Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás

Juliane Trianon Fraga

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Matemática

Programa: Matemática

Orientador: Prof^a^. Dr^a^. Mary Lilian Lourenço

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, janeiro de 2019

Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 21/02/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Mary Lilian Lourenço (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Junior - UFRJ
- Prof. Dr. Walter Alberto de Siqueira Pedra - IF-USP

Agradecimentos

Destino meu primeiro e maior agradecimento a Deus, por sempre me acompanhar e tornar tudo possível.

Em segundo lugar, agradeço à minha mãe, que sempre me apoiou nos momentos de triunfo e de adversidade que acompanham a realização de um trabalho. Agradeço ao meu pai, por todas as conversas e conselhos. Fui abençoada com os pais mais compreensivos e maravilhosos que eu poderia desejar, e devo tudo que sou a eles.

Agradeço também à minha família, por sempre estar ao meu lado.

Agradeço à minha orientadora, Mary Lilian, por acreditar em mim e me dar a oportunidade de ser sua aluna. Levarei comigo não apenas seus ensinamentos de matemática, mas também aprendizados de esforço e dedicação.

Voltaire dizia que todas as riquezas do mundo não valem um bom amigo. Agradeço aos meus amigos, por tornarem a minha vida mais leve e sempre compreenderem o porquê de eu ter que trabalhar naquele feriado.

Agradeço aos meus professores do ensino fundamental e médio, por despertarem em mim o desejo de aprender, e aos da faculdade, que ao longo destes anos tanto me ajudaram a suprir este desejo.

Agradeço aos professores Nilson Bernardes e Walter Pedra, por aceitarem compor a banca examinadora e por suas sugestões e correções.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

FRAGA, J. T. **Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás**. 2018. 111 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Este trabalho tem como objetivo principal estudar determinadas propriedades de pares de espaços de Banach de forma que satisfaçam a Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (BPBp), acompanhando a evolução histórica do assunto. Inicialmente apresentamos demonstrações dos Teoremas de Bishop-Phelps e Bishop-Phelps-Bollobás, e em seguida passamos a estudar as versões destes resultados para operadores, entre as quais enfatizamos a segunda. Com esse objetivo, definimos a Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores, introduzida por Acosta et al. em [AAGM08], e apresentamos dois resultados deste artigo, que afirmam que se os espaços de Banach X e Y têm dimensão finita, então (X, Y) satisfaz a BPBp, e que se o espaço de Banach Y tem a propriedade β de Lindenstrauss, então (X, Y) satisfaz a BPBp para todo espaço de Banach X. Em seguida estudamos o artigo [AGKM17], que apresenta uma classe de espaços de Banach Y tais que (c_0, Y) satisfaz a BPBp, e mostra que embora nesta classe estejam contidos os espaços de Banach uniformemente convexos e aqueles que satisfazem a propriedade β, ela ainda contêm outros exemplos de espaços.

Palavras-chave: operadores que atingem a norma, propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás, propriedade β de Lindenstrauss.

Abstract

FRAGA, J. T. **Bishop-Phelps-Bollobás property**. 2018. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

The main purpose of this work is to study certain properties of pairs of Banach spaces in a way that satisfies the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators (BPBp), following the historical evolution of the subject. Firstly we present proofs of the Bishop-Phelps and Bishop-Phelps-Bollobás theorems, and then proceed to study versions of these results for operators, of which we emphasize the second one. To this purpose, we define the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators, introduced by Acosta et al. in [AAGM08], and present two results of this paper, which state that if X and Y are finite-dimensional Banach spaces, then (X, Y) satisfies BPBp, and that if the Banach space Y has the property β of Lindenstrauss, then (X, Y) satisfies BPBp for every Banach space X. Next we study paper [AGKM17], which presents a class of Banach spaces Y such that (c_0, Y) satisfies BPBp, and shows that although this class contains the uniformly rotund spaces and those satisfying property β, there are other examples of spaces in it.

Keywords: operators which attain their norm, Bishop-Phelps-Bollobás property, property β of Lindenstrauss.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{K}$	Corpo dos números reais, $\mathbb{R}$, ou dos complexos, $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto dos números reais não-negativos.
$\mathrm{Re}(z)$	Parte real do número complexo z.
$\mathrm{Im}(z)$	Parte imaginária do número complexo z.
$A^{\complement}$	Complementar do conjunto A relativo a um conjunto $U \supset A$, isto é, $U \backslash A$. O conjunto U em geral ficará claro pelo contexto.
X, Y	Espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$.
$B_X(x; r)$	Bola aberta de centro $x \in X$ e raio $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, em X. Quando o espaço X for claro do contexto, ele será omitido da notação.
B_X	Bola unitária e fechada em X.
S_X	Esfera unitária em X.
X^*	Dual topológico de X.
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espaço normado dos operadores lineares contínuos definidos entre X e Y.
$\mathcal{K}(X, Y)$	Espaço normado dos operadores lineares compactos definidos entre X e Y.
$\mathcal{F}(X, Y)$	Espaço normado dos operadores lineares contínuos de posto finito definidos entre X e Y.
$\mathcal{NA}_X$	Conjunto $\{f \in X^* : f \text{ atinge sua norma}\}$.
$\mathcal{NA}(X, Y)$	Conjunto $\{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ atinge sua norma}\}$.
$\overline{A}$	Fecho de um subconjunto $A \subset X$.
A^{o}	Interior de um subconjunto $A \subset X$.
∂A	Fronteira de um subconjunto $A \subset X$.
c_0	Espaço de Banach das sequências em $\mathbb{K}$ convergindo a 0, munido da norma $\|\|.\|\|_\infty$.
ℓ_p^n	Espaço de Banach $(\mathbb{K}^n, \|\|.\|\|_p)$, para $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$.
ℓ_p	Espaço de Banach das sequências p-somáveis em $\mathbb{K}$, para $1 \leq p < \infty$, munido da norma $\|\|.\|\|_p$.
ℓ_∞	Espaço de Banach das sequências limitadas em $\mathbb{K}$, munido da norma $\|\|.\|\|_\infty$.
$C(K)$	Espaço de Banach das funções $f : K \to \mathbb{K}$ contínuas, munido da norma $\|\|f\|\|_\infty \doteq \sup_{x \in K} \|f(x)\|$, quando K é um espaço topológico compacto Hausdorff.

Introdução

Dado um espaço de Banach X sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, denotamos por B_X a sua bola fechada e unitária e S_X a sua esfera unitária. Dado $f \in X^*$, o dual topológico de X, dizemos que f *atinge sua norma* se existe $x_0 \in B_X$ tal que $|f(x_0)| = ||f||$. Um fato simples de notar é que se X é reflexivo, então todo elemento do dual atinge a sua norma. A recíproca deste resultado é o famoso *Teorema de James*, demonstrado por R. James primeiro para espaços de Banach separáveis [Jam57], em 1957, e depois para o caso geral, em 1964 [Jam64].

Na mesma época, inspirados pelo trabalho de James, R. Phelps e E. Bishop também começam a estudar funcionais que atingem a norma. Phelps percebeu que todo espaço de Banach clássico (isto é, os espaços da forma $C(K)$ ou $L_p(\mu)$, com K um compacto Hausdorff e μ uma medida) tinha a seguinte propriedade: o conjunto dos funcionais lineares e contínuos que atingem a norma é denso no dual. Em vista dos resultados de James, parecia a ele que espaços com tal propriedade eram *quase* reflexivos, razão pela qual os chamou de *subreflexivos* [Phe57]. Porém, em 1961, junto com Bishop, viria a descobrir que *todo* espaço de Banach é subreflexivo, fato que ficou conhecido como *Teorema de Bishop-Phelps* [BP61].

Alguns anos mais tarde, em 1970, B. Bollobás provou uma "versão quantitativa"do Teorema de Bishop-Phelps, que ficou conhecida como *Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás* [Bol70]. Mais precisamente, mostrou que para qualquer $0 < \epsilon < 1$, se $x \in S_X$ e $f \in S_{X^*}$ obedecem a $|1 - f(x)| < \epsilon^2/4$, é possível encontrar elementos $y \in S_X$ e $g \in S_{X^*}$ distando de menos de ϵ de x e f, respectivamente, e tais que g atinge sua norma em y.

É natural questionar se versões análogas destes resultados valem quando tratamos de operadores entre dois espaços de Banach X e Y. Seja $\mathcal{L}(X,Y)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos definidos entre X e Y. Da mesma forma, um operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ atinge sua norma se existe $x_0 \in B_X$ tal que $||T(x_0)|| = ||T||$. Denominamos $\mathcal{NA}(X,Y) \doteq \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : T \text{ atinge sua norma}\}$.

Antes mesmo de Bollobás apresentar o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, Lindenstrauss já havia obtido muitos resultados notáveis no sentido de obter generalizações do Teorema de Bishop-Phelps a operadores no seu artigo [Lin63], de 1963. Mostrou, por exemplo, que um Teorema do tipo Bishop-Phelps, isto é, $\mathcal{NA}(X,Y)$ ser denso em $\mathcal{L}(X,Y)$, não vale para espaços de Banach X e Y arbitrários. Introduziu também neste artigo a *propriedade* β e mostrou que se Y tem tal propriedade, então $\mathcal{NA}(X,Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X,Y)$ para qualquer espaço de Banach X. Como exemplos de espaços satisfazendo a propriedade β, podemos citar c_0, ℓ_∞ e ℓ_∞^n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrou ainda que quando X é reflexivo, $\mathcal{NA}(X,Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X,Y)$ para todo espaço de Banach Y.

A partir de então, surgiram inúmeros trabalhos neste tema. Por exemplo, em 1986, no seu artigo [Sch83], Schachermayer introduziu a *propriedade* α, e mostrou que ela também é uma condição suficiente sobre espaços de Banach X para que $\mathcal{NA}(X,Y)$ seja denso em $\mathcal{L}(X,Y)$ para todo espaço de

Banach Y. O espaço de Banach ℓ_1 é um exemplo de espaço não-reflexivo satisfazendo a propriedade α. Outro exemplo de trabalho nesse sentido é o artigo de Acosta e Aguirre de 1996, [AA96], que apresenta uma outra condição suficiente sobre espaços de Banach Y para que $\mathcal{NA}(X,Y)$ seja denso em $\mathcal{L}(X,Y)$ para qualquer espaço de Banach X.

O estudo de extensões do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás a operadores teve início em 2008, quando Acosta et al. introduziram a *Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (BPBp)*, em [AAGM08]. Diversos resultados a respeito desta propriedade foram feitos neste mesmo artigo. Foi mostrado, por exemplo, que se X e Y têm dimensão finita, o par (X,Y) satisfaz a BPBp, e que se Y tem a propriedade β de Lindenstrauss, o par (X,Y) satisfaz a BPBp para qualquer espaço de Banach X, generalizando um resultado de Lindenstrauss citado anteriormente. Além disso, foram caracterizados os espaços de Banach Y para os quais (ℓ_1,Y) satisfaz a BPBp, e demonstrado que se Y for uniformemente convexo, então (ℓ_∞^n,Y) satisfaz a BPBp, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Desde a introdução destes conceitos, o interesse nesse assunto cresceu e podemos atualmente encontrar diversos trabalhos sobre a BPBp. Por exemplo, Acosta et al. mostraram que os pares da forma $(C(K),C(S))$ satisfazem a BPBp para quaisquer espaços topológicos compactos Hausdorff K e S [ABGC$^+$14]. Para o caso real, Kim, Lee e Lin provaram que o par (L_∞,Y) satisfaz a BPBp sempre que Y for uniformemente convexo [KLL16]. Para o caso complexo, Acosta mostrou que o par $(C_0(L),Y)$ satisfaz a BPBp para todo espaço uniformemente convexo Y e qualquer espaço topológico Hausdorff localmente compacto L [Aco16]. Existe também uma caracterização de espaços de Banach Y tais que o par (ℓ_∞^3,Y) satisfaz a BPBp [ABGG$^+$15], e uma para que (ℓ_∞^4,Y) satisfaça a propriedade [ADSM19].

Entretanto, o caso do par (c_0,Y) é diferente dos supracitados, e ainda não há uma caracterização dos pares (c_0,Y) que satisfazem a BPBp. Em [AAGM08], após a demonstração de que (ℓ_∞^n,Y) satisfaz a BPBp para todo espaço Y uniformemente convexo, ficou aberta a seguinte pergunta: o par (c_0,Y) também satisfaz a BPBp se Y for uniformemente convexo? Esta pergunta viria a ser respondida de forma afirmativa em 2012, por Kim [Kim13]. Acosta et al., em 2017, generalizaram este resultado, apresentando uma classe maior de espaços de Banach Y tais que o par (c_0,Y) satisfaz a BPBp [AGKM17]. Os espaços uniformemente convexos e aqueles que satisfazem a propriedade β de Lindenstrauss estão contidos nesta classe, mas é mostrado em [AGKM17] que ela também contêm outros espaços. Sendo assim, o resultado de Acosta et al. não só generaliza o trabalho de Kim em [Kim13], como também de fato fornece exemplos de pares (c_0,Y) satisfazendo a BPBp que antes não eram conhecidos.

Como resumido na discussão acima, o tópico Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás tem grande importância para a Análise Funcional e é rico em publicações recentes, assim como em problemas abertos, motivos pelos quais foi escolhido para a dissertação de mestrado. O objetivo principal do trabalho é estudar determinadas propriedades de pares (X,Y) de espaços de Banach de forma que satisfaçam a BPBp, acompanhando a evolução histórica do assunto. Ele será dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, enunciamos alguns resultados básicos de Análise Funcional e Topologia, necessários para o entendimento dos demais.

No segundo capítulo, apresentamos demonstrações dos Teoremas de Bishop-Phelps e Bishop-Phelps-Bollobás, feitas em [BP63] e [Bol70], respectivamente. Para demonstrar o primeiro, introduzimos os conceitos de cone e funcionais suporte, que permitem obter outros resultados interessantes, dentre os quais destacamos o *Teorema de Bishop-Phelps para funcionais suporte*, resultado que também é apresentado neste capítulo.

No terceiro capítulo, passamos a estudar as versões do Teorema de Bishop-Phelps e Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. A primeira delas será discutida apenas de maneira breve, sendo assim daremos mais ênfase à segunda.

Com esse objetivo, introduzimos os conceitos de ponto exposto e fortemente exposto, assim como o de famílias fortemente e uniformemente expostas por uma função. Apresentamos também a propriedade β de Lindenstrauss, e damos alguns exemplos de espaços que a satisfazem.

Estudamos em seguida algumas propriedades simples da extensão do Teorema de Bishop-Phelps a operadores e apresentamos a demonstração do resultado de [Lin63] que afirma que se Y for estritamente convexo e existir um operador não-compacto definido entre c_0 e Y, então $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$. A partir deste resultado, mostramos um exemplo concreto de espaço Y para o qual $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$.

Passamos então a estudar a extensão do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás a operadores. Para isso, definimos a Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás, de Acosta et al. [AAGM08]. Exibimos as demonstrações deste artigo de que o par (X, Y) satisfaz a BPBp se X e Y têm dimensão finita e de que (X, Y) satisfaz a BPBp para todo espaço de Banach X, se Y tem a propriedade β.

Posteriormente, concentramos o estudo em pares de espaços de Banach da forma (c_0, Y), baseando-nos no artigo [AGKM17]. Apresentamos a classe de espaços de Banach Y lá introduzida e a demonstração de que espaços contidos nesta classe são tais que (c_0, Y) satisfaz a BPBp. Para o estudo desta demonstração, apresentamos alguns lemas auxiliares, alguns dos quais são feitos em [AAGM08], e outros em [AGKM17].

Por fim, apresentamos a demonstração feita em [AGKM17] de que, embora na classe de espaços de Banach introduzida neste artigo estejam contidos os espaços de Banach uniformemente convexos e aqueles que possuem a propriedade β, ainda há outros exemplos de espaços nesta classe. De fato, no último resultado deste artigo, o qual também apresentamos, é mostrado que para qualquer espaço de Banach uniformemente convexo $(Y, ||.||)$ de dimensão maior que 1 é possível definir uma norma $|||.|||$ em Y equivalente à original e arbitrariamente próxima desta, de forma que o espaço $(Y, |||.|||)$ esteja na classe definida, mas não satisfaça a propriedade β nem seja uniformemente convexo. Para finalizar, apresentamos o resultado de Kim que afirma que, no caso real, se for dado que Y é estritamente convexo, é possível caracterizar os espaços de Banach (c_0, Y) que satisfazem a BPBp [Kim13].

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Neste capítulo, trataremos dos conceitos preliminares que serão necessários no decorrer do trabalho. Resultados usualmente tratados em cursos de graduação em matemática serão apenas enunciados. A menos que se diga o contrário, sempre que falarmos de espaços normados ao longo do trabalho, estaremos nos referindo a espaços sobre $\mathbb{K}$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Denotamos os espaços normados em geral por X e Y, e a norma destes espaços por $||.||$.

A primeira seção tratará de resultados básicos de Análise Funcional e Topologia. A segunda, de conceitos gerais de redes, e a terceira de topologias fraca e fraca-estrela. As duas seções seguintes tratarão, respectivamente, de espaços estritamente convexos e uniformemente convexos. A última seção tratará do conceito de somabilidade em um espaço normado, e este será aplicado ao espaço de Banach c_0, usado com frequência no capítulo 3.

Para a demonstração completa dos resultados apresentados neste capítulo, indicamos [Meg98] e [Wil04].

1.1 Resultados básicos

Definição 1.1.1. Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $\mathcal{C} \subset P$ é uma *cadeia* de P se $\mathcal{C}$ for totalmente ordenado com a ordem induzida de P.

Teorema 1.1.2 (Lema de Zorn). *Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado tal que $P \neq \emptyset$. Suponha que toda cadeia não-vazia de P possua cota superior em P. Então P tem um elemento maximal.*

A seguir enunciamos resultados bem conhecidos de Álgebra Linear.

Lema 1.1.3. *Sejam V um espaço vetorial e $f, f_1, f_2, ..., f_n$ funcionais lineares em V tais que $\bigcap_{i=1}^{n} Ker(f_i) \subset Ker(f)$. Então f é combinação linear de $f_1, f_2, ..., f_n$.*

Proposição 1.1.4. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Sejam $v_1, ..., v_n \in V$ vetores não-nulos, $n \geq 1$. Então $||v_1 + ... + v_n|| = ||v_1|| + ... + ||v_n||$ se, e somente se, $v_i = k_i v_1$, com $k_i > 0$, para todo $i = 1, ..., n$.*

Da Proposição acima segue facilmente o Corolário seguinte.

Corolário 1.1.5. *Sejam $a_1, ..., a_n$ reais estritamente positivos e $\lambda_1, ..., \lambda_n \in S_{\mathbb{K}}$. Se $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = a_1 + ... + a_n$, então $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1$.*

Se A e B são subconjuntos de um espaço vetorial V, definimos $A+B \doteq \{a+b \in V : a \in A \text{ e } b \in B\}$. Se o conjunto B contém apenas um elemento v, denotaremos $A+B$ simplesmente por $A+v$. Se $\Lambda \subset \mathbb{K}$, definimos $\Lambda A \doteq \{\lambda a : \lambda \in \Lambda \text{ e } a \in A\}$. Se o conjunto Λ contêm apenas um elemento λ, denotaremos ΛA simplesmente por λA.

Recordamos que um subconjunto A de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é dito *equilibrado* se $\lambda A \subset A$ sempre que $\lambda \in \mathbb{K}$ é tal que $|\lambda| \leq 1$.

Proposição 1.1.6. *Sejam $X = (X, ||.||)$ um espaço normado e $B \subset X$ um subconjunto fechado, limitado, equilibrado, convexo e tal que $0 \in B^{\text{o}}$. Existe uma norma em X que tem o conjunto B como bola unitária fechada.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, defina $A_x \doteq \{r \geq 0 : x \in rB\}$. Observemos que A_x é não-vazio para todo $x \in X$, pois $0 \in B^{\text{o}}$. Seja

$$\begin{aligned} |||.|||\colon X &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \inf A_x. \end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que $|||.|||$ é uma norma para X. Temos que $0 \in A_0$, e portanto $|||0||| = 0$. Como B é limitado, existe $M > 0$ tal que $||y|| \leq M$ para todo $y \in B$. Logo, dado $x \in X \setminus \{0\}$, se $0 \leq r < \dfrac{||x||}{M}$, então $x \notin rB$. Portanto,

$$A_x \subset \left[\frac{||x||}{M}, \infty\right),$$

o que implica que $\inf A_x = |||x||| > 0$.

Se $x = y = 0$, é claro que $|||x+y||| = 0 \leq |||x||| + |||y||| = 0$. Considere $x, y \in X$ de forma que não sejam ambos nulos. Vamos mostrar que $A_x + A_y \subset A_{x+y}$. Tomemos $\lambda_x \in A_x$, $\lambda_y \in A_y$ arbitrários. Temos que $x = \lambda_x b_x$ e $y = \lambda_y b_y$, com $b_x, b_y \in B$. Como B é convexo,

$$x + y = (\lambda_x + \lambda_y)\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y} b_x + \frac{\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y} b_y\right) \in (\lambda_x + \lambda_y)B,$$

ou seja, $\lambda_x + \lambda_y \in A_{x+y}$, como queríamos demonstrar. Em particular,

$$\inf(A_x + A_y) = \inf A_x + \inf A_y = |||x||| + |||y||| \geq |||x+y||| = \inf A_{x+y}.$$

Para finalizar, vamos mostrar que para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$, vale que $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$. Para $\lambda = 0$, isso é claro. Suponhamos que $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$. Como B é equilibrado, para todos $x \in X$ e $r \geq 0$ temos que

$$\lambda x \in rB \Rightarrow x \in \frac{r}{\lambda} B = r(\overline{\lambda} B) \subset rB,$$

e portanto $A_{\lambda x} \subset A_x$. Trocando λ por $\overline{\lambda}$ e x por λx, um argumento análogo mostra que $A_{\overline{\lambda}(\lambda x)} = A_x \subset A_{\lambda x}$, e então $A_x = A_{\lambda x}$ para todos $x \in X$ e $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$.

Suponhamos agora que λ seja um real positivo. Para todos $r \geq 0$ e $x \in X$, vale que

$$r \in A_{\lambda x} \Leftrightarrow \lambda x \in rB \Leftrightarrow x \in \frac{r}{\lambda}B \Leftrightarrow \frac{r}{\lambda} \in A_x,$$

e assim $A_{\lambda x} = \lambda A_x$ para todo $x \in X$ nesse caso. Finalmente, considere $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ arbitrário. Podemos escrever $\lambda = |\lambda|\sigma$, com $\sigma \in S_{\mathbb{K}}$. Pelo que mostramos, $A_{\lambda x} = A_{|\lambda|\sigma x} = |\lambda| A_{\sigma x} = |\lambda| A_x$, e então

$$|||\lambda x||| = \inf A_{\lambda x} = \inf |\lambda| A_x = |\lambda| \inf A_x = |\lambda| \cdot |||x|||.$$

Provamos assim que $|||.|||$ é uma norma para X. Resta mostrar que B é a bola unitária fechada do espaço normado $(X, |||.|||)$, que denotaremos $B_{(X,|||.|||)}$.

Se $x \in B$, então $1 \in A_x$, o que implica $|||x||| \leq 1$ e assim $x \in B_{(X,|||.|||)}$. Por outro lado, suponha que $x \in B_{(X,|||.|||)}$, isto é, $|||x||| \leq 1$. Existe uma sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reais não-negativos tal que $r_n \to |||x|||$ e $\dfrac{x}{r_n} \in B$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como B é fechado, concluímos que $\dfrac{x}{|||x|||} \in B$, e então $x \in |||x|||B \subset B$, já que B também é equilibrado. Portanto, $B = B_{(X,|||.|||)}$.

$\square$

Mesmo que um espaço normado X não seja completo, ele pode ser tratado como um subconjunto denso de um espaço de Banach. É o que enunciamos em seguida.

Proposição 1.1.7. *Seja X um espaço normado. Existe um espaço de Banach $\tilde{X}$ e uma imersão isométrica $A : X \to \tilde{X}$, tal que $A(X)$ é denso em $\tilde{X}$. O espaço $\tilde{X}$ é o único com essas propriedades, a menos de isometrias.*

Chamamos o espaço $\tilde{X}$ acima de *completamento* de X. Para todos os propósitos do nosso trabalho, a Proposição acima permite identificar $A(X)$ com X. Dizemos então que o espaço normado X é subconjunto denso do espaço de Banach $\tilde{X}$.

Existe um resultado análogo ao enunciado acima quando consideramos espaços com produto interno:

Proposição 1.1.8. *Se X é um espaço com produto interno, existe um espaço de Hilbert H e uma imersão isométrica $A : X \to H$ que preserva produtos internos tal que $A(X)$ é denso em H. O espaço H é o único com essas propriedades, a menos de isometrias.*

O Lema abaixo mostra que o interior de um subconjunto convexo em um espaço normado satisfaz a uma propriedade um pouco mais forte que a convexidade.

Lema 1.1.9. *Sejam X um espaço normado e $C \subset X$ um subconjunto convexo de interior não-vazio. Se $x \in C^{\mathrm{o}}$ e $y \in C$, então $tx + (1-t)y \in C^{\mathrm{o}}$, para todo $t \in (0,1]$.*

Demonstração. Se $t \neq 0$, a aplicação $m_t : X \ni x \mapsto tx \in X$ é um homeomorfismo. Logo, tC^{o} é um conjunto aberto se $t \in (0,1]$. Da mesma forma, para todo $x_0 \in X$, a aplicação $s_{x_0} : X \ni x \mapsto x + x_0 \in X$ é um homeomorfismo. Então para cada $x_0 \in X$, $x_0 + tC^{\mathrm{o}}$ é um conjunto aberto, assim como $\bigcup_{x_0 \in (1-t)C} (tC^{\mathrm{o}} + x_0) = tC^{\mathrm{o}} + (1-t)C$, qualquer que seja $t \in (0,1]$.

Como C é convexo, vale que $tC^{\mathrm{o}} + (1-t)C \subset C$, o que implica $tC^{\mathrm{o}} + (1-t)C \subset C^{\mathrm{o}}$ para $t \in (0,1]$.

$\square$

Corolário 1.1.10. *Sejam X um espaço normado e $C \subset X$ subconjunto convexo de X com interior não-vazio. Então C^o é denso em C.*

Demonstração. Tome $x \in C^o$ qualquer, e seja dado $y \in C$. Pelo Lema 1.1.9, $u_t \doteq tx + (1-t)y \in C^o$, para todo $t \in (0,1]$. Além disso, $||u_t - y|| = ||tx - ty|| = |t| \cdot ||x-y|| \overset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Como $y \in C$ era arbitrário, C^o é denso em C. □

O Corolário abaixo será usado algumas vezes no decorrer do trabalho, razão pela qual está enunciado aqui.

Corolário 1.1.11. *Sejam X espaço normado, $Y \subset X$ um subconjunto denso e $C \subset X$ um subconjunto convexo, com $C^o \neq \emptyset$. Então $Y \cap C$ é denso em C.*

Demonstração. Seja $\emptyset \neq U_C \subset C$ um subconjunto aberto de C. Então existe $\emptyset \neq U$ aberto de X tal que $U_C = U \cap C$. Vamos mostrar que $U_C \cap (Y \cap C) = U_C \cap Y \neq \emptyset$. Observemos inicialmente que

$$(C^o \cap U_C) \cap Y \subset (C \cap U) \cap Y = U_C \cap Y.$$

Como Y é denso em X, basta mostrar que $(C^o \cap U) = (C^o \cap U_C) \neq \emptyset$. Mas isso segue diretamente do Corolário 1.1.10.

□

Como aplicação do Corolário anterior, temos a seguinte Proposição. Se X é um espaço normado e Y é um subespaço de X, denotamos a norma de elementos em Y^* por $||.||_{Y^*}$.

Proposição 1.1.12. *Sejam X um espaço normado e $Y \subset X$ subespaço denso de X. A aplicação*

$$\begin{aligned} P\colon X^* &\to Y^* \\ f &\mapsto f\big|_Y \end{aligned}$$

é uma isometria entre X^* e Y^*.

Demonstração. Observemos inicialmente que de fato P é linear, $f\big|_Y \in Y^*$ e $|f\big|_Y(y)| \leq ||f|| \cdot ||y||$, para todos $y \in Y$, $f \in X^*$. Então $||P(f)||_{Y^*} \leq ||f||$, para todo $f \in X^*$.

Mostremos que P é injetora. Seja $f \in X^*$ tal que $f\big|_Y = 0$. Para cada $x \in X$, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos em Y tal que $x_n \to x$. Logo, $f\big|_Y(x_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $f\big|_Y(x_n) = f(x_n) \to f(x)$, o que implica $f(x) = 0$. Portanto, $f = 0$ e P é injetora.

Agora verificaremos a sobrejetividade de P. Tome $g \in Y^*$. Dado $x \in X$, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Y tal que $x_n \to x$. Como $|g(x_n) - g(x_m)| \leq ||g||_{Y^*} \cdot ||x_n - x_m||$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$ e a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ também é sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$, e portanto converge. Além disso, se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for outra sequência em Y satisfazendo a $y_n \to x$, teremos

$$|g(x_n) - g(y_n)| \leq ||g||_{Y^*} \cdot ||x_n - y_n|| \to 0,$$

e então $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n)$.

Assim, podemos definir uma função $f : X \to \mathbb{K}$ por $f(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$, em que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência qualquer em Y convergindo a x. É claro que f é linear e $g = f\big|_Y$. Resta verificar que $f \in X^*$, o que será feito em seguida. Dado $x \in X$, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência em Y convergindo a x, vale que

$$|g(x_n)| \leq ||g||_{Y^*} \cdot ||x_n||, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e, portanto, fazendo $n \to \infty$, vem que $|f(x)| \leq ||g||_{Y^*} \cdot ||x||$. Logo, $f \in X^*$, e P é sobrejetora.

Finalmente, mostremos que P é isometria. Se $f_0 = 0 \in X^*$, é claro que $||P(f_0)||_{Y^*} = ||f_0|| = 0$, e já vimos que $||P(f)||_{Y^*} \leq ||f||$, para todo $f \in X^*$. Então resta mostrar que dado $f \neq 0 \in X^*$, $||P(f)||_{Y^*} \geq ||f||$. Faremos isso a seguir.

Seja $f \neq 0 \in X^*$. Se $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in B_X$ tal que

$$||f|| - \frac{\epsilon}{2} < |f(x_0)|. \tag{1.1.1}$$

Além disso, pelo Corolário 1.1.11, $B_X \cap Y$ é denso em B_X, então existe $y_0 \in B_X \cap Y$ satisfazendo a $||x_0 - y_0|| < \dfrac{\epsilon}{2||f||}$. Assim,

$$|f(x_0) - f(y_0)| \leq ||f|| \cdot ||x_0 - y_0|| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.1.2}$$

e então por (1.1.1) e (1.1.2),

$$\begin{aligned} |f(y_0)| &\geq |f(x_0)| - |f(x_0) - f(y_0)| \\ &> ||f|| - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \\ &= ||f|| - \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $y_0 \in B_Y = B_X \cap Y$ tal que $|f(y_0)| = |P(f)(y_0)| > ||f|| - \epsilon$, o que garante $||P(f)||_{Y^*} \geq ||f||$, e encerra a demonstração.

□

Não é difícil ver que a interseção arbitrária de subconjuntos convexos de um espaço normado X é também um conjunto convexo. Dado um subconjunto $C \subset X$, a afirmação anterior garante a existência do *menor* subconjunto convexo de X contendo C, isto é, um conjunto convexo contendo C tal que qualquer subconjunto convexo de X contendo C deve também contê-lo. De fato, bastaria considerar a interseção de todos os subconjuntos convexos contendo C. Chamamos tal conjunto de *envoltória convexa de* C, e o denotamos $\text{Env}(C)$. A seguir é enunciado um resultado a este respeito.

Proposição 1.1.13. *Sejam X, Y espaços normados, $C \subset X$ e $T : X \to Y$ transformação linear. Então $Env(T(C)) = T(Env(C))$.*

No decorrer do trabalho, para cada $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por e_n a sequência satisfazendo a $(e_n)_i = \delta_{ni}$, isto é, a sequência cuja i-ésima coordenada é δ_{ni}, para todo $i \in \mathbb{N}$. Em geral consideraremos essas sequências dentro de espaços normados, como c_0 e ℓ_p.

Identificamos no resultado seguinte o espaço de Banach c_0^*.

Proposição 1.1.14. *Os espaços c_0^* e ℓ_1 são isometricamente isomorfos por meio da isometria $c_0^* \ni f \mapsto (f(e_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$.*

A seguir enunciamos o *Teorema de Hahn-Banach para espaços normados*, um dos principais resultados de análise funcional, com dois de seus corolários principais.

Teorema 1.1.15 (Hahn-Banach). *Sejam X um espaço normado e $Y \subset X$ um subespaço de X. Dado $f \in Y^*$, existe $\tilde{f} \in X^*$ tal que $||\tilde{f}|| = ||f||_{Y^*}$ e $f = \tilde{f}\Big|_Y$.*

Corolário 1.1.16. *Seja X um espaço normado. Para todo $x \in X \setminus \{0\}$, existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = ||x||$.*

Corolário 1.1.17. *Sejam X um espaço normado e $x, y \in X$ elementos distintos. Então existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Em outras palavras, X^* separa pontos de X.*

Dados dois espaços normados X, Y e um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, para cada $f \in Y^*$ podemos definir a aplicação $(f \circ T) : X \to \mathbb{K}$. É claro que $(f \circ T)$ é linear, e vale que $|(f \circ T)(x)| \leq ||f|| \cdot ||T|| \cdot ||x||$. Então $(f \circ T) \in X^*$, tornando possível a seguinte definição:

Definição 1.1.18. Sejam X, Y espaços normados e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definimos o *operador transposto* a T, denotado T^t, por

$$\begin{aligned} T^t \colon Y^* &\to X^* \\ f &\mapsto (f \circ T). \end{aligned}$$

A Proposição abaixo será útil em alguns de nossos propósitos futuros.

Proposição 1.1.19. *Sejam X, Y espaços normados e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que $G \subset S_{Y^*}$ seja tal que para todo $y \in Y$, $||y|| = \sup_{f \in G} |f(y)|$. Então*

$$||T^t|| = \sup_{f \in G} ||T^t(f)||.$$

Demonstração. Se $f \in G$, temos que $||T^t(f)|| = \sup\{|(f \circ T)(x)| : x \in S_X\}$. Então

$$\begin{aligned} \sup_{f \in G} ||T^t(f)|| &= \sup_{f \in G}(\sup_{x \in S_X} |(f \circ T)(x)| \ ) \\ &= \sup_{x \in S_X} (\sup_{f \in G} |(f \circ T)(x)| \ ) \\ &= \sup_{x \in S_X} ||T(x)|| \\ &= ||T||. \end{aligned}$$

O Corolário 1.1.16 garante que $||y|| = \sup_{f \in S_{Y^*}} |f(y)|$ para todo $y \in Y$. Assim, este é um caso particular do que foi mostrado acima, donde concluímos que

$$||T^t|| = \sup_{f \in S_{Y^*}} ||T^t(f)|| = ||T||,$$

e, portanto, $||T^t|| = \sup_{f \in G} ||T^t(f)||$. $\square$

Observemos que na demonstração da Proposição acima mostramos em particular que para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, vale que $||T|| = ||T^t||$.

Se X é um espaço normado, definimos a aplicação $C_X : X \to X^{**}$, que satisfaz, para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} C_X(x)\colon X^* &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

A função C_X é conhecida como *injeção canônica* de X no seu bidual, X^{**}. Vale que:

Proposição 1.1.20. *A injeção canônica em um espaço normado é uma imersão isométrica.*

Embora seja uma imersão isométrica, nem sempre a injeção canônica é sobrejetora. Quando isso acontece, o espaço recebe um nome especial.

Definição 1.1.21. Um espaço normado é dito *reflexivo* se a sua injeção canônica é sobrejetora.

O Teorema seguinte é um importante resultado de separação conhecido como *Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach.*

Teorema 1.1.22 (Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach). *Sejam X um espaço normado e $A, B \subset X$ subconjuntos convexos não-vazios de X tais que A é aberto e $A \cap B = \emptyset$. Então existem $f \in X^* \setminus \{0\}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\operatorname{Re} f(x) < a \leq \operatorname{Re} f(y) \text{ para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

O funcional $f \in X^* \setminus \{0\}$ dado acima pode ser escolhido de norma 1, ou satisfazendo a desigualdades opostas, como observamos abaixo.

Observação 1.1.23. (a) Nas condições do Teorema acima, se $g \doteq \dfrac{f}{||f||} \in S_{X^*}$, obtemos $\operatorname{Re} g(x) < \dfrac{a}{||f||} \leq \operatorname{Re} g(y)$ para todos $x \in A$ e $y \in B$.

(b) Nas condições do Teorema acima, se $g \doteq -f \in X^* \setminus \{0\}$, obtemos $\operatorname{Re} g(y) \leq -a < \operatorname{Re} g(x)$ para todos $x \in A$ e $y \in B$.

O resultado de separação que mais usaremos no trabalho é consequência simples da Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, e está demonstrado abaixo.

Teorema 1.1.24 (Teorema de separação de Eidelheit). *Sejam X espaço normado e C_1, C_2 subconjuntos convexos não-vazios de X tais que $C_2^{\circ} \neq \emptyset$ e $C_1 \cap C_2^{\circ} = \emptyset$. Então existem $f \in X^* \setminus \{0\}$ e $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo a:*

(i) $\operatorname{Re} f(x) \leq a$, *para todo* $x \in C_2$;

(ii) $\operatorname{Re} f(x) < a$, *para todo* $x \in C_2^{\circ}$;

(iii) $\operatorname{Re} f(x) \geq a$, *para todo* $x \in C_1$.

Demonstração. Pelo Lema 1.1.9, C_2° é convexo. Podemos, portanto, aplicar a Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach para os conjuntos C_2° e C_1 para obter $f \in X^* \setminus \{0\}$ e $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo a

$$\operatorname{Re} f(x) < a \leq \operatorname{Re} f(y), \text{ para todos } x \in C_2^{\circ} \text{ e } y \in C_1.$$

Resta então mostrar que $\operatorname{Re} f(x) \leq a$ se $x \in C_2$. Tome $y \in C_2^{\circ}$ qualquer. Novamente pelo Lema 1.1.9, para todos $t \in (0,1]$ e $x \in C_2$ vale que $(1-t)x + ty \in C_2^{\circ}$. Então

$$\operatorname{Re} f((1-t)x + ty) = (1-t) \operatorname{Re} f(x) + t \operatorname{Re} f(y) < a, \text{ para todo } t \in (0,1].$$

Se $t \to 0^+$, vem que $\operatorname{Re} f(x) \leq a$, como queríamos mostrar.

□

Pelo mesmo motivo explicado na Observação 1.1.23, o funcional $f \in X^* \setminus \{0\}$ do Teorema acima pode ser tomado de norma 1, ou satisfazendo desigualdes opostas às de *(i)*, *(ii)* e *(iii)*.

Seja agora H um espaço de Hilbert, e dado $v \in H$, definamos o funcional linear f_v por

$$\begin{aligned} f_v \colon H &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto < x, v > . \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, sabemos que $f_v \in H^*$ e $||f_v|| \leq ||v||$. Vamos verificar que na verdade vale a igualdade. Se $v = 0$, claramente $f_v = 0$ e $||f_v|| = ||v|| = 0$. Se $v \neq 0$, $f_v\left(\dfrac{v}{||v||}\right) = \dfrac{||v||^2}{||v||} = ||v||$. Portanto, $||f_v|| = ||v||$ também nesse caso.

O Teorema seguinte é um resultado importante da teoria de espaços de Hilbert, que garante que todo funcional em H^* é da forma f_v para algum $v \in H$.

Teorema 1.1.25 (**Riesz-Fréchet**). *Sejam H um espaço de Hilbert e $f \in H^*$. Então existe um único $v_0 \in H$ tal que*

$$f(x) = < x, v_0 > \text{ para todo } x \in H.$$

Além disso, vale que $||f|| = ||v_0||$.

Para finalizar a seção, vamos definir os operadores compactos entre dois espaços normados e enunciar alguns resultados básicos sobre o assunto.

Definição 1.1.26. Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : X \to Y$ é dito *compacto* se $\overline{T(B_X)}$ é compacto.

Não é difícil de mostrar que o conjunto dos operadores lineares compactos definidos entre X e Y é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X,Y)$. Denotamos este subespaço por $\mathcal{K}(X,Y)$.

A seguir é enunciada uma caracterização simples de operadores compactos.

Proposição 1.1.27. *Sejam X e Y espaços normados. O operador linear $T : X \to Y$ é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente em Y.*

O último resultado relaciona os operadores lineares contínuos de posto finito com os operadores compactos. Dados os espaços normados X e Y, denotamos por $\mathcal{F}(X,Y)$ o espaço normado dos operadores $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ de posto finito.

Proposição 1.1.28. *Se X é espaço normado e Y é espaço de Banach, então $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subset \mathcal{K}(X,Y)$.*

1.2 Redes

É bem conhecido que sequências caracterizam a topologia de um espaço métrico. Porém, quando tratamos de espaços não-metrizáveis, pode não existir um sistema fundamental de vizinhanças enumerável para um dado ponto do espaço, o que impossibilita tal caracterização. Nesses casos, podemos utilizar o conceito de redes, que permite caracterizações similares.

Para mais detalhes sobre redes e a demonstração completa dos resultados enunciados nesta seção, indicamos [Wil04].

Definição 1.2.1. Um conjunto Λ é dito *dirigido* se existe uma relação $\leq$ em Λ satisfazendo a:

(i) $\lambda \leq \lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$;

(ii) se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$, então $\lambda_1 \leq \lambda_3$, para todos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$;

(iii) dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Definição 1.2.2. Uma *rede* em um conjunto X é uma função $P : \Lambda \to X$, em que Λ é um conjunto dirigido.

Observação 1.2.3. Nas condições da definição anterior, o ponto $P(\lambda)$, para dado $\lambda \in \Lambda$, é frequentemente denotado x_λ e a rede P é denotada $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Definição 1.2.4. Sejam X um conjunto qualquer, Λ um conjunto dirigido por uma relação $\leq$, M um conjunto dirigido por uma relação $\preceq$ e $P : \Lambda \to X$ uma rede em X. Uma *subrede* de P é uma composição $(P \circ \phi)$, em que $\phi : M \to \Lambda$ é uma função satisfazendo a:

(i) $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$ para todos $\mu_1, \mu_2 \in M$ com $\mu_1 \preceq \mu_2$, isto é, ϕ é *crescente*;

(ii) para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ tal que $\lambda \leq \phi(\mu)$, isto é, ϕ é *cofinal.*

Observação 1.2.5. Nas condições da definição anterior, dado $\mu \in M$, o ponto $P(\phi(\mu))$ é frequentemente denotado x_{λ_μ} e a subrede $P \circ \phi$ é denotada $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$.

Definição 1.2.6. Sejam X um espaço topológico e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Dizemos que a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $x \in X$ (escrevemos $x_\lambda \to x$) se, para toda vizinhança U de x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \in \Lambda$ satisfazendo a $\lambda \geq \lambda_0$.

No decorrer deste capítulo e dos próximos, se X for um espaço topológico munido de uma topologia τ e a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ convergir a $x \in X$, quando quisermos ressaltar que a convergência se dá na topologia τ, diremos que $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x$. Caso contrário, usaremos $x_\lambda \to x$ ou $\lim x_\lambda = x$.

A seguir enunciaremos a caracterização dos fechos de subconjuntos de espaços topológicos via redes, e, depois disso, dos compactos.

Proposição 1.2.7. *Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$. Então $x \in \overline{Y}$ se, e somente se, existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em Y tal que $x_\lambda \to x$.*

Quando quisermos destacar que o fecho de um subespaço Y de um espaço topológico (X, τ) é em relação à topologia τ, escreveremos $\overline{Y}^{\,\tau}$ em vez de apenas $\overline{Y}$.

Proposição 1.2.8. *Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda rede em X tem subrede convergente.*

Funções contínuas definidas entre dois espaços topológicos também podem ser caracterizadas usando redes:

Proposição 1.2.9. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. A função f é contínua no ponto $x_0 \in X$ se, e somente se, $f(x_\lambda) \to f(x_0)$ para toda rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em X convergindo a x_0.*

Se o espaço topológico X for também um espaço vetorial e as operações de soma e produto por escalar forem contínuas, como é verdade nos espaços normados, a proposição acima implica o seguinte resultado.

Proposição 1.2.10. *Sejam X um espaço normado, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ redes em X convergindo a $x \in X$ e $y \in X$, respectivamente. Então:*

(i) $x_\lambda + y_\lambda \to x + y$;

(ii) $\alpha x_\lambda \to \alpha x$.

1.3 Topologias fraca e fraca-estrela

Muitas vezes é interessante considerar outras topologias em um dado espaço normado X e no seu dual X^*. Nesta seção veremos os dois exemplos mais utilizados, a topologia fraca em X e a fraca-estrela em X^*. Indicamos a referência [BPT15] para uma discussão detalhada do tema.

Para começar a tratar do assunto, definiremos a topologia gerada por uma família de funções em um conjunto X, e veremos algumas de suas propriedades principais. Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $(f_i)_{i\in I}$ uma família de funções $f_i : X \to Y_i$, para cada $i \in I$. Definimos

$$\Phi \doteq \{f_i^{-1}(U) : i \in I \text{ e } U \subset Y_i \text{ é aberto em } Y_i\}$$

e

Definição 1.3.1. A *topologia gerada pela família de funções* $(f_i)_{i\in I}$ é a menor topologia em X que contêm Φ.

Observação 1.3.2. Para evitar confusão, vamos ressaltar aqui que uma topologia τ em um conjunto X é dita a menor topologia contendo um determinado subconjunto Φ das partes de X se for a interseção de todas as topologias de X que contêm tal subconjunto. É fácil ver que, nesse caso, qualquer topologia em X contendo Φ conterá τ, e é nesse sentido que dizemos que ela é a *menor* topologia que contêm Φ.

Notemos que a topologia gerada pela família $(f_i)_{i\in I}$ também é a menor topologia que torna todas as f_i contínuas. Isto é, se τ' for uma topologia em X para a qual todas as f_i são contínuas, τ' contêm a topologia gerada pela família $(f_i)_{i\in I}$.

Utilizando ainda a notação dada acima, definamos

$$\mathcal{B} \doteq \{\bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(U_j) : n \in \mathbb{N}, i_j \in I \text{ e } U_j \text{ é aberto de } Y_{i_j}, \text{ para } 1 \le j \le n\}.$$

Proposição 1.3.3. *O conjunto $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia em X gerada pela família $(f_i)_{i\in I}$.*

A Proposição seguinte resume as principais propriedades da topologia definida acima.

Proposição 1.3.4. *Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos, $(f_i)_{i\in I}$ uma família de funções $f_i : X \to Y_i$, para cada $i \in I$, e τ a topologia em X gerada pelas $(f_i)_{i\in I}$. Então:*

(a) Para cada $x \in X$, o conjunto

$$\mathcal{B}_x \doteq \{\bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(U_j) : n \in \mathbb{N}, i_j \in I \text{ e } U_j \text{ é vizinhança aberta de } f_{i_j}(x) \text{ em } Y_{i_j}, \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$$

constitui um sistema fundamental de vizinhanças para x na topologia τ.

(b) Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Então $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x \in X$ se, e somente se, $f_i(x_\lambda) \to f_i(x)$ para todo $i \in I$.

(c) Suponha que todos os Y_i sejam espaços de Hausdorff. A topologia τ é de Hausdorff se, e somente se, a família $(f_i)_{i\in I}$ separa pontos de X.

Agora definiremos a topologia fraca em um espaço normado X.

Definição 1.3.5. Se X é um espaço normado, a *topologia fraca* em X, denotada $\sigma(X, X^*)$ (ou w), é a topologia gerada pelos funcionais em X^*.

Se $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \in X^*$ e $\epsilon > 0$, definamos o conjunto

$$V(x; \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n; \epsilon) \doteq \{y \in X : |\phi_j(x) - \phi_j(y)| < \epsilon \text{ para } 1 \leq j \leq n\} = \bigcap_{j=1}^{n} \phi_j^{-1}(B(\phi_j(x); \epsilon)).$$

A Proposição seguinte é apenas a reformulação da Proposição 1.3.4 e da construção geral feita acima para este caso particular.

Proposição 1.3.6. *Seja X um espaço normado. Então:*

(a) Para todo $\phi \in X^*$, vale que $\phi : (X, \sigma(X, X^*)) \to \mathbb{K}$ é contínua.

(b) $\sigma(X, X^*)$ está contida na topologia da norma.

(c) O conjunto

$$\{V(x; \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n; \epsilon) : n \in \mathbb{N}, x \in X, \epsilon > 0 \text{ e } \phi_j \in X^* \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$$

constitui uma base de abertos para $\sigma(X, X^*)$.

(d) Dado $x \in X$, conjunto

$$\{V(x; \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n; \epsilon) : n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0 \text{ e } \phi_j \in X^* \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$$

constitui um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x na topologia $\sigma(X, X^*)$.

(e) Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Então $x_\lambda \xrightarrow{w} x \in X$ se, e somente se, $\phi(x_\lambda) \to \phi(x)$ para todo $\phi \in X^*$.

(f) A topologia fraca é de Hausdorff.

Passaremos agora a tratar a topologia fraca-estrela no dual de um espaço normado X. Lembremos que $C_X : X \to X^{**}$ denota a injeção canônica no bidual de X.

Definição 1.3.7. Se X é um espaço normado, a *topologia fraca-estrela* em X^*, denotada $\sigma(X^*, X)$ (ou w^*), é a topologia gerada pelos funcionais em $C_X(X)$.

Da mesma forma que fizemos anteriormente, dados $\phi \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ e $\epsilon > 0$, tendo em vista que $C_X(x_i)(\psi) = \psi(x_i)$ para todos $\psi \in X^*$ e $i = 1, ..., n$, definamos o conjunto

$$W(\phi; x_1, x_2, ..., x_n; \epsilon) \doteq \{\psi \in X^* : |\phi(x_i) - \psi(x_i)| < \epsilon \text{ para } 1 \leq j \leq n\}.$$

Pela Proposição 1.3.4 e a discussão que a precede, teremos:

Proposição 1.3.8. *Seja X um espaço normado. Então:*

(a) $\sigma(X^*, X)$ está contida na topologia $\sigma(X^*, X^{**})$.

(b) O conjunto

$$\{W(\phi; x_1, x_2, ..., x_n; \epsilon) : n \in \mathbb{N}, \phi \in X^*, \epsilon > 0 \text{ e } x_j \in X \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$$

constitui uma base de abertos para $\sigma(X^*, X)$.

(c) Dado $\phi \in X^*$, conjunto

$$\{W(\phi; x_1, x_2, ..., x_n; \epsilon) : n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0 \text{ e } x_j \in X \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$$

constitui um sistema fundamental de vizinhanças abertas para ϕ na topologia $\sigma(X^*, X)$.

(d) Seja $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em X^*. Então $\phi_\lambda \xrightarrow{w^*} \phi \in X^*$ se, e somente se, $\phi_\lambda(x) \to \phi(x)$ para todo $x \in X$.

(e) A topologia fraca-estrela é de Hausdorff.

Para finalizar esta seção, enunciamos um importante Teorema a respeito da topologia fraca-estrela.

Teorema 1.3.9 (Banach-Alaoglu). *Para todo espaço normado X, B_{X^*} é compacta na topologia w^* de X^*.*

1.4 Espaços estritamente convexos

Nesta seção, trataremos de maneira elementar do conceito de espaço estritamente convexo. Basearemo-nos em [Meg98] e indicamos esta referência para mais detalhes sobre o assunto.

Dado um espaço normado X, é tentador pensar na sua bola unitária fechada B_X como uma figura redonda e suave, análoga a um círculo em $\mathbb{R}^2$. Porém, não são todos os espaços normados que possuem bolas com essa característica. De fato, bolas em ℓ_1^2 e ℓ_∞^2 estão longe de ser assim.

Nesta seção e na próxima veremos condições que um espaço normado deve satisfazer para que sua bola seja aproximadamente da forma como a imaginamos intuitivamente. O conceito de espaço estritamente convexo, definido abaixo, está relacionado à não-existência de segmentos de reta não-triviais na esfera do espaço normado, como veremos mais adiante.

Definição 1.4.1. Um espaço normado X é dito *estritamente convexo* se $||tx_1 + (1-t)x_2|| < 1$ sempre que x_1 e x_2 forem elementos distintos de S_X e $t \in (0,1)$.

A seguir, veremos alguns exemplos de espaços normados que são estritamente convexos e outros que não são estritamente convexos.

Exemplo 1.4.2. (a) Os espaços normados c_0, ℓ_∞ e ℓ_∞^n, para $n \geq 2$, não são estritamente convexos.

Para todos os casos, tomando $x_1 = e_1 + e_2$, $x_2 = e_1 - e_2$ e $t = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\left|\left|\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right|\right|_\infty = 1,$$

donde segue a conclusão.

(b) Os espaços normados ℓ_1 e ℓ_1^n, para $n \geq 2$, não são estritamente convexos.

Basta observar que em ambos os casos

$$\left|\left|\frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2}\right|\right|_1 = 1.$$

Mostraremos a seguir que todo espaço com produto interno é estritamente convexo. Porém, antes disso, será feita uma caracterização que facilitará este trabalho.

Proposição 1.4.3. *Seja X um espaço normado. São equivalentes:*

(a) X é estritamente convexo.

(b) $\dfrac{||x+y||}{2} < 1$ sempre que $x, y \in S_X$ e $x \neq y$.

(c) $||x+y|| < ||x|| + ||y||$ para quaisquer $x, y \in X$ linearmente independentes (LI).

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) É claro.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sejam $t \in (0,1)$ e $x, y \in S_X$ tais que $x \neq y$. Se $t = \frac{1}{2}$, vale que $\dfrac{||x+y||}{2} < 1$ por hipótese. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $0 < t < \frac{1}{2}$ (o caso $\frac{1}{2} < t < 1$ segue por um argumento análogo). Considere $\eta \doteq 2t \in (0,1)$. Como B_X é convexo, $y \in B_X$ e por hipótese $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\right) \in B_X^{\circ}$, o Lema 1.1.9 implica que $\eta\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\right) + (1-\eta)y \in B_X^{\circ}$. Portanto, $tx + (1-t)y \in B_X^{\circ}$, ou seja $||tx + (1-t)y|| < 1$, como queríamos mostrar.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sejam $x, y \in X$ linearmente independentes. Dessa forma, são ambos não-nulos e $\dfrac{x}{||x||} \neq \dfrac{y}{||y||}$. Assim, por hipótese,

$$\left|\left|t\frac{x}{||x||} + (1-t)\frac{y}{||y||}\right|\right| < 1 \text{ para todo } t \in (0,1).$$

Em particular, para $t = \dfrac{||x||}{||x|| + ||y||} \in (0,1)$, vale que

$$\left|\left|\frac{x}{||x|| + ||y||} + \frac{y}{||x|| + ||y||}\right|\right| < 1,$$

ou seja, $||x + y|| < ||x|| + ||y||$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sejam $x, y \in S_X$, distintos. Se x e y forem LI, então $\dfrac{x}{2}$ e $\dfrac{y}{2}$ também o serão, e por hipótese,

$$\left|\left|\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right|\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Vamos assumir então que x e y são linearmente dependentes, isto é, existe $c \in S_{\mathbb{K}}$ tal que $x = cy$. Suponhamos, por absurdo, que

$$\left|\left|\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right|\right| = \left|\left|\frac{cy}{2} + \frac{y}{2}\right|\right| = 1,$$

donde obtemos $|c + 1| = 2$, o que implica

$$\sqrt{(1 + \mathrm{Re}(c))^2 + \mathrm{Im}(c)^2} = 2,$$

ou seja, $(\mathrm{Re}(c)^2 + \mathrm{Im}(c)^2) + 1 + 2\,\mathrm{Re}(c) = 2 + 2\,\mathrm{Re}(c) = 4$. Assim, $\mathrm{Re}(c) = 1$, e dessa forma $c = 1$. Absurdo, pois x_1 e x_2 eram distintos, encerrando a prova. □

Proposição 1.4.4. *Todo espaço com produto interno é estritamente convexo.*

Demonstração. Seja X um espaço com produto interno. Consideremos x e $y \in S_X$ distintos. Pela Lei do Paralelogramo,

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) = 4,$$

e assim

$$\left(\frac{||x + y||}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{||x - y||}{2}\right)^2 < 1.$$

Portanto, $\dfrac{||x + y||}{2} < 1$ e a conclusão segue do item (b) da Proposição 1.4.3. □

Para finalizar a seção, veremos que a convexidade estrita de um espaço normado X é equivalente à não-existência de segmentos de reta não-triviais em S_X.

Lembremos que um segmento de reta (fechado) em um espaço normado X é um conjunto do tipo $\{tx_1 + (1 - t)x_2 : t \in [0,1]\}$, para $x_1, x_2 \in X$. O segmento é dito não-trivial se $x_1 \neq x_2$. Denotamos

$$[x_1; x_2] \doteq \{tx_1 + (1 - t)x_2 : t \in [0,1]\}.$$

Proposição 1.4.5. *Um espaço normado X é estritamente convexo se, e somente se, S_X não contêm segmentos de reta não-triviais.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se X é estritamente convexo, dados $x_1, x_2 \in S_X$ distintos, vale que $tx_1 + (1 - t)x_2 \notin S_X$ para todo $t \in (0,1)$. Em particular, S_X não contêm $[x_1; x_2]$.

($\Leftarrow$) Dados x_1, $x_2 \in S_X$ distintos, por hipótese S_X não contêm $[x_1; x_2]$, e então existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $t_0x_1 + (1-t_0)x_2 \in B_X^{\text{o}}$. Dado $t \in (0,1)$ arbitrário, vamos mostrar que $||tx_1 + (1-t)x_2|| < 1$. Suponha que $t < t_0$, sem perda de generalidade (um argumento análogo pode ser usado para o caso $t > t_0$). Temos que $\dfrac{t}{t_0} \in (0,1)$ e pelo Lema 1.1.9,

$$\frac{t}{t_0}(t_0x_1 + (1-t_0)x_2) + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) x_2 \in B_X^{\text{o}},$$

ou seja, $||tx_1 + (1-t)x_2|| < 1$. Portanto, X é estritamente convexo. □

1.5 Espaços uniformemente convexos

Nesta seção trataremos do conceito de espaço uniformemente convexo. Novamente, introduziremos o assunto apenas de maneira elementar, com o objetivo de utilizá-lo no capítulo 3 do trabalho. Para mais detalhes, indicamos as referências [Meg98] e [BPT15], nas quais esta seção foi baseada.

Na seção anterior, vimos que em espaços estritamente convexos X os pontos médios de segmentos não-triviais com extremos na esfera unitária S_X devem estar em B_X^{o}, isto é, *dentro* de S_X. Porém, podemos ainda nos perguntar o *quão dentro* da esfera os pontos médios estão, se mantivermos os extremos dos segmentos a uma distância mínima definida. Estes pontos podem se aproximar indefinidamente da esfera unitária, ou sempre se mantêm a uma distância segura dela? Quando ocorre o segundo caso, o espaço é denominado *uniformemente convexo*, como definimos abaixo.

Definição 1.5.1. Um espaço normado X é dito *uniformemente convexo* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$x, y \in S_X, \frac{||x+y||}{2} > 1 - \delta(\epsilon) \Rightarrow ||x-y|| < \epsilon.$$

Tendo em vista a Proposição 1.4.3, é claro que todo espaço uniformemente convexo é estritamente convexo. Dessa forma, os espaços ℓ_1, ℓ_∞, c_0, ℓ_1^n e ℓ_∞^n, para $n \geq 2$, não são uniformemente convexos, uma vez que não são estritamente convexos, como mostrado na seção anterior.

Observação 1.5.2. Na definição acima, podemos substituir a esfera unitária S_X pela bola unitária fechada, B_X. Em outras palavras, um espaço normado X é uniformemente convexo se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$x, y \in B_X, \frac{||x+y||}{2} > 1 - \delta(\epsilon) \Rightarrow ||x-y|| < \epsilon. \tag{1.5.1}$$

Vamos provar esta afirmação. É claro que se um espaço normado satisfaz a condição acima, então deve ser uniformemente convexo. Resta mostrar o outro lado.

Suponha que X seja uniformemente convexo, e considere $0 < \epsilon < 1$. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x, y \in S_X, \frac{||x+y||}{2} > 1 - \delta_1 \Rightarrow ||x-y|| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Mostraremos que tomando $\delta \doteq \min\left\{\dfrac{\epsilon}{6}, \dfrac{\delta_1}{3}\right\}$, a contrapositiva da condição (1.5.1) é obedecida.

Suponhamos que $x, y \in B_X$ sejam tais que $||x-y|| \geq \epsilon$. Observemos que se $||x|| \leq 1-2\delta$ ou $||y|| \leq 1-2\delta$, temos

$$\frac{||x+y||}{2} \leq \frac{||x||}{2} + \frac{||y||}{2} \leq 1-\delta,$$

como queríamos. Vamos supor então que $1-2\delta < ||x||, ||y|| \leq 1$. Como $\delta \leq \frac{1}{3}$, x e y são vetores não-nulos e assim podemos tomar

$$x' = \frac{x}{||x||},\ y' = \frac{y}{||y||}.$$

Temos que $||x'-x|| = 1-||x|| < 2\delta$ e analogamente $||y'-y|| < 2\delta$, donde vem

$$||x'-y'|| \geq ||x-y|| - ||x'-x|| - ||y'-y|| \geq \epsilon - 4\delta \geq \epsilon - \frac{4\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Pela escolha de δ_1, podemos concluir que $\dfrac{||x'+y'||}{2} \leq 1-\delta_1$. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{||x+y||}{2} &= \frac{||x-x'+x'+y'-y'+y||}{2} \\ &\leq \frac{||x-x'||}{2} + \frac{||x'+y'||}{2} + \frac{||y'-y||}{2} \\ &\leq 2\delta + 1 - \delta_1 \leq 1 - \frac{\delta_1}{3} \leq 1-\delta,\end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

A seguir mostramos que espaços com produto interno sempre são uniformemente convexos, resultado que generaliza a Proposição 1.4.4.

Proposição 1.5.3. *Todo espaço com produto interno é uniformemente convexo.*

Demonstração. Seja X um espaço com produto interno. Dado $\epsilon > 0$, se $x, y \in B_X$ são tais que $||x-y|| \geq \epsilon$, pela Lei do Paralelogramo,

$$\frac{||x+y||^2}{4} = \frac{||x||^2}{2} + \frac{||y||^2}{2} - \frac{||x-y||^2}{4} \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Basta então tomar $\delta(\epsilon) \doteq 1 - \sqrt{1-\dfrac{\epsilon^2}{4}}$ para dado $\epsilon > 0$ na Definição 1.5.1 (notemos que se $||x-y|| \geq \epsilon$ com $x, y \in B_X$, obrigatoriamente $\epsilon \leq 2$). □

Apresentamos agora uma caracterização de espaços uniformemente convexos usada com frequência.

Proposição 1.5.4. *Um espaço normado X é uniformemente convexo se, e somente se, para quaisquer sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S_X satisfazendo a $\left|\left|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right|\right| \to 1$, vale que $||x_n - y_n|| \to 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$x, y \in B_X, \frac{||x+y||}{2} > 1 - \delta(\epsilon) \Rightarrow ||x-y|| < \epsilon.$$

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em S_X tais que $||\frac{1}{2}(x_n + y_n)|| \to 1$. Dessa forma, para dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{||x_n + y_n||}{2} > 1 - \delta(\epsilon) \Rightarrow ||x_n - y_n|| < \epsilon,$$

o que encerra a demonstração deste lado.

($\Leftarrow$) Suponha que X não seja uniformemente convexo. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem x_n e y_n em S_X tais que

$$\frac{||x_n + y_n||}{2} > 1 - \frac{1}{n} \text{ e } ||x_n - y_n|| \geq \epsilon_0.$$

Absurdo, pois nesse caso teríamos que $||\frac{1}{2}(x_n + y_n)|| \to 1$ mas $||x_n - y_n|| \nrightarrow 0$. $\square$

Dois conceitos relacionados que também serão usados no capítulo 3 do trabalho são os de *ponto e espaço localmente uniformemente convexo*, definidos abaixo.

Definição 1.5.5. Seja X um espaço normado. Um ponto $x \in S_X$ é dito *localmente uniformemente convexo (ponto LUR)* se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$y \in S_X, \frac{||x+y||}{2} > 1 - \delta(\epsilon) \Rightarrow ||x-y|| < \epsilon.$$

Definição 1.5.6. Um espaço normado X é dito *localmente uniformemente convexo (espaço LUR)* se todo ponto de S_X é ponto LUR.

É claro que se um espaço normado X é uniformemente convexo, então todo ponto da sua esfera unitária é LUR, ou seja, X é LUR. A recíproca não vale em geral, já que no caso dos espaços LUR para cada $\epsilon > 0$ existe uma constante $\delta(\epsilon)$ para cada ponto da esfera unitária considerado. Observemos também que todo espaço LUR é estritamente convexo.

1.6 Somabilidade em espaços normados

Séries em espaços normados tratam-se de limites de somas finitas. Sabemos, por exemplo, que elas dependem em geral da ordem escolhida para somar. Uma pergunta relacionada a este tema é se há uma forma de definir somas em conjuntos de índices arbitrários, enumeráveis ou não. Seria interessante que essa soma dependesse apenas da família a ser somada, e não mais da ordem. O conceito de somabilidade é uma forma de fazer isso. Este conceito permite ainda obter demonstrações de propriedades importantes de séries.

Procuraremos nesta seção introduzir a somabilidade e demonstrar algumas de suas propriedades. Em seguida, aplicaremos tais resultados para obter propriedades do espaço de Banach c_0, usado com frequência ao longo do trabalho, principalmente no capítulo 3.

Sejam X um espaço normado, I um conjunto e $(x_i)_{i\in I}$ uma família em X. Definamos

$$\Lambda \doteq \{F \subset I : F \text{ é finito}\}$$

e

$$\begin{aligned} S\colon \Lambda &\to X \\ F &\mapsto \sum_{i\in F} x_i. \end{aligned}$$

Observemos aqui que por definição $\sum_{i\in\emptyset} x_i \doteq 0$. Se considerarmos $\preceq$ como sendo a relação de inclusão em Λ, isto é,

$$(F_1 \preceq F_2 \Leftrightarrow F_1 \subset F_2) \text{ para todos } F_1, F_2 \in \Lambda,$$

temos que $(\Lambda, \preceq)$ é um conjunto dirigido e S é uma rede em X.

Usaremos a notação dada acima no decorrer desta seção. Sendo assim, a menos que se diga o contrário, X é um espaço normado sobre $\mathbb{K}$, I é um conjunto e $(x_i)_{i\in I}$ é uma família em X. O conjunto Λ será dirigido pela relação de inclusão e S é a rede definida anteriormente. Denotaremos esta rede por $(S_F)_{F\in\Lambda}$.

Definição 1.6.1. A família $(x_i)_{i\in I}$ é dita *somável* se a rede $(S_F)_{F\in\Lambda}$ converge.

Observação 1.6.2. Note que, se existir, o limite da rede $(S_F)_{F\in\Lambda}$ é único, pois X é espaço de Hausdorff.

A Proposição abaixo apenas traduz a convergência da rede $(S_F)_{F\in\Lambda}$:

Proposição 1.6.3. *São equivalentes:*

(i) A família $(x_i)_{i\in I}$ é somável e $S_F \to x$.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $F_0 \subset I$ finito tal que se $F \supset F_0$ for finito, então $\left\|\sum_{i\in F} x_i - x\right\| < \epsilon$.

Note que se I for finito qualquer família $(x_i)_{i\in I}$ em X é somável e vale que $\lim S_F = \sum_{i\in I} x_i$. Então, sem perigo de confusão no caso de índices finitos, podemos a partir de agora denotar $\lim S_F \doteq \sum_{i\in I} x_i$, para *qualquer* conjunto de índices I e família $(x_i)_{i\in I}$ em X, no caso da família ser somável.

Proposição 1.6.4. *Sejam $I_1, I_2 \subset I$ tais que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ e $I_1 \cup I_2 = I$. Se $(x_i)_{i\in I_1}$ e $(x_i)_{i\in I_2}$ são somáveis, então $(x_i)_{i\in I}$ é somável e $\sum_{i\in I_1} x_i + \sum_{i\in I_2} x_i = \sum_{i\in I} x_i$.*

Demonstração. Considere $\epsilon > 0$. Como $(x_i)_{i\in I_1}$ e $(x_i)_{i\in I_2}$ são somáveis, existem F_0^1 e F_0^2 subconjuntos finitos de I_1 e I_2, respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} I_1 \supset F_1 \supset F_0^1,\ F_1 \text{ finito} &\Rightarrow \left\|\sum_{i\in F_1} x_i - \sum_{i\in I_1} x_i\right\| < \frac{\epsilon}{2}\,; \\ I_2 \supset F_2 \supset F_0^2,\ F_2 \text{ finito} &\Rightarrow \left\|\sum_{i\in F_2} x_i - \sum_{i\in I_2} x_i\right\| < \frac{\epsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Definamos $F_0 \doteq F_0^1 \cup F_0^2$ e seja $F \supset F_0$ subconjunto finito de I. Notemos que $F = (F \cap I_1) \cup (F \cap I_2)$ e $(F \cap I_1) \cap (F \cap I_2) = \emptyset$, donde vem

$$\sum_{i \in F} x_i = \sum_{i \in F \cap I_1} x_i + \sum_{i \in F \cap I_2} x_i. \tag{1.6.2}$$

Como $F \cap I_1 \supset F_0^1$ e $F \cap I_2 \supset F_0^2$, por (1.6.1),

$$\left\| \sum_{i \in F \cap I_1} x_i - \sum_{i \in I_1} x_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}\,;$$
$$\left\| \sum_{i \in F \cap I_2} x_i - \sum_{i \in I_2} x_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Pelas desigualdes acima e (1.6.2), obtemos

$$\left\| \sum_{i \in F} x_i - (\sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_2} x_i) \right\| < \epsilon,$$

donde segue a conclusão desejada. $\square$

Quando X é um espaço de Banach, vale um pouco mais:

Proposição 1.6.5. *Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto. Suponha que a família $(x_i)_{i \in I}$ em X seja somável. Se $I_1, I_2 \subset I$ são tais que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ e $I_1 \cup I_2 = I$, então $(x_i)_{i \in I_1}$ e $(x_i)_{i \in I_2}$ são somáveis e $\sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_2} x_i = \sum_{i \in I} x_i$.*

Demonstração. Para $j = 1, 2$, sejam $\Lambda^{(j)} = \{F \subset I_j : F \text{ é finito}\}$ e $S^{(j)} : \Lambda^{(j)} \ni F \mapsto \sum_{i \in F} x_i \in X$. Vamos verificar que $(x_i)_{i \in I_1}$ é somável, mostrando que a rede $S^{(1)}$ é de Cauchy. Para isso, considere $\epsilon > 0$. Como $(x_i)_{i \in I}$ é somável, existe $F_0 \subset I$ finito tal que se $F_1, F_2 \supset F_0$ são finitos, então

$$\left\| \sum_{i \in F_1} x_1 - \sum_{i \in F_2} x_i \right\| < \epsilon. \tag{1.6.3}$$

Seja $F_0' \doteq F_0 \cap I_1$. Dados $F_1', F_2' \supset F_0'$ subconjuntos finitos de I_1, vale que

$$\left\| \sum_{i \in F_1'} x_1 - \sum_{i \in F_2'} x_i \right\| = \left\| \sum_{i \in F_1' \cup (F_0 \setminus I_1)} x_i - \sum_{i \in F_2' \cup (F_0 \setminus I_1)} x_i \right\|.$$

Observando que $F_1' \cup (F_0 \setminus I_1)$ e $F_2' \cup (F_0 \setminus I_1)$ são subconjuntos finitos de I que contêm F_0, por (1.6.3) teremos

$$\left\| \sum_{i \in F_1'} x_1 - \sum_{i \in F_2'} x_i \right\| < \epsilon.$$

Portanto, a rede $S^{(1)}$ é de Cauchy, e $(x_i)_{i \in I_1}$ é somável, uma vez que X é espaço de Banach. Um argumento análogo mostra que $(x_i)_{i \in I_2}$ também é somável. Pela Proposição 1.6.4, segue que $\sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_2} x_i = \sum_{i \in I} x_i$. $\square$

A Proposição abaixo dá uma condição suficiente para que uma família indexada nos naturais seja somável, usando a convergência absoluta de séries.

Proposição 1.6.6. *Se X é um espaço de Banach e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma família em X tal que $\sum_{i=1}^{\infty}||x_i|| < \infty$, então $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é somável.*

Demonstração. Vamos mostrar que a rede $(S_F)_{F\in\Lambda}$ é de Cauchy. Para isso, considere $\epsilon > 0$. Então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $M, N \in \mathbb{N}$,

$$M > N \geq i_0 \Rightarrow \sum_{i=N+1}^{M} ||x_i|| < \epsilon. \tag{1.6.4}$$

Seja $F_0 = \{1, ..., i_0\}$. Se $F_1, F_2 \supset F_0$ são finitos, temos

$$\left|\left|\sum_{i\in F_1} x_i - \sum_{i\in F_2} x_i\right|\right| = \left|\left|\sum_{i\in F_1} x_i + \sum_{i\in F_2} -x_i\right|\right| = \left|\left|\sum_{i\in F_1\cup F_2} y_i\right|\right|,$$

em que

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } i \in F_1 \setminus F_2 \\ 0, & \text{se } i \in F_1 \cap F_2 \\ -x_i, & \text{se } i \in F_2 \setminus F_1. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left|\left|\sum_{i\in F_1} x_i - \sum_{i\in F_2} x_i\right|\right| &\leq \sum_{i\in F_1\cup F_2} ||y_i|| \\ &= \sum_{i\in (F_1\cup F_2)\setminus F_0} ||y_i|| \\ &\leq \sum_{i\in (F_1\cup F_2)\setminus F_0} ||x_i||. \end{aligned}$$

Seja $M_0 > \text{máx}\{n : n \in F_1 \cup F_2\} \geq i_0$. Então

$$\begin{aligned} \left|\left|\sum_{i\in F_1} x_i - \sum_{i\in F_2} x_i\right|\right| &\leq \sum_{i\in (F_1\cup F_2)\setminus F_0} ||x_i|| \\ &\leq \sum_{i=i_0+1}^{M_0} ||x_i|| \\ &\overset{(1.6.4)}{<} \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(S_F)_{F\in\Lambda}$ é rede de Cauchy e, como X é espaço de Banach, converge. Assim, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é somável. □

Se $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma família em X, chamamos de *série formal* a sequência das somas parciais $(\sum_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbb{N}}$. A série formal de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é denotada $\sum_n x_n$, ou mesmo $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, quando não há perigo de confusão.

Definição 1.6.7. Sejam X um espaço normado e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma família em X. A série formal $\sum_n x_n$ é dita *incondicionalmente convergente* se para toda permutação π de $\mathbb{N}$ vale que $\sum_n x_{\pi(n)}$ converge.

É bem conhecido que se uma série formal $\sum_n x_n$ em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é incondicionalmente convergente, então $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ para toda π permutação de $\mathbb{N}$. Na verdade, isso vale para espaços normados em geral, como veremos abaixo.

Proposição 1.6.8. *Se X é um espaço normado e a série formal $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente, então $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ para toda permutação π de $\mathbb{N}$.*

Demonstração. Como $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente, dados $f \in X^*$ e π permutação de $\mathbb{N}$, $f(\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{\pi(i)})$. Em particular, $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_{\pi(i)})$ converge para toda permutação π de $\mathbb{N}$. Portanto, a série formal $\sum_n f(x_n)$ em $\mathbb{K}$ é incondicionalmente convergente e, como já observado, isso implica que $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{\pi(i)})$ para toda permutação π. Mostramos assim que dada uma permutação $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, vale que $f(\sum_{=1}^{\infty} x_i) = f(\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)})$ para todo $f \in X^*$, e pelo Corolário 1.1.17, $\sum_{=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$. □

Dada uma família $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no espaço normado X, a priori poderia não existir relação entre a sua somabilidade e a convergência da série formal $\sum_n x_n$. Mesmo que a família seja somável e a série convergente, será verdade que $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$? Veremos na proposição seguinte que a somabilidade da família é equivalente à convergência *incondicional* da série formal $\sum_n x_n$, e nesse caso teremos a igualdade dos dois valores de soma. Portanto, o conceito de somabilidade é mais forte do que a simples convergência, no caso do conjunto de índices $\mathbb{N}$.

Proposição 1.6.9. *Seja X um espaço normado. Uma família $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em X é somável se, e somente se, a série formal $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente. Nesse caso, vale que $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seja somável. Considere $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $M_n \doteq \{\pi(1), ..., \pi(n)\}$ e a aplicação

$$\begin{aligned} M \colon \mathbb{N} &\to \Lambda \\ n &\mapsto M_n. \end{aligned}$$

Considerando $\mathbb{N}$ munido da sua ordem usual, a função M é crescente e cofinal. Teremos então que a composição $S \circ M$ é uma subrede de S. Denotamos tal subrede por $(S_{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Assim, vale que $\lim S_{F_n} = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{i\in M_n} x_i - \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} - \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \right\| < \epsilon.$$

Portanto, $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ para toda $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutação. Em particular, $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente.

($\Leftarrow$) Assumamos que $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente. Suponha, por absurdo, que a família $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ não seja somável a $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $F \subset \mathbb{N}$ finito, existe $c(F) \subset \mathbb{N}$ finito satisfazendo a

$$F \subset c(F) \text{ e } \left\| \sum_{i\in c(F)} x_i - \sum_{i=1}^{\infty} x_i \right\| \geq \epsilon.$$

Vamos definir recursivamente uma sequência $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$c_1 \doteq c(\{1\});$$

$$c_n \doteq c(c_{n-1} \cup \{n\}) \text{ se } n > 1.$$

Por construção, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que:

(I) c_n é conjunto finito;

(II) $n \in c_n$;

(III) $c_{n-1} \subset c_n$, se $n > 1$;

(IV) $||\sum_{i\in c_n} x_i - \sum_{i=1}^{\infty} x_i|| \geq \epsilon$.

Descreveremos agora uma listagem dos naturais. Primeiro, listemos os elementos de c_1 em ordem crescente. Em seguida, os elementos de c_2 ainda não listados, também em ordem crescente. Depois, os de c_3, e assim sucessivamente. Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a permutação que lista $\mathbb{N}$ dessa maneira. Notemos que, devido a (III), se E_n denotar o número de elementos de c_n, então $\sigma(\{1, ..., E_n\}) = c_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por hipótese e pela Proposição 1.6.8, vale que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)}$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{\infty} x_i\right|\right| < \epsilon. \tag{1.6.5}$$

Seja E_N o número de elementos de c_N. Por (II) e (III), $\{1, ..., N\} \subset c_N$, e então $E_N \geq N$. Além disso, como já observado, $\sum_{i\in c_N} x_i = \sum_{i=1}^{E_N} x_{\sigma(i)}$. Tendo em vista (1.6.5) e (IV), chegamos a uma contradição. Logo, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é somável e $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$. □

É claro que o conteúdo das Proposições 1.6.6, 1.6.8 e 1.6.9 continua verdadeiro, com os ajustes adequados, se o conjunto $\mathbb{N}$ for trocado por um conjunto infinito enumerável qualquer:

Proposição 1.6.10. *Se X é um espaço de Banach, A é um conjunto infinito enumerável e $(x_i)_{i\in A}$ é uma família em X tal que $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_{\pi(i)}|| < \infty$ para alguma $\pi : \mathbb{N} \to A$ bijeção, então $(x_i)_{i\in A}$ é somável.*

Proposição 1.6.11. *Sejam X um espaço normado, A um conjunto infinito enumerável e $(x_i)_{i\in A}$ uma família em X. São equivalentes:*

(i) $(x_i)_{i\in A}$ *é somável.*

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ *converge para toda* $\pi : \mathbb{N} \to A$ *bijeção.*

Nesse caso, $\sum_{i\in A} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ para qualquer $\pi : \mathbb{N} \to A$ bijeção.

Notemos agora que das Proposições 1.6.6 e 1.6.9 segue o seguinte Corolário.

Corolário 1.6.12. *Se X um espaço de Banach e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma família em X tal que $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i|| < \infty$, então $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente.*

A recíproca do Corolário anterior valerá se, e somente se, o espaço de Banach X tiver dimensão finita. Este resultado é consequência do famoso Teorema de Dvoretzky-Rogers (vide por exemplo [BPT15]).

No que segue, aplicaremos os resultados obtidos acima para o espaço de Banach c_0, e obteremos algumas propriedades que serão usadas no trabalho. De agora em diante, para tornar a notação mais limpa, denotaremos por $||.||$ a norma de elementos de c_0, em vez de escrever sempre $||.||_\infty$.

Para começar, lembremos a definição de base de Schauder em um espaço de Banach:

Definição 1.6.13. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço de Banach X é dita uma *base de Schauder* para X se, para todo $x \in X$, existir uma única sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.

Lembremos ainda que dado $n \in \mathbb{N}$, e_n denota a sequência que tem como i-ésima coordenada δ_{ni}, para todo $i \in \mathbb{N}$. É bem conhecido que a sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para c_0. De fato, dado $x \in c_0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a única sequência em $\mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Para essa base de Schauder vale ainda uma propriedade adicional:

Proposição 1.6.14. *Dado $x \in c_0$, a série formal $\sum_n x_n e_n$ é incondicionalmente convergente.*

Demonstração. Seja $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação. Vamos mostrar que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(n)} e_{\pi(n)}$ converge. Considere $\epsilon > 0$. Como $x \in c_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \epsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, ..., n_0\} \subset \pi(\{1, ..., m\})$. É claro que, nesse caso, $n > m$ implica $\pi(n) > n_0$. Assim, se $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ forem tais que $m_0 > m_1 > m$, então

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{n=1}^{m_0} x_{\pi(n)} e_{\pi(n)} - \sum_{n=1}^{m_1} x_{\pi(n)} e_{\pi(n)}\right|\right| &= \left|\left|\sum_{n=m_1+1}^{m_0} x_{\pi(n)} e_{\pi(n)}\right|\right| \\ &= \sup_{m_1+1 \leq n \leq m_0} |x_{\pi(n)}| \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, a sequência das somas parciais $(\sum_n x_{\pi(n)} e_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como c_0 é espaço de Banach, segue que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(n)} e_{\pi(n)}$ converge para toda permutação π e, portanto, a série formal $\sum_n x_n e_n$ é incondicionalmente convergente. □

A Proposição acima combinada com a Proposição 1.6.9 nos permite concluir que para todo $x \in c_0$ a família $(x_n e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é somável. Isso torna possível definir, para um subconjunto qualquer $A \subset \mathbb{N}$, a aplicação $P_A : c_0 \to c_0$ dada por $P_A(x) = \sum_{n\in A} x_n e_n$ para cada $x \in c_0$, uma vez que a Proposição 1.6.5 garante que $(x_n e_n)_{n\in A}$ é somável.

Vamos verificar a seguir que para todos $x \in c_0$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_A(x))_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } n \in A \\ 0, & \text{se } n \notin A. \end{cases}$$

Para $x \in c_0$, seja $y \in c_0$ tal que $y_n = x_n$ se $n \in A$ e $y_n = 0$ se $n \notin A$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \epsilon$ se $n \geq n_0$. Seja $F_0 \doteq \{1, ..., n_0\} \cap A$. Então se $F \supset F_0$ for um subconjunto finito de A, teremos

$$\left|\left|\sum_{n\in F} x_n e_n - y\right|\right| = \sup_{n\in A\setminus F} |y_n| \leq \epsilon,$$

o que garante que $\sum_{n\in A} x_n e_n = y$, como queríamos.

Por fim, notemos que para todo $A \subset \mathbb{N}$ vale que P_A é linear, pelas propriedades de soma e produto por escalar de limites de redes em espaços normados (vide Proposição 1.2.10), e também $P_A \in \mathcal{L}(c_0, c_0)$. Além disso, se $A \neq \emptyset$ teremos $||P_A|| = 1$ e se $A = \emptyset$, $P_A = 0$.

Capítulo 2

Funcionais que atingem a norma e seus teoremas clássicos

Dado um espaço normado X, dizemos que o funcional $f \in X^*$ *atinge sua norma* se existe $x_0 \in B_X$ tal que $|f(x_0)| = ||f||$. Definimos ainda o conjunto

$$\mathcal{NA}_X \doteq \{f \in X^* : f \text{ atinge sua norma}\}.$$

Suponhamos agora que X seja um espaço de Banach. Um fato simples de notar é que se X é reflexivo, então $\mathcal{NA}_X = X^*$. De fato, o funcional nulo trivialmente atinge sua norma, e dado $f \in X^* \setminus \{0\}$, pelo Corolário 1.1.16, existe $\pi \in X^{**}$ tal que $||\pi|| = 1$ e $\pi(f) = ||f||$. Como X é reflexivo, existe $x \in X$ tal que $\pi = C_X(x)$. Então $1 = ||C_X(x)|| = ||x||$ e $||f|| = |C_X(x)(f)| = |f(x)|$, ou seja, f atinge sua norma em $x \in B_X$. A recíproca deste resultado é o famoso *Teorema de James*, demonstrado por R. James primeiro para espaços de Banach separáveis [Jam57], em 1957, e depois para o caso geral, em 1964 [Jam64].

Teorema de James. *Um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, todo funcional de X^* atinge sua norma.*

Não apresentaremos a demonstração do Teorema de James, pois esta é muito técnica e possui detalhes que fogem do escopo deste trabalho.

Inspirados pelo trabalho de James, R. Phelps e E. Bishop também começam a estudar funcionais que atingem a norma. Phelps percebeu que todo espaço de Banach clássico (isto é, os espaços da forma $C(K)$ ou $L_p(\mu)$, com K um compacto Hausdorff e μ uma medida) tinha a seguinte propriedade: o conjunto dos funcionais lineares e contínuos que atingem a norma é denso no dual. Em vista dos resultados de James, parecia a ele que espaços com tal propriedade eram *quase* reflexivos, razão pela qual ele os chamou de *subreflexivos* [Phe57]. Porém, um pouco depois, junto com Bishop, viria a descobrir que **todo** espaço de Banach é subreflexivo, resultado que ficou conhecido como *Teorema de Bishop-Phelps* [BP61].

Uma versão quantitativa do Teorema de Bishop-Phelps, que ficou conhecida como *Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás*, foi demonstrada por B. Bollobás em 1970 [Bol70]. Mais precisamente, Bollobás mostrou que para qualquer $0 < \epsilon < 1$, se $x \in S_X$ e $f \in S_{X^*}$ obedecem a $|1 - f(x)| < \epsilon^2/4$, é possível encontrar elementos $y \in S_X$ e $g \in S_{X^*}$ distando de menos de ϵ de x e f, respectivamente, e tais que g atinge sua norma em y.

Na primeira seção deste capítulo estudaremos conceitos e resultados elementares a respeito de funcionais que atingem a norma. Na segunda, apresentamos uma demonstração do Teorema de Bishop-Phelps e, na última, do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. Muitas das demonstrações e resultados aqui apresentados foram baseados em [Meg98].

2.1 Conceitos iniciais

Nesta seção estudaremos os conceitos básicos que serão utilizados no decorrer do capítulo. Para começar, definiremos o conceito de funcional suporte, noção que de certa forma generaliza a ideia de funcional que atinge a norma.

Definição 2.1.1. Sejam X um espaço normado e $A \subset X$. Dizemos que $f \in X^* \setminus \{0\}$ é um *funcional suporte* para A (ou que f *suporta* A) se existe $x_0 \in A$ tal que $\operatorname{Re} f(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in A\}$.

Para X e A nas condições da definição anterior, se $x_0 \in A$ for um ponto tal que existe $f \in X^* \setminus \{0\}$ satisfazendo a $\operatorname{Re} f(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in A\}$, diz-se também que x_0 é *ponto suporte* para A, ou que f suporta A em x_0.

Quando tratamos de espaços normados sobre $\mathbb{R}$, tomar a parte real de $f(x)$ é redundante, mas em alguns casos manteremos a notação $\operatorname{Re} f(x)$ por questões de pragmatismo e clareza, uma vez que muitos dos resultados e demonstrações seguintes valerão tanto se X é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ quanto sobre $\mathbb{C}$. Quando não for o caso, será explicitado.

Observação 2.1.2. Notemos que segue imediatamente da definição que se um espaço normado X tem um ponto suporte para algum subconjunto, então $X \neq \{0\}$.

Antes da proposição seguinte, observemos que se $x_0 \in B_X$ e $f \in X^*$, podemos encontrar um elemento $y_0 \in B_X$ tal que $|f(x_0)| = \operatorname{Re} f(y_0)$. De fato, basta tomar $y_0 = \lambda^{-1} x_0$, para $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ satisfazendo a $f(x_0) = \lambda |f(x_0)|$. Notemos ainda que dado $f \in X^*$, a desigualdade $\operatorname{Re} f(x) \leq |f(x)|$, para todo $x \in B_X$, implica que $\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\}$ existe.

Proposição 2.1.3. *Se X é um espaço normado e $f \in X^*$, então $||f|| = \sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\}$.*

Demonstração. Como $\operatorname{Re} f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in B_X$, temos

$$\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in B_X\},$$

e pela discussão acima, dado $x_0 \in B_X$, existe $y_0 \in B_X$ tal que $|f(x_0)| = \operatorname{Re} f(y_0)$, o que nos leva a concluir que

$$\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}.$$

□

Notemos que a proposição acima também implica que $||f|| = \sup\{|\operatorname{Re} f(x)| : x \in B_X\}$, já que $\operatorname{Re} f(x) \leq |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in B_X$.

Corolário 2.1.4. *Sejam X um espaço normado e $f \in X^* \setminus \{0\}$. Então f atinge sua norma se, e somente se, f suporta B_X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que f atinja sua norma. Então existe $x_0 \in B_X$ tal que $|f(x_0)| = ||f||$. Dessa forma, como já discutido, existe $y_0 \in B_X$ satisfazendo a $y_0 = \rho x_0$ para algum $\rho \in S_{\mathbb{K}}$ tal que $\operatorname{Re} f(y_0) = |f(x_0)| = ||f||$, e pela Proposição 2.1.3,

$$\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\} = ||f|| = |f(x_0)| = \operatorname{Re} f(y_0).$$

Como $f \neq 0$ por hipótese, concluímos que f suporta B_X em y_0.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que f suporta B_X em $x_0 \in B_X$, ou seja $\operatorname{Re} f(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\}$. Pela Proposição 2.1.3, $||f|| = \sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\} = \operatorname{Re} f(x_0)$. Logo,

$$||f|| \geq |f(x_0)| \geq \operatorname{Re} f(x_0) = ||f||,$$

o que implica $|f(x_0)| = ||f||$, isto é, f atinge a sua norma no ponto $x_0 \in B_X$. $\square$

Observação 2.1.5. Notemos que da demonstração acima podemos ainda concluir um pouco mais:

- Se $f \in X^* \setminus \{0\}$ atinge sua norma em $x_0 \in B_X$, então f suporta B_X em ρx_0, para algum $\rho \in S_{\mathbb{K}}$.
- Se $f \in X^* \setminus \{0\}$ suporta B_X em $x_0 \in B_X$, então f atinge sua norma em x_0.

A Proposição abaixo mostra que pontos suporte de um subconjunto sempre estarão na sua fronteira.

Proposição 2.1.6. *Se X é um espaço normado, $A \subset X$ e x_0 é ponto suporte para A, então $x_0 \in \partial A$.*

Demonstração. Como x_0 é ponto suporte para A, temos que $x_0 \in A$. Assim, basta mostrar que $x_0 \in A^{\complement} \cap B(x_0; r)$ para todo $r > 0$.

Consideremos então $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Por hipótese, existe $f \in X^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in A\}. \tag{2.1.1}$$

Agora, como $f \neq 0$, deve existir $0 \neq v \in X$ tal que $f(v) = 1$. O ponto $(x_0 + \frac{r}{2||v||}v) \in B(x_0; r)$ satisfaz a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} f\left(x_0 + \frac{r}{2||v||}v\right) &= \operatorname{Re} f(x_0) + \frac{r}{2||v||}\operatorname{Re} f(v) \\
&= \operatorname{Re} f(x_0) + \frac{r}{2||v||} \\
&> \operatorname{Re} f(x_0).
\end{aligned}$$

Portanto, tendo em vista (2.1.1), concluímos que $(x_0 + \frac{r}{2||v||}v) \in A^{\complement} \cap B(x_0; r)$, o que implica que $x_0 \in \partial A$, já que $r > 0$ era arbitrário. $\square$

Corolário 2.1.7. *Se X é um espaço normado e $f \in X^* \setminus \{0\}$ atinge sua norma em $x_0 \in B_X$, então $x_0 \in S_X$.*

Demonstração. Pela Observação 2.1.5, existe $\rho \in S_{\mathbb{K}}$ tal que f suporta B_X em ρx_0, e pela Proposição 2.1.6, $\rho x_0 \in \partial B_X = S_X$. Portanto, $x_0 \in S_X$. $\square$

Para finalizar, faremos uma observação que ajudará na demonstração de alguns resultados das seções seguintes.

Observação 2.1.8. Seja X um espaço normado sobre $\mathbb{C}$. Muitas vezes é de interesse estudar o espaço vetorial obtido ao restringir a operação de multiplicação de escalares em $\mathbb{C}$ por elementos de X ao corpo $\mathbb{R}$, mantendo a operação de soma. A norma de X claramente também será uma norma neste novo espaço. Denotaremos tal espaço normado por $X_{\mathbb{R}}$. Como X e $X_{\mathbb{R}}$ têm a mesma norma, vale que $B_X = B_{X_{\mathbb{R}}}$,$S_X = S_{X_{\mathbb{R}}}$ e que os espaços têm a mesma topologia. Em particular, os conjuntos abertos, fechados e limitados de ambos os espaços são os mesmos, assim como os interiores, fechos e fronteiras de subconjuntos. Vale ainda que a aplicação

$$\begin{aligned} R\colon X^* &\to X_{\mathbb{R}}^* \\ f &\mapsto \operatorname{Re} f \end{aligned}$$

define uma bijeção que preserva normas. A seguir mostraremos isso.

Primeiro observemos que dado $f \in X^*$, vale que $||f|| = \sup\{|\operatorname{Re} f(x)| : x \in B_{X_{\mathbb{R}}}\}$, pela Proposição 2.1.3. Então de fato $\operatorname{Re} f \in X_{\mathbb{R}}^*$ e R preserva normas. A injetividade segue pois se $f, g \in X^*$ são tais que $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$, então para cada $x_0 \in X$ temos $\operatorname{Re} f(x_0) = \operatorname{Re} g(x_0)$ e $\operatorname{Re} f(ix_0) = \operatorname{Re} g(ix_0)$, isto é,

$$-\operatorname{Im}(f(x_0)) = \operatorname{Re}(if(x_0)) = \operatorname{Re}(ig(x_0)) = -\operatorname{Im}(g(x_0)),$$

o que implica que $f(x_0) = g(x_0)$, e como $x_0 \in X$ era arbitrário, $f = g$. Por fim, para mostrar a sobrejetividade, dado $G \in X_{\mathbb{R}}^*$, definamos $g : X \to \mathbb{C}$ por $g(x) = G(x) - iG(ix)$, para cada $x \in X$. Temos que g é linear, pois se $x, y \in X$ e $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x + zy) &= g(x + ay + iby) \\ &= G(x + ay + iby) - iG(ix + iay - by) \\ &= G(x) + aG(y) + bG(iy) - iG(ix) - iaG(iy) + ibG(y) \\ &= g(x) + ag(y) + ib(G(y) - iG(iy)) \\ &= g(x) + zg(y). \end{aligned}$$

Além disso, $|g(x)| \leq |G(x)| + |G(ix)| \leq 2||G||_{X_{\mathbb{R}}^*} \cdot ||x||$ para todo $x \in X$, e então $g \in X^*$. Como $\operatorname{Re} g = G$, está mostrada a sobrejetividade de R.

É claro que se X for um espaço normado sobre $\mathbb{R}$, restringir a multiplicação por escalares a $\mathbb{R}$ não produz um espaço novo, e assim $X_{\mathbb{R}} = X$.

2.2 Teorema de Bishop-Phelps

Esta seção tem como principal objetivo a demonstração do Teorema de Bishop-Phelps, que afirma que para todo espaço de Banach X, vale que $\mathcal{NA}_X$ é denso em X^*. Este resultado foi demonstrado pela primeira vez no artigo [BP61], de 1961. Dois anos depois, em [BP63], Bishop e Phelps generalizaram e simplificaram os métodos utilizados no artigo anterior, obtendo uma demonstração mais elegante do Teorema. Basearemo-nos aqui em [Meg98] e nessa generalização, que permite obter outros resultados interessantes.

Definição 2.2.1. Um espaço normado X é dito *subreflexivo* se $\mathcal{NA}_X$ é denso em X^*.

Existem espaços normados incompletos subreflexivos e não-subreflexivos, como veremos a seguir.

Proposição 2.2.2. *Todo espaço com produto interno é subreflexivo.*

Demonstração. Seja Y um espaço com produto interno. Conforme a Proposição 1.1.8, existe um espaço de Hilbert H e uma imersão isométrica $J : Y \to H$ tal que $J(Y)$ é denso em H. Vamos identificar aqui os espaços $J(Y)$ e Y e dizer simplesmente que $Y \subset H$ e Y é denso em H.

Considere a aplicação $Q : H \to H^*$ dada por $Q(v) = f_v$. Pelo Teorema de Riesz-Fréchet e a discussão que o antecede, Q é bijeção, preserva normas e vale ainda que $Q(v_1 + v_2) = Q(v_1) + Q(v_2)$ para todos $v_1, v_2 \in H$. Logo, $Q(Y)$ é denso em H^*. Como Y é denso em H, da Proposição 1.1.12 temos que a aplicação $P : H^* \to Y^*$ dada por $P(f) = f\big|_Y$ é uma isometria, donde concluímos que $P(Q(Y))$ é denso em Y^*. Agora basta mostrar que todo funcional em $P(Q(Y))$ atinge a sua norma. Para isso, observemos que dado $f \in Q(Y)$, com $f = Q(u) = f_u, u \in Y$, f atinge sua norma em $\dfrac{u}{||u||} \in B_Y$ se $u \neq 0$ e em $0 \in B_Y$ se $u = 0$. Ou seja, para cada $f \in Q(Y)$ existe $v \in B_Y$ tal que $||f|| = |f(v)|$, e assim

$$|f\big|_Y(v)| = |f(v)| = ||f|| = ||P(f)|| = ||f\big|_Y||.$$

Portanto, $P(f)$ atinge sua norma para todo $f \in Q(Y)$ e, pela densidade de $P(Q(Y))$ em Y^*, segue que Y é subreflexivo. □

Com a Proposição 2.2.2 fica fácil construir exemplos de espaços normados incompletos subreflexivos. Basta considerar qualquer espaço com produto interno que não é espaço de Hilbert, como por exemplo $(c_{00}, ||.||_2)$, em que c_{00} denota o espaço vetorial das sequências quase-nulas de escalares em $\mathbb{K}$.

Em [Phe57] foi dado um exemplo de espaço normado incompleto que não é subreflexivo. Este exemplo não será apresentado aqui, pois faz uso de alguns resultados que fogem do escopo deste trabalho.

A seguir introduziremos os conceitos de cone e ponto suporte cônico, noções importantes para a demonstração do Teorema de Bishop-Phelps que apresentaremos.

Definição 2.2.3. Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto não-vazio $K \subset V$ é dito um *cone* em V se satisfizer as seguintes condições:

(i) K é convexo;

(ii) $tK \subset K$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(iii) $K \cap (-K) = \{0\}$.

Observação 2.2.4. É importante ressaltar que a nomenclatura *cone* é usada para se referir a diferentes conceitos, dependendo da referência. Por exemplo, Bishop e Phelps em [BP63] chamam de *cone convexo* um subconjunto que satisfaz apenas as condições (i) e (ii) dadas acima. Usamos aqui a notação de [Meg98].

Notemos que se V é um espaço vetorial e $K \subset V$ é um cone em V, o item (ii) da Definição 2.2.3 para $t = 0$ implica que $0K = \{0\} \subset K$, ou seja, $0 \in K$.

O nome *cone* não é por acaso. De fato, os sólidos que conhecemos como cones (infinitamente estendidos) em $\mathbb{R}^3$, com vértice na origem, também são cones segundo a Definição 2.2.3, como exemplificamos abaixo.

Exemplo 2.2.5. Considere, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, o cone sólido C infinitamente estendido em $\mathbb{R}^3$, definido por:

$$C = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{y}{b})^2} \leq z\Big\}.$$

Afirmamos que C é um cone (segundo a Definição 2.2.3) em $\mathbb{R}^3$.

Como $(0, 0, 0) \in C$, $C \neq \emptyset$. Mostraremos (i), (ii) e (iii):

(i) Sejam (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$. Vale que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2} &\leq z_1; \\ \sqrt{\left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2} &\leq z_2. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Vamos mostrar que $(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2, z_2)) \in C$, ou seja,

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2}{b}\right)^2} \leq \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2.$$

Para isso, definamos γ_1 e $\gamma_2 \in \mathbb{R}^2$ por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\doteq \lambda \left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}\right); \\ \gamma_2 &\doteq (1-\lambda) \left(\frac{x_2}{a}, \frac{y_2}{b}\right). \end{aligned}$$

Pela Desigualdade Triangular da norma $||.||_2$ em $\mathbb{R}^2$, $||\gamma_1 + \gamma_2||_2 \leq ||\gamma_1||_2 + ||\gamma_2||_2$, ou seja,

$$\begin{aligned} ||\gamma_1 + \gamma_2||_2 &= \sqrt{\left(\frac{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2}{b}\right)^2} \\ &\leq ||\gamma_1||_2 + ||\gamma_2||_2 \\ &= \lambda\sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2} + (1-\lambda)\sqrt{\left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2} \\ &\overset{(2.2.1)}{\leq} \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2. \end{aligned}$$

como queríamos.

(ii) Se $t = 0$, é claro que $tC = \{(0, 0, 0)\} \subset C$. Considere então $t > 0$ e $(x, y, z) \in tC$, ou seja, $(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}) \in C$. Isso implica que

$$\sqrt{\left(\frac{x}{ta}\right)^2 + \left(\frac{y}{tb}\right)^2} \leq \frac{z}{t}\,.$$

Multiplicando a desigualdade acima por t, vem

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \leq z,$$

e portanto $(x, y, z) \in C$, donde concluímos que $tC \subset C$.

(iii) Notemos que se $\pm(x, y, z) \in C$, então em particular $\pm z \geq 0$, o que implica que $z = 0$. Nesse caso, $\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \leq 0$, o que só ocorre se $x = y = 0$. Então $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, como queríamos mostrar.

Logo, C é um cone.

Outro exemplo simples de cone em $\mathbb{R}^n$ são as semi-retas (fechadas) iniciando na origem.

Em seguida daremos uma definição alternativa para cones, que nos ajudará em alguns dos resultados seguintes.

Proposição 2.2.6. *Sejam V um espaço vetorial e $\emptyset \neq K \subset V$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) K é um cone em V.

(b) $K \cap (-K) = \{0\}$ e dados $x, y \in K$ e $s, t \in \mathbb{R}$ com $s, t \geq 0$, vale que $sx + ty \in K$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Como K é cone em V, pelo item (iii) da Definição 2.2.3, vale automaticamente que $K \cap (-K) = \{0\}$. Agora sejam $x, y \in K$ e $s, t \in \mathbb{R}$ com $s, t \geq 0$. Pelo item (ii) da Definição 2.2.3, $2sx \in K$ e $2ty \in K$, e pela convexidade de K (item (i)),

$$\tfrac{1}{2}2sx + \tfrac{1}{2}2ty = sx + ty \in K.$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Para mostrar o item (i) da Definição 2.2.3, basta observar que para quaisquer $x, y \in K$ e $\lambda \in [0, 1]$, escolhendo $t = \lambda$ e $s = (1 - \lambda)$ na hipótese do item (b), obtemos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$. Para mostrar (ii) observemos que dado $t \geq 0$ e $s = 0$, pela mesma hipótese, $tx + 0x = tx \in K$ para todo $x \in K$. O item (iii) é direto. □

Note que se tivermos $x_0 \in A \subset X$, com X espaço normado, e K um cone em X, sempre valerá que $x_0 \in A \cap (x_0 + K)$, já que $0 \in K$. O caso em que também vale que $A \cap (x_0 + K) \subset \{x_0\}$, para K de interior não-vazio, é interessante para os resultados seguintes. A definição abaixo trata disso.

Definição 2.2.7. Sejam X um espaço normado, $A \subset X$ e $x_0 \in A$. Dizemos que x_0 é um *ponto suporte cônico* para A se existir um cone K de interior não-vazio em X tal que $A \cap (x_0 + K) = \{x_0\}$.

Nas condições da definição acima, também dizemos que K é um *cone suporte* para A, ou que $(x_0 + K)$ *suporta* A em x_0.

Seguem agora mais definições e resultados úteis para este capítulo.

Definição 2.2.8. Sejam X um espaço normado, $f \in S_{X^*}$ e $t > 1$. Definimos:

$$K(f, t) \doteq \{x \in X : ||x|| \leq \operatorname{Re} f(tx)\}.$$

Observemos que para quaisquer $f \in S_{X^*}$ e $t > 1$ vale que $0 \in K(f, t)$, e portanto sempre teremos $K(f, t) \neq \emptyset$. Neste ponto também é importante ressaltar que a existência de um $f \in S_{X^*}$ já implica automaticamente que $X \neq \{0\}$, fato que usaremos em algumas das demonstrações seguintes.

Proposição 2.2.9. *Sejam X um espaço normado, $f \in S_{X^*}$ e $t > 1$. Então $K(f,t)$ é um cone fechado com interior não-vazio.*

Demonstração. Já sabemos que $K(f,t) \neq \emptyset$. Como a aplicação $\operatorname{Re} f : X \ni x \mapsto \operatorname{Re} f(x) \in \mathbb{R}$ é contínua, segue que $F : X \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = ||x|| - t \operatorname{Re} f(x)$, para cada $x \in X$, é contínua. Logo, $F^{-1}((-\infty, 0]) = K(f,t)$ é fechado em X.

Observemos agora que

$$F^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in X : ||x|| < \operatorname{Re} f(tx)\} \subset K(f,t)$$

é aberto em X. Mostraremos em seguida que $F^{-1}((-\infty, 0)) \neq \emptyset$, o que nos permitirá concluir que $K(f,t)$ tem interior não-vazio. De fato, como $f \in S_{X^*}$, pela Proposição 2.1.3, $\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\} = 1$, e então existe $x_0 \in B_X$ tal que $\operatorname{Re} f(x_0) > \dfrac{1}{t}$, donde segue que $\operatorname{Re} f(tx_0) > 1 = ||x_0||$, ou seja, $x_0 \in F^{-1}((-\infty, 0))$. Então $K(f,t)^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$.

Resta mostrar que $K(f,t)$ é um cone. Usaremos para isso a caracterização de cone dada pelo item (b) da Proposição 2.2.6. Já sabemos que $0 \in K(f,t) \cap (-K(f,t))$. Por outro lado, se $z \in K(f,t) \cap (-K(f,t))$, ou seja, $\pm z \in K(f,t)$, então $|| \pm z|| \leq \operatorname{Re} f(\pm tz)$, donde concluímos que $z = 0$. Assim, $K(f,t) \cap (-K(f,t)) = \{0\}$. Considere agora $x, y \in K(f,t)$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, com $s_1, s_2 \geq 0$. Por definição, $||x|| \leq \operatorname{Re} f(tx)$ e $||y|| \leq \operatorname{Re} f(ty)$, o que implica

$$s_1||x|| = ||s_1 x|| \leq \operatorname{Re} f(ts_1 x);$$
$$s_2||y|| = ||s_2 y|| \leq \operatorname{Re} f(ts_2 y).$$

Somando as equações acima e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$||s_1 x + s_2 y|| \leq ||s_1 x|| + ||s_2 y|| \leq \operatorname{Re} f(t(s_1 x + s_2 y)).$$

Então $(s_1 x + s_2 y) \in K(f,t)$ e, pela Proposição 2.2.6, $K(f,t)$ é um cone. □

Observação 2.2.10. Notemos que embora $K(f,t)^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$ sempre que $f \in S_{X^*}$ e $t > 1$, podemos garantir que $0 \notin K(f,t)^{\mathrm{o}}$. De fato, caso $0 \in K(f,t)^{\mathrm{o}}$, teríamos que $B(0;\epsilon) \subset K(f,t)$ para algum $\epsilon > 0$. Como $X \neq \{0\}$, deve existir $x \in B(0;\epsilon) \setminus \{0\}$, e nesse caso $\pm x \in K(f,t)$, absurdo, pois $K(f,t)$ é um cone, como acabamos de provar.

Lema 2.2.11. *Sejam X um espaço normado, $A \subset X$, com A completo, $x \in A$, $t > 1$ e $f \in S_{X^*}$ tal que* $\operatorname{Re} f(A)$ *é limitado. Então existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 \in (x + K(f,t))$ e $(x_0 + K(f,t))$ suporta A em x_0.*

Demonstração. Definamos $B \doteq A \cap (x + K(f,t)) \subset A$. Como $x \in B$, temos que $B \neq \emptyset$. Pela Proposição 2.2.9, $K(f,t)$ é fechado, e assim $(x + K(f,t))$ é fechado. Como A é completo, em particular também é fechado. Logo, B é subconjunto fechado de um conjunto completo, o que implica que B é completo. Definamos em B a relação $\preceq$ dada por:

$$z \preceq w \Leftrightarrow (w - z) \in K(f,t), \text{ para todos } z, w \in B.$$

Afirmamos que a relação $\preceq$ é uma ordem parcial para B. De fato, se $b \in B$, então $(b - b) = 0 \in K(f,t)$. Ou seja, $b \preceq b$ para todo $b \in B$, e assim a relação é reflexiva. Para mostrar que $\preceq$ é antissimétrica, observemos que se $a, b \in B$ são tais que $a \preceq b$ e $b \preceq a$, então $\pm(a-b) \in K(f,t)$. Pela Proposição 2.2.9, $K(f,t)$ é cone, e então $a - b = 0$, ou seja, $a = b$. Sejam agora $a, b, c \in B$ tais que $a \preceq b$ e $b \preceq c$. Então $(b-a) \in K(f,t)$ e $(c-b) \in K(f,t)$. Novamente usando que $K(f,t)$ é cone, pela Proposição 2.2.6 $(b-a) + (c-b) = (c-a) \in K(f,t)$, e então $a \preceq c$. Mostramos assim que $(B, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Provaremos a seguir que B possui um elemento maximal segundo a ordem definida. Para isso, será mostrado que toda cadeia não-vazia em B possui cota superior, e a conclusão virá do Lema de Zorn.

Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia não-vazia em $(B, \preceq)$. Como $\preceq$ é uma ordem parcial, em particular $\mathcal{C}$ é um conjunto dirigido por tal relação. Considere a rede $(r_x)_{x\in\mathcal{C}}$ em $\mathbb{R}$ dada por $r_x = \operatorname{Re} f(x)$, para cada $x \in \mathcal{C}$. Notemos que se $z, y \in \mathcal{C}$ são tais que $z \preceq y$, então $(y-z) \in K(f,t)$, ou seja, $0 \leq ||y-z|| \leq \operatorname{Re} f(t(y-z))$, e em consequência $\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} f(y)$. Assim, vale que a rede é crescente. Como $\mathcal{C} \subset A$, por hipótese existe $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\operatorname{Re} f(x) \leq M$ para todo $x \in \mathcal{C}$, e dessa forma o conjunto $\{\operatorname{Re} f(x) : x \in \mathcal{C}\}$ admite um supremo $M_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Portanto, a rede $(r_x)_{x\in\mathcal{C}}$ em $\mathbb{R}$ também é limitada superiormente, e então convergirá para M_0. Em particular, será uma rede de Cauchy. Seja agora $(i_x)_{x\in\mathcal{C}}$ a rede "identidade"em B, isto é, $i_x = x$ para todo $x \in \mathcal{C}$. Vamos mostrar que $(i_x)_{x\in\mathcal{C}}$ é rede de Cauchy em B. Para isso, tome $\epsilon > 0$. Como $(r_x)_{x\in\mathcal{C}}$ é rede de Cauchy em $\mathbb{R}$, existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tal que

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C}, x_0 \preceq x_1, x_2 \Rightarrow |\operatorname{Re} f(x_1) - \operatorname{Re} f(x_2)| < \frac{\epsilon}{t}.$$

Consideremos então $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ satisfazendo a $x_0 \preceq x_1, x_2$. Como $\mathcal{C}$ é cadeia, podemos assumir sem perda de generalidade que $x_2 \preceq x_1$, então por definição $||x_1 - x_2|| \leq \operatorname{Re} f(t(x_1 - x_2)) < \epsilon$, e assim concluímos que a rede $(i_x)_{x\in\mathcal{C}}$ é de Cauchy. Como B é completo, existe $u \in B$ tal que $i_x \to u$. Mostraremos que u é cota superior para $\mathcal{C}$. Com efeito, considere $y \in \mathcal{C}$. Para todo $x \in \mathcal{C}$ tal que $y \preceq x$, vale que $(x-y) = (i_x - y) \in K(f,t)$. Como $K(f,t)$ é fechado, $(i_x - y) \to (u-y) \in K(f,t)$. Ou seja, $y \preceq u$ para todo $y \in \mathcal{C}$. Portanto, toda cadeia não-vazia em B tem cota superior e assim, pelo Lema de Zorn, existe $x_0 \in B$ elemento maximal para B. Pela definição de B, temos que $x_0 \in (x + K(f,t))$ e $x_0 \in A$. Resta mostrar que $(x_0 + K(f,t))$ suporta A em x_0, o que faremos em seguida.

Observemos que pela Proposição 2.2.9 já sabemos que $K(f,t)$ é um cone de interior não-vazio. Seja $y \in A \cap (x_0 + K(f,t))$. Da Proposição 2.2.6, podemos concluir que $K(f,t) + K(f,t) = K(f,t)$. Então

$$x_0 + K(f,t) \subset (x + K(f,t)) + K(f,t) = x + (K(f,t) + K(f,t)) = x + K(f,t),$$

donde vem que $y \in A \cap (x + K(f,t)) = B$ e $y \in (x_0 + K(f,t))$. Portanto, $x_0 \preceq y$, o que implica $x_0 = y$, pela maximalidade de x_0. A conclusão é que $A \cap (x_0 + K(f,t)) = \{x_0\}$, ou seja, $(x_0 + K(f,t))$ suporta A em x_0. $\square$

Sejam X um espaço de Banach e $C \subset X$. A pergunta-chave para a demonstração do Teorema de Bishop-Phelps que apresentaremos aqui é a seguinte:

É verdade que o conjunto dos funcionais que suportam C é denso em X^*?

Buscaremos no que segue condições sobre C para que essa pergunta seja afirmativamente respondida. Notemos que se a resposta for positiva quando $C = B_X$, pelo Corolário 2.1.4, o Teorema de

Bishop-Phelps seguirá. Observemos ainda que se $C = \emptyset$ ou $C = X$ não existirão funcionais suporte para C. Entretanto, não podemos garantir uma resposta positiva para a pergunta em geral nem se C for fechado, convexo, $C \neq \emptyset$ e $C \neq X$, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.2.12. Considere o espaço de Banach $X = \ell_1^2$, sobre $\mathbb{R}$, e seja $C = \mathbb{R} \times \{0\}$.

É claro que C é fechado e convexo. Vamos mostrar que $D \doteq \{f \in X^* : f \text{ suporta } C\}$ não é denso em X^*. Afirmamos que $D = \{f \in X^* : f(x,y) = by, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. De fato, dado $g \in D$, temos que $g(x,y) = ax + by$ para certos $a, b \in \mathbb{R}$. Existe $(x_0, 0) \in C$ tal que $g(x_0, 0) = \sup\{g(x,y) : (x,y) \in C\} = \sup\{g(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Logo, $g(x_0,0) = ax_0 \geq ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que implica que $a(x_0 - x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Escolhendo $x = x_0 + a$, obtemos $-a^2 \geq 0$, então $a = 0$. Como $g \neq 0$, temos que $b \neq 0$, e assim $g \in \{f \in X^* : f(x,y) = by, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Seja agora $g \in X^*$ tal que $g(x,y) = by$, $b \neq 0$. Então $g(x,0) = 0$ para todo $(x,0) \in C$, e assim $g \in D$.

Resta provar que D não é denso em X^*. Para isso, considere $f \in X^*$ dado por $f(x,y) = x$ para todo $(x,y) \in X$. Se $g \in D$, então $g(x,y) = by$ para certo $b \neq 0$. Assim,

$$||g - f|| \geq |g(1,0) - f(1,0)| = 1,$$

e portanto todos os elementos de D distam de f de mais de 1, o que implica que D não é denso em X^*.

Entretanto, se $X \neq \{0\}$, podemos garantir que o conjunto dos funcionais que suportam C é denso em X^* se C for não-vazio, fechado, convexo e limitado. Para mostrar isso, precisamos de alguns resultados auxiliares, que serão feitos a seguir.

Lema 2.2.13. *Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{R}$, f_1, $f_2 \in S_{X^*}$ e $\epsilon > 0$. Se $f_2(\operatorname{Ker} f_1 \cap B_X) \subset [-\epsilon/2, \epsilon/2]$, então*

$$||f_1 - f_2|| \leq \epsilon \text{ ou } ||f_1 + f_2|| \leq \epsilon.$$

Demonstração. Seja $F \doteq f_2\big|_{\operatorname{Ker} f_1} \in (\operatorname{Ker} f_1)^*$. Notemos que se $y \in B_{\operatorname{Ker} f_1} = \operatorname{Ker} f_1 \cap B_X$, então $|F(y)| = |f_2(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Logo, $||F||_{(\operatorname{Ker} f_1)^*} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que $F = f\big|_{\operatorname{Ker} f_1}$ e $||f|| = ||F||_{(\operatorname{Ker} f_1)^*} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Em particular, $f_2(y) = f(y)$ para todo $y \in \operatorname{Ker} f_1$, e então $\operatorname{Ker} f_1 \subset \operatorname{Ker}(f_2 - f)$. Pelo Lema 1.1.3, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(f_2 - f) = \alpha f_1$. Assim,

$$|\ 1 - |\alpha|\ | = |\ ||f_2|| - |\alpha|\ ||f_1||\ | \leq ||f_2 - \alpha f_1|| = ||f|| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Se $\alpha \geq 0$, $|1 - \alpha| =|\ 1 - |\alpha|\ | \leq \frac{\epsilon}{2}$, e então

$$||f_2 - f_1|| = ||f_2 - \alpha f_1 + \alpha f_1 - f_1|| \leq ||f|| + |1 - \alpha| \leq \epsilon.$$

Se $\alpha < 0$, $|1 + \alpha| =|\ 1 - |\alpha|\ | \leq \frac{\epsilon}{2}$, e então

$$||f_2 + f_1|| = ||f_2 - \alpha f_1 + \alpha f_1 + f_1|| \leq ||f|| + |1 + \alpha| \leq \epsilon.$$

Isso conclui a demonstração. □

Lema 2.2.14. *Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{R}$, $0 < \epsilon < 1$, $f_1, f_2 \in S_{X^*}$ e $t > (1 + 2/\epsilon)$ tais que f_2 é não-negativo em $K(f_1, t)$. Então $||f_2 - f_1|| \leq \epsilon$.*

Demonstração. Vamos mostrar que f_1 e f_2 satisfazem as condições do Lema 2.2.13. Primeiro observemos que, como $||f_1|| = 1$, existe $x_0 \in B_X$ tal que

$$f_1(x_0) > \text{máx}\left\{t^{-1}\left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right), \epsilon\right\}.$$

Assim, $||x_0|| = 1 < \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) < f_1(tx_0)$, e portanto $x_0 \in K(f_1, t)$. Dessa forma, por hipótese, $f_2(x_0) \geq 0$.

Agora considere $x \in B_X \cap \operatorname{Ker} f_1$. Temos que

$$\left|\left|x_0 \pm \frac{2}{\epsilon}x\right|\right| \leq \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) \leq tf_1(x_0) = tf_1\left(x_0 \pm \frac{2}{\epsilon}x\right),$$

e portanto $x_0 \pm (2/\epsilon)\, x \in K(f_1, t)$, o que implica que $f_2\left(x_0 \pm (2/\epsilon)\, x\right) \geq 0$, ou seja,

$$f_2(x_0) \geq \pm\frac{2}{\epsilon}f_2(x).$$

Logo, $\left|\frac{2}{\epsilon}f_2(x)\right| \leq f_2(x_0) \leq 1$, donde vem que $|f_2(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in B_X \cap \operatorname{Ker} f_1$. Pelo Lema 2.2.13, vale que $||f_1 - f_2|| \leq \epsilon$ ou $||f_1 + f_2|| \leq \epsilon$. Mas $||f_1 + f_2|| \geq |(f_1 + f_2)(x_0)| \geq f_1(x_0) + f_2(x_0) > \epsilon$, pois $f_1(x_0) > \epsilon$ e $f_2(x_0) \geq 0$. A conclusão é que $||f_1 - f_2|| \leq \epsilon$. $\square$

O Teorema seguinte é um importante resultado de separação demonstrado por Bishop e Phelps em [BP63].

Teorema 2.2.15. *Sejam X um espaço de Banach e $C, A \subset X$ subconjuntos não-vazios tais que A é limitado e C é fechado e convexo. Suponha que $\epsilon > 0$ e que $f_1 \in S_{X^*}$ seja tal que*

$$\sup\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in C\} < \inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in A\}.$$

Então existem $f_2 \in S_{X^*}$ e $x_0 \in C$ tais que $||f_1 - f_2|| \leq \epsilon$ e

$$\operatorname{Re} f_2(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in C\} < \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in A\}.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir $\epsilon < 1$. Seja

$$\delta \doteq \frac{1}{2}(\inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in A\} - \sup\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in C\}) > 0$$

e $B \doteq A + \delta B_X$. O conjunto B é limitado, pois A e B_X o são. Em particular, $\inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in B\}$ é finito. Temos que

$$\begin{aligned}\inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in B\} &= \inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in A\} + \inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in \delta B_X\} \\ &= \inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in A\} + \delta\ \inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in B_X\}.\end{aligned}$$

Como $-B_X = B_X$ e $\inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in B_X\} = -\sup\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in -B_X\}$, pela Proposição 2.1.3,

$\inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in B_X\} = -||f_1|| = -1$. Logo, $\inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in B\} = \inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in A\} - \delta$, isto é,

$$\inf\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in B\} = \delta + \sup\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in C\}. \tag{2.2.2}$$

Seja $s \doteq 1 + 2/\epsilon$. Existe $z \in C$ tal que

$$\sup\{\operatorname{Re} f_1(x) : x \in C\} - \operatorname{Re} f_1(z) < \frac{\delta}{2s}. \tag{2.2.3}$$

Como B é limitado, $\sup\{||y - z|| : y \in B\}$ é finito. Tome $M, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$M > \text{máx}\left\{\frac{\delta}{2}\,,\ \sup\{||y - z|| : y \in B\}\right\} \text{ e } t \doteq \frac{2sM}{\delta}\,.$$

É claro que $t > s > 1$, por construção. Temos que X é espaço de Banach e C é fechado em X, o que implica que C é completo. Assim, podemos aplicar o Lema 2.2.11 para concluir que existe $x_0 \in C$ tal que $(x_0 - z) \in K(f_1, t)$ e $(x_0 + K(f_1, t))$ suporta C em x_0.

Afirmamos agora que $B \subset (x_0 + K(f_1, t))$. De fato, se $y \in B$,

$$\begin{aligned}
||y - x_0|| &\le ||y - z|| + ||x_0 - z|| \\
&\le M + \operatorname{Re} f_1(t(x_0 - z)) \\
&= M + t(\operatorname{Re} f_1(x_0) - \operatorname{Re} f_1(z)) \\
&\overset{(2.2.3)}{\le} M + t\left(\frac{\delta}{2s}\right) \\
&= \frac{\delta t}{s} \\
&< t\delta \\
&\overset{(2.2.2)}{\le} t(\operatorname{Re} f_1(y - x_0)).
\end{aligned}$$

Portanto, $(y - x_0) \in K(f_1, t)$. Como $y \in B$ era arbitrário, $B \subset (x_0 + K(f_1, t))$.

Já temos que $(x_0 + K(f_1, t)) \cap C = \{x_0\}$. Afirmamos que $(x_0 + K(f_1, t))^{\mathrm{o}} \cap C = \emptyset$. De fato, uma vez que $(x_0 + K(f_1, t))^{\mathrm{o}} = x_0 + K(f_1, t)^{\mathrm{o}}$, se tivéssemos $x_0 \in (x_0 + K(f_1, t))^{\mathrm{o}}$, valeria que $0 \in K(f_1, t)^{\mathrm{o}}$, o que não pode ocorrer, pela Observação 2.2.10. Notemos ainda que pela Proposição 2.2.9, $K(f_1, t)^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$ e $K(f_1, t)$ é convexo. Podemos então aplicar o Teorema de separação de Eidelheit para os conjuntos convexos $(x_0 + K(f_1, t))$ e C, que garante a existência de $a \in \mathbb{R}$ e $f_2 \in S_{X^*}$ satisfazendo a:

(i) $\operatorname{Re} f_2(x) \le a$ para todo $x \in C$;

(ii) $\operatorname{Re} f_2(x) \ge a$ para todo $x \in (x_0 + K(f_1, t))$;

(iii) $\operatorname{Re} f_2(x) > a$ para todo $x \in (x_0 + K(f_1, t))^{\mathrm{o}}$.

Além disso, analogamente ao que foi feito para f_1, podemos concluir que

$$\inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in B\} = \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in A\} - \delta. \tag{2.2.4}$$

Como $x_0 \in C \cap (x_0 + K(f_1, t))$,

$$\begin{aligned}
\sup\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in C\} &= \operatorname{Re} f_2(x_0) \\
&= \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in (x_0 + K(f_1, t))\} \\
&\leq \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in B\} \\
&\overset{(2.2.4)}{=} \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in A\} - \delta \\
&< \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in A\}.
\end{aligned}$$

Já temos aqui que $\operatorname{Re} f_2(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in C\} < \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in A\}$. Resta provar que $||f_1 - f_2|| \leq \epsilon$.

Para isso, considere o espaço $X_{\mathbb{R}}$ (vide Observação 2.1.8). Pela Proposição 2.1.3, temos que $\operatorname{Re} f_1, \operatorname{Re} f_2 \in S_{X^*_{\mathbb{R}}}$. Além disso, é claro que $K(f_1, t) = K(\operatorname{Re} f_1, t)$ ($K(\operatorname{Re} f_1, t)$ aqui é um cone no espaço $X_{\mathbb{R}}$), e assim $\operatorname{Re} f(x_0) = \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in (x_0 + K(\operatorname{Re} f_1, t))\} = \operatorname{Re} f(x_0) + \inf\{\operatorname{Re} f_2(x) : x \in K(\operatorname{Re} f_1, t)\}$. Portanto, $\operatorname{Re} f_2(x) \geq 0$ para todo $x \in K(\operatorname{Re} f_1, t)$. Lembremos também que $0 < \epsilon < 1$ e $t > (1 + 2/\epsilon)$, por construção. Dessa forma, podemos aplicar o Lema 2.2.14 para o espaço $X_{\mathbb{R}}$ e os funcionais $\operatorname{Re} f_1, \operatorname{Re} f_2$ para concluir que $||\operatorname{Re} f_1 - \operatorname{Re} f_2||_{X^*_{\mathbb{R}}} \leq \epsilon$. Assim, $||f_1 - f_2|| = ||\operatorname{Re} f_1 - \operatorname{Re} f_2||_{X^*_{\mathbb{R}}} \leq \epsilon$, como queríamos demonstrar. □

Finalmente, podemos apresentar os três Teoremas principais desta seção, demonstrados em [BP63] por Bishop e Phelps.

Resultados similares ao Teorema abaixo podem ser encontrados no livro *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, de Phelps, que trata-se de uma boa referência para mais detalhes sobre os conceitos tratados neste capítulo [Phe93].

Teorema 2.2.16 (Bishop-Phelps para funcionais suporte). *Sejam $X \neq \{0\}$ espaço de Banach e $\emptyset \neq C \subset X$ subconjunto fechado, convexo e limitado. Então o conjunto dos funcionais suporte de C é denso em X^*.*

Demonstração. Afirmamos primeiro que o conjunto dos funcionais suporte de norma 1 de C é denso em S_{X^*}. De fato, considere $f \in S_{X^*}$. Como C é limitado, $\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in C\}$ é finito. Seja $y \in X$ tal que $\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in C\} < \operatorname{Re} f(y)$, e definamos $A \doteq \{y\}$. Temos que $\emptyset \neq C$ é fechado e convexo e A é limitado. Pelo Teorema 2.2.15, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $g \in S_{X^*}$ funcional suporte de C satisfazendo a $||g - f|| \leq \epsilon$, o que mostra a afirmação.

Mostraremos agora o caso geral. Seja $f \neq 0 \in X^*$. Pelo que já vimos, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $g \in S_{X^*}$ que suporta C em algum $x_0 \in C$ satisfazendo a

$$\left|\left|\frac{f}{||f||} - g\right|\right| < \frac{\epsilon}{||f||}.$$

Logo, $||\ f - ||f||g\ || < \epsilon$ e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} ||f||g(x_0) &= ||f|| \operatorname{Re} g(x_0) \\
&= ||f|| \sup\{\operatorname{Re} g(x) : x \in C\} \\
&= \sup\{\operatorname{Re} ||f||g(x) : x \in C\},
\end{aligned}$$

ou seja, $||f||g \in X^*$ suporta C em x_0. Resta mostrar que há elementos de X^* que suportam C de norma arbitrariamente pequena. Como $X \neq \{0\}$, dado $\epsilon > 0$ existe $g \in B_{X^*}(0; \epsilon/2) \setminus \{0\}$. Como já provamos, nesse caso existe $h \in X^*$ funcional suporte de C tal que $||g - h|| < \epsilon/2$. Logo, $||h|| \leq ||g - h|| + ||g|| < \epsilon$, o que encerra a prova do Teorema. □

A hipótese da completude no espaço X é essencial para o Teorema de Bishop-Phelps para funcionais suporte. De fato, Bishop e Phelps mostraram também em [BP63] que vale:

Teorema 2.2.17. *Seja X um espaço normado incompleto. Então existe um subconjunto $C \subset X$ convexo, limitado, fechado e de interior não-vazio tal que o conjunto dos funcionais suporte de C* ***não*** *é denso em X^*.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que X é espaço normado sobre $\mathbb{R}$.

Seja $\tilde{X}$ o completamento de X (vide Proposição 1.1.7). Identificaremos X com o subespaço denso de $\tilde{X}$ isométrico a X. Como X é incompleto, existe $x \in \tilde{X} \setminus X$ com $||x|| = 1$. Pelo Corolário 1.1.16, existe $f \in S_{\tilde{X}^*}$ tal que $f(x) = ||x|| = 1$. Definamos $D \doteq \{y \in \tilde{X} : ||y|| \leq 1 \text{ e } f(y) = 0\} = B_{\tilde{X}} \cap \operatorname{Ker} f$. É claro que D é convexo e fechado (pois $B_{\tilde{X}}$ e $\operatorname{Ker} f$ o são). Seja também

$$C' \doteq \{z \in \tilde{X} : z = \lambda y + (1 - \lambda)x, \text{ com } y \in D \text{ e } \lambda \in [0, 1]\}.$$

Como D é limitado, C' é limitado. Provaremos a seguir que C' é convexo, fechado e $C'^{\circ} \neq \emptyset$.

Para começar, mostraremos que C' é convexo. Considere z_1, $z_2 \in C'$. Então existem $y_1, y_2 \in D$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ tais que

$$z_1 = \lambda_1 y_1 + (1 - \lambda_1)x;$$
$$z_2 = \lambda_2 y_2 + (1 - \lambda_2)x.$$

Dado $\rho \in [0, 1]$, precisamos mostrar que $z \doteq \rho z_1 + (1 - \rho)z_2 \in C'$. Temos que $\rho z_1 + (1 - \rho)z_2 = \rho\lambda_1 y_1 + (1 - \rho)\lambda_2 y_2 + (\rho(1 - \lambda_1) + (1 - \rho)(1 - \lambda_2))x$, então se $M \doteq \rho(1 - \lambda_1) + (1 - \rho)(1 - \lambda_2) \in [0, 1]$, vale que

$$z = (1 - M)\left(\frac{\rho\lambda_1 y_1 + (1 - \rho)\lambda_2 y_2}{(1 - M)}\right) + Mx. \tag{2.2.5}$$

Como $(1 - M) = \rho\lambda_1 + (1 - \rho)\lambda_2$ e D é convexo, por (2.2.5) concluímos que $z \in C'$, como queríamos.

Afirmamos agora que C' é fechado. De fato, se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de elementos em C' convergindo a algum $z \in \tilde{X}$, mostraremos que $z \in C'$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existem $y_n \in D$ e $\lambda_n \in [0, 1]$ tais que $z_n = \lambda_n y_n + (1 - \lambda_n)x$. Como $[0, 1]$ é compacto, existe uma subsequência $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lambda_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, para algum $\lambda \in [0, 1]$. Como D é limitado, se $\lambda = 0$ segue que $\lambda_{n_k} y_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Nesse caso, $z_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, e assim $z = x \in C'$. Se $\lambda \neq 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{n_k} \neq 0$ sempre que $k \geq k_0$. Logo, para $k \geq k_0$ podemos escrever

$$y_{n_k} = \left(\frac{z_{n_k} - (1 - \lambda_{n_k})x}{\lambda_{n_k}}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{z - (1 - \lambda)x}{\lambda}\right).$$

Como $y_{n_k} \in D$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e D é fechado, $\left(\dfrac{z - (1 - \lambda)x}{\lambda}\right) \in D$, o que implica que $z \in C'$.

Para finalizar, mostraremos que $B(x/2;1/8) \subset C'$, donde seguirá que C'^{o} é não-vazio. Tome $z \in B(x/2;1/8)$. Então $|f(z-x/2)| \leq ||z-x/2|| < 1/8$ e, como $f(x)=1$,

$$\frac{3}{8} < f(z) < \frac{5}{8}\,. \tag{2.2.6}$$

Definamos agora

$$y \doteq \frac{z}{(1-f(z))} - \frac{f(z)x}{(1-f(z))}\,.$$

Se y pertencer a D, teremos que $z = f(z)x + (1-f(z))y \in C'$, portanto $B(x/2;1/8) \subset C'$, e o problema acaba. Vamos provar isso. Notemos que (2.2.6) implica que

$$\frac{1}{8(1-f(z))} < \frac{1}{3}\,. \tag{2.2.7}$$

Assim,

$$||y|| \leq \left|\left|\frac{(z-x/2)}{(1-f(z))}\right|\right| + \left|\left|\frac{(x/2-f(z)x)}{(1-f(z))}\right|\right| < \frac{1}{8(1-f(z))} + \frac{|1/2-f(z)|}{(1-f(z))},$$

e por (2.2.7),

$$||y|| < \frac{1}{3} + \frac{8|1/2-f(z)|}{3}\,. \tag{2.2.8}$$

Usando que

$$\left|\frac{1}{2} - f(z)\right| < \frac{1}{8},$$

de (2.2.8) concluímos que $y \in B_{\tilde{X}}$. Além disso,

$$f(y) = f\left(\frac{z}{(1-f(z))} - \frac{f(z)x}{(1-f(z))}\right) = 0,$$

donde vem que $y \in D$, como queríamos.

Definamos agora $C \doteq C' \cap X$. Pelo que mostramos acima para C', temos que C é convexo, limitado e fechado em X. Como X é denso em $\tilde{X}$ e $C'^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$, pelo Corolário 1.1.11 temos ainda que C é denso em C'. Afirmamos que $C^{\mathrm{o},X} \neq \emptyset$, em que $C^{\mathrm{o},X}$ denota o interior de C relativo a X. De fato, uma vez que $C'^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$, existe um aberto não-vazio U de $\tilde{X}$ tal que $U \subset C'$. Como X é denso em $\tilde{X}$, $U \cap X$ é um aberto não-vazio de X e vale que $U \cap X \subset C$, o que mostra a afirmação.

Lembremos que, conforme a Proposição 1.1.12, $P : \tilde{X}^* \to X^*$ dada por $P(g) = g\big|_X$, para todo $g \in \tilde{X}^*$, é uma isometria entre $\tilde{X}^*$ e X^*. Vamos mostrar em seguida que dado $g \in \tilde{X}^*$, vale que $\sup\{P(g)(z) : z \in C\} = \sup\{g(z) : z \in C'\}$ (os supremos são finitos, pois C e C' são limitados). Se $g = 0$, isso é claro. Suponhamos que $g \neq 0$. Como $C \subset C'$ e $P(g) = g\big|_X$,

$$\sup\{P(g)(z) : z \in C\} \leq \sup\{g(z) : z \in C'\}.$$

Para mostrar a inclusão oposta, tome $\epsilon > 0$ e seja $z_0 \in C'$ tal que $\sup\{g(z) : z \in C'\} - \dfrac{\epsilon}{2} < g(z_0)$.

Como C é denso em C', existe $z_1 \in C$ satisfazendo a $||z_0 - z_1|| < \dfrac{\epsilon}{2||g||}$. Logo,

$$g(z_0 - z_1) \leq ||g|| \frac{\epsilon}{2||g||} = \frac{\epsilon}{2},$$

e assim,

$$\sup\{g(z) : z \in C'\} - \epsilon < g(z_0) - \frac{\epsilon}{2} < g(z_1) = P(g)(z_1),$$

o que prova que $\sup\{P(g)(z) : z \in C\} = \sup\{g(z) : z \in C'\}$, como queríamos. Portanto, se $P(g) \in X^*$ suporta C em $z_0 \in C$, então $g \in \tilde{X}^*$ suporta C' no mesmo ponto.

Para finalizar, mostraremos que se $g \in \tilde{X}^*$ suporta C', então $||g - f|| \geq \dfrac{1}{2}$. Seja $z \in C'$ tal que $g(z) = \sup\{g(w) : w \in C'\}$. Por definição de C', existem $\lambda \in [0,1]$ e $y \in D$ tais que $z = \lambda y + (1-\lambda)x$. Temos que

$$g(x) \leq g(z) = \lambda g(y - x) + g(x),$$

donde vem que $g(y - x) \geq 0$, e assim

$$(g - f)(y - x) = g(y - x) + 1 \geq 1.$$

Então

$$1 \leq |(g - f)(y - x)| \leq ||g - f|| ||y - x|| \leq 2||g - f||,$$

ou seja, $||g - f|| \geq \dfrac{1}{2}$. Usando os resultados mostrados acima e novamente que P é isometria, concluímos que dado $h \in X^*$ que suporta C, digamos $h = P(g), g \in \tilde{X}^*$, vale que g suporta C' e então $||P(g) - P(f)||_{X^*} = ||g - f|| \geq \dfrac{1}{2}$. Portanto, o conjunto dos funcionais que suportam C não é denso em X^*, com C de interior não-vazio, limitado, convexo e fechado.

Agora suponhamos que X é espaço normado sobre $\mathbb{C}$, e consideremos o espaço normado $X_{\mathbb{R}}$ (vide Observação 2.1.8). Pelo que foi mostrado, existe $C \subset X_{\mathbb{R}}$ fechado, convexo, limitado e de interior não-vazio tal que o conjunto dos funcionais em $X_{\mathbb{R}}^*$ que suportam C não é denso em $X_{\mathbb{R}}^*$. Como X e $X_{\mathbb{R}}$ têm a mesma topologia, o conjunto C também é fechado e tem interior não-vazio em relação a X. Usando que $R : X^* \ni f \mapsto \operatorname{Re} f \in X_{\mathbb{R}}^*$ é bijeção $\mathbb{R}$-linear que preserva normas e que $f \in X^*$ suporta um subconjunto de X se, e somente se, $\operatorname{Re} f \in X_{\mathbb{R}}^*$ também o suporta, concluímos que o conjunto dos funcionais em X^* que suportam C também não é denso em X^*, encerrando a demonstração do teorema. $\square$

O Corolário seguinte é um resultado curioso que decorre dos dois teoremas anteriores.

Corolário 2.2.18. *Um espaço normado $X \neq \{0\}$ é um espaço de Banach se, e somente se, para todo $C \subset X$ não-vazio, fechado, convexo e limitado, o conjunto dos funcionais que suportam C é denso em X^*.*

A seguir apresentamos o Teorema de Bishop-Phelps, principal objetivo desta seção.

Teorema 2.2.19 (Bishop-Phelps). *Todo espaço de Banach é subreflexivo.*

Demonstração. O espaço $X = \{0\}$ é subreflexivo, pois nesse caso $X^* = \{0\}$ e o funcional nulo trivialmente atinge sua norma. Suponhamos então que $X \neq \{0\}$. O conjunto B_X é fechado, convexo e limitado. Pelo Teorema de Bishop-Phelps para funcionais suporte (2.2.16), o conjunto dos funcionais suporte de B_X é denso em X^*. O Corolário 2.1.4 garante então que $\mathcal{NA}_X$ é denso em X^*, isto é, X é subreflexivo. □

2.3 Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás

Nesta seção, apresentamos a demonstração do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás [Bol70], uma versão quantitativa e mais forte do Teorema de Bishop-Phelps.

Começaremos com um Lema. A ideia da sua demonstração é similar à do Teorema 2.2.15.

Lema 2.3.1. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$, $f_1 \in S_{X^*}$, $0 < \epsilon < 1$ e $z \in B_X$ tal que $f_1(z) \neq 0$. Então existem $x_0 \in B_X$ e $f_2 \in S_{X^*}$ tais que*

$$||f_2 - f_1|| < \epsilon,\ ||x_0 - z|| \leq \left(\frac{2}{\epsilon} + 1\right) \frac{f_1(x_0 - z)}{|f_1(z)|}$$

e f_2 suporta B_X em x_0.

Demonstração. Notemos inicialmente que se $|f_1(z)| = 1$, então f_1 suporta B_X em $+z$ ou $-z$. Definindo nesse caso x_0 como o ponto suporte e $f_2 \doteq f_1$, a conclusão do Lema segue. De fato, se o ponto suporte for z, $f_1(z) = 1$ e teremos $||f_2 - f_1|| = ||x_0 - z|| = 0$ e

$$\left(\frac{2}{\epsilon} + 1\right) \frac{f_1(x_0 - z)}{|f_1(z)|} = 0.$$

Se for $-z$, teremos $f_1(-z) = 1$ e assim

$$||x_0 - z|| \leq 2 < \left(\frac{2}{\epsilon} + 1\right) 2 = \left(\frac{2}{\epsilon} + 1\right) \frac{f_1(x_0 - z)}{|f_1(z)|}.$$

Suponhamos então que $|f_1(z)| < 1$. Seja

$$t \doteq \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) \frac{1}{|f_1(z)|}.$$

É claro que $t > \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) > 1$. Como X é espaço de Banach, B_X é completo. Além disso, $\{f_1(x) : x \in B_X\}$ é limitado, já que B_X o é. Pelo Lema 2.2.11, existe $x_0 \in B_X$ tal que $x_0 \in (z + K(f_1, t))$ e $(x_0 + K(f_1, t))$ suporta B_X em x_0. Ou seja, $||x_0 - z|| \leq t f_1(x_0 - z)$ e $(x_0 + K(f_1, t)) \cap B_X = \{x_0\}$. Como já discutido na demonstração do Teorema 2.2.15, a Observação 2.2.10 implica que $(x_0 + K(f_1, t))^o \cap B_X = \emptyset$, e pela Proposição 2.2.9, $K(f_1, t)^o \neq \emptyset$. Logo, podemos aplicar o Teorema de separação de Eidelheit para os conjuntos convexos $(x_0 + K(f_1, t))$ e B_X, que garante a existência de $a \in \mathbb{R}$ e $f_2 \in S_{X^*}$ satisfazendo a:

(i) $f_2(x) \leq a$ para todo $x \in B_X$;

(ii) $f_2(x) \geq a$ para todo $x \in (x_0 + K(f_1, t))$;

(iii) $f_2(x) > a$ para todo $x \in (x_0 + K(f_1, t))^{\mathrm{o}}$.

Como $x_0 \in B_X \cap (x_0 + K(f_1, t))$,

$$\begin{aligned} f_2(x_0) &= \sup\{f_2(x) : x \in B_X\} \\ &= \inf\{f_2(x) : x \in (x_0 + K(f_1, t))\} \\ &= f_2(x_0) + \inf\{f_2(x) : x \in K(f_1, t)\}. \end{aligned}$$

Assim, f_2 suporta B_X em x_0 e $f_2(x) \geq 0$ para todo $x \in K(f_1, t)$. Tomemos $\epsilon' \in (0, \epsilon)$ satisfazendo a $t > \left(1 + \dfrac{2}{\epsilon'}\right) > \left(1 + \dfrac{2}{\epsilon}\right)$. Pelo Lema 2.2.14, $||f_2 - f_1|| \leq \epsilon' < \epsilon$. Como também temos que

$$||x_0 - z|| \leq t f_1(x_0 - z) = \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) \frac{f_1(x_0 - z)}{|f_1(z)|},$$

segue a conclusão do Lema. □

Agora podemos apresentar a demonstração do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás.

Teorema 2.3.2 (Bishop-Phelps-Bollobás). *Sejam X um espaço de Banach e $0 < \epsilon < 1$. Dados $x \in B_X$ e $f \in S_{X^*}$ tais que $|1 - f(x)| < \dfrac{\epsilon^2}{4}$, existem $y \in S_X$ e $g \in S_{X^*}$ satisfazendo a*

$$g(y) = 1,\ ||y - x|| < \epsilon \text{ e } ||g - f|| < \epsilon.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que X é espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$.

Pelo Lema 2.3.1, existem $g \in S_{X^*}$ e $y \in B_X$ tais que

$$||g - f|| < \epsilon,\ ||y - x|| < \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) \frac{f(y - x)}{|f(x)|} \text{ e } g \text{ suporta } B_X \text{ em } y.$$

Notemos aqui que como y é ponto suporte de B_X, pela Proposição 2.1.6, $y \in S_X$. Vale ainda que $g(y) = \sup\{g(z) : z \in B_X\} = ||g|| = 1$, pela Proposição 2.1.3. Como $0 \leq f(y - x) \leq 1 - f(x)$, temos

$$||y - x|| < \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) \frac{1 - f(x)}{|f(x)|} < \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) \frac{\epsilon^2}{4|f(x)|}\,. \tag{2.3.1}$$

Usando que $1 - |f(x)| \leq |f(x) - 1| < \dfrac{\epsilon^2}{4}$, obtemos $|f(x)| > 1 - \dfrac{\epsilon^2}{4}$, e por (2.3.1),

$$\begin{aligned} ||y - x|| &< \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) \frac{\epsilon^2}{4\left(1 - \dfrac{\epsilon^2}{4}\right)} \\ &= \frac{\epsilon}{2\left(1 - \dfrac{\epsilon^2}{4}\right)} + \frac{\epsilon^2}{4\left(1 - \dfrac{\epsilon^2}{4}\right)}\,. \end{aligned}$$

Como $0 < \epsilon < 1$, vem que $1 - \dfrac{\epsilon^2}{4} > \dfrac{3}{4}$, e então

$$||y - x|| < \frac{4\epsilon}{2 \cdot 3} + \frac{4\epsilon^2}{4 \cdot 3} \leq \epsilon,$$

encerrando a demonstração deste caso.

Suponhamos agora que X é espaço normado sobre $\mathbb{C}$, e consideremos o espaço $X_{\mathbb{R}}$ e a aplicação $R : X^* \ni f \mapsto \operatorname{Re} f \in X_{\mathbb{R}}^*$. Vimos na Observação 2.1.8 que R é bijeção que preserva normas. Temos que

$$|1 - \operatorname{Re} f(x)| = \operatorname{Re}(1 - f(x)) \leq |1 - f(x)| < \frac{\epsilon^2}{4}\,.$$

Aplicando então o caso demonstrado acima para $X_{\mathbb{R}}$, $x \in B_{X_{\mathbb{R}}}$ e $\operatorname{Re} f \in S_{X_{\mathbb{R}}^*}$, garantimos a existência de $g \in S_{X^*}$ e $y \in S_X$ satisfazendo a $\operatorname{Re} g(y) = 1$, $||y - x|| \leq \epsilon$ e $||\operatorname{Re}(g) - \operatorname{Re}(f)||_{X_{\mathbb{R}}^*} < \epsilon$. Portanto, também vale que $g(y) = 1$ e $||g - f|| < \epsilon$, como queríamos. $\square$

Notemos que se a hipótese $|1 - f(x)| < \dfrac{\epsilon^2}{4}$ do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás for enfraquecida para $|f(x)| > 1 - \dfrac{\epsilon^2}{4}$, podemos concluir que existem elementos $g \in S_{X^*}$ e $y \in S_X$ satisfazendo a $||g - f|| < \epsilon$, $||x - y|| < \epsilon$ e $|g(y)| = 1$ (e não mais a $g(y) = 1$). De fato, seja $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ tal que $f(\lambda x) = |f(x)|$ e considereremos $x' \doteq \lambda x$. Então $x' \in B_X$ e

$$|1 - f(x')| = 1 - f(x') = 1 - |f(x)| < \frac{\epsilon^2}{4}\,.$$

Pelo Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, existem $g \in S_{X^*}$ e $y' \in S_X$ tais que $g(y') = 1$, $||y' - x'|| < \epsilon$ e $||g - f|| < \epsilon$. Então definindo $y \doteq \lambda^{-1} y' \in S_X$, teremos $||y' - x'|| = ||y - x|| < \epsilon$, $||f - g|| < \epsilon$ e $|g(y)| = 1$.

Capítulo 3

Operadores que atingem a norma

É natural questionar se versões análogas aos Teoremas de Bishop-Phelps e Bishop-Phelps-Bollobás valem quando tratamos de operadores lineares e contínuos definidos entre dois espaços de Banach X e Y. Da mesma forma que fizemos para os funcionais, dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *atinge sua norma* se existe $x_0 \in B_X$ tal que $||T(x_0)|| = ||T||$. Definimos ainda o conjunto

$$\mathcal{NA}(X, Y) \doteq \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ atinge sua norma}\}.$$

Antes mesmo de Bollobás apresentar o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, Lindenstrauss já havia obtido muitos resultados notáveis no sentido de obter generalizações do Teorema de Bishop-Phelps a operadores no seu artigo [Lin63], de 1963. Estudaremos neste capítulo alguns dos resultados de [Lin63]. Entretanto, nosso principal objetivo é tratar da extensão do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás a operadores, através da *Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (BPBp)*, introduzida por Acosta et al. no artigo [AAGM08], de 2008.

Na primeira seção, estudaremos os conceitos básicos que serão usados no restante do capítulo, como a propriedade β de Lindenstrauss, pontos exposto e fortemente exposto em um espaço normado e famílias fortemente e uniformemente expostas por uma função. Na seção seguinte, será discutida brevemente a extensão do Teorema de Bishop-Phelps a operadores, com alguns resultados de [Lin63]. Na última seção, estudaremos a Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores em certos pares de espaços de Banach, baseando-nos principalmente em [AAGM08] e [AGKM17].

3.1 Conceitos iniciais

Os conceitos de ponto exposto e fortemente exposto definidos abaixo foram amplamente usados por Lindenstrauss ao estudar operadores que atingem a norma.

Definição 3.1.1. Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach X. Um ponto $x \in C$ é dito ponto *exposto* de C se existe $f \in X^*$ satisfazendo a $\operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$ para todo $y \in C$ tal que $y \neq x$.

Observação 3.1.2. Nas condições da definição acima, no caso $X \neq \{0\}$, todo ponto exposto de C é ponto suporte de C. De fato, caso C tenha apenas um elemento, este claramente será ponto exposto e ponto suporte em relação a qualquer funcional não-nulo em X^*. Caso C tenha mais de um elemento, o funcional f satisfazendo a definição para x será não-nulo e obviamente f suporta C em x. Na verdade, x é o *único* ponto de C que satisfaz a essa última afirmação.

Definição 3.1.3. Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach X. Um ponto $x \in C$ é dito ponto *fortemente exposto* de C se existe $f \in X^*$ satisfazendo a:

(i) $\operatorname{Re} f(y) \leq \operatorname{Re} f(x)$ para todo $y \in C$.

(ii) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de elementos em C tal que $\operatorname{Re} f(x_n) \to \operatorname{Re} f(x)$, então $x_n \to x$.

Observe que o item (i) da definição acima poderia ser substituído pela afirmação:

(i)' $\operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$ para todo $y \in C$ tal que $y \neq x$.

De fato, dado $y \in C$ tal que $\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(y)$, tomando a sequência constante e igual a y em C, pelo item (ii) da Definição acima obtemos $y = x$. Assim, por (i), $\operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$ se $y \in C \setminus \{x\}$. Em particular, todo ponto fortemente exposto de C é ponto exposto de C em relação ao mesmo funcional $f \in X^*$.

Observação 3.1.4. Se $x_0 \in C$ é ponto exposto (ou fortemente exposto) de C pelo funcional $f \in X^* \setminus \{0\}$, então também é ponto exposto (ou fortemente exposto) pelo funcional $\dfrac{f}{||f||} \in S_{X^*}$.

Mostraremos através dos exemplos a seguir que nem todo ponto suporte é ponto exposto, e que nem todo ponto exposto é ponto fortemente exposto.

Exemplo 3.1.5. Consideremos o espaço de Banach $X \doteq \ell_\infty^2$ sobre $\mathbb{R}$ e $C \doteq B_X$. Afirmamos que $(1,0)$ é ponto suporte mas não é ponto exposto de C.

De fato, para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x$ para todo $(x,y) \in X$, temos que $||f|| = 1 = f((1,0))$, donde concluímos que $(1,0)$ é ponto suporte de C. Suponhamos que $(1,0)$ seja ponto exposto de C em relação a algum $g \in X^*$. Então $g(1,\pm 1) = g(1,0) \pm g(0,1) < g(1,0)$, e portanto $\pm g(0,1) < 0$, absurdo.

Antes de iniciar o exemplo abaixo, lembremos que toda sequência ortonormal em um espaço de Hilbert converge a 0 na topologia fraca.

Exemplo 3.1.6. Consideremos o espaço de Banach $X \doteq \ell_2$ sobre $\mathbb{R}$ e $C \doteq \{x \in B_{\ell_2} : x_i \geq 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que $0 \in \ell_2$ é ponto exposto de C que não é ponto fortemente exposto.

Inicialmente, notemos que C é convexo. Seja $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-\, x_i}{2^i} \text{ para todo } x \in \ell_2.$$

Como a série acima converge absolutamente para cada $x \in \ell_2$, a função f está bem definida, e é linear. Além disso, se $x \in B_{\ell_2}$ é claro que $|x_i| \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in B_{\ell_2}$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{-\, x_i}{2^i} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \leq 1.$$

Levando $n \to \infty$ na desigualdade acima, concluímos que $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in B_{\ell_2}$, e então $f \in \ell_2^*$. Se $x \in C \setminus \{0\}$, teremos que $f(x) < 0$, e se $x = 0 \in C$, $f(x) = 0$. Então 0 é ponto exposto de C pelo funcional $f \in \ell_2^*$.

Mostraremos agora que 0 não é ponto fortemente exposto de C. Tendo em vista que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em C ortonormal no espaço de Hilbert ℓ_2, vale que $e_n \xrightarrow{w} 0$. Logo, para todo $g \in \ell_2^*$ temos $g(e_n) \to 0 = g(0)$, mesmo que $e_n \nrightarrow 0$. Portanto, 0 não é ponto fortemente exposto de C.

O conceito seguinte também foi baseado no artigo [Lin63] de Lindenstrauss, mas trata-se da versão definida em [AGKM17].

Definição 3.1.7. Sejam Y um espaço de Banach, $E \subset S_Y$ e $F : E \to S_{Y^*}$. Dizemos que a família E é *fortemente e uniformemente exposta* por F se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo a:

$$(y \in B_Y,\, e \in E,\ \operatorname{Re} F(e)(y) > 1 - \delta) \Rightarrow ||y - e|| < \epsilon.$$

A Proposição abaixo segue sem muita dificuldade.

Proposição 3.1.8. *Sejam Y um espaço de Banach e $E \subset S_Y$ uma família fortemente e uniformemente exposta por $F : E \to S_{Y^*}$. Então todo $e \in E$ é ponto fortemente exposto de B_Y, pelo funcional $F(e) \in S_{Y^*}$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.3,

$$\sup\{\operatorname{Re} F(e)(y) : y \in B_Y\} = ||F(e)|| = 1, \text{ para todo } e \in E. \tag{3.1.1}$$

Fixe $e \in E$. Por (3.1.1), existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em B_Y tal que $\operatorname{Re} F(e)(y_n) \to 1$, e por hipótese de família fortemente e uniformemente exposta, isso implica que $y_n \to e$. Logo, $\operatorname{Re} F(e)(y_n) \to \operatorname{Re} F(e)(e)$, e a unicidade do limite em $\mathbb{K}$ nos permite concluir que $\operatorname{Re} F(e)(e) = 1$. Assim, $\operatorname{Re} F(e)(y) \leq \operatorname{Re} F(e)(e)$ para todo $y \in B_Y$.

Agora, se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em B_Y tal que $\operatorname{Re} F(e)(z_n) \to 1 = \operatorname{Re} F(e)(e)$, novamente da hipótese concluímos que $z_n \to e$, encerrando a demonstração. □

A seguir daremos um exemplo de uma família e função satisfazendo à Definição 3.1.7.

Exemplo 3.1.9. Seja Y um espaço de Banach uniformemente convexo (vide seção 1.5). Pelo Corolário 1.1.16, para cada $e \in S_Y$ existe $f_e \in S_{Y^*}$ tal que $f_e(e) = ||e|| = 1$. Definamos $F : S_Y \ni e \mapsto f_e \in S_{Y^*}$. Mostraremos que a família S_Y é fortemente e uniformemente exposta por F.

Como Y é uniformemente convexo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left(x, y \in B_Y, \frac{||x + y||}{2} > 1 - \delta\right) \Rightarrow ||x - y|| < \epsilon.$$

Logo, se

$$y \in B_Y,\, e \in S_Y,\ \operatorname{Re} F(e)(y) > 1 - \delta,$$

teremos que $\operatorname{Re} f_e(y) > 1 - \delta$, então

$$\operatorname{Re} f_e(y) = \operatorname{Re} f_e(e + y) - \operatorname{Re} f_e(e) = \operatorname{Re} f_e(e + y) - 1 > 1 - \delta,$$

e finalmente

$$\frac{||e + y||}{2} \geq \operatorname{Re} f_e\left(\frac{e + y}{2}\right) > 1 - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta,$$

o que implica que $||e - y|| < \epsilon$, como queríamos demonstrar.

A seguir passaremos a discutir a propriedade β de Lindenstrauss, introduzida em [Lin63]. Espaços com esta propriedade satisfazem a muitos resultados interessantes a respeito de operadores que atingem da norma, alguns dos quais serão apresentados neste capítulo.

Definição 3.1.10. Dizemos que um espaço de Banach Y satisfaz a propriedade β (de Lindenstrauss) se existem conjuntos $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_{Y^*}$ e um real $\rho \in [0, 1)$ tais que:

(i) $f_\alpha(y_\alpha) = 1$, para todo $\alpha \in \Lambda$;

(ii) $|f_\alpha(y_\gamma)| \leq \rho$, para todos $\alpha, \gamma \in \Lambda$ tais que $\alpha \neq \gamma$;

(iii) $||y|| = \sup\{|f_\alpha(y)| : \alpha \in \Lambda\}$, para todo $y \in Y$.

Exemplo 3.1.11. (a) Todo espaço normado unidimensional X satisfaz a propriedade β.

De fato, consideremos $x \in S_X$ e $f_x \in S_{X^*}$ satisfazendo a $f_x(x) = 1$. Os conjuntos $\{x\}$ e $\{f_x\}$ satisfazem a (i)-(iii) da Definição 3.1.10 para $\rho = 0$.

(b) Os espaços ℓ_∞, c_0 e ℓ_∞^n, para $n \in \mathbb{N}$, satisfazem a propriedade β.

Faremos a demonstração para ℓ_∞, e para os demais casos a conclusão seguirá por um argumento análogo. Seja $\Lambda \doteq \mathbb{N}$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $e_n \in S_{\ell_\infty}$ e $P_n : \ell_\infty \ni x \mapsto x_n \in \mathbb{K}$ em $S_{\ell_\infty^*}$. Os conjuntos $\{e_n : n \in \Lambda\}$ e $\{P_n : n \in \Lambda\}$ satisfazem a (i)-(iii) da Definição 3.1.10 para $\rho = 0$.

(c) Para todo espaço topológico compacto Hausdorff K contendo um subconjunto D denso de pontos isolados, o espaço de Banach $C(K)$ satisfaz a propriedade β.

De fato, dado $x \in D$, seja f_x a função característica do conjunto $\{x\}$. Vamos mostrar que $f_x \in C(K)$. Para isso, considere $y \in K$. Se $y \neq x$ e V é uma vizinhança de $f_x(y) = 0$ em $\mathbb{K}$, temos que $K \setminus \{x\}$ é aberto de K contendo y e $f_x(K \setminus \{x\}) = \{0\} \subset V$. Mostramos por enquanto que f_x é contínua em todo ponto de K diferente de x. Como o ponto x é isolado, $\{x\}$ é aberto de K e dada uma vizinhança V de $f_x(x) = 1$, temos que $f_x(\{x\}) = \{1\} \subset V$. Então $f_x \in C(K)$ para todo $x \in D$. Além disso, $||f_x||_\infty = 1$.

Agora, para cada $x \in D$, definamos o funcional

$$\begin{aligned} F_x \colon C(K) &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Como $|F_x(f)| = |f(x)| \leq ||f||_\infty$ para todo $f \in C(K)$ e $F_x(f_x) = 1$, vale que $F_x \in S_{C(K)^*}$ para todo $x \in D$. Vamos mostrar que os conjuntos $\{f_x : x \in D\}$ e $\{F_x : x \in D\}$ satisfazem a (i)-(iii) da Definição 3.1.10 para $\rho = 0$.

Para verificar (i), basta notar que $F_x(f_x) = 1$ para todo $x \in D$, e para (ii), que $F_x(f_y) = f_y(x) = 0$, para todos $x, y \in D$ tais que $x \neq y$. Vamos mostrar (iii). Como K é compacto, dado $f \in C(K)$ existe $y_0 \in K$ tal que $|f(y_0)| = ||f||_\infty$. A função $|f| : K \ni x \mapsto |f(x)| \in \mathbb{K}$ também é contínua, então dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança V_0 de y_0 em K tal que $|f|(V_0) \subset B(|f(y_0)|; \epsilon)$. Como D é denso, existe $x_0 \in V_0 \cap D$. Assim,

$$|\, |F_{x_0}(f)| - ||f||_\infty| = ||f||_\infty - |f(x_0)| < \epsilon.$$

Mostramos que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $x_0 \in D$ tal que $||f||_\infty - |F_{x_0}(f)| < \epsilon$. Portanto, $||f||_\infty = \sup\{|F_x(f)| : x \in D\}$ para todo $f \in C(K)$.

3.2 Bishop-Phelps para operadores

O Teorema de Bishop-Phelps, mostrado na seção 2.2 do trabalho, afirma que $\mathcal{NA}(X, \mathbb{K})$ é denso em $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ para qualquer espaço de Banach X. Dados dois espaços de Banach X e Y, poderíamos nos perguntar se vale que $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$. Ou ainda, que condições devem ser colocadas sobre X (ou Y) para que $\mathcal{NA}(X, Y)$ seja denso em $\mathcal{L}(X, Y)$ para qualquer espaço de Banach Y (ou X)? Dado um espaço de Banach X (ou Y), existe uma caracterização de espaços de Banach Y (ou X) tais que $\mathcal{NA}(X, Y)$ seja denso em $\mathcal{L}(X, Y)$? São perguntas desse tipo que uma extensão do Teorema de Bishop-Phelps a operadores deve responder.

Como já discutimos, o estudo de tais extensões teve início em 1963, quando Lindenstrauss publicou seu artigo [Lin63], que continha muitos resultados notáveis nesse sentido. Mostrou, por exemplo, que se o espaço de Banach Y tem a propriedade β, então $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$ para todo espaço de Banach X, e que se X é reflexivo, então $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$ para todo espaço de Banach Y.

Nesta seção, estudamos algumas propriedades simples da extensão do Teorema de Bishop-Phelps a operadores e apresentamos a demonstração do resultado de [Lin63] que afirma que se Y for estritamente convexo e existir um operador não-compacto definido entre c_0 e Y, então $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$. A partir deste resultado, mostramos um exemplo concreto de espaço Y para o qual $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$.

Para começar, observemos que como $\mathcal{NA}(X, \mathbb{K})$ é denso em $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ para qualquer espaço de Banach X e espaços normados unidimensionais sempre são isométricos, segue a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Se X e Y são espaços de Banach e $\dim Y = 1$, então $\overline{\mathcal{NA}(X, Y)} = \mathcal{L}(X, Y)$.*

A seguir enunciamos outro resultado simples.

Proposição 3.2.2. *Se X e Y são espaços de Banach e $\dim X < \infty$, então $\mathcal{NA}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.*

Demonstração. Basta observar que nesse caso B_X é compacta, então todo operador em $\mathcal{L}(X, Y)$ atinge sua norma. □

A seguir faremos alguns resultados que nos permitirão construir um exemplo de espaço de Banach Y para o qual $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$. A existência deste exemplo será relevante na próxima seção.

A demonstração da Proposição abaixo é baseada na demonstração de um resultado feito por Lindenstrauss em [Lin63], mas trata-se da versão demonstrada em [AAGM08].

Proposição 3.2.3. *Sejam Y um espaço de Banach estritamente convexo e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, em que $X = c_0$, ℓ_∞ ou ℓ_∞^n, para $n \in \mathbb{N}$. Se $||T(x)|| = ||T||$ para $x \in S_X$, então $T(e_k) = 0$ sempre que $k \in \{i \in \mathbb{N} : |x_i| < 1\}$.*

Demonstração. A demonstração feita a seguir vale da mesma forma para $X = c_0$, ℓ_∞^n ou ℓ_∞.

Tome $k \in \{i \in \mathbb{N} : |x_i| < 1\}$. Então

$$||x \pm (1 - |x_k|)e_k|| \leq 1,$$

o que implica

$$||T(x \pm (1 - |x_k|)e_k)|| \leq ||T||.$$

Afirmamos que $||T(x \pm (1 - |x_k|)e_k)|| = ||T||$. De fato, como $||T||B_Y$ é convexo, se tivéssemos $||T(x + (1 - |x_k|)e_k)|| < ||T||$ ou $||T(x - (1 - |x_k|)e_k)|| < ||T||$, pela Proposição 1.1.9 deveria valer que

$$\left|\left|\frac{1}{2}T(x + (1 - |x_k|)e_k) + \frac{1}{2}T(x - (1 - |x_k|)e_k)\right|\right| = ||T(x)|| < ||T||,$$

contrariando a hipótese. Logo,

$$\frac{1}{||T||}||T(x \pm (1 - |x_k|)e_k)|| = 1. \tag{3.2.1}$$

Suponhamos por absurdo que $T(e_k) \neq 0$. Em particular, $T(x + (1 - |x_k|)e_k) \neq T(x - (1 - |x_k|)e_k)$. Tendo em vista (3.2.1) e que Y é estritamente convexo, vem

$$\left|\left|\frac{1}{2||T||}T(x + (1 - |x_k|)e_k) + \frac{1}{2||T||}T(x - (1 - |x_k|)e_k)\right|\right| < 1,$$

isto é, $||T(x)|| < ||T||$, absurdo. Concluímos então que $T(e_k) = 0$ para todo $k \in \{i \in \mathbb{N} : |x_i| < 1\}$. □

Lembramos que dados dois espaços normados X e Y, $\mathcal{K}(X, Y)$ denota o espaço normado dos operadores lineares compactos definidos entre X e Y, e $\mathcal{F}(X, Y)$ denota o espaço normado dos operadores lineares contínuos de posto finito definidos entre X e Y.

Corolário 3.2.4. *Se Y é um espaço de Banach estritamente convexo, então $\mathcal{NA}(c_0, Y) \subset \mathcal{F}(c_0, Y)$. Em particular, $\overline{\mathcal{NA}(c_0, Y)} \subset \mathcal{K}(c_0, Y)$.*

Demonstração. Considere $T \in \mathcal{NA}(c_0, Y)$. Então existe $x \in S_{c_0}$ tal que $||T(x)|| = ||T||$. Como $x \in c_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < 1$ se $n > n_0$. Pela Proposição 3.2.3, concluímos que $T(e_n) = 0$ para todo $n > n_0$. Com isso, mostramos que a imagem de T está contida no subespaço gerado pelos vetores $T(e_1), ..., T(e_{n_0})$. De fato, para todo $y \in c_0$,

$$T(y) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n T(e_n) = \sum_{n=1}^{n_0} y_n T(e_n),$$

e portanto $T \in \mathcal{F}(c_0, Y)$.

Como o fecho (em $\mathcal{L}(c_0, Y)$) do conjunto dos operadores de posto finito está contido em $\mathcal{K}(c_0, Y)$ (vide Proposição 1.1.28), segue que $\overline{\mathcal{NA}(c_0, Y)} \subset \mathcal{K}(c_0, Y)$. □

O Corolário abaixo é imediato:

Corolário 3.2.5. *Se Y é espaço de Banach estritamente convexo e existe um operador não-compacto em $\mathcal{L}(c_0, Y)$, então $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$.*

Até então, denotamos por c_0 o espaço de Banach formado pelo espaço vetorial das sequências em $\mathbb{K}$ convergindo a 0, munido da norma $||.||_\infty$. Entretanto, agora desejamos definir uma nova norma neste espaço. Para não carregar a notação, até o final desta seção denotaremos também por c_0 tal espaço vetorial. Não há perigo de confusão, pois cada significado será adotado no contexto adequado.

Feita essa ressalva, construiremos a seguir uma norma $||.||_K$ em c_0, equivalente à $||.||_\infty$, tal que o espaço normado $(c_0, ||.||_K)$ seja estritamente convexo. Para facilitar nosso trabalho, definiremos antes uma norma auxiliar $||.||_A$ em c_0.

Afirmamos que a aplicação

$$\begin{aligned} <\ ,\ >: c_0 \times c_0 &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i \bar{y}_i}{2^i} \end{aligned}$$

é um produto interno em c_0. Primeiro observemos que a aplicação está bem definida para qualquer par $(x, y) \in c_0 \times c_0$, pois a série acima sempre converge absolutamente. É claro também que $<\ ,\ >$ é linear na primeira coordenada e vale que $< x, y >= \overline{< y, x >}$ para todos $x, y \in c_0$, pela continuidade da conjugação. Por fim, $< x, x > \geq 0$ para todo $x \in c_0$, $< 0, 0 >= 0$ e se $< y, y >= 0$ para algum $y \in c_0$, então

$$0 =< y, y >= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y_i|^2}{2^i} \geq \frac{|y_{i_0}|^2}{2^{i_0}} \geq 0 \text{ para todo } i_0 \in \mathbb{N},$$

o que implica que $y = 0$.

Logo, se $||.||_A$ for a norma induzida em c_0 pelo produto interno definido acima, $(c_0, ||.||_A)$ é um espaço com produto interno. Sendo assim, pela Proposição 1.4.4, $(c_0, ||.||_A)$ é estritamente convexo. Entretanto, $||.||_A$ e $||.||_\infty$ não são equivalentes. De fato, vale que $e_n \overset{||.||_A}{\to} 0$ e $e_n \overset{||.||_\infty}{\nrightarrow} 0$.

Definamos agora a norma $||.||_K$ em c_0 dada por $||x||_K \doteq ||x||_\infty + ||x||_A$ para cada $x \in c_0$. Então:

Lema 3.2.6. *A norma $||.||_K$ em c_0 é equivalente a $||.||_\infty$ e $(c_0, ||.||_K)$ é um espaço de Banach estritamente convexo.*

Demonstração. Vamos verificar primeiro que as normas $||.||_\infty$ e $||.||_K$ são equivalentes. Claramente, vale que $||x||_K \geq ||x||_\infty$ para todo $x \in c_0$. Além disso, dado $x \in c_0$,

$$\begin{aligned} ||x||_A &= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{2^i}} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{||x||_\infty^2}{2^i}} \\ &= ||x||_\infty. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $x \in c_0$, $||x||_K = ||x||_\infty + ||x||_A \leq 2||x||_\infty$. Então temos

$$||x||_\infty \leq ||x||_K \leq 2||x||_\infty \text{ para todo } x \in c_0,$$

e assim as normas $||.||_K$ e $||.||_\infty$ são equivalentes. Como $(c_0, ||.||_\infty)$ é espaço de Banach, segue que $(c_0, ||.||_K)$ é espaço de Banach.

Mostraremos agora que $(c_0, ||.||_K)$ é estritamente convexo. Para isso, faremos uso da caracterização de espaços estritamente convexos dada pela Proposição 1.4.3. Sejam $x, y \in c_0$ linearmente independentes. Como $(c_0, ||.||_A)$ é estritamente convexo, vale que

$$||x + y||_A < ||x||_A + ||y||_A. \tag{3.2.2}$$

Então

$$\begin{aligned} ||x + y||_K &= ||x + y||_\infty + ||x + y||_A \\ &\leq (||x||_\infty + ||y||_\infty) + ||x + y||_A \\ &\overset{(3.2.2)}{<} (||x||_\infty + ||y||_\infty) + (||x||_A + ||y||_A) \\ &= ||x||_K + ||y||_K, \end{aligned}$$

e portanto $(c_0, ||.||_K)$ é estritamente convexo. □

Finalmente, estamos aptos a dar o exemplo pretendido. Lembremos que usamos a notação c_0 para o espaço vetorial das sequências em $\mathbb{K}$ convergentes a 0 e também para o espaço de Banach $(c_0, ||.||_\infty)$, cada qual no contexto adequado.

Exemplo 3.2.7. Seja $Y \doteq (c_0, ||.||_K)$. Afirmamos que $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$.

De fato, seja $I : c_0 \to Y$ o operador identidade. Dados n e m naturais distintos, temos que

$$\begin{aligned} ||I(e_n) - I(e_m)||_K &= ||e_n - e_m||_K \\ &= ||e_n - e_m||_\infty + ||e_n - e_m||_A \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Logo, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em c_0 tal que $(I(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente em Y, o que implica que o operador I não é compacto. Pelo Corolário 3.2.5, segue que $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$.

3.3 Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores

Nesta seção estudaremos a extensão do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás a operadores. Para isso, definimos a *Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (BPBp)*, conceito introduzido por Acosta et al. no artigo [AAGM08], de 2008. Em seguida, apresentamos alguns resultados sobre tal propriedade, contidos principalmente em [AAGM08] e [AGKM17]. Exibimos, por exemplo, as demonstrações de [AAGM08] de que o par (X, Y) satisfaz a BPBp se X e Y têm dimensão finita e de que (X, Y) satisfaz a BPBp para todo espaço de Banach X, se Y tem a propriedade β. Apresentamos também a classe de espaços de Banach Y introduzida em [AGKM17] e a demonstração de que espaços contidos nesta classe são tais que (c_0, Y) satisfaz a BPBp.

Definição 3.3.1. Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que o par (X, Y) satisfaz a *Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (BPBp)* se dado $\epsilon > 0$, existe $\eta(\epsilon) > 0$ tal que para quaisquer $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x \in S_X$ satisfazendo a $||T(x)|| > 1 - \eta(\epsilon)$ existem $u \in S_X$ e $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$

tais que

$$||S(u)|| = 1,\ ||u - x|| < \epsilon \text{ e } ||S - T|| < \epsilon.$$

Pelo Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás e a discussão que o sucede, se X é um espaço de Banach qualquer, tomando por exemplo

$$\eta(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon^2/4, & \text{se } 0 < \epsilon < 1 \\ 1/16, & \text{se } \epsilon \geq 1 \end{cases}$$

obtemos que $(X, \mathbb{K})$ satisfaz a BPBp. Notemos ainda que no caso dos pares da forma $(X, \mathbb{K})$ a função η definida não depende do espaço de Banach X considerado, tratando-se de uma propriedade adicional. As conclusões anteriores continuam válidas trocando $\mathbb{K}$ por um espaço de Banach Y de dimensão 1 sobre $\mathbb{K}$, já que todos os espaços dessa forma são isometricamente isomorfos.

Proposição 3.3.2. *Seja Y um espaço de Banach com $\dim Y = 1$. Para todo espaço de Banach X, o par (X, Y) satisfaz a BPBp.*

Notemos que se o par (X, Y) satisfaz a BPBp, então $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$. Mais adiante nesta seção veremos que a recíproca não vale.

Observação 3.3.3. Vejamos que se $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $\tilde{u}, \tilde{x} \in S_X$ forem tais que $||S(\tilde{u})|| = 1$ e $||\tilde{x} - \tilde{u}|| < \epsilon$, definindo $u \doteq \lambda\tilde{u}$ e $x \doteq \lambda\tilde{x}$, com $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$, teremos também que $||S(u)|| = 1$ e $||x - u|| < \epsilon$.

Em particular, para que um par (X, Y) satisfaça a BPBp basta que para dado $\epsilon > 0$ exista $\eta(\epsilon) > 0$ tal que sempre que $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x \in S_X$ forem tais que $||T(x)|| > 1 - \eta(\epsilon)$, é possível encontrar $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $\tilde{u} \in S_X$ que satisfazem a $||S(\tilde{u})|| = 1$, $||S - T|| < \epsilon$ e $||\tilde{u} - \tilde{x}|| < \epsilon$, para algum ponto $\tilde{x} \in S_X$ obtido por uma rotação de x, isto é, $\tilde{x} = \lambda x$, com $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$. De fato, $u \doteq \lambda^{-1}\tilde{u}$ é tal que $||S(u)|| = 1$ e $||u - x|| < \epsilon$.

Vimos na seção anterior que sempre que X tem dimensão finita vale que $\mathcal{NA}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$. Podemos garantir que o par (X, Y) satisfaz a BPBp se Y também tem dimensão finita, como mostra o seguinte resultado de [AAGM08].

Teorema 3.3.4 ([AAGM08]). *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão finita. Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, existe $R \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $||R - T|| < \epsilon$.

(ii) Se $x \in S_X$ satisfaz a $||T(x)|| > 1 - \delta$, então existe $\tilde{x} \in S_X$ tal que $||R(\tilde{x})|| = 1$ e $||x - \tilde{x}|| < \epsilon$.

Demonstração. Vamos provar o resultado por absurdo. Suponhamos que para algum $\epsilon_0 > 0$ vale que para todo $\delta > 0$ existe um operador em $S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ que não satisfaz simultaneamente os itens (i) e (ii) do enunciado para nenhum $R \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Para cada $\delta = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, seja $T_n \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tal operador.

Vale então que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $R \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, se $||R - T_n|| < \epsilon_0$, existe $x_{n,R} \in S_X$ satisfazendo a:

(a) $||T_n(x_{n,R})|| > 1 - \dfrac{1}{n}$.

(b) $(||R(\tilde{x})|| = 1 \Rightarrow ||x_{n,R} - \tilde{x}|| \geq \epsilon_0)$, para todo $\tilde{x} \in S_X$.

Como X e Y têm dimensão finita, $\mathcal{L}(X,Y)$ tem dimensão finita, o que implica que $S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ é compacto. Logo, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a algum $T_0 \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0 \Rightarrow ||T_{n_k} - T_0|| < \epsilon_0.$$

Definamos, para cada natural $k \geq k_0$, o ponto $x_k \doteq x_{n_k,T_0} \in S_X$. Como S_X também é compacto, existe uma subsequência $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergindo a algum $x_0 \in S_X$. Observemos que $||T_{n_{k_j}} - T_0|| < \epsilon_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, por construção. Portanto, pela letra (a), dado $j \in \mathbb{N}$ vale que

$$1 \geq \left|\left|T_{n_{k_j}}(x_{k_j})\right|\right| > 1 - \frac{1}{n_{k_j}}$$

e assim tomando $j \to \infty$ obtemos $||T_0(x_0)|| = 1$. Temos também que para algum $j_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $||x_{k_{j_0}} - x_0|| = ||x_{n_{k_{j_0}},T_0} - x_0|| < \epsilon_0$. Isto é uma contradição, pois tendo em vista que $||T_{n_{k_{j_0}}} - T_0|| < \epsilon_0$ e $||T_0(x_0)|| = 1$, o item (b) implica que $||x_{n_{k_{j_0}},T_0} - x_0|| \geq \epsilon_0$. □

Corolário 3.3.5. *Se X e Y são espaços de Banach de dimensão finita, o par (X,Y) satisfaz a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás.*

Notemos que o Teorema 3.3.4 corresponde a uma propriedade mais forte que a BPBp. De fato, ele afirma que para X e Y de dimensão finita, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, existe $R \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tal que $||R - T|| < \epsilon$ e para qualquer $x \in S_X$ satisfazendo a $||T(x)|| > 1 - \delta$, é possível encontrar $\tilde{x} \in S_X$ tal que R atinge sua norma em $\tilde{x}$ e $||x - \tilde{x}|| < \epsilon$. Aqui o $R \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ encontrado depende apenas de T, e funciona para todo $x \in S_X$ obedecendo a $||T(x)|| > 1 - \delta$.

Observação 3.3.6. Observemos que no caso em que $Y = \mathbb{K}$, a constante δ dada pelo Teorema 3.3.4 depende do espaço X, e não só de ϵ, ao contrário do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás clássico.

A seguir apresentamos a demonstração de outro resultado de Acosta et al. em [AAGM08], que afirma se o espaço de Banach Y tem a propriedade β (vide Definição 3.1.10), então o par (X,Y) satisfaz a BPBp para *qualquer* espaço de Banach X.

Teorema 3.3.7 ([AAGM08]). *Sejam X e Y espaços de Banach. Se Y tem a propriedade β, então o par (X,Y) satisfaz a BPBp.*

Demonstração. Sejam $\rho \in [0,1)$, $\{f_i : i \in I\} \subset S_{Y^*}$ e $\{y_i : i \in I\} \subset S_Y$ a constante e os conjuntos que satisfazem às condições da propriedade β para Y (Definição 3.1.10). Vamos mostrar que (X,Y) satisfaz a Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores com a função $\eta(\epsilon) \doteq \dfrac{\nu^2}{4}$, para ν escolhido de forma que $\nu < \dfrac{4\epsilon}{15}(1-\rho)$, qualquer que seja $\epsilon \in (0,1)$.

Fixemos então $\epsilon \in (0,1)$, e tomemos $\nu < \dfrac{4\epsilon}{15}(1-\rho)$. Pela escolha de ν,

$$\begin{aligned}\nu + \frac{\nu^2}{4} &< \frac{4\epsilon}{15}(1-\rho) + \frac{4\epsilon^2}{15^2}(1-\rho)^2 \\ &\leq \frac{64\epsilon}{15^2}(1-\rho)\end{aligned}$$

$$< \frac{\epsilon}{3}(1-\rho),$$

e isso implica que $\rho\left(\nu + \frac{\nu^2}{4}\right) < \frac{\epsilon}{3}(1-\rho)$, ou seja,

$$\rho\left(\frac{\epsilon}{3} + \nu + \frac{\nu^2}{4}\right) < \frac{\epsilon}{3}\,. \tag{3.3.1}$$

Agora sejam $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x \in S_X$ satisfazendo a $||T(x)|| > 1 - \frac{\nu^2}{4}$. Como Y tem a propriedade β, vale que

$$||T(x)|| = \sup\{|f_i(T(x))| : i \in I\},$$

então em particular existe $i_0 \in I$ tal que

$$|f_{i_0}(T(x))| > 1 - \frac{\nu^2}{4}\,.$$

Pela Observação 3.3.3, podemos sem perda de generalidade assumir que $|f_{i_0}(T(x))| = f_{i_0}(T(x))$, realizando uma rotação em $x \in S_X$ se necessário. Como também vale que $T^t(f_{i_0}) \in B_{X^*} \setminus \{0\}$, obtemos

$$\frac{\nu^2}{4} > 1 - f_{i_0}(T(x)) \geq 1 - \frac{T^t(f_{i_0})(x)}{||T^t(f_{i_0})||}\,.$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás ao funcional $\frac{T^t(f_{i_0})}{||T^t(f_{i_0})||} \in S_{X^*}$ e ao ponto $x \in S_X$ para obter $f \in S_{X^*}$ e $u \in S_X$ satisfazendo a

$$\left|\left|f - \frac{T^t(f_{i_0})}{||T^t(f_{i_0})||}\right|\right| < \nu\ ,\ ||u - x|| < \nu \text{ e } f(u) = 1.$$

Em particular,

$$||\ ||T^t(f_{i_0})||f - T^t(f_{i_0})\ || < ||T^t(f_{i_0})||\nu \leq \nu.$$

Notemos ainda que $||T^t(f_{i_0})|| \geq |f_{i_0}(T(x))| > 1 - \frac{\nu^2}{4}$. Assim,

$$||f - T^t(f_{i_0})|| \leq ||\ f - ||T^t(f_{i_0})||f\ || + ||\ ||T^t(f_{i_0})||f - T^t(f_{i_0})\ || < \frac{\nu^2}{4} + \nu. \tag{3.3.2}$$

Definiremos agora um operador cuja normalização será o operador que procuramos. Seja $\tilde{S} \in \mathcal{L}(X,Y)$ dado por

$$\tilde{S}(x) \doteq T(x) + \left[\left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right)f(x) - T^t(f_{i_0})(x)\right]y_{i_0}, \text{ para todo } x \in X.$$

Então $\tilde{S}^t \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ será dado por

$$\tilde{S}(g) = T^t(g) + \left[\left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right) f - T^t(f_{i_0})\right] g(y_{i_0}), \text{ para todo } g \in Y^*.$$

Novamente usando que Y tem a propriedade β, pela Proposição 1.1.19 temos

$$||\tilde{S}|| = ||\tilde{S}^t|| = \sup_{j \in I} ||\tilde{S}^t(f_j)||. \tag{3.3.3}$$

Em particular, $||\tilde{S}^t|| \geq ||\tilde{S}^t(f_{i_0})|| = 1 + \frac{\epsilon}{3}$, e se $j \in I \setminus \{i_0\}$,

$$\begin{aligned}
||S^t(f_j)|| &= \left|\left|T^t(f_j) + \left[\left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right) f - T^t(f_{i_0})\right] f_j(y_{i_0})\right|\right| \\
&\leq 1 + \rho \left|\left|\left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right) f - T^t(f_{i_0})\right|\right| \\
&\leq 1 + \rho \left(||f - T^t(f_{i_0})|| + \frac{\epsilon}{3}\right) \\
&\overset{(3.3.2)}{\leq} 1 + \rho \left(\nu + \frac{\nu^2}{4} + \frac{\epsilon}{3}\right) \\
&\overset{(3.3.1)}{<} 1 + \frac{\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

De (3.3.3), concluímos que $||\tilde{S}|| = ||\tilde{S}^t(f_{i_0})|| = 1 + \frac{\epsilon}{3}$. Notemos ainda que como $\tilde{S}^t(f_{i_0}) = \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right) f$, temos $(f_{i_0} \circ \tilde{S})(u) = \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right)$. Logo, $\tilde{S}$ atinge sua norma em $u \in S_X$. Definindo $S \doteq \frac{\tilde{S}}{||\tilde{S}||}$, obtemos que $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ atinge sua norma em $u \in S_X$ e

$$\begin{aligned}
||S - T|| &\leq ||\tilde{S} - T|| + ||S - \tilde{S}|| \\
&= \left|\left|\left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right) f - T^t(f_{i_0})\right|\right| + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq ||f - T^t(f_{i_0})|| + \frac{2\epsilon}{3} \\
&\overset{(3.3.2)}{<} \nu + \frac{\nu^2}{4} + \frac{2\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Novamente usando que $\nu + \frac{\nu^2}{4} < \frac{\epsilon}{3}(1 - \rho) \leq \frac{\epsilon}{3}$, concluímos que $||S - T|| < \epsilon$. Como já tínhamos também $||x - u|| < \epsilon$, a demonstração está encerrada. □

Como já discutido, no artigo [AAGM08], Acosta et al. introduziram a Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores e demonstraram os Teoremas 3.3.4 e 3.3.7 apresentados aqui. Neste artigo foi feita ainda uma caracterização dos espaços de Banach Y tais que o par (ℓ_1, Y) satisfaz a

BPBp, e provado que o par (ℓ_∞^n, Y) satisfaz a BPBp se Y for uniformemente convexo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Muitos outros trabalhos e resultados importantes sobre a BPBp foram produzidos desde então. Por exemplo, no caso real, Kim, Lee e Lin provaram que o par (L_∞, Y) satisfaz a BPBp sempre que Y for uniformemente convexo [KLL16]. Para o caso complexo , Acosta mostrou que o par $(C_0(L), Y)$ satisfaz a BPBp para todo espaço uniformemente convexo Y e todo espaço topológico Hausdorff localmente compacto L [Aco16]. Existe também uma caracterização dos espaços de Banach Y tais que o par (ℓ_∞^3, Y) satisfaz a BPBp [ABGG+15], e uma para que (ℓ_∞^4, Y) satisfaça a propriedade [ADSM19]. Entretanto, o caso do par (c_0, Y) é diferente dos supracitados, e ainda não há uma caracterização dos pares (c_0, Y) que satisfazem a BPBp. Veremos a seguir alguns resultados sobre este par.

Primeiramente, observemos que não é verdade que (c_0, Y) satisfaz a BPBp para todo espaço de Banach Y. De fato, como estudado na seção anterior, $\mathcal{NA}(c_0, Y)$ não é denso em $\mathcal{L}(c_0, Y)$ para $Y = (c_0, ||.||_K)$ e, portanto, (c_0, Y) não satisfaz a BPBp.

Em [AAGM08], após a demonstração de que (ℓ_∞^n, Y) satisfaz a BPBp para todo Y uniformemente convexo, ficou aberta a seguinte pergunta: o par (c_0, Y) também satisfaz a BPBp se Y for uniformemente convexo? Esta pergunta viria a ser respondida de forma afirmativa em 2012, por Kim [Kim13]. Em 2017, Acosta et al. generalizaram este resultado, apresentando uma classe maior de espaços de Banach Y tais que (c_0, Y) satisfaz a BPBp [AGKM17]. Apresentaremos ainda nesta seção tal classe, e estudaremos os resultados feitos em [AGKM17].

Para começar, vamos mostrar que se (c_0, Y) satisfaz a BPBp para o espaço de Banach Y, então o mesmo valerá para os pares (ℓ_∞^n, Y), para cada $n \in \mathbb{N}$. A demonstração de um resultado bem mais geral que este encontra-se em [ACK+15].

Observemos que se $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)$ e $x \in \ell_\infty^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, podemos definir um operador $\tilde{T} \in \mathcal{L}(c_0, Y)$ por $\tilde{T}(y) = T(y_1, ..., y_n)$ para cada $y \in c_0$, e um ponto $\tilde{x} \doteq \sum_{i=1}^n x_i e_i \in c_0$. Vale que $||\tilde{T}|| = ||T||$ e $||\tilde{x}|| = ||x||$.

De forma análoga, se $\tilde{S} \in \mathcal{L}(c_0, Y)$ e $\tilde{u} \in c_0$, podemos definir um operador $S \in \mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)$ por $S(y) = \tilde{S}\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right)$ para cada $y \in \ell_\infty^n$, e um ponto $u \doteq (\tilde{u}_1, ..., \tilde{u}_n) \in \ell_\infty^n$. Vale que $||S|| \leq ||\tilde{S}||$ e $||u|| \leq ||\tilde{u}||$.

Proposição 3.3.8 ([ACK+15])**.** *Seja Y um espaço de Banach. Se o par (c_0, Y) satisfaz a BPBp, então (ℓ_∞^n, Y) satisfaz a BPBp, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$, e tomemos $\epsilon \in (0, 1)$. Por hipótese, existe $\eta(\epsilon) > 0$ que satisfaz as condições da BPBp para o par (c_0, Y). Sejam $T \in S_{\mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)}$ e $x \in S_{\ell_\infty^n}$ satisfazendo a $||T(x)|| > 1 - \eta(\epsilon)$. Considere o operador $\tilde{T} \in S_{\mathcal{L}(c_0, Y)}$ e o ponto $\tilde{x} \in S_{c_0}$ definidos na discussão que precede o enunciado desta Proposição, ou seja, $\tilde{T}(y) = T(y_1, ..., y_n)$ para cada $y \in c_0$, e $\tilde{x} \doteq \sum_{i=1}^n x_i e_i \in c_0$. Teremos que

$$||\tilde{T}(\tilde{x})|| = ||T(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)|| = ||T(x)|| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Então existem $\tilde{S} \in S_{\mathcal{L}(c_0, Y)}$ e $\tilde{u} \in S_{c_0}$ satisfazendo a

$$||\tilde{S}(\tilde{u})|| = 1, \; ||\tilde{S} - \tilde{T}|| < \epsilon \text{ e } ||\tilde{u} - \tilde{x}|| < \epsilon. \tag{3.3.4}$$

Definindo
$$\tilde{p} \doteq \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i e_i \text{ e } \tilde{q} \doteq \sum_{i=n+1}^{\infty} \tilde{u}_i e_i,$$
podemos escrever $\tilde{u} = \tilde{p} + \tilde{q}$, e assim $1 = ||\tilde{u}|| = \text{máx}\{||\tilde{p}||, ||\tilde{q}||\}$. Por (3.3.4), $||\tilde{x} - \tilde{p}|| < \epsilon$ e $||\tilde{q}|| < \epsilon < 1$. Em particular, $||\tilde{p}|| = 1$.

Consideremos agora o operador $S \in B_{\mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)}$ e o ponto $u \in B_{\ell_\infty^n}$ dados por $S(y) = \tilde{S}\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right)$ para cada $y \in \ell_\infty^n$, e $u \doteq (\tilde{u}_1, ..., \tilde{u}_n)$, também definidos na discussão que precede o enunciado desta Proposição. Temos que

$$||S - T|| \leq ||\tilde{S} - \tilde{T}|| < \epsilon \;\text{ e }\; ||x - u|| \leq ||\tilde{x} - \tilde{u}|| < \epsilon.$$

Resta mostrar que $||S(u)|| = 1$. Como $||\tilde{q}|| < \epsilon$, segue que $\tilde{p} + \dfrac{\tilde{q}}{\epsilon} \in B_{c_0}$. Então

$$||\tilde{S}(\tilde{u})|| = ||(1-\epsilon)\tilde{S}(\tilde{p}) + \epsilon\tilde{S}(\tilde{p} + \epsilon^{-1}\tilde{q})|| = 1,$$

donde concluímos que

$$1 \leq (1-\epsilon)||\tilde{S}(\tilde{p})|| + \epsilon||\tilde{S}(\tilde{p} + \epsilon^{-1}\tilde{q})|| \leq (1-\epsilon) + \epsilon = 1.$$

Logo, $||\tilde{S}(\tilde{p})|| = ||\tilde{S}(\tilde{p} + \epsilon^{-1}\tilde{q})|| = 1$, e assim $||S(u)|| = ||\tilde{S}(\tilde{p})|| = 1$. □

De agora em diante, concentraremo-nos no estudo do artigo [AGKM17], onde é apresentada uma classe de espaços de Banach Y, a qual contêm os espaços uniformemente convexos e os que possuem a propriedade β de Lindenstrauss, tais que (c_0, Y) satisfaz a BPBp. Antes de apresentar esta classe e partir para o estudo dos teoremas relacionados, faremos alguns resultados que nos auxiliarão nessa tarefa.

O Lema abaixo, feito em [AAGM08], usa a noção de somabilidade, discutida na seção 1.6 do trabalho.

Lema 3.3.9 ([AAGM08]). *Sejam $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos tais que $|c_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\eta > 0$ um número real e $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de reais não-negativos satisfazendo a:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \leq 1$;

(ii) $\text{Re} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n c_n > 1 - \eta$.

Para $r \in (0,1)$, seja $A \doteq \{i \in \mathbb{N} : \text{Re}(c_i) > r\}$. Então

$$\sum_{n\in A} \alpha_n > 1 - \frac{\eta}{1-r}\,.$$

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $|\alpha_n \text{Re}(c_n)| \leq \alpha_n$, e assim $\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n \text{Re}(c_n)| < \infty$. Pela Proposição 1.6.6, a família $(\alpha_n \text{Re}(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é somável. Logo, também vale que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \text{Re}(c_n) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \text{Re}(c_n)$, e pela Proposição 1.6.5 podemos escrever $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \text{Re}(c_n) = \sum_{n\in A} \alpha_n \text{Re}(c_n) + \sum_{n\in A^c} \alpha_n \text{Re}(c_n)$. Analogamente, $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n = \sum_{n\in A} \alpha_n + \sum_{n\in A^c} \alpha_n$.

Como já observado, $\alpha_n \operatorname{Re}(c_n) \leq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$\sum_{n\in A} \alpha_n \operatorname{Re}(c_n) \leq \sum_{n\in A} \alpha_n$$

(lembre-se de que a soma indexada em um conjunto de índices como definida na seção 1.6 é um limite de rede, que é monotônico). Por outro lado, se $n \notin A$, temos por definição $\operatorname{Re}(c_n) \leq r$, donde vem que

$$\sum_{n\in A^c} \alpha_n \operatorname{Re}(c_n) \leq r \sum_{n\in A^c} \alpha_n.$$

Portanto, pela hipótese (ii) teremos

$$\begin{aligned} 1-\eta &< \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{Re}(c_n) \\ &= \sum_{n\in A} \alpha_n \operatorname{Re}(c_n) + \sum_{n\in A^c} \alpha_n \operatorname{Re}(c_n) \\ &\leq \sum_{n\in A} \alpha_n + r \sum_{n\in A^c} \alpha_n. \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n\in A} \alpha_n + \sum_{n\in A^c} \alpha_n \leq 1$, vem

$$1-\eta < \sum_{n\in A} \alpha_n + r\left(1 - \sum_{n\in A} \alpha_n\right) = (1-r)\sum_{n\in A} \alpha_n + r.$$

Concluímos então que $\sum_{n\in A} \alpha_n > 1 - \dfrac{\eta}{1-r}$. □

Abaixo enunciamos a aplicação do Lema acima que usaremos para a apresentação dos resultados estudados.

Corolário 3.3.10. *Sejam $f \in B_{c_0{}^*}$ e $x \in B_{c_0}$ tais que $\operatorname{Re} f(x) > 1-\eta$, para $0 < \eta < 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\lambda_n \in S_{\mathbb{K}}$ satisfazendo a $f(e_n) = \lambda_n |f(e_n)|$. Então dado $r \in (0, 1-\eta)$, o conjunto $A' \doteq \{n \in \mathbb{N} : \operatorname{Re}(\lambda_n x_n) > r \text{ e } f(e_n) \neq 0\}$ é não-vazio, finito e satisfaz a*

$$\sum_{n\in A'} |f(e_n)| > 1 - \frac{\eta}{1-r}\ .$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $A' = \emptyset$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $\operatorname{Re}(x_n\lambda_n) \leq r$ ou $f(e_n) = 0$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos que $|f(e_n)| \operatorname{Re}(x_n\lambda_n) \leq |f(e_n)| r$. Além disso, pela Proposição 1.1.14, $||f|| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x) &= \operatorname{Re} f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) \\ &= \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n |f(e_n)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \operatorname{Re}(x_n\lambda_n) \\
&\leq r \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \leq r,
\end{aligned}
$$

absurdo, pois por hipótese $\operatorname{Re} f(x) > 1-\eta > r$. Então $A' \neq \emptyset$.

Como $x \in c_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < r$. Logo, $n > n_0$ implica que

$$\operatorname{Re}(x_n\lambda_n) \leq |x_n\lambda_n| = |x_n| < r,$$

donde concluímos que $A' \subset \{1, ..., n_0\}$, e portanto A' é finito.

Notemos agora que $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de complexos tais que $|\lambda_n x_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(|f(e_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de reais não-negativos satisfazendo a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \leq 1$$

e

$$\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| x_n\lambda_n > 1-\eta.$$

Se $A \doteq \{n \in \mathbb{N} : \operatorname{Re}(\lambda_n x_n) > r\}$, pelo Lema 3.3.9 temos que

$$\sum_{n\in A'} |f(e_n)| = \sum_{n\in A} |f(e_n)| > 1 - \frac{\eta}{1-r}\,.$$

□

Recordemos aqui que no final da seção 1.6 definimos o operador $P_A \in \mathcal{L}(c_0, c_0)$ por $P_A(x) = \sum_{n\in A} x_n e_n$ para cada $x \in c_0$, para um dado $A \subset \mathbb{N}$. Vimos também que para todos $x \in c_0$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_A(x))_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } n \in A \\ 0, & \text{se } n \notin A. \end{cases}$$

Antes de apresentar o seguinte Lema de [AGKM17], definemos para um dado $x \in c_0$ o conjunto $\operatorname{supp} x \doteq \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$.

Lema 3.3.11 ([AGKM17])**.** *Sejam Y um espaço de Banach, $E \subset S_Y$ e $F : E \to S_{Y^*}$ tal que E é fortemente e uniformemente exposta por F. Suponhamos que para $\epsilon > 0$, o real $\delta > 0$ satisfaça a condição*

$$(y \in B_Y,\, e \in E,\ \operatorname{Re} F(e)(y) > 1-\delta) \Rightarrow ||y-e|| < \epsilon.$$

Se $T \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $x \in B_{c_0}$ são tais que $\operatorname{Re} F(e_0)(T(x)) > 1-\delta$ para algum $e_0 \in E$ e $A \doteq \operatorname{supp} x$, então $||T(I-P_A)|| \leq 2\epsilon$.

Demonstração. Seja $u \in B_{c_0}$. Denotando por I o operador identidade em $\mathcal{L}(c_0, c_0)$, temos que

$$((I-P_A)(u))_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \in A \\ u_n, & \text{se } n \notin A. \end{cases}$$

Como $A = \operatorname{supp} x$, vale que $(x \pm (I - P_A)(u)) \in B_{c_0}$ e assim $T(x \pm (I - P_A)(u)) \in B_Y$. Escolhamos $s \in \{-1, 1\}$ de forma que $\operatorname{Re} F(e_0)(s(I - P_A)(u)) \geq 0$. Como $\operatorname{Re} F(e_0)(T(x)) > 1 - \delta$ por hipótese, segue que

$$||T(x) - e_0|| < \epsilon \text{ e } \operatorname{Re} F(e_0)(T(x + s(I - P_A)(u)) > 1 - \delta.$$

Portanto, $||T(x + s(I - P_A)(u)) - e_0|| < \epsilon$ e

$$\begin{aligned} ||T(I - P_A)(u)|| &= ||sT(I - P_A)(u)|| \\ &= ||sT(I - P_A)(u) + T(x) - T(x) + e_0 - e_0|| \\ &= ||T(s(I - P_A)(u) + x) - e_0 + e_0 - T(x)|| \\ &\leq ||T(s(I - P_A)(u) + x) - e_0|| + ||T(x) - e_0|| \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

Como $u \in B_{c_0}$ era arbitrário, $||T(I - P_A)|| \leq 2\epsilon$. □

Seja $A \subset \mathbb{N}$. Definamos

$$V_A \doteq \{x \in P_A(B_{c_0}) : |x_i| = 1 \text{ para todo } i \in A\}.$$

Se A tiver infinitos elementos, obrigatoriamente $V_A = \emptyset$, já que um elemento de c_0 não pode ter infinitas coordenadas de módulo 1. Caso $A = \emptyset$, teremos $P_A = 0$ e $V_A = \{0\}$. Portanto, esse conjunto só será interessante se A for finito e não-vazio.

Se tivermos $A = \{n_1, ..., n_k\}$, com $k \geq 1$, a aplicação

$$\begin{aligned} J\colon P_A(c_0) &\to \ell_\infty^k \\ x &\mapsto (x_{n_1}, ..., x_{n_k}) \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico. De fato, J é claramente linear e sobrejetora, e como $P_A(c_0) = \operatorname{span}[e_{n_1}, ..., e_{n_k}]$, também preserva normas. Notemos ainda que $B_{P_A(c_0)} = P_A(B_{c_0})$ e portanto $J(P_A(B_{c_0})) = B_{\ell_\infty^k}$. Além disso, $J(V_A) = \{y \in \ell_\infty^k : |y_i| = 1 \text{ para todo } i = 1, ..., k\}$. Tendo em vista que a envoltória convexa de $\{y \in \ell_\infty^k : |y_i| = 1 \text{ para todo } i = 1, ..., k\}$ é $B_{\ell_\infty^k}$, temos que $\operatorname{Env}(J(V_A)) = B_{\ell_\infty^k}$, e pela Proposição 1.1.13, $J^{-1}(\operatorname{Env}(J(V_A))) = \operatorname{Env}(V_A) = J^{-1}(B_{\ell_\infty^k})$, ou seja,

$$\operatorname{Env}(V_A) = P_A(B_{c_0}).$$

As notações e conclusões acima serão usadas em alguns resultados futuros.

Lema 3.3.12. *Sejam Y um espaço normado, $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto finito e $T \in \mathcal{L}(c_0, Y)$. Então existe $x \in V_A$ tal que $||T(x)|| = \sup\{||T(y)|| : y \in P_A(B_{c_0})\}$.*

Demonstração. Se $A = \emptyset$, então $P_A = 0$, $V_A = \{0\}$, e a conclusão é clara.

Suponhamos então que $A = \{n_1, ..., n_k\}$, com $k \geq 1$. Observemos que V_A é compacto, pois $\{y \in \ell_\infty^k : |y_i| = 1 \text{ para todo } i = 1, ..., k\}$ o é. Então existe $x \in V_A$ tal que $||T(x)|| = \sup\{||T(y)|| : y \in V_A\}$. É claro que

$$||T(x)|| \leq \sup\{||T(y)|| : y \in P_A(B_{c_0})\}. \tag{3.3.5}$$

Definamos o conjunto

$$C \doteq \{y \in P_A(B_{c_0}) : ||T(y)|| \leq ||T(x)||\}.$$

Como $V_A \subset C$ e C é convexo, temos que $\mathrm{Env}(V_A) = P_A(B_{c_0}) \subset C \subset P_A(B_{c_0})$. Logo, $C = P_A(B_{c_0})$ e assim $||T(y)|| \leq ||T(x)||$ para todo $y \in P_A(B_{c_0})$. Por isso e por (3.3.5), $||T(x)|| = \sup\{||T(y)|| : y \in P_A(B_{c_0})\}$. $\square$

Corolário 3.3.13. *Sejam Y um espaço normado e $T \in \mathcal{L}(c_0, Y)$ um operador tal que $T(B_{c_0}) = T(P_A(B_{c_0}))$, para $A \subset \mathbb{N}$ finito. Então existe $x \in V_A$ tal que $||T|| = ||T(x)||$. Em particular, $||T|| = \sup\{||T(y)|| : y \in V_A\}$.*

Demonstração. Basta observar que nesse caso $||T|| = \sup\{||T(y)|| : y \in B_{c_0}\} = \sup\{||T(y)|| : y \in P_A(B_{c_0})\}$, e a conclusão segue do Lema 3.3.12. $\square$

Suponhamos que Y é um espaço de Banach tal que existem um conjunto I, $\{y_i : i \in I\} \subset S_Y$, $\{f_i : i \in I\} \subset S_{Y^*}$, um subconjunto $E \subset S_Y$, uma função $F : E \to S_{Y^*}$ e $\rho \in [0, 1)$ satisfazendo a:

(I) $f_i(y_i) = 1$, para todo $i \in I$.

(II) $|f_i(y_j)| \leq \rho$, para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

(III) E é fortemente e uniformemente exposta por F.

(IV) $|F(e)(y_i)| \leq \rho$, para todos $e \in E$ e $i \in I$.

(V) O conjunto $G \doteq F(E) \cup \{f_i : i \in I\}$ é tal que, para todo $y \in Y$,

$$||y|| = \sup\{|f(y)| : f \in G\} = \max\{\sup\{|f_i(y)| : i \in I\},\ \sup\{|F(e)(y)| : e \in E\}\}.$$

O resultado principal do artigo [AGKM17] afirma que espaços de Banach Y satisfazendo as condições acima são tais que o par (c_0, Y) satisfaz a BPBP. Antes de apresentar este resultado, vamos fazer uma discussão preliminar a respeito de espaços de Banach satisfazendo a tais condições.

Fixemos $0 < \epsilon < 1$. Por (III), existem constantes $\nu > 0$ e $\delta > 0$ (que podemos escolher satisfazendo também a $\nu < \dfrac{\epsilon}{12}$ e $\delta < 1$) tais que

$$(e \in E, y \in B_Y, \mathrm{Re}\, F(e)(y) > 1 - \nu) \Rightarrow ||y - e|| < \frac{\epsilon}{8} \tag{3.3.6}$$

e

$$(e \in E, y \in B_Y, \mathrm{Re}\, F(e)(y) > 1 - \delta) \Rightarrow ||y - e|| < \frac{\nu^3}{8}\,. \tag{3.3.7}$$

Definamos ainda $\epsilon_1 \doteq \dfrac{\delta\nu^3}{16}$ e fixemos $\eta, s \in (0, 1)$ satisfazendo a

$$\begin{aligned} \eta &< \frac{4}{5}\,\text{mín}\left\{\frac{\epsilon_1(1-\rho)}{(1+\rho)},\ \frac{\epsilon}{3},\ 2\delta\right\}; \\ s &< \text{mín}\left\{\frac{\epsilon^2\epsilon_1(\delta - 2\epsilon_1)}{24(1+2\epsilon_1)},\ \frac{\eta^2\epsilon_1\epsilon^2}{3\cdot 2^5}\right\}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Notemos que todas as contantes definidas dependem do $\epsilon > 0$ fixado no início.

Fixada a notação acima, listaremos algumas desigualdades envolvendo as constantes que serão usadas futuramente. Indicaremos quando cada desigualdade for usada, de modo que a lista pode ser consultada aos poucos, conforme surja necessidade.

Desigualdade 1: $\rho\left(\eta + \dfrac{\eta^2}{4} + \epsilon_1\right) < \epsilon_1$.

Prova. Por escolha de η, temos que $\eta < \dfrac{4\epsilon_1}{5}\dfrac{(1-\rho)}{(1+\rho)}$. Logo,

$$\frac{\eta^2}{4} < \frac{4\epsilon_1^2}{25}\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}.$$

Como $\rho \in [0,1)$ e $\epsilon_1 \in (0,1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\eta + \frac{\eta^2}{4} &< \frac{4\epsilon_1}{5}\frac{(1-\rho)}{(1+\rho)} + \frac{4\epsilon_1^2}{25}\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2} \\
&\leq \frac{4\epsilon_1}{5}(1-\rho) + \frac{4\epsilon_1}{25}(1-\rho) \\
&= \frac{24\epsilon_1}{25}(1-\rho) < \epsilon_1(1-\rho),
\end{aligned}$$

donde segue que $\rho\left(\eta + \dfrac{\eta^2}{4}\right) \leq \left(\eta + \dfrac{\eta^2}{4}\right) < \epsilon_1(1-\rho)$ e portanto $\rho\left(\eta + \dfrac{\eta^2}{4} + \epsilon_1\right) < \epsilon_1$.

Desigualdade 2: $2\epsilon_1 + \eta + \dfrac{\eta^2}{4} < \epsilon$.

Prova. Vimos na demonstração da Desigualdade 1 que $\eta + \dfrac{\eta^2}{4} < \dfrac{24\epsilon_1}{25}(1-\rho) < \epsilon_1$. Como $3\epsilon_1 = \dfrac{3\delta}{16}\nu^3 < \nu^3 < \epsilon^3 < \epsilon$, concluímos que $2\epsilon_1 + \eta + \dfrac{\eta^2}{4} < 3\epsilon_1 < \epsilon$.

Desigualdade 3: $\dfrac{8s}{\epsilon^2} < \delta$.

Prova. Por construção, $s < \dfrac{\epsilon^2\epsilon_1(\delta - 2\epsilon_1)}{24(1+2\epsilon_1)}$, e então $\dfrac{8s}{\epsilon^2} < \dfrac{\epsilon_1(\delta - 2\epsilon_1)}{3(1+2\epsilon_1)} < \delta$.

Desigualdade 4: $2\epsilon_1 + \eta + \dfrac{\eta^2}{4} + \dfrac{\nu^3}{4} < \epsilon$.

Prova. Como visto na demonstração da Desigualdade 2, $2\epsilon_1 + \eta + \dfrac{\eta^2}{4} < 3\epsilon_1$. Mas $3\epsilon_1 = \dfrac{3\delta}{16}\nu^3 < \dfrac{\nu^3}{4}$. Portanto, $2\epsilon_1 + \eta + \dfrac{\eta^2}{4} + \dfrac{\nu^3}{4} < \dfrac{\nu^3}{4} + \dfrac{\nu^3}{4} < \nu^3 < \epsilon^3 < \epsilon$.

Desigualdade 5: $1 - \dfrac{\eta^2}{4} < \left(1 - \dfrac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 - \dfrac{8s}{\epsilon^2\epsilon_1}$.

Prova. Por construção, $\frac{8s}{\epsilon^2} < \frac{\eta^2 \epsilon_1}{12} < \frac{\eta^2}{12}$, e então

$$1 - \frac{\eta^2}{12} < 1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\,.$$

Notemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que $(1-2x) \leq (1-x)^2$. Para $x = \frac{\eta^2}{12}$, vem

$$1 - \frac{\eta^2}{6} \leq \left(1 - \frac{\eta^2}{12}\right)^2 .$$

Pelas desigualdades destacadas acima, obtemos $1 - \frac{\eta^2}{6} < \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2$ e, novamente pela escolha de s, $\frac{8s}{\epsilon^2 \epsilon_1} < \frac{\eta^2}{12}$. Logo,

$$1 - \frac{\eta^2}{6} + \frac{8s}{\epsilon^2 \epsilon_1} < \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 + \frac{\eta^2}{12}$$

e, portanto,

$$1 - \frac{\eta^2}{4} < \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 - \frac{8s}{\epsilon^2 \epsilon_1}\,.$$

Desigualdade 6: $\left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 \epsilon_1 + \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right) > 1 + \epsilon_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right)$.

Prova. Da Desigualdade 5, obtemos imediatamente $\epsilon_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right) < \epsilon_1 \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 - \frac{8s}{\epsilon^2}$ e, portanto, $1 + \epsilon_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right) < \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 \epsilon_1 + \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)$.

Desigualdade 7: $2\epsilon_1 + \frac{\eta^2}{4} < \delta$.

Prova. Por construção, $2\epsilon_1 = \frac{\delta \nu^3}{8} < \frac{\delta}{8}$ e $\frac{\eta}{2} < \frac{4\delta}{5}$. Portanto, $\frac{\eta^2}{4} < \frac{16\delta^2}{25} < \frac{16\delta}{25}$ e $2\epsilon_1 + \frac{\eta^2}{4} < \left(\frac{1}{8} + \frac{16}{25}\right)\delta < \delta$.

Desigualdade 8: $\frac{3\nu}{4} < \frac{\nu}{1+\nu}$.

Prova. Por construção, $\nu < \frac{1}{3}$. A seguinte sequência de implicações nos dará a desigualdade desejada:

$$\begin{aligned} \nu < \frac{1}{3} &\Rightarrow \nu^2 < \frac{\nu}{3} \\ &\Rightarrow 3\nu^2 + 3\nu < 4\nu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3\nu}{4} < \frac{\nu}{1+\nu}.$$

Desigualdade 9: $\dfrac{3\nu}{2} + 2\epsilon_1 < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Prova. Temos que $2\epsilon_1 = \dfrac{\delta\nu^3}{8} < \dfrac{\nu}{2}$. Portanto, $\dfrac{3\nu}{2} + 2\epsilon_1 < 2\nu < 2\dfrac{\epsilon}{12} < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Mantendo ainda as condições e notação acima fixadas, faremos um Lema. Observemos que a sua demonstração é bastante similar à do Teorema 3.3.7, e de fato as suas hipóteses de certa forma reproduzem o que ocorre quando Y tem a propriedade β, que veremos ser um caso particular dos espaços satisfazendo às condições (I)-(V).

Lema 3.3.14. *Nas condições dadas acima, se existem $i_0 \in I$, $\tilde{T} \in B_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $\tilde{z} \in S_{c_0}$ satisfazendo a $|f_{i_0}(\tilde{T}(\tilde{z}))| > 1 - \dfrac{\eta^2}{4}$, então existem $S \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $z \in S_{c_0}$ tais que*

$$||z - \tilde{z}|| < \eta,\ ||S - \tilde{T}|| < 2\epsilon_1 + \eta + \frac{\eta^2}{4} \text{ e } ||S(z)|| = 1.$$

Demonstração. Pela Observação 3.3.3, podemos demonstrar o Lema substituindo $\tilde{z}$ por uma rotação qualquer deste ponto. Suponhamos então, sem perda de generalidade, que $f_{i_0}(\tilde{T}(\tilde{z})) = |f_{i_0}(\tilde{T}(\tilde{z}))|$. Logo,

$$\frac{\eta^2}{4} > 1 - f_{i_0}(\tilde{T}(\tilde{z})) = 1 - \tilde{T}^t(f_{i_0})(\tilde{z}).$$

Em particular, temos ainda que $||\tilde{T}^t(f_{i_0})|| > 1 - \dfrac{\eta^2}{4}$. Como $\tilde{T}^t(f_{i_0}) \in B_{c_0{}^*}$, obtemos

$$\frac{\eta^2}{4} > \left| 1 - \frac{\tilde{T}^t(f_{i_0})(\tilde{z})}{||\tilde{T}^t(f_{i_0})||} \right|.$$

Pelo Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, existem $g \in S_{c_0^*}$ e $z \in S_{c_0}$ tais que

$$g(z) = 1,\ ||\tilde{z} - z|| < \eta \text{ e } \left|\left| g - \frac{\tilde{T}^t(f_{i_0})}{||\tilde{T}^t(f_{i_0})||} \right|\right| < \eta.$$

Assim, $||\ g||\tilde{T}^t(f_{i_0})|| - \tilde{T}(f_{i_0})\ || < \eta||\tilde{T}^t(f_{i_0})|| \leq \eta$ e então

$$||g - \tilde{T}^t(f_{i_0})|| \leq ||\ g||\tilde{T}^t(f_{i_0})|| - \tilde{T}^t(f_{i_0})\ || + ||\ g||\tilde{T}^t(f_{i_0})|| - g\ || < \eta + \frac{\eta^2}{4}. \tag{3.3.9}$$

Definamos agora um operador $\tilde{S} \in \mathcal{L}(c_0, Y)$ dado por

$$\tilde{S}(x) \doteq \tilde{T}(x) + [(1+\epsilon_1)g(x) - \tilde{T}^t(f_{i_0})(x)]y_{i_0}, \text{ para todo } x \in c_0.$$

O operador transposto $\tilde{S}^t \in \mathcal{L}(Y^*, c_0^*)$ será dado por

$$\tilde{S}^t(f) = \tilde{T}^t(f) + f(y_{i_0})[(1+\epsilon_1)g - \tilde{T}^t(f_{i_0})], \text{ para todo } f \in Y^*.$$

Vamos estudar a norma de $\tilde{S}$. Como Y obedece à condição (V) dada anteriormente, pela Proposição 1.1.19 vale que

$$||\tilde{S}|| = ||\tilde{S}^t|| = \text{máx}\{\sup\{|\tilde{S}^t(f_i)| : i \in I\},\ \sup\{|\tilde{S}^t(F(e))| : e \in E\}\}. \tag{3.3.10}$$

Em particular, $||\tilde{S}^t|| \geq ||\tilde{S}^t(f_{i_0})|| = 1 + \epsilon_1$, e se $f \in F(E) \cup \{f_i : i \in I \setminus \{i_0\}\}$, pelas condições (II) e (IV) obtemos

$$\begin{aligned} ||\tilde{S}^t(f)|| &= ||\tilde{T}^t(f) + f(y_{i_0})[(1+\epsilon_1)g - \tilde{T}^t(f_{i_0})]|| \\ &\leq ||\tilde{T}^t(f)|| + \rho||(1+\epsilon_1)g - \tilde{T}^t(f_{i_0})|| \\ &\leq 1 + \rho(||g - \tilde{T}^t(f_{i_0})|| + \epsilon_1) \\ &\overset{(3.3.9)}{\leq} 1 + \rho\left(\eta + \frac{\eta^2}{4} + \epsilon_1\right) \\ &\overset{\text{Des.1}}{<} 1 + \epsilon_1. \end{aligned}$$

Portanto, (3.3.10) implica que $||\tilde{S}|| = ||\tilde{S}^t|| = ||\tilde{S}^t(f_{i_0})|| = 1 + \epsilon_1$. Como $\tilde{S}^t(f_{i_0}) = (1+\epsilon_1)g$, vem que $f_{i_0}(\tilde{S}(z)) = 1 + \epsilon_1$. Assim, $||\tilde{S}(z)|| = 1 + \epsilon_1$, ou seja, $\tilde{S}$ atinge sua norma em $z \in S_{c_0}$. Logo, o operador $S \doteq \dfrac{\tilde{S}}{||\tilde{S}||} \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ também atinge sua norma em z, e além disso

$$\begin{aligned} ||S - \tilde{T}|| &\leq ||S - \tilde{S}|| + ||\tilde{S} - \tilde{T}|| \\ &= |\ 1 - ||\tilde{S}||\ | + ||[(1+\epsilon_1)g - \tilde{T}^t(f_{i_0})]y_{i_0}|| \\ &= \epsilon_1 + ||(1+\epsilon_1)g - \tilde{T}^t(f_{i_0})|| \\ &\leq 2\epsilon_1 + ||g - \tilde{T}^t(f_{i_0})|| \\ &\overset{(3.3.9)}{<} 2\epsilon_1 + \eta + \frac{\eta^2}{4}\,. \end{aligned}$$

Como já tínhamos que $||\tilde{z} - z|| < \eta$, a demonstração está encerrada. □

Apresentaremos em seguida o Teorema de [AGKM17] que afirma que se Y for um espaço de Banach obedecendo às condições (I)–(V) dadas anteriormente, o par (c_0, Y) satisfaz a BPBp. Tais condições serão listadas novamente no enunciado, para maior clareza.

Teorema 3.3.15 ([AGKM17]). *Seja Y um espaço de Banach tal que existem um conjunto I, $\{y_i : i \in I\} \subset S_Y$, $\{f_i : i \in I\} \subset S_{Y^*}$, um subconjunto $E \subset S_Y$, uma função $F : E \to S_{Y^*}$ e $\rho \in [0,1)$ satisfazendo a:*

(I) $f_i(y_i) = 1$, para todo $i \in I$.

(II) $|f_i(y_j)| \leq \rho$, para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

(III) E é fortemente e uniformemente exposta por F.

(IV) $|F(e)(y_i)| \leq \rho$, para todos $e \in E$ e $i \in I$.

(V) O conjunto $G \doteq F(E) \cup \{f_i : i \in I\}$ é tal que, para todo $y \in Y$,

$$||y|| = \sup\{|f(y)| : f \in G\} = \max\{\sup\{|f_i(y)| : i \in I\},\ \sup\{|F(e)(y)| : e \in E\}\}.$$

Então o par (c_0, Y) satisfaz a Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores.

Demonstração. Seja $\epsilon \in (0,1)$. Considere as constantes ν, δ, η, s e ϵ_1 construídas a partir do ϵ fixado, conforme a discussão feita anteriormente. Suponha que $T \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $x_0 \in S_{c_0}$ sejam tais que $||T(x_0)|| > 1 - s$. Mostraremos que existem $S \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $u \in S_{c_0}$ satisfazendo a $||S(u)|| = 1$, $||S - T|| < \epsilon$ e $||u - x_0|| < \epsilon$, donde a conclusão seguirá. Separaremos a demonstração em dois casos, e o segundo caso consistirá de dois subcasos.

Primeiro Caso. Existe $i \in I$ tal que $|f_i(T(x_0))| > 1 - \dfrac{\eta^2}{4}$.

Notemos que para este caso estão satisfeitas as condições do Lema 3.3.14, e portanto existem $S \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $u \in S_{c_0}$ satisfazendo a

$$||S(u)|| = 1,\ ||S - T|| < 2\epsilon_1 + \eta + \frac{\eta^2}{4} \text{ e } ||u - x_0|| < \eta.$$

Por construção, $\eta < \epsilon$, e pela Desigualdade 2, $2\epsilon_1 + \eta + \dfrac{\eta^2}{4} < \epsilon$. Então $||S - T|| < \epsilon$ e $||u - x_0|| < \epsilon$, o que encerra a demonstração deste caso.

Segundo Caso. Para todo $i \in I$, $|f_i(T(x_0))| \le 1 - \dfrac{\eta^2}{4}$.

Este caso é composto de dois subcasos. Antes de enunciá-los, serão definidos alguns elementos auxiliares e feitos alguns resultados que os envolvem.

Por contrução, $s < \dfrac{\eta^2 \epsilon_1 \epsilon^2}{3 \cdot 2^5} < \dfrac{\eta^2}{4}$, e assim $||T(x_0)|| > 1 - s > 1 - \dfrac{\eta^2}{4}$. Pela hipótese (V),

$$||T(x_0)|| = \max\{\sup\{|f_i(T(x_0))| : i \in I\},\ \sup\{|F(e)(T(x_0))| : e \in E\}\},$$

e como $|f_i(T(x_0))| \le 1 - \dfrac{\eta^2}{4}$ para todo $i \in I$, existe $e_0 \in E$ tal que $|F(e_0)(T(x_0))| > 1 - s$. Definamos $f \doteq F(e_0) \in S_{Y^*}$. Tendo em vista a Observação 3.3.3, podemos assumir que $f(T(x_0)) = |f(T(x_0))|$, fazendo uma rotação em x_0 se necessário.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixemos $\lambda_n \in S_{\mathbb{K}}$ satisfazendo a $T^t(f)(e_n) = \lambda_n |T^t(f)(e_n)|$, e definamos

$$A \doteq \left\{ n \in \mathbb{N} : T^t(f)(e_n) \neq 0 \text{ e } \operatorname{Re}(x_{0n}\lambda_n) > 1 - \frac{\epsilon^2}{8} \right\}.$$

Como $T^t(f) \in B_{c_0^*}$, $\operatorname{Re} T^t(f)(x_0) = T^t(f)(x_0) > 1 - s$ e, por construção, $1 - \dfrac{\epsilon^2}{8} < 1 - \dfrac{\epsilon^2}{8}\left(\dfrac{\eta^2 \epsilon_1}{3 \cdot 2^2}\right) < 1 - s$, pelo Corolário 3.3.10 concluímos que A é não-vazio, finito e

$$\sum_{k \in A} |T^t(f)(e_k)| > 1 - \frac{s}{\epsilon^2/8} = 1 - \frac{8s}{\epsilon^2}. \tag{3.3.11}$$

Agora definamos uma sequência $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ por

$$a_k = \begin{cases} \overline{\lambda_k}, & \text{se } k \in A \\ x_{0k}, & \text{se } k \notin A. \end{cases}$$

Como A é finito e $x_0 \in S_{c_0}$, temos que $a \in S_{c_0}$. Seja também $a_1 \doteq P_A(a) \in S_{c_0}$, isto é,

$$a_{1k} = \begin{cases} \overline{\lambda_k}, & \text{se } k \in A \\ 0, & \text{se } k \notin A. \end{cases}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} T^t(f)(a_1) &= T^t(f)\left(\sum_{k\in A} \overline{\lambda_k} e_k\right) \\ &= \sum_{k\in A} \lambda_k^{-1} T^t(f)(e_k) \\ &= \sum_{k\in A} \lambda_k^{-1} \lambda_k |T^t(f)(e_k)| \\ &= \sum_{k\in A} |T^t(f)(e_k)|. \end{aligned}$$

Em particular, $T^t(f)(a_1) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Pela Desigualdade 3 e (3.3.11), obtemos

$$1 - \delta < 1 - \frac{8s}{\epsilon^2} < \operatorname{Re} T^t(f)(a_1) = |T^t(f)(a_1)| \leq ||T(a_1)||. \tag{3.3.12}$$

Observemos agora que se a, $b \in \mathbb{R}$ são tais que $|a + ib| \leq 1$, então $a^2 + b^2 \leq 1$ e $|1 - (a + ib)|^2 = (1 - a)^2 + b^2 = 1 - 2a + a^2 + b^2 \leq 2(1 - a)$. Logo, $|1 - (a + ib)| \leq \sqrt{2(1 - a)}$. Em outras palavras,

$$\lambda \in B_{\mathbb{K}} \Rightarrow |1 - \lambda| \leq \sqrt{2(1 - \operatorname{Re}(\lambda))}. \tag{3.3.13}$$

Usaremos este fato mais de uma vez no decorrer da demonstração.

Como A é finito, temos que

$$||a - x_0|| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k - x_{0k}| = \max_{k\in A} |\overline{\lambda_k} - x_{0k}| = \max_{k\in A} |1 - \lambda_k x_{0k}|,$$

e como $|\lambda_k x_{0k}| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por (3.3.13) vale que $|1 - \lambda_k x_{0k}| \leq \sqrt{2(1 - \operatorname{Re}(\lambda_k x_{0k}))}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $k \in A$, por construção $\operatorname{Re}(\lambda_k x_{0k}) > 1 - \frac{\epsilon^2}{8}$, e então

$$\frac{\epsilon}{2} > \sqrt{2(1 - \operatorname{Re}(\lambda_k x_{0k}))} \text{ para todo } k \in A,$$

o que implica que

$$||a - x_0|| < \frac{\epsilon}{2}\,. \tag{3.3.14}$$

Para finalizar esta discussão inicial do segundo caso, observemos que por (3.3.12), $\operatorname{Re} T^t(f)(a_1) =$

$\operatorname{Re} F(e_0)(T(a_1)) > 1 - \delta$, e vale também que $A = \operatorname{supp} a_1$. Devido a (3.3.7) e ao Lema 3.3.11, obtemos, respectivamente,

$$||T(a_1) - e_0|| < \frac{\nu^3}{8} \tag{3.3.15}$$

e

$$||T - TP_A|| \leq \frac{\nu^3}{4}\,. \tag{3.3.16}$$

Consideremos agora os dois subcasos.

Subcaso 2.1. Existe $i \in I$ tal que $|f_i(T(a_1))| > 1 - \frac{\eta^2}{4}$.

Seja $i_0 \in I$ o índice que satisfaz a $|f_{i_0}(T(a_1))| > 1 - \frac{\eta^2}{4}$. Como $P_A(a) = a_1$, temos que

$$|f_{i_0}((TP_A)(a))| > 1 - \frac{\eta^2}{4},$$

com $TP_A \in B_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$. Pelo Lema 3.3.14, existem $S \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $u \in S_{c_0}$ satisfazendo a $||u - a|| < \eta$, $||S - TP_A|| < 2\epsilon_1 + \eta + \frac{\eta^2}{4}$ e $||S(u)|| = 1$. Assim, teremos que

$$\begin{aligned} ||S - T|| &\leq ||S - TP_A|| + ||TP_A - T|| \\ &\overset{(3.3.16)}{<} 2\epsilon_1 + \eta + \frac{\eta^2}{4} + \frac{\nu^3}{4} \\ &\overset{Des.4}{<} \epsilon. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} ||u - x_0|| &\leq ||u - a|| + ||a - x_0|| \\ &\overset{(3.3.14)}{<} \eta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração deste subcaso.

Subcaso 2.2. Para todo $i \in I$, $|f_i(T(a_1))| \leq 1 - \frac{\eta^2}{4}$.

Definamos o operador $\tilde{S} \in \mathcal{L}(c_0, Y)$ por

$$\tilde{S}(x) \doteq T(P_A(x)) + \epsilon_1 f(T(P_A(x)))T(a_1), \text{ para todo } x \in c_0.$$

Notemos que $\tilde{S} \neq 0$, já que $\tilde{S}(a) = T(a_1) + \epsilon_1 f(T(a_1))T(a_1) = (1 + \epsilon_1 f(T(a_1)))T(a_1)$ e $|\epsilon_1 f(T(a_1))| < 1$. Além disso, como $P_A P_A = P_A$, vale que $\tilde{S} = \tilde{S}P_A$.

Definamos ainda $S \doteq \frac{\tilde{S}}{||\tilde{S}||}$. Então $SP_A = S$ e em particular $S(P_A(B_{c_0})) = S(B_{c_0})$. Pelo Corolário 3.3.13, existe $a_2 \in V_A (= \{x \in P_A(B_{c_0}) : |x_i| = 1 \text{ para todo } i \in A\})$ tal que $||S|| = ||S(a_2)||$. Como V_A é invariante por rotação, isto é, $\lambda V_A \subset V_A$ para todo $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$, podemos assumir sem perda de generalidade que $f(T(a_2)) = |f(T(a_2))|$. Então teremos

$$||S(a_2)|| = ||S|| = 1 \text{ e } f(T(a_2)) = |f(T(a_2))| \tag{3.3.17}$$

e

$$P_A(a_2) = a_2 \text{ e } |a_{2k}| = 1 \text{ para todo } k \in A. \tag{3.3.18}$$

Agora notemos que pela hipótese (V),

$$1 = ||S(a_2)|| = \sup\{|h(S(a_2))| : h \in G\}.$$

Portanto, existe uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $G \subset B_{Y^*}$ tal que $|h_n(S(a_2))| \to 1$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu, B_{Y^*} é w^*-compacta, então existe uma *subrede* $(h_{n_\mu})_{\mu\in M}$ convergente em B_{Y^*}, digamos $h_{n_\mu} \overset{w^*}{\to} h \in B_{Y^*}$. Em particular, $h_{n_\mu}(S(a_2)) \to h(S(a_2))$, o que implica que $|h_{n_\mu}(S(a_2))| \to |h(S(a_2))|$ e, portanto, $|h(S(a_2))| = 1$. Seja $\sigma \in S_{\mathbb{K}}$ tal que $(\sigma h)(S(a_2)) = |h(S(a_2))| = 1$, e definamos $g \doteq \sigma h$. Como a rede $(\sigma h_{n_\mu})_{\mu\in M}$ em $S_{\mathbb{K}}G$ converge a $\sigma h = g \in B_{Y^*}$ na topologia w^*, temos que

$$g \in \overline{S_{\mathbb{K}}G}^{\,w^*} = \overline{S_{\mathbb{K}}F(E) \cup S_{\mathbb{K}}\{f_i : i \in I\}}^{\,w^*} = \overline{S_{\mathbb{K}}F(E)}^{\,w^*} \cup \overline{S_{\mathbb{K}}\{f_i : i \in I\}}^{\,w^*}.$$

Além disso, $g(S(a_2)) = \sigma h(S(a_2)) = 1$, donde concluímos que

$$g(S(a_2)) = ||S(a_2)|| = 1. \tag{3.3.19}$$

Agora seja M o operador em $\mathcal{L}(c_0, c_0)$ dado por

$$M(x) = (a_{2n}\overline{a_{1n}}x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ para todo } x \in c_0.$$

Notemos que $M \in B_{\mathcal{L}(c_0,c_0)}$ e portanto $SM \in B_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$. O nosso objetivo será mostrar que o operador SM e o ponto $a \in S_{c_0}$ satisfazem a $||a - x_0|| < \epsilon$, $||SM - T|| < \epsilon$ e $||(SM)(a)|| = 1$. Observe que, por (3.3.14), já temos que $||a - x_0|| < \epsilon$. Para mostrar o restante, precisamos de outras desigualdades e resultados, que serão feitos no que segue.

Vamos primeiro avaliar a norma de $\tilde{S}$. Temos que $\tilde{S}(a_1) = T(a_1) + \epsilon_1 f(T(a_1))T(a_1)$, e então

$$f(\tilde{S}(a_1)) = f(T(a_1)) + \epsilon_1(f(T(a_1)))^2.$$

Por (3.3.12), $\operatorname{Re} f(T(a_1)) = f(T(a_1)) > 1 - \frac{8s}{\epsilon^2}$, o que implica

$$\begin{aligned} ||\tilde{S}|| &\geq |f(\tilde{S}(a_1))| \\ &= |f(T(a_1)) + \epsilon_1(f(T(a_1)))^2| \\ &= |f(T(a_1))| + \epsilon_1|f(T(a_1))|^2 \\ &\geq 1 - \frac{8s}{\epsilon^2} + \epsilon_1\left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade 6, concluímos que

$$||\tilde{S}|| \geq 1 - \frac{8s}{\epsilon^2} + \epsilon_1\left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 > 1. \tag{3.3.20}$$

Por outro lado, para todo $x \in c_0$, $||\tilde{S}(x)|| = ||T(P_A(x)) + \epsilon_1 f(T(P_A(x)))T(a_1)|| \leq (1+\epsilon_1)||x||$ e então

$$1 < ||\tilde{S}|| \leq 1 + \epsilon_1. \tag{3.3.21}$$

A seguir partiremos para o estudo de outras desigualdades.

Temos que $||S - TP_A|| \leq ||S - \tilde{S}|| + ||\tilde{S} - TP_A|| = \left|1 - ||\tilde{S}||\right| + ||\tilde{S} - TP_A||$ e $\tilde{S}(x) - (TP_A)(x) = \epsilon_1 f(T(P_A(x)))T(a_1)$ para todo $x \in c_0$. Logo, $||\tilde{S} - TP_A|| \leq \epsilon_1$, donde obtemos

$$||S - TP_A|| \leq \left|1 - ||\tilde{S}||\right| + ||\tilde{S} - TP_A|| \overset{(3.3.21)}{\leq} 2\epsilon_1 \tag{3.3.22}$$

e, por (3.3.16),

$$||S - T|| \leq ||S - TP_A|| + ||TP_A - T|| \leq 2\epsilon_1 + \frac{\nu^3}{4}. \tag{3.3.23}$$

Agora, por (3.3.19), $\operatorname{Re} g(\tilde{S}(a_2)) = \operatorname{Re} g(||\tilde{S}||S(a_2)) = ||\tilde{S}||$, e por construção $f(T(a_2)) \in \mathbb{R}$ (vide (3.3.17)) e $P_A(a_2) = a_2$ (vide (3.3.18)). Logo,

$$\begin{aligned}
||\tilde{S}|| &= \operatorname{Re} g(\tilde{S}(a_2)) \\
&= \operatorname{Re} g(T(a_2)) + \operatorname{Re} g(\epsilon_1 f(T(a_2))T(a_1)) \\
&= \operatorname{Re} g(T(a_2)) + \epsilon_1 \operatorname{Re} g(T(a_1)) \operatorname{Re} f(T(a_2)) \\
&\leq 1 + \epsilon_1 \operatorname{Re} g(T(a_1)) \operatorname{Re} f(T(a_2)).
\end{aligned}$$

Pela desigualdade acima e (3.3.20), obtemos:

$$1 - \frac{8s}{\epsilon^2} + \epsilon_1 \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 \leq 1 + \epsilon_1 \operatorname{Re} f(T(a_2));$$

$$1 - \frac{8s}{\epsilon^2} + \epsilon_1 \left(1 - \frac{8s}{\epsilon^2}\right)^2 \leq 1 + \epsilon_1 \operatorname{Re} g(T(a_1)).$$

Utilizando a Desigualdade 5, concluímos que

$$|f(T(a_2))| = \operatorname{Re} f(T(a_2)) > 1 - \frac{\eta^2}{4} \tag{3.3.24}$$

e

$$|g(T(a_1))| \geq \operatorname{Re} g(T(a_1)) > 1 - \frac{\eta^2}{4}. \tag{3.3.25}$$

Como já visto, $g \in \overline{S_{\mathbb{K}} F(E)}^{w^*} \cup \overline{S_{\mathbb{K}}\{f_i : i \in I\}}^{w^*}$. Afirmamos que $g \in \overline{S_{\mathbb{K}} F(E)}^{w^*}$. De fato, caso contrário, deveria valer que $g \in \overline{S_{\mathbb{K}}\{f_i : i \in I\}}^{w^*}$, o que acarreta na existência de uma rede $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em $S_{\mathbb{K}}\{f_i : i \in I\}$ tal que $g_\lambda \overset{w^*}{\to} g$. Em particular, teríamos que $g_\lambda(T(a_1)) \to g(T(a_1))$ e, devido a (3.3.25), deveria existir $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $|g_{\lambda_1}(T(a_1))| > 1 - \frac{\eta^2}{4}$. Mas $g_{\lambda_1} = \chi f_{i_1}$, para certos $\chi \in S_{\mathbb{K}}$ e $i_1 \in I$, o que implica $|f_{i_1}(T(a_1))| > 1 - \frac{\eta^2}{4}$, contrariando a hipótese deste subcaso. Portanto, $g \in \overline{S_{\mathbb{K}} F(E)}^{w^*}$.

Avaliaremos agora $\operatorname{Re} g(S(a_1))$. Para isso, notemos que

$$
\begin{aligned}
||S - TP_A|| &\geq ||(S - TP_A)(a_2)|| \\
&= ||T(a_2) - S(a_2)|| \\
&\geq |f(T(a_2) - S(a_2))| \\
&\geq \operatorname{Re} f(T(a_2) - S(a_2)),
\end{aligned}
$$

o que implica $\operatorname{Re} f(S(a_2)) \geq \operatorname{Re} f(T(a_2)) - ||S - TP_A||$, e junto com (3.3.22) e (3.3.24) nos dá

$$
\operatorname{Re} f(S(a_2)) > 1 - \frac{\eta^2}{4} - 2\epsilon_1 \overset{Des.7}{>} 1 - \delta,
$$

ou seja, $\operatorname{Re} F(e_0)(S(a_2)) > 1 - \delta$. Por (3.3.7), concluímos que $||S(a_2) - e_0|| < \frac{\nu^3}{8}$. Usando também (3.3.15),

$$
||S(a_2) - T(a_1)|| \leq ||S(a_2) - e_0|| + ||e_0 - T(a_1)|| < \frac{\nu^3}{4} \, . \tag{3.3.26}
$$

Observemos que $\operatorname{Re} g(S(a_1)) = \operatorname{Re} g(S(a_2)) + \operatorname{Re} g(S(a_1) - S(a_2)) \overset{(3.3.19)}{=} 1 - \operatorname{Re} g(S(a_2) - S(a_1))$, donde vem

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} g(S(a_1)) &= 1 - \operatorname{Re} g(S(a_2) - S(a_1)) \\
&\geq 1 - |g(S(a_2) - S(a_1))| \\
&\geq 1 - ||S(a_2) - S(a_1)|| \\
&\geq 1 - ||S(a_2) - T(a_1)|| - ||T(a_1) - S(a_1)||.
\end{aligned}
$$

Usando (3.3.26) e que

$$
||S(a_1) - T(a_1)|| = ||S(a_1) - (TP_A)(a_1)|| \leq ||S - TP_A|| \overset{(3.3.22)}{\leq} 2\epsilon_1,
$$

obtemos finalmente

$$
\operatorname{Re} g(S(a_1)) > 1 - 2\epsilon_1 - \frac{\nu^3}{4} = 1 - \frac{\delta\nu^3}{8} - \frac{\nu^3}{4} > 1 - \frac{3\nu^3}{8} \, . \tag{3.3.27}
$$

Faremos agora uma construção análoga àquela feita no início da demonstração do segundo caso. Para cada $k \in \mathbb{N}$, fixe $s_k \in S_{\mathbb{K}}$ satisfazendo a $S^t(g)(e_k) = s_k|S^t(g)(e_k)|$. Como $S^t(g)(a_2) = 1$ e a_2 pertence à imagem de P_A, vem

$$
\begin{aligned}
1 = S^t(g)(a_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} S^t(g)(e_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} s_k |S^t(g)(e_k)| \\
&= \sum_{k\in A} a_{2k} s_k |S^t(g)(e_k)|.
\end{aligned}
$$

Como $S^t(g) \in B_{c_0^*}$, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} |S^t(g)(e_k)| \leq 1$. Logo, $1 = \left|\sum_{k\in A} a_{2k}s_k|S^t(g)(e_k)|\right| \leq \sum_{k\in A} |S^t(g)(e_k)| \leq 1$, o que implica $\sum_{k\in A} |S^t(g)(e_k)| = 1$. Em particular, $S^t(g)(e_k) = 0$ quando $k \notin A$. Assim, temos:

(i) $1 = \sum_{k\in A} |S^t(g)(e_k)| = \sum_{k\in A} s_k a_{2k}|S^t(g)(e_k)|$;

(ii) $|s_k a_{2k}| = 1$ para todo $k \in A$;

(iii) A é finito.

Em decorrência do Corolário 1.1.5, as afirmações dadas nos itens acima implicam que sempre que $k \in A$ for tal que $|S^t(g)(e_k)| \neq 0$, teremos $s_k a_{2k} = 1$, ou seja, $s_k = \overline{a_{2k}}$. Assim,

$$k \in A \text{ e } S^t(g)(e_k) \neq 0 \Rightarrow s_k = \overline{a_{2k}}. \tag{3.3.28}$$

Definamos

$$B \doteq \left\{k \in \mathbb{N} : S^t(g)(e_k) \neq 0 \text{ e } \operatorname{Re}(s_k a_{1k}) > 1 - \frac{\nu^2}{2}\right\}.$$

Temos $B \subset A$, já que $S^t(g)(e_k) = 0$ quando $k \notin A$. O nosso objetivo seguinte é avaliar $\operatorname{Re} g(S(P_B(a_1)))$.

Como $\nu \in (0,1)$, vale que $\frac{3\nu^3}{8} < \frac{\nu^2}{2}$. Tendo em vista a afirmação anterior e (3.3.27), podemos usar o Corolário 3.3.10 para concluir que B é finito, não-vazio e satisfaz a

$$\sum_{j\in B} |S^t(g)(e_j)| > 1 - \frac{3\nu^3/8}{\nu^2/2} = 1 - \frac{3\nu}{4}\,.$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} g(S(P_B(a_1))) &= \operatorname{Re} g\left(\sum_{j\in B} a_{1j}S(e_j)\right)\\
&= \operatorname{Re}\sum_{j\in B} a_{1j}S^t(g)(e_j)\\
&= \operatorname{Re}\sum_{j\in B} a_{1j}s_j|S^t(g)(e_j)|\\
&= \sum_{j\in B} |S^t(g)(e_j)| \operatorname{Re}(s_j a_{1j}),
\end{aligned}$$

e pela definição de B e a desigualdade anterior,

$$\operatorname{Re} g(S(P_B(a_1))) > \left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right)\sum_{j\in B} |S^t(g)(e_j)| > \left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right)\left(1 - \frac{3\nu}{4}\right).$$

Usando a Desigualdade 8, obtemos finalmente

$$\operatorname{Re} g(S(P_B(a_1))) > (1-\nu^2)\left(1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right) = 1 - \nu. \tag{3.3.29}$$

Em decorrência da desigualdade acima e do fato que $g \in \overline{S_{\mathbb{K}}F(E)}^{w^*}$, um argumento análogo ao já utilizado nesta demonstração nos permite concluir que existe um elemento em $S_{\mathbb{K}}F(E)$, digamos

$\lambda F(e)$, para certos $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ e $e \in E$, tal que $\operatorname{Re} \lambda F(e)(S(P_B(a_1))) > 1 - \nu$, ou seja,

$$\operatorname{Re} F(e)(S(\lambda P_B(a_1))) > 1 - \nu.$$

Notemos que se $k \in B$, então $a_{1k} = \overline{\lambda_k} \neq 0$, e portanto $B = \operatorname{supp} \lambda P_B(a_1)$. Tendo em vista (3.3.6), pelo Lema 3.3.11 obtemos

$$||S(I - P_B)|| \leq \frac{\epsilon}{4}\,. \tag{3.3.30}$$

Agora já temos tudo o que é preciso para mostrar que o operador $U \doteq SM \in B_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ satisfaz a $||U - T|| < \epsilon$ e $||U(a)|| = 1$ (já vimos que $||a - x_0|| < \epsilon$). Recordemos que o operador $M \in B_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ é dado por

$$M(x) = (a_{2n}\overline{a_{1n}}x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ para todo } x \in c_0.$$

Como

$$(M(a_1))_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \notin A \\ a_{2n}\lambda_n\overline{\lambda_n} = a_{2n}, & \text{se } n \in A \end{cases}$$

e $a_{2n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus A$, concluímos que $M(a_1) = a_2$. Logo,

$$U(a_1) = S(M(a_1)) = S(a_2),$$

e por (3.3.19), $g(U(a_1)) = g(S(a_2)) = 1$. Em particular, $||U(a_1)|| = ||U|| = 1$, isto é, U atinge sua norma em a_1. Temos ainda que para todo $x \in c_0$,

$$(M(P_A(x)))_n = (P_A(M(x)))_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \notin A \\ a_{2n}\overline{a_{1n}}x_n, & \text{se } n \in A, \end{cases}$$

isto é, $MP_A = P_AM$, o que implica

$$UP_A = (SM)P_A = S(MP_A) = S(P_AM) = (SP_A)M = SM = U.$$

Como $P_A(a) = a_1$, U atinge sua norma também em $a \in S_{c_0}$. Resta provar que $||U - T|| < \epsilon$. Para isso, vamos começar estimando a norma de $SP_B(M - I) \in \mathcal{L}(c_0, Y)$.

Seja $x \in B_{c_0}$. Temos que $(M - I)(x) = (a_{2n}\overline{a_{1n}}x_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e

$$(P_B(M - I)(x))_n = (P_B(M - I)P_B(x))_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \notin B \\ a_{2n}\overline{a_{1n}}x_n - x_n, & \text{se } n \in B. \end{cases}$$

Portanto, $P_B(M - I) = P_B(M - I)P_B$ e em particular $[P_B(M - I)](B_{c_0}) = [P_B(M - I)](P_B(B_{c_0}))$. Pelo Corolário 3.3.13,

$$||P_B(M - I)|| = \sup_{y\in V_B} ||P_B(M - I)(y)||,$$

em que $V_B = \{y \in P_B(B_{c_0}) : |y_i| = 1 \text{ para todo } i \in B\}$. Mas, se $y \in V_B$,

$$||P_B(M - I)(y)|| = \max_{k\in B} |a_{2k}\overline{a_{1k}}y_k - y_k| = \max_{k\in B} |a_{2k}\overline{a_{1k}} - 1|.$$

Então $||P_B(M-I)|| = \max_{k\in B}|a_{2k}\overline{a_{1k}}-1| = \max_{k\in B}|\overline{a_{2k}}a_{1k}-1|$. Como $B \subset A$, por (3.3.28) concluímos que ($k \in B \Rightarrow s_k = \overline{a_{2k}}$). Logo,

$$||P_B(M-I)|| = \max_{k\in B}|s_k a_{1k} - 1|.$$

Utilizando agora (3.3.13), $|1 - s_k a_{1k}| \leq \sqrt{2(1-\mathrm{Re}(s_k a_{1k}))}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $k \in B$, teremos ainda $\mathrm{Re}(s_k a_{1k}) > 1 - \frac{\nu^2}{2}$, donde vem

$$\begin{aligned}||P_B(M-I)|| &= \max_{k\in B}|s_k a_{1k} - 1|\\ &\leq \max_{k\in B}\sqrt{2(1-\mathrm{Re}(s_k a_{1k}))} < \nu.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$||SP_B(M-I)|| \leq ||P_B(M-I)|| < \nu. \tag{3.3.31}$$

Notemos também que devido à (3.3.23),

$$||S-T|| \leq 2\epsilon_1 + \frac{\nu^3}{4} < 2\epsilon_1 + \frac{\nu}{2}\,. \tag{3.3.32}$$

Agora vejamos que

$$\begin{aligned}||S(M-I)|| &= ||SP_B(M-I) - SP_B(M-I) + S(M-I)||\\ &\leq ||SP_B(M-I)|| + ||S(I-P_B)(M-I)||\\ &\overset{(3.3.31)}{<} \nu + ||S(I-P_B)|| \cdot ||M-I||\\ &\leq \nu + 2||S(I-P_B)||\\ &\overset{(3.3.30)}{\leq} \nu + \frac{\epsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Enfim obtemos

$$\begin{aligned}||U-T|| &\leq ||U-S|| + ||S-T||\\ &= ||S(M-I)|| + ||S-T||\\ &\overset{(3.3.32)}{<} \nu + \frac{\epsilon}{2} + 2\epsilon_1 + \frac{\nu}{2}\\ &= \frac{3\nu}{2} + \frac{\epsilon}{2} + 2\epsilon_1,\end{aligned}$$

e pela Desigualdade 9, $||U-T|| < \epsilon$, encerrando a demonstração deste subcaso e do Teorema. $\square$

Observemos que devido à Proposição 3.3.8 o espaço de Banach c_0 poderia ser substituído por ℓ_∞^n, para todo $n \in \mathbb{N}$, no enunciado do Teorema acima.

Mostraremos através do exemplo abaixo que os espaços de Banach Y que satisfazem a propriedade β de Lindenstrauss e os espaços uniformemente convexos cumprem as hipóteses do Teorema 3.3.15. Portanto, embora estes resultados já sejam conhecidos devido ao Teorema 3.3.7 e a [Kim13], o Teorema 3.3.15 implica por si só que o par (c_0, Y) satisfaz a BPBp se Y for uniformemente convexo ou se satisfizer a propriedade β.

Exemplo 3.3.16. Satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3.15:

(a) Os espaços de Banach Y que satisfazem a propriedade β de Lindenstrauss.

Se Y satisfaz a propriedade β, existem conjuntos $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_{Y^*}$ e um real $\rho \in [0,1)$ que cumprem a Definição 3.1.10. Neste caso, basta tomar $E = \emptyset$ e os conjuntos e número real dados acima como os elementos do enunciado do Teorema 3.3.15. A função F será a função vazia. As condições (I), (II) e (V) são satisfeitas devido às propriedades análogas da propriedade β e as condições (III) e (IV) são satisfeitas por vacuidade.

(b) Os espaços de Banach Y uniformemente convexos.

No Exemplo 3.1.9 vimos que tomando $E = S_Y$ e, para cada $e \in S_Y$, um funcional $f_e \in S_{Y^*}$ tal que $f_e(e) = 1$, a família E é fortemente e uniformemente exposta por $F : E \ni e \mapsto f_e \in S_{Y^*}$. Consideremos ainda $I = \emptyset$ e $\rho = 0$. Dados estes elementos, já temos que a condição (III) é verdadeira. A condição (V) também será verdadeira, pois dado qualquer $y \in Y \setminus \{0\}$, o funcional $f_{\frac{y}{||y||}}$ é tal que

$$f_{\frac{y}{||y||}}(y) = f_{\frac{y}{||y||}}\left(||y||\frac{y}{||y||}\right) = ||y||.$$

As condições (I), (II) e (IV) são válidas por vacuidade.

Corolário 3.3.17. *Se Y é um espaço de Banach uniformemente convexo ou que satisfaz a propriedade β de Lindenstrauss, o par (c_0, Y) satisfaz a BPBp.*

O Teorema 3.3.15 também nos concede pares (c_0, Y) de espaços de Banach satisfazendo a BPBp que antes não eram conhecidos. De fato, o resultado de [AGKM17] apresentado em seguida garante a existência espaços de Banach que não são uniformemente convexos nem satisfazem a propriedade β mas que cumprem as hipóteses do Teorema 3.3.15. Antes de apresentar este resultado, precisamos de algumas definições e de uma propriedade de topologia.

Definição 3.3.18. Um *sistema biortogonal* em um espaço de Banach X é um subconjunto $\{(x_i, f_i) : i \in I\} \subset X \times X^*$ tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ para todos $i, j \in I$.

O sistema biortogonal $\{(x_i, f_i) : i \in I\}$ é dito *limitado* se $(||x_i|| \cdot ||f_i||)_{i\in I}$ é uma família limitada, e é dito *total* se $\{f_i : i \in I\}$ separa pontos de X.

Afirmamos agora que se V é um espaço topológico e $A, B \subset V$ são subconjuntos fechados de V, então $\partial(A \cap B) = (A \cap \partial B) \cup (B \cap \partial A)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\partial(A \cap B) &\doteq \overline{(A \cap B)} \setminus (A \cap B)^{\circ} \\
&= (A \cap B) \cap ((A \cap B)^{\circ})^{\complement} \\
&= (A \cap B) \cap (A^{\circ} \cap B^{\circ})^{\complement} \\
&= (A \cap B) \cap ((A^{\circ})^{\complement} \cup (B^{\circ})^{\complement}) \\
&= (A \cap B) \cap ((\partial A \cup A^{\complement}) \cup (\partial B \cup B^{\complement})) \\
&= ((A \cap B) \cap (\partial A \cup A^{\complement})) \cup ((A \cap B) \cap (\partial B \cup B^{\complement})) \\
&= (A \cap B \cap \partial A) \cup (A \cap B \cap \partial B)
\end{aligned}$$

$$= (\partial A \cap B) \cup (\partial B \cap A).$$

A demonstração da letra (d) do Teorema abaixo também faz uso de um resultado de J. P. Moreno, apresentado em [Mor97], que afirma que se um espaço de Banach de dimensão maior que 1 possui pontos LUR (vide Definição 1.5.5), então não satisfaz a propriedade β de Lindenstrauss. Não apresentamos a demonstração deste resultado aqui pois é muito técnica e possui detalhes que fogem do escopo deste trabalho.

Teorema 3.3.19 ([AGKM17]). *Sejam $(X, ||.||)$ um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio e $\{(x_i, f_i) : i \in I\}$ um sistema biortogonal limitado em $(X, ||.||)$ tal que $||x_i|| = 1$ para todo $i \in I$. Sejam ainda $K \doteq \sup\{||f_i|| : i \in I\}$, $M > K$ e*

$$B \doteq MB_X \cap \{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}.$$

Então as seguintes afirmações são satisfeitas:

(a) O conjunto B é a bola unitária fechada de uma nova norma $|||.|||$ em X, equivalente à norma original $||.||$, que satisfaz a

$$\frac{1}{K}|||x||| \leq ||x|| \leq M|||x|||, \text{ para todo } x \in X.$$

(b) Se X é uniformemente convexo, então o espaço de Banach $Y \doteq (X, |||.|||)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3.15.

(c) Se $\dim X > 1$, então Y não é estritamente convexo.

(d) Se o sistema biortogonal $\{(x_i, f_i) : i \in I\}$ não é total e X é uniformemente convexo com $\dim X > 1$, então Y não satisfaz a propriedade β de Lindenstrauss.

Demonstração. No decorrer desta demonstração, dependendo do contexto, a notação X se refere ao espaço de Banach $(X, ||.||)$ ou apenas ao próprio conjunto X. Nesse espírito, a bola unitária fechada de $(X, ||.||)$ será denotada simplesmente por B_X.

Observemos inicialmente que $I \neq \emptyset$ implica que $K \geq 1$, uma vez que $f_i(x_i) = 1 = ||x_i||$ para todo $i \in I$.

(a) Notemos que o conjunto B é fechado (pois é interseção de conjuntos fechados), limitado, equilibrado e convexo. Afirmamos que $0 \in B^o$. De fato, uma vez que $\frac{1}{K} < M$, temos $\frac{1}{K}B_X \subset MB_X$, e dado $y \in \frac{1}{K}B_X$, para todo $i \in I$,

$$|f_i(y)| \leq \frac{1}{K}\sup\{||f_i|| : i \in I\} = 1,$$

e então $\frac{1}{K}B_X \subset B$. Em particular, $\frac{1}{K}B_X^o \subset B^o$, donde segue a conclusão desejada. Portanto, pela Proposição 1.1.6, existe uma norma $|||.|||$ em X para a qual B é a bola unitária fechada. Como já mostrado, temos ainda que

$$\frac{1}{K}B_X \subset B \subset MB_X. \tag{3.3.33}$$

Por (3.3.33), dado $x \in X \setminus \{0\}$, vale que $\frac{1}{K}\frac{x}{||x||} \in B$, ou seja, $\left|\left|\left|\frac{1}{K}\frac{x}{||x||}\right|\right|\right| \leq 1$. Portanto, $\frac{1}{K}|||x||| \leq ||x||$ para todo $x \in X$. Novamente por (3.3.33), dado $x \in X \setminus \{0\}$, vale que $\frac{x}{|||x|||} \in MB_X$, ou seja, $\left|\left|\frac{x}{|||x|||}\right|\right| \leq M$ e, portanto, $||x|| \leq M|||x|||$ para todo $x \in X$. Juntando as conclusões deste parágrafo, obtemos que

$$\frac{1}{K}|||x||| \leq ||x|| \leq M|||x||| \text{ para todo } x \in X,$$

como queríamos demonstrar.

(b) Temos que $B_Y = B$, conforme o item anterior. Como $||.||$ e $|||.|||$ são equivalentes, a topologia dos espaços $(X, ||.||)$ e Y é a mesma. Em particular, a fronteira de B relativa à norma $|||.|||$, que é S_Y, é igual à fronteira ∂B de B relativa à norma $||.||$. Como MB_X e $\{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}$ são conjuntos fechados, da discussão que antecede o enunciado deste Teorema concluímos que

$$\begin{aligned} S_Y = \partial B = &\left(MS_X \cap \{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}\right) \\ &\bigcup \left(MB_X \cap \partial\{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}\right). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\partial\{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\} = \{x \in X : \sup\{|f_i(x)| : i \in I\} = 1\}$.

Seja $x_0 \in \{x \in X : \sup\{|f_i(x)| : i \in I\} = 1\}$. Dado $r > 0$, existe $i_0 \in I$ tal que $|f_{i_0}(x_0)| > 1 - \frac{r}{2}$. Consideremos ainda $\lambda_0 \in S_{\mathbb{K}}$ satisfazendo a $f_{i_0}(x_0) = |f_{i_0}(x_0)|\lambda_0$. Então $x_0 + \frac{\lambda_0 x_{i_0} r}{2} \in B_r(x_0)$ e

$$\left|f_{i_0}\left(x_0 + \frac{\lambda_0 x_{i_0} r}{2}\right)\right| = |\lambda_0|\left(\frac{r}{2} + |f_{i_0}(x_0)|\right) > 1,$$

portanto $B_r(x_0) \cap \{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}^{\complement} \neq \emptyset$. Como também temos que $x_0 \in \{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}$, segue que $\{x \in X : \sup\{|f_i(x)| : i \in I\} = 1\} \subset \partial\{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}$. Consideremos agora $y_0 \in \partial\{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}$. É claro que nesse caso $\sup\{|f_i(y_0)| : i \in I\} \leq 1$. Suponhamos por absurdo que $r \doteq \sup\{|f_i(y_0)| : i \in I\} < 1$. Dado $x \in B_{\frac{(1-r)}{K}}(y_0)$ teremos, para todo $i \in I$,

$$|f_i(x)| \leq |f_i(x - y_0)| + |f_i(y_0)| \leq K\frac{(1-r)}{K} + r = 1.$$

Portanto, $B_{\frac{(1-r)}{K}}(y_0) \cap \{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}^{\complement} = \emptyset$, absurdo. Logo, $\sup\{|f_i(y_0)| : i \in I\} = 1$, donde segue a conclusão desejada.

Assim,

$$S_Y = (MS_X \cap \{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}) \\ \bigcup (MB_X \cap \{x \in X : \sup\{|f_i(x)| : i \in I\} = 1\}) \, .$$

Definamos

$$E \doteq MS_X \cap \{x \in X : |f_i(x)| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}.$$

Pelo Corolário 1.1.16, para cada $x \in E$ existe $f_x \in S_{X^*}$ tal que $f_x(x) = ||x|| = M$. Consideremos a função $F : E \to X^*$ definida por

$$F(x) = \frac{f_x}{M}, \text{ para cada } x \in E.$$

Como as normas $||.||$ e $|||.|||$ são equivalentes, o *conjunto* dos funcionais lineares e contínuos definidos em X e em Y são iguais. Ou seja, vistos apenas como conjuntos, $X^* = Y^*$. Além disso, devido à desigualdade entre as normas vista no item (a),

$$\frac{|||f|||}{M} \leq ||f|| \leq K|||f||| \text{ para todo } f \in X^* = Y^*.$$

Para cada $x \in E$, $||F(x)|| = \dfrac{1}{M}$, e então $|||F(x)||| \leq 1$. Além disso, $F(x)(x) = 1$. Portanto, F é função de E em S_{Y^*}. Mostraremos em seguida que Y satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3.15 com os elementos $\rho \doteq \dfrac{1}{M}$, $E \subset S_Y$, $F : E \to S_{Y^*}$, $\{x_i : i \in I\}$ e $\{f_i : i \in I\}$.

Para começar, observemos que $x_i \in S_Y$ para todo $i \in I$, já que $x_i \in (MB_X \cap \{x \in X : \sup\{|f_i(x)| : i \in I\} = 1\})$. Além disso, se $y \in S_Y$, então $|f_i(y)| \leq 1$ para todo $i \in I$. Como também temos $f_i(x_i) = 1$, segue que $f_i \in S_{Y^*}$ para todo $i \in I$. As condições (I) e (II) do Teorema 3.3.15 são satisfeitas com $\rho = \dfrac{1}{M}$, uma vez que $\{(x_i, f_i) : i \in I\}$ é um sistema biortogonal para X.

Vamos mostrar que vale a condição (V). Dado $y \in S_Y$, temos que $(\sup\{|f_i(y)| : i \in I\} = 1)$ ou $(y \in E)$. No primeiro caso, a conclusão segue imediatamente, e no segundo caso é consequência do fato que $F(y)(y) = 1$, por construção. Portanto,

$$|||y||| = \sup\{|f(y)| : f \in F(E) \cup \{f_i : i \in I\}\}, \text{ para todo } y \in X.$$

Agora mostraremos a condição (III). Como X é uniformemente convexo, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$x, y \in B_X, \frac{||x + y||}{2} > 1 - \delta(\epsilon) \Rightarrow ||x - y|| < \epsilon.$$

Afirmamos que dado $\epsilon > 0$,

$$(y \in B_X, x \in S_X, f \in S_{X^*}, f(x) = 1, \mathrm{Re}\, f(y) > 1 - 2\delta(\epsilon)) \Rightarrow ||x - y|| < \epsilon. \tag{3.3.34}$$

De fato, dados $y \in B_X, x \in S_X$ e $f \in S_{X^*}$ tais que $f(x) = 1$ e $\operatorname{Re} f(y) > 1 - 2\delta(\epsilon)$, vale que

$$\frac{||x+y||}{2} \geq \frac{|f(x+y)|}{2} \geq \operatorname{Re}\frac{f(x+y)}{2} = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\frac{f(y)}{2} > 1 - \delta(\epsilon),$$

e isso implica que $||x-y|| < \epsilon$, donde obtemos (3.3.34). Considere então $\epsilon > 0$, $e \in E$ e $y \in B_Y = B$. Teremos que $\frac{y}{M} \in B_X$, $\frac{e}{M} \in S_X$, $MF(e) \in S_{X^*}$, $MF(e)\left(\frac{e}{M}\right) = 1$ e $MF(e)\left(\frac{y}{M}\right) = F(e)(y)$. Portanto, por (3.3.34),

$$(e \in E, y \in B_Y = B, \operatorname{Re} F(e)(y) > 1 - 2\delta(\epsilon)) \Rightarrow \left|\left|\frac{e}{M} - \frac{y}{M}\right|\right| < \epsilon \Rightarrow |||y-e||| < KM\epsilon,$$

o que implica que E é fortemente e uniformemente exposta por F.

Por fim, mostraremos que vale a condição (IV). Para isso, basta observar que dados $e \in E$ e $i \in I$,

$$|F(e)(x_i)| = \left|\frac{f_e}{M}(x_i)\right| \leq \frac{1}{M}||f_e|| \cdot ||x_i|| = \frac{1}{M} = \rho < 1.$$

(c) Tomemos $i_0 \in I (\neq \emptyset)$. Como $\dim X > 1$, existe $y \in \operatorname{Ker} f_{i_0} \cap S_X$. Para todo $t \in \mathbb{K}$, vale que $||x_{i_0} + ty|| \leq 1 + |t|$. Seja $t_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ satisfazendo a $|t_0| < \text{mín}\left\{M - 1, \frac{1}{K}\right\}$. Então $||x_{i_0} + t_0 y|| < M$, ou seja, $(x_{i_0} + t_0 y) \in MB_X$. Além disso, se $i \in I \setminus \{i_0\}$,

$$|f_i(x_{i_0} + t_0 y)| = |f_i(t_0 y)| \leq ||f_i|| \cdot |t_0| \leq K|t_0| < 1,$$

e $|f_{i_0}(x_{i_0} + t_0 y)| = 1$. Portanto, $\sup\{|f_i(x_{i_0} + t_0 y)| : i \in 1\} = 1$, o que implica que $(x_{i_0} + t_0 y) \in S_Y$, e analogamente $(x_{i_0} - t_0 y) \in S_Y$. Como $(x_{i_0} + t_0 y) \neq (x_{i_0} - t_0 y)$ e

$$\frac{1}{2}((x_{i_0} + t_0 y) + (x_{i_0} - t_0 y)) = x_{i_0} \in S_Y,$$

concluímos que Y não é estritamente convexo.

(d) Como X é uniformemente convexo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$x, y \in B_X, \frac{||x+y||}{2} > 1 - \delta(\epsilon) \Rightarrow ||x-y|| < \epsilon.$$

Por hipótese, o sistema biortogonal $\{(x_i, f_i) : i \in I\}$ não é total, então existe $e \in S_Y$ tal que $f_i(e) = 0$ para todo $i \in I$. Como

$$S_Y = E \cup (MB_X \cap \{x \in X : \sup\{|f_i(x)| : i \in I\} = 1\}),$$

concluímos que $e \in E$. Vamos mostrar que e é ponto LUR de Y.

Para cada $\epsilon > 0$, seja $\delta_1(\epsilon)$ um real positivo tal que $\delta_1(\epsilon) < \text{mín}\left\{\delta(\epsilon), \frac{1}{2}\right\}$. Sejam $\epsilon > 0$ e $y \in S_Y$

satisfazendo a

$$\left|\left|\left|\frac{y+e}{2}\right|\right|\right| > 1-\delta_1(\epsilon).$$

Pelo item (b), existe $G \in F(E) \cup \{f_i : i \in I\}$ tal que $\left|G\left(\frac{y+e}{2}\right)\right| > 1-\delta_1(\epsilon)$. Se tivéssemos $G = f_j$ para algum $j \in I$, então

$$\left|\frac{f_j(y+e)}{2}\right| = \left|\frac{f_j(y)}{2}\right| > 1-\delta_1(\epsilon) > \frac{1}{2},$$

absurdo, uma vez que $|f_j(y)| \leq 1$. Portanto, $G \in F(E)$, e assim $MG \in S_{X^*}$ por construção. Observemos que $\frac{y}{M}, \frac{e}{M} \in B_X$ e

$$\left|\left|\frac{(y/M)+(e/M)}{2}\right|\right| \geq \left|(MG)\left(\frac{y/M+e/M}{2}\right)\right| > 1-\delta_1(\epsilon) > 1-\delta(\epsilon),$$

o que implica $\left|\left|\frac{y-e}{M}\right|\right| < \epsilon$, ou seja, $|||y-e||| < (MK)\epsilon$. Dessa forma, concluímos que $e \in S_Y$ é ponto LUR de Y.

Como já afirmado anteriormente, J. P. Moreno mostrou em [Mor97] que espaços de Banach de dimensão maior que 1 contendo pontos LUR não satisfazem a propriedade β, donde segue que Y não satisfaz a propriedade β. $\square$

Seja $(X, ||.||)$ um espaço de Banach uniformemente convexo com $\dim X > 1$. Consideremos $x_0 \in S_X$ arbitrário e $f_0 \in S_{X^*}$ satisfazendo a $f_0(x_0) = 1$ (Corolário 1.1.16). Então $\{(x_0, f_0)\}$ é um sistema biortogonal limitado em X. Além disso, como $\dim X > 1$, este sistema biortogonal não é total. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar o Teorema 3.3.19 em $(X, ||.||)$ para $M_n \doteq 1 + \frac{1}{n} > 1 = ||f_0||$ e obter um espaço de Banach $Y \doteq (X, ||.||_n)$ que não é uniformemente convexo (pois não é estritamente convexo) nem satisfaz a propriedade β de Lindenstrauss, mas obedece as hipóteses do Teorema 3.3.15. Além disso, vale que

$$B_Y = \left(1+\frac{1}{n}\right) B_X \cap \{x \in X : |f_0(x)| \leq 1\}$$

e

$$||x||_n \leq ||x|| \leq \left(1+\frac{1}{n}\right) ||x||_n, \text{ para todo } x \in X.$$

O Corolário seguinte resume a discussão acima:

Corolário 3.3.20 ([AGKM17]). *Seja $(X, ||.||)$ um espaço de Banach uniformemente convexo com $\dim X > 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma norma $||.||_n$ em X equivalente à $||.||$ e tal que:*

(i) $(X, ||.||_n)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3.15.

(ii) $(X, ||.||_n)$ não é uniformemente convexo nem satisfaz a propriedade β de Lindenstrauss.

(iii) $||x||_n \leq ||x|| \leq \left(1+\frac{1}{n}\right) ||x||_n$, para todo $x \in X$.

Concluímos assim que de fato o Teorema 3.3.15 concede exemplos de pares (c_0, Y) de espaços de Banach satisfazendo a BPBp que antes não eram conhecidos.

O Teorema 3.3.15 dá uma condição suficiente sobre espaços de Banach Y para que o par (c_0, Y) satisfaça a BPBp, mas não existe garantia de que esta condição seja também necessária. Entretanto, Kim mostrou que no caso real, se Y é estritamente convexo, podemos caracterizar os pares (c_0, Y) de espaços de Banach que satisfazem a BPBp, da forma que veremos abaixo.

Teorema 3.3.21 ([Kim13]). *Sejam X o espaço de Banach real c_0, ℓ_∞ ou ℓ_∞^n, para $n \geq 2$, e Y um espaço de Banach real estritamente convexo. Se (X, Y) satisfaz a BPBp, então Y é uniformemente convexo.*

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso $X = c_0$. Os demais casos seguem por argumentos análogos.

Por hipótese, para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta(\epsilon) > 0$ satisfazendo a Definição 3.3.1. Suponhamos que Y não é uniformemente convexo. Então existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S_Y tais que $\frac{1}{2}||x_n+y_n|| \to 1$ e $||x_n-y_n|| \not\to 0$ (vide Proposição 1.5.4). Tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $\epsilon_0 \in (0,1)$ tal que $||x_n - y_n|| \geq \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o operador $T_n \in \mathcal{L}(c_0, Y)$ dado por

$$T_n(z) = z_1\frac{(x_n + y_n)}{2} + z_2\frac{(x_n - y_n)}{2}, \text{ para todo } z \in c_0.$$

Notemos que todos $n \in \mathbb{N}$ e $z \in c_0$,

$$||T_n(z)|| = \frac{1}{2}||(z_1 + z_2)x_n + (z_1 - z_2)y_n|| \leq \frac{|z_1 + z_2|}{2} + \frac{|z_1 - z_2|}{2}.$$

Como por hipótese c_0 é espaço normado sobre $\mathbb{R}$, as possibilidades para a soma $|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$ são $\pm 2z_1$ e $\pm 2z_2$. Portanto, $||T_n|| \leq 1$, e ainda $||T_n(e_1 + e_2)|| = ||x_n|| = 1$. Logo, $T_n \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos agora que $\lim_{n\to\infty} ||T_n(e_1)|| = 1$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $||T_m(e_1)|| > 1 - \eta(\epsilon_0/2)$. Então existem $\tilde{T} \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $\tilde{z} \in S_{c_0}$ satisfazendo a

$$||\tilde{T}(\tilde{z})|| = 1, ||\tilde{T} - T_m|| < \frac{\epsilon_0}{2} \text{ e } ||\tilde{z} - e_1|| < \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Em particular, $|\tilde{z}_n| < \dfrac{\epsilon_0}{2} < 1$ para todo $n \geq 2$. Pela Proposição 3.2.3, $\tilde{T}(e_n) = 0$ para todo $n \geq 2$. Portanto,

$$\tilde{T}(e_1 + e_2) = \tilde{T}(e_1 - e_2) = \tilde{T}(e_1),$$

e assim,

$$\begin{aligned}
||x_m - y_m|| &= ||T_m(e_1 + e_2) - T_m(e_1 - e_2)|| \\
&\leq ||T_m(e_1 + e_2) - \tilde{T}(e_1 + e_2)|| + ||\tilde{T}(e_1 + e_2) - T_m(e_1 - e_2)|| \\
&= ||T_m(e_1 + e_2) - \tilde{T}(e_1 + e_2)|| + ||\tilde{T}(e_1 - e_2) - T_m(e_1 - e_2)|| \\
&\leq 2||\tilde{T} - T_m|| < \epsilon_0,
\end{aligned}$$

absurdo. Logo, Y é uniformemente convexo. $\square$

Como já sabíamos que se Y é uniformemente convexo, então (c_0, Y) e (ℓ_∞^n, Y) satisfazem a BPBp, o Teorema acima permite concluir o Corolário seguinte.

Corolário 3.3.22. *Seja Y um espaço de Banach real estritamente convexo. O par (c_0, Y) (ou (ℓ_∞^n, Y), para $n \geq 2$) satisfaz a BPBp se, e somente se, Y é uniformemente convexo.*

O Corolário acima implica em particular que existem pares (X, Y) de espaços de Banach tais que $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$ mas (X, Y) não satisfaz a BPBp. De fato, seja Y um espaço de Banach real estritamente convexo que não é uniformemente convexo. Pelo Corolário 3.3.22, (ℓ_∞^n, Y) não satisfaz a BPBp, qualquer que seja $n \geq 2$. Porém, como os espaços ℓ_∞^n têm dimensão finita, $\mathcal{NA}(\ell_\infty^n, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Referências Bibliográficas

[AA96] M. D. Acosta e F. Aguirre. A new sufficient condition for the denseness of norm attaining operators. *Rocky Mountain J. Math.*, 26:407–418, 1996. xii

[AAGM08] M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García e M. Maestre. The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators. *J. Funct. Anal.*, 254:2780–2799, 2008. iii, v, xii, xiii, 45, 49, 52, 53, 54, 56, 57, 58

[ABGC⁺14] M. D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, Y. S. Choi, M. Ciesielski, S. K. Kim, H. J. Lee, M. L. Lourenço e M. Martín. The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators between spaces of continuous functions. *Nonlinear Anal.*, 95:323–332, 2014. xii

[ABGG⁺15] M. D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, D. García, S. K. Kim e M. Maestre. The Bishop-Phelps-Bollobás property: a finite dimensional approach. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 51:173–190, 2015. xii, 57

[ACK⁺15] R. Aron, Y. S. Choi, S. K. Kim, H. J. Lee e M. Martín. The Bishop-Phelps-Bollobás versions of Lindenstrauss properties A and B. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367:6085–6101, 2015. 57

[Aco16] M. D. Acosta. The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators on $C(K)$. *Banach J. Math. Anal.*, 10(2):307–319, 2016. xii, 57

[ADSM19] M. D. Acosta, J. L. Dávila e M. Soleimani-Mourchehkhorti. Characterization of Banach spaces Y satisfying that the pair (ℓ_∞^4, Y) has the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 470:690–715, 2019. xii, 57

[AGKM17] M. D. Acosta, D. García, S. K. Kim e M. Maestre. The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators from c_0 into some Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 445:1188–1199, 2017. iii, v, xii, xiii, 45, 47, 52, 57, 58, 60, 62, 66, 76, 77, 81

[Bol70] B. Bollobás. An extension to the theorem of Bishop and Phelps. *Bull. London Math. Soc.*, 2:181–182, 1970. xi, xii, 25, 41

[BP61] E. Bishop e R. R. Phelps. A proof that every Banach space is subreflexive. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67:97–98, 1961. xi, 25, 28

[BP63] E. Bishop e R. R. Phelps. The support functionals of a convex set. *Proc. Symp. Pure Math.*, 7:27–35, 1963. xii, 28, 29, 35, 37, 38

[BPT15] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional.* Coleção Textos Universitários. SBM, 2015. 10, 15, 23

[Jam57] R. James. Reflexivity and the Supremum of Linear Functionals. *Ann. of Math.*, 66(1):159–169, 1957. xi, 25

[Jam64] R. James. Characterizations of reflexivity. *Studia Math.*, 23:205–216, 1964. xi, 25

[Kim13] S. K. Kim. The Bishop-Phelps-Bollobás Theorem for operators from c_0 to uniformly convex spaces. *Israel J. Math.*, 197:425–435, 2013. xii, xiii, 57, 75, 82

[KLL16] S. H. Kim, H. J. Lee e P. K. Lin. The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators from $L_\infty(\mu)$ to uniformly convex spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 17(2):243–249, 2016. xii, 57

[Lin63] J. Lindenstrauss. On operators which attain their norm. *Israel J. Math.*, 1:139–148, 1963. xi, xiii, 45, 47, 48, 49

[Meg98] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer New York, 1998. 1, 12, 15, 26, 28, 29

[Mor97] J. P. Moreno. Geometry of Banach spaces with (α, β)-property or (β, ϵ)-property. *Rocky Mountain J. Math.*, 27:241–256, 1997. 77, 81

[Phe57] R. Phelps. Subreflexive normed linear spaces. *Arch. Math. (Basel)*, 8:444–450, 1957. xi, 25, 29

[Phe93] R. Phelps. *Convex functions, Monotone Operators and Differentiability.* Springer-Verlag, Berlin New York, 1993. 37

[Sch83] W. Schachermayer. Norm attaining operators and renorming of Banach spaces. *Israel J. Math.*, 44(3):201–212, 1983. xi

[Wil04] S. Willard. *General Topology (Dover Books on Mathematics).* Dover Publications, 2004. 1, 9