Volume e energia de campos vetoriais unitários: sobre as topologias da imersão e do campo

Adriana Vietmeier Nicoli

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutora em Ciências

Programa: Doutorado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Setembro de 2023

Volume e energia de campos unitários a ser apresentado à CPG para a tese

Esta é a versão original da tese elaborada pela candidata Adriana Vietmeier Nicoli, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Volume e energia de campos unitários a ser apresentado à CPG para a tese

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 00/00/0000. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Nome Completo - IME-USP [sem ponto final]
- Prof. Dr. Nome Completo - IMPA [sem ponto final]

Agradecimentos

Texto texto. Texto opcional.

Resumo

NICOLI, A. V. **Volume e energia de campos unitários: sobre as topologias da imersão e do campo**. 2023. xxx f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Elemento obrigatório, constituído de uma sequência de frases concisas e objetivas, em forma de texto. Deve apresentar os objetivos, métodos empregados, resultados e conclusões. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, conter no máximo 500 palavras e ser seguido dos termos representativos do conteúdo do trabalho (palavras-chave). Texto texto. Texto texto.

Palavras-chave: palavra-chave1, palavra-chave2, palavra-chave3.

Abstract

SOBRENOME, A. B. C. **Título do trabalho em inglês**. 2023. xxx f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Elemento obrigatório, elaborado com as mesmas características do resumo em língua portuguesa. De acordo com o Regimento da Pós- Graduação da USP (Artigo 99), deve ser redigido em inglês para fins de divulgação. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text.

Keywords: keyword1, keyword2, keyword3.

Contents

Lista de Símbolos

(M, g)	Variedade Riemanianna com métrica g
∇	Conexão de Levi-Civita
E	Funcional energia
V	Funcional volume
TM	Fibrado vetorial da variedade M
T^1M	Fibrado vetorial unitário da variedade M

Chapter 1

Preliminares

1.1 Métrica de Sasaki

Uma métrica Riemanniana g em uma variedade diferenciável M de dimensão n é, resumidamente, uma estrutura matemática que nos permite manipular objetos e entidades geométricas, bem conhecidos em superfícies do $\mathbb{R}^3$, em ambientes abstratos. O fibrado tangente TM também é uma variedade diferenciável, bem como sua restrição aos vetores unitários, o fibrado tangente unitário T^1M. Desse modo, uma métrica Riemanniana em TM é uma família de produtos internos, variando suavemente, nos espaços do tipo $T_v(TM)$, ou seja, tangentes do espaço tangente. A projeção natural $\pi : TM \to M$ define um subespaço de $T_{(p,v)}TM$ através do núcleo de sua diferencial: $\mathcal{V}_v := \ker(d\pi_{(p,v)})$. Como π é uma submersão, temos que $\mathcal{V}$, chamado espaço vertical, possui dimensão n. Ainda, usando a inclusão natural $\iota : T_pM \to TM$, podemos deduzir uma identificação entre $\mathcal{V}$ e T_pM pela relação $\mathcal{V} = d\iota(T_v(t_pM))$.

Na medida que M é uma variedade Riemanniana, a conexão de Levi-Civita ∇ nos permite definir o espaço horizontal $\mathcal{H}_vTM$, espaço dos vetores velocidade das curvas $(\lambda(t), V(t)) \in TM$. tais que $v = (\lambda(0).V(0))$ e $\nabla_{\lambda'}V = 0$.

A conclusão disso tudo é que temos uma decomposição em soma direta

$$TTM = VTM \oplus HTM,$$

com isomorfismos canônicos $V_vTM \backsimeq T_{\pi(v)}M$ (descrito anteriormente) e $H_vTM \backsimeq T_{\pi(v)}M$ enviando a velocidade de (λ, V) para a velocidade de λ.

A métrica de Sasaki pode ser, portanto, naturalmente definida declarando V_vTM e H_vTM ortogonais, com a métrica em cada objeto sendo o *pullback* de g para $T_{\pi(v)}M$ através dos isomorfismos canônicos.

O estudo da geometria de TM pode ser identificado desde o trabalho inicial de Sasaki em [Sas58]. Para uma exposição mais detalhada desse tópico, vide [GK02].

1.2 Fibração de Hopf

1.3 Índice de uma singularidade de um campo vetorial

1.4 Energia de campos unitários

Neste capítulo reunímos as definições e resultados principais a respeito dos funcionais volume e energia de campos vetoriais unitários. A leitura, mesmo que rápida, deste capítulo é recomendada mesmo ao leitor que já conhece estes objetos, uma vez que fixamos as notações utilizadas ao longo de todo o texto.

Afim de explicarmos os funcionais volume e energia da melhor maneira possível, utilizamos as bibliografias [GM01] e o que mais

Seja (N, h) uma variedade riemanniana fixa e seja M uma variedade suave, podemos definir a *densidade de energia* $\bar{e}$ de uma aplicação $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{e} : C^\infty(M, N) \times \mathcal{M} &\to C^\infty(M) \\ (\varphi, g) &\mapsto \frac{1}{2}\operatorname{tr}(g^{-1}\varphi^* h), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{M}$ é a variedade formada por todas as métricas riemannianas de M. Se M for uma variedade compacta, integramos $\bar{e}$ e obtemos a *energia* da aplicação φ:

$$\bar{E}(\varphi, g) = \int_M \bar{e}(\varphi, g)\, dv_g.$$

Para definirmos o volume, primeiro tome o espaço de todas as imersões de M em N. Este espaço é uma subvariedade de $C^\infty(M, N)$ e o denotaremos por $\mathrm{Im}(M, N)$. Se $\mathrm{Im}(M, N) \neq \emptyset$, podemos vê-la como um subconjunto de $C^\infty(M, N) \times \mathcal{M}$ pela aplicação $\mathrm{Id}, \mathcal{R}$, onde R é a aplicação *pullback*:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : C^\infty(M, N) &\to S^2(T^* M) \\ \varphi &\mapsto \varphi^* h. \end{aligned}$$

A imagem desta aplicação, $\Im(\mathcal{R}) = \{(\varphi, \varphi^* h); \varphi \in \mathrm{Im}(M, N)\}$, é a variedade das imersões isométricas de M em N e será denotada por $\mathrm{ImIso}(M, N)$.

Se definirmos $f(\varphi) = (2/m)\bar{e}(\varphi, \varphi^* h)$, onde m é a dimensão de M, então $f(\varphi) = 1$ e, para M compacta, $\bar{E}$ restrito ao subconjunto de imersões isométricas é, a menos de constantes, o funcional volume $\mathrm{vol} : \mathrm{Im}(M, N) \to \mathbb{R}$ que leva φ no volume de $\varphi(M)$, na variedade riemanniana (N, h).

Para calcular o gradiente de $\bar{e}$ em relação à métrica riemanniana h, definimos para cada dupla $(\varphi, g) \in C^\infty(M, N) \times \mathcal{M}$ uma aplicação $\alpha^g_\varphi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma^\infty(\varphi^* TN)$ dada por

$$\alpha^g_\varphi(X, Y) = \nabla^h_X(T\varphi \circ Y) - T\varphi \circ \nabla^g_X Y,$$

onde ∇^h e ∇^g são as conexões de Levi-Civita relacionadas a h e g, respectivamente.

Aqui cabe dissertar um pouco sobre os mínimos dos funcionais antes de estarem no campo vetorial

Assim, dada (M^m, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada, com dimensão $m \geq 2$ e ∇ a conexão de Levi-Civita, definimos a energia de um campo vetorial unitário sobre M é definido como a energia da aplicação $\vec{v} : M \to T^1 M$, onde $T^1 M$ representa o fibrado vetorial unitário munido com a métrica de Sasaki, (veja [Wie95] e [Woo97])

$$E(\vec{v}) = \frac{1}{2}\int_M \|\nabla \vec{v}\|^2 + \frac{m}{2}\mathrm{vol}(M). \tag{1.1}$$

Em [Wie95], Wiegmink define o funcional *total bending*, uma medida quantitativa que extende a compreensão do quanto um campo vetorial unitário falha em ser paralelo com respeito a conexão de Levi-Civita ∇ de uma variedade Riemanniana M. Precisamente,

$$\mathcal{B}(\vec{v}) = \frac{1}{(m-1)\mathrm{vol}(\mathbb{S}^m)}\int_M \|\nabla \vec{v}\|^2,$$

e a energia de $\vec{v}$ pode ser escrita em termos deste funcional como

$$E(\vec{v}) = \frac{(m-1)\mathrm{vol}(\mathbb{S}^m)}{2}\mathcal{B}(\vec{v}) + \frac{m}{2}\mathrm{vol}(M).$$

Uma questão importante a respeito destes funcionais é como encontrar campos vetoriais unitários tais que o mínimo é atingido. Brito [Bri00] mostrou que o fluxo de Hopf é o mínimo absoluto do funcional $\mathcal{B}$ em $\mathbb{S}^3$:

Teorema 1 (Brito, [Bri00]). *Campos vetoriais de Hopf são os únicos campos em $\mathbb{S}^3$ que minimizam $\mathcal{B}$.*

Gluck e Ziller provaram que o fluxo de Hopf é também o campo vetorial uniátio com o volume mínimo em $\mathbb{S}^3$, onde o volume de um campo $\vec{v}$ é dado por

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) = \int_M \sqrt{\det(I + (\nabla\vec{v})(\nabla\vec{v})^*)},$$

onde I é a aplicação identidade e $(\nabla\vec{v})^*$ representa o operador adjunto.

Teorema 2 (Gluck and Ziller, [GZ86]). *O único campo vetorial unitário com volume mínimo em $\mathbb{S}^3$ é o campo de Hopf.*

Por outro lado, Reznikov comparou este funcional com a topologia de uma hipersuperfície euclidiana. Seja M^m uma hipersuperfície suave orientada e fechada imersa em $\mathbb{R}^{m+1}$, equipada com a métrica induzida, e seja $\mathcal{S} = \sup_{x\in M}\|S_x\| = \sup_{x\in M}|\lambda_i(x)|$, onde S_x é o operador da segunda forma fundamental em T_xM, e $\lambda_i(x)$ são as curvaturas principais.

Teorema 3 (Reznikov, [Rez92]). *Para qualquer campo vetorial unitário $\vec{v}$ sobre M, temos*

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) - \mathrm{vol}(M) \geq \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^m)}{\mathcal{S}}|\deg(N)|,$$

onde $\deg(N)$ *é o grau da aplicação normal de Gauss $N : M \to \mathbb{S}^m$.*

Teorema 4 (Borreli, Brito and Gil-Medrano, [VBGM03]). *O ínfimo de E sobre todos os campos vetoriais unitários globalmente definidos da esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ $(n \geq 2)$ is*

$$\left(\frac{2n+1}{2} + \frac{n}{2n-1}\right)\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n+1}). \tag{1.2}$$

Este valor não é atingido por nenhum campo vetorial unitário suave globalmente definido.

1.5 Volume de campos unitários

Seja $M = \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm P\}$ a esfera Euclideana em que dois pontos antipodais são removidos, digamos, $-P$ e $+P$. Denote por g a métrica usual de $\mathbb{S}^2$ induzida de $\mathbb{R}^3$, e por ∇ a conexão de Levi-Civita associada a g. Considere um frame local ortonormal e orientado $\{e_1, e_2\}$ sobre M, onde e_1 é tangente aos paralelos da esfera e e_2 é tangente aos meridianos. Seja $\vec{v}$ um campo vetorial unitário tangente a M e considere outro frame local orientado $\{\vec{v}, \vec{v}^{\perp}\}$ sobre M e sua base dual $\{\omega_1, \omega_2\}$ compatível com a orientação de $\{e_1, e_2\}$.

Para uma variedade Riemanniana compacta (M, g), o volume de um campo veotrial suave $\vec{v} : M \to TM$ é o volume da imagem $\vec{v}(M) \mapsto (TM; g^{Sas})$, onde g^{Sas} é chamada de métrica de Sasaki e é definida declarando o complemento ortogonal da distribuição vertical como sendo a distribuição horizontal dada pela conexão de Levi-Civita ∇. Em termos de ∇ e g,

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) = \int_M \sqrt{\det(I + (\nabla\vec{v})(\nabla\vec{v})^*)}\,\nu, \tag{1.3}$$

onde I é a identidade, $(\nabla\vec{v})^*$ é o operador adjunto e ν é a forma volume de M.

Em 1986, Gluck e Ziller ([GZ86]) provaram que os fluxos de Hopf são os únicos campos vetoriais unitários de volume mínimo em $M = \mathbb{S}^3$. O Teorema é:

Teorema 5 (Gluck e Ziller). *Campos vetoriais unitários de Hopf ($\vec{v}_H$) são o mínimo para o volume em $\mathbb{S}^3$ e nenhum outro.*

Entretanto, se pensarmos em dimensões maiores, temos que os Hopf é instável. Este resultado foi obtido por Johnson em 1988 (veja [Joh88]):

Teorema 6 (Johnson). *Os campos vetoriais de Hopf sobre* $\mathbb{S}^{2n+1}$ *são instáveis para* $n > 1$.

Mais tarde, em 2008 Brito, Chacón e Johnson ([BCJ08]) estabeleceram uma relação entre o volume de um campo vetorial unitário e seus índices em torno de uma singularidade isolada. Mais precisamente:

Teorema 7 (Brito, Chacón e Johnson). *Seja* $\mathbb{S}^2$ *ou* $\mathbb{S}^3$ *a esfera Euclideana sem dois pontos antipodais* N *e* S. *Seja* $\vec{v}$ *um campo vetorial unitário e suave definido sobre tais variedades e seja* $I_{\vec{v}}(P)$ *o índice de Poincaré de* $\vec{v}$ *em torno do ponto* P. *Então,*

- *para* $\mathbb{S}^2\backslash\{N,S\}$, $\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq \frac{1}{2}(\pi + |I_{\vec{v}}(N)| + |I_{\vec{v}}(S)| - 2)\mathrm{vol}(\mathbb{S}^2)$
- *para* $\mathbb{S}^3\backslash\{N,S\}$, $\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq (|I_{\vec{v}}(N)| + |I_{\vec{v}}(S)|)\mathrm{vol}(\mathbb{S}^3)$

Seja $\vec{v}_R$ o campo norte-sul, então ele atinge a igualdade em ambos os casos do Teorema. Desta forma, para $\mathbb{S}^2\backslash\{N,S\}$, $\mathrm{vol}(\vec{v}_R) = \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{vol}(\mathbb{S}^2)$ e em $\mathbb{S}^3\backslash\{N,S\}$, $\mathrm{vol}(\vec{v}_R) = 2\,\mathrm{vol}(\mathbb{S}^3) = \mathrm{vol}(\vec{v}_H)$

Se tratando de folheações sobre $\mathbb{S}^2$, Fawaz (veja [Faw09]) estudou o valor mínimo de folheações meromórficas. O mínimo é atingido tomando a folheação da esfera $\mathbb{S}^2$ por paralelos. Formalmente, temos:

Teorema 8 (Fawaz). *Seja* $\mathcal{F}$ *uma folheação na esfera de Riemann* $\mathbb{S}^2$ *dada pela parte real de um campo vetorial meromorfo ou holomorfo, então* $\mathrm{vol}(\mathcal{F}) \geq 2\pi^2$.

Em 2010, Borrelli e Gil-Medrano provaram que os campos de Pontryagin são minimizantes para a área de uma esfera unitária bidimensional (veja [BGM10]). Campos de Pontryagin fields de $\mathbb{S}^n$ são campos vetoriais unitários $\vec{v}_{Ptry}$ definidos em um subconjunto aberto denso U tal que o fecho de $\vec{v}_{Ptry}(U)$ é o ciclo generalizado de Pontryagin n-dimensional de um fibrado vetorial unitário da n-esfera ($T^1\mathbb{S}^n$).

Teorema 9 (Borrelli and Gil-Medrano). *Em se tratando de campos vetoriais unitários sem borda de* $\mathbb{S}^2(1)\backslash\{P\}$ *aqueles com a menor área são os campos de* ($\vec{v}_{Ptry}$) *e nenhum outro.*

Recentemente, em 2019, o Teorema 7 foi extendido para esferas de dimensão ímpar $\mathbb{S}^{2n+1}\backslash\{\pm P\}$, see [FGBBG19].

Teorema 10 (Brito, Gomes e Gonçalves). *Se* $\vec{v}$ *é um campo vetorial unitário sobre* $\mathbb{S}^{2n+1}\backslash\{\pm P\}$, *então*

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq \frac{\pi}{4}\left(|I_{\vec{v}}(P)| + |I_{\vec{v}}(-P)|\right)\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n}).$$

Chapter 2

Energia de campos em hipersuperfícies Euclidianas

Dada uma hipersuperfície de dimensão ímpar M^{2n+1}, $n \geq 1$ com um campo vetorial unitário $\vec{v}$ e a topologia da imersão de M, mais precisamente, o grau da aplicação normal de Gauss da imersão, temos o Teorema a seguir, que nos dá uma obstrução topológica para pequenos valores da energia em uma variedade Riemanniana, especificamente em uma hipersuperfície de um espaço euclideano.

Teorema A. *Dado um campo vetorial unitário sobre uma hipersuperfície Euclideana fechada orientada M^{2n+1}, temos*

$$E(\vec{v}) \geq C(n)\frac{|\deg(N)|\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n+1})}{S^{[2n-1]}} + \frac{2n+1}{2}\mathrm{vol}(M^{2n+1}),$$

onde $S^{[2n-1]}$ é o valor máximo de $\|S \wedge \cdots \wedge S\|_{\infty}$ ($2n-1$ vezes, veja a definição 2.2) e

$$C(n) = \begin{cases} \frac{n}{2n-1}, & \text{se } M^{2n+1} = \mathbb{S}^{2n+1}(r), \\ \frac{1}{2}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

estas duas constantes dependem da imersão de M e da dimensão n.

Duas imersões não homotópicas possuirão dois graus da aplicação normal diferentes; quanto maior o grau, maior a energia de um dado campo vetorial unitário. Até onde temos conhecimento, esta é a primeira relação entre a topologia da imersão e o funcional energia de campos.

Um caso especial é a esfera unitária $\mathbb{S}^{2n+1}$. Borreli *et al* [VBGM03] construiu uma família de campos vetoriais unitários sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ com energia convergindo à energia de um campo vetorial radial. Mais ainda, estes valores são ínfimos para o caso de campos vetoriais unitários sem singularidades.

Por um Teorema de Hopf, veja, por exemplo, a página 51 de [Mil65], $\deg(N)$ é o mesmo quando temos imersões de hipersuperfícies compactas homotópicas. Assim, é interessante observar esferas com diferentes raios. Aplicando a mesma técnica do Teorema 2 para uma esfera de raio r, temos

Corolário 1. *Para $r > 0$, seja $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$ imersa em $\mathbb{R}^{2n+2}$ com grau da aplicação normal igual a um. Então*

$$E(\vec{v}) \geq \left(\frac{2n+1}{2}r^{2n+1} + \frac{n}{2n-1}r^{2n-1}\right)\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n+1}).$$

Consequentemente, quando $r = 1$ recuperamos o Teorema 4. Esta inequação é bem conhecida na literatura, veja [BW00] para avançar na discussão sobre energia de campos vetoriais com singularidades isoladas, assim como para obter uma prova da desigualdade geral a respeito de $\mathrm{Ricci}(\vec{v}, \vec{v})$ sobre uma dada variedade Riemanniana.

Também discutimos uma lista de funcionais que possuem propriedades similares ao *total bending* de fluxos, e determinam um valor ínfimo para cada um dependendo novamente do grau $\deg(N)$.

Seja $\vec{v}$ um campo vetorial unitário sobre uma variedade Riemanniana compacta M^m. Para todo $1 \leq k \leq m-1$, defina

$$\mathcal{B}_k(\vec{v}) = \int_M \underbrace{\|\nabla\vec{v} \wedge \cdots \wedge \nabla\vec{v}\|^2}_{k\text{-times}}. \tag{2.1}$$

Se σ_{2n} denota a $2n$-ésima função elementar simétrica, e $\mathcal{V}$ é a restrição de $\nabla\vec{v}$ a $V^\perp$ então nosso último teorema pode ser reescrito da seguinte forma

Teorema B. *Seja M^{2n+1} uma variedade Riemanna compacta, e seja $\vec{v}$ um campo vetorial unitário sobre M. Então*

$$\mathcal{B}_n(\vec{v}) \geq \binom{2n}{n} \int_M |\sigma_{2n}(\mathcal{V})|. \tag{2.2}$$

Além disso, quando M^{2n+1} é uma hipersuperfície Euclideana,

$$\mathcal{B}_n(\vec{v}) \geq \frac{|\deg(N)|}{\mathcal{S}} \binom{2n}{n} \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n+1}), \tag{2.3}$$

onde $\mathcal{S}$ é a constante já mencionada.

Como uma consequência deste resultado, deduzimos

Corolário 2. *Campos vetoriais de Hopf são mínimos para $\mathcal{B}_n$ sobre S^{2n+1}.*

Campos vetoriais de Hopf sobre $\mathbb{S}^3$ são mínimos absolutos para a energia, [Bri00], e sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$, para $n \geq 2$, são pontos críticos instáveis do funcional, [Woo97]. Apesar destas propriedades sobre esferas de dimensão maior, os funcionais $\mathcal{B}_n$ on S^{2n+1} são uma tentativa de obter uma lista de funcionais tais que o campo vetorial de Hopf é mínimo, dando recusros similares quando comparados à energia e/ou *total bending*. Este resultado também pode ser comparado com o obtido em[Bri00], onde é feita a coreção da curvatura média do *total bending*.

2.1 Integrais de curvatura de hipersuperfícies fechadas

A demonstração do Teorema 2, do corolário 1 e da inequação 2.3 do Teorema 2.2 contam como uma lista de integrais de curvatura, esta lista será descrita nesta seção.

Assumiremos que M^{2n+1} é orientada, então a aplicação normal de Gauss $N : M^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ é bem definida. Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a métrica Riemanniana induzida sobre M. Seja $\vec{v} : M \to TM$ um campo vetorial unitário suave sobre M, e tome a base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1} := \vec{v}\}$ em cada ponto $x \in M$. Agora, na tentativa de deixar o texto mais leve, fixaremos algumas notações: para $1 \leq A, B \leq 2n+1$, fixe $h_{AB} = \langle S(e_A), e_B\rangle$ e $a_{AB} = \langle \nabla_{e_B}\vec{v}, e_A\rangle$; segue que $a_{2n+1\,B} = \langle \nabla_{e_B}\vec{v}, \vec{v}\rangle = 0$, para todo B. Para um número real $t > 0$, defina $\varphi_t^{\vec{v}} : M^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}(\sqrt{1+t^2})$, by $\varphi_t^{\vec{v}}(x) = N(x) + t\vec{v}(x)$. com respeito à base já mencionada de T_xM e fixando $\left\{e_1, \ldots, e_{2n}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1+t^2}} - t\frac{N}{\sqrt{1+t^2}}\right\}$ como uma base ortonormal de $T_{\varphi_t^{\vec{v}}(x)}\mathbb{S}^{2n+1}(\sqrt{1+t^2})$, nós temos que

$$d\varphi_t^{\vec{v}} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & h_{2n+1\,1} + ta_{1\,2n+1} \\ & h_{ij} + ta_{ij} & & \vdots \\ & & & h_{2n+1\,2n} + ta_{2n\,2n+1} \\ \hline \sqrt{1+t^2}h_{2n+1\,1} & \cdots & \sqrt{1+t^2}h_{2n+1\,2n} & \sqrt{1+t^2}h_{2n+1\,2n+1} \end{array}\right).$$

A multilinearidade do determinante simplica os cálculos tem torno de uma fórmula explícita para $\det(d\varphi_t^{\vec{v}})$ escrita em termnos da segunda forma fundamental de M e componentes dependendo do fibrado normal de $\vec{v}$.

$$\begin{aligned}\det((h_{AB})+t(a_{AB})) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\Big(& h_{1\,\sigma(1)}\cdots h_{2n+1\,\sigma(2n+1)} \\ &+ t\sum_{i} h_{1\,\sigma(1)}\cdots a_{i\,\sigma(i)}\cdots h_{2n+1\,\sigma(2n+1)} \\ &+ t^2\sum_{i<j} h_{1\,\sigma(1)}\cdots a_{i\,\sigma(i)}\cdots a_{j\,\sigma(j)}\cdots h_{2n+1\,\sigma(2n+1)} \\ &\vdots \\ &+ t^{2n} a_{1\,\sigma(1)}\cdots a_{2n\,\sigma(2n)} h_{2n+1\,\sigma(2n+1)}\Big)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Portanto,

$$\det(d\varphi_t^{\vec{v}}) = \sqrt{1+t^2}\sum_{k=0}^{2n}\eta_k t^k$$

onde

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \det(h_{AB}) \\ \eta_1 &= \sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{i} h_{1\,\sigma(1)}\cdots h_{i-1\,\sigma(i-1)}a_{i\,\sigma(i)}h_{i+1\,\sigma(i+1)}\cdots h_{2n+1\,\sigma(2n+1)} \\ \eta_2 &= \sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{i<j} h_{1\,\sigma(1)}\cdots h_{i-1\,\sigma(i-1)}a_{i\,\sigma(i)}h_{i+1\,\sigma(i+1)}\cdots \\ &\quad\cdots h_{j-1\,\sigma(j-1)}a_{j\,\sigma(j)}h_{j+1\,\sigma(j+1)}\cdots h_{2n+1\,\sigma(2n+1)} \\ &\vdots \\ \eta_{2n} &= \sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\,\sigma(1)}\cdots a_{2n\,\sigma(2n)}h_{2n+1\,\sigma(2n+1)}.\end{aligned}$$

O fato de $\det((h_{AB})+t(a_{AB})) = \sum_k \eta_k t^k$ mostra que, para $1 \le k \le 2n$, η_k não depende da escolha da base.

Uma vez que $\varphi_t^{\vec{v}}$ e N são homotópicos, temos que $\deg(\varphi_t^{\vec{v}}) = \deg(N)$. Por outro lado, se $f : X \to Y$ é uma aplicação suave entre duas variedades de mesma dimensão, digamos m, então para qualquer m-forma ω sobre Y, a fórmula do grau é lida como $\int_X f^*(\omega) = \deg(f)\int_Y \omega$. Então, seguindo os cálculos feitos em [BG18],

$$\int_M \eta_k = \begin{cases}\deg(N)\binom{n}{k/2}\operatorname{vol}(\mathbb{S}^{2n+1}), & \text{se } k \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } k \text{ é ímpar.}\end{cases} \tag{2.5}$$

Veja [BG18] para uma descrição detalhada e prova destas integrais, e também para algumas aplicações de folheações em hipersuperfícies.

2.2 Demonstração do Teorema 2

Primeiro vamos definir uma lista de números relacionados ao produto *wedge* do operador forma de M e suas restrições a uma lista de vetores sobre um ponto.

Definição. *Se $\{u_1, \ldots, u_{2n+1}\}$ é uma base ortonormal em $x \in M$, então, para cada $1 \le A \le 2n+1$,*

$$S^{[A]} = \sup_{1\le i_1,\ldots,i_A\le 2n+1;\ x\in M}\{\|S(u_{i_1})\wedge\cdots\wedge S(u_{i_A})\|_\infty\},$$

onde $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma do máximo, naturalmente estendida a $\Lambda^A(M)$.

Observe que $S^{[A]}$ está bem definida pois M é uma hipersuperfície compacta. Com respeito a $\{e_1, \ldots, e_{2n}, \vec{v}\}$, o funcional energi é escrito como

$$\begin{aligned} E(\vec{v}) &= \frac{1}{2}\int_M \|\nabla\vec{v}\|^2 + \frac{2n+1}{2}\mathrm{vol}(M) \\ &= \frac{1}{2}\int_M \left(\sum_{A,B} a_{AB}^2\right) + \frac{2n+1}{2}\mathrm{vol}(M), \end{aligned}$$

isto significa que η_2 é a escolha natural sobre todos os η_k para determinar o valor inferior para $E(\vec{v})$. Da última seção, temos

$$\begin{aligned} \int_M \eta_2 = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{i<j} & h_{1\,\sigma(1)} \cdots h_{i-1\,\sigma(i-1)} a_{i\,\sigma(i)} h_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots \\ & \cdots h_{j-1\,\sigma(j-1)} a_{j\,\sigma(j)} h_{j+1\,\sigma(j+1)} \cdots h_{2n+1\,\sigma(2n+1)} \\ &= n\deg(N)\mathrm{vol}(S^{2n+1}) \end{aligned}$$

Pela definição de matriz (a_{AB}) e pelo fato de que duas de suas entradas aparecem na soma acima, podemos tomar todas as submatrizes 2×2 menores de (a_{AB}), vezes um menor dependendo da matriz segunda forma fundamental de M. Mais precisamente,

$$\int_M \eta_2 = \int_M \left(\sum_{i,j,k,l} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{lj} & a_{lk} \end{vmatrix} \det(\widehat{H}^{ij}_{lk}) + \sum_{i,j,l} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{j\,2n+1} \\ a_{lj} & a_{l\,2n+1} \end{vmatrix} \det(\widehat{H}^{i\,2n+1}_{l\,2n+1}) \right), \tag{2.6}$$

onde $\widehat{H}^{AB}_{CD}$ é uma $(2n-1)\times(2n-1)$ submatriz de (h_{AB}) removendo as A-ésima e C-ésima linhas, e B-ésima e D-ésima colunas.

Para $0 \leq k \leq 2n$ as funções η_k são invariantes a respeito de mudança de base. Podemos assumir que η_2 é calculado com respeito a uma base que diagonaliza a segunda forma fundamental de M. Nesta nova base, temos uma matriz $(\widetilde{a}_{AB})$ e sua última linha pode ser diferente de zero. Assim escrevemos

$$\int_M \eta_2 = \int_M \sum_{A<C} \begin{vmatrix} \widetilde{a}_{AA} & \widetilde{a}_{AC} \\ \widetilde{a}_{CA} & \widetilde{a}_{CC} \end{vmatrix} \prod_{F\neq A,C} h_{FF}.$$

De nossa definição 2.2, $\prod_{F\neq A,C} h_{FF} \leq S^{[2n-1]}$. Aplicando a inequação $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)$, temos

$$\int_M \eta_2 \leq \frac{1}{2}\int_M \sum_{A<C} \left(\widetilde{a}_{AA}^2 + \widetilde{a}_{AC}^2 + \widetilde{a}_{CA}^2 + \widetilde{a}_{CC}^2\right) S^{[2n-1]}.$$

Agora falaremos sobre a pricipal diferença entre o Teorema 2 e o Corolário 1; isto é: entre a constante $C(n)$ obtida de uma hipersuperfície arbitrária e a restrição a uma esfera de raio r. Para uma hipersuperfície fechada arbitrária M^{2n+1}, podemos diagonalizar (h_{AB}) mas não podemos controlar quais entradas de $(\widetilde{a}_{AB})$ serão diferentes de zero. Isto implica que quando contamos os termos da diagonal $\widetilde{a}_{FF}$ na última inequação, terminaremos com $2n$ elementos. Assim

$$\int_M \eta_2 \leq nS^{[2n-1]} \int_M \sum_{A,B} \widetilde{a}_{AB}^2 \leq nS^{[2n-1]} \int_M \|\nabla\vec{v}\|^2.$$

Por outro lado, se $M = \mathbb{S}^{2n+1}(r)$, então (h_{AB}) é $1/r$ vezes a matriz identidade, $(h_{AB}) = (1/r)\cdot I$. Isto significa que para qualquer escolha de base, (h_{AB}) é uma matriz diagonal. Em particular, podemos tomar a base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1} := \vec{v}\}$, e (a_{AB}) é a mesma que antes, ou seja, $(a_{2n+1\ B}) = \langle\nabla_{e_B}\vec{v}, \vec{v}\rangle = 0$ para todo $1 \leq B \leq 2n+1$. Neste caso, quando contamos em termos de

$\sum_{\substack{A<D\\B<C}}\left(a_{AB}^2+a_{AC}^2+a_{DB}^2+a_{DC}^2\right)$ temos um número menor, $2n-1$. Assim

$$\int_{\mathbb{S}^{2n+1}(r)}\eta_2 \leq \frac{2n-1}{2}S^{[2n-1]}\int_{\mathbb{S}^{2n+1}(r)}\|\nabla\vec{v}\|^2.$$

Portanto,

$$E(\vec{v}) \geq C(n)\frac{|\deg(N)|\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n+1})}{S^{[2n-1]}}+\frac{2n+1}{2}\mathrm{vol}(M^{2n+1}),$$

onde

$$C(n)=\begin{cases}\frac{n}{2n-1}, & \text{se } M^{2n+1}=\mathbb{S}^{2n+1}(r),\\ \frac{1}{2}, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Perceba que quando $M^{2n+1}=\mathbb{S}^{2n+1}(r)$, seu volume é r^{2n+1} vezes o volume de $\mathbb{S}^{2n+1}$. Além disso, $S^{[2n-1]}=r^{-2n+1}$, pois $(h_{AB})=(1/r)\cdot I$. Isto conclui a prova do corolário 1.

2.3 Resultados conhecidos e uma lista de novos funcionais

O objetivo desta sessão é mostrar algumas consequências diretas da equação 2.5, e também demonstrar o Teorema 2.2. Começamos considerando a integral da último invariante η_{2n} e então obtemos o ingrediente principal na prova do Teorema 3 presente em [Rez92]. Finalmente, discutimos uma lista de funcionais que chamamos de “*total bending* de ordem maior" sobre variedades Riemannianas e estudamos seus valores inferiores em hipersuperfícies Euclideanas fechadas.

2.3.1 Outro panorama do Teorema 3

Pela definição, a última linha de (a_{AB}) é zero ($\vec{v}$ é unitário), então denote m_A, $1\leq A\leq 2n+1$, como seus $2n$-menores. Assim, $\eta_{2n}=\sum_A(-1)^{A+1}h_{2n+1A}m_A$, o que implica

$$\begin{aligned}|\eta_{2n}| &\leq \left(\sum_A h_{2n+1A}^2\right)^{1/2}\left(\sum_A m_A^2\right)^{1/2} = \|S(\vec{v})\|\left(\sum_A m_A^2\right)^{1/2}\\ &\leq \mathcal{S}\left(\sum_A m_A^2\right)^{1/2}\\ &\leq \mathcal{S}\left(\sqrt{\det(I+(\nabla\vec{v})(\nabla\vec{v})^t)}-1\right).\end{aligned}$$

Para a última inequação, veja o Lema 1 em [Rez92]. A prova do Teorema 3 termina ao fazer a integração sobre M.

2.3.2 Funcionais de ordem superior: demonstração do Teorema 2.2

O fato de $\vec{v}$ ser unitário implica que $\mathcal{B}_m(\vec{v})=0$, e $\mathcal{B}_1(\vec{v})$ é, a menos de uma constante, o *total bending* de $\vec{v}$. Todos os funcionais $\mathcal{B}$ podem ser escritos como integrais de funções de matrizes quadradas de ordem k a partir de (a_{AB}),

$$\mathcal{B}_k(\vec{v})=\int_M\sum_{\substack{A_1<\cdots<A_k\\B_1<\cdots<B_k}}\det{}^2\left(a_{B_1\cdots B_k}^{A_1\cdots A_k}\right).$$

Assuma que M tem dimensão $2n+1$. Quando $1\leq i,j\leq 2n$, a matriz $(a_{ij})=(\langle\nabla_{e_j}\vec{v},e_i\rangle)$ descreve o comportamento da distribuição normal a $\vec{v}$. Vamos comparar este determinante com o integrando do funcional $\mathcal{B}_n$.

Se omitirmos as submatrizes menores de ordem n tendo ao menos um elemento do tipo $a_{i\ 2n+1} = \langle \nabla_{\vec{v}} \vec{v}, e_i \rangle$, então

$$\mathcal{B}_n(\vec{v}) = \int_M \sum_{\substack{A_1<\cdots<A_n \\ B_1<\cdots<B_n}} \det{}^2 \left(a^{A_1\cdots A_n}_{B_1\cdots B_n} \right) \geq \int_M \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_n \\ j_1<\cdots<j_n}} \det{}^2 \left(a^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n} \right).$$

Seguiremos as seções 3 e 4 de [FBBN04], e o capítulo IV de [Cha00]. Geralmente, a distribuição normal de $\vec{v}$ é não integrável. Apesar disso (a_{ij}) ser não simétrico, podemos encontrar uma vase local tal que (a_{ij}) é triangular superior,

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & & & & & & & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_r & * & \cdots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & \\ & & \vdots & & x_1 & -y_1 & * & \cdots & & & \\ & & & & y_1 & x_1 & & & & & \\ & & & & 0 & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & \vdots & & & \ddots & & & * \\ \vdots & & & & & & & & & x_s & -y_s \\ 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & & y_s & x_s \end{pmatrix}.$$

Seja $D = \operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_r|, \sqrt{x_1^2+y_1^2}, \sqrt{x_1^2+y_1^2}, \ldots, \sqrt{x_s^2+y_s^2}, \sqrt{x_s^2+y_s^2})$ a matriz diagonal $2n \times 2n$ obtida a partir da diagonal princial de (a_{ij}). Calculando o determinante de (a_{ij}) (levanto em conta a representação triangular superior) e pela construção de D, temos que $\det D \geq |\det(a_{ij})|$. Por outro lado,

$$\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_n \\ j_1<\cdots<j_n}} \det{}^2 \left(a^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n} \right) \geq \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_n \\ j_1<\cdots<j_n}} \det{}^2 \left(D^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n} \right),$$

simplifica pois a maioria dos elementos da diagonal principal em (a_{ij}) são diferentes de zero, que é o caso de D.

O resultado principal da seção 3 em [FBBN04] é o "Lema Fundamental", que estabelece uma desigualdade entre o volume de uma matriz $2n \times 2n$ diagonal e a soma de os elementos pares das funcões simétricas elementares. Ao provar este Lema, os autores deduziram a seguinte desigualdade (ver segunda desigualdade na página 307 de [FBBN04]; também devemos citar [Cha00], equações (IV.16) e (IV.21) páginas 55 e 56, respectivamente)

$$\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_n \\ j_1<\cdots<j_n}} \det{}^2 \left(D^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n} \right) \geq \binom{2n}{n} \det D.$$

Uma vez que $\sigma_{2n}(\mathcal{V}) = \det(a_{ij})$, isto completa a prova de 2.2.

O variante mais simples dependendo de $\vec{v}$ na seção 2.1 é η_{2n}. Se $\mathcal{S}$ é o número definido no Teorema 3, então ambos se combinam para estabelecer 2.3.

2.3.3 Fluxos de Hopf em $\mathbb{S}^{2n+1}$

Agora, provaremos o Corolário 2. Campos vetoriais de Hopf são tangentes às fibras de $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, e a matriz associada à segunda forma fundamental de um dado H é uma matriz

$2n \times 2n$ do tipo

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

tendo n blocos da forma $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com zeros na diagonal e em todo o restante. Calculando $\mathcal{B}_n(H)$ sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$, precisamos contarr quantas submatrizes de ordem n diferentes de zero a matriz acima tem. Uma dada submatriz $n \times n$ é obtida removendo n linhas e n colunas de (a_{ij}). Ao final deste processo, todas as linhas e colunas da submatriz $n \times n$ tem exatamente um elemento, ± 1. Rearranjando as linhas desta submatriz, temos uma $n \times n$ matriz diagonal, e esta matriz tem determinante igual a ± 1. Assim, temos $\binom{2n}{n}$ não nulos de ordem n, cada um valendo ± 1. Portanto, $\mathcal{B}_n(H) = \binom{2n}{n}\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n+1})$.

Chapter 3

Volume dependendo da topologia do campo

Neste manuscrito, estabelecemos limitantes inferiores da área total de campos vetoriais unitários em esferas Euclideanas furadas antipodalmente $\mathbb{S}^2\backslash\{\pm P\}$ e que estes valores dependem do índice de Poincaré das singularidades de $\pm P$. Mostramos que o mínimo é atingido e descrevemos os campos vetoriais unitários $\vec{v}_k$ que atingem o mínimo para cada índice k, também mostramos que estes campos vetoriais são os únicos com esta propriedade. De fato, dado um índice k, grosseiramente definimos um campo vetorial unitário $\vec{v}_k$ com uma ou duas singuralidades satisfazendo:

1. $\vec{v}_k$ é paralelo ao longo dos meridianos
2. $\vec{v}_k$ gira $k-1$ vezes ao longo de cada paralelo com velocidade angular constante
3. estabelecemos um “meridiano inicial" tal que $\vec{v}_k$ forma um ângulo θ com cada paralelo.

Teorema D. *Seja $\vec{v}$ um campo vetorial unitário sobre $M = \mathbb{S}^2\backslash\{N, S\}$. Se $k = \max\{I_{\vec{v}}(N), I_{\vec{v}}(S)\}$, então*

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq \pi L(\varepsilon_k),$$

onde $L(\varepsilon_k)$ é o comprimento da elipse $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{(k-2)^2} = 1$, com índice positivo k e $I_{\vec{v}}(P)$ representa o índice de Poincaré de $\vec{v}$ no ponto P.

Esta é uma extensão natural dos Teoremas 7 e 9 já mencionados. Também exibimos campos vtoriais $\vec{v}_k$ que são mínimos para o volume em cada índice k, ou seja, o ífimo é atingido. Estes resultados, até onde sabemos, resolvem completamente o problema de Gluck e Ziller para o caso da esfera bidimensional perfurada antipodalmente. Borreli e Gil-Medrano solucionaram o caso quando $k = 2$, [BGM10].

Em dimensão 2, o volume de $\vec{v}$ dado na equação 1.3 se reduz a

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) = \int_{\mathbb{S}^2} \sqrt{1+\gamma^2+\delta^2}\,\nu, \tag{3.1}$$

onde $\gamma = g(\nabla_{\vec{v}}\vec{v}, \vec{v}^{\perp})$ e $\delta = g(\nabla_{v^{\perp}}\vec{v}^{\perp}, \vec{v})$ são as curvaturas geodésicas associadas a $\vec{v}$ e $\vec{v}^{\perp}$, respectivamente, e ν é a forma volume.

Sejam $\mathbb{S}^1_\alpha$ o paralelo de $\mathbb{S}^2$ na latitude $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e S^1_β o meridiano de $\mathbb{S}^2$ na longitude $\beta \in (0, 2\pi)$.

Definimos formalmente uma família de campos vetoriais unitários que atigem o volume dado pelo Teorema.

Definição. *Seja k um inteiro positivo e defina:*

1. *$\vec{v}_1(p) = \vec{e}_2(p)$, se $k = 1$;*

2. $\vec{v}_k(p) = \cos\theta(p)\vec{e}_1(p) + \sin\theta(p)\vec{e}_2(p)$, *se* $k > 1$, *onde* $\theta : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \to \mathbb{R}$ *é dado por* $\theta(\alpha, \beta) = (k-1)\beta + \theta_0$, *(onde* θ_0 *é uma constante), neste sentido,*

$$\theta_1(p) = \frac{k-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ and } \theta_2(p) = 0.$$

Perceba que θ varia constantemente ao longo do paralelo $x^2 + y^2 = \cos\alpha$, com $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ constante, e isto inclui o caso em que $k = 1$. Relembre que $k = 2$ tem uma singularidade (veja [BGM10]).

Se usarmos coordenadas esféricas (α, β) tome $p = (\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha)$, podemos dizer que o vetor $\vec{v}_k$ gira em torno do ponto P com uma velocidade de rotação constante ao longo do paralelo α. Mais ainda, $\vec{v}_k$ dá exatamente $k-1$ voltas quando passa pelo paralelo α, com respeito ao referencial $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, e dá k voltas com respeito a um referencial polar fixo, neste caso, $\theta_1(p) = \frac{k-1}{\cos\alpha}$. A figura **??** fornece uma representação sobre o comportamento de $\vec{v}_k$s e na figura **??** temos um campo vetorial unitário com índice de singularidade $k = 4$.

Proposição. *Seja* $\vec{v}_k$ *um campo vetorial unitário sobre* $M = \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm P\}$. *Então,*

$$\mathrm{vol}(\vec{v}_k) = \pi L(\varepsilon_k),$$

se, e somente se, $\vec{v}_k$ *satisfaz a definição anterior.*

Proof. Usando o Lema anterior, temos

$$\mathrm{vol}(\vec{v}_k) = \int_M \sqrt{1 + (\tan\alpha + \theta_1)^2 + \theta_2^2}\,\nu.$$

Assumindo $\theta_1 = \frac{k-1}{\cos\alpha}$ e $\theta_2 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\vec{v}_k) &= \int_M \sqrt{1 + \left(\tan\alpha + \frac{k-1}{\cos\alpha}\right)^2}\,\nu \\
&= \int_M \sqrt{1 + \left(\frac{\sin\alpha + k - 1}{\cos\alpha}\right)^2}\,\nu \\
&= \int_M \frac{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}}{\cos\alpha}\,\nu \\
&= \lim_{\alpha_0 \to -\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}}{\cos\alpha} \cos\alpha\, d\beta\, d\alpha \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}\, d\alpha.
\end{aligned}$$

Tomando $t = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\vec{v}_k) &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(k-2)^2 + 4(k-1)\sin^2 t}\, dt \\
&= \pi L(\varepsilon_k).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\mathrm{vol}(\vec{v}_k) = \pi L(\varepsilon_k)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\vec{v}_k) &= \int \sqrt{1 + (\tan\alpha + \theta_1)^2 + \theta_2^2}\,\nu \\ &\geq \int \sqrt{1 + (\tan\alpha + \theta_1)^2}\,\nu \\ &\geq \int |\cos\varphi + \sin\varphi(\tan\alpha + \theta_1)|\,\nu \\ &= \pi L(\varepsilon_k),\end{aligned}$$

então $\theta_2 = 0$ e $\cos\varphi(\tan\alpha + \theta_1) = \sin\varphi$, onde $\varphi \in \mathbb{R}$. Concluímos que $\theta_1 = \tan\varphi - \tan\alpha$ and $\varphi = \varphi(\alpha) = \arctan\left(\tan\alpha + \frac{k-1}{\cos\alpha}\right)$, o que implica $\theta_1 = \frac{k-1}{\cos\alpha}$. □

Seguiremos passos muito parecidos com os apresentados na prova do principal Teorema do artigo [BCJ08].

Lema. *Seja $\theta \in [0, \pi/2]$ um ângulo orientado de e_1 a $\vec{v}$. Se $\vec{v} = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$ e $\vec{v}^\perp = (-\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$, então*

$$1 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 + (\tan\alpha + \theta_1)^2 + \theta_2^2,$$

onde $\theta_1 = d\theta(e_1)$, $\theta_2 = d\theta(e_2)$.

Proof. Escrevemos γ e δ da seguinte maneira:

$$\gamma = A + B + C + D \quad \text{and} \quad \delta = A' + B' + C' + D',$$

com

$$A = g\left(\nabla_{(\cos\theta)e_1}(\cos\theta)e_1, \vec{v}^\perp\right), \qquad B = g\left(\nabla_{(\sin\theta)e_2}(\cos\theta)e_1, \vec{v}^\perp\right),$$
$$C = g\left(\nabla_{(\cos\theta)e_1}(\sin\theta)e_2, \vec{v}^\perp\right), \qquad D = g\left(\nabla_{(\sin\theta)e_2}(\sin\theta)e_2, \vec{v}^\perp\right)$$

e

$$A' = g\left(\nabla_{(-\sin\theta)e_1}(-\sin\theta)e_1, \vec{v}\right), \qquad B' = g\left(\nabla_{(\cos\theta)e_2}(-\sin\theta)e_1, \vec{v}\right)$$
$$C' = g\left(\nabla_{(-\sin\theta)e_1}(\cos\theta)e_2, \vec{v}\right), \qquad D' = g\left(\nabla_{(\cos\theta)e_2}(\cos\theta)e_2, \vec{v}\right).$$

Observe que $\tan\alpha = g\big(\nabla_{e_1}e_1, e_2\big)$ e $\nabla_{e_2}e_2 = 0$. De fato, defina $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ como $\psi(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\sin\beta, \cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha)$, onde $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \big(0, 2\pi\big) := U \subset \mathbb{R}^2$. Neste caso, $\psi_\alpha = e_2$, $\psi_\beta = e_1\cos(\alpha)$ e $\psi_{\alpha\alpha} = \nabla_{e_2}e_2$. Portanto, $\tan\alpha = g\big(\nabla_{e_1}e_1, e_2\big)$ e, uma vez que e_2 é tangente aos meridianos, $\nabla_{e_2}e_2 = 0$ em $\mathbb{S}^2$.

Por um cálculo direto,

$$\gamma = \cos\theta(\tan\alpha + \theta_1) + (\sin\theta)\theta_2, \tag{3.2}$$

$$\delta = \sin\theta(\tan\alpha + \theta_1) - (\cos\theta)\theta_2. \tag{3.3}$$

A partir das equações (3.2) e (3.3), temos

$$\begin{aligned}1 + \gamma^2 + \delta^2 &= 1 + (\cos\theta(\tan\alpha + \theta_1) + (\sin\theta)\theta_2)^2 + (\sin\theta(\tan\alpha + \theta_1) - (\cos\theta)\theta_2)^2 \\ &= 1 + \cos^2\theta(\tan\alpha + \theta_1)^2 + (\sin\theta)^2\theta_2^2 + \sin^2\theta(\tan\alpha + \theta_1)^2 + (\cos^2\theta)\theta_2^2 \\ &= 1 + (\tan\alpha + \theta_1)^2 + \theta_2^2.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$1 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 + (\tan\alpha + \theta_1)^2 + \theta_2^2.$$

□

Este Lema nos permite reescrever o funcional volume como uma integral dependendo da latitude α e das derivadas de θ

$$\operatorname{vol}(\vec{v}) = \int_M \sqrt{1 + (\tan\alpha + \theta_1)^2 + \theta_2^2}\,\nu. \tag{3.4}$$

Demonstração do Teorema. Dados a, b, $\varphi \in \mathbb{R}$ temos a desigualdade geral $\sqrt{a^2+b^2} \geq |a\cos\varphi + b\sin\varphi|$, que implica

$$\sqrt{1 + (\tan\alpha + \theta_1)^2} \geq |\cos\varphi + \sin\varphi(\tan(\alpha) + \theta_1)|\,.$$

Assim,

$$\operatorname{vol}(\vec{v}) \geq \int_M (\cos\varphi + \sin\varphi|\tan\alpha + \theta_1|)\,\nu. \tag{3.5}$$

Esta desigualdade é válida para todo φ tal que $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, portanto podemos usar φ obtido na proposição anterior:

$$\varphi_k(\alpha) = \arctan\left(\tan\alpha + \frac{k-1}{\cos\alpha}\right);\ \text{onde}\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.6}$$

Recolocando esta condição na equação (3.5) obtemos

$$\operatorname{vol}(\vec{v}) \geq \int_M \left(\cos\left(\varphi_k(\alpha)\right) + \sin\left(\varphi_k(\alpha)\right)|\tan\alpha + \theta_1|\right)\nu. \tag{3.7}$$

Por outro lado, 3.6 nos dá

$$\cos\left(\varphi_k(\alpha)\right) = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}}$$

e

$$\sin\left(\varphi_k(\alpha)\right) = \frac{k - 1 + \sin\alpha}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}}.$$

Assim, a segunda parte da desigualdade (3.7) é igual a

$$\lim_{\alpha_0 \to -\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} + \frac{k-1+\sin\alpha}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} |\tan\alpha + \theta_1| \right) \cos\alpha\, d\beta d\alpha. \tag{3.8}$$

Da forma conexãp de Cartan ω_{12} é dado

$$\omega_{12} = \delta\omega_1 - \gamma\omega_2,$$

onde $\{\omega_1, \omega_2\}$ é a base dual de $\{\vec{v}, \vec{v}^\perp\}$. Se $i : \mathbb{S}^1_\alpha \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação inclusão, e $e_1 = \sin\theta\vec{v}^\perp + \cos\theta\vec{v}$, então

$$i^*(\omega_{12})(e_1) = \delta\sin\theta - \gamma\cos\theta,$$

onde i^* é o pullback de i.

Das equações (3.2) e (3.3), temos

$$\begin{aligned} i^*(\omega_{12})(e_1) &= \sin\theta\left[\sin\theta\big(\tan\alpha + \theta_1\big) - \cos\theta(\theta_2)\right] - \cos\theta\left[\cos\theta\big(\tan\alpha + \theta_1\big) + \sin\theta(\theta_2)\right] \\ &= \tan\alpha + \theta_1. \end{aligned}$$

Assim, de (3.8)

$$\operatorname{vol}(\vec{v}) \geq \lim_{\alpha_0 \to -\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\alpha + \big((k-1) + \sin\alpha\big) i^*(\omega_{12})(e_1)}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} \right) \cos\alpha\, d\beta\, d\alpha. \tag{3.9}$$

Para calcular a integral de $i^*\omega_{12}$ sobre o paralelo de $\mathbb{S}^2$ em uma latitude constante α, seguimos os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 1.1 de [BCJ08].

$$\mathbb{S}^2_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z \geq \sin\alpha\}\ , \alpha_0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

A 2-form $d\omega_{12}$ é dada por

$$d\omega_{12} = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Uma aplicação simples do Teorema de Stokes implica que

$$\int_{\mathbb{S}^2_\alpha} d\omega_{12} = 2\pi\big(I_N(\vec{v})\big) - \int_{\mathbb{S}^1_\alpha} i^*\omega_{12}.$$

Suponha que $I_N(\vec{v}) = \sup\{I_N(\vec{v}), I_S(\vec{v})\} = k$. Obtmeos

$$\int_{\mathbb{S}^1_\alpha} i^*\omega_{12} = 2\pi k - \mathrm{Area}\big(\mathbb{S}^2_\alpha\big) = 2\pi k - 2\pi\big(1 - \sin\alpha\big) = 2\pi\big(k - 1 + \sin\alpha\big). \tag{3.10}$$

Da desigualdade (3.9),

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\vec{v}) &\geq \lim_{\alpha_0 \to -\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\alpha + \big((k-1) + \sin\alpha\big) i^*(\omega_{12})(e_1)}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} \right) \cos\alpha \, d\beta \, d\alpha \\
&= \lim_{\alpha_0 \to -\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} \int_0^{2\pi} \cos\alpha \, d\beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\big((k-1) + \sin\alpha\big)}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} \int_{\mathbb{S}^1_\alpha} i^*\omega_{12} \right) d\alpha \\
&= \lim_{\alpha_0 \to -\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\pi\cos^2\alpha}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} + \frac{2\pi\big((k-1) + \sin\alpha\big)^2}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} \right) d\alpha,
\end{aligned}$$

onde a última inequação é obtida através de (3.10). Portanto,

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq 2\pi \lim_{\alpha_0 \to -\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\alpha + \big((k-1) + \sin\alpha\big)^2}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha}} \right) d\alpha.$$

Analogamente,

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq 2\pi \lim_{\alpha_0 \to -\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1 + (k-1)^2 + 2(k-1)\sin\alpha} \right) d\alpha.$$

Uma identidade trigonométrica nos dá

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(k-2)^2 + 4(k-1)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} d\alpha.$$

Assuma que $t = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$, então

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(k-2)^2 + 4(k-1)\sin^2 t} dt. \tag{3.11}$$

Considere $k > 2$ e uma elipse ε_k dada por

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{(k-2)^2} = 1.$$

Seja μ a parametrização para ε_k definida por $\mu(t) = (k\cos t, (k-2)\sin t)$. Seu comprimento é

$$L(\varepsilon_k) = 4\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{(k-2)^2 + 4(k-1)\sin^2 t}\right) dt. \tag{3.12}$$

Portanto,

$$\mathrm{vol}(\vec{v}) \geq \pi L(\varepsilon_k).$$

□

Bibliography

[BCJ08] F. G. B. Brito, P. M. Chacón e D. L. Johnson. Unit field on punctured spheres. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 136(1):147–157, 2008. 4, 15, 17

[BG18] F. Brito e I. Gonçalves. Degree of the gauss map and curvature integrals for closed hypersurfaces. *Results Math.*, 73:70, 2018. 7

[BGM10] V. Borrelli e O. Gil-Medrano. Area minimizing vector fields on round 2-spheres. *Journal fur Reine und Angewandte Mathematik, Crelle's Journal*, 640:85–99, 2010. 4, 13, 14

[Bri00] F. G. B. Brito. Total bending of flows with mean curvature correction. *Diff. Geom. and its App.*, 12:157–163, 2000. 2, 3, 6

[BW00] F. Brito e P. Walczak. On the energy of unit vector fields with isolated singularities. *Ann. Math. Polon.*, 73:269–274, 2000. 5

[Cha00] P. M. Chacón. *Sobre a Energia e Energia Corrigida de Campos Unitários e Distribuições. O volume de campos unitários.* Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Dezembro 2000. 10

[Faw09] A. Fawaz. Total curvature and volume of foliations on the sphere $\mathbb{S}^2$. *Central European Journal of Mathematics*, 7(4):660–669, 2009. 4

[FBBN04] P. M. Chacón F. B. Brito e A. M. Naveira. On the volume of unit vector fields on spaces of constant sectional curvature. *Comment Math. Helv.*, 79:300–316, 2004. 10

[FGBBG19] A. o. Gomes F. G. B. Brito e I. Gonçalves. Poincaré index and the volume functional of unit vector fields on punctured spheres. *Manuscripta Mathematica*, 162:487–500, 2019. 4

[GK02] S. Gudmundsson e E. Kappos. On the geometry of tangent bundles. *Expo. Math.*, 20:1–41, 2002. 1

[GM01] O. Gil-Medrano. Relashionship between volume and energy if vector fields. *Differential Geometry and its Applications*, 15:137–152, 2001. 1

[GZ86] H. Gluck e W. Ziller. On the volume of a unit vector field on the three-sphere. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 61:177–192, 1986. 3

[Joh88] D. L. Johnson. Volumes of flows. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 104:923–932, 1988. 4

[Mil65] J. Milnor. *Topology from a differentiable viewpoint.* University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965. 5

[Rez92] A. G. Reznikov. Lower bounds on volumes of vector fields. *Arch. Math.*, 58:509–513, 1992. 3, 9

[Sas58] S. Sasaki. On the differential geometry of tangent bundles of riemannjan manifolds. *Tohoku Math. J.*, 14:407–417, 1958. 1

[VBGM03] F. Brito V. Borrelli e O. Gil-Medrano. The infimum of the energy of unit vector fields on odd-dimensional spheres. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 23:129–140, 2003. 3, 5

[Wie95] G. Wiegmink. Total bending of vector fields on riemannian manifolds. *Math. Ann.*, 303:325–344, 1995. 2

[Woo97] C. M. Wood. On the energy of a unit vector field. *Geom. Dedicata*, 64:319–330, 1997. 2, 6

Index