Nova álgebra de lie simples de dimensão 30 sobre um corpo de característica 2

Oscar Daniel López Osorio

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemáticas
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Grishkov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro parcial da CAPES

São Paulo, Setembro de 2016

Nova álgebra de lie simples de dimensão 30 sobre um corpo de característica 2

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Oscar Daniel López Osorio
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Henrique Guzzo Junior-(Presidente) - USP.
- Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández - USP.
- Prof. Dr. Artem Lopatin - UNICAMP.
- Prof. Dr. IIya Gorshkov - UFABC.
- Prof. Dr. Wilian Francisco de Araújo - UTFPr.

Agradecimentos

Sinceros agradecimentos ao meu orientador Dr. Alexandre Grishkov por me receber e compartilhar seus conhecimentos e disponibilidade, alem de sua confiança.
À minha filha querida, Daniela, por me dar a força para enfrentar este trabalho.
Ao meus pais, por seu apoio incondicional e suas palavras de incentivo durante este processo.
Ao meus irmãos, Mauricio e Natalia, pelo carinho e constante comunicação em minha estadia no Brasil.
Ao meus amigos, Cesar Augusto Rodríguez, pelo ajuda e tempo dedicado no desenvolvimento de esta tésis; Hernan Alejandro Muñoz Ossa, pelo auxilio e assistência na digitação com o editor LATEX e no entendimento do MATLAB; Camilo Mesa pelo incentivo em mudar para a Matemática e sua ajuda no abstract.
À Oveida pelos momentos compartilhados e dificuldades que vivemos em conjunto com nossa amada filha.
Aos meus amigos que conheci no IME, Raibel, Morão, Roldão, Duvão, Oscar Ocampo, Nubia, Jeovanny, Carlos Payares, German, el tío, los Alex, Valencia, Dieguini, Pablo, los Elkines, Mutisão, Andrés, July, Deisysita, Marina, F. David, Clodoaldo, William e outros que neste momento esqueci, mas não sendo menos importantes, desempenharam um papel neste trabalho.
Aos meus amigos na Colômbia, Juancho, Nestor, Jorge, Snoopy, Juank, Lechón, Jime, Cantica, Muñoz, Quice, Flaco, Melida, Julio, Emer, Guaro, Dala, Naty, Jay D, e outros que neste momento esqueci, pela sua eterna amizade.
Ao TDEA por me permitir estudar na aqueles momentos que precisava e as pessoas que lá eu conheci, como Zaida, las Natys, Vicky, Dario, Kathe, etc.
À minha família entera: Mary, Nena, Darío, Danny, Luchito, Vale, Tara, Ligia, Oscar Mickey, Freddy, Carito, Pipe, Cata, la Abuela, Margara, Tomasín, e todos os outros que são parte da minha família e eu não mencionei.
À CAPES pela bolsa concedida alguns meses durante meu primeiro ano de doutorado.

Resumo

López-Osorio, O. D. **Nova álgebra de lie simples de dimensão 34 sobre um corpo de característica 2**. 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

S.Skryabin demonstrou que qualquer álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo de característica 2 possui posto toroidal ≥ 2. Duas 2-álgebras de Lie de dimensão 31 foram estudadas. Neste trabalho, mostramos que a primeira delas contem uma base toroidal absoluta de dimensão três, assim como a segunda, que foi estudada por Grishkov e Guerreiro anteriormente. Utilizando uma decomposição de Cartan, exibimos um isomorfismo entre as duas 2-álgebras de Lie de dimensão 31. Este resultado foi sugerido depois de encontrar uma subálgebra de dimensão 12 não solúvel e 7 isomorfas 2-subálgebras de Lie de dimensão 7 nas duas álgebras. Finalmente, exploramos uma 2-álgebra de Lie de dimensão 34 como o fim de encontrar base toroidal absoluta de dimensão 4. Apoiamos os cálculos com algumas códigos no linguajem de MATLAB que permitiram optimizar e acelerar a pesquisa.

Palavras-chave: álgebras simples, posto toroidal, base toroidal absoluta.

Abstract

López-Osorio, O. D. **Nova álgebra de lie simples de dimensão 30 sobre um corpo de característica 2**. 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

S.Skryabin showed that any finite dimensional simple Lie algebra over a field of characteristic 2 has absolute toral rank ≥ 2. Two 31-dimensional 2-algebras were known. In this work, we show that the first of these algebras, contains a 3-dimensional maximal toral subalgebra, as the second one, which was studied by Grishkov e Guerreiro previously. Using a Cartan decomposition we establish an isomorphism between the two 31-dimensional 2-algebras. This result was suggested after finding a 12-dimensional not soluble subalgebra and seven 7-dimensional isomorphic 2-subalgebras in both álgebras. Finally, a 34-dimensional 2-Lie algebra was studied in order to find 4-dimensional maximal toral subalgebras. Some computations in this work were performed with help of MATLAB.
Keywords: Simples algebras, absolute toral rank, maximal toral subalgebra.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Depois da classificação das álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo de característica $p > 3$, o principal problema na teoria de álgebras de Lie de dimensão finita é a classificação das álgebras de Lie simples sobre um corpo de característica 2 e 3. A primeira etapa nesta classificação foi feito por S. Skryabin. Ele [6] demonstrou que qualquer álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo de característica 2 possui posto toroidal ≥ 2.
Com $p = 2$ a classificação é muito difícil e ninguém espera solução dela no futuro próximo.
Em [2] e [3] os autores Grishkov, Guerreiro e Araujo demonstraram que as únicas álgebras de Lie simples 7 dimensional sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2, são as álgebras de Witt, W_1 e a álgebra de Hamilton H_2.
Estamos ainda na etapa de descobertas das novas álgebras. Exatamente isso fazemos nesta tese.
Que métodos de construção das novas álgebras existem?

1. Fazer por analogia com álgebras construídas em características $p > 2$ e $p = 0$. Primeiro método ($p > 2$) é praticamente esgotado, mas para $p = 0$ ainda existe possibilidade de aplicar construções das álgebras e superálgebras de dimensão infinita, pois, as vezes, construção de álgebra ou superálgebra de dimensão infinita sobre corpo de $car = 0$ pode dar álgebra em $car = 2$ de dimensão finita. Este método sistematicamente aplica Dmitrii Leites (Sweden) com colaboradores e, recentemente, A.Grichkov com Viktor Kac construíram pelo este método uma nova series das álgebras de Lie de dimensão 248.

2. Analisar deformações das álgebras existentes, com esperança achar as álgebras novas. Este método, por exemplo, foi aplicado no trabalho de A.Grichkov com Pasha Zusmanovich (o artigo aceito para JAlgebra) no caso de uma álgebra de Lie de Skryabin de $dim = 15$. Eles acharam uma família $L(a, b)$ com dois parâmetros a, b. Mas o problema, quais destas álgebras são novas? esta em aberto. Agora, em colaboração do Prof. Henrique Guzzo, eles estão resolvendo este problema. Eles provaram que todas as álgebras $L(a, b)$ são isomorfas.
Analogamente, em 2001 A.Grichkov com Alexandre Premet estudaram deformações da álgebra clássica de $dim = 28$ tipo D_4. Esta álgebra é única entre as álgebras de Lie clássicas com muitas deformações $L(a) = L(a_1, a_2, ..., a_{14})$ (14 parâmetros). Mas o problema de isomorfismo entre estas álgebras ou com outras ainda esta em aberto. Em 2007 A.Grichkov com Marines Guerreiro [1] analisaram um exemplo desta serie $L(a)$ e provaram que uma destas

álgebras (de $dim = 28$) é nova.

Nesta tese, analisei mais uma álgebra desta família $L(a)$, com parâmetros $a_1, ..., a_{14}$ muito diferente dos parâmetros no exemplo analisado pelo Grichkov e Guerreiro, mas a mesma dimensão 28. O resultado: Esta álgebra é isomorfa da álgebra estudada por eles. Por um lado-isso é frustrante, por outro animador; pode ser que TODAS as álgebras da família $L(a)$ de $dim = 28$ sejam isomorfas. Na segunda parte da tese analisamos outra álgebra de tipo $L(a)$, desta vez de $dim = 30$. Como nós não sabemos as álgebras de Lie simples de $dim = 30$ de posto toroidal 4, objetivo principal foi provar que esta álgebra tem posto 4.

O problema de posto para uma álgebra dada é muito difícil. Para provar que uma álgebra L tem posto n, precisa-se:

- Construir no L_p (p-fecho de L) uma subálgebra toroidal de $dim = n$.
- Provar que NÃO existe uma subálgebra toroidal de $dim = n + 1$. Esta parte é, az vezes, muito difícil.

Mas existe um resultado que pode-se consultar en [5] que dribla esta dificuldade

Teorema 1.1.1. *Seja L uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo de $char = p > 0$ e L_p o p-fecho de L. Se L_p tem uma subálgebra de Cartan toroidal T tal que $L_p = T \oplus L$, então L tem posto toroidal $n = dimT$.*

Exatamente esta teorema, para nossa sorte, pode ser aplicada no nosso caso. Achamos uma subálgebra toroidal em L_p de $dim = 4$ tal que $T \cap L = 0$, e $L_p = T \oplus L$. Logo o posto de L é 4 e nossa álgebra é nova. Esperamos, no futuro, analisando a estrutura desta álgebra obter uma prova mais simples que esta é uma álgebra de Lie. Ate agora sabemos isso somente com uso do resultado de Grichkov+Premet, que ainda não foi publicado. E, com muita sorte, esperamos construir as álgebra análogas desta de $dim > 30$.

1.2 Conceitos básicos

Descrevemos agora alguns dos prerrequisitos e definições preliminares necessárias para entender o problema ao qual nos dedicaremos. Daqui em diante k denota um corpo de característica dois. Para uma melhor compreensão deste trabalho é importante lembrar alguns conceitos que podem ser consultados nos livros de N. Jacobson [7], K. Erdmann, M. Wildon [8] e H. Strade, R. Farnstein [4] entre outros.

1.2.1 Álgebras de Lie, subálgebras e ideais

Definição 1.2.1. Uma **álgebra de Lie** sobre k, é um k espaço vetorial L, munido com uma aplicação bilinear, o **colchete de Lie**

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \longmapsto & L \\ (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades

1. $[x,x]$ para todo $x \in L$
2. $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ para todo $x,y,z \in L$, chamada identidade de Jacobi.

Observação 1.2.1. Neste caso em que k é de característica dois, de 2 podemos inferir que $[x,y] = [y,x]$ para todo $x,y \in L$.

Definição 1.2.2. Seja L uma álgebra de Lie e S, I subespaços vetoriais de L. Dizemos que S é uma **subálgebra de Lie** de L se $[x,y] \in S$ para todo $x,y \in S$. Dizemos também que I é um **Ideal** de L se $[x,y] \in I$ para todo $x \in L$, $y \in I$.

Exemplo 1.2.1. Um exemplo importante de ideal, que frequentemente é não trivial é o **centro** de L, definido por

$$Z(L) = \{x \in L/[x,y] = 0 \text{ para todo } y \in L\}$$

No caso que $Z(L) = L$, dizemos que L é **abeliana.**

Exemplo 1.2.2. Seja $A \subseteq L$. Definimos o **Anulador de A em L** como

$$Ann_L(A) = \{\xi \in L \mid [a,\xi] = 0, \forall a \in A\}.$$

$Ann_L(A)$ é uma subálgebra de L. No caso em que $A = \{a\}$, escrevemos simplesmente $Ann_L(a)$, e se $a \in Z(L)$, o subespaço gerado por a, $< a >$, será um ideal de $Ann_L(a)$. Também, denotaremos por $I_L(A)$ ao conjunto

$$I_L(A)=\{\xi \in L \mid [a,\xi] = \xi, \forall a \in A\} \text{ para referência futura.}$$

Exemplo 1.2.3. Se I é um ideal de uma álgebra de Lie L, pode se ver que o espaço vetorial quociente

$$L/I = \{x + I/x \in L\}$$

é uma álgebra de Lie com colchete de Lie definido por

$$[x+I, y+I] := [x,y] + I,$$

e de maneira análoga aos grupos, existem os teoremas de isomorfismos para álgebras de Lie.

Definição 1.2.3. Seja K subespaço vetorial de L, definimos o **normalizador** de K em L, denotado $N_L(K)$ como:

$$N_L(K) = \{x \in L/[x,y] \in K \text{ para todo } y \in K\}$$

1.2.2 Álgebra de Lie Nilpotente, Solúvel e Simples

Definição 1.2.4. Seja L uma álgebra de Lie sobre k. Dizemos que L é **nilpotente** se $L^n = \{0\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $L^2 := L' = [L,L]$ e $L^n = [L, L^{n-1}]$ para $n > 2$.

Definição 1.2.5. Seja L uma álgebra de Lie sobre k. Dizemos que L é **solúvel** se $L^{(n)} = \{0\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $L^{(2)} := L' = [L,L]$ e $L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]$ para $n > 2$.

Definição 1.2.6. Seja L uma álgebra de Lie sobre k. Dizemos que L é **semissimples** se o único ideai solúvel é $\{0\}$.

Definição 1.2.7. Seja L uma álgebra de Lie sobre k. Dizemos que L é **simples** se $L \neq Z(L)$ e os seus únicos ideais são os triviais.

1.2.3 Subálgebra de Cartan e Toroidal

Definição 1.2.8. Uma subálgebra de Lie H é dita **subálgebra de Cartan** , se $H = N_L(H)$ e H é nilpotente.

Definição 1.2.9. Uma subálgebra de Lie é dita **subálgebra Toroidal,** se todos seus elementos são **semissimples** No caso em que seja maximal baixo esta propriedade, é dita **subálgebra toroidal absoluta** e sua dimensão, chamado **posto toroidal absoluto**.

Lema 1.2.1. *Seja L uma álgebra de Lie semissimples e T uma subálgebra toroidal de L, então T é abeliana.*

Corolário 1.2.0.1. *Uma subálgebra T é toroidal absoluta se e somente se T é uma subálgebra de Cartan.*

1.2.4 2-Álgebra de Lie

Definição 1.2.10. Uma álgebra de Lie L sobre k é uma **2-Álgebra de Lie** se existe uma função

$$\begin{array}{ccc} L & \longmapsto & L \\ x & \mapsto & x^{[2]} \end{array}$$

chamada **2-aplicação** tal que

1. $(x+\lambda y)^{[2]} = x^{[2]} + \lambda^2 y^{[2]} + \lambda[x,y]$, para todo $x, y \in L$, $\lambda \in k$.
2. $ad\ (x^{[2]})$=$(ad\ x)^2$ para todo $x \in L$ onde $ad\ x$ age assim:

$$\begin{array}{ccc} L & \longmapsto & L \\ y & \mapsto & (ad\ x)(y) := [x,y] \end{array}$$

Exemplo 1.2.4. Seja A uma álgebra sobre o corpo k. A álgebra de Lie $DerA$ das derivações de A possui uma estrutura natural de 2-Álgebra de Lie dada por
$d^{[2]}(a) := d(d(a))$.

Definição 1.2.11. Seja L uma 2-Álgebra de Lie e S uma Subálgebra de Lie de L. Dizemos que S é uma **2-subálgebra de Lie** de L se $x^{[2]} \in S$, para todo $x \in S$.

Observação 1.2.2. No caso em que $Z(L) = 0$, L é isomorfo ao $ad\ L$ baixo o homomorfismo adjunto:

$$\begin{array}{ccc} L & \longmapsto & ad\ L \\ x & \mapsto & ad\ x \end{array}$$

Definição 1.2.12. Seja L uma álgebra de Lie tal que $Z(L) = 0$. O **2-fecho de** L **em** $Der_k(L)$, denotado por L_2, é a menor subálgebra de $Der_k(L)$, contendo $ad\ L$ e fechada para a 2-aplicação, onde $adL = \{adx \mid x \in L\}$.

Exemplo 1.2.5. Considere a álgebra L de dimensão 3 com base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e produto $[e_i, e_j] = e_k$ com $k \neq i \neq j \neq k$. Neste caso, o 2-Fecho de L possui dimensão 5 com base $\left\{e_1, e_2, e_3, e_1^{[2]}, e_2^{[2]}\right\}$.

Capítulo 2

Álgebra de Lie de dimensão 28

2.1 A Álgebra de Lie de dimensão 28

Seja L_{31} a 2-álgebra de Lie de dimensão 31 construída a continuação: Uma base B de L_{31} tem duas partes B_1 e B_2 tal que $|B_1| = 15$, $|B_2| = 16$ e
$B_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, f_4, t, h, m_{13}, m_1^4, m_{12}, m_1^2, m_3^4\}$
B_2 é o conjunto das partes de $I = \{1, 2, 3, 4\}$.
Vamos escrever $\sigma = ijkl$, $\sigma = ijk$, $\sigma = ij$, ou $\sigma = i$ para denotar $\sigma = \{i, j, k, l\}$, $\sigma = \{i, j, k\}$, $\sigma = \{i, j\}$, ou $\sigma = \{i\}$ respetivamente, para $i, j, k, l \in I$, e lembrando que não importa a ordem em que sejam colocados. Por exemplo o objeto 312 denota simplesmente o elemento $\{1, 2, 3\}$.
A multiplicação dos elementos da base são dados pela seguintes fórmulas:
$[t, h] = 0$, $[x, h] = 0$, $[x, t] = x$, para $x \in \{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$,
$[x, t] = [x, h] = 0$, para $x \in M = \{m_{13}, m_1^4, m_{12}, m_1^2, m_3^4\}$, $[M, M] = 0$,
$[\sigma, h] = \sigma$, $[\sigma, t] = |\sigma|\, \sigma$, para $\sigma \in B_2$,
$[f_i, f_j] = [e_i, e_j] = 0, \forall i, j \in I$, exceto um produto, que será $[e_1, e_3] = m_1^4$,
$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h, \forall i, j \in I$ exceto um produto, que será $[e_1, f_4] = m_{13}$,
Os produtos $[B_1, M]$, $[B_2, M]$ são dados por
$\left[e_1, m_1^4\right] = e_4$, $\left[f_4, m_1^4\right] = f_1$
$[e_1, m_{13}] = f_3$, $[e_3, m_{13}] = f_1$
$\left[e_3, m_3^4\right] = e_4$, $\left[f_4, m_3^4\right] = f_3$
$\left[e_1, m_1^2\right] = e_2$, $\left[f_2, m_1^2\right] = f_1$
$[e_1, m_{12}] = f_2$, $[e_2, m_{12}] = f_1$
$[\sigma, m_{ij}] = \sigma \setminus \{ij\}$, se $\{ij\} \subseteq \sigma$ para $\{ij\} \in \{\{12\}, \{13\}\}$,
$\left[\sigma, m_i^j\right] = (\sigma \cup j) \setminus i$ para $j \notin \sigma, i \in \sigma$,
e os outros produtos $[B_1, M]$, $[B_2, M]$ são iguais ao zero.
Além temos

$$[f_i, \sigma] = \begin{cases} \sigma \setminus i, & \text{se} \quad i \in \sigma; \\ 0, & \text{se} \quad i \notin \sigma. \end{cases},$$

$$[e_i, \sigma] = \begin{cases} \sigma \cup i, & \text{se} \quad i \notin \sigma; \\ 0, & \text{se} \quad i \in \sigma. \end{cases},$$

exceto dois produtos, que são $[e_1, 13] = 4$ e $[e_1, 123] = 24$.
Os produtos $[B_2, B_2]$ são dados por

$$[\sigma,\mu]=\begin{cases} e_i, & \text{se} \quad \sigma\cap\mu=i \quad \text{e} \quad \sigma\cup\mu=I; \\ f_i, & \text{se} \quad \sigma\cap\mu=\emptyset \quad \text{e} \quad \sigma\cup\mu=I\setminus i;, \\ t+|\sigma|\,h, & \text{se} \quad \sigma\cap\mu=\emptyset \quad \text{e} \quad \sigma\cup\mu=I. \end{cases}$$

exceto cinco produtos, que são $[1,123]=m_{13}$, $[12,13]=m_{13}$, $[13,123]=f_1$, $[13,I]=m_1^4$, $[123,134]=m_1^4$.
Os outros produtos $[B_2,B_2]$ são iguais ao zero.
Pode-se calcular que $e_1^{[2]}=m_3^4$, $(13)^{[2]}=m_{12}$, $(123)^{[2]}=m_1^2$, $t^{[2]}=t$, $h^{[2]}=h$, e $a^{[2]}=0$ para os outros $a\in B_1\cup B_2$.

Seja L_{28} á álgebra de Lie gerada por $B\setminus\{m_{12},m_1^2,m_3^4\}$ sendo B a base definida anteriormente; note que L_{31} é o 2-fecho de L_{28} e $L_{28}=[L_{31},L_{31}]$.
Vamos agora descompor a álgebra de Lie L_{31} assim: $L_{31}=T\oplus Ann_{L_{28}}(y)\oplus I_{L_{31}}(y)$
onde $Ann_{L_{28}}(y):=[Ann_{L_{31}}(y),Ann_{L_{31}}(y)]$ e $T:=<t_1,t_2,t_3>$ será uma subálgebra toroidal de L_{31};
A escolha de y é feita tal que $y^{[2]}=y$ e esteja fora de L_{28}; $y:=t+e_1+e_2+24+123+m_1^2+m_3^4$ satisfaz os requisitos.

Agora vamos encontrar bases para $Ann_{L_{28}}(y)$ e $I_{L_{31}}(y)$, e para isso usamos os seguintes lemas:

Lema 2.1.1. *Se $l\in L_{31}$ então $[y,l]\in I_{L_{31}}(y)$*

Demonstração. Note que $L'_{31}=L_{28}$ é assim $[y,l]\in L_{28}$ para todo $l\in L_{31}$. Além disso $[y,[y,l]]=[y,l]$, ja que $y^{[2]}=y$. □

Lema 2.1.2. *Se $l\in L_{31}$, então $l+[y,l]\in Ann_{L_{31}}(y)$.*

Demonstração. $[y,l]+[y,[y,l]]=[y,l]+[y,l]=0$. □

Note que se $l\in L_{28}$, então $l=l+[y,l]+[y,l]$. Por os lemas anteriores,
$L_{28}=Ann_{L_{28}}(y)\oplus I_{L_{31}}(y)$

Agora passamos a achar as bases usando os lemas anteriores:

l	$[l,y]$	$[l,y]+l$	l	$[l,y]$	$[l,y]+l$
e_1	$e_1+e_2+24+124$	$e_2+24+124$	13	$f_1+t+4+14+23+123$	$f_1+t+4+13+14+23+123$
e_2	e_2	0	14	$e_1+24+124$	$e_1+14+24+124$
e_3	$e_3+e_4+234+m_1^4$	$e_4+234+m_1^4$	23	$24+123$	$23+24+123$
e_4	e_4+I	I	24	e_2+124	$e_2+24+124$
f_1	f_1+h+23	$h+23$	34	$e_3+134+234$	$e_3+34+134+234$
f_2	$f_1+f_2+h+4+13$	$f_1+h+4+13$	123	$e_2+24+123+124$	$e_2+24+124$
f_3	f_3+12	12	124	124	0
f_4	$f_3+f_4+2+m_{13}$	f_3+2+m_{13}	134	$e_4+134+234+I+m_1^4$	$e_4+234+I+m_1^4$
h	$24+123$	$h+24+123$	234	$234+I$	I
t	e_1+e_2+123	$e_1+e_2+t+123$	I	0	I
$\emptyset$	f_4+1+2	$f_4+\emptyset+1+2$	m_{13}	f_3+2	f_3+2+m_{13}
1	$f_3+1+2+12+m_{13}$	$f_3+2+12+m_{13}$	m_1^4	e_4+234	$e_4+234+m_1^4$
2	$2+12$	12	m_{12}	f_1+f_2+3	$f_1+f_2+3+m_{12}$
3	$f_1+3+4+13+23$	$f_1+4+13+23$	m_1^2	e_2	$e_2+m_1^2$
4	$h+t+4+14+24$	$h+t+14+24$	m_3^4	124	$124+m_3^4$
12	0	12			

Da tabua, fazemos $x := e_2+m_1^2$ e $z := f_1+f_2+3+m_{12}$, (note que eles comutam com y) e escolhemos elementos linearmente independentes para $Ann_{L_{28}}(y)$ e para $I_{L_{31}}(y)$, à saber $\{u_1,\ldots,u_{16}\}$ e $\{w_1,\ldots,w_{12}\}$, respetivamente, onde o valor de cada u_i, w_i fica explícito comparando a tabua anterior como a seguinte:

l	$[l,y]$	$[l,y]+l$	l	$[l,y]$	$[l,y]+l$
e_1	$u_2+u_7+u_{10}$	w_2	13	$u_8+u_9+u_{15}$	w_9+w_{10}
e_2	u_1	0	14	$u_1+u_2+u_7+u_{10}$	$w_1+w_2+w_3+w_9+w_{10}+w_{12}$
e_3	u_{13}	w_8	23	u_7	$w_1+w_{10}+w_{12}$
e_4	u_3	w_4	24	u_1+u_2	w_2
f_1	u_9	w_1	34	u_{12}	w_{11}
f_2	u_{15}	w_{12}	123	$u_1+u_2+u_7$	w_2
f_3	u_6	w_5	124	u_2	0
f_4	u_{14}	w_6	134	$u_3+u_4+u_{12}+u_{13}$	w_4+w_8
h	u_7	$w_{10}+w_{12}$	234	u_3+u_4	w_4
t	u_{10}	w_3	I	0	w_4
$\emptyset$	u_{11}	w_7	m_{13}	u_5	w_6
1	$u_5+u_6+u_{11}+u_{14}$	w_5+w_6	m_1^4	u_4	w_8
2	u_5+u_6	w_5	m_{12}	u_8	z
3	$u_8+u_9+u_{15}$	w_1+w_{12}	m_1^2	u_1	x
4	u_{16}	w_1+w_9	m_3^4	u_2	w_2+w_3+x+y
12	0	w_5			

Ou seja,

$u_1 = e_2$
$u_2 = 124$
$u_3 = e_4 + I$
$u_4 = e_4 + 234$
$u_5 = f_3 + 2$
$u_6 = f_3 + 12$
$u_7 = 24 + 123$
$u_8 = f_1 + f_2 + 3$
$u_9 = f_1 + h + 23$
$u_{10} = e_1 + e_2 + 123$
$u_{11} = f_4 + 1 + 2$
$u_{12} = e_3 + 134 + 234$
$u_{13} = e_3 + e_4 + 234 + m_1^4$
$u_{14} = f_3 + f_4 + 2 + m_{13}$
$u_{15} = f_1 + f_2 + h + 4 + 13$
$u_{16} = t + h + 4 + 14 + 24$

$w_1 = h + 23$
$w_2 = e_2 + 24 + 124$
$w_3 = e_1 + e_2 + t + 123$
$w_4 = I$
$w_5 = 12$
$w_6 = f_3 + 2 + m_{13}$
$w_7 = f_4 + \emptyset + 1 + 2$
$w_8 = e_4 + 234 + m_1^4$
$w_9 = t + 14 + 23 + 24$
$w_{10} = f_1 + 4 + 13 + 24 + 123$
$w_{11} = e_3 + 34 + 134 + 234$
$w_{12} = f_1 + h + 4 + 13$
$x = e_2 + m_1^2$
$z = f_1 + f_2 + 3 + m_{12}$
$y = t + e_1 + e_2 + 24 + 123 + m_1^2 + m_3^4$

$Ann_{L_{28}}(y)$ é uma subálgebra de Lie de L_{31} como pode ser visto na tabela de seus produtos:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}
w_1	0	w_2	0	w_4	w_5	0	w_7	0	w_9	w_{10}	w_{11}	$w_1 + w_{12}$
w_2		0	0	0	0	0	0	0	0	w_3	0	$w_2 + w_3$
w_3			0	0	0	0	0	0	0	$w_2 + w_9$	0	w_9
w_4				0	0	w_2	w_3	0	0	w_8	0	$w_4 + w_8$
w_5					0	0	0	w_2	0	w_6	w_3	$w_5 + w_6$
w_6						0	0	0	0	$w_5 + w_7$	w_9	w_7
w_7							0	w_9	0	w_6	0	w_7
w_8								0	0	$w_4 + w_{11}$	0	w_{11}
w_9									0	w_3	0	w_9
w_{10}										0	w_8	$w_1 + w_{10}$
w_{11}											0	w_{11}
w_{12}												0

Observe que dita subálgebra de Lie não é solúvel já que $Ann_{L_{28}}(y)' = Ann_{L_{28}}(y)$

Para encontrar os elementos t_2, t_3 que faltam (já que fazemos $t_1 := y$), precisamos então que estejam fora de L_{28}, satisfaziam $t_2^{[2]} = t_2$, $t_3^{[2]} = t_3$ e comutem. Como eles precisam comutar com t_1, combinações dos seguintes resultados junto como os de a tábua anterior podem ajudar-nos para encontrar candidatos.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	x	z
x	0	0	0	0	0	0	w_5	0	w_2	$w_1 + w_{10} + w_{12}$	w_4	$w_1 + w_{10} + w_{12}$	0	w_1
z	0	w_9	0	w_{11}	w_7	0	0	0	0	$w_1 + w_{12}$	0	0	w_1	0

Além que $w_1^{[2]} = w_1, w_3^{[2]} = y, w_{10}^{[2]} = w_1 + x + z, w_{12}^{[2]} = w_{12} + z$ e os outros elementos (w_i e z) são zero sob a 2-aplicação.

De fato, nos encontramos eles; estes podem ser:
$t_2 := w_{12} + z$
$t_3 := w_{10} + x + z$

De igual forma que antes, se $l \in Ann_{L_{31}}(y)$, $l = l + [t_2, l] + [t_2, l]$, com $l + [t_2, l] \in Ann_{Ann_{L_{31}}(y)}(t_2)$ e $[t_2, l] \in I_{Ann_{L_{31}}(y)}(t_2)$. Assim

$Ann_{L_{31}}(y) = Ann_{Ann_{L_{31}}}(t_2) \oplus I_{Ann_{L_{31}}}(t_2)$. Se $l \in I_{L_{31}}(y)$ temos uma decomposição em subespaços

análoga.
Para suavizar um pouco a notação, de agora em diante nos vamos a denotar por

$L_{(ij)} = \{\xi \in L_{28} \mid [t_1, \xi] = i\xi, [t_2, \xi] = j\xi\}$ com $i, j \in \mathbb{Z}_2$.
Assim por exemplo, as decomposições que mencionamos acima ficam

$Ann_{L_{28}}(y) = L_{(00)} \oplus L_{(01)}$,
$I_{L_{31}}(y) = L_{(10)} \oplus L_{(11)}$.

Procedemos a achar bases para estes subespaços de igual forma que fizemos para a $Ann_{L_{28}}(y)$ e $I_{L_{31}}(y)$.
Começamos por encontrar bases para $L_{(00)}$ e $L_{(01)}$:

l	$[l, t_2]$	$[l, t_2] + l$
w_1	$w_1 + w_{12}$	w_{12}
w_2	$w_2 + w_3 + w_9$	$w_3 + w_9$
w_3	w_9	$w_3 + w_9$
w_4	$w_4 + w_8 + w_{11}$	$w_8 + w_{11}$
w_5	$w_5 + w_6 + w_7$	$w_6 + w_7$
w_6	w_7	$w_6 + w_7$
w_7	w_7	0
w_8	w_{11}	$w_8 + w_{11}$
w_9	w_9	0
w_{10}	$w_{10} + w_{12}$	w_{12}
w_{11}	w_{11}	0
w_{12}	0	w_{12}

Base para $L_{(00)} =< w_{12}, w_3 + w_9, w_6 + w_7, w_8 + w_{11} >$
Base para $L_{(01)} =< w_7, w_9, w_{11}, w_1 + w_{12}, w_{10} + w_{12}, w_2 + w_3 + w_9, w_5 + w_6 + w_7, w_4 + w_8 + w_{11} >$

Como T é uma subálgebra de Cartan de L_{31}, os únicos elementos que estão no comutador de T em L_{31} são precisamente os elementos de T e por tanto $L_{(00)}$ é precisamente o espaço próprio da raiz (0,0,1), isto é
$L_{(00)} = \{\xi \in L_{31} \mid [t_1, \xi] = 0, [t_2, \xi] = 0, [t_3, \xi] = \xi\} = L_{(0,0,1)}$
e $L_{(01)}$ vai-se decompor novamente em 2 subespaços, à saber $L_{(0,1,0)}$ e $L_{(0,1,1)}$

l	$[l,t_3]$	$[l,t_3]+l$
w_7	w_5+w_6	$w_5+w_6+w_7$
w_9	w_2+w_3	$w_2+w_3+w_9$
w_{11}	w_4+w_8	$w_4+w_8+w_{11}$
w_1+w_{12}	$w_{10}+w_{12}$	w_1+w_{10}
$w_{10}+w_{12}$	$w_{10}+w_{12}$	0
$w_2+w_3+w_9$	0	$w_2+w_3+w_9$
$w_5+w_6+w_7$	0	$w_5+w_6+w_7$
$w_4+w_8+w_{11}$	0	$w_4+w_8+w_{11}$

Assim
$L_{(0,1,1)} =< w_2+w_3, w_4+w_8, w_5+w_6, w_{10}+w_{12} >$
$L_{(0,1,0)} =< w_1+w_{10}, w_2+w_3+w_9, w_5+w_6+w_7, w_4+w_8+w_{11} >$

Procedemos a encontrar bases para $L_{(10)}$ e $L_{(11)}$:

l	$[l,t_2]$	$[l,t_2]+l$
u_1	u_7+u_9	$u_1+u_7+u_9$
u_2	$u_1+u_2+u_7+u_{10}+u_{16}$	$u_1+u_7+u_{10}+u_{16}$
u_3	$u_3+u_4+u_{13}$	u_4+u_{13}
u_4	u_{12}	u_4+u_{12}
u_5	u_{11}	u_5+u_{11}
u_6	$u_5+u_6+u_{14}$	u_5+u_{14}
u_7	$u_7+u_8+u_{15}$	u_8+u_{15}
u_8	0	u_8
u_9	$u_8+u_9+u_{15}$	u_8+u_{15}
u_{10}	$u_8+u_9+u_{16}$	$u_8+u_9+u_{10}+u_{16}$
u_{11}	u_{11}	0
u_{12}	u_{12}	0
u_{13}	u_{12}	$u_{12}+u_{13}$
u_{14}	u_{11}	$u_{11}+u_{14}$
u_{15}	0	u_{15}
u_{16}	$u_{15}+u_{16}$	u_{15}

Base para $L_{(11)} =< u_{11}, u_{12}, u_7+u_9, u_{15}+u_{16}, u_3+u_4+u_{13}, u_5+u_6+u_{14}, u_7+u_8+u_{15}, u_1+u_2+u_7+u_{10}+u_{16} >$
Base para $L_{(10)} =< u_8, u_{15}, u_4+u_{12}, u_4+u_{13}, u_5+u_{11}, u_5+u_{14}, u_1+u_7+u_9, u_1+u_7+u_{10}+u_{16} >$

$L_{(11)}$ vai-se decompor em 2 subespaços, à saber $L_{(1,1,0)}$ e $L_{(1,1,1)}$

l	$[l,t_3]$	$[l,t_3]+l$
u_{11}	$u_5+u_6+u_{14}$	$u_5+u_6+u_{11}+u_{14}$
u_{12}	$u_3+u_4+u_{13}$	$u_3+u_4+u_{12}+u_{13}$
u_7+u_9	u_7+u_9	0
$u_{15}+u_{16}$	$u_1+u_2+u_7+u_{10}+u_{15}$	$u_1+u_2+u_7+u_{10}+u_{16}$
$u_3+u_4+u_{13}$	$u_3+u_4+u_{13}$	0
$u_5+u_6+u_{14}$	$u_5+u_6+u_{14}$	0
$u_7+u_8+u_{15}$	0	$u_7+u_8+u_{15}$
$u_1+u_2+u_7+u_{10}+u_{16}$	0	$u_1+u_2+u_7+u_{10}+u_{16}$

Assim
$L_{(1,1,1)} =< u_7+u_9, u_3+u_4+u_{13}, u_5+u_6+u_{14}, u_1+u_2+u_7+u_{10}+u_{15} >$
$L_{(1,1,0)} =< u_7+u_8+u_{15}, u_3+u_4+u_{12}+u_{13}, u_5+u_6+u_{11}+u_{14}, u_1+u_2+u_7+u_{10}+u_{16} >$

$L_{(10)}$ vai-se decompor em 2 subespaços, à saber $L_{(1,0,1)}$ e $L_{(1,0,0)}$

l	$[l,t_3]$	$[l,t_3]+l$
u_8	u_8+u_{15}	u_{15}
u_{15}	0	u_{15}
u_4+u_{12}	$u_{12}+u_{13}$	u_4+u_{13}
u_4+u_{13}	0	u_4+u_{13}
u_5+u_{11}	$u_{11}+u_{14}$	u_5+u_{14}
u_5+u_{14}	0	u_5+u_{14}
$u_1+u_7+u_9$	0	$u_1+u_7+u_9$
$u_1+u_7+u_{10}+u_{16}$	$u_1+u_7+u_{10}+u_{16}$	0

$L_{(1,0,1)} =< u_8+u_{15}, u_{11}+u_{14}, u_{12}+u_{13}, u_1+u_7+u_{10}+u_{16} >$
$L_{(1,0,0)} =< u_{15}, u_4+u_{13}, u_5+u_{14}, u_1+u_7+u_9 >$
Seja α uma raiz. Denotemos por L_α^2 o conjunto $\left\{x_\alpha^{[2]} \mid x_\alpha \in L_\alpha\right\}$. Note que $L_\alpha^2 \subseteq T$ pois $0 = \alpha(t)\,[x_\alpha, x_\alpha] = \left[t, x_\alpha^{[2]}\right]$ para todo $t \in T$ e assim $x_\alpha^{[2]} \in Z(T) = T$. Ainda mais, sabemos que α é um elemento de T^*, o dual de T, e $L_\alpha^2 \subseteq Ker\,(\alpha)$ ja que para cada $y_\alpha \in L_\alpha$ diferente de zero, tem-se $0 = [[y_\alpha, x_\alpha], x_\alpha] = \left[y_\alpha, x_\alpha^{[2]}\right] = \alpha\left(x_\alpha^{[2]}\right) y_\alpha$, e assim $\alpha\left(x_\alpha^{[2]}\right) = 0$.
Vamos a calcular L_α^2 (basta calcular nos elementos da base de L_α) e para isso precisamos dos produtos dos elementos de $I_{L_{31}}(y)$:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
u_1	0	0	0	0	0	0	0	w_1	0	0
u_2		0	0	0	0	0	0	w_1+w_9	w_2	0
u_3			0	0	w_2	0	w_4	w_{11}	w_4	w_4
u_4				0	0	w_2	w_4	0	0	0
u_5					0	0	w_5	0	0	0
u_6						0	w_5	w_7	w_5	w_2
u_7							0	w_1+w_{12}	$w_1+w_{10}+w_{12}$	w_5
u_8								0	0	0
u_9									0	w_1
u_{10}										0

	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}
u_1	w_5	w_4	0	0	$w_{10}+w_{12}$	w_2
u_2	w_5	w_4	w_4	w_5	w_1+w_2+w3+ $w_9+w_{10}+w_{12}$	0
u_3	$w_1+w_3+w_9$	0	0	$w_2+w_{10}+w_{12}$	w_4+w_8	w_4
u_4	w_9	0	0	w_1	w_{11}	0
u_5	0	w_9	w_1	0	w_7	0
u_6	w_6	w_8	w_4	w_5	w_1+w_{10}	$w_3+w_{10}+w_{12}$
u_7	0	$w_1+w_3+w_9$	$w_2+w_{10}+w_{12}$	0	w_5+w_6	w_5
u_8	0	0	0	0	0	0
u_9	w_7	w_{11}	0	0	w_1+w_{12}	w_9
u_{10}	0	0	w_8	w_6	w_9+w_{12}	w_1+w_9
u_{11}	0	0	$w_1+w_9+w_{12}$	0	w_7	w_7
u_{12}		0	0	$w_1+w_9+w_{12}$	w_{11}	w_{11}
u_{13}			0	0	w_{11}	w_{11}
u_{14}				0	w_7	w_7
u_{15}					0	$w_1+w_9+w_{12}$
u_{16}						0

Para suavizar a notação, vamos a renomear também os elementos segundo quais sob a 2-aplicação são zero e quais não:

Para $\alpha = (0,0,1)$

$(s_1 := w_{12})^{[2]} = w_{12} + z = t_2$

$(s_2 := w_3 + w_9)^{[2]} = y = t_1$

$(s_3 := w_8 + w_{11})^{[2]} = 0$

$(s_4 := w_6 + w_7)^{[2]} = 0$

Obtemos $L^2_\alpha =< t_1, t_2 >$.

Para $\alpha = (0,1,0)$

$(p_1 := w_1 + w_{10})^{[2]} = w_{10} + x + z = t_3$

$(p_2 := w_2 + w_3 + w_9)^{[2]} = y = t_1$

$(p_3 := w_4 + w_8 + w_{11})^{[2]} = 0$

$(p_4 := w_5 + w_6 + w_7)^{[2]} = 0$

Obtemos $L^2_\alpha =< t_1, t_3 >$.

Para $\alpha = (0,1,1)$

$(q_1 := w_2 + w_3)^{[2]} = y = t_1$

$(q_2 := w_{10} + w_{12})^{[2]} = w_{10} + w_{12} + x = t_2 + t_3$

$(q_3 := w_5 + w_6)^{[2]} = 0$
$(q_4 := w_4 + w_8)^{[2]} = 0$
Obtemos $L_\alpha^2 =< t_1, t_2 + t_3 >$.
Para $\alpha = (1, 0, 0)$
$(a_1 := u_{15})^{[2]} = w_{12} + z = t_2$
$(a_2 := u_1 + u_7 + u_9)^{[2]} = w_{10} + w_{12} + x = t_2 + t_3$
$(a_3 := u_5 + u_{14})^{[2]} = 0$
$(a_4 := u_4 + u_{13})^{[2]} = 0$
Obtemos $L_\alpha^2 =< t_2, t_3 >$.
Para $\alpha = (1, 0, 1)$
$(b_1 := u_8 + u_{15})^{[2]} = w_{12} + z = t_2$
$(b_2 := u_1 + u_7 + u_{10} + u_{16})^{[2]} = w_{10} + w_{12} + x + y = t_1 + t_2 + t_3$
$(b_3 := u_{11} + u_{14})^{[2]} = 0$
$(b_4 := u_{12} + u_{13})^{[2]} = 0$
Obtemos $L_\alpha^2 =< t_2, t_1 + t_3 >$.
Para $\alpha = (1, 1, 0)$
$(c_1 := u_7 + u_8 + u_{15})^{[2]} = w_{10} + x + z = t_3$
$(c_2 := u_1 + u_2 + u_7 + u_{10} + u_{16})^{[2]} = w_{10} + w_{12} + x + y = t_1 + t_2 + t_3$
$(c_3 := u_5 + u_6 + u_{11} + u_{14})^{[2]} = 0$
$(c_4 := u_3 + u_4 + u_{12} + u_{13})^{[2]} = 0$
Obtemos $L_\alpha^2 =< t_3, t_1 + t_2 >$.
Para $\alpha = (1, 1, 1)$
$(d_1 := u_7 + u_9)^{[2]} = w_{10} + w_{12} + x = t_2 + t_3$
$(d_2 := u_1 + u_2 + u_7 + u_{10} + u_{15})^{[2]} = w_{10} + x + y + z = t_1 + t_3$
$(d_3 := u_3 + u_4 + u_{13})^{[2]} = 0$
$(d_4 := u_5 + u_6 + u_{14})^{[2]} = 0$
Obtemos $L_\alpha^2 =< t_1 + t_3, t_2 + t_3 >$.

Proposição 2.1.1. $L_\alpha^2 = Ker\,(\alpha)$

Demonstração. Sabemos que $\forall \alpha, L_\alpha^2 \subseteq Ker\,(\alpha)$, mas neste caso temos igualdade $L_\alpha^2 = Ker\,(\alpha)$, já que $dimKer\,(\alpha) = dimT - \dim Im\,(\alpha) = 3 - 1 = 2$.

□

Com os produtos faltantes dos elementos nesta base, podemos verificar mais umas propriedades nesta álgebra.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}
u_1	0	0	u_1	0	0	0	u_5+u_6	0	u_1+u_2	u_7	u_3+u_4	u_7
u_2	u_1+u_2	0	u_2	0	0	0	u_6	0	u_1+u_2	$u_1+u_7+u_{10}$	u_3	$u_1+u_2+u_7+u_{10}$

u_3	u_3+u_4	0	u_3	0	u_2	u_1+u_2	$u_{10}+u_{16}$	0	u_4	$u_3+u_4+u_{12}+u_{13}$	0	$u_3+u_4+u_{12}+u_{13}$
u_4	0	0	u_4	0	u_1+u_2	0	u_9+u_{16}	0	0	$u_3+u_4+u_{12}$	0	u_{12}
u_5	0	0	u_5	u_1+u_2	0	0	0	0	0	$u_5+u_6+u_{11}$	u_9+u_{16}	u_{11}
u_6	u_5+u_6	0	u_6	u_2	0	0	0	u_1+u_2	u_5	$u_5+u_6+u_{11}+u_{14}$	$u_{10}+u_{16}$	$u_5+u_6+u_{11}+u_{14}$
u_7	u_7	u_1	$u_1+u_2+u_7$	0	0	u_5+u_6	u_{14}	u_3+u_4	u_{10}	u_9	u_{13}	u_7+u_9
u_8	0	u_9+u_{16}	u_8	u_{12}	u_{11}	0	0	0	0	$u_8+u_9+u_{15}$	0	0
u_9	0	u_1+u_2	u_9	u_3+u_4	u_5+u_6	0	u_{11}	0	u_9+u_{16}	$u_7+u_8+u_9+u_{15}$	u_{12}	$u_8+u_9+u_{15}$
u_{10}	0	u_1+u_2	u_{10}	0	0	u_5	u_{11}	u_4	0	$u_1+u_2+u_7+u_9+u_{16}$	u_{12}	u_9+u_{16}
u_{11}	u_{11}	u_5	u_{11}	u_{10}	0	0	0	u_9+u_{16}	0	u_{14}	u_8	u_{11}
u_{12}	u_{12}	u_4	u_{12}	0	u_{10}	u_9+u_{16}	u_8	0	0	u_{13}	0	u_{12}
u_{13}	0	u_3+u_4	u_4+u_{13}	0	$u_1+u_2+u_7$	u_9	$u_8+u_{15}+u_{16}$	0	u_{12}	$u_3+u_4+u_{12}$	0	u_{12}
u_{14}	0	u_5+u_6	u_5+u_{14}	$u_1+u_2+u_7$	0	0	0	u_9	u_{11}	$u_5+u_6+u_{11}$	$u_8+u_{15}+u_{16}$	u_{11}

u_{15}	$u_8+u_9+u_{15}$	$u_1+u_2+u_{10}+u_{16}$	$u_9+u_{15}+u_{16}$	$u_3+u_4+u_{12}+u_{13}$	$u_5+u_6+u_{11}+u_{14}$	u_{11}	u_{11}	u_{12}	$u_8+u_9+u_{16}$	u_7+u_9	u_{12}	0
u_{16}	u_9+u_{16}	u_1+u_2	u_{16}	u_3	u_6	0	u_{11}	0	u_9+u_{16}	$u_7+u_{10}+u_{15}$	u_{12}	$u_{15}+u_{16}$

Para α, β raízes tem-se $[L_\alpha, L_\beta] \hookrightarrow L_{\alpha+\beta}$. Em nossa álgebra temos igualdade como pode-se ver a continuação:

L_β \ L_α	s_1	s_2	s_3	s_4
p_1	q_2	q_1	q_4	q_3
p_2	q_1	0	0	0
p_3	q_4	0	0	q_1
p_4	q_3	0	q_1	0

Tabela 2.2: $\alpha = (0,1,0), \beta = (0,0,1)$

L_β \ L_α	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	p_2	0	0	0
q_2	p_1	p_2	p_3	p_4
q_3	p_4	0	p_2	0
q_4	p_3	0	0	p_2

Tabela 2.3: $\alpha = (0,1,1), \beta = (0,0,1)$

L_β \ L_α	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	0	b_1	0	0
a_2	b_1	b_2	b_4	b_3
a_3	0	b_3	b_1	0
a_4	0	b_4	0	b_1

Tabela 2.4: $\alpha = (1,0,0), \beta = (0,0,1)$

L_β \ L_α	s_1	s_2	s_3	s_4
b_1	0	a_1	0	0
b_2	a_1	a_2	a_4	a_3
b_3	0	a_3	a_1	0
b_4	0	a_4	0	a_1

Tabela 2.5: $\alpha = (1,0,1), \beta = (0,0,1)$

L_β \ L_α	s_1	s_2	s_3	s_4
c_1	d_1	d_2	d_3	d_4
c_2	d_2	d_1	d_3	d_4
c_3	d_4	d_4	$d_1 + d_2$	0
c_4	d_3	d_3	0	$d_1 + d_2$

Tabela 2.6: $\alpha = (1,1,0), \beta = (0,0,1)$

L_β \ L_α	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	c_1	c_2	c_4	c_3
d_2	c_2	c_1	c_4	c_3
d_3	c_4	c_4	0	$c_1 + c_2$
d_4	c_3	c_3	$c_1 + c_2$	0

Tabela 2.7: $\alpha = (1,1,1), \beta = (0,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	p_1	p_2	p_3	p_4
q_1	s_2	0	0	0
q_2	s_1	s_2	s_3	s_4
q_3	s_4	0	s_2	0
q_4	s_3	0	0	s_2

Tabela 2.8: $\alpha = (0,1,1), \beta = (0,1,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	p_1	p_2	p_3	p_4
a_1	c_1	$c_1 + c_2$	c_4	c_3
a_2	c_1	c_2	c_4	c_3
a_3	0	c_3	c_1	0
a_4	0	c_4	0	c_1

Tabela 2.9: $\alpha = (1,0,0), \beta = (0,1,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	p_1	p_2	p_3	p_4
b_1	d_1	$d_1 + d_2$	d_3	d_4
b_2	$d_1 + d_2$	d_1	d_3	d_4
b_3	d_4	d_4	d_2	0
b_4	d_3	d_3	0	d_2

Tabela 2.10: $\alpha = (1,0,1), \beta = (0,1,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	p_1	p_2	p_3	p_4
c_1	0	$a_1 + a_2$	0	0
c_2	$a_1 + a_2$	a_2	a_4	a_3
c_3	0	a_3	$a_1 + a_2$	0
c_4	0	a_4	0	$a_1 + a_2$

Tabela 2.11: $\alpha = (1,1,0), \beta = (0,1,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	p_1	p_2	p_3	p_4
d_1	b_1	b_2	b_4	b_3
d_2	$b_1 + b_2$	$b_1 + b_2$	0	0
d_3	b_4	b_4	0	$b_1 + b_2$
d_4	b_3	b_3	$b_1 + b_2$	0

Tabela 2.12: $\alpha = (1,1,1), \beta = (0,1,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	$d_1 + d_2$	d_1	d_4	d_3
a_2	d_1	0	0	0
a_3	d_4	0	0	d_1
a_4	d_3	0	d_1	0

Tabela 2.13: $\alpha = (1,0,0), \beta = (0,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	q_1	q_2	q_3	q_4
b_1	$c_1 + c_2$	c_1	c_3	c_4
b_2	c_2	c_2	0	0
b_3	c_3	c_3	0	c_2
b_4	c_4	c_4	c_2	0

Tabela 2.14: $\alpha = (1,0,1), \beta = (0,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	q_1	q_2	q_3	q_4
c_1	$b_1 + b_2$	b_1	b_3	b_4
c_2	b_2	b_2	0	0
c_3	b_3	b_3	0	b_2
c_4	b_4	b_4	b_2	0

Tabela 2.15: $\alpha = (1,1,0), \beta = (0,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	q_1	q_2	q_3	q_4
d_1	a_2	0	0	0
d_2	$a_1 + a_2$	a_2	a_3	a_4
d_3	a_4	0	a_2	0
d_4	a_3	0	0	a_2

Tabela 2.16: $\alpha = (1,1,1), \beta = (0,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	0	s_1	0	0
b_2	s_1	s_2	s_4	s_3
b_3	0	s_4	0	s_1
b_4	0	s_3	s_1	0

Tabela 2.17: $\alpha = (1,0,1), \beta = (1,0,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	a_1	a_2	a_3	a_4
c_1	p_1	p_1	0	0
c_2	$p_1 + p_2$	p_2	p_4	p_3
c_3	p_4	p_4	0	p_1
c_4	p_3	p_3	p_1	0

Tabela 2.18: $\alpha = (1,1,0), \beta = (1,0,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	a_1	a_2	a_3	a_4
d_1	q_2	0	0	0
d_2	$q_1 + q_2$	q_2	q_3	q_4
d_3	q_4	0	q_2	0
d_4	q_3	0	0	q_2

Tabela 2.19: $\alpha = (1,1,1), \beta = (1,0,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	q_2	$q_1 + q_2$	q_3	q_4
c_2	$q_1 + q_2$	0	0	0
c_3	q_3	0	0	$q_1 + q_2$
c_4	q_4	0	$q_1 + q_2$	0

Tabela 2.20: $\alpha = (1,1,0), \beta = (1,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	b_1	b_2	b_3	b_4
d_1	p_1	p_2	p_4	p_3
d_2	$p_1 + p_2$	$p_1 + p_2$	0	0
d_3	p_3	p_3	$p_1 + p_2$	0
d_4	p_4	p_4	0	$p_1 + p_2$

Tabela 2.21: $\alpha = (1,1,1), \beta = (1,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	c_1	c_2	c_3	c_4
d_1	s_1	s_2	s_4	s_3
d_2	s_2	s_1	s_4	s_3
d_3	s_4	s_4	0	$s_1 + s_2$
d_4	s_3	s_3	$s_1 + s_2$	0

Tabela 2.22: $\alpha = (1,1,1), \beta = (1,1,0)$

Seja $L^1 := \left\{\xi \in L_{28} \mid \xi^{[2]} \neq 0\right\}$ e L^0 denota o subespaço gerado por os elementos do seu complemento. Fácies cálculos mostram que para todo $\xi_1, \xi_2 \in L^1$, $[\xi_1, \xi_2] \in L^0$ e
$L^0 =< s_1, s_2, p_1, p_2, q_1, q_2, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 >$ é uma subálgebra de Lie simples não solúvel ($L^0 = \left[L^0, L^0\right]$) de dimensão 14. Também pode-se ver que as subálgebras $L_\alpha \oplus L_\alpha^2$ são solúveis, pois são abelianas.
Para toda raiz α, seja $S_\alpha := T \oplus L_\alpha$. S_α é uma 2-subálgebra de Lie de L e não é difícil ver que existe um isomorfismo φ de álgebras de Lie entre S_α e S_β. Inclusive, dito isomorfismo é um **2-homomorfismo de álgebras de Lie** , ou seja um homomorfismo de álgebras de Lie que satisfaz $\varphi(x^{[2]}) = \varphi(x)^{[2]}$, $\forall x \in S_\alpha$.

2.2 Álgebra de Lie de dimensão 28 Grishkov-Guerreiro

Seja G_{31} a 2-álgebra de Lie de dimensão 31 construída a continuação: Uma base B de L_{31} tem duas partes B_1 e B_2 tal que $|B_1| = 15$, $|B_2| = 16$ e
$B_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, f_4, t, h, m_{12}, m_2^3, m_{24}, m_1^3, m_2^4\}$
B_2 é o conjunto de partes de $I = \{1, 2, 3, 4\}\}$.
Vamos escrever $\sigma = ijkl$, $\sigma = ijk$, $\sigma = ij$, ou $\sigma = i$ para denotar $\sigma = \{i, j, k, l\}$, $\sigma = \{i, j, k\}$, $\sigma = \{i, j\}$, ou $\sigma = \{i\}$ respetivamente, para $i, j, k, l \in I$, e lembrando que não importa a ordem em que sejam colocados. Por exemplo o objeto 312 denota simplesmente o elemento $\{1, 2, 3\}$.
A multiplicação dos elementos da base são dados pela seguintes fórmulas:
$[t, h] = 0$, $[x, h] = 0$, $[x, t] = x$, para $x \in \{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$,
$[x, t] = [x, h] = 0$, para $x \in T = \{m_{12}, m_2^3, m_{24}, m_1^3, m_2^4\}$, $[T, T] = 0$,
$[\sigma, h] = \sigma$, $[\sigma, t] = |\sigma|\,\sigma$, para $\sigma \in B_2$,
$[f_i, f_j] = [e_i, e_j] = 0, \forall i, j \in I$, exceto um produto, que será $[f_1, f_2] = m_2^3$,
$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h, \forall i, j \in I$ exceto um produto, que será $[e_3, f_2] = m_{12}$,
Os produtos $[B_1, T]$, $[B_2, T]$ são dados por
$\left[f_1, m_1^3\right] = f_3$, $[f_2, m_{24}] = e_4$
$[f_1, m_{12}] = e_2$, $[f_4, m_{24}] = e_2$
$\left[f_2, m_2^3\right] = f_3$, $\left[e_3, m_1^3\right] = e_1$
$\left[f_2, m_2^4\right] = f_4$, $\left[e_3, m_2^3\right] = e_2$
$[f_2, m_{12}] = e_1$, $\left[e_4, m_2^4\right] = e_2$
$[\sigma, m_{ij}] = \sigma \setminus \{ij\}$, se $\{ij\} \subseteq \sigma$ para $\{ij\} \in \{\{12\}, \{24\}\}$,
$\left[\sigma, m_i^j\right] = (\sigma \cup j) \setminus i$ para $j \notin \sigma, i \in \sigma$,
e os outros produtos $[B_1, T]$, $[B_2, T]$ são iguais ao zero.
Além temos

$$[e_i, \sigma] = \begin{cases} \sigma \setminus i, & \text{se} \quad i \in \sigma; \\ 0, & \text{se} \quad i \notin \sigma. \end{cases},$$

$$[f_i, \sigma] = \begin{cases} \sigma \cup i, & \text{se} \quad i \notin \sigma; \\ 0, & \text{se} \quad i \in \sigma. \end{cases},$$

exceto dois produtos, que são $[f_2, 12] = 3$ e $[f_2, 124] = 34$.
Os produtos $[B_2, B_2]$ são dados por

$$[\sigma,\mu]=\begin{cases} f_i, & \text{se} \quad \sigma\cap\mu=i \quad \text{e} \quad \sigma\cup\mu=I; \\ e_i, & \text{se} \quad \sigma\cap\mu=\emptyset \quad \text{e} \quad \sigma\cup\mu=I\setminus i;, \\ t+|\sigma|\,h, & \text{se} \quad \sigma\cap\mu=\emptyset \quad \text{e} \quad \sigma\cup\mu=I. \end{cases}$$

exceto cinco produtos, que são $[12,24]=m_{12}$, $[2,124]=m_{12}$, $[12,124]=e_2$, $[12,I]=m_2^3$, $[123,124]=m_2^3$.
Os outros produtos $[B_2,B_2]$ são iguais ao zero.
Pode-se calcular que $f_2^{[2]}=m_1^3$, $(12)^{[2]}=m_{24}$, $(124)^{[2]}=m_2^4$, $t^{[2]}=t$, $h^{[2]}=h$, e $a^{[2]}=0$ para os outros $a\in B_1\cup B_2$.
Seja G_{28} a álgebra de Lie gerada por $B\setminus\{m_{24},m_1^3,m_2^4\}$ sendo B a base definida anteriormente; note que G_{31} é o 2-fecho de G_{28} e $G_{28}=[G_{31},G_{31}]$.
$Ann_{G_{28}}(y)$ e $I_{G_{31}}(y)$ definidas como no capítulo anterior.

Vamos agora decompor a álgebra de Lie G_{31} assim: $G_{31}=T\oplus Ann_{G_{28}}(y)\oplus I_{G_{31}}(y)$, onde $T:=<t_1,t_2,t_3>$ será uma subálgebra toroidal de G_{31}; A escolha de y foi feita tal que satisfaz $y^{[2]}=y$ e esteja fora de G_{28}; $y:=t+h+f_2+m_1^3$ satisfaz os requisitos. Agora vamos encontrar bases para $Ann_{G_{28}}(y)$ e $I_{G_{31}}(y)$:

l	$[l,y]$	$[l,y]+l$	l	$[l,y]$	$[l,y]+l$
e_1	e_1	0	13	$13+123$	123
e_2	e_2+h	h	14	$14+34+124$	$34+124$
e_3	$e_1+e_3+m_{12}$	e_1+m_{12}	23	23	0
e_4	e_4	0	24	24	0
f_1	$f_1+f_3+m_2^3$	$f_3+m_2^3$	34	$34+234$	234
f_2	f_2	0	123	0	123
f_3	f_3	0	124	$34+234$	$34+124+234$
f_4	f_4	0	134	I	$134+I$
h	0	h	234	0	234
t	f_2	f_2+t	I	I	0
$\emptyset$	$2+\emptyset$	2	m_{12}	e_1	e_1+m_{12}
1	$3+12$	$1+3+12$	m_2^3	f_3	$f_3+m_2^3$
2	0	2	m_{24}	e_4	e_4+m_{24}
3	23	$3+23$	m_2^4	f_4	$f_4+m_2^4$
4	24	$4+24$	m_1^3	0	m_1^3
12	$3+12+23$	$3+23$			

Da tabua, fazemos $x:=m_1^3$, $z:=e_4+m_{24}$ e $v:=f_4+m_2^4$ (note que eles comutam com y) e escolhemos elementos linearmente independentes para $Ann_{G_{28}}(y)$ e para $I_{G_{31}}(y)$, à saber $\{u_1,\ldots,u_{16}\}$ e $\{w_1,\ldots,w_{12}\}$, respetivamente, onde o valor de cada u_i,w_i fica explícito comparando a tabua anterior como a seguinte:

l	$[l,y]$	$[l,y]+l$	l	$[l,y]$	$[l,y]+l$
e_1	$u_2+u_7+u_{10}$	w_2	13	$u_8+u_9+u_{15}$	w_9+w_{10}
e_2	u_1	0	14	$u_1+u_2+u_7+u_{10}$	$w_1+w_2+w_3+w_9+w_{10}+w_{12}$
e_3	u_{13}	w_8	23	u_7	$w_1+w_{10}+w_{12}$
e_4	u_3	w_4	24	u_1+u_2	w_2
f_1	u_9	w_1	34	u_{12}	w_{11}
f_2	u_{15}	w_{12}	123	$u_1+u_2+u_7$	w_2
f_3	u_6	w_5	124	u_2	0
f_4	u_{14}	w_6	134	$u_3+u_4+u_{12}+u_{13}$	w_4+w_8
h	u_7	$w_{10}+w_{12}$	234	u_3+u_4	w_4
t	u_{10}	w_3	I	0	w_4
$\emptyset$	u_{11}	w_7	m_{13}	u_5	w_6
1	$u_5+u_6+u_{11}+u_{14}$	w_5+w_6	m_1^4	u_4	w_8
2	u_5+u_6	w_5	m_{12}	u_8	z
3	$u_8+u_9+u_{15}$	w_1+w_{12}	m_1^2	u_1	x
4	u_{16}	w_1+w_9	m_3^4	u_2	w_2+w_3+x+y
12	0	w_5			

Ou seja,

$u_1=f_2$	$u_9=e_2+h$	$w_1=h$	$w_9=134+I$
$u_2=f_3$	$u_{10}=\emptyset+2$	$w_2=2$	$w_{10}=e_1+m_{12}$
$u_3=f_4$	$u_{11}=3+12$	$w_3=123$	$w_{11}=f_3+m_2^3$
$u_4=e_1$	$u_{12}=13+123$	$w_4=234$	$w_{12}=1+3+12$
$u_5=e_4$	$u_{13}=34+234$	$w_5=f_2+t$	$x=m_1^3$
$u_6=23$	$u_{14}=14+34+124$	$w_6=3+23$	$z=e_4+m_{24}$
$u_7=24$	$u_{15}=f_1+f_3+m_2^3$	$w_7=4+24$	$v=f_4+m_2^4$
$u_8=I$	$u_{16}=e_1+e_3+m_{12}$	$w_8=34+124$	$y=w_1+w_5+x$

$Ann_{G_{28}}(y)$ é uma subálgebra de Lie de G_{31} como pode ser visto na tabela de seus produtos:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}
w_1	0	w_2	w_3	w_4	0	w_6	w_7	w_8	w_9	0	0	w_{12}
w_2		0	0	0	w_2	0	0	w_{10}	$w_1 + w_5$	0	w_6	0
w_3			0	0	w_3	0	$w_1 + w_5$	w_{11}	0	w_6	0	0
w_4				0	w_4	0	0	0	0	0	0	$w_1 + w_5$
w_5					0	w_6	w_7	$w_4 + w_8$	w_9	0	0	$w_6 + w_{12}$
w_6						0	0	$w_1 + w_5$	0	0	0	0
w_7							0	0	0	0	w_4	w_{10}
w_8								0	0	w_7	w_9	w_1
w_9									0	w_4	0	w_{11}
w_{10}										0	0	w_2
w_{11}											0	w_3
w_{12}												0

Observe que dita subálgebra de Lie não é solúvel já que $Ann_{G_{28}}(y)' = Ann_{G_{28}}(y)$

Para encontrar os elementos t_2, t_3 faltantes (já que fazemos $t_1 := y$), precisamos então que estejam fora de G_{28}, satisfaziam $t_2^{[2]} = t_2$, $t_3^{[2]} = t_3$ e comutem. Como eles precisam comutar com t_1, combinações dos seguintes resultados junto como os da tábua anterior podem ajudar-nos para encontrar candidatos.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	x	z	v
x	0				0			w_4				w_6	0	0	0
z	0	0	0	w_6	0	0	w_2	w_{12}	w_3	0	0	0	0	0	w_1
v	0	w_7	w_9	0	0	w_4	0	0	0	0	0	w_8	0	w_1	0

Além que $w_1^{[2]} = w_1, w_5^{[2]} = w_5 + x, w_8^{[2]} = v, w_{12}^{[2]} = z$ e os outros elementos (w_i,x,z e v) são zero sob a 2-aplicação.

De fato, nos encontramos eles; estes podem ser:
$t_2 := w_1 + w_8 + v$
$t_3 := w_1 + w_{12} + z$

De igual forma que antes, se $l \in Ann_{G_{28}}(y)$, $l = l + [t_2, l] + [t_2, l]$, com $l + [t_2, l] \in Ann_{Ann_{G_{28}}(y)}(t_2)$ e $[t_2, l] \in I_{Ann_{G_{28}}(y)}(t_2)$. Assim

$Ann_{G_{28}}(y) = Ann_{Ann_{G_{28}}}(t_2) \oplus I_{Ann_{G_{28}}}(t_2)$. Se $l \in I_{G_{31}}(y)$ temos uma decomposição em subespaços análoga.
Para suavizar um pouco a notação, de agora em diante vamos a denotar por

$L_{(ij)} = \{\xi \in G_{28} \mid [t_1, \xi] = i\xi, [t_2, \xi] = j\xi\}$ com $i, j \in \mathbb{Z}_2$.
Assim por exemplo, as decomposições q mencionamos acima ficam

$Ann_{G_{28}}(y) = L_{(00)} \oplus L_{(01)}$,
$I_{G_{28}}(y) = L_{(10)} \oplus L_{(11)}$.

Procedemos achar bases para estes subespaços de igual forma que fizemos para $Ann_{G_{28}}(y)$ e $I_{G_{28}}(y)$.
Começamos com encontrar bases para $L_{(00)}$ e $L_{(01)}$:

l	$[l,t_2]$	$[l,t_2]+l$
w_1	w_8	w_1+w_8
w_2	$w_2+w_7+w_{10}$	w_7+w_{10}
w_3	$w_3+w_9+w_{11}$	w_9+w_{11}
w_4	w_4	0
w_5	w_4+w_8	$w_4+w_5+w_8$
w_6	$w_1+w_4+w_5+w_6$	$w_1+w_4+w_5$
w_7	w_7	0
w_8	w_8	0
w_9	w_9	0
w_{10}	w_7	w_7+w_{10}
w_{11}	w_9	w_9+w_{11}
w_{12}	$w_1+w_8+w_{12}$	w_1+w_8

Base para $L_{(00)} =< w_1+w_8, w_7+w_{10}, w_9+w_{11}, w_1+w_4+w_5 >$
Base para $L_{(01)} =< w_4, w_7, w_8, w_9, w_2+w_7+w_{10}, w_1+w_8+w_{12}, w_3+w_9+w_{11}, w_1+w_4+w_5+w_6 >$

Como T é uma subálgebra de Cartan de G_{31}, então os únicos elementos que estão no comutador de T em G_{31} são precisamente os elementos de T e por tanto $L_{(00)}$ é precisamente o espaço próprio da raiz (0,0,1), isto é
$L_{(00)} = \{\xi \in L_{31} \mid [t_1,\xi]=0, [t_2,\xi]=0, [t_3,\xi]=\xi\} = L_{(0,0,1)}$
e $L_{(01)}$ vai-se decompor novamente em 2 subespaços, à saber $L_{(0,1,0)}$ e $L_{(0,1,1)}$

l	$[l, t_3]$	$[l, t_3] + l$
w_4	$w_1 + w_4 + w_5 + w_6$	$w_1 + w_5 + w_6$
w_7	$w_2 + w_7 + w_{10}$	$w_2 + w_{10}$
w_8	$w_1 + w_8 + w_{12}$	$w_1 + w_{12}$
w_9	$w_3 + w_9 + w_{11}$	$w_3 + w_{11}$
$w_2 + w_7 + w_{10}$	$w_2 + w_7 + w_{10}$	0
$w_1 + w_8 + w_{12}$	$w_1 + w_8 + w_{12}$	0
$w_3 + w_9 + w_{11}$	$w_3 + w_9 + w_{11}$	0
$w_1 + w_4 + w_5 + w_6$	$w_1 + w_4 + w_5 + w_6$	0

Assim
$L_{(0,1,1)} =< w_2 + w_7 + w_{10}, w_1 + w_8 + w_{12}, w_3 + w_9 + w_{11}, w_1 + w_4 + w_5 + w_6 >$
$L_{(0,1,0)} =< w_2 + w_{10}, w_1 + w_{12}, w_3 + w_{11}, w_1 + w_5 + w_6 >$

Procedemos a encontrar bases para $L_{(10)}$ e $L_{(11)}$:

l	$[l, t_2]$	$[l, t_2] + l$
u_1	$u_3 + u_{13}$	$u_1 + u_3 + u_{13}$
u_2	u_8	$u_2 + u_8$
u_3	0	u_3
u_4	u_7	$u_4 + u_7$
u_5	$u_9 + u_{11}$	$u_5 + u_9 + u_{11}$
u_6	$u_1 + u_6 + u_{13}$	$u_1 + u_{13}$
u_7	u_7	0
u_8	u_8	0
u_9	u_{14}	$u_9 + u_{14}$
u_{10}	$u_7 + u_{10} + u_{16}$	$u_7 + u_{16}$
u_{11}	$u_9 + u_{11} + u_{14}$	$u_9 + u_{14}$
u_{12}	$u_8 + u_{12} + u_{15}$	$u_8 + u_{15}$
u_{13}	$u_3 + u_{13}$	u_3
u_{14}	u_{14}	0
u_{15}	u_8	$u_8 + u_{15}$
u_{16}	u_7	$u_7 + u_{16}$

Base para $L_{(11)} =< u_7, u_8, u_{14}, u_3 + u_{13}, u_9 + u_{11}, u_1 + u_6 + u_{13}, u_7 + u_{10} + u_{16}, u_8 + u_{12} + u_{15} >$

Base para $L_{(10)} =< u_3, u_2 + u_8, u_4 + u_7, u_1 + u_{13}, u_7 + u_{16}, u_8 + u_{15}, u_9 + u_{14}, u_5 + u_9 + u_{11} >$

$L_{(11)}$ vai-se decompor em 2 subespaços, à saber $L_{(1,1,0)}$ e $L_{(1,1,1)}$

l	$[l, t_3]$	$[l, t_3] + l$
u_7	$u_7 + u_{10} + u_{16}$	$u_{10} + u_{16}$
u_8	$u_8 + u_{12} + u_{15}$	$u_{12} + u_{15}$
u_{14}	$u_9 + u_{11} + u_{14}$	$u_9 + u_{11}$
$u_3 + u_{13}$	$u_1 + u_6 + u_{13} + u_{14}$	$u_1 + u_3 + u_6 + u_{14}$
$u_9 + u_{11}$	0	$u_9 + u_{11}$
$u_1 + u_6 + u_{13}$	$u_1 + u_6 + u_9 + u_{11} + u_{13}$	$u_9 + u_{11}$
$u_7 + u_{10} + u_{16}$	$u_7 + u_{10} + u_{16}$	0
$u_8 + u_{12} + u_{15}$	$u_8 + u_{12} + u_{15}$	0

Assim
$L_{(1,1,1)} =< u_7 + u_{10} + u_{16}, u_8 + u_{12} + u_{15}, u_9 + u_{11} + u_{14}, u_1 + u_6 + u_{13} + u_{14} >$
$L_{(1,1,0)} =< u_9 + u_{11}, u_{10} + u_{16}, u_{12} + u_{15}, u_1 + u_3 + u_6 + u_{14} >$

$L_{(10)}$ vai-se decompor em 2 subespaços, à saber $L_{(1,0,1)}$ e $L_{(1,0,0)}$

l	$[l, t_3]$	$[l, t_3] + l$
u_3	$u_9 + u_{14}$	$u_3 + u_9 + u_{14}$
$u_2 + u_8$	$u_8 + u_{15}$	$u_2 + u_{15}$
$u_4 + u_7$	$u_7 + u_{16}$	$u_4 + u_{16}$
$u_1 + u_{13}$	$u_1 + u_5 + u_9 + u_{11} + u_{13}$	$u_5 + u_9 + u_{11}$
$u_7 + u_{16}$	$u_7 + u_{16}$	0
$u_8 + u_{15}$	$u_8 + u_{15}$	0
$u_9 + u_{14}$	$u_9 + u_{14}$	0
$u_5 + u_9 + u_{11}$	0	$u_5 + u_9 + u_{11}$

$L_{(1,0,1)} =< u_7 + u_{16}, u_8 + u_{15}, u_9 + u_{14}, u_1 + u_5 + u_9 + u_{11} + u_{13} >$
$L_{(1,0,0)} =< u_2 + u_{15}, u_4 + u_{16}, u_3 + u_9 + u_{14}, u_5 + u_9 + u_{11} >$
Seja α uma raiz. Denotemos por L_α^2 o conjunto $\left\{x_\alpha^{[2]} \mid x_\alpha \in L_\alpha\right\}$. Note que $L_\alpha^2 \subseteq T$ pois $0 = \alpha(t)\,[x_\alpha, x_\alpha] = \left[t, x_\alpha^{[2]}\right]$ para todo $t \in T$ e assim $x_\alpha^{[2]} \in Z(T) = T$. Ainda mais, sabemos que α é um elemento de T^*, o dual de T, e $L_\alpha^2 \subseteq Ker\,(\alpha)$ ja que para cada $y_\alpha \in L_\alpha$ diferente de zero, tem-se $0 = [[y_\alpha, x_\alpha], x_\alpha] = \left[y_\alpha, x_\alpha^{[2]}\right] = \alpha\left(x_\alpha^{[2]}\right) y_\alpha$, e assim $\alpha\left(x_\alpha^{[2]}\right) = 0$.
Vamos a calcular L_α^2 (basta calcular nos elementos da base de L_α) e para isso precisamos dos

produtos dos elementos de $I_{G_{31}}(y)$:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
u_1	0	0	0	0	0	0	0	0	w_1	w_2
u_2		0	0	0	0	0	w_4	0	0	w_6
u_3			0	0	w_1	w_4	0	0	0	w_7
u_4				0	0	0	0	w_4	0	0
u_5					0	0	w_2	w_3	0	0
u_6						0	0	0	w_6	0
u_7							0	0	w_7	0
u_8								0	w_9	w_5
u_9									0	w_2
u_{10}										0

	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}
u_1	w_6	w_3	w_4	w_4+w_8	w_{11}	w_{10}
u_2	w_3	0	0	w_9	0	w_1
u_3	w_8	w_9	0	0	0	0
u_4	w_2	w_6	0	w_7	w_1	0
u_5	0	0	w_6	w_{12}	0	0
u_6	0	0	0	w_5	w_3	w_2
u_7	w_{10}	w_5	0	0	w_4+w_8	0
u_8	w_{11}	0	0	0	0	w_4+w_8
u_9	w_{12}	w_3	w_4	w_8	0	0
u_{10}	0	0	0	w_{10}	w_6+w_{12}	0
u_{11}	0	0	w_5	w_1	w_3	w_2
u_{12}		0	0	w_{11}	0	w_6+w_{12}
u_{13}			0	0	w_9	w_7
u_{14}				0	w_9	w_7
u_{15}					0	0
u_{16}						0

Para suavizar a notação, vamos a renomear também os elementos segundo quais sob a 2-aplicação são zero e quais não:

Para $\alpha = (0, 0, 1)$:
$(s_1 := w_1 + w_8)^{[2]} = w_1 + v + w_8 = t_2$,
$(s_2 := w_1 + w_4 + w_5)^{[2]} = w_1 + w_5 + x + w_4 + w_4 = t_1$,
$(s_3 := w_7 + w_{10})^{[2]} = 0$,
$(s_4 := w_9 + w_{11})^{[2]} = 0$. Obtemos $L^2_\alpha =< t_1, t_2 >$

Para $\alpha = (0,1,0)$:
$(p_1 := w_1 + w_{12})^{[2]} = w_1 + z + w_{12} = t_3$,
$(p_2 := w_1 + w_5 + w_6)^{[2]} = w_1 + w_5 + x + w_6 + w_6 = t_1$,
$(p_3 := w_2 + w_{10})^{[2]} = 0$,
$(p_4 := w_3 + w_{11})^{[2]} = 0$. Obtemos $L^2_\alpha =< t_1, t_3 >$

Para $\alpha = (0,1,1)$:
$(q_1 := w_1 + w_4 + w_5 + w_6)^{[2]} = t_1$,
$(q_2 := w_1 + w_8 + w_{12})^{[2]} = w_1 + v + z + w_8 + w_{12} + w_1 = t_2 + t_3$,
$(q_3 := w_3 + w_9 + w_{11})^{[2]} = 0$,
$(q_4 := w_2 + w_7 + w_{10})^{[2]} = 0$. Obtemos $L^2_\alpha =< t_1, t_2 + t_3 >$

Para $\alpha = (1,0,0)$:
$(a_1 := u_3 + u_9 + u_{14})^{[2]} = w_1 + v + w_8 = t_2$,
$(a_2 := u_5 + u_9 + u_{11})^{[2]} = w_1 + z + w_{12} = t_3$,
$(a_3 := u_2 + u_{15})^{[2]} = 0$,
$(a_4 := u_4 + u_{16})^{[2]} = 0$. Obtemos $L^2_\alpha =< t_2, t_3 >$

Para $\alpha = (1,0,1)$:
$(b_1 := u_9 + u_{14})^{[2]} = w_1 + v + w_8 = t_2$,
$(b_2 := u_1 + u_5 + u_9 + u_{11} + u_{13})^{[2]} = x + w_1 + z + w_1 + w_6 + w_4 + w_6 + w_{12} + w_4 + w_5 = t_1 + +t_3$,
$(b_3 := u_8 + u_{15})^{[2]} = 0$,
$(b_4 := u_7 + u_{16})^{[2]} = 0$. Obtemos $L^2_\alpha =< t_2, t_1 + t_3 >$

Para $\alpha = (1,1,0)$:
$(c_1 := u_9 + u_{11})^{[2]} = w_1 + z + w_{12} = t_3$,
$(c_2 := u_1 + u_3 + u_6 + u_{14})^{[2]} = x + v + w_4 + w_8 + w_4 + w_5 = t_1 + t_2$,
$(c_3 := u_{10} + u_{16})^{[2]} = 0$,
$(c_4 := u_{12} + u_{15})^{[2]} = 0$. Obtemos $L^2_\alpha =< t_3, t_1 + t_2 >$

Para $\alpha = (1,1,1)$:
$(d_1 := u_9 + u_{11} + u_{14})^{[2]} = t_3 + vw_8 + w_1 = t_3 + t_2$,
$(d_2 := u_1 + u_6 + u_{13} + u_{14})^{[2]} = x + v + w_4 + w_4 + w_8 + w_5 = t_1 + t_2$,
$(d_3 := u_7 + u_{10} + u_{16})^{[2]} = 0$,
$(d_4 := u_8 + u_{12} + u_{15})^{[2]} = 0$. Obtemos $L^2_\alpha =< t_1 + t_2, t_2 + t_3 >$

Proposição 2.2.1. $L_\alpha^2 = Ker\,(\alpha)$

Demonstração. Sabemos que $\forall\alpha, L_\alpha^2 \subseteq Ker\,(\alpha)$, mas neste caso temos igualdade $L_\alpha^2 = Ker\,(\alpha)$, já que $dimKer\,(\alpha) = dimT - dimIm\,(\alpha) = 3 - 1 = 2$. □

Com os produtos faltantes dos elementos nesta base, podemos verificar mais umas propriedades nesta Álgebra.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}
u_1	0	0	0	0	u_1	u_6	u_7	u_{13}	u_8	u_4	u_2	u_6+u_{11}
u_2	0	u_6	0	0	u_2	0	u_{13}	u_8	0	0	0	u_{12}
u_3	0	u_7	u_8	0	u_3	u_{13}	0	0	0	0	0	u_{14}
u_4	0	0	u_6	0	u_4	0	0	u_7	u_{13}	0	0	u_{10}
u_5	0	0	0	u_6	u_5	0	u_{10}	u_{11}	u_{12}	0	0	0
u_6	u_6	0	0	0	0	0	u_4	u_1	u_2	0	0	u_5
u_7	u_7	0	u_1	0	0	u_4	0	0	u_3	0	u_{13}	u_{16}
u_8	u_8	u_1	0	0	0	u_2	u_3	0	0	u_{13}	0	u_{15}
u_9	0	u_{10}	u_{12}	u_{13}	u_9	u_6	u_7	u_{14}	u_8	0	0	u_{11}
u_{10}	u_{10}	0	u_5	u_4	0	0	0	u_{16}	u_1+u_9	0	u_6	0
u_{11}	u_{11}	0	0	u_1	u_6	u_5	u_{16}	u_9	u_{15}	u_{10}	u_{12}	0
u_{12}	u_{12}	u_5	0	u_2	0	0	u_1+u_9	u_{15}	0	u_6	0	0
u_{13}	u_{13}	u_4	u_2	0	0	0	0	u_3	0	0	0	u_1+u_9
u_{14}	u_{14}	u_{16}	u_{15}	u_3	u_{13}	u_1+u_9	0	0	0	u_7	u_8	u_9
u_{15}	0	u_6+u_{11}	0	u_8	u_2+u_{15}	u_{12}	$u_{13}+u_{14}$	u_8	0	u_9	0	u_{12}
u_{16}	0	0	u_6+u_{11}	u_7	u_4+u_{16}	u_{10}	0	u_7	$u_{13}+u_{14}$	0	u_9	u_{10}

Para α, β raízes tem-se $[L_\alpha, L_\beta] \hookrightarrow L_{\alpha+\beta}$. Em nossa álgebra temos igualdade como pode-se ver a continuação

$L_\beta \backslash L_\alpha$	s_1	s_2	s_3	s_4
p_1	q_2	q_1	q_4	q_3
p_2	q_1	0	0	0
p_3	q_4	0	0	q_1
p_4	q_3	0	q_1	0

Tabela 2.23: $\alpha = (0,0,1)), \beta = (0,1,0$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	p_2	0	0	0
q_2	p_1	p_2	p_3	p_4
q_3	p_4	0	p_2	0
q_4	p_3	0	0	p_2

Tabela 2.24: $\alpha = (0,0,1), \beta = (0,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	0	b_1	0	0
a_2	b_1	b_2	b_4	b_3
a_3	0	b_3	b_1	0
a_4	0	b_4	0	b_1

Tabela 2.25: $\alpha = (0,0,1), \beta = (1,0,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	s_1	s_2	s_3	s_4
b_1	0	a_1	0	0
b_2	a_1	a_2	a_4	a_3
b_3	0	a_3	a_1	0
b_4	0	a_4	0	a_1

Tabela 2.26: $\alpha = (0,0,1), \beta = (1,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	s_1	s_2	s_3	s_4
c_1	d_1	$d_1 + d_2$	d_3	d_4
c_2	d_2	d_2	d_3	d_4
c_3	d_3	d_3	0	d_2
c_4	d_4	d_4	d_2	0

Tabela 2.27: $\alpha = (0,0,1), \beta = (1,1,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	c_1	$c_1 + c_2$	c_3	c_4
d_2	c_2	c_2	0	0
d_3	c_3	c_3	0	c_2
d_4	c_4	c_4	c_2	0

Tabela 2.28: $\alpha = (0,0,1), \beta = (1,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	p_1	p_2	p_3	p_4
q_1	s_2	0	0	0
q_2	s_1	s_2	s_3	s_4
q_3	s_4	0	s_2	0
q_4	s_3	0	0	s_2

Tabela 2.29: $\alpha = (0,1,0), \beta = (0,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	p_1	p_2	p_3	p_4
a_1	c_1	c_2	c_3	c_4
a_2	0	c_1	0	0
a_3	0	c_4	c_1	0
a_4	0	c_3	0	c_1

Tabela 2.30: $\alpha = (0,1,0), \beta = (1,0,0)$

L_β \ L_α	p_1	p_2	p_3	p_4
b_1	d_1	d_2	d_3	d_4
b_2	d_1+d_2	d_1+d_2	0	0
b_3	d_4	d_4	d_1+d_2	0
b_4	d_3	d_3	0	d_1+d_2

Tabela 2.31: $\alpha = (0,1,0), \beta = (1,0,1)$

L_β \ L_α	p_1	p_2	p_3	p_4
c_1	0	a_2	0	0
c_2	a_2	a_1	0	a_3
c_3	0	a_4	a_4	a_2
c_4	0	a_3	a_2	0

Tabela 2.32: $\alpha = (0,1,0), \beta = (1,1,0)$

L_β \ L_α	p_1	p_2	p_3	p_4
d_1	b_1	b_1+b_2	b_4	b_3
d_2	b_1+b_2	b_1	b_4	b_3
d_3	b_4	b_4	0	b_2
d_4	b_3	b_3	b_2	0

Tabela 2.33: $\alpha = (0,1,0), \beta = (1,1,1)$

L_β \ L_α	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	d_2	d_1	d_4	d_3
a_2	d_1+d_2	d_1	d_4	d_3
a_3	d_4	0	0	d_1
a_4	d_3	0	d_1	0

Tabela 2.34: $\alpha = (0,1,1), \beta = (1,0,0)$

L_β \ L_α	q_1	q_2	q_3	q_4
b_1	c_2	c_1	c_4	c_3
b_2	c_1	c_2	c_4	c_3
b_3	c_4	c_4	0	c_1+c_2
b_4	c_3	c_3	c_1+c_2	0

Tabela 2.35: $\alpha = (0,1,1), \beta = (1,0,1)$

L_β \ L_α	q_1	q_2	q_3	q_4
c_1	b_2	b_1	b_3	b_4
c_2	b_1	b_2	b_3	b_4
c_3	b_4	b_4	b_1+b_2	b_4
c_4	b_3	b_3	0	b_1+b_2

Tabela 2.36: $\alpha = (0,1,1), \beta = (1,1,0)$

L_β \ L_α	q_1	q_2	q_3	q_4
d_1	a_1+a_2	0	0	0
d_2	a_1	a_1+a_2	a_3	a_4
d_3	a_4	0	a_1+a_2	0
d_4	a_3	0	0	a_1+a_2

Tabela 2.37: $\alpha = (0,1,1), \beta = (1,1,1)$

L_β \ L_α	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	0	s_1	0	0
b_2	s_1	s_2	s_4	s_3
b_3	0	s_4	0	s_1
b_4	0	s_3	s_1	0

Tabela 2.38: $\alpha = (1,0,0), \beta = (1,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	a_1	a_2	a_3	a_4
c_1	p_1	0	0	0
c_2	p_2	p_1	p_4	p_3
c_3	p_3	0	p_1	0
c_4	p_4	0	0	p_1

Tabela 2.39: $\alpha = (1,0,0), \beta = (1,1,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	a_1	a_2	a_3	a_4
d_1	q_2	q_2	0	0
d_2	q_1	q_1+q_2	q_3	q_4
d_3	q_4	q_4	q_2	0
d_4	q_3	q_3	0	q_2

Tabela 2.40: $\alpha = (1,0,0), \beta = (1,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	q_2	q_1	q_3	q_4
c_2	q_1	q_2	q_3	q_4
c_3	q_4	q_4	q_1+q_2	0
c_4	q_3	q_3	0	q_1+q_2

Tabela 2.41: $\alpha = (1,0,1), \beta = (1,1,0)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	b_1	b_2	b_3	b_4
d_1	p_1	p_1+p_2	p_4	p_3
d_2	p_2	p_1+p_2	p_4	p_3
d_3	p_3	0	p_1+p_2	0
d_4	p_4	0	0	p_1+p_2

Tabela 2.42: $\alpha = (1,0,1), \beta = (1,1,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	c_1	c_2	c_3	c_4
d_1	s_1	s_1+s_2	s_3	s_4
d_2	s_1+s_2	0	0	0
d_3	s_3	0	0	s_1+s_2
d_4	s_4	0	s_1+s_2	0

Tabela 2.43: $\alpha = (1,1,0), \beta = (1,1,1)$

Precisamos então um 2-isomorfismo ϕ de álgebras de Lie entre L_{28} e G_{28}. Comparando as tabelas das duas álgebras e lembrando que deve-se satisfazer a propriedade $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, fica difícil e tedioso definir a função ϕ. So da pra ver que ás duas subálgebras
$< w_1, \ldots, w_{12} >$ são isomorfas, já que a propriedade $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ fica fácil de verificar (observando as tabelas) nos elementos das suas bases $\{s_1, s_2, s_3, s_4, p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4\}$.
Pra corrigir este, vamos mudar a base da álgebra G_{28} assim:
$S_i := s_i$, $P_i := p_i$, $Q_i := q_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$
$A_i := a_i$, $B_i := b_i$, $D_i := d_i$ para $i = 1, 3, 4$ e $A_2 := a_1 + a_2$, $B_2 := b_1 + b_2$, $D_2 := d_1 + d_2$
$C_1 := c_1$, $C_2 := c_1 + c_2$, $C_3 := c_4$ y $C_4 := c_3$.
Assim podemos comprovar que as tabelas ficam:

$L_\beta \backslash L_\alpha$	S_1	S_2	S_3	S_4
P_1	Q_2	Q_1	Q_4	Q_3
P_2	Q_1	0	0	0
P_3	Q_4	0	0	Q_1
P_4	Q_3	0	Q_1	0

Tabela 2.44: $\alpha = (0,1,0), \beta = (0,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	S_1	S_2	S_3	S_4
B_1	0	A_1	0	0
B_2	A_1	A_2	A_4	A_3
B_3	0	A_3	A_1	0
B_4	0	A_4	0	A_1

Tabela 2.47: $\alpha = (1,0,1), \beta = (0,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	S_1	S_2	S_3	S_4
Q_1	P_2	0	0	0
Q_2	P_1	P_2	P_3	P_4
Q_3	P_4	0	P_2	0
Q_4	P_3	0	0	P_2

Tabela 2.45: $\alpha = (0,1,1), \beta = (0,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	S_1	S_2	S_3	S_4
C_1	D_1	D_2	D_3	D_4
C_2	D_2	D_1	D_3	D_4
C_3	D_4	D_4	$D_1 + D_2$	0
C_4	D_3	D_3	0	$D_1 + D_2$

Tabela 2.48: $\alpha = (1,1,0), \beta = (0,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	0	B_1	0	0
A_2	B_1	B_2	B_4	B_3
A_3	0	B_3	B_1	0
A_4	0	B_4	0	B_1

Tabela 2.46: $\alpha = (1,0,0), \beta = (0,0,1)$

$L_\beta \backslash L_\alpha$	S_1	S_2	S_3	S_4
D_1	C_1	C_2	C_4	C_3
D_2	C_2	C_1	C_4	C_3
D_3	C_4	C_4	0	$C_1 + C_2$
D_4	C_3	C_3	$C_1 + C_2$	0

Tabela 2.49: $\alpha = (1,1,1), \beta = (0,0,1)$

L_β \ L_α	P_1	P_2	P_3	P_4
Q_1	S_2	0	0	0
Q_2	S_1	S_2	S_3	S_4
Q_3	S_4	0	S_2	0
Q_4	S_3	0	0	S_2

Tabela 2.50: $\alpha = (0,1,1), \beta = (0,1,0)$

L_β \ L_α	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	C_1	C_1+C_2	C_4	C_3
A_2	C_1	C_2	C_4	C_3
A_3	0	C_3	C_1	0
A_4	0	C_4	0	C_1

Tabela 2.51: $\alpha = (1,0,0), \beta = (0,1,0)$

L_β \ L_α	P_1	P_2	P_3	P_4
B_1	D_1	D_1+D_2	D_3	D_4
B_2	D_1+D_2	D_1	D_3	D_4
B_3	D_4	D_4	D_2	0
B_4	D_3	D_3	0	D_2

Tabela 2.52: $\alpha = (1,0,1), \beta = (0,1,0)$

L_β \ L_α	P_1	P_2	P_3	P_4
C_1	0	A_1+A_2	0	0
C_2	A_1+A_2	A_2	A_4	A_3
C_3	0	A_3	A_1+A_2	0
C_4	0	A_4	0	A_1+A_2

Tabela 2.53: $\alpha = (1,1,0), \beta = (0,1,0)$

L_β \ L_α	P_1	P_2	P_3	P_4
D_1	B_1	B_2	B_4	B_3
D_2	B_1+B_2	B_1+B_2	0	0
D_3	B_4	B_4	0	B_1+B_2
D_4	B_3	B_3	B_1+B_2	0

Tabela 2.54: $\alpha = (1,1,1), \beta = (0,1,0)$

L_β \ L_α	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
A_1	D_1+D_2	D_1	D_4	D_3
A_2	D_1	0	0	0
A_3	D_4	0	0	D_1
A_4	D_3	0	D_1	0

Tabela 2.55: $\alpha = (1,0,0), \beta = (0,1,1)$

L_β \ L_α	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
B_1	C_1+C_2	C_1	C_3	C_4
B_2	C_2	C_2	0	0
B_3	C_3	C_3	0	C_2
B_4	C_4	C_4	C_2	0

Tabela 2.56: $\alpha = (1, 0, 1), \beta = (0, 1, 1)$

L_β \ L_α	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
C_1	B_1+B_2	B_1	B_3	B_4
C_2	B_2	B_2	0	0
C_3	B_3	B_3	0	B_2
C_4	B_4	B_4	B_2	0

Tabela 2.57: $\alpha = (1, 1, 0), \beta = (0, 1, 1)$

L_β \ L_α	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
D_1	A_2	0	0	0
D_2	A_1+A_2	A_2	A_3	A_4
D_3	A_4	0	A_2	0
D_4	A_3	0	0	A_2

Tabela 2.58: $\alpha = (1, 1, 1), \beta = (0, 1, 1)$

L_β \ L_α	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	0	S_1	0	0
B_2	S_1	S_2	S_4	S_3
B_3	0	S_4	0	S_1
B_4	0	S_3	S_1	0

Tabela 2.59: $\alpha = (1, 0, 1), \beta = (1, 0, 0)$

L_β \ L_α	A_1	A_2	A_3	A_4
C_1	P_1	P_1	0	0
C_2	P_1+P_2	P_2	P_4	P_3
C_3	P_4	P_4	0	P_1
C_4	P_3	P_3	P_1	0

Tabela 2.60: $\alpha = (1, 1, 0), \beta = (1, 0, 0)$

L_β \ L_α	A_1	A_2	A_3	A_4
D_1	Q_2	0	0	0
D_2	Q_1+Q_2	Q_2	Q_3	Q_4
D_3	Q_4	0	Q_2	0
D_4	Q_3	0	0	Q_2

Tabela 2.61: $\alpha = (1, 1, 1), \beta = (1, 0, 0)$

L_β \ L_α	B_1	B_2	B_3	B_4
C_1	Q_2	Q_1+Q_2	Q_3	Q_4
C_2	Q_1+Q_2	0	0	0
C_3	Q_3	0	0	Q_1+Q_2
C_4	Q_4	0	Q_1+Q_2	0

Tabela 2.62: $\alpha = (1, 1, 0), \beta = (1, 0, 1)$

L_β \ L_α	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	P_1	P_2	P_4	P_3
D_2	P_1+P_2	P_1+P_2	0	0
D_3	P_3	P_3	P_1+P_2	0
D_4	P_4	P_4	0	P_1+P_2

Tabela 2.63: $\alpha = (1,1,1), \beta = (1,0,1)$

L_β \ L_α	C_1	C_2	C_3	C_4
D_1	S_1	S_2	S_4	S_3
D_2	S_2	S_1	S_4	S_3
D_3	S_4	S_4	0	S_1+S_2
D_4	S_3	S_3	S_1+S_2	0

Tabela 2.64: $\alpha = (1,1,1), \beta = (1,1,0)$

Teorema 2.2.1. *Existe um isomorfismo de álgebras de Lie entre á álgebra L_{28} e G_{28}.*

Demonstração. Para definir ϕ isomorfismo de álgebras de Lie entre á álgebra L_{28} e G_{28}, basta enviar os elementos da base em nesta nova base assim:

$$\begin{gathered}\phi: \\ s_i \to S_i \\ p_i \to P_i \\ q_i \to Q_i \\ a_i \to A_i \\ b_i \to B_i \\ c_i \to C_i \\ d_i \to D_i\end{gathered}$$

e a propriedade $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ fica determinada so olhando as tabelas correspondentes, as quais são iguais. □

Capítulo 3

Álgebra de Lie de dimensão 30

3.1 A Álgebra de Lie de dimensão 30

Seja L_{34} a 2-álgebra de Lie de dimensão 34 construída a continuação: Uma base B de L_{34} tem duas partes B_1 e B_2 tal que $|B_1| = 18$, $|B_2| = 16$ e
$B_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, f_4, t, h, m_{12}, m_{13}, m_1^3, m_1^4, m_{14}, m_1^2, m_2^4, m_2^3 + m_3^4\}$
B_2 é o conjunto de partes de $I = \{1, 2, 3, 4\}\}$.
Vamos escrever $\sigma = ijkl$, $\sigma = ijk$, $\sigma = ij$, ou $\sigma = i$ para denotar $\sigma = \{i, j, k, l\}$, $\sigma = \{i, j, k\}$, $\sigma = \{i, j\}$, ou $\sigma = \{i\}$ respetivamente, para $i, j, k, l \in I$, e lembrando que não importa a ordem em que sejam colocados. Por exemplo o objeto 312 denota simplesmente o elemento $\{1, 2, 3\}$.
A multiplicação dos elementos da base são dados pela seguintes fórmulas:
$[t, h] = 0$, $[x, h] = 0$, $[x, t] = x$, para $x \in \{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$,
$[x, t] = [x, h] = 0$, para $x \in T = \{m_{12}, m_{13}, m_1^3, m_1^4, m_{14}, m_1^2, m_2^4, m_2^3 + m_3^4\}$, $[T, T] = 0$, exceto $[m_i^j, m_j^k] = m_i^k$ e para $i \neq k$ $[m_i^j, m_{jk}] = m_{ik}$
$[\sigma, h] = \sigma$, $[\sigma, t] = |\sigma|\, \sigma$, para $\sigma \in B_2$,
$[f_i, f_j] = [e_i, e_j] = 0, \forall i, j \in I$, exceto os produtos $[f_1, f_2] = m_1^3$, $[f_1, f_3] = m_1^4$
$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h, \forall i, j \in I$ exceto os produtos $[f_1, e_4] = m_{13}$, $[f_1, e_3] = m_{12.}$
Os produtos $[B_1, T]$, $[B_2, T]$ são dados por
$\left[f_1, m_1^3\right] = f_3$, $\left[f_1, m_1^4\right] = f_4$, $[f_1, m_{12}] = e_2$, $[f_1, m_{13}] = e_3$, $[f_1, m_{14}] = e_4$, $\left[f_1, m_1^2\right] = f_2$,
$[f_2, m_{12}] = e_1$, $\left[f_2, m_2^4\right] = f_4$, $\left[f_2, m_2^3 + m_3^4\right] = f_3$,
$[f_3, m_{13}] = e_1, \left[f_3, m_2^3 + m_3^4\right] = f_4$,
$[f_4, m_{14}] = e_1$,
$\left[e_2, m_1^2\right] = e_1$,
$\left[e_3, m_1^3\right] = e_1$, $\left[e_3, m_2^3 + m_3^4\right] = e_2$,
$\left[e_4, m_1^4\right] = e_1$, $\left[e_4, m_2^4\right] = e_2$, $\left[e_4, m_2^3 + m_3^4\right] = e_3$.
$[\sigma, m_{ij}] = \sigma \setminus \{ij\}$, se $\{ij\} \subseteq \sigma$ para $\{ij\} \in \{\{12\}, \{13\}, \{14\}\}$,
$\left[\sigma, m_i^j\right] = (\sigma \cup j) \setminus i$ para $j \notin \sigma, i \in \sigma$,
e os outros produtos $[B_1, T]$, $[B_2, T]$ são iguais ao zero.
Além temos

$$[e_i, \sigma] = \begin{cases} \sigma \setminus i, & \text{se} \quad i \in \sigma; \\ 0, & \text{se} \quad i \notin \sigma. \end{cases},$$

$$[f_i, \sigma] = \begin{cases} \sigma \cup i, & \text{se} \quad i \notin \sigma; \\ 0, & \text{se} \quad i \in \sigma. \end{cases},$$

exceto alguns produtos, que são $[f_1, 12] = 3$, $[f_1, 13] = 4$, $[f_1, 123] = 24$, $[f_1, 124] = 34$.
Os produtos $[B_2, B_2]$ são dados por

$$[\sigma, \mu] = \begin{cases} f_i, & \text{se} \quad \sigma \cap \mu = i \quad \text{e} \quad \sigma \cup \mu = I; \\ e_i, & \text{se} \quad \sigma \cap \mu = \emptyset \quad \text{e} \quad \sigma \cup \mu = I \setminus i;, \\ t + |\sigma| h, & \text{se} \quad \sigma \cap \mu = \emptyset \quad \text{e} \quad \sigma \cup \mu = I. \end{cases}$$

exceto nove produtos, que são
$[1, 123] = m_{13}$, $[1, 124] = m_{12}$,
$[12, 13] = m_{13}$, $[12, 14] = m_{12}$, $[12, I] = m_1^3$, $[12, 124] = e_1$
$[13, 123] = e_1$, $[13, I] = m_1^4$,
$[123, 124] = m_1^3$, $[123, 134] = m_1^4$.

Os outros produtos $[B_2, B_2]$ são iguais ao zero.

Definindo a 2-aplicação $(adx)^{[2]} := adx \circ adx$, pode-se verificar facilmente $h^{[2]} = h$ e $t^{[2]} = t$, e com mais trabalho nas contas que $124^{[2]} = m_1^4$, $13^{[2]} = m_{12}$, $f_1^{[2]} := m_2^3 + m_3^4$, $123^{[2]} := m_1^2$, $12^{[2]} = m_{14}$, $f_1^{[4]} := (f_1^{[2]})^{[2]} := m_2^4$ e $a^{[2]} = 0$ para os outros $a \in B_1 \cup B_2$. Seja L_{30} a álgebra de Lie gerada por $B \setminus \{m_{14}, m_1^2, m_2^4, m_2^3 + m_3^4\}$, sendo B a base definida anteriormente; note que L_{34} é o 2-Fecho de L_{30} e $L_{30} = [L_{34}, L_{34}]$.

Vamos agora decompor a álgebra de Lie L_{34} assim: $L_{34} = T \oplus Ann_{L_{30}}(t_1) \oplus I_{L_{34}}(t_1)$
onde $T :=< t_1, t_2, t_3, t_4 >$ será uma subálgebra toroidal de L_{30};
A escolha de t_1 foi feita tal que $t_1^{[2]} = t_1$ e esteja fora de L_{30}; $t_1 := t + 123 + m_1^2$ satisfaz os requisitos.
As bases para $Ann_{L_{30}}(t_1)$ e $I_{L_{34}}(t_1)$ ficam determinadas pela seguinte tabela

l	$[l,t_1]$	$[l,t_1]+l$	l	$[l,t_1]$	$[l,t_1]+l$
e_1	e_1+23	23	14	f_1+24	$f_1+14+24$
e_2	e_1+e_2+13	e_1+13	23	0	23
e_3	e_3+12	12	24	f_2	f_2+24
e_4	e_4	0	34	f_3	f_3+34
f_1	f_1+f_2+24	f_2+24	123	123	0
f_2	f_2	0	124	$124+m_1^3$	m_1^3
f_3	f_3	0	134	$134+234+m_1^4$	$234+m_1^4$
f_4	f_4+I	I	234	234	0
h	123	$h+123$	I	0	I
t	123	$t+123$	m_{12}	3	$3+m_{12}$
$\emptyset$	e_4	$e_4+\emptyset$	m_{13}	2	$2+m_{13}$
1	$1+2+m_{13}$	$2+m_{13}$	m_1^3	0	m_1^3
2	2	0	m_1^4	234	$234+m_1^4$
3	3	0	m_{14}	0	m_{14}
4	$h+t+4$	$h+t$	m_1^2	0	m_1^2
12	0	12	m_2^4	$134+m_1^4$	$134+m_1^4+m_2^4$
13	e_1+23	$e_1+13+23$	$m_2^3+m_3^4$	$124+m_1^3$	$124+m_1^3+m_2^3+m_3^4$

Da tabua, fazemos $x := m_{14}$, $y := m_1^2$, $z := 134 + m_1^4 + m_2^4$ e $w := 124 + m_1^3 + m_2^3 + m_3^4$, (note que eles comutam com t_1) e escolhemos elementos linearmente independentes para $Ann_{L_{30}}(t_1)$ e para $I_{L_{34}}(t_1)$, à saber $\{u_1, \ldots, u_{16}\}$ e $\{w_1, \ldots, w_{14}\}$, respetivamente, onde o valor de cada u_i, w_i fica explícito comparando a tabua anterior como a seguinte:

l	$[l,t_1]$	$[l,t_1]+l$	l	$[l,t_1]$	$[l,t_1]+l$
e_1	u_8	w_2	14	u_{10}	w_{14}
e_2	u_{15}	w_5	23	0	w_2
e_3	u_9	w_1	24	u_2	w_7
e_4	u_1	0	34	u_3	w_8
f_1	u_2+u_{10}	w_7	123	u_6	0
f_2	u_2	0	124	u_{13}	w_4
f_3	u_3	0	134	u_7+u_{14}	w_{13}
f_4	u_{11}	w_3	234	u_7	0
h	u_6	w_{10}	I	0	w_3
t	u_6	w_9	m_{12}	u_5	w_{11}
$\emptyset$	u_1	w_6	m_{13}	u_4	w_{12}
1	u_4+u_{12}	w_{12}	m_1^3	0	w_4
2	u_4	0	m_1^4	u_7	w_{13}
3	u_5	0	m_{14}	0	x
4	u_{16}	w_9+w_{10}	m_1^2	0	y
12	0	w_1	m_2^4	u_{14}	z
13	u_8	w_2+w_5	$m_2^3+m_3^4$	u_{13}	w

Ou seja,

$u_1 = e_4$
$u_2 = f_2$
$u_3 = f_3$
$u_4 = 2$
$u_5 = 3$
$u_6 = 123$
$u_7 = 234$
$u_8 = e_1 + 23$
$u_9 = e_3 + 12$
$u_{10} = f_1 + 24$
$u_{11} = f_4 + I$
$u_{12} = 1 + m_{13}$
$u_{13} = 124 + m_1^3$
$u_{14} = 134 + m_1^4$
$u_{15} = e_1 + e_2 + 13$
$u_{16} = t + h + 4$
$w_1 = 12$
$w_2 = 23$
$w_3 = I$
$w_4 = m_1^3$
$w_5 = e_1 + 13$
$w_6 = e_4 + \emptyset$
$w_7 = f_2 + 24$
$w_8 = f_3 + 34$
$w_9 = t + 123$
$w_{10} = h + 123$
$w_{11} = 3 + m_{12}$
$w_{12} = 2 + m_{13}$
$w_{13} = 234 + m_1^4$
$w_{14} = f_1 + 14 + 24$
$x = m_{14}$
$y = m_1^2$
$z = 134 + m_1^4 + m_2^4$
$w = 124 + m_1^3 + m_2^3 + m_3^4$

$Ann_{L_{30}}(t_1)$ é uma subálgebra de Lie de L_{34} como pode ser visto na tabela de seus produtos:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}
w_1	0	0	w_4	w_2	w_{12}	0	0	w_9	0	w_1	w_6	0	w_7	w_{11}
w_2		0	0	0	0	0	0	0	0	w_2	0	0	0	w_9
w_3			0	0	w_{13}	w_9	0	0	0	w_3	w_8	w_7	0	0
w_4				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	w_8
w_5					0	0	w_9	0	w_2	w_2+w_5	0	w_6	w_8	w_9+w_{10}
w_6						0	0	0	0	w_6	0	0	w_2	w_{12}
w_7							0	0	0	w_7	w_2	0	0	w_4
w_8								0	0	w_8	0	w_2	0	w_{13}
w_9									0	0	0	0	0	w_7
w_{10}										0	0	0	0	w_7+w_{14}
w_{11}											0	0	0	w_5
w_{12}												0	0	w_1
w_{13}												0	0	w_3
w_{14}												w_1	w_3	0

Além que $w_1^{[2]} = x, w_5^{[2]} = w_{11}, w_9^{[2]} = w_9 + y, w_{10}^{[2]} = w_{10} + y, w_{14}^{[2]} = w_4 + w, w^{[2]} = w_{13} + z$, e os outros elementos (w_i, x, y e z) são zero sob a 2-aplicação.

A subálgebra de Lie é simples: Por inspeção, suponha que w_1 está num ideal I e assim é fácil ver que $I = Ann_{L_{34}}(t_1)$. Analogamente para w_2,..., w_{14},x,y,z,w. Observe também que a subálgebra $W :=< w_1, ..., w_{14} >$ não é solúvel já que $W^{'} = W$

Procuramos elemento $t_2 \in Ann_{L_{34}}(t_1)$ idempotente. Como ele tem que comutar com t_1, e $t_1 = w_9 + y$, combinações dos seguintes resultados junto como os das tabelas (anterior e seguintes) podem ajudar-nos para encontrar candidatos.

	x	y	z	w
w_1	0	0	w_{14}	w_2+w_5
w_2	0	0	w_8	w_7
w_3	w_2	0	0	0
w_4	0	0	0	w_{13}
w_5	0	w_2	0	w_{14}
w_6	0	0	w_5	w_1
w_7	0	0	w_3	w_8
w_8	0	0	0	w_3
w_9	0	0	w_{13}	w_4

	x	y	z	w
w_{10}	0	0	w_{13}	w_4
w_{11}	0	0	0	w_9+w_{10}
w_{12}	0	0	w_9+w_{10}	w_{11}
w_{13}	0	0	0	0
w_{14}	w_6	w_7	0	w_8
x	0	0	w_{11}	w_{12}
y	0	0	w_{13}	w_4
z	w_{11}	w_{13}	0	0
w	w_{12}	w_4	0	0

De fato, nos encontramos eles; começamos com:
$t_2 := w_1 + w_6 + w_{10} + x + y$

De igual forma que antes, se $l \in Ann_{L_{30}}(t_1)$, $l = l+[t_2,l]+[t_2,l]$, com $l+[t_2,l] \in Ann_{Ann_{L_{30}}(t_1)}(t_2)$ e $[t_2,l] \in I_{Ann_{L_{30}}(t_1)}(t_2)$. Assim

$Ann_{L_{30}}(t_1) = Ann_{Ann_{L_{30}}(t_1)}(t_2) \oplus I_{Ann_{L_{30}}(t_1)}(t_2)$. $I_{L_{30}}(t_1)$ possui uma decomposição em subespaços análoga.
Para suavizar um pouco notação, agora adiante vamos denotar por

$L_{(ij)} = \{\xi \in L_{30} \mid [t_1,\xi] = i\xi, [t_2,\xi] = j\xi\}$ com $i,j \in \mathbb{Z}_2$.
Assim por exemplo, as decomposições que mencionamos acima ficam

$Ann_{L_{30}}(t_1) = L_{(00)} \oplus L_{(01)}$,
$I_{L_{30}}(t_1) = L_{(10)} \oplus L_{(11)}$.

Procedemos achar bases para estos subespaços de igual forma que fizemos para a $Ann_{L_{30}}(t_1)$ e $I_{L_{34}}(t_1)$.
Começamos com encontrar bases para $L_{(00)}$ e $L_{(01)}$:

l	$[l,t_2]$	$[l,t_2]+l$
w_1	w_1	0
w_2	w_2	0
w_3	$w_2+w_3+w_4+w_9$	$w_2+w_4+w_9$
w_4	w_2	w_2+w_4
w_5	w_5+w_{12}	w_{12}
w_6	w_6	0
w_7	w_7	0
w_8	w_8+w_9	w_9
w_9	0	w_9
w_{10}	w_1+w_6	$w_1+w_6+w_{10}$
w_{11}	w_6	w_6+w_{11}
w_{12}	0	w_{12}
w_{13}	w_2+w_7	$w_2+w_7+w_{13}$
w_{14}	$w_6+w_{11}+w_{12}+w_{14}$	$w_6+w_{11}+w_{12}$

Base para $L_{(00)} =< w_9, w_{12}, w_2+w_4, w_6+w_{11}, w_1+w_6+w_{10}, w_2+w_7+w_{13} >$
Base para $L_{(01)} =< w_1, w_2, w_6, w_7, w_5+w_{12}, w_8+w_9, w_2+w_3+w_4+w_9, w_6+w_{11}+w_{12}+w_{14} >$
$L_{(00)}$ vai-se decompor novamente em 2 subespaços, depois de encontrar $t_3 \in L_{(00)}$ idempotente, à saber $t_3 := w_7+w_{10}+w_{13}+w_{14}+y+z+w$
$L_{(0,0,0)} := \{\xi \in L_{34} \mid [t_1,\xi] = 0, [t_2,\xi] = 0, [t_3,\xi] = 0\}$ e

$L_{(0,0,1)}; = \{\xi \in L_{34} \mid [t_1,\xi]=0, [t_2,\xi]=0, [t_3,\xi]=\xi\}$

l	$[l,t_3]$	$[l,t_3]+l$
w_9	$w_4+w_7+w_{13}$	$w_4+w_7+w_9+w_{13}$
w_{12}	$w_1+w_9+w_{10}+w_{11}$	$w_1+w_9+w_{10}+w_{11}+w_{12}$
w_2+w_4	$w_2+w_7+w_9+w_{13}$	$w_4+w_7+w_9+w_{13}$
w_6+w_{11}	$w_1+w_6+w_9+w_{10}+w_{12}$	$w_1+w_9+w_{10}+w_{11}+w_{12}$
$w_1+w_6+w_{10}$	$w_4+w_6+w_7+w_{11}+w_{12}+w_{13}$	$w_1+w_4+w_7+w_{10}+w_{11}+w_{12}+w_{13}$
$w_2+w_7+w_{13}$	$w_2+w_4+w_9$	$w_4+w_7+w_9+w_{13}$

Assim
$L_{(0,0,1)} =< w_2+w_4+w_9, w_4+w_7+w_{13}, w_1+w_9+w_{10}+w_{11}, w_1+w_6+w_9+w_{10}+w_{12} >$
$L_{(0,0,0)} =< w_4+w_7+w_9+w_{13}, w_1+w_9+w_{10}+w_{11}+w_{12} >$

Analogamente, $L_{(01)}$ vai-se decompor novamente em 2 subespaços,

l	$[l,t_3]$	$[l,t_3]+l$
w_1	$w_1+w_2+w_5+w_7+w_{11}+w_{14}$	$w_2+w_5+w_7+w_{11}+w_{14}$
w_2	$w_2+w_7+w_8+w_9$	$w_7+w_8+w_9$
w_6	$w_1+w_2+w_5+w_6+w_{12}$	$w_1+w_2+w_5+w_{12}$
w_7	$w_3+w_4+w_7+w_8$	$w_3+w_4+w_8$
w_5+w_{12}	$w_1+w_5+w_8+w_9+w_{11}+w_{14}$	$w_1+w_8+w_9+w_{11}+w_{12}+w_{14}$
w_8+w_9	$w_3+w_4+w_7+w_8$	$w_3+w_4+w_7+w_9$
$w_2+w_3+w_4+w_9$	$w_2+w_3+w_4+w_9$	0
$w_6+w_{11}+w_{12}+w_{14}$	$w_3+w_4+w_6+w_8+w_{11}+w_{12}+w_{14}$	$w_3+w_4+w_8$

Assim
$L_{(0,1,1)} =< w_3+w_4+w_7+w_8, w_2+w_7+w_8+w_9, w_1+w_2+w_5+w_6+w_{12}, w_1+w_2+w_5+w_7+w_{11}+w_{14} >$
$L_{(0,1,0)} =< w_3+w_4+w_8, w_7+w_8+w_9, w_1+w_2+w_5+w_{12}, w_2+w_5+w_7+w_{11}+w_{14} >$

Procedemos a encontrar bases para $L_{(10)}$ e $L_{(11)}$:

l	$[l, t_2]$	$[l, t_2] + l$
u_1	0	u_1
u_2	u_4	$u_2 + u_4$
u_3	$u_5 + u_6$	$u_3 + u_5 + u_6$
u_4	u_4	0
u_5	$u_1 + u_5$	u_1
u_6	$u_1 + u_6$	u_1
u_7	$u_2 + u_7 + u_8$	$u_2 + u_8$
u_8	u_4	$u_4 + u_8$
u_9	0	u_9
u_{10}	$u_1 + u_4 + u_5 + u_{12}$	$u_1 + u_4 + u_5 + u_{10} + u_{12}$
u_{11}	$u_6 + u_8 + u_{13} + u_{16}$	$u_6 + u_8 + u_{11} + u_{13} + u_{16}$
u_{12}	u_{12}	0
u_{13}	$u_4 + u_8 + u_9 + u_{13}$	$u_4 + u_8 + u_9$
u_{14}	$u_5 + u_{10} + u_{14} + u_{15}$	$u_5 + u_{10} + u_{15}$
u_{15}	$u_4 + u_{12}$	$u_4 + u_{12} + u_{15}$
u_{16}	$u_1 + u_9 + u_{16}$	$u_1 + u_9$

Base para $L_{(11)} =< u_4, u_{12}, u_1 + u_5, u_1 + u_6, u_1 + u_9 + u_{16}, u_2 + u_7 + u_8, u_5 + u_{10} + u_{14} + u_{15}, u_6 + u_8 + u_{13} + u_{16} >$

Base para $L_{(10)} =< u_1, u_9, u_2 + u_4, u_2 + u_8, u_3 + u_5 + u_6, u_5 + u_{10} + u_{15}, u_4 + u_{12} + u_{15}, u_6 + u_8 + u_{11} + u_{13} + u_{16} >$

$L_{(11)}$ vai-se decompor em 2 subespaços, à saber $L_{(1,1,0)}$ e $L_{(1,1,1)}$

l	$[l,t_3]$	$[l,t_3]+l$
u_4	$u_4+u_5+u_9+u_{16}$	$u_5+u_9+u_{16}$
u_{12}	$u_5+u_9+u_{12}+u_{16}$	$u_5+u_9+u_{16}$
u_1+u_5	$u_5+u_9+u_{12}+u_{16}$	$u_1+u_9+u_{12}+u_{16}$
u_1+u_6	$u_6+u_8+u_9+u_{10}+u_{12}+u_{13}+u_{14}+u_{15}$	$u_1+u_8+u_9+u_{10}+u_{12}+u_{13}+u_{14}+u_{15}$
$u_1+u_9+u_{16}$	$u_5+u_9+u_{12}+u_{16}$	$u_1+u_5+u_{12}$
$u_2+u_7+u_8$	$u_2+u_6+u_7+u_{13}+u_{16}$	$u_6+u_8+u_{13}+u_{16}$
$u_5+u_{10}+u_{14}+u_{15}$	$u_5+u_6+u_8+u_{10}+u_{13}+u_{14}+u_{15}+u_{16}$	$u_6+u_8+u_{13}+u_{16}$
$u_6+u_8+u_{13}+u_{16}$	0	$u_6+u_8+u_{13}+u_{16}$

Assim
$L_{(1,1,1)} =< u_4+u_5+u_9+u_{16}, u_5+u_9+u_{12}+u_{16}, u_2+u_6+u_7+u_{13}+u_{16}, u_6+u_8+u_9+u_{10}+u_{12}+u_{13}+u_{14}+u_{15} >$
$L_{(1,1,0)} =< u_5+u_9+u_{16}, u_1+u_5+u_{12}, u_6+u_8+u_{13}+u_{16}, u_1+u_8+u_9+u_{10}+u_{12}+u_{13}+u_{14}+u_{15} >$

$L_{(10)}$ vai-se decompor em 2 subespaços, à saber $L_{(1,0,1)}$ e $L_{(1,0,0)}$

l	$[l, t_3]$	$[l, t_3] + l$
u_1	$u_8 + u_9 + u_{12} + u_{15}$	$u_1 + u_8 + u_9 + u_{12} + u_{15}$
u_9	$u_2 + u_5 + u_8 + u_{10} + u_{15}$	$u_2 + u_5 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{15}$
$u_2 + u_4$	$u_3 + u_4 + u_5 + u_9 + u_{11} + u_{13} + u_{16}$	$u_2 + u_3 + u_5 + u_9 + u_{11} + u_{13} + u_{16}$
$u_2 + u_8$	$u_2 + u_6 + u_{11} + u_{13} + u_{16}$	$u_6 + u_8 + u_{11} + u_{13} + u_{16}$
$u_3 + u_5 + u_6$	$u_5 + u_6 + u_8 + u_{10} + u_{11} + u_{13} + u_{15} + u_{16}$	$u_3 + u_8 + u_{10} + u_{11} + u_{13} + u_{15} + u_{16}$
$u_5 + u_{10} + u_{15}$	$u_5 + u_6 + u_8 + u_{10} + u_{11} + u_{13} + u_{15} + u_{16}$	$u_6 + u_8 + u_{11} + u_{13} + u_{16}$
$u_4 + u_{12} + u_{15}$	$u_3 + u_4 + u_6 + u_{10} + u_{12}$	$u_3 + u_6 + u_{10} + u_{15}$
$u_6 + u_8 + u_{11} + u_{13} + u_{16}$	0	$u_6 + u_8 + u_{11} + u_{13} + u_{16}$

$L_{(1,0,1)} =< u_8 + u_9 + u_{12} + u_{15}, u_2 + u_5 + u_8 + u_{10} + u_{15}, u_3 + u_4 + u_6 + u_{10} + u_{12}, u_2 + u_6 + u_{11} + u_{13} + u_{16} >$

$L_{(1,0,0)} =< u_1 + u_8 + u_9 + u_{12} + u_{15}, u_3 + u_6 + u_{10} + u_{15}, u_2 + u_3 + u_5 + u_9 + u_{11} + u_{13} + u_{16}, u_6 + u_8 + u_{11} + u_{13} + u_{16} >$

3.2 Na procura do elemento t_4

A seguinte tabela mostra os produtos dos elementos da base de $Ann_{L_{34}}(t_1, t_2, t_3)$:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	0	0	0	0	b_1	b_1
b_2		0	0	0	b_2	b_2
b_3			0	0	b_2	b_2
b_4				0	b_1	b_1
b_5					0	$b_1 + b_2$
b_6						0

com:

$b_1 = w_4 + w_7 + w_9 + w_{13}$

$b_2 = w_1 + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}$

$b_3 = t_1 + t_2 + b_2$
$b_4 = t_1 + b_1$
$b_5 = w_2 + w_4 + w_5 + w_9 + w_{11} + w_{14} + z = t_1 + t_3 + b_1 + b_2 + w_1 + w_2 + w_5 + w_{12} + w$
$b_6 = t_1 + t_3 + b_1 + b_2 + b_5$
$b_1^{[2]} = t_1$
$b_2^{[2]} = t_1 + t_2$
$b_3^{[2]} = 0$
$b_4^{[2]} = 0$
$b_5^{[2]} = t_1 + b_1 + b_2 + b_6$
$b_6^{[2]} = t_2 + t_3 + b_6$ e assim $b_6^{[4]} = b_6$

Como k é um corpo algebricamente fechado, escolhemos $\alpha \in k$ tal que $\alpha^2 = \alpha + 1$.
Seja t_4= $b_6 + \alpha(t_2 + t_3)$. Note que $t_4^{[2]} = t_2 + t_3 + b_6 + (\alpha + 1)(t_2 + t_3) = b_6 + \alpha(t_2 + t_3) = t_4$. $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ conjunto L.I.

l	$[l, t_4]$	$[l, t_4] + l$
b_1	b_1	0
b_2	b_2	0
b_3	b_2	$b_2 + b_3$
b_4	b_1	$b_1 + b_4$
b_5	$b_1 + b_2$	$b_1 + b_2 + b_5$
b_6	0	b_6

$L_{(0,0,0,0)} =< b_6, b_1 + b_4, b_2 + b_3, b_1 + b_2 + b_5 >$, $L_{(0,0,0,1)} =< b_1, b_2 >$

Os elementos da base de $L_{(0,0,1)}$ são:
$c_1 := w_2 + w_4 + w_9$, $c_2 := w_4 + w_7 + w_{13}$, $c_3 := w_1 + w_9 + w_{10} + w_{11}$, $c_4 := w_1 + w_6 + w_9 + w_{10} + w_{12}$.

l	$[l, t_4]$	$[l, t_4] + l$
c_1	$c_2 + \alpha c_1$	$c_2 + \alpha^2 c_1$
c_2	$c_1 + \alpha^2 c_2$	$c_1 + \alpha c_2$
c_3	$c_4 + \alpha c_3$	$c_4 + \alpha^2 c_3$
c_4	$c_3 + \alpha^2 c_4$	$c_3 + \alpha c_4$

$L_{(0,0,1,0)} =< c_1 + \alpha c_2, c_3 + \alpha c_4 >$, $L_{(0,0,1,1)} =< c_2 + \alpha c_1, c_4 + \alpha c_3 >$

Os elementos da base de $L_{(0,1,0)}$ são:
$d_1 := w_3 + w_4 + w_8$, $d_2 := w_7 + w_8 + w_9$, $d_3 := w_1 + w_2 + w_5 + w_{12}$, $d_4 := w_2 + w_5 + w_7 + w_{11} + w_{14}$.

l	$[l,t_4]$	$[l,t_4]+l$
d_1	$d_2+\alpha^2 d_1$	$d_2+\alpha d_1$
d_2	$d_1+\alpha d_2$	$d_1+\alpha^2 d_2$
d_3	$d_4+\alpha d_3$	$d_4+\alpha^2 d_3$
d_4	$d_3+\alpha^2 d_4$	$d_3+\alpha d_4$

$L_{(0,1,0,0)} =< d_2+\alpha d_1, d_3+\alpha d_4 >$, $L_{(0,1,0,1)} =< d_1+\alpha d_2, d_4+\alpha d_3 >$

Os elementos da base de $L_{(0,1,1)}$ são:
$g_1 := w_3+w_4+w_7+w_8$, $g_2 := w_2+w_7+w_8+w_9$, $g_3 := w_1+w_2+w_5+w_6+w_{12}$, $g_4 := w_1+w_2+w_5+w_7+w_{11}+w_{14}$.

l	$[l,t_4]$	$[l,t_4]+l$
g_1	g_1	0
g_2	g_1	g_1+g_2
g_3	g_4	g_3+g_4
g_4	g_4	0

$L_{(0,1,1,0)} =< g_1+g_2, g_3+g_4 >$, $L_{(0,1,1,1)} =< g_1, g_4 >$

Os elementos da base de $L_{(1,0,0)}$ são:
$l_1 := u_3+u_6+u_{10}+u_{15}$, $l_2 := u_1+u_8+u_9+u_{12}+u_{15}$, $l_3 := u_6+u_8+u_{11}+u_{13}+u_{16}$, $l_4 := u_2+u_5+u_8+u_9+u_{10}+u_{15}$.

l	$[l,t_4]$	$[l,t_4]+l$
l_1	$l_1+l_2+l_3$	l_2+l_3
l_2	l_4	l_2+l_4
l_3	l_4	l_3+l_4
l_4	l_4	0

$L_{(1,0,0,0)} =< l_2+l_3, l_2+l_4 >$, $L_{(1,0,0,1)} =< l_4, l_1+l_2+l_3 >$

Os elementos da base de $L_{(1,0,1)}$ são:
$m_1 := u_8+u_9+u_{12}+u_{15}$, $m_2 := u_2+u_5+u_8+u_{10}+u_{15}$, $m_3 := u_3+u_4+u_6+u_{10}+u_{12}$, $m_4 := u_2+u_6+u_{11}+u_{13}+u_{16}$.

l	$[l,t_4]$	$[l,t_4]+l$
m_1	$m_2+\alpha m_1$	$m_2+\alpha^2 m_1$
m_2	$m_1+\alpha^2 m_2$	$m_1+\alpha m_2$
m_3	$m_1+m_2+\alpha^2 m_3+m_4$	$m_1+m_2+\alpha m_3+m_4$
m_4	$m_1+m_3+\alpha m_4$	$m_1+m_3+\alpha^2 m_4$

$L_{(1,0,1,0)} =< m_1 + \alpha m_2, m_1 + m_3 + \alpha^2 m_4 >$, $L_{(1,0,1,1)} =< m_2 + \alpha m_1, m_1 + m_3 + \alpha m_4 >$

Os elementos da base de $L_{(1,1,0)}$ são:
$n_1 := u_5 + u_9 + u_{16}$, $n_2 := u_1 + u_5 + u_{12}$, $n_3 := u_6 + u_8 + u_{13} + u_{16}$, $n_4 := u_6 + u_{10} + u_{14} + u_{15}$.

l	$[l, t_4]$	$[l, t_4] + l$
n_1	$n_2 + \alpha n_1$	$n_2 + \alpha^2 n_1$
n_2	$n_1 + \alpha^2 n_2$	$n_1 + \alpha n_2$
n_3	$n_1 + n_4 + \alpha n_3$	$n_1 + n_4 + \alpha^2 n_3$
n_4	$n_1 + n_2 + n_3 + \alpha^2 n_4$	$n_1 + n_2 + n_3 + \alpha n_4$

$L_{(1,1,0,0)} =< n_1 + \alpha n_2, n_1 + \alpha^2 n_3 + n_4 >$, $L_{(1,1,0,1)} =< n_2 + \alpha n_1, n_1 + \alpha n_3 + n_4 >$

Os elementos da base de $L_{(1,1,1)}$ são:
$o_1 := u_4 + u_{12}$, $o_2 := u_5 + u_9 + u_{12} + u_{16}$, $o_3 := u_2 + u_6 + u_7 + u_{13} + u_{16}$, $o_4 := u_6 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15}$.

l	$[l, t_4]$	$[l, t_4] + l$
o_1	0	o_1
o_2	o_2	0
o_3	$o_1 + o_4$	$o_1 + o_3 + o_4$
o_4	$o_1 + o_4$	o_1

$L_{(1,1,1,0)} =< o_1, o_1 + o_3 + o_4 >$, $L_{(1,1,1,1)} =< o_2, o_1 + o_4 >$

Temos o desejado

$$L_{34} = T \oplus \sum_{\alpha} \oplus L_{\alpha}$$

.

3.3 Código MATLAB

Apresento alguns dos algoritmos feitos no programa MATLAB que ajudarem na optimização do tempo das contas de esta última álgebra.

3.3.1 Tabela dos produtos dos elementos

```
clear%Aquí obtemos a tabela dos produtos dos elementos
clc

A=eye(34); % matriz identidade
e1=A(:,1);%  1er vetor columna da matriz A; escrevemos eles como um
    vetor tomando os coeficentes que aparecen na orden  da base {e1
   ,e2,e3,...}.Exemplo e2=0e1+1e2+0e3+..
```

```
e2=A(:,2);e3=A(:,3);e4=A(:,4);f1=A(:,5);f2=A(:,6);f3=A(:,7);f4=A(:,8);t=A(:,9);h=A(:,10);s0=A(:,11);s1=A(:,12);s2=A(:,13);s3=A(:,14);s4=A(:,15);s12=A(:,16);s13=A(:,17);s14=A(:,18);s23=A(:,19);s24=A(:,20);s34=A(:,21);s123=A(:,22);s124=A(:,23);s134=A(:,24);s234=A(:,25);I=A(:,26);m12=A(:,27);m13=A(:,28);m1a3=A(:,29);m1a4=A(:,30);m14=A(:,31);m1a2=A(:,32);m2a4=A(:,33);m2a3m3a4=A(:,34);

Te1=zeros(34); % Te1 é a transformacao  adj(e1) olhada como matriz dos coeficientes na base {e1,e2,e3,...}
Te1(10,5)=1;Te1(1,9)=1;Te1(11,12)=1;Te1(13,16)=1;Te1(14,17)=1;Te1(15,18)=1;Te1(19,22)=1;Te1(20,23)=1;Te1(21,24)=1;Te1(25,26)=1;
Te2=zeros(34);
Te2(10,6)=1;Te2(2,9)=1;Te2(11,13)=1;Te2(12,16)=1;Te2(14,19)=1;Te2(15,20)=1;Te2(17,22)=1;Te2(18,23)=1;Te2(21,25)=1;Te2(24,26)=1;Te2(1,32)=1;
Te3=zeros(34);
Te3(10,7)=1;Te3(3,9)=1;Te3(11,14)=1;Te3(12,17)=1;Te3(13,19)=1;Te3(15,21)=1;Te3(16,22)=1;Te3(18,24)=1;Te3(20,25)=1;Te3(23,26)=1;Te3(1,29)=1;Te3(2,34)=1;Te3(27,5)=1;
Te4=zeros(34);
Te4(28,5)=1;Te4(10,8)=1;Te4(11,15)=1;Te4(12,18)=1;Te4(13,20)=1;Te4(14,21)=1;Te4(16,23)=1;Te4(17,24)=1;Te4(19,25)=1;Te4(22,26)=1;Te4(1,30)=1;Te4(2,33)=1;Te4(3,34)=1;Te4(4,9)=1;
Tf1=zeros(34);
Tf1(10,1)=1;Tf1(27,3)=1;Tf1(28,4)=1;Tf1(5,9)=1;Tf1(12,11)=1;Tf1(16,13)=1;Tf1(17,14)=1;Tf1(18,15)=1;Tf1(14,16)=1;Tf1(15,17)=1;Tf1(22,19)=1;Tf1(23,20)=1;Tf1(24,21)=1;Tf1(20,22)=1;Tf1(21,23)=1;Tf1(26,25)=1;Tf1(2,27)=1;Tf1(3,28)=1;Tf1(7,29)=1;Tf1(8,30)=1;Tf1(4,31)=1;Tf1(6,32)=1;Tf1(29,6)=1;Tf1(30,7)=1;
Tf2=zeros(34);
Tf2(10,2)=1;Tf2(29,5)=1;Tf2(6,9)=1;Tf2(13,11)=1;Tf2(16,12)=1;Tf2(19,14)=1;Tf2(20,15)=1;Tf2(22,17)=1;Tf2(23,18)=1;Tf2(25,21)=1;Tf2(26,24)=1;Tf2(1,27)=1;Tf2(8,33)=1;Tf2(7,34)=1;
Tf3=zeros(34);
Tf3(10,3)=1;Tf3(30,5)=1;Tf3(7,9)=1;Tf3(14,11)=1;Tf3(17,12)=1;Tf3(19,13)=1;Tf3(21,15)=1;Tf3(22,16)=1;Tf3(24,18)=1;Tf3(25,20)=1;Tf3(26,23)=1;Tf3(8,34)=1;Tf3(1,28)=1;
Tf4=zeros(34);
Tf4(10,4)=1;Tf4(8,9)=1;Tf4(15,11)=1;Tf4(18,12)=1;Tf4(20,13)=1;Tf4(21,14)=1;Tf4(23,16)=1;Tf4(24,17)=1;Tf4(25,19)=1;Tf4(26,22)=1;Tf4(1,31)=1;
Tt=zeros(34);
```

```
Tt(1,1)=1;Tt(2,2)=1;Tt(3,3)=1;Tt(4,4)=1;Tt(5,5)=1;Tt(6,6)=1;Tt(7,7)=1;Tt(8,8)=1;Tt(12,12)=1;Tt(13,13)=1;Tt(14,14)=1;Tt(15,15)=1;Tt(22,22)=1;Tt(23,23)=1;Tt(24,24)=1;Tt(25,25)=1;
Th=zeros(34);
Th(11,11)=1;Th(12,12)=1;Th(13,13)=1;Th(14,14)=1;Th(15,15)=1;Th(16,16)=1;Th(17,17)=1;Th(18,18)=1;Th(19,19)=1;Th(20,20)=1;Th(21,21)=1;Th(22,22)=1;Th(23,23)=1;Th(24,24)=1;Th(25,25)=1;Th(26,26)=1;
T0=zeros(34);
T0(12,5)=1;T0(13,6)=1;T0(14,7)=1;T0(15,8)=1;T0(11,10)=1;T0(4,22)=1;T0(3,23)=1;T0(2,24)=1;T0(1,25)=1;T0(9,26)=1;
T1=zeros(34);
T1(28,22)=1;T1(27,23)=1;T1(11,1)=1;T1(16,6)=1;T1(17,7)=1;T1(18,8)=1;T1(12,9)=1;T1(12,10)=1;T1(4,19)=1;T1(3,20)=1;T1(2,21)=1;T1(9,25)=1;T1(5,26)=1;T1(14,29)=1;T1(15,30)=1;T1(13,32)=1;T1(10,25)=1;
T2=zeros(34);
T2(11,2)=1;T2(16,5)=1;T2(19,7)=1;T2(20,8)=1;T2(13,9)=1;T2(13,10)=1;T2(4,17)=1;T2(3,18)=1;T2(1,21)=1;T2(9,24)=1;T2(10,24)=1;T2(6,26)=1;T2(15,33)=1;T2(14,34)=1;
T3=zeros(34);
T3(11,3)=1;T3(17,5)=1;T3(19,6)=1;T3(21,8)=1;T3(14,9)=1;T3(14,10)=1;T3(4,16)=1;T3(2,18)=1;T3(1,20)=1;T3(9,23)=1;T3(10,23)=1;T3(7,26)=1;T3(15,34)=1;
T4=zeros(34);
T4(11,4)=1;T4(18,5)=1;T4(20,6)=1;T4(21,7)=1;T4(15,9)=1;T4(15,10)=1;T4(3,16)=1;T4(2,17)=1;T4(1,19)=1;T4(9,22)=1;T4(10,22)=1;T4(8,26)=1;
T12=zeros(34);
T12(28,17)=1;T12(27,18)=1;T12(1,23)=1;T12(29,26)=1;T12(13,1)=1;T12(12,2)=1;T12(14,5)=1;T12(22,7)=1;T12(23,8)=1;T12(16,10)=1;T12(4,14)=1;T12(3,15)=1;T12(9,21)=1;T12(5,24)=1;T12(6,25)=1;T12(11,27)=1;T12(19,29)=1;T12(20,30)=1;T12(18,33)=1;T12(17,34)=1;
T13=zeros(34);
T13(28,16)=1;T13(1,22)=1;T13(30,26)=1;T13(15,5)=1;T13(14,1)=1;T13(12,3)=1;T13(22,6)=1;T13(24,8)=1;T13(17,10)=1;T13(4,13)=1;T13(2,15)=1;T13(9,20)=1;T13(5,23)=1;T13(7,25)=1;T13(11,28)=1;T13(21,30)=1;T13(19,32)=1;T13(18,34)=1;
T14=zeros(34);
T14(27,16)=1;T14(15,1)=1;T14(12,4)=1;T14(23,6)=1;T14(24,7)=1;T14(18,10)=1;T14(3,13)=1;T14(2,14)=1;T14(9,19)=1;T14(5,22)=1;T14(8,25)=1;T14(21,29)=1;T14(11,31)=1;T14(20,32)=1;
T23=zeros(34);
```

```
T23(14,2)=1;T23(13,3)=1;T23(22,5)=1;T23(25,8)=1;T23(19,10)=1;T23(4,12)=1;T23(1,15)=1;T23(9,18)=1;T23(6,23)=1;T23(7,24)=1;T23(21,33)=1;T23(20,34)=1;
T24=zeros(34);
T24(13,4)=1;T24(15,2)=1;T24(23,5)=1;T24(25,7)=1;T24(20,10)=1;T24(3,12)=1;T24(1,14)=1;T24(9,17)=1;T24(6,22)=1;T24(8,24)=1;T24(21,34)=1;
T34=zeros(34);
T34(15,3)=1;T34(14,4)=1;T34(24,5)=1;T34(25,6)=1;T34(21,10)=1;T34(2,12)=1;T34(1,13)=1;T34(9,16)=1;T34(7,22)=1;T34(8,23)=1;
T123=zeros(34);
T123(28,12)=1;T123(1,17)=1;T123(29,23)=1;T123(30,24)=1;T123(20,5)=1;T123(19,1)=1;T123(17,2)=1;T123(16,3)=1;T123(26,8)=1;T123(22,9)=1;T123(22,10)=1;T123(4,11)=1;T123(9,15)=1;T123(10,15)=1;T123(5,18)=1;T123(6,20)=1;T123(7,21)=1;T123(14,27)=1;T123(13,28)=1;T123(25,30)=1;T123(24,33)=1;T123(23,34)=1;
T124=zeros(34);
T124(24,34)=1;T124(13,31)=1;T124(25,29)=1;T124(15,27)=1;T124(8,21)=1;T124(6,19)=1;T124(5,17)=1;T124(1,16)=1;T124(10,14)=1;T124(9,14)=1;T124(3,11)=1;T124(23,10)=1;T124(23,9)=1;T124(26,7)=1;T124(16,4)=1;T124(18,2)=1;T124(20,1)=1;T124(21,5)=1;T124(29,22)=1;T124(27,12)=1;
T134=zeros(34);
T134(30,22)=1;T134(21,1)=1;T134(18,3)=1;T134(17,4)=1;T134(26,6)=1;T134(24,9)=1;T134(24,10)=1;T134(2,11)=1;T134(9,13)=1;T134(10,13)=1;T134(5,16)=1;T134(7,19)=1;T134(8,20)=1;T134(15,28)=1;T134(14,31)=1;T134(25,32)=1;
T234=zeros(34);
T234(21,2)=1;T234(20,3)=1;T234(19,4)=1;T234(26,5)=1;T234(25,9)=1;T234(25,10)=1;T234(1,11)=1;T234(9,12)=1;T234(10,12)=1;T234(6,16)=1;T234(7,17)=1;T234(8,18)=1;
TI=zeros(34);
TI(29,16)=1;TI(30,17)=1;TI(25,1)=1;TI(24,2)=1;TI(23,3)=1;TI(22,4)=1;TI(26,10)=1;TI(9,11)=1;TI(5,12)=1;TI(6,13)=1;TI(7,14)=1;TI(8,15)=1;TI(21,27)=1;TI(20,28)=1;TI(19,31)=1;
Tm12=zeros(34);
Tm12(2,5)=1;Tm12(1,6)=1;Tm12(11,16)=1;Tm12(14,22)=1;Tm12(15,23)=1;Tm12(21,26)=1;
Tm13=zeros(34);
Tm13(3,5)=1;Tm13(1,7)=1;Tm13(11,17)=1;Tm13(13,22)=1;Tm13(15,24)=1;Tm13(20,26)=1;Tm13(27,34)=1;
Tm1a3=zeros(34);
```

```
Tm1a3(7,5)=1;Tm1a3(1,3)=1;Tm1a3(14,12)=1;Tm1a3(19,16)=1;Tm1a3
   (21,18)=1;Tm1a3(25,23)=1;Tm1a3(30,34)=1;
Tm1a4=zeros(34);
Tm1a4(8,5)=1;Tm1a4(1,4)=1;Tm1a4(15,12)=1;Tm1a4(20,16)=1;Tm1a4
   (21,17)=1;Tm1a4(25,22)=1;
Tm14=zeros(34);
Tm14(4,5)=1;Tm14(1,8)=1;Tm14(11,18)=1;Tm14(13,23)=1;Tm14(14,24)=1;
   Tm14(19,26)=1;Tm14(27,33)=1;Tm14(28,34)=1;
Tm1a2=zeros(34);
Tm1a2(6,5)=1;Tm1a2(1,2)=1;Tm1a2(13,12)=1;Tm1a2(19,17)=1;Tm1a2
   (20,18)=1;Tm1a2(25,24)=1;Tm1a2(30,33)=1;Tm1a2(29,34)=1;
Tm2a4=zeros(34);
Tm2a4(8,6)=1;Tm2a4(2,4)=1;Tm2a4(15,13)=1;Tm2a4(18,16)=1;Tm2a4
   (21,19)=1;Tm2a4(24,22)=1;Tm2a4(30,32)=1;Tm2a4(27,31)=1;
Tm2a3m3a4=zeros(34);
Tm2a3m3a4(7,6)=1;Tm2a3m3a4(8,7)=1;Tm2a3m3a4(2,3)=1;Tm2a3m3a4(3,4)
   =1;Tm2a3m3a4(14,13)=1;Tm2a3m3a4(15,14)=1;Tm2a3m3a4(17,16)=1;
   Tm2a3m3a4(18,17)=1;Tm2a3m3a4(20,19)=1;Tm2a3m3a4(21,20)=1;
   Tm2a3m3a4(23,22)=1;Tm2a3m3a4(24,23)=1;Tm2a3m3a4(30,29)=1;
   Tm2a3m3a4(29,32)=1;Tm2a3m3a4(27,28)=1;Tm2a3m3a4(28,31)=1;


v1=[Te1,Te2,Te3,Te4,Tf1,Tf2,Tf3,Tf4,Tt,Th,T0,T1,T2,T3,T4,T12,T13,
   T14,T23,T24,T34,T123,T124,T134,T234,TI,Tm12,Tm13,Tm1a3,Tm1a4,
   Tm14,Tm1a2,Tm2a4,Tm2a3m3a4];
v2=[e1,e2,e3,e4,f1,f2,f3,f4,t,h,s0,s1,s2,s3,s4,s12,s13,s14,s23,s24,
   s34,s123,s124,s134,s234,I,m12,m13,m1a3,m1a4,m14,m1a2,m2a4,
   m2a3m3a4];

syms E1 E2 E3 E4 F1 F2 F3 F4 T H S0 S1 S2 S3 S4 S12 S13 S14 S23 S24
    S34 S123 S124 S134 S234 SI M12 M13 M1a3 M1a4 M14 M1a2 M2a4
   M2a3M3a4;


for l=1:34;
for k=1:34;
m=34*(l-1)+1;



r=v1(:,m:m+33)*v2(:,k);

R=diag(r);
```

```

for i=1:length(r);
for j=1:length(r);
if mod(R(i,j),2)==0;
R(i,j)=0;
elseif mod(R(i,j),2)==1;
R(i,j)=1;
end
end;
end;
R;
u=[E1,E2,E3,E4,F1,F2,F3,F4,T,H,S0,S1,S2,S3,S4,S12,S13,S14,S23,S24,
    S34,S123,S124,S134,S234,SI,M12,M13,M1a3,M1a4,M14,M1a2,M2a4,
    M2a3M3a4];
for i=1:length(u);
if R(i,i)~=1;
u(i)=0;
end
end;

sum(u);
D(l,k)=ans;
end
end


D %Aqui temos a matriz dos resultados do produto de Lie de todos
    com todos
```

3.3.2 Identidade de Jacobi

Com o seguinte código, verifica-se que a álgebra satisfaz a identidade de Jacobi.

```
load('A')
syms E1 E2 E3 E4 F1 F2 F3 F4 T H S0 S1 S2 S3 S4 S12 S13 S14 S23 S24
     S34 S123 S124 S134 S234 SI M12 M13 M1a3 M1a4 M14 M1a2 M2a4
    M2a3M3a4;
Q=[E1,E2,E3,E4,F1,F2,F3,F4,T,H,S0,S1,S2,S3,S4,S12,S13,S14,S23,S24,
    S34,S123,S124,S134,S234,SI,M12,M13,M1a3,M1a4,M14,M1a2,M2a4,
    M2a3M3a4];
n=input('contador n: ')
g=input('contador g: ')
for k=1:34

if D(n,g)==0 && D(g,k)==0 && D(k,n)==0
```

```
R=0

elseif D(n,g)==0 && D(g,k)==0 && D(k,n)~=0 && D(k,n)~=H+T
R=D(find(Q==D(k,n)),g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==0 && D(g,k)==0 && D(k,n)==H+T
R=D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end


elseif D(n,g)==0 && D(g,k)~=0 && D(k,n)==0 && D(g,k)~=H+T
R=D(find(Q==D(g,k)),n);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end

elseif D(n,g)==0 && D(g,k)==H+T && D(k,n)==0
R=D(9,n)+D(10,n);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end


elseif D(n,g)==0 && D(g,k)~=0 && D(k,n)~=0 && D(g,k)~=H+T && D(k,n)
   ~=H+T
R=D(find(Q==D(g,k)),n)+D(find(Q==D(k,n)),g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
```

```

elseif D(n,g)==0 && D(g,k)==H+T && D(k,n)~=0 && D(k,n)~=H+T
R=D(9,n)+D(10,n)+D(find(Q==D(k,n)),g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end

elseif D(n,g)==0 && D(g,k)~=0 && D(k,n)==H+T && D(g,k)~=H+T
R=D(find(Q==D(g,k)),n)+D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end

elseif D(n,g)==0 && D(g,k)==H+T && D(k,n)==H+T
R=D(9,n)+D(10,n)+D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end


elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)==0 && D(k,n)==0 && D(n,g)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)==0 && D(k,n)==0
R=D(9,k)+D(10,k);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)==0 && D(k,n)~=0 && D(n,g)~=H+T && D(k,n)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k)+D(find(Q==D(k,n)),g);
```

```
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)==0 && D(k,n)==H+T && D(n,g)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k)+D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)==0 && D(k,n)~=0 && D(k,n)~=H+T
R=D(9,k)+D(10,k)+D(find(Q==D(k,n)),g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)==0 && D(k,n)==H+T
R=D(9,k)+D(10,k)+D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end

elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)~=0 && D(k,n)==0 && D(n,g)~=H+T && D(g,k)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k)+D(find(Q==D(g,k)),n);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)==H+T && D(k,n)==0 && D(n,g)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k)+D(9,n)+D(10,n);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)~=0 && D(k,n)==0 && D(g,k)~=H+T
```

```
R=D(9,k)+D(10,k)+D(find(Q==D(g,k)),n);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)==H+T && D(k,n)==0
R=D(9,k)+D(10,k)+D(9,n)+D(10,n);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)~=0 && D(k,n)~=0 && D(n,g)~=H+T && D(g,k)
   ~=H+T && D(k,n)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k)+D(find(Q==D(g,k)),n)+D(find(Q==D(k,n)),g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)~=0 && D(k,n)~=0 && D(g,k)~=H+T && D(k,
   n)~=H+T
R=D(9,k)+D(10,k)+D(find(Q==D(g,k)),n)+D(find(Q==D(k,n)),g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)==H+T && D(k,n)~=0 && D(n,g)~=H+T && D(k,
   n)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k)+D(9,n)+D(10,n)+D(find(Q==D(k,n)),g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)~=0 && D(k,n)==H+T && D(n,g)~=H+T && D(g,
   k)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k)+D(find(Q==D(g,k)),n)+D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
```

```
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)==H+T && D(k,n)~=0 && D(k,n)~=H+T
R=D(9,k)+D(10,k)+D(9,n)+D(10,n)+D(find(Q==D(k,n)),g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)~=0 && D(k,n)==H+T && D(g,k)~=H+T
R=D(9,k)+D(10,k)+D(find(Q==D(g,k)),n)+D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)~=0 && D(g,k)==H+T && D(k,n)==H+T && D(n,g)~=H+T
R=D(find(Q==D(n,g)),k)+D(9,n)+D(10,n)+D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
elseif D(n,g)==H+T && D(g,k)==H+T && D(k,n)==H+T
R=D(9,k)+D(10,k)+D(9,n)+D(10,n)+D(9,g)+D(10,g);
R=subs(R,2,0);
R=subs(R,4,0);
if R~=0
R='error'
end
end
end
```

3.3.3 $Ann(t_1), I(t_1)$ e tabela dos produtos do $Ann(t_1)$

```
for l=1:34;
% for k=1:34;
m=34*(l-1)+1;



r=v1(:,m:m+33)*(t+s123+m1a2);

```

```
R=diag(r);

for i=1:length(r);
for j=1:length(r);
if mod(R(i,j),2)==0;
R(i,j)=0;
elseif mod(R(i,j),2)==1;
R(i,j)=1;
end
end;
end;
R;
u=[E1,E2,E3,E4,F1,F2,F3,F4,T,H,S0,S1,S2,S3,S4,S12,S13,S14,S23,S24,
    S34,S123,S124,S134,S234,SI,M12,M13,M1a3,M1a4,M14,M1a2,M2a4,
    M2a3M3a4];
for i=1:length(u);
if R(i,i)~=1;
u(i)=0;
end
end;

sum(u);
L(l)=ans;

end
L
U=[E1,E2,E3,E4,F1,F2,F3,F4,T,H,S0,S1,S2,S3,S4,S12,S13,S14,S23,S24,
    S34,S123,S124,S134,S234,SI,M12,M13,M1a3,M1a4,M14,M1a2,M2a4,
    M2a3M3a4];
LU=L+U;
LU=subs(LU,2,0)
w1=s12;w2=s23;w3=I;w4=m1a3;w5=e1+s13;w6=e4+s0;w7=f2+s24;w8=f3+s34;
    w9=t+s123;w10=h+s123;w11=s3+m12;w12=s2+m13;w13=s234+m1a4;w14=f1+
    s14+s24;x=m14;y=m1a2;z=s134+m1a4+m2a4;w=s124+m1a3+m2a3m3a4;
u1=e4;u2=f2;u3=f3;u4=s2;u5=s3;u6=s123;u7=s234;u8=e1+s23;u9=e3+s12;
    u10=f1+s24;u11=f4+I;u12=s1+m13;u13=s124+m1a3;u14=s134+m1a4;u15=
    e1+e2+s13;u16=t+h+s4;
Tw1=T12;Tw2=T23;Tw3=TI;Tw4=Tm1a3;Tw5=Te1+T13;Tw6=Te4+T0;Tw7=Tf2+T24
    ;Tw8=Tf3+T34;Tw9=Tt+T123;Tw10=Th+T123;Tw11=T3+Tm12;Tw12=T2+Tm13;
    Tw13=T234+Tm1a4;Tw14=Tf1+T14+T24;Tx=Tm14;Ty=Tm1a2;Tz=T134+Tm2a4+
    Tm1a4;Tw=T124+Tm1a3+Tm2a3m3a4;
Tu1=Te4;Tu2=Tf2;Tu3=Tf3;Tu4=T2;Tu5=T3;Tu6=T123;Tu7=T234;Tu8=Te1+T23
    ;Tu9=Te3+T12;Tu10=Tf1+T24;Tu11=Tf4+TI;Tu12=T1+Tm13;Tu13=T124+
```

```
   Tm1a3;Tu14=T134+Tm1a4;Tu15=Te1+Te2+T13;Tu16=Tt+Th+T4;
%Escogemos  los elementos L.I. para Ann(t1=t+s123+m1a2) em LU  para
%I(t1=t+s123+m1a2)em L
vW1=[Tw1,Tw2,Tw3,Tw4,Tw5,Tw6,Tw7,Tw8,Tw9,Tw10,Tw11,Tw12,Tw13,Tw14,
   Tx,Ty,Tz,Tw];
vW2=[w1,w2,w3,w4,w5,w6,w7,w8,w9,w10,w11,w12,w13,w14,x,y,z,w];
vU1=[Tu1,Tu2,Tu3,Tu4,Tu5,Tu6,Tu7,Tu8,Tu9,Tu10,Tu11,Tu12,Tu13,Tu14,
   Tu15,Tu16,Tx,Ty,Tz,Tw];
vU2=[u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8,u9,u10,u11,u12,u13,u14,u15,u16,x,y,z,w
   ];
% Código para Tabela [Ann(t1),Ann(t1)]
for l=1:18;
for k=1:18;
m=34*(l-1)+1;
r=vW1(:,m:m+33)*vW2(:,k);
R=diag(r);

for i=1:length(r);
for j=1:length(r);
if mod(R(i,j),2)==0;
R(i,j)=0;
elseif mod(R(i,j),2)==1;
R(i,j)=1;
end
end;
end;
R;
u=[E1,E2,E3,E4,F1,F2,F3,F4,T,H,S0,S1,S2,S3,S4,S12,S13,S14,S23,S24,
   S34,S123,S124,S134,S234,SI,M12,M13,M1a3,M1a4,M14,M1a2,M2a4,
   M2a3M3a4];
for i=1:length(u);
if R(i,i)~=1;
u(i)=0;
end
end;

sum(u);
D(l,k)=ans;
end
end
D;
D=subs(D,S12,W1);D=subs(D,S23,W2);D=subs(D,SI,W3);D=subs(D,M1a3,W4)
   ;D=subs(D,E1+S13,W5);D=subs(D,E4+S0,W6);D=subs(D,F2+S24,W7);D=
```

```
subs(D,F3+S34,W8);D=subs(D,S123+T,W9);D=subs(D,S123+H,W10);D=
subs(D,M12+S3,W11);D=subs(D,M13+S2,W12);D=subs(D,M1a4+S234,W13);
D=subs(D,F1+S14+S24,W14);D=subs(D,M14,X);D=subs(D,M1a2,Y);D=subs
(D,M1a4+M2a4+S134,Z);D=subs(D,M1a3+M2a3M3a4+S124,W);
D % tabela Ann(t1)
```

Outros códigos foram necessários para os produtos faltantes, mas não são mostrados aqui devido que a estrutura é igual com o anterior.

Referências Bibliográficas

[1] A. Grishkov, M. Guerreiro. *New simple Lie algebras over fields of characteristic 2*, Resenhas IME-USP, Vol. 6, No. 2/3 (2004), 215-221.

[2] A. Grishkov, M. Guerreiro. *On simple Lie algebras of dimension seven over fields of characteristic 2*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences **4**, 1 (2010),93-107.

[3] W. Araújo. *As álgebras de Lie simples de dimensão 7 sobre um corpo de característica 2 e suas subálgebras toroidais*, (to appear)

[4] H. Strade, R. Farnsteiner. *Modular Lie algebras and their representations*, Marcel Dekker, inc, 1988.

[5] H. Strade. *The absolute toral rank of a Lie algebra* 1980 AMS subject classification (1985 revision) 17B50, 17B20.

[6] Skryabin, S. *Toral rank one simple Lie algebras in low characteristics*, J.Algebra, V. 200 (1998), 650-700.

[7] Jacobson, N., *Lie Algebras*. Interscience Publishers, 1962.

[8] Erdmann, K., Wildon, M. *Introduction to Lie Algebras*. Springer-Verlag, 2006.

[9] R. E., Block *The classification problem for simple Lie algebras of characteristic p*, in Lie Algebras and Related Topics (LNM Vol. 933), Springer-Verlag, New York, (1982), 38-56.