Identidades polinomiais da álgebra de octônios

Fernando Henry Meirelles

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Matemática

Programa: Doutorado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ivan Shestakov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES/FAPESP

São Paulo, maio de 2014

Identidades polinomiais da álgebra de octônios

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 06/06/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ivan Chestakov - IME-USP
- Prof^{a}. Dr^{a}. Lucia Satie Ikemoto Murakami - IME-USP
- Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov - UNICAMP
- Prof^{a}. Dr^{a}. Irina Sviridova - UnB
- Prof. Dr. Alexandr Kornev - UFABC

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer à Liz Alexandrita por me ajudar na digitação e revisão gramatical desta tese, sem a qual não teria terminado a tempo, à minha família e meus amigos que sempre me incentivaram e estiveram comigo apesar da minha ausência. Acima de tudo, eu gostaria de agradecer ao Professor Ivan P. Shestakov, por me introduzir nesta interessante área da matemática, e não apenas por sua ótima orientação, sob a qual este trabalho foi feito, mas também por sua amizade, paciência e dedicação em me orientar ao longo desses anos.

Agradeço à FAPESP (processo número: 2009/51920-7), e à CAPES por seu apoio financeiro.

Resumo

Henry M., F. **Identidades polinomiais da álgebra de octônios**. 2014. 91 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Neste trabalho encontramos bases para as identidades $T_{\mathbb{Z}_2^3}$ e $T_{\mathbb{Z}_2^2}$ graduadas dos octônios. Utilizando a base obtida no $T_{\mathbb{Z}_2^2}$, re-obtivemos uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das matrizes dois por dois. Também obtivemos as identidades simultaneamente fracas e antissimétricas ou *skew* dos octônios na categorias de álgebras alternativas. Também obtivemos as identidades antissimétricas da álgebra de Malcev simples de dimensão sete, $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$. Para ambos os casos estudados de identidades "não graduadas dos octônios", mostramos positivamente a conjectura de Shestakov-Zhukavets: "O T-ideal de identidades dos octônios coincide com o da álgebra alternativa quadrática".

Palavras-chave: Identidade Polinomial, Álgebra Alternativa, Álgebra de Malcev, Superálgebra.

Abstract

Henry M., F. **Polynomial identities of the octonion algebra**. 2014. 91 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

In this work we find bases for the $T_{\mathbb{Z}_2^3}$ and $T_{\mathbb{Z}_2^2}$ graded identities of the octonion algebra. Using the base obtained in the $T_{\mathbb{Z}_2^2}$ case, we re-obtain a basis for the $\mathbb{Z}_2$-graded identities of two by two matrices. We also obtained the simultaneously skew and weak identities of the octonions in the category of alternative algebras. In addition we find a basis of identities for the simple Malcev algebra of dimension seven, $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$. For both skew cases of identities studied we positively show the Shestakov-Zhukavets conjecture: "The T-ideal of identities of the octonions coincides with that of the quadratic alternative algebra."

Keywords: Polynomial Identity, Alternative Algebra, Malcev Algebra, Superalgebra.

Sumário

Lista de Símbolos

(A, α) Processo de Cayley-Dickson da álgebra A determinado por α, página 13

(a, b, c) Associador dos elementos a, b e c, página 7

(R, L) Par alternativo-Malcev, página 48

$[a, b]$ Comutador dos elementos a e b, página 7

$[a_1, \ldots, a_n]$ Comutador longo dos elementos $a_1, \ldots, a_n$, página 7

$[x, y]_s$ Supercomutador de x e y, página 47

$[x_1, \ldots, x_n]_s$ Supercomutador longo de $x_1, \ldots, x_n$, página 47

$|\ |$ Função que de a componente homogênea dos elementos de uma álgebra graduada, no caso de $\mathbb{Z}_2$ é chamada de função paridade, página 18

deg Função grau, página 10

$\deg_h$ Função grau relativo à componente homogênea h, página 19

$\deg_x$ Função grau relativo à variável x, página 10

$\deg_Y$ Função grau relativo ao conjunto Y, página 10

Im Imagem de um homomorfismo, página 9

$\mathrm{J}(a, b, c)$ Jacobiano dos elementos a, b e c, página 8

ker Núcleo de um homomorfismo, página 9

$\mathrm{M}(x, y, z)$ Polinômio de Malcev nos elemento x, y e z, página 8

$\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma)$ Álgebra de Cayley-Dickson, ou octônios, página 14

$\mathbf{K}(\mu)$ Primeira álgebra de composição, sem considerar, possivelmente, o corpo, página 14

$\mathbf{Q}(\mu, \beta)$ Álgebra de quatérnios generalizada, página 14

$\mathscr{V}_s$ Supervariedade de álgebras dada pela variedade $\mathscr{V}$, página 44

$\langle I \rangle^T$ T-ideal gerado pelo conjunto de polinômios I, página 11

$\mathbb{O}$ Álgebra de Cayley-Dickson, ou octônios, página 14

$(-1)^{\sigma_{odd}}$ sinal da parte ímpar de σ, página 45

$\mathrm{Skew}(f)$ Polarizador do polinômio f, página 47

$\mathrm{Var}(I)$ Variedade de álgebras definida pelo conjunto de polinômios I, página 11

$\wp(X)$ O conjunto das partes ou potências de X, página 44

$\wp_\omega(X)$ O conjunto das partes finitas de X, página 44

A/I Álgebra quociente de A pelo ideal I, página 9

E Álgebra de Grassmann, página 44

$E(A)$ Envolvente de Grassman de superálgebra A, página 44

e_I Elemento da base canônica de E, a álgebra de Grassmann, página 44

f_s Super identidade determinada por f ou a f-superidentidade, página 46

$I \lhd A$ I é um ideal da (super)álgebra A, página 8

$I \lhd_d A$ I é um ideal à direita da (super)álgebra A, página 8

$I \lhd_e A$ I é um ideal à esquerda da (super)álgebra A, página 8

$K(A)$ Centro comutativo da (super)álgebra A, página 8

L_n Conjunto dos monômios multilinear de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, página 45

$M_n(R)$ Álgebra de matrizes de ordem n sobre o anel R, página 8

$N(A)$ Centro associativo da (super)álgebra A, página 8

P_n Conjunto dos monômios ordenados (ou arranjos de parênteses) de grau n, página 45

PL_n Conjunto dos polinômios multilinear de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, página 45

R-álgebra Álgebra sobre o anel R, página 7

$R\{X\}$ Polinômios não associativos em X sobre R, página 10

$R\{X\}^{\#}$ Polinômios unitários não associativos em X sobre R, página 10

$R_G\{X\}$ Anel dos superpolinômios não associativos G-graduados sobre R, página 18

$R_G\{X^{\#}\}$ Anel unitário dos polinômios não associativos G-graduados sobre R, página 18

$T(A)$ Ideal de todas as identidades polinomiais da (super)álgebra A, página 11

$T_G(A)$ Ideal das identidades G-graduadas da álgebra A, página 19

$V[X]$ As palavras não associativas no conjunto X, página 9

$V[X]^{\#}$ Monoide livremente gerado por X, página 10

$W(R, L)$ Ideal verbal do par alternativo-Malcev (R, L), página 48

$x \odot_s y$ Superproduto de Jordan de x e y, página 47

X_G Conjunto das variáveis X após "pendurarmos" os elementos do grupo G, página 18

$Z(A)$ Centro da (super)álgebra A, página 8

super-$\mathscr{V}$ Supervariedade de álgebras dada pela variedade $\mathscr{V}$, página 44

TQ Álgebra, superálgebra, par ou superpar, quadrático sem traço, página 50

$B^{\perp}$ Componente ortogonal à B, página 14

Capítulo 1

Introdução

Em 1950, Specht [Spe50] formulou o seguinte problema para álgebras associativas sobre corpos de característica zero: "Toda variedade de álgebras associativas é finitamente gerada?" Essa pergunta, que ficou conhecida como *Problema de Specht*, passou a ser uma das questões centrais da Teoria de Identidades Polinomiais e foi finalmente respondida, de modo afirmativo, por Kemer em 1987 (vide [Kem87], [Kem91] ou, no mais recente [KBR05]). Esse problema foi levantado para outros tipos de álgebras, como álgebras de Lie e de Jordan, e sobre corpos de característica positiva. Contra-exemplos foram encontrados por Vaughan-Lee [VL70] em 1970, para álgebras de Lie sobre um corpo de característica dois e por Drensky em 1974 [Dre74], para álgebras de Lie sobre corpos de qualquer característica positiva. Para as álgebras de Lie em característica zero, Iltyakov mostrou que esse resultado é verdadeiro no caso de dimensão finita [Ilt92]. Vais e Zelmanov [VZ89] provaram sua validade para álgebras de Jordan especiais finitamente geradas de característica zero. Iltyakov em [Ilt91] mostrou que as álgebras alternativas e finitamente geradas sobre corpos de característica zero, possuem bases finitas para suas identidades polinomiais. Recordamos que ainda no caso de álgebras associativas sobre corpos de característica positiva, o problema de Specht foi resolvido em negativo por Grishin [Gri99], Shchigolev [Shc99] e Belov [KB99].

No entanto, embora sejam conhecidos esses resultados gerais que garantem a existência de bases finitas para o ideal das identidades polinomiais de determinadas álgebras, a tarefa de encontrar bases explícitas para álgebras concretas costuma ser uma questão difícil. Se não acreditar, observe o que foi encontrado em quatro décadas, e o que conhecemos com a classe de álgebra considerada a mais fácil, matrizes. Para matrizes 2×2, sobre um corpo de característica zero, Razmyslov [Raz73] encontrou uma base de nove identidades, posteriormente Drensky [Dre81] encontrou um base minimal para as identidades composta por apenas a identidade *standard* de grau quatro e a identidade de Hall. Koshlukov [Kos97] encontrou bases finitas para o caso de corpos infinitos de característica positiva diferente de dois, Maltsev e Kuzmin [MK78] exibiram uma base de duas identidades para as matrizes sobre corpos finitos cuja característica difere de dois. Além disso, Genov [Gen81] encontrou uma base finita para as identidades das matrizes quadradas de ordem três sobre corpos finitos, e Genov e Siderov [GS82a, GS82b] encontraram uma base finita para as matrizes de ordem quatro sobre corpos finitos. Essas são as únicas bases conhecidas para a álgebra das matrizes n por n. Ainda não se sabe quais serão as identidades polinomiais satisfeitas pela álgebra das matrizes de ordem três sobre corpos infinitos, e as dificuldades, mesmo restringindo-se ao caso de característica zero, parecem insuperáveis por enquanto.

São conhecidas bases para a álgebra de Grassmann ou álgebra exterior E, e para o quadrado tensorial da álgebra de Grassmann $E \otimes E$, devido à Latyshev [Lat63] (e independentemente Krakowski e Regev [KR73]) e a Popov [Pop82], respectivamente. A base das identidades polinomiais para as matrizes triangulares superiores foi encontrada por Maltsev [Mal71], no caso de característica zero, e por vários autores no caso de um corpo qualquer. Alguns desses resultados podem ser encontrados nos livros [Dre00, KBR05]. No caso de álgebras associativas, essas são praticamente todas as álgebras cujas bases de identidades são conhecidas até o momento.

Considerando-se outras classes de álgebras, recordamos a pesquisa realizada por A. Iltyakov. Em [Ilt85], ele mostrou que a álgebra de Jordan de uma forma bilinear, simétrica e não degenerada, em um espaço de dimensão finita (em característica zero) satisfaz a propriedade da base finita. Os métodos de Iltyakov foram desenvolvidos e aperfeiçoados por S. Vasilovsky em [Vas89b, Vas89a, Vas96]. Mais precisamente, Vasilovsky exibiu uma base finita das identidades satisfeitas pela álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(K)$ das matrizes de traço zero 2×2 sobre um corpo infinito de característica diferente de dois [Vas89b]; para a álgebra de Jordan de uma forma bilinear em um espaço vetorial qualquer, com as mesmas condições sobre o corpo [Vas89a] e para a superálgebras de Jordan de uma forma bilinear, em característica zero [Vas96].

Sendo difícil o problema de encontrar uma base finita explícita, esperamos que agora o leitor acredite, para as identidades polinomiais de uma álgebra, estudam-se outros tipos de identidades polinomiais tais como identidades fracas, com traço, graduadas, com involução etc. Esses outros tipos de identidades polinomiais fornecem várias informações sobre as identidades ordinárias. Assim, por exemplo, as identidades com traço da álgebra $M_n(K)$ sobre um corpo de característica zero foram descritas por Procesi [Pro76] e por Razmyslov [Raz74]. O interesse pelo estudo de identidades graduadas em álgebras sobre um corpo de característica zero é justificado pela relação entre as identidades polinomiais graduadas e as ordinárias, que é um dos componentes essenciais da descrição da estrutura dos T-ideais (a teoria desenvolvida por Kemer), veja por exemplo o livro [Kem91] ou o livro [KBR05].

Além disso, sabe-se que se duas álgebra graduadas possuem as mesmas identidades graduadas, então com relação às identidades ordinárias elas são PI equivalentes. Citemos alguns resultados sobre identidades graduadas.

Di Vincenzo [DV92] encontrou uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$- graduadas das álgebras $M_2(K)$ e $M_{1,1}(G)$, onde K é um corpo de característica zero e G é a álgebra de Grassmann sobre K. Em [KdA02], estes resultados foram generalizados para corpos infinitos de característica diferente de dois. Vasilovsky [Vas99] generalizou o resultado de Di Vincenzo e exibiu uma base finita para as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra $M_n(K)$, onde K é um corpo de característica zero. Em [Aze02] foi provado que esse resultado é válido para corpos infinitos de qualquer característica. Di Vincenzo e da Silva encontraram as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas, para todas as $\mathbb{Z}_2$ graduações possíveis (onde a base canônica é composta por elementos homogêneos), de G sobre um corpo de característica zero em [DVdS09]. Posteriormente esse resultado foi generalizado para um corpo infinito de característica diferente de dois por Centrone em [Cen11]. Para matrizes triangulares superiores, Valenti [Val02] descreveu uma base para o caso 2×2 e corpo de característica zero. Em seguida, Koshlukov e Valenti [KV03] encontraram uma base para matrizes de ordem n sobre corpos infinitos.

Recentemente, Sviridova provou o análogo do teorema de Kemer para álgebras graduadas sobre um grupo abeliano finito em [Svi11]. O mesmo resultado foi provado independentemente para grupos finitos por Aljadeff e Kanel-Belov em [AKB10]. Logo após, Sviridova provou a propriedade de Specht para álgebras com involução em [Svi13]. Sendo esses últimos três resultados em característica zero. Indo na direção oposta, Belov mostrou que, uma álgebra finitamente gerada e de característica positiva, tem a propriedade de Specht em [KB10]. Além de tudo, ele mostrou que podemos generalizar o resultado para álgebras sobre um anel Noetheriano comutativo! Mas como muitos já sabem "rapadura é doce mas não é mole não" e o artigo tinha um número não desprezível de buracos e por isso, numa série de artigos Belov-Kanel, Rowen e Vishne [KBRV10, KBRV12b, KBRV13a, KBRV13b] tapam os buracos, ou no condensado deles [KBRV12a].

Até o presente momento falamos apenas sobre identidades polinomiais, ainda temos que mencionar a outra palavra do título da tese proposta, *octônios*.

O primeiro registro que temos dos octônios é numa carta de Graves à Hamilton datada de 26 de dezembro de 1843 em resposta à carta de Hamilton sobre os quatérnios. Em janeiro de 1844 Graves continuou à escrever sobre os octônios (que ele chamava de "octaves") para Hamilton, ele mostrou que os octônios formam uma álgebra normada com divisão e começou a formular uma teoria sobre álgebras normadas com divisão a partir do que veio à ser chamado posteriormente do processo de Cayley-Dickson. Entretanto os "16-ónios", como Graves descobriu, não formam uma álgebra com divisão. Hamilton apontou para Graves que os octônios não eram associativos, e foi justamente nessa época que ele formulou esse conceito, o que nos leva a crer que os octônios podem ter tido um papel importante em esclarecer esse conceito.

Infelizmente Graves acabou não publicando sobre os seus octaves e no meio tempo Cayley acabou publicando antes sobre os octônios, [Cay45]. Posteriormente Graves colocou numa nota de um artigo um comentário sobre os octônios onde ele descrevia a sua descoberta, Hamilton apoiou a causa de Graves, mas já era tarde os octônios já tinham se afirmado como os números de Cayley.

Sem dúvidas os octônios são de suma importância na matemática, vamos citar agora alguns pequenos fatos. Se A é uma álgebra alternativa simples então ela é associativa ou é uma álgebra de octônios sobre o seu centro [Kle53]. Existem apenas quatro álgebras normadas com divisão e dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ a maior de todas sendo os octônios clássicos! Se substituirmos normadas por alternativas também temos apenas as quatro álgebras, à saber, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$, respectivamente os reais, complexos, quatérnios e octônios e eles tem dimensão 1, 2, 4 e 8 respectivamente. Curiosamente toda álgebra com divisão e dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ só pode ter essas dimensões! Esses fatos podem ser encontrados em [Hur89] e [Zor30] para os dois primeiros respectivamente em [Sch95], para um tratamento mais moderno, enquanto o último pode ser encontrado em [BM58].

Quanto às suas aplicações temos as álgebras de Lie excepcionais, todas são algum "truque mirabolante" dos octônios, e vale mencionar que a única álgebra de Jordan simples excepcional são as matrizes hermetianas três por três com entradas nos octônios! Nesse último século foram encontradas várias aplicações dos octônios em física ou os octônios esclareceram fenômenos, que até então, eram inexplicáveis. Algumas áreas de física que já sentiram a sua presença, como por exemplo teoria das cordas, spinors e o espaço-tempo de Minkowski. Além disso aplicações para outras áreas da matemática foram encontradas, principalmente geometria e topologia. É bom lembrar que o IME recebeu um "octonionista". O Sir Michael Atiyah fez uma palestra no IME-USP 03/12/2010 *"From Quantum Physics to Number Theory - a geometer explores the universe"* boa parte dedicou à explicação da importância de octônios em matemática e física.

Infelizmente os octônios não ficaram muito famosos, eles estão apenas agora, muito lentamente, a tomar o seu devido lugar. John Baez aponta para possíveis motivos disso, além de fazer um dossiê de suas aparições terroristas em [Bae02, Bae05], e vale também mencionar [CS03].

Agora que todos já sabem que os octônios são extremamente importantes, para justificar o estudo de suas identidades polinomiais é só mais um passinho. Shestakov e Zaicev provaram em [SZ11] que duas álgebras simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero são isomorfas se, e somente se, possuem as mesmas identidades polinomiais ordinárias. Ainda mais, as identidades dos octônios estão extremamente relacionadas com a estrutura da álgebra alternativa livre e o seu radical, veja, por exemplo [She75, ZSSS82].

A questão da base de identidades da álgebra dos octônios foi formulada pela primeira vez por Zhevlakov em [DN06, problema 1.55], veja também [ZSSS82, p.279]. Para o caso de um corpo finito, uma base explícita para as identidades dos octônios foi encontrada por Isaev em [Isa84]. Iltyakov em [Ilt85] provou que a álgebra dos octônios sobre um corpo de caraterística zero possui a propriedade de Specht, porém essa não foi uma prova "construtiva" e um conjunto de geradores não foi mostrado. Encontrar uma base explícita para as identidades polinomiais dos octônios ainda é um problema em aberto.

Identidades de grau pequeno foram lidadas por Racine em [Rac88], para grau menor ou igual à cinco, e por Hentzel e Peresi em [HP97] para grau menor ou igual à seis. Shestakov e Zhukavets encontraram as identidades dos octônios anti-simétricas, ou *skew*, em [SZ09]. Recentemente Shestakov em [She10] encontrou uma base das identidades dos octônios módulo o T-ideal dos associadores, isto é, se denotarmos por I o T-ideal dos octônios e A é o T-ideal dos associadores, foi mostrada uma base para $(I + A)/A$ dentro dos polinômios associativos.

1.1 Objetivos

O nosso principal objetivo é pesquisar identidades polinomiais satisfeitas pela álgebra de octônios. Assumindo que a introdução fez o seu papel corretamente, o leitor deve imaginar que esse é um problema bem difícil. Portanto a estratégia utilizada foi fazer uma "escada" de alguns dos tipos de identidades polinomiais, que nos octônios, tem um grau crescente de dificuldade para encontrar bases cada vez mais gerais. Especificamente consideramos identidades $\mathbb{Z}_2^3$-graduadas, $\mathbb{Z}_2^2$-graduadas, anti-simétricas e fracas simultaneamente, fracas, $\mathbb{Z}_2$-graduadas e finalmente ordinárias.

Infelizmente não concluímos o nosso objetivos de pesquisa. Entretanto somos brasileiros e não desistimos nunca, acreditamos que agora é apenas uma questão de tempo para cumprir a nossa meta!

Vale ressaltar que o problema da base de identidades de octônios é um problema bem conhecido, importante e bastante difícil. Portanto, qualquer passo mais ou menos notável na direção da sua solução atrai imediatamente a atenção dos especialistas. Antes de considerar o caso geral, nós tentaremos encontrar umas bases de certas réplicas do T-ideal de identidades de octônios, por exemplo, uma base para a réplica associativa ou solúvel de índice dois.

1.2 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

- Uma base para o $T_{\mathbb{Z}_2^2}$-ideal de identidades dos octônios sobre uma corpo infinito de característica diferente de dois.

- O T-ideal em uma variável ímpar para as TQ superálgebras livres, em um gerador ímpar também e com isso obtemos as identidades simultaneamente fracas e anti-simétrica dos octônios. Veja o Capítulo 4 para a definição de TQ álgebras e superálgebras.

1.3 Organização do Trabalho

Indo contra uma tradição milenar, nós não vamos começar a presente proposta de tese com um capítulo introdutório como "todos os prerrequisitos" que o candidato julga estar além do conhecimento de um leitor hipotético. Ao invés disso no Capítulo 2, vamos listar os conhecimentos que julgamos de importância fundamental para a compreensão do texto, os quais sem estar muito bem familiarizado é um fator impeditivo para a leitura. Também apontamos bons livros nesse capítulo para o seu estudo, e caso o leitor necessite de mais estudo recomendamos um livro muito melhor para instigá-lo a conhecer essa área.

Vamos dedicar a primeira secção de cada capítulo com os conhecimentos "extras" necessários para a compreensão do manuscrito para o tal leitor hipotético, porém não necessitam de familiaridade para compreender o texto. O objetivo para tal é duplo, primeiro isso reduz imensamente o grau de "enfadonhamento". O que nos leva ao segundo objetivo: agora que o texto se tornou um pouco menos maçante, damos-lhe, ao famoso leitor hipotético, a possibilidade de *ler* o trabalho.

No Capítulo 3, começamos com algumas definições e resultados básicos da teoria P.I., tanto ordinária quando graduada, além de apresentar os octônios para a audiência. Depois, trabalhamos para encontrar as identidades $\mathbb{Z}_2^3$ e $\mathbb{Z}_2^2$-graduadas, dadas pelo processo de Cayley-Dickson, dos octônios.

No Capítulo 4, traçamos alguns conceitos de superálgebras, além de mostrar sua conexão com elementos antisimétricos de álgebras que não são super, definimos álgebras e superálgebras quadráticas e também mencionamos a sua conexão com os octônios. Em seguida, trabalhamos para encontrar duas bases, uma para cada, e relações para as TQ superálgebras livres em um gerador ímpar junto com o seu T-ideal apropriado. Com isso transportamos os resultados para polinômios antissimétricos das TQ álgebras livres infinitamente, isto é, ω geradas, sendo assim obtemos todas as identidades dos octônios simultaneamente fracas e anti-simétricas.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Nesse breve capítulo vamos relembrar algumas definições e resultados elementares de álgebra. Caso o leitor não esteja familiarizado com o conteúdo do capítulo recomendamos a leitura dos livros do Jacobson [Jac85, Jac89] ou do Lang [Lan02], para álgebras associativas, enquanto que para álgebras alternativas recomendamos a leitura do [ZSSS82]. No caso do leitor necessitar estudar esses livros recomendamos o estudo do Herstein [Her94] ao invés do presente texto, pois é uma leitura muito mais interessante e provavelmente vai corromper o leitor a ser um algebrista, enquanto esse manuscrito, na ausência da mais bela das álgebras, provavelmente fracassará...

Piadas a parte, se por algum motivo, o leitor encontrou o seu caminho até o presente manuscrito, e não conhece os tópicos abordados nesse capítulo, recomendamos que tome alguma cadeira de álgebra antes de ler o mesmo.

O presente capítulo é fundamentalmente diferente do restante das secções iniciais dos capítulos subsequentes. Os conceitos expostos no presente capítulos são *fundamentais* para a leitura do manuscrito. Enquanto as secções iniciais dos próximos não são fundamentais.

2.1 Álgebras: uma introdução relâmpago

Definição 2.1.1 (Álgebra)**.** Seja R um anel comutativo, associativo e com unidade, dizemos que A é uma R-*álgebra* se for um R-módulo munido de uma operação R-bilinear. Dizemos que B é uma R-*subálgebra*, ou simplesmente *subálgebra*, de A se B for um R-submódulo de A e a restrição da operação de $A \times A$ para $B \times B$ tiver imagem contida em B, ou seja, B é fechado em relação ao produto de A.

Definição 2.1.2 (Associador e Comutador)**.** Sejam A uma álgebra e $a, b, c \in A$ definimos o seu *associador* por $(a, b, c) := ab \cdot c - a \cdot bc$ e o *comutador* de a, b como sendo $[a, b] := ab - ba$. Também podemos definir o *comutador longo* por indução como sendo $[a_1, \ldots, a_{n+1}] := [[a_1, \ldots, a_n], a_{n+1}]$.

Assim como em anéis, nós vamos omitir a menção ao produto e utilizar ele apenas para evitar confusão de parênteses. Dizemos que uma álgebra A é:

- *Associativa* se $(a,b,c)=0,\ \forall a,b,c\in A$.
- *Alternativa à esquerda* se $(a,a,b)=0,\ \forall a,b\in A$.
- *Alternativa à direita* se $(a,b,b)=0,\ \forall a,b\in A$.
- *Alternativa* se for alternativa à direita e à esquerda.
- *Comutativa* se $[a,b]=0,\ \forall a,b\in A$.
- de *Lie* se $a^2=0$ e $\mathrm{J}(a,b,c)=0,\ \forall a,b,c\in A$, onde $\mathrm{J}(a,b,c)=ab\cdot c+bc\cdot a+ca\cdot b$ é a *identidade de Jacobi*.
- de *Malcev* se $a^2=0$ e $\mathrm{M}(a,b,c)=0\ \forall a,b,c\in A$, onde $\mathrm{M}(x,y,z):=xy\cdot xz-(xy\cdot z)x-(yz\cdot x)x-(zx\cdot x)y$ é a *identidade de Malcev* .
- *Flexível* se $(a,b,a)=0,\ \forall a,b\in A$.

Notação 2.1.3. Como as álgebras associativas e comutativas tem muitas propriedades boas nós medimos o quanto uma álgebra é ou deixa de ser associativa ou comutativa. Já vimos duas medidas disso: o associador e o comutador que medem o quanto dois elementos deixam de ser comutativos ou o quanto três elementos deixam de ser associativos respectivamente. Agora vamos introduzir mais duas medidas, que medem o quanto uma álgebra é associativa ou comutativa.

- Denotamos o *centro associativo* da álgebra A por $N(A):=\{a\in A\mid (a,x,y)=(x,a,y)=(x,y,a)=0\ \forall x,y\in A\}$.
- Denotamos o *centro comutativo* da álgebra A por $K(A):=\{a\in A\mid [a,x]=0\ \forall x\in A\}$.
- Denotamos o *centro* da álgebra A por $Z(A):=N(A)\cap K(A)$.

Notação 2.1.4 (Álgebra de Matrizes)**.** Apenas com o intuito de fixar a notação dessa álgebra fundamental, vamos denotar por $M_n(R)$ a álgebras completa de matrizes n por n sobre o corpo, anel ou mesmo álgebra R.

Definição 2.1.5 (Subálgebra, Ideal)**.** Sejam A uma álgebra, B,I submódulos de A e $X,Y\subset A$. Denotamos $XY:=\{xy\mid x\in X,y\in Y\}$. Se $BB\subset B$ então dizemos que B é uma *subálgebra* de A e denotamos $B<A$ ou $A>B$. Se $AI\subset I$ dizemos que I é um *ideal à esquerda* de A e denotamos por $I\lhd_e A$ ou $A\rhd_e I$, se $IA\subset I$ dizemos que I é um *ideal à direita* de A e denotamos por $I\lhd_d A$ ou $A\rhd_d I$. Finalmente se I for um ideal à esquerda e à direta de A então dizemos que I é um *ideal bilateral* de A ou simplesmente um *ideal* de A e denotamos por $I\lhd A$ ou $A\rhd I$.

Definição 2.1.6 (Homomorfismo)**.** Sejam A e B duas R-álgebras dizemos que o homomorfismo de R-módulos $\varphi : A \to B$ é um *homomorfismo de álgebras* se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),\ \forall a, b \in A$. No caso de A e B terem unidade, também exigimos que φ preserve unidade, isto é, $\varphi(1) = 1$, às vezes vamos explicitar se estamos considerando com ou sem unidade dizendo que φ é ou não unitário ou se estamos ou não na classe de álgebras com unidade. No caso de φ:

- ser injetor dizemos que é um *monomorfismo*,
- ser sobrejetor dizemos que é um *epimorfismo*,
- ser bijetor dizemos que é um *isomorfismo*,
- ter o contra domínio igual ao domínio, isto é, $A = B$ dizemos que é um *endomorfismo*,
- ser um endomorfismo e um isomorfismo dizemos que é um *automorfismo*.

Também denotamos por $\ker(\varphi) := \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ o *núcleo* do homomorfismo φ e por $\mathrm{Im}(\varphi) := \{\varphi(a) \mid a \in A\}$ a *imagem* do homomorfismo φ. Se existe um isomorfismo de A para B denotamos $A \cong B$.

Definição 2.1.7 (Álgebra Quociente)**.** Sejam A uma álgebra e $I \lhd A$, podemos então formar A/I, o módulo quociente de A por I. Por ser um ideal podemos definir um produto no quociente por $(a + I) \cdot (b + I) := ab + I$ que por sua vez é uma álgebra. Assim como o módulo quociente esse álgebra é denotada por A/I e é dita a *álgebra quociente de A por I*.

É bom lembrar do teorema n-ésimo do homomorfismo ou isomorfismo que diz:

Teorema (n-ésimo Teorema do homomorfismo)**.** *Sejam A e B duas álgebras e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo. Então $\ker(\varphi)$ é um ideal bilateral de A e $A/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.*

2.2 Polinômios, Álgebras Livres

Agora vamos rapidamente construir polinômios e álgebras livres, uma exposição detalhada, ao contrário dessa, pode ser encontrada em [ZSSS82].

Definição 2.2.1 (Semi-Grupo Livre)**.** Sejam X um conjunto e $\mathcal{X}$ o conjunto de todas as sequências finitas e não vazias em $X' := X \,\dot{\cup}\, \{(,)\}$. Sejam u, w, isto é, existem naturais n, m, tais que $u : \{1, \ldots, n\} \to X'$ e $w : \{1, \ldots, m\} \to X'$. Definimos o seu encadeamento por $uw : \{1, \ldots n{+}m\} \to X'$ por $uw(i) := u(i)$ se $i \leq n$ e $uw(i) := w(i - n)$ se $i > n$. Agora definimos $V[X] \subset \mathcal{X}$ recursivamente por:

- $X \subset V[X]$,
- $x, y \in X$ então $xy \in V[X]$,
- $x \in X,\ v \in V[X] \setminus X$ então $x(v)$ e $(v)x \in V[X]$,
- $v, w \in V[X] \setminus X$ então $(v)(w) \in V[X]$.

Note que fizemos o abuso de notação considerando (e) como sequências. Denotamos por $V[X]^{\#}$ quando permitirmos em $V[X]$ a sequência nula, que se torna identidade. Chamamos os elementos de $V[X]$ por *palavras não associativas*. Dizemos que $V[X]$ é o *semi-grupo livre gerado por* X ou o *semi-grupo livremente gerado por* X enquanto $V[X]^{\#}$ é dito o *monoide livre gerado por* X ou o *monoide livremente gerado por* X

Também podemos construir recursivamente uma função grau em $V[X]$ e $V[X]^{\#}$ e denotamo-la por deg, tal que $\deg x = 1$ sempre que $x \in X$. Deixamos isso à cargo do leitor. Tal função grau tem a maravilhosa propriedade:

Proposição 2.2.2. *Seja* $u \in V[X] \setminus X$ *(é a mesma coisa que dizer* $u \in V[X]$*, tal que* $\deg u > 1$*). Então existem* $v, w \in V[X]$ *com* $\deg v,\ \deg w < \deg u$ *unicamente determinados, tal que,* $u = v \cdot w$*.*

Algumas vezes vamos estar interessados em apenas o grau relativo à algumas variáveis. Considere $Y \subset X$ podemos agora construir uma função $\deg_Y$ assim com deg com a propriedade $\deg_Y x = 1$ se $x \in Y$ e $\deg_Y x = 0$ se $x \in X \setminus Y$. Dizemos que $\deg_Y$ é a *função grau relativo à* Y. Como de costume fazemos os abusos usuais de linguagem e denotamos $\deg_x$ para $\deg_{\{x\}}$. Dizemos que $\deg_x$ é a *Função grau relativo à variável* x.

Definição 2.2.3 (Polinômios)**.** Seja X um conjunto e R um anel associativo, comutativo e unitário. Denote por $R\{X\}$ (resp. $R\{X\}^{\#}$) o anel de semi-grupo de $V[X]$ (resp. $V[X]^{\#}$) por R. $R\{X\}$ (resp. $R\{X\}^{\#}$) é dito o *o anel de polinômios não associativos em* X *sobre* R (resp.*o anel unitário de polinômios não associativos em* X *sobre* R).

De agora em diante não estamos mais nos importando com quem pertence ou não à X e vamos usar *aleatoriamente* letras, com ou sem nexo, para nos referirmos aos elementos de X.

Sejam $x, x_1, \ldots, x_n \in X$ e $f \in R\{X\}^{\#} \setminus \{0\}$, definimos $\deg f$ como $\max\{\deg u \mid u$ é um monômio de $f\}$ e $\underline{\deg} f$ como $\min\{\deg u | \ u$ é um monômio de $f\}$. Analogamente, defina $\deg_x$ e $\underline{\deg}_x$.

f é dito:

- *homogêneo* se $\deg f = \underline{\deg} f$,
- *homogêneo em* $x_1, \ldots, x_n$ se $\deg_{x_i} f = \underline{\deg}_{x_i} f$ para $i = 1, \ldots, n$,
- *multihomogêneo* se for homogêneo para todo $x \in X$

- *multilinear* se for multihomogêneo e $\deg_x f \leq 1\ \forall x \in X$,
- *linear em* $x_1, \ldots, x_n$ se for homogêneo em $x_1, \ldots, x_n$ e $\deg_{x_i} f = 1$ para $i = 1, \ldots, n$.

Notação 2.2.4 (Avaliação de um Polinômio)**.** É bom observar que $R\{X\}$ (resp. $R\{X\}^{\#}$) é livre na classe de álgebras (resp. álgebras unitárias) sobre R, isto é, para qualquer álgebra (resp. álgebra unitária) A e qualquer função $\tilde{\varphi} : X \to A$ existe um único homomorfismo (resp. homomorfismo unitário) $\varphi : R\{X\} \to A$ (resp. $\varphi : R\{X\}^{\#} \to A$) tal que $\varphi\restriction_X = \tilde{\varphi}$.

Se $f \in R\{X\}$ (resp. $R\{X\}^{\#}$), nós denotamos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que f tem grau positivo apenas em $x_1, \ldots, x_n$. Sejam A uma R-álgebra, $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in R\{X\}$. Considere $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} : X \to A$ tais que $\tilde{\varphi}(x_i) = \tilde{\psi}(x_i) = a_i,\ i = 1, \ldots, n$ e φ, ψ, respectivamente, suas extensões únicas para $R\{X\}$. É fácil ver que $\varphi(f) = \psi(f)$. Definimos $f(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(f) = \psi(f)$ e dizemos que f *foi avaliado em* $a_1, \ldots, a_n$.

2.3 Variedades

Agora vamos "fixar" $X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, ou seja, apenas dizemos que é um conjunto enumerável infinito.

Definição 2.3.1 (Identidade Polinomial)**.** Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in R\{X\}$, f é dito uma *identidade polinomial* ou simplesmente *P.I.*, do inglês *polynomial identity*, para a álgebra A, se qualquer avaliação de f em A for nula, ou seja, se $\forall a_1, \ldots, a_n \in A,\ f(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

O conjunto de todas as identidades polinomiais de uma álgebra A é dito o *T-ideal de A* ou o *ideal de identidades de A* e é denotado por $T(A)$. Não é difícil provar que todo ideal de identidades é fechado com respeito a todos os homomorfismos, a recíproca também é verdadeira.

$T(A)$ é dito *homogêneo* (resp. *multihomogêneo*), se toda parte homogênea (resp. multihomogênea) de um polinômio de $T(A)$ está em $T(A)$.

Seja $I \subset R\{X\}$, é razoavelmente comum denotar por $\langle I \rangle^T$ o T-ideal gerado por I, ou seja, o menor T-ideal que contém I. Aqui também fazermos abuso de linguagem e denotaremos $\langle f \rangle^T := \langle \{f\} \rangle^T$ para $f \in R\{X\}$. Seja J um T-ideal, se $X \subset R\{X\}$ for tal que $\langle X \rangle^T = J$ dizemos que X é uma *base de identidades* de J

Definição 2.3.2 (Variedade de Álgebras)**.** Sejam A uma R-álgebra e $\mathscr{V}$ uma classe de R-álgebras. Dizemos que $\mathscr{V}$ é uma *variedade* ou *variedade de álgebras* (para evitar confusões com variedade diferenciável - as nossas variedades são *muito* mais legais!), se existe um conjunto de polinômios I, tal que $A \in \mathscr{V}$ se, e somente se, $I \subset T(A)$. Também dizemos que $\mathscr{V}$ é a variedade definida por I, e denotamos isso por $\mathrm{Var}(I)$. Também é bom notar que $\mathrm{Var}(I) = \mathrm{Var}(\langle I \rangle^T)$. Aqui também vamos fazer um abuso de notação e denotar $\mathrm{Var}(f) = \mathrm{Var}(\{f\})$ para um polinômio f.

Note que podemos agora traduzir alguns conceitos de álgebras para variedades. Uma álgebra A é:

- comutativa se, e somente se, $A \in \mathrm{Var}([x, y])$,
- alternativa se, e somente se, $A \in \mathrm{Var}((x, y, y), (x, x, y))$,
- alternativa à esquerda se, e somente se, $A \in \mathrm{Var}((x, x, y))$,
- alternativa à direta se, e somente se, $A \in \mathrm{Var}((x, y, y))$,
- flexível se, e somente se, $A \in \mathrm{Var}((x, y, x))$,
- associativa se, e somente se, $A \in \mathrm{Var}((x, y, z))$,
- de Lie se, e somente se, $A \in \mathrm{Var}(x^2, \mathrm{J}(x, y, z))$,
- de Malcev se, e somente se, $A \in \mathrm{Var}(x^2, \mathrm{M}(x, y, z))$,
- etc...

Por esse motivo denotamos essas classes de álgebras por comutativa, alternativa, alternativa à esquerda, alternativa à direita, associativa, Lie e assim por diante. Além disso, temos que a classe das álgebras associativas é uma variedade assim como Lie, alternativa, etc...

2.4 Álgebras de Composição

Definição 2.4.1 (Forma Bilinear e quadrática)**.** Sejam F um corpo, A, V e W F-espaços vetoriais, $f : V \times W \to F$ e $\mathrm{n} : A \to F$ dizemos que:

- f é uma *forma bilinear* se for uma transformação bilinear.
- Uma forma bilinear f é dita *não degenerada* se $\forall v \in V \setminus (0)\ \exists w \in W$, tal que $f(v, w) \neq 0$ e $\forall w \in W \setminus (0)\ \exists v \in V$, tal que $f(v, w) \neq 0$.
- n é dita uma *forma quadrática* se

  1. $\mathrm{n}(\lambda x) = \lambda^2\, \mathrm{n}(x)$;
  2. $\mathrm{f}(x, y) := \mathrm{n}(x + y) - \mathrm{n}(x) - \mathrm{n}(y)$ for uma forma bilinear

  Chamamos f de a *forma bilinear associada à forma quadrática*.

- Uma forma quadrática é dita *estritamente não degenerada* se a forma bilinear associada a ela for não degenerada.
- Se A for uma álgebra, dizemos que n *admite composição* se $\mathrm{n}(xy) = \mathrm{n}(x)\, \mathrm{n}(y)\ \forall x, y \in V$

Definição 2.4.2 (Álgebra de Composição)**.** Uma F-álgebra A junto com uma forma quadrática $\mathrm{n} : A \to F$ é dita uma *álgebra de composição* se:

- n admite composição;
- n for estritamente não degenerada;
- A é uma álgebra unitária.

Hurwitz foi o primeiro a obter uma classificação das álgebra de composição de dimensão finita para o caso do corpo dos números complexos em [Hur89]. Em seguida, Dickson deu outra prova que se aplica para qualquer corpo algebricamente fechado de característica diferente de dois em [Dic19]. Finalmente, Albert em [Alb42] obteve uma prova para qualquer corpo. Ademais, Albert enfraqueceu a hipótese de não degenerescência de n e obteve uma nova classe de soluções quando o corpo tem característica dois.

Para o restante desta secção, vamos recordar alguns desses resultados. O tratamento que usamos é o mesmo encontrado em [ZSSS82] e deveria ser consultado para esclarecimentos adicionais.

Definição 2.4.3 (Processo de Cayley-Dickson)**.** Seja A uma F-álgebra com uma involução $a \to \bar{a}$, onde $a + \bar{a},\ a\bar{a} \in F\ \forall a \in A$ e $\alpha \in F \setminus \{0\}$. Vamos agora construir uma nova álgebra (A, α) da seguinte maneira:

$(A, \alpha) := A \oplus A$ como espaços vetoriais, $(a_1, a_2)(a_3, a_4) := (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2, \bar{a}_1a_4 + a_3a_2)$ como a multiplicação e $\overline{(a_1, a_2)} := (\bar{a}_1, -a_2)$ como a involução. Claramente $(1, 0)$ é o elemento identidade de (A, α). Também denotamos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ simplesmente como 1 e v respectivamente, assim (a_1, a_2) é também denotada por $a_1 + va_2$.

Observe que (A, α) está nas mesmas condições que A, então podemos, se quisermos, aplicar novamente o processo de Cayley-Dickson em (A, α). Neste caso, denotamos por v_1 o v do primeiro processo, e por v_2 o v do segundo processo, e assim por diante. Além disso, (A, α) contém uma cópia isomorfa de A. Dizemos que (A, α) é o *Processo de Cayley-Dickson da álgebra A determinado por α*

Se a forma quadrática $n(a) := a\bar{a}$ é estritamente não degenerada em A, então $n(x) := x\bar{x}$ é estritamente não degenerada em (A, α). Além disso, se A é uma álgebra de composição, então (A, α) é uma álgebra de composição se, e somente se, A é associativo.

Vamos agora dar quatro exemplos de álgebras de composição:

1. O corpo F com $n(x) = x^2$ se característica $F \neq 2$, caso contrário $f(x, y) \equiv 0$.

2. $\mathbf{K}(\mu) := F \oplus Fv_1$ como espaços vetoriais, $(a+bv_1)(c+dv_1) := ac+\mu bd+(ad+bc+bd)v_1$ como multiplicação e $\overline{a + bv_1} = (a+b)-bv_1$, onde $\mu \in F$ e $4\mu + 1 \neq 0$. Se característica $F \neq 2$ então $\mathbf{K}(\mu) = F \oplus vF = (A, \alpha)$,

onde $v = v_1 - 2^{-1}$ e $\alpha = \mu + 4^{-1} \neq 0$. Por outro lado, se característica $F \neq 2$ então $(A, \alpha) = F \oplus vF = \mathbf{K}(\mu)$, onde $v_1 = v + 2^{-1}$ e $\mu = \alpha - 4^{-1}$ assim como $4\mu + 1 \neq 0$.

3. $\mathbf{Q}(\mu, \beta) := (\mathbf{K}(\mu), \beta)$ com $\beta \neq 0$. Esta é a *álgebra de quatérnios generalizada*. É fácil ver que $\mathbf{Q}(\mu, \beta)$ é associativa, mas não comutativa.

4. $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma) := (\mathbf{Q}(\mu, \beta), \gamma)$ com $\gamma \neq 0$ é a *Álgebra de Cayley-Dickson* ou simplesmente os *Octônios* e é também denotado por $\mathbb{O}$. É fácil ver que os octônios não são associativos, por isso não podemos continuar o processo de Cayley-Dickson para produzir outras álgebras de composição.

Notação 2.4.4. Durante essa secção denotaremos por F um corpo, A uma F-álgebra de composição, n a sua forma quadrática, f a forma bilinear associada à n, $\bar{a} := \mathrm{f}(1, a) - a$ e $\mathrm{t}(a) := a + \bar{a}$. Aqui fizemos abuso de notação, considerando $F \subset A$.

- Toda álgebra de composição é alternativa;
- A aplicação $a \to \bar{a}$ é uma involução, isto é, uma aplicação linear tal que $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ e $\bar{\bar{a}} = a$;
- Os elementos $\mathrm{t}(a), \mathrm{n}(a) \in F \ \forall a \in A$;
- Temos a igualdade $\mathrm{n}(a) = a \cdot \bar{a},\ \bar{a} \cdot a$;
- Toda álgebra de composição satisfaz a igualdade $a^2 - \mathrm{t}(a)a + \mathrm{n}(a) = 0$.

Notação 2.4.5 (Ortogonal ou Perpendicular)**.** Seja $B \subset A$ então dizemos que $a \in A$ é *ortogonal* ou *perpendicular* à B se $\mathrm{f}(a, b) = 0 \ \forall b \in B$. Definimos $B^{\perp} := \{a \in A \mid a \text{ é ortogonal à B } \}$ e dizemos que $B^{\perp}$ é a *componente ortogonal à B*. Aqui também fazemos os abusos de linguagem usuais para $b^{\perp} := \{b\}^{\perp}$, quando b é um elemento de B.

Lema 2.4.6. *Sejam B uma subálgebra com 1 da álgebra de composição A e $a, b \in B,\ v \in B^{\perp}$. Assim, temos as seguintes relações:*

$$\bar{v} = -v, \qquad av = v\bar{a}; \tag{A}$$

$$a \cdot vb = v \cdot \bar{a}b, \qquad vb \cdot a = v \cdot ab; \tag{B}$$

$$va \cdot vb = v^2 \cdot b\bar{a}. \tag{C}$$

Teorema 2.4.7 (Hurwitz Generalizada)**.** *Seja A uma álgebra de composição. Então, A é isomorfa a uma das quatro álgebras de composição acima mencionadas.*

Lema 2.4.8. *Para uma álgebra de composição A as seguintes condições são equivalentes:*

- $\mathrm{n}(x) = 0$ *para algum* $0 \neq x \in A$*;*
- *existem divisores de zero em* A*;*
- A *contém um idempotente* $e \neq 0, 1$.

Tal álgebra de composição é chamada de cindida*.*

Teorema 2.4.9. *Quaisquer duas álgebras de composição cindidas da mesma dimensão sobre um corpo* F *são isomorfas. Além disso, toda álgebra de composição sobre um corpo algebricamente fechado é cindida.*

2.5 Álgebras Alternativas Quadráticas

Nessa secção vamos considerar a classe da álgebras que satisfazem a identidade $a^2 - \tau(a)a + \mathrm{n}(a) = 0$. Isto é, seja A uma F-álgebra unitária, onde $\tau : A \to F$ é uma transformação linear e $\mathrm{n} : A \to F$ é uma forma quadrática. Dizemos que A é uma *álgebra quadrática* ou simplesmente *quadrática* sobre F, se satisfaz as equações:

$$x^2 - \tau(x)x + \mathrm{n}(x) \cdot 1 = 0, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{n}(1) = 1, \tag{2.2}$$

é conhecido que a equação (2.2) é equivalente à $\tau(1) = 2$. Dizemos que τ é o *traço* e n é a *norma* de A. Não é difícil ver que $\mathrm{n}(x) = \frac{1}{2}(\tau(x)^2 - \tau(x^2))$. Linearizando (2.1) e substituindo n pela expressão em τ obtemos:

$$x \odot y - \tau(x)y - \tau(y)x - \frac{1}{2}\tau(x \odot y) + \tau(x)\tau(y) = 0. \tag{2.3}$$

Uma transformação linear f sobre uma álgebra A é dita *simétrica* se $f([x, y]) = 0\ \forall x, y \in A$. Uma transformação linear f sobre uma álgebra A é dita *associativa* se $\mathrm{f}((x, y, z)) = 0\ \forall x, y, z \in A$. E, por fim, uma transformação linear f sobre uma álgebra A é dita *invariante*, se for simétrica e associativa.

É um resultado bem conhecido que uma álgebra quadrática é flexível se, e somente se, τ for invariante. Isso foi provado por Osborn em [Osb62]. Nesse caso podemos reescrever a identidade (2.3) como:

$$x \odot y - \tau(x)y - \tau(y)x - \tau(xy) + \tau(x)\tau(y) = 0. \tag{2.4}$$

Para o leitor interessado em estudar álgebras quadráticas alternativas, recomendamos a leitura do [Eld90], onde Elduque classifica todas as álgebras da classe sobre um corpo de característica diferente de dois, a menos de isomorfismo. Entretanto vamos usar uma definição um pouco mais ampla. De agora em diante diremos que uma álgebra A é quadrática alternativa se possuir uma transformação linear $\tau : A \to Z(A)$ invariante satisfazendo (2.4), $\tau(1) = 2$ e

$$\tau(\tau(x)y) = \tau(x)\tau(y), \ \forall x, y \in A. \tag{2.5}$$

Definição 2.5.1 ($Z_\tau(A)$)**.** Denote por $Z_\tau(A) := \{a \in A \mid \tau(a) = 2a\}$ chamado de o τ-*centro* de A.

Observe que $F \subset Z_\tau(A) \subset Z$ e se $a \in Z_\tau(A),\ b \in A$ então $2\tau(ab) = \tau(\tau(a)b) = \tau(a)\tau(b) = 2a\tau(b)$, ou seja τ é $Z_\tau(A)$-linear.

Capítulo 3

Algumas Identidades Graduadas dos Octônios

O objetivo do presente capítulo é o de encontrar uma base para o $T_{\mathbb{Z}_2^2}$-ideal de identidades dos octônios. Para tal, precisamos definir os objetos de estudo e listar as suas principais propriedades. Esse é o assunto da Secção 3.1.

A Secção 3.2 lista algumas identidades $\mathbb{Z}_2^3$-graduadas dos octônios e mostra que elas são uma base para o T-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2^3$-graduadas na Proposição 3.2.2. Concluímos a secção listando várias identidades $\mathbb{Z}_2^2$-graduadas na Proposição 3.2.4.

Nas Secções 3.3 e 3.4 trabalhamos no quociente dos polinômios pelo T-ideal gerado pelas identidades listadas na Proposição 3.2.4. Com algumas restrições técnicas obtemos uma forma especial para os polinômios. A Secção 3.5 trabalha em cima dessa forma até chegar numa contradição caso exista alguma identidade que não seja consequência das identidades encontradas na Proposição 3.2.4, esse é o enunciado da Proposição 3.5.3.

Finalmente, terminamos o presente capítulo mostrando que a partir dos resultados do mesmo, podemos re-obter alguns resultados sobre as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das matrizes dois por dois.

3.1 Identidades Graduadas

Definição 3.1.1 (Álgebra Graduada)**.** Uma álgebra A sobre o anel comutativo, associativo e unitário R é dita *graduada pelo grupo* G, ou simplesmente G*-graduada*, se $A = \bigoplus_{a \in G} A_a$, como R-submódulo e $A_a A_b \subseteq A_{ab}$ $\forall a, b \in G$. Seja $a \in A$, denotamos por a_h a projeção de a em A_h. Seja $b \in A$, se existe $j \in G$ tal que $b \in G_j$ dizemos que b é um elemento homogêneo da componente j. Ademais denotamos j por $|b| = j$.

Notação 3.1.2 (Polinômios Graduados)**.** Seja X um conjunto, G um grupo e R um anel associativo, comutativo e unitário. Assim como foi feito na

Secção 2.2 para construir as palavras não associativas e os seus polinômios, o faremos aqui no caso graduado. Afim de obtermos uma álgebra graduada (de polinômios), é necessário, de alguma maneira, graduar as variáveis, isto é X.

Para tal temos duas saídas, a primeira assumimos que X já veio magicamente graduado, isto é, $X = \dot{\cup}_{g \in G} X_g$. A segunda é criar um conjunto X para cada elemento de G. O que nos leva ao seguinte $X_G := \{x^a \mid x \in X,\ a \in G\}$ e $X_g := \{x^h \in X_G \mid h = g\}$. Ou seja, o importante é ter (ou criar) uma partição do conjunto de variáveis indexada pelo grupo G. Nessa perspectiva, de ter o conjunto de variáveis particionado, as duas saídas são iguais.

Para a primeira saída definimos $|\ | : X \to G$ por $|x| = h$ se e somente se $x \in X_h$. Análogo para a segunda saída. No caso de $G = \mathbb{Z}_2$ dizemos que $|\ |$ é a *função paridade*. Independentemente de colocarmos ou recebermos uma partição vamos denotar o nosso conjunto de variáveis por X_G para explicitar que ele está particionado.

Denotamos o *anel dos polinômios não associativos G-graduados sobre R* (resp. *anel unitário dos polinômios não associativos G-graduados sobre R*) por $R_G\{X\} := RV[X_G]$ (resp. $R_G\{X\}^{\#} := RV[X_G]^{\#}$), o anel de semi-grupo de $V[X_G]$ (resp. $V[X_G]^{\#}$) por R. No caso particular de $G = \mathbb{Z}_2$ denotamos $R\{Y|Z\} = R_G\{X\}$ onde $Y = X_{\bar{0}}$ e $Z = X_{\bar{1}}$. $R\{Y|Z\}$ é dito o *anel dos superpolinômios não associativos nas variáveis pares Y e ímpares Z sobre R*

Finalmente precisamos apenas definir a graduação em $R_G\{X\}$ e $R_G\{X\}^{\#}$. Para tal basta definir a graduação nos monômios indutivamente no grau e "estender por linearidade". Para isso estendemos o domínio de $|\ |$ para o conjunto dos monômios, que faremos por indução.

- Se u é um monômio de grau um então é uma variável, portanto $|\ |$ já está definido para ele.

- Se u é um monômio de grau maior que um, então existem dois monômios, univocamente determinados, v, w de grau estritamente menor que u, tal que, $u = v \cdot w$, portanto defina $|u| := |v||w|$.

- Seja $R_G\{X\}_g$ o subespaço gerado pela pré-imagem de $|g|^{-1}$, para qualquer $g \in G$. Para $g \in G,\ g \neq 1$ defina $R_G\{X\}_g^{\#} := R_G\{X\}_g$ e para $g = 1$ defina $R_G\{X\}_1^{\#} := R_G\{X\}_1 \oplus R$.

- $|R_G\{X\}_g| = |R_G\{X\}_g^{\#}| = g,\ \forall g \in G$

Por simplicidade não vamos ficar carregando o infeliz do sobrescrito, quando quisermos nos referir a ele numa variável z simplesmente usaremos $|z| = a$. Note que também não estamos mais nos importando com quem pertence ou não a X e vamos usar *aleatoriamente* letras, com ou sem nexo, para nos referirmos aos elementos de X.

É bom observar que $R_G\{X\}$ (resp. $R_G\{X\}^{\#}$) é livre na classe de álgebras G-graduadas (resp. álgebras unitárias G-graduadas) sobre R. Ou seja, qualquer homomorfismo G-graduado de $R_G\{X\}$ (resp. $R_G\{X\}^{\#}$), ou simplesmente G-homomorfismo, em uma R-álgebra (resp. R-álgebra unitária) G-graduada, está univocamente determinado pelos valores que o mesmo assume em X_G. Reciprocamente se a_n^g forem elementos de uma R-álgebra G-graduada, tais que, $|a_n^g| = g$ então existe um único G-homomorfismo que em x_n^g assume o valor de a_n^g. Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ avaliado em tal homomorfismo é denotado por $f(a_1, \ldots, a_n)$ e normalmente é dito que f *foi avaliado em* $a_1, \ldots, a_n$ ou mesmo que f *foi* G*-avaliado em* $a_1, \ldots, a_n$ quando quisermos explicitar que a avaliação preservou as componentes homogêneas.

Assim como no caso não graduado, as vezes vamos estar interessados apenas no grau relativo à algumas variáveis. Para tal fazemos a mesma mudança na definição de deg. Seja $h \in G$, tomamos $\deg_h x = 1$ se $x \in X_h$ e $\deg_h x = 0$ se $x \in X_{h'}$ com $h' \in G$ e $h \neq h'$. Dizemos que $\deg_h$ é a *função grau relativo à componente homogênea* h.

Definição 3.1.3 (Identidade Polinomial Graduada)**.** Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in R_G\{X\}$. Dizemos que f é *identidade polinomial* G*-graduada* ou simplesmente G*-P.I.* para a álgebra G-graduada A se f assume zero, em todas as avaliações G-graduadas, isto é, as avaliações que preservam a G-graduação.

O conjunto de todas as identidades polinomiais de álgebra G-graduada A é dito o T_G*-ideal de* A, ou o T*-ideal de identidades* G*-graduadas* A, e é denotado por $T_G(A)$ se a referência à G for clara podemos omiti-lo junto com as menções graduadas. Não é difícil provar que todo ideal de identidades graduadas é de fato um ideal graduado e que é fechado em relação à todo homomorfismo graduado, a recíproca também é verdadeira.

$T_G(A)$ é dito *homogêneo* (resp. *multihomogêneo*) se toda parte homogênea (resp. multihomogênea), no sentido ordinário definido no Capítulo 2 de um polinômio de $T_G(A)$ está em $T_G(A)$.

Observação 3.1.4 (Graduação pelo processo de Cayley-Dickson)*.* Seguindo o espírito de graduação, note que o processo de Cayley-Dickson naturalmente gradua uma álgebra. Denotaremos essa graduação por *graduação natural do processo de Cayley-Dickson* ou *graduação dada pelo processo de Cayley-Dickson* da seguinte maneira. Seja A uma álgebra nas condições do processo de Cayley-Dickson. Suponha que A seja uma álgebra G-graduada então a álgebra (A, α) tem uma $G \times \mathbb{Z}_2$-graduação dada por $(A, \alpha)_{(g,0)} := A_g$ e $(A, \alpha)_{(g,1)} := vA_g$, $\forall g \in G$.

A próxima definição e teorema são devido a Shirshov em sua busca pela resposta do problema de Kurosh para P.I. álgebras alternativas e pode ser encontrado em [Shi57b] e [Shi57a]. Durante bastante tempo, os artigos estavam disponíveis apenas em russo e as provas só poderiam ser encontradas em Inglês em [ZSSS82]. No entanto, recentemente vários artigos do Shirshov, incluindo aqueles dois, receberam uma tradução para o Inglês em [Shi09].

Definição 3.1.5 (r-palavras)**.** Suponha que X_G é ordenado. Defina recursivamente $< x_1 >:= x_1$, $< x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} >:=< x_1, \ldots, x_n > \cdot x_{n+1}$ para $n \geq 1$. Chamaremos uma palavra não associativa da forma $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} >$ uma r_1-*palavra*. Se a r_1-palavra $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} >$ é tal que $i_1 \leq \ldots \leq i_n$ então nós vamos chamá-lo de uma r_1-palavra *regular*. Além disso, chamaremos uma palavra não associativa da forma $< u_1, \ldots, u_n >$, onde cada u_i é uma r_1-palavra (resp. r_1-palavra regular), de uma r_2-*palavra* (resp. r_2-*palavra regular*).

Teorema 3.1.6 (Shirshov)**.** *Seja A uma álgebra alternativa e $v(x_1, \ldots, x_n)$ uma palavra não associativa. Então para quaisquer elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ o elemento $v(a_1, \ldots, a_n)$ é representável na forma de uma combinação linear de r_2-palavras regulares de $a_1 \ldots, a_n$.*

As duas afirmações a seguir são resultados bem conhecidos da teoria P.I.. Uma prova não graduada delas pode ser encontrada em [ZSSS82]. Basicamente a prova graduada é obtida com a mesma prova colocando a palavra graduada nos lugares apropriados.

Definição 3.1.7. Um anel é dito um *domínio* se for unitário, associativo, comutativo e sem divisores de zero. Sejam K/F uma extensão de domínios, G um grupo e A uma F-álgebra G-graduada. Definimos a graduação natural de $A \otimes_F K$ como sendo $(A \otimes_F K)_g := A_g \otimes_F K$, $\forall g \in G$.

Proposição 3.1.8. *Sejam F um domínio (anel unitário, associativo, comutativo e sem divisores de zero) infinito, K/F uma extensão de domínios, G um grupo e A uma F-álgebra G-graduada livre de torção, como um F-módulo. Então $T_G(A)$ é multihomogêneo, e além disso se A é um F-módulo livre, então $T_G(A) = T_G(A \otimes K)$ como álgebra sobre F na graduação natural.*

Lema 3.1.9. *Sejam F um domínio infinito, G um grupo e A uma F-álgebra G-graduada livre de torção, como um F-módulo. Suponha que tenhamos $\mu : G^2 \to F$ e $\nu : G^3 \to F$ tais que, $xy - \mu(|x|, |y|)yx = 0$ e $(xy)z - \nu(|x|, |y|, |z|)x(yz) = 0$ são identidades G-graduadas de A. Então $T_G(A)$ é gerado por ambas identidades "esquema" acima e possivelmente por algumas identidades nilpotentes.*

Demonstração. Seja u um monômio, J o T-ideal gerado por $xy - \mu(|x|, |y)|yx$ e $(xy)z - \nu(|x|, |y|, |z|)x(yz)$. Nós vamos agora mostrar que $u \equiv \lambda w \pmod J$, onde w é uma r_1-palavra regular e $\lambda \in F$, para quaisquer ordens que pusermos nas variáveis. O que prova o lema, pela proposição 3.1.8.

Faremos isso por indução sobre o grau de u. Todo monômio de grau um é uma r_1-palavra regular e a identidade $xy - \mu(|x|, |y|)yx = 0$ dá conta do grau dois, isso prova o caso inicial. Suponha que já provamos a afirmação para todas as palavras de grau menor que n $(n > 2)$, então a afirmação vale para palavras de grau n, com efeito:

Seja u, um monômio de grau n, então $u = v_1 s_1$ para alguns v_1, s_1 monômios de graus menores. Pela hipótese de indução nós temos que $v_1 \equiv \lambda_1 v \pmod J$ e $s_1 \equiv \lambda_2 s \pmod J$, v, s r_1-palavras regulares. $v = v'x$ e $s = s'y$, onde x (resp. y) é o maior elemento de v (resp. s), por definição. Se $x > y$, temos que $\lambda_1 v'x \cdot \lambda_2 s'y \equiv \lambda_1\lambda_2\nu(|v'|,|x|,|s'y|)\mu(|x|,|s'y|)(v' \cdot s'y)x \pmod J$, se $x \leq y$ temos que $\lambda_1 v'x \cdot \lambda_2 s'y \equiv \lambda_1\lambda_2\mu(|v's|,|s'y|)\nu(|s'|,|y|,|v'x|)$ $\mu(|y|,|v'x|)(s' \cdot v'x)y \pmod J$.

Em qualquer caso, temos que $u \equiv \gamma l z \pmod J$, onde $\gamma \in F$, l é um monômio de grau $n-1$ e z é o maior elemento de u. Finalmente, pela hipótese de indução, $l \equiv \sigma w \pmod J$, onde $\sigma \in F$ e w é uma r_1-palavra regular, o que prova a afirmação e portanto o lema. $\square$

3.2 Primeiras Identidades de $\mathbb{O}$

Nosso objetivo aqui é encontrar todas as identidades $\mathbb{Z}_2^2$-graduadas. Aqui a graduação é dada pelo processo de Cayley-Dickson, Observação 3.1.4 Para isso, primeiro olhamos para as identidades $\mathbb{Z}_2^3$-graduadas (obviamente para tal o corpo não pode ter característica dois).

Para a conveniência do leitor listamos explicitamente as componentes homogêneas das duas graduações citadas no parágrafo anterior.

Seja F um corpo com característica diferente de dois com involução sendo a função identidade. Aplicamos o processo de Ceyley-Dickson uma vez e obtemos uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, com $\mathbf{K}_{\bar{0}} = (F,0)$ e $\mathbf{K}_{\bar{1}} = (0,F)$. Aplicamos novamente o processo e obtemos uma álgebra $\mathbb{Z}_2^2$-graduada, com $\mathbf{Q}_{(\bar{0},\bar{0})} = ((F,0),(0,0))$, $\mathbf{Q}_{(\bar{1},\bar{0})} = ((0,F),(0,0))$, $\mathbf{Q}_{(\bar{0},\bar{1})} = ((0,0),(F,0))$, $\mathbf{Q}_{(\bar{1},\bar{1})} = ((0,0),(0,F))$. Aplicamos o processo uma terceira vez e obtemos uma álgebra $\mathbb{Z}_2^3$-graduada, com:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{0},\bar{0})} &= (\ (\ (F,0),\quad (0,0)\ ),\qquad (\ (0,0),\quad (0,0)\ )\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{0},\bar{0})} &= (\ (\ (0,F),\quad (0,0)\ ),\qquad (\ (0,0),\quad (0,0)\ )\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{1},\bar{0})} &= (\ (\ (0,0),\quad (F,0)\ ),\qquad (\ (0,0),\quad (0,0)\ )\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{1},\bar{0})} &= (\ (\ (0,0),\quad (0,F)\ ),\qquad (\ (0,0),\quad (0,0)\ )\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{0},\bar{1})} &= (\ (\ (0,0),\quad (0,0)\ ),\qquad (\ (F,0),\quad (0,0)\ )\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{0},\bar{1})} &= (\ (\ (0,0),\quad (0,0)\ ),\qquad (\ (0,F),\quad (0,0)\ )\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{1},\bar{1})} &= (\ (\ (0,0),\quad (0,0)\ ),\qquad (\ (0,0),\quad (F,0)\ )\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{1},\bar{1})} &= (\ (\ (0,0),\quad (0,0)\ ),\qquad (\ (0,0),\quad (0,F)\ )\ ).
\end{aligned}
$$

Para a $\mathbb{Z}_2^2$-graduação dos octônios nos começamos com $\mathbf{K}$ sem graduação, portanto após aplicar o processo duas vezes nos obtemos uma álgebra $\mathbb{Z}_2^2$

graduada, com:

$$\begin{aligned}
\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{0})} &= (\ (\mathbf{K},0), && (0,0)\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{0})} &= (\ (0,\mathbf{K}), && (0,0)\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{1})} &= (\ (0,0), && (\mathbf{K},0)\ ),\\
\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{1})} &= (\ (0,0), && (0,\mathbf{K})\ ).
\end{aligned}$$

Tema coisa realmente ótima sobre a $\mathbb{Z}_2^3$-graduação dos octônios, todos os elementos $\mathbb{Z}_2^3$ homogêneos diferentes de zero são invertíveis!

Podemos digerir uma boa parte das relações do Lema 2.4.6 em identidades graduadas. Seja H um subconjunto de $\mathbb{Z}_2^3$ e denote $B_H := \oplus_{h\in H}\mathbb{O}_h$. Primeiramente observe que para qualquer subgrupo H de $\mathbb{Z}_2^3$, B_H é uma álgebra de composição. Claramente $1 \in B_H$ se e somente se $0 \in H$, como no caso de H ser um subgrupo, a graduação garante que é fechado com respeito à multiplicação. Ademais $\mathbb{O} = B_H \oplus B_{\mathbb{Z}_2^3\setminus H}$ e $B_H \perp B_{\mathbb{Z}_2^3\setminus H}$, garantindo que n restrito à B_H é estritamente não degenerado. Finalmente podemos "reescrever o Lema 2.4.6 na sua forma graduada".

Lema 3.2.1. *Sejam $\mathbb{O}$ com a $\mathbb{Z}_2^3$-graduação natural, H um subgrupo de $\mathbb{Z}_2^3$ e $a, b, v \in \mathbb{O}$ elementos homogêneos tais que, $|a|, |b| \in H$ e $|v| \notin H$. Então temos as seguintes relações:*

$$\bar{v} = -v, \qquad av = v\bar{a}; \tag{A}$$
$$a\cdot vb = v\cdot \bar{a}b, \qquad vb\cdot a = v\cdot ab; \tag{B}$$
$$va\cdot vb = v^2\cdot b\bar{a}. \tag{C}$$

Claramente o Lema anterior continua válido se substituirmos $\mathbb{Z}_2^3$ por $\mathbb{Z}_2^2$. Deixamos isso à cargo do leitor.

Proposição 3.2.2. *Seja F um corpo infinito cuja característica é diferente de dois. Então $T_{\mathbb{Z}_2^3}(\mathbb{O})$ é gerado por:*

$$[x_1, x_2] = 0, \qquad |\langle |x_1|, |x_2|\rangle| \le 2; \tag{3.1}$$
$$x_1 \odot x_2 = 0, \qquad |\langle |x_1|, |x_2|\rangle| \ge 4; \tag{3.2}$$
$$(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad |\langle |x_1|, |x_2|, |x_3|\rangle| \le 4; \tag{3.3}$$
$$(x_1x_2)x_3 + x_1(x_2x_3) = 0, \qquad \langle |x_1|, |x_2|, |x_3|\rangle = \mathbb{Z}_2^3. \tag{3.4}$$

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{O}$ dois elementos homogêneos, na $\mathbb{Z}_2^3$-graduação, e $H := \langle |a|, |b|\rangle$. Claramente temos duas possibilidades para H, $|H| \le 2$ ou $|H| \ge 4$, onde $|H|$ indica quantos elementos o conjunto H tem. Caso $|H| \le 2$ então B_H é F ou $\mathbf{K}(\mu)$. Ambos são comutativos, o que prova a identidade (3.1). Caso $|H| \ge 4$ temos que $|a| \ne 0$ e $|b| \notin H_1 := \langle a\rangle$. Portanto, aplicando (A) do Lemas 3.2.1 para H_1 duas vezes, obtemos $ab = b\bar{a} = -ba$. O que prova a identidade (3.2).

A demonstração das identidades (3.3) e (3.4) é análogo.

Seja K o T-ideal gerado por (3.1) - (3.4). Como $K \subset T_{\mathbb{Z}_2^3}(\mathbb{O})$, temos que $T_{\mathbb{Z}_2^3}(\mathbb{O})$ está sob as condições da Proposição 3.1.9. Além disso, ela não pode ter nenhuma identidade nilpotente, já que todo elemento homogêneo é invertível, o que prova a proposição. $\square$

Corolário 3.2.3. *Seja D um domínio infinito cuja característica é diferente de dois e forme a álgebra de "Cayley-Dickson" sobre o domínio D e denote ele também por $\mathbb{O}$. Então $T_{\mathbb{Z}_2^3}\mathbb{O}$ é gerado pelas identidades* (3.1)-(3.4) .

Demonstração. Uma aplicação direta de 3.1.8. $\square$

Agora estamos prontos para enunciar o principal resultado desse capítulo:

Teorema 3.2.4. *Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2^2}$-ideal gerado pelas identidades:*

$$\begin{aligned}
ab \cdot v &= v \cdot ba, && |v| \neq 0 \neq |a| = |b|; && (3.5)\\
(ax \cdot b)v &= v(ba \cdot x), && |v| \neq 0 = |x| \neq |a| = |b|; && (3.6)\\
v(ax \cdot b) &= (ba \cdot x)v, && |v| \neq 0 = |x| \neq |a| = |b|; && (3.7)\\
x \odot y &= 0, && \langle |x|, |y| \rangle = \mathbb{Z}_2^2; && (3.8)\\
vb \cdot a &= v \cdot ab, && |v| \notin \langle |a|, |b| \rangle; && (3.9)\\
a \cdot vb &= v \cdot ba, && \langle |v|, |b| \rangle = \mathbb{Z}_2^2,\ |a| = 0; && (3.10)\\
va \cdot w + wa \cdot v &= -(v \odot w)a, && |v|, |w| \notin \langle |a| \rangle \neq (0); && (3.11)\\
va \cdot wb + wa \cdot vb &= -(v \odot w)ba, && |v|, |w| \notin \langle |a|(\neq 0), |b| \rangle; && (3.12)\\
(x, y, z) &= 0, && \langle |x|, |y|, |z| \rangle \neq \mathbb{Z}_2^2; && (3.13)\\
[x, y] &= 0, && |x| = |y| = 0; && (3.14)\\
(x, x, y) &= (x, y, y) = 0; && && (3.15)\\
v \cdot wb + w \cdot vb &= (v \odot w)b, && |v|, |w| \notin \langle |b| \rangle. && (3.16)
\end{aligned}$$

Considere $\mathbb{O}$ sobre um corpo infinito. Então $I = T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$.

Utilizando os argumentos da Proposição 3.2.2 é fácil ver, que de fato $I \subset T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$. A outra inclusão é o trabalho das próximas secções. É bom notar que não estamos interessado em um conjunto minimal de geradores das identidades. Inclusive, observamos que (3.15) e (3.16) são consequências de (3.5)-(3.14). Dora avante vamos simplesmente dizer que a é equivalente a b ou $a \equiv b$ em vez de a é equivalente a b modulo I ou $a \equiv b \pmod{I}$.

A ideia básica da prova é assumir, por contradição, que $I \neq T_{\mathbb{Z}_2^2}$, então existe $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O}) \setminus I$ de grau mínimo. A seguir, com substituições apropriadas, fatiar f em várias identidades f_i, $f \equiv \sum_i f_i$. Tais f_i's com a propriedade especial que existe $g_i \in T_{\mathbb{Z}_2^2}$, onde $\deg g_i < \deg f$ e f_i é consequência de $I \cup g_i = I$, pela minimalidade de f, $\forall i$. Contradição com $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O}) \setminus I$ de grau mínimo!

O primeiro passo é o de reduzir todos os monômios a uma forma normal. Como vale a alternatividade, equação (3.15), podemos aplicar o Teorema de Shirshov. O leitor atento deve ter notado que para podermos aplicar o Teorema de Shirshov o conjunto das variáveis necessita ser completamente ordenado. Utilizando a notação das variáveis com supraescrito dizemos que $x_n^\nu < x_m^\mu$ se:

- $\nu < \mu$ ou
- $\nu = \mu$ e $n < m$.

Onde a ordem em $\mathbb{Z}_2^2$ é qualquer uma na qual 0 é o mair elemento. Vale ressaltar que a ordem em $\mathbb{Z}_2^2$ *não* é compatível com o produto.

É importante ressaltar que os resultados que seguem se aplicam à todas as seis possíveis ordens definidas no parágrafo anterior. O motivo para tal é que necessitamos alternar entre as ordens na Secção 3.5 e para isso precisamos ter resultados para todas as ordens.

É interessante notar que todas as identidades que geram I são multilineares portanto I é multihomogêneo e a equivalência preserva o multigrau.

3.3 Variáveis da Componente Zero

A estrutura da secção é bem simples: tomamos um polinômio f e uma variável x tal que $|x| = 0$.

Primeiro tentamos "isolar uma ocorrência" de x da f no Lema 3.3.1. Depois disso, tentamos "isolar todas as ocorrências" simultaneamente de x da f no Corolário 3.3.2.

Por último, assumimos que f é uma identidade dos octônios e mostramos que podemos "cortar as ocorrências isoladas" de x da f na Proposição 3.3.3. Finalmente, terminamos a secção com o primeiro passo de uma prova por absurdo. Assumindo que $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2} \setminus I$ é minimal em relação ao pertencimento, mostramos na Proposição 3.3.4 que o grau de f em relação às variáveis da componente zero é no máximo um.

Essa organização da secção tem como objetivo concentrar a parte *realmente* técnica no Lema 3.3.1, sendo assim, explicitando o que queremos atingir.

Lema 3.3.1. *Sejam u uma r_2-palavra regular e x a maior variável que u depende. Suponha que $|x| = 0$. Então, temos as seguintes possibilidades:*

- $u \equiv \pm yx$;
- $u \equiv \pm xy$, $|y| \neq 0$;
- $u \equiv \pm yx \cdot z$, $|y| = |z| \neq 0$;

onde y e z são monômios, com as restrições apropriadas para cada caso.

Demonstração. Temos que $u = (\ldots((u_1u_2)u_3)\ldots u_{n-1})u_n$ onde cada u_i é uma r_1-palavra regular. Vamos provar o lema por indução em n. O caso inicial é exatamente $u = u_1 = yx$, pois x é a maior variável que u depende. Se x aparece em u_n, $n \neq 1$, então precisamos apenas aglutinar o que está à esquerda de x. Ou seja, temos $u = z \cdot yx$ e queremos obter a congruência de u com wx ou xw, para algum w. Só para deixar as coisas claras, $z = (\ldots((u_1u_2)u_3)\ldots u_{n-2})u_{n-1}$ e $u_n = yx$. Esta parte da prova (assim como muitas outras por vir) é dividida em casos. Onde cada caso é uma, ou mais, possibilidade(s) do "pertencimento homogêneo" de cada variável.

- $\langle |z|, |y| \rangle \neq \mathbb{Z}_2^2$
  $z \cdot yx \equiv_{(3.13)} zy \cdot x$,
- $\langle |z|, |y| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  $z \cdot yx \equiv_{(3.10)} x \cdot zy$.

Agora, se x não aparecer em u_n aplicamos a hipótese de indução para $u' := (\ldots((u_1u_2)u_3)\ldots u_{n-2})u_{n-1}$. Portanto $u' \equiv \pm yx$; $u' \equiv \pm xy$, $|y| \neq 0$ ou $u' \equiv \pm tx \cdot w$, $|t| = |w| \neq 0$. Ou seja, temos as seguintes possibilidades ($z = u_n$):

1. $u \equiv \pm yx \cdot z$;
2. $u \equiv \pm xy \cdot z$, com $|y| \neq 0$ ou
3. $(tx \cdot w)z$, com $|t| = |w| \neq 0$.

Vamos dividir esses três casos em sub-casos. Onde cada sub-caso é uma, ou mais, possibilidade do "pertencimento homogêneo" de cada variável. Nós começamos com os dois primeiros casos:

- $\langle |z|, |y| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  1. $xy \cdot z \equiv_{(3.8)} -z \cdot xy \equiv_{(3.9)} -zy \cdot x$, 2. $yx \cdot z \equiv_{(3.8)} -z \cdot yx \equiv_{(3.10)} -x \cdot zy$;
- $|y| = |z| = 0$
  1. $xy \cdot z \equiv_{(3.13)} x \cdot yz \equiv_{(3.14)} yz \cdot x$, 2. não pode ocorrer;
- $|y| = 0, \ |z| \neq 0$
  1. $xy \cdot z \equiv_{(3.13)} x \cdot yz$, 2. $yx \cdot z \equiv_{(3.14)} xy \cdot z \equiv_{(3.13)} x \cdot yz$;
- $|z| = 0, \ |y| \neq 0$
  1. $xy \cdot z \equiv_{(3.13)} x \cdot yz$, 2. $yx \cdot z \equiv_{(3.13)} y \cdot xz \equiv_{(3.14)} y \cdot zx \equiv_{(3.13)} yz \cdot x$;
- $|y| = |z| \neq 0$
  1. $xy \cdot z \equiv_{(3.13)} x \cdot yz \equiv_{(3.14)} yz \cdot x$, 2. $yx \cdot z$.

Passamos agora para o último caso:

- $|z| = 0$
  $(tx \cdot w)z \equiv_{(3.13)} tx \cdot wz$;

- $|z| = |t|$
  $(tx \cdot w)z \equiv_{(3.13)} t(x \cdot wz) \equiv_{(3.14)} t(wz \cdot x) \equiv_{(3.13)} (t \cdot wz)x;$
- $\langle |t|, |z| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  $(tx \cdot w)z \equiv_{(3.6)} z(wt \cdot x) \equiv_{(3.13)} (z \cdot wt)x.$

□

Corolário 3.3.2. *Sejam f um polinômio multihomogêneo, x a maior variável que f depende e $n = \deg_x f$, onde $|x| = 0$. Então nós temos um dos seguintes:*

- $f \equiv \sum_{i=0}^{n} x^i y_i x^{n-i}$ *se* $|f| \neq 0$ *portanto* $|y_i| = |f| \neq 0$*;*
- $f \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j} x^i \cdot z_{i,j} x^{n-i}$ *se* $|f| = 0$*, onde* $|y_{i,j}| = |z_{i,j}| \neq 0$ *e* m_i*'s naturais para* $i = 1, \ldots, n$*.*

Onde os y_i's, $y_{i,j}$'s e $z_{i,j}$'s são polinômios multihomogêneos nas condições acima.

Demonstração. É importante ressaltar que apesar de não estarmos na classe associativa podemos, nessa demonstração, trabalhar como se fosse, pois estamos "lidando com apenas uma componente não nula". Isto é, deixamos à cargo do leitor verificar que podemos associar em todos os momentos dessa demonstração.

Pelo Teorema de Shirshov, podemos assumir que todos os monômios de f são r_2-palavras regulares. Ou seja, $f \equiv \sum_{k=1}^{l} \lambda_k u_k$, onde l é um natural, os λ_k's são elementos do corpo dos escalares e os u_k's são r_2-palavras regulares. Aplicando o Lema 3.3.1 obtemos três possibilidades para cada u_k:

- $u_k \equiv p_k x$;
- $u_k \equiv x h_k$, onde $|h_k| \neq 0$;
- $u_k \equiv y_k x \cdot z_k$, onde $|y_k| = |z_k| \neq 0$.

Se $|f| \neq 0$ o terceiro caso não pode ocorrer, pois o se ocorresse acarretaria que $|f| = |z_k||y_k| = 0$. Portanto $f \equiv px + xh$, onde $p = \sum_k \lambda_k p_k$, $h = \sum_k \lambda_k h_k$ e as somatórias são feitas apenas onde faz sentido.

Caso contrário $|f| = 0$ e o segundo caso não pode ocorrer, pois se ocorresse acarretaria $|f| = |h_k| \neq 0$. Portanto $f \equiv px + \sum_k y_k x \cdot z_k$, onde $p = \sum_k \lambda_k p_k$ e as somatórias são feitas apenas onde faz sentido, além do abuso de notação por colocar o escalar λ_k "dentro" de y_k quando for apropriado.

Agora todos os ingredientes de uma prova por indução em n estão à disposição, que faremos no restante da demonstração.

O caso inicial é exatamente o que fizemos na demonstração até então, módulo algumas renomeações. Suponha que o corolário é válido para polinômios de grau até n, então é válido para polinômios de grau $n+1$, com efeito, tome $\deg_x f = n+1$.

Suponha que $|f| \neq 0$, então $f \equiv px + xh$. Pela hipótese de indução temos que $p \equiv \sum_{i=0}^{n} x^i p_i x^{n-i}$ e $h \equiv \sum_{i=0}^{n} x^i h_i x^{n-i}$. O segundo caso do corolário (hipótese de indução) não pode ocorrer pois $|p| = |h| = |f| \neq 0$. Tome $y_0 := p_0$, $y_{n+1} := h_n$ e $y_i := p_i + h_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$. Portanto $f \equiv \sum_{i=0}^{n} x^i y_i x^{n-i}$, o que prova este caso.

Suponha agora que $|f| = 0$, então $f \equiv px + \sum_j y_j x \cdot z_j$. Pela hipótese de indução temos que $p \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_j u_{i,j} x^i \cdot w_{i,j} x^{n-i}$, pois $|p| = |f| = 0$. Ainda pela hipótese de indução temos que $y_j \equiv \sum_{i=0}^{n_j} x^i p_{i,j} x^{n_j - i}$ e $z_j \equiv \sum_{i=0}^{m_j} x^i h_{i,j} x^{m_j - i}$, pois $|y_j| = |z_j| \neq 0$, onde $m_j + n_j = n$. Note que $(x^i p_{i,j} x^{n_j - i})x \cdot (x^r h_{r,j} x^{m_j - r}) \equiv x^i (p_{i,j} x^{n_j + 1 + r - i} h_{r,j}) x^{m_j - r} \equiv (p_{i,j} x^{n_j + 1 + r - i} h_{r,j}) x^{m_j - r + i}$. Pode não parecer, mas com isso provamos esse caso.

Note que escrevemos f como uma soma de polinômios da forma $(yx^i z)$ x^{n+1-i} onde $|y| = |z| \neq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$ com y e z polinômios. Colocando as potências de x da “direita” em evidência e renomeando os polinômios obtemos o que desejamos, provando este caso, e com isso o corolário. □

Proposição 3.3.3. *Sejam f, x, y_i, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$, n e m_i como no Corolário 3.3.2. Suponha que $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$ sobre F, um corpo infinito. Então*

- $y_i \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$ *para $i = 0, \ldots, n$, caso $|f| \neq 0$ ou*
- $\sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j} x^{\min\{i,1\}} \cdot z_{i,j} \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$ *para $i = 0, \ldots, n$, caso $|f| = 0$.*

Demonstração. Se $|f| \neq 0$ (resp. $|f| = 0$) nós temos pelo Corolário 3.3.2, que $f \equiv \sum_{i=0}^{n} x^i y_i x^{n-i}$ onde $|y_i| = |f| \neq 0$ (resp. $f \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j} x^i \cdot z_{i,j} x^{n-i}$, onde $|y_{i,j}| = |z_{i,j}| \neq 0$). Pela Proposição 3.1.8 nós podemos assumir que F é algebricamente fechado, portanto $\mathbb{O}_0 \cong F \oplus F$ onde $\overline{(a,b)} = (b,a)$.

Sob qualquer avaliação de f temos que $f = y_i \bar{x}^i x^{n-i}$ (resp. $f = p_i \bar{x}^i x^{n-i}$ onde $p_i = \sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j} z_{i,j}$). Seja $x = (x_1, x_2)$ e $y_i = v(y_i', y_i'')$ (resp. $p_i = (p_i', p_i'')$) onde v é determinado pelo processo de Cayley-Dickson. Então $f = v \sum_{i=0}^{n} (y_i' x_1^{n-i} x_2^i,\ y_i' x_1^i x_2^{n-i})$ (resp. $f = \sum_{i=0}^{n} (p_i' x_1^{n-i} x_2^i,\ p_i'' x_1^i x_2^{n-i})$). Sejam x_1, x_2 variáveis algebricamente independentes sobre F, então $y_i' = y_i'' = 0$ (resp. $p_i' = p_i'' = 0$, $0 = p_i = x^{\min\{i,1\}} p_i = x^{\min\{i,1\}} \sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j} z_{i,j} \equiv \sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j} x^{\min\{i,1\}} \cdot z_{i,j}$) sob qualquer substituição em F. □

Proposição 3.3.4. *Seja $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O}) \setminus I$ multihomogêneo de grau mínimo. Então $\deg_0 f \leq 1$.*

Demonstração. É suficiente considerar apenas o caso $|f| = 0$. Sejam x, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$, n e m_i como na Proposição 3.3.3. Claramente f é consequência de $\{\sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j}\ x^{\min\{i,1\}} \cdot z_{i,j} \mid i = 0, \ldots, n\}$. Portanto, pela minimalidade do grau de f, podemos assumir sem perda de generalidade que $f = \sum_{j=1}^{m} y_j x \cdot z_j$ com $|y_j| = |z_j| \neq 0,\ \forall i = 1, \ldots, m$.

Seja x_2 outra variável da componente zero que f dependa. Substituindo simultaneamente x por x_2 e x_2 por x obtemos que $\deg_{x_2} f = 1$, pela minimalidade do grau de f, novamente. Caso x_2 ocorra em y_j temos apenas duas possibilidades pelo Corolário 3.3.2, $y_j \equiv y'_j x_2$ ou $y_j \equiv x_2 y''_j$. A primeira possibilidade acarreta em $y_j x \cdot z_j \equiv y'_j x x_2 \cdot z_j$ enquanto a segunda em $y_j x \cdot z_j \equiv y''_j x \cdot z_j x_2$. Analogamente para quando x_2 aparece em z_j temos duas possibilidades $y_j x \cdot z_j \equiv y_j x x_2 \cdot z'_j$ ou $y_j x \cdot z_j \equiv y_j x \cdot z''_j x_2$.

Para cada j temos que x_2 ocorre em y_j ou exclusivamente em z_j. Portanto podemos escrever $f \equiv \sum_{j=1}^{m_1} y'_j x x_2 \cdot z'_j + \sum_{j=1}^{m_2} y''_j x \cdot z''_j x_2$. Utilizando argumentos análogos aos da Proposição 3.3.3 obtemos que $\sum_{j=1}^{m_1} y'_j x x_2 \cdot z'_j$ e $\sum_{j=1}^{m_2} y''_j x \cdot z''_j x_2$ são identidades. Logo, pela minimalidades de f, podemos assumir sem perda de generalidade que $f \equiv \sum_{j=1}^{m} y_j x x_2 \cdot z_j$.

Iterando o argumento do parágrafo anterior para todas as variáveis da componente zero obtemos que é suficiente considerar o caso $f = \sum_{i=1}^{m} y_i(x_1 \cdots x_n) \cdot z_i$ onde $|x_j| = 0 \neq |y_i| = |z_i|$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ e $\deg_0 f = n$. Considere $g := \sum_{i=1}^{m} y_i x_1 \cdot z_i$ e uma avaliação de g em $\mathbb{O}$. Estendemos a avaliação de g para f avaliando $x_2, \ldots, x_n$ em 1. Portanto g assume o mesmo elemento que f na avaliação. Ou seja, g é uma identidade. Pela minimalidade de f temos que $f = g = \sum_{i=1}^{m} y_i x_1 \cdot z_i$. $\square$

3.4 Variáveis da Componente Não Zero

A estrutura dessa secção é praticamente idêntica à da Secção 3.3, salvo que tem algumas tecnicidades a mais que são abordadas no Lema 3.4.2.

Com o objetivo de esclarecer, vamos repetir a nossa estratégia aqui. Tomamos um polinômio f e x a maior variável que f depende, tais que $\deg_0 f = 0$ e $|x| \neq 0$. Ou seja, f não depende de variáveis da componente zero.

Primeiro tentamos "isolar uma ocorrência" de x da f no Lema 3.4.3. Em seguida, tentamos "isolar todas as ocorrências" simultaneamente de x da f no Corolário 3.4.5. Por último, assumimos que f é uma identidade dos octônios e mostramos que podemos "cortar as ocorrências isoladas" de x da f na Proposição 3.4.8.

Finalmente, terminamos a secção com o segundo passo de uma prova por absurdo. Assumindo que $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2} \setminus I$ é de grau minimal em relação ao pertencimento, chegamos numa forma bem especial na Proposição 3.4.9.

Essa secção esta organizada com o objetivo de concentrar a parte *realmente* técnica dela Lema 3.4.3 e Lema 3.4.2, sendo assim, explicitando o que queremos atingir.

Definição 3.4.1. Seja U a subálgebra dos polinômios gerada por todas as variáveis que não são do componente zero e $^*: U \to U$ definido nos monômios por indução no grau da seguinte forma: $u^* := -u$ se $\deg u = 1$ e $(vw)^* := w^*v^*$ caso contrário e estendido para U por linearidade.

Lema 3.4.2. *Seja $f \in U$ e x uma variável com $|x| \neq 0$. Então nós temos o seguinte:*

1. ** é uma involução de U;*
2. *se $f_0 = 0$ então $f^* \equiv -f$;*
3. *se $f = v \cdot w$, $|w| = |v| \neq 0$ então $f^* \equiv w \cdot v$;*
4. *se $f_{|x|} = 0$ então $fx \equiv xf^*$;*
5. *f^* vai para $\bar{f}$ sob qualquer avaliação;*

Demonstração. Por linearidade é suficiente provar o lema apenas para o caso em que f é um monômio.

(1) Vamos começar a provar por indução que * possui ordem 2. Se $\deg f = 1$ então $f^{*^*} = (-f)^* = -(-f) = f$ se $\deg f \neq 1$ então $f = v \cdot w$ e $f^{*^*} = (v \cdot w)^{*^*} = (w^* \cdot v^*)^* = v^{*^*} \cdot w^{*^*} = v \cdot w = f$. Claramente * é um anti-homomorfismo.

Ambos (2) e (4) são válidos quando $\deg f = 1$. Suponha que eles sejam válidos para todos os monômios de grau inferior à n, então eles são válidos para monômios de grau n, com efeito:

(2) $f = v \cdot w$, temos os seguintes casos:

- $\langle |w|, |v| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  $f^* = w^* \cdot v^* = w^* \cdot v^* \equiv (-w) \cdot (-v)$ pela hipótese de indução para (2), $(-w) \cdot (-v) \equiv_{(3.8)} -v \cdot w = -f = f^*$ pela hipótese de indução para (4);

- $|w| = 0 \neq |v|$
  $f^* = w^* \cdot v^* = w^* \cdot v^* \equiv (-w) \cdot (-v)$ pela hipótese de indução para (2), $w^* \cdot (-v) \equiv -v \cdot w = -f$ pela hipótese de indução para (4);

- $|v| = 0 \neq |w|$
  $f^* = w^* \cdot v^* \equiv (-w) \cdot v^*$ pela hipótese de indução para (2), $(-w) \cdot v^* \equiv -v \cdot w = -f$ pela hipótese de indução para (4);

(4) $f = v \cdot w$, temos os seguintes casos:

- $\langle |f|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  $fx \equiv_{(3.8)} -xf \equiv xf^*$ pela hipótese de indução para (2);

- $|f| = 0$, $|v| = |w| \neq 0$
  $fx = (v \cdot w)x \equiv_{(3.5)} x(wv) = x((-w)(-v)) = xf^*$

(3) Está claro depois de provarmos (2).

(5) Trivial. □

Lema 3.4.3. *Seja u uma r_2-palavra regular e x a maior variável que u depende. Suponha que $|x| \neq 0$. Então nós temos uma das seguintes possibilidades:*

- $u \equiv \pm yx$,
- $u \equiv \pm xy$ *se* $|x| = |y|$,
- $u \equiv \pm z \cdot yx$ *se* $|x| = |y|$ *e* $\langle |x|, |z| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$ *ou*
- $u \equiv \pm z \cdot xy$ *se* $|x| = |y| = |z|$;

onde y, z são monômios, com as restrições apropriadas para cada caso.

Demonstração. Temos que $u = (\ldots((u_1 u_2)u_3)\ldots u_{n-1})u_n$ onde cada u_i é uma r_1-palavra regular. Vamos provar o lema por indução em n. O caso inicial é exatamente $u_1 = yx$. Se x aparece em u_n e $n \neq 1$ então precisamos apenas de aglutinar o que está à esquerda de x. Ou seja, temos $z \cdot yx$ e queremos obter um dos casos a cima. Só para deixar as coisas claras, $z = (\ldots((u_1 u_2)u_3)\ldots)u_{n-1}, yx = u_n$. Continuamos a a divisão em (vários) casos:

- $\langle |x|, |y|, |z| \rangle \neq \mathbb{Z}_2^2$
  $z \cdot yx \equiv_{(3.13)} zy \cdot x$;
- $\langle |x|, |y| \rangle = \mathbb{Z}_2^2, \ |z| = 0$
  $z \cdot yx \equiv_{(3.8)} -z \cdot xy \equiv_{(3.10)} -x \cdot yz \equiv_{(3.8)} yz \cdot x$;
- $\langle |x|, |y| \rangle = \mathbb{Z}_2^2, \ |y| = |z|$
  $z \cdot yx \equiv_{(3.8)} xy \cdot z \equiv_{(3.9)} x \cdot zy \equiv_{(3.5)} yz \cdot x$;
- $\langle |x|, |y| \rangle = \mathbb{Z}_2^2, \ |x| = |z|$
  $z \cdot yx \equiv_{(3.8)} -yx \cdot z \equiv_{(3.9)} -y \cdot zx$;
- $\langle |x|, |z| \rangle = \mathbb{Z}_2^2, \ |y| = 0$
  $z \cdot yx \equiv_{(3.4.2)} z \cdot xy^* \equiv_{(3.8)} -xy^* \cdot z \equiv_{(3.9)} -x \cdot zy^* \equiv_{(3.8)} zy^* \cdot x$;
- $\langle |x|, |z| \rangle = \mathbb{Z}_2^2, \ |x| = |y|$
  $z \cdot yx$, nada aqui, continue em frente;
- $\langle |x|, |y|, |z| \rangle = \mathbb{Z}_2^2, \ |x| + |y| + |z| = 0$
  $z \cdot yx \equiv_{(3.8)} -z \cdot xy \equiv_{(3.16),(3.8)} x \cdot zy$.

Se x não aparece em u_n aplicamos a hipótese de indução para $u' := (\ldots((u_1 u_2)\ u_3)\ldots u_{n-2})u_{n-1}$. Portanto $u' \equiv u \equiv \pm yx$, $u \equiv \pm xy$, $u \equiv \pm t \cdot sx$ ou $z \cdot xy$ com as restrições apropriadas, veja à baixo. Ou seja temos as seguintes possibilidades ($w = u_n$):

1. $u \equiv \pm yx \cdot w$;
2. $u \equiv \pm xy \cdot w$ com $|x| = |y|$;

3. $u \equiv \pm(t \cdot sx)w$ com $\langle |t|, |x|(= |s|)\rangle = \mathbb{Z}_2^2$ ou

4. $u \equiv \pm(z \cdot xy)w$ com $|x| = |y| = |z|$.

Vamos começar com o terceiro caso, $u \equiv \pm(t \cdot sx)w$ com $\langle |t|, |x|(= |s|)\rangle = \mathbb{Z}_2^2$:

- $|w| = 0$
  $(t \cdot sx)w \equiv_{(3.13)} t(s \cdot xw) \equiv_{(3.4.2)} t(s \cdot w^*x) \equiv_{(3.13)} t(sw^* \cdot x)$;

- $|t| = |w|$
  $(t \cdot sx)w \equiv_{(3.4.2)} (xs \cdot t)w \equiv_{(3.13)} x(s \cdot tw)$;

- $|x| = |w|$
  $(t \cdot sx)w \equiv_{(3.9)} t(w \cdot sx) \equiv_{(3.13)} t(ws \cdot x) \equiv_{(3.4.2)} t(x \cdot sw) \equiv_{(3.9)} (t \cdot sw)x$;

- $|w| = |x| + |t|$
  $(t \cdot sx)w \equiv_{(3.9)} (tx \cdot s)w \equiv_{(3.8)} (s \cdot xt)w \equiv_{(3.9)} s(w \cdot xt) \equiv_{(3.16),(3.8)} -s(x \cdot wt) \equiv_{(3.13)} -sx \cdot wt \equiv_{(3.4.2)} -wt \cdot xs.$

Continuamos com o primeiro caso $u \equiv \pm yx \cdot w$:

- $|y| = |w| = 0$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.4.2),(3.13)} yw^* \cdot x$;

- $|y| = 0,\ |x| = |w|$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.4.2)} xy^* \cdot w \equiv_{(3.13)} x \cdot y^*w$;

- $|y| = 0,\ \langle |x|, |w|\rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.4.2)} xy^* \cdot w \equiv_{(3.9)} x \cdot wy^* \equiv_{(3.8)} -wy^* \cdot x$;

- $|x| = |y|,\ |w| = 0$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.14)} w \cdot yx \equiv_{(3.13)} wy \cdot x$;

- $|x| = |y|,\ \langle |x|, |w|\rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.4.2)} w \cdot xy \equiv_{(3.9)} wy \cdot x$;

- $|x| = |y| = |w|$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.13)} y \cdot xw$;

- $\langle |x|, |y|\rangle = \mathbb{Z}_2^2,\ |w| = 0$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.8)} -xy \cdot w \equiv_{(3.9)} -x \cdot wy \equiv_{(3.8)} wy \cdot x$;

- $\langle |x|, |y|\rangle = \mathbb{Z}_2^2,\ |w| = |x|$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.9)} y \cdot wx$;

- $\langle |x|, |y|\rangle = \mathbb{Z}_2^2,\ |w| = |y|$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.8)} -xy \cdot w \equiv_{(3.9)} -x \cdot wy \equiv_{(3.4.2)} -yw \cdot x$;

- $\langle |x|, |y| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$, $|w| = |x| + |y|$
  $yx \cdot w \equiv_{(3.8)} -xy \cdot w \equiv_{(3.11)(3.8)} wy \cdot x$.

Prosseguimos com o segundo caso $u \equiv \pm xy \cdot w$ com $|x| = |y|$:

- $|w| = 0$
  $xy \cdot w \equiv_{(3.13)} x \cdot yw$;
- $\langle |x|, |w| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  $xy \cdot w \equiv_{(3.4.2)} w \cdot yx$;
- $|x| = |y| = |w|$
  $xy \cdot w \equiv_{(3.13)} x \cdot yw \equiv_{(3.4.2)} wy \cdot x$.

Passamos agora para o último caso $u \equiv \pm(z \cdot xy)w$ com $|x| = |y| = |z|$:

- $|w| = 0$
  $(z \cdot xy)w \equiv_{(3.13)} z(x \cdot yw)$;
- $|x| = |w|$
  $(z \cdot xy)w \equiv_{(3.13)} z(x \cdot yw) \equiv_{(3.4.2)} z(wy \cdot x) \equiv_{(3.13)} (z \cdot wy)x$;
- $\langle |x|, |w| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$
  $(z \cdot xy)w \equiv_{(3.8)} -w(z \cdot xy) \equiv_{(3.10)} -xy \cdot wz \equiv_{(3.4.2)} -wz \cdot yx$.

□

Observação 3.4.4. Note que podemos trocar a primeira possibilidade com a segunda do Lema 3.4.3. Logo reescrevemos o Lema 3.4.3 como:

Seja u uma r_2-palavra regular e x a maior variável que u depende. Suponha que $|x| \neq 0$. Então nós temos uma das seguintes possibilidades:

- $u \equiv \pm xy$,
- $u \equiv \pm yx$ se $|x| = |y|$,
- $u \equiv \pm z \cdot xy$ se $|x| = |y| = |z|$ ou
- $u \equiv \pm z \cdot yx$ se $|x| = |y|$ e $\langle |x|, |z| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$;

onde y, z são monômios, com as restrições apropriadas para cada caso.

Corolário 3.4.5. *Seja f um polinômio multihomogêneo, x a maior variável que f depende e $n = \deg_x f$, onde $|x| \neq 0$. Então nós temos uma das opções:*

- $f \equiv x^n p + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} x^{n-i} p_{i,i}^j x \cdots p_{i,1}^j x p_{i,0}^j$, *se* $|f| \in \langle |x| \rangle$;
- $f \equiv z x^n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} z_i^j \cdot x^{n-i} p_{i,i}^j x \cdots p_{i,1}^j x$, *se* $\langle |f|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$.

Onde m_i são naturais positivos, p, z, $p^j_{i,l}$ e z^j_i, $i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, i$, $j = 1, \dots, m_i$ são polinômios tais que $\langle |z^j_i|, |x| \rangle = \langle |z|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$, $|p^j_{i,l}| = |p| = |x|$ e $p^j_{i,0} = 1$ se $(n+i)|x| = |f|$ ou $p^j_{i,0}$ é um polinômio com $|p^j_{i,0}| = |x|$ caso contrário.

Demonstração. É importante ressaltar que estamos fazendo abuso de notação mais uma vez! No primeiro caso estamos "lidando com apenas uma componente não nula", portanto podemos associar. No segundo caso $z^j_i \cdot x^{n-i} p^j_{i,i} x \cdots p^j_{i,1} x$ é para ser entendido como $z^j_i (x^{n-i} p^j_{i,i} x \cdots p^j_{i,1} x)$. Como no primeiro caso o que está dentro do parênteses "pertence à apenas uma componente não nula", portanto podemos associar. Deixamos à cargo do leitor verificar que podemos associar em todos os momentos apropriados dessa demonstração.

Pelo Teorema de Shirshov, podemos assumir que todos os monômios de f são r_2-palavras regulares. Ou seja, $f \equiv \sum_{k=1}^{l} \lambda_k u_k$, onde l é um natural, os λ_k's são elementos do corpo dos escalares e os u_k's são r_2-palavras regulares. Aplicando o Lema 3.4.3 e Observação 3.4.4 obtemos quatro possibilidades para cada u_k:

- $u_k \equiv x p_k$;
- $u_k \equiv q_k x$, onde $|q_k| = |x|$;
- $u_k \equiv s_k x t_k$, onde $|s_k| = |t_k| = |x|$ ou
- $u_k \equiv w_k \cdot y_k x$, onde $|y_k| = |x|$ e $\langle |w_k|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$.

Note que o segundo, terceiro e quarto caso ocorrem apenas quando $|f| = 0$, $|f| = |x|$ e $\langle |f|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$, respectivamente.

Caso $|f| = 0$ temos $f \equiv xp + q_1 x 1$ onde $p := \sum_k \lambda_k p_k$ e $q_1 := \sum_k \lambda_k q_k$, apenas para os k's que fizer sentido. Caso $|f| = |x|$ temos $f \equiv xp + \sum_k q^k_1 x q^k_0$, onde $p := \sum_k \lambda_k p_k$, $q^k_1 := \lambda_k s_k$ e $q^k_0 := t_k$, apenas para os k's que fizer sentido.

Caso contrário $\langle |f|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$, ou seja podem ocorrer apenas apenas o primeiro e o quarto caso. Portanto $f \equiv zx + \sum_k w^k_1 \cdot p^k_1 x$, onde $z := -\sum_k \lambda_k p_k$, $w^k_1 := \lambda_k w_k$ e $p^k_1 := y_k$, apenas para os k's que fizer sentido.

Agora todos os ingredientes de uma prova por indução em n estão à disposição. Vamos demonstrar o teorema por indução que faremos no restante da demonstração.

O caso inicial é exatamente o que fizemos na demonstração até então, módulo algumas renomeações. Suponha que o corolário é válido para polinômios de grau até n, então é válido para polinômios de grau $n+1$, com efeito, tome $\deg_x f = n+1$.

Se $|f| = 0$ temos $f \equiv xr + qx$. Aplicando a hipótese de indução para r e q obtemos, $r \equiv x^n r + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_{(i,1)}} x^{n-i} r^j_{i,i} x \cdots r^j_{i,1} x r^j_{i,0}$ e $q \equiv x^n q +$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m(i,2)} x^{n-i}q_{i,i}^{j}x\cdots q_{i,1}^{j}xq_{i,0}^{j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m(i,3)} x^{n-i}s_{i,i}^{j}x\cdots s_{i,1}^{j}x$, com $q_{i,0}^{j} \neq 1$. Logo $f \equiv x^{n+1}r+\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m(i,1)} x^{n+1-i}r_{i,i}^{j}x\cdots r_{i,1}^{j}xr_{i,0}^{j}x^{n}qx+\sum_{j=1}^{m(i,2)} x^{n-i}q_{i,i}^{j}x\cdots q_{i,1}^{j}xq_{i,0}^{j}x+\sum_{j=1}^{m(i,3)} x^{n+2-i}s_{i,i}^{j}x\cdots s_{i,1}^{j})$, com $q_{i,0}^{j}\neq 1$. Rearranjando as somatórias, assim como foi feito no Corolário 3.3.2, obtemos a forma esperada. Salvo possivelmente a restrição de $q_{i,0}^{j}$, para tal basta aplicar $|\ |$.

O caso $|f| = |x|$ é análogo. Com isso já temos a validade do teorema para o caso $|f| \in \langle |x|\rangle$.

Para o caso $\langle |f|, |x|\rangle = \mathbb{Z}_2^2$ temos $f \equiv zx+\sum_k w_1^k\cdot p_1^k x$. Aplicando a hipótese de indução para z obtemos $zx \equiv (wx^n+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} r_i^j\cdot x^{n-i}h_{i,i}^{j}x\cdots h_{i,1}^{j}x)\, x \equiv wx^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} r_i^j\cdot x^{n+1-i}h_{i,i}^{j}x\cdots h_{i,1}^{j}x$, análogo para w_1^k. Portanto $f \equiv \sum_k^m z_kP_k$ para algum m, tais que $\langle |z_k|, |x|\rangle = \mathbb{Z}_2^2$, $|P_k| \in \langle |x|\rangle$, $\deg_x z_k = 0$ e $\deg_x P_k = n+1$. Aplicando o teorema para P_k obtemos que f pode ser escrito como uma soma da forma $f \equiv \sum_k z_k(x^{n+1}p+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m_i} x^{n-i}p_{i,i}^{j}x\cdots p_{i,1}^{j}xp_{i,0}^{j}) \equiv \sum_k(pz_k)\cdot x^{n+1}+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m_i}(z_kp_{i,0}^{j})\cdot x^{n-i}p_{i,i}^{j}x\cdots p_{i,1}^{j}x$. Rearranjando os índices obtemos o resultado esperado. □

Definição 3.4.6. Considerando $\mathbf{C}(\mu,\beta,\gamma) = (\mathbf{K}(\mu)\oplus\mathbf{K}(\mu))\oplus(\mathbf{K}(\mu)\oplus\mathbf{K}(\mu))$ sobre um corpo algebricamente fechado definimos

- $v_{(0,0)} := ((1,0),(0,0)) = 1$,
- $v_{(1,0)} := ((0,1),(0,0))$,
- $v_{(0,1)} := ((0,0),(1,0))$ e
- $v_{(1,1)} := ((0,0),(0,1))$.

Se $a \in \mathbb{O}_h$, com $h \in \mathbb{Z}_2^2$, então existe uma único $a' \in \mathbb{O}_0$ tal que $a = v_ha'$. Definimos $\widetilde{a} := v_h\bar{a}'$ e estendemos $\widetilde{\ }$ para $\mathbb{O}$ por linearidade. Finalmente, definimos recursivamente $a^{\widetilde{n}}$ como $a^{\widetilde{0}} = 1$ e $a^{\widetilde{n+1}} = a^{\widetilde{n}}\widetilde{a}$ se $n \equiv 0 \pmod 2$ ou $a^{\widetilde{n+1}} = a^{\widetilde{n}}a$ se $n \equiv 1 \pmod 2$.

Observação 3.4.7. O ponto da definição anterior é nos ajudar na hora de fazer avaliações de um polinômio em $\mathbb{O}$. Tome $h \in \mathbb{Z}_2^2 \setminus (0)$ e $a, b, x, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{O}_h$. Temos $a\cdot b = \widetilde{b}\cdot\widetilde{a}$. Um simples argumento por indução mostra que $p_nx\cdots p_1x = x^{\widetilde{n}}P_n\cdots P_1$, onde $P_i = p_i$ se i for par ou $P_i = \widetilde{p_i}$ se i for ímpar. Finalmente $x = v_h(x_1,x_2)$ com $(x_1,x_2) \in \mathbf{K}(\mu) = F\oplus F$ temos para n natural $x^{2n} = v_h^{2n}(x_1^nx_2^n, x_1^nx_2^n)$, $x^{2n+1} = v_h^{2n+1}(x_1^{n+1}x_2^n, x_1^nx_2^{n+1})$, $x^{\widetilde{2n}} = v_h^{2n}(x_1^{2n}, x_2^{2n})$ e $x^{\widetilde{2n+1}} = v_h^{2n+1}(x_2^{2n+1}, x_1^{2n+1})$.

Proposição 3.4.8. *Sejam $f, x, p, p_{i,l}^{j}, z, z_i^j$ e m_i como no Corolário 3.4.5. Suponha que $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$ sobre F, um corpo infinito. Então:*

- *p, $\sum_{j=1}^{m_i} p_{i,i}^{j}x\cdots xp_{i,l}^{j} \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$, onde $l = 1$ se $p_{i,0}^{j} = 1$ e 0 caso contrário para $i = 1,\ldots,n$ caso $|f| \in \langle |x|\rangle$ ou*

- *z, $\sum_{j=1}^{m_i} z_i^j \cdot p_{i,i}^j x \cdots p_{i,1}^j x \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$ para $i = 1, \ldots, n$ caso $\langle |f|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$.*

Demonstração. Se $|f| \in \langle |x| \rangle$ (resp. $\langle |f|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$) nós temos pelo Corolário 3.4.5 que $f \equiv x^n p + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} x^{n-i} p_{i,i}^j x \cdots x p_{i,0}^j$ (resp. $f \equiv zx^n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} z_i^j \cdot x^{n-i} p_{i,i+1}^j x \cdots p_{i,1}^j x$), como as mesmas restrições que 3.4.5. Pela Proposição 3.1.8 nós podemos assumir que F é algebricamente fechado, portanto $\mathbb{O}_h \cong v_h(F \oplus F)$, $\forall h \in \mathbb{Z}_2^2$.

Sob qualquer avaliação de f temos que $f = \sum_{i=0}^n x^{n-i} x^{\widetilde{i}} a_i$ (resp. $f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^{n-i} x^{\widetilde{i}}$), onde $a_0 = p$ e $a_i = \sum_{j=1}^{m_i} P_{i,i+1}^j \cdots P_{i,0}^j$, (resp. $a_0 = z$ e $a_i = \sum_{j=1}^{m_i} z_{i,j} \cdot P_{i,i+1}^j \cdots P_{i,1}^j$), $P_{i,l}^j = p_{i,l}^j$ se l for impar e $P_{i,l}^j = \widetilde{p}_{i,l}^j$ se l for par $i = 1, \ldots n$.

Sejam $x = v(x_1, x_2)$ e $a_i = v_h(a_i', a_i'')$, onde $h = |f||x^n|$ e $v := v_{|x|}$. Temos agora quatro possibilidades para $y_i = v^n(y_i', y_i'') := x^{n-i} x^{\widetilde{i}}$:

- $n = 2m$ é par e $i = 2s$ é par,
  $x^{n-i} x^{\widetilde{i}} = v^n(x_1^{m+s} x_2^{m-s}, x_1^{m-s} x_2^{m+s})$,
- $n = 2m$ é par e $i = 2s+1$ é ímpar,
  $x^{n-i} x^{\widetilde{i}} = v^n(x_1^{m-s-1} x_2^{m+s+1}, x_1^{m+s+1} x_2^{m-s-1})$,
- $n = 2m+1$ é ímpar e $i = 2s$ é par,
  $x^{n-i} x^{\widetilde{i}} = v^n(x_1^{m+s+1} x_2^{m-s}, x_1^{m-s} x_2^{m+s+1})$ ou
- $n = 2m+1$ é ímpar e $i = 2s+1$ é ímpar,
  $x^{n-i} x^{\widetilde{i}} = v^n(x_1^{m-s} x_2^{m+s+1}, x_1^{m+s+1} x_2^{m-s})$.

Portanto para quaisquer n, m, com n natural e $0 \leq m \leq n$ existe um único i, tal que $x^{n-i} x^{\widetilde{i}} = v^n(x_1^{n-m} x_2^m, x_1^m x_2^{n-m})$. Temos quatro possibilidades para $y_i a_i$ (resp. duas possibilidades para $a_i y_i$).

- n par e $|f| = 0$,
  $y_i a_i = v^n(y_i' a_i', y_i'' a_i'')$;
- n par e $|f| = |x|$,
  $y_i a_i = v^{n+1}(y_i'' a_i', y_i' a_i'')$;
- n ímpar e $|f| = 0$,
  $y_i a_i = v^n(y_i' a_i', y_i'' a_i'')$ ou
- n ímpar e $|f| = |x|$
  $y_i a_i = v^{n+1}(y_i'' a_i', y_i' a_i'')$.

(resp. $a_i y_i = (v_h v^n)(y_i' a_i', y_i'' a_i'')$, para n par e $a_i y_i = (v_h v^n)(y_i'' a_i'', y_i' a_i')$ para n ímpar.)

Portanto $a_0, \ldots, a_n = 0$ sob qualquer avaliação, assumindo x_1 e x_2 algebricamente independentes. Ademais $0 = x^{\widetilde{i}} a_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,i}^j x \cdots x p_{i,0}^j$ se

$p^j_{i,0} \neq 1$ e $0 = \widetilde{x^{i-1}a_i} = \sum_{j=1}^{m_i} p^j_{i,i}x \cdots x p^j_{i,1}$ caso contrário (resp. $0 = a_i\widetilde{x^i} = \sum_{j=1}^{m_i} z^j_i \cdot p^j_{i,i}x \cdots p^j_{i,1}x)$. □

Proposição 3.4.9. *Sejam $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O}) \setminus I$ um polinômio multihomogêneo, $x_1 > \cdots > x_n$ as n maiores variáveis que f depende, tais que, $h := |x_1| = \cdots = |x_n|$. Então f é de uma das seguintes formas:*

- $f \equiv \sum_{j=1}^m P^j_1 \cdots P^j_n p^j$;
- $f \equiv \sum_{j=1}^m z^j \cdot P^j_1 \cdots P^j_n$;

onde m é um natural positivo, $P^j_i := p^j_{i,1}x_i \cdots p^j_{i,m_i}x_i$, com $m_i := \deg_{x_i} f$, $p^j_{i,l}, p^j$ e z^j polinômios, tais que, $|p^j_{i,l}| = |p^j| = |x|$ e $\langle |z^j|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$.

Demonstração. Vamos provar a proposição por indução em n, o caso inicial, $n = 1$, é simplesmente 3.4.8. Suponha que a afirmação da proposição seja verdadeira até n, então é verdadeiro para $n + 1$, com efeito:

Se $|f| \in \langle |x| \rangle$ (resp. $\langle |f|, |x| \rangle$) temos pela hipótese de indução que $f \equiv \sum_{j=1}^m P^j_1 \cdots P^j_n p^j$ (resp. $f \equiv \sum_{j=1}^m z^j \cdot P^j_1 \cdots P^j_n$). Seja $p^j_{i,l}$ com $\deg_{x_{n+1}} p^j_{i,l} = r \neq 0$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que ao aplicarmos o Corolário 3.4.5 as ocorrências de x^s_{n+1} sempre tem $s = 1$, pois caso contrário poderíamos eliminar essa ocorrência assim como fizemos na Proposição 3.4.8.

Aumentando m se necessário, temos $p^j_{i,l} \equiv x_{n+1}q_1 \cdots x_{n+1}q_{r-1}x_{n+1}$ ou $p^j_{i,l} \equiv q_1x_{n+1} \cdots q_rx_{n+1}q_{r+1}$. Podemos assumir que o primeiro caso não ocorre, pois se ocorresse teríamos no meio do produtório $x_{n+1}x_i$. Logo $P^j_1 \cdots P^j_n \equiv x_{n+1}g$ ou $P^j_1 \cdots P^j_n \equiv x_ig$, para algum polinômio g e assim como fizemos na Proposição 3.4.8 eliminaríamos essa ocorrência de x_i ou x_{n+1}.

Tomando $Q^j_k = P^j_k$ se $k \neq i$, $Q^j_i = q^j_{i,1}x_i \cdots q^j_{i,m_i}x_i$, $q^j_{i,u} = p^j_{i,u}$ se $u \neq l$, $q^j_{i,l} = q_{r+1}$ temos $P^j_1 \cdots P^j_n \equiv Q^j_1 \cdots Q^j_n p$ onde $p = q_1x_{n+1} \cdots q_rx_{n+1}$ ou $q_rx_{n+1} \cdots q_1x_{n+1}$.

Análogo para p^j (resp. z^j). Portanto $f \equiv \sum_{j=1}^m P^j_1 \cdots P^j_n Q^j_{n+1} p^j$ (resp. $f \equiv \sum_{j=1}^m z^j \cdot P^j_1 \cdots P^j_n Q^j_{n+1}$) com $\deg Q_{n+1} = m_{n+1}$. Logo podemos aplicar o Corolário 3.4.5 à Q_{n+1}. Finalmente utilizando os mesmos argumentos de variáveis algebricamente independente obtemos que $P^j_{n+1} := Q^j_{n+1}$ tem a forma desejada. □

3.5 Coup de Grâce

Nessa secção unimos os resultados das secções anteriores para acabar com o sofrimento de $T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$. Primeiramente, usando os resultados da Secção 3.4, mostramos no Lema 3.5.2 que precisamos apenas considerar os polinômios da forma encontrada na Proposição 3.3.4. Com isso na Proposição 3.5.3 terminamos, o trabalho da Secção 3.3 mostrando que I contém todas as identidades homogêneas dos octônios, o que no caso especial de um corpo infinito, temos a igualdade $T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O}) = I$. Terminamos a secção mostrando como o nosso resultado se encaixa com as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das matrizes dois por dois.

Lema 3.5.1. *Seja $u = u(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m)$ um monômio tal que, $0 \neq h = |x_1| = \cdots = |x_n| \neq |y_1| = \cdots = |y_m| = k \neq 0$. Então existem monômios $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ e $w = w(y_1, \ldots, y_m)$ tais que $u \equiv \pm vw$.*

Demonstração. Provamos a afirmação por indução no grau de u, o caso inicial é trivial. Suponha que a afirmação seja valida para monômios de grau até $r \geq 1$, então é valida para monômios de grau $r+1$, com efeito.

Tome u um monômio de grau $r+1$ nas condições da afirmação, então existem monômios u_1 e u_2 com grau no máximo r tais que $u = u_1 \cdot u_2$. Portanto podemos aplicar a hipótese de indução em u_1 e u_2 e obtemos monômios $v_1 = v_1(x_1, \ldots x_n)$, $v_2 = v_2(x_1, \ldots x_n)$, $w_1 = w_1(y_1, \ldots y_m)$ e $w_2 = w_2(y_1, \ldots y_m)$, tais que $u_1 \equiv \pm v_1 w_1$ e $u_2 \equiv \pm v_2 w_2$. Agora basta considerar $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2$ em todos os dezesseis casos de $|w_1|, |w_2|, |v_1|$ e $|v_2|$.

- $|v_1| = 0,\ |w_1| = 0,\ |v_2| = 0,\ |w_2| = 0$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.13),(3.14)} v_1 v_2 \cdot w_1 w_2$;

- $|v_1| = 0,\ |w_1| = 0,\ |v_2| = 0,\ |w_2| = k$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.13),(3.14)} v_1 v_2 \cdot w_1 w_2$;

- $|v_1| = 0,\ |w_1| = 0,\ |v_2| = h,\ |w_2| = 0$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.13)} (v_1 w_1 \cdot v_2) w_2 \equiv_{(3.5),(3.14),(3.13)} = v_2 v_1 \cdot w_1 w_2$;

- $|v_1| = 0,\ |w_1| = 0,\ |v_2| = h,\ |w_2| = k$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.10)} v_2 (w_2 \cdot v_1 w_1) \equiv_{(3.9)} v_2 (w_2 w_1 \cdot v_1) \equiv_{(3.9)} v_2 v_1 \cdot w_2 w_1$;

- $|v_1| = 0,\ |w_1| = k,\ |v_2| = 0,\ |w_2| = 0$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.13),3.4.2} v_1 v_2^* \cdot w_1 w_2$;

- $|v_1| = 0,\ |w_1| = k,\ |v_2| = 0,\ |w_2| = k$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.13),3.4.2} v_1 v_2^* \cdot w_1 w_2$;

- $|v_1| = 0,\ |w_1| = k,\ |v_2| = h,\ |w_2| = 0$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.8)} -v_2 w_2 \cdot v_1 w_1 \equiv_{(3.9)} -v_2 (v_1 w_1 \cdot w_2) \equiv_{(3.13),3.4.2} -v_2 (w_1 w_2 \cdot v_1^*) \equiv_{(3.9)} -v_2 v_1^* \cdot w_1 w_2$;

- $|v_1| = 0,\ |w_1| = k,\ |v_2| = h,\ |w_2| = k$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.8)} -v_2 w_2 \cdot v_1 w_1 \equiv_{(3.9)} -v_2 (v_1 w_1 \cdot w_2) \equiv_{(3.13),(3.14)} -v_2 (w_1 w_2 \cdot v_1) \equiv_{(3.9)} -v_2 v_1 \cdot w_1 w_2$;

- $|v_1| = h,\ |w_1| = 0,\ |v_2| = 0,\ |w_2| = 0$,
  $v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \equiv_{(3.13),(3.14)} v_1 v_2 \cdot w_1 w_2$;

- $|v_1| = h$, $|w_1| = 0$, $|v_2| = 0$, $|w_2| = k$,
  $v_1w_1 \cdot v_2w_2 \equiv_{(3.9)} v_1(v_2w_2 \cdot w_1) \equiv_{(3.13),3.4.2} v_1(w_2w_1 \cdot v_2^*) \equiv_{(3.9)} v_1v_2^* \cdot w_2w_1$;
- $|v_1| = h$, $|w_1| = 0$, $|v_2| = h$, $|w_2| = 0$,
  $v_1w_1 \cdot v_2w_2 \equiv_{(3.13),3.4.2} v_1v_2 \cdot w_1^*w_2$;
- $|v_1| = h$, $|w_1| = 0$, $|v_2| = h$, $|w_2| = k$,
  $v_1w_1 \cdot v_2w_2 \equiv_{(3.9)} v_1(v_2 \cdot w_2w_1) \equiv_{(3.8)} (w_2w_1 \cdot v_2)v_1 \equiv_{(3.9),(3.5)} v_2v_1 \cdot w_2w_1$;
- $|v_1| = h$, $|w_1| = k$, $|v_2| = 0$, $|w_2| = 0$,
  $v_1w_1 \cdot v_2w_2 \equiv_{(3.9)} v_1(v_2w_2 \cdot w_1) \equiv_{(3.13),3.4.2} v_1(w_2w_1 \cdot v_2^*) \equiv_{(3.9)} v_1v_2^* \cdot w_2w_1$;
- $|v_1| = h$, $|w_1| = k$, $|v_2| = 0$, $|w_2| = k$,
  $v_1w_1 \cdot v_2w_2 \equiv_{(3.9)} v_1(v_2w_2 \cdot w_1) \equiv_{(3.13),(3.14)} v_1(w_2w_1 \cdot v_2) \equiv_{(3.9)} v_1v_2 \cdot w_2w_1$;
- $|v_1| = h$, $|w_1| = k$, $|v_2| = h$, $|w_2| = 0$,
  $v_1w_1 \cdot v_2w_2 \equiv_{(3.8),(3.9)} -v_2(v_1 \cdot w_2w_1) \equiv_{(3.8)} -(w_2w_1 \cdot v_1)v_2 \equiv_{(3.9)} -w_2w_1 \cdot v_2v_1 \equiv_{(3.5)} -v_1v_2 \cdot w_2w_1$;
- $|v_1| = h$, $|w_1| = k$, $|v_2| = h$, $|w_2| = k$,
  $v_1w_1 \cdot v_2w_2 \equiv_{(3.11)} -(v_2w_2 \cdot w_1)v_1 - (v_1 \odot (v_2w_2))w_1 \equiv_{(3.8)} -(v_2w_2 \cdot w_1)v_1 \equiv_{(3.9)} -(v_2 \cdot w_1w_2)v_1 \equiv_{(3.13),(3.5)} -v_2v_1 \cdot w_2w_1$.

□

Lema 3.5.2. *Seja f um polinômio multihomogêneo. Suponha que $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O}) \setminus I$ seja de grau mínimo sobre F, um corpo infinito. Então f depende de uma variável da componente zero.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista um polinômio multihomogêneo em $T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O}) \setminus I$ que não dependa de variáveis da componente nula. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_k)$ um tal polinômio de grau mínimo com $h := |x_1| = \cdots = |x_n|$, $h \neq h' := |z_1| = \cdots = |z_m|$, $hh' = |w_1| = \cdots = |w_k|$ e $\deg_h f \geq \deg_{h'} f$, $\deg_{hh'} f$.

Finalmente chegou o momento de brincarmos com a ordem em $\mathbb{Z}_2^2$! Os resultados até aqui são independentes da ordem escolhida para $\mathbb{Z}_2^2$, ou seja, eles são válidos para todas as seis possíveis (se lembre, só aceitamos ordens na qual 0 é elemento máximo) ordens de $\mathbb{Z}_2^2$. Tome uma das duas ordens com $h > h'h$, h'.

Aplicando a Proposição 3.4.9 ao polinômio f obtemos $f \equiv \sum_{j=1}^{r} P_1^j \cdots P_n^j p^j$ (resp. $f \equiv \sum_{j=1}^{r} z^j \cdot P_1^j \cdots P_n^j$ e possivelmente renomeando as variáveis para $|z^j| = h'$) onde r é um natural positivo, $P_i^j := p_{i,1}^j x_i \cdots p_{i,n_i}^j x_i$, com $n_i := \deg_{x_i} f$, $p_{i,l}^j, p^j$ e z^j polinômios, tais que, $|p_{i,l}^j| = |p^j| = |x|$ e $\langle |z^j|, |x| \rangle = \mathbb{Z}_2^2$.

Pelo Lema 3.5.1, possivelmente aumentando o l, temos que $p_{i,l}^j \equiv z_{i,l}^j w_{i,l}^j$ e $p^j \equiv z_1^j w_1^j$ (resp. $z^j \equiv z_2^j w_2^j$) onde $z_{i,l}^j$'s e z_1^j's (resp. $z_{i,l}^j$'s e z_2^j's) dependem apenas das variáveis $z_1, \ldots, z_m$ e $w_{i,l}^j$'s e w_1^j's (resp. $w_{i,l}^j$'s e w_2^j's) dependem apenas das variáveis $w_1, \ldots, w_k$.

Como $|p_{i,l}^j| = h$ temos que $|z_{i,l}^j| = h'$ e $|w_{i,l}^j| = h'h$, analogamente $|z_1^j| = h'$ e $|w_1^j| = h'h$ (resp. $|z_2^j| = h'$ e $|w_1^j| = 0$). Portanto $\deg_{h'} z_{i,l}^j \geq 1$ e $\deg_{h'} z_1^j \geq 1$ (resp $\deg_{h'} z_2^j \geq 1$). Portanto $\deg_{h'} f \geq \deg_h f + 1$.

ABSURDO! □

Proposição 3.5.3. *Seja f um polinômio multihomogêneo sobre F, um corpo infinito. Assuma que $f \in T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$. Então $f \in I$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $f \notin I$. Logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que f é de grau mínimo entre os polinômios multihomogêneos de $T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O}) \setminus I$.

Temos que $\deg_0 f = 1$ pelo Lema 3.5.2 e pela Proposição 3.3.4. Portanto $f = f(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_k)$, com $|t| = 0$, $0 \neq h := |x_1| = \cdots = |x_n|$, $x_1 > \cdots > x_n$, $0, h \neq h' := |z_1| = \cdots = |z_m|$, $hh' = |w_1| = \cdots = |w_k|$ e $\deg_h f \geq \deg_{h'} f$, $\deg_{hh'} f$. Também modificamos a ordem para termos $h > h', hh'$.

Novamente pela Proposição 3.3.4 temos $f \equiv \sum_{i=1}^m L_i t \cdot R_i$ onde m é um natural, L_i's e R_i's são polinômios com $|t| = 0 \neq h_i := |L_i| = |R_i|$ e $\deg_0 y_i = \deg_0 z_i = 0$. Aplicando o Corolário 3.4.5 aos y_i's e z_i's além de aumentar o m, obtemos para cada i um dos dois casos:

- $L_i \equiv x_1^{l_i} p_{i,m_i}^1 x_1 \cdots p_{i,1}^1 x_1 p_{i,0}^1$ e $R_i \equiv x_1^{r_i} p_{i,m_i'}^2 x_1 \cdots p_{i,1}^2 x_1 p_{i,0}^2$, caso $h_i = h$ ou

- $L_i \equiv z_i^1 \cdot x_1^{l_i} p_{i,m_i}^1 x_1 \cdots p_{i,1}^1 x_1$ e $R_i \equiv z_i^2 \cdot x_1^{r_i} p_{i,m_i'}^2 x_1 \cdots p_{i,1}^2 x_1$, caso $h_i \neq h$.

Com l_i, m_i, r_i, m_i' naturais tais que $l_i + m_i + r_i + m_i' = n_1 := \deg_{x_1} f$ e $p_{i,l}^j, z_i^j$ polinômios tais que $|p_{i,l}^j| = h$, (com a exceção de $p_{i,0}^j = 1$, quando $l_i \equiv 0 \pmod 2$) $\langle |z_i^j|, h \rangle = \mathbb{Z}_2^2$.

Comecemos com o primeiro caso. Claramente repetindo os argumento da Proposição 3.4.5 podemos assumir que $l_i = 0$ e $r_1 \leq 1$. Portanto $p_{i,0}^1 \neq 1$ é um polinômio e $L_i t R_i \equiv p_{i,m_i}^1 t x_1 \cdots p_{i,1}^1 x_1 p_{i,0}^1 R_i$. Caso $r_i = 0$ podemos aplicar o Lema 3.4.2 para aglutinarmos $p_{i,0}^1 p_{i,m_i'}^2$ dentro de algum outro $p_{i,l}^j$. De qualquer maneira obtemos $L_i t R_i \equiv p_{i,n_1} t x_1 \cdots p_{i,1} x_1 p_{i,0}$, com $p_{i,n_1}, \ldots, p_{i,0}$ polinômios, tais que, $|p_{i,n_1}| = \cdots = |p_{i,0}| = h$.

Para o segundo caso nós temos quatro possibilidades:

- $|z_i^1| = |z_i^2|$ e $|x_1^{l_i} p_{i,m_i}^1 x_1 \cdots p_{i,1}^1 x_1| = |x_1^{r_i} p_{i,m_i'}^2 x_1 \cdots p_{i,1}^2 x_1| = 0$
  $L_i t R_i \equiv_{(3.9)} (z_i^1 \cdot t x_1^{l_i} p_{i,m_i}^1 x_1 \cdots p_{i,1}^1 x_1) R_i \equiv_{(3.13)} (z_i^1 (t x_1^{l_i} p_{i,m_i}^1 x_1 \cdots p_{i,1}^1 x_1 \cdot$

$z_i^2))x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1 \equiv_{(3.14),(3.7),(3.13)} (z_i^1z_i^2)x_1tx_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1^{r_i}$
$p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1,$

- $|z_i^1| = |z_i^2|$ e $|x_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1| = |x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1| = h$
$L_itR_i \equiv_{(3.9)} (z_i^1\cdot tx_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1)R_i \equiv_{(3.11),(3.8)} -R_i(tx_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots$
$\cdots p^1_{i,1}x_1)z_i^1 \equiv_{(3.9)} -z_i^2(tx_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1)z_i^1 \equiv_{(3.7)}$
$-(z_i^2z_i^1)x_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}tx_1,$

- $|z_i^1| \neq |z_i^2|$ e $|x_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1| = 0,\ |x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1| = h$
$L_itR_i \equiv_{(3.13)} z_i^1(x_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1tR_i) \equiv_{(3.10)} z_i^1(z_i^2(x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}$
$x_1x_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1t)) \equiv_{(3.8)} -z_i^1((x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1x_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}$
$x_1t)z_i^2) \equiv_{(3.16)} x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1x_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1t(z_i^1z_i^2)$ ou

- $|z_i^1| \neq |z_i^2|$ e $|x_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1| = h,\ |x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1| = 0$
$L_itR_i \equiv_{(3.9)} (z_i^1tx_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1)R_i \equiv_{(3.11)} -(R_itx_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1$
$)z_i^1 \equiv_{(3.9)} -(z_i^2tx_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1)z_i^1 \equiv_{(3.8),(3.11)} -$
$(z_i^1z_i^2)tx_1^{l_i}p^1_{i,m_i}x_1\cdots p^1_{i,1}x_1x_1^{r_i}p^2_{i,m'_i}x_1\cdots p^2_{i,1}x_1.$

Para cada uma das quatro possibilidades nós recaímos no primeiro caso.

Repetindo os argumentos da Proposição 3.4.9 obtemos $f \equiv \sum_{j=1}^m P_1^j\cdots$ $\cdots P_n^jtp^j$, onde m é um natural positivo, $P_i^j := p^j_{i,1}x_i\cdots p^j_{i,n_i}x_i$, com $n_i :=$ $\deg_{x_i} f$, $p^j_{i,l}$ e p^j são polinômios, tais que, $|p^j_{i,l}| = |p^j| = |x|$. Finalmente repetindo o argumento de contagem do Lema 3.5.2 chegamos numa contradição que $\deg_h f \geq \deg_{h'} f$. □

Teorema 3.5.4. *Se F é um corpo infinito, então $T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$ tem as seguintes identidades como base de identidades:*

$$\begin{aligned}
ab\cdot v &= v\cdot ba, && |v|\neq 0\neq |a| = |b|;\\
(ax\cdot b)v &= v(ba\cdot x), && |v|\neq 0 = |x|\neq |a| = |b|;\\
v(ax\cdot b) &= (ba\cdot x)v, && |v|\neq 0 = |x|\neq |a| = |b|;\\
x\odot y &= 0, && \langle |x|,|y|\rangle = \mathbb{Z}_2^2;\\
vb\cdot a &= v\cdot ab, && |v|\notin \langle |a|,|b|\rangle;\\
a\cdot vb &= v\cdot ba, && \langle |v|,|b|\rangle = \mathbb{Z}_2^2,\ |a| = 0;\\
va\cdot w + wa\cdot v &= -(v\odot w)a, && |v|,|w|\notin \langle |a|\rangle \neq (0);\\
va\cdot wb + wa\cdot vb &= -(v\odot w)ba, && |v|,|w|\notin \langle |a|(\neq 0),|b|\rangle;\\
(x,y,z) &= 0, && \langle |x|,|y|,|z|\rangle \neq \mathbb{Z}_2^2;\\
[x,y] &= 0, && |x| = |y| = 0;\\
(x,x,y) &= (x,y,y) = 0;
\end{aligned}$$

$$v \cdot wb + w \cdot vb = (v \odot w)b, \qquad |v|, |w| \notin \langle |b| \rangle.$$

Teorema 3.5.5. *Seja D um domínio infinito, e forma a álgebra " Cayley-Dickson" sobre D, $\mathbb{O}$. Então $I = T_{\mathbb{Z}_2^2}(\mathbb{O})$.*

Demonstração. Uma aplicação direta de 3.1.8. □

Observação 3.5.6. Sejam A uma álgebra graduada pelo grupo G com $T_G(A) = J$ e H um subgrupo de G. Se denotarmos $J_H := \{p \in J \mid p = p(x_1, \ldots x_n); |x_1|, \ldots, |x_n| \in H\}$ é fácil ver que $T_H(A_H) = J_H$.

Lembrando que duas álgebras de composição cindidas de mesma dimensão são isomorfas, vemos que $M_2(F) \cong \mathbf{Q}(0,1)$. Se alguém empurra a graduação $\mathbb{Z}_2$ sobre o isomorfismo, ele obtém que a componente zero é formada pelas matrizes diagonais, e a componente unitária pelas matrizes anti-diagonais. Mais geralmente, seja $M_n(F)_\alpha :=$lin.span$\{e_{i,j} | j - i \equiv \alpha \pmod{n}\}$. Para tal, temos o seguinte:

Teorema 3.5.7. *Seja F um corpo de característica zero. Então $T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(F))$ é gerado como um T-ideal por associatividade e as seguintes identidades:*

$$xy - yx = 0 \qquad |x| = |y| = 0; \tag{3.17}$$

$$x_1xx_2 - x_2xx_1 = 0 \qquad |x_2| = |x_1| = -|x|. \tag{3.18}$$

Este teorema foi provado pela primeira vez por Di Vincenzo em [DV92] para matrizes dois por dois. Mais tarde, Vasilovsky estendeu a prova para matrizes de qualquer ordem em [Vas99]. Depois Koshlukov e Azevedo provaram o teorema para matrizes dois por dois sobre um corpo infinito de característica maior que dois em [KdA02]. Finalmente, em [BKK09] Brandão, Koshlukov e Krasilnikov observaram que a prova em [KdA02] ainda é válida para um domínio de integridade infinito, isto é:

Teorema 3.5.8. *Seja D um domínio infinito. Então $T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(D))$ é gerado como um T-ideal pelas identidades* (3.17)*,* (3.18) *e associatividade.*

Que agora nós reobtemos:

Demonstração. Com foi observado em 3.5.6 temos que $T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(D)) = I_{\mathbb{Z}_2}$. Aqui fazemos os abusos de notação $\mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2, 0) \subset \mathbb{Z}_2^2$ e $M_2(D) = \mathbb{O}_{\mathbb{Z}_2}$. Finalmente lembramos o leitor que durante toda a demonstração não utilizamos uma identidade com variáveis de uma componente fora de $\mathbb{Z}_2$ para obter uma redução em $M_2(D) = \mathbb{O}_{\mathbb{Z}_2}$. Ou seja, $I_{\{(0,0),(1,0)\}}$ é apenas o subconjunto das identidades listadas no Teorema 3.2.4 que dependem apenas das variáveis de $\mathbb{Z}_2$. Para a conveniência do leitor listamos tais identidades:

$$ab \cdot v = v \cdot ba, \qquad |v| = |a| = |b| = \bar{1}; \tag{5*}$$

$$(ax \cdot b)v = v(ba \cdot x), \qquad |x| = 0, \ |a| = |b| = |v| = \bar{1}; \tag{6*}$$

$$v(ax \cdot b) = (ba \cdot x)v, \qquad |x| = 0,\ |a| = |b| = |v| = \bar{1}; \tag{7*}$$
$$vb \cdot a = v \cdot ab, \qquad |v| = \bar{1},\ |a| = |b| = 0; \tag{9*}$$
$$(x, y, z) = 0, \tag{13*}$$
$$[x, y] = 0, \qquad |x| = |y| = 0; \tag{14*}$$

As equações (8), (10), (11) e (12) não se intersectam os domínios de $\mathbb{Z}_2$. (13*) é associatividade, (14*) e (5*) são, respectivamente, (3.17) e (3.18). Substituindo a por ax em (5*) e usando associatividade, obtemos (6*). Substituindo simultaneamente a por v, b por ax e v por b em (5*) e usando associatividade, obtemos (7*). Finalmente, multiplicando (14*) por v e usando associatividade obtemos (9*). □

Capítulo 4

Identidades Alternativamente Fracas

Nesse capítulo, trabalhamos sobre um corpo infinito, de característica zero. Como o leitor deve imaginar o motivo para tal é a necessidade que as variedades de álgebras sejam dadas por identidades multilineares.

O objetivo do presente capítulo é encontrar as identidades simultaneamente fracas e antissimétrica dos octônios, ou alternativamente fracas. Para isso, fazemos o uso de superálgebras e a sua propriedade bem conhecida, que reduz o estudo de identidades antissimétricas para o estudo de superálgebras geradas por um elemento ímpar.

Na Secção 4.1 apresentamos ao leitor os resultados e conceitos utilizados no capítulo. Na Secção 4.2 manipulamos álgebras alternativas quadráticas para termos uma estrutura que representa uma "álgebra quadrática sem traço", daí o seu nome, TQ. Nas Secções 4.3, 4.4 e 4.5 trabalhamos para encontrar a TQ superálgebra livremente gerada por um elemento ímpar. Finalmente, na Secção 4.6 usamos a estrutura obtida da TQ álgebra livre para obter as identidades alternativamente fracas dos octônios, tanto no contexto Malcev quanto no contexto alternativo. Note que as identidades fracas e Malcev são Malcev ordinárias, portanto obtemos as identidades alternativas da álgebra de Malcev simples, $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$.

4.1 Superálgebras e Identidades Fracas

Definição 4.1.1 (Superálgebra)**.** Seja A um álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Dizemos que A é uma *superálgebra*. Se $A = A_0 \oplus A_1$, chamamos A_0 a parte *par* de A e A_1 a parte *ímpar* de A. Analogamente chamamos um elemento de A_0 de par e um de A_1 de ímpar. Sejam $B = B_0 \oplus B_1$ e $C = C_0 \oplus C_1$ super (isto é, $\mathbb{Z}_2$-graduado) espaços vetoriais e $\varphi : B \to C$ uma função. Dizemos que φ é:

- uma *super-transformação linear* ou simplesmente *super-linear* se for uma transformação linear $\mathbb{Z}_2$-graduada;

- um *super-homomorfismo* se B e C forem superálgebras e φ for um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado.

Via de regra, algo é dito um *super-algo* se for um algo $\mathbb{Z}_2$-graduado. Entretanto essa definição eurística não cobre supercomutatividade, superalternatividade, supervariedades entre outras. Essas serão abordadas em breve.

Definição 4.1.2 (Conjunto das Partes)**.** Seja X um conjunto. Denotamos por $\wp(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X, dizemos que $\wp(X)$ é o *conjunto das partes de* X ou *conjunto das potências de* X. Denotamos por $\wp_\omega(X) := \{Y \in \wp(X) \mid |Y| < \infty\}$ o *conjunto das partes finitas de* X.

Definição 4.1.3. Sejam X um conjunto completamente ordenado e $I, J \in \wp_\omega(X)$. Claramente podemos escrever $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ e $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$, onde $n = |I|$, $m = |J|$ e $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m$ são elementos de X tais que $i_1 < \cdots < i_n$ e $j_1 < \cdots < j_m$. Sejam $r_1, \ldots, r_{n+m}, k_1, \ldots, k_{n+m}$ elementos de X, tais que $r_s = i_s$ se $s \leq n$, $r_s = j_{s-n}$ se $s > n$, $k_1 \leq \cdots \leq k_{n+m}$ e $I \cup J = \{k_1, \ldots, k_{n+m}\}$. Caso $I \cap J = \emptyset$ seja $\sigma \in S_{n+m}$ tal que $r_{\sigma(s)} = k_s$ para $s = 1, \ldots, n+m$. Denotamos $(-1)^{(I,J)}$ por:

- 0 se $I \cap J \neq \emptyset$,
- 1 se $I \cap J = \emptyset$ e σ for par ou
- -1 se $I \cap J = \emptyset$ e σ for ímpar.

Definição 4.1.4 (Álgebra de Grassmann)**.** Seja $E = E_0 \oplus E_1$ o super espaço vetorial com as base: $\{e_I \mid I \in \wp_\omega(\mathbb{N}),\ |I| \equiv 0 \pmod 2\}$ e $\{e_I \mid I \in \wp_\omega(\mathbb{N}),\ |I| \equiv 1 \pmod 2\}$ para E_0 e E_1 respectivamente. Definimos a multiplicação nos elementos da base de E por $e_I e_J := (-1)^{(I,J)} e_{I \cup J}$ e estendemos para E pela distributiva. E é dito a *álgebra de Grassmann*. Observe que a álgebra de Grassmann é uma superálgebra associativa e com unidade $(1 := e_\emptyset)$. Caso i seja um natural positivo fazemos o abuso de notação usual de denotarmos e_i para $e_{\{i\}}$.

Observação 4.1.5. Sejam n e $i_1 < \cdots < i_n$, naturais positivos. É um exercício trivial mostrar que $e_{i_1} \cdots e_{i_n} = e_I$ onde $I := \{i_i, \ldots i_n\}$. Também é fácil ver que se $a, b \in E$ são elemento homogêneos nós temos as seguintes identidades $ab = ba$ caso $|a| = 0$ ou $|b| = 0$ e $ab = -ba$ caso contrário (isto é, $|a| = |b| = \bar{1}$).

Definição 4.1.6 (Envolvente de Grassmann)**.** Seja A uma superálgebra. Defina a *envolvente de Grassmann* de A como sendo $E(A) := (E_0 \otimes A_0) \oplus (E_1 \otimes A_1)$.

Definição 4.1.7 (Supervariedades)**.** Seja $\mathscr{V}$ uma variedade de álgebras, definimos $\mathscr{V}_s(= \text{super-}\mathscr{V})$ como sendo a classe de superálgebras tal que a a sua envolvente de Grassmann pertence a $\mathscr{V}$. Ou seja, $A \in \mathscr{V}_s$ se e somente se $E(A) \in \mathscr{V}$. Dizemos que $\mathscr{V}_s$ é uma *supervariedade* de álgebras e se o leitor almejar um grau maior de especificidade poderá dizer que $\mathscr{V}_s$ foi dada por, associada à, definida por, derivada da, etc $\mathscr{V}$. Quando a variedade de álgebras $\mathscr{V}$ tem um nome dizemos que a superálgebra A é *supernome* se $A \in \mathscr{V}_s$. Por exemplo Dizemos que A é *supercomutativa*, *super-Lie*, *superalternativa*, *super-Malcev*, superetc, se $E(A)$ for, comutativa, Lie, alternativa, Malcev, etc.

Apesar da definição anterior dar conta do caso geral, para nós não é o suficiente. As variedades são dadas por identidades e seria interessante se a nossa definição de supervariedade fosse dada por identidades também. Para tal vamos brincar um pouco com a envolvente de Grassmann e um pouco de permutações. Que faremos agora.

Notação 4.1.8 (L_n e PL_n)**.** Definimos por L_n o conjunto dos monômios multilinear de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Analogamente definimos por PL_n o conjunto dos polinômios multilinear de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Definição 4.1.9 (Monômio Ordenado, P_n)**.** Seja $u \in L_n$. Vamos definir recursivamente P_n por $P_1 := \{x_1\}$ e $P_n := \{v \cdot u(x_{n'+1}, \ldots, x_n) \mid 1 \leq n' < n, v \in P_{n'}, u \in P_{n-n'}\}$ para $n > 1$. P_n é dito *conjunto dos monômios ordenados de grau* n ou *conjunto dos arranjos de parênteses de grau* n.

Observação 4.1.10. Temos dois ótimos motivos para enxergar P_n como o conjunto de arranjos de parênteses. Primeiramente observe que um monômio w está em P_n se, e somente se, $\varphi(w) = x_1 \cdots x_n$, onde φ é a avaliação canônica dos polinômios não associativos nos polinômios associativos. Segundo se $u \in L_n$ então existem únicos $p \in P_n$ e $\sigma \in S_n$ tais que, $u = p(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. As prova dessas duas afirmações são triviais e deixamos à cargo do leitor.

Notação 4.1.11. Sejam $\sigma \in S_n$ e $u \in L_n$. Por simplicidade denotamos $\sigma u = u(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

Definição 4.1.12 (Sinal da Parte Ímpar de uma Permutação)**.** Sejam $\sigma \in S_n$ e $g_1, f_1, \ldots, g_n, f_n \in E$ elementos homogêneos, tais que $s_i := |g_i| = |f_i|$ para $i = 1, \ldots, n$, $g := g_1 \cdots g_n \neq 0$ e $f := f_1 \cdots f_n \neq 0$. Não é um exercício difícil mostrar que $g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} = \pm g$, análogo para f e f_i's. Pela Observação 4.1.5 temos $g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} = +g$ se e somente se $f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(n)} = +f$. Portanto podemos definir $(-1)^{\sigma_{odd}}(s_i, \ldots, s_n)$ por

- $+1$ se $g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} = +g$ ou
- -1 se $g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} = -g$.

Para aliviar a notação em vamos simplesmente escrever $(-1)^{\sigma_{odd}}$ e assumimos que os s_i's estão subentendidos. $(-1)^{\sigma_{odd}}$ é dito *o sinal da parte ímpar de* σ.

Observação 4.1.13. Sejam $X := S_n \times P_n$, $f \in PL_n$, A uma superálgebra, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $g_1, \ldots, g_n \in E$ elementos homogêneos e $g := g_1 \cdots g_n$ tais que, $|a_i| = |g_i|$ para $i = 1, \ldots, n$. Primeiramente observe que existem escalares $\lambda_{(\sigma,p)} \forall (\sigma, p) \in X$ univocamente determinados, tais que $f = \sum_{(\sigma,p)\in X} \lambda_{(\sigma,p)} \sigma p$. Avaliando f em $g_1 \otimes a_1, \ldots, g_n \otimes a_n$ obtemos:

$$\begin{aligned}
f(g_1 \otimes a_1, \ldots, g_n \otimes a_n) &= \sum_{(\sigma,p)\in X} \lambda_{(\sigma,p)} p(g_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)} \otimes a_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{(\sigma,p)\in X} \lambda_{(\sigma,p)} p(g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)}) \otimes p(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{(\sigma,p)\in X} \lambda_{(\sigma,p)} (-1)^{\sigma_{odd}} g_1, \ldots, g_n \otimes p(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) \\
&= g \otimes \Big(\sum_{(\sigma,p)\in X} (-1)^{\sigma_{odd}} \lambda_{(\sigma,p)} p(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) \Big) \\
f(g_1 \otimes a_1, \ldots, g_n \otimes a_n) &= g \otimes \Big(\sum_{(\sigma,p)\in X} (-1)^{\sigma_{odd}} \lambda_{(\sigma,p)} \sigma p \Big)(a_1, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

Definição 4.1.14 (Superidentidade)**.** Sejam $f \in PL_n$ e $X := S_n \times P_n$. Escreva f como $f = \sum_{(\sigma,p)\in X} \lambda_{(\sigma,p)} \sigma p$. Definimos $f_s := \sum_{(\sigma,p)\in X} (-1)^{\sigma_{odd}} \lambda_{(\sigma,p)} \sigma p$. Dizemos que f_s é a *superidentidade determinada por* f ou simplesmente a f*-superidentidade.* Caso f tenha um nome chamamos f_s pelo seu *supernome.*

Observação 4.1.15. Na última definição fizemos muitos abusos de notação. Primeiramente f_s é um superpolinômio esquema. Isto é, ele é um conjunto de 2^n superpolinômios, um para cada possibilidade das paridades dos x_i's (que não aparecem explicitamente, pois estão dentro dos p's). Além disso $(-1)^{\sigma_{odd}}$ é para ser calculado com as paridades dos x_i's (uma para cada combinação de paridades e σ). Dito isso podemos terminar os cálculos da Observação 4.1.13 e obter a relação esquema:

$$f(g_1 \otimes a_1, \ldots, g_n \otimes a_n) = g \otimes f_s(a_1, \ldots a_n). \tag{4.1}$$

Lema 4.1.16. *Seja $\mathscr{V}$ a variedade de álgebras gerada pelo conjunto de identidades multilineares I. Então a supervariedade $\mathscr{V}_s$ é a classe de superálgebras que satisfazem o conjunto de superidentidades $I_s := \{f_s \mid f \in I\}$.*

Demonstração. Primeiramente lembramos que estamos trabalhando sobre um corpo de caraterística zero. Depois aplicamos os resultados obtidos até aqui da secção. □

Observação 4.1.17. Euristicamente dizemos que o "monômio troca de sinal para cada troca de lugar de variáveis ímpares". Podemos deixar um pouco mais clara a última afirmação com "$(-1)^{\sigma_{odd}}$ pode ser condensado como (-1) elevado à uma função polinomial da paridade das variáveis". O leitor deve refletir até entender as duas afirmações. Deixamos a seguinte dica: $(x_2x_1)_s = (-1)^{|x_1||x_2|}x_2x_1$.

Por simplicidade listamos algumas super-versões de identidades ordinárias:

$$\begin{aligned}
xy - (-1)^{|x||y|}yx =& 0, && \text{(super-comutatividade)}\\
xy + (-1)^{|x||y|}yx =& 0, && \text{(super-anticomutatividade)}\\
(x,y,z) + (-1)^{|x||y|}(y,x,z) =& 0, && \text{(super-alternatividade à esquerda)}\\
(x,y,z) + (-1)^{|y||z|}(x,z,y) =& 0, && \text{(super-alternatividade à direita)}\\
(xy\cdot z)t + (-1)^{|y||z|}xz\cdot yt =& && \text{(super-identidade de Malcev)}\\
=& x(yz\cdot t) + (-1)^{|y|(|z|+|t|)}(x\cdot zt)y+ &&\\
& + (-1)^{|t|(|y|+|z|)}(xt\cdot y)z. &&
\end{aligned}$$

Assim como fizemos com álgebras ordinárias podemos definir o *super-comutador* como sendo $[x,y]_s := xy - (-1)^{|x||y|}yx$, o *supercomutador longo* como sendo $[x_1,\ldots,x_{n+1}]_s := [[x_1,\ldots,x_n]_s, x_{n+1}]_s$ o *super-produto de Jordan* como sendo $x \odot_s y := xy + (-1)^{|x||y|}yx$,, etc... Note que não precisamos definir um super-associador, pois seria o associador ordinário. Ainda mais, é possível definir os super centros, note que não é necessário definir o super-centro associativo.

- Denotamos o *supercentro comutativo* da superálgebra A por $K(A) := \{a \in A \mid [a,x]_s = 0\ \forall x \in A\}$.
- Denotamos o *supercentro* da álgebra A por $Z(A) := N(A) \cap K(A)$.

Existe uma relação muito interessante entre superálgebras e identidades antissimétricas. Sejam $T = \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $T_n := \{t_m \in T \mid m \leq n\}$ e $u \in V[x]$, ou seja, um monômio não associativo que contém apenas a letra x. Vamos definir uma função de $V[x]$ para $V[T]$, $u \to \ddot{u}$ tal que se $\deg u = n$ então $\ddot{u} \in V[T_n]$.

Definimos $\ddot{}$ por indução no grau. Se u tem grau um então $u = x$ e definimos $\ddot{u} := t_1$. Suponha que tenhamos definido $\ddot{}$ para todos os monômios de grau menor que n e seja u um monômio de grau n. Existem únicos v e w tais que $u = v\cdot w$ e $\deg v, \deg w < n$. Definimos $\ddot{u} := \ddot{v}\cdot\ddot{w}(t_{m+1},\ldots,t_n)$, onde $m := \deg v$. Agora estendemos $\ddot{}$ para todos os polinômios por linearidade.

Definição 4.1.18 (Polarizador)**.** Sejam x uma variável ímpar e $f = f(x)$ um superpolinômio de grau n. Definimos:

$$\mathrm{Skew}(f) := \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\sigma}\ddot{f}(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

Observação 4.1.19. Claramente $\text{Skew}(f)$ é um polinômio antissimétrico e, como estamos em característica zero, $\text{Skew}(f)$ é uma identidade para a variedade de álgebras $\mathscr{V}$ se, e somente se, f for uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para a variedade de superálgebras $\mathscr{V}_s$. Dizemos que $\text{Skew}(\ )$ é o *polarizador* e $\text{Skew}(f)$ é a *polarização* de f.

Também podemos estender o conceito de álgebras quadráticas para superálgebras quadráticas.

Definição 4.1.20 (Superforma Simétrica, Associativa e Invariante)**.** Sejam A uma superálgebra superalternativa e $\tau : A \to Z(A)$ uma supertransformação linear. Dizemos que τ é uma superforma *simétrica*, *associativa* se $\tau([x,y]_s) = 0$, $\tau((x,y,z)) = 0$, respectivamente. Dizemos que τ é uma superforma *invariante* se for associativa e simétrica. Dizemos que τ é um *supertraço* se for invariante e $\tau(\tau(x)y) = \tau(x)\tau(y)$.

Definição 4.1.21 (Superálgebra Quadrática Alternativa)**.** Sejam A uma superálgebra superalternativa e $\tau : A \to Z(A)$ um supertraço. O par (A,τ) ou simplesmente A, quando τ, estiver claro é dito uma *superálgebra quadrática* se $\tau(1) = 2$ e

$$x \odot_s y - \tau(x)y - (-1)^{|x||y|}\tau(y)x - \tau(xy) + \tau(x)\tau(y) = 0. \tag{4.2}$$

Note que assim como no caso de álgebras quadráticas alternativas normais τ é Z_τ-linear. É sempre bom observar que esse conceito também veio da álgebra envolvente de Grassmann.

A definição a seguir é de fundamental importância para o estudo de identidades fracas e foi dada pela primeira vez por Razmyslov no caso associativo-Lie no seu estudo das identidades fracas das matrizes dois por dois.

Definição 4.1.22 (Par Alternativo-Malcev)**.** Dizemos que o par de álgebras (R,L) é um *par alternativo-Malcev* se R for uma álgebra alternativa, L uma subálgebra de Malcev de $R^{(-)}$ e R for gerada por L como álgebra alternativa. Se trocarmos nessa definição, álgebra por superálgebra temos a definição de um *super-par alternativo-Malcev.*

Definição 4.1.23 (Ideal Verbal)**.** Dado um par alternativo-Malcev (R,L) dizemos que o polinômio $f = f(x_1,\dots,x_n)$ é uma *identidade fraca* do par, se $f(l_1,\dots,l_n) = 0$, avaliado em R, para quaisquer $l_1,\dots,l_n \in L$. Definimos o W-ideal do par como sendo o conjunto de todas as identidades fracas por ele satisfeito. É fácil ver que, assim como identidades ordinárias, todo ideal de identidades fracas é fechado com respeito a homomorfismo de Malcev. Dizemos que um ideal com essa propriedade é um *ideal verbal.* As semelhanças não param aí, temos que todo ideal verbal é o ideal de identidades fracas de algum par, podemos também definir pares relativamente livres, etc...

4.2 TQ Álgebras

O objetivo desse secção é o de obter o conceito de TQ álgebras. Para isso, começamos trabalhando com os elementos sem traço de uma álgebra quadrática, visto que Shestakov e Zhukavets em [SZ09] mostraram que as identidades fracas dos octônios coincidem com as da álgebra quadrática livre. Obtemos duas definições para uma álgebra quadrática sem traço, a Malcev e a alternativa. Mostramos que a definição de Malcev é equivalente à tomar as álgebras de Malcev dos elementos sem traço de uma álgebra quadrática, além de ser um caso particular da definição TQ alternativa.

É um fato bem conhecido que uma álgebra (resp. superálgebra) alternativa dá origem a uma álgebra (resp. superálgebra) de Malcev por meio do comutador, isto é, se trocarmos o produto original pelo comutador (resp. supercomutador). Por essa razão, quando soubermos que a nossa álgebra (resp. superálgebra) for de Malcev denotaremos o seu produto por $[\ ,\ ]$ (resp. $[\ ,\ ]_s$). Se R é uma álgebra (resp. superálgebra) alternativa, denotamos por $R^{(-)}$ a álgebra (resp. superálgebra) de Malcev obtida por meio do comutador.

Sejam (R, τ) uma superálgebra quadrática alternativa e L o conjunto de todos os elementos sem traço, isto é $L := \{r \in R \mid \tau(r) = 0\}$. Observe que $R = Z_\tau \oplus L$. Para isso, basta considerar as projeções ortogonais $r \to \frac{1}{2}\tau(r)$ e $r \to r - \frac{1}{2}\tau(r)$. Note que $Z_\tau L + LZ_\tau \subset L$, pois τ é Z_τ-linear.

Definição 4.2.1. Sejam R uma superálgebra alternativa (resp. de Malcev) e $b : R \times R \to Z(R)$ uma supertransformação bilinear. Dizemos que b é *simétrica*, *associativa* se $b(x, y) = (-1)^{|x||y|}b(y, x)$, $b([x, y]_s, z) = b(x, [y, z]_s)$, respectivamente $\forall x, y, z \in R$ homogêneos. Dizemos que b é *invariante* se for simétrica e associativo.

Considere a transformação $\mathrm{f} : L \times L \to Z_\tau$ definida por $\mathrm{f}(x, y) := -x \odot_s y = -\tau(xy)$ por (4.2). Claramente f é simétrica e Z_τ-linear, pois τ o é. Temos então que f é associativa, pois qualquer superálgebra alternativa satisfaz:

$$[x \odot_s y, z]_s = x \odot_s [y, z]_s + (-1)^{|x||y|} y \odot_s [x, z]$$

Finalmente, note que qualquer superálgebra alternativa satisfaz:

$$\begin{aligned}
[x, y, z]_s =& x \odot_s (y \odot_s z) - (-1)^{|y||z|}(x \odot_s z) \odot_s y + \\
&+ 2(x, y, z) \\
[x, y, z]_s + (-1)^{|y||z|}[x, z, y]_s =& 2x \odot_s (y \odot_s z) - (-1)^{|y||z|}(x \odot_s z) \odot_s y \\
&- (x \odot_s y) \odot_s z
\end{aligned}$$

Para o caso especial de uma álgebra quadrática temos:

$$\begin{aligned}
[x, y, z]_s + (-1)^{|y||z|}[x, z, y]_s =& 2\,\mathrm{f}(x, y)z - 4x\,\mathrm{f}(y, z) \\
&+ 2(-1)^{|y||z|}\,\mathrm{f}(x, z)y
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Note que poderíamos ter feito o mesmo para álgebras quadráticas ordinárias e obteríamos resultados completamente análogos, porém para evitar repetições desnecessárias, fizemos apenas para superálgebras. Outra maneira de obter os resultados para álgebras ordinárias é assumir que a componente ímpar é nula e todas as variáveis são da componente par.

Definição 4.2.2 (Superálgebra Sobre uma Superálgebra)**.** Sejam K uma F-superálgebra comutativa e associativa com unidade, M, N, L três F-espaço vetorial e $\varphi : M \times N \to L$ uma transformação F-bilinear. Então

- Dizemos que M é um F-*superespaço vetorial*, se ele for $\mathbb{Z}_2$-graduado,
- Dizemos que M tem uma *superação* de K à esquerda, ou K *superage* em M se tem $\cdot : K \times M \to M$ $\mathbb{Z}_2$-graduado tal que $k_1(k_2m) = (k_1k_2)m,\ \forall k_1, k_2 \in K,\ \forall m \in M$,
- Análogo para uma superação à direita,
- Dizemos que M tem uma *superbiação* de K se tem uma ação à direita e à esquerda de K, ambas denotadas por $\cdot$, que vamos omitir, satisfazendo $(k_1, m, k_2) = 0$ e $[k_1, m]_s = 0,\ \forall k_1, k_2 \in K$ e $\forall m \in m$,
- Dizemos que M é um K-supermódulo se tiver uma superbiação,
- Dizemos que o K-supermódulo M é uma K-superálgebra se for uma F-superálgebra e $k_1m_1 \cdot k_2m_2 = (-1)^{|k_2||m_1|}k_1k_2 \cdot m_1m_1$,
- um homomorfismo de K-módulos (resp. K-álgebras) é um homomorfismo de F-módulos (resp. F-álgebras) que comuta com a ação de K.

Temos que L é uma Z_τ-superálgebra. Todas essas boas propriedades de L e Z_τ motivam a definição de:

Definição 4.2.3 (Álgebra de Malcev quadrática sem traço)**.** Sejam K uma F-superálgebra comutativa associativa e unitária, M uma K-superálgebra de Malcev e $\mathrm{f} : M \times M \to K$ uma supertransformação bilinear. M é dita uma Malcev superálgebra *quadrática sem traço* ou simplesmente *TQ*, do inglês *traceless quadratic*, se f for K-invariante satisfazendo (4.3).

Note que como os octônios são uma álgebra alternativa quadrática, o conjunto dos seus elementos sem traço, $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$, formam uma álgebra de Malcev, e mais do que isso é uma TQ álgebra. Como já mencionamos estamos interessado em encontrar as identidades simultaneamente fracas e alternadas dos octônios. Shestakov e Zhukavets em [SZ09] encontraram todas as identidades alternantes dos octônios, explicitamente:

Teorema (Shestakov e Zhukavets)**.** *Denote* $\sum\limits_{\mathrm{Alt}}$ *como a soma alternada. Toda identidade multilinear antissimétrica da álgebra* $\mathbb{O}$ *sobre um corpo de característica zero é uma consequência das identidades:*

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathrm{Alt}}[a,b](c,d,e)=0,\\&\sum_{\mathrm{Alt}}(12[a,b][c,d][e,f]-[a,b,c,d,e,f])=0,\\&\sum_{\mathrm{Alt}}([[a,b,c,d],[e,f]]+[a,b,c,d,e,f])=0.\end{aligned}$$

Todo polinômio central antissimétrico de $\mathbb{O}$ *é uma consequência de:*

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathrm{Alt}}[a,b][c,d],\\&\sum_{\mathrm{Alt}}(12[a,b][c,d]e-[a,b,c,d,e]).\end{aligned}$$

Também é digno de menção que mesmo Racine tendo encontrado em [Rac88] os geradores das identidades ordinárias dos octônios de grau até cinco, ele nunca explicitou essa elegante identidade $\sum\limits_{\mathrm{Alt}}[a,b](c,d,e) = 0$. Quanto à $\sum\limits_{\mathrm{Alt}}(12[a,b][c,d]e-[a,b,c,d,e])$ temos que com ajuda de uma computador Hentzel e Peresi em [HP97] mostraram com *muitos* cálculos explícitos que é uma identidade, porém "numa forma diferente".

Voltando ao trabalho de Shestakov e Zhukavets, eles também encontraram todas as identidades antissimétricas de uma álgebra quadrática alternativa e mostraram que essas coincidem com as identidades antissimétricas dos octônios. Finalmente eles conjecturaram que as identidades dos octônios coincidem com as da álgebra quadrática livre. Mostramos que essa conjectura é verdadeira para TQ álgebras de Malcev, porém quando consideramos uma classe um pouco maior, as TQ álgebras alternativas, vimos que os octônios satisfazem identidades extras, como por exemplo $\sum\limits_{\mathrm{Alt}}[a,b](c,d,e)=0$. Vamos agora definir álgebras TQ "sem sair delas".

Definição 4.2.4 (Álgebra Alternativa Quadrática sem Traço)**.** Sejam (R,L) um par alternativo-Malcev, $Z < Z(R)$ uma sub-superálgebra e $\mathrm{f} : L\times L \to Z$ tal que L é uma Z-superálgebra e f uma transformação bilinear. Dizemos que o par é uma álgebra *quadrática sem traço* ou simplesmente *TQ*, se satisfizer a identidade fraca (4.3) e f for invariante.

É fácil ver que se o par (R,L) é uma TQ álgebra, então L é uma TQ álgebra de Malcev. Analogamente, se L for uma TQ álgebra de Malcev, então $R := Z\oplus L$ é uma álgebra alternativa e o produto é dado por $(z,l)\cdot(w,m) := (zw-\mathrm{f}(l,m)/2, zm+lw+[l,m]_s/2)$.

4.3 A TQ superálgebra livre numa variável ímpar

Como o título da secção deve ter alertado o leitor, aqui vamos estudar as relações de uma TQ superálgebra livre num gerador ímpar. Para evitar repetições tediosas e cálculos enfadonhamente excessivos, vamos começar sem especificar se estamos numa TQ álgebra alternativa ou Malcev, e mais, sequer vamos dizer se é livre ou não. Especificamente aqui, trabalhamos para encontrar uma pré-base das álgebras das álgebras livres.

Pelo que vimos da última seção, podemos supor, sem perda de generalidade, que a TQ álgebra é alternativa. Seja (R, L) uma TQ superálgebra alternativa e $x \in L_1$. Seja M a super-subálgebra de Malcev gerada por x e g a restrição de f a M,

Defina $x^{[1]} := x$, $x^{[n+1]} := [x^{[n]}, x]_s$, $t := x^{[2]}$, $z^{[n]} := [x^{[n]}, t]_s$. Claramente nós temos as seguintes relações para g:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{g}(x,x) = -\,\mathrm{g}(x,x) \Rightarrow \mathrm{g}(x,x) = 0\\
&\mathrm{g}(x^{[2]},x) = \mathrm{g}(x,x^{[2]})\\
&\mathrm{g}(x^{[3]},x) = \mathrm{g}(x^{[2]},x^{[2]}) = -\,\mathrm{g}(x,x^{[3]})\\
&0 = \mathrm{g}([x^{[2]},x^{[2]}]_s,x) = \mathrm{g}(x^{[3]},x^{[2]}) = \mathrm{g}(x^{[4]},x)\\
&0 = \mathrm{g}([x^{[2]},x^{[3]}]_s,x) = \mathrm{g}(x^{[3]},x^{[3]}) = \mathrm{g}(x^{[4]},x^{[2]}) = \mathrm{g}(x^{[5]},x)
\end{aligned}
$$

Agora aplique (4.3) substituindo z for x e y por $x^{[2]}$, $x^{[3]}$ e $x^{[4]}$, respectivamente.

$$
\begin{aligned}
[x,x^{[2]},x]_s + [x,x,x^{[2]}]_s =&\,2\,\mathrm{g}(x,x^{[2]})x + 2\,\mathrm{g}(x,x)x^{[2]} - 4x\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)\\
x^{[4]} =&-6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)x\\
[x,x^{[3]},x]_s - [x,x,x^{[3]}]_s =&\,2\,\mathrm{g}(x,x^{[3]})x - 2\,\mathrm{g}(x,x)x^{[3]} - 4x\,\mathrm{g}(x^{[3]},x)\\
x^{[5]} =&-6\,\mathrm{g}(x^{[3]},x)x = -6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)x^{[2]}\\
[x,x^{[4]},x]_s + [x,x,x^{[4]}]_s =&\,2\,\mathrm{g}(x,x^{[4]})x + 2\,\mathrm{g}(x,x)x^{[4]} - 4x\,\mathrm{g}(x^{[4]},x)\\
x^{[6]} =&-z^{[4]} = -6\,\mathrm{g}(x^{[3]},x)x^{[2]} = -6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)x^{[3]}
\end{aligned}
$$

Também temos que $z^{[5]} = [x^{[5]}, x^{[2]}]_s = -6\,\mathrm{g}(x^{[2]}, x)[x^{[2]}, x^{[2]}]_s = 0$, $x^{[7]} = [x^{[6]}, x]_s = 0$ e indutivamente que $x^{[i]}$ com $i > 6$. Para g nós temos que:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{g}(x^{[2]},x)\,\mathrm{g}(x^{[2]},x) = \mathrm{g}(x^{[2]}\,\mathrm{g}(x^{[2]},x),x) = \mathrm{g}(x^{[5]},x)/6 = 0\\
&\mathrm{g}(x^{[2]},x)\,\mathrm{g}(x^{[3]},x) = \mathrm{g}(x^{[3]}\,\mathrm{g}(x^{[2]},x),x) = \mathrm{g}(x^{[6]},x)/6\\
&\mathrm{g}(x^{[3]},x)\,\mathrm{g}(x^{[3]},x) = \mathrm{g}(x^{[3]}\,\mathrm{g}(x^{[3]},x),x) = \mathrm{g}(x^{[7]},x)/6 = 0
\end{aligned}
$$

Finalmente para os outros casos de $\mathrm{g}(x^{[i]}, x)x^{[j]}$ temos que:

$$\mathrm{g}(x^{[6]},x)x = 6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)\,\mathrm{g}(x^{[3]},x)x = 6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)x^{[2]} = 0;$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{g}(x^{[6]},x)x^{[i+1]} = [x^{[i]},\mathrm{g}(x^{[6]},x)x]_s = 0;\\
&\mathrm{g}(x^{[2]},x)x^{[3+i]} = -6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)x^{[i]} = 0, \forall i>0;\\
&\mathrm{g}(x^{[3]},x)x^{[3]} = [\mathrm{g}(x^{[3]},x)x^{[2]},x]_s = -6^{-1}[x^{[6]},x]_s = -6^{-1}x^{[7]} = 0;\\
&\mathrm{g}(x^{[3]},x)x^{[i+1]} = [\mathrm{g}(x^{[3]},x)x^{[i]},x]_s = 0, \forall i \geq 3.
\end{aligned}$$

A seguinte proposição condensa os resultados obtidos até então:

Proposição 4.3.1. *M e Z_{g} são linearmente gerados por $\{x^{[1]},\dots,x^{[6]}\}$ e $\{1, \mathrm{g}(x^{[2]},x), \mathrm{g}(x^{[3]},x), \mathrm{g}(x^{[6]},x)\}$, respectivamente. Além do mais, eles satisfazem as seguintes relações:*

- $[x^{[i]},x^{[j]}]_s \neq 0$ *apenas para i ou $j = 1,2$ ou $i=j=3$;*
- $[x^{[4]},x^{[2]}]_s = -x^{[6]} = z^{[4]}$*;*
- $x^{[i]} = z^{[j]} = 0$ *para $i>6$ e $j>4$;*
- $x^{[i+3]} = -6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)x^{[i]}$, $\forall i>0$*;*
- $x^{[i+4]} = -6\,\mathrm{g}(x^{[3]},x)x^{[i]}$, $\forall i>0$*;*
- $\mathrm{g}(x^{[6]},x)x^{[i]} = 0$, $\forall i$*;*
- $\mathrm{g}(x^{[i]},x^{[j]}) = \pm\,\mathrm{g}(x^{[i+j-1]},x)$*;*
- $\mathrm{g}(x^{[i]},x^{[j]}) = 0$ *e $i+j = 2,\ 5,\ 6$ ou >7;*
- $\mathrm{g}(x^{[i]},x)\,\mathrm{g}(x^{[j]},x) = 0$ *para $i+j=4$ ou >5 e*
- $\mathrm{g}(x^{[2]},x)\,\mathrm{g}(x^{[3]},x) = \mathrm{g}(x^{[3]},x)\,\mathrm{g}(x^{[2]},x) = \mathrm{g}(x^{[6]},x)/6.$

Seja A a super-subálgebra alternativa gerada por x, $t := x^{[2]}$ e $u^{[i]} := x^{[i]} \odot_s x^{[3]}$. Em [SZ07] Shestakov e Zhukavets encontraram uma base para a superálgebra alternativa livre gerada por um elemento ímpar. Anunciamos o seu resultado:

Teorema (Shestakov-Zhukavets)**.** *Seja $\mathcal{A}$ a superálgebra alternativa livre gerada por um elemento ímpar x. Então o seguinte é uma base para $\mathcal{A}$:*

$$\begin{aligned}
&t^m x^{\sigma}, \quad m+\sigma \geq 1; && t^m(x^{[k+2]}x^{\sigma});\\
&t^m(u^{[4k+\varepsilon]}x^{\sigma}); && t^m(z^{[4k+\varepsilon]}x^{\sigma});
\end{aligned}$$

onde $k>0$, $m\geq 0$; $\varepsilon,\sigma \in \{0,1\}$.

Antes de continuarmos com A, enunciaremos alguns resultados "preliminares" de [SZ07]:

Proposição (Shestakov-Zhukavets). *Em $\mathcal{A}$, a superálgebra alternativa livre gerada por um elemento ímpar x, temos as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned}
&z^{[4k-1]} = z^{[4k-2]} = u^{[4k-1]} = 0;\\
&u^{[4k+2]} = -tz^{[4k+1]};\\
&(x,x,x) = x^{[3]}/2;\\
&(x^{[i]},x,x) = x^{[i+2]}/3 - z^{[i]}/6;\\
&(x^{[i]},x^{[j]},x) = (-1)^{c(j+1)} z^{[i+j-1]}/3;\\
&(x^{[i]},x^{[j]},x^{[l]}) = 0,
\end{aligned}$$

onde $k>0$, $i,j,l>1$ e $c(j)=\frac{j(j-1)}{2}$.

No caso especial de A temos que $z^{[4k+\varepsilon]}$ é não zero apenas para o caso $4k+\varepsilon=4$, isto é, $z^{[4]} = -x^{[6]} = 6\,\mathrm{g}(x^{[3]},x)t$. Por outro lado $u^{[4k+\varepsilon]}$ é não zero apenas para $4k+\varepsilon = 4$ ou 5, isto é, $u^{[4]}$ e $u^{[5]}$ e nesses casos temos:

$$\begin{aligned}
u^{[5]} &= x^{[5]} \odot_s x^{[3]} = -6((\mathrm{g}(x^{[3]},x)x)x^{[3]} - x^{[3]}(\mathrm{g}(x^{[3]},x)x))\\
&= -6(x(\mathrm{g}(x^{[3]},x)x^{[3]}) - (x^{[3]}(\mathrm{g}(x^{[3]},x))x) = 0;\\
u^{[4]} &= x^{[4]} \odot_s x^{[3]} = -6((\mathrm{g}(x^{[2]},x)x)x^{[3]} + x^{[3]}(\mathrm{g}(x^{[2]},x)x))\\
&= 6(x(\mathrm{g}(x^{[2]},x)x^{[3]}) + (\mathrm{g}(x^{[2]},x)x^{[3]})x) = 6((\mathrm{g}(x^{[3]},x)x)t + t(\mathrm{g}(x^{[3]},x)x))\\
&= 12\,\mathrm{g}(t,x)t^2.
\end{aligned}$$

Finalmente para $x^{[k+2]}$ é suficiente considerar apenas o caso $x^{[3]}$. Observe:

$$\begin{aligned}
t^m x^{[4]} &= -\,6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)t^m x;\\
t^m(x^{[4]}x) &= -\,6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)t^m(xx) = -3\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)t^{m+1};\\
t^m x^{[5]} &= -\,6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)t^{m+1};\\
t^m(x^{[5]}x) &= -\,6t^m((\mathrm{g}(x^{[3]},x)x)x) = -3t^m\,\mathrm{g}(x^{[3]},x)t = -3t^{m+1}\,\mathrm{g}(x^{[3]},x);\\
t^m x^{[6]} &= -\,6\,\mathrm{g}(x^{[3]},x)t^{m+1};\\
t^m x^{[6]}x &= -\,6t^m((\mathrm{g}(x^{[3]},x)t)x) = -6t^m(t(\mathrm{g}(x^{[3]},x)x)) =\\
&= -\,6t^m(t(\mathrm{g}(x^{[2]},x)t)) = -6\,\mathrm{g}(x^{[2]},x)t^{m+2}.
\end{aligned}$$

Isto é, A é Z_{g}-linearmente gerado por $\{1, t^m x^\sigma, t^m(x^{[3]}x^\varepsilon) \mid m+\sigma \geq 1, \varepsilon \in \{0,1\}\}$. Para obter uma pré-base sobre o corpo base vamos computar a ação de g nos elementos $t^m x^\sigma, t^m(x^{[3]}x^\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(x^{[2]},x)(t^{m+1}(x^{[3]}x^\varepsilon)) &= (\mathrm{g}(x^{[3]},x)t^m x)(x^{[3]}x^\varepsilon) = (t^m x)((\mathrm{g}(x^{[3]},x)x^{[3]})x^\varepsilon)\\
\mathrm{g}(x^{[2]},x)(t^{m+1}(x^{[3]}x^\varepsilon)) &= 0;\\
\mathrm{g}(x^{[3]},x)(t^m(x^{[3]}x^\varepsilon)) &= 0;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{g}(x^{[3]}, x)t^{m+2} =& \, \mathrm{g}(x^{[2]}, x)(t^{m+1}x^{[3]}) = 0;\\
\mathrm{g}(x^{[3]}, x)(t^{m+2}x) =& (\mathrm{g}(x^{[3]}, x)t^{m+2})x = 0;\\
\mathrm{g}(x^{[2]}, x)t^{m+3} =& (\mathrm{g}(x^{[2]}, x)t)t^{m+2} = (\mathrm{g}(x^{[3]}, x)x)t^{m+2} =\\
=& x(\mathrm{g}(x^{[3]}, x)t^{m+2}) = 0;\\
\mathrm{g}(x^{[2]}, x)(t^{m+2}x) =& t^{m+1}((\mathrm{g}(x^{[2]}, x)t)x) = t^{m+1}((\mathrm{g}(x^{[3]}, x)x)x) =\\
=& \, \mathrm{g}(x^{[3]}, x)(t^{m+1}(xx)) = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x)t^{m+2} = 0;\\
\mathrm{g}(x^{[2]}, x)(tx) =& (\mathrm{g}(x^{[2]}, x)t)x = \mathrm{g}(x^{[3]}, x)(xx) = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}(x^{[2]}, x)t^2;\\
\mathrm{g}(x^{[3]}, x)(tx) =& t(\mathrm{g}(x^{[3]}, x)x) = t(\mathrm{g}(x^{[2]}, x)t) = \mathrm{g}(x^{[2]}, x)t^2;\\
\mathrm{g}(x^{[2]}, x)(x^{[3]}x) =& (\mathrm{g}(x^{[2]}, x)x^{[3]})x = (\mathrm{g}(x^{[3]}, x)t)x = \mathrm{g}(x^{[2]}, x)t^2;
\end{aligned}
$$

A seguinte proposição condensa os resultados até agora obtidos para A:

Proposição 4.3.2. *A superálgebra alternativa A á linearmente gerada por* $\{\mathrm{g}(x^{[i]}, x),\ x, x^{[2]}, x^{[3]}, t^m x^\sigma, t^m(x^{[3]}x^\sigma), \mathrm{g}(t, x)x, \mathrm{g}(t, x)t, \mathrm{g}(x^{[3]}, x)t, \mathrm{g}(t, x)t^2 \mid m \geq 0\ i \in \{2, 3, 6\}\ \sigma \in \{0, 1\}\ \}$*. Além das relações expostas na proposição (4.3.1), A satisfaz:*

- $\mathrm{g}(x^{[2]}, x)(t^{m+1}(x^{[3]}x^\varepsilon)) = 0$;
- $\mathrm{g}(x^{[3]}, x)(t^m(x^{[3]}x^\varepsilon)) = 0$;
- $\mathrm{g}(x^{[3]}, x)t^{m+2} = 0$;
- $\mathrm{g}(x^{[3]}, x)(t^{m+2}x) = 0$;
- $\mathrm{g}(x^{[2]}, x)t^{m+3} = 0$;
- $\mathrm{g}(x^{[2]}, x)(t^{m+2}x) = 0$;
- $\mathrm{g}(x^{[2]}, x)(tx) = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x)t$;
- $\mathrm{g}(x^{[3]}, x)(tx) = \mathrm{g}(x^{[2]}, x)t^2$;
- $\mathrm{g}(x^{[2]}, x)(x^{[3]}x) = \mathrm{g}(x^{[2]}, x)t^2$.

4.4 Tabelas de Multiplicação

Nesta seção vamos continuar o estudo das TQ superálgebras livres, encontrando suas "tabelas de multiplicação". Daqui em diante é necessário especificar se estamos em uma TQ superálgebra alternativa ou Malcev. Nós começaremos com a TQ superálgebra de Malcev.

Como visto anteriormente, podemos supor, sem perda de generalidade, que a nossa TQ superálgebra de Malcev é uma superálgebra alternativa

$R = (Z_{\mathrm{g}} \oplus M, M)$, fracamente satisfazendo ((4.3)) onde $\mathrm{f}(x, y) := -(x \odot_s y)$ e f é central e invariante.

Proposição 4.4.1. *A multiplicação em $Z_{\mathrm{g}} \oplus M$ satisfaz:*

	x	t	u	$x^{[3]}$	t^2	$x^{[4]}$	t^2x	t^3	t^3x
x	$\frac{t}{2}$	$\frac{u-x^{[3]}}{2}$	$\frac{-x^{[4]}}{6}$	$\frac{x^{[4]}-2t^2}{2}$	t^2x	$-6t^2x$	$\frac{t^3}{2}$	t^3x	0
t	$\frac{x^{[3]}+u}{2}$	t^2	$2t^2x$	0	t^3	$6t^3$	t^3x	0	0
u	$\frac{x^{[4]}}{6}$	$2t^2x$	0	$2t^3$	$2t^3x$	0	0	0	0
$x^{[3]}$	$\frac{x^{[4]}+2t^2}{2}$	0	$-2t^3$	$-6t^3$	0	$-12t^3x$	0	0	0
t^2	t^2x	t^3	$2t^3x$	0	0	0	0	0	0
$x^{[4]}$	$6t^2x$	$-6t^3$	0	$-12t^3x$	0	0	0	0	0
t^2x	$\frac{t^3}{2}$	t^3x	0	0	0	0	0	0	0
t^3	t^3x	0	0	0	0	0	0	0	0
t^3x	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Demonstração. Temos que $x^{[i]} \odot_s x^{[j]} = \mathrm{f}(x^{[i]}, x^{[j]}) = 0$ sempre que $i + j = 5,\ 6$ or > 7. Para o caso $i + j = 7$ temos $\pm\,\mathrm{f}(x^{[i]}, x^{[j]}) = \mathrm{f}(x^{[6]}, x) = 12(t^3 \odot_s x) = 24t^3x$. Finalmente temos $24t^4 = 24t^3t = [24t^3x, x]_s = -[\mathrm{f}(x^{[6]}, x), s]_s = 0$, portanto $t^4 = 0$.

Por uma questão de rigor, agora calculamos todos os tediosos produtos dos elementos conhecidos. Os leitores não tão avançados, provavelmente, podem pular a demostração. Observamos que $t \odot_s x,\ t^2,\ t^3$, e t^3x são centrais e $2ab = [a, b]_s + a \odot_s b$.

$$x \cdot x = 1/2(x \odot_s x + [x, x]_s) = 1/2t;$$
$$x \cdot t = 1/2(t \odot_s x - x^{[3]});$$
$$t \cdot x = 1/2(t \odot_s x + x^{[3]});$$
$$(t \odot_s x) \cdot x = 1/6x^{[4]};$$
$$x \cdot (t \odot_s x) = -1/6x^{[4]};$$
$$(t \odot_s x) \cdot t = 1/6x^{[5]} = 2t^2x;$$
$$t \cdot (t \odot_s x) = (t \odot_s x) \cdot t = 2t^2x;$$
$$(t \odot_s x) \cdot (t \odot_s x) = 0;$$
$$x^{[3]} \cdot x = 1/2(x^{[3]} \odot_s x + [x^{[3]}, x]_s) = t^2 + 1/2x^{[4]};$$
$$x \cdot x^{[3]} = 1/2x^{[4]} - t^2;$$
$$x^{[3]} \cdot t = 1/2(x^{[3]} \odot_s t + [x^{[3]}, t]_s) = 0;$$
$$t \cdot x^{[3]} = 0;$$
$$x^{[3]} \cdot (t \odot_s x) = -(t \odot_s x) \cdot x^{[3]} = -1/6x^{[6]} = -2t^3;$$
$$(t \odot_s x) \cdot x^{[3]} = 2t^3;$$
$$x^{[3]} \cdot x^{[3]} = 1/2(x^{[3]} \odot_s x^{[3]} + [x^{[3]}, x^{[3]}]_s) = 1/2(0 + x^{[6]}) = -6t^3;$$
$$t^2 \cdot (t \odot_s x) = (t^2 \cdot t) \odot_s x = 2t^3x;$$

$(t \odot_s x) \cdot t^2 = 2t^3x;$
$t^2 \cdot x^{[3]} = [t^2 \cdot t, x]_s = 0;$
$x^{[3]} \cdot t^2 = 0;$
$t^2 \cdot t^2 = t^4 = 0;$
$x^{[4]} \cdot x = 1/2(x^{[4]} \odot_s x + [x^{[4]}, x]_s) = 1/2(0 + x^{[5]}) = 6t^2x;$
$x \cdot x^{[4]} = -6t^2x;$
$x^{[4]} \cdot t = 1/2(x^{[4]} \odot_s t + [x^{[4]}, t]_s) = 1/2(0 + z^{[4]}) = -6t^3;$
$t \cdot x^{[4]} = 6t^3;$
$x^{[4]} \cdot (t \odot_s x) = 6((t \odot_s x) \cdot x) \cdot (t \odot_s x) = 6(t \odot_s x)^2 \cdot x = 0;$
$(t \odot_s x) \cdot x^{[4]} = 0;$
$x^{[4]} \cdot x^{[3]} = 1/2(x^{[4]} \odot_s x^{[3]} + [x^{[4]}, x^{[3]}]_s) = 1/2(-24t^3x + z^{[5]}) = -12t^3x;$
$x^{[3]} \cdot x^{[4]} = -12t^3x;$
$$x^{[4]} \cdot t^2 = 6((t \odot_s x) \cdot x) \cdot t^2 = 6((t \odot_s x)t^2) \cdot x = 12(t^3x) \cdot x = 12t^3 \cdot (x \cdot x)$$
$$= 6t^4 = 0;$$
$t^2 \cdot x^{[4]} = 0;$
$x^{[4]} \cdot x^{[4]} = 1/2(x^{[4]} \odot_s x^{[4]} + [x^{[4]}, x^{[4]}]_s) = 0;$
$t^2x \cdot x = t^2 \cdot (x \cdot x) = 1/2t^3;$
$x \cdot t^2x = 1/2t^3;$
$t^2x \cdot t = x \cdot (t^2 \cdot t) = x \cdot t^3 = t^3x;$
$t \cdot t^2x = t^3x;$
$t^2x \cdot (t \odot_s x) = x \cdot (t^2 \cdot (t \odot_s x)) = 2x \cdot t^3x = 0;$
$(t \odot_s x) \cdot t^2x = 0;$
$t^2x \cdot x^{[3]} = x \cdot (t^2 \cdot x^{[3]}) = 0;$
$x^{[3]} \cdot t^2x = 0;$
$t^2x \cdot t^2 = t^4x = 0;$
$t^2 \cdot t^2x = 0;$
$t^2x \cdot x^{[4]} = x \cdot (t^2 \cdot x^{[4]}) = 0;$
$x^{[4]} \cdot t^2x = 0;$
$t^2x \cdot t^2x = ((t^2 \cdot t^2) \cdot x) \cdot x = 0;$

Os produtos de t^3 e t^3x são evidentes. □

Agora vamos calcular os produtos no TQ superálgebra alternativa A, para tal utilizamos a tabela de multiplicação de $\mathcal{A}$ encontrado por Shestakov e Zhukavets. Por comodidade, enunciaremos apenas uma parte do seu resultado:

Proposição 4.4.2 (Shestakov-Zhukavets). *Em $\mathcal{A}$, nós temos as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned}
t^m(t^n x^\sigma) =& t^{m+n}x^\sigma;\\
(t^m x)t^n =& t^{m+n}x - nt^{m+n-1}x^{[3]};\\
(t^m x)(t^n x) =& \frac{1}{2}t^{m+n+1} - nt^{m+n-1}(x^{[3]}x) + \frac{m+2n}{3}t^{m+n-1}x^{[4]}\\
&+ \frac{m(m+2n-1)}{6}t^{m+n-2}z^{[4]};\\
t^m(t^n(x^{[k]}x^\varepsilon)) =& t^{m+n}(x^{[k]}x^\varepsilon);\\
(t^m x)(t^n x^{[k]}) =& (-1)^k\Big(t^{m+n}\Big((x^{[k]}x) - x^{[k+1]}\Big)\\
&- t^{m+n-1}\Big(\frac{n}{2}u^{[k]} + \frac{2m+n}{6}z^{[k+1]}\Big)\Big);\\
(t^m x)(t^n x^{[k]}x) =& (-1)^k\Big(\frac{1}{2}t^{m+n+1}x^{[k]} - t^{m+n}\Big(x^{[k+1]}x + \frac{2}{3}x^{[k+2]}\\
&+ \frac{2m+4n+1}{6}z^{[k]}\Big) - t^{m+n-1}\Big(\frac{n}{2}u^{[k]}x - \frac{m+2n}{6}u^{[k+1]}\\
&+ \frac{2m+n}{6}z^{[k+1]}x - \frac{m}{6}z^{[k+2]}\Big)\Big);\\
(t^n x^{[k]})t^m =& t^{m+n}x^{[k]} + mt^{m+n-1}z^{[k]};\\
(t^n x^{[k]})(t^m x) =& t^{m+n}(x^{[k]}x) + t^{m+n-1}\Big(mz^{[k]}x + \frac{2m+n}{3}z^{[k+1]}\Big);\\
(t^n(x^{[k]}x))t^m =& t^{m+n}(x^{[k]}x) - mt^{m+n-1}\Big(\frac{1}{2}u^{[k]} - z^{[k]}x - \frac{1}{2}z^{[k+1]}\Big);\\
(t^n(x^{[k]}x))(t^m x) =& \frac{1}{2}t^{m+n+1}x^{[k]} + t^{m+n}\Big(\frac{1}{3}x^{[k+2]} + \frac{7m+2n+2}{6}z^{[k]}\Big)\\
&- t^{m+n-1}\Big(\frac{m}{2}u^{[k]}x - \frac{2m+n}{6}u^{[k+1]} + \frac{m+2n}{6}z^{[k+1]}x\\
&- \frac{2m+n}{6}z^{[k+2]}\Big);\\
(t^m x^{[i]})(t^n x^{[j]}) =& \frac{(-1)^{c(j+1)}}{2}t^{m+n}(u^{[i+j-3]}x + \delta_j t z^{[i+j-4]} - (-1)^j z^{[i+j-2]});\\
(t^m x^{[i]})(t^n(x^{[j]}x)) =& \frac{(-1)^{c(j+1)}}{2}t^{m+n}(u^{[i+j-3]}x + \delta_j t(z^{[i+j-4]}x)\\
&- (-1)^j z^{[i+j-2]}x - \frac{2}{3}z^{[i+j-1]});\\
(t^m(x^{[i]}x))(t^n x^{[j]}) =& \frac{(-1)^{c(j)}}{2}t^{m+n}\Big(u^{[i+j-3]}x + (-1)^j u^{[i+j-2]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \delta_j t(z^{[i+j-4]}x) + (-1)^j \delta_{j-1} t z^{[i+j-3]} \\
&- (-1)^j z^{[i+j-2]}x - \frac{1}{3} z^{[i+j-1]}\Big); \\
(t^m(x^{[i]}x))(t^n(x^{[j]}x)) =& \frac{(-1)^{c(j)}}{2} t^{m+n}\Big(\frac{1}{2} t u^{[i+j-3]} + (-1)^j u^{[i+j-2]}x \\
&- \frac{1}{3} u^{[i+j-1]} + \frac{1}{2}\delta_j t^2 z^{[i+j-4]} - \delta_{j-1} t(z^{[i+j-3]}x) \\
&- \Big(\frac{5}{6}\delta_j - \frac{1}{2}\Big) t z^{[i+j-2]} \\
&+ \frac{1}{3} z^{[i+j-1]}x - \frac{(-1)^j}{3} z^{[i+j]}\Big);
\end{aligned}
$$

onde $m, n \geq 0$, $i, j, k > 2$, $\sigma, \varepsilon \in \{0, 1\}$, $n + \sigma \geq 1$ *and* $\delta_j := 1 + (-1)^j$.

Resumindo os resultados obtidos para A:

Proposição 4.4.3. *Além das relações de (4.3.1), A satisfaz:*

$$
\begin{aligned}
t^m(t^n x^\sigma) =& t^{m+n} x^\sigma; \\
(t^m x)t^n =& t^{m+n}x - n t^{m+n-1} x^{[3]}; \\
(t^m x)(t^n x) =& \frac{1}{2} t^{m+n+1} - n t^{m+n-1}(x^{[3]}x) + \\
& ((m-1)(m+2n) + m)\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x) t^{m+n-1}; \\
t^m(t^n(x^{[3]}x^\varepsilon)) =& t^{m+n}(x^{[3]}x^\varepsilon); \\
(t^m x)(t^n x^{[3]}) =& -t^{m+n}(x^{[3]}x + 6\,\mathrm{g}(t, x)x - (2m+n)\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x)); \\
(t^m x)(t^n(x^{[3]}x)) =& -t^{m+n+1}\Big(\frac{1}{2} x^{[3]} + (3n+7)\,\mathrm{g}(t, x)\Big); \\
(t^n x^{[3]})t^m =& t^{m+n} x^{[3]}; \\
(t^n x^{[3]})(t^m x) =& t^{m+n}\big(x^{[3]}x + (4m+2n)\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x)\big); \\
(t^n(x^{[3]}x))t^m =& t^{m+n}\big(x^{[3]}x + 3m\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x)\big); \\
(t^n(x^{[3]}x))(t^m x) =& t^{m+n+1}\Big(\frac{1}{2} x^{[3]} + (3m-2)\,\mathrm{g}(t, x)\Big); \\
(t^m x^{[3]})(t^n x^{[3]}) =& 3\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x) t^{m+n+1}; \\
(t^m x^{[3]})(t^n(x^{[3]}x)) =& 3\,\mathrm{g}(t, x) t^{m+n+2}; \\
(t^m(x^{[3]}x))(t^n x^{[3]}) =& 3\,\mathrm{g}(t, x) t^{m+n+2}; \\
(t^m(x^{[3]}x))(t^n(x^{[3]}x)) =& \frac{3}{2} t^{m+n+2}\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x) = 0;
\end{aligned}
$$

Demonstração. Para obter o resultado simplesmente aplique as substituições $i, j, k = 3$, $u^{[4]} = 12\,\mathrm{g}(t, x)t^2$, $u^{[5]} = z^{[5]} = 0$, $z^{[4]} = -x^{[6]} = 6\,\mathrm{g}(x^{[3]}, x)t$, $x^{[4]} = -6\,\mathrm{g}(t, x)x$, $x^{[5]} = -6\,\mathrm{g}(t, x)t$ e assim por diante na proposição (4.4.2) de Shestakov e Zhukavets. □

4.5 As Pré-bases são Bases

O objetivo desta seção é provar que, com a hipótese adicional de que M e A são livres, as pré-bases são realmente bases. Nossa estratégia é muito simples: vamos definir uma álgebra apenas com as relações que encontramos. Se ela for uma superálgebra de Malcev/Alternativa satisfazendo ((4.3)), então por "liberdade" de M/A provamos que as pré-bases são bases.

Comecemos com M. Considere a superálgebra N linearmente gerada por $\{y_1,\ldots,y_6\}$, tal que $|y_i| = i \pmod 2$, $i = 1,\ldots,6$ e tabela de multiplicação:

$[\ ,\ ]_s$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	y_2	$-y_3$	y_4	$-y_5$	y_6	0
y_2	y_3	0	0	y_6	0	0
y_3	y_4	0	$-y_6$	0	0	0
y_4	y_5	$-y_6$	0	0	0	0
y_5	y_6	0	0	0	0	0
y_6	0	0	0	0	0	0

Shestakov em [She03a] encontrou uma base e a respectiva tabela de multiplicação da superálgebra de Malcev livremente gerada por um elemento ímpar. Claramente N é isomorfo ao quociente da superálgebra livre pelo ideal id.$\langle z^{[4]} + x^{[6]}, z^{[5]}\rangle$.

Considere a superálgebra L com base $\{1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ tal que $1,\ \beta \in L_0$, $\alpha,\ \gamma \in L_1$ e tabela de multiplicação, junto com a ação de L em N à esquerda:

$\cdot$	1	α	β	γ	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	1	α	β	γ	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
α	α	0	$\gamma/6$	0	$-y_4/6$	$-y_5/6$	$-y_6/6$	0	0	0
β	β	$\gamma/6$	0	0	$-y_5/6$	$-y_6/6$	0	0	0	0
γ	γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Claramente L é associativa e supercomutativa. Portanto podemos unicamente definir uma ação de L em N à direita. É fácil ver que as duas ações de L em N é uma biação na qual N é uma L-superálgebra. Agora definimos $\mathrm{f} : N \times N \to L$ como:

$\mathrm{f}(\ ,\ )$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	0	α	$-\beta$	0	0	γ
y_2	α	β	0	0	γ	0
y_3	β	0	0	$-\gamma$	0	0
y_4	0	0	$-\gamma$	0	0	0
y_5	0	γ	0	0	0	0
y_6	γ	0	0	0	0	0

É fácil ver que f é invariante, resta apenas provar que $[\sigma \cdot m, \tau \cdot n]_s = (-1)^{\bar{\tau}\bar{m}}(\sigma\tau) \cdot [m,n]_s$ e ((4.3)). Para a primeira identidade se ambos σ e τ são diferentes de 1 é claro que ambos os lados serão iguais à zero, usando a simetria de L e a anti-simetria de N podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\tau = 1$ e $\sigma = \alpha$ ou β. Para $\sigma = \alpha$ o lado esquerdo é diferente de zero somente se $m = y_1,\ n = y_1$; $m = y_1,\ n = y_2$ ou $m = y_2,\ n = y_1$. O lado direito é diferente de zero apenas sobre as mesmas condições para $\sigma = \alpha$ e obtemos a igualdade. Por último, $\sigma = \beta$ o lado esquerdo é diferente de zero apenas quando $m = n = y_1$, bem como para o lado direito e obtemos a igualdade.

Quanto à ((4.3)) é apenas uma série da contas bem diretas. Portanto nós temos que N é uma TQ superálgebra de Malcev, logo pela liberdade de M obtemos que $M \simeq N$.

Agora vamos escrever as relações de A sem fazer menção à g, ou seja em A temos para $m \geq 0$ que os seguintes elementos:

- $t^m(x^{[m+7]}x^\sigma)$,
- $t^m(x^{[6]}x^\sigma) + t^m(z^{[4]}x^\sigma)$,
- $t^m(z^{[m+5]}x^\sigma)$,
- $t^m(u^{[m+5]}x^\sigma)$,
- $t^m(u^{[4]}x^\sigma) - t^{m+1}(x^{[5]}x^\sigma)$,
- $2t^m(x^{[4]}x) - t^m x^{[5]}$,
- $2t^m(x^{[5]}x) - t^m x^{[6]}$,
- $t^m(x^{[6]}x) - t^{m+1}x^{[5]}$,
- $t^{m+1}(x^{[6]}x^\sigma)$,
- $t^{m+2}x^{[5]}$,
- $t^{m+2}x^{[4]}$,
- $2tx^{[4]} - x^{[6]}$

são nulos. Considere então esses elementos como pertencentes à $\mathcal{A}$ e tome $\mathcal{I}$ como sendo o subespaço de $\mathcal{A}$ gerado por eles.

Proposição 4.5.1. *Temos que $\mathcal{I} \lhd \mathcal{A}$ e o conjunto $\{x, x^{[2]}, x^{[3]}, x^{[4]}, x^{[5]}, x^{[6]}, tx^{[5]}, t^m x^\sigma, t^m(x^{[3]}x^\sigma) \mid \sigma \in \{0,1\}\ m > 0\}$ é uma base para $\mathcal{A}/\mathcal{I}$.*

Demonstração. A segunda afirmação do enunciado está clara. Para a primeira, basta observar as proposições de [SZ07] que explicitam a "tabela de multiplicação" de $\mathcal{A}$, e observar que $\mathcal{I}$ é de fato um ideal. A parte dele ser super também está clara. □

Considere $B := \mathcal{A}/\mathcal{I}$, claramente podemos injetar N em B e consideramos o par alternativo-Malcev (B, N). Com isso definimos a $\mathrm{f} : N \times N \to L$ e definimos a ação de L em B pela Proposição 4.3.2. Finalmente ((4.3)) está satisfeita, pois é verdadeira em N. Portanto, o par (B, N) é uma TQ álgebra e pela liberdade de A, obtemos que $A \cong B$, provando que a pré-base que obtivemos para A é de fato uma base.

4.6 Identidades Antissimétricas

Nessa secção estudamos as superidentidades com apenas um elemento ímpar da TQ superálgebra de Malcev livre M e o seu par associado. Não estamos interessados em estudar as identidades de A, visto que $\mathrm{Skew}(tx^{[3]})$ é uma identidade dos octônios, porém $tx^{[3]}$ não é um elemento nulo em A.

Teorema 4.6.1. *Toda identidade antissimétrica de $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$, como álgebra de Malcev, sobre um corpo de característica zero, é consequência das duas identidades:*

$$\mathrm{Skew}(x^{[6]} + z^{[4]}) = 0,$$
$$\mathrm{Skew}(z^{[5]}) = 0.$$

Ademais o conjunto de identidades antissimétricas de $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$ coincide com o conjunto das identidades antissimétricas da TQ álgebra, não superálgebra, de Malcev livre.

Demonstração. Claramente $x^{[6]} + z^{[4]}$ e $z^{[5]}$ são superidentidades de M. Porém uma base de $\mathcal{M}$, a superálgebra de Malcev livre gerada por um elemento ímpar x, encontrada por Shestakov e Zhukavets em [She03b], foi $\{x^{[m]},\ z^{[4m]},\ z^{[4m+1]}\}$. É fácil ver que $\mathcal{M}/\mathcal{J}$ tem $\{x, \ldots, x^{[6]}\}$ como pré-base, onde $\mathcal{J}$ é o T-superideal gerado por $x^{[6]} + z^{[4]}$ e $z^{[5]}$. Como existe um epimorfismo de $\mathcal{M}/\mathcal{J}$ para M, e $\{x, \ldots, x^{[6]}\}$ é base de M, temos que $\mathcal{M}/\mathcal{J} \cong M$ e $\mathcal{J}$ é o T-superideal de identidades de M.

Como $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$ é uma TQ álgebra de Malcev toda superidentidade de M dá origem a uma identidade antissimétrica de $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$. Como o corpo é infinito, qualquer identidade é decorrência de identidades multihomogêneas. Portanto, qualquer superidentidade extra de $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$ é da forma $x^{[i]}$. Logo, no caso de alguma identidade extra de $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$, teríamos que $\mathrm{Skew}(x^{[6]})$ é uma identidade de $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$. Contudo uma avaliação fraca de $\mathrm{Skew}(x^{[6]})$ foi calculada em [SZ09], como $z^{[4]}$, na qual era diferente de zero. □

Teorema 4.6.2. *Todas as identidades simultaneamente fracas e antissimétricas de $\mathbb{O}$, sobre um corpo de característica zero, são consequências das identidades:*

$$\mathrm{Skew}(x^{[3]} \odot_s x - 2t^2) = 0,$$
$$\mathrm{Skew}(tx^{[3]}) = 0,$$
$$\mathrm{Skew}(x^{[5]} - 12t^2 x) = 0,$$
$$\mathrm{Skew}(x^{[6]} - 12t^3) = 0.$$

Ademais, as identidades simultaneamente fracas e antissimétricas de $\mathbb{O}$ coincidem com as da classe de álgebras alternativas quadráticas. É interresante *notar que* $\mathrm{Skew}(tx^{[3]}) = 0$ *e* $\mathrm{Skew}(x^{[6]} - 12t^3) = 0$ *são identidades ordinárias da álgebra dos octônios.*

Demonstração. Observe que as identidades do enunciado são verdadeiras com $B := Z_{\mathrm{f}} \oplus M$ sendo a álgebra alternativa associada à TQ álgebra de Malcev M.

Como os octônios formam uma TQ álgebra alternativa e ordinária oriunda de uma TQ álgebra de Malcev, $\mathfrak{sl}(\mathbb{O})$, temos que qualquer identidade antissimétrica e fraca de $\mathbb{O}$ é o Skew de alguém de B. Porém, o ideal de identidades de $\mathbb{O}$ é multihomogêneo, portanto, precisamos considerar apenas identidades homogêneas. Como qualquer avaliação de $\mathrm{Skew}(t \odot_s x)$ apenas assume valores no corpo e $\mathrm{Skew}(x^{[3]})$ apenas assume valores sem traço, assim com $\mathrm{Skew}(t^2)$ e $\mathrm{Skew}(x^{[4]})$, basta considerar o Skew de elementos da base de B exibida em 4.4.1. Porém, t^3x aparece em todas as linhas e colunas da tabela exibida. Portanto, se $\mathbb{O}$ tiver alguma identidade antissimétrica além das decorrentes de B, então $\mathrm{Skew}(t^3x) = \frac{1}{24}u^{[4]}$ é uma identidade antissimétrica fraca dos octônios. Todavia, Shestakov e Zhukavets fizeram uma avaliação fraca e não nula de $u^{[4]}$ em [SZ09].

Seja $\mathcal{K} \lhd \mathcal{A}$ o ideal gerado por $\{x^{[3]} \odot_s x - 2t^2, tx^{[3]}, x^{[5]} - 12t^2x, x^{[6]} - 12t^3\}$. Para mostrar que B não satisfaz nenhuma identidade extra vamos calcular uma base e tabela de multiplicação de $\mathcal{A}/\mathcal{K}$. É fácil ver que $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ tem "a mesma base e tabela de multiplicação que B". Listamos aqui as partes mais atrapalhadas de sua verificação.

$$\begin{aligned}
x \cdot t^2 =& t^2x - 2tx^{[3]} = t^2x, \\
(t \odot_s x)t =& 2xt \cdot t + x^{[3]}t = 2xt^2 + 2(x,t,t) = 2t^2x - \frac{1}{3}z^{[3]} = 2t^2x, \\
t(t \odot_s x) =& 2t \cdot tx - 2tx^{[3]} = 2t^2x - 2(t,t,x) = 2t^2x, \\
\frac{1}{6}z^{[4]} =& [(t \odot_s x)x, t]_s = -x(t \odot_s x) \cdot t - t \cdot (t \odot_s x)x \\
=& - x \cdot (t \odot_s x)t - (x, (t \odot_s x), t) \\
& - t(t \odot_s x) \cdot x + (t, (t \odot_s x), x) \\
=& - 2x \cdot xt^2 - 2t^2x \cdot x = -\frac{1}{6}x^{[6]} = -2t^3, \\
t(x^{[3]}x) =& tx^{[3]} \cdot x - (t, x^{[3]}, x) = -\frac{1}{3}z^{[4]} = 4t^3, \\
tx^{[4]} =& 2t \cdot x^{[3]}x + 2t^3 = 6t^3, \\
x^{[3]}x^{[3]} =& \frac{1}{2}(u^{[3]} + z^{[4]}) = -6t^3, \\
(t \odot_s x)x^{[3]} =& 2xt \cdot x^{[3]} + x^{[3]}x^{[3]} = 2(x,t,x^{[3]}) - 6t^3 = 2t^3, \\
x^{[3]}(t \odot_s x) =& 2x^{[3]} \cdot tx - x^{[3]}x^{[3]} = -2t^3, \\
t^2x^{[3]} =& x^{[3]}t^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^2(t \odot_s x) =& 2t^2 \cdot tx - t^2 x^{[3]} = 2t^3 x, \\
(t \odot_s x)t^2 =& 2xt \cdot t^2 + t^2 x^{[3]} = 2t^3 x, \\
x^{[4]} x^{[3]} =& 2xx^{[3]} \cdot x^{[3]} + 2t^2 x^{[3]} = -12t^3 x, \\
x^{[3]} x^{[4]} =& 2x^{[3]} \cdot x^{[3]} x - 2t^2 x^{[3]} = -12t^3 x, \\
-6t^4 =& (x^{[3]} x^{[3]})t = x^{[3]}(x^{[3]} t) = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Apêndice A

Uma Nota Sobre a Bibliografia

Durante o nosso trabalho tentamos seguir o mais próximo possível as diretrizes de citações da *American Mathematical Society.* Entretanto tivemos dois obstáculos. O primeiro consiste que muitos dos artigos citados não foram traduzidos e nós citamos o original. O motivo para tal é que apenas os originais estão indexados na *American Mathematical Society.* Porém não temos motivo de preocupação, a página de download contém a versão traduzida para o inglês. O segundo consiste que muitos autores mudaram a grafia, no alfabeto latino, do seu nome. Portanto atualizamos o seu nome para o mais recente utilizado. Como essa mudança de nomes pode dar alguns problemas na página de busca da *American Mathematical Society* listamos os autores que que fazemos referências junto com todas as grafias do seu nome.

Drensky, Vesselin S.

- Drenski, V.
- Drenski, V. S.
- Drenski, Veselin S.
- Drenski, Vesselin S.
- Drensky, V.
- Drensky, V. S.
- Drensky, Vesselin

Di Vincenzo, Onofrio Mario

- Di Vincenzo, O. M.
- Di Vincenzo, Onofrio M.
- di Vincenzo, Onofrio M.

Iltyakov, A. V.

- Il'tyakov, A.
- Iltyakov, A.
- Il'tyakov, A. V.
- Il'tyakov, Alexander V.
- Iltvakov, A.

Kemer, A. R.:

- Kemer, Aleksandr Robertovich
- Kemer, Alexander
- Kemer, Alexander R.

Kanel-Belov, Alexei

- Belov, A.
- Belov, A. J.
- Belov, A. Ya.
- Belov, Alexei
- Belov, Alexei Ya.
- Belov, Alexey
- Belov-Kanel, A.
- Belov-Kanel, Alexei
- Kanel, A.
- Kanel-Belov, A.
- Kanel-Belov, A. J.
- Kanel-Belov, A. Ya.
- Kanel-Belov, Alexey
- Kanel', A. Ya.
- Kanel'-Belov, A.
- Канел'-Белов, А. Я.

Latyshev, Viktor Nikolaevich

- Латышев, В. Н.
- Latyšev, V. N.
- Latyshev, V. N.
- Latyshev, Victor

Mal'tsev, Yu. N.

- Mal'cev, Ju. N.
- Mal'cev, Yuri N.
- Mal'tsev, Yu. N.
- Maltsev, Yu. N.
- Mal'cev, Ju. N.

Kuz'min, E. N.

- Kuz'min, E.
- Kuzmine, E. N.

Razmyslov, Yu. P.

- Razmislov, Yu. P.
- Razmyslov, Ju. P.
- Razmyslov, Yu. P.
- Размыслов, Ю. П.

Shestakov, Ivan P.

- Шестаков, И. П.
- Shestakov, I.
- Shestakov, I. P.
- Shestakov, Ivan
- Šestakov, I. P.

Shirshov, Anatoliĭ Illarionovich

- Shirshov, A. I.

- Ширшов, А. И.
- Širšov, A. I.
- Širsov, Anatoliĭ Illarionovič
- Širsov, Anatoliĭ Illarionovič

Slinko, Arkadii M.

- Slin'ko, A. M.
- Slinko, A.
- Слин'ко, А. М.
- Slin'ko, Arkadii M.
- Slinko, Arkadii

Vasilovsky, Sergei Yu

- Vasilovsky, S.
- Vasilovsky, S. Yu.
- Vasilovskiĭ, S. Yu.

Zelmanov, Efim I.

- Zel'manov, Efim I.
- Zel'manov, E.
- Zel'manov, E. I.
- Zelmanov, E.
- Zelmanov, E. I.
- Zelmanov, Efim
- Zel'manov, Ephim

Referências Bibliográficas

[AKB10] Eli Aljadeff e Alexei Kanel-Belov. Representability and Specht problem for G-graded algebras. *Adv. Math.*, 225(5):2391–2428, 2010. 3

[Alb42] A. A. Albert. Quadratic forms permitting composition. *Ann. of Math. (2)*, 43:161–177, 1942. 13

[Aze02] Sergio S. Azevedo. Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field. *Comm. Algebra*, 30(12):5849–5860, 2002. 3

[Bae02] John C. Baez. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 39(2):145–205, 2002. 4

[Bae05] John C. Baez. Errata for: “The octonions” [Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 2, 145–205; mr1886087]. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 42(2):213 (electronic), 2005. 4

[BKK09] Antônio Pereira Brandão, Jr., Plamen Koshlukov e Alexei Krasilnikov. Graded central polynomials for the matrix algebra of order two. *Monatsh. Math.*, 157(3):247–256, 2009. 41

[BM58] R. Bott e J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:87–89, 1958. 4

[Cay45] Arthur Cayley. On jacobi’s elliptic functions, in reply to the rev. b. bronwin; and on quaternions. *Philos. Mag.*, 26:208–211, 1845. 4

[Cen11] Lucio Centrone. $\mathbb{Z}_2$-graded identities of the Grassmann algebra in positive characteristic. *Linear Algebra Appl.*, 435(12):3297–3313, 2011. 3

[CS03] John H. Conway e Derek A. Smith. *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry.* A K Peters Ltd., Natick, MA, 2003. 4

[Dic19] L. E. Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. *Ann. of Math. (2)*, 20(3):155–171, 1919. 13

[DN06] Dniester notebook: unsolved problems in the theory of rings and modules. Em Mikhail V. Kochetov, V. T. Filippov, V. K. Kharchenko e I. P. Shestakov, editors, *Non-associative algebra and its applications*, volume 246 of *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, páginas 461–516. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. Translated from the 1993 Russian edition [MR1310114] by Murray R. Bremner and Mikhail V. Kochetov and edited by V. T. Filippov, V. K. Kharchenko and I. P. Shestakov. 5

[Dre74] Vesselin S. Drensky. Identities in Lie algebras. *Algebra i Logika*, 13:265–290, 363–364, 1974. 1

[Dre81] Vesselin S. Drensky. A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0. *Algebra i Logika*, 20(3):282–290, 361, 1981. 1

[Dre00] Vesselin S. Drensky. *Free algebras and PI-algebras*. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000. Graduate course in algebra. 2

[DV92] Onofrio Mario Di Vincenzo. On the graded identities of $M_{1,1}(E)$. *Israel J. Math.*, 80(3):323–335, 1992. 3, 41

[DVdS09] Onofrio Mario Di Vincenzo e Viviane Ribeiro Tomaz da Silva. On Z_2-graded polynomial identities of the Grassmann algebra. *Linear Algebra Appl.*, 431(1-2):56–72, 2009. 3

[Eld90] Alberto Elduque. Quadratic alternative algebras. *J. Math. Phys.*, 31(1):1–5, 1990. 15

[Gen81] G. K. Genov. Basis for identities of a third-order matrix algebra over a finite field. *Algebra i Logika*, 20(4):365–388, 484, 1981. 2

[Gri99] A. V. Grishin. Examples of T-spaces and T-ideals of characteristic 2 without the finite basis property. *Fundam. Prikl. Mat.*, 5(1):101–118, 1999. 1

[GS82a] Georgi K. Genov e Plamen N. Siderov. A basis for identities of the algebra of fourth-order matrices over a finite field. I. *Serdica*, 8(3):313–323, 1982. 2

[GS82b] Georgi K. Genov e Plamen N. Siderov. A basis for the identities of the algebra of fourth-order matrices over a finite field. II. *Serdica*, 8(4):351–366 (1983), 1982. 2

[Her94] I. N. Herstein. *Noncommutative rings*, volume 15 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1994. Reprint of the 1968 original, With an afterword by Lance W. Small. 7

[HP97] Irvin R. Hentzel e Luiz A. Peresi. Identities of Cayley-Dickson algebras. *J. Algebra*, 188(1):292–309, 1997. 5, 51

[Hur89] Hurwitz. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, páginas 309–316, 1989. 4, 13

[Ilt85] A. V. Iltyakov. The Specht property of ideals of identities of certain simple nonassociative algebras. *Algebra i Logika*, 24(3):327–351, 374–375, 1985. 2, 5

[Ilt91] A. V. Iltyakov. Finiteness of the basis of identities of a finitely generated alternative PI-algebra over a field of characteristic zero. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 32(6):61–76, 204, 1991. 1

[Ilt92] A. V. Iltyakov. On finite basis of identities of Lie algebra representations. *Nova J. Algebra Geom.*, 1(3):207–259, 1992. 1

[Isa84] I. M. Isaev. Identities of a finite Cayley-Dickson algebra. *Algebra i Logika*, 23(4):407–418, 479, 1984. 5

[Jac85] Nathan Jacobson. *Basic algebra. I.* W. H. Freeman and Company, New York, second edição, 1985. 7

[Jac89] Nathan Jacobson. *Basic algebra. II.* W. H. Freeman and Company, New York, second edição, 1989. 7

[KB99] Alexei Kanel-Belov. On non-Specht varieties. *Fundam. Prikl. Mat.*, 5(1):47–66, 1999. 1

[KB10] Alexei Kanel-Belov. Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 74(1):3–134, 2010. 3

[KBR05] Alexei Kanel-Belov e Louis Halle Rowen. *Computational aspects of polynomial identities*, volume 9 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005. 1, 2

[KBRV10] Alexei Kanel-Belov, Louis Rowen e Uzi Vishne. Structure of Zariski-closed algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(9):4695–4734, 2010. 3

[KBRV12a] Alexei Kanel-Belov, Louis Rowen e Uzi Vishne. Full exposition of Specht's problem. *Serdica Math. J.*, 38(1-3):313–370, 2012. 3

[KBRV12b] Alexei Kanel-Belov, Louis H. Rowen e Uzi Vishne. Full quivers of representations of algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(10):5525–5569, 2012. 3

[KBRV13a] Alexei Kanel-Belov, Louis H. Rowen e Uzi Vishne. PI-varieties associated to full quivers of representations of algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(5):2681–2722, 2013. 3

[KBRV13b] Alexei Kanel-Belov, Louis H. Rowen e Uzi Vishne. Specht's problem for associative affine algebras over commutative noetherian rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, à aparecer(???):44, 2013. 3

[KdA02] Plamen Koshlukov e Sérgio S. de Azevedo. Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic. *Israel J. Math.*, 128:157–176, 2002. 3, 41

[Kem87] A. R. Kemer. Finite basability of identities of associative algebras. *Algebra i Logika*, 26(5):597–641, 650, 1987. 1

[Kem91] A. R. Kemer. *Ideals of identities of associative algebras*, volume 87 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. Translated from the Russian by C. W. Kohls. 1, 2

[Kle53] Erwin Kleinfeld. Simple alternative rings. *Ann. of Math. (2)*, 58:544–547, 1953. 4

[Kos97] Plamen Koshlukov. Weak polynomial identities for the matrix algebra of order two. *J. Algebra*, 188(2):610–625, 1997. 1

[KR73] D. Krakowski e A. Regev. The polynomial identities of the Grassmann algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181:429–438, 1973. 2

[KV03] Plamen Koshlukov e Angela Valenti. Graded identities for the algebra of $n \times n$ upper triangular matrices over an infinite field. *Internat. J. Algebra Comput.*, 13(5):517–526, 2003. 3

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edição, 2002. 7

[Lat63] Viktor Nikolaevich Latyshev. On the choice of basis in a T-ideal. *Sibirsk. Mat. Ž.*, 4:1122–1127, 1963. 2

[Mal71] Yu. N. Mal'tsev. A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices. *Algebra i Logika*, 10:393–400, 1971. 2

[MK78] Yu. N. Mal'tsev e E. N. Kuz'min. A basis for identities of the algebra of second-order matrices over a finite field. *Algebra i Logika*, 17(1):28–32, 121, 1978. 2

[Osb62] J. Marshall Osborn. Quadratic division algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 105:202–221, 1962. 15

[Pop82] A. P. Popov. Identities of the tensor square of a Grassmann algebra. *Algebra i Logika*, 21(4):442–471, 1982. 2

[Pro76] C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Advances in Math.*, 19(3):306–381, 1976. 2

[Rac88] Michel L. Racine. Minimal identities of octonion algebras. *J. Algebra*, 115(1):251–260, 1988. 5, 51

[Raz73] Yu. P. Razmyslov. The existence of a finite basis for the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic zero. *Algebra i Logika*, 12:83–113, 121, 1973. 1

[Raz74] Yu. P. Razmyslov. Identities with trace in full matrix algebras over a field of characteristic zero. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38:723–756, 1974. 2

[Sch95] Richard D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*. Dover Publications Inc., New York, 1995. Corrected reprint of the 1966 original. 4

[Shc99] V. V. Shchigolev. Examples of infinitely based T-ideals. *Fundam. Prikl. Mat.*, 5(1):307–312, 1999. 1

[She75] Ivan P. Shestakov. Radicals and nilpotent elements of free alternative algebras. *Algebra i Logika*, 14(3):354–365, 370, 1975. 5

[She03a] Ivan P. Shestakov. Free Malcev superalgebra on one odd generator. *J. Algebra Appl.*, 2(4):451–461, 2003. 60

[She03b] Ivan P. Shestakov. Free Malcev superalgebra on one odd generator. *J. Algebra Appl.*, 2(4):451–461, 2003. 62

[She10] Ivan P. Shestakov. Associative identities of octonions. *Algebra Logika*, 49(6):834–839, 846, 849, 2010. 5

[Shi57a] Anatoliĭ Illarionovich Shirshov. On rings with identity relations. *Mat. Sb. N.S.*, 43(85):277–283, 1957. 19

[Shi57b] Anatoliĭ Illarionovich Shirshov. On some non-associative null-rings and algebraic algebras. *Mat. Sb. N.S.*, 41(83):381–394, 1957. 19

[Shi09] Anatoliĭ Illarionovich Shirshov. *Selected works of A. I. Shirshov.* Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Translated from the Russian by Murray Bremner and Mikhail V. Kotchetov, Edited by Leonid A. Bokut, Victor Latyshev, Ivan P. Shestakov and Efim Zelmanov. 19

[Spe50] Wilhelm Specht. Gesetze in Ringen. I. *Math. Z.*, 52:557–589, 1950. 1

[Svi11] Irina Sviridova. Identities of pi-algebras graded by a finite abelian group. *Comm. Algebra*, 39(9):3462–3490, 2011. 3

[Svi13] Irina Sviridova. Finitely generated algebras with involution and their identities. *J. Algebra*, 383:144–167, 2013. 3

[SZ07] Ivan P. Shestakov e Natalia Zhukavets. The free alternative superalgebra on one odd generator. *Internat. J. Algebra Comput.*, 17(5-6):1215–1247, 2007. 53, 61

[SZ09] Ivan P. Shestakov e Natalia Zhukavets. Skew-symmetric identities of octonions. *J. Pure Appl. Algebra*, 213(4):479–492, 2009. 5, 49, 50, 62, 63

[SZ11] Ivan P. Shestakov e Mikhail Zaicev. Polynomial identities of finite dimensional simple algebras. *Comm. Algebra*, 39(3):929–932, 2011. 4

[Val02] A. Valenti. The graded identities of upper triangular matrices of size two. *J. Pure Appl. Algebra*, 172(2-3):325–335, 2002. 3

[Vas89a] Sergei Yu Vasilovsky. Basis of identities of a Jordan algebra of a bilinear form over an infinite field. *Trudy Inst. Mat. (Novosibirsk)*, 16(Issled. po Teor. Kolets i Algebr):5–37, 198, 1989. 2

[Vas89b] Sergei Yu Vasilovsky. The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field. *Algebra i Logika*, 28(5):534–554, 611, 1989. 2

[Vas96] Sergei Yu Vasilovsky. Graded polynomial identities of the Jordan superalgebra of a bilinear form. *J. Algebra*, 184(1):255–296, 1996. 2

[Vas99] Sergei Yu Vasilovsky. Z_n-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(12):3517–3524, 1999. 3, 41

[VL70] M. R. Vaughan-Lee. Varieties of Lie algebras. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 21:297–308, 1970. 1

[VZ89] A. Ya. Vaĭs e Efim I. Zelmanov. Kemer's theorem for finitely generated Jordan algebras. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, (6):42–51, 1989. 1

[Zor30] Max Zorn. Theorie der alternativen ringe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 8:123–147, 1930. 4

[ZSSS82] K. A. Zhevlakov, Arkadii M. Slinko, Ivan P. Shestakov e A. I. Shirshov. *Rings that are nearly associative*, volume 104 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982. Translated from the Russian by Harry F. Smith. 5, 7, 9, 13, 19, 20

Índice Remissivo