

# Geometria 2-plética, algebroides de Courant, e simetrias infinitesimais de $S^1$ -bundle gerbes

Eduardo de Carvalho Andrade

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Cristian Ortiz

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro CNPQ

São Paulo, Dezembro de 2023

# Geometria 2-plética, algebroides de Courant, e simetrias infinitesimais de $S^1$ -bundle gerbes

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo candidato Eduardo de Carvalho Andrade, tal como submetida à Comissão Julgadora

# Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares e amigos pelo apoio. Agradeço em especial ao meu orientador professor Cristian Ortiz pela proposta do tema e pelo empenho em ajudar sempre que necessário.

# Resumo

Para toda variedade 2-plética nós podemos associar um algebroide de Courant exato e também uma 2-álgebra de Lie consistindo de funções suaves e 1-formas hamiltonianas (álgebra de observáveis). Nós veremos que existe um morfismo de 2-álgebras de Lie entre a álgebra de observáveis e a 2-álgebra de Lie do algebroide de Courant associado (esta consiste de seções do algebroide de Courant e funções suaves). Além disso, considerando um  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe sobre a mesma variedade 2-plética, mostraremos que existe um quase-isomorfismo entre a álgebra de observáveis e a 2-álgebra de Lie das simetrias infinitesimais que preservam a estrutura conectiva do  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe.

# Abstract

To every 2-plectic manifold we can associate an exact Courant algebroid and also a Lie 2-algebra consisting of smooth functions and Hamiltonian 1-forms (algebra of observables). We will see that there is a morphism of Lie 2-algebras between the algebra of observables and the Lie 2-algebra of the associated Courant algebroid (this consists of sections of the Courant algebroid and smooth functions). Furthermore, considering a  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe on the same 2-plectic manifold, we will see that there is a quasi-isomorphism between the algebra of observables and the Lie 2-algebra of the infinitesimal symmetries of the  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe that preserve the connective structure of the bundle gerbe.

# Sumário

Sumário . . . . .	i
<b>1</b> <b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2</b> <b>TEORIA DE CATEGORIAS . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 <b>Categorias . . . . .</b>	<b>5</b>
2.2 <b>Funtores . . . . .</b>	<b>7</b>
2.3 <b>Transformações naturais . . . . .</b>	<b>11</b>
2.4 <b>Equivalência de categorias . . . . .</b>	<b>15</b>
2.5 <b>Categorias internas e 2-categorias . . . . .</b>	<b>17</b>
2.5.1 <b>Bicategorias . . . . .</b>	<b>21</b>
2.6 <b>2-Álgebras de Lie . . . . .</b>	<b>24</b>
2.7 <b><math>L_\infty</math>-álgebras de 2-termos . . . . .</b>	<b>29</b>
2.8 <b>Módulos cruzados de álgebras de Lie . . . . .</b>	<b>31</b>
2.9 <b>Butterfly . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3</b> <b>GRUPOIDES DE LIE E ALGEBROIDES DE LIE . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1 <b>Definições e exemplos . . . . .</b>	<b>35</b>
3.2 <b>Propriedades de grupoides de Lie . . . . .</b>	<b>37</b>
3.3 <b>Construções com grupoides de Lie . . . . .</b>	<b>40</b>
3.4 <b>Equivalência de grupoides de Lie . . . . .</b>	<b>42</b>
3.5 <b>A variedade simplicial de um grupoide de Lie . . . . .</b>	<b>44</b>
3.5.0.1 <b>O complexo de Bott-Shulman-Stasheff . . . . .</b>	<b>46</b>
3.6 <b>Algebroides de Lie . . . . .</b>	<b>47</b>
3.7 <b>Algebroide de Lie de um grupoide de Lie . . . . .</b>	<b>48</b>
3.8 <b>Algebroide de Lie de uma variedade pré-simplética . . . . .</b>	<b>50</b>
3.9 <b>Álgebra de Poisson . . . . .</b>	<b>54</b>
3.10 <b>LA-grupoides e campos de vetores multiplicativos em grupoides de Lie . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>4</b> <b><math>\mathbb{S}^1</math>-BUNDLE GERBES . . . . .</b>	<b>61</b>
4.1 <b>Fibrados de linha hermitianos e holonomia . . . . .</b>	<b>61</b>
4.1.1 <b>Holonomia . . . . .</b>	<b>65</b>
4.2 <b>Bundle gerbes . . . . .</b>	<b>67</b>
4.2.1 <b>Bundle gerbes como <math>\mathbb{S}^1</math>-extensões centrais . . . . .</b>	<b>68</b>

4.3	Classes de Dixmier-Douady . . . . .	70
4.4	Trivializações . . . . .	71
4.5	Isomorfismo estável de $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes . . . . .	74
4.6	Estrutura conectiva . . . . .	75
4.7	Classes de Deligne de $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes com estrutura conectiva	76
4.8	Exemplos . . . . .	78
4.9	Holonomia de superfície . . . . .	81
4.10	Holonomia em D-branas . . . . .	83
5	<b>GEOMETRIA 2-PLÉTICA E ALGEBROIDES DE COURANT</b>	85
5.1	Variedades 2-pléticas e colchete de Poisson generalizado . . . .	85
5.2	Algebroides de Courant . . . . .	88
5.3	A classe de Ševera de um algebroide de Courant exato . . . . .	92
5.4	O algebroide de Courant associado a uma variedade 2-plética .	96
5.5	<b>2-Álgebras de Lie</b> . . . . .	100
5.5.1	A 2-álgebra de Lie de uma variedade 2-plética. . . . .	100
5.5.2	A 2-álgebra de Lie de um algebroide de Courant . . . . .	101
5.6	<b>Relação algébrica entre variedades 2-plética e algebroides de Courant.</b> . . . . .	101
6	<b>SIMETRIAS INFINITESIMAS DE <math>\mathbb{S}^1</math>-BUNDLE GERBES</b> . . .	109
6.1	Quantomorfismos infinitesimais e álgebra de Poisson . . . . .	109
6.2	Campos de vetores multiplicativos em bundle gerbes . . . . .	112
6.3	Campos de vetores multiplicativos em bundle gerbes com estrutura conectiva . . . . .	116
6.4	A 2-álgebra de Lie das simetrias infinitesimais de um $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe . . . . .	121
6.5	Simetrias infinitesimais de bundle gerbes e variedades 2-pléticas	124
A	<b>COHOMOLOGIA DE ČECH</b> . . . . .	129
B	<b>COHOMOLOGIA DE DELIGNE</b> . . . . .	131
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	133

# 1 Introdução

Originalmente  $\mathbb{S}^1$ -gerbes foram introduzidos como certos feixes de grupoides por Giraud, (GIRAUD, 1966), e sua popularização em geometria veio através de Hitchin, (HITCHIN, 1999), e Brylinski, (BRYLINSKI, 2007). Gerbes são os objetos análogos aos  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais correspondendo a classes de cohomologia em  $H^3(M, \mathbb{Z})$ . A definição que usaremos aqui para  $\mathbb{S}^1$ -gerbes foi introduzida por Murray, (MURRAY, 1996), e chamada de  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes. Desde então, a teoria de gerbes vem sido desenvolvida, e várias aplicações de gerbes foram encontradas em matemática e física.

A relevância de (bundle) gerbes incluem os seguintes resultados: gerbes são modelos geométricos para twists da K-teoria ((BOUWKNEGT et al., 2002),(CAREY; WANG, 2008)), descrevem os B-campos e D-branas em teoria de cordas ((KAPUSTIN, 1999),(GAWEDZKI, 2005),(WALDORF, 2007a)), e desempenham um importante papel em T-dualidade topológica ((BOUWKNEGT; EVSLIN; MATHAI, 2004),(BUNKE; NIKOLAUS, 2015)). Gerbes com conexões descrevem varias anomalias em teoria quântica de campos ((CAREY; MICKELSSON; MURRAY, 2000),(BUNK; MÜLLER; SZABO, 2021)). Além disso, gerbes com conexões em uma variedade  $M$  correspondem a certos fibrados de linhas com conexões no espaço de loops livres  $LM$  ((WALDORF, 2016)), e eles dão origem a teorias de campo de tipo bordismo suave em  $M$  ((BUNK; WALDORF, 2021)). Gerbes também vem tendo importante papel na teoria de quantização geométrica ((BUNK, 2021), (ROGERS, 2013)).

O formalismo das teorias de calibre de ordem superior sugere que estruturas encontradas em mecânica clássica podem ser generalizadas, usando categorias de ordem superior e teoria de homotopia, e aplicadas ao estudo de campos, cordas e teoria de branas ((BAEZ; SCHREIBER, 2005),(BARTELS, 2006),(SCHREIBER, 2005)). Aqui estaremos interessados no caso de variedades 2-pléticas, variedades suaves equipadas com uma 3-forma fechada e não degenerada. De fato, estruturas algébricas e geométricas em variedades simpléticas aparecem naturalmente em variedades 2-pléticas ((BAEZ; HOFFNUNG; ROGERS, 2010)). A geometria 2-plética é particularmente relevante para a teoria de cordas, um exemplo disso é que os observáveis na teoria de cordas são 1-formas hamiltonianas ((BAEZ; HOFFNUNG; ROGERS, 2010)).

Analogamente ao caso simplético, onde para toda variedade pré-simplética podemos associar um algebroide de Lie exato, C. Rogers mostrou que para toda variedade pré-2-plética  $(M, \omega)$  podemos associar um algebroide de Courant exato, denotado por  $C$ , com classe de Ševera  $\omega$  ((ROGERS, 2013)). O análogo 2-plético da álgebra



de Poisson é a 2-álgebra de Lie (versão categorificada de uma álgebra de Lie) de observáveis denotada por  $L_\infty(M, \omega)$  ((BAEZ; HOFFNUNG; ROGERS, 2010)). Roytenberg e Weinstein mostraram que podemos associar uma 2-álgebra de Lie, denotada por  $L_\infty(C)$ , a todo algebroides de Courant exato ((ROYTENBERG; WEINSTEIN, 1998)). C. Rogers mostrou que existe um morfismo de 2-álgebras de Lie mergulhando  $L_\infty(M, \omega)$  em  $L_\infty(C)$  ((ROGERS, 2013)).

Campos de vetores multiplicativos em um grupoide de Lie formam uma 2-álgebra de Lie ((BERWICK-EVANS; LERMAN, 2020), (ORTIZ; WALDRON, 2019)). D. Krepski considerou um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre uma variedade pré-2-plética  $M$  como uma  $\mathbb{S}^1$ -extensão central do grupoide de submersão, denotamos tal extensão por  $\{P \rightrightarrows X\}$ , e modelou simetrias infinitesimais de tal bundle gerbe como a 2-álgebra de Lie de campos de vetores multiplicativos no grupoide de Lie  $\{P \rightrightarrows X\}$  ((KREPSKI; VAUGHAN, 2022)). Krepski também mostrou que existe um quase-isomorfismo entre a 2-álgebra de Lie das simetrias infinitesimais do bundle gerbe que preservam a estrutura conectiva e a 2-álgebra de Lie de observáveis  $L_\infty(M, \omega)$ .

Essa dissertação foi dividida em 6 capítulos. O capítulo 2, intitulado **Teoria de Categorias**, possui fatos básicos sobre categorias, 2-categorias e bicategorias. Além disso introduzimos nesse capítulo, sem demonstrações, conceitos centrais que aparecerão no decorrer da dissertação tais como 2-álgebras de Lie,  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos, módulos cruzados de álgebras de Lie e Butterflies. O teorema 2.7.2 nos diz que a 2-categoria de 2-álgebras de Lie e a 2-categoria de  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos são 2-equivalentes. Noohi mostrou que um butterfly invertível corresponde a um quase-isomorfismo entre 2-álgebras de Lie ((NOOHI, 2013)).

O capítulo 3, intitulado **Grupoides de Lie e algebroides de Lie**, contém fatos básicos sobre a teoria de grupoides de Lie e algebroides de Lie. Além disso, é introduzido o conceito de nervo de um grupoide de Lie como uma variedade pré-simplicial e o complexo duplo de Bott-Shulman-Stasheff. Por fim, são introduzidos os LA-grupoides e o resultado onde campos de vetores multiplicativos em um grupoide de Lie possui uma estrutura de 2-álgebra de Lie estrita (ORTIZ; WALDRON, 2019; BERWICK-EVANS; LERMAN, 2020).

O capítulo 4, intitulado  **$\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe**, contém elementos da teoria de  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes como a construção de uma estrutura conectiva, classes características, denominadas classes de Dixmier-Douady, e também mostramos exemplos. Além disso, construímos holonomia de superfícies fechada e holonomia de superfícies com fronteira (holonomia em D-branas) e comentamos aspectos físicos da teoria de cordas tais como termos de Wess-Zumino e efeito Aharonov-Bohm.

O capítulo 5, intitulado **Geometria 2-plética e algebroides de Courant**,

tem como principal objetivo demonstrar o teorema de Rogers, teorema 5.6.1, comentado anteriormente, ou seja, mostrar que existe um morfismo de 2-álgebras de Lie mergulhando  $L_\infty(M, \omega)$  em  $L_\infty(C)$ . Para isso, apresentamos elementos da teoria de algebroides de Courant e mostramos como associar um algebroide de Courant exato,  $C$ , para uma variedade pré-2-plética  $(M, \omega)$  com classe de Ševera  $-\omega$ .

O capítulo 6, intitulado **Simetrias infinitesimais de  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes**, tem como principal objetivo demonstrar o teorema 6.5.1, ou seja, mostrar que dado um  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe  $(P, X)$  sobre uma variedade pré-2-plética  $(M, \omega)$  existe um butterfly invertível entre a 2-álgebra de Lie das simetrias infinitesimais que preservam a estrutura conectiva de  $(P, X)$ , denotada  $\mathbb{X}(\mathbf{P}; \gamma, B)$ , e a 2-álgebra de Lie de observáveis,  $L_\infty(M, \omega)$ . Para isso, mostraremos como construir a 2-álgebra de Lie  $\mathbb{X}(\mathbf{P}; \gamma, B)$ . Também mostramos nesse capítulo a generalização para  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes do resultado conhecido para  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais, onde o levantamento horizontal por uma conexão será um morfismo de álgebra de Lie se, e somente se, a curvatura for zero, teorema 6.3.1 ((KREPSKI; VAUGHAN, 2022)).



## 2 Teoria de Categorias

Nesse capítulo apresentaremos ferramentas que serão usadas nos demais capítulos. O foco será na apresentação das definições, principais resultados e exemplos, as demonstrações serão omitidas. Para mais informações em teoria de categorias ver (LANE, 2013), para mais informações em bicategorias e 2-categorias ver (BÉNABOU et al., 1967), (LEINSTER, 1998), (STREET, 1996) e (JOHNSON; YAU, 2021), para mais informações em butterflies ver (NOOHI, 2013) e para mais informações em módulos cruzados de álgebras de Lie ver (FRÉGIER; WAGEMANN, 2011).

### 2.1 Categorias

**Definição 2.1.1.** *Uma categoria  $\mathfrak{A}$  consiste de:*

- *uma coleção de objetos  $ob(\mathfrak{A})$ ;*
- *para cada  $A, B \in ob(\mathfrak{A})$ , uma coleção  $Hom(A, B)$  (ou  $Hom_{\mathfrak{A}}(A, B)$ ) de morfismos (também chamados de setas ou mapas) de  $A$  para  $B$ ;*
- *para cada  $A, B, C \in ob(\mathfrak{A})$  uma função*

$$\begin{aligned} Hom(B, C) \times Hom(A, B) &\rightarrow Hom(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

*chamada composição;*

- *para cada  $A \in ob(\mathfrak{A})$ , um elemento  $1_A \in Hom(A, A)$ , chamado identidade,*

*satisfazendo os seguintes axiomas:*

- **associatividade:** *para cada  $f \in Hom(A, B)$ ,  $g \in Hom(B, C)$  e  $h \in Hom(C, D)$ , nós temos  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ;*
- **lei da identidade:** *para cada  $f \in Hom(A, B)$ , nós temos  $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$ .*

**Observação 2.1.1.** *Se  $f \in Hom(A, B)$ , nós chamamos  $A$  de domínio e  $B$  de codomínio de  $f$ . Todo morfismo em uma categoria possui domínio e codomínio bem definidos.*

**Exemplos 2.1.1.** *1. Categoria dos conjuntos **Set** onde os objetos são conjuntos e os morfismos são funções.*

2. Categoria dos grupos **Grp** onde os objetos são grupos e morfismos são homomorfismos de grupos.
3. Para cada corpo  $k$ , existe uma categoria **Vect** cujos objetos são espaços vetoriais sobre  $k$  e os morfismos são transformações lineares.
4. Categoria dos espaços topológicos **Top** onde os objetos são espaços topológicos e morfismos são funções contínuas.
5. Categoria das variedades diferenciáveis **Man** cujos objetos são variedades diferenciáveis e morfismos são funções suaves.

**Definição 2.1.2.** Um mapa  $f : A \rightarrow B$  em uma categoria  $\mathfrak{A}$  é um isomorfismo se existe um mapa  $g : B \rightarrow A$  em  $\mathfrak{A}$  tal que  $gf = 1_A$  e  $fg = 1_B$ .

**Exemplos 2.1.2.** 1. Em **Set** os isomorfismos são as bijeções.

2. Em **Grp** os isomorfismos são isomorfismos de grupos (homomorfismo bijetivo).
3. Em **Vect** os isomorfismos são transformações lineares bijetoras.
4. Em **Top** os isomorfismos são homeomorfismos.
5. Em **Man** os isomorfismos são difeomorfismos.

Os exemplos de categorias mencionadas acima são formados por objetos como sendo conjuntos com uma certa estrutura e morfismos mapas que preservam essas estruturas. Porém, podemos obter uma categoria sem partir de um conjunto, veremos isso com exemplos.

**Exemplos 2.1.3.** 1. Uma categoria pode ser especificada dizendo quem são seus objetos, morfismos, identidade e composição. Por exemplo, a categoria **0** é formada por nenhum objeto e nenhum morfismo. A categoria **1** é formada por um único objeto e possui apenas o morfismo identidade. Também podemos formar uma categoria **2** com dois objetos e um morfismo entre eles. As categorias **1** e **2** podem ser representadas pelos diagramas abaixo, respectivamente.

•

e

•  $\longrightarrow$  •

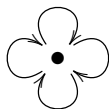
2. Um grupo pode ser visto como uma categoria com um único objeto e com todos os morfismos sendo isomorfismos.

De fato, se  $\mathfrak{A}$  é uma categoria com um único objeto, denotado por  $\bullet$ , então  $\mathfrak{A}$  consiste de um conjunto  $\text{Hom}(\bullet, \bullet)$ , possui uma composição associativa

$$\circ : \text{Hom}(\bullet, \bullet) \times \text{Hom}(\bullet, \bullet) \rightarrow \text{Hom}(\bullet, \bullet),$$

e uma unidade  $1_\bullet \in \text{Hom}(\bullet, \bullet)$ . Ou seja, para  $\mathfrak{A}$  ser um grupo está faltando apenas definir uma inversa. Mas o fato de os morfismos de  $\mathfrak{A}$  serem isomorfismos implica que todo elemento de  $\text{Hom}(\bullet, \bullet)$  possui uma inversa com respeito a  $\circ$

Podemos representar a categoria  $\mathfrak{A}$  esquematicamente por



Podemos construir novas categorias através de uma categoria dada.

**Exemplos 2.1.4.** 1. Dada uma categoria  $\mathfrak{A}$  podemos obter uma categoria dual, denotada por  $\mathfrak{A}^{op}$ , mantendo os objetos e unidades e revertendo as setas. A composição em  $\mathfrak{A}^{op}$  é a mesma de  $\mathfrak{A}$  com argumentos reversos. Portanto, setas  $A \rightarrow B$  em  $\mathfrak{A}$  correspondem a setas  $B \rightarrow A$  em  $\mathfrak{A}^{op}$ .

2. Dados  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  categorias, podemos construir uma categoria produto  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ , onde

$$\begin{aligned} \text{ob}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) &= \text{ob}(\mathfrak{A}) \times \text{ob}(\mathfrak{B}) \\ \text{Hom}_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}((A, B), (A', B')) &= \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, A') \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, B'). \end{aligned}$$

A composição e a unidade são definidas termo a termo.

## 2.2 Funtores

Queremos obter um “mapa” entre categorias. Esse “mapa” é chamado de funtor e definido abaixo.

**Definição 2.2.1.** Sejam  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  categorias. Um **funtor**  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  leva objetos em objetos, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{ob}(\mathfrak{A}) &\xrightarrow{F} \text{ob}(\mathfrak{B}) \\ A &\mapsto F(A) \end{aligned}$$

e leva morfismos em morfismos, ou seja, para  $A, A' \in \text{ob}(\mathfrak{A})$  temos que:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, A') &\xrightarrow{F} \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(F(A), F(A')) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

satisfazendo os seguintes axiomas:

- $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$  sempre que  $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$  em  $\mathfrak{A}$ ;
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$  sempre que  $A \in \mathfrak{A}$ .

**Observação 2.2.1.** Os axiomas implicam que dado uma sequência de morfismos  $A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$  existe apenas um morfismo  $F(A_0) \rightarrow F(A_n)$ .

**Observação 2.2.2.** Podemos definir composição de funtores, ou seja, dados funtores  $F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  e  $G: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$  podemos definir o  $G \circ F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$  fazendo  $G \circ F(A) = G(F(A))$ . Também temos um funtor identidade  $1_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  que leva um objeto nele mesmo e um morfismo nele mesmo. Portanto, temos uma categoria onde objetos são categorias e morfismos são funtores denotada **CAT**.

**Observação 2.2.3.** Note que definimos funtores preservando a ordem da composição. Esses funtores são chamados de covariantes. Existem funtores que revertem setas, ou seja, para cada morfismo  $f: X \rightarrow Y$  temos  $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$  e como resultado  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ . Esses funtores são chamados de funtores contravariantes. Uma outra maneira de pensar em funtores contravariantes de uma categoria  $\mathfrak{A}$  para uma categoria  $\mathfrak{B}$  é como sendo um funtor  $F: \mathfrak{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{B}$ .

**Exemplos 2.2.1 (Funtores de esquecimento).** Os exemplos mais simples de funtores são os chamados “funtores de esquecimento”. Por exemplo:

1. Um funtor  $F: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  que leva um grupo  $G$  no seu conjunto correspondente  $F(G)$  e leva um homomorfismo de grupos para a função  $F(f)$  que define o homomorfismo é um funtor de esquecimento, pois “esquece” a estrutura de grupo. Similarmente, existe um funtor  $\mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Set}$  que esquece a estrutura de espaço vetorial.
2. Funtores de esquecimento não precisam esquecer toda a estrutura. Por exemplo, seja  $\mathbf{Ab}$  a categoria dos grupos abelianos de  $\mathbf{Ring}$  a categoria de anéis. Existe um funtor  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$  que esquece a estrutura multiplicativa, lembrando apenas o grupo aditivo subjacente.
3. Existe um funtor de inclusão  $I: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$  definido por  $I(G) = G$  e  $I(f) = f$  para qualquer homomorfismo  $f$ . Esquece a estrutura de ser abeliano.

**Exemplos 2.2.2 (Funtores livres).** *Os exemplos a seguir são chamados de funtores “livres”. Nesse caso o funtor adiciona estrutura.*

1. *A cada conjunto  $S$  podemos formar um grupo  $F(S)$  chamado de grupo livre. Fazemos isso adicionando elementos suficientemente a  $S$  de maneira a obter apenas as condições de definição de grupo.*

*Os elementos de  $F(S)$  são **expressões formais** formadas pelos elementos de  $S$ , ou seja, sejam  $x, y, z \in S$  então  $x^{-4}y^{-2}x^2zy^{-3}$  é um exemplo de expressão formal. Duas dessas palavras são iguais se uma pode ser obtida da outra por regras de cancelamento usuais, de modo que, por exemplo,  $x^3xy, x^4y$  e  $x^2y^{-1}yx^2y$  são representantes do mesmo elemento de  $F(S)$ . A composição em  $F(S)$  é obtida escrevendo uma expressão formal em seguida da outra, por exemplo,  $x^{-4}yx$  composto com  $xzy^{-3}$  é  $x^{-4}yx^2zy^{-3}$ .*

*$F$  de fato é um funtor, qualquer função entre conjuntos  $f : S \rightarrow S'$  da origem a um homomorfismo de grupos  $F(f) : F(S) \rightarrow F(S')$ . Por exemplo, pegue o mapa entre conjuntos*

$$f : \{w, x, y, z\} \rightarrow \{u, v\}$$

*definido por  $f(w) = f(x) = f(y) = u$  e  $f(z) = v$ . Isso da origem a um homomorfismo*

$$F(f) : F(w, x, y, z) \rightarrow F(u, v),$$

*que mapeia  $x^{-4}yx^2zy^{-3} \in F(w, x, y, z)$  para*

$$u^{-4}uu^2vu^{-3} = u^1vu^{-3} \in F(u, v).$$

2. *Também podemos construir o espaço vetorial livre, sobre um corpo  $k$ , em um conjunto obtendo o funtor livre  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$  que é definido em objetos fazendo  $F(S)$  ser um espaço vetorial com base  $S$ .*

*Podemos definir  $F(S)$  como o conjunto de todas as funções  $\lambda : S \rightarrow k$  tal que  $\{s \in S / \lambda(s) \neq 0\}$  é finito. Para definir a adição em  $F(S)$ , devemos definir para cada  $\lambda, \mu \in F(S)$  uma soma  $\lambda + \mu \in F(S)$ ; esta é dada por*

$$(\lambda + \mu)(s) = \lambda(s) + \mu(s)$$

*para  $s \in S$ . Similarmente, a multiplicação por escalar é dada por  $(c \cdot \lambda)(s) = c \cdot \lambda(s)$  para  $c \in k, \lambda \in F(S)$  e  $s \in S$ .*

**Exemplos 2.2.3 (Funtores em topologia algébrica).** *Considere a categoria  $\mathbf{Top}_*$  dos espaços topológicos com ponto base e a categoria  $\mathbf{Grp}$  de grupos. Um mapa*



contínuo entre espaços topológicos com ponto base  $f : (X, p) \rightarrow (Y, f(p))$  induz um homomorfismo de grupos  $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p))$ ,  $[\alpha] \mapsto [f\alpha]$ , que satisfaz  $(Id_{(X,p)})_* = Id_{\pi_1(X,p)}$  e  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ . Portanto temos um funtor covariante  $F : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$  que nos objetos leva espaços topológicos com ponto base  $(X, p)$  no seu grupo fundamental  $\pi_1(X, p)$  e nos morfismos leva mapas contínuos  $f$  nos homomorfismos de grupos induzidos  $f_*$ .

- Exemplos 2.2.4 (Funtores em geometria diferencial).**
1. Considere as categorias  $\mathbf{Man}$  e  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ . Considere uma variedade suave  $M$ , o conjunto de funções suaves de  $M$ ,  $C^\infty(M)$ , possui estrutura de espaço vetorial por adição e multiplicação por escalar ponto a ponto. Considere um mapa suave  $f : M \rightarrow N$  entre variedades  $M$  e  $N$ . Então  $f$  induz um mapa linear  $f^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$  (pullback), definido por  $g \mapsto g \circ f$ . É claro que  $(Id_M)^* = Id_{C^\infty(M)}$  e também  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ . Portanto, temos um funtor contravariante  $F : \mathbf{Man} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  que nos objetos leva variedades suaves  $M$  em seu espaço vetorial de funções suaves  $C^\infty(M)$  e nos morfismos leva funções suaves  $f$  no pullback  $f^*$ .
  2. Considere a categoria  $\mathbf{Man}_*$  de variedades suaves com ponto base e  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ . Um mapa suave  $f : (M, p) \rightarrow (N, f(p))$  induz um mapa  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  (diferencial). Sabemos que  $d(Id_M)_p = Id_{T_p M}$  e pela regra da cadeia  $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$ . Portanto, temos um funtor covariante  $F : \mathbf{Man}_* \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  que nos objetos leva variedades com ponto base,  $M$ , no espaço tangente ao ponto,  $T_p M$  e nos morfismos leva funções suaves,  $f$ , na diferencial  $df_p$ .
  3. (Funtor tangente) Sejam  $M$  e  $N$  variedades suaves e  $f : M \rightarrow N$  uma função suave. A diferencial total de  $f$ , denotada  $df$ , é um mapa  $df : TM \rightarrow TN$ ,  $(p, v) \mapsto (f(p), df_p(v))$  para  $v \in T_p M$ . É claro que a diferencial da identidade de  $M$  é a identidade de  $N$  e vale a composição. Portanto, temos um funtor covariante  $F : \mathbf{Man} \rightarrow \mathbf{Man}$  que nos objetos leva variedades suaves (fibrado tangente) em variedades suaves (fibrado tangente) e nos morfismos leva funções suaves  $f$  no seu diferencial total  $df$ .
  4. Considere as categorias  $\mathbf{Man}$  e  $\mathbf{Grp}$ . Sejam  $M$  e  $N$  variedades suaves, seja  $\omega \in \Omega^n(N)$  uma  $n$ -forma em  $N$  e  $f : M \rightarrow N$  uma função suave. O pullback de formas induz um homomorfismo a nível de cohomologia de de Rham  $f^* : H_{dR}(N) \rightarrow H_{dR}(M)$ , definida por  $[\omega] \mapsto [f^*\omega]$ . Além disso,  $(Id_M)^* = Id_{H_{dR}(M)}$  e  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ . Portanto, temos um funtor  $F : \mathbf{Man} \rightarrow \mathbf{Grp}$  que nos objetos leva variedades suaves no  $n$ -ésimo grupo de cohomologia de de Rham e nos morfismos leva funções suaves  $f$  em homomorfismos  $f^*$ .

5. (Funtor cotangente) Sejam  $\mathbf{Man}_{Diff}$ , categoria das variedades suaves com morfismos sendo difeomorfismos, e  $\mathbf{VB}$ , categoria de fibrados vetoriais com morfismos sendo morfismos de fibrados suave. Seja  $F : M \rightarrow N$  um difeomorfismo, podemos induzir um morfismo de fibrados  $T^*F : T^*M \rightarrow T^*N$ , mapa cuja restrição em cada  $T_q^*M$  é  $dF_{F^{-1}(q)}$ . É claro que  $dId_M^* = Id_{T^*M}$  e como a composição de pullback é contravariante e a regra da cadeia é covariante temos  $T^*(F \circ G) = T^*G \circ T^*F$ . Logo, temos um funtor contravariante  $\mathbf{Man}_{Diff} \rightarrow \mathbf{VB}$  que nos objetos leva variedades suaves no seu fibrado cotangente e nos morfismos leva difeomorfismos  $F$  em mapas fibrados  $T^*F$ .
6. Considere as categoria  $\mathbf{Man}_{Diff}$  e  $\mathbf{Symp}$  (categoria cujos objetos são variedades simpléticas e morfismos são symplectomorfismos). Considere um difeomorfismo  $F : Q \rightarrow Q'$  e seja  $T^*F : T^*Q \rightarrow T^*Q'$  o mapa do exemplo anterior. Denote por  $\omega^Q$  e  $\omega^{Q'}$  as formas simpléticas canônicas de  $T^*Q$  e  $T^*Q'$ , respectivamente e denote  $\Phi = T^*F$ . Temos que

$$\begin{aligned}
(\Phi^*\lambda^Q)_{q',\phi'} &= \lambda_{\Phi(q',\phi')}^Q d\Phi_{q',\phi'} \\
&= dF_{F^{-1}(q')}^*(\phi')(d\pi_{\Phi(q',\phi')})d\Phi_{q',\phi'} \\
&= dF_{F^{-1}(q')}^*(\phi')d(\pi \circ \Phi)_{q',\phi'} \\
&= dF_{F^{-1}(q')}^*(\phi')d(F^{-1} \circ \pi')_{q',\phi'} \\
&= \phi'(dF_{F^{-1}(q')}dF_{q'}^{-1}d\pi_{q',\phi'}) \\
&= \phi'(d\pi_{q',\phi'}) \\
&= \lambda_{q',\phi'}^{Q'}
\end{aligned}$$

onde  $\lambda^Q, \lambda^{Q'}$  são as 1-formas tautológicas de  $T^*Q$  e  $T^*Q'$ , respectivamente,  $\pi$  é a projeção do fibrado cotangente e  $\phi' \in T_{q'}^*Q'$ . Note que na quarta igualdade foi usado o fato de  $\Phi$  ser morfismo entre fibrado cotangente, ou seja,  $F^{-1} \circ \pi' = \pi \circ \Phi$ . Portanto, como o pullback comuta com a diferencial de de Rham, temos que  $\Phi$  é um symplectomorfismo. Logo, temos um funtor contravariante  $\mathbf{Man}_{Diff} \rightarrow \mathbf{Symp}$  que nos objetos leva variedades suaves no seu fibrado cotangente (variedade simplética) e nos morfismos leva difeomorfismos  $F$  em symplectomorfismos  $T^*F$ .

## 2.3 Transformações naturais

**Definição 2.3.1.** Sejam  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  categorias e sejam  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  e  $G : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  funtores. Uma transformação natural  $\alpha : F \Rightarrow G$  é uma família  $(F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A))_{A \in \mathfrak{A}}$

de morfismos em  $\mathfrak{B}$  tal que para todo mapa  $A \xrightarrow{f} A'$  em  $\mathfrak{A}$ , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_{A'} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \end{array}$$

comuta.

**Observação 2.3.1.** Representamos uma transformação natural  $\alpha : F \Rightarrow G$  pelo diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathfrak{A} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathfrak{B} \\ & G & \end{array}$$

**Exemplos 2.3.1 (Casos particulares).** 1. Suponha  $F, G : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  funtores constantes. Ou seja,  $F$  leva todo objeto  $a \in \text{ob}(\mathfrak{A})$  em um único objeto  $d \in \text{ob}(\mathfrak{B})$  e todo morfismo em  $\text{id}_d$ . Similarmente,  $G$  leva todo objeto de  $\mathfrak{A}$  em um único objeto  $d' \in \text{ob}(\mathfrak{B})$  e todo morfismo em  $\text{id}_{d'}$ . Portanto, uma transformação natural  $\alpha : F \Rightarrow G$  é simplesmente um morfismo  $d \xrightarrow{\alpha_d} d'$ .

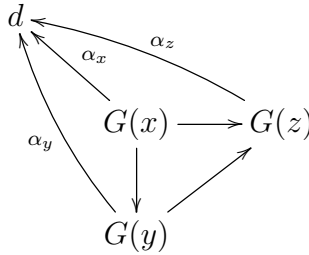
2. Considere  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  funtor constante como no exemplo anterior e  $G : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  um funtor qualquer. Então,  $\alpha : F \Rightarrow G$  consiste de morfismos  $d \xrightarrow{\alpha_x} G(x)$  para todo  $x \in \text{ob}(\mathfrak{A})$  satisfazendo  $\alpha_y = G(f) \circ \alpha_x$  para todo morfismo  $x \xrightarrow{f} y$  em  $\mathfrak{A}$ . Podemos representar essa transformação natural pelo diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc} d & & & & \\ & \searrow^{\alpha_x} & & \searrow^{\alpha_z} & \\ & & G(x) & \longrightarrow & G(z) \\ & \searrow^{\alpha_y} & & \nearrow & \\ & & G(y) & & \end{array}$$

A equação  $\alpha_y = G(f) \circ \alpha_x$  implica que cada triângulo do diagrama anterior comuta. Nesse caso,  $\alpha$  é chamado um cone sobre  $G$ .

3. Considere  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  um funtor qualquer e  $G : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  um funtor constante como no exemplo 1. Nesse caso, uma transformação natural  $\alpha : F \Rightarrow G$  consiste de uma coleção de morfismos  $F(x) \xrightarrow{\alpha_x} d$  para todo  $x \in \text{ob}(\mathfrak{A})$  tal que  $\alpha_y \circ F(f) = \alpha_x$  para todo morfismo  $x \xrightarrow{f} y$  um morfismo em  $\mathfrak{B}$ . Nesse caso, a

transformação natural pode ser representada por



Assim como no caso anterior temos a comutatividade de cada triângulo do diagrama. Nesse caso,  $\alpha$  é chamado de cone sobre  $F$  (ou cocone).

**Exemplos 2.3.2.** 1. (*G-equivariância*) Considere um grupo  $G$  visto como a categoria de um único objeto  $\mathfrak{G}$ , representado por  $\bullet$ , cujos morfismos são os elementos  $g \in G$ , como visto anteriormente. Podemos definir um funtor  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Set}$  que leva o único objeto  $\bullet$  em exatamente um conjunto, chamado  $X$ , e leva um elemento do grupo  $g$  para uma função  $g \circ - : X \rightarrow X$ , definida por  $x \mapsto g \cdot x$ . As condições de functorialidade determinam uma ação à esquerda de  $G$  em  $X$ . De fato, todo funtor  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Set}$  codifica uma ação de um grupo, e a imagem do único objeto é um  $G$ -conjunto.

Suponha  $A, B : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Set}$  dois funtores com  $A(\bullet) = X$  e  $B(\bullet) = Y$  e seja  $\bullet \xrightarrow{g} \bullet$  um elemento do grupo  $G$ . Então, uma transformação natural  $\alpha : X \Rightarrow Y$  que satisfaz  $\alpha(g(x)) = g(\alpha(x))$  para todo  $x \in X$ . Essa equação é representada pela comutatividade do diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ g \cdot \downarrow & & \downarrow g \cdot \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

Ou seja, transformações naturais são mapas  $G$ -equivariantes.

2. (*Pushforwards de campos de vetores*) Considere as categorias  $\mathbf{Man}_{\text{Diff}}$  e  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ . Temos um funtor  $\mathfrak{X} : \mathbf{Man}_{\text{Diff}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  que leva uma variedade suave  $M$  no espaço vetorial dos campos de vetores suaves em  $M$  denotado  $\mathfrak{X}(M)$  e leva difeomorfismos  $F : M \rightarrow N$  no seu pushforward  $F_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ . Similarmente, podemos definir um funtor  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} : \mathbf{Man}_{\text{Diff}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  que leva difeomorfismos  $F : M \rightarrow N$  em  $F_* \times F_* : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N)$ , definido por  $(X, Y) \mapsto (F_*(X), F_*(Y))$  para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Portanto, devido a propriedade do colchete de Lie,  $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$ , temos que o colchete de Lie é uma transformação natural  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \Rightarrow \mathfrak{X}$ . A identidade  $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$

é precisamente a comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{F_* \times F_*} & \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \\ \downarrow [\cdot, \cdot] & & \downarrow [\cdot, \cdot] \\ \mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{F_*} & \mathfrak{X}(N) \end{array}$$

**Composição vertical:** Transformações naturais são um tipo de mapa e, portanto, podemos fazer composição. Dado transformações naturais

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ \mathfrak{A} & \xrightarrow{G} & \mathfrak{B} \\ & \curvearrowleft & \\ & H & \end{array}$$

$\begin{array}{c} \Downarrow \alpha \\ \Downarrow \beta \end{array}$

existe uma transformação natural composta

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ \mathfrak{A} & & \mathfrak{B} \\ & \curvearrowleft & \\ & H & \end{array}$$

$\Downarrow \beta \circ \alpha$

definida por  $(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$  para todo  $A \in \mathfrak{A}$ . Também temos uma transformação natural identidade

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \curvearrowright & \\ \mathfrak{A} & & \mathfrak{B} \\ & \curvearrowleft & \\ & F & \end{array}$$

$\Downarrow 1_F$

para qualquer functor  $F$ , definida por  $(1_F)_A = 1_{F(A)}$ .

**Observação 2.3.2.** Com a construção anterior, podemos ver que para duas categorias  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  existe uma categoria cujos objetos são funtores de  $\mathfrak{A}$  para  $\mathfrak{B}$  e cujos morfismos são transformações naturais entre os funtores. Essa categoria é chamada de **categoria de funtores** e é denotada por  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ .

**Composição horizontal:** Considere transformações naturais

$$\begin{array}{ccccc} & F & & F' & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ \mathfrak{A} & & \mathfrak{A}' & & \mathfrak{A}'' \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & G & & G' & \end{array}$$

$\begin{array}{c} \Downarrow \alpha \\ \Downarrow \alpha' \end{array}$

a composição horizontal produz uma transformação natural

$$\begin{array}{ccc}
 & F' \circ F & \\
 & \curvearrowright & \\
 \mathfrak{A} & & \mathfrak{A}'' \\
 & \curvearrowleft & \\
 & G' \circ G & \\
 & \Downarrow \alpha' * \alpha & \\
 & & 
 \end{array}$$

A componente de  $\alpha' * \alpha$  em  $A \in \mathfrak{A}$  é definida como sendo a diagonal do diagrama de naturalidade abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 F'(F(A)) & \xrightarrow{F'(\alpha_A)} & F'(G(A)) \\
 \alpha'_{F(A)} \downarrow & & \downarrow \alpha'_{G(A)} \\
 G'(F(A)) & \xrightarrow{G'(\alpha_A)} & G'(G(A))
 \end{array}$$

**Observação 2.3.3.** *Composições verticais e horizontais obedecem a lei de intercâmbio*

$$(\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha) = (\beta' * \beta) \circ (\alpha' * \alpha) : F' \circ F \rightarrow H' \circ H.$$

Também vale para a identidade  $1_{F'} * 1_F = 1_{F' \circ F}$ .

**Observação 2.3.4.** *Suponha que  $F$  e  $G$  são funtores entre as categorias  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ , e seja  $x \xrightarrow{f} y$  um morfismo em  $\mathfrak{A}$ . Seja  $\alpha : F \rightarrow G$  uma transformação natural tal que todo  $F(x) \xrightarrow{\alpha_x} G(x)$  é isomorfismo. Então, a condição de naturalidade  $\alpha_y \circ F(f) = G((f)) \circ \alpha_x$  é equivalente a  $F(f) = \alpha_y^{-1} \circ G(f) \circ \alpha_x$  pois  $\alpha_x$  é invertível. Dizemos nesse caso que  $F$  e  $G$  são **naturalmente isomorfos**, escrevemos  $F \cong G$ , e  $\alpha$  é um **isomorfismo natural**.*

## 2.4 Equivalência de categorias

Considere os funtores

$$\mathfrak{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathfrak{B}$$

tal que

$$G \circ F = 1_{\mathfrak{A}} \quad e \quad F \circ G = 1_{\mathfrak{B}}$$

Dizemos, nesse caso, que as categorias  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  são isomorfas. Denotamos por  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ .

Essa noção de isomorfismo é muito forte, gostaríamos de obter uma noção mais fraca. Esta é dada pela definição abaixo.

**Definição 2.4.1** (Equivalência de categorias). Uma **equivalência** de categorias  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  consiste de um par de funtores

$$\mathfrak{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathfrak{B}$$

Junto com isomorfismos naturais

$$\eta : 1_{\mathfrak{A}} \rightarrow G \circ F \quad e \quad \epsilon : F \circ G \rightarrow 1_{\mathfrak{B}}.$$

Nesse caso, dizemos que  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  são equivalentes e escrevemos  $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ . Dizemos, também, que os funtores  $F$  e  $G$  são equivalentes.

Existe uma outra caracterização muito útil para equivalência de categorias. Mas para isso precisamos de algumas definições.

**Definição 2.4.2.** Seja  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$

1. Dizemos que  $F$  é fiel (“faithful”) se para quaisquer objetos  $x, y \in \text{Ob}(\mathfrak{A})$  o mapa

$$F : \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(F(x), F(y))$$

é injetivo.

2. Se todos esses mapas forem bijetivos dizemos que  $F$  é plenamente fiel (“fully faithful”).
3. O funtor  $F$  é chamado essencialmente sobrejetivo se para cada objeto  $y \in \text{Ob}(\mathfrak{B})$  existe um objeto  $x \in \text{Ob}(\mathfrak{A})$  tal que  $F(x)$  é isomorfo a  $y$  em  $\mathfrak{B}$ .

**Definição 2.4.3.** Seja  $\mathfrak{A}$  uma categoria. Uma subcategoria  $\mathfrak{S}$  de  $\mathfrak{A}$  consiste de uma subclasse  $\text{ob}(\mathfrak{S})$  de  $\text{ob}(\mathfrak{A})$  junto com, para cada  $S, S' \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ , uma subclasse  $\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(S, S')$  de  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(S, S')$ , tal que  $\mathfrak{S}$  é fechado pela composição e identidade. Dizemos que uma subcategoria é “full” se  $\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(S, S') = \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(S, S')$  para todo  $S, S' \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ .

Ou seja, uma “full” subcategoria consiste de uma seleção de objetos com todos os morfismos entre eles. Por exemplo,  $\mathbf{Ab}$  é uma “full” subcategoria de  $\mathbf{Grp}$  consistindo dos grupos que são abelianos.

Se  $\mathfrak{S}$  é uma subcategoria de  $\mathfrak{A}$ , existe um funtor inclusão  $I : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{A}$  definido por  $I(S) = S$  e  $I(f) = f$ . Este é automaticamente fiel, e será plenamente fiel se, e somente se,  $\mathfrak{S}$  é uma “full” subcategoria.

**Proposição 2.4.1** ((LANE, 2013)). Um funtor é uma equivalência de categorias se, e somente se, é plenamente fiel e essencialmente sobrejetivo

**Corolário 2.4.0.1.** *Seja  $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  um funtor plenamente fiel. Então  $\mathfrak{C}$  é equivalente a uma “full” subcategoria  $\mathfrak{C}'$  de  $\mathfrak{D}$  cujos objetos são aqueles da forma  $F(C)$  para alguns  $C \in \mathfrak{C}$ .*

**Exemplos 2.4.1.** 1. *Seja  $\mathfrak{A}$  uma categoria, e seja  $\mathfrak{B}$  qualquer “full” subcategoria contendo pelo menos um objeto para cada classe de isomorfismo de  $\mathfrak{A}$ . Então o funtor inclusão  $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{A}$  é plenamente fiel e essencialmente sobrejetivo nos objetos. Portanto  $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$ .*

2. *Seja  $\mathbf{Man}$  a categoria de variedades suaves e seja  $\mathbf{Man}'$  a “full” subcategoria consistindo apenas de subvariedades suaves do espaço euclidiano. Então, o funtor inclusão  $I : \mathbf{Man}' \rightarrow \mathbf{Man}$  é plenamente fiel e, pelo teorema de Whitney, é essencialmente sobrejetivo. Portanto,  $\mathbf{Man}' \simeq \mathbf{Man}$ .*

## 2.5 Categorias internas e 2-categorias

Queremos definir uma 2-categoria estrita, para isso precisamos das noções de categoria interna, funtores internos e transformações naturais internas.

**Definição 2.5.1.** *Seja  $\mathfrak{A}$  uma categoria. Uma **categoria interna** ou **categoria em  $\mathfrak{A}$** , denotada por  $\mathfrak{X}$ , consiste de:*

- Um **objeto de objetos**  $X_0 \in \mathfrak{A}$ ,
- Um **objeto de morfismos**  $X_1 \in \mathfrak{A}$ ,

junto com

- morfismos **source** e **target**  $s, t : X_1 \rightarrow X_0$ ,
- Um morfismo **atribuição de identidade**  $i : X_0 \rightarrow X_1$ ,
- Um morfismo **composição**  $\circ : X_1 \times_{X_0} X_1 \rightarrow X_1$

*Precisamos expressar as leis usuais de categorias, ou seja, precisamos especificar os mapas source e target dos morfismos identidades e do morfismo composição, definir uma associatividade para composição de morfismos e uma unidade à direita e à esquerda para composição de morfismos. Essas leis são obtidas, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas abaixo.*

•

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i} & X_1 \\ & \searrow 1 & \downarrow s \\ & & X_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i} & X_1 \\ & \searrow 1 & \downarrow t \\ & & X_0 \end{array}$$



•

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\circ} & X_1 \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow s \\
 X_1 & \xrightarrow{s} & X_0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\circ} & X_1 \\
 \downarrow p_2 & & \downarrow t \\
 X_1 & \xrightarrow{t} & X_0
 \end{array}$$

•

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\circ \times_{X_0} 1} & X_1 \times_{X_0} X_1 \\
 \downarrow 1 \times_{X_0} \circ & & \downarrow \circ \\
 X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\circ} & X_1
 \end{array}$$

•

$$\begin{array}{ccccc}
 X_0 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{i \times 1} & X_1 \times_{X_0} X_1 & \xleftarrow{1 \times i} & X_1 \times_{X_0} X_0 \\
 & \searrow p_2 & \downarrow \circ & \swarrow p_1 & \\
 & & X_1 & & 
 \end{array}$$

O pullback  $X_1 \times_{X_0} X_1$  é definido via diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{p_2} & X_1 \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow s \\
 X_1 & \xrightarrow{t} & X_0
 \end{array}$$

Com a definição de categoria em  $\mathfrak{A}$  podemos definir as noções de funtores e transformações naturais internas.

**Definição 2.5.2.** *Seja  $\mathfrak{A}$  uma categoria. Dado categorias  $X$  e  $X'$  em  $\mathfrak{A}$ , um **funtor interno** ou **funtor em  $\mathfrak{A}$**  entre elas,  $F : X \rightarrow X'$ , consiste de:*

- Um morfismo  $F_0 : X_0 \rightarrow X'_0$ ,
- Um morfismo  $F_1 : X_1 \rightarrow X'_1$ ,

Tais que os mapas source e target, o morfismo identidade e a composição de morfismos são preservadas, ou seja, os seguintes diagramas comutam:

•

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{s} & X_0 \\
 \downarrow F_1 & & \downarrow F_0 \\
 X'_1 & \xrightarrow{s'} & X'_0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{t} & X_0 \\
 \downarrow F_1 & & \downarrow F_0 \\
 X'_1 & \xrightarrow{t'} & X'_0
 \end{array}$$

•

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{i} & X_1 \\
 \downarrow F_0 & & \downarrow F_1 \\
 X'_0 & \xrightarrow{i'} & X'_1
 \end{array}$$

•

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{F_1 \times_{X_0} F_1} & X'_1 \times_{X'_0} X'_1 \\
 \downarrow \circ & & \downarrow \circ' \\
 X_1 & \xrightarrow{F_1} & X'_1
 \end{array}$$

**Definição 2.5.3.** Definimos a composição de dois funtores internos  $F : X \rightarrow X'$  e  $G : X' \rightarrow X''$  por  $FG : X \rightarrow X''$  tal que  $(FG)_0 = F_0G_0$  e  $(FG)_1 = F_1G_1$ . Similarmente, nós definimos o funtor identidade em  $\mathfrak{A}$ ,  $1_X : X \rightarrow X$  por  $(1_X)_0 = 1_{X_0}$  e  $(1_X)_1 = 1_{X_1}$ .

**Definição 2.5.4.** Seja  $\mathfrak{A}$  uma categoria. Dados dois funtores  $F, G : X \rightarrow X'$  em  $\mathfrak{A}$ , uma **transformação natural interna** ou **transformação natural em  $\mathfrak{A}$**  entre eles, denotada  $\theta : F \Longrightarrow G$ , é um morfismo  $\theta : X_0 \rightarrow X'_1$  onde precisamos expressar as leis usuais de transformação natural, estas obtidas pela comutatividade dos diagramas abaixo.

• Lei especificando o source e o target de uma transformação natural:

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{\theta} & X'_1 \\
 \searrow F_0 & & \downarrow s \\
 & & X_0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{\theta} & X'_1 \\
 \searrow G_0 & & \downarrow t \\
 & & X_0
 \end{array}$$

- *Lei do quadrado comutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{\Delta(s\theta \times G)} & X'_1 \times_{X'_0} X'_1 \\
 \downarrow \Delta(F \times t\theta) & & \downarrow \circ' \\
 X'_1 \times_{X'_0} X'_1 & \xrightarrow{\circ'} & X'_1
 \end{array}$$

Assim como no caso de transformações naturais, transformações naturais em  $\mathfrak{A}$  podem ser composta de duas maneiras. Mas comutativamente.

**Composição vertical** Considere  $F, G, H : X \rightarrow X'$  funtores em  $\mathfrak{A}$  onde  $X, X'$  são categorias em  $\mathfrak{A}$ . Se  $\theta : F \Rightarrow G$  e  $\tau : G \Rightarrow H$  são transformações naturais em  $\mathfrak{A}$ , definimos a composição vertical  $\theta_\tau : F \Rightarrow H$ , por

$$\theta_\tau := \Delta(\theta \times \tau) \circ'$$

Podemos representar com o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & F & \\
 X & \curvearrowright & X' \\
 & \Downarrow \theta_\tau & \\
 & H & \\
 & \curvearrowleft & \\
 X & & X'
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 & F & \\
 X & \xrightarrow{G} & X' \\
 & \Downarrow \theta & \\
 & H & \\
 & \Downarrow \tau & \\
 X & & X'
 \end{array}
 \end{array}$$

Note que quando  $\mathfrak{A} = \mathbf{Cat}$  essa construção se reduz a construção usual de transformação natural.

**Composição horizontal** Sejam  $F, G : X \rightarrow X'$  e  $F', G' : X' \rightarrow X''$  funtores em  $\mathfrak{A}$  onde  $X, X', X''$  são categorias em  $\mathfrak{A}$ . Se  $\theta : F \Rightarrow G$  e  $\theta' = F' \Rightarrow G'$  são transformações naturais em  $\mathfrak{A}$ , definimos a composição horizontal,  $\theta \circ \theta' : FF' \Rightarrow GG'$ , por

$$\begin{aligned}
 \theta \circ \theta' &:= \Delta(F_0 \times \theta)(\theta' \times G'_1) \circ' \\
 &= \Delta(\theta \times G_0)(F'_1 \times \theta') \circ'.
 \end{aligned}$$

Podemos representar com o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & FF' & \\
 X & \curvearrowright & X'' \\
 & \Downarrow \theta \circ \theta' & \\
 & GG' & \\
 & \curvearrowleft & \\
 X & & X''
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 & F & \\
 X & \curvearrowright & X' \\
 & \Downarrow \theta & \\
 & G & \\
 & \curvearrowleft & \\
 X & & X'
 \end{array} \quad \begin{array}{ccc}
 & F' & \\
 X' & \curvearrowright & X'' \\
 & \Downarrow \theta' & \\
 & G' & \\
 & \curvearrowleft & \\
 X' & & X''
 \end{array}
 \end{array}$$

Da mesma maneira, quando  $\mathfrak{A} = \mathbf{Cat}$  essa construção se reduz para a construção usual.

Finalmente, dado um functor  $F : X \rightarrow X'$  em  $\mathfrak{A}$ , a transformação natural identidade  $1_F : F \Rightarrow F$  em  $\mathfrak{A}$  é dada por  $1_F = F_0 i$ .

**Definição 2.5.5.** *Uma 2-categoria estrita  $\mathcal{C}$  consiste de:*

- Uma coleção  $\mathcal{C}_0$  de **0-células** (ou objetos);
- Para cada par de 0-células  $(A, B)$ , uma categoria  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  cujos objetos são chamados de **1-células** e os morfismos são chamados de **2-células**; a composição de 2-células em  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  é chamada **composição vertical**;
- Para cada 0-célula  $A$ , existe uma 1-célula  $1_A \in \text{ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A))$  chamada **1-célula identidade** de  $A$ ;
- Para cada tripla de 0-células  $(A, B, C)$ , um functor  $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  chamado **composição horizontal**;

*Satisfazendo as seguintes condições:*

- Para cada 1-célula  $f \in \text{ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B))$  temos que

$$f \circ 1_A = f \quad \text{e} \quad 1_B \circ f = f,$$

- Para cada 2-células  $\alpha \in \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B))$  temos que

$$\alpha \circ 1_{1_A} = \alpha \quad \text{e} \quad 1_{1_B} \circ \alpha = \alpha;$$

- A composição horizontal é associativa para 1-células e 2-células

**Proposição 2.5.1** ((BAEZ; CRANS, 2003)). *Seja  $\mathfrak{A}$  uma categoria. Categorias em  $\mathfrak{A}$  como objetos, funtores em  $\mathfrak{A}$  como morfismos, e transformações naturais em  $\mathfrak{A}$  como 2-morfismos com composição e identidades definidos como acima formam uma **2-categoria estrita** denotada por  $\mathfrak{A}\text{Cat}$ .*

## 2.5.1 Bicategorias

**Definição 2.5.6.** *Uma bicategoria  $\mathcal{B}$  consiste dos seguintes dados*

- Uma coleção  $\mathcal{B}_0$  de 0-células (ou objetos).
- Para todo par  $A, B$  de 0-células uma categoria  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  de morfismos de  $A$  para  $B$ . Os objetos de  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  são chamados 1-células (ou 1-morfismos) e são denotados por  $f : A \rightarrow B$ . Os morfismos em  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  são chamados 2-células (ou 2-morfismos) e são denotados por  $\alpha : f \Longrightarrow g$ . Note que para toda 1-célula  $f$  existe uma 2-célula  $\text{id}_f : f \Longrightarrow f$ .

*Nos referimos a composição de 2-células em  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  como uma composição vertical e denotamos por  $\circ$  ou justaposição simples,  $\beta \circ \alpha \equiv \beta\alpha$ .*

- Para toda tripla de 0-células  $A, B, C$  um functor composição

$$c_{ABC} = c : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, C)$$

$$c_{ABC}(g, f) = g \circ f \equiv gf, \quad \text{para todas 1-células } g, f$$

$$c_{ABC}(\beta, \alpha) = \beta \star \alpha. \quad \text{para todas 2-células } \beta, \alpha$$

Nos referimos à composição  $\star$  de 2-células como a composição horizontal.

- Para todo objeto  $A$  de  $\mathcal{B}$  uma 1-célula  $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, A)$ .
- Isomorfismos naturais  $a_{ABCD} : c_{ABD} \circ (c_{BCD} \times id) \Rightarrow c_{ACD} \circ (id \times c_{ABC})$  chamados associadores para cada quadrupla de objetos  $A, B, C, D$ :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C, D) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) & \xrightarrow{id \times c_{ABC}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C, D) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, C) \\ \downarrow c_{BCD} \times id & \nearrow a_{ABCD} & \downarrow c_{ACD} \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, D) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) & \xrightarrow{c_{ABD}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, D) \end{array}$$

e, em particular, 2-células invertíveis

$$a_{hgf} : (hg)f \Rightarrow h(gf)$$

para toda tripla de 1-células  $(h, g, f) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C, D) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$ .

- Isomorfismos naturais  $r_{AB} : c_{AAB} \circ (id \times 1_A) \Rightarrow id$  e  $l_{AB} : c_{ABB} \circ (1_B \times id) \Rightarrow id$  chamados unidade à direita e unidade à esquerda para todo par de objetos  $A, B$  de  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) & & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \\ \downarrow id \times 1_A & \searrow id & \downarrow 1_B \times id \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, A) & \xrightarrow{r_{AB}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \\ \uparrow \nearrow & & \uparrow \nearrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) & & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) & & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \\ \downarrow 1_B \times id & \searrow id & \downarrow 1_B \times id \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) & \xrightarrow{l_{AB}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \\ \uparrow \nearrow & & \uparrow \nearrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) & & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \end{array}$$

onde  $id : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  denota o functor identidade. Por abuso de notação,  $1_A : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, A)$  denota o functor que leva toda 2-célula para a 2-célula identidade  $id_{1_A} : 1_A \Rightarrow 1_A$ . O functor  $1_B$  é definido similarmente. Portanto, para toda 1-célula  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  nós temos 2-células invertíveis

$$r_f : f \circ 1_A \Rightarrow f \quad e \quad l_f : 1_B \circ f \Rightarrow f.$$

Satisfazendo as seguintes condições:

- (identidade do triângulo) Para quaisquer pares de 1-células componíveis  $C \xleftarrow{g} B \xleftarrow{f} A$  o diagrama de 2-células

$$\begin{array}{ccc}
 (g1_B)f & \xrightarrow{a} & (g(1_Bf)) \\
 \Downarrow r_g * 1_f & & \Downarrow id_g * l_f \\
 & & gf
 \end{array}$$

comuta.

- (identidade do pentágono) Para quaisquer quadruplas de 1-células componíveis  $E \xleftarrow{k} D \xleftarrow{h} C \xleftarrow{g} B \xleftarrow{f} A$  o diagrama de 2-células

$$\begin{array}{ccc}
 ((kh)g)f & \xrightarrow{\alpha * id_F} & (k(hg))f \\
 \Downarrow id_k * a & & \Downarrow a \\
 (kh)(gf) & & k((hg)f) \\
 \Downarrow a & & \Downarrow a \\
 & & k(h(gf))
 \end{array}$$

comuta.

**Observação 2.5.1.** Se os isomorfismos naturais  $a, r$  e  $l$  de uma bicategoria  $\mathcal{B}$  são identidades tal que  $(hg)f = h(gf)$  e  $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$  para toda 1-célula  $h, g, f : A \rightarrow B$ , e similarmente para composições horizontais de 2-células, então a bicategoria  $\mathcal{B}$  é uma 2-categoria (estrita).

**Definição 2.5.7.** Se todas as 2-células em uma bicategoria  $\mathcal{B}$  são invertíveis, isto é, para qualquer 2-célula  $\alpha : f \Rightarrow g$  existe  $\beta : g \Rightarrow f$  com  $\beta\alpha = id_f$  e  $\alpha\beta = id_g$  então  $\mathcal{B}$  é uma **(2,1)-bicategoria**.

**Observação 2.5.2.** Em uma 2-categoria, a composição horizontal de uma 2-célula com uma 1-célula é chamada **whiskering**. Ou seja,

- Se  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  e  $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  são funtores e  $\eta : F \Rightarrow G$  é uma transformação natural, então **whiskering**  $H$  e  $\eta$  fornece a transformação natural  $H \circ \eta : (H \circ F) \Rightarrow (H \circ G)$  onde  $(H \circ \eta)_A = H(\eta_A)$  onde  $A \in ob(\mathcal{A})$ .
- Se  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  e  $G, H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  são funtores e  $\eta : G \Rightarrow H$  é uma transformação natural, então **whiskering**  $\eta$  e  $F$  fornece a transformação natural  $\eta \circ F : (G \circ F) \Rightarrow (H \circ F)$  onde  $(\eta \circ F)_A$  é  $\eta_{F(A)}$ .

**Observação 2.5.3.** *Podemos construir funtores e transformações naturais no contexto de bicategorias, além disso existe uma noção de “mapa” entre transformações naturais chamado de modificação, essas construções podem ser encontradas em (BÉNABOU et al., 1967), (LEINSTER, 1998), (STREET, 1996) e (JOHNSON; YAU, 2021). Dado um par de bicategorias  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  podemos definir a bicategoria de funtores,  $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ , cujas 0-células são funtores, 1-células são transformações naturais e 2-células são modificações (detalhes em (STREET, 1996)).*

Para maiores detalhes na teoria de bicategorias e 2-categorias ver (BÉNABOU et al., 1967), (LEINSTER, 1998), (STREET, 1996) e (JOHNSON; YAU, 2021).

## 2.6 2-Álgebras de Lie

O conceito de 2-álgebras de Lie é central neste trabalho, exemplos de 2-álgebras de Lie aparecerão no decorrer dos capítulos. Para definirmos uma 2-álgebra de Lie precisamos do conceito de 2-espaço vetorial.

**Definição 2.6.1.** *Seja  $\mathbf{Vect}$  a categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo  $k$  qualquer. Um 2-espaço vetorial é uma categoria interna de  $\mathbf{Vect}$  com um mapa inverso. Ou seja, um 2-espaço vetorial consiste de um espaço vetorial de objetos  $V_0$ , um espaço vetorial de morfismo  $V_1$ , mapas source e target  $s, t : V_1 \rightarrow V_0$  lineares, um mapa identidade  $1 : V_0 \rightarrow V_1$  linear, um mapa de composição  $\circ : V_1 \times_{V_0} V_1 \rightarrow V_1$  linear e um mapa inverso  $(\cdot, \cdot)^{-1} : V_1 \rightarrow V_1$ . Podemos denotar o 2-espaço vetorial por  $V_1 \rightrightarrows V_0$ .*

Denotaremos um morfismo como  $f : x \rightarrow y$  quando  $s(f) = x$  e  $t(f) = y$ , e as vezes escreveremos  $i(x)$  como  $1_x$ .

**Observação 2.6.1.** *Um 2-espaço vetorial pode ser completamente determinado omitindo o mapa composição, pois como mostrado em (BAEZ; CRANS, 2003) o mapa composição pode ser expressado em termos dos demais dados da definição anterior.*

**Definição 2.6.2.** *Sejam  $V$  e  $W$  2-espaços vetoriais, um **funtor linear**  $F : V \rightarrow W$  é um funtor em  $\mathbf{Vect}$  de  $V$  para  $W$ .*

Portanto, temos uma categoria  $2\mathbf{Vect}$  onde os objetos são 2-espaços vetoriais e morfismos são funtores lineares.

**Definição 2.6.3.** *UM **complexo de cadeia de 2-termos** de espaços vetoriais consiste de um par de espaços vetoriais com um mapa linear entre eles (chamado diferencial). Denotamos por*

$$C_1 \xrightarrow{d} C_0.$$

**Definição 2.6.4.** Um **mapa de cadeia** entre complexos de cadeia de 2-termos,  $\phi : C \rightarrow C'$  consiste de um par de mapas lineares  $\phi_0 : C_0 \rightarrow C'_0$  e  $\phi_1 : C_1 \rightarrow C'_1$  tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{d} & C_0 \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_0 \\ C'_1 & \xrightarrow{d'} & C'_0 \end{array}$$

Portanto, temos uma categoria denotada  $2\text{Term}$  onde os objetos são complexos de cadeia de 2-termos e os morfismos são mapas de cadeia.

Dado um complexo de cadeia de 2-termos  $C_1 \xrightarrow{d} C_0$  podemos construir um 2-espaço vetorial da seguinte forma:

$$C_1 \oplus C_0 \rightrightarrows C_0,$$

com mapas source dado por  $s(c_1, c_0) = c_0$  e target dado por  $t(c_1, c_0) = c_0 + dc_1$ . A multiplicação é dada por  $(c_1, c_0) \circ (c'_1, c'_0) = (c_1 + c'_1, c'_0)$  onde  $c_0 = c'_0 + dc'_1$ . A unidade é dada por  $1_{c_0} = (0, c_0)$  e a inversa por  $(c_1, c_0)^{-1} = (-c_1, c_0 + dc_1)$ .

De fato, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.6.1** ((BAEZ; CRANS, 2003)). *As categorias  $2\text{Vect}$  e  $2\text{Term}$  são equivalentes.*

Podemos colocar uma estrutura de 2-categorias em  $2\text{Vect}$  e  $2\text{Term}$ . Para isso precisamos definir transformações naturais internas.

**Definição 2.6.5.** Dados 2 funtores lineares  $F, G : V \rightarrow W$  entre 2-espaços vetoriais, uma **transformação natural linear**  $\alpha : F \rightrightarrows G$  é uma transformação natural em  $\text{Vect}$ .

**Definição 2.6.6.** 2-espaços vetoriais, funtores lineares e transformações naturais lineares formam a 2-categoria  $2\text{Vect}$ .

**Definição 2.6.7.** Sejam  $C$  e  $C'$  complexos de cadeia de 2-termos. Uma **homotopia de cadeia** entre dois mapas de cadeia  $\phi, \psi : C \rightarrow C'$  é um mapa  $\tau : C_0 \rightarrow C'_1$  tal que  $\tau d' = \psi_0 - \phi_0$  e  $d\tau = \psi_1 - \phi_1$

No caso de complexos de cadeia de 2-termos, uma homotopia de cadeia é simplesmente um mapa  $\tau : C_0 \rightarrow C'_1$  tal que  $\tau d' = \psi_0 - \phi_0$  e  $d\tau = \psi_1 - \phi_1$ .



**Definição 2.6.8.** *Complexos de cadeia de 2-termos, mapas de cadeia e homotopias de cadeia formam a 2-categoria  $\mathbf{2Term}$ .*

**Teorema 2.6.1** ((BAEZ; CRANS, 2003)). *As 2-categorias  $\mathbf{2Vect}$  e  $\mathbf{2Term}$  são 2-equivalentes.*

Para maiores detalhes em álgebra linear categorizada ver (BAEZ; CRANS, 2003). Agora temos os ingredientes para definir uma “2-álgebra de Lie”, a ideia é considerar um 2-espço vetorial equipado com um funtor “colchete” que satisfaz a identidade de Jacobi a menos de isomorfismos naturais.

**Definição 2.6.9.** *Sejam  $V, V'$  e  $V''$  2-espços vetoriais. Um **funtor bilinear**  $F : V \times V' \rightarrow W$  é um funtor tal que o correspondente mapa nos objetos*

$$F_0 : V_0 \times V'_0 \rightarrow W_0$$

*e o correspondente mapa nos morfismos*

$$F_1 : V_1 \times V'_1 \rightarrow W_1$$

*são bilineares.*

**Definição 2.6.10.** *Sejam  $V$  e  $W$  2-espços vetoriais. Um funtor bilinear  $F : V \times V \rightarrow W$  é antissimétrico se  $F(x, y) = -F(y, x)$  sempre que  $(x, y)$  é um objeto ou morfismo de  $V \times V$ .*

**Definição 2.6.11.** *Sejam  $V$  e  $W$  2-espços vetoriais. Um funtor  $F : V^n \rightarrow W$  é  **$n$ -linear** se  $F(x_1, \dots, x_n)$  é linear em cada argumento, onde  $(x_1, \dots, x_n)$  é um objeto ou morfismo de  $V^n$ . Dados funtores  $n$ -lineares  $F, G : V^n \rightarrow W$ , uma transformação natural  $\theta : F \Rightarrow G$  é  **$n$ -linear** se  $\theta_{x_1, \dots, x_n}$  depende linearmente em cada objeto  $x_i$ , e **completamente antissimétrica** se a parte de setas de  $\theta_{x_1, \dots, x_n}$  é completamente antissimétrica sob permutações dos objetos.*

**Definição 2.6.12.** *Um 2-espço vetorial  $L$  equipado com um funtor bilinear antissimétrico, o **colchete**,  $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$  e um isomorfismo natural completamente antissimétrico, o **jacobiador**,  $J_{x,y,z} : [[x, y], z] \rightarrow [x, [y, z]] + [[x, z], y]$  satisfazendo a **identidade Jacobiana** abaixo*

$$J_{[w,x],y,z}([J_{w,x,z}, y] + 1)(J_{w,[x,z],y} + J_{[w,z],x,y} + J_{w,x,[y,z]}) =$$

$$[J_{w,x,y}, z](J_{[w,y],x,z} + J_{w,[x,y],z})([J_{w,y,z}, x] + 1)([w, J_{x,y,z}] + 1)$$

*para todo  $w, x, y, z \in L_0$ , é chamado de **2 álgebra de Lie semi-estrita**.*

**Observação 2.6.2.** A identidade jacobiana pode ser vista pelo diagrama comutativo abaixo. Este expressa duas maneiras de obter a expressão  $[[[w, x], y], z]$  através do jacobiador.

$$\begin{array}{ccc}
 & & [[w, x], y, z] \\
 & \swarrow^{[J_{w, x, y, z}]} & \searrow^1 \\
 [[w, y], x, z] + [[w, x, y], z] & & [[w, x], y, z] \\
 \downarrow^{J_{\{w, y\}, x, z} + J_{w, \{x, y\}, z}} & & \downarrow^{J_{\{w, x\}, y, z}} \\
 [[w, y], z, x] + [[w, y], x, z] & & [[w, x], z, y] + [[w, x], y, z] \\
 + [w, [[x, y], z]] + [[w, z], [x, y]] & & \\
 \downarrow^{[J_{w, y, z, x}] + 1} & & \downarrow^{[J_{w, x, z, y}] + 1} \\
 [[w, z], y, x] + [[w, y, z], x] & & [[w, x, z], y] \\
 + [[w, y], [x, z]] + [w, [[x, y], z]] + [[w, z], [x, y]] & & + [[w, x], [y, z]] + [[w, z], x, y] \\
 \swarrow^{[w, J_{x, y, z}] + 1} & & \swarrow^{J_{w, [x, z], y} + J_{[w, z], x, y} + J_{w, x, [y, z]}} \\
 & & [[w, z], y, x] + [[w, z], [x, y]] + [[w, y], [x, z]] \\
 & & + [w, [[x, z], y]] + [[w, [y, z]], x] + [w, [x, y, z]]
 \end{array}$$

Um morfismo entre 2-álgebras de Lie deve preservar a estrutura de 2-espço vetorial e do colchete de uma maneira adequada.

**Definição 2.6.13.** Dados duas 2-álgebras de Lie  $L$  e  $L'$ , um **morfismo**  $F : L \rightarrow L'$  consiste de:

- Um funtor linear  $F$  do correspondente 2-espço vetorial de  $L$  para o de  $L'$ ,
- Uma transformação natural bilinear antissimétrica

$$F_2(x, y) : [F_0(x), F_0(y)] \rightarrow F_0[x, y]$$

tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 [[F_0(x), F_0(y)], F_0(z)] & \xrightarrow{J_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & [F_0(x), [F_0(y), F_0(z)]] + [[F_0(x), F_0(z)], F_0(y)] \\
 \downarrow^{[F_2, 1]} & & \downarrow^{[1, F_2] + [F_2, 1]} \\
 [F_0[x, y], F_0(z)] & & [F_0(x), F_0[y, z]] + [F_0[x, z], F_0(y)] \\
 \downarrow^{F_2} & & \downarrow^{F_2 + F_2} \\
 F_0[[x, y], z] & \xrightarrow{F_1(J_{x, y, z})} & F_0[x, [y, z]] + F_0[[x, z], y]
 \end{array}$$

Também temos uma noção de “2-morfismo” entre morfismos definido abaixo.

**Definição 2.6.14.** *Sejam  $F, G : L \rightarrow L'$  dois morfismos entre 2-álgebras de Lie. Um **2-morfismo**  $\theta : F \Rightarrow G$  é uma transformação natural linear de  $F$  para  $G$  tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} [F_0(x), F_0(y)] & \xrightarrow{F_2} & F_0[x, y] \\ \downarrow [\theta_x, \theta_y] & & \downarrow \theta_{[x, y]} \\ [G_0(x), G_0(y)] & \xrightarrow{G_2} & G_0[x, y] \end{array}$$

Também temos composições e identidades para morfismos e 2-morfismos.

**Definição 2.6.15.** *A composição de um par de morfismos,  $F : L \rightarrow L'$  e  $G : L' \rightarrow L''$ , de 2-álgebras de Lie é dada pela composição usual, de  $F$  e  $G$ ,  $FG : L \rightarrow L''$ :*

$$L \xrightarrow{F} L' \xrightarrow{G} L''$$

onde  $(FG)_2$  é definido pela seguinte composição:

$$\begin{array}{ccc} [(FG)_0(x), (FG)_0(y)] & \xrightarrow{(FG)_2} & (FG)_0[x, y] \\ \downarrow G_2 & \nearrow F_2 \circ G & \\ G_0[F_0(x), F_0(y)] & & \end{array}$$

onde  $F_2 \circ G$  é o resultando do whiskering de  $G$  pela transformação natural  $F_2$ .

O morfismo identidade  $1_L : L \rightarrow L$  possui o funtor identidade como seu funtor subjacente, junto com uma transformação natural identidade como  $(1_L)_2$ . Como 2-morfismos são apenas transformações naturais com uma propriedade extra, podemos compor verticalmente e horizontalmente de maneira usual, e um 2-morfismo identidade é apenas uma transformação natural identidade. Portanto temos uma estrutura de 2-categoria dada pela proposição abaixo.

**Proposição 2.6.2** ((BAEZ; CRANS, 2003)). *Existe uma 2-categoria estrita **Lie2Alg** com 2-álgebras de Lie semiestrutas como objeto, morfismos entre elas como 1-morfismos, e 2-morfismos entre eles como 2-morfismos, e composição e identidade definidos como acima.*

## 2.7 $L_\infty$ -álgebras de 2-termos

Nessa seção veremos uma maneira alternativa de trabalhar com 2-álgebras de Lie. De fato, as  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos serão equivalentes a 2-álgebras de Lie no sentido de categorias.

**Definição 2.7.1.** *Uma  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos,  $V = \{V_1 \rightarrow V_0\}$ , consiste dos seguintes dados:*

- *Dois espaços vetoriais  $V_0$  e  $V_1$  junto com um mapa linear  $d : V_1 \rightarrow V_0$ ,*
- *Um mapa bilinear  $[\cdot, \cdot] : l_2 : V_i \times V_j \rightarrow V_{i+j}$ , onde  $0 \leq i + j \leq 1$ ,*
- *Um mapa trilinear chamado de **Jacobiador**  $J : V_0 \times V_0 \times V_0 \rightarrow V_1$ .*

*Estes mapas satisfazem:*

- (a)  $[x, y] = -[y, x]$ ,
- (b)  $[x, h] = -[h, x]$ ,
- (c)  $[h, k] = 0$ ,
- (d)  $J(x, y, z)$  é totalmente antissimétrico nos argumentos  $x, y, z$ ,
- (e)  $d([x, h]) = [x, dh]$ ,
- (f)  $[dh, k] = [h, dk]$ ,
- (g)  $d(J(x, y, z)) = -[[x, y], z] + [[x, z], y] + [x, [y, z]]$ ,
- (h)  $J(dh, x, y) = -[[x, y], h] + [[x, h], y] + [x, [y, h]]$ ,
- (i)  $[J(w, x, y), z] + [J(w, y, z), x] + J([w, y], x, z) + J([x, z], w, y) =$   
 $[J(w, x, z), y] + [J(x, y, z), w] + J([w, x], y, z) +$   
 $J([w, z], x, y) + J([x, y], w, z) + J([y, z], w, x),$

para todo  $w, x, y, z \in V_0$  and  $h, k \in V_1$ .

**Observação 2.7.1.** *Note que (a) e (b) são as propriedades antissimétrica satisfeita pelo colchete em uma álgebra de Lie; (c) vem do fato de não existir 2-cadeias; (e) e (f) nos mostra a interação do colchete com o diferencial, ou seja, nos mostra que o colchete é um mapa de cadeias; (g) nos diz que a identidade de Jacobi é satisfeita a menos de homotopia de cadeia; (h) nos mostra a naturalidade do jacobiador. Por fim, (i) nos dá a identidade do jacobiador.*

**Definição 2.7.2.** *Sejam  $V$  e  $V'$   $L_\infty$ -álgebras de 2-termos. Um  $L_\infty$ -morfismo  $\phi : V \rightarrow V'$  consiste de:*

- *um mapa de cadeia  $\phi : V \rightarrow V'$  (consistindo de mapas lineares  $\phi_0 : V_0 \rightarrow V'_0$  e  $\phi_1 : V_1 \rightarrow V'_1$  preservando o diferencial),*
- *um mapa bilinear antissimétrico  $\Phi : V_0 \times V_0 \rightarrow V'_1$ ,*

*tal que as seguintes equações são verdadeiras para todo  $x, y, z \in V_0, h \in V_1$ :*

- $d(\Phi(x, y)) = \phi_0[x, y] - [\phi_0(x), \phi_0(y)]$
- $\Phi(x, dh) = \phi_1[x, h] - [\phi_0(x), \phi_1(h)]$
- $[\Phi(x, y), \phi_0(z)] + \Phi([x, y], z) + \phi_1(J(x, y, z)) = J(\phi_0(x), \phi_0(y), \phi_0(z)) + [\phi_0(x), \Phi(y, z)] + [\Phi(x, z), \phi_0(y)] + \Phi(x, [y, z]) + \Phi([x, z], y)$  (**condição de coerência**).

**Observação 2.7.2.** *Note que as duas primeiras equações nos diz que  $J$  define uma homotopia de cadeia de  $[\phi(\cdot), \phi(\cdot)]$  para  $\phi[\cdot, \cdot]$ , onde estes são considerados como mapas de cadeia de  $V \otimes V$  para  $V'$ .*

$L_\infty$ -álgebras de 2-termos e  $L_\infty$ - morfismos formam uma categoria. De fato, a composição de 2  $L_\infty$ - morfismos,  $\phi : V \rightarrow V'$  e  $\psi : V' \rightarrow V''$ , consiste de um mapa de cadeia  $\phi\psi : V \rightarrow V''$  obtido pela composição usual:

$$V \xrightarrow{\phi} V' \xrightarrow{\psi} V''$$

enquanto  $(\Phi\Psi)$  é obtido por:

$$(\Phi\Psi)(x, y) = \Psi(\phi_0(x), \phi_0(y)) + \psi_1(\Phi(x, y)).$$

O morfismo identidade  $1_V : V \rightarrow V$  possui o mapa de cadeia identidade como seu mapa subjacente e homotopia de cadeia zero.

**Proposição 2.7.1** ((BAEZ; CRANS, 2003)). *Existe uma categoria  $2TermL_\infty$  como  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos como objetos e  $L_\infty$ -morfismos como morfismos.*

**Teorema 2.7.1** ((BAEZ; CRANS, 2003)). *As categorias  $Lie2Alg$  e  $2TermL_\infty$  são equivalentes.*

O teorema acima possui uma versão 2-categorica. Para isso, precisamos de uma noção de 2-morfismo para  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos.

**Definição 2.7.3.** *Sejam  $V$  e  $V'$  duas  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos e sejam  $\phi, \psi : V \rightarrow V'$   $L_\infty$ -morfismos. Um  $L_\infty$  - **2-morfismo**  $\tau : \phi \Rightarrow \psi$  é uma homotopia de cadeia tal que a seguinte equação é satisfeita para todo  $x, y \in V_0$ :*

$$\Phi(x, y) - \Psi(x, y) = [\phi_0(x), \tau(y)] + [\tau(x), \psi_0(y)] - \tau([x, y])$$

Podemos definir composições horizontal e vertical para  $L_\infty$ -2-morfismos. Sejam  $V$  e  $V'$  duas  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos e sejam  $\phi, \psi, \gamma : V \rightarrow V'$   $L_\infty$ -morfismos. Se  $\theta : \phi \Rightarrow \psi$  e  $\tau : \psi \Rightarrow \gamma$  são  $L_\infty$ -2-morfismos, definimos a composição vertical,  $\theta\tau : \phi \rightarrow \gamma$ , por

$$\theta\tau(x) := \theta(x) + \tau(x).$$

Além disso, sejam  $V, V', V''$  três  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos e sejam  $\phi, \psi : V \rightarrow V'$  e  $\phi', \psi' : V' \rightarrow V''$   $L_\infty$ -morfismos. Se  $\tau : \phi \Rightarrow \psi$  e  $\tau' : \phi' \Rightarrow \psi'$  são  $L_\infty$ -2-morfismos, definimos a composição horizontal,  $\tau * \tau' : \phi\phi' \Rightarrow \psi\psi'$ , de duas maneiras equivalentes:

$$\begin{aligned} \tau * \tau'(x) &:= \tau'(\phi_0(x)) + \psi'_1(\tau(x)) \\ &= \phi'_1(\tau(x)) + \tau'(\psi_0(x)). \end{aligned}$$

E, por fim, dado um  $L_\infty$ -morfismo  $\phi : V \rightarrow V'$ , o  $L_\infty$ -2-morfismo identidade  $1_\phi : \phi \Rightarrow \phi$  é dado por  $1_\phi(x) = 1_{\phi_0(x)}$ . Com isso, temos:

**Proposição 2.7.2** ((BAEZ; CRANS, 2003)). *Existe uma 2-categoria estrita  $\mathbf{2Term}L_\infty$  com  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos como objetos,  $L_\infty$ -morfismo entre eles como 1-morfismos, e  $L_\infty$ -2-morfismos entre  $L_\infty$ -homomorfismos como 2-morfismo.*

Temos, portanto, uma versão 2-categorica para a equivalência do teorema anterior.

**Teorema 2.7.2** ((BAEZ; CRANS, 2003)). *As 2-categorias  $\mathbf{Lie2Alg}$  e  $\mathbf{2Term}L_\infty$  são 2-equivalente.*

Esse teorema é útil pois permite trabalhar de duas maneiras diferentes para obter 2-álgebras de Lie. De fato, no decorrer deste trabalho aparecerão 2-álgebras de Lie obtidas como  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos.

## 2.8 Módulos cruzados de álgebras de Lie

Exite uma outra maneira de ver 2-álgebras de Lie estritas (Jacobiano nulo). Esta consiste de módulos cruzados de álgebras de Lie.

**Definição 2.8.1.** Um **módulo cruzado de álgebras de Lie** (“crossed module”) consiste de um par de morfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{m} \xrightarrow{\partial} \mathfrak{n} \xrightarrow{D} \text{Der}(\mathfrak{m})$$

onde  $\text{Der}(\mathfrak{m})$  denota a álgebra de Lie das derivações de  $\mathfrak{m}$ , tal que para todos  $m, m' \in \mathfrak{m}$ ,  $n \in \mathfrak{n}$

$$(1) \partial(D(n)m) = [n, \partial(m)]$$

$$(2) D(\partial(m))m' = [m, m'].$$

**Definição 2.8.2.** Um morfismo  $(\rho, \sigma) : (\partial : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}) \rightarrow (\partial' : \mathfrak{m}' \rightarrow \mathfrak{n}')$  de módulos cruzados de álgebras de Lie é um par de morfismos de álgebras de Lie  $\rho : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}'$  e  $\sigma : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}'$  tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m} & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{m}' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ \mathfrak{n} & \xrightarrow{\sigma} & \mathfrak{n}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{m} \times \mathfrak{n} & \xrightarrow{\rho \times \sigma} & \mathfrak{m}' \times \mathfrak{n}' \\ D(\mathfrak{n}) \downarrow & & \downarrow D(\mathfrak{n}') \\ \mathfrak{m} & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{m}' \end{array}$$

**Teorema 2.8.1** ((FRÉGIER; WAGEMANN, 2011)). A categoria de 2-álgebras de Lie estritas é equivalente a categoria de módulos cruzados de álgebras de Lie.

## 2.9 Butterfly

Dadas duas  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos, um **quase-isomorfismo** entre elas é um  $L_\infty$ -morfismo que é um isomorfismo a nível de homologia. Existe uma outra maneira de se “enxergar” quase-isomorfismo, obtida em (NOOHI, 2013), esta consiste na utilização de butterflies.

**Definição 2.9.1.** (KREPSKI; VAUGHAN, 2022) Sejam  $V$  e  $W$  duas  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos. Um **butterfly**  $E : V \dashrightarrow W$  é um espaço vetorial  $E$  equipado com um colchete antissimétrico  $[\cdot, \cdot]$ , junto com um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & & & & W_1 \\ & \searrow \kappa & & \swarrow \lambda & \\ & & E & & \\ & \swarrow \sigma & & \searrow \rho & \\ V_0 & & & & W_0 \end{array}$$

tal que:

- $\rho \circ \kappa = 0$  e a  $NE$ - $SW$  sequência  $0 \rightarrow W_1 \rightarrow E \rightarrow V_0 \rightarrow 0$  é exata curta;
- $\rho$  e  $\sigma$  preservam colchetes;

- Para todo  $a \in E$ ,  $u \in W_1$ ,  $x \in V_1$ ,

$$[a, \lambda(u)] = \lambda([\rho(a), u]), \quad e \quad [a, \kappa(x)] = \kappa([\sigma(a), x]);$$

- Para todo  $a, b, c \in E$ ,

$$\lambda J(\rho(a), \rho(b), \rho(c)) + \kappa J(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)) = [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]].$$

**Definição 2.9.2.** Dado dois butterflies  $E, F : V \dashrightarrow W$ , um morfismo de butterflies  $\varphi : E \Rightarrow F$  é um mapa linear  $E \rightarrow F$  que comuta com colchete e todos os mapas de estrutura dos butterflies.

Também é possível definir uma composição de butterflies ((NOOHI, 2013)).

**Definição 2.9.3.** Um butterfly cuja sequência  $V_1 \rightarrow E \rightarrow W_0$  (chamada de sequência NW-SE) é exata curta é um **butterfly invertível**.

**Teorema 2.9.1.** (NOOHI, 2013) Quase-isomorfismos entre  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos correspondem a butterflies invertíveis.





## 3 Grupos de Lie e algebroides de Lie

### 3.1 Definições e exemplos

**Definição 3.1.1.** *Um **grupoide** é uma categoria pequena na qual todo morfismo é invertível.*

Em outras palavras, um grupoide é dado por um conjunto de objetos  $M$ , um conjunto de morfismos entre objetos  $G$ , junto com aplicações de estrutura  $s, t : G \rightarrow M$  **source** e **target**, a **unidade**  $1 : M \rightarrow G$ , a **inversão**  $i : G \rightarrow G$  e a **multiplicação** ou composição de morfismos  $m : G \times_M G \rightarrow G$  (também denotaremos  $m$  por  $\circ$ ), em que  $G \times_M G \subseteq G \times G$  é o conjunto dos pares de morfismos  $(g, h)$  que são componíveis, i.e.  $s(g) = t(h)$ . Os mapas de estrutura satisfazem axiomas de uma categoria. Denotaremos um grupoide por  $G \rightrightarrows M$  e diremos que  $G$  é um grupoide sobre  $M$ . No caso que  $G, M$  são variedades suaves e todos os mapas de estrutura são suaves, diremos que  $G \rightrightarrows M$  é um **grupoide de Lie**. Em um grupoide de Lie  $G \rightrightarrows M$  também assumimos que os mapas source e target  $s, t : G \rightarrow M$  são submersões sobrejetoras, desta forma o conjunto de pares componíveis  $G \times_M G$  herda uma estrutura de variedade e falar na diferenciabilidade da multiplicação faz sentido. Também denotaremos por  $\mathcal{G} = \{G \rightrightarrows M\}$  ou simplesmente por  $\mathcal{G}$  quando estivermos nos referindo a um grupoide de Lie  $G_1 \rightrightarrows G_0$ .

**Definição 3.1.2.** *Um **morfismo** entre grupoides  $G_1 \rightrightarrows G_0$  e  $H_1 \rightrightarrows H_0$  é um funtor  $\phi$  dado por um mapa  $G_0 \rightarrow H_0$  e um mapa  $G_1 \rightarrow H_1$ , ambos também denotados por  $\phi$ , que juntos preservam a estrutura de grupoide, ou seja:*

- $\phi(s(g)) = s(\phi(g)), \phi(t(g)) = t(\phi(g))$  para  $g \in G_1$ ,
- $\phi(1_x) = 1_{\phi(x)}$  para  $x \in G_0$ ,
- $\phi(m(h, k)) = m(\phi(h), \phi(k))$  para  $h, k \in G_1$ .

Um **morfismo** entre grupoides de Lie é um morfismo suave nos objetos e nas setas. Grupoides de Lie e morfismos entre eles formam uma categoria.

**Exemplos 3.1.1.** 1. *Qualquer variedade suave  $M$  pode ser vista como um grupoide de Lie sobre a própria  $M$ . Ou seja, todas as setas são a unidade.*

2. *Qualquer grupo de Lie  $G$  pode ser visto como um grupoide de Lie sobre o espaço de um único ponto, e a variedade de setas é o próprio  $G$ .*

3. Qualquer variedade suave  $M$  fornece um grupoide de Lie  $\text{Pair}(M)$  sobre  $M$ , chamado grupoide de pares de  $M$ , com seta  $\text{Pair}(M)_1 = M \times M$ . Os mapas source e target são as primeira e segunda projeções, respectivamente. O mapa de multiplicação é  $(m', m) = (m'_1, m_1) \circ (m'_2, m_2) \Leftrightarrow m'_1 = m, m_1 = m'_2, m_2 = m$ , note que esse mapa é único, pois para quaisquer  $m, m' \in M$  existe exatamente uma seta de  $m$  para  $m'$ .
4. Note que qualquer mapa suave  $p : N \rightarrow M$  induz um morfismo de grupoide de pares  $p \times p : \text{Pair}(N) \rightarrow \text{Pair}(M)$  de maneira óbvia. Além disso, se  $p$  é uma submersão podemos definir o grupoide de submersão sobre  $N$ , que é um subgrupoide de Lie de  $\text{Pair}(N)$ , consistindo de todos os pares  $(y, y') \in N \times N$  com  $p(y) = p(y')$ , ou seja, a variedade de setas é  $N \times_M N$ .
5. Seja  $G$  é um grupo de Lie agindo suavemente a esquerda em uma variedade  $M$ , definimos o grupoide de ação  $G \ltimes M$  sobre  $M$  como  $(G \ltimes M)_1 = G \times M$ . O mapa source é a primeira projeção, o mapa target é o mapa da ação, e a multiplicação é definida por  $(g, m) = (g_1, m_1) \circ (g_2, m_2) \Leftrightarrow g = g_1 g_2, m = m_2, m_1 = g_2.m_2$ .
6. Outro exemplo de grupoide de Lie sobre uma variedade suave  $M$  é o grupoide fundamental,  $\Pi(M) \rightrightarrows M$ , consistindo de classes de homotopia  $[\gamma]$  de curvas contínuas  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  (relativo ao ponto final). Os mapas source e target são dados por  $s([\gamma]) = \gamma(0)$  e  $t([\gamma]) = \gamma(1)$ , e a composição é dada pela concatenação.
7. Seja  $G$  um grupo de Lie e  $p : P \rightarrow X$  um  $G$ -fibrado principal. O grupoide de Atiyah (ou grupoide de gauge)  $\text{At}(P)$  é o grupoide de Lie onde a variedade de setas é  $P \times P/G$ , cujo quociente é tomado pela ação diagonal, os mapas source e target são induzidos pela projeção do fibrado  $p$ . Note que  $f : * \rightarrow (P \times P)/G$  sobre  $(x_1 = s(f), x_2 = t(f))$ , sendo uma classe de equivalência de um par  $(s_1, s_2) \in P \times P$  é canonicamente identificada com a única função  $G$ -equivariante  $f : P_{x_1} \rightarrow P_{x_2}$  que leva  $s_1$  para  $s_2$ . Assim, o mapa de composição é dada pela composição dessas funções. Note que esse grupoide pode ser equivalentemente definido considerando a variedade de setas o conjunto das triplas  $(x', x, \phi)$  onde  $x', x \in X$  e  $\phi : P_x \rightarrow P_{x'}$  é um mapa  $G$ -equivariante entre as fibras. Defina os mapas source e target por  $s(x', x, \phi) = x$  e  $t(x', x, \phi) = x'$  e a composição por

$$(x'_1, x_1, \phi_1) \circ (x'_2, x_2, \phi_2) = (x', x, \phi)$$

onde  $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$  e  $(x'_1, x_1) \circ (x'_2, x_2) = (x', x)$  (como no grupoide de pares).

## 3.2 Propriedades de grupoides de Lie

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide de Lie. Defina uma relação de equivalência em  $M$  por*

$$m \sim m' \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{G} : s(g) = m, t(g) = m'.$$

*As classes de equivalência são chamadas de **órbitas** do grupoide de Lie, denotadas por  $\mathcal{G}.m \subseteq M$ .*

**Definição 3.2.2.** *O conjunto das setas de  $x$  para  $x$  com  $x \in M$  é um grupo, chamado **grupo de isotropia** do grupoide de Lie  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ , denotado por  $\mathcal{G}_m$ . Portanto,*

$$\mathcal{G}_m = s^{-1}(m) \cap t^{-1}(m).$$

**Exemplos 3.2.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie agindo em uma variedade  $M$ , as órbitas e os grupos de isotropia do grupoide de ação  $G \ltimes M$  são justamente os usuais para uma  $G$ -ação*

$$\mathcal{G}.m = G.m \quad e \quad \mathcal{G}_m = G_m.$$

Futuramente, nessa seção, mostraremos que as órbitas são subvariedades imersas de  $M$  e os grupos de isotropia são subvariedades mergulhadas de  $\mathcal{G}$ . Note que para qualquer  $m$ , as órbitas podem ser caracterizadas por

$$\mathcal{G}.m = t(s^{-1}(m)).$$

O grupo de isotropia  $\mathcal{G}_m$  é a fibra de  $m$  sobre o mapa  $s^{-1}(m) \xrightarrow{t} \mathcal{G}.m$ . Como é uma submersão, as fibras  $s^{-1}(m)$  são subvariedades mergulhadas de  $\mathcal{G}$ , de dimensão  $\dim \mathcal{G} - \dim M$ . Portanto, para mostrar que as órbitas e os grupos de isotropia são subvariedades, é suficiente mostrar que a restrição de  $t$  para qualquer fibra  $s^{-1}(m)$  possui posto constante.

**Definição 3.2.3.** *Uma **biseção** de um grupoide de Lie é uma subvariedade  $S \subseteq \mathcal{G}$  tal que ambos os mapas  $t, s$  se restringem para um difeomorfismo  $S \rightarrow M$ . O nome indica que  $S$  pode ser considerada como uma seção de ambos  $s$  e  $t$ . Nós iremos denotar por  $\Gamma(\mathcal{G})$  o conjunto de todas as biseção.*

O conjunto  $\Gamma(\mathcal{G})$  possui uma estrutura de grupo, onde a multiplicação é dada por

$$S_1 \circ S_2 = m_{\mathcal{G}}((S_1 \times S_2) \cap \mathcal{G}^{(2)}).$$

Ou seja,  $S_1 \circ S_2$  consiste de todas as composições  $g_1 \circ g_2$  de elementos componíveis com  $g_i \in S_i$  para  $i = 1, 2$ . O elemento identidade é a biseção  $M$ , e o elemento inverso

é dado por  $S^{-1} = i_{\mathcal{G}}(S)$ . Esse grupo de biseções vem com um homomorfismo de grupos

$$\Gamma(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Diff}(M), \quad S \mapsto \Phi_S$$

onde  $\Phi_S = t|_S \circ (s|_S)^{-1}$ .

**Observação 3.2.1.** *Alternativamente, uma biseção de  $\mathcal{G}$  pode ser vista como uma seção  $\sigma : M \rightarrow \mathcal{G}$  de  $s$  tal que sua composição com o mapa  $t$  é um difeomorfismo.*

**Exemplos 3.2.2.** 1. *Para um grupo de Lie  $G \rightrightarrows pt$ , visto como um grupóide de Lie, uma biseção é simplesmente um elemento de  $G$ , e  $\Gamma(G) = G$ .*

2. *Para o grupóide “trivial”  $M \rightrightarrows M$  a única biseção é o próprio  $M$  e  $\Gamma(M)$  consiste apenas do elemento identidade.*

3. *Para o grupóide de pares  $\text{Pair}(M) \rightrightarrows M$  uma biseção é o mesmo que o gráfico de um difeomorfismo de  $M$ , e  $\Gamma(M) \simeq \text{Diff}(M)$ .*

4. *Uma biseção do grupóide de Atiyah  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  é o mesmo que um automorfismo de fibrado principal  $\Phi_P : P \rightarrow P$ , e  $\Gamma(\mathcal{G}) = \text{Aut}(P)$ .*

O grupo de biseções possui três ações naturais em  $\mathcal{G}$ :

- multiplicação a esquerda

$$\mathcal{A}_S^L(g) = h \circ s,$$

como o único elemento  $h \in S$  tal que  $s(h) = t(g)$ . Ou seja,  $h = ((s|_S)^{-1} \circ t)(g)$ .

Temos a seguinte propriedade

$$s \circ \mathcal{A}_S^L = s, \quad t \circ \mathcal{A}_S^L = \Phi_S \circ t. \quad (3.1)$$

- multiplicação a direita

$$\mathcal{A}_S^R(g) = g \circ (h')^{-1},$$

com o único elemento  $h' \in S$   $s(h') = s(g)$ . Ou seja,  $h' = ((s|_S)^{-1})(s(g))$ . Temos

a seguinte propriedade

$$t \circ \mathcal{A}_S^R = t, \quad s \circ \mathcal{A}_S^R = \Phi_S \circ s. \quad (3.2)$$

- Ação adjunta

$$\text{Ad}_S(g) = h \circ g \circ (h')^{-1},$$

com  $h, h'$  como acima.

**Exemplos 3.2.3.** *Difeomorfismos de uma variedade fornecem uma ação natural no grupóide de pares. Para um  $G$ -fibrado principal, o grupo  $\text{Aut}(P)$  de automorfismos age naturalmente no grupóide de Atiyah. Em ambos os casos, a ação é a ação adjunta.*

Em geral, pode não existir uma biseção global passando por um ponto  $g \in \mathcal{G}$ . Porém, sempre podemos restringir  $t, s$  para difeomorfismos locais em subconjuntos abertos  $t(S) = V, s(S) = U$  de  $M$ . Nesse caso chamamos  $S \subseteq \mathcal{G}$  de uma **biseção local**. Qualquer biseção local define um difeomorfismo entre esses abertos:

$$\Phi_S = t|_S \circ (s|_S)^{-1} : U \rightarrow V,$$

com inversa dada pela biseção local  $S^{-1} = i_{\mathcal{G}}(S)$ . Nós temos as ações a esquerda, a direita, e adjunta definidas como difeomorfismos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S^L : t^{-1}(U) &\rightarrow t^{-1}(V), & g &\mapsto h \circ g, \\ \mathcal{A}_S^R : s^{-1}(U) &\rightarrow s^{-1}(V), & g &\mapsto g \circ (h')^{-1}, \end{aligned}$$

onde, para  $g \in \mathcal{G}$ , temos  $h, h'$  sendo os únicos elementos de  $S$  tal que  $s(h) = t(g)$ ,  $s(h') = s(g)$ . As equações 3.1 e 3.2 também são satisfeitas e, portanto, também temos uma ação adjunta definida pelo difeomorfismo

$$Ad_S : s^{-1}(U) \cap t^{-1}(U) \rightarrow s^{-1}(V) \cap t^{-1}(V), \quad g \mapsto h \circ g \circ (h')^{-1},$$

extendendo o mapa  $\Phi_S$  em unidades.

**Proposição 3.2.1.** *Para qualquer grupóide de Lie  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  e qualquer  $m \in M$ , a restrição de  $t$  para a fibra source  $s^{-1}(m)$  possui posto constante.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que o posto de

$$t|_{s^{-1}(M)} : s^{-1}(m) \rightarrow M$$

em  $g, g' \in s^{-1}(m)$  coincidem. Seja  $S$  uma biseção local contendo o elemento  $g' \circ g^{-1}$ , e sejam  $U = s(S)$  e  $V = t(S)$ . O difeomorfismo

$$\mathcal{A}_S^L : t^{-1}(U) \rightarrow t^{-1}(V)$$

leva  $g$  em  $g'$ . Como  $s \circ \mathcal{A}_S^L = s$ ,  $\mathcal{A}_S^L$  se restringe para um difeomorfismo em cada fibra de  $s$ . Além disso, como  $t \circ \mathcal{A}_S^L = \Phi_S \circ t$  temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} t^{-1}(U) \cap s^{-1}(m) & \xrightarrow{\mathcal{A}_S^L|_{s^{-1}(m)}} & t^{-1}(V) \cap s^{-1}(m) \\ t|_{s^{-1}(m)} \downarrow & & \downarrow t|_{s^{-1}(m)} \\ U & \xrightarrow{\Phi_S} & V \end{array}$$

onde os mapas horizontais são difeomorfismos e o mapa superior leva  $g$  em  $g'$ . Portanto, o posto dos mapas verticais em  $g, g'$  coincidem.  $\square$

**Corolário 3.2.0.1.** *Para todo  $m \in \mathcal{G}$ , a órbita  $\mathcal{G}.m$  é uma subvariedade imersa injetivamente de  $M$ , enquanto que o grupo de isotropia  $\mathcal{G}_m$  é uma subvariedade mergulhada de  $\mathcal{G}$ , pois é um grupo de Lie. De fato, todas as fibras do mapa*

$$t, s : \mathcal{G} \rightarrow \text{Pair}(M)$$

*são subvariedades mergulhadas.*

Para a parte final, temos que  $(t, s)^{-1}(m', m)$  é uma subvariedade pois coincide com a fibra de  $m'$  sobre a submersão sobrejetora  $s^{-1}(m) \rightarrow \mathcal{G}.m$ .

### 3.3 Construções com grupoides de Lie

Nessa seção mostraremos algumas maneiras de obter novos grupoides de Lie a partir de um grupoide de Lie dado.

**Grupoide induzido:** Seja  $\mathcal{G} = \{G_1 \rightrightarrows G_0\}$  um grupoide de Lie e  $\phi : M \rightarrow G_0$  um mapa suave. Então, nós podemos definir o **grupoide induzido**  $\phi^*(\mathcal{G})$  sobre  $M$ . No qual uma seta de  $x$  para  $y$  é uma seta em  $\mathcal{G}$  de  $\phi(x)$  para  $\phi(y)$ , isto é

$$\phi^*(\mathcal{G})_1 = M \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} M,$$

e a multiplicação é dada pela multiplicação em  $\mathcal{G}$ . O espaço  $\phi^*(\mathcal{G})_1$  pode ser construído por dois pull-backs

$$\begin{array}{ccc} \phi^*(\mathcal{G})_1 & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ G_1 \times_{G_0} M & \xrightarrow{pr_1} & G_1 \xrightarrow{t} G_0 \\ \downarrow & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{\phi} & G_0 \end{array}$$

O pull-back de baixo possui uma estrutura suave natural pois  $s$  é uma submersão. Se a composição  $t \circ pr_1$  é também uma submersão, então o pull-back de cima também possui uma estrutura suave natural. Logo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \phi^*(\mathcal{G})_1 & \longrightarrow & G_1 \\ (s,t) \downarrow & & \downarrow (s,t) \\ M \times M & \xrightarrow{\phi \times \phi} & G_1 \times G_1 \end{array}$$

é um pull-back. Portanto,  $\phi^*(\mathcal{G})$  é um grupoide de Lie sempre que o mapa  $t \circ pr_1 : G_1 \times_{G_0} M \rightarrow G_0$  for uma submersão. Note que o mapa  $\phi$  induz um morfismo entre

os grupoides de Lie  $\phi^*(\mathcal{G})$  e  $\mathcal{G}$ .

**Produto fibrado.** Para dois morfismos entre grupoides de Lie  $\phi : \mathcal{G} = \{G_1 \rightrightarrows G_0\} \rightarrow \mathcal{K} = \{K_1 \rightrightarrows K_0\}$  e  $\psi : \mathcal{H} = \{H_1 \rightrightarrows H_0\} \rightarrow \mathcal{K} = \{K_1 \rightrightarrows K_0\}$  podemos definir o grupoide  $\mathcal{G} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{H}$  cujos espaços de objetos e setas são

$$(\mathcal{G} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{H})_0 = G_0 \times_{K_0} H_0 = \{(x, y) | x \in G_0, y \in H_0, \phi(x) = \psi(y)\},$$

$$(\mathcal{G} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{H})_1 = G_1 \times_{K_1} H_1 = \{(g, h) | g \in G_1, h \in H_1, \phi(g) = \psi(h)\}.$$

Com composição definida componente a componente. Em geral esse grupoide não é um grupoide de Lie, será apenas se os produtos fibrados  $G_0 \times_{K_0} H_0$  e  $G_1 \times_{K_1} H_1$  forem transversais. Nesse caso essa construção fornece o grupoide **produto fibrado**.

**Produto fibrado fraco.** Para dois morfismos entre grupoides de Lie  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$  e  $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  iremos construir um grupoide  $\mathcal{P} = \{P_1 \rightrightarrows P_0\}$  da seguinte forma. Os objetos são formados por triplas  $(x, k, y)$ , onde  $x \in G_0$ ,  $y \in H_0$  e  $k \in K_1$  é tal que  $s(k) = \phi(x)$  e  $t(k) = \psi(y)$ . Setas em  $\mathcal{P}$  de  $(x, k, y)$  para  $(x', k', y')$  são pares  $(g, h)$  de setas  $g \in G_1$  e  $h \in H_1$  tal que  $k'\phi(g) = \psi(h)k$ . A multiplicação é dada componente a componente. O conjunto de objetos pode ser considerado como o produto fibrado

$$P_0 = G_0 \times_{K_0} K_1 \times_{K_0} H_0,$$

e se o produto fibrado é transversal então  $P_0$  possui uma estrutura natural de subvariedade de  $G_0 \times K_1 \times H_0$ . Esse é o caso, por exemplo, quando  $\phi : G_0 \rightarrow K_0$  ou  $\psi : H_0 \rightarrow K_0$  é submersão. Se  $P_0$  possui estrutura suave como acima, então

$$P_1 = G_1 \times_{K_0} K_1 \times_{K_0} H_1 = \{(g, k, h) | \phi(s(g)) = s(k), \psi(s(h)) = t(k)\}$$

é também uma variedade. De fato, nesse caso  $P_1$  pode ser obtida de dois produtos fibrados

$$\begin{array}{ccccc} G_1 \times_{K_0} K_1 \times_{K_0} H_1 & \longrightarrow & & \longrightarrow & H_1 \\ \downarrow & & & & \downarrow s \\ G_1 \times_{K_0} K_1 \times_{K_0} H_0 & \longrightarrow & G_0 \times_{K_0} K_1 \times_{K_0} H_0 & \longrightarrow & H_0 \\ \downarrow & & \downarrow pr_1 & & \\ G_1 & \xrightarrow{s} & G_0 & & \end{array}$$

Nesse caso  $\mathcal{P}$  é um grupoide de Lie chamado **produto fibrado fraco** ou **pull-back fraco**, e denotado por  $\mathcal{G} \times_{\mathcal{K}} \mathcal{H}$ .



**Produto semi-direto.** Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide de Lie. Uma ação a esquerda de  $\mathcal{G}$  em uma variedade  $N$  ao longo de um mapa sua  $\tau : N \rightarrow G_0$  é dado por um mapa suave  $\mu : G_1 \times_{G_0} N \rightarrow N$  (escrevemos  $\mu(g, y) = gy$ ) definido no produto fibrado  $G_1 \times_{G_0} N = \{(g, y) | s(g) = \tau(y)\}$ , satisfazendo  $\tau(gy) = t(g)$ ,  $1_{\tau(y)}y = y$  e  $g'(gy) = (g'g)y$  para  $g', g \in G_1$  e  $y \in N$  com  $s(g') = t(g)$  e  $s(g) = \tau(y)$ . Para tal ação, podemos formar o grupoide de ação  $\mathcal{G} \ltimes N$  sobre  $N$  com  $(\mathcal{G} \times_{G_0} N)$ , exatamente como no exemplo 3.1.1 item (5). Também chamamos esse grupoide de **grupoide produto semi-direto** da  $\mathcal{G}$ -ação. Analogamente temos ações a direita e o grupoide  $\mathcal{G} \rtimes N$ .

### 3.4 Equivalência de grupoides de Lie

Nessa seção discutiremos equivalências entre grupoides de Lie. Além disso, mostraremos que um grupoide de Lie transitivo é isomorfo ao grupoide de gauge.

Como grupoides de Lie e morfismos de grupoides de Lie formam uma categoria, um isomorfismo de grupoides de Lie é um isomorfismo na categoria de grupoides de Lie. Como grupoides de Lie são categorias podemos definir equivalência de grupoides de Lie como abaixo.

**Definição 3.4.1.** *Seja  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$  grupoides de Lie. Um morfismo  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  é chamado de **equivalência forte** se existe um morfismo  $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$  e transformações naturais  $T : \phi \circ \psi \Rightarrow id_{\mathcal{H}}$  e  $S : \psi \circ \phi \Rightarrow id_{\mathcal{G}}$ .*

Note que essa definição é a mesma que foi feita no contexto de categorias. Equivalências fortes são raras, precisamos de uma equivalência mais fraca. Como em teoria de categorias usaremos funtores essencialmente sobrejetivos e plenamente fieis, porém agora precisamos de uma noção de suavidade.

**Definição 3.4.2.** *Sejam  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$  grupoides de Lie. Um morfismo  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  é uma **equivalência fraca** ou **mapa de Morita** se satisfaz as seguintes condições:*

1. O mapa  $t \circ pr_1 : H_1 \times_{H_0} G_0 \rightarrow H_0$ , enviando um par  $(h, x)$  com  $s(h) = \phi(x)$  para  $t(h)$ , é uma submersão sobrejetora (isso equivale a ser essencialmente sobrejetivo).
2. O diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\phi} & H_1 \\ (s,t) \downarrow & & \downarrow (s,t) \\ G_0 \times G_0 & \xrightarrow{\phi \times \phi} & H_0 \times H_0 \end{array}$$

é um pull-back de variedades. Ou seja,  $G_1 \simeq (G_0 \times G_0) \times_{(H_0 \times H_0)} H_1$  (isso equivale a ser plenamente fiel).

Dizemos que dois grupoides de Lie  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}'$  são **Morita equivalentes** se existem mapas de Morita  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$  e  $\phi' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}'$ , onde  $\mathcal{H}$  é também um grupoide de Lie.

**Observação 3.4.1.** *Toda equivalência forte entre grupoides de Lie é um mapa de Morita (ver demonstração em (MOERDIJK; MRCUN, 2003)).*

**Exemplos 3.4.1.** 1. *Seja  $M$  uma variedade suave e  $\text{Pair}(M)$  seu grupoide de pares. O morfismo  $\text{Pair}(M) \rightarrow 1$  (onde  $1$  é o grupoide de Lie com um único objeto e única seta) é uma equivalência forte.*

2. *Seja  $\pi : N \rightarrow M$  uma submersão sobrejetora entre variedades suaves. Denote por  $\mathcal{S}$  o grupoide de submersão  $N \times_M N \rightrightarrows N$  e por  $M$  o grupoide de Lie  $M \rightrightarrows M$ . Então,  $\pi$  induz um mapa de Morita  $\mathcal{S} \rightarrow M$ .*

3. *Suponha que  $\phi : M \rightarrow G_0$  é um mapa suave com a propriedade que  $t \circ \text{pr}_1 : G_1 \times_{G_0} M \rightarrow G_0$  é uma submersão. Então, o morfismo  $\phi : \phi^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}$  é um mapa de Morita se, e somente se,  $t \circ \text{pr}_1$  é sobrejetora.*

**Definição 3.4.3.** *Um grupoide de Lie é chamado **transitivo** se possui uma única órbita  $\mathcal{G}.m = M$ .*

**Exemplos 3.4.2.** 1. *O grupoide de pares de  $M$  é transitivo.*

2. *O grupoide de ação  $G \times M \rightrightarrows M$  é transitivo se, e somente se, a  $G$ -ação em  $M$  é transitiva.*

3. *Para qualquer  $G$ -fibrado principal  $\pi : P \rightarrow M$ , o grupoide de Atiyah  $\text{At}(P)$  é transitivo.*

Na verdade, todo grupoide de Lie transitivo é isomorfo ao grupoide de Atiyah.

**Teorema 3.4.1.** *Seja  $\mathcal{G} = \{G \rightrightarrows M\}$  um grupoide de Lie transitivo e escolha um ponto base  $m \in M$ . Então,  $\mathcal{G}$  é isomorfo ao grupoide de Atiyah  $\text{At}(P)$  do  $\mathcal{G}_m$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  onde  $P = s^{-1}(m)$ .*

*Demonstração.* O mapa target fornece uma submersão sobrejetora

$$\pi = t|_{s^{-1}(m)} : P \rightarrow M, \quad p \mapsto t(p).$$

O grupo  $\mathcal{G}_m$  age em  $P$  por

$$g.p = p \circ g^{-1},$$

note que essa ação está bem definida pois  $s(p) = m = s(g)$  e  $s(g.p) = s(g^{-1}) = t(g) = m$ . Essa ação preserva fibras, pois  $\pi(g.p) = t(p \circ g^{-1}) = t(p) = \pi(p)$ . Essa ação é

livre, pois  $g.p = p$  significa  $p \circ g^{-1} = p$ , portanto  $g = m$  como um elemento de  $\mathcal{G}_m$ , que é a identidade de  $\mathcal{G}_m$ . Por outro lado, dado dois pontos  $p, p' \in P$  na mesma fibra, ou seja  $t(p) = t(p')$ , o elemento  $g = (p')^{-1} \circ p$  é bem definido, pertence a  $\mathcal{G}_0$ , e satisfaz  $p' = p \circ g^{-1}$ . Lembre-se que se temos uma ação livre de um grupo de Lie em uma variedade e uma submersão sobrejetora tal que as orbitas são exatamente as fibras da ação, então teremos um fibrado principal cujas trivializações locais são obtidas pelas seções locais da submersão. Note que estamos nesse caso, portanto  $P \rightarrow M$  é um  $\mathcal{G}_m$ -fibrado principal.

Nos resta identificar  $\mathcal{G}$  com o grupoide de Atiyah de  $P$ . Seja  $\phi \in G$ , a multiplicação a esquerda por  $\phi$  fornece o mapa

$$P_{s(\phi)} \rightarrow P_{t(\phi)}, \quad p \mapsto \phi \circ p,$$

que comuta com a  $\mathcal{G}_m$ -ação principal dada pela multiplicação a direita. Isso define um mapa suave injetivo  $F : \mathcal{G} \rightarrow At(P)$ . É claro que  $F$  é um morfismo de grupoides de Lie. A inversa é construída como segue: dado  $\psi \in At(P)$ , escolha  $p \in P_{s(\psi)}$ , então o elemento  $\phi = \psi(p) \circ p^{-1} \in G$  é definido e independente da escolha de  $p$ . Claramente temos que  $F(\phi) = \psi$ .  $\square$

### 3.5 A variedade simplicial de um grupoide de Lie

Seja  $\mathcal{G} = \{G_1 \rightrightarrows G_0\}$  um grupoide de Lie. Defina:

$$G^{[n]} := \{(g_1, \dots, g_n) \in G_1 \times \dots \times G_1 \mid s(g_i) = t(g_{i+1})\}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos **mapas de face**

$$\partial_i : G^{[n]} \rightarrow G^{[n-1]}$$

definidos por:

$$\partial_i(g_1, \dots, g_k) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_k) & \text{se } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_k) & \text{se } 0 < i < k \\ (g_1, \dots, g_{k-1}) & \text{se } i = k. \end{cases} \quad (3.3)$$

Estes mapas satisfazem as identidades

$$\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i \quad \text{se } i < j.$$

Uma sequência de variedades munidas de mapas, tais como os mapas de face, satisfazendo as identidades acima é chamada de **variedade semisimplicial**. Para mais informações a respeito de objetos semisimpliciais ver (MCCLURE, 2013).

**Definição 3.5.1.** A variedade semisimplicial  $G^{[\bullet]}$  é chamada de **nervo** de  $\mathcal{G}$ .

Para mais

**Observação 3.5.1.** Também temos **mapas de degenerescência**

$$S_i : G^{[n]} \rightrightarrows G^{[n+1]}$$

definidos por:

$$S_i(g_1, \dots, g_k) = \begin{cases} (g_1, g_1, g_2, \dots, g_k) & \text{se } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_i, g_i, \dots, g_k) & \text{se } 0 < i < k \\ (g_1, \dots, g_{k-1}, g_k, g_k) & \text{se } i = k. \end{cases} \quad (3.4)$$

Os mapas de desgenerescência e de face satisfazem as identidades simpliciais

$$\begin{aligned} \partial_i \circ \partial_j &= \partial_{j-1} \circ \partial_i \quad \text{se } i < j \\ S_i \circ S_j &= S_j \circ S_{i-1} \quad \text{se } i > j \\ \partial_i \circ S_j &= \begin{cases} S_{j-1} \circ \partial_i & \text{se } i < j \\ id & \text{se } i = j \quad \text{ou } i = j + 1 \\ S_j \circ \partial_{i-1} & \text{se } i > j + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, na verdade o nervo de um grupoide de Lie é uma variedade simplicial. Ao longo deste trabalho utilizaremos apenas os mapas de face.

O Seguinte exemplo será utilizado ao longo do trabalho.

**Exemplos 3.5.1.** Seja  $\pi : X_1 \rightarrow X_0$  uma submersão sobrejetora. O nervo do grupoide de submersão,  $X_1 \times_{X_0} X_1 \rightrightarrows X_1$ , será denotado por:

$$X^{[n]} = \{(x_1, \dots, x_n) | \pi(x_1) = \dots = \pi(x_n)\}$$

**Exemplos 3.5.2.** (Casos particulares):

1. Seja  $\pi : X_1 \rightarrow \{*\}$ , então o grupoide de submersão torna-se o grupoide de pares  $X_1 \times X_1 \rightrightarrows X_1$ . Neste caso o nervo é:

$$X^{[n]} = X_1^n$$

2. Se  $\pi$  for a identidade,  $id : X_1 \rightarrow X_1$ , o grupoide de submersão torna-se o grupoide unitário  $X_1 \rightarrow X_1$ . Neste caso o nervo é:

$$X^{[n]} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_1 | x_1 = \dots = x_n\}$$

3. Dada uma cobertura aberta  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  de  $X_0$ , considere  $\pi : \coprod_i U_i \rightarrow X_0$ . O grupóide de submersão nesse caso é o **Grupóide de Čech**,  $\check{\mathcal{U}} = \{\coprod_{i,j} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i U_i\}$ , onde os mapas source e target são dados por  $s : U_{ij} \rightarrow U_j$  e  $t : U_{ij} \rightarrow U_i$ . Neste caso o nervo é:

$$\check{\mathcal{U}}^{[n]} = \coprod U_{i_1, \dots, i_n}$$

onde  $U_{i_1, \dots, i_n}$  denota as interseções  $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ . Note que o nervo do grupóide de Čech coincide com o nervo da cobertura aberta.

### 3.5.0.1 O complexo de Bott-Shulman-Stasheff

Seja  $\mathcal{G} = \{G_1 G_0\}$  um grupóide de Lie. O **complexo de Bott-Shulman-Stasheff** é o complexo duplo:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^p(G^{[q]}) & \xrightarrow{\partial} & \Omega^p(G^{[q+1]}) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ d_{dR} \downarrow & & d_{dR} \downarrow & & \\ \Omega^{p+1}(G^{[q]}) & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+1}(G^{[q+1]}) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ d_{dR} \downarrow & & d_{dR} \downarrow & & \\ \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

onde  $\partial = \sum_i (-1)^i \partial_i^*$ .

O **complexo de de Rham** de  $\mathcal{G}$  é o complexo total associado:

$$C^p(\mathcal{G}) := \bigoplus_{i+j=p} \Omega^i(G^{[j]}).$$

**Definição 3.5.2.** Uma  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{G})$  é **multiplicativa** se  $\partial\omega = 0$ .

Ou seja, se  $\omega$  é multiplicativa temos que  $m^*\omega = pr_1^*\omega + pr_2^*\omega$ .

Crainic, em (CRAINIC, 2003), mostrou que se o grupóide  $\mathcal{G}$  for próprio as cohomologias dos complexos horizontais do complexo de Bott-Shulman-Stasheff são zero. Como o grupóide de submersão é próprio vale que:

**Corolário 3.5.0.1.** Seja  $\pi : X_1 \rightarrow X_0$  uma submersão. Considere o complexo  $(\Omega^q(X^{[\bullet]}), \partial)$ . Temos que para toda  $q$ -forma fechada  $\omega \in \Omega^q(X^{[p]})$  existe uma  $q$ -forma  $\rho \in \Omega^q(X^{[p-1]})$  tal que  $\partial(\rho) = \omega$ .

## 3.6 Algebroides de Lie

Algebroides de Lie aparecem naturalmente como parte infinitesimal de grupoides de Lie, de maneira análoga a qual algebras de Lie são a parte infinitesimal de grupos de Lie.

**Definição 3.6.1.** : *Um algebroide de Lie sobre uma variedade  $M$  é um fibrado vetorial real  $A \rightarrow M$  equipado com um mapa fibrado (mapa âncora)  $\rho : A \rightarrow TM$ , e um colchete de Lie  $[\cdot, \cdot]_A : \Gamma(A) \otimes \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$  tal que o mapa induzido*

$$\Gamma(\rho) : \Gamma(A) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

*é um morfismo de álgebras de Lie, e para toda  $f \in C^\infty(M)$  e  $e_1, e_2 \in \Gamma(A)$  nós temos a regra de Leibniz*

$$[e_1, fe_2]_A = f[e_1, e_2]_A + \rho(e_1)(f)e_2$$

*Um algebroide de Lie com mapa âncora sobrejetivo é chamado de algebroide de Lie transitivo.*

**Exemplos 3.6.1.** 1. *O fibrado tangente de uma variedade é um algebroide de Lie com a âncora sendo o mapa identidade e o colchete sendo o colchete de campos de vetores usual.*

2. *Qualquer fibrado vetorial  $E$  sobre  $M$  pode ser visto como um algebroide de Lie com ambos âncora e colchete sendo zero. Mais geralmente, qualquer fibrado de álgebras de Lie, fibrado vetorial cujas fibras possuem estrutura de álgebra de Lie e as trivializações locais respeitam a estrutura, pode ser visto como algebroide de Lie sobre  $M$  com âncora zero e colchete ponto a ponto.*

3. *Uma ação de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  em uma variedade  $M$  é, por definição, um morfismo de fibrados vetoriais  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ,  $X \mapsto X_M$ , tal que o mapa de ação  $M \times \mathfrak{g} \rightarrow TM$ ,  $(m, X) \mapsto X_M(m)$  é suave. Podemos definir o algebroide de Lie de ação, onde  $A = \mathfrak{g} \times M$ . O mapa âncora é dado pelo mapa de ação, e o colchete é a única extensão do colchete de  $\mathfrak{g}$  nas seções constantes determinado pela regra de Leibniz. Ou seja, se  $X, Y : M \rightarrow \mathfrak{g}$  (vistos como seções de  $A$ )*

$$[X, Y] = [X, Y]_{\mathfrak{g}} + \mathcal{L}_{\rho(X)}Y - \mathcal{L}_{\rho(Y)}X.$$

onde  $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X(m), Y(m)]$ .

4. *Seja  $\pi : P \rightarrow M$  um  $G$ -fibrado principal. O fibrado  $A(P) = (TP)/G \rightarrow M$  é um algebroide de Lie, chamado algebroide de Atiyah, com colchete em  $\Gamma(A)$*

induzido pela sua identificação com campos de vetores  $G$ -invariantes em  $P$ , e âncora induzida por  $d\pi : TP \rightarrow TM$ . Lembre-se que para um fibrado qualquer  $\pi : P \rightarrow M$  a diferencial  $d\pi$  define uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow VP \rightarrow TP \xrightarrow{d\pi} \pi^*TM \rightarrow 0$$

onde  $VP = \ker d\pi$  (núcleo). No caso em que  $P$  é um  $G$ -fibrado principal, podemos quocientar a sequência acima pela ação de  $G$  obtendo

$$0 \rightarrow \mathfrak{gau}(P) \rightarrow A(P) \rightarrow TM \rightarrow 0$$

onde  $\mathfrak{gau}(P) = (P \times \mathfrak{g})/G$  é o quociente do fibrado vertical  $VP \simeq P \times \mathfrak{g}$  por  $G$ . Note que o grupóide de Atiyah está presente nessa sequência, chamamos a sequência acima de **sequência de Atiyah**. Uma cisão  $\sigma : TM \rightarrow A(P)$  da sequência de Atiyah é uma conexão do fibrado principal.

**Definição 3.6.2.** Se  $A \rightarrow M$  é um algebroides de Lie com âncora  $\rho : A \rightarrow TM$ ,  $\mathfrak{h}_m = \ker(\rho|_m)$  para  $m \in M$  é a **álgebra de Lie de isotropia**. Além disso, note que a sequência

$$0 \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow A \rightarrow TM \rightarrow 0$$

é exata.

### 3.7 Algebroides de Lie de um grupóide de Lie

Assim como podemos obter uma álgebra de Lie de um grupo de Lie, podemos obter um algebroides de Lie de um grupóide de Lie  $\mathcal{G} = \{G_1 \rightrightarrows G_0\}$ .

Note que se  $h : x \rightarrow y$  pertence a  $G_1$  a translação por  $h$ ,  $R_h : s^{-1}(y) \rightarrow s^{-1}(x)$ ,  $R_h(g) = gh$ , fornece um difeomorfismo. Seja  $T^s(G_1) = \text{Ker}(ds) \subset T(G_1)$ , para qualquer  $\alpha \in (T^s G_1)_g = T_g^s G_1$  e  $h \in G_1$  com  $t(h) = s(g)$  podemos definir

$$\alpha h = dR_h(\alpha) \in T_{gh}^s G_1$$

e assim, temos uma ação a direita de  $\mathcal{G}$  em  $(T^s G_1)$ .

**Definição 3.7.1.** Diremos que um campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}^s(G_1)$  é  $\mathcal{G}$ -invariante (a direita) em  $G_1$  se  $X_{gh} = X_g h$  pra qualquer  $g, h \in G_1$  com  $s(g) = t(h)$ . Denotaremos por  $\mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G})$  o espaço vetorial dos campos de vetores  $\mathcal{G}$ -invariantes em  $G_1$ .

**Proposição 3.7.1.**  $\mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G})$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(G_1)$ ,

*Demonstração.* Pegue  $X, Y \in \mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G})$ . Temos que  $[X, Y] \in \mathfrak{X}^s(G_1)$  pois as seções  $\mathfrak{X}^s(G_1) = \Gamma(T^s G_1)$  são os campos de vetores em  $G_1$  tangente as fibras do mapa source, com isso, temos que  $T^s G_1$  é involutivo e, portanto,  $\mathfrak{X}^s(G_1)$  é subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(G_1)$ . Além disso, para quaisquer  $g, h \in G_1$  com  $s(g) = t(h)$

$$[X, Y]_g h = dR_h([X, Y]_g) = [dR_h(X), dR_h(Y)]_{gh} = [X, Y]_{gh}$$

□

Para qualquer seta  $g : x \rightarrow y \in G_1$  temos que

$$dt(X_g) = dt(X_{1_y} g) = dt(dR_g(X_{1_x})) = d(t \circ R_g)(X_{1_x}) = dt(X_{1_x}).$$

O diferencial do target induz um morfismo de álgebras de Lie  $dt : \mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{X}(G_0)$ . De fato, podemos projetar um campo de vetores  $X$  em  $\mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G})$  para  $G_0$  notando que

$$dt(X_g) = dt(X_{1_y} g) = dt(dR_g(X_{1_x})) = d(t \circ R_g)(X_{1_x}) = dt(X_{1_x})$$

para qualquer seta  $g : x \rightarrow y$  em  $G_1$ . Ou seja, qualquer campo de vetores em  $\mathfrak{X}_{inv}^s$  é unicamente determinado pela sua restrição nos mapas de unidade  $\{1_x | x \in G_0\}$  de  $\mathcal{G}$ . Portanto, temos um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(1^* \ker(ds)),$$

onde  $1^* \ker(ds)$  é o pull-back do fibrado vetorial  $T^s G_1$  ao longo do mapa unidade  $1 : G_0 \rightarrow G_1$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & T^s G_1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G_0 & \xrightarrow{1} & G_1 \end{array}$$

Ou seja, a estrutura de álgebra de Lie em  $\Gamma(1^* \ker(ds))$  é obtida identificando o isomorfismo  $\mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(1^* \ker(ds))$  como morfismo de álgebras de Lie. Seja  $a \in \Gamma(1^* \ker(ds))$ , denotaremos seu único correspondente em  $\mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G})$  por  $\vec{a}$ . Com essa notação, seja  $a, b \in \Gamma(1^* \ker(ds))$  então temos que  $[a, b] = [\vec{a}, \vec{b}]$  e  $f\vec{a} = (f \circ t)\vec{a}$  para alguma função  $f \in C^\infty(G_0)$ .

A diferencial do target se restringe para um morfismo de fibrados vetoriais  $\rho : 1^* \ker(ds) \rightarrow TG_0$  (âncora) por

$$\rho(a) = dt(a).$$

Esse mapa induz um morfismo de álgebras de Lie  $\Gamma(\rho) : \Gamma(1^* \ker(ds)) \rightarrow \mathfrak{X}(G_0)$ , que corresponde ao mapa  $dt : \mathfrak{X}_{inv}^s(\mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{X}(G_0)$ .



**Proposição 3.7.2.** *Vale a regra de Leibniz para o colchete de Lie em  $\Gamma(1^*\ker(ds))$ .*

*Demonstração.* Sejam  $a, b \in \Gamma(1^*\ker(ds))$  e  $f \in C^\infty(G_0)$ . Temos que

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{[a, fb]} &= [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{(fb)}] \\
 &= [\overrightarrow{a}, (f \circ t) \overrightarrow{b}] \\
 &= (f \circ t)[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + \overrightarrow{a}(f \circ t) \overrightarrow{b} \\
 &= (f \circ t)[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + (dt(\overrightarrow{a})(f) \circ t) \overrightarrow{b} \\
 &= (f \circ t)[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + \overrightarrow{(dt(a)(f)b)} \\
 &= \overrightarrow{(f[a, b])} + \overrightarrow{(\Gamma(\rho)(a)(f)b)}
 \end{aligned}$$

Note que na passagem da segunda para a terceira passagem usamos a regra de Leibniz para campo de vetores usuais.  $\square$

O fibrado vetorial  $1^*\ker(ds)$  sobre  $G_0$  com a âncora e colchete descritos acima é o algebroide de Lie do grupoide de Lie  $\mathcal{G}$ . Denotaremos o algebroide de Lie de  $\mathcal{G}$  por  $A_{\mathcal{G}}$ .

**Exemplos 3.7.1.** 1. *Se  $G$  é um grupo de Lie, visto como um grupoide de Lie sobre um único ponto, o fibrado associado  $1^*\ker(ds)$  é o fibrado sobre esse único ponto com uma estrutura de álgebra de Lie nas suas seções. Essa álgebra de Lie é a álgebra de Lie de campos de vetores invariantes a direita em  $G$  isomorfa ao espaço tangente de  $G$  na unidade.*

2. *O algebroide de Lie do exemplo 3.6.1 (1) é o algebroide de Lie do grupoide de pares sobre  $M$ .*

3. *O algebroide de Lie do exemplo 3.6.1 (3) é o algebroide de Lie do grupoide de ação.*

4. *O algebroide de Lie do exemplo 3.6.1 (4) é o algebroide de Lie do grupoide de Atiyah.*

Para informações sobre integrabilidade de algebroides de Lie e mais detalhes em geral ver (MOERDIJK; MRCUN, 2003).

## 3.8 Algebroide de Lie de uma variedade pré-simplética

O objetivo dessa seção é obter um algebroide de Lie a partir de uma variedade pré-simplética  $(M, \omega)$ . Essa seção segue a construção feita em (ROGERS, 2013).

**Definição 3.8.1.** Uma cobertura  $\{U_i\}$  de  $M$  equipada com 1-formas  $\theta_i \in \Omega^1(U_i)$  e funções suaves  $g_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j)$  satisfazendo

$$\omega|_{U_i} = d\theta_i \quad (3.5)$$

$$\theta_j - \theta_i = dg_{ij} \quad (3.6)$$

é chamada de uma **trivialização** de  $\omega$ .

**Observação 3.8.1.** Pelo lema de Poincaré toda 2-forma fechada admite uma trivialização.

Usaremos uma trivialização de  $\omega$  para construir um algebroide de Lie transitivo sobre  $M$ . Primeiro faremos isso localmente.

Sobre cada  $U_i$  vamos considerar o algebroide de Lie  $A_i \rightarrow U_i$  dado por:

$$A_i = TU_i \oplus \mathbb{R} \rightarrow U_i$$

com colchete

$$[v_1 + f_1, v_2 + f_2]_{A_i} = [v_1, v_2] + v_1(f_2) - v_2(f_1)$$

para toda seção  $v_i + f_i \in \mathfrak{X}(U_i) \oplus C^\infty(U_i)$ , e mapa âncora  $\rho$  dado pela projeção em  $TU_i$ . Usando a trivialização de  $\omega$  podemos colar os algebroides  $A_i \rightarrow U_i$  para obter um algebroide de Lie  $A \rightarrow M$ , mostraremos isso a seguir.

Considere as funções abaixo:

$$G_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(n+1)$$

$$G_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ dg_{ij}|_x & 1 \end{pmatrix}$$

que age em um ponto  $v_x + r \in A_i|_{U_{ij}}$  por

$$G_{ij}(x)(v_x + r) = v_x + r + dg_{ij}(v_x)$$

**Proposição 3.8.1.** As funções  $G_{ij}$  satisfazem a condição de cociclo em  $U_{ijk}$ .

*Demonstração.* Note que, utilizando a equação 3.6, podemos calcular  $G_{ij}G_{jk}G_{ki}$  por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_j - \theta_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_k - \theta_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_i - \theta_k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_j - \theta_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_i - \theta_j & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com isso, vemos que  $G_{ij}G_{jk}G_{ki} = 1$

□

Portanto, pela proposição anterior,  $G_{ij}$  nos fornece funções de transição e, com isso, podemos colar os fibrados locais e obter sobre  $M$  o fibrado vetorial

$$A = \sqcup_{x \in M} T_x M \oplus \mathbb{R} / \sim$$

onde a relação de equivalência é definida via funções  $G_{ij}$  de maneira usual.

**Lema 3.8.1.** : *Seja  $v_1 + f_1, v_2 + f_2 \in \Gamma(A_i|_{U_{ij}})$ , vale que:*

$$[G_{ij}(v_1 + f_1), G_{ij}(v_2 + f_2)]_{A_i} = G_{ij}([v_1, v_2] + v_1(f_2) - v_2(f_1))$$

*Demonstração.* Pela ação de  $G_{ij}$  e definição de  $[\cdot, \cdot]_{A_i}$  temos que:

$$\begin{aligned} [G_{ij}(v_1 + f_1), G_{ij}(v_2 + f_2)]_{A_i} &= [v_1 + f_1 + dg_{ij}(v_1), v_2 + f_2 + dg_{ij}(v_2)]_{A_i} \\ &= [v_1, v_2] + v_1(f_2 + dg_{ij}(v_2)) - v_2(f_1 + dg_{ij}(v_1)) \\ &= [v_1, v_2] + v_1(f_2) - v_2(f_1) + v_1 dg_{ij}(v_2) - v_2 dg_{ij}(v_1) \end{aligned}$$

Vamos analisar o termo  $v_1 dg_{ij}(v_2) - v_2 dg_{ij}(v_1)$ , utilizando as fórmulas de Cartan,  $\mathcal{L}_v = \iota_v d + d\iota_v$  e  $\iota_{[v_1, v_2]} = \mathcal{L}_{v_1} \iota_{v_2} - \mathcal{L}_{v_2} \iota_{v_1}$ , temos que:

$$\begin{aligned} v_1 dg_{ij}(v_2) - v_2 dg_{ij}(v_1) &= (\mathcal{L}_{v_1} \iota_{v_2} - \mathcal{L}_{v_2} \iota_{v_1}) dg_{ij} \\ &= (\iota_{[v_1, v_2]} + \mathcal{L}_{v_2} \mathcal{L}_{v_1} - (\iota_{[v_2, v_1]} + \mathcal{L}_{v_1} \mathcal{L}_{v_2})) dg_{ij} \\ &= (\iota_{[v_1, v_2]} + \mathcal{L}_{v_2} \mathcal{L}_{v_1} - \mathcal{L}_{v_2} \iota_{v_1} + \iota_{v_1} \mathcal{L}_{v_2} - \mathcal{L}_{v_1} \mathcal{L}_{v_2}) dg_{ij} \\ &= \iota_{[v_1, v_2]} dg_{ij} + \mathcal{L}_{v_2} (\iota_{v_1} d^2 g_{ij} + d\iota_{v_1} dg_{ij}) - \mathcal{L}_{v_2} d\iota_{v_1} dg_{ij} - d\mathcal{L}_{v_2} \iota_{v_1} dg_{ij} \\ &= \iota_{[v_1, v_2]} dg_{ij} \end{aligned}$$

Portanto, pela ação de  $G_{ij}$ , obtemos o resultado.  $\square$

Logo, o colchete local passa para um colchete bem definido no quociente  $[\cdot, \cdot]_A$ . Com isso, temos um algebroide de Lie transitivo associado a variedade pré-simplética  $(M, \omega)$  denotado  $(A, [\cdot, \cdot]_A, \rho)$ .

Uma maneira de enxergarmos o algebroide de Lie acima é como uma extensão do fibrado tangente

$$0 \rightarrow M \times \mathbb{R} \rightarrow A \rightarrow TM \rightarrow 0$$

**Lema 3.8.2.** *Utilizando as 1-formas  $\theta_i \in \Omega^1(U_i)$  podemos obter uma cisão da sequência acima,  $s : TM \rightarrow A$ , definida por*

$$s(v_x) = v_x - \theta_i(v_x) \tag{3.7}$$

*Para todo  $v_x \in TU_i$ .*

*Demonstração.* Claramente,  $\rho \circ s(v_x) = \rho(v_x - \theta_i(v_x)) = v_x$ .  $\square$

Para a notação não ficar carregada denotaremos o levantamento horizontal,  $\Gamma(s) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(A)$ , também por  $s$ . Portanto, toda seção  $e \in \Gamma(A)$  é da forma  $e = s(v) + f$ , para algum  $v \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ .

**Lema 3.8.3.** *Sejam,  $v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ , temos que:*

$$[s(v_1) + f_1, s(v_2) + f_2]_A = s([v_1, v_2]) + v_1(f_2) - v_2(f_1) - \iota_{v_2} \iota_{v_1} \omega \quad (3.8)$$

*Demonstração.* Sejam  $v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ . Da definição da cisão e do colchete em  $A_i$  temos:

$$\begin{aligned} [s(v_1) + f_1, s(v_2) + f_2]_A &= [v_1 - \theta_i(v_1) + f_1, v_2 - \theta_i(v_2) + f_2]_A \\ &= [v_1, v_2] + v_1(f_2 - \theta_i(v_2)) - v_2(f_1 - \theta_i(v_2)) \\ &= [v_1, v_2] + v_1(f_2) - v_2(f_1) + v_2\theta_i(v_1) - v_1\theta_i(v_2) \end{aligned}$$

Vamos analisar o termo  $v_2\theta_i(v_1) - v_1\theta_i(v_2)$ , Utilizando as fómulas de Cartan,  $\mathcal{L}_v = \iota_v d + d\iota_v$  e  $\iota_{[v_1, v_2]} = \mathcal{L}_{v_1} \iota_{v_2} - \iota_{v_2} \mathcal{L}_{v_1}$ , temos que:

$$\begin{aligned} v_2\theta_i(v_1) - v_1\theta_i(v_2) &= v_2\iota_{v_1}\theta_i - v_1\iota_{v_2}\theta_i \\ &= (\mathcal{L}_{v_2}\iota_{v_1} - \mathcal{L}_{v_1}\iota_{v_2})\theta_i \\ &= (\iota_{[v_2, v_1]} + \iota_{v_1}\mathcal{L}_{v_2} - (\iota_{[v_1, v_2]} + \iota_{v_2}\mathcal{L}_{v_1}))\theta_i \\ &= (\mathcal{L}_{v_2}\iota_{v_1} - \iota_{v_1}\mathcal{L}_{v_2} + \iota_{v_1}\mathcal{L}_{v_2} + \iota_{v_2}\mathcal{L}_{v_1} - \iota_{[v_1, v_2]})\theta_i \\ &= \iota_{v_2}d\iota_{v_1}\theta_i + d\iota_{v_2}\iota_{v_1}\theta_i - \iota_{v_1}\iota_{v_2}d\theta_i - \iota_{v_1}d\iota_{v_2}\theta_i + \iota_{v_1}\iota_{v_2}d\theta_i \\ &+ \iota_{v_1}d\iota_{v_2}\theta_i - \iota_{v_2}\iota_{v_1}d\theta_i - \iota_{v_2}d\iota_{v_1}\theta_i - \iota_{[v_1, v_2]}\theta_i \end{aligned}$$

Portanto, pela definição da cisão e sabendo que  $\omega = d\theta_i$  localmente, temos que:

$$v_2\theta_i(v_1) - v_1\theta_i(v_2) = -\iota_{[v_1, v_2]}\theta_i - \iota_{v_2}\iota_{v_1}\omega$$

Concluindo assim a demonstração. □

**Observação 3.8.2.** *De acordo com o lema anterior, podemos interpretar a 2-forma  $\omega$  como uma maneira de medir a “falha” da cisão  $s : TM \rightarrow A$  em preservar o colchete:*

$$[s(v_1), s(v_2)]_A = s([v_1, v_2]) - \omega(v_1, v_2)$$

*Em outras palavras,  $\omega$  pode ser entendida como a curvatura da cisão  $s$ .*

**Observação 3.8.3.** *Uma escolha de uma trivialização diferente fornece um algebroide de Lie equipado com uma cisão que é isomorfo ao  $A$  com a cisão definida pela equação 3.7.*

### 3.9 Álgebra de Poisson

Aqui iremos considerar  $(M, \omega)$  uma variedade simplética. Vamos relembrar algumas definições de geometria simplética. Como  $\omega$  é não degenerada, podemos fazer a seguinte definição:

**Definição 3.9.1.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$ , o campo de vetores  $v_f \in \mathfrak{X}(M)$  satisfazendo a equação abaixo*

$$df = \iota_{v_f} \omega$$

é chamado de **campo de vetores hamiltoniano** de  $f$ .

Com a 2-forma  $\omega$  e a definição acima podemos obter um colchete.

**Definição 3.9.2.** *Sejam  $f, g \in C^\infty(M)$ . Definimos o **colchete de Poisson** por*

$$\{f, g\} = \iota_{v_g} \iota_{v_f} \omega$$

A álgebra de Lie  $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  é chamada de **Álgebra de Poisson**.

**Observação 3.9.1.** *Lembre-se que o conjunto de campos de vetores hamiltoniano é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie dos campos de vetores, pois temos que  $[v_f, v_g] = v_{\{f, g\}}$ .*

Estamos interessados em relacionar a álgebra de Poisson com seções do algebroide de Lie obtido na seção passada.

**Teorema 3.9.1.** *(ROGERS, 2013) Existe um morfismo de álgebras de Lie entre a álgebra de Poisson  $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  e a álgebra de Lie  $(\Gamma(A), [\cdot, \cdot]_A)$*

*Demonstração.* Considere o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} \psi : C^\infty(M) &\rightarrow \Gamma(A) \\ \psi(f) &= s(v_f) + f \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $\psi$  preserva o colchete. Sejam  $f, g \in C^\infty(M)$  e  $v_f, v_g$  seus respectivos campos hamiltonianos. Logo, utilizando a equação 3.8, temos que

$$\begin{aligned} [\psi(f), \psi(g)]_A &= [s(v_f) + f, s(v_g) + g]_A \\ &= s([v_f, v_g]) + (v_f(g) - v_g(f)) - \iota_{v_g} \iota_{v_f} \omega \\ &= s(v_{\{f, g\}}) + (\iota_{v_f} dg - \iota_{v_g} df) - \iota_{v_g} \iota_{v_f} \omega \\ &= s(v_{\{f, g\}}) + \iota_{v_g} \iota_{v_f} \omega - \iota_{v_f} \iota_{v_g} \omega - \iota_{v_g} \iota_{v_f} \omega \\ &= s(v_{\{f, g\}}) + \iota_{v_g} \iota_{v_f} \omega \\ &= s(v_{\{f, g\}}) + \{f, g\} \\ &= \psi(\{f, g\}) \end{aligned}$$

Portanto temos que  $\psi$  é um morfismo de álgebras de Lie.  $\square$

Podemos obter um isomorfismo ao restringir o conjunto  $\Gamma(A)$ . Faremos isso a seguir.

**Definição 3.9.3.** *Diremos que uma seção do algebroides de Lie  $(A, [\cdot, \cdot]_A, \rho)$ ,  $\alpha = s(v) + f \in \Gamma(A)$ , preserva uma cisão  $s : TM \rightarrow A$  se, e somente se, para todo  $\tilde{v} \in \mathfrak{X}(M)$*

$$[\alpha, s(\tilde{v})]_A = s([v, \tilde{v}])$$

O subespaço das seções que preservam a cisão será denotado por  $\Gamma(A)^s$ .

**Proposição 3.9.1.** *(ROGERS, 2013)  $\Gamma(A)^s$  é uma subálgebra de Lie de  $\Gamma(A)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(A)^s$  e  $\tilde{v} \in \mathfrak{X}(M)$ , segue pela identidade de Jacobi do colchete que :

$$\begin{aligned} [[\alpha_1, \alpha_2]_A, s(\tilde{v})]_A &= -[[\alpha_1, s(\tilde{v})]_A, \alpha_2]_A - [[\alpha_2, s(\tilde{v})]_A, \alpha_1]_A \\ &= -[s([v_1, \tilde{v}]), \alpha_2]_A - [s([v_2, \tilde{v}]), \alpha_1]_A \\ &= s([v_2, [v_1, \tilde{v}]]) + s([v_1, [v_2, \tilde{v}]]) \\ &= s(-[\tilde{v}, [v_1, v_2]]) \end{aligned}$$

$\square$

**Corolário 3.9.1.1.** *A álgebra de Poisson  $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  e a álgebra de Lie  $(\Gamma^s(A), [\cdot, \cdot]_A)$  são isomorfas.*

*Demonstração.* Considere campos de vetores  $v, w \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ , queremos ver quando ocorre a igualdade  $[s(v) + f, s(w)]_A = s([v, w])$  ou seja, quando a seção  $s(v) + f$  preserva a cisão  $s$ . Utilizando a equação 3.8 vemos que isso ocorre se, e somente se,

$$w(f) - \iota_w \iota_v \omega = 0$$

ou seja,  $df = \iota_v \omega$ . Com isso, uma seção  $s(v) + f$  preserva a cisão  $s$  se, e somente se,  $v = v_f$ . Como o campo de vetores hamiltoniano é único, o mapa  $\psi$  do teorema 3.9.1 nesse caso torna-se uma bijeção e, como preserva colchetes, é um isomorfismo de álgebras de Lie.  $\square$

### 3.10 LA-grupoides e campos de vetores multiplicativos em grupoides de Lie

Nessa seção mostraremos que o conjunto de campos de vetores multiplicativos em um grupoide de Lie é uma 2-álgebra de Lie estrita. Esse resultado será de fundamental importância no capítulo 6. Pra mais informações sobre campos de vetores multiplicativos ver (MACKENZIE; XU, 1997).

Dado um grupode de Lie  $\mathcal{G} = \{G_1 \rightrightarrows G_0\}$  sempre podemos obter o **grupoide tangente**,  $T\mathcal{G} = \{TG_1 \rightrightarrows TG_0\}$ , a  $\mathcal{G}$  aplicando o funtor tangente em todas as operações de  $\mathcal{G}$ . A projeção  $\pi_{\mathcal{G}} : T\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  é um morfismo de grupoides de Lie sobre  $\pi : TG_0 \rightarrow G_0$ .

**Definição 3.10.1.** *Um **campo de vetores multiplicativo** em um grupoide de Lie  $\mathcal{G} = \{G_1 \rightrightarrows G_0\}$  é um funtor  $\times : \mathcal{G} \rightarrow T\mathcal{G}$  tal que  $\pi_{\mathcal{G}} \circ \times = id_{\mathcal{G}}$ .*

**Observação 3.10.1.** *Como  $\times$  é um funtor, podemos considerá-lo como um par de campos de vetores  $(\times_0, \times_1) \in \mathfrak{X}(G_0) \times \mathfrak{X}(G_1)$  que são compatíveis com todas as estruturas de  $\mathcal{G}$  e  $T\mathcal{G}$ .*

Denotaremos por  $\mathbb{X}(\mathcal{G})$  a categoria de campos de vetores multiplicativos em  $\mathcal{G}$ . Um morfismo em  $\mathbb{X}(\mathcal{G})$  é uma transformação natural onde a composição horizontal com  $\pi_{\mathcal{G}}$  é a seta unidade em  $\mathcal{G}$ .

**Definição 3.10.2.** *Um **LA-grupoide** sobre  $\mathcal{G} = \{G_1 \rightrightarrows G_0\}$  é um grupoide de Lie  $\mathcal{A} = \{A_1 \rightrightarrows A_0\}$  onde  $A_i \rightarrow G_i$ , para  $i = 0, 1$ , são algebroides de Lie e os mapas de estrutura de  $\mathcal{A}$  são morfismos de algebroides de Lie sobre os correspondentes mapas de estrutura do grupoide de Lie  $\mathcal{G}$ .*

Note que o grupoide tangente  $T\mathcal{G}$  é um LA-grupoide sobre  $\mathcal{G}$ .

**Definição 3.10.3.** *O **Core** de um LA-grupoide é:*

$$C := 1^*(\ker(s : A_1 \rightarrow A_0)) \rightarrow G_0.$$

**Exemplos 3.10.1.** *Note que para o caso do LA-grupoide tangente  $T\mathcal{G}$  o core será o algebroides de Lie  $A_{\mathcal{G}}$  do grupoide de Lie  $\mathcal{G}$ .*

É provado por Mackenzie, em (MACKENZIE, 2000), que o core de um LA-grupoide herda uma estrutura de algebroides de Lie. Onde, se  $c \in \Gamma(C)$  então temos um elemento em  $\Gamma(A_1)$  definido por  $\vec{c}_g = c_{t(g)} \bullet 0_g$  onde  $\bullet$  é a multiplicação do grupoide  $\mathcal{A}$ . Então, o colchete e a âncora são definidos por:

1.  $\overrightarrow{[c_1, c_2]} := [\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2]$ ,
2.  $\rho_C : C \rightarrow TG_0$  é tal que  $\rho_C = \partial \circ \rho_{A_0}$ , onde  $\partial = t_{\mathcal{A}}|_C$ .

**Definição 3.10.4.** Uma **seção multiplicativa** de um LA-grupoïde  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{G}$  consiste de um par de seções  $(a_0, a_1) \in \Gamma(A_0) \times \Gamma(A_1)$  tal que  $a_1 : G_1 \rightarrow A_1$  é um morfismo de grupoïdes de Lie sobre  $a_0 : G_0 \rightarrow A_0$ . O espaço das seções multiplicativas é denotado por  $\Gamma_{mult}(\mathcal{A})$ .

**Exemplos 3.10.2.** Note que no caso do LA-grupoïde tangente temos que seções multiplicativas são campos de vetores multiplicativos.

**Teorema 3.10.1.** (ORTIZ; WALDRON, 2019) A sequência de álgebras de Lie

$$\Gamma(C) \xrightarrow{\delta} \Gamma_{mult}(\mathcal{A}) \xrightarrow{D} Der(\Gamma(C)),$$

onde  $\delta(c) = \overrightarrow{c} - \overleftarrow{c}$  e  $D_a : \Gamma(C) \rightarrow \Gamma(C)$  é definido por  $\overrightarrow{(D_a c)} = [a, \overrightarrow{c}]_{A_1}$ , forma um módulo cruzado de álgebras de Lie.

Para uma demonstração do caso geral veja (ORTIZ; WALDRON, 2019). Nesta dissertação precisaremos do caso do LA-grupoïde tangente feita em (BERWICK-EVANS; LERMAN, 2020). Primeiramente, para esse caso note que se  $a \in \Gamma(C) = \Gamma(A_{\mathcal{G}})$ , então temos campos de vetores invariantes a direita e a esquerda  $\overrightarrow{a}(g) = dR_g(a(t(g)))$  e  $\overleftarrow{a}(g) = d(L_g \circ i)(a(s(g)))$ , respectivamente. Além disso, pela discussão feita anteriormente à proposição 2.6.1 temos que o complexo de cadeia de 2-termos  $\Gamma(A_{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\delta} \mathbb{X}(\mathcal{G})_0$ , onde  $\delta(a) = (\rho(a), \overrightarrow{a} + \overleftarrow{a})$ , onde  $\rho$  é a âncora de  $A_{\mathcal{G}}$  (o sinal de + aqui vem do fato de colocarmos a diferencial do mapa inverso na definição de  $\overleftarrow{a}$ ), fornece uma estrutura de 2-espaço vetorial  $\Gamma(A_{\mathcal{G}}) \oplus \mathbb{X}(\mathcal{G})_0 \rightrightarrows \mathbb{X}(\mathcal{G})_0$ .

**Corolário 3.10.1.1.** (BERWICK-EVANS; LERMAN, 2020) Caso LA-grupoïde tangente: Seja  $T\mathcal{G}$  o LA-grupoïde tangente de  $\mathcal{G}$ . A sequência de álgebras de Lie

$$\Gamma(A_{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\delta} \mathbb{X}(\mathcal{G})_0 \xrightarrow{D} Der(\Gamma(A_{\mathcal{G}})),$$

com os mapas  $\delta$  e  $D$  como no teorema 3.10.1, é um módulo cruzado de álgebra de Lie.

*Demonstração.* Primeiramente seja  $(x_0, x_1) \in \mathbb{X}(\mathcal{G})_0$  vamos mostrar que o mapa  $D_{x_1} : \Gamma(A_{\mathcal{G}}) \rightarrow \Gamma(A_{\mathcal{G}})$  é bem definido, ou seja, queremos mostrar que se  $a \in \Gamma(A_{\mathcal{G}})$  então  $[x_1, \overrightarrow{a}]$  é invariante a direita. Note que podemos escrever  $\overrightarrow{a}_g = a_{t(g)} \bullet 0_g$  onde nesse caso  $\bullet$  é a multiplicação no grupoïde tangente, portanto, um campo de vetores qualquer  $x \in \mathfrak{X}(G_1)$  é invariante a direita se o campo de vetores  $(x, 0) \in G_1 \times_{G_0} G_1$



é projetável para o campo  $\mathbf{x}$  pela multiplicação do grupoide. Com isso, temos que  $[(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1), (\overrightarrow{a}, 0)]$  é projetável para  $[\mathbf{x}_1, \overrightarrow{a}]$  pela multiplicação do grupoide, consequentemente, temos que  $([\mathbf{x}_1, \overrightarrow{a}], 0)$  é projetável para  $[\mathbf{x}_1, \overrightarrow{a}]$  pela multiplicação do grupoide. Logo,  $[\mathbf{x}_1, \overrightarrow{a}]$  é invariante a direita (o mesmo argumento vale para mostrar que  $[\mathbf{x}_1, \overleftarrow{a}]$  é invariante a esquerda). Mackenzie e Xu mostraram em (MACKENZIE; XU, 1997) que o mapa  $D_{\mathbf{x}_1}$ , para esse caso, é de fato uma derivação de  $\Gamma(A_{\mathcal{G}})$  e também mostrarm que  $D$  é um morfismo de álgebras de Lie.

Vamos mostrar agora que  $\delta$  é um morfismo de álgebras de Lie, sejam  $a, b \in \Gamma(A_{\mathcal{G}})$ , temos que:

$$\begin{aligned} \delta([a, b]) &= \overrightarrow{[a, b]} - \overleftarrow{[a, b]} \\ &= [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] - [\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b}] \\ &= [\overrightarrow{a} - \overleftarrow{a}, \overrightarrow{b} - \overleftarrow{b}] \\ &= [\delta(a), \delta(b)] \end{aligned}$$

Onde a terceira igualdade segue do fato de campos de vetores invariantes a esquerda e a direita comutarem. Portanto,  $\delta$  é um morfismo de álgebras de Lie.

Agora falta mostrar que se  $\mathbf{x} \in \mathbb{X}(\mathcal{G})_0$  e  $a, a_1, a_2 \in \Gamma(A_{\mathcal{G}})$  valem as equações

$$\delta(D(\mathbf{x})a) = [\mathbf{x}, \delta(a)]$$

$$D(\delta(a_1))a_2 = [a_1, a_2]$$

A segunda segue facilmente,

$$\begin{aligned} D(\delta(a_1))a_2 &= [\delta(a_1), \overrightarrow{a}_2] \\ &= [\overrightarrow{a}_1 - \overleftarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2] \\ &= [\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2] \end{aligned}$$

Onde a última igualdade segue do fato de campos de vetores invariantes a esquerda e a direita comutarem.

Para mostrar a primeira equação note que

$$[\mathbf{x}, \delta(a)] = [\mathbf{x}, \overrightarrow{a}] - [\mathbf{x}, \overleftarrow{a}]$$

e

$$\delta(D(\mathbf{x})a) = \overrightarrow{D(\mathbf{x}a)} - \overleftarrow{D(\mathbf{x}a)}.$$

Por definição, temos  $\overrightarrow{D(\mathbf{x}a)} = [\mathbf{x}, \overrightarrow{a}]$ . Para completar a prova mostraremos que  $[\mathbf{x}, \overleftarrow{a}] = \overleftarrow{D(\mathbf{x}a)}$ , para isso note que como  $\mathbf{x}$  é um funtor, ele é relacionado consigo

mesmo pelo mapa inverso  $i$ , além disso, sabemos que campos de vetores invariantes a esquerda e a direita são  $i$ -relacionados. Com isso,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{(D(\mathbf{x})a)}(g) &= d(L_g \circ i)(D(\mathbf{x})a)(1_{s(g)}) \\ &= d(L_g)di([\mathbf{x}, \vec{a}])(1_{s(g)}) \\ &= dL_g[\mathbf{x}, \overleftarrow{a}](i(1_{s(g)})) \end{aligned}$$

Mas  $[\mathbf{x}, \overleftarrow{a}]$  é invariante a esquerda, portanto,  $\overleftarrow{(D(\mathbf{x})a)}(g) = [\mathbf{x}, \overleftarrow{a}]$  como queríamos.  $\square$



## 4 $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes

### 4.1 Fibrados de linha hermitianos e holonomia

$\mathbb{S}^1$ -Bundle gerbes são versões de ordem superior de fibrados de linhas hermitiano. Portanto, começaremos esse capítulo lembrando de alguns conceitos sobre fibrados de linhas hermitiano, para maiores detalhes ver (MURRAY, 2002), (SIMMS; WOODHOUSE, 1976) e (BRYLINSKI, 2007). Seja  $M$  uma variedade suave e  $\mathcal{U} = \{U_i/i \in J\}$  uma cobertura aberta para  $M$  e denotamos interseções não vazias por  $U_{i_1 \dots i_p} = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}$ .

**Definição 4.1.1.** *Um fibrados de linhas hermitiano  $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um fibrado de linhas sobre  $M$  (fibrado vetorial complexo de posto 1) equipado com uma métrica hermitiana, ou seja, um mapa suave  $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{L_m \times L_m} : L_m \times L_m \rightarrow \mathbb{C}$  é um produto escalar hermitiano para todo  $m \in M$ .*

**Exemplos 4.1.1.** *No caso do fibrado de linha trivial  $M \times \mathbb{C}$  temos a métrica hermitiana constante  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  obtida por*

$$\langle (m, z), (m, w) \rangle_0 = \bar{z}w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}, m \in M.$$

Fibrados de linhas hermitianos são “equivalentes” a  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais. De fato, seja  $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um fibrado de linhas hermitiano podemos obter um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $L^1 \rightarrow M$  onde

$$L^1 := \{p \in L : \langle p, p \rangle = 1\}.$$

Por outro lado, dado um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  e  $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow GL(1, \mathbb{C})$  é a representação natural  $\rho(z) = z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, w \mapsto zw$ , então o fibrado vetorial associado  $L = P \times_{\rho} \mathbb{C}$  é um fibrado de linhas complexo, onde  $\mathbb{S}^1$  age nas fibras de  $P \times \mathbb{C}$  por multiplicação por escalar. A métrica hermitiana em  $L$  é dada por:

$$\langle [x, z], [y, w] \rangle := \bar{z}w$$

onde  $x, y \in P$  e  $z, w \in \mathbb{C}$ .

**Proposição 4.1.1.** (BRYLINSKI, 2007) *O grupo de classes de isomorfismo de fibrados de linhas hermitianos sobre  $M$  é isomorfo ao primeiro grupo de cohomologia de Čech  $\check{H}(M, \underline{\mathbb{S}^1}) \simeq H^2(M, \mathbb{Z})$ .*

E também iremos considerar conexões compatíveis com a métrica, ou seja, na linguagem de fibrados vetoriais, para  $U$  aberto de  $M$  temos que

$$\mathcal{L}_X \langle s, t \rangle = \langle \nabla_X s, t \rangle + \langle s, \nabla_X t \rangle$$

Pra todo  $X \in \mathfrak{X}(U)$  e  $s, t \in \Gamma(U, L)$ .

**Proposição 4.1.2.** (SIMMS; WOODHOUSE, 1976) *Uma conexão  $\nabla$  em  $L$  é compatível com uma métrica hermitiana se, e somente se, os potenciais de gauge locais  $A_j$  com respeito as trivializações locais  $\sigma_j : L_{U_j} \rightarrow U_j \times \mathbb{C}$ , podem ser escolhidos como sendo 1-formas reais  $A_j \in \Omega(M, \mathbb{R})$ .*

Vamos lembrar como conexões e curvaturas de  $G$ -fibrados principais, denotado por  $P \rightarrow M$ , se comportam localmente.

**Proposição 4.1.3.** *Sejam  $s_i : U_i \rightarrow P$  e  $s_j : U_j \rightarrow P$  seções locais de  $P$  cujas funções de transição são  $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$  e  $A$  a 1-forma de conexão de  $P$ . Então, para conexões locais,  $A_i = s_i^* A$  e  $A_j = s_j^* A$ , temos que:*

$$A_j = Ad_{g_{ij}^{-1}} \circ A_i + \mu_{ij}$$

onde  $\mu_{ij} = g_{ij}^* \mu$  e  $\mu \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$  é a forma de Maurer-Cartan,  $\mu_g = d(L_{g^{-1}})_g$ .

Antes da demonstração precisamos de alguns lemas.

**Lema 4.1.1.** *Seja  $X_e \in \mathfrak{g}$  e  $X$  a extensão invariante à esquerda de  $X_e$ . Então,*

$$\bar{X}_{\phi_p(g)} = d(\phi_p)_g(X_g)$$

onde  $\bar{X}$  é o campo fundamental de  $X$  e  $\phi_p$  é a aplicação órbita,  $\phi_p(g) = p.g$ .

*Demonstração.* Segue diretamente da invariância a esquerda.

$$\begin{aligned} d(\phi_p)_g(X_g) &= d(\phi_p)_g d(L_g)_e X_e \\ &= d(\phi_p)_g d(L_g)_e \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX_e) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_p \circ L_g \circ \exp(tX_e)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p.(g \exp(tX_e))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((p.g).\exp(tX_e)) \\ &= \bar{X}_{p.g} \\ &= \bar{X}_{\phi_p(g)}. \end{aligned}$$

□

**Lema 4.1.2.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(G)$  um campo invariante à esquerda. Então,*

$$\mu_g(X_g) = X_e$$

para todo  $g \in G$ .

*Demonstração.* Temos que  $X_e = [d(L_g)_e]^{-1}X_g$ . Como  $L_{g^{-1}} \circ L_g = id_G$ , temos que  $d(L_{g^{-1}})_{L_g(e)} \circ d(L_g)_e = id_{T_e G} = id_g$ . Ou seja,

$$[d(L_g)_e]^{-1} = d(L_{g^{-1}})_{L_g(e)} = d(L_{g^{-1}})_g = \mu_g.$$

□

**Lema 4.1.3.** *Seja  $\phi : P \times G \rightarrow P$  a ação do  $G$ -fibrado principal e  $\phi_p$  a aplicação órbita. Então,*

$$d\phi_{(p,g)}(X_p, Y_g) = d(R_g)_p(X_p) + \overline{\mu_g(Y_g)}_{p,g}$$

onde  $(X_p, Y_g) \in T_{p,g}(P \times G)$ .

*Demonstração.* Considere  $\alpha : I \rightarrow P$  e  $\beta : I \rightarrow G$  curvas suaves onde  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = X_p$ ,  $\beta(0) = g$ ,  $\beta'(0) = Y_g$ . Então,

$$\begin{aligned} d\phi_{(p,g)}(X_p, Y_g) &= d\phi_{p,g}(X_p, 0) + d\phi_{(p,g)}(0, Y_g) \\ &= d\phi_{p,g}(\alpha'(0), 0) + d\phi_{(p,g)}(0, \beta'(0)) \\ &= d(R_g)_p(\alpha'(0)) + d(\phi_p)_g(\beta'(0)) \\ &= d(R_g)_p(X_p) + d(\phi_p)_g(Y_g). \end{aligned}$$

Seja  $Y$  a extensão invariante à esquerda de  $Y_g$ . Então, do lema 4.1.2 temos  $Y_e = \mu_g(Y_g)$  e pelo lema 4.1.1,  $d(\phi_p)_g(Y_g) = \overline{Y}_{p,g}$ . Logo, temos o resultado. □

*Demonstração da proposição 4.1.3.* Note que para todo  $X \in \mathfrak{X}(U_{ij})$  temos que  $\mu_{ij}(X) = \mu_{g_{ij}}(dg_{ij}(X))$  e  $A_j(X) = A(d(s_j)(X))$ . Além disso,  $s_j = s_i \cdot g_{ij} = \phi \circ (s_i, g_{ij})$ . Logo, pelo lema 4.1.3, temos que

$$\begin{aligned} d(s_j)X &= d(\phi \circ (s_i, g_{ij}))X \\ &= d\phi_{s_i, g_{ij}}(d(s_i)X, d(g_{ij})X) \\ &= d(R_{g_{ij}})(d(s_i)X) + \overline{\mu_{g_{ij}}(d(g_{ij})X)}_{s_i, g_{ij}} \\ &= d(R_{g_{ij}})(d(s_i)X) + \overline{\mu_{ij}(X)}_{s_j}. \end{aligned}$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned} A_j(X) &= A[d(R_{g_{ij}})(d(s_i)X)] + A[\overline{\mu_{ij}(X)}_{s_j}] \\ &= [(R_{g_{ij}})^* A](d(s_i)X) + \mu_{ij}(X) \\ &= Ad_{g_{ij}^{-1}}A(d(s_i)(X)) + \mu_{ij}(X) \\ &= Ad_{g_{ij}^{-1}}A_i(X) + \mu_{ij}(X). \end{aligned}$$

□

Note que caso  $G$  seja um grupo matricial abeliano (caso de nosso interesse pois  $U(1) \simeq \mathbb{S}^1$ ) temos que  $\mu_g(X_g) = g^{-1}X_g$  para qualquer  $X \in \mathfrak{X}(G)$ . Logo, teremos  $\mu_{ij}(X) = \mu_{g_{ij}}(dg_{ij}(X)) = g_{ij}^{-1}dg_{ij}(X)$ . Portanto, para o caso de  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais teremos

$$A_j = A_i + g_{ij}^{-1}dg_{ij} \quad (4.1)$$

Note que no caso de  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais a álgebra de Lie é  $i\mathbb{R}$ , podemos considerar, portanto, 1-formas reais  $A'_i \in \Omega^1(U_i)$  e  $A'_j \in \Omega^1(U_j)$  tais que

$$\begin{aligned} A_i &= iA'_i \\ A_j &= iA'_j \end{aligned}$$

Assim, a equação 4.1 torna-se

$$A'_j - A'_i = -ig_{ij}^{-1}dg_{ij}.$$

Também queremos entender como a curvatura se comporta localmente.

**Proposição 4.1.4.** *Sejam  $s_i : U_i \rightarrow P$  e  $s_j : U_j \rightarrow P$  seções locais de um  $G$ -fibrado principal sobre  $M$  e  $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$  funções de transição. Considere  $F_i = s_i^*F_A$  e  $F_j = s_j^*F_A$  as curvaturas locais, onde  $F_A$  é a 2-forma de curvatura da 1-forma de conexão  $A$ . Temos que*

$$F_j = Ad_{g_{ij}^{-1}} \circ F_i$$

*Demonstração.* Basta mostrarmos para campos horizontais  $X, Y \in \mathfrak{X}(U_{ij})$ . Pela demonstração da proposição 4.1.3 temos que

$$\begin{aligned} d(s_j)X &= d(R_{g_{ij}})(d(s_i)X) + \overline{\mu_{ij}(X)}_{s_j} \\ d(s_j)Y &= d(R_{g_{ij}})(d(s_i)Y) + \overline{\mu_{ij}(Y)}_{s_j} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} F_j(X, Y) &= F_j[d(R_{g_{ij}})(d(s_i)X), d(R_{g_{ij}})(d(s_i)Y))] \\ &= [(R_{g_{ij}})^*F_j](d(s_i)X, d(s_i)Y) \\ &= Ad_{g_{ij}^{-1}} \circ F_i(X, Y). \end{aligned}$$

□

Portanto, no caso de  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais como  $\mathbb{S}^1$  é abeliano temos que  $F_j = F_i$  e, portanto, temos uma 2-forma  $F \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$  tal que  $F|_{U_i} = F_i$  para todo aberto da cobertura. Além disso,  $F$  é fechada pois  $dF|_{U_i} = s_i^*(dF_i) = s_i^*ddA_i = 0$ . Note que,

assim como no caso das conexões, podemos considerar 2-formas reais simplesmente multiplicando as equações por  $i$ .

Note que as funções de transição  $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{S}^1$  e as conexões locais  $A_i$  definem uma classe de Deligne  $[g_{ij}, A_i] \in H^1(M, \mathcal{D}^1)$  para uma boa cobertura  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ . De fato, temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.1.4.** (BRYLINSKI, 2007)

1. A classe de cohomologia  $[g_{ij}, A_i]$  é independente da escolha da boa cobertura  $\mathcal{U}$  e das seções locais  $s_i$ .
2. O grupo das classes de isomorfismos de  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais com conexões é isomorfo ao primeiro grupo de cohomologia de Deligne  $H^1(M, \mathcal{D}^1)$ .

Note também que a curvatura  $F \in \Omega^2(M)$  da 1-forma de conexão  $A$  é a curvatura da classe de Deligne.

### 4.1.1 Holonomia

Fibrados de linhas hermitianos sobre  $M$  com conexões métricas formam uma categoria, denotada  $Bun^A(M)$ . Note que podemos formar uma subcategoria “full”, denotada  $Buntriv^A(M)$ , onde os objetos são fibrados de linhas triviais com conexões métricas. Note que temos mais de um objeto pois, como vimos, qualquer 1-forma  $\omega \in \Omega^1(M)$  pode ser vista como uma conexão métrica para o fibrado trivial, vamos denotar esses objetos por  $\mathbf{1}_\omega$ . Os morfismos (isomorfismos)  $\eta : \mathbf{1}_\omega \rightarrow \mathbf{1}_{\omega'}$  que preservam a conexão são funções suaves  $g : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  satisfazendo a equação 4.1, ou seja

$$\omega' - \omega = -i \, d \log g$$

**Definição 4.1.2.** A *holonomia* de um fibrado de linhas trivial sobre  $\mathbb{S}^1, \mathbf{1}_\omega$ , é definida por

$$\text{Hol}_{\mathbf{1}_\omega} := \exp\left(2\pi i \int_{\mathbb{S}^1} \omega\right) \in \mathbb{S}^1.$$

**Observação 4.1.1.** A fórmula acima está bem definida, pois se  $\mathbf{1}_\omega$  e  $\mathbf{1}_{\omega'}$  são fibrados de linhas triviais sobre  $\mathbb{S}^1$ , e existe um isomorfismo  $\eta \in \text{Hom}(\mathbf{1}_\omega, \mathbf{1}_{\omega'})$ , temos que  $\text{Hol}_{\mathbf{1}_\omega} = \text{Hol}_{\mathbf{1}_{\omega'}}$ , pois

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega' - \int_{\mathbb{S}^1} \omega = -i \, d \log g \in \mathbb{Z}.$$



De forma geral, podemos definir a holonomia de um fibrado de linhas  $L$  sobre  $M$  com conexão métrica, sobre uma curva suave fechada  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ , como segue. Considere o fibrado de linhas pull-back  $\gamma^*L$  sobre  $\mathbb{S}^1$ , por questão de dimensão, temos que a primeira classe de Chern  $H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z}) = 0$ , portanto, podemos escolher um isomorfismo  $\tau : \gamma^*L \rightarrow \mathbf{1}_\omega$  para alguma 1-forma  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ .

**Definição 4.1.3.** A *holonomia* em  $L$  sobre  $M$  em torno de  $\gamma$  é

$$\text{Hol}_L(\gamma) := \text{Hol}_{\mathbf{1}_\omega}.$$

**Observação 4.1.2.** Essa construção está bem definida, pois qualquer outro isomorfismo  $\tau' : \gamma^*L \rightarrow \mathbf{1}_{\omega'}$  fornece um isomorfismo  $\eta \in \text{Hom}(\mathbf{1}_\omega, \mathbf{1}_{\omega'})$ . Mas como vimos anteriormente, as holonomias de fibrados de linhas triviais com conexão métrica isomorfos coincidem.

Veremos agora duas aplicações de fibrados de linhas hermitianos e suas holonomias em física.

1. O funcional de ação  $S$  para uma partícula pontual carregada. Para  $(M, g)$  uma variedade riemanniana e  $\gamma : \mathbb{R} \supset [t_1, t_2] \rightarrow (M, g)$  a trajetória de uma partícula pontual de massa  $m$  e carga  $e$ , o potencial de ação  $S[\gamma]$  é a soma de um termo cinético

$$S_{cin}[\gamma] = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} g\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)$$

e um termo eletromagnético

$$-e \int_{t_1}^{t_2} \gamma^* A,$$

onde  $A$  é o potencial de gauge eletromagnético (1-forma de conexão). Porém, essa formulação só funciona para o caso de fibrados triviais, ou seja, com curvatura  $F_A$  (campo eletromagnético) exata. Mas quando o fibrado não é trivial um potencial de gauge  $A$  com  $F = dA$  existe apenas localmente. Ou seja, a linguagem de fibrados de linhas com conexão abrange todos os casos. Para uma trajetória fechada, ou seja  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , podemos definir a ação como

$$e^{iS[\gamma]} = e^{iS_{cin}[\gamma]} \text{Hol}_L(\gamma).$$

2. Efeito Aharonov-Bohm. Um fibrado de linhas sobre uma variedade que não é simplesmente conexa pode ter uma curvatura zero e ainda ter holonomia não trivial.

## 4.2 Bundle gerbes

Nesta seção generalizamos as noções de fibrados de linhas complexos e holonomia para as noções de bundle gerbes e holonomia de superfícies. Lembre-se que estamos usando  $\partial_i$  para denotar os mapa de face e  $\partial$  para a correspondente diferencial simplicial. Com isso, se  $X \rightarrow M$  é uma submersão e  $\pi_P : P \rightarrow X^{[p-1]}$  é um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal nós definimos um novo  $\mathbb{S}^1$ -fibrado  $\partial(P) \rightarrow X^{[p]}$  por

$$\partial(P) = \partial_1^*(P) \otimes (\partial_2^*(P))^* \otimes \partial_3^*(P) \otimes \dots$$

Denotaremos o mapa que cobre  $\partial_i$  por  $\tilde{\partial}_i$ . Ou seja,  $\tilde{\partial}_i$  é definido pela comutatividade do diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \partial_i^*(P) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_i} & P \\ \pi'_P \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ X^{[p]} & \xrightarrow{\partial_i} & X^{[p-1]} \end{array}$$

onde claramente  $\pi'_P$  é a projeção do fibrado pullbak.

Note que  $\partial(\partial(P))$  é canonicamente trivial (pois sua classe de Chern será zero).

**Definição 4.2.1.** (MURRAY, 1996) *Um par de variedades  $(P, X)$  é um  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe sobre uma variedade  $M$  se  $X \rightarrow M$  é uma submersão sobrejetora e  $\pi_P : P \rightarrow X^{[2]}$  é um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Seja  $(x_1, x_2, x_3) \in X^{[3]}$ , existe um isomorfismo suave*

$$\mu : P_{(x_1, x_2)} \otimes P_{(x_2, x_3)} \rightarrow P_{(x_1, x_3)}$$

*de  $\mathbb{S}^1$ -espaços chamado de multiplicação do bundle gerbe.*

2. *A multiplicação é associativa, ou seja, se  $P_{(x_1, x_2)}$  denota a fibra de  $P$  sobre  $(x_1, x_2)$  então o seguinte diagrama comuta para todo  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X^{[4]}$*

$$\begin{array}{ccc} P_{(x_1, x_2)} \otimes P_{(x_2, x_3)} \otimes P_{(x_3, x_4)} & \rightarrow & P_{(x_1, x_3)} \otimes P_{(x_3, x_4)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{(x_1, x_2)} \otimes P_{(x_2, x_4)} & \rightarrow & P_{(x_1, x_4)} \end{array}$$

**Observação 4.2.1.** *Note que tanto a multiplicação do bundle gerbe como a propriedade associativa podem ser escritas em termos dos mapas de face. De fato, podemos escrever  $\mu : \partial_3^*(P) \otimes \partial_1^*(P) \rightarrow \partial_2^*(P)$  tal que vale a associatividade  $\partial_2^*\mu \circ (\partial_4^*\mu \otimes id) = \partial_3^*\mu \circ (id \otimes \partial_1^*\mu)$ .*

**Observação 4.2.2.** Usando a multiplicação do bundle gerbe, podemos ver que existem isomorfismos naturais  $P_{(x_1, x_2)} \simeq P_{(x_2, x_1)}^*$  e  $P_{(x, x)} \simeq X^{[2]} \times \mathbb{S}^1$ . De fato, temos que usando o produto hermitiano em  $P$  obtemos um mapa bilinear  $P_{(x_1, x_2)} \times P_{(x_2, x_1)} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(p, q) \mapsto \langle p, q \rangle$  onde  $p \in P_{(x_1, x_2)}$  e  $q \in P_{(x_2, x_1)}$ , e não degenerado, pois  $P_{(x_1, x_2)} \times P_{(x_2, x_1)} \simeq P_{(x_1, x_1)} \simeq X^{[2]} \times \mathbb{S}^1$ , com isso obtemos o isomorfismo  $P_{(x_1, x_2)} \simeq P_{(x_2, x_1)}^*$ ,  $p \mapsto \langle p, \cdot \rangle$ .

Note que a multiplicação do bundle gerbe em  $P$  força o fibrado  $\partial(P) \rightarrow X^{[3]}$  ser trivial. Portanto, equivalentemente, podemos definir a multiplicação para o bundle gerbe como uma seção global  $s \in \Gamma(\partial(P))$  tal que  $\partial(s) = 1$  é igual a seção canônica não vazia do fibrado  $\partial(\partial(P))$ .

Assim como no caso de fibrados de linhas, podemos fazer construções com bundle gerbes como pullback, dual, produto tensorial.

#### 4.2.1 Bundle gerbes como $\mathbb{S}^1$ -extensões centrais

Um importante resultado, que será utilizado no capítulo 6, é que bundle gerbes podem ser vistos como  $\mathbb{S}^1$ -extensões centrais do grupoide de submersão. Lembre que:

**Definição 4.2.2.** Seja  $G \rightrightarrows M$  um grupoide de Lie. Um  $\mathbb{S}^1$ -**extensão central** de  $G \rightrightarrows M$  consiste de:

1. um grupoide de Lie  $R \rightrightarrows M$ , junto com um morfismo de grupoides de Lie  $(\pi, id) : [R \rightrightarrows M] \rightarrow [G \rightrightarrows M]$ ;
2. uma  $\mathbb{S}^1$ -ação a esquerda em  $R$ , tornando  $\pi : R \rightarrow G$  um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal (a esquerda).

Essas duas estruturas são compatíveis no sentido que  $(s \cdot x)(t \cdot y) = st \cdot (xy)$ , para todo  $s, t \in \mathbb{S}^1$  e  $(x, y) \in R \times_M R$ .

**Proposição 4.2.1.** Dada uma submersão sobrejetora  $X \rightarrow M$ ,  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes  $(P, X)$  sobre  $M$  estão em bijeção com  $\mathbb{S}^1$ -extensões centrais do grupoide de submersão.

*Demonstração.* Dado um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  com multiplicação  $\mu$ , podemos construir um grupoide de Lie  $P \rightrightarrows X$ . De fato, os mapas source e target serão dados por  $s = \pi_0 := pr_1 \circ \pi_P$  e  $t := \pi_1 = pr_2 \circ \pi_P$ . A multiplicação do grupoide  $m : P \times_X P \rightarrow P$  é induzida pela multiplicação do bundle gerbe,

$$\mu(p \times q) = m(p, q)$$

ou seja, se  $x_i, x_j \in X$  então  $p \in P$  é uma seta de  $x_i$  para  $x_j$  se  $p \in P_{(x_i, x_j)}$ , logo setas componíveis são do tipo  $p \in P_{(x_i, x_j)}$  e  $q \in P_{(x_j, x_k)}$ .

A unidade  $1 : X \rightarrow P$  e inverte  $i : P \rightarrow P$  também são induzidas pela multiplicação do bundle gerbe  $\mu$ ,

$$\mu^{-1}(p) = 1_x \otimes p, \quad e \quad \mu^{-1}(1_x) = p \otimes i(p)$$

para todo  $p \in P$  na fibra de  $(x, y) \in X^{[2]}$ , note que esses mapas estão bem definidos pois  $1_x, i(x) \in P_{(x, x)}$ . Nesse ponto de vista, vemos que  $P \rightrightarrows X$  é uma  $\mathbb{S}^1$ -extensão central do grupoide de submersão  $X^{[2]} \rightarrow X$ . Ou seja, a projeção do fibrado  $P \rightarrow X^{[2]}$  é um morfismo de grupoides de Lie

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X^{[2]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

e a  $\mathbb{S}^1$ -ação em  $P$  é compatível com a multiplicação do grupoide:

$$(zp) \cdot (wq) = (zw)(p \cdot q)$$

para todos  $p, q \in P$  componíveis e  $z, w \in \mathbb{S}^1$ .

Note que vale a volta pois dada uma  $\mathbb{S}^1$ -extensão central do grupoide de submersão,  $P \rightrightarrows X$  temos naturalmente uma estrutura de  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal em  $P \rightarrow X^{[2]}$  e podemos induzir uma multiplicação para um bundle gerbe  $(P, X)$  pela multiplicação  $m : P \times_X P \rightarrow P$  do grupoide.  $\square$

Essa proposição nos permite verificar facilmente as seguintes construções com bundle gerbes.

1. **Pullback.** Se  $f : N \rightarrow M$  é um mapa suave podemos fazer o pullback da submersão sobrejetora  $X \rightarrow M$  para  $f^*(X) \rightarrow N$  com um mapa  $\hat{f} : f^*(X) \rightarrow X$  cobrindo  $f$ . Existe um mapa induzido  $\hat{f}^{[2]} : f^*(X)^{[2]} \rightarrow X^{[2]}$ . Seja:

$$f^*(P, X) = (\hat{f}^{[2]*}(P), f^*(X)).$$

Vamos mostrar que essa construção fornece um bundle gerbe sobre  $N$ . De fato, note que nesse caso o grupoide de submersão é  $f^*(X)^{[2]} \rightrightarrows f^*(X)$ . O que está sendo feito são dois pullbacks

$$\begin{array}{ccc} \hat{f}^{[2]*}(P) & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ f^*(X)^{[2]} & \xrightarrow{\hat{f}^{[2]}} & X^{[2]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*(X) & \xrightarrow{\hat{f}} & X \end{array}$$

Ou seja,  $\hat{f}^{[2]*}(P) \rightarrow f^*(X)^{[2]}$  é um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal pois é um pullback de fibrado principal. Além disso, temos o diagrama de morfismos de grupoides

$$\begin{array}{ccc} \hat{f}^{[2]*}(P) & \longrightarrow & f^*(X)^{[2]} \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ f^*(X) & \xlongequal{\quad} & f^*(X) \end{array}$$

Portanto, temos que o grupoide  $\hat{f}^{[2]*}(P) \rightrightarrows f^*(X)$  é uma  $\mathbb{S}^1$ -extensão central do grupoide de submersão  $f^*(X)^{[2]} \rightrightarrows f^*(X)$ , portanto  $f^*(P, Y)$  é um bundle gerbe sobre  $N$ .

2. **Dual.** Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$ . Podemos formar o bundle gerbe dual  $(P^*, X)$  pegando  $P^* \rightarrow X^{[2]}$  o dual do  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $P$ . Como o dual comuta com o pullback e com o produto tensorial a multiplicação do bundle gerbe dual é induzida pela multiplicação de  $P$  de uma maneira canônica.
3. **Produto tensorial.** Sejam  $(P, Y)$  e  $(Q, X)$  dois bundle gerbes. Podemos formar um novo bundle gerbe  $(P \otimes Q, Y \times_M X)$  sobre  $M$  chamado produto tensorial de  $P$  e  $Q$ . Aqui a submersão sobrejetora é o produto fibrado  $Y \times_M X \rightarrow M$  e  $P \otimes Q$  é o  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal em  $(Y \times_M X)^{[2]}$  cuja fibra em  $((y_1, x_1), (y_2, x_2))$  é dada por  $P_{(y_1, y_2)} \otimes Q_{(x_1, x_2)}$ . A multiplicação é induzida de maneira óbvia pelas multiplicações de  $P$  e  $Q$ . No caso em que  $Y = X$  utilizamos a submersão sobrejetora original  $X \rightarrow M$  e definimos  $P \otimes Q$  como sendo o  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal com fibras  $P_{(x_1, x_2)} \otimes Q_{(x_1, x_2)}$  em  $(x_1, x_2) \in X^{[2]}$ , a multiplicação também é induzida pelas multiplicações de  $P$  e  $Q$ . Nesse caso chamamos o produto tensorial de **produto tensorial reduzido**.

### 4.3 Classes de Dixmier-Douady

Dado um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  podemos associar uma classe de cohomologia em  $H^3(M, \mathbb{Z})$ . Essa classe é chamada de **classe de Dixmier-Douady**. Vamos construir essa classe, via cohomologia de Čech, em etapas.

1. Escolha  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  uma boa cobertura de  $M$ , como  $X \rightarrow M$  é uma submersão sobrejetora obtemos seções  $s_i : U_i \rightarrow X$ . Claramente, nas interseções temos as seções  $(s_i, s_j) : U_{ij} \rightarrow X^{[2]}$ .
2. Com isso, podemos obter o  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal pullback  $(s_i, s_j)^*P$  sobre  $U_{ij}$  e denotaremos por  $P_{ij}$ .

3. Mas agora o fibrado  $P_{ij}$  é trivial pois  $U_{i,j}$  é contrátil e, com isso, temos seções globais  $\sigma_{ij} : U_{i,j} \rightarrow P_{ij}$ .
4. Com isso, usando o fato de a multiplicação do bundle gerbe ser um isomorfismo nas fibras de  $P$ , podemos definir uma função  $g_{ijk} : U_{ijk} \rightarrow \mathbb{S}^1$  por

$$\mu(\sigma_{ij}(x) \otimes \sigma_{jk}(x)) = g_{ijk}(x)\sigma_{ik}(x).$$

5. Por fim, como a multiplicação do bundle gerbe é associativa, temos que as funções  $g_{ijk}$  satisfazem a condição de cociclo e, portanto,  $g_{ijk}$  define uma classe no segundo grupo de cohomologia de Čech  $[g_{ijk}] \in H^2(M, \mathbb{S}^1) \simeq H^3(M, \mathbb{Z})$ .

A classe obtida é chamada de classe de Dixmier-Douady e denotada por  $DD(P, X)$ .

**Observação 4.3.1.** (MURRAY, 1996) *A classe de Dixmier-Douady não depende da escolha da boa cobertura e de seções locais.*

**Proposição 4.3.1.** (MURRAY, 2007) *Sejam  $(P, X)$  e  $(Q, Y)$  bundle gerbes sobre  $M$  e  $f : N \rightarrow M$  um mapa suave. temos que:*

1.  $f^*(DD(P, X)) = DD(f^*(P, X))$ ,
2.  $DD((P, X)^*) = -DD((P, X))$ ,
3.  $DD((P, X) \otimes (Q, Y)) = DD((P, X)) + DD((Q, Y))$ .

## 4.4 Trivializações

**Definição 4.4.1.** (MURRAY, 1996) *Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  e  $(Q, Y)$  um bundle gerbe sobre  $N$ . Um **morfismo** entre  $(P, X)$  e  $(Q, Y)$  consiste de uma tripla de mapas suaves  $(\hat{f}, f, f')$  onde  $f' : M \rightarrow N$ ,  $f : X \rightarrow Y$  cobrindo  $f'$  e  $\hat{f} : P \rightarrow Q$  cobrindo o mapa induzido  $f^{[2]} : X^{[2]} \rightarrow Y^{[2]}$ . O mapa  $\hat{f}$  deve comutar com a multiplicação do bundle gerbe em  $P$  e em  $Q$ .*

Para definirmos a noção de trivialização para bundle gerbes precisaremos da noção de isomorfismos.

**Definição 4.4.2.** *Um **isomorfismo** entre bundle gerbes  $(P, X)$  e  $(Q, Y)$  sobre  $M$  é um difeomorfismo  $X \rightarrow Y$  comutando com as submersões sobrejetoras. Isso nos fornece um difeomorfismo  $X^{[2]} \rightarrow Y^{[2]}$  que é coberto por um isomorfismo de  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais  $P \rightarrow Q$  preservando a multiplicação do bundle gerbe.*

**Observação 4.4.1.** *Seja  $R \rightarrow X$  um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal, temos que  $\partial(R) \rightarrow X^{[2]}$  possui uma multiplicação de bundle gerbe associativa dada por*

$$\partial(R)_{(x_1, x_2)} \otimes \partial(R)_{(x_2, x_3)} = R_{x_1} \otimes R_{x_2}^* \otimes R_{x_2} \otimes R_{x_3}^* = R_{x_1} \otimes R_{x_3}^* = \partial(R)_{(x_1, x_3)}.$$

**Definição 4.4.3.** *Diremos que  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  é **trivial** quando existe um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $R \rightarrow X$  tal que  $(P, X)$  é isomorfo a  $(\partial(R), X)$ . Nesse caso, chamamos uma escolha de  $R \rightarrow X$  e o isomorfismo  $\partial(R) \rightarrow P$  uma **trivialização** de  $(P, X)$ .*

**Proposição 4.4.1.** *(MURRAY, 2007). Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$ . Então,  $(P, X)$  é trivial se, e somente se,  $DD(P, X) = 0$*

*Demonstração.* Primeiramente, vamos encontrar a classe de Dixmier-Douady de  $(\partial(R), X)$ . Seja  $s_i : U_i \rightarrow X$  seções locais para uma boa cobertura de  $M$ , considere o fibrado pullback  $s_i^*R \rightarrow U_i$  e pegue seções locais  $\tau_i$ . Então, pela definição de  $\partial(R)$ , podemos pegar seções locais de  $(s_i, s_j)^*(\partial(R))$  as seções  $\sigma_{ij} = \tau_i \otimes \tau_j^*$  e, portanto, pela multiplicação de  $\partial(R)$  temos que

$$\mu(\sigma_{ij}, \sigma_{jk}) = \tau_i \otimes (\tau_j)^* \otimes \tau_j \otimes (\tau_k)^* = \tau_i \otimes (\tau_k)^* = \sigma_{ik}$$

portanto, a correspondente função  $g_{ijk} = 1$  e  $\partial(R)$  possui classe de Dixmier-Douady zero. Agora vamos mostrar que a classe de Dixmier-Douady de  $(P, X)$  também é zero. Como  $(P, X)$  é trivial, temos um isomorfismo  $f : P \rightarrow \partial(R)$  tal que  $\pi_{\partial R} \circ f = \pi_P$  (aqui  $\pi_{\partial(R)}$  denota a projeção do fibrado  $\partial(R) \rightarrow X^{[2]}$ ) consequentemente temos que  $\pi_{\partial(R)} = \pi_P \circ f^{-1}$ . Como  $\sigma_{ij}$  são seções locais temos que  $\pi_{\partial(R)} \circ \sigma_{ij} = id_{X^{[2]}}$  consequentemente vale que  $\pi_P \circ f^{-1} \circ \sigma_{ij} = id_{X^{[2]}}$  e, portanto,  $f^{-1} \circ \sigma_{ij}$  é seção de  $(s_i, s_j)^*(P)$ . Com isso,  $DD(P, X) = DD(\partial(R), X)$ .

Para a recíproca, considere o bundle gerbe  $(P, X)$  com classe de Dixmier-Douady zero. Portanto, considerando  $s_i : U_i \rightarrow X$  seções locais da submersão nós temos seções  $\sigma_{ij}$  de  $(s_i, s_j)^*(P)$  tal que

$$g_{ijk} = h_{jk} h_{ik}^{-1} h_{ij}$$

onde  $h_{ij} = U_{ij} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Trocando a seção  $\sigma_{ij}$  por  $\sigma_{ij}/h_{ij}$  podemos assumir, sem perda de generalidade,  $g_{ijk} = 1$ . Vamos construir primeiramente um fibrado localmente, seja  $X_i = \pi^{-1}(U_i)$  e defina  $R_i \rightarrow X_i$  pegando  $(R_i)_x := P_{(x, s_i(\pi(x)))}$  para  $x \in X_i$ . Pela multiplicação de  $P$  temos que

$$P_{(x, s_i(\pi(x)))} = P_{(x, s_j(\pi(x)))} \otimes P_{(s_i(\pi(x)), s_j(\pi(x)))}$$

já que  $\sigma_{ij}(\pi(x)) \in P_{(s_i(\pi(x)), s_j(\pi(x)))}$ . Assim podemos construir um isomorfismo local  $f_{ij}(x)$  entre as fibras de  $R_i$  e  $R_j$  em  $x$ , mas como  $\sigma_{jk} \sigma_{ik} \sigma_{ij} = 1$  temos que  $f_{ij}(x) \circ f_{jk}(x) =$

$f_{ik}(x)$  e, portanto,  $f_{ij}$  satisfaz a condição de cociclo e podemos colar os  $R_i$  e obter um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado global  $R \rightarrow X$  e, por construção,  $\partial(R) = P$ .  $\square$

**Proposição 4.4.2.** (MURRAY, 2007). *Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$ . Se  $DD(P, X) = 0$  duas trivializações quaisquer diferem por um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal.*

Antes da demonstração, precisamos do lema abaixo.

**Lema 4.4.1.** (BRYLINSKI, 2007) *Seja  $\pi : X \rightarrow M$  uma submersão sobrejetora e  $P \rightarrow X$  um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal. Uma condição necessária e suficiente para  $P$  descer para um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal em  $M$  é existir um isomorfismo  $\phi : \partial_1^* P \rightarrow \partial_2^* P$  cobrindo a identidade em  $X^{[2]}$  que satisfaz a condição de colagem abaixo*

$$\partial_3^* \phi \circ \partial_1^* \phi = \partial_2^* \phi$$

sobre  $X^{[3]}$ . O isomorfismo  $\phi$  é chamado de **dado de descida**.  $P$  descer para um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal em  $M$  significa existir um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $Q \rightarrow M$  tal que  $P \simeq \pi^* Q$ .

*Demonstração da proposição 4.4.2.* Assuma que  $R \rightarrow X$  e  $S \rightarrow X$  são trivializações. Note que, pela definição de trivialização temos que

$$R_{x_1} \otimes R_{x_2}^* \simeq P_{(x_1, x_2)} \simeq S_{x_1} \otimes S_{x_2}^*$$

e, portanto,  $R_{x_1} \otimes S_{x_1}^* \simeq R_{x_2} \otimes S_{x_2}^*$ . Além disso, para um outro ponto  $x_3$ , o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} R_{x_1} \otimes S_{x_1}^* & \longrightarrow & R_{x_2} \otimes S_{x_2}^* \\ \downarrow & \swarrow & \\ R_{x_3} \otimes S_{x_3}^* & & \end{array}$$

Portanto, pelo lema anterior, temos um *dado de descida* para o  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $R \otimes S^* \rightarrow X$ , isso significa existir um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $L \rightarrow M$  tal que  $R \otimes S^* = \pi^* L$ . A volta é verdadeira, se  $L \rightarrow M$  é um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal e  $R \rightarrow X$  é uma trivialização de  $(P, X)$ , então  $R \otimes \pi^* L$  é uma trivialização de  $(P, X)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \partial(R \otimes \pi^* L)_{(x_1, x_2)} &= (R \otimes \pi^* L)_{x_1} \otimes (R \otimes \pi^* L)_{x_2} \\ &= R_{x_1} \otimes L_{\pi(x_1)} \otimes R_{x_2}^* \otimes L_{\pi(x_2)}^* \\ &\simeq R_{x_1} \otimes R_{x_2}^* \\ &\simeq P_{x_1, x_2} \end{aligned}$$

onde o primeiro isomorfismo vem do fato de as fibras de  $L$  serem  $\mathbb{S}^1$  e o último isomorfismo segue pois  $R \rightarrow X$  é trivialização.  $\square$



## 4.5 Isomorfismo estável de $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes

Note que pela proposição 4.3.1 se consideramos  $N = M$  e  $f$  a identidade teremos que  $DD(f^*(P, X)) = DD(P, X)$ . Portanto, existem bundle gerbes com a mesma classe de Dixmier-Douady mas que não são isomorfos. Isso nos leva a noção de isomorfismo estável.

**Definição 4.5.1.** (MURRAY, 2007) *Se  $(P, X)$  e  $(Q, Y)$  são bundle gerbes sobre  $M$ , dizemos que eles são **isomorfos estavelmente** se  $(P, X) \otimes (Q, Y)^*$  é trivial. A escolha de uma trivialização é chamada **isomorfismo estável** de  $(P, X)$  para  $(Q, Y)$ .*

**Proposição 4.5.1.** *Bundle gerbes  $(P, X)$  e  $(Q, Y)$  sobre  $M$  são isomorfos estavelmente se, e somente se,  $DD(P, X) = DD(Q, Y)$ .*

*Demonstração.* Bundle gerbes  $(P, X)$  e  $(Q, Y)$  sobre  $M$  são isomorfos estavelmente se, e somente se,  $(P, X) \otimes (Q, Y)^*$  é trivial que ocorre se, e somente se,  $DD(P, X) - DD(Q, Y) = 0$ .  $\square$

Existe uma definição equivalente a definição 4.5.1 de isomorfismo estável, mostraremos a seguir. Dois bundle gerbes  $(P, X)$  e  $(Q, Y)$  sobre  $M$  são isomorfos estavelmente se existem bundle gerbes triviais  $(T_1, Z)$  e  $(T_2, Z)$  tal que

$$(P, X) \otimes (T_1, Z) = (Q, Y) \otimes (T_2, Z).$$

De fato, se  $(P, X) \otimes (Q, Y)^*$  é trivial podemos obter  $(T_1, Z)$  por  $(Q, Y)^* \otimes (Q, Y)$ , que é trivial pois sua classe de Dixmier-Douady é zero, e  $(T_2, Z)$  por  $(P, X) \otimes (Q, Y)^*$  e temos que  $(P, X) \otimes ((Q, Y)^* \otimes (Q, Y)) = (Q, Y) \otimes ((P, X) \otimes (Q, Y)^*)$ . Por outro lado, se existem  $(T_1, Z)$  e  $(T_2, Z)$  triviais tal que  $(P, X) \otimes (T_1, Z) = (Q, Y) \otimes (T_2, Z)$  então claramente  $(P, X) \otimes (Q, Y)^*$  é trivial pois teremos  $(P, X) \otimes (Q, Y)^* = (T_1, Z)^* \otimes (T_2, Z)$ .

Pela proposição anterior, temos que isomorfismos estáveis são relação de equivalência. De fato, podemos compor isomorfismos estáveis e formar uma 2-categoria (ver (WALDORF, 2007b) ou (STEVENSON, 2000)).

**Teorema 4.5.1.** (MURRAY, 1996) *A classe de Dixmier-Douady define uma bijeção entre a classe de isomorfismos estáveis de bundle gerbes e  $H^3(M, \mathbb{Z})$ .*

**Exemplos 4.5.1.** *Seja  $\pi : X \rightarrow M$  e  $\pi' : Y \rightarrow M$  submersões sobrejetoras e  $\phi : X \rightarrow Y$  um mapa fibrado cobrindo a identidade de  $M$ . Seja  $(P, Y)$  um bundle gerbe sobre  $M$ , então  $(P, Y)$  é isomorfo estavelmente a  $(\phi^*(P), X)$ . De fato, temos que a fibra de  $(\phi^*P)^* \otimes P$  em um ponto  $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (X \times_M Y)$  é*

$$(\phi^*P)_{(x_1, x_2)}^* \otimes P_{(y_1, y_2)} = P_{(\phi(x_1), \phi(x_2))}^* \otimes P_{(y_1, y_2)}.$$

Podemos definir um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $Q$  sobre  $(X \times_M Y)$  por  $Q_{(x,y)} = P_{(\phi(x),y)}$  de modo que  $\partial(Q)$  no ponto  $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$  é  $P_{(\phi(x_1),y_1)}^* \otimes P_{(\phi(x_2),y_2)}$ . Então, pela multiplicação do bundle gerbe  $(P, Y)$  temos que

$$\begin{aligned} P_{(\phi(x_1),y_1)}^* \otimes P_{(\phi(x_2),y_2)} &\simeq P_{(\phi(x_1),\phi(x_2))}^* \otimes P_{(\phi(x_2),y_1)}^* \otimes P_{(\phi(x_2),y_2)} \\ &\simeq P_{(\phi(x_1),\phi(x_2))}^* \otimes P_{(y_1,\phi(x_2))} \otimes P_{(\phi(x_2),y_2)} \\ &\simeq P_{(\phi(x_1),\phi(x_2))}^* \otimes P_{(y_1,y_2)} \end{aligned}$$

Portanto,  $(\phi^*P)^* \otimes P$  é trivial.

## 4.6 Estrutura conectiva

Vamos generalizar as noções de conexão e curvatura existentes em  $\mathbb{S}^1$ -fibrados para bundle gerbes.

**Definição 4.6.1.** Como  $P \rightarrow X^{[2]}$  é um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal, nós podemos escolher uma conexão  $A \in \Omega^1(P)$ . Está será uma **conexão** para o bundle gerbe se respeitar a multiplicação do bundle gerbe. Isto é, se vale  $\mu^*(\tilde{\partial}_2^*(A)) = \tilde{\partial}_3^*(A) \otimes \tilde{\partial}_1^*(A)$ . Seja  $F_A \in \Omega^2(X^{[2]})$  a curvatura de uma conexão para o bundle gerbe  $A$ , uma 2-forma  $B \in \Omega^2(X)$  tal que  $\partial(B) = F_A$  é chamada **curving** de  $A$ . O par  $(A, B)$  é chamado de estrutura conectiva.

Equivalentemente, uma conexão  $A \in \Omega^1(P)$  é uma conexão para o bundle gerbe se a seção  $s \in \Gamma(\partial(P))$  satisfaz  $s^*(\partial(A)) = 0$ . Ou seja, é plana para  $\partial(A)$ .

**Observação 4.6.1.** A existência de conexões para bundle gerbes segue do corolário 3.5.0.1. De fato, seja  $A$  uma conexão para o fibrado  $P \rightarrow X^{[2]}$  e considere  $s^*(\partial(A))$ . Logo, temos que  $\partial(s^*(\partial(A))) = \partial(s)^*(\partial\partial(A)) = 0$  pois  $\partial\partial(A)$  é a conexão plana no fibrado trivial  $\partial\partial(P)$ . Portanto, existe uma 1-forma  $a \in X^{[2]}$  tal que  $\partial(a) = s^*(\partial(A))$  e, portanto,  $A - a$  é uma conexão para o bundle gerbe.

A existência da curving também segue do corolário 3.5.0.1. Note que se  $A$  é uma conexão para o bundle gerbe, então a curvatura  $F_A \in \Omega^2(X^{[2]})$  satisfaz  $\partial(F_A) = 0$ . Logo, existe  $B \in \Omega^2(X)$  tal que  $F_A = \partial(B)$ .

Como  $\partial$  comuta com  $d$  temos que  $\partial(dB) = d\partial(B) = dF_A = 0$ . Logo, novamente pelo corolário 3.5.0.1,  $dB = \pi^*(\omega)$  para alguma 3-forma  $\omega \in \Omega^3(M)$ . Então,  $\pi^*(d\omega) = d\pi^*(\omega) = ddB = 0$  implicando  $\omega$  ser fechada.

**Definição 4.6.2.** A 3-forma  $\omega$  é chamada de **3-curvatura**.

**Observação 4.6.2.** Em teoria de cordas a 2-forma  $B$  é chama de  $B$ -campo.

**Proposição 4.6.1.** (MURRAY, 1996) *Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(A, B)$  e 3-curvatura  $\omega$ . Então, a classe de cohomologia  $[\frac{\omega}{2\pi i}]$  é a imagem da  $DD(P, X)$  pelo mapa induzido  $H^3(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(M, \mathbb{R})$ . Além disso, a classe  $[\omega]$  é independente da escolha de estrutura conectiva.*

**Observação 4.6.3.** *Considere o caso em que um bundle gerbe  $(P, X)$  é visto como uma  $\mathbb{S}^1$ -extensão central do grupoide de submersão (ver subseção 4.2.1). Suponha que  $(A, B)$  é uma estrutura conectiva, então  $\pi_P^* \partial B = d\gamma$  (lembre que  $\partial$  denota a diferencial simplicial no caso do grupoide de submersão). Denote por  $\delta$  a diferencial simplicial no complexo duplo  $\Omega^q P_{[q]}$ , onde  $P_{[q]}$  denota o nervo do grupoide  $P \rightrightarrows X$ , temos que  $\delta B = dA$ . Também, como o isomorfismo de fibrado  $\mu$  preserva a conexão, vemos que  $\delta A = 0$ , ou seja,  $\gamma$  é multiplicativa  $m^* A = pr_1^* A + pr_2^* A$ .*

**Observação 4.6.4.** *Pela prova da proposição 4.4.2 temos que se  $T \rightarrow X$  e  $R \rightarrow X$  são duas trivializações para um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$ , então existe um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $L \rightarrow M$  com  $T = R \otimes \pi^*(L)$ . Vimos que existe um isomorfismo  $\partial(T) \rightarrow \partial(R)$  e, portanto, dado de descida para  $T \otimes R^*$ . Seja  $(A, B)$  uma estrutura conectiva, como  $\partial(T) \simeq P$  escolha uma conexão  $A_T$  em  $T$  com  $A = \partial(A_T)$ . Então,  $\partial(B) = F_A = \partial(F_{A_T}) \Rightarrow \partial(F_{A_T} - B) = 0$  e, portanto, existe uma 2-forma  $\mu_T \in \Omega^2(M)$  tal que  $F_{A_T} - B = \pi^* \mu_T$ . Se  $A_R$  é uma conexão para  $R$  tal que  $A = \partial(A_R)$ , então, como  $T \otimes R^*$  desce para  $L$ , temos que  $A_T - A_R$  desce para uma conexão  $A_L$  em  $L$  cuja curvatura é  $F_{A_L} = \mu_T - \mu_R$ .*

## 4.7 Classes de Deligne de $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes com estrutura conectiva

Seja  $(P, X)$  um  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(\nabla, B)$ . Considere  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  uma boa cobertura de  $M$ . Lembre-se que da construção da classe de Dixmier-Douady temos seções  $s_i : U_i \rightarrow X$  de tal maneira que  $P_{ij} \rightarrow U_{ij}$  é um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal trivial e, portanto, admite seções  $\sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow P_{ij}$  tal que  $\sigma_{ij}\sigma_{jk} = g_{ijk}\sigma_{ik}$  onde  $g_{ijk} : U_{ijk} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Além disso, temos que  $\nabla_{ij} = (s_i, s_j)^* \nabla$  é uma conexão em  $P_{ij}$  e, portanto,

$$A_{ij} = \sigma_{ij}^* \nabla_{ij}$$

é uma 1-forma em  $U_{ij}$ . Também temos 2-formas em  $U_i$  dadas por

$$B_i = s_i^* B.$$

**Proposição 4.7.1.** (MURRAY, 1996) *A tripla  $(g_{ijk}, A_{ij}, B_i)$  define uma classe de cohomologia em  $H^2(M, \mathcal{D}^2)$  chamada **classe de Deligne** e denotada por  $D(P)$ .*

*Demonstração.* Como  $g_{ijk}$  define a classe de Dixmier-Douady, temos que  $g_{ijk}$  satisfaz a condição de cociclo. Como  $\nabla$  preserva o produto do bundle gerbe teremos que

$$\nabla_{ij} \otimes \nabla_{jk} = \nabla_{ik}.$$

Portanto, temos que

$$(\sigma_{ij} \otimes \sigma_{jk})^*(\nabla_{ij} \otimes \nabla_{jk}) = A_{ij} + A_{jk}$$

Por outro lado, pela equação 4.1, temos que

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} \otimes \sigma_{jk})^*(\nabla_{ij} \otimes \nabla_{jk}) &= (\sigma_{ij} \otimes \sigma_{jk})^*\nabla_{ik} \\ &= (g_{ijk}\sigma_{ik})^*\nabla_{ik} \\ &= A_{ik} + g_{ijk}^{-1}dg_{ijk} \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$A_{ij} + A_{jk} = A_{ik} + g_{ijk}^{-1}dg_{ijk}.$$

Por fim, pela definição de curving, temos que  $\delta(B) = pr_1^*B - pr_2^*B = F_\nabla = d\nabla$  e, portanto, teremos que

$$B_i - B_j = dA_{ij}.$$

□

**Observação 4.7.1.** (BRYLINSKI, 2007) *A classe de Deligne é independente das escolhas de boa cobertura e seções locais.*

**Proposição 4.7.2.** (MURRAY, 1996) *Sejam  $(P, X)$  e  $(Q, Y)$  bundle gerbes sobre  $M$  com estruturas conectivas. Temos que:*

1.  $D((P, X) \otimes (Q, Y)) = D(P) + D(Q)$ ,
2.  $D(P^*) = -D(P)$ .

Queremos definir a noção de isomorfismo estável para bundle gerbes com estrutura conectiva. Seja  $P \rightarrow X$  um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal com conexão  $A$  e curvatura  $F_A$ . O bundle gerbe  $(\partial(P), X)$  possui uma conexão natural  $\partial(A) = pr_1^*A - pr_2^*A$  e curving  $F_A$ . Diremos que um bundle gerbe trivial possui estrutura conectiva trivial se a estrutura conectiva for dessa forma. Um isomorfismo estável entre bundle gerbes com estrutura conectiva é um isomorfismo estável onde os bundle gerbes triviais  $T_1$  e  $T_2$  possuem estrutura conectiva triviais e o isomorfismo preserva a estrutura conectiva.

**Proposição 4.7.3.** (MURRAY; STEVENSON, 2000) *Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  com estrutura conectiva e classe de Deligne zero. Então,  $(P, X)$  é um bundle gerbe trivial com estrutura conectiva trivial.*

*Demonstração.* Como a classe de Deligne é zero consequentemente a classe de Dixmier-Douady é zero e, com isso, temos que  $(P, X)$  é trivial e podemos considerar  $P = \partial(Q)$  para  $Q \rightarrow X$  um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal. Seja  $\nabla_P$  e  $\nabla_Q$  as conexões em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Então,  $\partial(\nabla_Q)$  é também uma conexão para  $P$  e, portanto,  $\nabla_P - \partial(\nabla_Q)$  é uma 1-forma com  $\partial(\nabla_P - \partial(\nabla_Q)) = 0$ , com isso, pelo corolário 3.5.0.1, existe uma 1-forma  $a$  em  $X$  tal que  $\partial(a) = \nabla_P - \partial(\nabla_Q)$ , ou seja,  $\nabla_P = \partial(\nabla_Q - a)$ . Com isso, substituindo  $\nabla_Q$  por  $\nabla_Q - a$  podemos assumir  $\nabla_P = \partial(\nabla_Q)$ . Considere a curving  $B$  e a curvatura  $F_Q$  de  $\nabla_Q$ . Temos que  $\partial(B - F_Q) = 0$  e, portanto, pelo corolário 3.5.0.1 temos que  $B - F_Q = \pi^*\phi$  para  $\phi \in \Omega^2(M)$ .

Na construção da classe de Deligne  $D(P)$  com a estrutura conectiva  $(\nabla_P, B)$ . Se escolhermos seções  $\sigma_i$  de  $s_i^*Q$  podemos pegar  $\sigma_{ij} = \sigma_i/\sigma_j$  e, assim, teremos  $g_{ijk} = 1$ . Se  $a_i = s_i^*\nabla_Q$  então  $A_{ij} = a_i - a_j$ . Como a classe de Deligne é zero, existem  $h_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{S}^1$  e  $k_i \in \Omega^1(U_i)$  tal que:

$$\begin{aligned} 1 &= h_{jk}h_{ik}^{-1}h_{ij} \\ a_i - a_j &= -k_j + k_i + h_{ij}^{-1}dh_{ij} \\ B_i &= dk_i. \end{aligned}$$

Nós podemos usar as funções  $h_{ij}$  para construir um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $R \rightarrow M$  com conexão  $\nabla_R$  definida localmente por  $k_i - a_i$ . Então, temos que  $\partial(Q \otimes \pi^*(R)) = \partial(Q) = P$ . Além disso, a conexão  $k_i - a_i$  possui curvatura  $s_i^*(B_i - F_Q) = s_i^*\pi^*(\phi) = \phi$ . Portanto, a curvatura de  $\pi^*(\delta_R)$  é  $\pi^*(\phi) = B - F_Q$  e, portanto, a curvatura de  $\nabla_R \otimes \nabla_Q$  será  $B$ .  $\square$

**Teorema 4.7.1.** (MURRAY; STEVENSON, 2000) *As classes de isomorfismos estáveis de  $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes com estrutura conectiva são iguais a  $H^2(M, \mathcal{D}^2)$ .*

*Demonstração.* Considere  $(P, X)$  e  $(Q, X)$  dois bundle gerbes sobre  $M$  com estruturas conectivas e classes de Deligne iguais. Pela proposição 4.7.2, temos que  $D(P \otimes Q^*) = 0$ . Assim, pela proposição 4.7.3,  $P \otimes Q^*$  é um bundle gerbe trivial com estrutura conectiva trivial.  $\square$

## 4.8 Exemplos

Nessa seção daremos exemplos de bundle gerbes, estruturas conectivas e classes de Dixmier-Douady.

1. **Gerbe de Hitchin-Chatterjee** Um gerbe de Hitchin-Chatterjee consiste de uma cobertura aberta  $\mathcal{U}$  de  $M$  e uma família de  $\mathbb{S}^1$ -fibrados principais  $P_{ij} \rightarrow U_{ij}$

tal que sobre interseções triplas temos seções

$$s_{ijk} \in \Gamma(U_{ijk} | P_{jk} \otimes P_{ik}^* \otimes P_{ij})$$

e exigimos que  $\partial(s) = 1$  sobre  $U_{ijkl}$ .

Hitchin e Chatterjee também consideraram um gerbe pedindo que cada  $P_{ij}$  seja trivial da forma  $P_{ij} = U_{ij} \times \mathbb{S}^1$ . Escrevendo elementos da união disjunta  $X_{\mathcal{U}}^{[2]}$  como  $(i, j, x)$ , onde  $x \in U_{ij}$ , vemos que a multiplicação do bundle gerbe deve ter a forma

$$((i, j, x), z) \otimes ((j, k, x), w) \mapsto ((i, k, x), zwg_{ijk}(x))$$

para algum  $g_{ijk} : U_{ijk} \rightarrow \mathbb{S}^1$  e teremos a condição de associatividade exatamente quando  $g_{ijk}$  satisfaz a condição de cociclo.

Ou seja, um gerbe de Hitchin-Chatterjee é a mesma coisa que um bundle gerbe local (Um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  com  $X = X_{\mathcal{U}}$  o nervo de uma cobertura aberta  $U$  de  $M$ ).

Note que, pelo exemplo 4.5.1, todo bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  é isomorfo a um bundle gerbe local. De fato, considere uma cobertura aberta  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  de  $M$  com seções locais  $s_i : U_i \rightarrow X$  e denote o nervo da cobertura por  $X_{\mathcal{U}}$ . Então, temos um mapa  $s : X_{\mathcal{U}} \rightarrow X$ ,  $s(x, i) = s_i(x)$  que é uma submersão sobrejetora e, portanto,  $(s^*(P), X_{\mathcal{U}})$  é isomorfo estavelmente a  $(P, X)$ .

2. **Bundle gerbe sobre a esfera.** Lembre que podemos formar um fibrado de linhas pela construção de colagem na esfera  $\mathbb{S}^2$ . Sejam  $U_0$  e  $U_1$  vizinhanças abertas dos hemisférios norte e sul, respectivamente, então tomemos funções de transição  $g : U_0 \cap U_1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  com índice 1. Como existem apenas dois abertos, não há condições sobre interseções triplas e, portanto, as funções  $g$  satisfazem a condição de cociclo, assim, obtemos um fibrado de linhas sobre  $\mathbb{S}^2$  de classe de Chern 1. De uma maneira similar podemos considerar  $U_0$  e  $U_1$  vizinhanças abertas dos hemisférios norte e sul da esfera  $\mathbb{S}^3$ . Sua interseção é retrátil a  $\mathbb{S}^2$  e, portanto, podemos escolher um fibrado de linhas  $P$  de classe de Chern 1. Novamente, como não temos mais condições obtemos um bundle gerbe local sobre  $\mathbb{S}^3$ .

Podemos usar a descrição local da estrutura conectiva para calcular a classe de Dixmier-Douady desse bundle gerbe local. A projeção esteriográfica de ambos os polos identifica  $\mathbb{S}^3 - \{(1, 0, 0)\}$  e  $\mathbb{S}^3 - \{(-1, 0, 0)\}$  com  $\mathbb{R}^3$  e mapeia o equador para a esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Sejam  $U_0$  e  $U_1$  as pré-imagens, do interior de uma bola de raio 2 em  $\mathbb{R}^3$ , das projeções esteriográficas. Podemos identificar  $U_0 \cap U_1$  com

$\mathbb{S}^2 \times (-1, 1)$ . Fazemos o pull-back do fibrado de linhas de classe de Chern  $k$  em  $\mathbb{S}^2$ , com conexão  $A$  e curvatura  $F$ , para  $U_0 \cap U_1$ . Como não temos interseções triplas  $A$  é uma conexão para o bundle gerbe. Se escolhermos uma partição da unidade  $\phi_0$  e  $\phi_1$  para  $U_0$  e  $U_1$  temos que  $f_0 = \phi_1 F$  e  $f_1 = \phi_0 F$  definem 2-formas em  $U_0$  e  $U_1$  respectivamente, e satisfazendo  $F = f_1 - f_0$  em  $U_0 \cap U_1$ . Essas 2-formas definem uma curving para a conexão do bundle gerbe. A 3-curvatura é uma 3-forma  $\omega$  globalmente definida cuja restrição a  $U_0$  e  $U_1$  é  $-d\phi_1 \wedge F$  e  $d\phi_0 \wedge F$  respectivamente. A integral de  $\omega$  sobre a esfera  $\mathbb{S}^3$  se reduz, pelo teorema de Stokes, a integral de  $F$  sobre a esfera  $\mathbb{S}^2$ . Portanto, esse bundle gerbe possui classe de Dixmier-Douady  $k \in H^3(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

3. **Bundle gerbe trivial** O bundle gerbe trivial  $\mathcal{I} = (M \times \mathbb{S}^1, M)$  é um bundle gerbe sobre  $M$  com submersão sobrejetora a identidade em  $M$  e multiplicação induzida pela multiplicação em  $\mathbb{C}$ , ou seja,  $m((x, z), (x, z')) = (x, zz')$  para  $x \in M$  e  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Para  $\omega \in \Omega^2(M)$ ,  $\mathcal{I}_\omega$  é o bundle gerbe trivial  $\mathcal{I}$  com conexão trivial em  $M \times \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  e curving  $\omega$ . Note que a 3-curvatura dessa conexão trivial com curving  $\omega$  é  $d\omega$ .
4. **Bundle gerbe tautológico.** Quando a variedade  $M$  é 2-conexa existe uma realização explícita de um bundle gerbe associado com  $\frac{1}{2\pi i}\omega \in H^3(M, \mathbb{Z})$ , chamado de **bundle gerbe tautológico**. Fixe um ponto base  $x_0$  em  $M$  e considere a fibração de curvas com ponto base:

$$X = \mathcal{P}_0 M = \{\rho : [0, 1] \rightarrow M \mid \rho(0) = x_0\}$$

onde  $\pi : X \rightarrow M$  é dada por  $\pi(\rho) = \rho(1)$ . Então  $X^{[2]}$  é o espaço de curvas suaves começando em  $x_0$  e terminando no mesmo ponto. Nós podemos construir um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $Q$  sobre  $X^{[2]}$  definindo a fibra em  $(\rho_0, \rho_1)$  como o espaço cujos elementos são classes de equivalência de pares  $[\nu, z]$  onde  $\nu : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  é uma homotopia suave por partes, com pontos finais fixos, de  $\rho_0$  para  $\rho_1$  e  $z$  é um número complexo não nulo. Lembre que uma homotopia com pontos finais fixos satisfaz  $\nu(s, 0) = \rho_0(0) = \rho_1(0) = x_0$ ,  $\nu(s, 1) = \rho_0(1) = \rho_1(1)$  para todo  $s$ ,  $\nu(0, t) = \rho_0(t)$  e  $\nu(1, t) = \rho_1(t)$  para todo  $t$ . Dizemos que dois pares  $(\nu, z)$  e  $(\nu', z')$  são equivalentes se para qualquer homotopia,  $F : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ , entre  $\nu$  e  $\nu'$  temos  $\exp(\int F^* \omega)z = z'$ , onde a integral é sobre  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . A condição na homotopia  $F$  é que  $F(0, s, t) = \nu(s, t)$ ,  $F(1, s, t) = \nu'(s, t)$  e para cada  $r$  temos que  $F(r, \cdot, \cdot)$  é uma homotopia com pontos finais fixos entre  $\rho_0$  e  $\rho_1$ .

Queremos construir o produto  $Q_{(\rho_1, \rho_2)} \times Q_{(\rho_2, \rho_3)} \rightarrow Q_{(\rho_1, \rho_3)}$ . Se  $\alpha$  é uma homotopia de  $\rho_1$  para  $\rho_2$  e  $\beta$  é uma homotopia de  $\rho_2$  para  $\rho_3$  então podemos construir

uma homotopia  $\alpha \circ \beta$  de  $\rho_1$  para  $\rho_2$  de maneira usual, ou seja:

$$\alpha \circ \beta(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s, t), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1, t), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

para todo  $t$ . Precisamos checar que esse mapa está bem definido, ou seja, que respeita a relação de quivalência que define  $\mathcal{Q}$ . Então, considere  $\alpha'$  e  $\beta'$  com  $F$  uma homotopia de  $\alpha$  para  $\alpha'$  e  $G$  uma homotopia de  $\beta$  para  $\beta'$ . Podemos construir uma homotopia  $F * G$  de  $\alpha \circ \beta$  para  $\alpha' \circ \beta'$  da seguinte forma

$$(F \circ G)(r, \cdot, \cdot) = F(r, \cdot, \cdot) \circ G(r, \cdot, \cdot)$$

para todo  $r$ . Como a mudança linear definindo  $\circ$  é um difeomorfismo temos que

$$\int (F \circ G)^*(\omega) = \int (F)^*(\omega) + \int (G)^*(\omega)$$

e segue-se que se  $[\alpha, z] = [\alpha', z']$  e  $[\beta, w] = [\beta', w']$  então  $[\alpha \circ \beta, zw] = [\alpha' \circ \beta', z'w']$ . E, portanto, o produto em  $\mathcal{Q}$  é definido por

$$[\alpha, z] \otimes [\beta, z] \mapsto [\alpha \circ \beta, zw].$$

Queremos provar que esse produto é associativo. Seja  $\rho_4$  outra curva e  $\gamma$  uma homotopia entre  $\rho_3$  e  $\rho_4$ . É suficiente provar que  $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma$  e  $\alpha \circ (\beta \circ \gamma)$  são homotópicos por uma homotopia  $F$  satisfazendo  $F^*(\omega) = 0$ . Para construir tal homotopia seja  $r$  um ponto em  $[0, 1]$  e considere uma divisão de  $[0, 1]$  em 3 intervalos

$$[0, (1+r)(1/4)], [(1+r)(1/4), (1+r)(1/2)], [(1+r)(1/2), 1]$$

e seja  $m_r(\alpha, \beta, \gamma)(\cdot, t)$  a homotopia obtida aplicando  $\alpha(\cdot, t)$ ,  $\beta(\cdot, t)$  e  $\gamma(\cdot, t)$  em velocidade adequadamente dimensionada para cada um desses intervalos, respectivamente. Logo, em particular,  $m_0(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$  e  $m_1(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ . Então, defina  $F(r, s, t) = m_r(\alpha, \beta, \gamma)(s, t)$ . Note que a imagem de  $F$  é no máximo de dimensão dois e, portanto, o pull-back da 3-forma  $\omega$  é zero como queríamos. Segue que o produto é associativo.

## 4.9 Holonomia de superfície

Considere agora um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre uma superfície fechada e orientável  $\Sigma$  com estrutura conectiva  $(A, B)$ . Como  $H^3(\Sigma, \mathbb{Z}) = 0$  sabemos que  $(P, X)$  é trivial. Logo, existe um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $R \rightarrow X$  com  $\partial(R) = P$ . De acordo com a observação 4.6.4, temos que se  $A_R$  é uma conexão para  $R$  tal que  $A = \partial(A_R)$ , então existe uma 2-forma  $\mu_R \in \Omega^2(\Sigma)$  tal que  $F_{A_R} - B = \pi^* \mu_R$ .



**Definição 4.9.1.** (MURRAY, 2007; WALDORF, 2007a) *Defina a holonomia de  $(A, B)$  sobre  $\Sigma$  por*

$$\text{hol}((A, B), \Sigma) = \exp\left(2\pi i \int_{\Sigma} \mu_a\right) \in \mathbb{S}^1$$

Note que a definição é independente da escolha de uma trivialização  $R$  e conexão  $A_R$ . De fato, novamente pela observação 4.6.4, quaisquer duas trivializações  $R$  e  $S$  com conexões  $A_R$  e  $A_S$ , respectivamente, irão se diferenciar por um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $L$  em  $\Sigma$  com conexão  $A_R - A_S$  e, portanto, teremos  $\mu_{A_R} - \mu_{A_S} = F_{A_L}$ . Logo,

$$\int_{\Sigma} \mu_{A_R} - \int_{\Sigma} \mu_{A_S} = \int_{\Sigma} F_{A_L} \in 2\pi i \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

e, portanto, as holonomias serão as mesmas.

**Observação 4.9.1.** *Se  $(P, X)$  é um bundle gerbe com estrutura conectiva  $(A, B)$  em uma variedade geral  $M$  e  $\Sigma \subset M$  é uma subvariedade, podemos fazer o pull-back de  $(P, X)$  e  $(A, B)$  para  $\Sigma$  e definir  $\text{hol}((A, B), \Sigma)$  como acima.*

De maneira mais geral, se  $Y \subset M$  é uma subvariedade de dimensão três com fronteira  $\partial Y$  também uma subvariedade de  $M$ , nós podemos trivializar  $(P, X)$  sobre todos os e repetir a construção acima. Nós, então, temos  $d\mu_{A_R} = \omega$ , a 3-curvatura de  $(A, B)$ , e portanto

$$\text{hol}((A, B), \partial Y) = \exp\left(2\pi i \int_Y \omega\right) \in \mathbb{S}^1.$$

Analogamente ao caso dos fibrados de linha, a holonomia de superfície de um bundle gerbe com estrutura conectiva  $(A, B)$  também define um termo em um funcional de ação, porém nesse caso na ação de uma corda clássica cerregada. Como uma corda é descrita em termos de um mapa suave  $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ , o funcional de ação exponenciado de uma corda é

$$e^{iS[\Phi]} = e^{iS_{cin}[\Phi]} \text{hol}((A, B), \Sigma)$$

onde  $S_{cin}[\Phi]$  é um termo cinético que envolve uma estrutura conforme em  $\Sigma$ . Em física, modelos cujos campos são mapas definidos em superfícies são chamados **modelos sigma** e o termo de holonomia é chamado de **termo de Wess-Zumino**.

Com o termo de Wess-Zumino (holonomia) também podemos explicar o efeito Aharonov-Bohm. Para isso, precisamos do resultado que se  $(P, X)$  é um bundle gerbe sobre  $M$  com  $X \rightarrow M$  de dimensão finita com  $M$  e as fibras de  $X \rightarrow M$  1-conexas,

então, sua classe de Dixmier-Douady é torção (ver proposição 5.6 em (MURRAY, 2007)). O efeito Aharonov-Bohm ocorre quando o bundle gerbe possui estrutura conectiva plana, 3-curvatura zero. Porém, isso não significa que o bundle gerbe seja trivial pois sua classe de Dixmier-Douady pode ser pura torção. Em particular, podemos ainda ter holonomia não constante, e, portanto, termo de Wess-Zumino não trivial.

Um exemplo é o modelo sigma para o toro  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Por questão de dimensão, a 3-curvatura  $\omega$  é zero. No entanto, como  $H^2(T, U(1)) = U(1)$ , existe toda uma família de termos de Wess-Zumino parametrizadas por um ângulo, dos quais apenas aquele com ângulo zero é trivial.

## 4.10 Holonomia em D-branas

Algumas teorias de cordas envolvem não apenas superfícies fechadas (cordas fechadas) mas também cordas abertas e, nesse caso, aparecem superfícies com fronteira. Note que a definição que fizemos anteriormente não funciona, pois a equação 4.2 não fornece mais um inteiro. Antes de definirmos a holonomia para superfícies com fronteira precisamos de algumas definições.

**Definição 4.10.1.** (WALDORF, 2007a) *Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre uma variedade  $M$  e seja  $E \rightarrow X$  um fibrado vetorial hermitiano de posto finito. Assuma que existe um isomorfismo de fibrados hermitianos*

$$\phi : P \otimes \partial_1^* E \rightarrow \partial_2^* E$$

que é compatível com a multiplicação do bundle gerbe no sentido que os dois mapas

$$P_{(x_1, x_2)} \otimes (P_{(x_2, x_3)} \otimes P_{x_3}) \rightarrow P_{(x_1, x_2)} \otimes P_{x_2} \rightarrow P_{x_1}$$

e

$$(P_{(x_1, x_2)} \otimes P_{(x_2, x_3)}) \otimes P_{x_3} \rightarrow P_{(x_1, x_3)} \otimes P_{x_3} \rightarrow P_{x_1}$$

são o mesmo. Nesse caso chamamos  $E$  de um **bundle gerbe módulo**. Note que se  $E$  possui posto 1 então é uma trivialização. Uma conexão  $A_E$  é uma conexão para o bundle gerbe módulo se o bundle gerbe possui uma conexão e as conexões induzidas em  $P \otimes \partial_1^* E$  e  $\partial_2^* E$  são iguais a menos do isomorfismo  $\phi$ .

**Definição 4.10.2.** *Uma **D-brana** de um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  é um par  $(Q, E)$  onde  $Q$  é uma subvariedade de  $M$  e  $E$  é um bundle gerbe módulo de  $(P, X)$  restrito a  $Q$ .*

Considere  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  com conexão  $A$  e curving  $B$  e uma D-brana  $(Q, E)$  onde o bundle gerbe módulo  $E \rightarrow X$  tem conexão  $A_E$ .

Seja  $\Phi : D \rightarrow M$  um mapa suave, onde  $D$  é uma superfície com fronteira (podemos considerar um disco), que mapeia a fronteira em  $Q$ . Façamos o pull-back do bundle gerbe e do bundle gerbe módulo para  $D$ , sobre  $D$ , por dimensionalidade, o bundle gerbe é trivial. Escolha uma trivialização  $R$  com conexão  $A_R$ , onde  $A = \partial(A_R)$ , e curvatura  $F_{A_R}$ . Note que, pela observação 4.6.4, temos  $B - F_{A_R} = \pi^*(\mu_R)$  para algum  $\mu_R$  uma 2-forma em  $D$ . Note também que  $E \otimes R^*$  com conexão  $A_E - A_R$  desce para um fibrado  $E_R$  em  $D$  com conexão  $D_R$ .

**Definição 4.10.3.** (WALDORF, 2007a) Definimos a holonomia do bundle gerbe  $(P, X)$  com D-brana  $(Q, E)$  por

$$\text{hol}((\nabla, \mathbf{B}), \Phi) = \text{tr}(\text{hol}(D_R)) \exp\left(\int_D \mu_R\right)$$

onde  $\text{hol}(D_R)$  é calculada sobre a fronteira de  $\phi$ .

Precisamos mostrar que a holonomia é independente da trivialização. De fato, se escolhermos outra trivialização  $S$  com conexão  $A_S$  então existe um fibrado de linhas  $K$  em  $D$  com conexão  $A_K$  tal que  $R = S \otimes \pi^{-1}(K)$  e  $A_R = A_S \otimes \pi^{-1}(A_K)$ . Similarmente,  $E_R = E_S \otimes K$  e  $D_R = D_S \otimes A_K$ . Logo,

$$\text{hol}(D_R) = \text{hol}(D_S \otimes A_K) = \text{hol}(D_S) \text{hol}(A_K) = \text{hol}(D_S) \exp\left(\int_D F_{A_K}\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{hol}((A, \mathbf{B}), \Phi) &= \text{tr}(\text{hol}(D_R)) \exp\left(\int_D \mu_R\right) = \text{tr}(\text{hol}(D_S)) \exp\left(\int_D F_{A_K}\right) \exp\left(\int_D \mu_R\right) \\ &= \text{tr}(\text{hol}(D_S)) \exp\left(\int_D \mu_S\right) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da observação 4.6.4, pois  $\mu_R - \mu_S = F_{A_K}$ . Logo a holonomia não depende de  $R$  e  $A_R$ .

# 5 Geometria 2-plética e algebroides de Courant

## 5.1 Variedades 2-pléticas e colchete de Poisson generalizado

Nessa seção iremos estudar variedades 2-pléticas e generalizar o conceito de colchete de Poisson para o caso 2-plético.

**Definição 5.1.1.** *Uma 3-forma  $\omega$  em uma variedade suave  $M$  que é fechada, ou seja,*

$$d\omega = 0$$

*e não degenerada, ou seja, para todo  $v \in T_x M$  temos:*

$$\iota_v \omega = 0 \implies v = 0$$

*é chamada de uma forma **2-plética** em  $M$ , ou **estrutura 2-plética**, o par  $(M, \omega)$  é uma **variedade 2-plética**.*

Como  $\omega$  é não degenerada temos um mapa injetivo,  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^2(M)$ ,  $v \mapsto \omega(v, \cdot, \cdot)$  o que nos leva a seguinte definição:

**Definição 5.1.2.** *Seja  $(M, \omega)$  uma variedade 2-plética. Uma 1-forma  $\alpha$  em  $M$  é **hamiltoniana** se existe um campo de vetores  $v_\alpha$  em  $M$  tal que:*

$$d\alpha = -\iota_{v_\alpha} \omega.$$

*Dizemos que  $v_\alpha$  é o **campo de vetores hamiltoniano** correspondente a  $\alpha$ . O conjunto de 1-formas hamiltonianas e o conjunto de campos hamiltonianos em uma variedade 2-plética,  $M$ , são espaços vetoriais denotados por  $\Omega_{Ham}^1(M)$  e  $\mathfrak{X}_{Ham}(M)$ , respectivamente.*

**Observação 5.1.1.** *Pela não degenerescência de uma forma 2-plética, o campo hamiltoniano  $v_\alpha$  se existir é único, mas pode existir 1-formas sem campo hamiltoniano. Além disso, duas 1-formas hamiltonianas podem se diferenciar por uma 1-forma fechada e assim compartilharem o mesmo campo hamiltoniano, novamente pela não degenerescência da forma 2-plética.*

Assim como em geometria simplética, podemos associar  $\omega$  a um colchete generalizando o colchete de Poisson, para um colchete em 1-formas hamiltonianas.

**Definição 5.1.3.** Dados  $\alpha, \beta \in \Omega_{Ham}^1(M)$ , o *colchete de Poisson generalizado*  $\{\alpha, \beta\}$  é a 1-forma dada por

$$\{\alpha, \beta\} = \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega$$

A proposição abaixo nos fornece importantes propriedades do colchete de Poisson generalizado.

**Proposição 5.1.1.** (BAEZ; HOFFNUNG; ROGERS, 2010) Seja  $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_{Ham}^1(M)$  e seja  $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$  seus respectivos campos hamiltonianos. O colchete  $\{\cdot, \cdot\}$  possui as seguintes propriedades:

1.  $\mathfrak{X}_{Ham}(M)$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}M$ . Pois vale que

$$[v_\alpha, v_\beta] = v_{\{\alpha, \beta\}}$$

2. anti-simetria

$$\{\alpha, \beta\} = -\{\beta, \alpha\} \quad (5.1)$$

3. O colchete satisfaz a identidade de Jacobi a menos de uma forma exata

$$\{\alpha, \{\beta, \gamma\}\} - \{\{\alpha, \beta\}, \gamma\} - \{\beta, \{\alpha, \gamma\}\} = d\iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\gamma} \omega \quad (5.2)$$

*Demonstração.* 1. Note que se  $v_\alpha$  é campo hamiltoniano, então  $\mathcal{L}_{v_\alpha} \omega = 0$ . Pois

$$\mathcal{L}_{v_\alpha} \omega = d\iota_{v_\alpha} \omega + \iota_{v_\alpha} d\omega = -dd\alpha = 0$$

com isso, note que

$$\begin{aligned} \iota_{[v_\beta, v_\alpha]} \omega + \iota_{v_\alpha} \mathcal{L}_{v_\beta} \omega &= \mathcal{L}_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega - \iota_{v_\alpha} \mathcal{L}_{v_\beta} \omega + \iota_{v_\alpha} \mathcal{L}_{v_\beta} \omega \\ &= d\iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega + \iota_{v_\beta} d\iota_{v_\alpha} \omega \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\{\alpha, \beta\} &= d\iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega \\ &= (\mathcal{L}_{v_\beta} - \iota_{v_\beta} d)\iota_{v_\alpha} \omega \\ &= \mathcal{L}_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega + \iota_{v_\beta} dd\alpha \\ &= \iota_{v_\beta} d\iota_{v_\alpha} \omega + d\iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega \\ &= \iota_{[v_\beta, v_\alpha]} \omega + \iota_{v_\alpha} \mathcal{L}_{v_\beta} \omega \\ &= -\iota_{[v_\alpha, v_\beta]} \omega \end{aligned}$$

2. segue da antissimetria de  $\omega$

3. Pimeiramente, note que a antissimetria implica  $\{\alpha, \beta\} = -\iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} \omega = \iota_{v_\alpha} d\beta$ .  
Portanto,

$$\{\alpha, \{\beta, \gamma\}\} = \iota_{v_\alpha} d\{\beta, \gamma\} = \iota_{v_\alpha} d\iota_{v_\beta} d\gamma,$$

$$\{\{\alpha, \beta\}, \gamma\} = \iota_{v_{\{\alpha, \beta\}}} d\gamma = \iota_{[v_\alpha, v_\beta]} d\gamma,$$

$$\{\beta, \{\alpha, \gamma\}\} = \{\beta, \iota_{v_\alpha} d\gamma\} = \iota_{v_\beta} d\iota_{v_\alpha} d\gamma.$$

Portanto, pelas fórmulas de Cartan, temos:

$$\begin{aligned} \{\alpha, \{\beta, \gamma\}\} - \{\{\alpha, \beta\}, \gamma\} - \{\beta, \{\alpha, \gamma\}\} &= (-\iota_{[v_\alpha, v_\beta]} + \iota_{v_\alpha} d\iota_{v_\beta} - \iota_{v_\beta} d\iota_{v_\alpha}) d\gamma \\ &= (\iota_{v_\beta} \mathcal{L}_{v_\alpha} - \mathcal{L}_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} + \iota_{v_\alpha} d\iota_{v_\beta} - \iota_{v_\beta} d\iota_{v_\alpha}) d\gamma \\ &= (\iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} d + \iota_{v_\beta} d\iota_{v_\alpha} - d\iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} - \iota_{v_\alpha} d\iota_{v_\beta} \\ &\quad + \iota_{v_\alpha} d\iota_{v_\beta} - \iota_{v_\beta} d\iota_{v_\alpha}) d\gamma \\ &= (\iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} d - d\iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta}) d\gamma \\ &= -d\iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} d\gamma \\ &= d\iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\gamma} \omega \end{aligned}$$

□

**Observação 5.1.2.** Note que a propriedade 3 da proposição anterior nos mostra que  $(\Omega_{Ham}^1(M), \{\cdot, \cdot\})$  não é uma álgebra de Lie. De fato, veremos posteriormente que podemos formar uma  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos com  $(\Omega_{Ham}^1(M), \{\cdot, \cdot\})$ .

**Exemplos 5.1.1.** 1. Suponha  $M$  variedade suave, e seja  $X = \bigwedge^2 T^*M$  a segunda potência exterior do fibrado cotangente de  $M$ . Então, existe uma 2-forma  $\alpha$  em  $X$  canônica dada por:

$$\alpha(v_1, v_2) = x(d\pi(v_1), d\pi(v_2))$$

onde  $v_1, v_2 \in T_x X$ , e  $\pi : X \rightarrow M$  é a projeção do fibrado  $X$ . Note que estamos aplicando a 2-forma  $x \in \bigwedge^2 T^*M$  na 2-upla de vetores tangentes  $d\pi(v_i)$  no ponto  $\pi(x)$ . A 3-forma  $\omega = d\alpha$  é 2-plética.

Vamos ver isso localmente. Seja  $q^1, \dots, q^d$  coordenadas em um aberto  $U \subseteq M$ . Então, existe uma base de 2-formas em  $U$  dado por  $dq^I = dq^{i_1} \wedge dq^{i_2}$  onde  $I = \{i_1, \dots, i_d\}$  é conjunto de índices. Correspondentes a essas 2-formas temos coordenadas  $p_I$  nas fibras que combinado com as coordenadas  $q^i$  fornecem um sistema de coordenadas em  $\bigwedge^2 T^*U$  via pull back. Nessas coordenadas temos:

$$\alpha = p_I dq^I$$

onde aqui adotamos notação de Einstein, ou seja, soma em repetidos multiíndices de tamanho 2. Segue que :

$$\omega = dp_I \wedge dq^I$$

Portanto,  $\omega$  é 2-plética.

2. Seja  $G$  um grupo de Lie simples e compacto. Existe uma 3-forma  $\omega$  em  $G$  definida por

$$\omega(v_1, v_2, v_3) = \langle v_1, [v_2, v_3] \rangle,$$

onde  $v_1, v_2, v_3$  são vetores tangente a identidade de  $G$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é a forma de Killing. Essa 3-forma  $\omega$  é 2-plética. De fato, sabemos que a forma de Killing é invariante a esquerda e a direita (biinvariante), vamos mostrar que uma forma qualquer biinvariante é fechada.

**Lema 5.1.1.** *Seja  $\theta$  uma  $q$ -forma em  $G$  biinvariante. Então,  $\theta$  é fechada.*

*Demonstração.* Faremos a prova para o caso de 1-formas, o caso de  $q$ -formas segue de maneira análoga. Pela fórmula da diferencial de de Rham, temos que:

$$d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y])$$

mas temos que  $X\theta(Y) - Y\theta(X) = \mathcal{L}_X\theta(Y) - \mathcal{L}_Y\theta(X) = 0$  pois  $\theta$  é invariante a esquerda. Basta mostrar que  $\theta([X, Y]) = 0$ . Para ver isso, note que como a forma é biinvariante temos  $Ad(g)^*\theta = \theta$  (pois  $Ad(g)$  é a diferencial da conjugação em  $g$ ), logo  $Ad(\exp(tX))^*\theta = \theta$  e diferenciando em  $t$  obtemos  $\theta([X, Y]) = 0$  para todo  $Y$  campo em  $G$ .  $\square$

Como  $G$  é simple e compacto,  $Lie(G)$  será simples e, portanto, a forma de Killing será única a menos de reescala. Com isso, temos que  $0 = \iota_{v_1}\omega = \langle v_1, [v_2, v_3] \rangle = \langle [v_1, v_2], v_3 \rangle$  implicando que  $v_1 = 0$ . Portanto  $\omega$  é não degenerada. Logo,  $(G, \omega)$  é variedade 2-plética.

## 5.2 Algebroides de Courant

Analogamente ao caso simplético, onde podemos associar um algebroide de Lie para uma variedade pré-simplética, podemos associar uma estrutura análoga para as variedades pré-2-pléticas. Essas estruturas são os algebroides de Courant. Temos duas definições equivalente para algebroides de Courant. Vamos mostrá-las abaixo.

**Definição 5.2.1.** ((ROYTENBERG, 1999)): Um **algebroide de Courant** é um fibrado vetorial  $C \rightarrow M$  equipado com uma forma bilinear simétrica não-degenerada  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\Gamma(C)$ , um colchete antissimétrico  $[\cdot, \cdot]_C$  em  $\Gamma(C)$ , um mapa fibrado (**mapa âncora**)  $\rho : C \rightarrow TM$ , e um mapa  $D : C^\infty(M) \rightarrow \Gamma(C)$  definido por  $\langle Df, e \rangle = \rho(e)f$ . Tal que para todo  $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(C)$  e para toda  $f, g \in C^\infty(M)$  as seguintes propriedades são verdadeiras:

1.  $[e_1, [e_2, e_3]_C]_C - [[e_1, e_2]_C, e_3]_C - [e_2, [e_1, e_3]_C]_C = -\frac{1}{2}DN_{ij}(e_1, e_2, e_3)$
2.  $\rho([e_1, e_2]_C) = [\rho(e_1), \rho(e_2)]$
3.  $[e_1, fe_2]_C = f[e_1, e_2]_C + \rho(e_1)(f)e_2 - \frac{1}{2}\langle e_1, e_2 \rangle Df$
4.  $\langle Df, Dg \rangle = 0$
5.  $\rho(e_1)(\langle e_2, e_3 \rangle) = \langle [e_1, e_2]_C + \frac{1}{2}D\langle e_1, e_2 \rangle, e_3 \rangle + \langle e_2, [e_1, e_3]_C + \frac{1}{2}D\langle e_1, e_3 \rangle \rangle$ .

Onde

$$N_{ij}(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3}(\langle [e_1, e_2]_C, e_3 \rangle + \langle [e_3, e_1]_C, e_2 \rangle + \langle [e_2, e_3]_C, e_1 \rangle)$$

é chamado de operador de Nijenhuis.

**Observação 5.2.1.** Note que o fibrado vetorial  $C \rightarrow M$  pode ser identificado com  $C^* \rightarrow M$  via forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e portanto temos o mapa dual  $\rho^* : T^*M \rightarrow C$ . Portanto, o mapa  $D$  é simplesmente o pullback da diferencial de de Rham por  $\rho^*$ . Ou seja, temos que para  $\alpha \in \Omega^1(M)$  e  $b \in \Gamma(C)$ , vale que:

$$\langle \rho^*\alpha, b \rangle = \langle \alpha, \rho(b) \rangle = \alpha(\rho(b)).$$

A próxima definição de algebroide de Courant foi feita por Severa, (ŠEVERA, 2017).

**Definição 5.2.2.** (ŠEVERA, 2017): Um **algebroide de Courant** é um fibrado vetorial  $C \rightarrow M$  equipado com uma forma bilinear simétrica não-degenerada  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\Gamma(C)$ , uma operação bilinear  $[\cdot, \cdot]_S$  em  $\Gamma(C)$ , um mapa fibrado (**mapa âncora**)  $\rho : C \rightarrow TM$ , e um mapa  $D : C^\infty(M) \rightarrow \Gamma(C)$  definido por  $\langle Df, e \rangle = \rho(e)f$ . Tal que para todo  $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(C)$  e para toda  $f \in C^\infty(M)$  as seguintes propriedades são verdadeiras:

1.  $[e_1, [e_2, e_3]_S]_S = [[e_1, e_2]_S, e_3]_S + [e_2, [e_1, e_3]_S]_S$
2.  $\rho([e_1, e_2]_S) = [\rho(e_1), \rho(e_2)]$
3.  $[e_1, fe_2]_C = f[e_1, e_2]_C + \rho(e_1)(f)e_2$



$$4. [e_1, e_1]_S = \frac{1}{2}D\langle e_1, e_1 \rangle$$

$$5. \rho(e_1)(\langle e_2, e_3 \rangle) = \langle [e_1, e_2]_S, e_3 \rangle + \langle e_2, [e_1, e_3]_S \rangle.$$

**Observação 5.2.2.** Note que a diferença entre as definições 5.2.1 e 5.2.2 é que na primeira definição o colchete  $[\cdot, \cdot]_C$  é antissimétrico mas não satisfaz Jacobi, já na segunda definição o colchete  $[\cdot, \cdot]_S$  satisfaz Jacobi mas não é antissimétrico.

Essas duas definições são equivalentes, de fato:

**Proposição 5.2.1.** (ROYTENBERG, 1999) Temos que  $C \rightarrow M$  é um algebroide de Courant no sentido da definição 5.2.1 se, e somente se,  $C \rightarrow M$  é um algebroide de Courant no sentido da definição 5.2.2 com o mesmo mapa âncora e mapa bilinear mas com colchete  $[\cdot, \cdot]_S$  dado por

$$[e_1, e_2]_S = [e_1, e_2]_C + \frac{1}{2}D\langle e_1, e_2 \rangle \quad (5.3)$$

O exemplo abaixo será de fundamental importância para nós, esse exemplo foi o primeiro exemplo de algebroide de Courant estudado.

**Exemplos 5.2.1.** Algebroide de Courant padrão: Temos que  $C = TM \oplus T^*M$  sobre uma variedade  $M$  equipado com o colchete de Courant padrão:

$$[v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2]_C = [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1}\alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2}\alpha_1 - \frac{1}{2}d\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^- \quad (5.4)$$

onde

$$\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^- = \iota_{v_1}\alpha_2 - \iota_{v_2}\alpha_1 \quad (5.5)$$

é o produto anti-simétrico padrão. Com forma bilinear simétrica padrão dada por:

$$\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^+ = \iota_{v_1}\alpha_2 + \iota_{v_2}\alpha_1. \quad (5.6)$$

Com mapa âncora  $\rho : C \rightarrow TM$  é a projeção, e com  $D = d$  a diferencial de de Rham forma um algebroide de Courant como na definição 5.2.1. O colchete  $[\cdot, \cdot]_C$  é a anti-simetrização do colchete de Dorfman padrão:

$$[v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2]_S = [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1}\alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2}\alpha_1 \quad (5.7)$$

que desempenha o papel de colchete dado na definição 5.2.2.

Para maiores detalhes sobre o exemplo anterior ver (COURANT, 1990) e (ROYTENBERG, 1999).

Temos uma importante propriedade para o jacobador no caso do exemplo anterior, esta segue na proposição abaixo.

**Proposição 5.2.2.** (GUALTIERI, 2011) *Considere o colchete de Courant padrão como no exemplo anterior e  $a, b, c$  seções de  $C = TM \oplus TM^*$ . Portanto, vale que*

$$Jac(a, b, c) = d(Nij(a, b, c)) \quad (5.8)$$

onde  $Nij$  é o operador de Nijenhuis:

$$Nij(a, b, c) = \frac{1}{3}(\langle [a, b], c \rangle + \langle [b, c], a \rangle + \langle [c, a], b \rangle)$$

e  $Jac(a, b, c) = [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b]$ . Onde, para não carregar a notação, denotamos a forma bilinear simétrica padrão por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e o colchete de Courant padrão por  $[\cdot, \cdot]$ .

*Demonstração.* Para esse caso, pela equação 5.3, a diferença entre o colchete de Courant padrão e o colchete de Dorfman padrão é

$$[a, b] = [a, b]_S - d\langle a, b \rangle,$$

e note que  $[a, b] = \frac{1}{2}([a, b]_S - [b, a]_S)$  pois  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é simétrico em  $[\cdot, \cdot]$  é antissimétrico. Lembre-se que o colchete de Dorfman padrão, como falado no exemplo anterior, é um colchete da definição 5.2.2 e, portanto, satisfaz Jacobi. Agora, note que

$$\begin{aligned} [[a, b], c] &= [[a, b], c]_S - d\langle [a, b], c \rangle \\ &= [([a, b]_S - d\langle a, b \rangle), c]_S - d\langle [a, b], c \rangle \\ &= [[a, b]_S, c] - [d\langle a, b \rangle, c] - d\langle [a, b], c \rangle \end{aligned}$$

Mas note que, se  $c \in \Gamma(C)$  é tal que  $c = v + \alpha$  para  $v \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , então pela definição do colchete de Dorfman padrão, temos:

$$[d\langle a, b \rangle, c] = [0, v] + \mathcal{L}_0\alpha - \iota_v dd\langle a, b \rangle = 0$$

Com isso, temos que:

$$[[a, b], c] = [[a, b]_S, c]_S - d\langle [a, b], c \rangle.$$

Finalmente, usando as igualdades obtidas, temos que :

$$\begin{aligned}
Jac(A, B, C) &= [[A, B], C] + p.c. \\
&= \left[\frac{1}{2}[a, b]_S - \frac{1}{2}[b, a]_S, c\right] \\
&= \frac{1}{2}[[a, b]_S, c] - \frac{1}{2}[[b, a]_S, c] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}[[a, b]_S, c]_S - \frac{1}{2}[c, [b, a]_S]_S\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}[[b, a]_S, c]_S - \frac{1}{2}[c, [a, b]_S]_S\right) \\
&= \frac{1}{4}([[[A, B]_S, C]_S - [C, [A, B]_S]_S - [[B, A]_S, C]_S + [C, [B, A]_S]_S) + p.c. \\
&= \frac{1}{4}([a, [b, c]_S]_S - [b, [a, c]_S]_S - [c, [a, b]_S]_S - [b, [a, c]_S]_S \\
&\quad + [a, [b, c]_S]_S + [c, [b, a]_S]_S) + p.c \\
&= \frac{1}{4}([a, [b, c]_S]_S - [b, [a, c]_S]_S + p.c) \\
&= \frac{1}{4}([[[a, b]_S, c]_S + p.c) \\
&= \frac{1}{4}([[[a, b], c] + d\langle [a, b], c \rangle + p.c) \\
&= \frac{1}{4}(Jac(A, B, C) + 3d(Nij(A, B, C))),
\end{aligned}$$

note que na sexta igualdade usamos  $[\cdot, \cdot]_S$  satisfaz Jacobi para reescrever  $[[a, b]_S, c]_S$  e  $[[b, a]_S, c]_S$  e na oitava igualdade usamos novamente a identidade de Jacobi. Portanto, temos o resultado.  $\square$

O algebroide de Courant padrão é um exemplo de algebroide de Courant exato (BRESSLER; CHERVOV, 2002).

**Definição 5.2.3.** *Um algebroide de Courant  $C \rightarrow M$  com mapa âncora  $\rho : C \rightarrow TM$  é exato se, e somente se,*

$$0 \rightarrow T^*M \xrightarrow{\rho^*} C \xrightarrow{\rho} TM \rightarrow 0$$

*é uma sequência exata curta de fibrados vetoriais.*

### 5.3 A classe de Ševera de um algebroide de Courant exato

A classificação de algebroides de Courant foi obtido por Ševera (ŠEVERA, 2017). Veremos que algebroides de Courant Também são classificados por cohomologia de grau 3. Usaremos aqui algebroide de Courant como na definição 5.2.2.

**Definição 5.3.1.** *Uma cisão de um algebroide de Courant exato  $C$  sobre uma variedade  $M$  é uma cisão  $s : TM \rightarrow C$  da sequência da definição 5.2.3 isotrópica. Ou*

seja,

$$\langle s(v_1), s(v_2) \rangle = 0.$$

**Observação 5.3.1.** *Se  $s$  é uma cisão e  $B \in \Omega^2(M)$  então podemos construir uma nova cisão:*

$$(s + B)(v) = s(v) + \rho^* B(v, \cdot). \quad (5.9)$$

Escolhendo uma cisão isotrópica  $s$ , temos que  $C \simeq TM \oplus T^*(M)$ . Portanto, podemos transportar a estrutura do algebroide de Courant  $C$  para o algebroide de Courant padrão. Com isso, pegue  $X + \alpha, Y + \beta \in \Gamma(TM \oplus T^*(M))$ , temos, para o produto simétrico, que:

$$\begin{aligned} \langle X + \alpha, Y + \beta \rangle &= \langle s(X) + \rho^* \alpha, s(Y) + \rho^* \beta \rangle \\ &= \langle s(X), s(Y) \rangle + \langle s(X), \rho^* \beta \rangle + \langle \rho^* \alpha, s(Y) \rangle + \langle \rho^* \alpha, \rho^* \beta \rangle \\ &= \beta(\rho s(X)) + \alpha(\rho s(Y)) + \alpha(\rho^* \rho \beta) \\ &= \beta(\rho s(X)) + \alpha(\rho s(Y)) \\ &= \alpha(Y) + \beta(X). \end{aligned}$$

Note que na última igualdade usamos que  $s$  é uma cisão, e na terceira igualdade usamos o dual da definição de  $D$ . Para o colchete, primeiramente, se  $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$  e  $t \in \Gamma(C)$ , note que:

$$\begin{aligned} \langle [\rho^* \alpha, \rho^* \beta], t \rangle &= \rho(\rho^* \alpha) \langle \rho^* \beta, t \rangle - \langle \rho^* \beta, [\rho^* \alpha, t] \rangle \\ &= -\langle \rho^* \beta, [\rho^* \alpha, t] \rangle \\ &= -\beta(\rho[\rho^* \alpha, t]) \\ &= \beta[\rho \rho^* \alpha, \rho t] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Na primeira igualdade usamos a propriedade 5 da definição 5.2.2 e posteriormente usamos que  $\rho^* \rho = 0$ . Portanto, como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não degenerado, temos que  $[\rho^* \alpha, \rho^* \beta] = 0$ . Com isso, vamos olhar o colchete.

$$[X + \alpha, Y + \beta] = [s(X) + \rho^* \alpha, s(Y) + \rho^* \beta] = [s(X), s(Y)] + [s(X), \rho^* \beta] + [\rho^* \alpha, s(Y)]$$

Vamos analisar termo a termo da igualdade acima. Primeiramente note que  $\rho[s(X), \rho^* \beta] = 0$ , pois  $\rho \rho^* = 0$ , portanto,  $[s(X), \rho^* \beta]$  é uma 1-forma em  $M$ . Com isso, pegue um

campo de vetores  $Z$  em  $M$ , vamos analisar o segundo termo da equação:

$$\begin{aligned}
[s(X), \rho^* \beta](Z) &= \langle [s(X), \rho^* \beta], s(Z) \rangle \\
&= X \langle \rho^* \beta, s(Z) \rangle - \langle \rho^* \beta, [s(X), s(Z)] \rangle \\
&= X \beta(\rho(s(Z))) - \beta(\rho[s(X), s(Z)]) \\
&= X \beta(Z) - \beta([X, Z]) \\
&= \iota_Z X \beta - \iota_{[X, Z]} \beta \\
&= \iota_Z \mathcal{L}_X \beta,
\end{aligned}$$

aqui usamos novamente a equação 5 da definição 5.2.2. Portanto,  $[s(X), \rho^* \beta] = \mathcal{L}_X \beta$ .

Vamos analisar o terceiro termo. Temos que:

$$\begin{aligned}
\langle [\rho^* \alpha, s(Y)], s(Z) \rangle &= \langle -[s(Y), \rho^* \alpha] + D \langle s(Y), \rho^* \alpha \rangle, s(z) \rangle \\
&= -(\mathcal{L}_Y \alpha)(Z) + \rho(s(Z)) \langle s(Y), \rho^* \alpha \rangle \\
&= -(\mathcal{L}_Y \alpha)(Z) + Z \langle \rho^* \alpha, s(Y) \rangle \\
&= -(\mathcal{L}_Y \alpha)(Z) + Z \alpha(\rho(s(Y))) \\
&= -(\mathcal{L}_Y \alpha)(Z) + Z \alpha(Y) \\
&= -(\mathcal{L}_Y \alpha)(Z) + \mathcal{L}_Z \alpha(Y) \\
&= -(\mathcal{L}_Y \alpha)(Z) + \iota_Z d \iota_Y \alpha \\
&= (-\iota_Y d \alpha)(Z)
\end{aligned}$$

Logo, temos que  $[\rho^* \alpha, s(Y)] = -\iota_Y d \alpha$ .

Agora vamos analisar o primeiro termo. Note que teríamos de fato o colchete de Dorfman padrão se  $[s(X), s(Y)]$  fosse  $s([X, Y])$  mas o que temos é  $\rho[s(X), s(Y)] = [X, Y]$ .

**Definição 5.3.2.** Um mapa  $F : TM \times TM \rightarrow C$  definido por:

$$F(X, Y) = [s(X), s(Y)] - s([X, Y])$$

é chamado de **curvatura** da cisão  $s$ .

Note que, temos por isotropicidade

$$\langle F(X, Y), s(Z) \rangle = \langle [s(X), s(Y)], s(Z) \rangle$$

Definimos, portanto,  $\omega : TM \otimes TM \otimes TM \rightarrow C^\infty(M)$  por

$$\omega(X, Y, Z) = \langle [s(X), s(Y)], s(Z) \rangle$$

**Proposição 5.3.1.** (BRESSLER; CHERVOV, 2002) *O mapa  $\omega$  define uma 3-forma fechada em  $M$ .*

*Demonstração.* Para mostrar a antissimetria note que, pela equação 5 da definição 5.2.2 e isotropicidade de  $s$  vale que:

$$\begin{aligned}\langle [s(X), s(Y)], s(Z) \rangle + \langle s(Y), [s(X), s(Z)] \rangle &= \rho(s(X)) \langle s(Y), s(X) \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto,  $\langle [s(X), s(Y)], s(Z) \rangle = -\langle s(Y), [s(X), s(Z)] \rangle$ . Logo,  $\omega$  é antissimétrica.

Para mostrar que  $\omega$  é  $C^\infty(M)$  linear vamos usar a equação 3 de 5.2.2 e a isotropicidade de  $s$ . Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\langle [s(X), fs(Y)], s(Z) \rangle &= \langle f[s(X), s(Y)] + \rho(s(X))f(s(Y)), s(Z) \rangle \\ &= f \langle [s(X), s(Z)], s(Z) \rangle + Xf \langle s(Y), s(Z) \rangle \\ &= f \langle [s(X), s(Z)], s(Z) \rangle\end{aligned}$$

Claramente  $\omega$  é  $C^\infty(M)$ -linear no terceiro argumento, a  $C^\infty(M)$ -linearidade no primeiro argumento segue por antissimetria.

Falta mostrarmos que  $\omega$  é fechada. Note que, se  $a = X + \alpha, b = Y + \beta, c = Z + \tau \in \Gamma(C)$ , denotando o colchete com o termo de curvatura por  $[\cdot, \cdot]_\omega$ , temos que:

$$\begin{aligned}(N_{ij})_\omega(a, b, c) &= \frac{1}{3} (\langle [a, b]_\omega, c \rangle + \langle [b, c]_\omega, a \rangle + \langle [c, a]_\omega, b \rangle) \\ &= \frac{1}{3} (\langle [X + \alpha, Y + \beta] - \iota_X \iota_Y \omega, Z + \tau \rangle + \langle [Y + \beta, Z + \tau] - \iota_Y \iota_Z \omega, X + \alpha \rangle \\ &\quad + \langle [Z + \tau, X + \alpha] - \iota_Z \iota_X \omega, Y + \beta \rangle) \\ &= N_{ij}(a, b, c) - \frac{1}{3} (\langle \iota_X \iota_Y \omega, Z + \tau \rangle - \langle \iota_Y \iota_Z \omega, X + \alpha \rangle \\ &\quad - \langle \iota_Z \iota_X \omega, Y + \beta \rangle) \\ &= N_{ij}(a, b, c) - \frac{1}{3} (\iota_Z \iota_X \iota_Y \omega - \iota_X \iota_Y \iota_Z \omega - \iota_Y \iota_Z \iota_X \omega) \\ &= N_{ij}(a, b, c) + \iota_Z \iota_Y \iota_X \omega\end{aligned}$$

Com isso,  $Jac_\omega(a, b, c) = N_{ij}(a, b, c) + \iota_Z \iota_Y \iota_X d\omega$ , e como o colchete  $[\cdot, \cdot]_H$  satisfaz os axiomas de algebroide de Courant devemos ter necessariamente  $d\omega = 0$ .  $\square$

**Proposição 5.3.2.** (ŠEVERA, 2017) *A 3-forma  $\omega$ , definida como acima, define uma classe de cohomologia em  $H_{dR}^3(M)$  independente da escolha da cisão  $s : TM \rightarrow C$ .*

**Definição 5.3.3.** *A classe de Ševera de um algebroide de Courant exato com colchete  $[\cdot, \cdot]_C$  e forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma classe de cohomologia  $[-\omega] \in H_{DR}^3(M)$ , onde*

$$\omega(v_1, v_2, v_3) = \langle [s(v_1), s(v_2)]_C, s(v_3) \rangle.$$

## 5.4 O algebroide de Courant associado a uma variedade 2-plética

Nessa seção mostraremos o análogo 2-plético da seção 3.8. De fato, veremos que os passos são similares, porém desta vez obeteremos um algebroide de Courant. Considere  $(M, \omega)$  uma variedade com uma 3-forma fechada  $\omega$ . A construção feita aqui é originalmente feita em (ROGERS, 2013).

**Definição 5.4.1.** *Uma cobertura aberta  $\{U_i\}$  de  $M$  equipada com 2-formas  $B_i \in \Omega^2(M)$ , e 1-formas  $A_{ij} \in \Omega^1(U_{ij})$  satisfazendo*

$$\omega|_{U_i} = dB_i \quad (5.10)$$

$$(B_j - B_i)|_{U_{ij}} = dA_{ij} \quad (5.11)$$

é chamada de uma **trivialização** de  $\omega$ .

Usaremos uma trivialização de  $\omega$  para construir um algebroide de Courant exato sobre  $M$ . Primeiro faremos isso localmente. Sobre cada aberto  $U_i$  vamos considerar o algebroide de Courant padrão  $C_i = TU_i \oplus T^*U_i \rightarrow U_i$ . Lembre que  $C$  é equipado com o produto padrão

$$\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^+ = \iota_{v_1}\alpha_2 + \iota_{v_2}\alpha_1, \quad (5.12)$$

$v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(U_i)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^1(U_i)$ .

Usando uma trivialização de  $\omega$  podemos colar os  $C_i \rightarrow U_i$  e obter um algebroide de Courant  $C \rightarrow M$ . Vejamos, como  $dA_{ij}$  é uma 2-forma em  $U_{ij}$  temos que nas interseções

$$\begin{aligned} \langle v_1 + \iota_{v_1}dA_{ij} + \alpha_1, v_2 + \iota_{v_2}dA_{ij} + \alpha_2 \rangle^+ &= \iota_{v_1}(\iota_{v_2}dA_{ij} + \alpha_2) + \iota_{v_2}(\iota_{v_1}dA_{ij} + \alpha_1) \\ &= \iota_{v_1}\iota_{v_2}dA_{ij} + \iota_{v_1}\alpha_2 + \iota_{v_2}\iota_{v_1}dA_{ij} + \iota_{v_2}\alpha_1 \\ &= \langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^+. \end{aligned}$$

Portanto, as 2-formas  $\{dA_{ij}\}$  geram funções

$$G_{ij} : U_{ij} \rightarrow SO(n, n),$$

$$G_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ dA_{ij}|_x & 1 \end{pmatrix}$$

**Proposição 5.4.1.** *As funções  $G_{ij}$  satisfazem a condição de cociclo em  $U_{ijk}$ .*

*Demonstração.* Note que, utilizando a equação 5.11, podemos calcular  $G_{ij}G_{jk}G_{ki}$  por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B_j - B_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B_k - B_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B_i - B_k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B_j - B_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B_i - B_j & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com isso, vemos que  $G_{ij}G_{jk}G_{ki} = 1$  □

Portanto, pela proposição anterior,  $G_{ij}$  nos fornece funções de transição e, com isso, podemos colar os fibrados locais e obter sobre  $M$  o fibrado vetorial

$$C = \coprod_{x \in M} T_x U_i \oplus T_x^* U_i / \sim .$$

Note que  $C$  fornece a sequência exata

$$0 \rightarrow T^*M \xrightarrow{j} C \xrightarrow{\rho} TM \rightarrow 0,$$

onde o mapa âncora  $\rho$  é induzido pela projeção  $T^*U_i \oplus TU_i \rightarrow TU_i$ , e  $j$  é a inclusão.

**Lema 5.4.1.** *Utilizando as 2-formas  $B_i \in \Omega^2(U_i)$  podemos obter uma cisão isotrópica  $s : TM \rightarrow C$  dada por*

$$s(v_x) = v_x - \iota_{v_x} B_i \tag{5.13}$$

onde  $v_x \in T_x M$ .

*Demonstração.* Segue da equação 5.11 que  $s$  é bem definida quando  $x \in U_{ij}$ . Pois, nesse caso teremos

$$s(v_x)_j - s(v_x)_i = \iota_{v_x}(B_j - B_i) = \iota_{v_x} dA_{ij}$$

. Claramente  $\rho \circ s = id_{TM}$  e pela definição da forma bilinear temos:

$$\begin{aligned} \langle s(v_1), s(v_2) \rangle^+ &= \langle v_1 - \iota_{v_1} B_i, v_2 - \iota_{v_2} B_i \rangle^+ \\ &= -\iota_{v_1} \iota_{v_2} B_i - \iota_{v_2} \iota_{v_1} B_i = 0 \end{aligned}$$

portanto,  $s$  define uma cisão isotrópica. □

Logo, toda seção  $e \in \Gamma(C)$  pode ser unicamente expressada por

$$e = s(v) + \alpha$$

para algum  $v \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\alpha \in \Omega^1(M)$ . Aqui novamente, para não carregar a notação, utilizamos  $s$  para denotar o mapa a nível de seções  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(C)$ . Precisamos agora ver que as estruturas locais estão bem definidas globalmente. O mapa âncora é apenas

$$\rho(s(v) + \alpha) = v \tag{5.14}$$



**Lema 5.4.2.** *A forma bilinear simétrica padrão está bem definida.*

*Demonstração.* Dado seções  $s(v_1) + \alpha_1, s(v_2) + \alpha_2 \in \Gamma(C)$ , para  $v_1, v_2 \in TU_{ij}$ .

$$\langle s(v_1) + \alpha_1, s(v_2) + \alpha_2 \rangle^+ = \iota_{v_1} \alpha_2 - \iota_{v_1} \iota_{v_2} B_i + \iota_{v_2} \alpha_1 - \iota_{v_2} \iota_{v_1} B_i = \langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^+ \quad (5.15)$$

Logo, o resultado da forma bilinear simétrica independe do  $B_i$ .  $\square$

O colchete em  $\Gamma(C)$  é definido sobre abertos  $U_i$  por:

$$[s(v_1) + \alpha_1, s(v_2) + \alpha_2]_C|_{U_i} = [s(v_1) + \alpha_1, s(v_2) + \alpha_2]_i$$

onde  $[\cdot, \cdot]_i$  é o colchete de Courant padrão, equação 5.4.

**Lema 5.4.3.** *Sejam  $v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^1(M)$ . Temos que*

$$[G_{ij}(v_1 + \alpha_1), G_{ij}(v_2 + \alpha_2)]_i = G_{ij}([v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2]_i)$$

*Demonstração.* Pelas Fórmulas de Cartan, temos que:

$$\begin{aligned} \iota_{[v_1, v_2]} &= \mathcal{L}_{v_1} \iota_{v_2} - \iota_{v_2} \mathcal{L}_{v_1} \\ &= \iota_{v_1} d\iota_{v_2} + d\iota_{v_1} \iota_{v_2} - \iota_{v_2} d\iota_{v_1} - \iota_{v_2} \iota_{v_1} d \end{aligned}$$

Utilizando a equação 5.4 para o colchete de Courant padrão e as fórmulas de Cartan temos:

$$\begin{aligned} [v_1 + \alpha_1 + \iota_{v_1} dA_{ij}, v_2 + \alpha_2 + \iota_{v_2} dA_{ij}] &= [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1}(\alpha_2 + \iota_{v_2} dA_{ij}) - \mathcal{L}_{v_2}(\alpha_1 + \iota_{v_1} dA_{ij}) \\ &\quad - \frac{1}{2} d\langle v_1 + \alpha_1 + \iota_{v_1} dA_{ij}, v_2 + \alpha_2 + \iota_{v_2} dA_{ij} \rangle^- \\ &= [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1} \alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2} \alpha_1 + \mathcal{L}_{v_1} \iota_{v_2} dA_{ij} - \mathcal{L}_{v_2} \iota_{v_1} dA_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{2} d(\iota_{v_1}(\alpha_2 + \iota_{v_2} dA_{ij}) - \iota_{v_2}(\alpha_1 + \iota_{v_1} dA_{ij})) \\ &= [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1} \alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2} \alpha_1 - \frac{1}{2} d(\iota_{v_1} \alpha_2 - \iota_{v_2} \alpha_1) - d\iota_{v_1} \iota_{v_2} dA_{ij} \\ &\quad + \iota_{v_1} d\iota_{v_2} dA_{ij} + d\iota_{v_1} \iota_{v_2} dA_{ij} - \iota_{v_2} d\iota_{v_1} dA_{ij} - d\iota_{v_2} \iota_{v_1} dA_{ij} \end{aligned}$$

Podemos subtrair da última igualdade o termo  $\iota_{v_2} \iota_{v_1} ddA_{ij}$ , já que  $d^2 = 0$ . Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} [v_1 + \alpha_1 + \iota_{v_1} dA_{ij}, v_2 + \alpha_2 + \iota_{v_2} dA_{ij}] &= [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1} \alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2} \alpha_1 - \frac{1}{2} d\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^- \\ &\quad + \iota_{[v_1, v_2]} dA_{ij} \\ &= G_{ij}([v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2]_i) \end{aligned}$$

$\square$

Portanto, o colchete  $[\cdot, \cdot]_C$  é bem definido globalmente.

**Lema 5.4.4.** *Sejam  $v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^1(M)$ . Usando a definição local do colchete e da cisão e sabendo que localmente  $dB_i = \omega$ , temos que :*

$$[s(v_1) + \alpha_1, s(v_2) + \alpha_2]_C = s([v_1, v_2]) + \mathcal{L}_{v_1}\alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2}\alpha_1 - \frac{1}{2}d\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^- - \iota_{v_2}\iota_{v_1}\omega \quad (5.16)$$

*Demonstração.* Desenvolvendo o cálculo localmente temos:

$$\begin{aligned} [v_1 - \iota_{v_1}B_i + \alpha_1, v_2 - \iota_{v_2}B_i + \alpha_2]_C &= [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1}(\alpha_2 - \iota_{v_2}B_i) - \mathcal{L}_{v_2}(\alpha_1 - \iota_{v_1}B_i) \\ &\quad - \frac{1}{2}d\langle v_1 - \iota_{v_1}B_i + \alpha_1, v_2 - \iota_{v_2}B_i + \alpha_2 \rangle^- \\ &= [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1}\alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2}\alpha_1 + \mathcal{L}_{v_2}\iota_{v_1}B_i - \mathcal{L}_{v_1}\iota_{v_2}B_i \\ &\quad - \frac{1}{2}d\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^- + d\iota_{v_1}\iota_{v_2}B_i \\ &= [v_1, v_2] + \mathcal{L}_{v_1}\alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2}\alpha_1 + \iota_{v_2}d\iota_{v_1}B_i + d\iota_{v_2}\iota_{v_1}B_i \\ &\quad - \iota_{v_1}d\iota_{v_2}B_i - d\iota_{v_1}\iota_{v_2}B_i + d\iota_{v_1}\iota_{v_2}B_i \\ &\quad - \frac{1}{2}d\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^- - \iota_{v_2}\iota_{v_1}dB_i + \iota_{v_2}\iota_{v_1}dB_i \\ &= [v_1, v_2] - \iota_{[v_1, v_2]}B_i + \mathcal{L}_{v_1}\alpha_2 - \mathcal{L}_{v_2}\alpha_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}d\langle v_1 + \alpha_1, v_2 + \alpha_2 \rangle^- - \iota_{v_2}\iota_{v_1}\omega \end{aligned}$$

Onde na terceira igualdade usamos as fórmulas de Cartan e somamos e subtraímos o termo  $\iota_{v_2}\iota_{v_1}dB_i$ . Portanto, pela definição da cisão chegamos na equação 5.16  $\square$

O colchete  $[\cdot, \cdot]_C$  da equação 5.16 é chamado colchete de Courant twisted. Note que, como vimos na seção anterior, o colchete de Courant twisted satisfaz os axiomas de algebroide de Courant se, e somente se, a 3-forma  $\omega$  é fechada. O que temos nesse caso pois  $\omega$  é pré-2-plética. Portanto,  $C \rightarrow M$  com a âncora  $\rho(s(v) + \alpha) = v$ , forma bilinear simétrica padrão e colchete de Courant twisted  $[\cdot, \cdot]_C$  é um algebroide de Courant.

**Observação 5.4.1.** *Assim como no caso simplético, a construção é independente da escolha de trivialização a menos de um isomorfismo que preserva a cisão.*

**Lema 5.4.5.** *Sejam  $v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{X}(M)$ , temos que:*

$$-\omega(v_1, v_2, v_3) = \langle [s(v_1), s(v_2)]_C, s(v_3) \rangle^+. \quad (5.17)$$

*Demonstração.* Pelas definições do colchete de Courant twisted, da cisão e da formula bilinear simétrica temos localmente que:

$$\begin{aligned}
\langle [s(v_1), s(v_2)]_C, s(v_3) \rangle^+ &= \langle s([v_1, v_2]) - \frac{1}{2}d\langle v_1, v_2 \rangle^- - \iota_{v_2}\iota_{v_1}\omega, s(v_3) \rangle^+ \\
&= \langle [v_1, v_2] - \iota_{[v_1, v_2]}B_i - \iota_{v_2}\iota_{v_1}\omega, v_3 - \iota_{v_3}B_i \rangle^+ \\
&= -\iota_{[v_1, v_2]}\iota_{v_3}B_i - \iota_{v_3}\iota_{[v_1, v_2]}B_i - \iota_{v_3}\iota_{v_2}\iota_{v_1}\omega \\
&= -\iota_{v_3}\iota_{v_2}\iota_{v_1}\omega
\end{aligned}$$

Onde a última iguadade segue da anti-simetria de  $B_i$ . □

Portanto, pela seção anterior, o algebroide de Courant  $C$  possui classe de Ševera  $[\omega]$ .

## 5.5 2-Álgebras de Lie

Nessa seção iremos ver dois exemplos importantes de  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos. Estes, serão usados na próxima seção.

### 5.5.1 A 2-álgebra de Lie de uma variedade 2-plética.

**Teorema 5.5.1.** (BAEZ; HOFFNUNG; ROGERS, 2010) *Seja  $(M, \omega)$  uma variedade 2-plética. Então, existe uma  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos  $L_\infty(M, \omega) = \{L_1 \xrightarrow{d} \Omega_{Ham}^1(M)\}$  consistindo de:*

- $L_0 = \Omega_{Ham}^1(M)$ ,
- $L_1 = C^\infty(M)$ ,
- $d$  é a diferencial de de Rham,
- o mapa bilinear  $[\cdot, \cdot]$  em grau zero é o colchete de Poisson generalizado  $\{\cdot, \cdot\}$  e trivial nos graus 1 e 2,
- o jacobador é dado pelo mapa linear  $J : \Omega_{Ham}^1(M) \otimes \Omega_{Ham}^1(M) \otimes \Omega_{Ham}^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , onde  $J(\alpha, \beta, \gamma) = \iota_{v_\alpha}\iota_{v_\beta}\iota_{v_\gamma}\omega$ .

**Observação 5.5.1.** *Note que a diferencial  $d$  é bem definida pois qualquer forma exata é hamiltoniana com campo hamiltoniano nulo. Pela proposição 5.1.1, o colchete definido acima é antissimétrico, ou seja, satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) da definição 2.7.1. A propriedade (d) é claramente safisfeita pois  $\omega$  é antissimétrica. A propriedade (e) segue pois como o colchete em grau 1 é zero temos que  $0 = d[\alpha, f]$*

e  $[\alpha, df] = \iota_{v_{df}} \iota_{v_\alpha} \omega = 0$  pois o campos hamiltoniano de uma forma exata é zero. A propriedade (f) segue pois o colchete em grau 1 é trivial. Para as demonstrações das propriedades (g), (h) e (i) ver (ROGERS, 2011).

### 5.5.2 A 2-álgebra de Lie de um algebroide de Courant

**Teorema 5.5.2.** (ROYTENBERG, 2007; ROYTENBERG, 2002) *Seja  $(M, \omega)$  uma variedade 2-plética. Se  $C$  é o algebroide de Courant exato obtido através de  $\omega$ , como visto na seção anterior, então existe uma  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos  $L_\infty(C) = \{C_1 \xrightarrow{D} C_0\}$  onde:*

- $C_0 = \Gamma(C)$ ,
- $C_1 = C^\infty(M)$
- A diferencial  $L_1 \xrightarrow{D} L_0$  é  $D = \rho^*d$ ,
- O colchete em grau zero  $[\cdot, \cdot]$  é:

$$[e_1, e_2] = [e_1, e_2]_C,$$

ou seja, é o colchete de Courant twisted,

$$[e, f] = -[f, e] = \frac{1}{2} \langle e, df \rangle^+$$

em grau 1 e trivial em grau 2.

- O jacobador é o mapa  $J : \Gamma(C) \otimes \Gamma(C) \otimes \Gamma(C) \rightarrow C^\infty(M)$  definido por

$$\begin{aligned} J(e_1, e_2, e_3) &= -\frac{1}{2} N_{ij}(e_1, e_2, e_3) \\ &= -\frac{1}{6} (\langle [e_1, e_2]_C, e_3 \rangle^+ + \langle [e_3, e_1]_C, e_2 \rangle^+ \\ &\quad + \langle [e_2, e_3]_C, e_1 \rangle^+) \end{aligned}$$

**Observação 5.5.2.** *Note que as propriedades (a), (b) e (c) da definição 2.7.1 segue pois estamos usando a definição 5.2.1 para algebroides de Courant, ou seja, estamos assumindo que o colchete é antissimétrico. Para uma prova completa ver (ŠEVERA; WEINSTEIN, 2001) ou (ROYTENBERG, 2007) e (ROYTENBERG, 1999).*

## 5.6 Relação algébrica entre variedades 2-plética e algebroides de Courant.

Essa seção corresponde ao análogo 2-plético da seção 3.9. O teorema abaixo corresponde a versão 2-plética do teorema 3.9.1.

**Teorema 5.6.1.** (ROGERS, 2013) *Seja  $(M, \omega)$  uma variedade 2-plética e seja  $C$  o algebroides de Courant exato obtido através de  $\omega$ . Seja  $L_\infty(M, \omega)$  e  $L_\infty(C)$  as  $L_\infty$ -álgebras de 2 termos vistas na seção anterior. Então, existe um  $L_\infty$  morfismo entre  $L_\infty(M, \omega)$  e  $L_\infty(C)$ .*

Para facilitar a prova do teorema vamos primeiramente provar alguns lemas que serão utilizados na prova.

**Lema 5.6.2.** *Sejam  $\alpha, \beta \in \Omega_{Ham}^1(M)$  com campos de vetores hamiltonianos  $v_\alpha$  e  $v_\beta$ , respectivamente. Então,  $\mathcal{L}_{v_\alpha}\beta = \{\alpha, \beta\} + d\iota_{v_\alpha}\beta$ .*

*Demonstração.* A prova é um cálculo direto usando as definições de formas hamiltonianas e do colchete de Poisson generalizado.

$$\mathcal{L}_{v_\alpha}\beta = \iota_{v_\alpha}d\beta + d\iota_{v_\alpha}\beta = -\iota_{v_\alpha}\iota_{v_\beta}\omega + d\iota_{v_\alpha}\beta = \{\alpha, \beta\} + d\iota_{v_\alpha}\beta.$$

□

**Lema 5.6.3.** *Sejam  $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_{Ham}^1(M)$  com campos de vetores hamiltonianos  $v_\alpha, v_\beta$  e  $v_\gamma$ , respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} \iota_{[v_\alpha, v_\beta]}\gamma + p.c = & - 3\iota_{v_\alpha}\iota_{v_\beta}\iota_{v_\gamma}\omega + \iota_{v_\alpha}d\langle v_\beta + \beta, v_\gamma + \gamma \rangle^- \\ & + \iota_{v_\gamma}d\langle v_\alpha + \alpha, v_\beta + \beta \rangle^- + \iota_{v_\beta}d\langle v_\gamma + \gamma, v_\alpha + \alpha \rangle^- \end{aligned}$$

onde *p.c* significa permutações cíclicas nos símbolos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle^-$  é dado pela equação 5.5.

*Demonstração.* O lema anterior implica que:

$$\begin{aligned} \iota_{[v_\alpha, v_\beta]}\gamma &= \mathcal{L}_{v_\alpha}\iota_{v_\beta}\gamma - \iota_{v_\beta}\mathcal{L}_{v_\alpha}\gamma \\ &= \mathcal{L}_{v_\alpha}\iota_{v_\beta}\gamma - \iota_{v_\beta}(\{\alpha, \gamma\} + d\iota_{v_\alpha}\gamma) \\ &= \iota_{v_\alpha}d\iota_{v_\beta}\gamma - \iota_{v_\beta}\iota_{v_\gamma}\iota_{v_\alpha}\omega - \iota_{v_\beta}d\iota_{v_\alpha}\gamma, \end{aligned}$$

note que a ultima igualdade segue da definição do colchete de Poisson generalizado.

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} \iota_{[v_\gamma, v_\alpha]}\beta &= \iota_{v_\gamma}d\iota_{v_\alpha}\beta - \iota_{v_\alpha}\iota_{v_\beta}\iota_{v_\gamma}\omega - \iota_{v_\alpha}d\iota_{v_\gamma}\beta \\ \iota_{[v_\beta, v_\gamma]}\alpha &= \iota_{v_\beta}d\iota_{v_\gamma}\alpha - \iota_{v_\gamma}\iota_{v_\alpha}\iota_{v_\beta}\omega - \iota_{v_\gamma}d\iota_{v_\beta}\alpha, \end{aligned}$$

o produto antissimétrico padrão, eq. 5.5, nos fornece:

$$\iota_{v_\alpha}d\iota_{v_\beta}\gamma - \iota_{v_\alpha}d\iota_{v_\gamma}\beta = \iota_{v_\alpha}d\langle v_\beta + \beta, v_\gamma + \gamma \rangle^-.$$

Logo, temos pela antissimetria de  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \iota_{[v_\alpha, v_\beta]} \gamma + \iota_{[v_\gamma, v_\alpha]} \beta + \iota_{[v_\beta, v_\gamma]} \alpha = & - 3\iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\gamma} \omega + \iota_{v_\alpha} d\langle v_\beta + \beta, v_\gamma + \gamma \rangle^- \\ & + \iota_{v_\gamma} d\langle v_\alpha + \alpha, v_\beta + \beta \rangle^- + \iota_{v_\beta} d\langle v_\gamma + \gamma, v_\alpha + \alpha \rangle^- \end{aligned}$$

□

**Lema 5.6.4.** *Sejam  $\alpha, \beta \in \Omega_{Ham}^1(M)$  formas hamiltonianas com campos de vetores hamiltonianos  $v_\alpha$  e  $v_\beta$ , respectivamente. Então,*

$$\mathcal{L}_{v_\alpha} \beta - \mathcal{L}_{v_\beta} \alpha = 2\{\alpha, \beta\} + d\langle v_\alpha + \alpha, v_\beta + \beta \rangle^-.$$

*Demonstração.* Usando o lema 5.6.2 e antissimetria do colchete de Poisson generalizado, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{v_\alpha} \beta - \mathcal{L}_{v_\beta} \alpha &= \{\alpha, \beta\} + d\iota_{v_\alpha} \beta - \{\beta, \alpha\} - d\iota_{v_\beta} \alpha \\ &= 2\{\alpha, \beta\} + d(\iota_{v_\alpha} \beta - \iota_{v_\beta} \alpha) \\ &= 2\{\alpha, \beta\} + d\langle v_\alpha + \alpha, v_\beta + \beta \rangle^-. \end{aligned}$$

□

*Demonstração do Teorema 5.6.1.* Seja  $s : TM \rightarrow C$  uma cisão. Em analogia com o teorema 3.9.1, seja  $\phi_0 : \Omega_{Ham}^1(M) \rightarrow \Gamma(C)$  dado por

$$\phi_0(\alpha) = s(v_\alpha) + \alpha,$$

onde  $v_\alpha$  é o campo de vetores hamiltoniano de  $\alpha$ . Seja  $\phi_1 : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  a identidade. Então,  $\phi : L_\infty(M, \omega) \rightarrow L_\infty(C)$  é um mapa de cadeia, de fato:

$$\phi_0(df) = s(v_{df}) + df = df$$

. Seja  $\Phi : \Omega_{Ham}^1(M) \otimes \Omega_{Ham}^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dado por

$$\Phi(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\langle v_\alpha + \alpha, v_\beta + \beta \rangle^-$$

Mostraremos agora que  $\Phi$  satisfaz as duas primeiras propriedades de 2.7.2 (ou seja,  $\Phi$  é uma homotopia de cadeia). Nós temos

$$\begin{aligned} [\phi_0(\alpha), \phi_0(\beta)]_C &= [s(v_\alpha) + \alpha, s(v_\beta) + \beta]_C \\ &= s([v_\alpha, v_\beta]) + \mathcal{L}_{v_\alpha} \beta - \mathcal{L}_{v_\beta} \alpha - \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega \\ &\quad - \frac{1}{2} d\langle v_\alpha + \alpha, v_\beta + \beta \rangle^- \\ &= s([v_\alpha, v_\beta]) + \{\alpha, \beta\} + \frac{1}{2} d\langle v_\alpha + \alpha, v_\beta + \beta \rangle^- \\ &= s(v_{\{\alpha, \beta\}}) + \{\alpha, \beta\} - d\Phi(\alpha, \beta) \end{aligned} \tag{5.18}$$

A segunda linha é apenas a definição do colchete de Courant twisted, enquanto que a penultima linha segue do lema 5.6.4 e da definição do colchete de Poisson generalizado, a ultima linha segue pela proposição 5.1.1. Logo, temos que:

$$\phi_0(\{\alpha, \beta\}) - [\phi_0(\alpha), \phi_0(\beta)]_C = d\Phi(\alpha, \beta).$$

Em grau 1, o colchete em  $L_\infty(M, \omega)$  é trivial. Segue da definição do colchete em grau 1 de  $L_\infty(C)$  que

$$\phi_1([\alpha, f]) - [\phi_0(\alpha), \phi_1(f)] = -\frac{1}{2}\langle s(v_\alpha) + \alpha, df \rangle^+.$$

Da eq. 5.15, temos

$$\langle s(v_\alpha) + \alpha, s(0) + df \rangle^+ = \iota_{v_\alpha} df = \Phi(\alpha, df).$$

Portanto,

$$\phi_1([\alpha, f]) - [\phi_0(\alpha), \phi_1(f)] = \Phi(\alpha, df),$$

similarmente,

$$\phi_1([f, \alpha]_L) - [\phi_1(f), \phi_0(\alpha)]_{L'} = \Phi(df, \alpha).$$

Logo  $\Phi$  satisfaz as duas primeiras propriedades da definição 2.7.2.

Nos resta apenas mostrar a condição de coerência, equação do último item da definição 2.7.2. Primeiramente vamos reordenar a equação de coerência, tornando-a:

$$\begin{aligned} \phi_1(J(\alpha, \beta, \gamma)) - J(\phi_0(\alpha), \phi_0(\beta), \phi_0(\gamma)) &= [\phi_0(\alpha), \Phi(\beta, \gamma)] + [\Phi(\alpha, \gamma), \phi_0(\beta)] + \Phi(\alpha, [\beta, \gamma]) \\ &+ \Phi([\alpha, \gamma], \beta) - \Phi([\alpha, \beta], \gamma) - [\Phi(\alpha, \beta), \phi_0(\gamma)] \end{aligned}$$

Primeiramente vamos reescrever o jacobador  $J$  de  $L_\infty(C)$  utilizando a penultima linha de 5.18:

$$\begin{aligned} J(\phi_0(\alpha), \phi_0(\beta), \phi_0(\gamma)) &= -\frac{1}{6}\langle [\phi_0(\alpha), \phi_0(\beta)], \phi_0(\gamma) \rangle^+ + p.c \\ &= -\frac{1}{6}\langle s([v_\alpha, v_\beta]) + \{\alpha, \beta\} - d\Phi(\alpha, \beta), s(v_\gamma) + \gamma \rangle^+ + p.c \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \langle s([v_\alpha, v_\beta]) + \{\alpha, \beta\} - d\Phi(\alpha, \beta), s(v_\gamma) + \gamma \rangle^+ &= \langle s([v_\alpha, v_\beta]) + \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega - d\Phi(\alpha, \beta), s(v_\gamma) + \gamma \rangle^+ \\ &= \langle s([v_\alpha, v_\beta]), s(v_\gamma) \rangle^+ + \langle [v_\alpha, v_\beta] - \iota_{[v_\alpha, v_\beta]} B_i, \gamma \rangle^+ \\ &+ \langle \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega, s(v_\gamma) \rangle^+ + \langle \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega, \gamma \rangle^+ - \langle d\Phi(\alpha, \beta), s(v_\gamma) \rangle^+ \\ &+ \langle d\Phi(\alpha, \beta), \gamma \rangle^+ \\ &= \iota_{[v_\alpha, v_\beta]} \gamma + \iota_{v_\gamma} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega - \iota_{v_\gamma} d\Phi(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

onde usamos  $s(v) = v - \iota_v B_i$  e a definição do produto simétrico padrão. Com isso, fazendo as permutações cíclica e utilizando a antissimetria de  $\omega$ , obtemos:

$$\begin{aligned} J(\phi_0(\alpha), \phi_0(\beta), \phi_0(\gamma)) &= \frac{1}{6} \iota_{v_\gamma} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega - \frac{1}{6} \iota_{v_\gamma} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega - \frac{1}{6} \iota_{v_\gamma} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega - \frac{1}{6} (\iota_{[v_\alpha, v_\beta]} \gamma - \iota_{v_\gamma} d\Phi(\alpha, \beta) + p.c) \\ &= -\frac{1}{2} \iota_{v_\gamma} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega - \frac{1}{6} (\iota_{[v_\alpha, v_\beta]} \gamma - \iota_{v_\gamma} d\Phi(\alpha, \beta) + p.c). \end{aligned}$$

Lema 5.6.3 junto com a definição de  $\Phi$  implica que:

$$\iota_{[v_\alpha, v_\beta]} \gamma + p.c = -3 \iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\gamma} \omega - (2 \iota_{v_\gamma} d\Phi(\alpha, \beta) + p.c), \quad (5.19)$$

logo o jacobador de  $L_\infty(C)$  torna-se

$$J(\phi_0(\alpha), \phi_0(\beta), \phi_0(\gamma)) = \iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\gamma} \omega + \left(\frac{1}{2} \iota_{v_\gamma} d\Phi(\alpha, \beta) + p.c\right).$$

Por definição,  $J(\alpha, \beta, \gamma) = \iota_{v_\alpha} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\gamma} \omega$ . Portanto, nesse caso, o lado esquerdo da condição de coerência é

$$\phi_1((\alpha, \beta, \gamma)) - J(\phi_0(\alpha), \phi_0(\beta), \phi_0(\gamma)) = -\frac{1}{2} \iota_{v_\gamma} d\Phi(\alpha, \beta) + p.c. \quad (5.20)$$

Como os colchetes e a homotopia  $\Phi$  são anti-simétricos, o lado direito da equação de coerência pode ser reescrito como:

$$(\Phi(\alpha, [\beta, \gamma]_L) + p.c) - ([\Phi(\alpha, \beta), \phi_0(\gamma)]_{L'} + p.c). \quad (5.21)$$

Considere o primeiro termo da eq. 5.21. A definição de  $\Phi$ , com a definição do colchete de Poisson generalizado, e com o fato do colchete de campos hamiltonianos ser hamiltoniano, temos que:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \{\beta, \gamma\}) &= -\frac{1}{2} (\iota_{v_\alpha} \{\beta, \gamma\} - \iota_{[v_\beta, v_\gamma]} \alpha) \\ &= -\frac{1}{2} (\iota_{v_\alpha} \iota_{v_\gamma} \iota_{v_\beta} \omega - \iota_{[v_\beta, v_\gamma]} \alpha) \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\Phi(\alpha, [\beta, \gamma]) + p.c = -\frac{3}{2} \iota_{v_\gamma} \iota_{v_\beta} \iota_{v_\alpha} \omega + \frac{1}{2} (\iota_{[v_\beta, v_\gamma]} \alpha + p.c).$$

E, utilizando novamente a equação 5.19 temos que

$$\Phi(\alpha, [\beta, \gamma]) + p.c = -\iota_{v_\gamma} d\Phi(\alpha, \beta) + p.c.$$

Pela definição do colchete  $[\cdot, \cdot]$  em grau 1 de  $L_\infty(C)$ , o segundo termo da eq. 5.21 temos que:

$$\begin{aligned} [\Phi(\alpha, \beta), \phi_0(\gamma)] &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} (\iota_{v_\alpha} \beta - \iota_{v_\beta} \alpha), s(v_\gamma) + \gamma \right) \\ &= \frac{1}{4} \langle s(v_\gamma) + \gamma, d(\iota_{v_\alpha} \beta - \iota_{v_\beta} \alpha) \rangle^+ \\ &= \frac{1}{4} \iota_{v_\gamma} d(\iota_{v_\alpha} \beta - \iota_{v_\beta} \alpha) \\ &= \frac{1}{2} d\Phi(\alpha, \beta) \end{aligned}$$



Logo, o segundo termo do lado direito da equação de coerência torna-se:

$$[\Phi(\alpha, \beta), \phi_0(\gamma)] + p.c = \frac{1}{2} \iota_{v_\gamma} d\Phi(\alpha, \beta) + p.c.$$

Portanto a condição de coerência é satisfeita e  $(\phi_\bullet, \Phi) : L_\infty(M, \omega) \rightarrow L_\infty(C)$  é um morfismo de  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos.  $\square$

Novamente, vamos restringir o conjunto  $\Gamma(C)$  e assim obtermos um isomorfismo.

**Definição 5.6.1.** *Seja  $C$  o algebroides de Courant exato associado a uma variedade 2-plética  $M$  equipado com uma cisão  $s : TM \rightarrow C$ . Dizemos que uma seção  $e = s(v) + \alpha$  preserva a cisão se, e somente se,  $\forall v' \in \mathfrak{X}(M)$*

$$[e, s(v')]_S = s([v, v']).$$

O subespaço das seções que preservam a cisão é denotado por  $\Gamma(C)^s$ .

Note que na definição acima é utilizado o colchete de Dorfman twisted. 3.9.1.

**Proposição 5.6.1.** *(ROGERS, 2013) Seja  $C$  o mesmo algebroides de Courant exato associado a  $(M, \omega)$  equipado com uma cisão  $s : TM \rightarrow C$ , então existe uma  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos  $L_\infty(C)^s = (C_1 \xrightarrow{D} C_0)$  onde:*

- $C_0 = \Gamma(C)^s$ ,
- $C_1 = C^\infty(M)$
- A diferencial  $L_1 \xrightarrow{D} L_0$  é  $D = \rho^*d$ ,
- O colchete  $[\cdot, \cdot]$  é:

$$[e_1, e_2] = [e_1, e_2]_C$$

em grau zero, e

$$[e, f] = -[f, e] = \frac{1}{2} \langle e, df \rangle^+$$

em grau 1,

- O jacobador é o mapa  $J : \Gamma(C)^s \otimes \Gamma(C)^s \otimes \Gamma(C)^s \rightarrow C^\infty(M)$  definido por

$$\begin{aligned} J(e_1, e_2, e_3) &= -\frac{1}{2} N_{ij}(e_1, e_2, e_3) \\ &= -\frac{1}{6} (\langle [e_1, e_2]_C, e_3 \rangle^+ + \langle [e_3, e_1]_C, e_2 \rangle^+ \\ &\quad + \langle [e_2, e_3]_C, e_1 \rangle^+) \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seja  $v'$  um campo de vetores em  $M$ . Pela definição do colchete de Dorfman twisted, temos necessariamente que  $[df, s(v')]_S = 0 \forall f \in C^\infty(M)$ . Portanto, o complexo de cadeia é bem definido. Agora, sejam  $e_1, e_2$  seções que preservam a cisão, com  $e_i = s(v_i) + \alpha_i$ . Como o colchete de Dorfman twisted e o colchete de campos de vetores obedecem a identidade de Jacobi, um cálculo análogo ao feito na proposição 3.9.1 nos mostra que:

$$[[e_1, e_2]_S, s(v')]_S = s([[v_1, v_2], v']).$$

Sabemos que a relação entre o colchete de Dorfman e do colchete de Courant é:

$$[e_1, e_2]_C = [e_1, e_2]_S - \frac{1}{2}\langle e_1, e_2 \rangle^+.$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} [[e_1, e_2]_C, s(v')]_S &= [[e_1, e_2]_S, s(v')]_S - \frac{1}{2}[d\langle e_1, e_2 \rangle^+, s(v')]_S \\ &= s([[v_1, v_2], v']) + s[0, v'] - \iota_{v'} dd\langle e_1, e_2 \rangle^+ - \iota_{v'} \iota_0 \omega \quad (5.22) \\ &= s([[v_1, v_2], v']) \end{aligned}$$

Logo, temos que  $\gamma^s(C)$  é fechado pelo colchete. Segue do teorema 5.5.2 que os axiomas de uma 2-álgebra de Lie são satisfeitos.  $\square$

O próximo resultado é o análogo 2-plético do corolário 3.9.1.1.

**Proposição 5.6.2.** (ROGERS, 2013)  $L_\infty(M, \omega)$  e  $L_\infty(C)^s$  são isomorfos como  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos.

*Demonstração.* Considere o  $L_\infty$ -morfismo construído no teorema 5.6.1. Seja  $v' \in \mathfrak{X}(M)$  e  $e = s(v) + \alpha$ . Pela definição do colchete de Dorfman twisted,  $[e, s(v')]_S = s([v, v'])$  se, e somente se,  $\iota_{v'}(d\alpha + \iota_v \omega) = 0$ . Portanto, temos que  $v = v_\alpha$ , logo uma seção de  $C$  preserva a cisão se, e somente se, for do tipo  $s(v_\alpha) + \alpha$ . Portanto, uma seção preserva a cisão se, e somente se, encontra-se na imagem do mapa  $\phi_0$ . Logo, temos sobrejetividade, e como o mapa também é injetivo pois campos hamiltonianos são únicos, segue o resultado.  $\square$



## 6 Simetrias infinitesimais de $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbes

Nesse capítulo iremos explorar a relação existente entre simetrias infinitesimais de bundle gerbes e geometria 2-plética. Essa relação é o análogo 2-plético do teorema 6.1.4, que foi obtido por Kostant em (DUDLEY et al., 1970). Esse capítulo tem como base o artigo de Krepski e Vaughan (KREPSKI; VAUGHAN, 2022).

### 6.1 Quantomorfismos infinitesimais e álgebra de Poisson

Nessa seção lembraremos a construção de um isomorfismo de álgebras de Lie existente entre a álgebra de Poisson e a álgebra de quantomorfismos infinitesimais de um fibrado de linhas. Essa construção foi obtida por Kostant em (DUDLEY et al., 1970).

#### Notações:

1. Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética e  $f \in C^\infty(M)$ , denotamos por  $v_f$  o campo de vetores hamiltoniano de  $f$ .
2. Seja  $\pi : P \rightarrow M$  um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal e  $\theta \in \text{Lie}(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ . Denotamos por  $\partial_\theta$  o campo de vetores gerador da ação principal.
3. Seja  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\gamma$  uma conexão do  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $\pi : P \rightarrow M$ . Denotamos por  $\tilde{\xi}$  o levantamento horizontal de  $\xi$ .

**Observação 6.1.1.** *Sabemos que para todo  $\theta \in \text{Lie}(\mathbb{S}^1)$  temos  $d\pi\partial_\theta = 0$ . Logo, temos que  $d\pi[\tilde{\xi}, \partial_\theta] = 0$  e  $\gamma([\tilde{\xi}, \partial_\theta]) = -(\pi^*\bar{\omega})(\tilde{\xi}, \partial_\theta) = 0$  onde  $\bar{\omega}$  é a curvatura de  $\gamma$ . Portanto,  $[\tilde{\xi}, \partial_\theta]$  é vertical e horizontal, logo temos que  $[\tilde{\xi}, \partial_\theta] = 0$ .*

**Definição 6.1.1.** *Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética. Uma **pré-quantização** de  $(M, \omega)$  consiste de um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal  $\pi : P \rightarrow M$  com uma conexão  $\gamma \in \Omega^1(P)$  cuja curvatura é  $-\theta\omega$  para qualquer  $\theta \in \text{Lie}(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ .*

**Definição 6.1.2.** *Sejam  $\pi_1 : (P_1, \gamma_1) \rightarrow (M_1, \omega_1)$  e  $\pi_2 : (P_2, \gamma_2) \rightarrow (M_2, \omega_2)$  duas pré-quantizações. Um difeomorfismo  $K : P_1 \rightarrow P_2$  é chamado de **quantomorfismo** se  $K^*\gamma_2 = \gamma_1$ .*

**Observação 6.1.2.** *Seja  $K : P_1 \rightarrow P_2$  um quantomorfismo, para todo  $\theta \in \text{Lie}(\mathbb{S}^1)$  o campo  $\partial_\theta$  em  $P_1$  é completamente especificado pelas condições  $\gamma_1(\partial_\theta) = \theta$  e  $\iota_{\partial_\theta}d\gamma_1 = 0$ ,*

o mesmo vale em  $P_2$ . Como  $K^*\gamma_2 = \gamma_1$ , temos que  $K_*\frac{\partial}{\partial\theta} = \partial_\theta$  para todo  $\theta$ . Logo,  $K$  é equivariante com respeito as ações em  $P_1$  e  $P_2$ .

**Definição 6.1.3.** *Seja  $\pi : (P, \gamma) \rightarrow (M, \omega)$  uma pré-quantização. Um **quantomorfismo infinitesimal** de  $P$  é um campo de vetores  $\xi \in \mathfrak{X}(P)$  cujo fluxo  $\Phi_t$  em  $P$  é um quantomorfismo para cada  $t$ . Denotamos por  $\mathcal{Q}(P, \gamma)$  o espaço dos quantomorfismos infinitesimais.*

**Observação 6.1.3.** *Seja  $\xi \in \mathfrak{X}(P)$  com fluxo  $\Phi_t$ , lembre-se que  $\gamma$  é preservada por  $\Phi_t$  se, e somente se,  $\mathcal{L}_\xi\gamma = 0$ . Portanto, temos que*

$$\mathcal{Q}(P, \gamma) = \{\xi \in \mathfrak{X}(P) \mid \mathcal{L}_\xi\gamma = 0\}.$$

**Lema 6.1.1.** *Seja  $\pi : (P, \gamma) \rightarrow (M, \omega)$  uma pré-quantização. Para todas  $f, g \in C^\infty(M)$  temos que:*

$$[\tilde{v}_f, \tilde{v}_g] = \tilde{v}_{\{f, g\}} - \pi^*\{f, g\}\partial_\theta.$$

*Demonstração.* Como o levantamento horizontal é único, basta verificar que:

1.  $d\pi[\tilde{v}_f, \tilde{v}_g] = d\pi(\tilde{v}_{\{f, g\}} - \pi^*\{f, g\}\partial_\theta)$
2.  $\gamma([\tilde{v}_f, \tilde{v}_g]) = \gamma(\tilde{v}_{\{f, g\}} - \pi^*\{f, g\}\partial_\theta)$

Para 1, como  $d\pi\partial_\theta = 0$  e  $[v_f, v_g] = v_{\{f, g\}}$  para todas  $f, g \in C^\infty(M)$ , note que

$$d\pi(\tilde{v}_{\{f, g\}} - \pi^*\{f, g\}\partial_\theta) = d\pi\tilde{v}_{\{f, g\}} = v_{\{f, g\}} = [v_f, v_g]$$

por outro lado,

$$d\pi[\tilde{v}_f, \tilde{v}_g] = [v_f, v_g]$$

Logo, 1 é satisfeita. Para 2, temos que:

$$\gamma(\tilde{v}_{\{f, g\}} - \pi^*\{f, g\}\partial_\theta) = -\theta\pi^*\{f, g\}$$

por outro lado,

$$\gamma([\tilde{v}_f, \tilde{v}_g]) = -\theta\pi^*\omega(\tilde{v}_f, \tilde{v}_g) = -\theta\pi^*\{f, g\}$$

Logo, 2 é satisfeita. □

**Lema 6.1.2.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$ . O mapa  $E : C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(P)$  definido por*

$$E(f) = \tilde{v}_f + \pi^*f\partial_\theta$$

*é um morfismo de álgebras de Lie.*

*Demonstração.* Sejam  $f, g \in C^\infty(M)$ . Precisamos mostrar que o colchete é preservado, ou seja,

$$\tilde{v}_{\{f,g\}} + \pi^*\{f, g\}\partial_\theta = [\tilde{v}_f + \pi^*f\partial_\theta, \tilde{v}_g + \pi^*g\partial_\theta]$$

Pelo lema 6.1.1, o lado esquerdo torna-se

$$[\tilde{v}_f, \tilde{v}_g] + 2\pi^*\{f, g\}\partial_\theta.$$

Expandindo o lado direito, temos que:

$$[\tilde{v}_f, \tilde{v}_g] + [\tilde{v}_f, \pi^*g\partial_\theta] + [\pi^*f\partial_\theta, \tilde{v}_g] + [\pi^*f\partial_\theta, \pi^*g\partial_\theta]$$

O quarto termo se anula pois  $\partial_\theta(\pi^*f) = \partial_\theta(\pi^*g) = 0$ . O terceiro termo, pela observação 6.1.1, se reduz a

$$-(\tilde{v}_g)\pi^*f\partial_\theta = \pi^*\{f, g\}\partial_\theta.$$

Pelo mesmo argumento o segundo termo torna-se

$$\pi^*\{f, g\}\partial_\theta$$

e, portanto, o lado direito torna-se

$$[\tilde{v}_f, \tilde{v}_g] + 2\pi^*\{f, g\}\partial_\theta.$$

□

**Lema 6.1.3.** Para toda  $f \in C^\infty(M)$  temos que  $E(f) \in \mathcal{Q}(P, \gamma)$ .

*Demonstração.*

$$\mathcal{L}_{E(f)}\gamma = \iota_{E(f)}d\gamma + d\iota_{E(f)}\gamma = -\theta\pi^*(\iota_{v_f}\omega) + \theta\pi^*df = 0.$$

□

**Teorema 6.1.4.** O mapa  $E : C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{Q}(P, \gamma)$  é um isomorfismo de álgebras de Lie cuja inversa  $F : \mathcal{Q}(P, \gamma) \rightarrow C^\infty(M)$  é definida por

$$\gamma(\xi) = \theta\pi^*F(\xi),$$

para todo  $\xi \in \mathcal{Q}(P, \gamma)$  e  $\theta \in \text{Lie}(\mathbb{S}^1)$ .

*Demonstração.* Primeiramente vamos verificar que  $F$  está bem definida. Seja  $\xi \in \mathcal{Q}(P, \gamma)$ , temos que

$$\mathcal{L}_\xi\gamma = \iota_\xi d\gamma + d\iota_\xi\gamma = 0 \implies \iota_{\partial_\theta}(\iota_\xi d\gamma + d\iota_\xi\gamma) = 0.$$

Como  $d\gamma(\xi, \partial_\theta) = -\theta(\pi^*\omega)(\xi, \partial_\theta) = 0$ , segue que  $\iota_{\partial_\theta}d\iota_\xi\gamma = \mathcal{L}_{\partial_\theta}\gamma(\xi) = 0$ . Logo,  $F$  é bem definida.

Agora, queremos mostrar que  $F(E(f)) = f$  e  $E(F(\xi)) = \xi$ . Temos que:

$$\theta\pi^*F(E(f)) = \gamma(E(f)) = \gamma(\tilde{v}_f + \pi^*f\partial_\theta) = \theta\pi^*f.$$

Logo, como  $\pi$  é submersão sobrejetora,  $F(E(f)) = f$ .

Para mostrar que  $E(F(\xi)) = \xi$ , é suficiente mostrar que  $\gamma(E(F(\xi))) = \gamma(\xi)$  e  $d\pi(E(F(\xi))) = d\pi(\xi)$  pois o levantamento horizontal é único. Por definição, temos que:

$$E(F(\xi)) = \tilde{v}_{F(\xi)} + \pi^*F(\xi)\partial_\theta = \tilde{v}_{F(\xi)} + \frac{1}{\theta}\gamma(\xi)\partial_\theta.$$

Logo,  $\gamma(E(F(\xi))) = \gamma(\xi)$  e  $d\pi(E(F(\xi))) = v_{F(\xi)}$ . Note que,

$$\iota_\xi\pi^*\omega = -\frac{1}{\theta}\iota_\xi d\gamma = \frac{1}{\theta}d(\gamma(\xi)) = \pi^*(dF(\xi))$$

onde a segunda igualdade segue pois  $\mathcal{L}_\xi\gamma = 0$  e a terceira igualdade segue da definição de  $F$ . Portanto,  $\iota_{d\pi(\xi)}\omega = dF(\xi)$  e, pela definição de campo hamiltoniano, temos  $d\pi(\xi) = v_{F(\xi)}$ . Logo,  $d\pi(E(F(\xi))) = d\pi(\xi)$ . Isso conclui que  $E(F(\xi)) = \xi$ .

Como  $E$  e  $F$  são inversas e  $E : C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{Q}(P, \gamma)$  é um morfismo de álgebra de Lie, segue que  $E$  e  $F$  são isomorfismos de álgebras de Lie.  $\square$

## 6.2 Campos de vetores multiplicativos em bundle gerbes

Lembre que um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  pode ser visto como uma  $\mathbb{S}^1$ -extensão central do grupoide de submersão, ver seção 4.2.1, denotamos essa tal extensão por  $\mathcal{P} = \{P \rightrightarrows X\}$ . Diremos que um campo de vetores multiplicativo  $(x_0, x_1) \in \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(P)$  em  $\mathcal{P}$  é um campo de vetores multiplicativo no bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$ . Vamos olhar algumas propriedades desses campos multiplicativos em bundle gerbes. Para fixar a notação, denote por  $\partial$  a diferencial simplicial do grupoide de submersão  $X^{[2]} \rightrightarrows X$  e por  $\delta$  a diferencial simplicial de  $\mathcal{P}$ , além disso denote por  $\partial_\theta$  o campo de vetores gerador da  $\mathbb{S}^1$ -ação principal.

**Proposição 6.2.1.** *Seja  $(x, p)$  um campo de vetores multiplicativo em um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$ . Então, o campo  $p$  é  $\mathbb{S}^1$ -invariante e  $p_3 \otimes p_1$  é projetável para  $p_2$  por  $\mu$ . Aqui  $p_i$  denota o campo de vetores em  $\partial_i^*P$  induzido por  $(x^{[3]}, p)$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $[\partial_\theta, p] = 0$ . Escolha uma conexão para o bundle gerbe  $A$ . Como  $\partial_\theta$  é vertical e  $p$  é projetável para  $x^{[2]}$  por  $\pi_P$  (pois  $(p, x)$  é multiplicativo) temos que  $[\partial_\theta, p]$  é projetável para  $[0, x^2]$  por  $\pi_P$ , portanto,  $[\partial_\theta, p]$  é vertical.

Assim, basta mostrar que  $\iota_{[\partial_\theta, \mathfrak{p}]} \gamma = 0$  pois vetores verticais se anulam na conexão apenas ser for zero. Note que  $\delta\gamma = 0$ , e como  $\mathfrak{p}$  é multiplicativo temos que  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$  se projeta para  $\mathfrak{p}$  pela multiplicação  $m$  do grupoide, com isso, pela definição do mapa de face  $\delta_j$  segue que  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$  se projeta para  $\mathfrak{p}$  pelos mapas  $\delta_j$ . Com isso, temos que  $\delta\iota_{\mathfrak{p}}\gamma = \iota_{(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})}\delta\gamma = 0$  (pois  $\delta$  é somatório de pullbacks e o pullback comuta com a contração de campos projetáveis) e como  $\mathcal{P}$  é próprio (pois é  $\mathbb{S}^1$  extensão central de um grupoide próprio) segue do teorema citado na seção 3.5 que existe uma função  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\delta g = \iota_{\mathfrak{p}}\gamma$ . Observe que  $\delta g$  é  $\mathbb{S}^1$ -invariante. De fato, pela definição de  $\delta$  temos que

$$\delta g = (\pi_P^* \circ \partial_0^* - \pi_P^* \circ \partial_1^*)(g) = \pi_P^*(\partial_0^*(g) - \partial_1^*(g)),$$

note que  $g \in C^\infty(X)$  implica que  $\partial_{0,1}^*(g) \in C^\infty(X^{[2]})$  e portanto como  $\pi_P : P \rightarrow X^{[2]}$  temos que  $\delta g \in C^\infty(P)$  como queríamos, portanto como  $\pi_P$  é  $\mathbb{S}^1$ -invariante, pois é um fibrado principal, temos que  $\delta g$  é  $\mathbb{S}^1$ -invariante. Logo, temos que:

$$\iota_{[\partial_\theta, \mathfrak{p}]} \gamma = \mathcal{L}_{\partial_\theta} \iota_{\mathfrak{p}} \gamma - \iota_{\mathfrak{p}} \mathcal{L}_{\partial_\theta} \gamma = \mathcal{L}_{\partial_\theta} \delta g = 0,$$

como queríamos.

A segunda propriedade segue pois temos  $\mu(x, y, z; p \times q) = (x, y, z; m(p, q))$ ,  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$  é  $m$  projetável para  $\mathfrak{p}$  e  $\mathfrak{p}$  é  $\mathbb{S}^1$ -invariante.  $\square$

**Proposição 6.2.2.** *Qualquer campos de vetores  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) \in \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(P)$  que satisfazem as propriedades da proposição anterior e, além disso,  $\mathfrak{p}$  é projetável para  $\mathfrak{x}$  pelos mapas source e target,  $\pi_0$  e  $\pi_1$ , é um campo de vetores multiplicativo no bundle gerbe  $(P, X)$ .*

*Demonstração.* Claramente as duas propriedades da proposição anterior garante que  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$  é projetável para  $\mathfrak{p}$  por  $m$ , além disso já assumimos que  $\mathfrak{p}$  é projetável para  $\mathfrak{x}$  pelos mapas source e target. Basta mostrar que  $\mathfrak{x}$  é projetável para  $\mathfrak{p}$  pelo mapa unidade. Como temos que  $1 \circ \pi_j = id_P$  vale:

$$\mathfrak{p}(1_x) = d1(d\pi_j(\mathfrak{p})) = d1(\mathfrak{x}(x)).$$

Logo,  $\mathfrak{x}$  é projetável para  $\mathfrak{p}$  pelo mapa unidade.  $\square$

**Exemplos 6.2.1.** *Seja  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$  um campo de vetores multiplicativo em um bundle gerbe local  $(P, X)$  sobre  $M$ . Nesse caso, teremos uma coleção de campos de vetores  $\mathfrak{x}_i \in U_i$ , mas como  $\mathfrak{p}$  deve ser projetável para  $\mathfrak{x}$  por  $\pi_i$  e  $\pi_j$  teremos que  $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_j$  nas interseções  $U_{ij}$ . Com isso, podemos colar os campos  $\mathfrak{x}_i$  e obter um campo global em  $M$  cuja as restrições são exatamente os  $\mathfrak{x}_i$ , denote esse campo global por  $\mathfrak{m}$ . Como no budle gerbe local  $P$  é trivial temos que o campo de vetores  $\mathfrak{p}$  deve ter a forma  $(\mathfrak{x}_{ij}, f_{ij}(x, z))$ ,*



onde  $f_{ij} \in C^\infty(U_{ij} \times \mathbb{S}^1)$ , mas como vimos na proposição 6.2.1,  $\mathbf{p}$  é  $\mathbb{S}^k$ -invariante e, portanto,  $f_{ij}(x, z)$  não depende de  $z$ .

Como o campo de vetores é multiplicativo, temos que  $(\mathbf{p}, \mathbf{p})$  é projetável para  $\mathbf{p}$  pela multiplicação  $m$ . Portanto, temos que  $dm((x_{ij}, f_{ij}(x)), (x_{jk}, f_{jk}(x))) = (x_{ik}, f_{ik}(x))$ . É claro que, pela definição da multiplicação no bundle gerbe local, as funções  $f_{ij}$  colam nas interseções triplas, ou seja

$$f_{ik} - f_{ij} - f_{jk} = g_{ijk}^{-1} dg_{ijk}(\mathbf{m})$$

lembre que  $g_{ijk} : U_{ijk} \rightarrow \mathbb{S}^1$  e satisfaz a condição de cociclo.

Lembre-se que na seção 3.10 mostramos que a categoria  $\mathbb{X}(\mathcal{G})$  de campos de vetores multiplicativos em um grupoide de Lie  $\mathcal{G}$  é uma 2-álgebra de Lie estrita. Estaremos interessados aqui no caso do grupoide de Lie  $P \rightrightarrows X$  associado ao bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$ .

**Observação 6.2.1.** *Lembre-se que na seção 3.10 mostramos que a categoria  $\mathbb{X}(\mathcal{G})$  de campos de vetores multiplicativos em um grupoide de Lie  $\mathcal{G}$  é uma 2-álgebra de Lie estrita. Lembre-se que usamos que seções do algebroid de Lie  $A_{\mathcal{G}}$  fornecem morfismos de campos de vetores. Denotaremos aqui  $\rho(a) = \mathbf{a}$  e  $\vec{a} + \overleftarrow{a} = \bar{\mathbf{a}}$ .*

Estaremos interessados aqui no caso do grupoide de Lie  $P \rightrightarrows X$  associado ao bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(A, B)$ . Veremos portanto algumas propriedades que os morfismos de campos multiplicativos satisfazem.

**Proposição 6.2.3.** *Para qualquer  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a = g\partial_\theta|_X$  define uma seção de  $A_P$  com  $\bar{\mathbf{a}} = (\delta g)\partial_\theta$ .*

*Demonstração.* Denote o mata de unidade por  $1 : X \rightarrow P$ , assim temos que  $a = g1^*\partial_\theta$  e para  $x \in X$  teremos  $a(x) = g(x)\partial_\theta(1_x)$ . Sabemos que  $\partial_\theta$  é vertical com respeito a  $\pi_P$  e como  $\pi_0 = \partial_0 \circ \pi_P$  temos que  $a$  é  $\pi_0$ -vertical e, portanto,  $a \in \Gamma(A_P)$ . Usando os fatos que  $1$  é seção de  $\pi_j$  ( $j = 0, 1$ ),  $\delta = \sum_i (-1)^i \delta_i^*$  e propriedades dos campos de vetores fundamentais temos que  $\bar{\mathbf{a}} = (\delta g)\partial_\theta$ . De fato, seja  $q \in P$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}(q) &= \vec{a}(q) + \overleftarrow{a}(q) \\ &= dR_q(a(\pi_1(q))) + d(L_q \circ i)(a(\pi_0(q))) \\ &= dR_q(g(\pi_1(q))\partial_\theta(q)) + d(L_q \circ i)(g(\pi_0(q))\partial_\theta(q)) \\ &= ((\delta_1^* g)(q) - (\delta_0^* g)(q))\partial_\theta(q) \\ &= (\delta g \partial_\theta)(q). \end{aligned}$$

□

**Proposição 6.2.4.** *Seja  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  um campo de vetores multiplicativo. Se  $\mathbf{x}$  é projetável para o campo nulo em  $M$  por  $\pi$ , então existe uma seção  $a \in \Gamma(A_P)$  tal que  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ .*

*Demonstração.* Se  $\mathbf{p}$  é vertical, temos que  $d\pi_P(\mathbf{p}) = (0, 0)$  e claro como  $\pi_0 = \partial_0 \circ \pi_0$  temos que  $p$  é  $\pi_0$ -vertical e, portanto, podemos pegar uma seção  $a \in \Gamma(A_{\mathcal{P}})$  a seção que pega todo elemento em  $X$  e leva para  $\mathbf{p}$ . Portanto, esse caso é o caso trivial.

Vamos considerar o caso em que  $\mathbf{p}$  é horizontal. Seja  $(\mathbf{x}, 0)$  um campo de vetores em  $X^{[2]}$ ,  $a = 1^*(\widetilde{\mathbf{x}, 0})$  a restrição do levantamento horizontal de  $(\mathbf{x}, 0)$  para  $P$  com respeito a  $A$ . Claramente  $\mathbf{a} = \mathbf{x}$ , nos resta checar que  $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{p}$ . Vamos mostrar que  $\bar{\mathbf{a}}$  é horizontal mostrando primeiramente que:

$$\iota_{\bar{\mathbf{a}}}A = -\delta\mathbf{v}_a$$

(6.1)

onde  $\mathbf{v}_a = 1^*\iota_{\vec{a}}A$  e  $a \in \Gamma(A_{\mathcal{P}})$  é uma seção qualquer. De fato, usando o fato de  $A$  ser multiplicativa, seja  $p \in P$  temos que

$$\begin{aligned} (\iota_{\vec{a}}A)(p) &= A_p dR_p(a(t(p))) \\ &= A_{m(1_{\pi_1(p)}, p)} dR_p(a(\pi_1(p))) \\ &= A_{1_{\pi_1(p)}}(a(\pi_1(p))) \\ &= \mathbf{v}_a((\pi_1(p))). \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de  $A$  ser multiplicativa e o fato de 1 ser seção de  $\pi_1$  e na terceira igualdade usamos novamente a multiplicidade de  $A$ . Similarmente, temos que  $(\iota_{\vec{a}}A)(p) = -\mathbf{v}_a(\pi_0(p))$ . Ou seja, temos que:

$$\begin{aligned} \iota_{\bar{\mathbf{a}}}A(p) &= (\iota_{\vec{a}}A + \iota_{\vec{a}}A)(p) \\ &= \mathbf{v}_a(\pi_1(p)) - \mathbf{v}_a(\pi_0(p)) \\ &= (\pi_1^* - \pi_0^*)\mathbf{v}_a \\ &= -\delta\mathbf{v}_a \end{aligned}$$

Voltando para o caso em que  $a = \widetilde{\mathbf{x}, 0}$ , teremos  $\mathbf{v}_a = 0$  pois  $a$  é horizontal e, portanto, pela equação 6.2 temos que  $\bar{\mathbf{a}}$  é horizontal. Mas, note que:

$$\begin{aligned} (d\pi_P)_{1_x}(\overrightarrow{(\mathbf{x}, 0)(1_x)} + \overleftarrow{(\mathbf{x}, 0)(1_x)}) &= (d\pi_P)_{1_x}(\overrightarrow{(\mathbf{x}, 0)(1_x)}) + (d\pi_P)_{1_x}(\overleftarrow{(\mathbf{x}, 0)(1_x)}) \\ &= (d\pi_P)_{1_x}(dR_{1_x}(\overrightarrow{(\mathbf{x}, 0)})(x)) + (d\pi_P)_{1_x}(dL_{1_x} \circ di_{1_x}(\overleftarrow{(\mathbf{x}, 0)})(x)) \\ &= (d\pi_P)_{1_x}(dR_{1_x}(\overrightarrow{(\mathbf{x}, 0)})(x)) + (d\pi_P)_{1_x}(dL_{1_x}(\overleftarrow{((0, \mathbf{x}))})(x)) \\ &= (\mathbf{x}, 0)(x) + (0, \mathbf{x})(x) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x})(x) \end{aligned}$$

Logo, temos que  $\bar{\mathbf{a}}$  é projetável para  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  por  $\pi_P$  e é horizontal, portanto,  $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{p}$ .  $\square$

**Observação 6.2.2.** *A proposição anterior nos mostra que campos de vetores multiplicativos onde posso contruir um morfismo com o campo nulo é levantamento do campo nulo em  $M$ .*

### 6.3 Campos de vetores multiplicativos em bundle gerbes com estrutura conectiva

Nessa seção iremos introduzir a categoria de campos de vetores multiplicativos no bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  que preservam a estrutura conectiva  $(A, B)$ . Além disso mostraremos o análogo para bundle gerbes do fato de o levantamento horizontal, em relação a uma conexão  $A$  em um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal, é um morfismo de álgebras de Lie se, e somente se, a conexão for plana.

**Proposição 6.3.1.** *O campo de vetores  $(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}) \in \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(P)$  é um campo de vetores multiplicativo.*

*Demonstração.* Vamos utilizar a proposição 6.2.2. Claramente  $\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}$  é projetável para  $\mathbf{x}$  por  $\pi_{i,j}$  para  $j = 0, 1$ . Vamos mostrar a  $\mathbb{S}^1$ -invariância de  $\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}$ . De fato, como  $\partial_\theta$  e  $\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}$  são projetáveis para 0 e  $\mathbf{x}^{[2]}$ , respectivamente, temos que  $[\partial_\theta, \widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}]$  é projetável para 0 por  $\pi_P$  e, portanto, é vertical. Note que:

$$\begin{aligned} \iota_{[\partial_\theta, \widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}} A &= \mathcal{L}_{\partial_\theta} \iota_{\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}} A - \iota_{\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}} \mathcal{L}_{\partial_\theta} A \\ &= -\iota_{\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}} (\iota_{\partial_\theta} \pi_P^* F_A + d\iota_{\partial_\theta}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

A última igualdade segue pois a curvatura se anula nos vetores verticais. Logo,  $\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}$  é  $\mathbb{S}^1$ -invariante. Resta checar a compatibilidade com a multiplicação do grupoide, como  $A$  é multiplicativa, temos que  $A_{m(\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}, \widetilde{\mathbf{x}}^{[2]})} = A_{2\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}} = 0$ . Portanto, o produto de campos horizontais é um campo horizontal. Logo segue a compatibilidade.  $\square$

**Proposição 6.3.2.** *Seja  $a = 1^* g \partial_\theta \in \Gamma(A_\emptyset)$  com  $g = \iota_x \iota_z B$  para  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathfrak{X}(X)$ . Então,  $a$  define um morfismo entre os campos de vetores multiplicativos  $([\mathbf{x}, \mathbf{z}], [\widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}, \widetilde{\mathbf{x}}^{[2]}])$  e  $([\mathbf{x}, \mathbf{z}], [\mathbf{x}, \mathbf{z}]^{[2]})$ .*

*Demonstração.* Vamos usar as proposição 6.2.3 e 6.2.4. Note que:

$$\begin{aligned}
\delta g &= \delta \iota_x \iota_z B \\
&= \iota_{\tilde{x}^{[2]}} \iota_{\tilde{z}^{[2]}} \delta B \\
&= \iota_{\tilde{x}^{[2]}} \iota_{\tilde{z}^{[2]}} dA \\
&= \iota_{\tilde{x}^{[2]}} (\mathcal{L}_{\iota_{\tilde{z}^{[2]}}} A - d\iota_{\tilde{z}^{[2]}} A) \\
&= \iota_{\tilde{x}^{[2]}} \mathcal{L}_{\tilde{z}^{[2]}} A
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue pois  $\tilde{x}^{[2]}$  é projetável para  $\mathbf{x}$  por  $\delta_0 = \pi_0$  e  $\delta_1 = \pi_1$  e como  $\delta$  é a subtração dos pulbacks, temos que ocorre a comutatividade da contração. Agora note que:

$$\begin{aligned}
\iota_{[\tilde{x}^{[2]}, \tilde{z}^{[2]}}] A &= \iota_{\tilde{x}^{[2]}} \mathcal{L}_{\tilde{z}^{[2]}} A - \mathcal{L}_{\tilde{z}^{[2]}} \iota_{\tilde{x}^{[2]}} A \\
&= \iota_{\tilde{x}^{[2]}} \mathcal{L}_{\tilde{z}^{[2]}} A
\end{aligned}$$

Logo, temos que  $\delta g = \iota_{[\tilde{x}^{[2]}, \tilde{z}^{[2]}}] A$ . E, segue da proposição 6.2.4 que

$$(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) = (0, [\tilde{x}^{[2]}, \tilde{z}^{[2]}}] - [\widetilde{[\mathbf{x}, \mathbf{z}]}]^{[2]}).$$

□

**Observação 6.3.1.** *Ou seja, a estrutura conectiva mede a “falha” do levantamento horizontal preservar o colchete, assim como ocorre no caso de fibrados principais.*

**Definição 6.3.1.** *Um campo de vetores  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  em um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  preserva a estrutura conectiva  $(A, B)$  se  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} B + \mathcal{L}_{\mathbf{p}} A$  for exata no complexo duplo de Bott-Shulman-Stashef. Em outras palavras,  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  preserva  $(A, B)$  se existe  $\alpha \in \Omega^1(X)$  tal que:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} B = d\alpha \quad e \quad \mathcal{L}_{\mathbf{p}} A = \delta\alpha.$$

**Proposição 6.3.3.** *Sejam  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(A, B)$  e  $a \in \Gamma(A_P)$ . O campo de vetores multiplicativo  $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$  preserva  $(A, B)$  com  $\alpha = \iota_{\mathbf{a}} B - d\nu_{\mathbf{a}}$ .*

*Demonstração.* Basta fazer um cálculo direto usando a equação 6.2. De fato,

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d\iota_{\mathbf{a}} B \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{a}} B - \iota_{\mathbf{a}} dB \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{a}} B - \iota_{\mathbf{a}} d\pi^* \omega \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{a}} B - \iota_{\mathbf{a}} \pi^* d\omega \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{a}} B
\end{aligned}$$

onde  $\omega$  é a 3-curvatura da estrutura conectiva e sabemos que é fechada. Também temos que:

$$\begin{aligned}\delta\alpha &= \iota_{\bar{\mathbf{a}}}\delta B - d\delta v_{\mathbf{a}} \\ &= \iota_{\bar{\mathbf{a}}}dA + d\iota_{\bar{\mathbf{a}}}A \\ &= \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}A\end{aligned}$$

onde usamos na primeira igualdade o fato de  $\bar{\mathbf{a}}$  ser projetável para  $\mathbf{a}$  por  $\delta_{i,j}$ .  $\square$

**Corolário 6.3.0.1.** (KREPSKI; VAUGHAN, 2022) *Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(A, B)$ . Então, existe uma categoria  $\mathbb{X}(\mathcal{P}; A, B)$  cujos objetos são pares  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \alpha) \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_0 \times \Omega^1(X)$  satisfazendo as equações da definição 6.3.1, e cujos morfismos são seções  $a \in \Gamma(A_P)$ :*

$$a : (\mathbf{x}, \mathbf{p}; \alpha) \rightarrow (\mathbf{x}', \mathbf{p}'; \alpha'), \quad \text{se, e somente se,} \quad (\mathbf{x}', \mathbf{p}'; \alpha') - (\mathbf{x}, \mathbf{p}; \alpha) = (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}, \iota_{\mathbf{a}}B - dv_{\mathbf{a}}).$$

Além disso, o funtor de esquecimento  $\mathbb{X}(\mathbf{P}; \gamma, B) \rightarrow \mathbb{X}(\mathbf{P})$  é plenamente fiel.

**Exemplos 6.3.1.** *Seja  $\mathcal{I}_\omega$  o bundle gerbe trivial com curving  $\omega$ . Vamos analisar a componente em  $P = M \times S^1$ . Note que um campo de vetores  $\mathbf{p}$  em  $P$  em um ponto  $(m, z) \in M \times S^1$  pertence a  $T_m M \times \mathbb{R}$ , portanto, a componente vertical de  $\mathbf{p}$  pode ser vista como uma função  $P \rightarrow \mathbb{R}$ . Mas, pela multiplicidade de  $\mathbf{p}$  temos que  $\mathbf{p}(\mu((m_1, z_1), (m_2, z_2))) = \mu(\mathbf{p}(m_1, z_1), \mathbf{p}(m_2, z_2))$ , e, portanto, a função  $P \rightarrow \mathbb{R}$  é um homomorfismo. Mas, então temos um homomorfismo contínuo  $M \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  que se pode ser o zero. Logo, um campo de vetores multiplicativo  $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + 0)$  com  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(M)$  preserva a estrutura conectiva se, e somente se,  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\omega$  é exata.*

**Observação 6.3.2.** *Collier, em sua tese de doutorado (COLLIER, 2012), foi quem primeiro definiu uma categoria de simetrias infinitesimais de um gerbe  $\mathcal{G}$ , denotada por  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ , vendo gerbes como um stack sobre  $M$ . Krepski e Vaughan, em (KREPSKI; VAUGHAN, 2022), mostraram que a categoria dos campos de vetores multiplicativos,  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ , em um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  é equivalente a categoria  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ . Além disso, eles mostram que essa equivalência se mantém no caso de simetrias infinitesimais que preservam uma estrutura conectiva.*

A categoria  $\mathbb{X}(\mathcal{P}; A, B)$  é a categoria da **simetrias infinitesimais** que preservam a estrutura conectiva  $(A, B)$  do bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$ .

Note que dado um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(A, B)$  temos naturalmente, pelo teorema 3.10.1, duas  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos estritas. De fato,  $\mathbb{X}(X^{[2]}X)$  correspondente ao grupoide de submersão e  $\mathbb{X}(P \rightrightarrows X)$ .

**Proposição 6.3.4.** *O levantamento horizontal com respeito a conexão do bundle gerbe  $A$  induz um mapa de cadeia entre  $\mathbb{X}(X^{[2]} \rightrightarrows X)$  e  $\mathbb{X}(P \rightrightarrows X)$ .*

*Demonstração.* De fato, em grau zero segue diretamente da proposição 6.3.1. Em grau 1,  $(x, 0)$  claramente define uma seção para o algebroide de Lie do grupoide de submersão, pois o source é a projeção na primeira coordenada, e o levantamento horizontal nos leva para uma seção  $a = 1^*(\widetilde{x, 0})$  de  $A_{\mathcal{D}}$ . A comutatividade com as diferenciais segue da prova da proposição 6.2.4, pois por temos  $\widetilde{d(x, 0)} = (\widetilde{x, x^{[2]}}) = (x, \widetilde{x^{[2]}})$  e pelo outro  $d(1^*(\widetilde{x, 0})) = (x, \widetilde{x^{[2]}})$  como queríamos.  $\square$

**Proposição 6.3.5.** *O mapa  $F_B : \mathbb{X}(X^{[2]} \rightrightarrows X)_0 \times \mathbb{X}(P \rightrightarrows X)_0 \rightarrow \Gamma(A_{\mathcal{D}})$  definido por  $F_B((x, x^{[2]}), (x', x'^{[2]})) = 1^* \iota_x \iota_{x'} B \partial_{\theta}$  é uma homotopia de cadeia. Ou seja, satisfaz as duas primeiras propriedades da definição 2.7.2.*

*Demonstração.* Segue diretamente da proposição 6.3.2. De fato, o lado direito da primeira equação de 2.7.2 torna-se

$$(0, [\widetilde{x^{[2]}, z^{[2]}}] - [\widetilde{x, z^{[2]}}])$$

e o lado direito torna-se  $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ .  $\square$

Porém, o levantamento horizontal junto com  $F_B$  não fornece um  $L_{\infty}$ -morfismo. De fato, o teorema abaixo nos mostra que isso só ocorre quando a 3-curvatura for plana.

**Teorema 6.3.1.** *(KREPSKI; VAUGHAN, 2022) Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(A, B)$  e 3-curvatura  $\omega$ . O levantamento horizontal e a homotopia de cadeia  $F_B$  definem um  $L_{\infty}$ -morfismo se, e somente se,  $\omega = 0$ .*

Para provar o teorema precisamos do seguinte lema:

**Lema 6.3.2.** *Sejam  $x_1, x_2$  e  $x_3$  campos de vetores em  $X$  e  $B$  a curving do bundle gerbe  $(P, X)$ . Então, temos que:*

$$\iota_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} dB = \iota_{x_1} \iota_{[x_2, x_3]} B - \iota_{[x_1, x_2]} \iota_{x_3} B - \iota_{x_2} \iota_{[x_1, x_3]} B + \mathcal{L}_{x_3} \iota_{x_1} \iota_{x_2} B + \mathcal{L}_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} B - \mathcal{L}_{x_2} \iota_{x_1} \iota_{x_3} B$$

*Demonstração.* A prova é um cálculo direto usando as formulas de cartan e o fato de  $B$  ser uma 2-forma e, portanto, antissimétrica.

$$\begin{aligned}
\iota_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} dB &= \iota_{x_1} \iota_{x_2} \mathcal{L}_{x_3} B - \iota_{x_1} \iota_{x_2} d\iota_{x_3} B \\
&= \iota_{x_1} \iota_{x_2} \mathcal{L}_{x_3} B - \iota_{x_1} \mathcal{L}_{x_2} \iota_{x_3} B + \iota_{x_1} d\iota_{x_2} \iota_{x_3} B \\
&= \iota_{x_1} \iota_{x_2} \mathcal{L}_{x_3} B - \iota_{x_1} \mathcal{L}_{x_2} \iota_{x_3} B + \mathcal{L}_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} B - d\iota_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} B \\
&= \iota_{x_1} \mathcal{L}_{x_3} \iota_{x_2} B - \iota_{x_1} \iota_{[x_3, x_2]} B + \iota_{[x_2, x_1]} \iota_{x_3} B - \mathcal{L}_{x_2} \iota_{x_1} \iota_{x_3} B + \mathcal{L}_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} B \\
&= \mathcal{L}_{x_3} \iota_{x_1} \iota_{x_2} B - \iota_{[x_3, x_1]} \iota_{x_2} B + \iota_{x_1} \iota_{[x_2, x_3]} B + \iota_{[x_2, x_1]} \iota_{x_3} B - \mathcal{L}_{x_2} \iota_{x_1} \iota_{x_3} B + \mathcal{L}_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} B \\
&= \iota_{x_1} \iota_{[x_2, x_3]} B - \iota_{[x_1, x_2]} \iota_{x_3} B - \iota_{x_2} \iota_{[x_1, x_3]} B + \mathcal{L}_{x_3} \iota_{x_1} \iota_{x_2} B + \mathcal{L}_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} B - \mathcal{L}_{x_2} \iota_{x_1} \iota_{x_3} B
\end{aligned}$$

□

*Demonstração do teorema 6.3.1.* Resta apenas checar a condição de coerência da definição 2.7.2. Sejam  $x_1, x_2$  e  $x_3$  campos de vetores em  $X$  com correspondentes campos de vetores multiplicativos em  $X^{[2]} \rightrightarrows X$  denotados por  $\bar{x}_i = (x_i, x_i^{[2]})$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Como as  $L_\infty$ -álgebras de 2-termos são estritas, o jacobiador de ambas é nulo. Portanto, jogando todos os termos da equação de coerência para o lado direito obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= F_B(\bar{x}_1, [\bar{x}_2, \bar{x}_3]) - F_B([\bar{x}_1, \bar{x}_2], \bar{x}_3) - F_B(\bar{x}_2, [\bar{x}_1, \bar{x}_3]) \\
&\quad - [F_B(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \widetilde{(\bar{x}_3)}] + [\widetilde{(\bar{x}_1)}, F_B(\bar{x}_2, \bar{x}_3)] - [\widetilde{(\bar{x}_2)}, F_B(\bar{x}_1, \bar{x}_3)]. \tag{6.2}
\end{aligned}$$

Como,  $F_B$  é projetavel para 0 por  $\pi_P$  (pois  $\partial_\theta$  é vertical) e  $\widetilde{(\bar{x}_3)}$  é projetavel para  $\bar{x}_3$  por  $\pi_P$ , temos, por exemplo, que  $[F_B, \widetilde{(\bar{x}_3)}]$  é projetável para  $[0, \bar{x}_3] = 0$  por  $\pi_P$  e, portanto, os três últimos termos são verticais. Vamos determinar essas componentes verticais, seja  $a_{jk} = F_B(\bar{x}_j, \bar{x}_k)$  e  $\mathbf{p}_i = \widetilde{(\bar{x}_i)}$ . Note que:

$$\begin{aligned}
\iota_{[\mathbf{p}_i, \vec{a}_{jk}]} A &= \mathcal{L}_{\mathbf{p}_i} \iota_{\vec{a}_{jk}} A - \iota_{\vec{a}_{ij}} (\iota_{\mathbf{p}_i} dA - d\iota_{\mathbf{p}_i} A) \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{p}_i} \iota_{\vec{a}_{jk}} A - \iota_{\vec{a}_{ij}} (\iota_{\mathbf{p}_i} \pi_P^* F_A) \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{p}_i} \iota_{\vec{a}_{jk}} A
\end{aligned}$$

pois  $\mathbf{p}_i$  é horizontal e  $\vec{a}_{jk}$  é vertical. Fazendo a restrição para  $X$  temos que

$$1^* \iota_{[\mathbf{p}_i, \vec{a}_{jk}]} A = \mathcal{L}_{x_i} \iota_{x_j} \iota_{x_k} B$$

Pois, temos que  $\mathbf{p}_i$  é projetável para  $(x_i, x_i^{[2]})$  por  $\pi_P$  e  $((x_i, x_i^{[2]}))$  é relacionado com  $x_i$  pelo mapa 1, então  $1^* \mathcal{L}_{\mathbf{p}_i} = \mathcal{L}_{x_i} 1^*$ , e pela mesma razão comuta com as contrações. Portanto, tomando as componentes verticais de 6.2 obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \iota_{x_1} \iota_{[x_2, x_3]} B - \iota_{[x_1, x_2]} \iota_{x_3} B - \iota_{x_2} \iota_{[x_1, x_3]} B + \mathcal{L}_{x_3} \iota_{x_1} \iota_{x_2} B + \mathcal{L}_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} B - \mathcal{L}_{x_2} \iota_{x_1} \iota_{x_3} B \\
&= \iota_{x_1} \iota_{x_2} \iota_{x_3} dB
\end{aligned}$$

Onde a igualdade segue do lema 6.3.2. Portanto, a condição de coerência é satisfeita se, e somente se,  $\pi^* \omega = dB = 0$ , o que completa a prova pois  $\pi$  é submersão. □

## 6.4 A 2-álgebra de Lie das simetrias infinitesimais de um $\mathbb{S}^1$ -bundle gerbe

A proposição abaixo nos mostra que a categoria  $\mathbb{X}(\mathcal{P}; A, B)$  dos campos de vetores multiplicativos, em  $P \rightrightarrows X$ , que preservam a estrutura conectiva formam uma  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos. Ou seja,  $\mathbb{X}(P; A, B)$  é chamada de 2-álgebra de Lie das simetrias infinitesimais do bundle gerbe  $(P, X)$  ((KREPSKI; VAUGHAN, 2022)).

**Proposição 6.4.1.** (KREPSKI; VAUGHAN, 2022) *Seja  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(A, B)$ . O complexo de cadeia de 2-termos  $\mathbb{X}(\mathcal{P}; A, B) = \{V_1 \xrightarrow{d} V_0\}$  é uma  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos, onde temos:*

- $V_1 = \Gamma(A_{\mathcal{P}})$ ,
- $V_0 = \mathbb{X}(\mathcal{P}; A, B)$ ,
- a diferencial é dada por  $da = (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}; \iota_{\mathbf{a}}B - d\nu_a)$ ,
- o colchete em  $V_0 \otimes V_0$  é dado por

$$[(x, \mathbf{p}; \alpha), (z, \mathbf{r}; \beta)] = ([x, z], [\mathbf{p}, \mathbf{r}]; \mathcal{L}_x\beta - \mathcal{L}_z\alpha)$$

e em  $V_0 \otimes V_1$  por

$$[(x, \mathbf{p}; \alpha), a] = [\mathbf{p}, \vec{a}]|_X,$$

- O jacobador é nulo.

*Demonstração.* Primeiramente, lembre que  $\vec{a} \sim_{\delta_1} \mathbf{a}$  e  $\vec{a} \sim_{\delta_0} 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{[\mathbf{p}, \vec{a}]|_X} &= \epsilon^* \iota_{[\mathbf{p}, \vec{a}]} \gamma \\ &= \epsilon^* (\mathcal{L}_{\mathbf{p}} \iota_{\vec{a}} \gamma - \iota_{\vec{a}} \mathcal{L}_{\mathbf{p}} \gamma) \\ &= \mathcal{L}_x \nu_a - \epsilon^* \iota_{\vec{a}} \delta \alpha \\ &= \mathcal{L}_x \nu_a + \iota_{\mathbf{a}} \alpha. \end{aligned}$$

□

*Demonstração da proposição 6.4.1.* Seja  $\mathbb{V} = \{V_1 \rightarrow V_0\}$  como na proposição. Primeiramente vamos checar que o colchete esta bem definido. De fato, sejam  $(x, \mathbf{p}; \alpha), (z, \mathbf{r}; \beta) \in V_0$  temos que:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}_x\beta - \mathcal{L}_z\alpha) &= d(d\iota_x\beta + \iota_x d\beta - d\iota_z\alpha - \iota_z d\alpha) \\ &= d\iota_x d\beta - d\iota_z d\alpha \\ &= d\iota_x \mathcal{L}_z B - d\iota_z \mathcal{L}_x B \end{aligned}$$



por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[x,z]}B &= \iota_{[x,z]}dB + d\iota_{[x,z]}B \\
&= -\iota_z\mathcal{L}_x dB + d\mathcal{L}_x\iota_z B - d\iota_z\mathcal{L}_x B \\
&= d\iota_x\iota_z B - \iota_z d\iota_x B - d\iota_z\mathcal{L}_x B \\
&= d\iota_x\mathcal{L}_z B - d\iota_z\mathcal{L}_x B
\end{aligned}$$

Portanto, temos que  $\mathcal{L}_{[x,z]}B = d(\mathcal{L}_x\beta - \mathcal{L}_z\alpha)$ . Além disso,

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{L}_x\beta - \mathcal{L}_z\alpha) &= \delta\iota_x d\beta + \delta d\iota_x\beta - \delta\iota_z d\alpha - \delta d\iota_z\alpha \\
&= \delta\iota_x\mathcal{L}_z B + \delta d\iota_x\beta - \delta\iota_z\mathcal{L}_x B - \delta d\iota_z\alpha
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[p,r]}\gamma &= \iota_{[p,r]}d\gamma + d\iota_{[p,r]}\gamma \\
&= \mathcal{L}_p\iota_r d\gamma - \iota_r\mathcal{L}_p d\gamma + d\mathcal{L}_p\iota_r\gamma - d\iota_r\mathcal{L}_p\gamma \\
&= \mathcal{L}_p\iota_r\delta B - \iota_r\mathcal{L}_p\delta B + d\mathcal{L}_p\iota_r\gamma - d\iota_r\delta\alpha.
\end{aligned}$$

Como temos  $\mathbf{p} \sim_{\delta_i} \mathbf{x}$  e  $\mathbf{r} \sim_{\delta_i} \mathbf{z}$  vale que  $\mathcal{L}_p\delta_i^*B = \delta_i^*(\mathcal{L}_x B)$ ,  $\mathcal{L}_r\delta_i^*B = \delta_i^*(\mathcal{L}_z B)$ ,  $\iota_p\delta_i^*B = \delta_i^*(\iota_x B)$  e  $\iota_r\delta_i^*B = \delta_i^*(\iota_z B)$ . Portanto, como  $\delta$  é uma somatoria de  $\delta_i^*$  e comuta com  $d$ , temos que  $\mathcal{L}_{[p,r]}\gamma = \delta(\mathcal{L}_x\beta - \mathcal{L}_z\alpha)$ . Note que o diferencial está bem definido pela proposição 6.3.3. De acordo com a definição 2.7.1, para mostrar que o colchete resultante é compatível com a diferencial precisamos verificar que para  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \alpha) \in V_0$  e  $a, b \in V_1$  temos

$$d[(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \alpha), a] = [(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \alpha), da], \quad \text{and} \quad (6.3)$$

$$[da, b] = -[db, a]. \quad (6.4)$$

Pela definição da diferencial  $d$ , precisamos calcular  $1^*\mathbf{v}_{[p, \vec{a}]}$ . Temos que

$$1^*\mathbf{v}_{[p, \vec{a}]} = 1^*\iota_{[p, \vec{a}]}A \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}
&= 1^*(\mathcal{L}_p\iota_{\vec{a}}A - \iota_{\vec{a}}\mathcal{L}_pA) \\
&= \mathcal{L}_x\mathbf{v}_a - 1^*\iota_{\vec{a}}\delta\alpha \\
&= \mathcal{L}_x\mathbf{v}_a + \iota_a\alpha, \quad (6.6)
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos o fato do campo ser multiplicativo e, portanto,  $\mathbf{x}$  é projetável para  $\mathbf{p}$  pelo mapa unidade 1, e na última igualdade usamos o fato de  $\vec{a}$  ser projetável para  $\mathbf{a}$  pelo mapa  $\delta_1$ . Para mostrar a equação 6.3, primeiro lembre que  $c = ([p, \vec{a}]|_X)$  define uma seção de  $A_P$  e que  $\mathbf{c} = [x, \mathbf{a}]$  e que  $\bar{\mathbf{c}} = [p, \bar{\mathbf{a}}]$  (ver teorema

3.10.1). Portanto, usando a equação 6.6 temos que:

$$\begin{aligned}
d[(x, \mathbf{p}; \alpha), a] &= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}], \iota_{[x, \mathbf{a}]}B - d\nu_{[\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}]}|_x) \\
&= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}], \mathcal{L}_x \iota_{\mathbf{a}}B - \iota_{\mathbf{a}} \mathcal{L}_x B - d(\mathcal{L}_x \nu_a + \iota_{\mathbf{a}} \alpha)) \\
&= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}], \mathcal{L}_x \iota_{\mathbf{a}}B - \iota_{\mathbf{a}} \mathcal{L}_x B - d\iota_x \nu_a + \iota_{\mathbf{a}} d\alpha - \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \alpha) \\
&= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}], \mathcal{L}_x \iota_{\mathbf{a}}B - \iota_{\mathbf{a}} \mathcal{L}_x B - \iota_x d^2 \nu_a - \mathcal{L}_x d\nu_a + \iota_{\mathbf{a}} \mathcal{L}_x B - \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \alpha) \\
&= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}], \mathcal{L}_x (\iota_{\mathbf{a}}B - d\nu_a) - \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \alpha) \\
&= [(x, \mathbf{p}; \alpha), da].
\end{aligned}$$

Para mostrar a equação 6.4, primeiramente lembre que  $[\bar{\mathbf{a}}, \vec{b}] = [\vec{a} + \overleftarrow{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}]$ , pois campos de vetores invariantes a esquerda e a direita comutam. Portanto,

$$\begin{aligned}
[da, b] &= 1^*[\bar{\mathbf{a}}, \vec{b}] \\
&= 1^*[\vec{a}, \vec{b}] \\
&= -1^*[\vec{b}, \vec{a}] \\
&= -1^*[\bar{\mathbf{b}}, \vec{a}] \\
&= -[db, a]
\end{aligned}$$

como queríamos. Claramente as propriedades (a) e (b) da definição 2.7.1 são satisfeita pela antissimetria dos colchetes de campos, as propriedades (e) e (f) provamos acima e as demais seguem pois o jacobador é nulo.  $\square$

**Exemplos 6.4.1.** Considere o campo de vetores multiplicativo que preserva a estrutura conectiva para o fibrado trivial  $\mathcal{I}_\omega$  como no exemplo 6.3.1. Vamos analisar a  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos  $\mathbb{X}(\mathcal{I}_\omega) = \{W_1 \rightarrow W_0\}$ . Note que, como o bundle gerbe é  $(M \times \mathbb{S}^1, M)$  sobre  $M$  com  $\pi = id_M$  e  $\pi_P = pr_1$  temos que  $\partial_i = id_M$  para  $i = 0, 1$  e com isso,  $\pi_i = pr_1$  para  $i = 0, 1$ , logo temos que  $\Gamma_{A_\emptyset} : M \rightarrow \ker(dp_{pr_1}) = 0 \times T\mathbb{S}^1$ , portanto, temos que  $W_1 \simeq C^\infty(M)$  e  $W_0$  consiste de pares  $(x, A)$  tal que  $\mathcal{L}_x \omega = dA$  para  $x \in \mathfrak{X}(M)$ . A diferencial  $d : W_1 \rightarrow W_0$  é  $f \mapsto (0, -df)$ . O colchete em  $W_0 \otimes W_0$  é dado por

$$[(\xi_1, A_1), (\xi_2, A_2)] = ([\xi_1, \xi_2], \mathcal{L}_{\xi_1} A_2 - \mathcal{L}_{\xi_2} A_1),$$

e em  $W_0 \otimes W_1$  é dado por

$$[(\xi, A), f] = \xi(f).$$

## 6.5 Simetrias infinitesimais de bundle gerbes e variedades 2-pléticas

Nessa seção mostraremos que a  $L_\infty$ -álgebra de observáveis  $L_\infty(M, \omega)$  de uma variedade 2-plética  $(M, \omega)$ , teorema 5.5.1, é quase-isomorfa a  $L_\infty$ -álgebra de 2-termos das simetrias infinitesimais de um bundle gerbe  $(P, X)$  sobre  $M$  com 3-curvatura  $\omega$ . Esse resultado é o análogo 2-plético do teorema 6.1.4.

**Teorema 6.5.1.** (KREPSKI; VAUGHAN, 2022) *Sejam  $(M, \omega)$  uma variedade 2-plética,  $(P, X)$  um bundle gerbe sobre  $M$  com estrutura conectiva  $(A, B)$  e 3-curvatura  $\omega$ . Existe um **butterfly natural invertível**  $E : L_\infty(M, \omega) \dashrightarrow \mathbb{X}(\mathbf{P}; \gamma, B)$ .*

Antes da prova, precisamos dos lemas abaixo.

**Lema 6.5.2.** *Sejam  $\xi$  e  $\zeta$  campos de vetores em  $M$  tal que  $\mathbf{x}$  é projetável para  $\xi$  por  $\pi$  e  $\mathbf{z}$  é projetável para  $\zeta$  por  $\pi$ , onde  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \alpha)$  e  $(\mathbf{z}, \mathbf{r}; \beta)$  pertencem a  $V_0$ . Então, temos que*

$$-\pi^* \iota_\zeta \iota_\xi \omega = \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \beta - \mathcal{L}_{\mathbf{z}} \alpha - \iota_{[\mathbf{x}, \mathbf{z}]} B - d(\iota_{\mathbf{x}} \beta - \iota_{\mathbf{z}} \alpha + \iota_{\mathbf{z}} \iota_{\mathbf{x}} B),$$

*Demonstração.* A prova é um cálculo direto usando as fórmulas de Cartan e lembrando que  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} B = d\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\mathbf{z}} B = d\beta$ . Logo, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \beta - \mathcal{L}_{\mathbf{z}} \alpha - \iota_{[\mathbf{x}, \mathbf{z}]} B - d(\iota_{\mathbf{x}} \beta - \iota_{\mathbf{z}} \alpha + \iota_{\mathbf{z}} \iota_{\mathbf{x}} B) &= d\iota_{\mathbf{x}} \beta + \iota_{\mathbf{x}} d\beta - \iota_{\mathbf{z}} d\alpha - d\iota_{\mathbf{z}} \alpha - \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \iota_{\mathbf{z}} B \\ &+ \iota_{\mathbf{z}} \mathcal{L}_{\mathbf{x}} B - d\iota_{\mathbf{x}} \beta + d\iota_{\mathbf{z}} \alpha - d\iota_{\mathbf{z}} \iota_{\mathbf{x}} B \\ &= \iota_{\mathbf{x}} d\beta - \iota_{\mathbf{z}} \mathcal{L}_{\mathbf{x}} B - \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \iota_{\mathbf{z}} B + \iota_{\mathbf{z}} \mathcal{L}_{\mathbf{x}} B - d\iota_{\mathbf{z}} \iota_{\mathbf{x}} B \\ &= \iota_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\mathbf{z}} B - d\iota_{\mathbf{x}} \iota_{\mathbf{z}} B - \iota_{\mathbf{x}} d\iota_{\mathbf{z}} B - d\iota_{\mathbf{z}} \iota_{\mathbf{x}} B \\ &= \iota_{\mathbf{x}} d\iota_{\mathbf{z}} B + \iota_{\mathbf{x}} \iota_{\mathbf{z}} dB - \iota_{\mathbf{x}} d\iota_{\mathbf{z}} B \\ &= \iota_{\mathbf{x}} \iota_{\mathbf{z}} dB \\ &= -\pi^* \iota_\zeta \iota_\xi \omega \end{aligned}$$

□

**Lema 6.5.3.** (KREPSKI; VAUGHAN, 2022) *Sejam  $M$  uma variedade,  $B \in \Omega^2(M)$  e  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Suponha existir 1-formas  $a, b, c \in \Omega^1(M)$  tal que  $\mathcal{L}_X B = da$ ,  $\mathcal{L}_Y B = db$  e  $\mathcal{L}_Z B = dc$ . Então, temos que*

$$-\iota_Z \iota_Y \iota_X dB = \iota_X (\mathcal{L}_Y c - \mathcal{L}_Z b) - \iota_{[Y, Z]} a + \iota_{[Y, Z]} \iota_X B + \text{perm. cic},$$

*Demonstração.* A prova é um cálculo direto com as fórmulas de Cartan.

$$\begin{aligned}
\iota_X \iota_Y \iota_Z dB &= \iota_X \iota_Y \mathcal{L}_Z B - \iota_X \iota_Y d\iota_Z B \\
&= \iota_X \iota_Y dc - \iota_X \mathcal{L}_Y \iota_Z B + \iota_X d\iota_Y \iota_Z B \\
&= \iota_X \iota_Y dc - \iota_X \iota_{[Y,Z]} B - \iota_X \iota_Z \mathcal{L}_Y B + \iota_X d\iota_Y \iota_Z B \\
&= \iota_X \iota_Y dc - \iota_X \iota_{[Y,Z]} B - \mathcal{L}_X \iota_Y \iota_Z B \\
&= \iota_X \iota_Y dc - \iota_X \iota_Z db - \iota_X \iota_{[Y,Z]} B + \iota_{[X,Y]} \iota_Z B + \iota_Y \mathcal{L}_X \iota_Z B \\
&= \iota_X \iota_Y dc - \iota_X \iota_Z db - \iota_X \iota_{[Y,Z]} B + \iota_{[X,Y]} \iota_Z B + \iota_Y \iota_{[X,Z]} B + \iota_Y \iota_Z da \\
&= \iota_X \mathcal{L}_Y c - \mathcal{L}_X \iota_Y c - \iota_X \mathcal{L}_Z b + \mathcal{L}_X \iota_Z b + \iota_Y \mathcal{L}_Z a - \mathcal{L}_Y \iota_Z a - \iota_X \iota_{[Y,Z]} B \\
&\quad - \iota_Z \iota_{[X,Y]} B - \iota_Y \iota_{[Z,X]} B \\
&= \iota_X \mathcal{L}_Y c - \iota_{[X,Y]} c - \iota_Y \mathcal{L}_X c - \iota_X \mathcal{L}_Z b + \iota_{[X,Z]} b + \iota_Z \mathcal{L}_X b + \iota_Y \mathcal{L}_Z a - \iota_{[Y,Z]} a \\
&\quad - \iota_Z \mathcal{L}_Y a - \iota_X \iota_{[Y,Z]} B - \iota_Z \iota_{[X,Y]} B - \iota_Y \iota_{[Z,X]} B
\end{aligned}$$

□

*Demonstração do teorema 6.5.1.* Primeiramente, lembre que da demonstração da proposição 6.2.1, se  $(x, \mathfrak{p})$  é um campo de vetores multiplicativo, então, existem uma função  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\delta g = \iota_{\mathfrak{p}} A$ .

Defina  $E = \{(x, \mathfrak{p}; \alpha, g) \in V_0 \times C^\infty(X) \mid \delta g = \iota_{\mathfrak{p}} A\}$  e considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
L_1 & & V_1 \\
\downarrow & \searrow \kappa & \swarrow \lambda \\
& E & \\
\downarrow & \swarrow \sigma & \searrow \rho \\
L_0 & & V_0
\end{array}$$

onde  $\rho = pr_1$ ,  $\lambda(a) = (da, -v_a)$  e  $\kappa(f) = (0, 0; 0, \pi^* f)$ . Vamos definir  $\sigma$  a seguir. Note que:

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha - \iota_x B - dg) &= \mathcal{L}_{\mathfrak{p}} A - \iota_{\mathfrak{p}} \delta B - d\iota_{\mathfrak{p}} A \\
&= \iota_{\mathfrak{p}} dA + d\iota_{\mathfrak{p}} A - \iota_{\mathfrak{p}} \delta B - d\iota_{\mathfrak{p}} A \\
&= \iota_{\mathfrak{p}} \delta B - \iota_{\mathfrak{p}} \delta B \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, como  $\mathcal{P}$  é próprio, existe uma única forma  $\epsilon \in \Omega(M)$  tal que  $\pi^* \epsilon = \alpha - \iota_x B - dg$ . Se  $\xi$  é o campo de vetores em  $M$  no qual  $x$  se projeta por  $\pi$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\pi^* d\epsilon &= d\alpha - d\iota_x B \\
&= \mathcal{L}_x B - d\iota_x B \\
&= \iota_x dB
\end{aligned}$$

Logo, teremos  $\pi^* \iota_\xi \omega = \iota_x dB = \pi^* d\epsilon$ , ou seja,  $\epsilon$  é a 1-forma hamiltoniana cujo campo de vetores hamiltoniano é  $\xi$ . Defina  $\sigma(x, \mathbf{p}; \alpha, g) = -\epsilon$ . Agora, defina um colchete em  $E$  por

$$[(x, \mathbf{p}; \alpha, g), (z, \mathbf{r}; \beta, h)] = [(x, \mathbf{p}; \alpha), (z, \mathbf{r}; \beta), \iota_x \beta - \iota_z \alpha + \iota_z \iota_x B].$$

Vamos checar que  $E$  define um butterfly, precisamos verificar a compatibilidade dos mapas de estrutura com os colchetes. Claramente  $\rho$  preserva colchetes. Para  $\kappa$  note que

$$[(x, \mathbf{p}; \alpha, g), \kappa(h)] = [(x, \mathbf{p}; \alpha, g), (0, 0; 0, \pi^* h)] = 0 = \kappa[\epsilon], h],$$

pois o colchete em  $L_1 \otimes L_0$  é zero em  $L_\infty(M, \omega)$ . Para a compatibilidade de  $\lambda$ , pelas definições da diferencial e do colchete em  $\mathbb{X}(\mathcal{P}; A, B)$ , do colchete em  $E$  e pela equação 6.6 temos que

$$\begin{aligned} [(x, \mathbf{p}; \alpha, g), \lambda(a)] &= [(x, \mathbf{p}; \alpha, g), (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}; \iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{v}_a, -\mathbf{v}_a)] \\ &= ([x, \mathbf{p}; \alpha), (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}; \iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{v}_a), \iota_x(\iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{v}_a) - \iota_{\mathbf{a}} \alpha + \iota_{\mathbf{a}} \iota_x B) \\ &= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}]; \mathcal{L}_x(\iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{v}_a) - \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \alpha, -\iota_x d\mathbf{v}_a - \iota_{\mathbf{a}} \alpha) \\ &= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}]; \mathcal{L}_x(\iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{v}_a) - \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \alpha, -\mathcal{L}_x \mathbf{v}_a - \iota_{\mathbf{a}} \alpha) \\ &= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}]; \mathcal{L}_x(\iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{v}_a) - \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \alpha, -\mathbf{v}_{[\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}]|_X}) \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\mathbf{p}$  é projetável para  $x$  por  $\pi_{i,j}$  e  $\bar{\mathbf{a}}$  é projetável para  $\mathbf{a}$  por  $\pi_{i,j}$ , para  $j = 0, 1$  e  $\mathcal{L}_x B = d\alpha$ , temos que

$$\begin{aligned} \lambda([x, \mathbf{p}; \alpha], a) &= \lambda([\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X) \\ &= (d[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X, -\mathbf{v}_{[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X}) \\ &= (d\pi_1[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X, [\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X; \iota_{d\pi_1[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X} B - d\mathbf{v}_{[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X}, -\mathbf{v}_{[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X}) \\ &= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}]; \iota_{[x, \mathbf{a}]} B - d\mathbf{v}_{[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X}, -\mathbf{v}_{[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X}) \\ &= ([x, \mathbf{a}], [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{a}}]; \mathcal{L}_x(\iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{v}_a) - \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \alpha, -\mathbf{v}_{[\mathbf{p}, \vec{\mathbf{a}}]|_X}) \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos novamente a equação 6.6. Para mostrar a compatibilidade de  $\sigma$  note que

$$\begin{aligned} \sigma([(x, \mathbf{p}, \alpha, g), (z, \mathbf{r}, \beta, h)]) &= \sigma([(x, \mathbf{p}, \alpha), (z, \mathbf{r}, \beta)], \iota_x \beta - \iota_z \alpha + \iota_z \iota_x B) \\ &= \sigma([x, z], [\mathbf{p}, \mathbf{r}]; \mathcal{L}_x \beta - \mathcal{L}_z \alpha, \iota_x \beta - \iota_z \alpha + \iota_z \iota_x B) \\ &= \tau \end{aligned}$$

onde  $\pi^* \tau = \mathcal{L}_x \beta - \mathcal{L}_z \alpha - \iota_{[x,z]} B - d(\iota_x \beta - \iota_z \alpha + \iota_z \iota_x B)$  e, poranto, a compatibilidade segue do lema 6.5.2.

Como o jacobiano de  $\mathbb{X}(\mathcal{P}; A, B)$  é trivial, a condição do jacobiano em  $E$  torna-se

$$\kappa J(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = [(x_1, \mathbf{p}_1; \alpha_1), [(x_2, \mathbf{p}_2; \alpha_2), (x_3, \mathbf{p}_3; \alpha_3)]] + perm. \text{ cic.}$$

A componente em  $V_0$  da igualdade acima segue do fato do jacobiano de  $\mathbb{X}(\mathcal{P}; \gamma, B)$  ser zero. Para verificar a componente em  $C^\infty(X)$  basta usar o lema 6.5.3.

Para mostrarmos que  $E$  é um butterfly invertível precisamos verificar que as seqüências diagonais são exatas. Claramente a seqüência  $NW - SE$  é exata. A seguir mostraremos a exatidão da seqüência  $NE - SW$ .

Primeiramente vamos checar a sobrejetividade de  $\sigma$ . Seja  $\epsilon \in L_0$ , escolha um levantamento multiplicativo  $x$  do campo de vetores hamiltoniano de  $\epsilon$  e pegue  $\alpha' = -\pi^*\epsilon + \iota_x B$ . Agora, pegue uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\delta f = \iota_p \gamma$  e tome  $\alpha = \alpha' + df$ . Então, note que:

$$\begin{aligned} \alpha - \iota_x B - df &= \alpha' + df - \iota_x B - df \\ &= -\pi_* \epsilon + \iota_x B - \iota_x B \\ &= -\pi_* \epsilon \end{aligned}$$

Logo,  $\sigma(x, p; \alpha, f) = (\xi, \epsilon)$ .

Agora, vamos checar a injetividade de  $\lambda$ . Suponham  $a \in \Gamma(A_P)$ ,  $da = 0$  e  $v_a = 0$ . De  $da = 0$ , temos que  $\mathbf{a} = 0$ , portanto  $a \in \ker(\rho)$ , com isso  $a$  está na álgebra de Lie de isotropia, mas a âncora nesse caso é  $d\pi_1 = d(\pi_P \circ \partial_1)$  e  $\partial_1 = pr_2$ , como  $\pi_P$  é a projeção de um  $\mathbb{S}^1$ -fibrado principal temos que  $\pi_P|_{X^{[2]}}$  é trivial, portanto, projetando pela segunda coordenada, temos que a álgebra de Lie de isotropia nesse caso é trivial  $X \times \mathbb{R}$ , logo veremos  $a$  como uma função em  $X$ , e novamente por  $da = 0$  temos que  $\bar{\mathbf{a}} = 0$ , portanto  $\delta a = 0$  implicando que  $a$  desce para  $M$ . De  $v_a = 0$  vemos que a parte vertical de  $a$  deve zerar, mas como  $\mathbf{a} = 0$  todo  $a$  é vertical, logo  $a = 0$ .

Por fim, vamos checar a exatidão em  $E$ . Note que:

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda(a)) &= \sigma(da, -v_a) \\ &= \sigma(da, -1^* \iota_{\vec{a}} A) \\ &= \sigma(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}; \iota_{\mathbf{a}} B - dv_a, -v_a) \\ &= \tau \end{aligned}$$

onde, pela definição de  $\sigma$ ,  $\pi^* \tau = \iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{a} - \iota_{\bar{\mathbf{a}}} B + dv_a = 0$ . Logo,  $\sigma \circ \lambda = 0$  pois  $\pi$  é uma submersão. Agora queremos mostrar que o  $\ker(\sigma)$  é igual a imagem de  $\lambda$ , suponha  $\sigma(x, p; \alpha, g) = 0$ . Então  $\xi = 0$  (campo de vetores hamiltoniano correspondente a 1-forma obtida pela aplicação de  $\sigma$ ) e  $\alpha - \iota_x B - dg = 0$ . Da primeira, pela proposição 6.2.4, temos que  $(x, p) = (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$  para algum  $a \in \Gamma(A_P)$ . Como  $\bar{\mathbf{a}} = p$  temos  $\delta v_a = \delta g$ , logo existe uma única  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\pi^* f = g - v_a$ . Note que definindo  $b = \pi^* f$  temos que  $b$  pertence a álgebra de Lie de isotropia como comentado no parágrafo anterior. Mas como a álgebra de Lie de isotropia consiste de  $\ker(1^* d\pi_1)$ , temos que

$b : X \rightarrow A_P$  é um vetor vertical em  $TP|_X$ , dado por  $b(x) = 1_x^* f(\pi(x)) \partial_\theta$ . Note que  $\mathbf{v}_b = 1^* \iota_{\vec{b}} A = \pi^* f$  e  $\tilde{b} = 0$ . Além disso, pela proposição 6.2.3, a parte vertical de  $b$  deve zerar, logo  $b = 0$ , e com isso teremos  $g = \mathbf{v}_a$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda(a + b) &= (d(a + b), -\mathbf{v}_{a+b}) \\ &= (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}; \iota_{\mathbf{a}} B - d\mathbf{v}_a, -\mathbf{v}_a) \\ &= (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}; \alpha, g). \end{aligned}$$

□

# A Cohomologia de Čech

Seja  $X$  um espaço topológico. Considere a categoria  $\mathbf{Open}(X)$ , onde os objetos são abertos de  $X$  e os morfismos são inclusões, e a categoria  $\mathbf{Ab}$  dos grupos abelianos.

**Definição A.0.1.** Um **pré-feixe**  $\mathcal{F}$  de grupos abelianos é um funtor contravariante  $\mathcal{F} : \mathbf{Open}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

**Exemplos A.0.1.** 1. (Pré-feixe constante) Seja  $G$  um grupo abeliano temos um pré-feixe  $\mathcal{F}$  onde  $\mathcal{F}(U) = G$  para todo aberto  $U$  e se  $i : V \rightarrow U$  é inclusão temos  $\mathcal{F}(i) = id_G$ .

2. (Pré-feixe das funções contínuas) Seja  $G$  um grupo abeliano. Teremos  $\mathcal{F}(U) = C^1(U, G)$  para todo  $U$  aberto de  $X$ , se  $i : V \rightarrow U$  é inclusão teremos  $\mathcal{F}(i) = f|_V$  para  $f : U \rightarrow G$ . Note que podemos também obter um pré-feixe de funções suaves para uma variedade suave  $M$ .

3. (Pré-feixe das  $p$ -formas) Seja  $\mathcal{F} = \Omega^p$ , ou seja, nos objetos temos  $U \mapsto \Omega^p(U)$  e se  $i : V \rightarrow U$  é uma inclusão teremos  $\mathcal{F}(i) = i^* : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(V)$  é um homomorfismo de grupos abelianos.

Seja  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  uma cobertura de  $X$  e denote por  $U_{i_0, \dots, i_p}$  a interseção  $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ . Queremos definir uma cohomologia associada a cobertura  $\mathcal{U}$  e a um pré-feixe  $\mathcal{F}$ . Para isso precisamos definir as cocadeias, para  $p \geq 0$  temos:

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0, \dots, i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$$

com o produto variando em  $(p+1)$ -uplas de elementos de  $I$ . Ou seja, um elemento  $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  é uma família  $\alpha_{i_0, \dots, i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$ .

Com isso, podemos definir um mapa  $\partial : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  por

$$\partial(\alpha)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (\alpha_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{p+1}})|_{U_{i_0, \dots, i_{p+1}}}$$

Portanto, podemos formar um complexo de cocadeias

$$\dots \xrightarrow{\partial} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} C^{p+2}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} \dots$$

**Lema A.0.1.** (BRYLINSKI, 2007)  $\partial\partial = 0$ .



Pelo lema anterior, definimos o **p-ézimo grupo de cohomologia de Čech** por

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\ker(\partial : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}{\text{Im}(\partial : C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}.$$

Estaremos interessados em um caso particular onde  $\mathcal{F}$  é o pré-feixe das funções suaves com valores em  $\mathbb{S}^1$ , aqui  $\mathcal{U}$  será uma cobertura aberta para uma variedade suave  $M$ , denotaremos esse pré-feixe por  $\underline{\mathbb{S}^1}$ . Nesse caso, uma cocadeia  $\check{f} \in C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{S}^1})$  é uma família de funções suaves antissimétricas, ou seja:

$$\check{f} = \{f_{i_0, \dots, i_p} \mid f_{i_0, \dots, i_p} : U_{i_0, \dots, i_p} \rightarrow \mathbb{S}^1 \text{ suave e antissimétrica}\}.$$

Logo, a diferencial  $\partial : C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{S}^1}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{S}^1})$  torna-se

$$\partial \check{f}_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \prod_{j=0}^{j=p+1} (f_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{p+1}})^{(-1)^j}.$$

**Exemplos A.0.2.** *Trocando a notação dos índices  $i_0, i_1, i_2, i_3$  por  $\alpha, \beta, \gamma, \tau$  temos que:*

1. Se  $\check{g} \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{S}^1})$  então:

$$\partial \check{g}_{\alpha\beta} = g_{\beta} \cdot (g_{\alpha})^{-1}.$$

2. Se  $\check{g} \in C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{S}^1})$  então:

$$\partial \check{g}_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} \cdot (g_{\alpha\gamma})^{-1} \cdot g_{\alpha\beta}.$$

3. Se  $\check{g} \in C^2(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{S}^1})$  então:

$$\partial \check{g}_{\alpha\beta\gamma\tau} = g_{\beta\gamma\tau} \cdot (g_{\alpha\gamma\tau})^{-1} \cdot g_{\alpha\beta\tau} \cdot (g_{\alpha\beta\gamma})^{-1}.$$

Note que um representante  $\check{g}$  em  $\check{H}^p(M, \underline{\mathbb{S}^1})$  deve satisfazer a **condição de cociclo** que nesse caso é  $\partial \check{g} = 1$ .

## B Cohomologia de Deligne

Seja  $M$  uma variedade suave. Para qualquer inteiro positivo  $q$  temos uma sequência exata de pré-feixes, denotada por  $\mathcal{D}^q$ , definida por

$$\underline{\mathbb{S}}^1 \xrightarrow{d \log} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^q.$$

Seja  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  uma boa cobertura para  $M$ . Considere o nervo da boa cobertura, ou seja:

$$\mathcal{U}^{[n]} = \coprod U_{i_0, \dots, i_n}.$$

Considere o complexo duplo a baixo

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial \uparrow & & \partial \uparrow & & \partial \uparrow & & \partial \uparrow \\ \underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{U}^{[2]}) & \xrightarrow{d \log} & \Omega^1(\mathcal{U}^{[2]}) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathcal{U}^{[2]}) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} & \Omega^p(\mathcal{U}^{[2]}) \\ \partial \uparrow & & \partial \uparrow & & \partial \uparrow & & & \partial \uparrow \\ \underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{U}^{[1]}) & \xrightarrow{d \log} & \Omega^1(\mathcal{U}^{[1]}) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathcal{U}^{[1]}) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} & \Omega^p(\mathcal{U}^{[1]}) \\ \partial \uparrow & & \partial \uparrow & & \partial \uparrow & & & \partial \uparrow \\ \underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{U}^{[0]}) & \xrightarrow{d \log} & \Omega^1(\mathcal{U}^{[0]}) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathcal{U}^{[0]}) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} & \Omega^p(\mathcal{U}^{[0]}) \end{array}$$

Onde temos

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{U}^{[n]}) &= \prod_{i_0 \neq i_1 \neq \dots \neq i_n} \underline{\mathbb{S}}^1(U_{i_0} \cap U_{i_2} \dots \cap U_{i_n}), \\ \Omega^k(\mathcal{U}^{[n]}) &= \prod_{i_0 \neq i_1 \neq \dots \neq i_n} \Omega^k(U_{i_0} \cap U_{i_2} \dots \cap U_{i_n}). \end{aligned}$$

A **cohomologia de Deligne**,  $H^p(M, \mathcal{D}^q)$ , é a cohomologia do complexo total (hipercohomologia) desse complexo duplo. Ou seja,

$$\underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{U}^{[0]}) \xrightarrow{D} \underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{U}^{[1]}) \oplus \Omega^1(\mathcal{U}^{[0]}) \xrightarrow{D} \underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{U}^{[2]}) \oplus \Omega^2(\mathcal{U}^{[1]}) \oplus \Omega^3(\mathcal{U}^{[0]}) \xrightarrow{D} \dots$$

onde  $D$  é definido por

$$\begin{aligned} D(g) &= (\partial(g), d \log g) = (\partial(g), g^{-1} dg) \\ D(g, \omega^1) &= (\partial(g), \partial(\omega^1) - g^{-1} dg, d\omega^1) \\ D(g, \omega^1, \omega^2) &= (\partial(g), \partial(\omega^1) + g^{-1} dg, \partial(\omega^2) - d\omega^1, d\omega^2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Estaremos interessados no caso  $p = q$ , ou seja nos grupos  $H^p(M, \mathcal{D}^p)$ . Então, uma **classe de Deligne** é determinada por uma coleção

$$(g, \omega^1, \dots, \omega^q) \in \underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{W}^{[q]}) \oplus \Omega^1(\mathcal{W}^{[q-1]}) + \oplus \dots \Omega^q(\mathcal{W}^{[0]})$$

satisfazendo  $D(g, \omega^1, \dots, \omega^q) = 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \partial(g) &= 1 \\ \partial(\omega^1) &= (-1)^{q-1} g^{-1} dg \\ \partial(\omega^2) &= (-1)^{q-2} d\omega^1 \\ &\vdots \\ \partial(\omega^q) &= d\omega^{q-1}. \end{aligned}$$

Note que como  $(g, \omega^1, \dots, \omega^q)$  define uma classe de cohomologia de Deligne, temos que

$$\begin{aligned} (g, \omega^1, \dots, \omega^q) + D(h, \mu^1, \dots, \mu^{q-1}) = \\ (g\delta(h), \omega^1 + (-1)^q h^{-1} dh + \delta(\mu^1), \omega^2 + (-1)^{q-1} d\mu^1 + \delta(\mu^2), \dots, \omega^q + d\mu^{q-1}) \end{aligned}$$

pertence a mesma classe  $[g, \omega^1, \dots, \omega^q]$ . Onde

$$(h, \mu^1, \dots, \mu^{q-1}) \in \underline{\mathbb{S}}^1(\mathcal{W}^{[q-1]}) \oplus \Omega^1(\mathcal{W}^{[q-2]}) \oplus \dots \oplus \Omega^{q-1}(\mathcal{W}^{[0]}).$$

Note que, dado uma classe de Deligne  $[g, \omega^1, \dots, \omega^q]$  temos uma  $p + 1$ -forma  $d\omega^q$  onde  $\partial(d\omega^q) = d\partial\omega^q = dd\omega^{q-1} = 0$ . Logo, temos uma  $p + 1$ -forma  $F$  em  $M$  tal que  $\pi^*F = d\omega^q$  (aqui estamos usando a submersão  $\pi : \coprod_i U_i \rightarrow M$  no qual o grupoide de Čech é um grupoide de submersão). Chamamos a  $p + 1$ -forma de  $p + 1$ -**curvatura** da classe de Deligne.

# Referências

- BAEZ, J. C.; CRANS, A. S. Higher-dimensional algebra vi: Lie 2-algebras. *arXiv preprint math/0307263*, 2003.
- BAEZ, J. C.; HOFFNUNG, A. E.; ROGERS, C. L. Categorified symplectic geometry and the classical string. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 293, p. 701–725, 2010.
- BAEZ, J. C.; SCHREIBER, U. Higher gauge theory. *arXiv preprint math/0511710*, 2005.
- BARTELS, T. K. *Higher gauge theory: 2-bundles*. [S.l.]: University of California, Riverside, 2006.
- BÉNABOU, J. et al. Introduction to bicategories. In: SPRINGER. *Reports of the midwest category seminar*. [S.l.], 1967. p. 1–77.
- BERWICK-EVANS, D.; LERMAN, E. Lie 2-algebras of vector fields. *Pacific Journal of Mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 309, n. 1, p. 1–34, 2020.
- BOUWKNEGT, P. et al. Twisted k-theory and k-theory of bundle gerbes. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 228, p. 17–49, 2002.
- BOUWKNEGT, P.; EVSLIN, J.; MATHAI, V. T-duality: topology change from h-flux. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 249, p. 383–415, 2004.
- BRESSLER, P.; CHERVOV, A. Courant algebroids. *arXiv preprint hep-th/0212195*, 2002.
- BRYLINSKI, J.-L. *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- BUNK, S. Gerbes in geometry, field theory, and quantisation. *Complex Manifolds*, De Gruyter, v. 8, n. 1, p. 150–182, 2021.
- BUNK, S.; MÜLLER, L.; SZABO, R. J. Smooth 2-group extensions and symmetries of bundle gerbes. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 384, n. 3, p. 1829–1911, 2021.
- BUNK, S.; WALDORF, K. Smooth functorial field theories from b-fields and d-branes. *Journal of Homotopy and Related Structures*, Springer, v. 16, p. 75–153, 2021.
- BUNKE, U.; NIKOLAUS, T. T-duality via gerby geometry and reductions. *Reviews in Mathematical Physics*, World Scientific, v. 27, n. 05, p. 1550013, 2015.
- CAREY, A. L.; MICKELSSON, J.; MURRAY, M. K. Bundle gerbes applied to quantum field theory. *Reviews in Mathematical Physics*, World Scientific, v. 12, n. 01, p. 65–90, 2000.

CAREY, A. L.; WANG, B.-L. Thom isomorphism and push-forward map in twisted k-theory. *Journal of K-theory*, Cambridge University Press, v. 1, n. 2, p. 357–393, 2008.

COLLIER, B. L. *Infinitesimal symmetries of Dixmier-Douady gerbes*. Tese (Doutorado), 2012.

COURANT, T. J. Dirac manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 319, n. 2, p. 631–661, 1990.

CRAINIC, M. Differentiable and algebroid cohomology, van Est isomorphisms, and characteristic classes. *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 78, n. 4, p. 681–721, 2003.

DUDLEY, R. et al. *Quantization and unitary representations*. [S.l.]: Springer, 1970.

FRÉGIER, Y.; WAGEMANN, F. On hopf 2-algebras. *International Mathematics Research Notices*, OUP, v. 2011, n. 15, p. 3471–3501, 2011.

GAWEDZKI, K. Abelian and non-abelian branes in wzw models and gerbes. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 258, p. 23–73, 2005.

GIRAUD, J. *Cohomologie non abélienne*. [S.l.]: Columbia University, Department of Mathematics, 1966. v. 266.

GUALTIERI, M. Generalized complex geometry. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 75–123, 2011.

HITCHIN, N. Lectures on special lagrangian submanifolds. *arXiv preprint math/9907034*, 1999.

JOHNSON, N.; YAU, D. *2-dimensional categories*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2021.

KAPUSTIN, A. D-branes in a topologically nontrivial b-field. *arXiv preprint hep-th/9909089*, 1999.

KREPSKI, D.; VAUGHAN, J. Multiplicative vector fields on bundle gerbes. *Differential Geometry and its Applications*, Elsevier, v. 84, p. 101931, 2022.

LANE, S. M. *Categories for the working mathematician*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 5.

LEINSTER, T. Basic bicategories. *arXiv preprint math/9810017*, 1998.

MACKENZIE, K.; XU, P. Classical lifting processes and multiplicative vector fields. *arXiv preprint dg-ga/9710030*, 1997.

MACKENZIE, K. C. Double lie algebroids and second-order geometry, ii. *Advances in Mathematics*, Elsevier, v. 154, n. 1, p. 46–75, 2000.

MCCLURE, J. E. On semisimplicial sets satisfying the kan condition. 2013.

- MOERDIJK, I.; MRCUN, J. *Introduction to foliations and Lie groupoids*. [S.l.]: Cambridge university press, 2003. v. 91.
- MURRAY, M. Line bundles. honours 1996. 2002.
- MURRAY, M. K. Bundle gerbes. *Journal of the London Mathematical Society*, Wiley Online Library, v. 54, n. 2, p. 403–416, 1996.
- MURRAY, M. K. An introduction to bundle gerbes. *arXiv preprint arXiv:0712.1651*, 2007.
- MURRAY, M. K.; STEVENSON, D. Bundle gerbes: stable isomorphism and local theory. *Journal of the London Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 62, n. 3, p. 925–937, 2000.
- NOOHI, B. Integrating morphisms of lie 2-algebras. *Compositio Mathematica*, London Mathematical Society, v. 149, n. 2, p. 264–294, 2013.
- ORTIZ, C.; WALDRON, J. On the lie 2-algebra of sections of an la-groupoid. *Journal of Geometry and Physics*, Elsevier, v. 145, p. 103474, 2019.
- ROGERS, C. L. *Higher symplectic geometry*. [S.l.]: University of California, Riverside, 2011.
- ROGERS, C. L. 2-plectic geometry, courant algebroids, and categorified prequantization. *Journal of Symplectic Geometry*, International Press of Boston, v. 11, n. 1, p. 53–91, 2013.
- ROYTENBERG, D. *Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds*. [S.l.]: University of California, Berkeley, 1999.
- ROYTENBERG, D. On the structure of graded symplectic supermanifolds and courant algebroids. *Contemporary Mathematics*, Providence, RI: American Mathematical Society, v. 315, p. 169–186, 2002.
- ROYTENBERG, D. On weak lie 2-algebras. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2007. v. 956, n. 1, p. 180–198.
- ROYTENBERG, D.; WEINSTEIN, A. Courant algebroids and strongly and strongly homotopy lie algebras. *Letters in Mathematical Physics*, Springer, v. 46, p. 81–93, 1998.
- SCHREIBER, U. From loop space mechanics to nonabelian strings. *arXiv preprint hep-th/0509163*, 2005.
- ŠEVERA, P. Letters to alan weinstein about courant algebroids. *arXiv preprint arXiv:1707.00265*, 2017.
- ŠEVERA, P.; WEINSTEIN, A. Poisson geometry with a 3-form background. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Oxford University Press, v. 144, p. 145–154, 2001.

- SIMMS, D.; WOODHOUSE, N. Hermitian line bundles. *Lectures on Geometric Quantization*, Springer, p. 23–37, 1976.
- STEVENSON, D. The geometry of bundle gerbes. *arXiv preprint math/0004117*, 2000.
- STREET, R. Categorical structures. *Handbook of algebra*, Elsevier, v. 1, p. 529–577, 1996.
- WALDORF, K. *Algebraic structures for bundle gerbes and the Wess-Zumino term in conformal field theory*. Tese (Doutorado) — Staats-und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, 2007.
- WALDORF, K. More morphisms between bundle gerbes. *arXiv preprint math/0702652*, 2007.
- WALDORF, K. Transgression to loop spaces and its inverse, ii: Gerbes and fusion bundles with connection. *Asian Journal of Mathematics*, International Press of Boston, v. 20, n. 1, p. 59–116, 2016.