a)=(a_ba^ba_b)(a)=0,$$

o que prova (3.12). Agora, utilizando (3.10) e (3.8), temos:

$$p(qa,a,b)=-(R_{(qa,a,b)a_b})(a)=(a_bR_aa^ba_b)(a)=0,$$

o que prova (3.13). □

Teorema 3.2.12 (Teorema de Mikheev)**.** Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa à direita. Então para quaisquer $a,b\in A$ temos:

$$(a,a,b)^4=0.$$

Demonstração. Pondo $p=(a,a,b)$, temos:

$$\begin{aligned} R_pR_pR_pa_b &= (a^{ba}-R_aa^b)(a_{ba}-a_bR_a)(a^{ba}-R_aa^b)a_b \\ &= -(a^{ba}a_bR_a+R_aa^ba_{ba})a^{ba}a_b \\ &= -a^{ba}a_bR_aa^{ba}a_b-R_aa^ba_{ba}a^{ba}a_b \\ &= a^{ba}a_bR_aa^ba_{ba}-R_aa^{ba}a_ba^ba_{ba}. \end{aligned}$$

Como:

$$R_pa_bR_aa^bR_p=(a^{ba}-R_aa^b)a_bR_aa^b(a_{ba}-a_bR_a)=a^{ba}a_bR_aa^ba_{ba}$$

e também:

$$R_aR_pa_ba^bR_p=R_a(a^{ba}-R_aa^b)a_ba^b(a_{ba}-a_bR_a)=R_aa^{ba}a_ba^ba_{ba},$$

então:

$$\begin{aligned} R_pR_pR_pa_b &= R_pa_bR_aa^bR_p-R_aR_pa_ba^bR_p \\ &= -R_pR_{(qa,a,b)}R_p+R_aR_pR_{(q,a,b)}R_p \\ &= -R_{(p(qa,a,b))p}+R_aR_{(p(q,a,b))p} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Utilizamos os Lemas 3.2.10 e 3.2.11. Por (3.7), temos $a_b(a)=-p$, assim:

$$p^4=-(R_pR_pR_pa_b)(a),$$

logo $p^4=0$, concluindo a demonstração. □

3.3 Álgebras Alternativas

As $\mathbb{K}$-álgebras alternativas surgiram principalmente dos estudos dos octônios, introduzidos por Cayley. Elas possuem aplicações a estudos de $\mathbb{K}$-álgebras com composição e de planos projetivos. Por exemplo, os planos projetivos sobre $\mathbb{K}$-álgebras alternativas com divisão são importantes na geometria projetiva.

Na Subseção 3.3.1, mostraremos o Teorema Generalizado de Artin, cujo enunciado diz que, em toda $\mathbb{K}$-álgebra alternativa A, para $a, b, c \in A$ tais que $(a, b, c) = 0$, então a subálgebra $A(a, b, c)$ é associativa. Na Subseção 3.3.2, apresentaremos um breve estudo sobre $\mathbb{K}$-álgebras alternativas com divisão e mostraremos alguns resultados elementares.

3.3.1 Teorema de Artin

Nesta subseção, nós mostraremos o Teorema 3.3.3, chamado o Teorema Generalizado de Artin, cujo enunciado diz que, em toda $\mathbb{K}$-álgebra alternativa A, para $a, b, c \in A$ tais que $(a, b, c) = 0$, então a subálgebra $A(a, b, c)$ é associativa.

O Teorema de Artin diz que, em toda $\mathbb{K}$-álgebra alternativa A, para $a, b \in A$, a subálgebra $A(a, b)$ é associativa, e sua demonstração pode ser encontrada em [ZSSS82]. A demonstração presente nesta seção é obtida por uma fácil adaptação da demonstração do teorema original.

Definição 3.3.1. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é **alternativa** se é alternativa à direita e à esquerda.

Linearizando as identidades alternativas à esquerda e à direita, é fácil ver que, em uma álgebra alternativa, o associador é uma função alternada de seus argumentos. Em particular, toda álgebra alternativa é flexível.

Lema 3.3.2. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa. Então A satisfaz a identidade:

$$(xy)(zx) = x(yz)x,$$

chamada **identidade de Moufang ao meio**.

Demonstração. Utilizando a identidade de Moufang à direita, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} (xy)(zx) - x(yz)x &= -(xy, z, x) + (x, y, z)x \\ &= (z, xy, x) + (z, x, y)x \\ &= (z(xy))x - z(xyx) + ((zx)y)x - (z(xy))x \\ &= 0, \end{aligned}$$

provando a identidade de Moufang ao meio. □

Com isso, se A é uma álgebra alternativa, valem as identidades de Moufang à direita, à esquerda e a do meio. Agora mostraremos o principal resultado da presente subseção.

Teorema 3.3.3 (Teorema Generalizado de Artin)**.** Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra alternativa A. Para todo $a, b, c \in A$, se $(a, b, c) = 0$, então a subálgebra $A(a, b, c)$ é associativa.

Demonstração. Dados $x, y, z \in A$ tais que $(x, y, z) = 0$, denotaremos por $p = p(x, y, z)$ o produto $a_1 a_2 \cdots a_n$ de n fatores $a_i \in \{x, y, z\}$ com alguma distribuição de parênteses e n será chamado grau de p e denotado por $\deg(p)$. Para provar que a subálgebra $A(x, y, z)$ gerada por x, y e z é associativa, é suficiente mostrar que $(p_1, p_2, p_3) = 0$ para quaisquer produtos $p_i = p_i(x, y, z)$, com $i = 1, 2, 3$. Faremos a demostração por indução sobre a soma:

$$\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3).$$

É claro que o resultado é verdadeiro se $\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3) = 3$, pois $(x, y, z) = 0$ e o associador é antissimétrico. Agora consideremos o caso $n > 3$ e assumamos que $(p_1, p_2, p_3) = 0$ sempre que $\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3) < n$. Sejam os produtos p_i com $i = 1, 2, 3$ tais que $\deg(p_1) + \deg(p_2) + \deg(p_3) = n$. Para cada $i = 1, 2, 3$, como $\deg(p_i) < n$, pela hipótese de indução, podemos usar a associatividade no produto $p_i = p_i(x, y, z)$.

Caso 1: Dois dos produtos p_1, p_2, p_3 começam com geradores iguais, digamos que p_1 e p_2 começam com x. Se $\deg(p_1) > 1$ e $\deg(p_2) > 1$, então $p_1 = xp_1'$ e $p_2 = xp_2'$, onde $\deg(p_i') = \deg(p_i) - 1$ para $i = 1, 2$, assim a identidade (3.3) e a hipótese de indução nos dão:

$$\begin{aligned}
(p_1, p_2, p_3) &= (xp_1', xp_2', p_3) \\
&= -(xp_1', p_3p_2', x) - (xp_1', x, p_2')p_3 - (xp_1', p_3, p_2')x \\
&= (p_3p_2', xp_1', x) \\
&= -(p_3p_2', x, p_1')x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se $\deg(p_1) = 1$ e $\deg(p_2) > 1$, então $p_2 = p_2'x$, aí pela identidade (3.2) e a hipótese de indução temos:

$$(p_1, p_2, p_3) = (x, xp_2', p_3) = -(p_3, xp_2', x) = (p_3, x, p_2')x = 0.$$

Se $\deg(p_1) = \deg(p_2) = 1$, então:

$$(p_1, p_2, p_3) = (x, x, p_3) = 0.$$

Caso 2: Os produtos p_1, p_2, p_3 começam com geradores diferentes, digamos que eles começam com x, y, z respectivamente. Como $n > 3$, podemos supor sem perder generalidade que $\deg(p_2) > 1$, de modo que $p_2 = yp_2'$ onde $\deg(p_2') = \deg(p_2) - 1$. Como o associador é antissimétrico, podemos também supor sem perder generalidade que p_2' começa com y ou z. Linearizando a identidade de Moufang à esquerda e obtendo uma identidade análoga a (3.3):

$$(x, yz, w) + (z, yx, w) = -x(y, z, w) - z(y, x, w),$$

temos:

$$\begin{aligned}
(p_1, p_2, p_3) &= (p_1, yp_2', p_3) \\
&= -(p_2', yp_1, p_3) - p_1(y, p_2', p_3) - p_2'(y, p_1, p_3) \\
&= -(p_2', yp_1, p_3) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade vem do caso 1. □

3.3.2 Álgebras Alternativas com Divisão

Nesta subseção, nós apresentaremos um breve estudo sobre álgebras alternativas com divisão e mostraremos a Proposição 3.3.6, cujo enunciado diz que, nessas álgebras, os conceitos de álgebras com divisão e afins apresentados na Definição 2.2.2 são equivalentes ao conceito de álgebra com divisão clássica apresentado na Definição 2.2.5.

Proposição 3.3.4. Seja A uma álgebra alternativa com unidade, seja a um elemento invertível de A e seja b um de seus inversos. Então temos:

$$(b, a, t) = 0 \tag{3.14}$$

para todo $t \in A$.

Demonstração. Pela Proposição 2.1.49, temos a identidade:

$$x(y,z,w) + (x,y,z)w = (xy,z,w) - (x,yz,w) + (x,y,zw).$$

Seja $t \in A$. Fazendo $x \mapsto b$, $y \mapsto a$, $z \mapsto a$ e $w \mapsto bt$ na identidade acima, obtemos:

$$b(a,a,bt) + (b,a,a)(bt) = (ba,a,bt) - (b,a^2,bt) + (b,a,a(bt)),$$

assim:

$$0 = (\mathbf{1},a,bt) - (b,a^2,bt) + (b,a,a(bt)) = -(b,a^2,bt) + (b,a,a(bt)).$$

Por outro lado, pela identidade de Moufang à direita (3.2), temos:

$$\begin{aligned} (b,a^2,bt) &= (a^2,bt,b) = -(a^2,b,t)b = (t,b,a^2)b = -t(ba^2,b) \\ &= (b,ba^2,t) = (b,(ba)a,t) = (b,\mathbf{1}a,t) = (b,a,t) \end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned} (b,a,a(bt)) &= -(b,a(bt),a) = (b,a,bt)a = -(bt,a,b)a \\ &= (bt,ab,a) = (bt,\mathbf{1},a) = 0. \end{aligned}$$

Segue assim que $(b,a,t) = 0$. $\square$

Proposição 3.3.5. Seja A uma álgebra alternativa com unidade e seja a um elemento invertível em A. Então:

i) a tem um único inverso.

ii) L_a (resp. R_a) é um operador bijetor em A com $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ (resp. $R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$), onde a^{-1} denota o único inverso de a.

Demonstração. Temos o seguinte:

i) Suponhamos que b e c são inversos de a em A. Então, tendo em mente (3.14), vemos que:

$$c = \mathbf{1}c = (ba)c = (b,a,c) + b(ac) = b(ac) = b\mathbf{1} = b.$$

Assim a tem um único inverso.

ii) Se denotarmos por a^{-1} o único inverso de a, então (3.14) nos dá $(a^{-1},a,x) = 0$ para todo $x \in A$. Como o associador é uma função alternada de seus argumentos, obtemos que $L_{a^{-1}}L_a = L_aL_{a^{-1}} = I_A$ e $R_{a^{-1}}R_a = R_aR_{a^{-1}} = I_A$, e a demonstração está completa. $\square$

Agora mostraremos o resultado principal desta subseção.

Proposição 3.3.6. Seja A uma álgebra alternativa. Então as seguintes condições são equivalentes:

i) A é uma álgebra com quase-divisão.

ii) A é uma álgebra com divisão à esquerda.

iii) A é uma álgebra com divisão à direita.

iv) A é uma álgebra com divisão.

v) A é uma álgebra com divisão clássica.

Demonstração. É fácil ver que as implicações (iv)⇒(ii)⇒(i) e (iv)⇒(iii)⇒(i) são válidas. Além disso, pela Proposição 3.3.4, a implicação (v)⇒(iv) é válida. Resta mostrar que a implicação (i)⇒(v) é válida. Assuma que A é uma álgebra com quase-divisão.

1) Mostraremos que A tem um idempotente não nulo $e \in A$. Como $A \neq 0$, então existe $b \in A$ tal que $b \neq 0$. Assim L_b ou R_b é um operador bijetor.

- Suponhamos que L_b seja bijetor. Seja $e = L_b^{-1}(b)$. Então temos $be = b$, portanto $be = (be)e = be^2$, o que implica $e = e^2$. Portanto e é um idempotente não nulo de A.
- O caso em que R_b seja bijetor é análogo.

2) Mostraremos que e é uma unidade. Como $e \neq 0$, então L_e ou R_e é um operador bijetor.

- Suponhamos que L_e seja bijetor. Para todo $x \in A$ temos $e(ex) = e^2x = ex$, assim $ex = x$. Agora, para todo $x \in A$, pelo Teorema 3.3.3 de Artin, a subálgebra $A(x, e)$ é associativa, de modo que:
$$(exe - ex)(exe - ex) = exe^2xe - exe^2x - exexe + exex = exexe - exex - exexe + exex = 0,$$
assim, como A é uma álgebra com quase-divisão, temos $exe - ex = 0$, aí $exe = ex$, aí $xe = x$.
- O caso em que R_e é bijetor é análogo.

3) Mostraremos que A é uma álgebra com divisão clássica. Seja $a \in A$ tal que $a \neq 0$. Então L_a ou R_a é um operador bijetor.

- Suponhamos que L_a seja bijetor. Então existe $c \in A$ tal que $ac = \mathbf{1}$. Assim temos $a(ca) = (ac)a = \mathbf{1}a = a = a\mathbf{1}$, assim $ca = \mathbf{1}$.
- O caso em que R_a é bijetor é análogo.

Assim concluímos a demonstração da proposição. □

Corolário 3.3.7. Seja A uma álgebra alternativa à direita com quase-divisão. Então a álgebra A é alternativa.

Demonstração. Como A é uma álgebra com quase-divisão, então A não tem divisores juntos de zero. O restante segue do Teorema 3.2.12 de Mikheev. □

3.4 Álgebras com Potências Associativas

A decomposição de Peirce é uma decomposição de uma álgebra como uma soma direta de subespaços de acordo com um elemento idempotente. Ela é utilizada, por exemplo, para estudarmos a estrutura e classificação de várias classes de álgebars. A decomposição de Peirce para álgebras associativas foi introduzida por Benjamin Peirce em 1870. Posteriormente, decomposições de Peirce análogas foram introduzidas para várias outras álgebras, tais como álgebras de Jordan, álgebras flexíveis e álgebras com potências associativas.

Baseamos a apresentação desta seção em [Alb48], [EMM80], [Jun85] e [CGRP14]. Na Subseção 3.4.1, apresentaremos a decomposição de Peirce de uma álgebra com potências associativas em relação a um idempotente. Na Subseção 3.4.2, mostraremos que, em toda álgebra com potências associativas sem divisores de zero, todo idempotente não nulo é uma unidade.

Lembremos que estamos assumindo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, em particular $\mathbb{K}$ tem característica 0.

3.4.1 Decomposição de Peirce

Nesta seção, nós apresentaremos as decomposições de Peirce para álgebras comutativas com potências associativas, conforme o Teorema 3.4.6, para álgebras com potências associativas, conforme o Teorema 3.4.8, e também para álgebras flexíveis com potências associativas, conforme o Teorema 3.4.9.

Definição 3.4.1. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é uma **$\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas** se para todo $a \in A$ a subálgebra $A(a)$ gerada por a é associativa.

Em particular, toda álgebra com potências associativas satisfaz as seguintes identidades:

$$x^2x = xx^2, \tag{3.15}$$

$$x^2x^2 = x(xx^2). \tag{3.16}$$

Por outro lado, Albert, no artigo [Alb48], forneceu os seguintes dois resultados que oferecem recíprocas parciais para as identidades (3.15) e (3.16). Não precisaremos deles no presente trabalho, mas eles são apresentados por questão de curiosidade.

Teorema 3.4.2. Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{F}$. Suponhamos o seguinte:

- $\mathbb{F}$ tenha característica 0.
- $x^2x = xx^2$ para todo $x \in A$.
- $x^2x^2 = x(xx^2)$ para todo $x \in A$.

Então A é uma álgebra com potências associativas.

Teorema 3.4.3. Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{F}$. Suponhamos o seguinte:

- $\mathbb{F}$ tenha característiva 0 ou $p > 5$.
- A seja flexível.
- $x^2x^2 = x(xx^2)$ para todo $x \in A$.

Então A é uma álgebra com potências associativas.

Agora apresentaremos uma proposição útil para a demonstração dos resultados concernentes à decomposição de Peirce.

Proposição 3.4.4. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas. Seja $e \in A$ um elemento idempotente que comuta com todos os elementos de A. Então:

$$2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 0. \tag{3.17}$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas etapas, pois a organização dos argumentos será útil para resultados posteriores.

a) Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas. Escrevendo (3.15) em termos do comutador temos:

$$[x^2, x] = 0. \tag{3.18}$$

Escrevendo (3.16) em termos do associador, temos:

$$(x, x, x^2) = 0. \tag{3.19}$$

Uma linearização parcial de (3.19) nos oferece a identidade:

$$[xy + yx, x] + [x^2, y] = 0. \tag{3.20}$$

Duas linearizações parciais de (3.18) nos oferecem as identidades:

$$(x, x, xy + yx) + (x, y, x^2) + (y, x, x^2) = 0, \tag{3.21}$$

$$(x, x, y^2) + (x, y, xy + yx) + (y, x, xy + yx) + (y, y, x^2) = 0. \tag{3.22}$$

b) Agora seja $e \in A$ um elemento idempotente que comuta com todos os elementos de A. Para todo $y \in A$, fazendo $x = e$ em (3.21), temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (e,e,2ey) + (e,y,e) + (y,e,e) \\ &= 2e(ey) - 2e(e(ey)) + (ye)e - ye \\ &= -2((ye)e)e + 3(ye)e - ye, \end{aligned}$$

ou seja:

$$2((ye)e)e - 3(ye)e + ye = 0, \tag{3.23}$$

como queríamos demonstrar. □

Apresentaremos agora a noção de decomposição de Peirce no caso comutativo.

Definição 3.4.5. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja $e \in A$ um idempotente que comuta com todos os elementos de A. Para $\lambda \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, definimos o seguinte subespaço:

$$A_\lambda = \{x \in A : xe = \lambda x\}.$$

Chamamos os A_i de **componentes de Peirce no caso comutativo**.

Teorema 3.4.6 (Decomposição de Peirce no Caso Comutativo)**.** Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra *comutativa* com potências associativas e seja $e \in A$ um elemento idempotente. Então:

$$A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0.$$

Além disso, temos as seguintes relações:

1) $A_1 A_1 \subseteq A_1$.

2) $A_0 A_0 \subseteq A_0$.

3) $A_1 A_0 = \{0\}$.

4) $A_1 A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}} + A_0$.

5) $A_0 A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}} + A_1$.

6) $A_{\frac{1}{2}} A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_1 + A_0$.

Demonstração. Primeiro, notemos que:

$$A_1 = \operatorname{Ker}(R_e - I_A), \qquad A_{\frac{1}{2}} = \operatorname{Ker}(2R_e - I_A), \qquad A_0 = \operatorname{Ker}(R_e).$$

Além disso, pela identidade (3.17), temos o seguinte:

$$0 = 2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = R_e(2R_e - 1)(R_e - 1).$$

Sejam:

$$P_1 = 2R_e^2 - 2R_e, \qquad P_{\frac{1}{2}} = -4R_e^2 + 4R_e, \qquad P_0 = 2R_e^2 - 3R_e + I_A.$$

Então temos:

$$(R_e - I_A)P_1 = (2R_e - I_A)P_{\frac{1}{2}} = R_e P_0 = 0$$

e também:

$$I_A = P_1 + P_{\frac{1}{2}} + P_0.$$

a) Mostraremos que $A = A_1 + A_{\frac{1}{2}} + A_0$. De fato seja $x \in A$. Então:

$$P_1(x) \in A_1, \qquad P_{\frac{1}{2}}(x) \in A_{\frac{1}{2}}, \qquad P_0(x) \in A_0,$$

e também:

$$x = P_1(x) + P_{\frac{1}{2}}(x) + P_0(x).$$

b) Mostraremos que $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$. De fato, suponhamos que:

$$u_1 + u_{\frac{1}{2}} + u_0 = 0, \tag{3.24}$$

onde $u_\lambda \in A_\lambda$ para $\lambda \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$. Multiplicando (3.24) por e, obtemos:

$$u_1 + \frac{1}{2}u_2 = 0. \tag{3.25}$$

Multiplicando (3.25) por e, obtemos:

$$u_1 + \frac{1}{4}u_{\frac{1}{2}} = 0. \tag{3.26}$$

Subtraindo (3.26) de (3.25), obtemos $\frac{1}{4}u_{\frac{1}{2}} = 0$, assim $u_{\frac{1}{2}} = 0$. Aplicando isso em (3.25), temos:

$$0 = u_1 + \frac{1}{2}u_{\frac{1}{2}} = u_1.$$

Portanto:

$$0 = u_1 + u_{\frac{1}{2}} + u_0 = u_0.$$

Em suma:

$$u_1 = u_{\frac{1}{2}} = u_0 = 0.$$

c) Mostraremos que $R_e - \alpha I_A$ é invertível para todo $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. De fato, considerando o polinômio:

$$p(x) = x(2x-1)(x-1),$$

então α não é raiz de $p(x)$, de modo que pela Divisão Euclidiana existem um polinômio $q(x)$ e um escalar $\gamma \neq 0$ tais que:

$$p(x) = (x-\alpha)q(x) + \gamma,$$

em particular temos:

$$0 = p(R_e) = (R_e - \alpha I_A)q(R_e) + \gamma I_A,$$

d) Por fim, mostraremos as afirmações restantes do teorema. Linearizando a identidade (3.22) em y e usando a comutatividade, temos:

$$2(x,x,yz) + 2(x,y,xz) + 2(x,z,xy) + 2(y,x,xz) + 2(z,x,xy) + (y,z,x^2) + (z,y,x^2) = 0$$

para quaisquer $x, y, z \in A$. Sejam $\lambda, \mu \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ e $y \in A_\lambda$ e $z \in A_\mu$. Fazendo $x = e$ na identidade acima, obtemos:

$$(2R_e^2 + (2\lambda + 2\mu - 4)R_e + (2\lambda^2 - 8\lambda\mu + 2\mu^2 + \lambda + \mu)I_A)(yz) = 0.$$

1) Se $\lambda = \mu = 1$, então obtemos:

$$0 = (2R_e^2 - 2I_A)(yz) = 2(R_e + I_A)(R_e - I_A)(yz),$$

assim $(R_e - I_A)(yz) = 0$, de modo que $yz \in A_1$.

2) Se $\lambda = \mu = 0$, então:
$$0 = (2R_e^2 - 4R_e)(yz) = 2(R_e - 2I_A)R_e(yz),$$
assim $R_e(yz) = 0$, de modo que $yz \in A_0$.

3) Se $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, então:
$$0 = (2R_e^2 - 2R_e + 3I_A)(yz),$$
mas pela identidade (3.17) temos $2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 0$, de modo que:
$$0 = (R_e(2R_e^2 - 2R_e + 3I_A) - (2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e))(yz) = (R_e + I_A)R_e(yz),$$
assim $R_e(yz) = 0$, mas aí:
$$0 = (2R_e^2 - 2R_e + 3I_A)(yz) = 3yz,$$
consequentemente $yz = 0$.

4) Se $\lambda = 1$ e $\mu = \frac{1}{2}$, então:
$$0 = (2R_e^2 - R_e)(yz) = P_1(yz),$$
assim:
$$yz = P_{\frac{1}{2}}(yz) + P_0(yz) \in A_{\frac{1}{2}} + A_0.$$

5) Se $\lambda = 0$ e $\mu = \frac{1}{2}$, então:
$$0 = (2R_e^2 - 3R_e + I_A)(yz) = P_0(yz),$$
assim:
$$yz = P_{\frac{1}{2}} + P_1(yz) \in A_{\frac{1}{2}} + A_1.$$

6) Se $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, então:
$$0 = (2R_e^2 - 2R_e)(yz) = \frac{1}{2}P_{\frac{1}{2}}(yz),$$
assim:
$$yz = P_1(yz) + P_0(yz) \in A_1 + A_0,$$
como queríamos demonstrar. □

Agora apresentaremos a decomposição de Peirce no caso não-comutativo.

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Lembremos que $A^{(+)}$ é a $\mathbb{K}$-álgebra dada pelo espaço vetorial de A munido da seguinte multiplicação:
$$x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$
Então $A^{(+)}$ é comutativa.

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas. Então a álgebra $A^{(+)}$ também é uma álgebra com potências associativas. Além disso, se $e \in A$ é um elemento idempotente da álgebra A, então e também é idempotente na álgebra $A^{(+)}$.

Definição 3.4.7. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja $e \in A$ um idempotente. Para $\lambda \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, definamos o seguinte subespaço:
$$A_{(\lambda)} = \{x \in A : x \bullet e = \lambda x\}.$$
Chamamos os $A_{(\lambda)}$ de **componentes de Peirce no caso não-comutativo**.

Notemos que para todo $x \in A$, então:
$$x \in A_{(\lambda)} \quad \Leftrightarrow \quad x \bullet e = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(xe + ex) = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad xe + ex = 2\lambda x.$$

Em particular, para todo $x \in A$ temos:

$$x \in A_{(1)} \Leftrightarrow xe + ex = 2x, \qquad x \in A_{(\frac{1}{2})} \Leftrightarrow xe + ex = x, \qquad x \in A_{(0)} \Leftrightarrow xe + ex = 0.$$

Por fim, observemos que:

$$A_{(\lambda)} = A_{\lambda}^{(+)}$$

para todo $\lambda \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Teorema 3.4.8 (Decomposição de Peirce no Caso Não-Comutativo)**.** Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas e seja e um idempotente de A. Então:

$$A = A_{(1)} \oplus A_{(\frac{1}{2})} \oplus A_{(0)}.$$

Além disso, temos as seguintes relações:

1) $A_{(1)} \bullet A_{(1)} \subseteq A_{(1)}$.

2) $A_{(0)} \bullet A_{(0)} \subseteq A_{(0)}$.

3) $A_{(1)}A_{(0)} + A_{(0)}A_{(1)} = \{0\}$.

4) $A_{(1)} \bullet A_{(\frac{1}{2})} \subseteq A_{(\frac{1}{2})} + A_{(0)}$.

5) $A_{(0)} \bullet A_{(\frac{1}{2})} \subseteq A_{(\frac{1}{2})} + A_{(1)}$.

6) $A_{(\frac{1}{2})} \bullet A_{(\frac{1}{2})} \subseteq A_{(1)} + A_{(0)}$.

Por fim, para $\lambda \in \{0, 1\}$, então $A_{(\lambda)}$ também satisfaz o seguinte:

$$A_{(\lambda)} = \{x \in A : xe = ex = \lambda x\}. \tag{3.27}$$

Demonstração. Com base nas observações anteriores, aplicando o Teorema 3.4.6 à álgebra $A^{(+)}$, basta mostrar a afirmação (3) e a afirmação (3.27).

a) Mostraremos primeiro a afirmação (3.27).

1) Por um lado, seja $x \in A_{(\lambda)}$, onde $\lambda \in \{0, 1\}$. Em (3.20) substituindo x por e, y por x, obtemos:

$$[ex + xe, e] + [e^2, x] = 0,$$

logo:

$$0 = [2e \bullet x, e] + [e, x] = [2\lambda x, e] + [e, x] = (2\lambda - 1)[x, e].$$

Como $\lambda \neq \frac{1}{2}$, então $[x, e] = 0$, portanto

$$xe = ex = \lambda x.$$

2) Por outro lado, seja para $x \in A$ tal que $xe = ex = \lambda x$, onde $\lambda \in \{0, 1\}$. Então:

$$x \bullet e = \frac{1}{2}(xe + ex) = \frac{1}{2}(\lambda x + \lambda x) = \lambda x,$$

b) Agora mostraremos a afirmação (3). Linearizando a identidade (3.20), obtemos a identidade:

$$[xy + yx, z] + [zy + yz, x] + [xz + zx, y] = 0. \tag{3.28}$$

Sejam $x \in A_{(1)}$ e $y \in A_{(0)}$. Então temos:

$$xe + ex = 2(x \bullet e) = 2x, \qquad ye + ey = 2(y \bullet e) = 0. \tag{3.29}$$

Além disso, pelo Teorema 3.4.6 aplicado à álgebra $A^{(+)}$, temos:

$$xy + yx = 2(x \bullet y) \in A_{(1)} \bullet A_{(0)} = \{0\},$$

ou seja:

$$xy + yx = 0. \tag{3.30}$$

Aplicando (3.29) e (3.30) à identidade (3.28), temos:

$$0 = [xy + yx, e] + [ey + ye, x] + [xe + ex, y] = [0, e] + [0, x] + [2x, y] = 2[x, y],$$

assim $xy = yx$, portanto:

$$xy = yx = \frac{1}{2}(xy + yx) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Por questão de curiosidade, se uma álgebra com potências associativas satisfaz algumas identidades adicionais, então as componentes de Peirce no caso não-comutativo também satisfazem relações adicionais notáveis.

Teorema 3.4.9 (Decomposição de Peirce no Caso Flexível)**.** Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra *flexível* com potências associativas. Então as componentes de Peirce satisfazem as seguintes relações:

1) $A_{(1)}A_{(1)} \subseteq A_{(1)}$.
2) $A_{(0)}A_{(0)} \subseteq A_{(0)}$.
3) $A_{(1)}A_{(0)} + A_{(0)}A_{(1)} = \{0\}$.
4) $A_{(1)}A_{(\frac{1}{2})} + A_{(\frac{1}{2})}A_{(1)} \subseteq A_{(\frac{1}{2})} + A_{(0)}$.
5) $A_{(0)}A_{(\frac{1}{2})} + A_{(\frac{1}{2})}A_{(0)} \subseteq A_{(\frac{1}{2})} + A_{(1)}$.
6) $A_{(\frac{1}{2})} \bullet A_{(\frac{1}{2})} \subseteq A_{(1)} + A_{(0)}$.
7) $A_{(\frac{1}{2})}e + eA_{(\frac{1}{2})} \subseteq A_{(\frac{1}{2})}$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.4.8, nós já mostramos as afirmações (3) e (6). Pela Proposição 3.1.2, temos a identidade flexível linearizada:

$$(xy)z + (zy)x = x(yz) + z(yx). \tag{3.31}$$

a) Mostraremos a afirmação (1). Sejam $x \in A_{(1)}$ e $y \in A_{(1)}$. Então temos:

$$xe = ex = x, \qquad ye = ey = y.$$

Aplicando $z = e$ em (3.31):

$$(xy)e + (ey)x = x(ye) + e(yx),$$

assim:

$$(xy)e + yx = xy + e(yx),$$

assim:

$$(xy)e + e(xy) - 2xy = e(xy + yx) - xy - yx,$$

assim:

$$2(R_e^{\bullet} - I_A)(xy) = 2(L_e - I_A)(x \bullet y),$$

onde $R_e^{\bullet}$ é a multiplicação por e na álgebra $A^{(+)}$. Porém temos $x \bullet y \in A_{(1)}$, de modo que:

$$(x \bullet y)e = e(x \bullet y) = x \bullet y,$$

assim:

$$(R_e^\bullet - I_A)(xy) = (L_e - I_A)(x \bullet y) = 0,$$

logo temos $xy \in A_{(1)}$.

b) Mostraremos a afirmação (2). Sejam $x \in A_{(0)}$ e $y \in A_{(0)}$. Então temos:

$$xe = ex = 0, \qquad ye = ey = 0.$$

Aplicando $z = e$ em (3.31):

$$(xy)e + (ey)x = x(ye) + e(yx),$$

assim:

$$(xy)e = e(yx),$$

assim:

$$(xy)e + e(xy) = e(xy + yx),$$

assim:

$$2R_e^\bullet(xy) = 2L_e(x \bullet y),$$

mas $x \bullet y \in A_{(0)}$, de modo que:

$$(x \bullet y)e = e(x \bullet y) = 0,$$

assim:

$$R_e^\bullet(xy) = L_e(x \bullet y) = 0,$$

logo temos $xy \in A)(0)$.

c) Mostraremos a afirmação (7). Seja $x \in A_{(\frac{1}{2})}$. Então:

$$xe + ex = x.$$

Aplicando $y = z = e$ em (3.31):

$$(xe)e + (ee)x = x(ee) + e(ex),$$

assim:

$$(xe)e + ex = xe + e(ex),$$

aí:

$$(xe)e + e(xe) - xe = e(xe + ex) - ex,$$

assim:

$$(2R_e^\bullet - I_A)(xe) = ex - ex = 0,$$

assim $xe \in A_{(\frac{1}{2})}$, logo $ex = x - xe \in A_{(\frac{1}{2})}$.

d) Mostraremos a afirmação (4). Sejam $x \in A_{(1)}$ e $z \in A_{(\frac{1}{2})}$. Então temos:

$$xe = ex = x, \qquad ze + ez = z.$$

Aplicando $y = e$ em (3.31):

$$(xe)z + (ze)x = x(ez) + z(ex),$$

assim:

$$xz + (ze)x = x(z - ze) + zx,$$

assim:

$$xz = xz + zx - x(ze) - (ze)x,$$

mas pelo item (c) temos $ze \in A_{(\frac{1}{2})}$, assim:

$$xz + zx \in A_{(\frac{1}{2})} + A_{(0)}, \qquad x(ze) + (ze)x \in A_{(\frac{1}{2})} + A_{(0)},$$

assim:

$$xz = xz + zx - x(ze) - (ze)x \in A_{(\frac{1}{2})} + A_{(0)},$$

logo:

$$zx = (xz + zx) - xz \in A_{(\frac{1}{2})} + A_{(0)}.$$

e) Mostraremos a afirmação (5). Sejam $x \in A_{(0)}$ e $z \in A_{(\frac{1}{2})}$. Então temos:

$$xe = ex = 0, \qquad ze + ez = z.$$

Aplicando $y = e$ em (3.31):

$$(xe)z + (ze)x = x(ez) + z(ex),$$

assim:

$$(ze)x = x(z - ze),$$

aí:

$$xz = x(ze) + (ze)x,$$

mas pelo item (c) temos $ze \in A_{(\frac{1}{2})}$, assim:

$$xz = x(ze) + (ze)x \in A_{(\frac{1}{2})} + A_{(1)},$$

logo:

$$zx = (xz + zx) - xz \in A_{(\frac{1}{2})} + A_{(1)},$$

como queríamos demonstrar. □

3.4.2 Resultado Principal

Nesta subseção, mostraremos o Teorema 3.4.11, cujo enunciado diz que, para toda $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas sem divisores de zero A, então todo elemento idempotente não nulo de A é de fato uma unidade de A. A sua demonstração utilizará o seguinte lema auxiliar.

Lema 3.4.10. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas. Seja $e \in A$ um elemento idempotente tal que $A_{(0)} = \{0\}$. Então para todo $x \in A_{(\frac{1}{2})}$ temos $x^3 = 0$.

Demonstração. Seja $x \in A_{(\frac{1}{2})}$. Então temos:

$$xe + ex = 2(x \bullet e) = x.$$

Além disso, pelo Teorema 3.4.8, temos:

$$A_{(\frac{1}{2})} \bullet A_{(\frac{1}{2})} \subseteq A_{(1)} + A_{(0)} = A_{(1)}.$$

assim:

$$x^2 = x \bullet x \in A_{(1)},$$

de modo que:

$$x^2 e = ex^2 = x^2.$$

Agora, fazendo $y = e$ na identidade (3.21), temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (x,x,xe+ex) + (x,e,x^2) + (e,x,x^2) \\ &= (x,x,x) + (xe)x^2 - x(ex^2) + (ex)x^2 - e(xx^2) \\ &= (xe+ex)x^2 - x(ex^2) - ex^3 \\ &= xx^2 - xx^2 - ex^3 \\ &= -ex^3, \end{aligned}$$

assim $ex^3 = 0$. Analogamente $x^3e = 0$. Portanto $x^3 \in A_{(0)}$, aí $x^3 = 0$. □

Teorema 3.4.11. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas sem divisor junto de zero. Seja e um idempotente não nulo de A. Então e é uma unidade para A.

Demonstração. Temos as seguintes etapas.

a) Mostraremos que $A_{(0)} = \{0\}$. De fato, para todo $x \in A$, pelo Teorema 3.4.8 temos $xe = ex = 0$, assim $x = 0$.

b) Agora mostraremos que $A_{(\frac{1}{2})} = \{0\}$. De fato, para todo $x \in A_{(\frac{1}{2})}$, pelo Lema 3.4.10 temos $x^3 = 0$, aí $x^2x = xx^2 = 0$, assim $x^2 = 0$ ou $x = 0$, mas $x^2 = 0$ implica $xx = xx = 0$, que implica $x = 0$.

c) Pelo Teorema 3.4.8 temos $A = A_{(1)} + A_{(\frac{1}{2})} + A_{(0)} = A_{(1)}$. Assim, para todo $x \in A$ temos $x \in A_{(1)}$, aí pelo Teorema 3.4.8 temos $xe = ex = x$. Portanto e é uma unidade de A. □

3.5 Álgebras Algébricas

Álgebras algébricas são uma das generalizações mais imediatas das álgebras com dimensão finita e também de extensões algébricas de corpos. Elas são utilizadas em vários resultados de estrutura e classificação sobre álgebras associativas.

Baseamos a apresentação desta seção em [Jun85] e [CGRP14]. Na Subseção 3.5.1, apresentaremos os conceitos de álgebras algébricas, álgebras uniformemente algébricas, polinômio minimal e álgebras quadráticas. Na Subseção 3.5.2, mostraremos que toda álgebra algébrica com potências associativas sem divisores de zero é quadrática. Na Subseção 3.5.3, apresentaremos algumas aplicações da subseção anterior que são interessantes por si mesmos.

3.5.1 Definições e Exemplos Iniciais

Definição 3.5.1. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Um elemento $a \in A$ é dito **algébrico** se $A(a)$ tem dimensão finita. Dizemos que A é **algébrica** se todos os seus elementos são algébricos.

O conceito de elementos algébricos e álgebras algébricas tem como motivação as noções usuais de elementos algébricos em extensões de corpos e extensões algébricas de corpos. Seja $\mathbb{E}$ uma extensão de corpos sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então $\mathbb{E}$ tem uma estrutura natural de $\mathbb{F}$-álgebra. Para todo $a \in \mathbb{E}$, então a é algébrico segundo a definição acima se e só se a é raiz de um polinômio mônico $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{F}$. Em geral, se x não é algébrico, então x é dito **transcendental**.

Definição 3.5.2. Dizemos que A é **uniformemente algébrica**, ou **algébrica de grau limitado**, se existe um m tal que $\dim(A(a)) \leqslant m$ para todo $a \in A$. Nesse caso, o menor m tal que $\dim(A(a)) \leqslant m$ para todo $a \in A$ é chamado **grau** de A e denotado por $\deg(A)$.

Podemos fornecer exemplos de álgebras algébricas que não são uniformemente algébricas. Por exemplo, consideremos $\mathbb{C}$ como uma $\mathbb{Q}$-álgebra. Então o conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ dos elementos $x \in \mathbb{C}$ algébricos sobre $\mathbb{Q}$ é uma $\mathbb{Q}$-álgebra algébrica mas não é uniformemente algébrica. Além disso, o subcorpo $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{8}}, \dots)$ de $\mathbb{C}$ gerado por $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{8}}, \dots$ também é uma $\mathbb{Q}$-álgebra algébrica que não é uniformemente algébrica.

Também podemos apresentar um exemplo de álgebra uniformemente algébrica que tem dimensão infinita. Seja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ um conjunto de indeterminadas, seja $\mathbb{E} = \mathbb{Z}_2(X_n : n \in \mathbb{N})$ o corpo das expressões racionais sobre as indeterminadas $X_1, X_2, \dots$ e seja $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2(X_n^2 : n \in \mathbb{N})$ o subcorpo gerado por $X_1^2, X_2^2, \dots$. O conjunto $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{F}$, assim $\mathbb{E}$ não é uma extensão de corpos de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$. Porém, para todo $f \in \mathbb{E}$, sendo:

$$f = \frac{\sum_i \alpha_i X_1^{m_{i1}} \cdots X_{r_i}^{m_{ir_i}}}{\sum_j \beta_j X_1^{n_{j1}} \cdots X_{s_j}^{n_{js_j}}},$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}_2$ e $m_{i1}, \dots, m_{ir_i}, n_{j1}, \dots, n_{js_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos:

$$f^2 = \frac{\sum_i \alpha_i X_1^{2m_{i1}} \cdots X_{r_i}^{2m_{ir_i}}}{\sum_j \beta_j X_1^{2n_{j1}} \cdots X_{s_j}^{2n_{js_j}}} \in \mathbb{F},$$

porque os corpos em questão têm característica 2. Assim $\mathbb{E}$ é uniformemente algébrica sobre $\mathbb{F}$.

Apresentaremos uma proposição sobre álgebras algébricas que será utilizado mais adiante no decorrer da demonstração do Teorema 6.2.18.

Proposição 3.5.3. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra algébrica sem divisores de zero. Se $\dim(A(a)) = \deg(A)$ e $b \in A \backslash \{0\}$ com $ab = b$, então $A(b) = A(a)$.

Demonstração. Sabemos que $A(b)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra sem divisores de zero, assim é uma álgebra com divisão. Assim existe $c \in A(b)$ tal que $cb = b$. Por outro lado, temos $ab = b$, assim $ab = cb$, o que implica $a = c$. Portanto $a \in A(b)$, donde $A(a) \subseteq A(b)$. Usando que $\dim(A(a)) = \deg(A)$, temos $\dim(A(b)) \leqslant \dim(A(a))$. Portanto $A(b) = A(a)$. $\square$

Podemos agora apresentar o conceito de polinômio minimal de elementos em uma álgebra com potências associativas e com unidade. De fato, em toda álgebra com potências associativas e com unidade A, para todo $a \in A$ a subálgebra $A(\mathbf{1}, a)$ gerada por $\mathbf{1}$ e a é uma álgebra associativa com unidade. Além disso, temos a propriedade universal da álgebra dos polinômios $\mathbb{K}[x]$ enunciada na Proposição 2.1.28.

Definição 3.5.4. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas e com unidade. Seja $a \in A$ um elemento algébrico de A. Definimos o **polinômio minimal** de a como o polinômio mônico $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ de menor grau tal que $p(a) = 0$.

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com potências associativas e com unidade. Para todo elemento algébrico $a \in A$, então o polinômio minimal $p(x)$ de a é o único polinômio mônico não constante tal que:

$$\{q(x) \in \mathbb{K}[x] : q(a) = 0\} = p(x)\mathbb{K}[x],$$

ou seja, os polinômios $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tais que $q(a) = 0$ são exatamente os polinômios divisíveis por $p(x)$ em $\mathbb{K}[x]$.

Apresentaremos um tipo importante de álgebras algébricas, as chamadas álgebras quadráticas.

Definição 3.5.5. Uma $\mathbb{K}$-álgebra é dita **quadrática** se tem unidade e a^2 é combinação linear de $\{\mathbf{1}, a\}$ para todo $a \in A$.

O conceito de álgebra quadrática tem esse nome pois, para toda $\mathbb{K}$-álgebra A, então A é quadrática se e só se para todo elemento $a \in A$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que a equação quadrática $a^2 + \alpha a + \beta = 0$ é satisfeita.

Exemplo 3.5.6. Toda $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley é quadrática. De fato, seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de Cayley. Seja $a \in A$. Então temos:

$$\nu_a \mathbf{1} = aa^* = a(\tau_a \mathbf{1} - a) = \tau_a a - a^2,$$

assim:

$$a^2 = \tau_a a - \nu_a \mathbf{1} \in \mathbb{K}a + \mathbb{K}\mathbf{1},$$

como queríamos demonstrar. Em particular, as $\mathbb{R}$-álgebras obtidas de sucessivas construções de Cayley-Dickson a partir de $\mathbb{R}$, tais como $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ e $\mathbb{S}$, são quadráticas.

3.5.2 Resultado Principal

Nesta seção, mostraremos o Teorema 3.5.8, cujo enunciado diz que toda álgebra algébrica com potências associativas sem divisores de zero é quadrática. Para isso, mostraremos antes um lema que geralmente é utilizado para a teoria de estrutura de Wedderburn para álgebras associativas de dimensão finita.

Lema 3.5.7. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa de dimensão finita sem divisores juntos de zero. Então A possui um elemento idempotente não nulo.

Demonstração. Seja I um ideal à esquerda não nulo minimal de A, e seja $a \in I$ com $a \neq 0$. Então temos $0 \neq a^2 \in Ia \subseteq I$, aí $Ia = I$, assim existe $b \in I$ tal que $ba = a$. Considere o conjunto:

$$J = \{x \in A : xa = 0\}.$$

É claro que J é um ideal à esquerda de A contendo o conjunto:

$$\{x - xb : x \in A\}.$$

Como $I \cap J$ é um ideal à esquerda tal que $I \nsubseteq J$, então a minimalidade de I nos dá $I \cap J = 0$. Como $b \in I$, temos $b - b^2 \in I$. Mas também $b - b^2 \in J$, assim $b - b^2 = 0$. □

Teorema 3.5.8. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra algébrica com potências associativas e sem divisores juntos de zero. Então A é quadrática. Mais precisamente, temos o seguinte:

i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então, para todo $a \in A$ tal que $a \neq 0$, a álgebra $A(\mathbf{1}, a)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Além disso, para $a \in A$ tal que $a \neq 0$, então $\mathbf{1} \in A(a)$.

Demonstração. Dividiremos essa demonstração em etapas.

a) Mostraremos primeiro que A tem uma unidade. Tomemos um elemento $b \neq 0$ de A. Então a subálgebra $A(b)$ de A gerada por b é uma álgebra associativa de dimensão finita sem divisores juntos de zero. Portanto, pelo Lema 3.5.7, a álgebra A tem um elemento $e \in A$ idempotente não nulo. Portanto, pelo Teorema 3.4.11, o elemento e é uma unidade de A.

b) Mostraremos que o polinômio minimal de todo elemento de A é irredutível. De fato, seja $a \neq 0$ um elemento de A. Seja $p(x)$ o polinômio minimal de a. Suponhamos que $p(x)$ seja redutível, digamos $p(x) = r(x)s(x)$ com $r(x), s(x)$ polinômios mônicos não constantes. Então teríamos $r(a)s(a) = s(a)r(a) = 0$. Mas A não tem divisores juntos de zero, assim nós teríamos $r(a) = 0$ ou $s(a) = 0$. Mas isso que não é possível pois $\deg(r) < \deg(p)$ e $\deg(s) < \deg(p)$, contradizendo a minimalidade do grau de $p(x)$. Portanto $p(x)$ é irredutível.

c) Mostraremos que A é quadrática.

Caso 1: Suponhamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mostraremos que $A = \mathbb{C}\mathbf{1}$. De fato, seja $a \in A$, $a \neq 0$. Seja $p(x)$ o polinômio minimal de a. Já mostramos no item (b) que $p(x)$ é irredutível. Entretanto, o corpo $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, ou seja, todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ se decompõe em fatores lineares. Desse modo $p(x)$ é um polinômio mônico linear, ou seja, existe um $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $p(x) = x - \alpha\mathbf{1}$. Portanto $0 = p(a) = a - \alpha\mathbf{1}$, assim $a = \alpha\mathbf{1} \in \mathbb{C}\mathbf{1}$.

Caso 2: Suponhamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seja $a \in A$ tal que $a \neq 0$. Seja $p(x)$ o polinômio minimal de a. Já mostramos no item (b) que $p(x)$ é irredutível. Entretanto, é um fato conhecido que todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{R}$ e com grau ímpar possui raízes em $\mathbb{R}$. Assim $p(x)$ deve ter grau no máximo 2. Consideremos dois casos.

Caso 2,1: Suponhamos que $p(x)$ tenha grau 1. Então existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x - \alpha\mathbf{1}$. Assim $0 = p(a) = a - \alpha\mathbf{1}$, aí $a = \alpha\mathbf{1}$. Com isso podemos concluir que $A(\mathbf{1}, a) = \mathbb{R}\mathbf{1}$.

Caso 2,2: Suponhamos que $p(x)$ tenha grau 2. Então existem $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = x^2 + \gamma x + \delta\mathbf{1}$. Como $p(x)$ é irredutível, então $p(x)$ não tem raízes reais, portanto $\gamma^2 - 4\delta < 0$, assim existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta \neq 0$ e $\frac{-\gamma^2+4\delta}{4} = \beta^2$. Sendo $\alpha = -\frac{\gamma}{2}$, então temos $p(x) = (x - \alpha\mathbf{1})^2 + \beta^2\mathbf{1}$. Assim temos $0 = p(a) = (a - \alpha\mathbf{1})^2 + \beta^2\mathbf{1}$. Fazendo $b = \frac{1}{\beta}(a - \alpha\mathbf{1})$, então temos $b^2 = -\mathbf{1}$ e também $A(\mathbf{1}, a) = A(\mathbf{1}, b)$. Com isso, $\{\mathbf{1}, b\}$ é uma base de $A(1, a)$ e também $b^2 = -\mathbf{1}$. Consequentemente $A(\mathbf{1}, a)$ é isomorfa à $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{C}$.

d) Mostraremos que para todo $a \in A$, $a \neq 0$, temos $\mathbf{1} \in A(a)$. De fato, seja $a \in A$, $a \neq 0$. Já provamos no item (c) que A é quadrática, assim existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que $a^2 = \alpha a + \beta\mathbf{1}$. Consideremos dois casos.

Caso 1: Suponhamos que $\beta \neq 0$. Então $\mathbf{1} = \beta^{-1}(a^2 - \alpha a) \in A(a)$.

Caso 2: Suponhamos que $\beta = 0$. Então $a^2 = \alpha a$. Como A não tem divisores juntos de zero e $a \neq 0$, então $a^2 \neq 0$. Portanto $\alpha \neq 0$. Agora seja $e = \alpha^{-1}a$. Então $e^2 = e$ e $e \neq 0$. Assim, pelo Teorema 3.4.11, temos $e = \mathbf{1}$. Logo $\mathbf{1} = \alpha^{-1}a \in A(a)$. □

3.5.3 Aplicações

Com o Teorema 3.5.8, já podemos classificar alguns tipos de $\mathbb{R}$-álgebras, sendo o próximo teorema um exemplo.

Teorema 3.5.9. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica, com potências associativas, comutativa e sem divisores de zero. Então A é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.5.8, a álgebra A tem unidade. Além disso, para todo $x \in A$ tal que $x \neq 0$, então a subálgebra $A(x)$ gerada por x é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-álgebra e satisfaz $\mathbf{1} \in A(x)$.

1) Suponhamos que, para todo $x \in A$ tal que $x \neq 0$, a subálgebra $A(x)$ gerada por x seja isomorfa a $\mathbb{R}$. Então A é isomorfa a $\mathbb{R}$.

2) Suponhamos que exista $x \in A$ tal que $x \neq 0$ e $A(x)$ seja isomorfa a $\mathbb{C}$. Então $A(x) = \mathbb{R}\mathbf{1} + \mathbb{R}i$ onde $i^2 = -\mathbf{1}$. Mostraremos que $A = \mathbb{R}\mathbf{1} + \mathbb{R}i$. Suponhamos que exista $y \in A \backslash A(x)$. Então $A(y)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$, daí $A(y) = \mathbb{R} + \mathbb{R}j$, onde $j^2 = -\mathbf{1}$. Porém A é comutativa, assim, como $i^2 = j^2$, então temos:

$$0 = i^2 - j^2 = (i - j)(i + j) = (i + j)(i - j).$$

Logo $i = j$ ou $i = -j$, uma contradição. □

Seja A uma álgebra sem divisor junto de zero. A próxima proposição apresentará condições necessárias e suficientes para que A tenha uma unidade. Lembremos que o centro de A é o conjunto dos elementos $x \in A$ tal que $xt = tx$ para todo $t \in A$ e $(x, r, s) = (r, x, s) = (r, s, x) = 0$ para quaisquer $r, s \in A$.

Proposição 3.5.10. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra sem divisor junto de zero. Então A tem unidade se e só se o centro $Z(A)$ tem unidade.

Demonstração. Suponhamos que $Z(A)$ tenha uma unidade e. Notando que e é um idempotente central em A, para todo $a \in A$ temos:

$$e(ae - a) = (ae - a)e = ae^2 - ae = 0,$$

e também:

$$(ea - a)e = e(ea - a) = e^2a - ea = 0,$$

assim $ae = ea = a$ pois A não tem divisores juntos de zero. Logo e é uma unidade de A. □

Agora seja A uma álgebra algébrica sem divisor junto de zero. A próxima proposição apresentará condições necessárias e suficientes para que A tenha uma unidade.

Proposição 3.5.11. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra algébrica sem divisor junto de zero. Então A possui unidade se e só se $Z(A) \neq 0$.

Demonstração. Suponhamos que $Z(A) \neq 0$. Pelos Teoremas 3.5.8 e 3.5.9, então a álgebra $Z(A)$ tem unidade. Agora aplique a Proposição 3.5.10. □

3.6 Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn

Nesta seção, finalmente mostraremos o Teorema Generalizado de Frobenius Zorn. Apresentaremos uma demonstração cujas técnicas são vagamente semelhantes à construção de Cayley-Dickson. Ele pode ser enunciado da seguinte forma.

Teorema 3.6.1 (Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn)**.** Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica alternativa à direita sem divisores juntos de zero. Então A será isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

A demonstração do teorema ocupará todo o remanescente da presente seção. Portanto fixaremos uma $\mathbb{R}$-álgebra A que seja algébrica alternativa à direita e sem divisores juntos de zero.

3.6.1 Proposições Iniciais

Começaremos com algumas proposições úteis para a demonstração do teorema em questão.

Proposição 3.6.2. A álgebra A é alternativa e quadrática.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.8, sabemos que A é uma álgebra com potências associativas.

1) Mostraremos que A é quadrática. De fato, como A é uma álgebra algébrica com potências associativas sem divisores juntos de zero, podemos aplicar o Teorema 3.5.8.

2) Mostraremos que A é alternativa. Sejam $a, b \in A$ dois elementos quaisquer e seja $c = (a, a, b)$. Como A é alternativa à direita, pelo Teorema 3.2.12 de Mikheev temos $c^4 = 0$. Como A não tem divisores juntos de zero e $c^2c^2 = c^2c^2 = 0$, então $c^2 = 0$. Como A não tem divisores juntos de zero e $cc = cc = 0$, então $c = 0$. Logo A é alternativa. □

Proposição 3.6.3. Para quaisquer $x, a, b \in A$ tais que $ab = -ba$, então temos:

$$(xa)b = -(xb)a, \qquad a(bx) = -b(ax). \tag{3.32}$$

Demonstração. Linearizando a identidade alternativa à direita e a identidade alternativa à esquerda, obtemos respectivamente:

$$(xy)z + (xz)y = x(yz) + x(zy), \qquad (yz)x + (zy)x = y(zx) + z(yx),$$

assim, basta fazer $y = a$ e $z = b$. □

3.6.2 O Caso $A \neq \mathbb{R}$

Daqui em diante, consideraremos o caso $A \neq \mathbb{R}$.

Proposição 3.6.4. Para $x \in A$, se $x^2 \in \mathbb{R}$ e $x^2 \geqslant 0$, então $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $x \in A$ tal que $x^2 \in \mathbb{R}$ e $x^2 \geqslant 0$. Então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = \alpha^2$. Desse modo temos:

$$0 = x^2 - \alpha^2 = (x - \alpha)(x + \alpha) = (x + \alpha)(x - \alpha).$$

Porém A não tem divisores juntos de zero, assim $x = \alpha$ ou $x = \alpha$. Consequentemente $x \in \mathbb{R}$. □

Proposição 3.6.5. Para $x \in A$, se $x \notin \mathbb{R}$, então existem $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $\delta \neq 0$ e $(x - \gamma)^2 = -\delta^2$.

Demonstração. Seja $x \in A$ tal que $x \notin \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.6.2, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 = \alpha x + \beta$, de modo que $(x - \frac{\alpha}{2})^2 \in \mathbb{R}$. Como $x \notin \mathbb{R}$, pela Proposição 3.6.4 temos $(x - \frac{\alpha}{2})^2 < 0$, portanto existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta \neq 0$ e $(x - \frac{\alpha}{2})^2 = -\delta^2$. □

Proposição 3.6.6. Existe um $i \in A$ tal que $i^2 = -\mathbf{1}$. Além disso, o subespaço $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$ é uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$.

Demonstração. Existe um $x \in A$ tal que $x \notin \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.6.5, existem $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $\delta \neq 0$ e $(x - \gamma)^2 = -\delta^2$. Sendo $i = \delta^{-1}(x - \gamma)$, temos $i^2 = -\mathbf{1}$. □

Com isso, se $A = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$, então A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

3.6.3 O Caso $A \neq \mathbb{R} + \mathbb{R}i$

Daqui em diante, consideraremos o caso $A \neq \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

Definição 3.6.7. Definimos o seguinte conjunto:

$$C = \{x \in A : xi = ix\}$$

Proposição 3.6.8. $C = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

Demonstração. Evidentemente $\mathbb{R} + \mathbb{R}i \subseteq C$. Agora seja $x \in C$ tal que $x \notin \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.6.5 existem $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $\delta \neq 0$ e $(x - \gamma)^2 = -\delta^2$. Desse modo temos:

$$0 = (x - \gamma)^2 + \delta^2 = (x - \gamma - \delta i)(x - \gamma + \delta i) = (x - \gamma + \delta i)(x - \gamma - \delta i).$$

Porém A não tem divisores juntos de zero, assim $x = \gamma + \delta i$ ou $x = \gamma - \delta i$. Consequentemente $x \in \mathbb{R} + \mathbb{R}i$. □

Definição 3.6.9. Definimos o seguinte conjunto:

$$C^- = \{x \in A : xi = -ix\}.$$

É fácil ver que C^- é um subespaço de A tal que $C \cap C^- = \{0\}$.

Proposição 3.6.10. $A = C \oplus C^-$.

Demonstração. Basta mostrar que $A = C + C^-$. Seja $x \in A$ um elemento qualquer. Pelo Teorema de Artin, a subálgebra $A(x, i)$ é associativa. Assim temos:

$$x = \frac{1}{2}(x - ixi) + \frac{1}{2}(x + ixi). \tag{3.33}$$

Além disso:

$$(ixi)i = ixi^2 = -ix, \qquad i(ixi) = i^2xi = -xi.$$

Portanto $x - ixi \in C$ e $x + ixi \in C^-$. □

Proposição 3.6.11. Para $x \in C^-$ tal que $x \neq 0$, então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma \neq 0$ e $x^2 = -\gamma^2$.

Demonstração. Seja $x \in C^-$ tal que $x \neq 0$. Pelo Teorema de Artin, a subálgebra $A(x,i)$ é associativa. Como $xi = -ix$, então $x^2 i = ix^2$, aí $x^2 \in C$. Além disso, pela Proposição 3.6.2, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 = \alpha x + \beta$. Mas temos $\beta \in \mathbb{R} \subseteq C$, assim $\alpha x = x^2 - \beta \in C$. Mas também $\alpha x \in C^-$, assim $\alpha x = 0$, logo $x^2 = \beta \in \mathbb{R}$. Como $x \in C^-$ e $x \neq 0$, então $x \notin C$, aí $x \notin \mathbb{R}$. Portanto, pela Proposição 3.6.4, temos $x^2 < 0$, logo existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma \neq 0$ e $x^2 = -\gamma^2$. □

Proposição 3.6.12. Existe $j \in C^-$ tal que $j^2 = -\mathbf{1}$. Além disso, o subespaço $C + Cj$ é uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{H}$.

Demonstração. Existe um $x \in C^-$ tal que $x \neq 0$. Pela Proposição 3.6.11, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma \neq 0$ e $x^2 = -\gamma^2$. Se definirmos $j = \gamma^{-1}x$, então $j \in C^-$ e $j^2 = -\mathbf{1}$.

Definamos $k = ij$. Pelo Teorema de Artin, $A(i,j)$ é associativa. Logo deduzimos as seguintes relações dos quatérnios:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -\mathbf{1}, \qquad ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j. \tag{3.34}$$

Consequentemente $C + Cj = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ é uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{H}$. □

Com isso, se $A = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, então A é isomorfa a $\mathbb{H}$.

3.6.4 O Caso $A \neq \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$

Daqui em diante, consideraremos o caso $A \neq \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

Definição 3.6.13. Definimos o seguinte conjunto:

$$H = \{x \in A : xk = (xi)j\}.$$

Proposição 3.6.14. $H = C + Cj$.

Demonstração. A álgebra A é alternativa, assim pela Proposição 3.6.8 temos $C = \mathbb{R} + \mathbb{R}i \subseteq H$. Além disso, para todo $x \in H$, então $(x,i,j) = 0$, assim, pelo Teorema Generalizado de Artin, a subálgebra $A(x,i,j)$ é associativa e em particular temos $A(x,i,j) \subseteq H$.

a) Mostraremos o seguinte:

$$H = C \oplus (C^- \cap H).$$

De fato, pela identidade (3.33), basta mostrarmos que para todo $x \in H$ temos $ixi \in H$. Mas isso é fácil, pois para todo $x \in H$ temos $ixi \in A(x,i,j) \subseteq H$.

b) Agora mostraremos o seguinte:

$$Cj = C^- \cap H.$$

A álgebra A é alternativa e temos $j^2 = -\mathbf{1}$, assim R_j é uma bijeção com inverso $-R_j$. Além disso, para todo $x \in H$ temos $xj \in A(x,i,j) \subseteq H$. Logo é fácil ver que $R_j(H) \subseteq H$.

1) Mostraremos que $R_j(C) \subseteq C^- \cap H$. De fato, para todo $x \in C$, então $xi = ix$ e $A(x,i,j)$ é associativa, aí $xji = -xij = -ixj$, aí $xj \in C^- \cap H$.

2) Mostraremos que $R_j(C^- \cap H) \subseteq C$. De fato, para todo $x \in C^- \cap H$, então $xi = -ix$ e $A(x,i,j)$ é associativa, aí $xji = -xij = ixj$, aí $xj \in C$. □

Definição 3.6.15. Definimos o seguinte conjunto:

$$H^- = \{x \in A : xk = -(xi)j\}.$$

É fácil ver que H é um subespaço tal que $H \cap H^- = \{0\}$.

Proposição 3.6.16. $A = H \oplus H^-$.

Demonstração. Basta mostrar que $A = H + H^-$. Seja $x \in A$ um elemento qualquer. Então temos:

$$x = \frac{1}{2}(x - ((xi)j)k) + \frac{1}{2}(x + ((xi)j)k).$$

Utilizando a identidade alternativa e as relações (3.34) e (3.32), temos:

$$\begin{aligned}((((xi)j)k)i)j &= ((((xi)i)j)k)j = -((xj)k)j = ((xj)j)k = -xk \\ (((xi)j)k)k &= -(xi)j\end{aligned}$$

assim é fácil ver que $x - ((xi)j)k \in H$ e $x + ((xi)j)k \in H^-$. □

Proposição 3.6.17. Para todo $x \in H^-$ temos:

$$ix + xi = jx + xj = kx + xk = 0.$$

Demonstração. Seja $x \in H^-$. Então $xk = -(xi)j$, assim, pelas relações (3.34) e (3.32), temos:

$$x = -(xk)k = ((xi)j)k = ((xj)k)i = ((xk)i)j.$$

Assim, pelas identidades de Moufang, temos:

$$ix = i(((xj)k)i) = (i(xj))(ki) = ((jk)(xj))j = ((j(kx))j)j = -j(kx),$$

de modo que:

$$ix = \frac{1}{2}(ix - j(kx)) = \frac{1}{2}((jk)x - j(kx)) = \frac{1}{2}(j,k,x),$$

mas também:

$$xi = (((xj)k)i)i = -(xj)k,$$

de modo que:

$$xi = \frac{1}{2}(xi - (xj)k) = \frac{1}{2}(x(jk) - (xj)k) = -\frac{1}{2}(x,j,k),$$

logo:

$$ix + xi = \frac{1}{2}(j,k,x) - \frac{1}{2}(x,j,k) = 0.$$

As outras identidades $jx + xj = kx + xk = 0$ são obtidas de maneira análoga. □

Proposição 3.6.18. Existe $l \in H^-$ tal que $l^2 = -\mathbf{1}$. Além disso, o subespaço $H + Hl$ é uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{O}$.

Demonstração. Existe um $x \in H^-$ tal que $x \neq 0$. Pela Proposição 3.6.17, temos $x \in C^-$. Logo, pela Proposição 3.6.11, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma \neq 0$ e $x^2 = -\gamma^2$. Se definirmos $l = \gamma^{-1}x$, então $l \in H^-$ e $l^2 = -\mathbf{1}$.

Definamos $l_1 = l$, $l_2 = il$, $l_3 = jl$ e $l_4 = kl$. Mostraremos que os elementos $\mathbf{1}$, i, j, k, l_1, l_2, l_3 e l_4 formam a seguinte tabela de multiplicação:

	$\mathbf{1}$	i	j	k	l_1	l_2	l_3	l_4
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	i	j	k	l_1	l_2	l_3	l_4
i	i	$-\mathbf{1}$	k	$-j$	l_2	$-l_1$	$-l_4$	l_3
j	j	$-k$	$-\mathbf{1}$	i	l_3	l_4	$-l_1$	$-l_2$
k	k	j	$-i$	$-\mathbf{1}$	l_4	$-l_3$	l_2	$-l_1$
l_1	l_1	$-l_2$	$-l_3$	$-l_4$	$-\mathbf{1}$	i	j	k
l_2	l_2	l_1	$-l_4$	l_3	$-i$	$-\mathbf{1}$	$-k$	j
l_3	l_3	l_4	l_1	$-l_2$	$-j$	k	$-\mathbf{1}$	i
l_4	l_4	$-l_3$	l_2	l_1	$-k$	$-j$	i	$-\mathbf{1}$

Tabela 3.2: *Demonstração do Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn.*

De fato, pela Proposição 3.6.17, temos:

$$li = -il, \qquad lj = -jl, \qquad lk = -kl. \tag{3.35}$$

a) Para $e, e' \in \{\mathbf{1}, i, j, k\}$, então $ee' \in \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, i, -i, j, -j, k, -k\}$, assim, pelas relações (3.35) e (3.32), existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tal que:

$$(el)e' = \varepsilon(ee')l.$$

b) Para $e, e' \in \{\mathbf{1}, i, j, k\}$, então $ee' \in \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, i, -i, j, -j, k, -k\}$, assim, pelas relações (3.35) e (3.32), existem $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in \{1, -1\}$ tais que:

$$e(e'l) = \varepsilon e(le') = \varepsilon' l(ee') = \varepsilon''(ee')l.$$

c) Para $e, e' \in \{\mathbf{1}, i, j, k\}$, então $ee' \in \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, i, -i, j, -j, k, -k\}$, assim, pelas identidades de Moufang e relações (3.35) e (3.32), existem $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$ tais que:

$$(el)(e'l) = \varepsilon(le)(e'l) = \varepsilon l((ee')l) = \varepsilon'(ee')(ll) = -\varepsilon' ee'.$$

Assim $H + Hl = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k + \mathbb{R}l + \mathbb{R}il + \mathbb{R}jl + \mathbb{R}kl$ é uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{O}$. □

Com isso, se $A = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k + \mathbb{R}l + \mathbb{R}il + \mathbb{R}jl + \mathbb{R}kl$, então A é isomorfa a $\mathbb{O}$.

3.6.5 $A = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k + \mathbb{R}l + \mathbb{R}il + \mathbb{R}jl + \mathbb{R}kl$

Diferentemente do que acontece em todas as subseções anteriores, mostraremos que nós de fato temos $A = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k + \mathbb{R}l + \mathbb{R}il + \mathbb{R}jl + \mathbb{R}kl$, encerrando a demonstração do Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn.

Proposição 3.6.19. $A = H + Hl$.

Demonstração. Basta mostrarmos o seguinte:

$$Hl = H^-.$$

A álgebra A é alternativa e $l^2 = -\mathbf{1}$, logo R_l é uma bijeção com inverso $-R_l$.

1) Mostraremos que $R_l(H) \subseteq H^-$. De fato, para todo $x \in H$, então, pelas relações (3.35) e (3.32), temos $(xl)k = -(xk)l = -((xi)j)l = -((xl)i)j$, assim $xl \in H^-$.

2) Mostraremos que $R_l(H^-) \subseteq H$. De fato, para todo $x \in H^-$, então, pelas relações (3.35) e (3.32), temos $(xl)k = -(xk)l = ((xi)j)l = ((xl)i)j$, assim $xl \in H$. □

Capítulo 4

Álgebras Normadas

Neste capítulo, estudamos conceitos e resultados básicos sobre álgebras normadas e pretendemos demonstrar o Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplansky, que diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra normada alternativa à direita sem divisores topológicos juntos de zero é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Gelfand em [Gel41] mostrou que $\mathbb{C}$ é a única $\mathbb{C}$-álgebra normada associativa com divisão, sendo esse resultado chamado de Teorema de Gelfand-Mazur Versão Complexa. Mazur, com a ajuda do Teorema de Frobenius, mostrou em [Maz38] que toda $\mathbb{R}$-álgebra normada associativa com divisão é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, sendo esse resultado chamado Teorema de Gelfand-Mazur Versão Real.

Nieto em [Nie72] generalizou os Teoremas de Gelfand-Mazur para as álgebras alternativas. Por outro lado, Kaplansky em [Kap49] generalizou o Teorema de Gelfand-Mazur para o caso das álgebras sem divisores topológicos juntos de zero, sendo esse resultado chamado de Teorema de Gelfand-Mazur-Kaplansky.

Por fim, El-Mallah e Micali em [EMM80] generalizaram o Teorema de Gelfand-Mazur-Kaplansky para as $\mathbb{R}$-álgebras normadas alternativas sem divisores topológicos juntos de zero. A partir daí, com o Teorema de Mikheev, podemos obter o Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplansky.

Basearemos a apresentação deste capítulo nas referências [CGRP14], [Jun85] e [Arr12]. Na Seção 4.1, apresentaremos as definições e resultados preliminares de análise funcional necessários para o presente trabalho. Na Seção 4.2, iniciaremos o estudo das álgebras normadas e mostraremos o Teorema de Gelfand-Mazur Versão Complexa e o Teorema de Gelfand-Mazur Versão Real. Na Seção 4.3, apresentaremos o conceito de divisores topológicos de zero e seus afins e demonstraremos o Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplansky.

Lembremos da nossa convenção de que $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$.

4.1 Preliminares em Espaços Normados

Como o estudo das álgebras normadas requer alguns resultados a respeito de análise funcional, apresentaremos algumas notações e terminologias sobre espaços métricos, espaços normados e espaços Hilbertianos, mas enunciaremos os resultados necessários sem demonstração.

4.1.1 Espaços Métricos

Definição 4.1.1. Um **espaço métrico** é um conjunto X munido de uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$, chamada **métrica**, tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$:

- $d(x, y) \geqslant 0$.
- $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$.

- $d(x,y) = d(y,x)$.
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Um espaço métrico admite uma estrutura de espaço topológico, conforme as seguintes definições.

Definição 4.1.2. Seja X um espaço métrico. Para $x \in X$ e $r \geqslant 0$ qualquer[1], então:

- O conjunto $B_X(x,r) = \{t \in X : d(t,x) < r\}$ é chamado **bola aberta de centro x e raio r**.
- O conjunto $B_X[x,r] = \{t \in X : d(t,x) \leqslant r\}$ é chamado **bola fechada de centro x e raio r**.

Definição 4.1.3. Seja X um espaço métrico. Dizemos que um $A \subseteq X$ é **aberto** se para cada $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x,\varepsilon) \subseteq A$. Dizemos que um $A \subseteq X$ é **fechado** se $X \backslash A$ é aberto.

Definição 4.1.4. Seja X um espaço métrico. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X.

- Dizemos que a sequência **converge a** $x \in X$, denotado por $x_n \to x$, se para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para quaisquer $n \geqslant n_0$ tenhamos $d(x_n, x) < \varepsilon$. Também denotamos x por $\lim_n x_n$.
- Dizemos que a sequência é de **Cauchy** se para cada $\varepsilon > 0$ existir n_0 tal que para quaisquer $n, m \geqslant n_0$ tenhamos $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Dizemos que X é **completo** (ou que a métrica é **completa**) se toda sequência de Cauchy converge a algum ponto.

Definição 4.1.5. Para espaços métricos X e Y, uma **isometria** é uma função $f : X \to Y$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ para quaisquer $x, y \in X$. Nesse caso, é fácil ver que f é injetora e aí dizemos que X e $f(X)$ são **isométricos**.

Definição 4.1.6. Seja X um espaço métrico e seja $S \subseteq X$ um subconjunto. Definimos o **fecho** de S em X como o conjunto dos $x \in X$ tais que para todo $\varepsilon > 0$ exista $s \in S$ tal que $d(s,x) < \varepsilon$. Denotamos o fecho de S em X por $\overline{S}$ ou também $[S]_X$. A primeira notação é usual, mas a última notação pode ser útil quando falarmos de fecho em relação a subespaços.

Definição 4.1.7. Seja X um espaço métrico. Dizemos que um $A \subseteq X$ é **denso** se $\overline{S} = X$.

Teorema 4.1.8. Dado um espaço métrico X, podemos construir um espaço métrico $\hat{X}$, chamado **completamento de** X, que possui um subespaço W que é isométrico a X e denso em $\hat{X}$. Assim podemos considerar X como subespaço de $\hat{X}$.

De modo mais explícito, o completamento de X pode ser obtido da seguinte maneira. Seja $\check{X}$ o conjunto das sequências de Cauchy em X. Para quaisquer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de Cauchy em X, dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência. Para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \check{X}$ seja $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ sua classe de equivalência. Seja $\hat{X}$ o conjunto das classes de equivalência dos elementos de $\check{X}$. Então existe uma única função $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\hat{d}([x_n]_{n\in\mathbb{N}}, [y_n]_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_n d(x_n, y_n)$$

para quaisquer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \check{X}$. A função $\hat{d}$ é uma métrica em $\hat{X}$. Para cada $x \in X$ denotamos por $[x]$ o elemento $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ onde $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $W = \{[x] : x \in X\}$. Então W é um subconjunto denso de $\hat{X}$. Além disso, a função $f : X \to W$ dada por $f(x) = [x]$ é uma isometria sobrejetora.

Proposição 4.1.9. Sejam X e Y espaços métricos. Então a função:

$$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{d(x,x')^2 + d(y,y')^2}$$

é uma métrica em $X \times Y$ que induz a topologia produto.

[1] Por conveniência incluímos o caso $r = 0$, de modo que $B_X(x,0) = \varnothing$ e $B_X[x,0] = \{x\}$.

4.1.2 Espaços Normados

Definição 4.1.10. Um $\mathbb{K}$**-espaço normado** é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido com uma função de X em $\mathbb{R}$, denotada por $x \mapsto \|x\|$ e chamada **norma**, que satisfaz, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $\|x\| \geqslant 0$.
- $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Se X é um espaço normado, a função dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

é uma métrica, chamada **métrica induzida pela norma**. Nesse caso, o espaço métrico é chamado **espaço métrico induzido pela norma**. Para quaisquer $x, y \in X$ temos:

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\|$$

assim a função norma é contínua. Além disso, é fácil ver que a soma e a multiplicação escalar são contínuas também.

Definição 4.1.11. Seja X um espaço normado.

- Definimos $\mathbb{B}_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ e chamamos de **bola unitária**.
- Definimos $\mathbb{S}_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ e chamamos de **esfera unitária**.

Definição 4.1.12. Um espaço normado X é dito um **espaço de Banach** se a métrica induzida pela norma é completa.

Teorema 4.1.13. Seja X um espaço normado. Então, sendo $\hat{X}$ o completamento do espaço métrico induzido pela norma, existe uma única função $\|\cdot\| : \hat{X} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\|x\| = \lim_n \|x_n\|$$

para toda $x \in \hat{X}$ e para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X que converge a x. Esta função é uma norma em $\hat{X}$, de modo que $\hat{X}$ é um espaço de Banach.

Proposição 4.1.14. Sejam X e Y espaços normados. Seja $T : X \to Y$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- T é contínua.
- T é contínua em 0.
- T é **Lipschitziana**, ou seja, existe $\alpha > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in X$ tenhamos:
$$\|T(x) - T(y)\| \leqslant \alpha \|x - y\|.$$
- Existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in X$ tenhamos:
$$\|T(x)\| \leqslant \alpha \|x\|.$$
- T é **limitada**, ou seja:
$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|T(x)\| = \alpha < \infty.$$

Definição 4.1.15. Para espaços normados X e Y, denotamos por $BL(X, Y)$ o conjunto das funções lineares contínuas. Também definimos $BL(X) = BL(X, X)$. Para cada $T \in BL(X, Y)$, definimos:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left\|T(x)\right\|.$$

Podemos ver que $BL(X, Y)$ é um espaço normado. Além disso, para espaços normados X, Y e Z e funções lineares contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, é fácil ver que $g \circ f : X \to Z$ é uma função linear contínua e satisfaz $\left\|g \circ f\right\| \leqslant \left\|g\right\| \left\|f\right\|$.

Teorema 4.1.16. Seja X um espaço normado, seja Y um espaço de Banach e seja $T : S \to Y$ uma função linear contínua, onde S é um subespaço de X. Então existe uma única função linear contínua $\overline{T} : \overline{S} \to Y$, onde $\overline{S}$ é o fecho do conjunto S em X, que estende T e satisfaz $\left\|\overline{T}\right\| = \|T\|$. Se T é uma isometria, então $\overline{T}$ é uma isometria.

Teorema 4.1.17. Seja X espaço normado e seja Y espaço de Banach. Então $BL(X, Y)$ é um espaço de Banach.

Definição 4.1.18. Para espaço normado X, também definimos $X^\star = BL(X, \mathbb{K})$ e chamamos de **espaço dual topológico** de X. Para espaços normados X e Y e para função linear contínua $f : X \to Y$, se o contexto não causar confusão com função derivada, definimos $f^\star : Y^\star \to X^\star$ por $f^\star(g) = g \circ f$. Como:

$$\left\|f^\star(g)\right\| = \left\|g \circ f\right\| \leqslant \left\|f\right\| \left\|g\right\|,$$

é fácil ver que $f^\star$ é contínua.

Teorema 4.1.19 (Teorema de Hahn-Banach)**.** Seja X um espaço normado e seja $f : S \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo, onde S é um subespaço de X. Então existe um funcional linear contínuo $\overline{f} : X \to \mathbb{K}$ que estende f e satisfaz $\left\|\overline{f}\right\| = \left\|f\right\|$.

Proposição 4.1.20. Sejam X e Y espaços normados. Então a função $T : BL(X, Y) \to BL(Y^\star, X^\star)$ dada por $T(f) = f^\star$ é uma isometria.

Teorema 4.1.21 (Teorema da Função Aberta)**.** Sejam X e Y espaços de Banach e seja $f : X \to Y$ uma função linear contínua sobrejetora. Então f é uma função aberta.

Corolário 4.1.22 (Teorema do Isomorfismo de Banach)**.** Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $f : X \to Y$ uma função linear contínua bijetora. Então f é um homeomorfismo.

Proposição 4.1.23. Sejam X e Y espaços normados. Então a função:

$$\left\|(x, y)\right\| = \sqrt{\|x\|^2 + \left\|y\right\|^2}$$

é uma norma em $X \times Y$ que induz a topologia produto.

Por fim, nós apresentaremos uma proposição útil sobre funções bilineares contínuas, cuja demonstração apresentaremos por não ser muito usual em análise funcional.

Proposição 4.1.24. Sejam X, Y e Z espaços normados e sejam $T : X \times Y \to Z$ uma função bilinear contínua. Então existe um $\alpha > 0$ tal que $\left\|T(x, y)\right\| \leqslant \alpha \left\|(x, y)\right\|^2$.

Demonstração. Existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in X \times Y$ tal que $\|z\| \leqslant \delta$ tenhamos $\left\|T(z)\right\| \leqslant 1$, assim para todo $z \neq 0$, sendo $w = \delta \|z\|^{-1} z$, então $\|w\| = \delta$ e aí temos $\left\|T(w)\right\| \leqslant 1$, mas T é bilinear, de modo que $T(w) = \delta^2 \|z\|^{-2} T(z)$, assim $\left\|T(w)\right\| = \delta^2 \|z\|^{-2} \left\|T(z)\right\|$, assim $\left\|T(z)\right\| \leqslant \delta^{-2} \|z\|^2$. $\square$

4.1.3 Espaços Hilbertianos

Primeiro apresentaremos os espaços pré-Hilbertianos, que são os espaços com produto interno.

Definição 4.1.25. Um $\mathbb{K}$**-espaço pré-Hilbertiano** é um $\mathbb{K}$-espaço com um **produto interno**, ou seja, uma função $X \times X \to X$ em $\mathbb{K}$, denotada por $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$, que satisfaz a seguintes propriedades:

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
- $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
- $\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0$.

Um espaço pré-Hilbertiano admite uma estrutura de espaço normado definindo a norma por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Apresentaremos uma caracterização dos espaços pré-Hilbertianos entre os espaços normados que é uma junção dos resultados obtidos por Jordan e von Neumann no artigo [JVN35], por M. M. Day no artigo [Day47] e por Schoenberg em [Sch52].

Teorema 4.1.26. Seja X um $\mathbb{R}$-espaço normado. Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- A norma de X é proveniente de um produto interno.
- $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ para quaisquer $x, y \in X$.
- $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 4$ para quaisquer $x, y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$.
- $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 \geqslant 4$ para quaisquer $x, y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$.
- $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 \leqslant 4$ para quaisquer $x, y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$.

Agora apresentaremos os espaços Hilbertianos.

Definição 4.1.27. Um **espaço Hilbertiano** é um espaço pré-Hilbertiano cuja norma é completa.

Teorema 4.1.28. Seja X um espaço pré-Hilbertiano. Então o completamento métrico $\hat{X}$ admite uma estrutura de espaço Hilbertiano tal que:

$$\langle x, y \rangle = \lim_n \langle x_n, y_n \rangle,$$

onde x_n e y_n são sequências de elementos de X que convergem a x e y respectivamente.

Proposição 4.1.29. Sejam X e Y espaços pré-Hilbertianos. Então a função:

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$$

é um produto interno em $X \times Y$ que induz a topologia produto.

4.2 Álgebras Normadas

As álgebras normadas surgem naturalmente do estudo das transformações lineares contínuas de um espaço normado nele mesmo. Entre as álgebras normadas estão as álgebras de Banach, que são as álgebras normadas completas associativas e são bastante estudadas em análise funcional.

Na Subseção 4.2.1, nós apresentaremos as álgebras normadas, mostraremos que a multiplicação é sempre contínua e mostraremos que em toda álgebra normada associativa com unidade a função inversão $x \mapsto x^{-1}$ é contínua no conjunto $\mathrm{Inv}(A)$ dos elementos invertíveis de A. Na Subseção 4.2.2, mostraremos que em toda álgebra normada completa associativa com unidade o conjunto $\mathrm{Inv}(A)$ dos elementos invertíveis de A é aberto em A. Na Subseção 4.2.3, apresentaremos o conceito de diferenciabilidade segundo Fréchet e mostraremos que em álgebra normada completa associativa com unidade a função inversão é diferenciável. Na Subseção 4.2.4, mostraremos o Teorema de Gelfand-Mazur Versão Complexa. Na Subseção 4.2.5, mostraremos o Teorema de Gelfand-Mazur Versão Real com base no conceito de complexificação de $\mathbb{R}$-álgebras e nos resultados da subseção anterior.

4.2.1 Conceitos Iniciais

Iniciaremos o estudo das álgebras normadas, apresentando sua definição e alguns exemplos. Os resultados mais importantes desta subseção é o Lema 4.2.4, cujo enunciado diz que a multiplicação é contínua, e a Proposição 4.2.8, cujo enunciado diz que a inversão é contínua caso a álgebra normada seja associativa e com unidade. Os outros resultados serão úteis posteriormente.

Definição 4.2.1. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Uma norma $\|\cdot\|$ no $\mathbb{K}$-espaço vetorial de A é chamada **norma de álgebra** se satisfaz a seguinte propriedade relacionada à multiplicação:

$$\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$$

para quaisquer $a, b \in A$. Nesse caso, dizemos que A é uma **$\mathbb{K}$-álgebra normada**.

Conforme dito na introdução do presente trabalho e no começo desta seção, apresentaremos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.2.2. Seja X um espaço normado e consideremos o espaço normado $A = BL(X)$. A composição de funções é uma multiplicação bilinear em A que é associativa e possui elemento unidade. Além disso, considerando a norma:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left\|T(x)\right\|,$$

então A é uma álgebra normada.

Outro exemplo típico de álgebra normada aparece no seguinte exemplo.

Exemplo 4.2.3. Seja X um conjunto e seja F o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$, munido das seguintes operações:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para $f, g \in F$ e $x \in X$.
- $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$ para $\alpha \in \mathbb{K}$, $f \in F$ e $x \in X$.
- $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ para $f, g \in F$ e $x \in X$.

Então F é um $\mathbb{K}$-álgebra. Seja A o conjunto das funções $f \in F$ tais que exista $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left|f(x)\right|$ para todo $x \in X$. Para cada $f \in A$ consideremos:

$$\left\|f\right\| = \sup_{x \in X} \left\|f(x)\right\|.$$

Então A é uma $\mathbb{K}$-álgebra normada.

Apresentaremos agora várias propriedades básicas das álgebras normadas.

Lema 4.2.4. Seja A uma álgebra normada. Então a multiplicação é contínua.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$. Seja $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2(1+\|a\|+\|b\|)}\}$. Para $x, y \in A$, se tivermos:

$$\|x - a\| < \delta, \qquad \|y - b\| < \delta,$$

então temos:

$$\begin{aligned} \|xy - ab\| &= \|(x-a)(y-b) + a(y-b) + (x-a)b\| \\ &\leqslant \|x-a\|\|y-b\| + \|a\|\|y-b\| + \|x-a\|\|b\| \\ &\leqslant \delta^2 + \|a\|\,\delta + \delta\|b\| \\ &\leqslant \delta(1 + \|a\| + \|b\|) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto a multiplicação é contínua. □

Teorema 4.2.5. Seja A uma álgebra normada. Então o completamento $\hat{A}$ do espaço métrico induzido pelo espaço normado de A é uma álgebra normada também.

Demonstração. Sejam $a, b \in \hat{A}$ e sejam a_n e b_n sequências de elementos de A que convergem respectivamente a a e b. Como a norma é contínua e $\|a_n b_n\| \leqslant \|a_n\|\|b_n\|$ para todo n, então $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$. □

Lema 4.2.6. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada associativa com unidade, e sejam $a, b \in \operatorname{Inv}(A)$, onde $\operatorname{Inv}(A)$ é o conjunto dos elementos invertíveis de A. Então:

i) $\left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| \leqslant \left\|a^{-1}\right\|\left\|b^{-1}\right\|\|a - b\|$.

ii) $\left|\frac{1}{\|a^{-1}\|} - \frac{1}{\|b^{-1}\|}\right| \leqslant \|a - b\|$.

iii) Se $\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, então $\left\|b^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|a^{-1}\|}{1 - \|a^{-1}\|\|a-b\|}$.

Demonstração. Temos o seguinte:

$$a^{-1} - b^{-1} = a^{-1}\mathbf{1} - \mathbf{1}b^{-1} = a^{-1}bb^{-1} - a^{-1}ab^{-1} = (a^{-1}b - a^{-1}a)b^{-1} = \left(a^{-1}(b-a)\right)b^{-1}.$$

i) Temos:

$$\left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| = \left\|\left(a^{-1}(b-a)\right)b^{-1}\right\| \leqslant \left\|a^{-1}\right\|\left\|b^{-1}\right\|\|a-b\|,$$

ii) Tendo em mente que:

$$\left\|b^{-1}\right\| - \left\|a^{-1}\right\| \leqslant \left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| \leqslant \left\|a^{-1}\right\|\left\|b^{-1}\right\|\|a-b\|,$$

segue que:

$$\frac{1}{\|a^{-1}\|} - \frac{1}{\|b^{-1}\|} \leqslant \|a - b\|. \tag{4.1}$$

Analogamente:

$$\frac{1}{\|b^{-1}\|} - \frac{1}{\|a^{-1}\|} \leqslant \|a - b\|.$$

iii) De (4.1) segue que:

$$\frac{1 - \left\|a^{-1}\right\|\|a-b\|}{\|a^{-1}\|} = \frac{1}{\|a^{-1}\|} - \|a - b\| \leqslant \frac{1}{\|b^{-1}\|}. \tag{4.2}$$

Como assumimos a condição:
$$\|a-b\| < \frac{1}{\left\|a^{-1}\right\|},$$
então temos:
$$1-\left\|a^{-1}\right\|\|a-b\| > 0,$$
assim, multiplicando (4.2) por:
$$\frac{\left\|a^{-1}\right\|\left\|b^{-1}\right\|}{1-\left\|a^{-1}\right\|\|a-b\|},$$
obtemos:
$$\left\|b^{-1}\right\| \leqslant \frac{\left\|a^{-1}\right\|}{1-\left\|a^{-1}\right\|\|a-b\|},$$
como queríamos demonstrar. □

Corolário 4.2.7. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada associativa com unidade, seja $a \in A$ e seja $z \in \mathbb{K}$ tal que $a - z\mathbf{1} \in \operatorname{Inv}(A)$ e $|z| > \|\mathbf{1}\|\|a\|$. Então:
$$\left\|(a-z\mathbf{1})^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|\mathbf{1}\|}{|z|-\|\mathbf{1}\|\|a\|}.$$

Demonstração. Temos:
$$\left\|-z\mathbf{1}-(a-z\mathbf{1})\right\| = \|a\| < \frac{1}{\left\|(z\mathbf{1})^{-1}\right\|},$$
e portanto, pelo Lema 4.2.6(iii):
$$\left\|(a-z\mathbf{1})^{-1}\right\| \leqslant \frac{\left\|(z\mathbf{1})^{-1}\right\|}{1-\left\|(z\mathbf{1})^{-1}\right\|\|a\|} = \frac{\|\mathbf{1}\|}{|z|-\|\mathbf{1}\|\|a\|},$$
concluindo a demonstração. □

Proposição 4.2.8. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada associativa com unidade. Então a função $x \mapsto x^{-1}$ de $\operatorname{Inv}(A)$ em A é contínua, onde $\operatorname{Inv}(A)$ é o conjunto dos elementos invertíveis de A.

Demonstração. A função $x \mapsto \frac{1}{\|x^{-1}\|}$ de $\operatorname{Inv}(A)$ em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ é contínua, pois, para todo $x \in A$, pelo Lema 4.2.6(ii) temos:
$$\lim_{t\to x}\left|\frac{1}{\|t^{-1}\|}-\frac{1}{\|x^{-1}\|}\right| \leqslant \lim_{t\to x}\|t-x\| = 0.$$

Porém a função $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ em $\mathbb{R}$ é contínua, assim a função $x \mapsto \left\|x^{-1}\right\|$ de $\operatorname{Inv}(A)$ em $\mathbb{R}$ é contínua. Desse modo, para todo $x \in \operatorname{Inv}(A)$, pelo Lema 4.2.6(i) temos:
$$\lim_{t\to x}\left\|t^{-1}-x^{-1}\right\| \leqslant \left(\lim_{t\to x}\left\|t^{-1}\right\|\right)\cdot\left\|x^{-1}\right\|\cdot\left(\lim_{t\to x}\|t-x\|\right) = \left\|x^{-1}\right\|\cdot\left\|x^{-1}\right\|\cdot 0 = 0,$$
de modo que a função $x \mapsto x^{-1}$ de $\operatorname{Inv}(A)$ em A é contínua. □

4.2.2 Raio Espectral

Nesta subseção, mostraremos o Corolário 4.2.14, cujo enunciado diz que o conjunto $\operatorname{Inv}(A)$ dos elementos invertíveis de A é aberto em A. Para isso, apresentaremos o conceito de raio espectral, que está relacionado ao teste da raiz em convergência de séries e o conceito de raio de convergência em séries de potências.

Definição 4.2.9. Seja A uma álgebra normada associativa, e seja $a \in A$. Definimos o **raio espectral** $\mathfrak{r}(a)$ de a por:

$$\mathfrak{r}(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Obviamente $\mathfrak{r}(a) \leqslant \|a\|$ e também $\mathfrak{r}(\lambda a) = |\lambda| \, \mathfrak{r}(a)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Também é claro que, como um ínfimo de funções contínuas, $\mathfrak{r}(\cdot)$ se torna uma função semicontínua por cima em A.

Lema 4.2.10. Seja α_n uma sequência de reais não negativos tais que:

$$\alpha_{n+m} \leqslant \alpha_n \alpha_m \quad \text{para quaisquer} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Então o limite $\lim \alpha_n^{\frac{1}{n}}$ existe e é igual a $\inf_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^{\frac{1}{n}}$.

Demonstração. Escreva $\alpha = \inf_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^{\frac{1}{n}}$ e seja $\varepsilon > 0$. Fixe k tal que $\alpha_k^{\frac{1}{k}} < \alpha + \varepsilon$. Qualquer número natural $n \geqslant k$ pode ser escrito unicamente na forma $n = q(n)k + r(n)$, onde $q(n) \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant r(n) \leqslant k-1$, portanto, tomando $\alpha_0 = 1$, obtemos:

$$\alpha_n \leqslant \alpha_{r(n)} \alpha_k^{q(n)} \leqslant \max\{1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}\}(\alpha + \varepsilon)^{q(n)k}.$$

Como $\frac{r(n)}{n} \to 0$, temos $\frac{q(n)k}{n} \to 1$ quando $n \to \infty$, assim:

$$\alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \max\{1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}\}^{\frac{1}{n}} (\alpha + \varepsilon)^{\frac{q(n)k}{n}} \to \alpha + \varepsilon$$

quando $n \to \infty$. Portanto $\limsup \alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha + \varepsilon$. Portanto, como ε era arbitrário e $\alpha \leqslant \alpha_n^{\frac{1}{n}}$ para todo n, então $\lim \alpha_n^{\frac{1}{n}} = \alpha$. □

Corolário 4.2.11. Seja A uma álgebra normada associativa e seja $a \in A$. Temos:

i) $\mathfrak{r}(a) = \lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

ii) Se $\mathfrak{r}(a) < 1$, então a sequência a^n tende a zero.

Demonstração. A afirmação (i) segue do Lema 4.2.10 acima e do fato de que:

$$\left\|a^{n+m}\right\| \leqslant \|a^n\| \|a^m\| \quad \text{para quaisquer} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Assuma que $\mathfrak{r}(a) < 1$. Escolha $\mathfrak{r}(a) < \eta < 1$. Pela afirmação (i), temos $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} < \eta$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, assim $\|a^n\| < \eta^n \to 0$. Assim a afirmação (ii) foi demonstrada. □

Corolário 4.2.12. Sejam A e B álgebras normadas associativas, seja $F : A \to B$ um homomorfismo contínuo de álgebras e seja $a \in A$. Então $\mathfrak{r}(F(a)) \leqslant \mathfrak{r}(a)$. Como consequência, toda norma de álgebra equivalente em A nos dá o mesmo raio espectral em A.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\left\|F(a)^n\right\| = \left\|F(a^n)\right\| \leqslant \|F\| \|a^n\|.$$

Assim, tomando raízes n-ésimas e fazendo $n \to \infty$, o Corolário 4.2.11(i) nos dá $\mathfrak{r}(F(a)) \leqslant \mathfrak{r}(a)$. □

Lema 4.2.13. Seja A uma álgebra normada completa associativa com unidade e seja $a \in A$ tal que $\mathfrak{r}(a) < 1$. Então $\mathbf{1} - a \in \mathrm{Inv}(A)$ e também:

$$(\mathbf{1} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n,$$

onde definimos $a_0 = \mathbf{1}$.

Demonstração. Escolha η com $\mathfrak{r}(a) < \eta < 1$. Pelo Corolário 4.2.11(i), temos $\|a^n\| \leqslant \eta^n$ para n suficientemente grande, portanto a série $\sum_{n=0}^{\infty}\|a^n\|$ converge. Segue da completude de A que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge em A. Como para cada n temos:

$$(\mathbf{1}-a)(\mathbf{1}+a+\cdots+a^n) = (\mathbf{1}+a+\cdots+a^n)(\mathbf{1}-a) = \mathbf{1}-a^{n+1},$$

segue que:

$$(\mathbf{1}-a)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)(\mathbf{1}-a) = \mathbf{1}.$$

Assim $\mathbf{1}-a$ é um elemento invertível de A, e sua inversa é $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. □

Corolário 4.2.14. Seja A uma álgebra normada completa associativa com unidade. Temos:

i) Para $a \in A$, se $\|\mathbf{1}-a\| < 1$, então $a \in \mathrm{Inv}(A)$.

ii) Para $a \in \mathrm{Inv}(A)$ e $b \in A$, se $\|a-b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, então $b \in \mathrm{Inv}(A)$.

Demonstração. Temos o seguinte:

i) Basta escrever $a = \mathbf{1}-(\mathbf{1}-a)$ e aplicar o Lema 4.2.13.

ii) Sejam $a \in \mathrm{Inv}(A)$ e $b \in A$ tais que $\|a-b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$. Então temos:

$$\left\|\mathbf{1}-a^{-1}b\right\| = \left\|a^{-1}(a-b)\right\| \leqslant \left\|a^{-1}\right\|\|a-b\| < 1.$$

Assim, pela afirmação (i), temos $a^{-1}b \in \mathrm{Inv}(A)$. Logo $b = a(a^{-1}b) \in \mathrm{Inv}(A)$. □

4.2.3 Diferenciabilidade segundo Fréchet

A derivação de Fréchet é uma derivação definida em espaços normados. Nomeado por Maurice Fréchet, ele geralmente é utilizado para generalizar a derivada de uma função de uma variável real com valores reais ao caso de uma função de várias variáveis reais com valores vetoriais. Ele também é utilizado para definir a derivação funcional utilizada amplamente no cálculo de variações.

Nesta subseção, apresentaremos o conceito de diferenciabilidade segundo Fréchet e revisaremos vários resultados básicos com demonstrações. Em particular, mostraremos o Teorema 4.2.23, cujo enunciado diz que, em toda álgebra normada associativa com unidade A, a função $x \mapsto x^{-1}$ de $\mathrm{Inv}(A)$ em A é diferenciável segundo Fréchet.

Definição 4.2.15. Sejam X e Y espaços normados, Ω um subconjunto aberto de X, f uma função de Ω em Y e x um elemento de Ω. Dizemos que f é dito **Fréchet-diferenciável** em x se existe uma função linear contínua $T : X \to Y$ satisfazendo:

$$\lim_{y\to x}\frac{\left\|f(y)-f(x)-T(y-x)\right\|}{\left\|y-x\right\|} = 0.$$

Proposição 4.2.16. Sejam X e Y espaços normados, $\Omega \subseteq X$ aberto e seja $f : \Omega \to Y$. Se f é diferenciável em x, então f é contínua em x.

Demonstração. Sendo T a derivada de f em x, então para y temos:

$$\left\|f(y)-f(x)\right\| \leqslant \left\|f(y)-f(x)-T(y-x)\right\| + \|T\|\left\|y-x\right\|,$$

assim é fácil ver que:

$$\lim_{y\to x}\left\|f(y)-f(x)\right\| = 0,$$

aí f é contínua em x. □

Proposição 4.2.17. Sejam X e Y espaços normados e seja $T : X \to Y$ função linear contínua. Então T é diferenciável.

Demonstração. Seja $a \in X$. Para todo $x \in X$ temos:

$$T(x) - T(a) - T(x-a) = 0,$$

assim é fácil ver que T é diferenciável. □

Proposição 4.2.18. Sejam X, Y e Z espaços normados e seja $\Omega \subseteq X$ aberto. Sejam $f : \Omega \to Y$ e $g : \Omega \to Z$ funções diferenciáveis em x. Então a função $h : \Omega \to Y \times Z$ dada por $h(x) = (f(x), g(x))$ é diferenciável em x.

Demonstração. Sejam F e G derivadas de f e g em x, então para $t \in \Omega$ temos:

$$h(t) - h(x) - (F(t-x), G(t-x)) = (f(t) - f(x) - F(t-x), g(t) - g(x) - G(t-x)),$$

assim temos:

$$\begin{aligned} & \left\| h(t) - h(x) - (F(t-x), G(t-x)) \right\| \\ = \; & \sqrt{\left\| (f(t) - f(x) - F(t-x) \right\|^2 + \left\| g(t) - g(x) - G(t-x)) \right\|^2}, \end{aligned}$$

logo é fácil ver que h é diferenciável em x. □

Proposição 4.2.19. Sejam X, Y e Z espaços normados e seja $f : X \times Y \to Z$ uma função bilinear contínua. Então f é diferenciável.

Demonstração. Existe um $\alpha > 0$ tal que para todo $z \in X \times Y$ tenhamos $\left\| T(z) \right\| \leqslant \alpha \|z\|^2$. Sejam $a \in X$ e $b \in Y$. Então para $x \in X$ e $y \in Y$ temos:

$$f(x,y) - f(a,b) - (f(x-a,b) + f(a,y-b)) = f(x-a, y-b),$$

assim temos:

$$\left\| f(x,y) - f(a,b) - (f(x-a,b) + f(a,y-b)) \right\| = \left\| f(x-a,y-b) \right\| \leqslant \alpha \left\| (x,y) - (a,b) \right\|^2,$$

logo é fácil ver que f é diferenciável. □

Proposição 4.2.20 (Regra da Cadeia)**.** Sejam X, Y e Z espaços normados. Sejam $U \subseteq X$ aberto em X e seja $V \subseteq Y$ aberto em Y. Sejam $f : U \to V$ e $g : V \to Z$ funções diferenciáveis em x e $f(x)$ respectivamente. Então $g \circ f : U \to Z$ é diferenciável em x.

Demonstração. Seja F derivada de f em x e seja G derivada de g em $f(x)$. Então para $t \in X$ temos:

$$\begin{aligned} & g(f(t)) - g(f(x)) - G(F(t-x)) \\ = \; & g(f(t)) - g(f(x)) - G(f(t) - f(x)) + G(f(t) - f(x) - F(t-x)), \end{aligned}$$

assim:

$$\begin{aligned} & \left\| g(f(t)) - g(f(x)) - G(F(t-x)) \right\| \\ \leqslant \; & \left\| g(f(t)) - g(f(x)) - G(f(t) - f(x)) \right\| + \|G\| \left\| f(t) - f(x) - F(t-x) \right\|. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$, sendo $\varepsilon' = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+\|F\|+\|G\|}\}$, existe um $\delta > 0$ tal que para todo $u \in V$ tal que $\|u - f(x)\| \leqslant \delta$ tenhamos:

$$\|g(u) - g(f(x)) - G(u - f(x))\| \leqslant \varepsilon' \|u - f(x)\|,$$

além disso, existe $\gamma > 0$ tal que para todo $t \in U$ tal que $\|t - x\| \leqslant \gamma$ tenhamos:

$$\|f(t) - f(x) - F(t - x)\| \leqslant \varepsilon' \|t - x\|,$$

assim, sendo $\gamma' = \min\{\gamma, \frac{\delta}{\varepsilon'+\|F\|}\}$, para $t \in U$ tal que $\|t - x\| \leqslant \gamma'$ temos:

$$\|f(t) - f(x)\| \leqslant (\varepsilon' + \|F\|)\|t - x\| \leqslant \delta,$$

assim:

$$\|g(f(t)) - g(f(x)) - G(f(t) - f(x))\| \leqslant \varepsilon' \|f(t) - f(x)\| \leqslant \varepsilon' (\varepsilon' + \|F\|)\|t - x\|,$$

assim:

$$\begin{aligned} \|g(f(t)) - g(f(x)) - G(F(t - x))\| &\leqslant \varepsilon' (\varepsilon' + \|F\|)\|t - x\| + \varepsilon' \|G\|\|t - x\| \\ &\leqslant \varepsilon' (1 + \|F\| + \|G\|)\|t - x\| \\ &\leqslant \varepsilon \|t - x\|. \end{aligned}$$

Consequemente, $g \circ f$ é diferenciável. □

Corolário 4.2.21. Sejam X e Y espaços normados, seja $U \subseteq X$ aberto em X e seja, $f, g : \Omega \to Y$ funções diferenciáveis em x. Então:

- Para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, então $\alpha f + \beta g : \Omega \to Y$ é diferenciável.
- Se Y é uma álgebra normada, então a função $f \cdot g : \Omega \to Y$ é diferenciável.

Lema 4.2.22. Seja A uma álgebra associativa com unidade. Então:

$$x^{-1} - y^{-1} - y^{-1}(y - x)y^{-1} = y^{-1}(y - x)x^{-1}(y - x)y^{-1}$$

para quaisquer $x, y \in \mathrm{Inv}(A)$.

Demonstração. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} x^{-1} - y^{-1} - y^{-1}(y - x)y^{-1} &= x^{-1}(y - x)y^{-1} - y^{-1}(y - x)y^{-1} \\ &= (x^{-1} - y^{-1})(y - x)y^{-1} \\ &= y^{-1}(y - x)x^{-1}(y - x)y^{-1}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Teorema 4.2.23. Seja A uma álgebra normada completa associativa com unidade. Então $\mathrm{Inv}(A)$ é aberto em A. Além disso, a função $x \mapsto x^{-1}$ de $\mathrm{Inv}(A)$ em A é Fréchet-diferenciável.

Demonstração. A primeira conclusão segue do Corolário 4.2.14(ii). Fixemos $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Então, pelo Lema 4.2.22, para cada $x \in \mathrm{Inv}(A)$ temos:

$$x^{-1} - a^{-1} - (-a^{-1}(x - a)a^{-1}) = a^{-1}(x - a)x^{-1}(x - a)a^{-1},$$

e assim:
$$\left\|x^{-1}-a^{-1}-(-a^{-1}(x-a)a^{-1})\right\| \leqslant \left\|a^{-1}\right\|^2\left\|x^{-1}\right\|\|x-a\|^2.$$

Como a função $x \mapsto \left\|x^{-1}\right\|$ é contínua pelo Lema 4.2.6(ii), temos:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{-1}-a^{-1}-(-a^{-1}(x-a)a^{-1})}{\|x-a\|}=0.$$

Portanto, a função $x \mapsto x^{-1}$ é diferenciável em a sendo a derivada a função $T \in BL(A)$ dada por $T(x) = -a^{-1}xa^{-1}$. □

4.2.4 Espectros de Elementos

Nesta subseção, mostraremos o Teorema 4.2.27, chamada Teorema Gelfand-Mazur Versão Complexa, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{C}$-álgebra normada associativa com divisão clássica é isomorfa a $\mathbb{C}$. Para isso, apresentaremos o conceito de espectro de um elemento em uma álgebra associativa com unidade e veremos que o teorema principal é consequência do Teorema 4.2.26, cujo enunciado diz que o espectro de todo elemento de toda $\mathbb{C}$-álgebra normada associativa com unidade nunca é vazio.

O conceito de espectro a ser apresentado nesta subseção é uma generalização do conceito familiar de espectro de uma função linear T de um espaço vetorial X nele mesmo, que consiste de um conjunto cujos elementos são chamados de autovalores de T. O espectro de uma função linear tem como uma de suas principais motivações a formulação matemática da mecânica quântica. Por exemplo, os autovalores da função linear chamada de operador de Schrödinger estão relacionados com as frequências de ondas eletromagnéticas dos estados de uma partícula.

No caso particular em que X é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : X \to X$ é uma função linear, o Teorema 4.2.26 pode ser provado levando em consideração o polinômio característico de T e o fato de que $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.

Definição 4.2.24. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade e seja $a \in A$. Então definimos o **espectro de a relativo a** A, denotado por $\mathrm{sp}(A,a)$, ou simplesmente $\mathrm{sp}(a)$ se A ficar claro pelo contexto, como o subconjunto de $\mathbb{K}$ dado por:

$$\mathrm{sp}(A,a) = \{\mu \in \mathbb{K} : a - \mu\mathbf{1} \notin \mathrm{Inv}(A)\}.$$

Lema 4.2.25. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada associativa com unidade, seja $a \in A$, e seja W um subconjunto aberto de $\mathbb{K}$ contido em $\mathbb{K}\backslash\mathrm{sp}(A,a)$. Então a função $f : W \to A$ dada por $f(\lambda) = (a-\lambda\mathbf{1})^{-1}$ é diferenciável em todo ponto $\lambda \in W$ com derivada $f'(\lambda) = (a-\lambda\mathbf{1})^{-2}$.

Demonstração. Fixemos $\lambda \in W$. Então para $\mu \in W$ temos:

$$\begin{aligned} f(\mu) - f(\lambda) &= (a-\mu\mathbf{1})^{-1} - (a-\lambda\mathbf{1})^{-1} \\ &= (a-\mu\mathbf{1})^{-1}\left((a-\lambda\mathbf{1}) - (a-\mu\mathbf{1})\right)(a-\lambda\mathbf{1})^{-1} \\ &= (\mu-\lambda)(a-\mu\mathbf{1}){-1}(a-\lambda)^{-1}, \end{aligned}$$

e, por causa da Proposição 4.2.8, temos:

$$f'(\lambda) = \lim_{\mu\to\lambda}(a-\mu\mathbf{1})^{-1}(a-\lambda\mathbf{1})^{-1} = (a-\lambda\mathbf{1})^{-2},$$

encerrando a demonstração. □

Teorema 4.2.26. Seja A uma $\mathbb{C}$-álgebra normada associativa com unidade, e seja $a \in A$. Então $\mathrm{sp}(A, a) \neq \varnothing$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathrm{sp}(A, a) = \varnothing$. Então, pelo Lema 4.2.25, a função $f : \mathbb{C} \to A$ dada por $f(z) = (a - z\mathbf{1})^{-1}$ é uma função inteira. Por outro lado, pelo Corolário 4.2.7, para cada $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > \|\mathbf{1}\| \|a\|$, temos:

$$\|f(z)\| \leqslant \frac{\|\mathbf{1}\|}{|z| - \|\mathbf{1}\| \|a\|},$$

e como consequência:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Segue do Teorema de Liouville que $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Em particular:

$$a^{-1} = f(0) = 0,$$

uma contradição. □

Agora mostraremos o Teorema de Gelfand-Mazur para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Teorema 4.2.27 (Teorema de Gelfand-Mazur Versão Complexa)**.** Seja A uma $\mathbb{C}$-álgebra normada associativa com divisão clássica. Então A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $a \in A$. Pelo Teorema 4.2.26, existe $\lambda \in \mathrm{sp}(A, a)$. Portanto:

$$a - \lambda\mathbf{1} \notin \mathrm{Inv}(A) = A \backslash \{0\}.$$

Assim $a = \lambda\mathbf{1}$. Consequentemente $A = \mathbb{C}\mathbf{1}$. □

4.2.5 Complexificação

Nesta subseção, mostraremos o Teorema 4.2.38, chamado Teorema de Gelfand-Mazur Versão Real, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra normada associativa com divisão clássica é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Para isso, apresentaremos o conceito de complexificação de uma $\mathbb{R}$-álgebra, que será uma $\mathbb{C}$-álgebra que de certo modo estende a $\mathbb{R}$-álgebra inicial, e mostraremos vários resultados básicos para o presente trabalho.

Baseado na demonstração do Teorema de Gelfand-Mazur Versão Complexa, estudaremos o comportamento do espectro de um elemento de uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa com unidade. Diferentemente do caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o espectro pode ser vazio, porém podemos obter uma descrição do espectro de uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa com unidade em relação à sua complexificação através da Proposição 4.2.37. Esse resultado, por sua vez, será utilizado na demonstração do teorema principal desta subseção.

Definição 4.2.28. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra. Definimos a **complexificação** de A como o conjunto $A_{\mathbb{C}} = A \times A$ e nele definimos a seguinte estrutura. Para $(x, y), (z, t) \in A_{\mathbb{C}}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definimos:

- $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$.
- $(\alpha + \beta i)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$.
- $(x, y)(z, t) = (xz - yt, xt + yz)$.

É fácil ver que $A_{\mathbb{C}}$, com as operações e a multiplicação por escalar definidas acima é uma $\mathbb{C}$-álgebra. Além disso, se A for associativa, então $A_{\mathbb{C}}$ também o será.

É fácil ver que $A' = \{(x, 0) : x \in A\}$ é uma $\mathbb{R}$-subálgebra de A, naturalmente isomorfa a A como $\mathbb{R}$-álgebra, o isomorfismo $f : A \to A'$ sendo dado por $f(x) = (x, 0)$. Identifiquemos A' com A, ou seja, para todo $x \in A$ temos:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + i(y, 0) = x + iy,$$

logo todo elemento $u \in A_{\mathbb{C}}$ se escreve de modo único na forma $u = x + iy$ onde $x, y \in A$.

Lema 4.2.29. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra de dimensão finita. Se $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é uma base de A, então $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é uma base de $A_{\mathbb{C}}$ como $\mathbb{C}$-espaço vetorial e portanto $\dim_{\mathbb{R}}(A) = \dim_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}})$.

Seja f uma transformação linear de A em A. Consideremos $f_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \to A_{\mathbb{C}}$ dada por $f_{\mathbb{C}}(u + iv) = f(u) + if(v)$. É fácil ver que $f_{\mathbb{C}}$ é uma transformação linear do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $A_{\mathbb{C}}$ nele mesmo.

Lema 4.2.30. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra de dimensão finita e f uma transformação linear de A em A. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, então λ é uma raiz característica de f se e só se λ é uma raiz característica de $f_{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Seja $\{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base do $\mathbb{R}$-espaço vetorial de A. Então, pelo Lema 4.2.29, o conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é uma base do $\mathbb{C}$-espaço vetorial de $A_{\mathbb{C}}$. Entretanto temos $f_{\mathbb{C}}(a_i) = f(a_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, as matrizes de $f_{\mathbb{C}}$ e f em relação à base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ são iguais. Portanto, os polinômios característicos de $f_{\mathbb{C}}$ e f são os mesmos. $\square$

Lema 4.2.31. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com elemento unidade, sem divisores de zero e de dimensão finita. Então, para todo $x \in A \backslash \mathbb{R}\mathbf{1}$, os fatores irredutíveis do polinômio característico de R_x em sua decomposição em $\mathbb{R}[X]$ são de grau 2. Como consequência, $\dim_{\mathbb{R}}(A)$ é par.

Demonstração. Seja $x \in A \backslash \mathbb{R}\mathbf{1}$, seja I o operador identidade em A e seja $p_x = \det(XI - R_x)$ o polinômio característico de R_x. Suponhamos que exista $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que α seja raiz de p_x. Então $0 = \det(\alpha I - R_x) = \det(R_{\alpha\mathbf{1} - x})$, assim $R_{\alpha\mathbf{1}-x}$ não é invertível. Como A não tem divisores de zero, então $\alpha\mathbf{1} - x = 0$, daí $x = \alpha\mathbf{1} \in \mathbb{R}\mathbf{1}$, o que é uma contradição. Portanto o teorema está demonstrado. $\square$

Observação 4.2.32. Para quaisquer $x \in A$ e $u + iv \in A_{\mathbb{C}}$ temos:

$$(R_x)_{\mathbb{C}}(u + iv) = R_x(u) + iR_x(v) = ux + ivx = (u + iv)x.$$

Portanto podemos indicar $(R_x)_{\mathbb{C}}$ por R_x se o contexto não der margem a confusão.

Lema 4.2.33. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com elemento unidade, sem divisores de zero e de dimensão finita. Sejam $x \in A \backslash \mathbb{R}\mathbf{1}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se λ é uma raiz característica de R_x, então $\lambda \notin \mathbb{R}$ e também existe $u + iv \in A_{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$ tal que $R_x(u + iv) = \lambda(u + iv)$.

Demonstração. Sejam $x \in A \backslash \mathbb{R}\mathbf{1}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Suponhamos que λ seja uma raiz característica de R_x. Então, pelo Lema 4.2.31, temos $\lambda \notin \mathbb{R}$. Além disso, pelo Lema 4.2.30, existe $u + iv \in A_{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$ tal que $R_x(u + iv) = \lambda(u + iv)$. $\square$

Lema 4.2.34. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra normada tal que a norma satisfaz:

$$\|xy\| = \|x\|\|y\|$$

para quaisquer $x, y \in A$. Suponhamos que A tenha elemento unidade e tenha dimensão finita. Sejam $x \in A \backslash \mathbb{R}\mathbf{1}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se λ é uma raiz característica de R_x, então $|\lambda| = \|x\|$.

Demonstração. Sejam $x \in A \backslash \mathbb{R}\mathbf{1}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Suponhamos que λ seja uma raiz característica de R_x. Pelo Lema 4.2.33, então $\lambda \notin \mathbb{R}$ e existe $z = u + iv \neq 0$ tal que $R_x(z) = \lambda z$ e daí $R_x^m(z) = \lambda^m z$ para todo inteiro $m \geqslant 1$. Pondo $\lambda = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, onde $\rho = |\lambda|$ e θ é um argumento de λ, temos que $R_x^m(u + iv) = \rho^m(\cos(m\theta) + i\sin(m\theta))$, daí:

$$\begin{aligned} R_x^m(u) &= \rho^m(u\cos(m\theta) - v\sin(m\theta)), \\ R_x^m(v) &= \rho^m(u\sin(m\theta) + v\cos(m\theta)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $|\cos(m\theta)| \leqslant 1$ e $|\sin(m\theta)| \leqslant 1$, obtemos os seguintes resultados:

$$\|R_x^m(u)\| = \|u\|\|x\|^m \leqslant \rho^m\gamma \quad \text{e} \quad \|R_x^m(v)\| = \|v\|\|x\|^m \leqslant \rho^m\gamma,$$

onde $\gamma = \|u\| + \|v\|$, daí:

$$\|u\| \|x\|^m + \|v\| \|x\|^m \leqslant 2\rho^m \gamma,$$

logo $\gamma \|x\|^m \leqslant 2\rho^m \gamma$, então $(\|x\| \rho^{-1})^m \leqslant 2$ para todo inteiro $m \geqslant 1$, logo $\|x\| \rho^{-1} \leqslant 1$, portanto $\|x\| \leqslant \rho$. Por outro lado, de (4.3) temos:

$$\begin{aligned} & R_x^m(u\cos(m\theta) + v\sin(m\theta)) \\ = \;& \rho^m(u\cos^2(m\theta) - v\sin(m\theta)\cos(m\theta) + u\sin^2(m\theta) + v\cos(m\theta)\sin(m\theta)) \\ = \;& \rho^m u. \end{aligned}$$

Da mesma forma obtemos:

$$R_x^m(v\cos(m\theta) - u\sin(m\theta)) = \rho^m v.$$

Logo $\rho^m \|u\| \leqslant \gamma \|x\|^m$ e $\rho^m \|v\| \leqslant \gamma \|x\|^m$, daí temos $\rho^m \gamma \leqslant 2\|x\|^m \gamma$, portanto $(\rho \|x\|^{-1})^m \leqslant 2$ para todo inteiro $m \geqslant 1$, logo $\rho \|x\|^{-1} \leqslant 1$, então $\rho \leqslant \|x\|$. Como $\|x\| \leqslant \rho$, temos $\rho = \|x\|$. □

Agora mostraremos que a complexificação de uma $\mathbb{R}$-álgebra normada é uma $\mathbb{C}$-álgebra normada.

Definição 4.2.35. Sejam A uma $\mathbb{R}$-álgebra normada e $x + iy \in A_{\mathbb{C}}$, onde $A_{\mathbb{C}}$ é a complexificação de A. Definimos:

$$|x + iy| = \|x\| + \|y\|, \qquad \|x + iy\|_{\mathbb{C}} = \sup_\theta \left| e^{i\theta}(x + iy) \right|.$$

Lema 4.2.36. Sejam A uma $\mathbb{R}$-álgebra normada e $A_{\mathbb{C}}$ a sua complexificação. Então $A_{\mathbb{C}}$, munida de $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$, é uma álgebra normada e além disso, para todo $x \in A$, temos $\|x\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{2}\|x\|$.

Demonstração. Mostraremos que $A_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra normada:

1) Para todo $x, y \in A$, se $x + iy \neq 0$, então $|x + iy| > 0$.

2) Para todo $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $|\alpha(x + iy)| = |\alpha||x + iy|$.

3) Para todo $x, y, z, t \in A$ temos:

$$\begin{aligned} |(x + iy)(z + it)| &= |(xz - yt) + i(xt + yz)| \\ &= \|xz - yt\| + \|xt + yz\| \\ &\leqslant \|x\|\|z\| + \|y\|\|t\| + \|x\|\|t\| + \|y\|\|z\| \\ &= \left(\|x\| + \|y\|\right)(\|z\| + \|t\|) \\ &= |x + iy||z + it|. \end{aligned}$$

4) Para todo $x, y, z, t \in A$ temos:

$$\begin{aligned} |(x + iy) + (z + it)| &= |(x + z) + i(y + t)| \\ &= \|x + z\| + \|y + t\| \\ &\leqslant \|x\| + \|z\| + \|y\| + \|t\| \\ &= |x + iy| + |z + it|. \end{aligned}$$

5) Para todo $x, y \in A$ temos:

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\theta} \left(\|(\cos\theta)x - (\sin\theta)y\| + \|(\sin\theta)x + (\cos\theta)y\| \right).$$

6) Para todo $x, y \in A$, se $x + iy \neq 0$, então:

$$\left| e^{i0}(x + iy) \right| = |x + iy| = \|x\| + \|y\| > 0,$$

portanto:

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} > 0.$$

7) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, temos $\lambda = \rho e^{i\gamma}$ onde $\rho, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\rho \geqslant 0$, daí para $x, y \in A$ temos:

$$\|\lambda(x + iy)\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\theta} \left| \rho e^{(\theta+\gamma)i}(x + iy) \right| = \rho \sup_{\theta} \left| e^{(\theta+\gamma)i}(x + iy) \right| = |\lambda| \|x + iy\|_{\mathbb{C}}.$$

8) Para todo $x, y, z, t \in A$ e $\theta \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left| e^{i\theta}(x + iy)(z + it) \right| \leqslant \left| e^{\frac{i\theta}{2}}(x + iy) \right| \left| e^{\frac{i\theta}{2}}(z + it) \right|,$$

logo:

$$\|(x + iy)(z + it)\|_{\mathbb{C}} \leqslant \|x + iy\|_{\mathbb{C}} \|z + it\|_{\mathbb{C}}.$$

9) Para todo $x, y, z, t \in A$ e $\theta \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left| e^{i\theta} \left((x + iy) + (z + it) \right) \right| \leqslant \left| e^{i\theta}(x + iy) \right| + \left| e^{i\theta}(z + it) \right|,$$

logo:

$$\|(x + iy) + (z + it)\|_{\mathbb{C}} \leqslant \|x + iy\|_{\mathbb{C}} + \|z + it\|_{\mathbb{C}}.$$

Por fim temos:

$$\|x\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\theta} \left| e^{i\theta} x \right| = \left(\sup_{\theta} \left(|\cos\theta| + |\sin\theta| \right) \right) \|x\| = \sqrt{2} \|x\|$$

para todo $x \in A$. $\square$

Proposição 4.2.37. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa com unidade e seja $a \in A$. Então:

$$\mathrm{sp}(A_{\mathbb{C}}, a) = \{\alpha + \beta i \in \mathbb{C} : (a - \alpha\mathbf{1})^2 + \beta^2\mathbf{1} \notin \mathrm{Inv}(A)\},$$

onde $A_{\mathbb{C}}$ é a complexificação de A.

Demonstração. Seja:

$$\overline{\alpha + \beta i} = \alpha - \beta i$$

a conjugação usual dos complexos e para $x + iy \in A_{\mathbb{C}}$ definamos:

$$\overline{x + iy} = x - iy.$$

Então temos as seguintes propriedades:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ para quaisquer $z, w \in A_{\mathbb{C}}$.
- $\overline{\gamma z} = \overline{\gamma} \cdot \overline{z}$ para quaisquer $\gamma \in \mathbb{C}$ e $z \in A_{\mathbb{C}}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ para quaisquer $z, w \in A_{\mathbb{C}}$.

Para $z \in A_{\mathbb{C}}$, é fácil ver que z é invertível em $A_{\mathbb{C}}$ se e só se $\overline{z}$ é invertível em $A_{\mathbb{C}}$. Além disso, para $z \in A_{\mathbb{C}}$, se z é invertível em $A_{\mathbb{C}}$, então $\overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$. Também é fácil ver que, para todo $z \in A_{\mathbb{C}}$, então $z \in A$ se e só se $\overline{z} = z$. Com essas afirmações, podemos concluir que, para todo $z \in A_{\mathbb{C}}$, se z é invertível em $A_{\mathbb{C}}$ e $z \in A$, então $z^{-1} \in A$. Além disso, para todo $z \in A_{\mathbb{C}}$ temos:

$$\mathrm{sp}(A_{\mathbb{C}}, \overline{z}) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \mathrm{sp}(A_{\mathbb{C}}, z)\}.$$

Seja $a \in A \subseteq A_{\mathbb{C}}$. Então $\overline{a} = a$, o que implica que $\mathrm{sp}(A_{\mathbb{C}}, a)$ é invariante sob a conjugação em $\mathbb{C}$. Agora, tendo em mente que para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos:

$$\big(a - (\alpha + \beta i)\mathbf{1}\big)\,\big(a - (\alpha - \beta i)\mathbf{1}\big) = (a - \alpha\mathbf{1})^2 + \beta^2\mathbf{1} \in A,$$

segue que:

$$\alpha + \beta i \in \mathrm{sp}(A_{\mathbb{C}}, a) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta i \in \mathrm{sp}(A_{\mathbb{C}}, a) \quad \Leftrightarrow \quad (a - \alpha\mathbf{1})^2 + \beta^2\mathbf{1} \notin \mathrm{Inv}(A),$$

concluindo a demonstração. □

Agora mostraremos o Teorema de Gelfand-Mazur para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 4.2.38 (Teorema de Gelfand-Mazur Versão Real)**.** Se A é $\mathbb{R}$-álgebra normada associativa com divisão clássica, então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Demonstração. Seja $A_{\mathbb{C}}$ a complexificação de A e seja $a \in A$. Pelo Teorema 4.2.26, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha + \beta i \in \mathrm{sp}(A_{\mathbb{C}}, a)$. Então, pela Proposição 4.2.37, temos:

$$(a - \alpha\mathbf{1})^2 + \beta^2\mathbf{1} \notin \mathrm{Inv}(A).$$

Como A é uma álgebra com divisão clássica, deduzimos que $(a - \alpha\mathbf{1})^2 + \beta^2\mathbf{1} = 0$. Portanto, como isso vale para todo $a \in A$, vemos que A é uma álgebra quadrática, e o Teorema de Frobenius-Zorn se aplica. □

4.3 Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplansky

Lembremos que o Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra algébrica alternativa à direita sem divisores juntos de zero é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Por outro lado, o Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplansky pode ser visto como uma versão topológica, ou uma versão normada, do Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn. De fato, ele diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra normada alternativa à direita sem divisores topológicos juntos de zero é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Portanto, basta mostrar que toda $\mathbb{R}$-álgebra normada alternativa à direita sem divisores topológicos juntos de zero é uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica.

Na Subseção 4.3.1, apresentaremos os divisores topológicos de zero e seus afins, que formam a versão topológica, ou a versão normada, dos divisores de zero e seus afins. Na Subseção 4.3.2, mostraremos que toda $\mathbb{R}$-álgebra normada com potências associativas sem divisores topológicos juntos de zero é algébrica. Na Subseção 4.3.3, encerraremos a demonstração do Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplansky e apresentaremos outras aplicações da subseção anterior.

4.3.1 Divisores Topológicos de Zero

Nesta subseção introduziremos os conceitos de divisores topológicos de zero e estudaremos a relação disso com os operadores lineares limitados por baixo. Para a demonstração do Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplansky, somente a Definição 4.3.1 e a Proposição 4.3.2 serão necessárias. Os outros resultados nesta subseção, entre os quais o Corolário 4.3.10 é o principal, serão utilizados posteriormente para a demonstração do Teorema 6.2.18.

Definição 4.3.1. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e seja $a \in A \backslash \{0\}$.

- a é um **divisor topológico de zero à direita** se existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\|b_n\| = 1$ para todo n e $b_n a \to 0$.
- a é um **divisor topológico de zero à esquerda** se existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\|b_n\| = 1$ para todo n e $ab_n \to 0$.
- a é um **divisor topológico de zero** se existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\|b_n\| = 1$ para todo n e $ab_n \to 0$ ou $b_n a \to 0$.
- a é um **divisor topológico junto de zero** se existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\|b_n\| = 1$ para todo n e $ab_n \to 0$ e $b_n a \to 0$.

Proposição 4.3.2. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada e seja $a \neq 0$ um elemento de A. Se a não é um divisor topológico junto de zero, então existe um $m \in \mathbb{R}$ com $m > 0$ tal que $m\|b\| \leqslant \|ab\| + \|ba\|$ para todo $b \in A$.

Demonstração. Suponhamos que para todo $m > 0$ exista $b \in A$ tal que $m\|b\| > \|ab\| + \|ba\|$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in A$ tal que $\frac{1}{n}\|b_n\| > \|ab_n\| + \|b_n a\|$. Tomando $a_n = \frac{b_n}{\|b_n\|}$, temos $\|a_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e as sequências aa_n e $a_n a$ convergem a zero em A. Portanto a é um divisor topológico junto de zero em A. □

Proposição 4.3.3. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada completa associativa com unidade e seja a um elemento da fronteira de $\mathrm{Inv}(A)$ relativa a A. Então a é um divisor topológico junto de zero.

Demonstração. Como a está na fronteira de $\mathrm{Inv}(A)$ relativa a A, segue do Teorema 4.2.23 que $a \notin \mathrm{Inv}(A)$ e existe uma sequência a_n em $\mathrm{Inv}(A)$ tal que $a_n \to a$. Pelo Lema 4.2.6(ii), para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ temos:

$$\left| \left\| a_n^{-1} \right\|^{-1} - \left\| a_m^{-1} \right\|^{-1} \right| \leqslant \|a_n - a_m\| .$$

Portanto $\left\| a_n^{-1} \right\|^{-1}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim existe:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \left\| a_n^{-1} \right\|^{-1} .$$

Assuma que $\lambda \neq 0$. Então $\left\| a_n^{-1} \right\|$ converge a λ^{-1}, portanto é limitada. Ou seja, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left\| a_n^{-1} \right\| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 4.2.6(i), para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ temos $\left\| a_n^{-1} - a_m^{-1} \right\| \leqslant M^2\|a_n - a_m\|$, portanto a_n^{-1} é uma sequência de Cauchy em A. Se $a_n^{-1} \to b \in A$, então $a_n a_n^{-1} \to ab$ e $a_n^{-1} a_n \to ba$, de modo que $ab = ba = \mathbf{1}$, assim $a \in \mathrm{Inv}(A)$, uma contradição.

Portanto $\lambda = 0$, ou seja, $\left\| a_n^{-1} \right\|^{-1} \to 0$. Agora, escrevendo $b_n = \left\| a_n^{-1} \right\| a_n^{-1}$ e vendo que:

$$ab_n = (a - a_n)b_n + \left\| a_n^{-1} \right\|^{-1} \mathbf{1} \quad \text{e} \quad b_n a = b_n(a - a_n) + \left\| a_n^{-1} \right\|^{-1} \mathbf{1},$$

concluímos que $ab_n \to 0$ e $b_n a \to 0$. Portanto a é um divisor topológico junto de zero. □

Definição 4.3.4. Seja F um operador linear limitado em um espaço normado X. Definimos $k(F)$ assim:

$$k(F) = \inf_{x \neq 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}.$$

Dizemos que F é **limitado por baixo** se $k(F) > 0$.

Proposição 4.3.5. Seja X um espaço normado e seja $F \in BL(X)$. Então temos:

i) F é um divisor topológico de zero à esquerda em $BL(X)$ se e só se F não é limitado por baixo.

ii) Se F é um divisor topológico de zero à direita em $BL(X)$, então F não é uma função aberta.

Demonstração. Assuma que F seja um divisor topológico de zero à esquerda em $BL(X)$. Então existe uma sequência F_n de elementos de $BL(X)$ tal que $\|F_n\| = 1$ para todo n e $FF_n \to 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, escolha um $y_n \in X$ tal que $\|y_n\| = 1$ e $\|F_n(y_n)\| > \frac{n}{n+1}$ e seja $x_n = \frac{F_n(y_n)}{\|F_n(y_n)\|}$. Então x_n é uma sequência de elementos de X tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n e $F(x_n) \to 0$, já que:

$$\|F(x_n)\| = \frac{\|FF_n(y_n)\|}{\|F_n(y_n)\|} \leqslant 2\|FF_n\|\,,$$

assim F não é limitado por baixo.

Agora assuma que F não seja limitado por baixo. Então existe uma sequência x_n de elementos de X tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n e $F(x_n) \to 0$. Agora tome um elemento $f \in X^\star$ tal que $\|f\| = 1$ e para $n \in \mathbb{N}$ considere o operador linear limitado F_n em X definido por $F_n(x) = f(x)x_n$ para todo $x \in X$. Então F_n se torna uma sequência de elementos de $BL(X)$ tal que $\|F_n\| = 1$ para todo n e $FF_n \to 0$, assim F é um divisor topológico de zero em $BL(X)$.

Finalmente assuma que F é um divisor topológico de zero à direita em $BL(X)$. Então $F^\star$ é um divisor topológico de zero à esquerda em $BL(X^\star)$. Portanto, pelo primeiro parágrafo da prova, existe uma sequência f_n de elementos de $X^\star$ tal que $\|f_n\| = 1$ para todo n e $F^\star(f_n) \to 0$. Se F fosse uma função aberta, como $0 \in F(X)$, então existiria $\delta > 0$ tal que $\delta\mathbb{B}_X \subseteq F(\mathbb{B}_X)$, logo para todo $n \in \mathbb{N}$ teríamos:

$$\|F^\star(f_n)\| = \sup_{x\in\mathbb{B}_X} |f_n(F(x))| \geqslant \delta \sup_{x\in\mathbb{B}_X} |f_n(x)| = \delta\|f_n\| = \delta,$$

uma contradição. □

Corolário 4.3.6. Seja X um espaço de Banach e seja F elemento da fronteira $\mathrm{Inv}(BL(X))$ relativa a $BL(X)$. Então F não é limitado por baixo e não é sobrejetor.

Demonstração. Seja F elemento da fronteira de $\mathrm{Inv}(BL(X))$ em relação a $BL(X)$. Pela Proposição 4.3.3, então F é um divisor topológico junto de zero. Em particular, F é um divisor topológico de zero à esquerda e à direita. Portanto, pela Proposição 4.3.5, a função F não é limitada por baixo e não é aberta. Pelo Teorema da Função Aberta, concluímos que F não é sobrejetora. □

Lema 4.3.7. Seja X um espaço de Banach não nulo e seja P um subconjunto conexo de $BL(X)$. Assuma que todo elemento de P é limitado por baixo ou sobrejetor. Então todos os elementos de P são bijetores ou nenhum elemento de P é bijetor.

Demonstração. Suponhamos que a conclusão do lema não é verdade. Então:

$$Q = \{F \in P : F \text{ é bijetora}\}$$

é um subconjunto não vazio e próprio do conjunto conexo P, assim existe F_0 na fronteira de Q relativa a P. Pelo Teorema do Isomorfismo de Banach, então F_0 está na fronteira de $\mathrm{Inv}(BL(X))$ relativa a $BL(X)$. Portanto segue do Corolário 4.3.6 que F_0 não é limitada por baixo e não é sobrejetora, contradizendo nossa hipótese. □

Lema 4.3.8. Seja X um espaço de Banach. Então, para $F, G \in BL(X)$ temos:

$$|k(F) - k(G)| \leqslant \|F - G\|\,.$$

Além disso, para $F \in BL(X)$, se F é limitado por baixo e não é bijetor, então a bola aberta de centro F e raio $k(F)$ consiste somente de elementos que são limitados por baixo e não são bijetores.

Demonstração. Sejam $F, G \in BL(X)$. Para todo $x \in X$ temos:

$$(k(F) - \|F - G\|)\|x\| \leqslant \left\|F(x)\right\| - \left\|(F - G)(x)\right\| \leqslant \left\|G(x)\right\|,$$

assim $k(F) - \|F - G\| \leqslant k(G)$, o que mostra a primeira afirmação do lema. Disso segue que, para $F \in BL(X)$, se F é limitado por baixo, sendo B a bola aberta em $BL(X)$ de centro F e raio $k(F)$, então todo elemento de B é limitado por baixo. Portanto, se F não é bijetora, então, pelo Lema 4.3.7, nenhum elemento de B é bijetor. □

Lema 4.3.9. Seja X um espaço de Banach e seja $F : X \to X$ uma isometria linear não sobrejetora. Então $F - I_X$ não é limitado por baixo e não é sobrejetor.

Demonstração. Seja r um real positivo. Se $r < 1$, então temos:

$$\left\|F - (F - rI_X)\right\| = r < 1 = k(F),$$

assim, pelo Lema 4.3.8, $F - rI_x \notin \mathrm{Inv}(BL(X))$. Por outro lado, se $r > 1$, então:

$$\left\|I_X - \left(I_X - \frac{1}{r}F\right)\right\| = \frac{1}{r} < 1,$$

assim, pelo Corolário 4.2.14, temos $I_X - \frac{1}{r}F \in \mathrm{Inv}(BL(X))$, assim $F - rI_X \in \mathrm{Inv}(BL(X))$. Segue que $F - I_X$ está na fronteira de $\mathrm{Inv}(BL(X))$ em relação a $BL(X)$, assim o Corolário 4.3.6 se aplica. □

Aplicando o lema anterior para o completamento de um espaço normado X, obtemos o seguinte.

Corolário 4.3.10. Seja X um espaço normado e seja $F : X \to X$ uma isometria tal que $F(X)$ não é denso. Então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tais que $\|x_n\| \to 1$ e $T(x_n) - x_n \to 0$.

Demonstração. Seja $\hat{X}$ o completamento de X e consideremos X como um subespaço denso de $\hat{X}$. Então existe uma isometria $\hat{F} : \hat{X} \to \hat{X}$ que estende F. É fácil ver que $\hat{F}(\hat{X})$ está contido no fecho topológico de $F(X)$ em relação a $\hat{X}$, assim, se $\hat{F}(\hat{X})$ fosse denso em $\hat{X}$, então $F(X)$ seria denso em $\hat{X}$, assim $F(X)$ seria denso em X, contradição. Portanto, pelo Lema 4.3.9, existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\hat{X}$ tal que $\left\|y_n\right\| = 1$ para todo n e $\hat{F}(y_n) - y_n \to 0$. Como X é denso em $\hat{X}$, então para todo n existe $x_n \in X$ tal que $\left\|x_n - y_n\right\| < \frac{1}{n}$, assim temos $\|x_n\| \to 1$ e $F(x_n) - x_n \to 0$. □

4.3.2 Centroide Estendida

Nesta subseção, mostraremos o Teorema 4.3.26, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra normada com potências associativas sem divisores topológicos juntos de zero é quadrática, em particular algébrica.

Para isso, nós apresentaremos o conceito de centroide estendida de uma álgebra prima e também vários resultados intermediários, que serão apenas detalhes técnicos para o teorema principal desta subseção. Lembremos que uma $\mathbb{K}$-álgebra A é dita prima se $A \neq 0$ e, para quaisquer ideais I e J de A, se $I \neq 0$ e $J \neq 0$, então $IJ \neq 0$.

Primeiro, apresentaremos uma propriedade imediata de álgebras primas que será útil para esta subseção.

Proposição 4.3.11. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Para quaisquer ideais I e J de A, se $I \neq 0$ e $J \neq 0$, então $I \cap J \neq 0$.

Demonstração. Sejam I e J ideais de A. Suponhamos que $I \neq 0$ e $J \neq 0$. Como A é uma $\mathbb{K}$-prima, então $IJ \neq 0$. Porém é fácil ver que $IJ \subseteq I \cap J$. Consequentemente $I \cap J \neq 0$. □

Apresentaremos o conceito de centralizador parcialmente definido.

Definição 4.3.12. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Um **centralizador parcialmente definido** em A é uma função $f : D_f \to A$ que satisfaz as seguintes condições:

- D_f é um ideal não nulo de A.
- f é linear.
- $f(xa) = f(x)a$ para quaisquer $x \in D_f$ e $a \in A$.
- $f(ax) = af(x)$ para quaisquer $x \in D_g$ e $a \in A$.

Denotamos por $\mathscr{C}$ o conjunto dos centralizadores parcialmente definidos em A.

Proposição 4.3.13. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Então todo centralizador parcialmente definido não nulo é injetor.

Demonstração. Seja f um centralizador parcialmente definido.

1) Mostraremos que $\mathrm{Ker}(f)$ é um ideal de A. De fato, para quaisquer $x \in \mathrm{Ker}(f)$ e $a \in A$, temos:

$$f(xa) = f(x)a = 0a = 0, \qquad f(ax) = af(x) = a0 = 0,$$

logo $xa \in \mathrm{Ker}(f)$ e $ax \in \mathrm{Ker}(f)$.

2) Mostraremos que $\mathrm{Im}(f)$ é um ideal de A. De fato, para quaisquer $y \in \mathrm{Im}(f)$ e $a \in A$, existe $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$, assim:

$$ya = f(x)a = f(xa) \in \mathrm{Im}(f), \qquad ay = af(x) = f(ax) \in \mathrm{Im}(f).$$

3) Mostraremos que $\mathrm{Ker}(f)\mathrm{Im}(f) = 0$. Sejam $x \in \mathrm{Ker}(f)$ e $y \in \mathrm{Im}(f)$. Então $f(x) = 0$ e existe $z \in D_f$ tal que $y = f(z)$. Assim:

$$xy = xf(z) = f(xz) = f(x)z = 0z = 0.$$

4) Por fim, como a álgebra A é prima e $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ são dois ideais de A que satisfazem $\mathrm{Ker}(f)\mathrm{Im}(f) = 0$, então $\mathrm{Ker}(f) = 0$ ou $\mathrm{Im}(f) = 0$, ou seja, f é injetor ou $f = 0$. □

Corolário 4.3.14. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Sejam f e g centralizadores parcialmente definidos. Suponhamos que exista $r \in D_f \cap D_g$ tal que $r \neq 0$ e $f(r) = g(r)$. Então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f \cap D_g$.

Demonstração. Definamos $h : D_f \cap D_g \to A$ por $h(x) = f(x) - g(x)$. Então h é um centralizador parcialmente definido. Agora temos $r \in D_f \cap D_g$, $r \neq 0$ e $h(r) = 0$. Pela Proposição 4.3.13, temos $h = 0$, ou seja, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f \cap D_g$. □

Agora apresentaremos uma relação entre os centralizadores parcialmente definidos.

Definição 4.3.15. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Para $f, g \in \mathscr{C}$, dizemos que $f \sim g$ se e só se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f \cap D_g$.

Proposição 4.3.16. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. A relação $\sim$ em $\mathscr{C}$ apresentada na Definição 4.3.15 é uma relação de equivalência em $\mathscr{C}$.

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Para $f \in \mathscr{C}$, temos $f(x) = f(x)$ para todo $x \in D_f \cap D_f$, assim $f \sim f$.

2) Para $f, g \in \mathscr{C}$, se $f \sim g$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f \cap f_g$, assim $g(x) = f(x)$ para todo $x \in D_g \cap D_f$, portanto $g \sim f$.

3) Sejam $f, g, h \in \mathscr{C}$. Suponhamos que $f \sim g$ e $g \sim h$. Então temos $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f \cap D_g$ e $g(y) = h(y)$ para todo $y \in D_g \cap D_h$. Entretanto $D_f \cap D_g \cap D_h$ é um ideal não nulo de A, assim existe $r \in D_f \cap D_g \cap D_h$ tal que $r \neq 0$. Assim $r \in D_f \cap D_g$ e $r \in D_g \cap D_h$, de modo que $f(r) = g(r)$ e $g(r) = h(r)$. Logo $r \in D_f \cap D_h$, $r \neq 0$ e $f(h) = h(r)$. Consequentemente, pelo Corolário 4.3.14, temos $f(z) = h(z)$ para todo $z \in D_f \cap D_h$, portanto $f \sim h$. □

Com esses resultados, podemos definir o conceito de centroide estendida.

Definição 4.3.17. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. A **centroide estendida** C_A de A é definida como o conjunto quociente de $\mathscr{C}$ pela relação de equivalência $\sim$ apresentada na Definição 4.3.15. Para cada $f \in \mathscr{C}$, seja $\pi(f)$ a classe de equivalência de f em relação a $\sim$.

Queremos definir uma estrutura de álgebra na centroide estendida. Começaremos com a seguinte definição.

Definição 4.3.18. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima.

- Para $f, g \in \mathscr{C}$ definimos $f + g : D_f \cap D_g \to A$ por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Para $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathscr{C}$, definimos $\alpha \cdot f : D_f \to A$ por $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha(f(x))$.
- Para $f, g \in \mathscr{C}$ definimos $f \cdot g : g^{-1}(D_f) \to A$ por $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$.

Proposição 4.3.19. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Então temos o seguinte:

a) Para $f, g \in \mathscr{C}$, então $f + g \in \mathscr{C}$.

b) Para $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathscr{C}$, então $\alpha \cdot f \in \mathscr{C}$.

c) Para $f, g \in \mathscr{C}$, então $f \cdot g \in \mathscr{C}$.

Demonstração. Provaremos apenas que, para $f, g \in \mathscr{C}$, então $g^{-1}(D_f)$ é um ideal não nulo de A, pois o resto é fácil de verificar. Sejam $f, g \in \mathscr{C}$.

1) Mostraremos que $g^{-1}(D_f)$ é um ideal de A. É fácil ver que $g^{-1}(D_f)$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de A. Agora, para $x \in g^{-1}(D_f)$ e $a \in A$, temos $g(x) \in D_f$, mas D_f é um ideal de A, assim:

$$g(xa) = g(x)a \in D_f, \qquad g(ax) = ag(x) \in D_f,$$

assim $xa \in g^{-1}(D_f)$ e $ax \in g^{-1}(D_f)$.

2) Agora mostraremos que $D_f D_g \subseteq g^{-1}(D_f)$. De fato, para $x \in D_f$ e $y \in D_g$, como D_f é ideal de A, então:

$$g(xy) = xg(y) \in D_f,$$

assim $xy \in g^{-1}(D_f)$.

3) Como A é uma $\mathbb{K}$-álgebra prima e D_f e D_g são ideais não nulos de A, então $D_f D_g$ é um ideal não nulo de A. □

Proposição 4.3.20. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Então temos:

a) Para $f, f', g, g' \in \mathscr{C}$, se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, então $f + f' \sim g + g'$.

b) Para $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f, f' \in \mathscr{C}$, se $f \sim f'$, então $\alpha \cdot f \sim \alpha \cdot f'$.

c) Para $f, f', g, g' \in \mathscr{C}$, se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, então $f \cdot f' \sim g \cdot g'$.

Demonstração. Temos o seguinte

a) Sejam $f, f', g, g' \in \mathscr{C}$ tais que $f \sim f'$ e $g \sim g'$. Então $f(x) = f'(x)$ para todo $x \in D_f \cap D_{f'}$ e também $g(y) = g'(y)$ para todo $y \in D_g \cap D_{g'}$. Assim $(f+g)(z) = f(z) + g(z) = f'(z) + g'(z) = (f' + g')(z)$ para todo $z \in (D_f \cap D_g) \cap (D_{f'} \cap D_{g'})$. Portanto $f + g \sim f' + g'$.

b) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f, f' \in \mathscr{C}$ tais que $f \sim f'$. Então $f(x) = f'(x)$ para todo $x \in D_f \cap D_{f'}$. Assim temos $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha(f(x)) = \alpha(f'(x)) = (\alpha \cdot f')(x)$ para todo $x \in D_f \cap D_{f'}$. Portanto $\alpha \cdot f \sim \alpha \cdot f'$.

c) Sejam $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathscr{C}$ tais que $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$. Então $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e $g_1(y) = g_2(y)$ para todo $y \in D_{g_1} \cap D_{g_2}$. Assim $(f_1 \cdot g_1)(z) = f_1(g_1(z)) = f_2(g_2(z)) = (f_2 \cdot g_2)(z)$ para todo $z \in g_1^{-1}(D_{f_1}) \cap g_2^{-1}(D_{f_2})$. Portanto $f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2$. □

Com esses resultados, as operações apresentadas na seguinte definição estão bem definidas na centroide estendida.

Definição 4.3.21. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima.

- Para $f, g \in \mathscr{C}$ definimos $\pi(f) + \pi(g) = \pi(f + g)$.
- Para $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathscr{C}$, definimos $\alpha \cdot \pi(f) = \pi(\alpha \cdot f)$.
- Para $f, g \in \mathscr{C}$ definimos $\pi(f) \cdot \pi(g) = \pi(f \cdot g)$.

Proposição 4.3.22. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Então a centroide estendida C_A de A, munida das operações apresentadas na Definição 4.3.21, é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa, comutativa e com divisão clássica, ou seja, é uma extensão de corpos sobre $\mathbb{K}$.

Demonstração. É uma tarefa corriqueira mostrar que C_A, munida das operações apresentadas na Definição 4.3.21, é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade. A unidade de C_A é dada por $\pi(I_A)$, onde I_A é a função identidade em A. O elemento 0 de C_A é dado por $\pi(0)$, onde $0 : A \to A$ é a função definida por $0(x) = 0$.

1) Mostraremos que C_A é comutativa. Basta mostrar que $f \cdot g \sim g \cdot f$ para quaisquer $f, g \in \mathscr{C}$. Sejam $f, g \in \mathscr{C}$. Então $g^{-1}(D_f)$ e $f^{-1}(D_g)$ são ideais não nulos de A, aí $g^{-1}(D_f) \cdot f^{-1}(D_g)$ é um ideal não nulo de A, assim existem $r \in g^{-1}(D_f)$ e $s \in f^{-1}(D_g)$ tais que $rs \neq 0$. Assim:

$$(f \cdot g)(rs) = f(g(rs)) = f(g(r)s) = g(r)f(s) = g(rf(s)) = g(f(rs)) = (g \cdot f)(rs).$$

Pela Proposição 4.3.15, temos $fg \sim gf$.

2) Mostraremos que C_A é uma álgebra com divisão clássica. Basta mostrar que, para $f \in \mathscr{C}$ tal que $f \neq 0$, existe $g \in \mathscr{C}$ tal que $f \cdot g \sim g \cdot f \sim I_A$. Seja $f \in \mathscr{C}$ tal que $f \neq 0$. Pela Proposição 4.3.13, a função f é injetora e $\mathrm{Im}(f)$ é um ideal não nulo de A. Assim existe a função inversa $g : \mathrm{Im}(f) \to D_f$, além disso é fácil verificar que $g \in \mathscr{C}$. Portanto concluímos que $f \cdot g \sim g \cdot f \sim I_A$. □

Agora consideraremos as centroides estendidas de álgebras normadas primas.

Proposição 4.3.23. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada prima. Suponhamos que todo centralizador parcialmente definido em A seja uma função contínua. Então a centroide estendida C_A de A satisfaz o seguinte:

i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então C_A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então C_A é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Demonstração. Pelos Teoremas 4.2.27 e 4.2.38 e pela Proposição 4.3.22, então basta mostrarmos que C_A é uma $\mathbb{K}$-álgebra normada. Para todo $\alpha \in C_A$, definimos:

$$\|\alpha\| = \inf_{\pi(f)=\alpha} \|f\|.$$

Mostraremos que C_A, com a função $\alpha \mapsto \|\alpha\|$, é uma $\mathbb{K}$-álgebra normada.

1) É fácil ver que $\|\lambda\alpha\| = |\lambda|\|\alpha\|$ para quaisquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\alpha \in C_A$.

2) Sejam $\alpha, \beta \in C_A$. Para $f, g \in \mathscr{C}$ tais que $\pi(f) = \alpha$ e $\pi(g) = \beta$, então temos:

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \qquad \|f \cdot g\| \leqslant \|f\| \|g\|.$$

Portanto:

$$\|\alpha + \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|, \qquad \|\alpha \cdot \beta\| \leqslant \|\alpha\| \|\beta\|.$$

3) É fácil ver que $\|\mathbf{1}\| = 1$.

4) Seja $\alpha \in C_A$ tal que $\alpha \neq 0$. Pela Proposição 4.3.22, existe $\beta \in C_A$ tal que $\alpha \cdot \beta = \mathbf{1}$. Pelos itens (2) e (3), temos:

$$1 = \|\mathbf{1}\| = \|\alpha\beta\| \leqslant \|\alpha\| \|\beta\|.$$

Em particular $\|\alpha\| \|\beta\| \neq 0$. Consequentemente $\|\alpha\| \neq 0$. □

Agora mostraremos que toda álgebra normada sem divisores topológicos juntos de zero é uma álgebra prima.

Proposição 4.3.24. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada sem divisores topológicos juntos de zero. Então A é uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Além disso, a centroide estendida C_A de A satisfaz o seguinte:

i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então C_A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então C_A é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em algumas etapas.

1) Mostraremos que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra semiprima. Seja P um ideal de A tal que $P \neq 0$. Então existe uma $x \in P$ tal que $x \neq 0$. Assim x não é um divisor topológico junto de zero. Logo $xx \neq 0$, mas também $xx \in PP$, consequentemente $PP = 0$.

2) Mostraremos que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Sejam P e Q ideais de A tais que $PQ = 0$ e $P \neq 0$. Então $(P \cap Q)(P \cap Q) \subseteq PQ = 0$. Pelo item (1), a álgebra A é semiprima, de modo que $P \cap Q = 0$. Porém temos $QP \subseteq P \cap Q = 0$, de modo que $QP = 0$. Como $P \neq 0$, então existe $a \in P$ tal que $a \neq 0$, de modo que a não é um divisor topológico de zero. Para todo $b \in Q$, então temos $ab \in PQ = 0$ e $ba \in QP = 0$, assim $ab = ba = 0$, mas $a \neq 0$, aí temos $b = 0$. Consequentemente temos $Q = 0$.

3) Pela Proposição 4.3.23, basta mostrar que todo centralizador parcialmente definido em A é uma função contínua. Seja f um centralizador parcialmente definido. Então D_f é um ideal não nulo de A, de modo que existe $x \in D_f$ tal que $x \neq 0$, assim x não é um divisor topológico de zero. Logo, pela Proposição 4.3.2, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m > 0$ e para todo $y \in A$ tenhamos:

$$m\|y\| \leqslant \|xy\| + \|yx\|.$$

Agora, para todo $y \in D_f$, temos:

$$m\|f(y)\| \leqslant \|xf(y)\| + \|f(y)x\| = \|f(x)y\| + \|yf(x)\| \leqslant 2\|f(x)\| \|y\|.$$

Assim f é uma função contínua. □

Proposição 4.3.25. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada associativa, comutativa e sem divisores topológicos juntos de zero. Então temos o seguinte:

i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então A é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Demonstração. Pela Proposição 4.3.24, então A é uma $\mathbb{K}$-álgebra prima. Agora basta mostrar que A é isomorfa a uma subálgebra de sua centroide estendida C_A.

Como A é associativa e comutativa, então o operador $L_a : A \to A$ de multiplicação à esquerda por a é um centralizador parcialmente definido para todo $a \in A$. Consideremos a função $\varphi : A \to C_A$ definida por $\varphi(a) = \pi(L_a)$. Então é fácil ver que φ é um homomorfismo.

Mostraremos que φ é injetor. Seja $a \in A$ tal que $\varphi(a) = 0$. Então $L_a \sim 0$, assim temos $ab = L_a(b) = 0$ para todo $b \in A$. Como A é comutativa e $A \neq 0$, então existe $b \in A$ tal que $b \neq 0$, aí $ab = ba = 0$, logo $a = 0$. □

Teorema 4.3.26. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada com potências associativas e sem divisores topológicos juntos de zero. Então A é quadrática. Mais precisamente, temos o seguinte:

i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então, para todo $a \in A$ tal que $a \neq 0$, a álgebra $A(\mathbf{1}, a)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Além disso, para $a \in A$ tal que $a \neq 0$, então $\mathbf{1} \in A(a)$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.5.8, basta mostrar que A é algébrica, ou seja, para todo $a \in A$, a subálgebra $A(a)$ de A gerada por a tem dimensão finita. Seja $a \in A$. Então $A(a)$ é associativa e comutativa. Logo a Proposição 4.3.25 implica que $A(a)$ tem dimensão no máximo 2. □

4.3.3 Resultado Principal

Nesta subseção, aplicaremos o Teorema 4.3.26 para mostrar o Teorema 4.3.29, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra normada alternativa à direita sem divisores topológicos juntos de zero é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Também apresentaremos outras aplicações do Teorema 4.3.26, que são versões topológicas, ou versões normadas, dos resultados presentes na Subseção 3.5.3.

O seguinte teorema é uma versão topológica do Teorema 3.5.9.

Teorema 4.3.27. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra normada com potências associativas, comutativa e sem divisores topológicos de zero. Então A é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Demonstração. Segue do Teorema 4.3.26 e do Teorema 3.5.9. □

A seguinte proposição é uma versão topológica da Proposição 3.5.11.

Proposição 4.3.28. Seja A uma álgebra normada sem divisor topológico junto de zero. Então A tem unidade se e só se $Z(A) \neq 0$.

Demonstração. Suponhamos que $Z(A) \neq 0$. Pelos Teoremas 4.3.26 e 4.3.27, então $Z(A)$ possui uma unidade. Agora basta aplicar a Proposição 3.5.10. □

Agora mostraremos o Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplansky, que é uma versão topológica do Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn.

Teorema 4.3.29. [Teorema Generalizado de Gelfand-Mazur-Kaplanksy] Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra normada alternativa à direita sem divisores topológicos juntos de zero. Então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Demonstração. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra normada alternativa à direita sem divisores topológicos juntos de zero. Pelo Teorema 3.2.8, então A é uma $\mathbb{R}$-álgebra com potências associativas. Pelo Teorema 4.3.26, então A é quadrática, em particular A é algébrica. Por fim, pelo Teorema Generalizado de Frobenius-Zorn, então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. □

Capítulo 5

Álgebras com Valor Absoluto

As $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto surgiram principalmente no problema de Adolf Hurwitz sobre a expressividade de produtos de somas de quadrados como somas de quadrados. Mais especificamente, queremos encontrar todos os possíveis valores de $n \in \mathbb{N}$ e de $a_{ijk} \in \mathbb{R}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, tais que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijk}x_iy_j\right)^2 \tag{5.1}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. De fato esse problema está bastante relacionado a $\mathbb{R}$-álgebras normadas satisfazendo $\|xy\| = \|x\|\|y\|$ para quaisquer $x, y \in A$.

1) Por um lado, sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a_{ijk} \in \mathbb{R}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, soluções de (5.1). Consideremos o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $A = \mathbb{R}^n$ munido da norma euclidiana:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = x_1^2 + \cdots + x_n^2. \tag{5.2}$$

Considerando a multiplicação bilinear em A dada por:

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) = \left(\sum_{i,j}^{n} a_{ij1}x_iy_j, \ldots, \sum_{i,j}^{n} a_{ijn}x_iy_j\right). \tag{5.3}$$

Então a $\mathbb{R}$-álgebra A assim construída satisfaz:

$$\|xy\| = \|x\|\|y\| \tag{5.4}$$

para quaisquer $x, y \in A$.

2) Por outro lado, seja $A = \mathbb{R}^n$ munido da norma euclidiana dada por (5.2) e seja $(x, y) \mapsto xy$ uma multiplicação bilinear em A satisfazendo (5.4) para quaisquer $x, y \in A$. Então podemos determinar $a_{ijk} \in \mathbb{R}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, tais que (5.3). Assim a equação (5.4) se torna a equação (5.1).

Na Seção 5.1, mostraremos o Teorema de Urbanik-Wright, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com unidade é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Na Seção 5.2, mostraremos um resultado de Albert cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto de dimensão finita tem dimensão igual a 1, 2, 4 ou 8 e apresentaremos os resultados obtidos sobre o problema da classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão finita. Por fim, na Seção 5.3, apresentaremos vários resultados concernentes às $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto satisfazendo a identidade $(x, x, x) = 0$, inclusive a classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão finita satisfazendo a identidade $(x, x, x) = 0$.

5.1 Teorema de Urbanik-Wright

Nesta seção, apresentaremos os conceitos e resultados básicos sobre álgebras com valor absoluto e demonstramos o Teorema de Urbanik-Wright, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com unidade é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Hurwitz em [Hur98] mostrou que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiano, com unidade e de dimensão finita é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Mais tarde, Albert em [Alb47] mostrou que era possível retirar a hipótese de que a norma fosse pré-Hilbertiana. Em seguida, Albert em [Alb49a] conseguiu enfraquecer a hipótese de que a álgebra fosse de dimensão finita para a hipótese de que a álgebra fosse algébrica. Por fim, Urbanik e Wright em [UW60] retiraram a hipótese de que a álgebra fosse algébrica.

Entretanto, pretendemos mostrar o Teorema de Urbanik-Wright de outra maneira, conforme sugerido em [RP92] e [CGRP14]. El-Mallah em [EM90] mostrou que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com idempotente não nulo no centro comutativo é pré-Hilbertiana. Com esse resultado, podemos obter uma demonstração mais curta do Teorema de Urbanik-Wright.

Na Subseção 5.1.1, apresentaremos as álgebras de valor absoluto e alguns resultados úteis posteriormente no presente trabalho. Na Subseção 5.1.2, mostraremos o resultado de El-Mallah cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com idempotente não nulo no centro comutativo é pré-Hilbertiana. Na Subseção 5.1.3, utilizaremos o resultado da subseção anterior para mostrar o Teorema de Urbanik-Wright.

5.1.1 Álgebras com Valor Absoluto

Nesta subseção, apresentaremos a definição de álgebras com valor absoluto, alguns exemplos úteis e alguns resultados úteis posteriormente para o presente trabalho. Mais especificamente, os Lemas 5.1.8 e 5.1.10 são os principais resultados que serão utilizados posteriormente no decorrer do presente capítulo.

Definição 5.1.1. Uma **álgebra com valor absoluto** é uma álgebra normada A que satisfaz:

$$\|ab\| = \|a\|\|b\|$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Observemos que uma álgebra com valor absoluto não tem divisores de zero.

Exemplo 5.1.2. A $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto. De fato, temos a seguinte identidade, chamada de **identidade de Brahmagupta–Fibonacci**:

$$(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)(\beta_0^2 + \beta_1^2) = (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1)^2 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)^2$$

para quaisquer $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.1.3. A $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ com a norma euclidiana é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto. De fato, temos a seguinte identidade, chamada de **identidade de Euler**:

$$\begin{aligned}(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) &= (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3)^2 \\ &+ (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 \\ &+ (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1)^2 \\ &+ (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)^2\end{aligned}$$

para quaisquer $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.1.4. A $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ com a norma euclidiana é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto. De fato, temos a seguinte identidade, chamada **identidade de Degen**:

$$
\begin{aligned}
& (\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\alpha_5^2+\alpha_6^2+\alpha_7^2)(\beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2+\beta_5^2+\beta_6^2+\beta_7^2) \\
= \; & (\alpha_0\beta_0-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4-\alpha_5\beta_5-\alpha_6\beta_6-\alpha_7\beta_7)^2 \\
+ \; & (\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4-\alpha_6\beta_7+\alpha_7\beta_6)^2 \\
+ \; & (\alpha_0\beta_2-\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_0+\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_6+\alpha_5\beta_7+\alpha_6\beta_4-\alpha_7\beta_5)^2 \\
+ \; & (\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0-\alpha_4\beta_7-\alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5+\alpha_7\beta_4)^2 \\
+ \; & (\alpha_0\beta_4+\alpha_1\beta_5+\alpha_2\beta_6+\alpha_3\beta_7+\alpha_4\beta_0-\alpha_5\beta_1-\alpha_6\beta_2-\alpha_7\beta_3)^2 \\
+ \; & (\alpha_0\beta_5-\alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_7+\alpha_3\beta_6+\alpha_4\beta_1+\alpha_5\beta_0-\alpha_6\beta_3+\alpha_7\beta_2)^2 \\
+ \; & (\alpha_0\beta_6+\alpha_1\beta_7-\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_5+\alpha_4\beta_2+\alpha_5\beta_3+\alpha_6\beta_0-\alpha_7\beta_1)^2 \\
+ \; & (\alpha_0\beta_7-\alpha_1\beta_6+\alpha_2\beta_5-\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3-\alpha_5\beta_2+\alpha_6\beta_1+\alpha_7\beta_0)^2
\end{aligned}
$$

para quaisquer $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.1.5. A $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{16}$ com a norma euclidiana *não* é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto, conforme o Teorema de Urbanik-Wright a ser demonstrada nesta seção.

Exemplo 5.1.6. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com valor absoluto e sejam $f, g : A \to A$ isometrias lineares sobrejetoras. Consideremos a $\mathbb{K}$-álgebra $A_{f,g}$ cujo espaço vetorial seja o mesmo de A e cuja multiplicação seja definida assim:

$$x \diamond y = f(x)g(y).$$

Então temos o seguinte:

$$\|x \diamond y\| = \|f(x)g(y)\| = \|f(x)\|\|g(y)\| = \|x\|\|y\|$$

para quaisquer $x, y \in A_{f,g}$. Portanto $A_{f,g}$ também é uma $\mathbb{K}$-álgebra com valor absoluto. Ela será útil para a descrição das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão finita a ser apresentada na Seção 5.2.

Teorema 5.1.7. Seja A uma álgebra com valor absoluto. Então o completamento $\hat{A}$ de A é uma álgebra com valor absoluto.

Demonstração. Sejam $a, b \in \hat{A}$ e sejam a_n e b_n sequências de elementos de A que convergem respectivamente a a e b. Como a norma é contínua e $\|a_n b_n\| = \|a_n\|\|b_n\|$ para todo n, então $\|ab\| = \|a\|\|b\|$. □

Lema 5.1.8. Sejam A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e B um subconjunto de A tal que $xy = yx$ para quaisquer $x, y \in B$. Então o $\mathbb{R}$-subespaço $\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(B)$ é pré-Hilbertiano.

Demonstração. É fácil ver que, para quaisquer $x, y \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(B)$, temos $xy = yx$, daí:

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy,$$

consequentemente, se $\|x\| = \|y\| = 1$, então temos:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \left\|(x+y)^2\right\| + \left\|(x-y)^2\right\| \geqslant \left\|(x+y)^2 - (x-y)^2\right\| = 4\|xy\| = 4,$$

logo pelo Teorema 4.1.26 o presente lema está demonstrado. □

Lema 5.1.9. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e sejam $x, y \in A$ elementos $\mathbb{R}$-linearmente independentes tais que $xy = yx$ e $\|x\| = 1$. Então o $\mathbb{R}$-subespaço $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ é pré-Hilbertiano e além disso existe $z \in \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ tal que $\|z\| = 1$, z é ortogonal a x e $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y = \mathbb{R}x + \mathbb{R}z$.

Demonstração. Como $xy = yx$, então pelo Lema 5.1.8 o $\mathbb{R}$-subespaço $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ é pré-Hilbertiano. Por outro lado, como x e y são $\mathbb{R}$-linearmente independentes, temos $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y) = 2$, logo existe $z \in \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ tal que z seja ortogonal a x, $\|z\| = 1$ e $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y = \mathbb{R}x + \mathbb{R}z$. □

Lema 5.1.10. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto. Sejam $x, y \in A$ tais que tenhamos $xy = yx$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| = 2$. Então $x + y = 0$.

Demonstração. Se x e y são $\mathbb{R}$-linearmente dependentes, então $x = \lambda y$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, daí $1 = \|x\| = \|\lambda y\| = |\lambda|$ e $2 = \|x - y\| = \|\lambda y - y\| = |\lambda - 1|$, logo $\lambda = -1$, portanto $x + y = 0$. Suponhamos que x e y sejam $\mathbb{R}$-linearmente independentes. Pelo Lema 5.1.9 existe $z \in \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ tal que $\|z\| = 1$, z é ortogonal a x e $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y = \mathbb{R}x + \mathbb{R}z$. Como $\|x\| = \|z\| = 1$ e z é ortogonal a x, então para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos $\|\lambda x + \mu z\|^2 = \lambda^2 + \mu^2$. Como $y \in \mathbb{R}x + \mathbb{R}z$, temos $y = \alpha x + \beta z$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, daí $1 = \|y\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Por outro lado, temos:

$$4 = \|x - y\|^2 = \|x - \alpha x - \beta z\|^2 = \|(1-\alpha)x - \beta z\|^2 = (1-\alpha)^2 + \beta^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 2 - 2\alpha,$$

assim $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, o que é uma contradição. □

5.1.2 Idempotente no Centro Comutativo

Nesta subseção, o resultado principal é o Teorema 5.1.14, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com um idempotente não nulo no centro comutativo é pré-Hilbertiana. Nós demonstraremos esse resultado através de vários lemas, introduzindo notações temporárias para esta subseção.

Conforme dito no início desta seção, o Teorema 5.1.14 será utilizado para mostrar o Teorema de Urbanik-Wright na próxima subseção. Lembremos que o centro comutativo $K(A)$ de uma $\mathbb{K}$-álgebra A é o conjunto dos $x \in A$ tais que $xy = yx$ para todo $y \in A$.

No decorrer desta subseção, fixemos uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto A e fixemos um elemento $e \in A$ idempotente não nulo no centro comutativo $K(A)$.

Lema 5.1.11. Seja $x \in A$ um elemento qualquer. No subespaço $\mathbb{R}e + \mathbb{R}x$, as seguintes afirmações são equivalentes:

i) e é ortogonal a x.

ii) $x^2 = -\|x\|^2 e$.

Demonstração. (i)⇒(ii) Suponhamos que e seja ortogonal a x. Tome $y = \frac{x}{\|x\|}$. Então $\|y\| = 1$ e aí:

$$\left\|y^2 - e\right\| = \|y - e\| \|y + e\| = 2.$$

Como $\left\|y^2\right\| = \|y\|^2 = 1$, $\|e\| = 1$ e e comuta com y^2, pelo Lema 5.1.10 temos $y^2 + e = 0$, ou seja, $x^2 = -\|x\|^2 e$.

(ii)⇒(i) Suponhamos que $x^2 = -\|x\|^2 e$ e também e não seja ortogonal a x. Como $\mathbb{R}e + \mathbb{R}x$ é um espaço pré-Hilbertiano, segue que:

$$\mathbb{R}e + \mathbb{R}x = \mathbb{R}e + \mathbb{R}x_0,$$

onde $\|x_0\| = 1$ e e é ortogonal a x_0. Consequentemente $x = \alpha e + \beta x_0$ com $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ em $\mathbb{R}$. Como $x^2 = -\|x\|^2 e$ e da primeira metade da demonstração temos $x_0^2 = -e$, então:

$$-\|x\|^2 e = (\alpha^2 - \beta^2)e + 2\alpha\beta e x_0.$$

Dessa igualdade, do fato de que e é idempotente não nulo e do fato de que A não tem divisores de zero, segue que:

$$-\|x\|^2 e = (\alpha^2 - \beta^2)e + 2\alpha\beta x_0.$$

Assim $x_0 \in \mathbb{R}e$, o que é impossível pois e é ortogonal a x_0. Portanto e deve ser ortogonal a x. $\square$

No restante desta subseção, fixamos o seguinte conjunto:

$$B = \{x \in A : x^2 = -\|x\|^2 e\}$$

Lema 5.1.12. *B é um subespaço de A.*

Demonstração. **1)** Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in B$, temos:

$$(\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 = \alpha^2(-\|x\|^2 e) = -\|\alpha x\|^2 e,$$

o que implica $\alpha x \in B$.

2) Sejam $x, y \in B$. Para mostrar que $x + y \in B$, dividimos em dois casos:

i) Suponhamos que $xy = yx$. Então, de acordo com o Lema 5.1.8, $\mathbb{R}e + \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ é um espaço pré-Hilbertiano e, pelo Lema 5.1.11, temos:

$$\langle e, x + y\rangle = \langle e, x\rangle + \langle e, y\rangle = 0.$$

Ou seja, e é ortogonal a $x + y$. Consequentemente, aplicando o Lema 5.1.11, temos $(x + y)^2 = -\|x + y\|^2 e$. Portanto $x + y \in B$.

ii) Suponhamos que $xy \neq yx$. Como e comuta com $x + y$ e $x - y$, então $\mathbb{R}e + \mathbb{R}(x + y)$ e $\mathbb{R}e + \mathbb{R}(x - y)$ são espaços pré-Hilbertianos de dimensão 2. Consequentemente, temos $\mathbb{R}e + \mathbb{R}(x+y) = \mathbb{R}e + \mathbb{R}z$ com $\|z\| = 1$ e e ortogonal a z e $\mathbb{R}e + \mathbb{R}(x - y) = \mathbb{R}e + \mathbb{R}w$ com $\|w\| = 1$ e e ortogonal a w. Segue então que:

$$x + y = \alpha e + \beta z, \quad \beta \neq 0,$$
$$x - y = \lambda e + \mu w, \quad \mu \neq 0.$$

Assim:

$$(x + y)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)e + 2\alpha\beta e z,$$
$$(x - y)^2 = (\lambda^2 - \mu^2)e + 2\lambda\mu e w.$$

Somando essas duas igualdades, obtemos:

$$2(-\|x\|^2 - \|y\|^2)e = (\alpha^2 + \lambda^2 - \beta^2 - \mu^2)e + 2\alpha\beta e z + 2\lambda\mu e w.$$

Como e é idempotente não nulo e A não tem divisores de zero, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que:

$$2\alpha\beta z + 2\lambda\mu w = \gamma e.$$

Agora, se $\alpha \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$, então z comuta com w e assim:

$$0 = [x + y, x - y] = -[x, y] + [y, x] = 2[y, x],$$

o que implica que $xy = yx$, contradição. Portanto $\alpha = \lambda = 0$ e assim:

$$x + y = \beta z \quad \text{com} \quad \|x + y\| = |\beta|$$

$$x - y = \mu w \quad \text{com} \quad \|x - y\| = |\mu|$$

e consequentemente:

$$(x + y)^2 = -\beta^2 e = -\|x + y\|^2 e.$$

Portanto $x + y \in B$. □

Lema 5.1.13. *B é um subespaço pré-Hilbertiano.*

Demonstração. Sejam $x, y \in B$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$. De acordo com o Teorema 4.1.26, é suficiente mostrar que a desigualdade $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \geqslant 4$ ocorre. Como $x, y \in B$ e $\|x\| = \|y\| = 1$, temos $x^2 = y^2 = -e$. Portanto:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \left\|(x + y)^2\right\| - \left\|(x - y)^2\right\| \\ &= \|-2e + xy + yx\| + \|-2e - xy - yx\| \\ &\geqslant \|-4e\| \\ &= 4\|e\| \\ &= 4 \end{aligned}$$

e o lema está provado. □

Para todo $x \in A$, então $\mathbb{R}e + \mathbb{R}x$ é um espaço pré-Hilbertiano, assim podemos escrever x como:

$$x = \alpha e + \beta x_0,$$

onde $\|x_0\| = 1$ e e é ortogonal a x_0, assim pelo Lema 5.1.11 temos $x_0^2 = -e$, o que implica $x_0 \in B$, aí $\beta x_0 \in B$. Como $\mathbb{R}e \cap B = \{0\}$, então A pode ser escrito como:

$$A = \mathbb{R}e \oplus B,$$

uma soma direta de subespaços. Agora podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 5.1.14. *Seja A uma álgebra com valor absoluto e com um elemento idempotente não nulo no centro comutativo. Então A é pré-Hilbertiana.*

Demonstração. Sejam $x, y \in A$. Como:

$$x = \lambda e + a, \quad a \in B$$

$$y = \mu e + b, \quad b \in B$$

definimos um produto interno $\langle x, y\rangle$ em A como:

$$\langle x, y\rangle = \lambda\mu + \langle a, b\rangle,$$

onde $\langle a, b\rangle$ denota o produto interno em B. Temos as seguintes propriedades:

i) $\langle x, x\rangle = \lambda^2 + \langle a, a\rangle = \lambda^2 + \|a\|^2 \geqslant 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ se e só se $\lambda = 0$ e $a = 0$, ou seja, $x = 0$.

ii) É claro que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

iii) Também:
$$\langle \gamma x, y\rangle = (\gamma\lambda)\mu + \langle \gamma a, b\rangle = \gamma(\lambda\mu + \langle a, b\rangle) = \gamma\langle x, y\rangle.$$

iv) Seja $z = \alpha e + c$, $c \in B$. Temos:
$$\langle x + y, z\rangle = (\lambda + \mu)\alpha + \langle a + b, c\rangle = \lambda\alpha + \langle a, c\rangle + \mu\alpha + \langle b, c\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

Assim A é um espaço com produto interno. □

5.1.3 Resultado Principal

Nesta subseção, finalmente mostraremos o Teorema de Urbanik-Wright, que é o Teorema 5.1.17. Para isso, utilizaremos o Teorema 5.1.14 mostrado na subseção anterior e também mostraremos que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto com unidade à esquerda é pré-Hilbertiana e satisfaz algumas identidades úteis concernentes ao seu produto interno.

Lema 5.1.15. Seja A uma álgebra com valor absoluto e seja e uma unidade à esquerda. O espaço normado de A, munido com o produto $x * y = x(ye)$, torna-se uma álgebra com valor absoluto, digamos B, em relação à qual o elemento e se torna um idempotente no centro comutativo.

Demonstração. Como e é uma unidade à esquerda, então e é idempotente, logo $\|e\| = 1$. Agora temos:
$$\|x * y\| = \|x(ye)\| = \|x\|\,\|ye\| = \|x\|\,\|y\|\,\|e\| = \|x\|\,\|y\|\,.$$
Além disso, temos:
$$e * e = e(ee) = ee = e,$$
e também:
$$e * x = e(xe) = xe$$
$$x * e = x(ee) = xe$$
para todo $x \in A$. □

Teorema 5.1.16. Seja A uma álgebra com valor absoluto e seja e uma unidade à esquerda. Então A é pré-Hilbertiana. Além disso, fazendo $x^* = 2\langle x, e\rangle e - x$, temos $\langle xy, z\rangle = \langle y, x^*z\rangle$ e $x^*(xy) = \|x\|^2 y$ para quaisquer $x, y, z \in A$.

Demonstração. Para mostrar que A é pré-Hilbertiana, basta aplicar o Teorema 5.1.14 e o Lema 5.1.15. Agora, para $y, u \in A$ com $\langle e, u\rangle = 0$, temos:
$$\begin{aligned}(1 + \|u\|^2)\|y\|^2 &= \|e + u\|^2\|y\|^2 \\ &= \|(e + u)y\|^2 \\ &= \|y + uy\|^2 \\ &= (1 + \|u\|^2)\|y\|^2 + 2\langle uy, y\rangle,\end{aligned}$$
assim $\langle uy, y\rangle = 0$. Por linearização, temos $\langle uy, z\rangle = -\langle y, uz\rangle$ para quaisquer $u, y, z \in A$ com $\langle e, z\rangle = 0$, portanto temos $\langle xy, z\rangle = \langle y, x^*z\rangle$ para quaisquer $x, y, z \in A$. Agora, para $y \in A$, temos $\langle xy, xy\rangle = \|x\|^2\langle y, y\rangle$. Assim, por linearização, obtemos a igualdade $\langle xz, xy\rangle = \|x\|^2\langle z, y\rangle$ para quaisquer $y, z \in A$. Como $\langle xz, xy\rangle = \langle z, x^*(xy)\rangle$, deduzimos $\langle z, x^*(xy)\rangle = \|x\|^2\langle z, y\rangle$, o que, por causa da arbitrariedade de z, nos dá $x^*(xy) = \|x\|^2 y$. □

Teorema 5.1.17. [Teorema de Urbanik-Wright] Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com elemento unidade. Então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.1.16, A é pré-Hilbertiana, além disso, para $x, y \in A$ com x ortogonal a $\mathbf{1}$, temos $x(xy) = -\|x\|^2 y$. Tomando $y = 1$ nessa igualdade, temos $x^2 = -\|x\|^2 \mathbf{1}$ para todo $x \in A$ ortogonal a $\mathbf{1}$, assim A é uma álgebra quadrática. Além disso, a mesma igualdade nos dá $L_{x^2} = L_x^2$ para todo $x \in A$ ortogonal a $\mathbf{1}$, assim, por um fácil processo de linearização, obtemos que A é alternativa à esquerda. Agora, A é uma álgebra quadrática alternativa à esquerda sem divisor de zero, assim, pelo Teorema Generalizado de Frobenius–Zorn, A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. □

5.2 Álgebras de Dimensão Finita

Nesta seção, pretendemos apresentar o problema da classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto, que ainda está em aberto, e mostrar resultados rumo à sua resolução. Na Subseção 5.2.1, mostramos que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto de dimensão finita tem dimensão 1, 2, 4 ou 8 utilizando o conceito de álgebras isotópicas, conforme o artigo [Alb47]. Com isso, basta analisar os casos em que a dimensão é 1, 2, 4 ou 8.

Na Subseção 5.2.2, mostraremos que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto com dimensão $\leqslant 2$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$. Com isso, podemos mostrar o Teorema de Urbanik-Wright Versão Comutativa, que fornece uma classificação das $\mathbb{R}$-álgebras comutativas com valor absoluto e está no artigo [UW60].

Na Subseção 5.2.3, apresentaremos um resumo sobre a classificação das álgebras com valor absoluto de dimensão 4 obtida por M. I. Ramírez no artigo [RA99]. Por fim, na Subseção 5.2.4, apresentaremos um resumo sobre algumas tentativas de classificar as álgebras com dimensão 8 através de álgebra topológica, conforme o artigo [CKM+11].

5.2.1 Álgebras Isotópicas

Nesta subseção, apresentaremos a noção de álgebras isotópicas, que foi formulada por Albert, e o resultado principal é o Teorema 5.2.6, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto de dimensão finita é isotópica a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, em particular tem dimensão finita. Entretanto, o Teorema 5.2.5 será utilizado na demonstração do Teorema 6.2.18.

Apresentaremos a definição de álgebras isotópicas.

Definição 5.2.1. Sejam A e B duas $\mathbb{K}$-álgebras com valor absoluto. Dizemos que A é **isotópica** a B se existem isometrias lineares sobrejetoras φ, ψ e η de A em B tais que:

$$\eta(xy) = \varphi(x)\psi(y)$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Também podemos apresentar essa noção de outra forma.

Definição 5.2.2. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com valor absoluto qualquer e sejam f, g isometrias lineares sobrejetoras em A. Definimos a $\mathbb{K}$-álgebra $A_{f,g}$ tomando o espaço normado de A considerando a multiplicação:

$$x \diamond y = f(x)g(y)$$

para quaisquer $x, y \in A_{f,g}$.

É fácil ver que duas $\mathbb{K}$-álgebras A e B são isotópicas se e só se existem isometrias lineares sobrejetoras $f, g : A \to A$ tais que B seja isomorfa a $A_{f,g}$.

Apresentaremos agora os principais exemplos de $\mathbb{R}$-álgebras isotópicas.

Definição 5.2.3. Seja A uma das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, munido de sua involução usual $\sigma_A : x \mapsto \overline{x}$. As **$\mathbb{R}$-álgebras isotópicas padrões de** A são as seguintes $\mathbb{R}$-álgebras:

$$\begin{aligned} A &= A_{I_A, I_A} \\ {}^*A &= A_{\sigma_A, I_A} \\ A^* &= A_{I_A, \sigma_A} \\ \overset{*}{A} &= A_{\sigma_A, \sigma_A} \end{aligned}$$

Com essas definições, podemos apresentar os resultados importantes para o presente trabalho.

Teorema 5.2.4. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e suponhamos que existam $a, b \in A$ não nulos tais que $aA = Ab = A$. Então A é isotópica a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Demonstração. Pelas hipóteses do enunciado, as funções lineares L_a e R_b são isometrias lineares sobrejetoras. Assim podemos considerar a $\mathbb{R}$-álgebra isotópica $A_{R_b^{-1}, L_a^{-1}}$. Para todo $x \in A$ temos o seguinte:

$$x \diamond ab = R_b^{-1}(x) L_a^{-1}(ab) = R_b^{-1}(x) b = x, \qquad ab \diamond x = R_b^{-1}(ab) L_a^{-1}(x) = a L_a{-}1(x) = x.$$

Portanto $A_{R_b^{-1}, L_a^{-1}}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com unidade ab. Pelo Teorema 5.1.17 de Urbanik-Wright, a $\mathbb{R}$-álgebra $A_{R_b^{-1}, L_a^{-1}}$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Como A é isotópica a $A_{R_b^{-1}, L_a^{-1}}$, então A é isotópica a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. □

Teorema 5.2.5. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e suponhamos que existam $a, b \in A$ tais que aA e Ab sejam densas em A. Então A tem dimensão finita.

Demonstração. Podemos supor sem perder generalidade que $\|a\| = \|b\| = 1$ e considerar os dois seguintes casos.

Suponhamos que A seja um espaço completo. Seja $c \in A$. Então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A tal que $ax_n \to c$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois $\|x_m - x_n\| = \|ax_m - ax_n\|$ e $ax_n \to c$. Pela completude de A, existe $x \in A$ tal que $x_n \to x$. Numa álgebra normada, o produto é contínuo, assim $ax_n \to ax$, logo $ax = c$. Portanto $aA = A$ e analogamente $Ab = A$, assim, pelo Teorema 5.2.4, A tem dimensão finita.

Suponhamos agora que A não seja completo e seja $\hat{A}$ o completamento de A. Podemos considerar A como subespaço denso de $\hat{A}$. Como aA e Ab são densos em A, então é fácil ver que aA e Ab são densos em $\hat{A}$, assim $a\hat{A}$ e $\hat{A}b$ são densos em $\hat{A}$, de modo que pelo parágrafo anterior $\hat{A}$ tem dimensão finita, logo A tem dimensão finita. □

Teorema 5.2.6. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto de dimensão finita. Então A é isotópica a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Demonstração. Seja $a \in A$ tal que $a \neq 0$. Como A não tem divisores de zero e tem dimensão finita, então as transformações lineares R_a e L_a são invertíveis, logo pelo Teorema 5.2.4 a álgebra A é isotópica a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. □

5.2.2 Álgebras de Dimensão 2

O resultado principal desta subseção é o Teorema 5.2.7, que enuncia a classificação de todas as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão 2. Os teoremas restantes são aplicações desse teorema e consistem do Teorema 5.2.8, chamado Teorema de Urbanik-Wright Comutativo, que enuncia a classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto comutativas, e do Teorema 5.2.9, que enuncia a classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto e com potências associativas.

Teorema 5.2.7. Seja A uma álgebra com valor absoluto de dimensão 2. Então A é isomorfa a $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Seja T uma isometria $\mathbb{R}$-linear em $\mathbb{C}$. Então temos:

$$\left|T(1)\right| = |1| = 1,$$

assim seja $\alpha = T(1)$ e seja $U = \alpha^{-1}T$. Então U é uma isometria $\mathbb{R}$-linear em $\mathbb{C}$ e $U(1) = 1$. Além disso:

$$\left|U(i)\right| = |i| = 1,$$

e também:

$$\left|U(i) - 1\right| = \left|U(i) - U(1)\right| = \left|U(i-1)\right| = |i-1| = \sqrt{2},$$

logo $U(i) = i$ ou $U(i) = -i$. Como $\{1, i\}$ é uma $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$, então U está bem determinada. Mais especificamente, se $U(i) = i$, então $U(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$; se $U(i) = -i$, então $U(z) = \overline{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Assim temos $T = \alpha U$, onde U é a função identidade ou a função conjugação usual.

Agora seja A uma álgebra com valor absoluto com dimensão 2. Sabemos que A é uma $\mathbb{R}$-álgebra isotópica a $\mathbb{C}$, ou seja, A é da forma $\mathbb{C}_{f,g}$, onde f e g são isometrias $\mathbb{R}$-lineares sobrejetoras em $\mathbb{C}$. Assim temos $f(z) = \alpha U(z)$ e $g(z) = \beta V(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = |\beta| = 1$ e cada uma das funções U, V é a função identidade ou a função conjugação. De qualquer modo, para quaisquer $x, y \in \mathbb{C}$ temos:

$$x \diamond y = \gamma U(x) V(y),$$

onde $\gamma = \alpha\beta$. Para todo $\delta \in \mathbb{C}$ tal que $|\delta| = 1$, a função $F(z) = \delta z$ é uma isometria $\mathbb{R}$-linear em $\mathbb{C}$. Temos alguns casos:

1) Se $U(x) = x$ e $V(y) = y$, então podemos escolher $\delta = \gamma$, de modo que:

$$F(x \diamond y) = \gamma(\gamma xy) = \gamma^2 xy,$$

e também:

$$F(x)F(y) = (\gamma x)(\gamma y) = \gamma^2 xy,$$

de modo que F é um isomorfismo de A em $\mathbb{C}$.

2) Se $U(x) = \overline{x}$ e $V(y) = y$, então podemos escolher $\delta = \gamma^{-1}$, de modo que:

$$F(x \diamond y) = \gamma^{-1}(\gamma \overline{x} y) = \overline{x} y,$$

e também:

$$\overline{F(x)}F(y) = \overline{(\gamma^{-1}x)}(\gamma^{-1}y) = (\gamma\overline{x})(\gamma^{-1}y) = \overline{x}y,$$

de modo que F é um isomorfismo de A em ${}^*\mathbb{C}$.

3) Se $U(x) = x$ e $V(y) = \overline{y}$, então, escolhendo $\delta = \gamma^{-1}$, mostramos de modo análogo que F é um isomorfismo de A em $\mathbb{C}^*$.

4) Se $U(x) = \overline{x}$ e $V(y) = \overline{y}$, então podemos escolher $\delta \in \mathbb{C}$ tal que $\delta^3 = \gamma^{-1}$, de modo que:

$$F(x \diamond y) = \delta(\gamma \overline{x} \cdot \overline{y}) = \delta^{-2} \overline{x} \cdot \overline{y},$$

e também:

$$\overline{F(x)} \cdot \overline{F(y)} = \overline{(\delta x)} \cdot \overline{(\delta y)} = (\delta^{-1}\overline{x})(\delta^{-1}\overline{y}) = \delta^{-2}\overline{x} \cdot \overline{y},$$

de modo que F é um isomorfismo de A em $\overset{*}{\mathbb{C}}$. □

Teorema 5.2.8. [Teorema de Urbanik-Wright Comutativo] Se A é uma $\mathbb{R}$-álgebra comutativa e com valor absoluto, então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Como A é comutativa, pelo Lema 5.1.8 o $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado A é pré-Hilbertiano. Suponhamos que existam $x, y, z \in A$ ortonormais; então:

$$\left\|x^2 - y^2\right\| = \|x - y\| \|x + y\| = 2$$

e analogamente $\left\|x^2 - z^2\right\| = 2$, daí pelo Lema 5.1.10 temos:

$$x^2 + y^2 = x^2 + z^2 = 0.$$

Segue que:

$$0 = y^2 - z^2 = (y - z)(y + z),$$

logo $y = \pm z$, que é uma contradição. Portanto $\dim_{\mathbb{R}}(A) \leqslant 2$, assim pelo Teorema 5.2.7 a álgebra A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$. Entre essas opções, apenas $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\overset{*}{\mathbb{C}}$ são comutativas. □

Teorema 5.2.9. Se A é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto e com potências associativas, então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Demonstração. Dado $x \in A$, $x \neq 0$, a subálgebra $A(x)$ é necessariamente associativa e comutativa. Pelo Teorema 5.2.8, $A(x)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, logo existe $e \in A$, um idempotente não nulo, daí, pelo Teorema 3.4.11, o elemento e é uma unidade de A, assim, pelo Teorema 5.1.17, A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. □

5.2.3 Álgebras de Dimensão 4

Nesta subseção faremos uma apresentação resumida dos resultados a respeito das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão 4, entretanto não os provaremos. O Teorema 5.2.11 é o resultado principal e o Teorema 5.2.12 é uma aplicação para $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão 4 que satisfazem algumas identidades selecionadas.

Definição 5.2.10. Seja A uma das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, munido de sua involução usual $x \mapsto \bar{x}$. As **$\mathbb{R}$-álgebras isotópicas secundárias de** A são as $\mathbb{R}$-álgebras $A_n(a, b)$, onde $n = 1, 2, 3, 4$ e $a, b \in \mathbb{S}_A$, cujos espaços normados são o mesmo de A e cujas multiplicações são definidas respectivamente assim:

$$\begin{aligned}
x \overset{a,b}{\diamond_1} y &= axyb, \\
x \overset{a,b}{\diamond_2} y &= \bar{x}ayb, \\
x \overset{a,b}{\diamond_3} y &= axb\bar{y}, \\
x \overset{a,b}{\diamond_4} y &= a\bar{x}\bar{y}b.
\end{aligned}$$

Essas álgebras também são denotadas, respectivamente, por $A(a, b)$, ${}^*A(a, b)$, $A^*(a, b)$ e $\overset{*}{A}(a, b)$.

Ramírez no artigo [RA99] obteve uma classificação de todas as álgebras com valor absoluto de dimensão 4. Mais especificamente temos o seguinte resultado.

Teorema 5.2.11. Toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto de dimensão 4 é isomorfo a uma $\mathbb{R}$-álgebra isotópica secundária de $\mathbb{H}$. Além disso, as $\mathbb{R}$-álgebras isotópicas secundárias $\mathbb{H}_n(a, b)$ e $\mathbb{H}_{n'}(a', b')$ de $\mathbb{H}$ são isomorfas se e só se $n = n'$ e existem $p \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ e $\delta, \varepsilon \in \{1, -1\}$ tais que $a'p = \delta pa$ e $b'p = \varepsilon pb$.

Em particular, as álgebras $\mathbb{H}_n(-a,-b)$, $\mathbb{H}_n(-a,b)$, $\mathbb{H}_n(a,-b)$ e $\mathbb{H}_n(a,b)$ são isomorfas. Além disso, podemos facilmente checar que, dentre as $\mathbb{R}$-álgebras isotópicas secundárias de $\mathbb{H}$, as $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{H}(a,\bar{a})$ e $\overset{*}{\mathbb{H}}(a,\bar{a})$ são as únicas que possuem um idempotente não nulo que comuta com todos os outros elementos, além disso esse idempotente é necessariamente igual a 1.

Chandid, Ramirez e Rochdi, no artigo [CRR12], aplicaram esse resultado para obter classificações de álgebras com valor absoluto de dimensão 4 satisfazendo uma identidade do tipo $(x^p, x^q, x^r) = 0$, onde $p,q,r \in \{1,2\}$, através de argumentos de topologia algébrica e por estudos exaustivos de vários casos. Mais especificamente temos o seguinte resultado.

Teorema 5.2.12. Seja A uma álgebra com valor absoluto de dimensão 4. Então temos o seguinte:

- A satisfaz $(x,x,x) = 0$ para todo $x \in A$ se e só se A satisfaz $(x,x^2,x) = 0$ para todo $x \in A$ e isso equivale a A ser isomorfa a $\mathbb{H}$ ou $\overset{*}{\mathbb{H}}$.
- A satisfaz $(x^2,x,x) = 0$ para todo $x \in A$ se e só se A é isomorfa a $\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{H}$.
- A satisfaz $(x,x,x^2) = 0$ para todo $x \in A$ se e só se A é isomorfa a $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{H}^*$.
- A satisfaz $(x^2,x^2,x) = 0$ para todo $x \in A$ se e só se A é isomorfa a $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$ ou $\overset{*}{\mathbb{H}}(i,1)$.
- A satisfaz $(x,x^2,x^2) = 0$ para todo $x \in A$ se e só se A é isomorfa a $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^*(1,i)$.
- A satisfaz (x^2,x,x^2) para todo $x \in A$ se e só se A é isomorfa a $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, ${}^*\mathbb{H}(1,e^{i\alpha})$, $\mathbb{H}^*(e^{i\alpha},1)$ com $0 \leqslant \alpha < \pi$.
- A satisfaz (x^2,x^2,x^2) para todo $x \in A$ se e só se A é isomorfa a $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, ${}^*\mathbb{H}(i,1)$, ${}^*\mathbb{H}(i,i)$, $\mathbb{H}^*(1,i)$, $\mathbb{H}^*(i,i)$, ${}^*\mathbb{H}(1,e^{i\alpha})$, $\mathbb{H}^*(e^{i\alpha},1)$ com $0 \leqslant \alpha < \pi$.

5.2.4 Álgebras de Dimensão 8

O problema da classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão 8 ainda está em aberto no presente momento. Entretanto, Calderón, Kaidi, Martín, Morales, Ramírez e Rochdi, no artigo [CKM+11], obteve um refinamento do Teorema 5.2.6 sobre $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto e dimensão finita. Mais especificamente, eles obtiveram o resultado que nós apresentaremos no Teorema 5.2.25.

Álgebras de Clifford

Para entender as notações desse teorema, apresentaremos algumas definições prévias e temporárias. A princípio, apresentaremos o conceito de álgebras de Clifford de modo razoavelmente elementar. Antes de apresentar a definição propriamente dita, faremos uma discussão informal às álgebras de Clifford.

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $f : V \times V$. Então existe uma base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V que seja ortogonal em relação a f. Isso quer dizer que, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $i \neq j$, temos $f(e_i, e_j) = 0$. A $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford de V e f será uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade $C(V, f)$ gerada pelo elemento $\mathbf{1}$ e pelos elementos $e_1, \ldots, e_n$, sendo os geradores regidos pelas seguintes regras:

- $e_i^2 = f(e_i, e_i)\mathbf{1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $e_i e_j = -e_j e_i$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $i \neq j$.

Desse modo, todo elemento de $C(V, f)$ é uma combinação linear de elementos da forma $e_{i_1} \cdots e_{i_r}$, onde $i_1, \ldots, i_r$ são elementos de $\{1, \ldots, n\}$ tais que $i_1 < \cdots < i_r$. Desse modo, para elementos $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $i_1 < \cdots < i_r$, podemos denotar $e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ por $\hat{e}_{\{i_1,\ldots,i_r\}}$. Consequentemente, podemos mostrar que:

$$\hat{e}_X \hat{e}_Y = \left((-1)^{J(X,Y)} \prod_{i \in X \cap Y} n(e_i) \right) \hat{e}_{X \triangle Y}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{F}$, onde introduzimos as seguintes notações:

- $J(X, Y)$ é o número de pares (i, j) tais que $i \in X$ e $j \in Y$ e $i > j$.
- $n(x) = f(x, x)$.
- $X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$ é a diferença simétrica.

Definição 5.2.13. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica. Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V ortogonal em relação a f, ou seja, tal que, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $i \neq j$, tenhamos $f(e_i, e_j) = 0$. Definimos uma **$\mathbb{K}$-álgebra de Clifford** de V e f da seguinte forma. Consideremos um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $C(V, f)$ com uma base consistindo de elementos $\hat{e}_X$ indexados por $X \in \mathfrak{F}$, onde $\mathfrak{F}$ é a coleção dos subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$. Definamos uma multiplicação bilinear em $C(V, f)$ da seguinte forma:

$$\hat{e}_X \hat{e}_Y = \left((-1)^{J(X,Y)} \prod_{i \in X \cap Y} n(e_i) \right) \hat{e}_{X \triangle Y}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{F}$. Por fim, consideremos a única função linear $\iota : V \to C(V, f)$ tal que $\iota(e_i) = \hat{e}_{\{i\}}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposição 5.2.14. A $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford $C(V, f)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade. Além disso, a função $\iota : V \to C(V, f)$ satisfaz $\iota(v)^2 = f(v, v)\mathbf{1}$ para todo $v \in V$.

Demonstração. Temos os seguintes passos.

1) Mostraremos que $C(V, f)$ é associativa. De fato, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{F}$ temos:

$$(\hat{e}_X \hat{e}_Y)\, \hat{e}_Z = \left((-1)^{J(X,Y)+J(X \triangle Y, Z)} \prod_{i \in X \cap Y} n(e_i) \prod_{i \in (X \triangle Y) \cap Z} n(e_i) \right) \hat{e}_{(X \triangle Y) \triangle Z},$$

$$\hat{e}_X\, (\hat{e}_Y \hat{e}_Z) = \left((-1)^{J(X, Y \triangle Z)+J(Y,Z)} \prod_{i \in X \cap (Y \triangle Z)} n(e_i) \prod_{i \in Y \cap Z} n(e_i) \right) \hat{e}_{X \triangle (Y \triangle Z)}.$$

Primeiramente, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{F}$ temos a igualdade:

$$X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X).$$

Agora, por argumentos combinatórios, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{F}$ temos:

$$J(X \triangle Y, Z) = J(X, Z) + J(Y, Z) - 2J(X \cap Y, Z),$$

$$J(X, Y \triangle Z) = J(X, Y) + J(X, Z) - 2J(X, Y \cap Z).$$

Além disso, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{F}$, os seguintes quatro conjuntos são mutuamente disjuntos:

$$X \cap Y \cap Z, \qquad X^c \cap Y \cap Z, \qquad X \cap Y^c \cap Z, \qquad X \cap Y \cap Z^c,$$

onde definimos $W^c = \{1, \ldots, n\} \backslash W$ para todo $W \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Portanto, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{F}$ temos:

- $X \cap Y = (X \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Y \cap Z^c)$,
- $(X \triangle Y) \cap Z = (X^c \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Y^c \cap Z)$,
- $Y \cap Z = (X \cap Y \cap Z) \cup (X^c \cap Y \cap Z)$,
- $X \cap (Y \triangle Z) = (X \cap Y^c \cap Z) \cup (X \cap Y \cap Z^c)$.

Por fim, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{F}$ temos:

$$(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z).$$

2) Mostraremos que $C(V, f)$ tem uma unidade. De fato, para todo $X \in \mathfrak{F}$ temos:

$$\hat{e}_X \hat{e}_\emptyset = \left((-1)^{J(X,\emptyset)} \prod_{i \in X \cap \emptyset} n(e_i) \right) \hat{e}_{X \triangle \emptyset} = \hat{e}_X,$$

$$\hat{e}_\emptyset \hat{e}_X = \left((-1)^{J(\emptyset,X)} \prod_{i \in \emptyset \cap X} n(e_i) \right) \hat{e}_{\emptyset \triangle X} = \hat{e}_X.$$

3) Mostraremos que $\iota(v)^2 = f(v, v)\mathbf{1}$ para todo $v \in V$. De fato, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos:

$$\iota(e_i)^2 = \hat{e}_{\{i\}} \hat{e}_{\{i\}} = n(e_i) \hat{e}_\emptyset = f(e_i, e_i)\mathbf{1}.$$

Além disso, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $i < j$, temos:

$$\iota(e_i)\iota(e_j) + \iota(e_j)\iota(e_i) = \hat{e}_{\{i\}} \hat{e}_{\{j\}} + \hat{e}_{\{j\}} \hat{e}_{\{i\}} = \hat{e}_{\{i,j\}} - \hat{e}_{\{i,j\}} = 0 = 2f(e_i, e_j)\mathbf{1}.$$

Por fim, para todo $v \in V$, sendo $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, temos:

$$\begin{aligned}
\iota(v)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \iota(e_i) \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \iota(e_i)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j \left(\iota(e_i)\iota(e_j) + \iota(e_j)\iota(e_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 f(e_i, e_i)\mathbf{1} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j f(e_i, e_j)\mathbf{1} \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right)^2 \mathbf{1} \\
&= f(v, v)\mathbf{1},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

A escolha da base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V ortogonal em relação a f não é muito relevante no sentido de que todos os possíveis candidatos a uma $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford de V e f são isomorfos um ao outro, através da seguinte proposição.

Proposição 5.2.15. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica. Para quaisquer $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade A e função linear $\kappa : V \to A$ tal que $\kappa(v)^2 = f(v,v)\mathbf{1}$ para todo $v \in V$, então existe uma único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\hat{\kappa} : C(V,f) \to A$ tal que $\hat{\kappa}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ e também $\hat{\kappa}(\iota(v)) = \kappa(v)$ para todo $v \in V$.

Demonstração. Temos o seguintes passos.

1) Seja $\hat{\kappa} : C(V,f) \to A$ um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras tal que $\hat{\kappa}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ e $\hat{\kappa}(\iota(v)) = \kappa(v)$ para todo $v \in V$. Para todo $a \in C(V,f)$, então existem $\alpha_X \in \mathbb{K}$ tais que:

$$a = \sum_{X \in \mathfrak{F}} \alpha_X \hat{e}_X,$$

assim temos:

$$\hat{\kappa}(a) = \hat{\kappa}\left(\sum_{X \in \mathfrak{F}} \alpha_X \hat{e}_X\right) = \sum_{X \in \mathfrak{F}} \alpha_X \hat{\kappa}(\hat{e}_X).$$

Para $X \in \mathfrak{F}$, existem $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ tais que $i_1 < \cdots < i_r$ e $X = \{i_1, \dots, i_r\}$, além disso, temos:

$$\hat{e}_X = \hat{e}_{\{i_1\}} \cdots \hat{e}_{\{i_r\}} = \iota(e_{i_1}) \cdots \iota(e_{i_r}),$$

assim:

$$\hat{\kappa}(\hat{e}_X) = \hat{\kappa}\left(\iota(e_{i_1}) \cdots \iota(e_{i_r})\right) = \hat{\kappa}\left(\iota(e_{i_1})\right) \cdots \hat{\kappa}\left(\iota(e_{i_r})\right) = \kappa(e_{i_1}) \cdots \kappa(e_{i_r}).$$

Assim $\hat{\kappa}$ está unicamente determinado por κ.

2) Definamos uma função linear $\hat{\kappa} : C(V,f) \to A$ do seguinte modo. Para $X \in \mathfrak{F}$, então X pode ser expressa de maneira única como $X = \{i_1, \dots, i_r\}$, onde $i_1 < \cdots < i_r$, assim definimos:

$$\hat{\kappa}(\hat{e}_X) = \kappa(e_{i_1}) \cdots \kappa(e_{i_r}).$$

É fácil ver que $\hat{\kappa}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ e também $\hat{\kappa}(\iota(v)) = \kappa(v)$ para todo $v \in V$. Mostraremos que $\hat{\kappa}$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Para isso, basta mostrar que para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{F}$ temos $\hat{\kappa}(\hat{e}_X \hat{e}_Y) = \hat{\kappa}(\hat{e}_X)\hat{\kappa}(\hat{e}_Y)$. Como:

$$\kappa(v)^2 = f(v,v)\mathbf{1} \tag{5.5}$$

para todo $v \in V$, então para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ temos:

$$\kappa(e_i)^2 = n(e_i)\mathbf{1}. \tag{5.6}$$

Linearizando (5.5), temos:

$$\kappa(v)\kappa(w) + \kappa(w)\kappa(v) = 2f(v,w)\mathbf{1}$$

para quaisquer $v, w \in V$. Assim, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $i < j$, obtemos:

$$\kappa(e_i)\kappa(e_j) + \kappa(e_j)\kappa(e_i) = 2f(e_i, e_j)\mathbf{1} = 0,$$

assim:

$$\kappa(e_i)\kappa(e_j) = -\kappa(e_j)\kappa(e_i). \tag{5.7}$$

Utilizando as equações (5.6) e (5.7), podemos mostrar que, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{F}$, sendo $X = \{i_1, \dots, i_r\}$ e $Y = \{j_1, \dots, j_s\}$, onde $i_1 < \cdots < i_r$ e $j_1 < \cdots < j_s$, temos:

$$\hat{\kappa}(\hat{e}_X)\hat{\kappa}(\hat{e}_Y) = \kappa(e_{i_1}) \cdots \kappa(e_{i_r})\kappa(e_{j_1}) \cdots \kappa(e_{j_s}) = \left((-1)^{J(X,Y)} \prod_{i \in X \cap Y} n(e_i)\right) \hat{\kappa}(\hat{e}_{X \triangle Y}) = \hat{\kappa}(\hat{e}_X \hat{e}_Y),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Podemos apresentar um modo de obtermos a $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford que não envolve escolha de bases ortogonais. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica. Consideremos a $\mathbb{K}$-álgebra tensorial:

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ cópias de } V}.$$

Seja I o ideal de $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $v \otimes v - f(v,v)\mathbf{1}$ onde $v \in V$. Então o $\mathbb{K}$-álgebra quociente $T(V)/I$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford de V e f.

Grupos Spin

Em seguida, como parte dos requisitos para entendermos a notação do teorema principal, apresentaremos os chamados grupos de spin. Para isso, mostraremos alguns resultados adicionais sobre álgebras de Clifford.

Mostraremos que a $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford pode ser $\mathbb{Z}_2$ graduada.

Proposição 5.2.16. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica. Então a $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford $C(V,f)$ pode ser $\mathbb{Z}_2$-graduada, ou seja, existem subespaços $C_0(V,f)$ e $C_1(V,f)$ de $C(V,f)$ tais que:

- $C(V,f) = C_0(V,f) \oplus C_1(V,f)$.
- $C_0(V,f)C_0(V,f) + C_1(V,f)C_1(V,f) \subseteq C_0(V,f)$.
- $C_0(V,f)C_1(V,f) + C_1(V,f)C_0(V,f) \subseteq C_1(V,f)$.

Demonstração. Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V ortogonal em relação a f. Lembremos que $C(V,f)$ tem uma base consistindo de elementos $\hat{e}_X$ indexados por $X \in \mathfrak{F}$, onde $\mathfrak{F}$ é a coleção dos subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$. Além disso, para $X, Y \in \mathfrak{F}$ temos o seguinte:

$$\hat{e}_X \hat{e}_Y = \left((-1)^{J(X,Y)} \prod_{i \in X \cap Y} n(e_i) \right) \hat{e}_{X \triangle Y}. \tag{5.8}$$

Portanto podemos definir o seguinte:

- Seja $C_0(V,f)$ o conjunto das combinações lineares dos elementos da forma $\hat{e}_X$, onde X tem um número par de elementos.
- Seja $C_1(V,f)$ o conjunto das combinações lineares dos elementos da forma $\hat{e}_X$, onde X tem um número ímpar de elementos.

Então, pela identidade (5.8), é fácil ver que $C_0(V,f)$ e $C_1(V,f)$ são subespaços que satisfazem as propriedades afirmadas pelo enunciado da presente proposição. □

Mostraremos que a $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford pode ser munida de uma involução.

Proposição 5.2.17. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica. Então existe uma involução $* : C(V,f) \to C(V,f)$ na $\mathbb{K}$-álgebra de Clifford tal que $\iota(v)^* = \iota(v)$ para todo $v \in V$.

Demonstração. Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V ortogonal em relação a f. Lembremos que $C(V,f)$ tem uma base consistindo de elementos $\hat{e}_X$ indexados por $X \in \mathfrak{F}$, onde $\mathfrak{F}$ é a coleção dos subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$. Além disso, para $X, Y \in \mathfrak{F}$ temos o seguinte:

$$\hat{e}_X \hat{e}_Y = \left((-1)^{J(X,Y)} \prod_{i \in X \cap Y} n(e_i) \right) \hat{e}_{X \triangle Y}.$$

Para $X \in \mathfrak{F}$, então X pode ser expressa de maneira única como $X = \{i_1, \ldots, i_r\}$, onde $i_1, \ldots, i_r$ são elementos de $\{1, \ldots, n\}$ tais que $i_1 < \cdots < i_r$, assim:

$$\hat{e}_X = \iota(e_{i_1}) \cdots \iota(e_{i_r}),$$

assim definimos:

$$\hat{e}_X^* = \iota(e_{i_r}) \cdots \iota(e_{i_1}).$$

Portanto $*$ induz uma transformação linear $* : C(V, f) \to C(V, f)$. Agora é uma tarefa corriqueira verificar que $*$ é uma involução que satisfaz $\iota(v)^* = \iota(v)$ para todo $v \in V$. □

Agora podemos apresentar o conceito de grupos de spin. Lembremos que, para toda $\mathbb{K}$-álgebra com unidade A, denotamos por $\mathrm{Inv}(A)$ o conjunto dos elementos $a \in A$ tais que existe $b \in A$ tal que $ab = ba = \mathbf{1}$.

Definição 5.2.18. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e seja $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica. Definimos o **grupo de spin** $S(V, f)$ de V e f como o conjunto dos $x \in \mathrm{Inv}(C_0(V, f))$ tais que:

- $x^{-1} = x^*$.
- Para todo $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $x\iota(v)x^* = \iota(w)$.

Para quaisquer $x \in S(V, f)$ e $v \in V$, denotamos por $\pi_x(v)$ o único $w \in V$ tal que $x\iota(v)x^* = \iota(w)$.

Com a definição acima, o grupo de spin $S(V, f)$ de V e f tem um homomorfismo de grupos $\pi : S(V, f) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$, definido por $a \mapsto \pi_a$, onde $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ é o grupo das transformações lineares bijetoras de V em V.

Resultado Principal

Como parte final dos requisitos para entendermos a notação do teorema principal, apresentaremos as chamadas $\mathbb{R}$-álgebras isotópicas terciárias. Para isso, começamos com a seguinte definição.

Definição 5.2.19. Consideremos o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$ e consideremos a forma bilinear simétrica $f : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f\left((x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n)\right) = -(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n).$$

Nesse caso, denotaremos a $\mathbb{R}$-álgebra de Clifford $C(V, f)$ por $\mathrm{Cliff}(n)$ e denotaremos o grupo spin $S(V, f)$ por $\mathrm{Spin}(n)$.

Apresentaremos a seguinte proposição, sem demonstrá-la.

Proposição 5.2.20. Para todo $a \in \mathrm{Spin}(n)$, então $\pi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria linear sobrejetora em relação à norma euclidiana usual de $\mathbb{R}^n$.

Agora apresentaremos a última definição prévia antes de definirmos as $\mathbb{R}$-álgebras isotópicas terciárias.

Definição 5.2.21. Consideremos o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Considerando o grupo spin $\mathrm{Spin}(n-1)$ do espaço $\mathbb{R}^{n-1}$, para cada $a \in \mathrm{Spin}(n-1)$, definimos $\sigma_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ assim:

$$\sigma_a(x, y) = (x, \pi_a(y))$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Temos a seguinte proposição imediata.

Proposição 5.2.22. Para todo $a \in \mathrm{Spin}(n-1)$, então $\sigma_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria linear sobrejetora em relação à norma euclidiana usual de $\mathbb{R}^n$.

Com isso, podemos definir as $\mathbb{R}$-álgebras isotópicas terciárias.

Definição 5.2.23. Seja A uma das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, munido de sua involução usual $x \mapsto \overline{x}$. As **$\mathbb{R}$-álgebras isotópicas terciárias de** A são as $\mathbb{R}$-álgebras $A_n[a,b]$, onde $n = 1, 2, 3, 4$ e $a, b \in \mathrm{Spin}(n-1)$, cujos espaços normados são o mesmo de A e cujas multiplicações são definidas respectivamente assim:

$$
\begin{aligned}
x \diamond y &= \sigma_a(x)\sigma_b(y), \\
x \diamond y &= \sigma_a(\bar{x})\sigma_b(y), \\
x \diamond y &= \sigma_a(x)\sigma_b(\bar{y}), \\
x \diamond y &= \sigma_a(\bar{x})\sigma_b(\bar{y}).
\end{aligned}
$$

Essas álgebras também são denotadas, respectivamente, por $A[a,b]$, ${}^*A[a,b]$, $A^*[a,b]$ e $\overset{*}{A}[a,b]$.

Agora apresentaremos uma última observação prévia antes apresentarmos o teorema principal.

Observação 5.2.24. Seja $A = \mathbb{R}^n$ uma das $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, munido de sua norma euclidiana usual. Seja $f : A \to A$ um automorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Então $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ e também f é uma isometria linear sobrejetora. Assim existe uma isometria linear sobrejetora $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $f(x,y) = (x, g(y))$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Pela Proposição 5.2.15, existe um automorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\hat{f} : \mathrm{Cliff}(n-1) \to \mathrm{Cliff}(n-1)$ tal que $\hat{f}(\iota(v)) = g(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Além disso, para todo $a \in \mathrm{Spin}(n-1)$, temos $\hat{f}(a) \in \mathrm{Spin}(n-1)$.

Finalmente apresentaremos o teorema principal desta subseção.

Teorema 5.2.25. Toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto de dimensão 8 é isomorfa a uma $\mathbb{R}$-álgebra isotópica terciária de $\mathbb{O}$. Além disso, duas $\mathbb{R}$-álgebras isotópicas terciárias $\mathbb{O}_n[a,b]$ e $\mathbb{O}_{n'}[a',b']$ de $\mathbb{O}$ são isomorfas se e só se $n = n'$ e existem um automorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $f : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ e $\delta, \varepsilon \in \{1, -1\}$ tais que $a' = \delta\hat{f}(a)$ e $b' = \varepsilon\hat{f}(b)$.

5.3 Álgebras Satisfazendo $(x, x, x) = 0$

Pelo Teorema de Urbanik-Wright, as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto e com unidade são isomorfas a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Isso quer dizer que, em toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto A, a existência de elemento unidade implica que A tenha dimensão finita. Com isso, levantou-se a seguinte questão: *Dada uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto A, quais são outros exemplos de propriedades que implicam que A tenha dimensão finita?* Nesta seção, estudaremos as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto satisfazendo a identidade $(x, x, x) = 0$. As $\mathbb{K}$-álgebras satisfazendo a identidade $(x, x, x) = 0$ incluem como exemplos interessantes as $\mathbb{K}$-álgebras com potências associativas e as $\mathbb{K}$-álgebras flexíveis.

Na Subseção 5.3.1, mostraremos que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto que satisfaz a identidade $(x, x^2, x) = 0$ e possui um idempotente não nulo no centro comutativo tem dimensão finita. Na Subseção 5.3.2, mostraremos que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo a identidade $(x, x, x) = 0$ tem dimensão finita. Por fim, na Subseção 5.3.3, apresentaremos de modo apenas resumido a classificação obtida por El-Mallah no artigo [EM90] sobre $\mathbb{R}$-álgebras com composição de dimensão finita satisfazendo $(x, x, x) = 0$.

5.3.1 Resultados Iniciais

Começaremos esta subseção apresentando alguns resultados sobre $\mathbb{K}$-álgebras que satisfazem a identidade $(x, x, x) = 0$ que serão utilizadas na próxima subseção. O principal entre eles é o Corolário 5.3.4.

Em seguida, apresentaremos alguns resultados a respeito de propriedades em uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto A que implicam que A tenha dimensão finita. Eles estão presentes no artigo [eMM81] de El-Mallah e Micali. O principal entre eles é o Teorema 5.3.7, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto que satisfaz a identidade $(x,x^2,x)=0$ e também possui um idempotente não nulo no centro comutativo tem dimensão finita.

Proposição 5.3.1. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra que satisfaz $(x,x,x)=0$ para todo $x\in A$. Então A satisfaz a identidade:

$$(x,x^2,x)=0 \tag{5.9}$$

para todo $x\in A$.

Demonstração. A identidade $(x,x,x)=0$ é equivalente à identidade $[x^2,x]=0$. Linearizando a identidade $[x^2,x]=0$, obtemos:

$$[xy+yx,x]+[x^2,y]=0. \tag{5.10}$$

Colocando $y=x^2$ em (5.10) e utilizando o fato de que $x^2x=xx^2$, obtemos:

$$0=[xx^2+x^2x,x]+[x^2,x^2]=2[x^2x,x].$$

Novamente, como $x^2x=xx^2$, concluímos que:

$$(x,x^2,x)=(xx^2)x-x(x^2x)=(x^2x)x-x(x^2x)=[x^2x,x]=0,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 5.3.2. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra que satisfaz $(x,x^2,x)=0$ para todo $x\in A$. Seja e um idempotente. Então a seguinte igualdade ocorre:

$$[e,ex+xe-x]=(e,ex+xe-x,e). \tag{5.11}$$

Demonstração. Linearizando a identidade $(x,x^2,x)=0$, temos a seguinte identidade:

$$(x,x^2,y)+(x,xy+yx,x)+(y,x^2,x)=0. \tag{5.12}$$

Fazendo $x=e$ em (5.12), obtemos:

$$(e,e,y)+(e,ey+ye,e)+(y,e,e)=0,$$

assim:

$$\begin{aligned}(e,ey+ye-y,e) &= (e,ey+ye,e)-(e,y,e)\\ &= -(e,e,y)-(y,e,e)-(e,y,e)\\ &= -ey+e(ey)-(ye)e+ye-(ey)e+e(ye)\\ &= [e,ey+ye-y],\end{aligned}$$

provando o lema. $\square$

Lema 5.3.3. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra que satisfaz $(x^2,x,x^2)=(x^2,x^2,x^2)=0$ para todo $x\in A$. Seja e um idempotente. Então:

$$(e,ex+xe-x,e)=0.$$

Demonstração. Linearizando a identidade $(x^2,x,x^2)=0$, obtemos:

$$(x^2,x,xy+yx)+(x^2,y,x^2)+(xy+yx,x,x^2)=0. \tag{5.13}$$

Linearizando a identidade $(x^2, x^2, x^2) = 0$, obtemos:

$$(x^2, x^2, xy + yx) + (x^2, xy + yx, x^2) + (xy + yx, x^2, x^2) = 0, \tag{5.14}$$

Colocando $x = e$ em (5.13) e (5.14), obtemos respectivamente:

$$(e, e, ey + ye) + (e, y, e) + (ey + ye, e, e) = 0, \tag{5.15}$$

$$(e, e, ey + ye) + (e, ey + ye, e) + (ey + ye, e, e) = 0. \tag{5.16}$$

Subtraindo (5.15) de (5.16), obtemos a identidade:

$$(e, ey + ye - y, e) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 5.3.4. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra que satisfaz uma das seguintes propriedades:

a) $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

b) $(x, x^2, x) = (x^2, x, x^2) = (x^2, x^2, x^2) = 0$ para todo $x \in A$.

Seja e um idempotente. Então a seguinte igualdade ocorre para todo $x \in A$:

$$[e, ex + xe - x] = 0. \tag{5.17}$$

Em particular, sendo B o conjunto dos $x \in A$ tais que $ex = xe$, então para todo $x \in B$ temos $ex \in B$. Além disso, temos:

$$[e, (e - f)^2] = 0 \tag{5.18}$$

para todo idempotente f.

Demonstração. Temos o seguinte:

a) Suponhamos que A satisfaça a identidade $(x, x, x) = 0$. Então A satisfaz a identidade $[x^2, x] = 0$. Linearizando a identidade $[x^2, x] = 0$, obtemos:

$$[xy + yx, x] + [x^2, y] = 0. \tag{5.19}$$

Colocando $x = e$ em (5.19), obtemos:

$$0 = [ey + ye, e] + [e, y] = [ey + ye - y, e].$$

Portanto A satisfaz a identidade (5.17).

b) Suponhamos que A satisfaça a identidade $(x, x^2, x) = (x^2, x, x^2) = (x^2, x^2, x^2) = 0$. Pelos Lemas 5.3.2 e 5.3.3, então A satisfaz a identidade (5.17).

1) Agora seja $x \in B$. Então $ex = xe$ e $[e, x] = 0$. Assim, pela identidade (5.17), temos:

$$0 = [e, ex + xe - x] = [e, ex + xe] - [e, x] = 2[e, ex].$$

Logo $[e, ex] = 0$. Portanto $ex \in B$.

2) Seja f um idempotente. Fazendo $x = f$ na identidade (5.17), temos:

$$[e, (e - f)^2] = [e, e^2 - ef - fe + f^2] = [e, e - ef - fe + f] = [e, e] - [e, ef + fe - f] = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Agora apresentaremos alguns resultados a respeito de propriedades em uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto A que implicam que A tenha dimensão finita.

Teorema 5.3.5. Seja A uma álgebra com valor absoluto. Suponhamos que exista um elemento $x \in A$ tal que x e x^2 sejam linearmente independentes e estejam no centro comutativo. Então A é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Podemos supor que $\|x\| = 1$. Mostremos que $A = \mathbb{R}x + \mathbb{R}x^2$, daí A é comutativa, então pelo Teorema 5.2.8 o teorema está provado. Suponhamos que exista $y \in A \backslash (\mathbb{R}x + \mathbb{R}x^2)$. Como x, x^2 e y comutam um com outro, pelo Lema 5.1.8 o subespaço $\mathbb{R}x + \mathbb{R}x^2 + \mathbb{R}y$ é pré-Hilbertiano, logo existe $z \in \mathbb{R}x + \mathbb{R}x^2 + \mathbb{R}y$ ortogonal a x e a x^2 com $\|z\| = 1$. Por outro lado temos:

$$\left\|x^2 - z^2\right\| = \|x - z\| \|x + z\| = 2,$$

daí pelo Lema 5.1.10 temos $z^2 = -x^2$. Como:

$$\left\|z^2\right\| = \left\|(x^2)^2\right\| = 1,$$

$$z^2(x^2)^2 = (-x^2)(x^2)^2 = (x^2)^2(-x^2) = (x^2)^2 z^2$$

e também:

$$\left\|(x^2)^2 - z^2\right\| = \left\|x^2 - z\right\| \left\|x^2 + z\right\| = 2,$$

então pelo Lema 5.1.10 temos $z^2 = -(x^2)^2$, logo:

$$0 = x^2 - (x^2)^2 = (x - x^2)(x + x^2),$$

daí $x = \pm x^2$, uma contradição. $\square$

Teorema 5.3.6. Seja A uma álgebra com valor absoluto. Suponhamos que exista um idempotente e de A não nulo e no centro comutativo tal que $(z, e, z) = 0$ para todo $z \in A$ ortogonal a e. Então A tem dimensão finita.

Demonstração. Se as transformações lineares R_e e L_e forem sobrejetoras, então pelo Teorema 5.2.4 o presente teorema está provado. Dado $x \in A$, se x e e são linearmente dependentes, então $x = \lambda e$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, daí $R_e(\lambda e) = x = L_e(\lambda e)$. Suponhamos que x e e sejam linearmente independentes. Como e comuta com x, então pelo Lema 5.1.8 o subespaço $\mathbb{R}e + \mathbb{R}x$ é pré-Hilbertiano, daí existe $z \in \mathbb{R}e + \mathbb{R}x$, z ortogonal a e, tal que $\|z\| = 1$ e $\mathbb{R}e + \mathbb{R}x = \mathbb{R}e + \mathbb{R}z$. Por outro lado temos:

$$\left\|e - z^2\right\| = \|e - z\| \|e + z\| = 2$$

e também:

$$\left\|e - (ez)^2\right\| = \|e - ez\| \|e + ez\| = \|e - z\| \|e + z\| = 2,$$

assim pelo Lema 5.1.10 temos $z^2 = -e = (ez)^2$. Como ez comuta com z, então:

$$0 = z^2 - (ez)^2 = (z - ez)(z + ez),$$

daí $ez = \pm z$, portanto $\mathbb{R}e + \mathbb{R}x = \mathbb{R}e + \mathbb{R}z = \mathbb{R}e + \mathbb{R}ez$. Como $x \in \mathbb{R}e + \mathbb{R}ez$, então $x = \alpha e + \beta ez$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, logo temos $x = R_e(\alpha e + \beta z) = L_e(\alpha e + \beta z)$. Portanto R_e e L_e são sobrejetoras. $\square$

Teorema 5.3.7. Seja A uma álgebra com valor absoluto e com um elemento idempotente não nulo no centro comutativo. Suponhamos que $(x, x^2, x) = 0$ para todo $x \in A$. Então A tem dimensão finita.

Demonstração. Seja e um idempotente não nulo no centro comutativo. Mostraremos que (z, e, z) para todo $z \in A$ ortogonal a e, de modo que pelo Teorema 5.3.6 a álgebra A tem dimensão finita. Seja $z \in A$ ortogonal a e. Pelo Lema 5.1.11, temos $z^2 = -\|z\|^2 e$, de modo que:

$$0 = (z, z^2, z) = -\|z\|^2 (z, e, z),$$

logo $(z, e, z) = 0$. □

5.3.2 Álgebras com Produto Interno

El-Mallah mostrou no artigo [EM83] que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo $(x, x, x) = 0$ possui dimensão finita. Além disso, Diaby, Diankha, Fall e Rochdi, com uma demonstração de raciocínio semelhante, mostraram no artigo [DDFR21] que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiano satisfazendo $(x, x^2, x) = (x^2, y, x^2) = 0$ tem dimensão finita.

Nesta subseção, mostraremos simultaneamente esses dois resultados. Mais precisamente, o objetivo principal desta subseção é mostrar o Teorema 5.3.26, cujo enunciado diz que, para toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana, se A satisfaz $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$ ou satisfaz $(x, x^2, x) = (x^2, y, x^2) = 0$ para quaisquer $x, y \in A$, então A tem dimensão finita. A demonstração é razoavelmente longa e portanto será apresentada através de vários lemas e teoremas intermediários.

Lema 5.3.8. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana. Sejam x e y elementos de A tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| = 2$. Então $x + y = 0$.

Demonstração. Temos:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Como $\|x - y\| = 2$, então $\|x + y\|^2 = 4$, aí $\|x + y\|^2 = 0$, aí $\|x + y\| = 0$, aí $x + y = 0$. □

Lema 5.3.9. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana. Sejam x e y dois elementos linearmente independentes em A que comutam um com outro. Se z é um elemento de A que comuta com x e y, então $z \in \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$.

Demonstração. Podemos supor que $\|x\| = \|y\| = 1$. Suponhamos que $z \notin \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$. Então existe $w \in \mathbb{R}x + \mathbb{R}y + \mathbb{R}z$ tal que $\|w\| = 1$ e w é ortogonal a x e a y. Por outro lado:

$$\left\|w^2 - x^2\right\| = \|w - x\| \|w + x\| = 2$$

e analogamente $\left\|w^2 - y^2\right\| = 2$, assim pelo Lema 5.3.8 temos $w^2 + x^2 = w^2 + y^2 = 0$, assim:

$$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

daí $x = \pm y$, o que é uma contradição. □

Lema 5.3.10. A seja uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana. Sejam a e b elementos ortogonais de A tais que $ab = ba$. Então temos:

$$\|b\|^2 a^2 + \|a\|^2 b^2 = 0.$$

Demonstração. Sejam $x = \frac{a}{\|a\|}$ e $y = \frac{b}{\|b\|}$. Então $\|x\| = \|y\| = 1$, assim:

$$\left\|x^2 - y^2\right\| = \|x - y\| \|x + y\| = 2,$$

assim pelo Lema 5.3.8 temos $x^2 + y^2 = 0$, aí segue o lema. □

Corolário 5.3.11. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana. Seja e um idempotente. Então para todo $x \in A$, se $ex = xe$ e e é ortogonal a x, então $x^2 = -\|x\|^2 e$.

Proposição 5.3.12. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana. Sejam $a, b \in A$ tais que $ab = ba$. Então:

$$\|b\|^2 a^2 + \|a\|^2 b^2 = 2\langle a, b\rangle ab.$$

Demonstração. Podemos supor sem perder generalidade que $\|a\| = 1$. Então a e $b - \langle a, b\rangle a$ são ortogonais, assim:

$$\|b - \langle a, b\rangle a\|^2 = \langle b, b - \langle a, b\rangle a\rangle = \|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2.$$

Agora, pelo Lema 5.3.10, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \|b - \langle a, b\rangle a\|^2 a^2 + (b - \langle a, b\rangle a)^2 \\ &= (\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2)a^2 + b^2 - 2\langle a, b\rangle ab + \langle a, b\rangle^2 a^2 \\ &= \|b\|^2 a^2 + b^2 - 2\langle a, b\rangle ab, \end{aligned}$$

assim $\|b\|^2 a^2 + b^2 = 2\langle a, b\rangle ab$. □

Corolário 5.3.13. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana. Seja $a \in A$ tal que $(a, a, a) = 0$. Então temos $(a^2)^2 \in \mathbb{R}a^2 + \mathbb{R}aa^2$.

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 5.3.12 no caso $b = a^2$. □

Lema 5.3.14. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$. Seja B uma subálgebra de A gerada por n elementos não nulos que comutam um com outro. Então B é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Seja D o conjunto desses n geradores. Temos dois casos

1) Suponha que existam em D dois elementos x e y linearmente independentes. Como A está munido de um produto escalar, então $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y = \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ onde a e b são dois elementos ortonormais em A. Como $ab = ba$, então pelo Lema 5.3.10 temos $a^2 + b^2 = 0$. Por outro lado,

$$0 = [(a + b)^2, a + b] = 2[ab, a + b] \quad \text{e} \quad 0 = [(a - b)^2, a - b] = -2[ab, a - b],$$

de modo que $[ab, a] = 0$ e $[ab, b] = 0$, aí, pelo Lema 5.3.9, temos $ab \in \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$. Como $a^2 + b^2 = 0$ e $[a^2, a] = [b^2, b] = 0$, então $[b^2, a] = [a^2, b] = 0$, aí, pelo Lema 5.3.9, temos $a^2 \in \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ e $b^2 \in \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$. Disso vem que $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ é uma álgebra comutativa de dimensão 2, assim $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y = \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$ conforme o Teorema 5.2.8. Pelo Lema 5.3.9, $D \subseteq \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$, o que quer dizer que $B = \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$.

2) Suponhamos agora que não existam em D dois elementos linearmente independentes. Seja $z \in D$ não nulo, então $B = A(z)$. Se z e z^2 são linearmente independentes, como $zz^2 = z^2z$, então a demonstração de que $A(z)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$ é análoga àquela dada anteriormente. Se $z^2 = \alpha z$, então o elemento $\alpha^{-1}z$ é um idempotente e nesse caso $A(z)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$. □

Lema 5.3.15. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo uma das seguintes propriedades:

a) $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

b) $(x, x^2, x) = (x^2, x, x^2) = (x^2, x^2, x^2) = 0$ para todo $x \in A$.

c) $(x^2, y, x^2) = 0$ para quaisquer $x, y \in A$.

Então $A(x^2)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$ para todo $x \in A$. Em particular A tem um idempotente não nulo.

Demonstração. O caso (a) segue do Lema 5.3.14. Suponhamos o caso (b) ou (c). Podemos também supor sem perder generalidade que x^2 e $(x^2)^2$ são linearmente independentes. Temos:

$$[(x^2)^2, x^2] = (x^2, x^2, x^2) = 0.$$

Além disso:

$$[x^2(x^2)^2, x^2] = (x^2, (x^2)^2, x^2)$$

e também:

$$[x^2(x^2)^2, (x^2)^2] = [(x^2)^2 x^2, (x^2)^2] = ((x^2)^2, x^2, (x^2)^2) = 0.$$

Assim o conjunto $\{x^2, (x^2)^2, x^2(x^2)^2\}$ é comutativo. Logo pelo Lema 5.3.9 temos $x^2(x^2)^2 \in \mathbb{R}x^2 + \mathbb{R}(x^2)^2$. Além disso temos $((x^2)^2)^2 \in \mathbb{R}(x^2)^2 + \mathbb{R}x^2(x^2)^2$ pelo Lema 5.3.13 aplicado a $a = x^2$. Assim $((x^2)^2)^2 \in \mathbb{R}x^2 + \mathbb{R}(x^2)^2$. Logo $A(x^2) = \mathbb{R}x^2 + \mathbb{R}(x^2)^2$ é uma subálgebra comutativa de A, assim $A(x^2)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$. □

Em uma álgebra A satisfazendo (x^2, y, x^2) para quaisquer $x, y \in A$, é fácil ver que para idempotente e temos $(e, x, e) = 0$ para todo $x \in A$, de modo que podemos utilizar a notação exe sem ambiguidade.

Lema 5.3.16. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo $(x^2, y, x^2) = 0$ para quaisquer $x, y \in A$. Seja e um idempotente não nulo de A e seja $x \in A$ tal que $ex = xe$. Então $[ex, e] = [exe, ex] = [e, x^2] = 0$.

Demonstração. Temos os seguintes passos.

1) Mostraremos que $[ex, e] = 0$. De fato, colocando $a = e$ e $b = x$ na identidade $(a^2, b, a^2) = 0$, obtemos a identidade $(e, x, e) = 0$, ou seja, obtemos a identidade $(ex)e = e(xe)$. Agora, utilizando o fato de que $ex = xe$, então:

$$(ex)e = e(xe) = e(ex).$$

2) Mostraremos a igualdade $[e, x^2] = 0$. Consideramos a decomposição de x em uma soma:

$$x = \langle e, x \rangle e + u,$$

onde u é ortogonal a e. Como $[u, e] = [x, e] = 0$, pelo Corolário 5.3.11 temos $u^2 = -\|u\|^2 e$. Assim:

$$\begin{aligned}
[x^2, e] &= [(\langle e, x \rangle^2 - \|u\|^2)e + 2\langle e, x \rangle eu, e] \\
&= 2\langle e, x \rangle [eu, e] \\
&= 2\langle e, x \rangle [ex - \langle e, x \rangle, e] \\
&= 0 \quad \text{porque } [ex, e] = 0.
\end{aligned}$$

3) Mostraremos que $[exe, ex] = 0$. Linearizando a identidade $(a^2, b, a^2) = 0$, obtemos o seguinte:

$$(a^2, b, c^2) + (ac + ca, b, ac + ca) + (c^2, b, a^2) = 0. \tag{5.20}$$

Colocando $a = x$ e $b = c = e$ na igualdade (5.20), obtemos:

$$0 = (x^2, e, e) + (xe + ex, e, xe + ex) + (e, e, x^2) \tag{5.21}$$

Assim obtemos:

$$\begin{aligned} 4[exe, ex] &= 4(ex, e, ex) \quad \text{porque } ex \text{ comuta com } e \\ &= (ex + xe, e, ex + ex) \quad \text{porque } ex + xe = 2ex \\ &= -(x^2, e, e) - (e, e, x^2) \quad \text{pela igualdade (5.21)} \\ &= 0 \quad \text{porque } (e, x^2, e) = 0 \text{ e } [x^2, e] = 0, \end{aligned}$$

encerrando a demonstração. □

Lema 5.3.17. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo uma das seguintes propriedades:

a) $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

b) $(x, x^2, x) = (x^2, x, x^2) = (x^2, x^2, x^2) = 0$ para todo $x \in A$.

c) $(x^2, y, x^2) = 0$ para quaisquer $x, y \in A$.

Seja e um idempotente não nulo e seja $x \in A$ não nulo tal que $ex = xe$. Então $A(e, x)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

Demonstração. O caso (a) segue do Lema 5.3.14. Suponhamos o caso (b) ou (c).

b) Dividiremos em duas etapas.

1) Se x é ortogonal a e, então $[ex, e] = 0$ pelo Corolário 5.3.4 e $x^2 = -\|x\|^2 e$ pelo Corolário 5.3.11. Agora:

$$0 = (x, x^2, x) = -\|x\|^2 (x, e, x) = -\|x\|^2 [ex, x].$$

Assim $\{e, x, ex\}$ é um conjunto comutativo, mas e e x são linearmente dependentes, assim pelo Lema 5.3.9 temos $ex \in \mathbb{R}e + \mathbb{R}x$. Logo $A(e, x) = \mathbb{R}e + \mathbb{R}x$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

2) Agora seja x um elemento qualquer tal que $ex = xe$. Podemos supor sem perder generalidade que $\dim(A(e, x))) \geqslant 2$. Então podemos escrever x como $x = \lambda e + w$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e w é ortogonal a e. Assim $A(e, x) = A(e, w)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

c) Dividiremos em duas etapas.

1) Se x é ortogonal a e, então $x^2 = -\|x\|^2 e$ pelo Corolário 5.3.11 e pelo Lema 5.3.16 temos $[ex, e] = [ex, exe] = 0$. Agora ex comuta com e e assim $[exe, e] = 0$ pelo Lema 5.3.16. Assim $\{e, ex, exe\}$ é um conjunto comutativo. Como e e x são linearmente independentes, então e e ex também são. Logo $exe \in \mathbb{R}e + \mathbb{R}ex$, assim, como $e \neq 0$ e A não tem divisores de zero, obtemos $xe = ex \in \mathbb{R}e + \mathbb{R}x$. Logo $A(e, x) = \mathbb{R}e + \mathbb{R}x$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

2) Agora seja x um elemento qualquer tal que $ex = xe$. Podemos supor sem perder generalidade que $\dim(A(e, x))) \geqslant 2$. Então podemos escrever x como $x = \lambda e + w$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e w é ortogonal a e. Assim $A(e, x) = A(e, w)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$. □

Lema 5.3.18. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo uma das seguintes propriedades:

a) $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

b) $(x, x^2, x) = (x^2, x, x^2) = (x^2, x^2, x^2) = 0$ para todo $x \in A$.

c) $(x^2, y, x^2) = 0$ para quaisquer $x, y \in A$.

Se existem em A uma subálgebra B isomorfa a $\mathbb{C}$ e uma subálgebra D isomorfa a $\overset{*}{\mathbb{C}}$, então B e D não contêm idempotente não nulo em comum.

Demonstração. Suponhamos que existe um idempotente $e \neq 0$ em B e D. Então existem em A um elemento i e um idempotente $e' \neq e$, ambos ortogonais a e, tais que $B = \mathbb{R}e + \mathbb{R}i$, $ei = ie = i$, $i^2 = -e$, $D = \mathbb{R}e + \mathbb{R}e'$, $ee' = e'e$ e $e + e' + ee' = 0$. Como e comuta com $e' + i$, então $A(e, e' + i)$ tem dimensão 1 ou 2 conforme Lema 5.3.17, o que quer dizer que $e(e' + i) = \beta e + \gamma(e' + i)$, donde $ee' + i = \beta e + \gamma(e' + i)$, ou seja, $-e - e' + i = \beta e + \gamma(e' + i)$. Se $\gamma \neq 1$, então $i \in \mathbb{R}e + \mathbb{R}e'$, contradição. Se $\gamma = 1$, então $-2e' = (1 + \beta)e$, contradição pois e e e' são linearmente independentes. □

Lema 5.3.19. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo uma das seguintes propriedades:

a) $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

b) $(x, x^2, x) = (x^2, x, x^2) = (x^2, x^2, x^2) = 0$ para todo $x \in A$.

Sejam e_1 e e_2 dois idempotentes de A tais que $e_1e_2 \neq e_2e_1$. Então existe um idempotente não nulo e em A tal que $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$ e e comuta com e_1 e e_2. Além disso, $A(e, e_1)$ e $A(e, e_2)$ são isomorfas a $\overset{*}{\mathbb{C}}$ e e é o único idempotente não nulo de A que comutam com e_1 e e_2.

Demonstração. De fato, temos $(e_1 - e_2)^2 \neq 0$ pois A não tem divisores de zero e $e_1 \neq e_2$. Pela igualdade (5.18) do Corolário 5.3.4, temos $[(e_1 - e_2)^2, e_1] = [(e_1 - e_2)^2, e_2] = 0$. Pelo Lema 5.3.17, $A(e_1, (e_1 - e_2)^2)$ e $A(e_2, (e_1 - e_2)^2)$ são subálgebras comutativas de dimensões no máximo 2. Temos $\dim_{\mathbb{R}}(A((e_1 - e_2)^2)) = 1$ pois caso contrário ela conteria e_1 e e_2, contradição. Assim existe um idempotente e em A tal que $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$ e e comuta com e_1 e e_2. Por causa do Lema 5.3.17 e de $e_1e_2 \neq e_2e_1$, então $A(e, e_1)$ e $A(e, e_2)$ são isomorfas a $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

Suponhamos agora que e_3 seja um idempotente não nulo em A que comuta com e_1 e e_2. Nós mostraremos que $e_3 = e$. De fato, $A(e_3, e_1)$ e $A(e_3, e_2)$ são isomorfas a $\overset{*}{\mathbb{C}}$ por causa do Lema 5.3.17 e de $e_1e_2 \neq e_2e_1$, aí $e_3 + e_1 + e_3e_1 = 0$ e $e_3 + e_2 + e_3e_2 = 0$, daí $e_3(e_1 - e_2) = e_2 - e_1$. Analogamente $e(e_1 - e_2) = e_2 - e_1$. Assim $(e_3 - e)(e_1 - e_2) = 0$. Como A não tem divisores de zero e $e_1 \neq e_2$, então $e_3 = e$, encerrando a demonstração. □

Lema 5.3.20. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo uma das seguintes propriedades:

a) $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

b) $(x, x^2, x) = (x^2, x, x^2) = (x^2, x^2, x^2) = 0$ para todo $x \in A$.

Em A não é possível que existam simultaneamente duas subálgebras B e D tais que $B \cong \mathbb{C}$ e $D \cong \overset{*}{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Suponhamos que exista $B = \mathbb{R}e_0 + \mathbb{R}j$ tal que $e_0^2 = e_0$, $j^2 = -e_0$ e $e_0j = je_0 = j$ e $D = \mathbb{R}e' + \mathbb{R}e''$ tal que $e'^2 = e'$, $e''^2 = e''$, $e'e'' = e''e'$ e $e' + e'' + e'e'' = 0$. Se $e_0e' = e'e_0$, então $A(e_0, e')$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$ pelo Lema 5.3.17, o que é impossível pelo Lema 5.3.18. Suponhamos que $e_0e' \neq e'e_0$, então existe um idempotente e em A tal que $A(e, e_0)$ seja isomorfa a $\overset{*}{\mathbb{C}}$ conforme o Lema 5.3.19, o que é impossível pelo Lema 5.3.18. □

Teorema 5.3.21. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo uma das seguintes propriedades:

a) $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

b) $(x, x^2, x) = (x^2, x, x^2) = (x^2, x^2, x^2) = 0$ para todo $x \in A$.

Suponhamos que A contenha uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$. Então A tem dimensão finita.

Demonstração. Seja B uma subálgebra de A isomorfa a $\mathbb{C}$. Então B tem um idempotente não nulo e. Se A tem um idempotente não nulo diferente de e, então existe um idempotente g tal que $A(e, g)$ seja isomorfa a $\overset{*}{\mathbb{C}}$ pelo Lema 5.3.19, contradizendo o Lema 5.3.20. Assim e é o único idempotente não nulo de A. Em particular, e comuta com x^2 para todo $x \in A$ por causa do Lema 5.3.15. Agora para todo $x \in A$ temos:

$$\begin{aligned} 0 &= [e, x - ex - xe] \quad \text{pela igualdade (5.17)} \\ &= [e, x + (e - x)^2 - e - x^2] \\ &= [e, x]. \end{aligned}$$

Assim e está no centro comutativo. Logo, pelo Teorema 5.3.7, A tem dimensão finita. □

Lema 5.3.22. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$. Sejam e_1 e e_2 idempotentes em A tais que $[e_1, e_2] \neq 0$. Então existe idempotente e em A tal que $[e_1, e_2]^2 = \alpha e$ e e comute com e_1 e e_2. Além disso, $A(e, e_1)$ e $A(e, e_2)$ são isomorfas a $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Primeiramente é evidente que o idempotente e será o mesmo que aquele do Lema 5.3.19, conforme o próprio Lema 5.3.19. A existência de dois idempotentes e_1 e e_2 em A nos mostra que não existe em A uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$, conforme o Teorema 5.3.21. De acordo com a identidade (5.17) do Corolário 5.3.4, temos $[ex + xe - x, e] = 0$ para todo elemento x e todo idempotente e em A. Escrevamos:

$$y = e_1[e_1, e_2] + [e_1, e_2]e_1 - [e_1, e_2], \quad z = e_2[e_1, e_2] + [e_2, e_2]e_1 - [e_1, e_2]$$

e demonstraremos que $y = 0$ e $z = 0$. De fato, e_1 é ortogonal a y, porque:

$$\langle [e_1, e_2], e_1 \rangle = \langle e_1e_2 - e_2e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle - \langle e_2, e_1 \rangle = 0,$$

$$\langle [e_1, e_2]e_1, e_1 \rangle = \langle [e_1, e_2], e_1 \rangle = 0,$$
$$\langle e_1[e_1, e_2], e_1 \rangle = \langle [e_1, e_2], e_1 \rangle = 0.$$

Como $[y, e_1] = 0$, então $A(y, e_1)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$ pelo Lema 5.3.17. Se $y = \delta e_1$, então $0 = \langle y, e_1 \rangle = \delta$, ou seja, $y = 0$. Suponhamos agora que $A(y, e_1)$ seja isomorfa a $\overset{*}{\mathbb{C}}$, então $y = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e'$ onde e' é um idempotente que comuta com e_1 e $e' + e_1 + e'e_1 = 0$. Mostraremos que e' é ortogonal a y. De fato:

$$\langle [e_1, e_2], e' \rangle = -\langle e_1e_2 - e_2e_1, e'e_1 \rangle = -\langle e_1e_2, e_1e' \rangle + \langle e_2e_1, e'e_1 \rangle = -\langle e_2, e' \rangle + \langle e_2, e' \rangle = 0,$$

$$\langle e_1[e_1, e_2], e' \rangle = -\langle e_1[e_1, e_2], e_1e' \rangle = -\langle [e_1, e_2], e' \rangle = 0,$$
$$\langle [e_1, e_2]e_1, e' \rangle = -\langle [e_1, e_2]e_1, e'e_1 \rangle = -\langle [e_1, e_2], e' \rangle = 0.$$

Além disso, temos:

$$0 = \langle e' + e_1 + e'e_1, e' \rangle = \langle e', e' \rangle + \langle e_1, e' \rangle + \langle e'e_1, e' \rangle = 1 + \langle e_1, e' \rangle + \langle e_1, e' \rangle,$$

assim $\langle e_1, e' \rangle = -\frac{1}{2}$, aí $0 = \langle y, e_1 \rangle = \alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1$ e $0 = \langle y, e' \rangle = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \beta_1$, aí segue que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, logo $y = 0$. Analogamente podemos mostrar que $z = 0$ utilizando e_2 em vez de e_1. Como $y = 0$, então $[e_1, e_2]$ comuta com $e_1[e_1, e_2] + [e_1, e_2]e_1$. Fazendo $x = [e_1, e_2]$ e $y = e_1$ na identidade (5.19), então $[e_1, e_2]^2$ comuta com e_1. Analogamente $[e_1, e_2]^2$ comuta com e_2 pois $z = 0$. De acordo com o Lema 5.3.17, como $[e_1, e_2] \neq 0$, então $A([e_1, e_2]^2, e_1)$ e $A([e_1, e_2]^2, e_2)$ são subálgebras comutativas de dimensão 2. Se $\dim(A([e_1,e_2]^2)) = 2$, então $A([e_1,e_2]^2,e_1) = A([e_1,e_2]^2) = A([e_1,e_2]^2,e_2)$, mas isso quer dizer que $e_1e_2 = e_2e_1$, contradição. Assim $\dim(A([e_1,e_2]^2)) = 1$ e disso vem que $[e_1,e_2]^2 = \alpha e$. Agora $A(e,e_1)$ e $A(e,e_2)$ são isomorfas a $\overset{*}{\mathbb{C}}$ por causa do Lema 5.3.17 e de $[e_1,e_2] \neq 0$. □

Lema 5.3.23. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo $(x,x,x) = 0$ para todo $x \in A$. Seja e um idempotente não nulo de A e sejam x e y dois elementos de A. Se e comuta com x e y, então e comuta com xy.

Demonstração. Pelo Lema 5.3.17, $A(e,x)$ e $A(e,y)$ são isomorfas a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$.

1) No caso onde $A(e,x) \cong \mathbb{C}$ ou $A(e,y) \cong \mathbb{C}$, o lema segue pelo Teorema 5.3.21.

2) O lema é evidente para o caso onde $A(e,x) \cong \mathbb{R}$ ou $A(e,y) \cong \mathbb{R}$.

3) Resta-nos examinar o caso $A(e,x) \cong A(e,y) \cong \overset{*}{\mathbb{C}}$. Escrevamos $A(e,x) = \mathbb{R}e + \mathbb{R}e_1$ e $A(e,y) = \mathbb{R}e + \mathbb{R}e_2$ onde e_1 e e_2 são dois idempotentes não nulos de A. Se $e_1e_2 = e_2e_1$, o resultado segue do Lema 5.3.17. Suponhamos que $e_1e_2 \neq e_2e_1$. Pelos Lemas 5.3.19 e 5.3.22, temos $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$ e $[e_1,e_2]^2 = \alpha e$, com $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$e_1 + e_2 - 2(e_1e_2 + e_2e_1) = \lambda e$$

e também:

$$0 = [[e_1,e_2]^2,[e_1,e_2]] = \alpha[e,e_1e_2 - e_2e_1].$$

Assim e comuta com $e_1e_2 + e_2e_1$ e $e_1e_2 - e_2e_1$, aí comuta com e_1e_2 e e_2e_1, logo comuta com xy. □

Lema 5.3.24. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo $(x,x,x) = 0$ para todo $x \in A$. Sejam e, e' dois idempotentes de A, então a álgebra $A(e,e')$ tem dimensão finita.

Demonstração. De fato, se $ee' = e'e$, a álgebra $A(e,e')$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$. Suponhamos que $ee' \neq e'e$, então existe um idempotente não nulo e'' em $A(e,e')$ que comuta com e e e' conforme o Lema 5.3.19 ou 5.3.22, portanto está no centro comutativo de $A(e,e')$ pelo Lema 5.3.23. Como $A(e,e')$ satisfaz a identidade $(x,x^2,x) = 0$ para todo $x \in A(e,e')$, então o Teorema 5.3.7 nos mostra que $A(e,e')$ tem dimensão finita. □

Lema 5.3.25. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo $(x,x^2,x) = (x^2,y,x^2) = 0$ para quaisquer $x,y \in A$. Sejam $e,f \in A$ dois idempotentes. Então $(e,x,f) + (f,x,e) = 0$ para todo $x \in A$.

Demonstração. É fácil ver que para todo idempotente g temos $(g,x,g) = 0$ para todo $x \in A$, assim podemos assumir que e e f sejam linearmente independentes. Basta mostrar que $e+f$ é um quadrado, pois assim:

$$0 = (e+f,x,e+f) = (e,x,f) + (f,x,e).$$

Agora dividiremos em dois casos:

1) Se $ef = fe$, então $A(e,f)$ é isomorfa a $\overset{*}{\mathbb{C}}$ pelo Lema 5.3.17. Assim $e+f \in A(e,f)$ é um quadrado.

2) Se $ef \neq fe$, então existe um idempotente não nulo g tal que $[g,e] = [g,f] = 0$ pelo Lema 5.3.19, assim $[g,e+f] = 0$. Note que $e+f$ e g são linearmente independentes. Assim $A(g,e+f)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$ pelo Lema 5.3.17, consequentemente $e+f$ é um quadrado em A. Isso conclui a demonstração. □

Teorema 5.3.26. Seja A uma álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana satisfazendo uma das seguintes propriedades:

a) $(x,x,x) = 0$ para todo $x \in A$.

b) $(x,x^2,x)=(x^2,y,x^2)=0$ para quaisquer $x,y\in A$.

Então A tem dimensão finita.

Demonstração. Se existe uma subálgebra de A isomorfa $\mathbb{C}$, o Teorema 5.3.21 nos diz que A tem dimensão finita. Suponhamos agora que A não tenha subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$. Para isso nós dividiremos em dois casos.

a) Sejam e e e' dois idempotentes de A, $e\neq 0$. Pelo Lema 5.3.24, a álgebra $A(e,e')$ tem dimensão finita, de modo que $A(e,e')$ é uma álgebra com divisão. Existem assim elementos a e b em A tais que $ea=e'$ e $be=e'$. Agora, pelo Lema 5.3.14, para todo x não nulo em A, $A(x)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$, daí x é uma combinação linear de um ou dois idempotentes. Portanto existem elementos a e b em A tais que $ea=x$ e $be=x$. Assim R_e e L_e são sobrejetoras, de modo que o teorema segue pelo Teorema 5.3.7.

b) Para todo $x\in A$ não nulo, então $A(x^2)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\overset{*}{\mathbb{C}}$ pelo Lema 5.3.15. Assim x^2 é uma combinação linear de dois idempotentes não nulos. Além disso, se e é um idempotente, então:

$$ex+xe=(e+x)^2-e-x^2$$

é uma combinação linear de quatro idempotentes não nulos. Por outro lado, a igualdade (5.17) e o Lema 5.3.17 mostram que:

$$x-ex-xe$$

é uma combinação linear de dois idempotentes não nulos. Agora:

$$x=(x-ex-xe)+(ex+xe)$$

é uma combinação linear de seis idempotentes não nulos. Assim, por causa do Lema 5.3.25, é fácil ver que A é flexível. Portanto caímos no caso (a). □

5.3.3 Classificação de El-Mallah e Aplicações

Mohamed Lamei El-Mallah, no artigo [EM90], obteve uma classificação das álgebras com valor absoluto, com dimensão finita e satisfazendo $(x,x,x)=0$ para todo $x\in A$. Enunciaremos seu resultado no Teorema 5.3.33.

Álgebra dos Pseudo-Octônios

Antes de enunciarmos o Teorema 5.3.33, nós apresentaremos a $\mathbb{R}$-álgebra dos pseudo-octônios na Definição 5.3.31. Ela também é chamada $\mathbb{R}$-álgebra de Okubo e foi introduzida por Okubo no artigo [Oku78]. Para introduzi-la neste trabalho, apresentaremos algumas definições e resultados prévios. Seja $M_3(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes quadradas de tamanho 3 com entradas em $\mathbb{C}$.

Definição 5.3.27. Definimos $\mathbb{P}$ como o conjunto das matrizes $X\in M_3(\mathbb{C})$ tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:

- $X^*=X$.
- $\mathrm{tr}(X)=0$.

É fácil ver que $\mathbb{P}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão 8, tendo em mente que $\mathbb{C}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão 2. Agora definamos a seguinte estrutura.

Definição 5.3.28. Para $X,Y\in\mathbb{P}$ definimos o seguinte:

$$f(X,Y)=\frac{1}{6}\mathrm{tr}(XY). \tag{5.22}$$

É fácil ver que $(X, Y) \mapsto f(X, Y)$ é um produto interno no $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{P}$. Agora definamos a seguinte estrutura.

Definição 5.3.29. Sejam $\mu = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3}i)$ e $\nu = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3}i)$, de modo que $\mu + \nu = 3\mu\nu = 1$. Para $X, Y \in \mathbb{P}$ definamos o seguinte:

$$X \diamond Y = \mu XY + \nu YX - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(XY). \tag{5.23}$$

É fácil ver que $\diamond : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to M_3(\mathbb{C})$ é uma função bilinear. Também temos o seguinte.

Proposição 5.3.30. Para $X, Y \in \mathbb{P}$, então $X \diamond Y \in \mathbb{P}$.

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathbb{P}$. Então $X^* = X$, $\mathrm{tr}(X) = 0$, $Y^* = Y$ e $\mathrm{tr}(Y) = 0$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
(X \diamond Y)^* &= \left(\mu XY + \nu YX - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)I\right)^* \\
&= \mu^* X^* Y^* + \nu^* Y^* X^* - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)^* I^* \\
&= \nu YX + \mu XY - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)I \\
&= X \diamond Y
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(X \diamond Y) &= \mathrm{tr}\left(\mu XY + \nu YX - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)I\right) \\
&= \mu\mathrm{tr}(XY) + \nu\mathrm{tr}(YX) - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)\mathrm{tr}(I) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $X \diamond Y \in \mathbb{P}$. □

Com esses resultados, podemos definir a $\mathbb{R}$-álgebra dos pseudo-octônios.

Definição 5.3.31. A **$\mathbb{R}$-álgebra dos pseudo-octônios**, também chamada **$\mathbb{R}$-álgebra de Okubo**, é o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{P}$ munido do produto interno definido por (5.22) e munido da multiplicação definida por (5.23).

Apresentaremos a seguinte propriedade importante da $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{P}$.

Proposição 5.3.32. $\mathbb{P}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra flexível com valor absoluto.

Demonstração. Temos os seguintes passos.

1) Mostraremos que $\mathbb{P}$ é flexível. Sejam $X, Y \in \mathbb{P}$. Utilizando o fato de que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ e $\mathrm{tr}(X) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
& (X \diamond Y) \diamond X \\
= \; & \mu(X \diamond Y)X + \nu X(X \diamond Y) - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}((X \diamond Y)X)I \\
= \; & \mu(\mu XY + \nu YX - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)I)X + \nu X(\mu XY + \nu YX - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)I) \\
& -\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}((\mu XY + \nu YX - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)I)X)I \\
= \; & \mu^2 XYX + \mu\nu YX^2 - \tfrac{1}{3}\mu\mathrm{tr}(XY)X + \mu\nu X^2 Y + \nu^2 XYX - \tfrac{1}{3}\nu\mathrm{tr}(XY)X \\
& -\tfrac{1}{3}\mu\mathrm{tr}(XYX)I - \tfrac{1}{3}\nu\mathrm{tr}(YX^2)I + \tfrac{1}{9}\mathrm{tr}(XY)\mathrm{tr}(X)I \\
= \; & \tfrac{1}{3}X^2Y + \tfrac{1}{3}XYX + \tfrac{1}{3}YX^2 - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)X - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XYX)I
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
& X \diamond (Y \diamond X) \\
= \; & \mu X(Y \diamond X) + \nu(Y \diamond X)X - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(X(Y \diamond X))I \\
= \; & \mu X(\mu YX + \nu XY - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(YX)I) + \nu(\mu YX + \nu XY - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(YX)I)X \\
& -\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(X(\mu YX + \nu XY - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(YX)I))I \\
= \; & \mu^2 XYX + \mu\nu X^2Y - \tfrac{1}{3}\mu\mathrm{tr}(YX)X + \mu\nu YX^2 + \nu^2 XYX - \tfrac{1}{3}\nu\mathrm{tr}(YX)X \\
& -\tfrac{1}{3}\mu\mathrm{tr}(XYX)I - \tfrac{1}{3}\nu\mathrm{tr}(X^2Y)I + \tfrac{1}{9}\mathrm{tr}(YX)\mathrm{tr}(X)I \\
= \; & \tfrac{1}{3}X^2Y + \tfrac{1}{3}XYX + \tfrac{1}{3}YX^2 - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)X - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XYX)I,
\end{aligned}$$

assim podemos ver que:

$$(X \diamond Y) \diamond X = X \diamond (Y \diamond X) = \frac{1}{3}X^2Y + \frac{1}{3}XYX + \frac{1}{3}YX^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)X - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(XYX)I, \tag{5.24}$$

de modo que $\mathbb{P}$ é flexível.

2) Mostraremos que para todo $X \in \mathbb{P}$ temos:

$$X^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2)X - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3)I = 0. \tag{5.25}$$

Seja $X \in \mathbb{P}$. Seja $p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ o polinômio característico de X, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\mathrm{tr}(X^n) = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos:

$$0 = (X - \alpha I)(X - \beta I)(X - \gamma I) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma I. \tag{5.26}$$

Entretanto:

$$\alpha + \beta + \gamma = \mathrm{tr}(X) = 0. \tag{5.27}$$

Assim:

$$0 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = \mathrm{tr}(X^2) + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma),$$

de modo que:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2). \tag{5.28}$$

Além disso, de (5.27) temos $-\gamma = \alpha + \beta$, assim:

$$-\gamma^3 = (\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = \alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta\gamma,$$

de modo que:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{3}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3). \tag{5.29}$$

Portanto (5.25) segue de (5.26), (5.27), (5.28) e (5.29).

3) Mostraremos que $\mathbb{P}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto. Para quaisquer $X, Y \in \mathbb{P}$, utilizando o fato de que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, temos:

$$\begin{aligned}
& 6\|X \diamond Y\|^2 \\
= \; & \mathrm{tr}\left((X \diamond Y)^2\right) \\
= \; & \mathrm{tr}\left(\left(\mu XY + \nu YX - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)I\right)^2\right) \\
= \; & \mathrm{tr}\left(\mu^2 XYXY + \nu^2 XYXY + \tfrac{1}{9}\mathrm{tr}(XY)^2 I + 2\mu\nu X^2Y^2 - \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{tr}(XY)XY - \tfrac{2}{3}\nu\mathrm{tr}(XY)XY\right) \\
= \; & \mathrm{tr}\left(\tfrac{2}{3}X^2Y^2 + \tfrac{1}{3}XYXY - \tfrac{2}{3}\mathrm{tr}(XY)XY + \tfrac{1}{9}\mathrm{tr}(XY)^2 I\right) \\
= \; & \tfrac{2}{3}\mathrm{tr}(X^2Y^2) + \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XYXY) - \tfrac{2}{3}\mathrm{tr}(XY)\mathrm{tr}(XY) + \tfrac{1}{9}\mathrm{tr}(XY)^2\mathrm{tr}(I) \\
= \; & \tfrac{2}{3}\mathrm{tr}(X^2Y^2) + \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XYXY) - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)^2.
\end{aligned}$$

Agora, pela identidade (5.24) do item (2), para todo $X \in \mathbb{P}$ temos:

$$X^4 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2)X^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3)X = 0,$$

mas $\mathrm{tr}(X) = 0$, assim:

$$0 = \mathrm{tr}\left(X^4 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2)X^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3)X\right) = \mathrm{tr}(X^4) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2)^2.$$

Linearizando a identidade acima e usando o fato de que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, para quaisquer $X, Y \in \mathbb{P}$ temos:

$$4\mathrm{tr}(X^2Y^2) + 2\mathrm{tr}(XYXY) - \mathrm{tr}(X^2)\mathrm{tr}(Y^2) - 2\mathrm{tr}(XY)^2 = 0,$$

portanto:

$$36\|x \diamond y\|^2 = 4\mathrm{tr}(X^2Y^2) + 2\mathrm{tr}(XYXY) - 2\mathrm{tr}(XY)^2 = \mathrm{tr}(X^2)\mathrm{tr}(Y^2) = 36\|x\|^2\|y\|^2,$$

assim concluímos a demonstração. □

Resultado Principal

Agora apresentaremos a classificação feita por El-Mallah sobre $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão finita satisfazendo a igualdade $(x, x, x) = 0$.

Teorema 5.3.33. Seja A uma álgebra com valor absoluto, com dimensão finita e satisfazendo a igualdade $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$. Então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$.

Não demonstraremos esse teorema, no entanto faremos um resumo da demonstração feita por El-Mallah, que utiliza a classificação das $\mathbb{R}$-álgebras flexíveis com composição. Para isso, definimos o que são $\mathbb{R}$-álgebras com composição.

Definição 5.3.34. Uma $\mathbb{K}$**-álgebra com composição** é uma $\mathbb{K}$-álgebra A munida de uma forma bilinear simétrica não-degenerada $f : A \times A \to \mathbb{K}$ tal que:

$$f(xy, xy) = f(x, x)f(y, y)$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Exemplo 5.3.35. Toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto pré-Hilbertiana é uma $\mathbb{R}$-álgebra com composição, onde o produto interno $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ é a forma bilinear simétrica em questão. De fato:

$$\langle xy, xy\rangle = \|xy\| = \|x\|\|y\| = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto de dimensão finita. Então A é isotópica a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, portanto é pré-Hilbertiana. Assim A é uma $\mathbb{R}$-álgebra com composição. Em suma, $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão finita são álgebras com composição.

Okubo obteve um resultado sobre a classificação de álgebras flexíveis com composição de dimensão finita sobre corpos de característica $\neq 2, 3$, cuja demonstração é longa e pode ser vista em [Oku82] ou [EM91]. Mais especificamente temos o seguinte caso particular.

Teorema 5.3.36. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra flexível com composição de dimensão finita. Então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$.

A demonstração original do Teorema 5.3.33 consiste de dividirmos o problema em casos menores, mais especificamente os seguintes casos:

1) $\dim(A) \leqslant 2$.

2) $\dim(A) = 4$.

3) $\dim(A) = 8$ e A não tem idempotente não nulo no centro comutativo.

4) A tem idempotente não nulo no centro comutativo.

O caso 1 é fácil de abordar conforme a subseção 5.2.2. O caso 2 foi abordado no artigo [EM87] e também na subseção 5.2.3. O caso 3 também foi abordado no artigo [EM87], onde El-Mallah mostrou que a álgebra é flexível. O caso 4 foi abordado no artigo [EM90], onde El-Mallah mostrou que a álgebra de fato tem uma involução, portanto, segundo o artigo [EM88] do El-Mallah, a álgebra é flexível. Entretanto, Elduque e Pérez mostraram no artigo [EP94] o seguinte resultado.

Teorema 5.3.37. Seja A uma álgebra com composição sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$, com dimensão finita e que satisfaz $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$. Então A é flexível.

Com isso, podemos aplicar de modo mais conciso resultados sobre álgebras com composição para álgebras com valor absoluto, com dimensão finita e satisfazendo $(x, x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

Aplicações

Agora apresentaremos algumas aplicações do Teorema 5.3.33. O principal resultado é o Teorema 5.3.39, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto que satisfaça a identidade $(x,x,x)=0$ e possua um único idempotente não nulo é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Proposição 5.3.38. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto satisfazendo a identidade $(x,x,x)=0$ e seja M um subespaço de A com dimensão 2. Então existe $m \in M$ tal que $-m^2$ seja um idempotente não nulo.

Demonstração. Tenhamos em mente o Lema 5.1.8. Considere a função $\Phi : A \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4}\left(\left\|x+x^2\right\|^2 - \left\|x-x^2\right\|^2\right).$$

Note que Φ é contínua e satisfaz $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ para todo $x \in A$, e que $\mathbb{S}_M$ é conexa e simétrica, ou seja, $-\mathbb{S}_M = \mathbb{S}_M$, assim segue que $\Phi(\mathbb{S}_M)$ é um subconjunto conexo e simétrico de $\mathbb{R}$, portanto temos $0 \in \Phi(\mathbb{S}_M)$. Tomando $m \in \mathbb{S}_M$ tal que $\Phi(m)=0$, e notando que $\mathbb{R}m + \mathbb{R}m^2$ é um espaço pré-Hilbertiano para algum produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos $\langle m, m^2 \rangle = \Phi(m) = 0$, portanto:

$$\left\|m^2 - (m^2)^2\right\| = \left\|(m+m^2)(m-m^2)\right\| = \left\|m+m^2\right\|\left\|m-m^2\right\| = 2.$$

Como $\mathbb{R}m^2 + \mathbb{R}(m^2)^2$ também é um espaço pré-Hilbertiano, segue da igualdade $\left\|m^2-(m^2)^2\right\| = 2$ e da lei do paralelogramo que:

$$m^2 + (m^2)^2 = 0.$$

Assim $-m^2$ é um idempotente não nulo. □

Teorema 5.3.39. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto. Suponhamos que $(x,x,x)=0$ para todo $x \in A$ e exista um único idempotente não nulo e. Então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Demonstração. Seja $a \in A \backslash \mathbb{R}e$. Então, pela Proposição 5.3.38, existe $b \in \mathbb{R}e + \mathbb{R}a$ tal que $-b^2 = e$. Assim $b \notin \mathbb{R}e$, o que implica que $\mathbb{R}e + \mathbb{R}a = \mathbb{R}e + \mathbb{R}b$, e também $[e,b]=0$. Portanto $[e,a]=0$, assim $[e,A]=0$ por causa da arbitrariedade de $a \in A\backslash\mathbb{R}e$. Agora basta invocar os Teoremas 5.1.14, 5.3.26 e 5.3.33 para concluir que A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. □

Capítulo 6

Álgebras Algébricas com Valor Absoluto

Diante do problema da classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão finita, apareceu também a questão sobre a classificação das $\mathbb{R}$-álgebras algébricas com valor absoluto. Já vimos que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto de dimensão finita tem dimensão 1, 2, 4 ou 8. Desse modo, em toda $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto, o máximo dos números $\dim_{\mathbb{R}}(A(a))$ onde $a \in A$ é 1, 2, 4 ou 8.

Palacios em 1994 obteve uma classificação completa das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto tal que para todo $a \in A$ tenhamos $\dim(A(a)) \leqslant 2$. O problema da classificação completa das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto tal que para todo $a \in A$ tenhamos $\dim(A(a)) \leqslant 4$ ainda está em aberto. No entanto, Kaidi, Ramírez e Palacios mostraram em 1997 que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto tem dimensão finita, utilizando o conceito de ultrapotências de $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto.

Basearemos a apresentação deste capítulo em [EARRP97], [Arr12] e [CGRP14]. Na Seção 6.1, apresentaremos o conceito de ultraprodutos e ultrapotências de álgebras com valor absoluto. Na Seção 3.5, pretendemos mostrar que toda $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto tem dimensão finita. Na Seção 6.3, pretendemos mostrar que toda $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto tal que para todo $a \in A$ tenhamos $\dim(A(a)) \leqslant 2$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, ${}^*\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, ${}^*\mathbb{O}$, $\mathbb{O}^*$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$.

6.1 Ultraprodutos e Ultrapotências

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados sobre ultrafiltros e ultraprodutos que serão utilizados para mostrar que toda álgebra algébrica com valor absoluto tem dimensão finita. Nós mostraremos que o ultraproduto de álgebras algébricas com valor absoluto também é uma álgebra algébrica com valor absoluto. Para isso, revisaremos alguns conceitos de topologia geral.

Na Subseção 6.1.1, apresentaremos os conceitos de filtros e ultrafiltros, juntamente com alguns exemplos úteis. Na Subseção 6.1.2, apresentaremos o conceito de convergência em relação a filtros, que será uma generalização do conceito usual de limites apresentados em estudos de análise. Na Subseção 6.1.3, apresentaremos os ultraprodutos e ultrapotências de espaços normados. Por fim, na Subseção 6.1.4, apresentaremos os ultraprodutos e ultrapotências de álgebras normadas e de álgebras com valor absoluto.

6.1.1 Filtros e Ultrafiltros

Nesta subseção, apresentaremos os conceitos de filtros e ultrafiltros, juntamente com exemplos úteis, que são interessante para os estudos de teoria dos conjuntos e topologia geral.

Definição 6.1.1. Seja I um conjunto. Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de I é um **filtro em** I se satisfaz o seguinte:

- $I \in \mathcal{F}$.

- Para $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Para $A, B \subseteq I$, se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.
- $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Um **ultrafiltro** em I é um filtro $\mathcal{U}$ em I tal que, para todo filtro $\mathcal{F}$ em I, se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, então $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Lema 6.1.2. Seja $\mathcal{F}$ um filtro em I. Então $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro se e só se para $A, B \subseteq I$, se $A \cup B \in \mathcal{F}$, então $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Suponhamos que para $A, B \subseteq I$, se $A \cup B \in \mathcal{F}$, então $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$. Para filtro $\mathcal{G}$ em I, se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, então para $A \in \mathcal{G}$ temos $I \backslash A \notin \mathcal{G}$, aí $I \backslash A \notin \mathcal{F}$, aí $A \in \mathcal{F}$, logo $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Assim $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro.

Agora suponhamos que $\mathcal{F}$ seja um ultrafiltro e seja $A \subseteq I$ tal que $A \notin \mathcal{F}$. Seja $\mathcal{G}$ o conjunto dos $B \subseteq I$ tais que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Temos o seguinte:

- Temos $A \cup I = I \in \mathcal{F}$, aí $I \in \mathcal{G}$.
- Para $B, C \in \mathcal{G}$, então $A \cup B \in \mathcal{F}$ e $A \cup C \in \mathcal{F}$, assim $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \in \mathcal{F}$, aí $B \cap C \in \mathcal{G}$.
- Para $B, C \subseteq I$, se $B \in \mathcal{G}$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \in \mathcal{F}$ e $A \cup B \subseteq A \cup C$, aí $A \cup C \in \mathcal{F}$, aí $C \in \mathcal{G}$.
- Temos $A \cup \varnothing = A \notin \mathcal{F}$, aí $\varnothing \notin \mathcal{G}$.

Logo $\mathcal{G}$ é um filtro em I. Além disso, para $B \in \mathcal{F}$, como $B \subseteq A \cup B$, então $A \cup B \in \mathcal{F}$, aí $B \in \mathcal{G}$, logo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Pela maximalidade de $\mathcal{F}$, temos $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, ou seja, para todo $B \subseteq I$, se $A \cup B \in \mathcal{F}$, então $B \in \mathcal{F}$. □

Lema 6.1.3. Todo filtro $\mathcal{F}$ sobre I está contido em um ulltrafiltro $\mathcal{U}$.

Demonstração. Pelo Lema de Zorn, basta mostrar que para todo conjunto de filtros Γ que seja totalmente ordenado e não vazio, então $\bigcup \Gamma$ é um filtro. De fato:

- Como $\Gamma \neq \varnothing$, então existe um $\mathcal{F} \in \Gamma$, aí $I \in \mathcal{F} \subseteq \bigcup \Gamma$.
- Para $A, B \in \bigcup \Gamma$, então existem $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \Gamma$ tais que $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$, aí existe um $\mathcal{H} \in \Gamma$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, assim $A \in \mathcal{H}$ e $B \in \mathcal{H}$, aí $A \cap B \in \mathcal{H} \subseteq \bigcup \Gamma$.
- Para $A, B \subseteq I$, se $A \in \bigcup \Gamma$ e $A \subseteq B$, então existe $\mathcal{F} \in \Gamma$ tal que $A \in \mathcal{F}$, aí $B \in \mathcal{F} \subseteq \bigcup \Gamma$.
- Como $\varnothing \notin \mathcal{F}$ para todo $\mathcal{F} \in \Gamma$, então $\varnothing \notin \bigcup \Gamma$.

Portanto $\bigcup \Gamma$ é um filtro em I. □

Seria interessante apresentar alguns exemplos de filtros e ultrafiltros.

Exemplo 6.1.4. Seja I um conjunto.

- Dado $X \subseteq I$ não vazio, o conjunto $\mathcal{F}_X$ de todos os $A \subseteq I$ tais que $X \subseteq A$ é um filtro, chamado **filtro principal de** X.
- Para $x \in I$, o conjunto $\mathcal{U}_x = \mathcal{F}_{\{x\}}$ é um ultrafiltro, chamado **ultrafiltro principal de** x.
- O conjunto $\mathcal{F}_\infty$ de todos os subconjuntos $A \subseteq I$ tais que $I \backslash A$ seja finito é um filtro, chamado **filtro de Fréchet**.

6.1.2 Convergência através de Filtros

Nesta subseção, apresentaremos o conceito de convergência através de filtros, que será uma generalização do conceito usual de limites de sequências e funções apresentados em estudos de análise.

Definição 6.1.5. Seja I um conjunto, $\mathcal{F}$ um filtro sobre I e X um espaço topológico. Uma função $f : I \to X$ **convergente a** $x \in X$ **através de** $\mathcal{F}$ se para cada vizinhança V de x temos $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$.

Agora mostraremos alguns exemplos que evidencia o que dissemos no começo desta subseção.

Exemplo 6.1.6. Mostraremos que a convergência usual de sequências de números reais é um caso particular da Definição 6.1.5. Lembremos que uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de números reais converge a um número real r no sentido usual se e só se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tenhamos $r - \varepsilon < x_n < r + \varepsilon$. Considerando a topologia usual da reta real $\mathbb{R}$ e o filtro de Fréchet $\mathcal{F}_\infty$ em $\mathbb{N}$, mostraremos que a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a r no sentido usual se e só se $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a r através de $\mathcal{F}_\infty$. De fato:

1) Suponhamos que $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a r no sentido usual. Seja V uma vizinhança de r. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subseteq V$. Assim existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tenhamos $r - \varepsilon < x_n < r + \varepsilon$. Portanto para todo $n > n_0$ temos $x_n \in V$, aí $\{n \in \mathbb{N} : n > n_0\} \subseteq x^{-1}(V)$. Porém $\mathbb{N} \backslash \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\} = \{1, \ldots, n_0\}$ é finito, aí $\{n \in \mathbb{N} : n > n_0\} \in \mathcal{F}_\infty$, logo $x^{-1}(V) \in \mathcal{F}_\infty$. Portanto $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a r através de $\mathcal{F}_\infty$.

2) Suponhamos que $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a r através de $\mathcal{F}_\infty$. Seja $\varepsilon > 0$. Então $V = (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ é uma vizinhança de r. Assim $x^{-1}(V) \in \mathcal{F}_\infty$, de modo que $\mathbb{N} \backslash x^{-1}(V)$ é finito, aí existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} \backslash x^{-1}(V) \subseteq \{1, \ldots, n_0\}$. Aí, para todo $n > n_0$, temos $n \in x^{-1}(V)$, aí $x_n \in V$, aí $r - \varepsilon < x_n < r + \varepsilon$. Portanto $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a r no sentido usual.

Exemplo 6.1.7. Mostraremos que a noção usual de limite de funções de uma variável real com valores reais é outro caso particular da Definição 6.1.5. Lembremos que, dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dados $a, r \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \to a} f(x) = r$ se e só se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$ tenhamos $r - \varepsilon < f(x) < r + \varepsilon$. Consideremos a topologia usual da reta real $\mathbb{R}$ e seja $\mathcal{F}$ a coleção dos subconjuntos $V \subseteq \mathbb{R}$ tais que existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \backslash \{a\} \subseteq V$. Então $\mathcal{F}$ é um filtro em $\mathbb{R}$. Mostraremos que $\lim_{x \to a} f(x) = r$ se só se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge a r através do filtro $\mathcal{F}$.

1) Suponhamos que $\lim_{x \to a} f(x) = r$. Seja V uma vizinhança de r. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subseteq V$. Assim existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$ tenhamos $r - \varepsilon < f(x) < r + \varepsilon$. Portanto para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$ temos $f(x) \in V$, aí $(a - \delta, a + \delta) \subseteq f^{-1}(V)$. Porém $(a - \delta, a + \delta) \in \mathcal{F}$, logo $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}_\infty$. Portanto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge a r através de $\mathcal{F}$.

2) Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge a r através de $\mathcal{F}$. Seja $\varepsilon > 0$. Então $V = (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ é uma vizinhança de r. Assim $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, de modo que existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \backslash \{a\} \subseteq f^{-1}(V)$. Assim, para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$, temos $x \in f^{-1}(V)$, aí $f(x) \in V$, aí $r - \varepsilon < f(x) < r + \varepsilon$. Portanto $\lim_{x \to a} f(x) = r$.

Em estudos de análise, limites de sequências e funções em geral são únicas caso existam. No caso geral de convergência através de filtro, isso nem sempre acontece. Porém a próxima proposição fornece condições necessárias e suficientes para que limites de funções através de filtros sejam sempre únicos caso existam.

Proposição 6.1.8. Seja X um espaço topológico. Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- Para todo I, para todo filtro $\mathcal{F}$ em I, para toda função $f : I \to X$ e para quaisquer $x, y \in X$, se f converge a x e a y através de $\mathcal{F}$, então $x = y$.

- X é Hausdorff, ou seja, para $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, existem vizinhanças U e V de x e y respectivamente tais que $U \cap V = \varnothing$.

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Suponhamos que X seja Hausdorff. Seja I um conjunto, seja $\mathcal{F}$ um filtro em I, seja $f : I \to X$ e sejam $x, y \in X$. Suponhamos que $f : I \to X$ converge a x e a y através de $\mathcal{F}$. Queremos mostrar que $x = y$.

Suponhamos que $x \neq y$. Então existem U vizinhança de x e V vizinhança de y tais que $U \cap V = \varnothing$. Como f converge a x e a y através de $\mathcal{F}$, temos $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ e $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Portanto:

$$\varnothing = f^{-1}(\varnothing) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{F},$$

contradição.

2) Suponhamos que X não seja Hausdorff. Então existem $x, y \in X$ tais que para quaisquer vizinhanças U e V de x e y respectivamente tenhamos $U \cap V \neq \varnothing$. Seja $\mathcal{F}$ a coleção dos subconjuntos $A \subseteq X$ tais que existam vizinhanças U e V de x e y respectivamente tais que $U \cap V \subseteq A$. Mostraremos que $\mathcal{F}$ é um filtro em X.

- X é uma vizinhança de x e de y, além disso temos $X \cap X \subseteq X$, assim $X \in \mathcal{F}$.
- Para $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, existem U_1 e U_2 vizinhanças de x e existem V_1 e V_2 vizinhanças de y tais que $U_1 \cap V_1 \subseteq A_1$ e $U_2 \subseteq V_2 \subseteq A_2$, assim $U_1 \cap U_2$ é vizinhança de x e $V_1 \cap V_2$ é vizinhança de y e:
$$(U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) = (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) \subseteq A_1 \cap A_2,$$
assim $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.
- Para $A, B \subseteq X$, se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então existem U vizinhança de x e V vizinhança de y tais que $U \cap V \subseteq A$, assim $U \cap V \subseteq B$, assim $B \in \mathcal{F}$.
- Para $A \in \mathcal{F}$, existem U vizinhança de x e V vizinhança de y tais que $U \cap V \subseteq A$, mas $U \cap V \neq \varnothing$, assim $A \neq \varnothing$. Portanto $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Mostraremos que a função identidade $I_X : X \to X$ converge a x e a y através de $\mathcal{F}$. Para toda vizinhança U de x, então X é vizinhança de y e também:

$$I_X^{-1}(U) = U = U \cap X \in \mathcal{F}.$$

Para toda vizinhança V de y, então X é vizinhança de x e também:

$$I_X^{-1}(V) = V = X \cap V \in \mathcal{F}.$$

Assim existem dois limites diferentes x e y para a função identidade $I_X : X \to X$ através de $\mathcal{F}$. □

Portanto, em espaços topológicos de Hausdorff, podemos definir o seguinte.

Definição 6.1.9. Seja X um espaço topológico de Hausdorff, seja I um conjunto, seja $\mathcal{F}$ um filtro em I, seja $f : I \to X$ uma função e seja $r \in X$. Se $f : I \to X$ converge a r através de $\mathcal{F}$, então definimos $\lim_{\mathcal{F}} f(i) = r$.

Em análise, limites de funções e sequências são preservadas por funções contínuas. No caso geral de convergência através de filtros, isso também é verdade.

Proposição 6.1.10. Sejam X e Y espaços topológicos, seja $f : I \to X$ uma função convergente a $x \in X$ através de $\mathcal{F}$ e seja $g : X \to Y$ uma função contínua. Então $g \circ f : I \to Y$ converge a $g(x)$ através de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Para V vizinhança de $g(x)$, então $g^{-1}(V)$ é vizinhança de x, assim $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{F}$. □

Em análise, se E é um conjunto fechado e $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma sequência de elementos de E que converge a um r no sentido usual, então $r \in E$. No caso geral de convergência através de filtros, isso também é verdade.

Proposição 6.1.11. Seja X espaço topológico, seja $E \subseteq X$ conjunto fechado e seja $f : I \to X$ uma função que converge a um $x \in X$ através de $\mathcal{F}$. Se existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $f(i) \in E$ para todo $i \in A$, então $x \in E$.

Demonstração. Para vizinhança V de x em X, então $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, mas $A \in \mathcal{F}$, aí $f^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{F}$, aí $f^{-1}(V) \cap A \neq \varnothing$, aí $V \cap E \neq \varnothing$. Portanto $x \in \overline{E} = E$. □

No cálculo vetorial, o limite de uma sequência de vetores $(x_{1n}, \ldots, x_{rn}) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor $(x_1, \ldots, x_r)$ dado por $x_i = \lim_{n\to\infty} x_{in}$, e o limite de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ dada por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ quando x tende a a é o vetor $(r_1, \ldots, r_n)$ dado por $r_i = \lim_{x\to a} f_i(x)$. No caso geral de convergência através de filtros, temos uma propriedade análoga.

Proposição 6.1.12. Sejam X e Y espaços topológicos e sejam $f : I \to X$ e $g : I \to Y$ convergentes a $x \in X$ e a $y \in Y$ através de $\mathcal{F}$. Então a função $h : I \to X \times Y$ dada por $h(i) = (f(i), g(i))$ converge a (x, y) através de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Seja W vizinhança de (x, y), então existem U vizinhança de x e V vizinhança de y tais que $U \times V \subseteq W$, assim $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ e $g^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, aí $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, mas é fácil ver que $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq h^{-1}(W)$, assim $h^{-1}(W) \in \mathcal{F}$. □

No cálculo, limites preservam operações básicas como soma e multiplicação e também preservam ordem. No caso geral da convergência através de filtros, temos uma propriedade análoga.

Proposição 6.1.13. Seja X um espaço normado e sejam $f, g : I \to X$ funções.

i) Se f e g convergem a x e y através de $\mathcal{F}$, então $f + g$ converge a $x + y$ através de $\mathcal{F}$.

ii) Se existir $A \in \mathcal{F}$ tal que $f(i) = x$ para todo $i \in A$, então f converge a x através de $\mathcal{F}$.

iii) Se $X = \mathbb{R}$, as funções f e g convergem a x e y através de $\mathcal{F}$ e existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $f(i) \leqslant g(i)$ para todo $i \in A$, então $x \leqslant y$.

iv) Se X é uma álgebra normada, as funções f e g convergem a x e y através de $\mathcal{F}$ então $f \cdot g$ converge a xy através de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Seja $h : I \to X \times Y$ dada por $h(i) = (f(i), g(i))$. Temos o seguinte:

i) Temos $f + g = s \circ h$, onde $s : X \times X \to X$ é dada por $s(x, y) = x + y$ e portanto é contínua, assim $f + g$ converge a $x + y$ através de $\mathcal{F}$.

ii) Para toda vizinhança V de x, então é fácil ver que $A \subseteq f^{-1}(V)$, assim $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$.

iii) O conjunto $E = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : u \leqslant v\}$ é fechado e $h(i) \in E$ para todo $i \in A$, assim $(x, y) \in E$, aí $x \leqslant y$.

iv) Temos $f \cdot g = m \circ h$, onde $m : X \times X \to X$ é dada por $m(x, y) = xy$ e portanto é contínua, assim $f \cdot g$ converge a xy através de $\mathcal{F}$.

Assim encerramos a demonstração. □

Em análise, sabemos que um espaço métrico X é compacto se e só se toda sequência em X tem uma subsequência convergente no sentido usual. O caso geral de convergência através de filtros é mais interessante, pois a noção de convergência através de *ultrafiltro* é uma condição suficientemente fraca para podermos mostrar que de fato um espaço topológico é compacto se e só se toda função converge através de ultrafiltros.

Definição 6.1.14. Seja I um conjunto e seja $\mathcal{F}$ um filtro em I. Um espaço topológico X é dito **completo através de** $\mathcal{F}$ se toda função $f : I \to X$ converge a algum $x \in X$ através de $\mathcal{F}$.

Lema 6.1.15. Seja X um espaço topológico. Então as seguintes condições são equivalentes:

- Para todo I e para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ em I, então X é completo através de $\mathcal{U}$.
- X é compacto.

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Suponhamos que X seja compacto. Seja I um conjunto, seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro em I e seja $f : I \to X$ uma função. Suponhamos que para cada $x \in X$ a função $f : I \to X$ não converge a x através de $\mathcal{U}$. Então para cada $x \in X$ existe uma vizinhança V_x de x tal que $f^{-1}(V_x) \notin \mathcal{U}$. Como X é compacto, existe um subconjunto finito $Y \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x\in Y} V_x$. Assim, como Y é finito, temos $I = f^{-1}(X) = f^{-1}(\bigcup_{x\in Y} V_x) = \bigcup_{x\in Y} f^{-1}(V_x) \notin \mathcal{U}$, contradição.

2) Suponhamos que, para todo conjunto I e para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ em I, o espaço X seja completo através de $\mathcal{U}$. Seja $(V_i)_{i\in I}$ uma coleção de subconjuntos abertos de X tal que nenhuma subcoleção finita cubra X. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto dos $A \subseteq X$ tais que exista um $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{i\in J}(X \backslash V_i) \subseteq A$. Então:

- $\varnothing \subseteq I$ é finito e $\bigcap_{i\in\varnothing}(X\backslash V_i) \subseteq X$, assim $X \in \mathcal{F}$.
- Para $A, B \in \mathcal{F}$, então existem $J, K \subseteq I$ finitos tais que $\bigcap_{i\in J}(X\backslash V_i) \subseteq A$ e $\bigcap_{i\in K}(X\backslash V_i) \subseteq B$, assim $J \cup K \subseteq I$ é finito e $\bigcap_{i\in J\cup K}(X\backslash V_i) = \bigcap_{i\in J}(X\backslash V_i) \cap \bigcap_{i\in K}(X\backslash V_i) \subseteq A \cap B$, aí $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Para $A, B \subseteq X$, se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{i\in J}(X\backslash V_i) \subseteq A$, aí $\bigcap_{i\in J}(X\backslash V_i) \subseteq B$, aí $B \in \mathcal{F}$.
- Para $A \in \mathcal{F}$, então existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{i\in I}(X\backslash V_i) \subseteq A$, mas temos $\bigcup_{i\in J} V_i \neq X$, assim $\bigcap_{i\in I}(X\backslash V_i) \neq \varnothing$, aí $A \neq \varnothing$. Portanto $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Assim $\mathcal{F}$ é um filtro em X, portanto existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Consideremos a função identidade $I_X : X \to X$. Por hipótese existe $x \in X$ tal que I_X converge a x através de $\mathcal{U}$. Se existe $i \in I$ tal que $x \in V_i$, então $V_i = I_X^{-1}(V_i) \in \mathcal{U}$ pela definição de convergência, mas também $X\backslash V_i \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, assim $\varnothing = V_i \cap (X\backslash V_i) \in \mathcal{U}$, contradição. Portanto $x \notin \bigcup_{i\in I} V_i$, assim $(V_i)_{i\in I}$ não cobre X. Consequentemente X é compacto. □

6.1.3 Ultraprodutos de Espaços Normados

Consideremos agora uma família $(X_i)_{i\in I}$ de espaços normados, onde I é um conjunto e $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em I. Definiremos o **ultraproduto de espaços normados**. Seja:

$$l_\infty(I, X_i) = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty \right\}.$$

Para cada $(x_i)_{i\in I} \in l_\infty(I, X_i)$, definamos:

$$\left\|(x_i)_{i\in I}\right\| = \sup_{i\in I} \|x_i\|.$$

É fácil ver que isso forma uma norma em $l_\infty(I, X_i)$. Seja $(x_i)_{i\in I} \in l_\infty(I, X_i)$. A função $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(i) = \|x_i\|$ é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|f(i)\| \leqslant M$ para todo $i \in I$. Como $[-M, M]$ é subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, então f converge a algum valor $x \in [-M, M]$ através de $\mathcal{U}$. Consideremos o seguinte conjunto dado:

$$N_{\mathcal{U}} = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in l_\infty(I, X_i) : \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0 \right\}.$$

Então $N_{\mathcal{U}}$ é um subespaço vetorial fechado de $l_\infty(I, X_i)$. De fato, sejam $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$ elementos de $N_{\mathcal{U}}$ e seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Dado $\varepsilon > 0$, os conjuntos:

$$A = \left\{ i \in I : \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ i \in I : \|y_i\| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda|)} \right\}$$

estão em $\mathcal{U}$. Assim $A \cap B \in \mathcal{U}$ e para $i \in A \cap B$ temos:

$$\|x_i + \lambda y_i\| \leqslant \|x_i\| + |\lambda| \|y_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda|)} < \varepsilon.$$

Assim temos:

$$\{ i \in I : \|x_i + \lambda y_i\| < \varepsilon \} \in \mathcal{U}.$$

Isso mostra que $N_{\mathcal{U}}$ é um subespaço vetorial de $l_\infty(I, X_i)$. Seja agora $a = (x_i)_{i\in I} \in \overline{N_{\mathcal{U}}}$ e seja $\varepsilon > 0$. Então existe $b = (y_i)_{i\in I} \in N_{\mathcal{U}}$ tal que $\|b - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto $\|y_i - x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i \in I$. Como $(y_i)_{i\in I} \in N_{\mathcal{U}}$, então:

$$Z = \left\{ i \in I : \|y_i\| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in \mathcal{U}.$$

Para todo $i \in Z$, então:

$$\|x_i\| \leqslant \|x_i - y_i\| + \|y_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim temos:

$$\{ i \in I : \|x_i\| < \varepsilon \} \in \mathcal{U}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0$.

Definimos sobre $l_\infty(I, X_i)$ a seguinte seminorma:

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|.$$

Pela definição do subespaço $N_{\mathcal{U}}$, obtemos que essa seminorma determina uma norma sobre o espaço quociente $l_\infty(I, X_i)/N_{\mathcal{U}}$ e denotamos a imagem de $(x_i)_{i\in I}$ por $(x_i)_{\mathcal{U}}$.

Definição 6.1.16. Definimos o **ultraproduto** da família $(X_i)_{i\in I}$ em relação ao ultrafiltro $\mathcal{U}$ como o espaço quociente:

$$(X_i)_{\mathcal{U}} = l_\infty(I, X_i)/N_{\mathcal{U}},$$

com a norma dada assim:

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|.$$

Se X_i é um subespaço de Y_i para todo $i \in I$, então de um modo natural podemos identificar $(X_i)_{\mathcal{U}}$ como um subespaço de $(Y_i)_{\mathcal{U}}$. Se X_i é igual a um espaço normado fixado X para todo $i \in I$, então o ultraproduto $(X_i)_{\mathcal{U}}$ é chamado **ultrapotência** de X em relação a $\mathcal{U}$ e é denotado por $X_{\mathcal{U}}$. Nesse caso, para cada $x \in X$ denotamos por $\check{x}$ o elemento $(x_i)_{\mathcal{U}} \in X_{\mathcal{U}}$ tal que $x_i = x$ para todo $i \in I$. Escrevemos $\check{X} = \{\check{x} : x \in X\}$.

Lema 6.1.17. Seja X um espaço normado de dimensão finita. Então $X_{\mathcal{U}} = \check{X}$.

Demonstração. Mostraremos que $X_{\mathcal{U}} \subseteq \check{X}$. Seja $(x_i)_{\mathcal{U}} \in X_{\mathcal{U}}$. Por definição existe um $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$ e $\|x_i\| \leqslant r$ para todo $i \in I$. Considerando a bola fechada $B_X[0,r]$ de centro 0 e raio r, então $x_i \in B_X[0,r]$ para todo $i \in I$. Como o espaço X tem dimensão finita, então, pelo Teorema de Heine-Borel, o conjunto $B_X[0,r]$ é compacto. Pelo Lema 6.1.15, existe $y \in B_X[0,r]$ tal que $\lim_{\mathcal{U}} x_i = y$. Assim, para cada $\varepsilon > 0$ temos:

$$\{i \in I : \|x_i - y_i\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U},$$

onde $y_i = y$ para todo $i \in I$. Desse modo a família $(x_i - y_i)_{i \in I}$ satisfaz $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i - y_i\| = 0$, aí $(x_i - y_i)_{i\in I} \in N_{\mathcal{U}}$. Consequentemente temos $(x_i)_{\mathcal{U}} = (y_i)_{\mathcal{U}} = \check{y} \in \check{X}$. □

Seja $T : X \to X_{\mathcal{U}}$ dada por $T(x) = \check{x}$. Então T é uma isometria linear pois:

$$\|T(x)\| = \|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x\| = \|x\|.$$

Por definição T é linear e é injetora pois é uma isometria. Assim X é isomorfo como espaço normado a $\check{X}$, que é um subespaço de $X_{\mathcal{U}}$. Se X tem dimensão finita, pelo Lema 6.1.17 temos $X \cong \check{X} = X_{\mathcal{U}}$.

Corolário 6.1.18. Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Hilbert tal que exista um número natural n satisfazendo $\dim(X_i) \leqslant n$ para todo $i \in I$. Então $\dim((X_i)_{\mathcal{U}}) \leqslant n$.

Demonstração. Seja X um espaço de Hilbert de dimensão n. Para cada $i \in I$ podemos encontrar uma isometria linear $T_i : X_i \to X$. Consideremos a função $G : (X_i)_{\mathcal{U}} \to X_{\mathcal{U}}$ dada por $G((x_i)_{\mathcal{U}}) = (T_i(x_i))_{\mathcal{U}}$. A aplicação G é linear pois cada T_i é linear. G está bem definida pois se $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$ em $l_\infty(I, X_i)$ satisfazem $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i - y_i\| = 0$, então temos:

$$\lim_{\mathcal{U}} \|T_i(x_i) - T_i(y_i)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|T_i(x_i - y_i)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i - y_i\| = 0,$$

assim $G((x_i)_{\mathcal{U}}) = G((y_i)_{\mathcal{U}})$. A aplicação G é uma isometria pois dado $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}$ obtemos:

$$\|G((x_i)_{\mathcal{U}})\| = \|(T_i(x_i))_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|T_i(x_i)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = \|(x_i)_{\mathcal{U}}\|.$$

Então $G : (X_i)_{\mathcal{U}} \to X_{\mathcal{U}}$ é uma isometria linear, mas pelo Lema 6.1.17 temos $\dim(X_{\mathcal{U}}) = n$, assim, como G é injetora, concluímos que $\dim(X_i)_{\mathcal{U}} \leqslant n$. □

6.1.4 Ultraprodutos de Álgebras Normadas

Nesta subseção, apresentaremos os ultraprodutos e as ultrapotências de álgebras normadas e de álgebras com valor absoluto.

Álgebras Normadas

Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras normadas. Então $(A_i)_{\mathcal{U}}$ é um espaço normado e sobre ele definimos um produto tal que ele seja uma álgebra normada. Para $(x_i)_{\mathcal{U}}$ e $(y_i)_{\mathcal{U}}$ em $(A_i)_{\mathcal{U}}$ definimos:

$$(x_i)_{\mathcal{U}}(y_i)_{\mathcal{U}} = (x_i y_i)_{\mathcal{U}}.$$

Este produto está bem definido já que se $(x_i)_{\mathcal{U}} = (x'_i)_{\mathcal{U}}$ e $(y_i)_{\mathcal{U}} = (y'_i)_{\mathcal{U}}$, então:

$$\|x_i y_i - x'_i y'_i\| = \|x_i(y - y'_i) + (x_i - x'_i) y'_i\| \leqslant \|x_i\| \|y - y'_i\| + \|x_i - x'_i\| \|y'_i\|,$$

donde $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i y_i - x'_i y'_i\| = 0$ e assim $(x_i y_i)_{\mathcal{U}} = (x'_i y'_i)_{\mathcal{U}}$.

Como:

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}(y_i)_{\mathcal{U}}\| = \|(x_i y_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i y_i\|$$

e dado que:

$$\|x_i y_i\| \leqslant \|x_i\| \|y_i\|,$$

então:

$$\lim_{\mathcal{U}} \|x_i y_i\| \leqslant \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| \lim_{\mathcal{U}} \|y_i\|.$$

Portanto:

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}(y_i)_{\mathcal{U}}\| \leqslant \|(x_i)_{\mathcal{U}}\| \|(y_i)_{\mathcal{U}}\|.$$

Assim $(A_i)_{\mathcal{U}}$ é uma álgebra normada.

Agora, se A_i é uma subálgebra de B_i para todo $i \in I$, então $(A_i)_{\mathcal{U}}$ pode ser identificada com uma subálgebra de $(B_i)_{\mathcal{U}}$.

Álgebras com Valor Absoluto

Se A_i é uma álgebra com valor absoluto para todo $i \in I$, então a igualdade $\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|$ mostra que $(A_i)_{\mathcal{U}}$ também é uma álgebra com valor absoluto. Segue que, se A é uma álgebra com valor absoluto, a ultrapotência $A_{\mathcal{U}}$ é uma álgebra com valor absoluto e podemos considerar A como subálgebra de $A_{\mathcal{U}}$.

Corolário 6.1.19. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão finita. Então $(A_i)_{\mathcal{U}}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra de dimensão finita que satisfaz $\dim((A_i)_{\mathcal{U}}) \leqslant \max_{i \in I} \dim(A_i)$ e sua dimensão é $\leqslant 8$.

Demonstração. Sabemos que $\dim(A_i) \leqslant 8$ para todo $i \in I$ e A_i é pré-Hilbertiana. Logo cada A_i é um espaço de Hilbert, aí pelo Corolário 6.1.18 temos $\dim((A_i)_{\mathcal{U}}) \leqslant 8$. □

Proposição 6.1.20. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de $\mathbb{R}$-álgebras algébricas com valor absoluto. Então $(A_i)_{\mathcal{U}}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto e:

$$\deg((A_i)_{\mathcal{U}}) \leqslant \max_{i \in I} \deg(A_i).$$

Como consequência, a ultrapotência $A_{\mathcal{U}}$ de uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto também é uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto e $\deg(A_{\mathcal{U}}) = \deg(A)$.

Demonstração. Seja $(a_i)_{\mathcal{U}} \in (A_i)_{\mathcal{U}}$. Queremos mostrar que a subálgebra de $(A_i)_{\mathcal{U}}$ gerada por $(a_i)_{\mathcal{U}}$ tem dimensão finita. Para cada $i \in I$, a subálgebra $A_i(a_i)$ tem dimensão finita, portanto, pelo Corolário 6.1.19, a subálgebra $(A_i(a_i))_{\mathcal{U}}$ tem dimensão finita e:

$$\dim((A_i(a_i))_{\mathcal{U}}) \leqslant \max_{i \in I} \dim(A_i(a_i)) \leqslant \max_{i \in I} \deg(A_i).$$

Como $(A_i(a_i))_{\mathcal{U}}$ é uma subálgebra de $(A_i)_{\mathcal{U}}$ possuindo $(a_i)_{\mathcal{U}}$, segue que a subálgebra de $(A_i)_{\mathcal{U}}$ gerada por $(a_i)_{\mathcal{U}}$ tem dimensão $\leqslant \max_{i \in I} \deg(A_i)$. Como $(a_i)_{\mathcal{U}}$ é arbitrário em $(A_i)_{\mathcal{U}}$, concluímos que $(A_i)_{\mathcal{U}}$ é algébrica com $\deg((A_i)_{\mathcal{U}}) \leqslant \max_{i \in I} \deg(A_i)$. No caso particular da ultrapotência $A_{\mathcal{U}}$ de uma álgebra com valor absoluto A, a desigualdade recíproca segue considerando A como subálgebra de $A_{\mathcal{U}}$. □

6.2 Álgebras Algébricas com Valor Absoluto

O objetivo desta seção é mostrar o Teorema 6.2.18, cujo enunciado diz que toda $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto tem dimensão finita. Para isso precisaremos de vários outros resultados de análise funcional que serão revisados ao decorrer desta seção, além de vários conceitos técnicos ao longo desta seção.

Na Subseção 6.2.1, mostraremos que, para todo espaço normado X e para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$, então a norma em X é Gateau-diferenciável em u se e só se existe um único $f \in X^\star$ tal que $\|f\| =$

$f(u) = 1$. Na Subseção 6.2.2, aplicaremos a subseção anterior para mostrarmos alguns lemas que serão utilizados para a demonstração do Teorema 6.2.18. Na Subseção 6.2.3, mostraremos que, em toda $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto, a norma é Fréchet-diferenciável em um subconjunto aberto e denso de A. Na Subseção 6.2.4, encerraremos a demonstração do Teorema 6.2.18.

6.2.1 Espaços de Alcance Numérico

Nesta subseção, pretendemos mostrar a Proposição 6.2.6, uma de cujas consequências é que, para todo espaço normado X e para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$, então a norma em X é Gateau-diferenciável em u se e só se existe um único $f \in X^\star$ tal que $\|f\| = f(u) = 1$.

Para isso, apresentaremos a noção de alcance numérico em espaços normados e alguns resultados consequentes. O conceito de alcance numérico por si tem algumas aplicações em ciências empíricas. Por exemplo, na engenharia, alcances numéricos são utilizados para estimar autovalores de matrizes. Além disso, alcances numéricos são utilizados na computação quântica. Um conceito relacionado é o conceito de raio numérico, que é o supremo dos valores absolutos dos números no alcance numérico.

Definição 6.2.1. Um **espaço de alcance numérico** é um par (X, u) onde X é um espaço normado e u é um elemento tal que $\|u\| = 1$, chamado **elemento distinguido** de X. Denotamos por $D(X, u)$ o conjunto:

$$D(X, u) = \{f \in X^\star : \|f\| = f(u) = 1\},$$

sendo seus elementos chamados **estados de** X **relativos a** u. Pelo Teorema de Hahn-Banach, é fácil ver que $D(X, u) \neq \varnothing$. Dizemos que X é **suave em** u se $D(X, u)$ é um conjunto unitário. Para cada $x \in X$, definimos o **alcance numérico** $V(X, u, x)$ de x como o conjunto:

$$V(X, u, x) = \{f(x) : f \in D(X, u)\}.$$

Proposição 6.2.2. Seja (X, u) um $\mathbb{K}$-espaço de alcance numérico e seja $x \in X$. Temos:

$$V(X, u, x) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{K}} B_{\mathbb{K}}[\lambda, \|x - \lambda u\|].$$

Demonstração. **1)** Para todo $f \in D(X, u)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, vemos que:

$$|f(x) - \lambda| = |f(x) - \lambda f(u)| = |f(x - \lambda u)| \leqslant \|f\| \|x - \lambda u\| = \|x - \lambda u\|,$$

e portanto temos:

$$f(x) \in B_{\mathbb{K}}[\lambda, \|x - \lambda u\|].$$

Assim temos:

$$V(X, u, x) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \mathbb{K}} B_{\mathbb{K}}[\lambda, \|x - \lambda u\|].$$

2) Mostraremos a inclusão recíproca.

a) Assumamos primeiro que $x \in \mathbb{K}u$. Se $x = \alpha u$, então:

$$\|x - \lambda u\| = |\alpha - \lambda|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, assim:

$$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{K}} B_{\mathbb{K}}[\lambda, \|x - \lambda u\|] = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{K}} B_{\mathbb{K}}[\lambda, |\alpha - \lambda|] \subseteq B_{\mathbb{K}}[\alpha, 0] = \{\alpha\} = V(X, u, x)$$

b) Agora assumamos $x \notin \mathbb{K}u$. Seja:

$$z \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{K}} B_{\mathbb{K}}[\lambda, \|x - \lambda u\|].$$

Considere a função linear:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{K}u + \mathbb{K}x & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \alpha u + \beta x & \longmapsto & \alpha + \beta z. \end{array}$$

Como para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\beta \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ temos:

$$\left|g(\alpha u)\right| = |\alpha| = \|\alpha u\|$$

e também:

$$\left|g(\alpha u + \beta x)\right| = |\alpha + \beta z| = |\beta| \left| z - \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| \leqslant |\beta| \left\| x - \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) u \right\| = \|\alpha u + \beta x\|,$$

então obtemos $\|g\| \leqslant 1$. Agora, se f é uma extensão de Hahn-Banach de g, então $f \in D(X, u)$, aí:

$$z = g(x) = f(x) \in V(X, u, x),$$

encerrando a demonstração. □

Uma consequência imediata, porém útil, da Proposição 6.2.2 é o seguinte.

Corolário 6.2.3. Sejam (X, u) e (Y, v) espaços de alcance numérico, e seja $T : X \to Y$ uma função linear tal que $T(u) = v$. Temos:

i) Se T é uma contração, então $V(Y, v, T(x)) \subseteq V(X, u, x)$ para todo $x \in X$.

ii) Se T é uma isometria, então $V(Y, v, T(x)) = V(X, u, x)$ para todo $x \in X$.

Como consequência, se Z é um subespaço de X com $u \in Z$, então:

$$V(Z, u, z) = V(X, u, z)$$

para todo $z \in Z$.

Corolário 6.2.4. Seja X um espaço normado não nulo e seja $T \in BL(X)$. Então:

$$V(BL(X^\star), I_{X^\star}, T') = V(BL(X), I_X, T).$$

Demonstração. Como a função $F \mapsto F^\star$ de $BL(X)$ em $BL(X^\star)$ é uma isometria linear enviando I_X em $I_{X^\star}$, o resultado segue do Corolário 6.2.3(ii). □

Proposição 6.2.5. Seja (X, u) um espaço de alcance numérico e seja $x \in X$. Então temos:

$$V(X_{\mathbb{R}}, u, x) = \Re(V(X, u, x)), \tag{6.1}$$

onde $X_{\mathbb{R}}$ é o $\mathbb{R}$-espaço obtido quando a multiplicação escalar está restrita a $\mathbb{R} \times X$ e para $z \in \mathbb{C}$ denotamos por $\Re(z)$ a parte real de z.

Demonstração. Como a função $f \mapsto \Re \circ f$ é uma isometria linear sobrejetora de $(X^\star)_{\mathbb{R}}$ em $(X_{\mathbb{R}})'$, temos:

$$D(X_{\mathbb{R}}, u) = \{\Re \circ f : f \in D(X, u)\},$$

assim a igualdade (6.1) segue. □

Proposição 6.2.6. Seja (X, u) um espaço de alcance numérico e seja $x \in X$. Então:

$$\max \Re(V(X,u,x)) = \inf_{r>0} \frac{\|u+rx\|-1}{r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\|u+rx\|-1}{r}.$$

Demonstração. Pela Proposição 6.2.5, podemos assumir que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Como, pela Proposição 6.2.2, temos:

$$V(X,u,x) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} [t - \|x-tu\|, t + \|x-tu\|],$$

segue que:

$$\max V(X,u,x) = \inf_{t\in\mathbb{R}} (t + \|x-tu\|). \tag{6.2}$$

Note que, para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $t_1 \leqslant t_2$, temos:

$$\|x - t_1 u\| = \left\|x - t_2 u + (t_2 - t_1)u\right\| \leqslant \|x - t_2 u\| + \left\|(t_2 - t_1)u\right\| = \|x - t_2 u\| + t_2 - t_1,$$

portanto:

$$t_1 + \|x - t_1 u\| \leqslant t_2 + \|x - t_2 u\|,$$

de modo que a função:

$$t \longmapsto t + \|x - tu\|$$

de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é crescente. Assim, por (6.2), temos:

$$\max V(X,u,x) = \inf_{t<0} (t + \|x-tu\|) = \inf_{r>0} \frac{\|u+rx\|-1}{r},$$

e também:

$$\max V(X,u,x) = \lim_{t\to -\infty} (t + \|x-tu\|) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\|u+rx\|-1}{r},$$

encerrando a demonstração. □

Corolário 6.2.7. Seja (X, u) um espaço de alcance numérico, seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in I$ e $I \cap \mathbb{R}_{>0} \neq \varnothing$ e seja $f : I \to X$ uma função com derivada à direita $f'_+(0)$ em 0 satisfazendo $f(0) = u$. Então temos:

$$\max \Re(V(X,u,f'_+(0))) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\|f(r)\|-1}{r}.$$

Demonstração. Considerando a função $f_0 : I \cap \mathbb{R}_{>0} \to X$ definido por:

$$f_0(r) = \frac{f(r) - u}{r}$$

e notando que para $r \in I \cap \mathbb{R}_{>0}$ temos:

$$f(r) = u + rf'_+(0) + r\left(f_0(r) - f'_+(0)\right),$$

então obtemos:

$$\left\|u + rf'_+(0)\right\| - r\left\|f_0(r) - f'_+(0)\right\| \leqslant \left\|f(r)\right\| \leqslant \left\|u + rf'_+(0)\right\| + r\left\|f_0(r) - f'_+(0)\right\|.$$

Portanto temos:

$$\frac{\left\|u + rf'_+(0)\right\| - 1}{r} - \left\|f_0(r) - f'_+(0)\right\| \leqslant \frac{\left\|f(r)\right\| - 1}{r} \leqslant \frac{\left\|u + rf'_+(0)\right\| - 1}{r} + \left\|f_0(r) - f'_+(0)\right\|$$

para todo $r \in I \cap \mathbb{R}_{>0}$. Tendo em mente a Proposição 6.2.6 e o fato de que:

$$\lim_{r \to 0^+} \|f_0(r) - f'_+(0)\| = 0,$$

a conclusão segue fazendo $r \to 0^+$. $\square$

6.2.2 Difenrenciabilidade segundo Gateaux

Nesta subseção, apresentaremos a noção de diferenciabilidade segundo Gateaux. Com isso, podemos aplicar os resultados da subseção anterior para mostrarmos alguns lemas que serão utilizados para a demonstração do Teorema 6.2.18.

Definição 6.2.8. Sejam X e Y espaços normados, Ω um subconjunto aberto de X, f uma função de Ω em Y e x um elemento de Ω. Dizemos que f é dito **Gâteaux-diferenciável** em x se para todo $e \in X$ a função $t \mapsto f(x + te)$ é diferenciável em 0.

Pela Proposição 6.2.6, então X é suave em u se e só se a norma é Gateaux-diferenciável em u, além disso, nesse caso, para todo $x \in X$ temos:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\|u + rx\| - 1}{r} = \Re(f(x)), \tag{6.3}$$

onde f é o único elemento de $D(X, u)$.

Lema 6.2.9. Seja X um espaço normado, $F : X \to X$ uma contração linear e M um subespaço de dimensão finita de X. Assuma que M seja pré-Hilbertiano, que X seja suave para todo elemento de norma 1 em M e que $F(m) = m$ para todo $m \in M$. Então existe uma projeção linear contínua $\pi : X \to X$ tal que $\pi(X) = M$ e $\mathrm{Ker}(\pi)$ seja invariante sob F.

Demonstração. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em M tal que $\|m\|^2 = \langle m, m \rangle$ para todo $m \in M$ e seja $\{m_1, \dots, m_k\}$ uma base ortonormal de M em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existem funcionais lineares contínuos $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ em X tais que $\|\varphi_i\| = 1$ e $\varphi_i(m) = \langle m, m_i \rangle$ para quaisquer $m \in M$ e $i = 1, \dots, k$. Se π denotar a função de X em X definida por:

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) m_i,$$

então é fácil ver que π é uma função linear contínua. Além disso, como $\pi(m_i) = m_i$ para todo $i = 1, \dots, k$, então π é uma projeção e $\pi(X) = M$. Seja $i \in \{1, \dots, k\}$. Como $\|\varphi_i\| = \varphi_i(m_i) = 1$ e F é uma contração linear em X com $F(m) = m$ para todo $m \in M$, a função $\psi_i = \varphi_i \circ F$ é um funcional linear contínuo em X satisfazendo $\|\psi_i\| = \psi_i(m_i) = 1$. Segue da suavidade de X em todo elemento de norma 1 em M que $\psi_i = \varphi_i$, portanto $\mathrm{Ker}(\varphi_i)$ é invariante sob F. Para concluir a demonstração, note que $\mathrm{Ker}(\pi) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$. $\square$

Lema 6.2.10. Seja A uma álgebra algébrica com valor absoluto e seja a um elemento de A de norma 1. Se A é suave em a, então A é suave em todo elemento de norma 1 de $A(a)$.

Demonstração. $A(a)$ é uma álgebra com valor absoluto de dimensão finita, logo é uma álgebra com divisão. Seja $b \in A(a)$ com $\|b\| = 1$, então existe $c \in A(a)$ tal que $cb = a$. Como $A(a)$ tem valor absoluto, então:

$$1 = \|a\| = \|cb\| = \|c\|\|b\| = \|c\|,$$

assim $L_c : A \to A$ é uma isometria linear. Suponhamos que A seja suave em a e que não seja suave em b. Sejam ψ, φ funcionais lineares de norma 1 em A tais que $\psi \neq \varphi$ e $\psi(b) = \varphi(b) = 1$.

A função $L_c : A \to cA$ é sobrejetora e $L_c^{-1} : cA \to A$ também é uma isometria, assim a função $\psi \circ L_c^{-1} : cA \to \mathbb{K}$ é uma função linear e contínua,

$$\psi(L_c^{-1}(a)) = \psi(L_c^{-1}(cb)) = \psi(b) = \|b\| = \|a\|$$

e também:

$$\left\|\psi \circ L_c^{-1}\right\| \leqslant \|\psi\| \left\|L_c^{-1}\right\| = 1.$$

Analogamente temos $\varphi(L_c^{-1}(a)) = \|a\|$ e $\left\|\varphi \circ L_c^{-1}\right\| \leqslant 1$. Como $\psi \neq \varphi$, então $\psi \circ L_c^{-1} \neq \varphi \circ L_c^{-1}$. Isso mostra que cA não é suave em a. Pelo Teorema de Hahn-Banach, A não é suave em a, chegando a uma contradição. □

6.2.3 Funções Polinomiais

Nesta subseção, mostraremos a Proposição 6.2.14, cujo enunciado diz que, em toda $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto, a norma é Fréchet-diferenciável em um subconjunto aberto e denso de A. Para isso, apresentaremos a noção de funções polinomiais em espaços vetoriais e também providenciaremos uma determinação algébrica explícita da norma em toda álgebra algébrica com valor absoluto.

Definição 6.2.11. Para espaços vetoriais X e Y e para $n \geqslant 0$, dizemos que uma função $f : X \to Y$ é **polinomial homogênea de grau** n se existe uma função n-linear $g : X^n \to Y$ tal que $f(x) = g(x, \ldots, x)$ para todo $x \in X$. Somas de funções polinomiais homogêneas, possivelmente de graus diferentes, são chamadas **funções polinomiais**.

Lema 6.2.12. Seja X um espaço normado e seja $f : X \to \mathbb{K}$ uma função polinomial não nula. Então o conjunto:

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

é denso em X.

Demonstração. Assumamos que existam $y \in X$ e $\varepsilon > 0$ tais que $f(z) = 0$ para todo $z \in X$ tal que $\left\|z - y\right\| < \varepsilon$. Tome $t \in X$ tal que $f(t) \neq 0$ e considere a função $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $g(\lambda) = f(y + \lambda(t - y))$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Então g é uma função polinomial não nula com $g(\lambda) = 0$ sempre que $|\lambda| < \frac{\varepsilon}{\|t-y\|}$, uma contradição. □

Se A é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto, note que, pela Teorema 5.2.6, temos $\dim(A(a)) \leqslant 8$ para todo $a \in A \backslash \{0\}$. Portanto podemos considerar máximo número natural $m(a)$ tal que o conjunto $\{a^1, \ldots, a^{m(a)}\}$ seja linearmente independente em $A(a)$ e também podemos considerar o número $m(A)$ dado por:

$$m(A) = \max_{a \in A \backslash \{0\}} m(a).$$

Proposição 6.2.13. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto. Para $a \in A \backslash \{0\}$, seja $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m(a)})$ o único elemento de $\mathbb{R}^{m(a)}$ tal que:

$$a^{m(a)+1} = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_{m(a)} a^{m(a)}.$$

Então $\lambda_1 = \pm \|a\|^{m(a)}$.

Demonstração. Seja $R_a : A(a) \to A(a)$ dada por $b \mapsto ba$. Esta função é linear e seja $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ o polinômio minimal de R_a. Temos, pelo Lema 4.2.34, que toda raiz de $p(x)$ tem módulo $\|a\|$. Como R_a é uma função linear, $A(a)$ tem uma estrutura de $\mathbb{R}[x]$-módulo e também:

$$\mathrm{Ann}(a) = \{q(x) \in \mathbb{R}[x] : q(R_a)(a) = 0\}$$

é um ideal de $\mathbb{R}[x]$. Seja:

$$s(x) = x^{m(a)} - \lambda_{m(a)} x^{m(a)-1} - \cdots - \lambda_2 x - \lambda_1$$

um polinômio mônico de grau $m(a)$ em $\mathbb{R}[x]$ tal que $s(R_a)(a) = 0$. Além disso, pela definição de $m(a)$, $s(x)$ é o polinômio de menor grau tal que $s(R_a)(a) = 0$, ou seja, $s(x)$ gera $\mathrm{Ann}(a)$. Como $p(x)$ é o polinômio minimal de R_a e $p(x) \in \mathrm{Ann}(a)$, então $s(x)$ divide $p(x)$, assim toda raiz complexa de $s(x)$ tem módulo $\|a\|$. Portanto, pelas relações de Girard, é fácil ver que $|\lambda_1| = \|a\|^{m(a)}$. □

Proposição 6.2.14. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto. O conjunto:

$$\Omega = \{a \in A : m(a) = m(A)\}$$

é aberto e denso em A. Além disso, a norma é Fréchet-diferenciável em todo ponto de Ω.

Demonstração. Seja $m = m(A)$. Dado $a \in \Omega$, como $\{a^1, \ldots, a^m\}$ é linearmente independente, o Teorema de Hahn-Banach nos dá funcionais lineares contínuos $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ em A satisfazendo $\varphi_i(a^j) = \delta_{i,j}$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, m$. Considere a função polinomial contínua $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \det(\varphi_i(x^j))$ e seja $\Omega_a = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$. Se $x \in A \backslash \Omega$, então o conjunto $\{x^1, \ldots, x^m\}$ é linearmente dependente em A, assim o conjunto:

$$\{(\varphi_1(x^1), \ldots, \varphi_m(x^1)), \ldots, (\varphi_1(x^m), \ldots, \varphi_m(x^m))\}$$

é linearmente dependente em $\mathbb{R}^m$, assim $f(x) = 0$. Portanto Ω_a está contido em Ω. Agora, pelo Lema 6.2.12, Ω_a é denso em A, portanto Ω é denso em A. Além disso, como a é um ponto arbitrário de Ω, o conjunto Ω_a é aberto pela continuidade de f e $a \in \Omega_a$ já que $f(a) = 1$, segue que Ω é aberto.

Agora, para cada $x \in \Omega$, o conjunto $\{x^1, \ldots, x^m\}$ é linearmente independente em $A(x)$, assim existe um único elemento $(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x))$ de $\mathbb{R}^m$ tal que:

$$x^{m+1} = \lambda_1(x) x^1 + \cdots + \lambda_m(x) x^m,$$

de modo que para $i = 1, \ldots, m$ temos:

$$\varphi_i(x^{m+1}) = \lambda_1(x)\varphi_i(x^1) + \cdots + \lambda_m(x)\varphi_i(x^m).$$

Pela regra de Cramer, temos:

$$\lambda_i(x) = \frac{\det(M_i)}{\det(\varphi_i(x^j))},$$

onde M_i é a matriz obtida de $(\varphi_i(x^j))$ substituindo a coluna i por $(\varphi_1(x^{m+1}), \ldots, \varphi_m(x^{m+1}))^t$. Como $\lambda_1(x)$ é quociente de duas funções polinomiais com $\det(\varphi_i(x^j)) \neq 0$, segue que a função $\lambda_1 : \Omega_a \to \mathbb{R}$ é Fréchet-diferenciável em a. Como, pela Proposição 6.2.13, temos $\lambda_1(x) = \pm\|x\|^m$ para todo $x \in \Omega$ e a indeterminação do sinal pode ser removida em qualquer subconjunto aberto e conexo de A possuindo a e contido em Ω_a, segue que a função $\|x\|^m$ é Fréchet-diferenciável em a. Como a função $t \mapsto t^{\frac{1}{m}}$ é diferenciável em $\mathbb{R}_{\neq 0}$, concluímos que a norma de A é Fréchet-diferenciável em a. □

6.2.4 Resultado Principal

Nesta subseção, encerraremos a demonstração do Teorema 6.2.18, juntando os resultados das subseções anteriores desta seção. Para isso, mostraremos a princípio, através da próxima proposição, que, em toda álgebra algébrica com valor absoluto A, para todo n o conjunto A_n dos $a \in A$ tais que $\dim(A(a)) \leqslant n$ é fechado. Para essa proposição, utilizaremos o conceito de álgebra não-associativa livre.

Proposição 6.2.15. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra normada e n um número natural. Então o conjunto:

$$A_n = \{a \in A : \dim(A(a)) \leqslant n\}$$

é fechado em A.

Demonstração. Seja $F = \mathbb{K}\langle\{\mathbf{x}\}\rangle$ a álgebra não-associativa livre sobre um conjunto unitário $\{\mathbf{x}\}$. Dados $a \in A$ e $\mathbf{p} \in F$, denotaremos por $\mathbf{p}(a)$ a imagem de p sob o único homomorfismo $F \to A$ tal que $x \mapsto a$. Notamos que, para cada $\mathbf{p} \in F$, a função $a \mapsto \mathbf{p}(a)$ de A em A é contínua. Isso pode ser verificado escrevendo $\mathbf{p}$ como uma combinação linear dos elementos na magma livre sobre o conjunto $\{\mathbf{x}\}$ e então argumentando por indução no grau de tais elementos. Seja a um elemento do fecho de A_n e escolha uma sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em A_n convergente a a. Se $x_1, \ldots, x_{n+1}$ estão em $A(a)$, então existem $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n+1} \in F$ tais que $\mathbf{p}_i(a) = x_i$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$ e pela definição de A_n o conjunto $\{\mathbf{p}_1(a_k), \ldots, \mathbf{p}_{n+1}(a_k)\}$ é linearmente dependente para todo k, assim existem elementos $\mu_{i,k} \in \mathbb{K}$ satisfazendo:

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\mu_{i,k}| = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_{i,k}\mathbf{p}_i(a_k) = 0$$

para todo k. Da continuidade das funções $t \mapsto \mathbf{p}(t)$ e da compacidade da esfera unitária do espaço normado $l_1^{n+1}(\mathbb{K})$, onde para qualquer espaço normado X definimos $l_1^r(X)$ como o espaço vetorial X^r com a norma da soma $\|(x_1, \ldots, x_r)\| = \|x_1\| + \cdots + \|x_r\|$, segue que existem elementos $\mu_i \in \mathbb{K}$ tais que:

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\mu_i| = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \mathbf{p}_i(a_k) = 0.$$

Portanto o conjunto $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ é linearmente dependente, assim $\dim(A(a)) \leqslant n$. □

Corolário 6.2.16. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra normada algébrica de grau limitado. Então o conjunto:

$$\{a \in A : \dim(A(a)) = \deg(A)\}$$

é aberto em A.

Demonstração. Sendo $n = \deg(A)$, então:

$$\{a \in A : \dim(A(a)) = \deg(A)\} = A \backslash A_{n-1}.$$

Assim, pela Proposição 6.2.15, o conjunto em questão é aberto. □

Corolário 6.2.17. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto. Então existe um elemento $a \in A$ tal que $\|a\| = 1$, a norma de A seja Fréchet-diferenciável em a e $\dim(A(a)) = \deg(A)$.

Demonstração. Como A é algébrica e com valor absoluto, então o Teorema 5.2.6 nos diz que A é uma álgebra de grau limitado $\leqslant 8$, além disso, pelo Corolário 6.2.16, o conjunto:

$$B = \{b \in A : \dim(A(b)) = \deg(A)\}$$

é um conjunto aberto em A. Assim, dado $b \in B$ existe $\delta > 0$ tal que $c \in B$ para todo $c \in A$ tal que $\|c - b\| < \delta$. Pela Proposição 6.2.14, existe um $c \in \Omega$ tal que $\|c - b\| < \delta$, assim, definindo $a = \frac{c}{\|c\|}$, temos $A(a) = A(c)$, portanto $\dim(A(a)) = \deg(A)$. Finalmente, pela Proposição 6.2.14, a norma é Fréchet-diferenciável em a. □

Teorema 6.2.18. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra algébrica com valor absoluto. Então A tem dimensão finita.

Demonstração. Pelo Corolário 6.2.17, existe um elemento $a \in A$ tal que $\|a\| = 1$, A é suave em a e $\dim(A(a)) = \deg(A)$. Seja $M = \{x \in A(a) : ax = x\}$, então M é um subespaço de dimensão finita. Pelo Teorema 5.2.6, o subespaço M é pré-Hilbertiano, assim, pelo Lema 6.2.10, A é suave em todo elemento de norma 1 de M.

Como $L_a : A \to A$ dada por $x \mapsto ax$ satisfaz $L_a(m) = m$ para todo $m \in M$ e $\|L_a(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in A$, então podemos aplicar o Lema 6.2.9, de modo que existe uma projeção linear contínua $\pi : A \to A$ tal que $\pi(A) = M$ e $\mathrm{Ker}(\pi)$ seja invariante sob L_a.

Assuma que A tenha dimensão infinita. Então, pelo Teorema 5.2.5, o conjunto aA não é denso ou Aa não é denso. Podemos supor sem perder generalidade que $L_a(A) = aA$ não seja denso em A. Já que $A = M \oplus \mathrm{Ker}(\pi)$, a restrição de L_a em M é a função identidade em M e $\mathrm{Ker}(\pi)$ é invariante sob L_a, então segue que a função $G : \mathrm{Ker}(\pi) \to \mathrm{Ker}(\pi)$ dada por $y \mapsto ay$ é uma isometria linear tal que $G(\mathrm{Ker}(\pi))$ não seja denso em $\mathrm{Ker}(\pi)$. Pelo Corolário 4.3.10, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathrm{Ker}(\pi)$ tal que $\|x_n\| \to 1$ e $ax_n - x_n \to 0$.

Escolha um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em $\mathbb{N}$ mais fino que o filtro de Fréchet $\mathcal{F}_\infty$ e seja $\beta \in A_{\mathcal{U}}$ dado por $\beta = (x_n)_{\mathcal{U}}$. Como $\|x_n\| \to 1$ e $ax_n - x_n \to 0$ no sentido usual e também $\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{U}$, então é fácil ver que $\|\beta\| = 1$ e $a\beta = \beta$.

Pela Proposição 6.1.20, $A_{\mathcal{U}}$ é uma álgebra algébrica com valor absoluto tal que $\deg(A_{\mathcal{U}}) = \deg(A)$. Como $\dim(A(a)) = \deg(A)$, então temos $\dim(A_{\mathcal{U}}(a)) \leqslant \dim(A(a))$, mas $A(a) \subseteq A_{\mathcal{U}}(a)$, assim $A_{\mathcal{U}}(a) = A(a)$, daí $\dim(A_{\mathcal{U}}(a)) = \deg(A_{\mathcal{U}})$, o que implica, pela Proposição 3.5.3, que $A_{\mathcal{U}}(\beta) = A_{\mathcal{U}}(a) = A(a)$. Portanto $\beta \in A(a)$, aí, como $a\beta = \beta$, segue que $\beta \in M$.

Mostraremos que $\beta \in \mathrm{Ker}(\pi)$ e obteremos uma contradição. Como $\beta \in A$, então, pela definição de ultraproduto, como $\beta = (x_n)_{\mathcal{U}}$, temos $\lim_{\mathcal{U}} \|\beta - x_n\| = 0$. Como $x_n \in \mathrm{Ker}(\pi)$ para todo n, então temos $\pi(\beta) = 0$. Consequentemente temos $\beta \in M \cap \mathrm{Ker}(\pi)$, ou seja, $\beta = 0$, o que é uma contradição pela definição de β. Logo concluímos que A tem dimensão finita. □

6.3 Álgebras de Grau 2 com Valor Absoluto

Nesta seção, pretendemos apresentar a classificação de todas as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de grau no máximo 2. O principal resultado é o Teorema 6.3.5, cujo enunciado diz que as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto com grau no máximo 2 são $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, ${}^*\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, ${}^*\mathbb{O}$, $\mathbb{O}^*$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ e $\mathbb{P}$. A estrutura da sua demonstração é regida pela classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de dimensão 2, que são $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ e $\overset{*}{\mathbb{C}}$. Desse modo, a demonstração é dividida em casos e requer os seguintes resultados:

- Classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto e com potências associativas.
- Classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto satisfazendo a identidade $x^2x = xx^2 = \|x\|^2 x$.
- Classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto satisfazendo as identidades $x^2x = \|x\|^2 x$ e $(x^2)^2 = \|x\|^2 x^2$.

Na Subseção 6.3.1, mostraremos que as $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, ${}^*\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, ${}^*\mathbb{O}$, $\mathbb{O}^*$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ e $\mathbb{P}$ de fato têm grau no máximo 2. Na Subseção 6.3.2, mostraremos que as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto satisfazendo $x^2x = xx^2 = \|x\|^2 x$ são isomorfas a $\mathbb{R}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$. Na Subseção 6.3.3, mostraremos que as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto satisfazendo $x^2x = \|x\|^2 x$ e $(x^2)^2 = \|x\|^2 x^2$ são isomorfas a $\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{O}$. Por fim, na Subseção 6.3.4, encerraremos a demonstração do Teorema 6.3.5 e apresentaremos algumas aplicações.

6.3.1 Considerações Iniciais

Nesta subseção, mostraremos que as $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, ${}^*\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, ${}^*\mathbb{O}$, $\mathbb{O}^*$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ e $\mathbb{P}$ de fato têm grau no máximo 2.

Os casos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$

As $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são $\mathbb{R}$-álgebras de Cayley, portanto são quadráticas, de modo que é fácil ver que elas têm grau no máximo 2.

Além disso, para o restante desta subseção, recobraremos as notações introduzidas em álgebras de Cayley. Se A é uma $\mathbb{R}$-álgebra de Cayley, então para $x \in A$ denotamos:

$$x + \bar{x} = \tau_x 1, \qquad x\bar{x} = \bar{x}x = \nu_x 1.$$

Os casos ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ e ${}^*\mathbb{O}$

Seja A uma das $\mathbb{R}$-álgebras ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{O}$. A multiplicação será denotada assim:

$$x * y = \bar{x}y.$$

Seja $x \in A$. Mostraremos que $\mathbb{R}1 + \mathbb{R}x$ é uma subálgebra de A.

1) Temos o seguinte:

$$1 * a = \bar{1}a = 1a = a$$

para todo $a \in A$, assim:

$$1 * 1 = 1, \qquad 1 * x = x.$$

2) Agora temos:

$$x * 1 = \bar{x}1 = \bar{x} = -x + \tau_x 1.$$

3) Por fim, temos:

$$x * x = \bar{x}x = \nu_x 1. \tag{6.4}$$

Os casos $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{H}^*$ e $\mathbb{O}^*$

Seja A uma das $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{O}^*$. A multiplicação será denotada assim:

$$x * y = x\bar{y}.$$

Seja A^0 a $\mathbb{R}$-álgebra oposta a A, ou seja, a $\mathbb{R}$-álgebra com o mesmo $\mathbb{R}$-espaço vetorial de A, mas com a multiplicação:

$$x \diamond y = y * x.$$

Então A^0 e uma das $\mathbb{R}$-álgebras ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{O}$. Portanto A^0 tem grau no máximo 2. Assim A tem grau no máximo 2.

Os casos $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$ e $\overset{*}{\mathbb{O}}$

Seja A uma das $\mathbb{R}$-álgebras $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$ ou $\overset{*}{\mathbb{O}}$. A multiplicação será denotada assim:

$$x * y = \bar{x}\bar{y}.$$

Seja $x \in A$. Mostraremos que $\mathbb{R}1 + \mathbb{R}x$ é uma subálgebra de A.

1) Temos o seguinte:

$$1 * 1 = \bar{1} \cdot \bar{1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

2) Também temos:
$$1 * x = \bar{1}\bar{x} = 1\bar{x} = \bar{x} = -x + \tau_x 1.$$

3) A álgebra A é comutativa, assim:
$$x * 1 = 1 * x = -x + \tau_x 1.$$

4) Agora temos:
$$x * x = \bar{x}\bar{x} = \tau_x \bar{x} - x\bar{x} = -\tau_x x + (\tau_x^2 - \nu_x)1.$$

O caso $\mathbb{P}$

Consideremos a $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{P}$ dos pseudo-octônios. A multiplicação será denotada assim:
$$X * Y = \mu XY + \nu YX - \mathrm{tr}(XY)I.$$

Seja $X \in \mathbb{P}$. Mostraremos que $\mathbb{R}X + \mathbb{R}(X * X)$ é uma subálgebra de $\mathbb{P}$.

1) Pela identidade (5.24) na demonstração da Proposição 5.3.32, para todo $Y \in \mathbb{P}$ temos:
$$(X * Y) * X = X * (Y * X) = \frac{1}{3}X^2Y + \frac{1}{3}XYX + \frac{1}{3}YX^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(XY)X - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(XYX)I.$$

Em particular temos:
$$(X * X) * X = X * (X * X) = X^3 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^2)X - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3)I.$$

Entretanto, pela identidade (5.25) na demonstração da Proposição 5.24, temos:
$$X^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2)X - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3)I = 0, \tag{6.5}$$

assim:
$$(X * X) * X = X * (X * X) = \frac{1}{6}\mathrm{tr}(X^2)X \tag{6.6}$$

2) Agora temos:
$$X * X = \mu X^2 + \nu X^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^2)I = X^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^2)I,$$

de modo que:
$$(X * X) * (X * X) = (X * X)^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}((X * X)^2)I,$$

mas $\mathbb{P}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto, assim:
$$\mathrm{tr}((X * X)^2) = 6\|X * X\|^2 = 6\|X\|^4 = \frac{1}{6}\mathrm{tr}(X^2)^2,$$

portanto:
$$\begin{aligned}(X * X) * (X * X) &= (X^2 - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(X^2)I)^2 - \tfrac{1}{18}\mathrm{tr}(X^2)^2 I \\ &= X^4 - \tfrac{2}{3}\mathrm{tr}(X^2)X^2 + \tfrac{1}{9}\mathrm{tr}(X^2)^2 I - \tfrac{1}{18}\mathrm{tr}(X^2)^2 I \\ &= X^4 - \tfrac{2}{3}\mathrm{tr}(X^2)X^2 + \tfrac{1}{18}\mathrm{tr}(X^2)^2 I.\end{aligned}$$

Pela identidade (6.5), temos:
$$X^4 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2)X^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3)X = 0,$$

assim:

$$\begin{aligned}(X*X)*(X*X) &= X^4 - \tfrac{2}{3}\mathrm{tr}(X^2)X^2 + \tfrac{1}{18}\mathrm{tr}(X^2)^2 I \\ &= -\tfrac{1}{6}\mathrm{tr}(X^2)X^2 + \tfrac{1}{18}\mathrm{tr}(X^2)^2 I + \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3)X \\ &= -\tfrac{1}{6}\mathrm{tr}(X^2)(X*X) + \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(X^3)X.\end{aligned}$$

6.3.2 Álgebras Satisfazendo $x^2x = xx^2 = \|x\|^2 x$

Nesta subseção mostraremos o Teorema 6.3.3, cujo enunciado diz que as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto satisfazendo $x^2x = xx^2 = \|x\|^2 x$ são isomorfas a $\mathbb{R}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$. Primeiro mostraremos o seguinte resultado.

Proposição 6.3.1. As $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ e $\mathbb{P}$ satisfazem $x^2x = xx^2 = \|x\|^2 x$.

Demonstração. Seja A uma das $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ e $\mathbb{P}$. Então A é comutativa, assim basta mostrar que $x^2x = \|x\|^2 x$. Temos dois casos:

1) A é uma das $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$. Nesse caso a multiplicação é dada por:

$$x * y = \bar{x}\bar{y}.$$

Então para cada $x \in A$ temos:

$$(x*x)*x = \overline{(\bar{x}\bar{x})}\bar{x} = (xx)\bar{x} = x(x\bar{x}) = \|x\|^2 x.$$

2) A é a $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{P}$. Pela identidade (6.6) temos:

$$(X*X)*X = \frac{1}{6}\mathrm{tr}(X^2)X = \|X\|^2 X,$$

como queríamos demonstrar. □

O próximo lema será útil para esta subseção e a próxima subseção.

Lema 6.3.2. Seja A uma $\mathbb{R}$-álgebra normada e assuma que a igualdade $x^2x = \|x\|^2 x$ ocorra para todo $x \in A$. Então A é pré-Hilbertiana.

Demonstração. Para quaisquer $x, y \in A$, a função $\lambda \mapsto \|x + \lambda y\|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é convexa, logo possui derivadas à esquerda e à direita $\tau^-(x,y)$ e $\tau^+(x,y)$ em zero. Escrevendo a igualdade:

$$(x+\lambda y)^2(x+\lambda y) = \|x+\lambda y\|^2 (x+\lambda y)$$

na forma:

$$\|x\|^2 x + \lambda F(x,y) + \lambda^2 F(y,x) + \lambda^3 \|y\|^2 y = \|x+\lambda y\|^2 (x+\lambda y), \tag{6.7}$$

onde:

$$F(x,y) = x^2y + (xy)x + (yx)x,$$

então podemos computar as derivadas à esquerda e à direita em $\lambda = 0$ para obter:

$$F(x,y) = \|x\|^2 y + 2\|x\|\,\tau^-(x,y)x \quad \text{e} \quad F(x,y) = \|x\|^2 y + 2\|x\|\,\tau^+(x,y)x.$$

Segue que, se $x \neq 0$, então $\tau^-(x,y) = \tau^+(x,y)$, além disso essa igualdade implica que a função $y \mapsto \tau^+(x,y)$ seja um funcional linear em A por causa de (6.3). Agora sejam $x, y \in A$ elementos arbitrários, tome $\lambda = 1$ em (6.7) e substitua $F(x,y)$ e $F(y,x)$ pelos valores acima computados. Então temos:

$$\left(\|x\|^2 + 2\|x\|\,\tau^+(x,y) + \|y\|^2\right) x + \left(\|x\|^2 + 2\|y\|\,\tau^+(y,x) + \|y\|^2\right) y = \|x+y\|^2\,(x+y).$$

Desse modo, se x e y são linearmente independentes, então:

$$\|x\|^2 + 2\|x\|\,\tau^+(x,y) + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

e também:

$$\|x\|^2 + 2\|y\|\,\tau^+(y,x) + \|y\|^2 = \|x+y\|^2,$$

assim:

$$\|x\|\,\tau^+(x,y) = \|y\|\,\tau^+(y,x). \tag{6.8}$$

Usando a linearidade de τ^+ na segunda variável quando a primeira é não nula, segue que (6.8) se mantém verdadeira quando x e y são linearmente dependentes. Assim, definindo $\langle x,y\rangle$ como o valor comum a ambos os lados da igualdade (6.8), $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se torna uma forma bilinear simétrica satisfazendo $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$ para todo $x \in A$. □

Agora mostraremos o resultado principal desta subseção.

Teorema 6.3.3. Seja A uma álgebra com valor absoluto satisfazendo $x^2x = xx^2 = \|x\|^2\,x$ para todo $x \in A$. Então A é isomorfa como álgebra normada a $\mathbb{R}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$.

Demonstração. Da hipótese $x^2x = \|x\|^2\,x$ e Lema 6.3.2, segue que a norma de A é pré-Hilbertiana. Isso, juntamente com a hipótese $x^2x = xx^2$, implica que A tem dimensão finita pelo Teorema 5.3.26. Pelo Teorema 5.3.33, A é isomorfa como álgebra normada a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$. A igualdade $xx^2 = \|x\|^2\,x$ não ocorre em $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. □

6.3.3 Álgebras Satisfazendo $x^2x = \|x\|^2\,x$ e $(x^2)^2 = \|x\|^2\,x^2$

Nesta subseção, apresentaremos a classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto satisfazendo as identidades $x^2x = \|x\|^2\,x$ e $(x^2)^2 = \|x\|^2\,x^2$.

Teorema 6.3.4. Para uma álgebra com valor absoluto A as seguintes afirmações são equivalentes:

i) As igualdades $x^2x = \|x\|^2\,x$ e $(x^2)^2 = \|x\|^2\,x^2$ ocorrem para todo $x \in A$.

ii) A tem uma unidade à esquerda e e a igualdade $x^2 = \|x\|^2\,e$ ocorre para todo $x \in A$.

iii) A é isomorfa como álgebra normada a $\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{O}$.

Demonstração. (i)⇒(ii) Pelas hipóteses em A temos que, para todo $x \neq 0$ em A, $\|x\|^{-2}\,x^2$ é um idempotente não nulo, digamos e, satisfazendo $ex = x$, de modo que basta provar que não existem dois idempotentes não nulos distintos em A. Assumamos que e e f sejam idempotentes não nulos e distintos. Levando em conta que A é pré-Hilbertiana de acordo com o Lema 6.3.2, identificando os coeficientes de λ, λ^2 e λ^3 em ambos os lados da igualdade:

$$((e+\lambda f)^2)^2 = \|e+\lambda f\|^2\,(e+\lambda f)^2$$

e escrevendo $z = ef + fe$, obtemos:

$$ez + ze = 2\langle e,f\rangle e + z, \tag{6.9}$$

$$z^2 + z = e + f + 2\langle e,f\rangle z, \tag{6.10}$$

$$fz + zf = 2\langle e, f\rangle f + z, \tag{6.11}$$

assim, subtraindo (6.11) de (6.9), temos também:

$$(e - f)z + z(e - f) = 2\langle e, f\rangle(e - f). \tag{6.12}$$

As hipóteses em A implicam que, para todo $x \in A$ e todo $y \in \mathbb{R}x + \mathbb{R}x^2$, temos $x^2y = \|x\|^2 y$. Por um lado temos:

$$(e + f)^2(e + f) = \|e + f\|^2 (e + f)$$

e por outro lado, já que $e + f \in \mathbb{R}z + \mathbb{R}z^2$ por (6.10), temos:

$$z^2(e + f) = \|z\|^2 (e + f).$$

Segue que:

$$\|z\|^2 (e + f)^2(e + f) = \|z\|^2\|e + f\|^2 (e + f) = \|e + f\|^2\|z\|^2 (e + f) = \|e + f\|^2 z^2(e + f).$$

Todavia $e + f \neq 0$, portanto $\|z\|^2 (e + f)^2 = \|e + f\|^2 z^2$, logo:

$$\|z\|^2 (e + f + z) = 2(1 + \langle e, f\rangle)z^2. \tag{6.13}$$

Colocando em (6.13) o valor de z^2 dado por (6.10), obtemos:

$$\left(\|z\|^2 + 2(1 - \langle e, f\rangle) - 4\langle e, f\rangle^2\right) z + \left(\|z\|^2 - 2(1 + \langle e, f\rangle)\right) (e + f) = 0.$$

Como $e + f \neq 0$, então $z \neq 0$ por (6.10), assim, se:

$$\|z\|^2 + 2(1 - \langle e, f\rangle) - 4\langle e, f\rangle^2 = 0,$$

então:

$$\|z\|^2 - 2(1 + \langle e, f\rangle) = 0,$$

aí:

$$\|z\|^2 + 2(1 - \langle e, f\rangle) - 4\langle e, f\rangle^2 = \|z\|^2 - 2(1 + \langle e, f\rangle),$$

portanto $\langle e, f\rangle^2 = 1$, o que é impossível pois $e \neq \pm f$. Segue que existe um número real μ tal que $z = \mu(e + f)$. Substituindo em (6.12) esse valor de z e levando em conta que $e \neq f$, obtemos $\mu = \langle e, f\rangle$. Substituindo em (6.13) a variável z por $\langle e, f\rangle(e + f)$ e tomando normas, obtemos $\|e + f\| = 2$, portanto obtemos a contradição $e = f$.

(ii)⇒(iii) Pelo Teorema 5.1.16, sabemos que A é pré-Hilbertiana e além disso, se para todo $x \in A$ escrevermos $x^* = 2\langle x, e\rangle e - x$, então temos $x^*(xy) = \|x\|^2 y$ para quaisquer $x, y \in A$. Tomando $y = x$, como $x^2 = \|x\|^2 e$, segue que $x^*e = x$. Além disso, a função $x \mapsto x^*$ de A em A é uma isometria linear. Consideremos a $\mathbb{R}$-álgebra B obtida tomando o $\mathbb{R}$-espaço vetorial de A e definindo o produto $\diamond$ por $x \diamond y = x^*y$. Então B é uma $\mathbb{R}$-álgebra com valor absoluto para o qual e é uma unidade. Pelo Teorema 5.1.17 de Urbanik-Wright, a $\mathbb{R}$-álgebra B é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ e também $*$ se torna a involução usual em B. Assim A é isomorfa a $\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{O}$.

(iii)⇒(i). Seja A uma das $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{O}$. Então A tem a seguinte multiplicação:

$$x * y = \bar{x}y.$$

Agora, para $x \in A$ temos:

$$(x * x) * x = \overline{(\bar{x}x)}x = (\bar{x}x)x = \|x\|^2 x.$$

Além disso, para $x \in A$ temos:

$$(x * x) * (x * x) = \overline{(\bar{x}x)}(x * x) = (\bar{x}x)(x * x) = \|x\|^2 (x * x),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

6.3.4 Resultado Principal e Aplicações

Nesta subseção, nós encerraremos a classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto de grau no máximo 2 através do próximo Teorema. Após isso, apresentaremos uma aplicação desse teorema para a classificação das $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto e com potências comutativas.

Teorema 6.3.5. As álgebras com valor absoluto com grau no máximo 2 são $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, ${}^*\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, ${}^*\mathbb{O}$, $\mathbb{O}^*$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ e $\mathbb{P}$.

Demonstração. Seja A uma álgebra com valor absoluto de grau no máximo 2. Para $x \in A$ denotaremos por $A(x)$ a subálgebra de A gerada por x e definiremos os seguintes conjuntos:

- $\mathcal{X} = \{x \in A : A(x) \cong \mathbb{C}\}$.
- $\overset{*}{\mathcal{X}} = \{x \in A : A(x) \cong \overset{*}{\mathbb{C}}\}$.
- ${}^*\mathcal{X} = \{x \in A : A(x) \cong {}^*\mathbb{C}\}$.
- $\mathcal{X}^* = \{x \in A : A(x) \cong \mathbb{C}^*\}$.
- $\mathcal{Y} = \{x \in A : \dim(A(x)) \leqslant 1\}$.

Pelo Teorema 5.2.7 temos:

$$A = \mathcal{X} \cup \overset{*}{\mathcal{X}} \cup {}^*\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^* \cup \mathcal{Y}. \tag{6.14}$$

Também consideremos os subconjuntos fechados de A definidos assim:

- $\mathcal{Z} = \{x \in A : x^2 x = \|x\|^2 x\}$.
- $\mathcal{T} = \{x \in A : x x^2 = \|x\|^2 x\}$.
- $\mathcal{U} = \{x \in A : (x^2)^2 = \|x\|^2 x^2\}$.

Caso 1: Primeiro assuma que $\mathcal{X} \neq \varnothing$.

a) Mostraremos que:

$$\mathcal{X} = A \backslash (\mathcal{Z} \cup \mathcal{T}).$$

Evidentemente temos $\mathcal{X} \subseteq A \backslash (\mathcal{Z} \cup \mathcal{T})$. Reciprocamente, seja $x \in A \backslash (\mathcal{Z} \cup \mathcal{T})$. É fácil ver que:

$$\overset{*}{\mathcal{X}} \cup {}^*\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^* \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \cup \mathcal{T}.$$

Logo, por causa de (6.14), o elemento x está em $\mathcal{X}$.

b) Mostraremos que A tem potências associativas. De fato, $\mathcal{X} = A \backslash (\mathcal{Z} \cup \mathcal{T})$ é um subconjunto aberto não vazio de A. Fixemos um elemento $y \in \mathcal{X}$. Seja $x \in A$ um elemento qualquer de A e sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Então existem infinitos valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $y + \lambda x \in \mathcal{X}$. Assim existem infinitos valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(y + \lambda x)^{n+m} = (y + \lambda x)^n (y + \lambda x)^m.$$

Identificando os coeficientes de λ^{n+m}, segue que:

$$x^{n+m} = x^n x^m.$$

Pela arbitrariedade de $n, m \in \mathbb{N}$, então A tem potências associativas.

c) Portanto, pelo Teorema 5.2.9, a $\mathbb{R}$-álgebra A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Caso 2: Agora assuma que $\mathcal{X} = \varnothing$ e $\overset{*}{\mathcal{X}} \neq \varnothing$.

a) Mostraremos que:

$$\overset{*}{\mathcal{X}} = A \backslash \mathcal{U}.$$

Seja $x \in \overset{*}{\mathcal{X}} \cap \mathcal{U}$. Então alguns cálculos rotineiros em $A(x) \cong \overset{*}{\mathbb{C}}$ mostram que x é um múltiplo real de um idempotente em $A(x)$. Mas isso é impossível porque $\dim(A(x)) = 2$. Portanto $\overset{*}{\mathcal{X}} \subseteq A \backslash \mathcal{U}$. Reciprocamente, seja $x \in A \backslash \mathcal{U}$. É fácil ver que:

$$^*\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^* \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}.$$

Logo, por causa de (6.14), temos $x \in \overset{*}{\mathcal{X}}$.

b) Mostraremos que $x^2 x = x x^2$ para todo $x \in A$. De fato, $\overset{*}{\mathcal{X}} = A \backslash \mathcal{U}$ é um subconjunto aberto não vazio de A. Fixemos um elemento $y \in \overset{*}{\mathcal{X}}$. Seja $x \in A$ um elemento qualquer. Então existem infinitos valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $y + \lambda x \in \overset{*}{\mathcal{X}}$. Assim existem infinitos valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(y + \lambda x)^2 (y + \lambda x) = (y + \lambda x)(y + \lambda x)^2.$$

Identificando os coeficientes de λ^3, obtemos $x^2 x = x x^2$.

c) Mostraremos que $x^2 x = x x^2 = \|x\|^2 x$ para todo $x \in A$. De fato, A satisfaz a igualdade $x^2 x = x x^2$. Porém $^*\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ não satisfazem $x^2 x = x x^2$. Assim obtemos:

$$^*\mathcal{X} = \mathcal{X}^* = \varnothing.$$

Por causa de (6.14), obtemos:

$$A = \overset{*}{\mathcal{X}} \cup \mathcal{Y}.$$

d) Portanto, pelo Teorema 6.3.3, a $\mathbb{R}$-álgebra A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$.

Caso 3: Agora assumamos que $\mathcal{X} = \overset{*}{\mathcal{X}} = \varnothing$ e $^*\mathcal{X} \neq \varnothing$.

a) Queremos mostrar que:

$$^*\mathcal{X} = A \backslash \mathcal{T}$$

Seja $x \in {}^*\mathcal{X} \cap \mathcal{T}$. Então cálculos rotineiros em $A(x) \cong {}^*\mathbb{C}$ mostram que x é um múltiplo real da unidade à esquerda de $A(x)$. Mas isso é impossível. Logo $^*\mathcal{X} \subseteq A \backslash \mathcal{T}$.

A inclusão recíproca também é verdadeira em vista dee o fato de que: Além disso, é fácil ver que:

$$\mathcal{X}^* \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{T}.$$

Logo, por causa de (6.14), temos $A \backslash \mathcal{T} \subseteq {}^*\mathcal{X}$.

b) Queremos mostrar que $x(x^2 x) = (x^2 x)x$ para todo $x \in A$. De fato, $^*\mathcal{X} = A \backslash \mathcal{T}$ é um subconjunto aberto não vazio de A. A igualdade

$$x(x^2 x) = (x^2 x)x \tag{6.15}$$

ocorre na $\mathbb{R}$-álgebra $^*\mathbb{C}$. Portanto a igualdade (6.15) ocorre em $^*\mathcal{X}$. Seguindo o mesmo raciocínio dos casos anteriores, a igualdade (6.15) ocorre para todo $x \in A$.

c) Queremos mostrar que $x^2x = \|x\|^2 x$ e $(x^2)^2 = \|x\|^2 x^2$ para todo $x \in A$. De fato, A satisfaz a igualdade (6.15). Porém $\mathbb{C}^*$ não satisfaz (6.15). Assim temos:

$$\mathcal{X}^* = \varnothing.$$

Logo, por causa de (6.14), temos:

$$A = {}^*\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}.$$

d) Pelo Teorema 6.3.4, então A é isomorfa a ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{O}$.

Caso 4: Assumamos que $\mathcal{X} = \overset{*}{\mathcal{X}} = {}^*\mathcal{X} = \varnothing$.

a) Por causa de (6.14), temos:

$$A = \mathcal{X}^* \cup \mathcal{Y}.$$

b) Consideremos a $\mathbb{R}$-álgebra oposta A^0 tomando o mesmo $\mathbb{R}$-espaço vetorial de A e definindo a multiplicação:

$$x \diamond y = yx.$$

Então A^0 satisfaz as igualdades:

$$x^2x = \|x\|^2 x, \qquad (x^2)^2 = \|x\|^2 x^2.$$

c) Pelo Teorema 6.3.4, a $\mathbb{R}$-álgebra A^0 é isomorfa a $\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{H}$ ou ${}^*\mathbb{O}$.

d) Portanto A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{O}^*$. □

Agora consideremos uma aplicação do Teorema 6.3.5. Consideremos a classificação de todas as $\mathbb{R}$-álgebras com valor absoluto e com potências comutativas.

Teorema 6.3.6. Seja A uma álgebra com valor absoluto. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) A tem potências comutativas.

ii) A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ ou $\mathbb{P}$.

iii) A é flexível.

Demonstração. (i)⇒(ii) Como subálgebras geradas por um elemento são comutativas, então, pelo Teorema 5.2.8, A possui grau um ou dois. Pelo Teorema 6.3.5, então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, ${}^*\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, ${}^*\mathbb{O}$, $\mathbb{O}^*$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ e $\mathbb{P}$. Mas ${}^*\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, ${}^*\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^*$, ${}^*\mathbb{O}$ e $\mathbb{O}^*$ não têm potências comutativas.

(ii)⇒(iii) Basta mostrar que as $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\mathbb{O}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ e $\mathbb{P}$ são flexíveis.

- As $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são alternativas, portanto são flexíveis.
- As $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são $\mathbb{R}$-álgebras de Cayley alternativas, portanto pelo Exemplo 3.1.3 as $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{R}$, $\overset{*}{\mathbb{C}}$, $\overset{*}{\mathbb{H}}$, $\overset{*}{\mathbb{O}}$ são flexíveis.
- Por fim, pela Proposição 5.3.32, a $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{P}$ é flexível.

(iii)⇒(i) Pelo Teorema 3.1.11, toda $\mathbb{K}$-álgebra flexível tem potências comutativas. □

Capítulo 7

Conclusões

Ao estudar diversos artigos sobre álgebras normadas e álgebras com valor absoluto, obtivemos com mais clareza um panorama geral sobre a situação atual dos estudos rumo à classificação de várias classes relevantes de álgebras normadas e álgebras com valor absoluto, tais como álgebras com valor absoluto de dimensão finita e álgebras com valor absoluto satisfazendo identidades ou outras propriedades.

7.1 Considerações Finais

O uso de várias técnicas de álgebra, topologia e análise exploradas nesta dissertação contribui para obtermos resultados a respeito de estruturas algébricas munidas de estruturas adicionais, como norma. Além disso, podemos realizar pesquisas num âmbito diversificado ao vermos várias áreas da matemática interagindo uma com outra, como visto na demonstração de que toda álgebra algébrica com valor absoluto tem dimensão finita.

7.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

Como pesquisas futuras, podemos explorar mais ideias sobre topologia algébrica, conforme sugerido pelo conceito de álgebras isotópicas segundo [Alb47] e explorado no artigo [CKM+11], a fim de obtermos um melhor resultado a respeito da classificação de todas as álgebras com valor absoluto de dimensão finita. Também podemos tentar descobrir mais variedades ou condições nas quais toda álgebra com valor absoluto teria dimensão finita e descobrir o que essas propriedades têm em comum, conforme sugerido, por exemplo nos artigos [eMM81], [EM83] e [DDFR21].

Referências Bibliográficas

[Alb47] A. A. Albert. Absolute valued real algebras. *Ann. of Math. (2)*, 48:495–501, 1947. 1, 94, 100, 153

[Alb48] A. A. Albert. Power-associative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64:552–593, 1948. 33, 48, 49

[Alb49a] A. A. Albert. Absolute-valued algebraic algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:763–768, 1949. 94

[Alb49b] A. A. Albert. On the right alternative algebras. *Ann. of Math. (2)*, 50:318–328, 1949. 37, 38

[Alb54] A. A. Albert. The structure of right alternative algebras. *Ann. of Math. (2)*, 59:408–417, 1954. 37

[Arr12] E. A. Arrieta. Álgebras algébricas absolutamente valuadas. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2012. 67, 127

[Cas86] J. W. S. Cassels. *Local fields*, volume 3 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. 1

[CGRP14] Miguel Cabrera García e Ángel Rodríguez Palacios. *Non-associative normed algebras. Vol. 1*, volume 154 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014. The Vidav-Palmer and Gelfand-Naimark theorems. 48, 57, 67, 94, 127

[CKM$^+$11] A. Calderón, A. Kaidi, C. Martín, A. Morales, M. Ramírez e A. Rochdi. Finite-dimensional absolute-valued algebras. *Israel J. Math.*, 184:193–220, 2011. 100, 104, 153

[CRR12] A. Chandid, M. I. Ramírez e A. Rochdi. On finite-dimensional absolute-valued algebras satisfying $(x^p, x^q, x^r) = 0$. *Comm. Algebra*, 40(4):1525–1546, 2012. 104

[Day47] Mahlon M. Day. Some characterizations of inner-product spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 62:320–337, 1947. 71

[DDFR21] Kandé Diaby, Oumar Diankha, Amar Fall e Abdellatif Rochdi. On absolute-valued algebras satisfying $(x^2, y, x^2) = 0$. *J. Algebra*, 585:484–500, 2021. 114, 153

[EA78] Kaidi El-Amin. *Bases para una teoría de las álgebras no asociativas normadas*. Tese de Doutorado, Granada, 1978. 36

[EARRP97] Kaidi El-Amin, Maria Isabel Ramírez e Angel Rodríguez Palacios. Absolute-valued algebraic algebras are finite-dimensional. *J. Algebra*, 195(1):295–307, 1997. 2, 127

[EM83] Mohamed Lamei El-Mallah. Sur les algèbres absolument valuées qui vérifient l'identité $(x, x, x) = 0$. *J. Algebra*, 80(2):314–322, 1983. 114, 153

[EM87] Mohamed Lamei El-Mallah. On finite-dimensional absolute valued algebras satisfying $(x, x, x) = 0$. *Arch. Math. (Basel)*, 49(1):16–22, 1987. 125

[EM88] Mohamed Lamei El-Mallah. Absolute valued algebras with an involution. *Arch. Math. (Basel)*, 51(1):39–49, 1988. 125

[EM90] Mohamed Lamei El-Mallah. Absolute valued algebras containing a central idempotent. *J. Algebra*, 128(1):180–187, 1990. 94, 110, 121, 125

[EM91] Alberto Elduque e Hyo Chul Myung. Flexible composition algebras and Okubo algebras. *Comm. Algebra*, 19(4):1197–1227, 1991. 125

[EMM80] Mohamed Lamei El-Mallah e Artibano Micali. Sur les algèbres normées sans diviseurs topologiques de zéro. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 25(1):23–28, 1980. 2, 48, 67

[eMM81] Mohamed Lamei el Mallah e Artibano Micali. Sur les dimensions des algèbres absolument valuées. *J. Algebra*, 68(2):237–246, 1981. 111, 153

[EP94] Alberto Elduque e José María Pérez. Third power associative composition algebras. *Manuscripta Math.*, 84(1):73–87, 1994. 125

[Fro78] Herrn Frobenius. Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. *J. Reine Angew. Math.*, 84:1–63, 1878. 33

[Gel41] I. Gelfand. Normierte Ringe. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.*, 9 (51):3–24, 1941. 1, 2, 67

[Hum78] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. Second printing, revised. 18

[Hur98] A. Hurwitz. Ueber die composition der quadratischen formen von beliebig vielen variablen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1898:309–316, 1898. 1, 94

[Jac79] Nathan Jacobson. *Lie algebras*. Dover Publications, Inc., New York, 1979. Republication of the 1962 original. 18

[Jun85] H. G. Junior. O teorema de frobenius para Álgebras não associativas. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 1985. 37, 48, 57, 67

[JVN35] P. Jordan e J. Von Neumann. On inner products in linear, metric spaces. *Ann. of Math. (2)*, 36(3):719–723, 1935. 71

[Kap49] Irving Kaplansky. Normed algebras. *Duke Math. J.*, 16:399–418, 1949. 67

[Kob84] Neal Koblitz. *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, volume 58 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edição, 1984. 1

[Maz38] S. Mazur. Sur les anneaux lineaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 207:1025–1027, 1938. 2, 67

[Mih69] I. M. Miheev. A certain identity in right alternative rings. *Algebra i Logika*, 8:357–366, 1969. 2, 37

[Nie72] José I. Nieto. Normed right alternative algebras over the reals. *Canadian J. Math.*, 24:1183–1186, 1972. 67

[Oku78] Susumu Okubo. Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras. *Hadronic J.*, 1(4):1250–1278, 1978. 121

[Oku82] Susumu Okubo. Classification of flexible composition algebras. I, II. *Hadronic J.*, 5(4):1564–1612, 1613–1626, 1981/82. 125

[One02] Angel Oneto. Alternative real division algebras of finite dimension. *Divulg. Mat.*, 10(2):161–169, 2002. 33

[Ost16] Alexander Ostrowski. Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\psi(x) \cdot \psi(x) = \psi(xy)$. *Acta Math.*, 41(1):271–284, 1916. 1

[RA99] Maribel Ramírez Álvarez. On four-dimensional absolute-valued algebras. Em *Proceedings of the International Conference on Jordan Structures (Málaga, 1997)*, páginas 169–173. Univ. Málaga, Málaga, 1999. 100, 103

[Raf50] Raymond Raffin. Anneaux à puissances commutatives et anneaux flexibles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230:804–806, 1950. 36

[RP92] Ángel Rodríguez-Palacios. One-sided division absolute valued algebras. *Publ. Mat.*, 36(2B):925–954 (1993), 1992. 94

[RP94] Ángel Rodríguez-Palacios. Absolute valued algebras of degree two. Em *Non-associative algebra and its applications (Oviedo, 1993)*, volume 303 of *Math. Appl.*, páginas 350–356. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. 2

[Sch52] I. J. Schoenberg. A remark on M. M. Day's characterization of inner-product spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3:961–964, 1952. 71

[Sch54] R. D. Schafer. On the algebras formed by the Cayley-Dickson process. *Amer. J. Math.*, 76:435–446, 1954. 34

[Sch66] Richard D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 22. Academic Press, New York-London, 1966. 5, 20

[UW60] K. Urbanik e F. B. Wright. Absolute-valued algebras. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 8:285–286, 1960. 1, 94, 100

[Ż73] Wiesław Żelazko. *Banach algebras*. Elsevier Publishing Co., Amsterdam-London-New York; PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1973. Translated from the Polish by Marcin E. Kuczma. 1

[Zor31] Max Zorn. Theorie der alternativen ringe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 8(1):123–147, 1931. 33

[ZSSS82] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov e A. I. Shirshov. *Rings that are nearly associative*, volume 104 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982. Translated from the Russian by Harry F. Smith. 19, 26, 45

Índice Remissivo